THE MATHEMATICAL THEORY OF RELATIVITY

BY

A. S. EDDINGTON, M. A., M. Sc., F. R. S.

PLUMIAN PROFESSOR OF ASTRONOMY
AND EXPERIMENTAL PHILOSOPHY IN
THE UNIVERSITY OF CAMBRIDGE

SECOND EDITION

CAMBRIDGE
AT THE UNIVERSITY PRESS
1924

А. С. ЭДДИНГТОН

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Перевод Л. Э. Гуревича, И. Ю. Нелидова
и В. В. Солодовникова
с английского издания, дополненного автором.
Редакция Д. Д. Иваненко

ОНТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД 1934 МОСКВА

Ответств. ред. *Д. Д. Иваненко.* Техинч. ред. *В. Д. Финити.*

Ленгорлит № 30114. Тираж 4000 экз. Заказ № 2073.

Печать с матриц. Колич. печ. листов $31\frac{3}{4}$.

ГТТИ — 251. Т — 41 — 5 — 4

Статформ. бумаги 62 × 94. Колич. бум. листов $15\frac{7}{8}$.

2-я типография Издательства Леноблисполкома и Ленсовета

Ленинград, Улица 3-го Июля, 55.

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА.

Предлагаемая русскому читателю работа Эддингтона до настоящего времени осталась одним из лучших и серьезных изложений теории относительности. Написанная глубоким знатоком дела, имеющим ряд самостоятельных исследований по различным специальным вопросам релятивистской механики и обладающим к тому же большим литературным талантом, книга Эддингтона в чрезвычайно компактной и изящной форме дает весь необходимый материал для основательного овладения теорией относительности. В этом смысле она является ценнейшим пособием.

Однако, несмотря на все свои достоинства, а, может быть, именно благодаря им, книга эта требует к себе особенно вдумчивого и критического отношения. Философские воззрения ее автора, представляющие собою сочетание элементов, близких спенсерианскому агностицизму, с некоторыми мотивами прагматизма, довольно сильно отразились на трактовке некоторых вопросов, примыкающих к физическому зданию теории относительности.

В отличие от теоретиков так называемой копенгагенской школы (Бор, Гейзенберг, Йордан и др.), стоящих в общем на позициях, близких к теории «чистого описания», предложенной в свое время Махом (см. напр. В. Гейзенберг, «Физические основы квантовой теории». ГТТИ, 1932), Эддингтон, вместе с родственными ему по убеждениям Дираком (см. Дирак, «Основы квантовой механики», гл. I, ГТТИ, 1932 г.) и некоторыми американскими учеными, защищает точку зрения «сфабрикованности» человеческим сознанием основных научных понятий, имеющих целью символически выразить ритм существования какой-то неведомой человеку реальности. Наиболее развернутое изложение главнейших моментов это философское credo нашло себе в «оперативной точке зрения», выдвинутой в книге американского физика Бриджмэна, «The logic of modern physics» *).

Стоя на подобных философских позициях, Эддингтон во многих пунктах своего изложения становится на идеалистическую платформу. Однако вдумчивый читатель сумеет критически разобраться в этих идеалистических спекуляциях английского автора и, отделив их от действительно ценного физического материала, имеющегося в книге, дать им надлежащую оценку. Это сделать будет тем более легко, что основная проблематика книги заключается отнюдь не в этих спекуляциях, а в разборе чисто положительного физического содержания теории относительности. Философские экскурсы английского автора играют роль скорее досадного привеска, своеобразного «принудительного ассортимента», являющегося выражением того методологического кризиса, который переживает сейчас западно-европейская наука.

*) Подробнее этот вопрос будет освещен в специальном сборнике по вопросам методологии современной физики.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА.

Трудно указать человека, который по прочтении отказался бы признать книгу Эддингтона по «Теории относительности в математическом изложении» лучшей в этой области. Действительно, из больших серьезных трудов по общей теории относительности, например, статья Паули в «Математической Энциклопедии» слишком сжата и конспективна, книга же Вейля крайне сложна и формальна и, конечно, совершенно лишена увлекательности глубоко физических страниц Эддингтона. Даже в самых смелых построениях, стоящих на грани фантазии, невозможно устоять перед подкупающим остроумием автора.

Русский перевод сделан со второго английского издания, причем были учтены все отдельные изменения, внесенные в немецкое издание и приготовленные частью для третьего английского (которое по выходе было отмечено как «перепечатка» второго издания). Переведены также все примечания переводчиков немецкого издания: Александра Островского и Гарри Шмидта, просмотренные и одобренные Эддингтоном, равно как и статья Эйнштейна, написанная для немецкого издания. Эти примечания отмечены буквой (*Н.*)

За время, истекшее с 1925 г.—момента выхода немецкого издания, — теория относительности была чрезвычайно успешно применена к исследованию двух областей, вопрос о которых восемь лет назад едва только намечался. Во-первых, в работах ленинградского математика А. А. Фридмана, бельгийского физика Лемэтра и др. была дана теория нестационарного, в частности расширяющегося мира. После опубликования в 1929 г. замечательных наблюдений Хэббля, проделанных на Маунт Вильсоне, вопрос о расширяющейся вселенной перешел в стадию опытной проверки. Во-вторых, в квантовой теории от случайного использования принципа относительности (формула тонкой структуры Зоммерфельда) физики перешли к общей релятивистской формулировке — уравнение Дирака 1928 г., — хотя повидимому знаменитое уравнение Дирака и не является окончательным синтезом квантовых и релятивистских законов.

Проф. Эддингтон весьма любезно компенсировал отсутствие изложения двух этих вопросов в старых изданиях книги, предложив, прежде всего, присоединить к русскому изданию его статью о нестационарном мире, опубликованную в 1930 г. в «Monthly Notices». Кроме того, проф. Эддингтон согласился написать специально для нашего издания изложение его взглядов на современное состояние теории. Таким образом, данная книга представляет интерес и для читателей, знакомых уже с прежними иностранными изданиями.

Русский перевод выполнен сотрудниками Ленинградского Физико-Технического института И. Ю. Нелидовым (главы I, V, VI), В. В. Солодовниковым (главы II, III и статья Эддингтона о мире Эйнштейна) и Л. Э. Гуревичем (главы IV, VII, статья Эйнштейна и большинство примечаний к немецкому изданию).

По нашей просьбе О. К. Житомирский любезно написал два примечания, разъясняющие математические выводы автора (стр. 126 и 294). При дружеском участии В. А. Амбарцумиана нами составлены затем примечания, содержащие новейшие сведения об экспериментальных астрономических подтверждениях теории относительности, а также новая таблица скоростей туманностей. Новые примечания к русскому изданию отмечены буквой (*Р*.) Кроме того, в конце книги нами добавлен ряд ориентирующих библиографических указаний.

Мы позволим себе в заключение принести глубокую благодарность проф. Эддингтону за столь исключительное внимание к русскому изданию его книги.

Ленинград, декабрь 1933 г.

Проф. *Д. Иваненко.*

АРТУР СТЭНЛИ ЭДДИНГТОН

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА.

Первый набросок этой книги появился в 1921 г. как математическое приложение к французскому изданию моей книги «Пространство, время и тяготение» *). В течение последующих полутора лет я занимался развитием его в более систематическое и полное математическое изложение теории относительности.

Весь текст был написан вновь, последовательность рассуждений изменена во многих местах, и везде были сделаны многочисленные добавления; таким образом нынешний объем книги превосходит первоначальный более чем в три раза. Я надеюсь, что в таком расширенном виде книга будет полезна для лиц, которые хотят основательно познакомиться с данным кругом проблем, ведущих к полной перестройке теоретической физики.

Предполагается, что читатель в общих чертах знаком с менее специальным изложением теории, данным например в книге «Время, пространство и тяготение»*, хотя непосредственных ссылок на эту книгу будет не слишком много. Зато весьма желательно иметь общее представление о той революции в мышлении, которая связана с теорией относительности, прежде чем начать двигаться по пути строгих математических выводов.

В нашей первой книге мы показали, почему старые концепции в физике оказались непригодными, и наметили общие пути, по которым развивались новые идеи. Здесь же нашей задачей является математическая формулировка этого нового понимания мира и возможно более полное развитие всех его следствий.

Широкий интерес к теории относительности, существующий в настоящее время, возник после экспериментального подтверждения некоторых незначительных отклонений от законов Ньютона. Для тех, кто все еще колеблется и не решается отказаться от старой веры, эти отклонения представляют главнейший интерес;

*) Русский перевод издан в Одессе в 1923 г.

(Р.)

к совершенно иному определению расстояния между двумя точками.

Для того чтобы установить свойства некоторой физической величины, мы совершаем определенные практические операции и производим затем вычисления. Эти операции называются экспериментами, или наблюдениями, в зависимости от того, насколько сильно их условия зависят от нашего контроля. Определенная таким образом физическая величина есть прежде всего результат измерений и вычислений, — она будет, так сказать, *сфабрикованной* вещью, *созданной* нашими операциями. Но физик, вообще говоря не будет доволен при мысли, что полученная им величина не отделима от характера операций, которые к ней привели. Физик считает, что если бы он смог стать богом, созерцающим внешний мир, он заметил бы, что изготовленная им величина является определенной частью мировой картины. Обнаружив, что можно уложить x единичных масштабов длины вдоль линии между двумя точками, физик создает величину x и называет ее расстоянием между двумя точками, но он верит, что это расстояние x есть нечто уже существующее в общей картине мира, — нечто, что было бы воспринято высшим разумом как существующее само по себе без всякой связи с операциями над измерительными масштабами. Все же физик проводит странные и, казалось бы, нелогичные различия. Параллакс звезды находится путем хорошо известного ряда наблюдений и вычислений; длина комнаты находится при помощи операций с рулеткой. И параллакс и эта длина являются величинами, изготовленными нашими операциями, но на каком-то основании мы не предполагаем, что параллакс появится в виде отдельного элемента в истинной картине мира, как это будет в случае длины. Или еще пример. Вместо того чтобы остановить наши астрономические вычисления, когда мы получили желаемый параллакс, мы могли бы продолжать их и вычислить куб этой величины, т. е. получили бы еще одну сфабрикованную величину, «кубический параллакс». Из каких-то туманных соображений мы ожидаем, что расстояние будет явно фигурировать в истинной картине мира, параллакс же явно не появится, хотя он может быть сравнительно простым построением сведен к некоторому углу; «кубическому параллаксу» в этой картине вообще нет места. Физик объясняет это тем, что длину он *находит*, кубический же параллакс *конструирует*. Но он делает это различие только потому, что им унаследована предвзятая теория мира. Мы осмелимся оспаривать такое разграничение.

Расстояние, параллакс и кубический параллакс имеют одинаковое потенциальное существование даже тогда, когда на самом деле мы не производили операции измерения — *если* мы сдвинемся в сторону, мы сможем измерить угловое отклонение; *если* мы отложим в ряд наши измерительные масштабы, мы сможем сосчитать их число. Любая из трех перечисленных величин указывает нам на некоторую связь или соотношение, существующее во внешнем мире, — соотношение, не созданное нашими операциями. Но, повидимому, нет оснований заключить, что это мировое соотношение больше *походит* на расстояние, чем на параллакс или на кубический параллакс. В самом деле, всякое понятие «сходства» между физическими величинами и соотношениями во внешнем мире, лежащими в их основе, представляется непригодным. Если длина AB равна удвоенной длине CD, то параллакс B, наблюдаемый из A, равен половине параллакса D из C. Без сомнения, существует некоторое соотношение в мире, которое будет различным для AB и для CD, но у нас нет никаких оснований считать, что это мировое соотношение для AB будет представлено лучше удвоенным соотношением для CD, чем его половиной.

Связь изготовленных нами искусственно физических величин с соотношениями, существующими в мире, может быть выражена так: физические величины являются *числовыми мерами* этих мировых соотношений. Числовые меры могут быть приписаны по произвольному принципу, как условный шифр, при одном единственном условии, чтобы всегда одна и та же числовая мера соответствовала одному и тому же мировому соотношению и обратно, чтобы различные соотношения выражались различными мерами. Таким образом, две или больше физические величины могут служить мерами одного и того же соотношения, *но в разных системах наших шифров*; например: длина и параллакс, масса и энергия, звездная величина и яркость и т. д. Постоянные формулы, связывающие эти пары физических величин, дают связь между соответствующими шифрами. Но, допуская, что физические величины могут служить числовой мерой *мировых соотношений*, существующих независимо от наших измерений, мы не изменяем их *характера* как *искусственно* изготовленных величин. Одни и те же измерения, конечно, дадут один и тот же результат, если мировые соотношения одинаковы, и разные результаты, если эти соотношения будут различны. (Различия в мировых соотношениях, не влияющие на результаты опытов и наблюдений, ipso facto (тем самым), исключаются из области физического знания). Объем выросшего кристалла может служить числовой мерой температуры маточного раствора; но тем не менее последняя является искусственной величиной, и мы не можем заключить, что истинная природа объема — калорическая.

Изучение физических величин, хотя они и представляют собой результаты наших собственных операций (действительно произведенных или только возможных), все же может нам дать некоторое знание мировых соотношений, так как одна и та же операция дает нам разные результаты для различных мировых соотношений. Это косвенное знание как будто и является всем, чего мы когда-либо сможем достигнуть, и мы можем представить себе какое-либо «мировое соотношение» только благодаря его влиянию на наши операции. Всякая иная попытка описания мировых соотношений сводится или к математической символике, или к лишенной смысла болтовне. Для того чтобы охватить данное мировое соотношение настолько полно, насколько только возможно, мы должны обладать символом, который включал бы в себе влияние этого мирового соотношения на результаты всех возможных операций. Другими словами, мы должны рассматривать его числовые меры во всевозможных системах мер, «шифрах» — конечно, не смешивая последние друг с другом. Может показаться невозможным осуществить столь обширную программу, но мы увидим, что математический аппарат тензорного исчисления представляет мировые соотношения и оперирует с ними именно таким путем. Тензор выражает собой одновременно всю группу числовых мер, связанных с данными мировым соотношением, причем даются правила для отличия различных мер в отдельных шифрах. Поэтому не следует рассматривать несколько сложный тензорный анализ как печальную необходимость, которую следовало бы заменить, елико возможно, другим более простым аналитическим методом. То знание соотношений во внешнем мире, которое мы получаем посредством наблюдений и эксперимента, является как раз таким, что оно может быть выражено только тензором, а не иначе. Совершенно так же, как и в арифметике, мы можем иметь дело с миллиардом объектов, не стремясь представить наглядно все это подавляющее множество, так же и в тензорном анализе мы можем сразу рассматривать данное мировое соотношение со всех возможных точек зрения, не пытаясь нарисовать все это наглядно.

Принимая во внимание это различие понятий «мировое соотношение» и «физическая величина», мы не должны определять физическую величину так, как будто бы она была какой-то частью общей картины мира. *Физическая величина определяется тем рядом операций и вычислений, результатом которых она является.* Тенденция к такого рода определениям была уже распространена и в до-релятивистской физике. Сила сделалась «массой $\times$ ускорение», и перестала быть невидимым фактором в картине мира, по крайней мере, в части, касающейся ее определения. Масса определяется теперь экспериментами над инерциальными свойствами, а не как «количество вещества». Но для некоторых величин упорно продолжали пользоваться старыми определениями (или, скорее, отсутствием определений). Для последних теория относительности и должна была найти новые определения. В большинстве случаев это не представляло особых трудностей. Нам не нужно спрашивать физика, что он подразумевает под «длиной»; мы будем просто наблюдать за его измерениями длины и составим наше определение, исходя из тех операций, которые он совершает. Однако могут представиться еще случаи, когда теория, опережая эксперимент, потребует от нас выбора между двумя определениями, каждое из которых согласуется с имеющимся экспериментальным материалом; но обычно мы можем предсказать, которое из двух определений соответствует идеалу, поставленному перед собой экспериментатором. Например, до недавнего времени экспериментатору не приходилось встречаться с проблемами неэвклидова пространства, и можно было ожидать, что он чувствовал бы себя неуверенно, столкнувшись с задачей построения прямой линии в этом случае. На самом же деле экспериментатор не проявил никаких колебаний, и наблюдатели затмений совершенно однозначно измерили отклонения лучей света от «прямой линии». Подходящее практическое определение было столь очевидно, что не было никакой опасности, что два наблюдателя могут придать разные значения этому термину. Нашим руководящим правилом будет то, что физическую величину следует определять по тем операциям и вычислениям, которые приводят к однозначному результату, причем необходимое внимание должно быть уделено существующей экспериментальной практике. Последняя оговорка делается для того, чтобы всякий одним и тем же термином определял одну и ту же *величину*, несмотря на разногласия, могущие возникнуть относительно *понятия*, связанного с ней.

При подобных определениях не может возникнуть вопрос, дают ли нам эксперменты истинную физическую величину, или еще требуется какая-то теоретическая поправка, не указанная в определении. Физическая величина есть числовая мера мирового соотношения, выраженного на каком-то условном языке. Мы не можем утверждать, верен или неверен этот условный язык, или что числовая мера реальна или нет. Мы только требуем, чтобы этот условный язык был общепринятым и чтобы числовые значения были теми, которыми обычно все пользуются. Спросим, например, какова действительная разница во времени между двумя событиями в разных местах? Операция определения времени была поручена астрономам, которые (может быть, из неправильных предпосылок) разработали определенную *процедуру*. Если моменты времени двух событий будут найдены на основании этой процедуры, то разница во времени и будет действительной разницей. Другого смысла это выражение не имеет. Следует все же обратить внимание на известное обобщение. Перечисляя операции астрономов, служащие для определения времени, мы замечаем, что одно условие входит на практике, очевидно, по необходимости, а не по доброй воле — наблюдатель и его приборы находятся на земле и движутся вместе с нею. Это условие является настолько случайным и местным, что мы очень неохотно настаиваем на нем при нашем определении времени. Однако, движение прибора вносит существенное изменение в измерения, и без этой оговорки наши операции не приводят к каким-либо определенным результатам и не могут вообще что-либо определить. Мы примем решение, представляющееся наиболее разумным: мы допускаем, что время следует понимать лишь *относительно к наблюдателю,* т. е. мы принимаем, что наблюдатель, находящийся на другой звезде и производящий все наблюдения и вычисления, которые требуются нашей процедурой, также определяет время, но только не наше, а время относительно самого себя. Та же относительность присуща большинству элементарных физических величин *). Одного описания операций

---

*) Наиболее существенные исключения—количество (дискретных предметов), действие и энтропия.

недостаточно для того, чтобы получить однозначный ответ, если мы произвольно не зададим при этом определенного состояния движения наблюдателю и его приборам.

На этом примере мы видим типичную иллюстрацию «относительности» (релятивизма), признание которой дало такие глубокие результаты, революционизировавшие физические воззрения. Всякое измерение предполагает сравнение измеряемой величины и измерительного прибора. Оба партнера играют одинаковую роль в этом сравнении, и теоретически, а часто и практически, вполне можно заменить одну величину другой. Например, результат измерений на меридианном круге дает нам или прямое восхождение звезды*), или поправку часов. Как звезду, так и часы мы можем рассматривать или как объект измерения, или как измерительный прибор. Памятуя, что физические величины являются результатами такого рода сравнений, ясно, что их нельзя рассматривать как принадлежащие при сравнении лишь одному партнеру. Правда, мы стремимся стандартизировать измерительные приборы сколь это возможно (причем метод стандартизации объясняется или подразумевается в самом определении физической величины), так что, вообще говоря, изменения в измерении указывают только на изменения измеряемого объекта. Следовательно, в таком смысле практически не будет большого вреда, если мы допустим, что измерение характеризует исключительно второго партнера в соотношении. Несмотря на это, мы часто напрасно становимся в тупик от парадоксов, которые исчезают, если ясно отдать себе отчет, что физические величины не являются свойствами некоторых внешних объектов, но представляют собой соотношения между этими объектами и чем-то другим. Кроме того, мы уже видели, что стандартизация процесса измерения обычно бывала неполной, поскольку речь идет о состоянии движения, и мы скорее предпочитаем явно признать, что измеренные физические величины относятся не только к измеренным объектам, но зависят также от выбранного специального движения, чем устранить эту неполноту произвольным или сомнительным образом.

Принцип относительности идет еще дальше. Даже если бы мы могли полностью стандартизировать измерительные приборы, все

---

*) Астрономическая координата, соответствующая географической долготе. (*Н.*)

же физические величины включали бы неявно свойства этих постоянных стандартов. Мы уже видели, что мировое соотношение или изучаемые объекты могут быть охвачены нашим знанием только как полная сумма всех измерений, которые могут быть над ними проделаны. Какое-либо *внутреннее* свойство объекта должно представиться при этом как некоторое единообразие или закономерность в этих измерениях. Если один из сравниваемых между собой объектов твердо зафиксировать, а другой изменять в широких пределах, то все, что является общим для всех измерений, должно быть целиком приписано первому объекту и должно рассматриваться как его внутреннее свойство. Применим это к обратному сравнению, т. е. оставим измерительный прибор неизмененным или стандартизированным, и будем изменять, сколь возможно широко, измеряемые объекты, или, проще говоря, будем производить некоторое измерение во всевозможных частях данного поля. Внутренние свойства измерительного прибора должны тогда проявиться как единообразие или закономерность в этих измерениях. Нам известны многие подобные закономерности, но обычно мы не считаем их свойствами измерительного прибора, мы называем их *законами природы*!

Развитие физики идет вперед, и по мере того как теории внешнего мира выкристаллизовываются, мы часто стремимся элементарные физические величины, определенные операциями измерения, заменить теоретическими величинами, которые, как нам кажется, имеют более фундаментальное значение во внешнем мире. Так например, vis viva (живая сила) $^1/_2\, mv^2$, которую мы можем непосредственно определить на опыте, заменяется обобщенной энергией, неявно определяемой по свойству сохранения своей величины. Наша задача, таким образом, становится обратной. Мы должны теперь не открывать свойства величины, которую мы обнаружили в природе, но установить, как мы можем обнаружить величину, свойства которой мы заранее постулировали. Такое развитие науки представляется неизбежным, но оно имеет большие недостатки, в особенности в тех случаях, когда нам надо перестраивать теорию. Более полное изучение может показать нам, что в природе нет ничего такого, что в точности обладало бы заданными свойствами; или же может оказаться, что величина, обладающая данными свойствами, полностью потеряла свое значение в связи с новыми теоретическими воззрениями*). Когда мы решаемся отбросить устаревшую теорию и начинаем строить все заново, то лучше сразу же оставить и всю терминологию, связанную со специальными физическими гипотезами. Физические величины, определяемые измерительными процессами, независимы от какой-либо теории, и только они и образуют настоящий исходный пункт для всякого нового теоретического построения.

После того как мы объяснили способ определения физических величин, читатель вероятно удивится, что мы не приступаем теперь к определению основных физических величин. Но перечисление всех предосторожностей и оговорок даже при определении столь простой вещи, как длина, является задачей, перед которой мы отступаем. Мы могли бы спасти положение, заявив, что хотя это и очень кропотливая работа, но все же несомненно ведущая прямо к цели, и что физик-экспериментатор знает необходимую процедуру, независимо от нашего описания. Но здесь рекомендуется быть более осторожным. Я оказался бы в очень большом затруднении, если бы потребовалось экспромптом описать весь ряд операций и вычислений, связанных с измерением длины в 10^{-15} *см*, хотя мы и будем ссылаться, при необходимости, на такую длину, как на величину, определение которой очевидно. Мы не можем непрестанно заниматься исследованием наших основных положений; мы обращаем особенное внимание лишь на те пункты, где нам кажется, что они не прочны.

Я подвергаю себя опасности быть уличенным как раз в том, что я критикую в старой физике, т. е. в употреблении терминов не имеющих смысла, определяемого измерениями, и в смешивании с физическими величинами посторонних объектов, не являющихся результатами каких-либо мыслимых экспериментов. На это я отвечу следующее — если вы считаете, что такая критика может быть полем для плодотворных исследований, то развивайте ее всеми средствами. Я полагаю, что вы, вероятно, сможете оправдать мои 10^{-15} *см*, но, возможно также, и отыщете ряд непреодолимых трудностей в определении такой длины.

---

*) В п. 59 мы увидим, что как раз последнее произошло с энергией. Мертвая рука устарелой теории продолжает давить нас, так как в этом случае принятая обычно терминология все еще неявно связана с ней. Но, конечно, это является лишь мелким недостатком по сравнению со множеством преимуществ, получаемых от классического обобщения энергии, как определенной ступени к более полной теории.

В последнем случае вы можете напасть на след чего-то, что приведет к новой точке зрения на природу мира. Действительно, существует подозрение, что неясности, возникшие после открытия квантовых явлений, обязаны молчаливому допущению, что наши понятия длины и промежутка времени, первоначально полученные из экспериментов, подразумевающих средние эффекты большого числа квантов, могут быть применимы также и к изучению отдельных квантов. Конечно, понадобится приложить еще много труда, прежде чем обнаружится все ценное в этом критическом исследовании всего экспериментального материала. Теперь же я хочу познакомить вас со всеми сокровищами, которые уже были обнаружены в этой области.

Глава I.

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ.

1. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ СИСТЕМ ОТСЧЕТА.

Наблюдатели, движущиеся различным образом, вводят различные системы отсчета пространства и времени и ни одну из этих систем нельзя признать более основной, чем другие *). Нашей задачей сейчас является найти такой метод описания мира, при котором эта неопределенность системы отсчета пространства и времени была бы явно выражена в математическом аппарате теории.

До исследований Эйнштейна не возникало сомнения, что существует «истинное равномерно-текущее время», единственное и универсальное. Движущийся наблюдатель, принимающий отсчет времени, отличный от единственного истинного времени, был, следовательно, введен чем-то в заблуждение, приняв фиктивное время и соответственным образом измененные фиктивные отсчеты пространства. Компенсирующее действие электромагнитных сил и материи, однако, настолько полно, что современная наука еще не знает опыта, который позволял бы отличить истинное время от фиктивного. Но так как, согласно упомянутому взгляду, несмотря на множество различных фиктивных времен, существует одно истинное время, то тем самым подразумеваются все же какие-то определенные отличия, природа которых, впрочем, не уточняется.

Те, кто еще до сих пор настаивают на существовании единого «истинного времени», обычно ссылаются на то, что еще не все возможности эксперимента использованы и в один прекрасный

*) См. первые главы книги «Пространство, время и тяготение». Гиз. 1924.

день удастся найти критерий различия. Но возможность, предоставленная грядущим поколениям найти значение в наших утверждениях, все же не является извинением отсутствию в них смысла.

Таким образом в выражении *истинное время* слово «истинное» есть эпитет, смысл которого следует еще определить, это просто этикетка, на которой еще ничего не написано. Мы не знаем, что следует написать на этой этикетке и к какому из видимо не различимых отсчетов времени эту этикетку следует приклеить. В этом направлении нет возможностей для прогресса, поэтому мы предпочитаем возвратиться на более твердую почву и заметить, что во всей массе накопленного экспериментального материала слова *время* и *пространство* относятся к одному из «фиктивных» времен и пространств, и прежде всего к системе, связанной с наблюдателем, движущимся с землею или солнцем; наша теория будет иметь дело непосредственно с такими системами отсчета, которые согласно допущению фиктивны, или, как обычно говорят, — *относятся к наблюдателю, находящемуся в некотором определенном состоянии движения.*

Различные наблюдатели изучают одни и те же внешние события, не обращая внимания на различные пространственно-временные системы отсчета, которые они берут за основу. Таким образом, пространственно-временная система отсчета есть нечто, налагаемое наблюдателем на внешний мир; сетки, представляющие отсчеты времени и пространства, являются воображаемыми поверхностями, которые мы чертим в мире, аналогично тому как мы наносим линии широты и долготы на земле. Они не более соответствуют естественным линиям строения мира, чем широты и долготы линиям геологического строения земли. Такая сетка в высшей степени удобна при описании явлений, и мы будем ею пользоваться, но следует помнить, что по существу она произвольна и фиктивна.

Из опыта ясно, что нам следует пользоваться четырехмерной сеткой, и, следовательно, всякое событие будет описываться четырьмя координатами, за которые обычно принимают x, y, z и t. Чтобы лучше понять такое описание, рассмотрим сперва случай двух измерений. Если мы будем описывать точки плоской фигуры их прямоугольными координатами x, y, то такое описание будет полным, и мы сможем построить эту фигуру; оно даже более чем полно, так как определяет произвольный элемент, именно —

ориентацию фигуры, которая не зависит от внутренних свойств и которую следует отбросить при описании этих свойств.

Мы можем описать фигуру иначе, задавая расстояния между различными парами ее точек; такое описание имеет то преимущество, что он, будучи столь же полным, как и первое, не содержит уже ничего, не относящегося ко внутренним свойствам фигуры, например, к ее ориентации. Недостатком последнего метода является то, что обычно на практике он слишком громоздок, исключая случаи простейших фигур.

Точно так же можно ожидать, что наши четыре координаты x, y, z, t будут содержать некоторый произвольный элемент, аналогичный ориентации, не относящийся к свойствам самой конфигурации событий. Взяв другой ряд значений для x, y, z, t мы изменим этот произвольный элемент, конфигурация же событий останется неизменной. Именно эта произвольность в определении координат и проявляется в неопределенности пространственно-временной системы отсчета. Второй метод описания, т. е. задание расстояний между каждой парой событий (или, скорее, некоторых соотношений между парами событий, аналогичных расстоянию) содержит все, относящееся к конфигурации событий, и не содержит ничего, не относящегося к ней. Пользуясь этим последним методом, мы отбрасываем произвольную часть описания, оставляя лишь все, точно соответствующее конфигурации внешнего мира.

Другими словами разница может быть выражена так: в обычном понимании понятие «положения», или *локализации*, представляется основным. Отсюда мы получаем расстояние, или *протяженность*, уже как производное понятие, включающее в себе частично (но не полностью) все представления, связанные с локализацией. Положение рассматривается как физический факт — под ним подразумевается совпадение с чем-то, что довольно туманно представляется какой-то индивидуализируемой точкой пространства. Расстояние же рассматривается как абстракция, или результат вычисления, который можно получить, если известны положения. Мы хотим стать на обратную точку зрения. Протяженность (расстояние, интервал) будет теперь основной. Локализация же предмета будет уже результатом вычисления, подтверждая тот факт, что данный предмет находится на определенных расстояниях от других предметов. Всякая мысль, содержащая понятие «положение», не выраженная в терминах расстояний от других предметов, должна быть исключена из нашего обихода. Окончательный результат нашего анализа пространства ведет нас не к понятиям «здесь» и «там», но к понятию протяженности как чего-то, что связывает «здесь» и «там».

Более резко это же заключение можно выразить словами: «Пространство не есть совокупность точек, но совокупность расстояний между отдельными точками».

Следовательно, нашей основной гипотезой будет следующая: «*В системе опытного знания все связанное с локализацией, т. е. все, что мы можем знать о конфигурации событий, выражается в соотношении протяженности между парами событий*».

Такое соотношение называется *интервалом*, и его мера обозначается через ds. Если мы имеем некоторую систему S, образованную событиями A, B, C, D, ... , и систему S', составленную из событий A', B', C', D', ..., то наша основная гипотеза требует, чтобы системы были точно одинаковы при наблюдениях тогда и только тогда, когда все пары соответственных интервалов в двух системах равны, т. е. когда $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и т. д. В таком случае, если S и S' являются материальными системами, мы их будем воспринимать как совершенно одинаковые тела или механизмы. Если же S и S' относятся к одному и тому же телу, но в разные моменты времени, то это значит, что тело не подверглось никакому заметному для наблюдений изменению. Положение же, движение или ориентация тела могут, вообще говоря, быть и другими. Чтобы заметить эти последние изменения, придется наблюдать не систему S, но более широкую систему, содержащую, кроме S, и окружающие тела.

Пусть опять системы S и S' будут абстрактными координатными системами отсчета, события же представляются точками в углах координатных клеток; если теперь все соответствующие интервалы в обеих системах равны, мы должны признать, что координатные системы будут в точности одинакового типа — прямоугольные, полярные, неускоренные, вращающиеся и т. д.

2. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА.

Мы должны иметь в виду одновременно оба способа описания конфигурации событий: при помощи координат и при помощи взаимных интервалов. Первый способ имеет преимуществом краткость, второй же способ описания важен своим непосредственным абсолютным значением. Необходимо, следовательно, связать эти оба способа описаний формулой, которая давала бы нам возможность легко переходить от одного к другому. Частный вид формулы будет зависеть как от выбора координат, так и от абсолютных свойств рассматриваемой области мира, но, оказывается, что во всех случаях формула будет даваться следующим общим выражением:

Интервал ds *между двумя соседними событиями с координатами* (x_1, x_2, x_3, x_4) и $(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3, x_4+dx_4)$ *в любой системе координат определяется соотношением*

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{11}dx_1{}^2 + g_{22}dx_2{}^2 + g_{33}dx_3{}^2 + g_{44}dx_4{}^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + \\ + 2g_{13}dx_1dx_3 + 2g_{14}dx_1dx_4 + 2g_{23}dx_2dx_3 + 2g_{24}dx_2dx_4 + \\ + 2g_{34}dx_3dx_4, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где коэфициенты g_{11} *и т. д. являются функциями* x_1, x_2, x_3, x_4. Таким образом, ds^2 есть некоторая квадратичная функция координат. Это, конечно, не будет самым общим из возможных случаев; например, мы могли бы иметь мир, в котором интервал был бы общей функцией четвертого порядка от всех dx. Но, как мы увидим далее, эксперимент определенно указывает, что именно *квадратичная* форма (2.1) применима к реальному миру.

Кроме того, в конце книги (п. 97), при рассмотрении общей теории структуры мировых соотношений, мы найдем точное обоснование того, почему квадратичная форма разностей координат должна иметь такое важное значение. В то время как форма правой стороны уравнения (2.1) такова, как этого и требует наблюдение, то обстоятельство, что слева стоит член ds^2, а не какая-либо другая функция от ds, представляется просто условностью. Величина ds есть мера интервала. Необходимо тщательно рассмотреть, каким образом нужно сопоставлять числовые меры различным интервалам, встречающимся в природе. Мы видели в последнем параграфе, что равенство интервалов может быть установлено опытным путем, но пока что мы узнали только, что интервалы могут быть или равны или не равны, рассмотрение же их разностей нами еще не уточнено. Точно так же, как сила ветра может быть измерена скоростью, или давлением, или числом шкалы Бофора, соотношение протяженности между двумя событиями может быть выражено численно многими различными способами. Для того чтобы сохранить согласие с формулой (2.1), нужно принять некоторую специальную систему численных мер; смысл и преимущества именно этого «шифра» будут объяснены в следующем параграфе.

Геометрия, в основе которой лежит общая формула (2.1), была исследована Риманном и обыкновенно называется римановой геометрией. Она включает эвклидову геометрию как частный случай.

3. ИЗМЕРЕНИЕ ИНТЕРВАЛОВ.

Рассмотрим операцию измерения равенства расстояний *) AB и CD. Возьмем некоторую конфигурацию событий $LMNOP$..., именно измерительную шкалу, и наложим ее на AB; пусть при этом мы отметим, что A и B совпадают с двумя определенными событиями P, Q (деления шкалы) данной конфигурации. Пусть мы находим затем, что ту же конфигурацию **) можно видоизменить так, что C и D будут совпадать, соответственно, с P и Q. Мы применяем далее всевозможные контрольные испытания к измерительной шкале, чтобы узнать, не «изменилась» ли она между двумя измерениями, и мы удовлетворимся только тогда, когда не сможем обнаружить никакой разницы, доступной наблюдению В соответствии с нашей основной аксиомой отсутствие какой-либо доступной наблюдению разницы между двумя конфигурациями (т. е. между структурой измерительной шкалы в ее двух положениях) означает, что интервалы не изменились; в частности, не изменился интервал между P и Q. Отсюда следует, что интервал от A до B равен интервалу от C до D. Мы полагаем, что эксперимент доказывает равенство расстояний, но по существу он является проверкой равенства интервалов.

В этом эксперименте время не участвует явно, и мы заключаем, что в пространстве, рассматриваемом отдельно от времени, проверка равенства расстояний совпадает с проверкой равенства

*) Читатель должен обратить внимание на то, что термин «расстояние» имеет здесь специально пространственный смысл, тогда как «интервал» следует понимать в пространственно-временном смысле. (*Н.*)

**) Необходимо отметить логически важное обстоятельство, что измерительная шкала в двух ее положениях [неизбежно в разные моменты времени] представляет ту же самую *конфигурацию* событий, но не те же события.

интервалов, т. е. имеется одно-однозначное соответствие между расстояниями и интервалами. Мы можем, таким образом, принять для интервалов ту же самую числовую меру, какой мы всегда пользуемся для расстояний, осуществляя таким образом намеченный план приписывания интервалам числовых мер. Отсюда следует, что при явном отсутствии времени интервал сводится к расстоянию. Как раз по этой причине для согласования с наблюдением нам нужна квадратичная форма (2.1), так как хорошо известно, что в трех измерениях квадрат расстояния между двумя соседними точками выражается квадратичной функцией их бесконечно малых разностей координат — результат, зависящий, в конце концов, от экспериментального закона, выраженного Эвклидом в положении 47 книги I *).

Когда же время включено явно, то для измерения интервалов пользуются уже другими средствами. Если мы имеем механизм, совершающий циклические движения, то его циклы будут измерять равные интервалы при условии, что этот механизм, законы его поведения и все окружающие события, которые могут иметь к нему отношение, остаются точно подобными. Под фразой «точно подобные» подразумевается, что не может быть обнаружено никакой наблюдаемой разницы в механизме или его поведении, а это, как мы видели, требует равенства всех соответствующих интервалов. В частности, интервал между событиями, отмечающими начало и конец цикла, остается неизменным. Таким образом, часы прежде всего измеряют равные интервалы, и только при более ограниченных условиях они измеряют также координату времени t.

Вообще, любое повторение какой-либо операции при одинаковых условиях, но для различных моментов времени, положения, ориентации и скорости (всё это сопутствующие обстоятельства, которые имеют относительное, а не абсолютное значение **), может служить для испытания равенства интервалов.

Повседневный опыт указывает нам, что интервалы, которые могут быть измерены часами, не могут быть измерены при помощи масштаба и обратно. Мы имеем, таким образом, две разно-

---

*) Т. е. в теореме Пифагора. (*Н.*)

**) Они выражают отношения к событиям, не участвующим в опыте, например, к солнцу и звездам.

видиости интервалов, что видно уже из формулы (2.1), так как ds^2 может быть положительным или отрицательным, и мера интервала будет выражена, соответственно, действительным или мнимым числом. Короткий термин «мнимый интервал» не должен нас вводить в заблуждение: в соответствующем соотношении в мире нет никакой мнимости, это значит только то, что в нашей произвольной системе мер числовым значением интервала является мнимое число. Мы могли бы принять другой условный шифр. Например, если бы мы взяли e^{ds^2}, т. е. антилогарифм ds^2, за меру интервала, то пространственные интервалы приняли бы в этом случае численные значения от 1 до бесконечности, а временны́е интервалы — от нуля до 1. Когда мы встречаем $\sqrt{-1}$ в наших исследованиях, то мы должны помнить, что этот множитель был введен нашим выбором системы мер, и не следует думать, что его появление указывает на какое-то мистическое соотношение во внешнем мире.

4. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ И ВРЕМЯ.

Предположим, что мы имеем небольшую область мира, внутри которой величины g_{ik} могут быть рассматриваемы как постоянные *). В этом случае правая сторона уравнения (2.1) может быть разложена на сумму четырех квадратов, при введении, если необходимо, мнимых коэффициентов. Таким образом, положив:

$$y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$$
$$y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4$$

и т. д., так что

$$dy_1 = a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3 + a_4dx_4$$

и т. д., мы можем выбрать постоянные a_1, b_1, ... так, что (2.1) сделается равным

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 + dy_4^2. \tag{4.1}$$

---

*) В п. 36 будет показано, что всегда возможно произвести такое преобразование координат, при котором первые производные от величин g_{ik} исчезают в некоторой избранной точке. Мы будем предполагать, что такое предварительное преобразование уже сделано, для того чтобы постоянство величин g_{ik} могло считаться законным приближением для возможно большей области вокруг избранной точки.

Подставляя в (4.1) найденные выше значения dy и сравнивая коэффициенты с (2.1), мы получаем всего 10 уравнений для определения 16 постоянных. Таким образом, мы имеем здесь много способов для приведения*). Заметим, что приведение выражения (2.1) к сумме четырех квадратов полных дифференциалов вообще невозможно для *большой* области, где величины g_{ik} нужно рассматривать уже как функции, а не как постоянные.

Рассмотрим теперь все события, для которых y_4 имеет какую-либо определенную величину. Они образуют трехмерный мир. Так как dy_4 равно нулю для всякой пары таких событий, то их взаимные интервалы будут даны уравнением

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2. \tag{4.2}$$

Но это как раз будет точно соответствовать выражению для обычного пространства, в котором интервал (равный здесь, как мы показали, пространственному расстоянию без учета времени) дается уравнением

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{4.3}$$

где x, y, z — прямоугольные координаты.

Следовательно сечение мира поверхностью $y_4 = \text{const}$ будет представляться нам как пространство, а величины y_1, y_2, y_3 будут в нем прямоугольными координатами. Координатные системы y_1, y_2, y_3 и x, y, z являются примерами систем S и S' п. 1, для которых интервалы между соответствующими парами углов координатных клеток равны. Таким образом, обе системы будут совершенно подобными с точки зрения наблюдения, и если одна из них представляется нам как прямоугольная система в пространстве, то такой же должна казаться и другая. Здесь нужно сделать одну оговорку: координаты y_1, y_2, y_3 для вещественных событий должны быть вещественны, как в обычном пространстве, в противном случае сходство систем будет только формальным.

Принимая эту оговорку, мы приведем основное выражение к виду

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dy_4^2, \tag{4.4}$$

где x, y, z считаются нами за прямоугольные координаты в про-

*) Решение этой алгебраической задачи можно найти в большинстве курсов высшей алгебры, см. например, *B. E. Netto*, Vorlesungen über Algebra, т. I, лекция 15, или *В. И. Смирнов*, Курс высшей математики, т. III, ГТТИ, 1933 г. (*Р.*)

странстве. Очевидно, что y_4 заключает в себе время, иначе наше представление событий четырьмя координатами было бы неполным, но мы не должны слишком поспешно отождествлять его со временем t.

Я полагаю, что следующее определение равенства временных интервалов было бы сочтено всеми за удовлетворительное с до-релятивистской точки зрения: если мы имеем некоторый механизм, способный совершать циклическое движение, то его циклы будут измерять равные промежутки времени, *везде и всегда*, в том случае, если механизм (как целое), его законы поведения и все внешние влияния остаются в точности подобными. Релятивист к этому прибавляет еще условие, что механизм в целом должен оставаться в покое в рассматриваемой пространственно-временной системе отсчета, так как теперь известно, что движущиеся часы отстают по сравнению с неподвижными. С этим определением не расходится и не-релятивист, хотя он и стоит на несколько иной точке зрения; не-релятивист заранее считает, что условие покоя уже включено в определение, ибо для него всякое движение заключает в себе продвижение через эфир, который (как он считает) непосредственно влияет на поведение часов, и является, таким образом, одним из тех «внешних влияний», которые должны оставаться «в точности подобными».

Если мы условились, что механизм, как целое, находится в покое, а его движущиеся части возвращаются к тем же самым положениям после полного цикла, то для двух событий, отмечающих начало и конец цикла, мы будем иметь

$$dx,\ dy,\ dz = 0.$$

Согласно (4.4) для этого случая получим

$$ds^2 = dy_4^2.$$

Мы видели в п. 3, что циклы механизма во всех случаях соответствуют равным интервалам ds; поэтому они соответствуют равным значениям dy_4. Но, по вышеприведенному определению времени, они соответствуют также равным промежуткам времени dt; следовательно, мы имеем пропорциональность между dy_4 и dt и эту пропорциональность мы выражаем уравнением

$$dy_4 = ic\,dt, \tag{4.5}$$

где $i = \sqrt{-1}$, а c — постоянная.

Конечно, возможно, что c окажется мнимым числом, но мы будем предполагать его вещественным. Тогда (4.4) представится в следующем виде *):

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2. \qquad (4.6)$$

Необходим еще дальнейший анализ, прежде чем можно будет заключить, что (4.6) является наиболее общей возможной формой для ds^2, выраженной в обыкновенных координатах пространства и времени.

Если бы мы привели (2.1) к несколько более общей форме:

$$\begin{aligned} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2 - 2\,c\alpha\,dx\,dt - \\ - 2c\beta\,dy\,dt - 2c\gamma\,dz\,dt, \end{aligned} \qquad (4.7)$$

то это совпало бы с (4.6) только в двух случаях, а именно: 1) когда $dt = 0$ и 2) когда $dx, dy, dz = 0$.

Чтобы показать непригодность этой более общей формы, мы должны исследовать пары событий, которые различаются во времени и в пространстве.

В до-релятивистском определении величины t наши часы должны были оставаться неподвижными и были, следовательно, неприменимы для сравнения времени в разных местах. Что же подразумевал до-релятивистский физик под разностью моментов времени dt между двумя событиями в разных местах? Я не думаю, что мы можем придать какое-либо значение его туманному определению dt, но мы знаем один или два способа, которыми он привык пользоваться для этого определения.

Один из методов, который употреблял прежде физик, заключался в переносе хронометров. Рассмотрим теперь, что произойдет, когда мы возьмем часы из точки $(x_1, 0, 0)$ в момент t_1, и перенесем в другую точку $(x_2, 0, 0)$ в момент t_2.

Мы видели, что часы, независимо от того, находятся ли они в покое или движении, отсчитывают равные *интервалы*, при условии, что они остаются в точности подобным механизмом; следовательно, разность отсчетов часов в начале и конце пути будет пропорциональна интегралу от интервала

$$\int_1^2 ds. \qquad (4.81)$$

*) Пусть читатель обратит внимание на то, что, начиная с п. 7, для ds^2 употребляется форма $c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$; он легко убедится на вычислениях ближайших параграфов, что все выводы теории не изменились из-за этой перемены знака. (*И.*)

Если перенос совершается по прямой линии ($dy=0$ и $dz=0$), то мы будем иметь в виду (4.7)

$$-ds^2=c^2\,dt+2c\alpha\,dx\,dt-dx^2=c^2dt^2\left\{1+2\frac{\alpha}{c}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\}.$$

Следовательно, разность в отсчете часов (4.81) пропорциональна выражению

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\left(1+2\frac{\alpha u}{c}-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.82}$$

где $u=\frac{dx}{dt}$, т. е. скорости часов. Интеграл, вообще говоря, не сводится к разности (t_2-t_1), так что точная разность моментов времени в двух местах не получится при отсчете на часах. Даже когда $\alpha=0$, движущиеся часы еще не отмечают правильного времени.

Введем теперь условие, что скорость u очень мала, помня, что при этом (t_2-t_1) будет очень большим. Пренебрегая величиной $\frac{u^2}{c^2}$ в (4.82), получим, что в первом приближении $\int_{t_1}^{t_2} dt\left(1+\frac{\alpha}{c}\frac{dx}{dt}\right)=(t_2-t_1)+\frac{\alpha}{c}(x_2-x_1)$. Следовательно, часы, движущиеся достаточно медленно, будут отмечать правильные разности отсчетов времени тогда и только тогда, когда $\alpha=0$. Двигая их в других направлениях, мы будем иметь аналогично $\beta=0$ и $\gamma=0$. Таким образом, (4.6) является наиболее общей формулой для интервала, если время в различных точках сравнивается при медленном переносе часов из одного места в другое.

Я не знаю, насколько читатель будет готов согласиться с условием возможности сопоставления времени в различных точках путем бесконечно медленного передвижения часов из одного места в другое. Другой метод, употребляемый при точных измерениях, состоит в посылке электромагнитного сигнала из одного места в другое, но мы увидим в п. 11, что это приводит к тем же самым формулам. Вряд ли можно рассматривать какой-либо из этих способов сравнения времени в различных местах, как столь же существенную часть нашего примитивного представления времени, как и измерение в одном месте с помощью циклического механизма, поэтому лучше всего будет считать их условными. Нужно помнить однако, что хотя теория относительности и формулировала явно это условное определение времени, но употребление термина *разность времен* для количества, определяемого этими условиями, соответствует привычному понятию и всей практике экспериментальной физики и астрономии.

Полагая $\alpha = 0$ в (4.82), мы видим, что точная формула для отсчетов часов будет

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} (t_2 - t_1) \tag{4.9}$$

для случая равномерной скорости u.

Таким образом, часы, движущиеся с конечной скоростью, дают слишком малые отсчеты. По сравнению с условно принятыми отсчетами времени часы отстают.

Резюмируя результаты этого пункта рассуждений, можно сказать, что если мы выберем координаты так, что общая квадратичная форма приводится к выражению

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 + dy_4^2, \tag{4.95}$$

те величины y_1, y_2, y_3 и $\frac{1}{c} \cdot y_4 \sqrt{-1}$ будут представлять собою обычные прямоугольные координаты и время.

Если же мы выберем такие координаты, что

$$\begin{aligned} ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 + dy_4^2 + 2\alpha\, dy_1\, dy_4 + \\ + 2\beta\, dy_2\, dy_4 + 2\gamma\, dy_3\, dy_4, \end{aligned} \tag{4.96}$$

то эти координаты также будут совпадать с прямоугольными координатами и временем, поскольку речь идет о нашем более примитивном представлении времени, но отсчет по этим формулам разности времен в различных местах не согласуется с практикой физики и астрономии. По этой причине введение таких координат, как возможной системы пространства и времени, может только внести путаницу.

Так как мы рассматриваем все координатные системы, как одинаково фиктивные построения, для нас не является особенно интересным это исключение более общей формулы (4.96). Дело заключается не в том, приписывать ли большее значение одной системе, чем другой, а в выяснении того, какая система соответствует пространственным и временным отсчетам, которыми обычно пользуются в стандартных работах, таких, например, как Nautical Almanac *).

До п. 14 этой книги мы будем считать, что имеем дело с областью мира, в которой величины g_{ik} постоянны, или приблизительно постоянны. Область, имеющая эти свойства, называется *плоской*. Теория этого частного случая называется «специальной» теорией относительности; она была дана Эйнштейном в 1905 г. — за 10 лет до общей теории **). Но специальная теория получается более просто, если ее рассматривать как частный случай общей теории, так как тогда нет более необходимости защищать ее постулаты, как существенные свойства пространства и времени. Для какой-либо данной области эти постулаты могут иметь место или нет. Специальная теория относительности приложима как раз только в том случае, если они сохраняются; другие случаи должны быть отнесены к общей теории относительности.

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОРЕНЦА.

Проделаем следующее преобразование координат:

$$x = \beta(x' - ut');\ y = y';\ z = z';\ t = \beta\left(t' - \frac{ux'}{c^2}\right) \tag{5.1}$$

$$\beta = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

где u — любая вещественная постоянная, не превышающая c.

Из (5.1) имеем:

$$dx^2 - c^2dt^2 = \beta^2\left\{(dx' - u\,dt')^2 - c^2\left(dt' - \frac{u\,dx'}{c^2}\right)^2\right\} =$$

$$= \beta^2\left\{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)dx'^2 - (c^2 - u^2)dt'^2\right\} = dx'^2 - c^2dt'^2,$$

откуда по (4.6)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2\,dt'^2. \tag{5.2}$$

*) Знаменитый английский астрономический календарь. (*Р.*)

**) Открытием специальной теории относительности мы обязаны с одной стороны Лоренцу и Пуанкарэ, с другой стороны, независимо, Эйнштейну. См. Сборник работ классиков релятивизма, ГТТИ (в печати). (*Р.*)

Штрихованные и нештрихованные координаты дают поэтому одинаковую формулу для интервала, так что и интервалы между соответствующими парами узловых точек обеих координатных систем будут равны и следовательно во всех наблюдаемых соотношениях будут подобны. Если мы будем рассматривать x', y', z' как прямоугольные координаты в пространстве и t' — как соответствующее время, то мы приходим таким путем к другому возможному способу отсчетов пространства и времени, т. е. получаем другую фиктивную пространственно-временную систему, эквивалентную во всех своих свойствах первоначальной. Для удобства мы будем говорить, что наблюдатель S находится в первой системе, а наблюдатель S' во второй, причем каждый из них покоится относительно своей системы *).

Постоянную u легко интерпретировать. Так как наблюдатель S находится в покое в своем пространстве, то его местоположение определяется уравнением $x = \text{const}$. В координатах S' это уравнение по (5.1) перейдет в следующее: $x' - ut' = \text{const}$, т. е. можно сказать, что S движется в направлении x' со скоростью u. Таким образом, постоянная u интерпретируется как скорость S относительно S'.

Отсюда непосредственно еще не следует, чт орость S' относительно S равна $-u$, но это легко можно показать, решая уравнения (5.1) относительно x', y', z', t'. Мы имеем

$$x' = \beta(x + ut); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \beta\left(t + \frac{ux}{c^2}\right), \qquad (5.3)$$

откуда следует, что перемена S на S' только меняет знак u.

Существенное свойство предыдущего преобразования состоит в том, что оно оставляет неизменным формулу (5.2) для ds^2, так что обе координатные системы, которые она связывает, будут

*) Это отчасти является вопросом номенклатуры. Внимательный наблюдатель может заставить себя помнить, что он движется, и выбрать, таким образом, за основу движущуюся систему координат, но он отнюдь не столь охотно согласится принять соответствующую систему отсчетов времени. Поэтому, если наблюдатель не будет пользоваться пространственно-временной системой, в которой он покоится, он вероятно воспользуется некоторой смешанной системой пространства-времени, что приведет к противоречиям. Неоднозначность отпадает, если «наблюдателя» рассматривать только как автоматический измерительный прибор, который по принципам, установленным в п. 4, естественно дает отсчеты того пространства и времени, по отношению к которым он покоится.

подобны в своих свойствах. Мы уже отмечали, что приведение к сумме четырех квадратов можно сделать многими способами, так что мы можем положить более общим образом

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 + dy_4^2 = \\ = dy_1'^2 + dy_2'^2 + dy_3'^2 + dy_4'^2. \quad (5.4)$$

Определение зависимости между какими-нибудь двумя системами координат, удовлетворяющих этому уравнению, является задачей чистой математики. Мы можем свободно пользоваться понятиями четырехмерной геометрии и мнимыми вращениями, чтобы найти эту связь, независимо от того, имеет или нет это представление какой-нибудь физический смысл. Мы видели в (5.4), что ds выражает расстояние между двумя точками в эвклидовом пространстве четырех измерений, если координаты (y_1, y_2, y_3, y_4) и (y_1', y_2', y_3', y_4') представляют собой прямоугольные (вещественные или мнимые) координаты в этом пространстве. Таким образом, эти координаты связаны друг с другом преобразованиями от одной прямоугольной системы к другой в четырех измерениях, а именно переносом и вращением. Перенос или изменение начала координат нас не интересует так же, как и вращение пространственных осей координатной системы (y_1, y_2, y_3), оставляющие время неизменным. Нас интересует только то вращение, в которое входит y_4; оно выражается уравнениями

$$y_1 = y_1' \cos\theta - y_4' \sin\theta; \quad y_4 = y_1' \sin\theta + y_4' \cos\theta.$$

Если положить $u = ic \operatorname{tg}\theta$, так что $\beta = \cos\theta$, то это сведется к преобразованию Лоренца (5.1). Таким образом, исключая тривиальную замену осей, только одно преобразование Лоренца оставляет уравнение (4.6) неизменным *).

Исторически это преобразование было впервые выведено для частного случая электромагнитных уравнений. На его более общий характер указал Эйнштейн еще в 1905 г.**).

*) Наглядное алгебраически-геометрическое обоснование указанной здесь алгебраической теоремы см. у *M. v. Laue.* Die Relativitätstheorie, т. I (3-е изд.), стр. 70—71. Необходимо указать еще на элегантное изложение преобразования Лоренца с помощью кватернионов, см. *F. Klein*, Geometrische Grundlagen der Lorentzgruppe, Ges. Math. Abh., Bd. I, стр. 551—552. (*H.*)

**) Одновременно и независимо от Эйнштейна преобразование Лоренца в полном виде было получено Пуанкарэ, см. прим. на стр. 34. (*P.*)

6. СКОРОСТЬ СВЕТА.

Рассмотрим точку, движущуюся вдоль оси x; пусть ее скорость, измеренная наблюдателем S', равна v', так что

$$v' = \frac{dx'}{dt'}. \tag{6.1}$$

Тогда по (5.1) ее скорость, измеренная наблюдателем S, будет

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\beta(dx' - u\,dt')}{\beta\left(dt' - u\,\dfrac{dx'}{c^2}\right)} = \frac{v' - u}{1 - \dfrac{uv'}{c^2}}. \tag{6.2}$$

В нерелятивистской кинематике мы принимали как аксиому, что $v = v' - u$.

Если две точки движутся относительно S' с равными, но противоположными по направлению скоростями $+v'$ и $-v'$, то их скорости относительно S будут равны

$$\frac{v' - u}{1 - \dfrac{uv'}{c^2}} \quad \text{и} \quad -\frac{v' + u}{1 + \dfrac{uv'}{c^2}}.$$

Как мы и должны были ожидать, эти скорости вообще неравны; они делаются равными в том исключительном случае, когда $v' = c$. Скорости относительно S будут тогда тоже равны; действительно, обе становятся равными c.

Кроме того, из (5.2) следует, что если

$$\left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt'}\right) = c^2,$$

то $ds = 0$, и, следовательно,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{at}\right)^2 = c^2.$$

Таким образом, если результирующая скорость относительно S' равна c, то скорость относительно S будет также равна c, независимо от направления движения S' относительно S. Мы видим, что скорость c обладает исключительным и весьма замечательным свойством.

С точки зрения старых представлений об абсолютном времени этот результат кажется невероятным. Кроме того, мы еще до сих пор не показали, что полученная формула имеет практическое значение, так как c могло бы быть и мнимым. Однако эксперимент обнаруживает вещественную скорость с этим замечательным свойством, а именно 299 860 *км/сек*. Мы будем называть ее *фундаментальной скоростью*. По счастью существует нечто, именно свет, что распространяется с фундаментальной скоростью. Было бы ошибкой полагать, что существование такого объекта связано с тем значением, которое имеет фундаментальная скорость в нашей теории. Наличие подобного объекта важно, так как позволяет непосредственно подвергнуть эти соображения экспериментальной проверке. Майкельсон и Морли экспериментально не обнаружили разницы в скорости света при его распространении по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Шестью месяцами позже, когда орбитальное движение земли изменило скорость наблюдателя на 60 *км/сек*, что соответствует в наших обозначениях изменению системы от S' и S, все же не было обнаружено никакой разницы. Следовательно, скорость света обладает отличительной способностью фундаментальной скорости.

Строго говоря, опыт Майкельсона-Морли не доказывает непосредственно, что скорость света постоянна во всех направлениях; он только говорит о том, что средняя скорость распространения туда и обратно была постоянна во всех направлениях. Эксперимент сравнил время прохождения «туда» и «назад». Если $v(\theta)$ — скорость света в направлении θ, то эксперимент дает:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{v(\theta)}+\frac{1}{v(\theta+\pi)} &= \mathrm{const}=C \\ \frac{1}{v'(\theta)}+\frac{1}{v'(\theta+\pi)} &= \mathrm{const}=C' \end{aligned}\right\} \qquad (6.3)$$

для всех значений θ. Постоянство было установлено с точностью до 10^{-10}.

Очень мало вероятно, что первое уравнение могло бы выполняться, если бы не имело места соотношение

$$v(\theta)=v(\theta+\pi)=\mathrm{const},$$

и вполне очевидно, что существование второго уравнения (6.3) окончательно приводит к написанному равенству.

Однако, вследствие большой важности отождествления фундаментальной скорости со скоростью света, мы дадим еще формальное доказательство.

Пусть луч проходит со скоростью v расстояние R в направлении θ, так что

$$dt = \frac{R}{v}; \quad dx = R\cos\theta; \quad dy = R\sin\theta.$$

Пусть скорость S относительно S' так мала, что величиной $\frac{u^2}{c^2}$ можно пренебречь. Тогда по (5.3) имеем

$$dt' = dt + \frac{u\,dx}{c^2}; \quad dx' = dx + u\,dt; \quad dy' = dy.$$

Обозначая изменение величин R, θ, v при преобразовании к системе S' через δR, $\delta\theta$, δv, мы получим

$$\delta\left(\frac{R}{v}\right) = dt' - dt = \frac{u R\cos\theta}{c^2},$$

$$\delta(R\cos\theta) = dx' - dx = \frac{uR}{v},$$

$$\delta(R\sin\theta) = dy' - dy = 0.$$

Отсюда найдем следующие значения δR, $\delta\theta$, $\delta\left(\frac{1}{v}\right)$.*)

$$\delta R = \frac{uR\cos\theta}{v},$$

$$\delta\theta = -\frac{u\sin\theta}{v},$$

$$\delta\left(\frac{1}{v}\right) = u\cos\theta\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2}\right).$$

---

*) В самом деле, применяя последнее из приведенных уравнений, получим

$$\delta R\cdot\sin\theta + R\cos\theta\cdot\delta\theta = 0, \quad \frac{\delta\theta}{\delta R} = -\frac{\operatorname{tg}\theta}{R},$$

кроме того, из выражения для $\delta(R\cos\theta)$ имеем

$$\delta R\cdot\cos\theta - R\sin\theta\cdot\frac{\delta R}{R}\operatorname{tg}\theta = \frac{uR}{v}, \quad \delta R = \frac{uR\cos\theta}{v}, \quad \delta\theta = -\frac{u\sin\theta}{v},$$

и, наконец, первое из вышестоящих уравнений дает:

$$\delta R\frac{1}{v} + R\cdot\delta\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{uR\cos\theta}{c^2}, \quad \delta\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{u\cos\theta}{c^2} - \frac{1}{v}\cdot\frac{\delta R}{R} = u\cos\theta\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2}\right)$$

(*Н.*)

Здесь $\delta\left(\frac{1}{v}\right)$ относится к разнице скоростей в направлении θ в системе S и в направлении θ' в системе S'. Обозначая эту разницу через $\Delta\left(\frac{1}{v}\right)$ для случая, когда в обеих системах направление равно θ, получим

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right)=\delta\left(\frac{1}{v}\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{v}\right)\delta\theta=\frac{u}{c^2}\cos\theta-\frac{u}{v^2}\cos\theta+$$
$$+\frac{u\sin\theta}{v}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{v}\right)=\frac{u}{c^2}\cos\theta+\frac{1}{2}u\sin^3\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{v^2\sin^2\theta}\right).$$

Следовательно

$$\Delta\left(\frac{1}{v(\theta)}+\frac{1}{v(\theta+\pi)}\right)=\frac{1}{2}u\sin^3\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{v^2(\theta)}-\frac{1}{v^2(\theta+\pi)}\right)\right\}$$

Согласно (6.3) левая сторона не зависит от θ и равна постоянной величине $C'-C$. Отсюда после интегрирования получим *)

$$\frac{1}{v^2(\theta)}-\frac{1}{v^2(\theta+\pi)}=\frac{C'-C}{u}\left(\sin^2\theta\cdot\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta-\cos\theta\right)+\frac{c_0}{u}\sin^2\theta$$

или

$$\frac{1}{v(\theta)}-\frac{1}{v(\theta+\pi)}=\frac{C'-C}{C}\frac{1}{u}\left(\sin^2\theta\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta-\cos\theta\right)+\frac{c_0}{Cu}\sin^2\theta,$$

где c_0 — постоянная интегрирования.

Очевидно невозможно, чтобы разность значений $\frac{1}{v}$ в противоположных направлениях выражалась функцией от θ такого вида,

*) Ход вычислений следующий:

$$\left\{\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{v^2(\theta)}-\frac{1}{v^2(\theta+\pi)}\right)\right\}=\int d\theta\,\frac{2(C'-C)}{u\sin^3\theta},$$

$$\int\frac{d\theta}{\sin^3\theta}=\int d\theta\,\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^3\theta}=\frac{1}{2}\int d\theta\,\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}+$$

$$-\frac{1}{2}\int d\theta\,\frac{\sin^2\theta+2\cos^2\theta}{\sin^3\theta}=\frac{1}{2}\int\frac{d\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{2}\int\left(\frac{d\cos\theta}{\sin^2\theta}+\right.$$

$$\left.+\cos\theta\cdot d\frac{1}{\sin^2\theta}\right)=\frac{1}{2}\lg\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

(*Н.*)

так как начальное значение θ дает просто направление движения системы S относительно S', которое мы можем менять произвольно в различных эксиериментах и которое не имеет ничего общего с распространением света относительно S. Поэтому $C' - C = 0$ и $v(\theta) = v(\theta + \pi)$. Согласно (6.3) $v(\theta)$ не зависит от θ и точно так же $v'(\theta)$ не зависит от θ. Таким образом, скорость света одинакова во всех направлениях для обоих наблюдателей и, следовательио, должна быть отождествлена с фундаментальной скоростью.

Чтобы сравнить это доказательство с обычным (и правильным) утверждением, что равенство скоростей света в двух прямо противоположных направлениях не может быть выведено из эксперимента, необходимо обратить внимание на ход наших рассуждений.

Использование опыта Майкельсона — Морли для заполнения определенного пробела в доказательстве, вообще дедуктивном, не следует смешивать с его значением (см. «Пространство, время, тяготение, гл. I), как отправного пункта для чисто индуктивного вывода, основанного на эксперименте. В настоящем рассуждении мы вовсе не пользуемся тем, что этот эксперимент относится к поправкам второго порядка. Мы вывели преобразование Лоренца из основной гипотезы п. 1 и ввели уже условную систему отсчета пространства-времени, изложенную в п. 4. Данное сейчас доказательство показывает, что наше соглашение, согласно которому время определяется медленным переносом часов, эквивалентно условию, что скорость света в прямом направлении равна скорости в обратном направлении*). Доказательство этой эквива-

---

*) Другими словами, если $v(\theta)$ есть скорость света в направлении θ, то для всякого θ и для любой системы координат S $v(\theta)$ всегда равна $v(\theta + \pi)'$ Предположение, что это справедливо по отношению к *любой* координатной системе S', равносильно утверждению, что $v(\theta) = c$. На это свойство c нами было указано в начале параграфа. Обратно, если $v(\theta) = v(\theta + \pi)$, то для S' должно иметь место равенство:

$$\frac{v(\theta) - u}{1 - \frac{u \cdot v(\theta)}{c^2}} = \frac{v(\theta) + u}{1 + \frac{u \cdot v(\theta)}{c^2}}.$$

Следовательно,

$$u\left(1 - \frac{v^2(\theta)}{c^2}\right) = 0,$$

откуда при $u \neq 0$ получаем, что $v(\theta) = c$. *(Н.)*

лентности преимущественно дедуктивно, за исключением одного пробела — связи между распространением света и фундаментальной скоростью — и только в этом пункте мы обращаемся к опыту Майкельсона - Морли.

Правило сложения скоростей (6.2) хорошо иллюстрируется опытом Физо с распространением света вдоль движущегося потока воды. Пусть наблюдатель S' передвигается вместе с потоком воды, а наблюдатель S неподвижен. Вода находится в покое относительно наблюдателя S' и скорость света относительно него будет, следовательно, равна обыкновенной скорости распространения света в неподвижной воде, т. е. $v' = \frac{c}{\mu}$, где μ есть показатель преломления. Если теперь скорость потока будет w, то скорость S относительно S' равна $-w$; следовательно, по (6.2) скорость света v относительно S равна

$$v = \frac{v' + w}{1 + \frac{wv'}{c^2}} = \frac{\frac{c}{\mu} + w}{1 + \frac{w}{\mu c}} \cong \frac{c}{\mu} + w\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right),$$

где мы пренебрегаем квадратом $\frac{w}{c}$. Таким образом, скорость света будет увеличена не на всю величину скорости потока воды, в котором распространяется свет, но только на часть ее $\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) w$. Для воды это равно приблизительно $0{,}44\, w$. Эффект может быть измерен путем разделения луча света на две части, которые посылаются в противоположных направлениях по циркулирующей струе воды. Член $\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)$ называется коэффициентом Френеля; он был экспериментально найден Физо в 1851 г.

Если скорость света в вакууме c' отличалась бы от фундаментальной скорости c, то предыдущее вычисление дало бы для френелевского коэффициента значение

$$1 - \frac{c'^2}{c^2} \cdot \frac{1}{\mu^2}.$$

Таким образом, опыт Физо дает независимое доказательство того, что фундаментальная скорость, по крайней мере приблизительно, совпадает со скоростью света. В самое последнее время, повторяя этот эксперимент, Зееман *) нашел, что согласие между теорией и наблюдением таково, что разница между c' и c достигает не более 0,2%.

7. ВРЕМЕННЫЕ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ИНТЕРВАЛЫ.

Прежде всего изменим немного прежние обозначения, а именно величину ds^2 во всех последующих формулах заменим на $-ds^2$, тогда по (4.6)

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{7.1}$$

Эта перемена знака не несет с собой особой выгоды; она сделана для согласования с обычными обозначениями. Формула может дать как положительное, так и отрицательное значение для ds^2, так что интервал между действительными событиями может выражаться действительным или мнимым числом. Мы назовем вещественные интервалы временными, а мнимые интервалы — пространственными.

Из (7.1) вытекает

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = c^2 - v^2, \tag{7.2}$$

где v есть скорость точки, движущейся по пути, вдоль которого лежит интервал. Интервал, таким образом, может быть вещественной или мнимой величиной, смотря по тому, будет ли v меньше или больше, чем c. Если мы примем, что материальная частица не может двигаться быстрее, чем свет, то интервалы вдоль ее пути должны быть временными. Мы ограничены в опытах материальными телами и поэтому можем иметь дело только с временными интервалами. Течение времени мы воспринимаем непосредственно, помимо наших внешних чувств, но о существовании пространственных интервалов во внешнем мире мы заключаем лишь из восприятий наших органов чувств.

От всякого события (x, y, z, t) расходятся во всех направлениях**) интервалы к другим событиям; вещественные и мнимые интервалы разделяются конусом

$$0 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

*) *Zeeman*, Amsterdam Proc. **18**, 398, 1240.

**) Нужно заметить, что четырехмерному „направлению" соответствует который называется *нулевым конусом*. Так как свет распространяется со скоростью c, то путь какого-либо светового импульса проходит от рассматриваемого события по нулевому конусу. Если коэффициенты g_{ik} не постоянны и фундаментальная квадратичная форма не может быть приведена к виду (7.1), то все же существует нулевая поверхность, которая задается уравнением $ds=0$ для формы (2.1), разделяющая пространственные и временные интервалы. То, что и в этом случае путь света лежит на нулевой поверхности, вряд ли вызывает сомнение, но так как это свойство пожалуй не совсем очевидно, то мы должны будем рассмотреть его более подробно.

Формула (6.2) для сложения скоростей, направленных вдоль одной прямой, может быть написана так:

$$\operatorname{Arctgh}\frac{v}{c}=\operatorname{Arctgh}\frac{v'}{c}-\operatorname{Arctgh}\frac{u}{c}\,^{*)}. \tag{7.3}$$

Величина $\operatorname{tgh}\dfrac{v}{c}$ была названа Роббом «быстротою», соответствующей скорости v. Таким образом, (7·3) показывает, что относительные быстроты в том же самом направлении складываются согласно простому правилу сложения. Так как $\operatorname{Arctgh}1=\infty$, то скорость света соответствует бесконечной быстроте. Мы не можем достигнуть бесконечной быстроты прибавлением конечного числа конечных быстрот; поэтому мы не можем достигнуть скорости света прибавлением любого конечного числа относительных скоростей, меньших, чем скорость света.

скорость в пространстве xyz. Действительно, такое направление можно определить при помощи соотношения

$$dx:dy:dz:dt,$$

или

$$u:v:w:1. \tag{H.}$$

*) Под $\operatorname{Arctgh}z$ нужно понимать функцию, обратную $\operatorname{tgh}z$, т. е.

$$\operatorname{Arctgh}z=\frac{1}{2}\lg\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Действительно, с одной стороны, согласно (6.2)

$$\frac{v}{c}=\frac{\dfrac{v'}{c}-\dfrac{u}{c}}{1-\dfrac{u}{c}\cdot\dfrac{v'}{c}},$$

а, с другой стороны,

$$\operatorname{tgh}(z_1-z_2)=\frac{\operatorname{tgh}z_1-\operatorname{tgh}z_2}{1-\operatorname{tgh}z_1\cdot\operatorname{tgh}z_2}. \tag{H.}$$

Имеется существенный разрыв между скоростями бо̀льшими, чем скорость света, и меньшими ее, что иллюстрируется следующим примером. Если две точки движутся в одинаковом направлении со скоростями $v_1 = c + \varepsilon$ и $v_2 = c - \varepsilon$, то их относительная скорость будет по (6.2)

$$\frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{2\varepsilon}{1 - \frac{(c_2 - \varepsilon^2)}{c^2}} = \frac{2c^2}{\varepsilon},$$

что приближается к бесконечности, когда ε делается бесконечно малым. Если фундаментальная скорость точно равна 300 000 *км/сек* и две точки движутся в одинаковом направлении со скоростями 300 001 *км/сек* и 299 999 *км/сек*, то скорость одной относительно другой будет 180 000 000 000 *км/сек*. Баррьер в 300 000 *км/сек* не может быть перейден приближением к нему. Частица, которая желает достигнуть скорости в 300 001 *км/сек*, очевидно, может надеяться достичь своей цели при непрерывном увеличении своей скорости; но когда она уже достигла 299 999 *км/сек* и рассматривает свое положение, частица видит, что она теперь отстоит от цели гораздо дальше, чем в начале путешествия.

Частица материи, понимаемая как совокупность событий, является системой, у которой линейное протяжение обладает временным характером. Мы можем пожалуй представить себе аналогичную систему, простирающуюся вдоль пространственного пути. Это соответствовало бы представлению частицы, двигающейся со скоростью больше скорости света; но так как ее строение существенно отличалось бы от той материи, которая нам известна, то нет основания думать, что мы могли бы ее обнаружить как частицу материи, даже если бы ее существование было возможно. Для соответственным образом выбранного наблюдателя пространственный интервал может состоять целиком из одновременных событий и рассматриваемая система существовала бы вдоль линии в пространстве в данный момент, но не существовала бы вовсе в предыдущий и последующий моменты. Такие мгновенные частицы должны были бы глубоко изменять непрерывный переход из прошедшего в будущее. В виду отсутствия всяких данных о наличии таких частиц мы должны допустить, что они представляют собою системы, не могущие существовать вовсе.

8. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ВОСПРИЯТИЕ ВРЕМЕНИ.

Наш разум непосредственно воспринимает «поток времени» без вмешательства внешних чувств. Вероятно, в мозгу имеются более или менее периодические процессы, которые играют роль материальных часов, указания которых разум может прочесть. Грубые измерения продолжительности, сделанные внутренним чувством времени, не могут принести пользы для научных целей, и в физике обычно отсчеты времени основываются на более точных внешних механизмах. Однако, желательно проверить соотношение между этим более примитивным отсчетом времени и схемой, употребляемой в физике.

Много путаницы возникло из-за недостаточного различения времени, которое принято в физике и астрономии, от времени, обнаруживаемого внутренним чувством. В действительности время, которое мы ощущаем непосредственно, не является общим физическим временем, а есть более фундаментальная величина, которую мы назвали интервалом (ограниченная однако временными интервалами).

Наше чувство времени не связано с событиями вне нашего мозга, оно относится только к линейной цепи событий вдоль нашего собственного пути через мир. Мы можем, однако, узнать от других наблюдателей, какова последовательность времени для событий вдоль их путей. Кроме того, мы имеем неодушевленных наблюдателей, — часы, от которых мы можем получить аналогичные сведения об относящейся к ним последовательности времени. Комбинирование этих линейных последовательностей вдоль различных путей в упорядоченный ряд событий, связанных друг с другом, является проблемой, требующей тщательного анализа, проблемой, которую нельзя было решить случайными интуитивными догадками до-релятивистского физика. Обратив внимание на то, что при помощи часов и при помощи чувства времени измеряется ds между парами событий вдоль соответственных путей, мы видим, что вопрос сводится к уже рассмотренной проблеме перехода от описания в терминах интервалов между парами событий к описанию в терминах координат.

Внешние события, которые мы наблюдаем, как будто покрываются нашей собственной последовательностью времени; но в действительности не сами события, а чувственные восприятия, которые вызываются ими, укладываются во временную последовательность нашего сознания. С обычной точки зрения нет разницы между самими внешними событиями и соответствующими событиями, вызванными их световым воздействием на наш мозг. Поэтому события вселенной грубо локализуются в нашей частной последовательности времени. Из-за этой путаницы возникло представление, что мгновения, которые мы осознаем, простираются и на внешние события и имеют значение для всего мира, так что все происходящее в мире предполагается состоящим из ряда мгновенных состояний. Этот грубый взгляд был опровергнут в 1675 г. знаменитым объяснением Ремера затмения спутников Юпитера, и мы больше не имеем права относить внешние события к тем мгновениям, когда мы их восприиимаем. Всё основание представления о ряде мгновений, имеющих значение во всем мире, было разрушено 250 лет тому назад, и кажется странным, что оно еще могло существовать в физике до сих пор. Но, как это часто случается, старая теория была подправлена, хотя ее первоначальный raison d'être (смысл существования) и исчез. Имéя предвзятую идею, что внешние события как-то должны быть сопоставлены мгновениям нашего частного сознания, физики устранили основные трудности, помещая события не в мгновения видимого восприятия, а в соответствующие предшествующие мгновения. Физика заимствовала, таким образом, из отвергнутой теории представление о мгновениях во всем мире и построила математическое продолжение мгновений, имеющихся в сознании наблюдателя, получив этим путем сетку отсчетов времени во всем четырехмерном мире. Мы не будем придираться к этому очень полезному методу, который ведет к физическому времени. Мы только настаиваем на том, что нужно помнить о его искусственной природе и что первоначальное требование *охватывающего весь мир* времени возникло благодаря ошибке. Нам, вероятно, все равно пришлось бы изобрести всеобщую сетку времени, чтобы получить полную координатную сетку; но мы были бы избавлены от значительной путаницы, если бы пришли к указанному решению, как к произвольному построению, а не как к унаследованному ошибочному представлению. Поэтому, если будет найдено, что физическое время имеет свойства, которые вообще окажутся противоречащими здравому смыслу, то не надо этому удивляться; это в высшей степени специальное построение физики как раз и не следует смешивать с временем здравого смысла. Для нас важно знать точные свойства физического времени, но эти свойства были вложены в него его изобретателями-астрономами.

Современные дискуссии о теории относительности показывают, что отмеченная выше разница между временем нашего сознания и схемой времени, принятой при физических и астрономических вычислениях, не всегда полностью принимается во внимание. Слово «время» обычно применяется для двух различных величин, которые на математическом языке обозначаются символами ds и dt. Эти величины существенно различны между собой; так, например, ds — инвариант, тогда как dt — нет, dt — полный дифференциал, ds — нет.

Таким образом, естественно возникают недоразумения, когда мы пытаемся найти ответ на такого рода неопределенные вопросы, как, например, является ли время абсолютным, или протекает ли для двух наблюдателей между двумя их встречами непременно одно и то же время.

Одно из следствий теории, являющееся примером применения уравнения (4.9), приобрело исторически большое значение. Пусть наблюдатель B покинул землю со скоростью приблизительно на 60 км/сек меньшей скорости света; пусть через некоторый промежуток времени направление его движения внезапно меняется на обратное, и он возвращается на землю. Насколько наблюдатель может судить, — полагаясь на свое собственное ощущение времени, или на увеличение его возраста по физиологическим признакам, или, наконец, на взятый вместе с ним в путешествие хронометр, — его путешествие продолжалось один год.

Но, к своему удивлению, он находит наблюдателя A, остававшегося все это время на земле, постаревшим на 100 лет, что можно установить с помощью точно таких же критериев, как и упоминавшиеся выше. Во всем этом на самом деле нет еще никакой трудности. Собственным или «переживаемым» временем является ds, в то время как физическим и астрономическим временем является dt. Мировые линии, связанные с A и B, представляют собою различные пути, которые пересекаются в начале и конце путешествия, скажем в точках P_1 и P_2. Так как ds не является полным дифференциалом, то $\int_1^2 ds$ не может иметь одно и то же значение для обоих путей, т. е. переживаемые времена должны быть различными. Более того, как мы это увидим далее, мировая линия, связанная с наблюдателем, не испытывающим никакого постороненнего воздействия, обладает тем свойством, что для нее интеграл $\int_1^2 ds$ имеет максимум. Таким образом время, переживаемое A, должно быть больше времени, переживаемого наблюдателем B, на движение которого оказывается воздействие, вызывающее изменение направления его движения на обратное. С другой стороны, $\int_1^2 dt$ имеет для обоих наблюдателей одно и то же значение *) и физическое время введено как раз для той цели, чтобы имелось такое времяисчисление, которое обеспечивало бы это соответствие.

В то же время было высказано утверждение, что наблюдатель B также в праве заявить, что он все время оставался в покое, и что, согласно наблюдениям B, наблюдатель A имеет по отношению к нему большую скорость, направление которой внезапно меняется на обратное. С его точки зрения, испытал воздействие наблюдатель A, поэтому он и должен был прожить более короткое время.

Мы однако не можем с этим согласиться; возмущение, в применяемом здесь смысле, независимо от индивидуальной точки зрения — оно имеет абсолютное значение.

Наблюдатель B при желании может установить, что он бомбардируется молекулами или на него действует электромагнитное давление, вызывающее изменение его движения на обратное; он может при помощи наблюдений заключить, что воздействие оказывается именно на него, а не на A. Но если B знает, что он испытывает некоторое абсолютное возмущение, то имеет ли он тогда еще право считать себя покоящимся? Я не думаю, чтобы мы могли запретить ему это, так как он ведь следует только нашему собственному примеру. На поверхности земли мы испытываем бомбардировку молекул почвы, и все же мы рассматриваем себя покоящимися и в то же время говорим про предоставленный

*) Т. е. для A и B как наблюдаемых объектов, но не как наблюдателей (так как dt не инвариант).

самому себе камень, что он испытывает ускорение. Таким образом, B может считать, что ускорением обладает наблюдатель A. Но он не имеет права сводить причину этого ускорения к тому или иному возмущению. Ускорение относительно по той причине, что, вообще говоря, кинематическое ускорение не соответствует физическому возмущению; если бы оно вполне соответствовало этому возмущению, то последнее вызывало бы абсолютное ускорение.

Проблему можно несколько видоизменить, если предположить, что изменение направления движения B на обратное происходит при обращении B, как кометы вокруг звезды большой массы. Тогда движение как A, так и B происходило бы вдоль «невозмущенных» траекторий (геодезических линий), и мы не можем без специального исследования предсказать, кто из этих наблюдателей будет переживать более длинное собственное время. Нет, однако, никаких оснований для того, чтобы считать продолжительность их жизней одинаковой; в особенности отнюдь не следует думать, что наблюдатель B проживает потерянные 99 лет в течение того короткого промежутка времени, когда направление его движения изменяется на обратное. Как легко показать на основании (38.8), собственное время B едва меняется, если сверхестественный обратный толчок заменить действием поля тяготения, так что результаты элементарной теории, касающиеся возраста наблюдателей A и B, остаются в силе.

9. «(3 + 1)-МЕРНЫЙ» МИР.

Постоянная c^2 в (7.1) положительна согласно экспериментам, проделанным в доступных для нас областях мира. Три знака минуса и один плюс специализируют характер мира в таком направлении, которое мы вряд ли предсказали бы на основании априорных принципов. Вейль выражает эту особенность, обозначая мир как $(3+1)$-мерный. Было бы забавно исследовать свойства $(2+2)$ или $(4+0)$-мерного мира. Более важный вопрос заключается в том, может ли мир изменять свой тип? Возможно ли, например, чтобы в результате приведения уравнения (2.1) к сумме или разности квадратов — для некоторой области, отдаленной во времени или пространстве, мы могли бы получить четыре знака минуса? Я думаю, что нет, так как если такая область и существовала бы, она должна была бы быть отделена от нашей (3 + 1)-мерной области некоторой границей. На одной стороне этой границы мы будем иметь

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c_1^2\, dt^2$$

и на другой

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - c_2^2\, dt^2.$$

Переход через границу мог бы произойти только в том случае, если бы на последней

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + 0dt^2,$$

так что фундаментальная скорость была бы равна нулю. Ничто не может приблизиться к границе или перейти с одной ее стороны на другую. Предполагаемая область за границей не находится, таким образом, в каком-либо пространственно-временном отношении к нашей собственной вселенной, что является просто более педантичным способом выражения того, что она не существует.

Этот барьер является гораздо более существенным, чем тот, который задерживает прохождение света вокруг мира в сферическом пространстве-времени де Ситтера (см. п. 68 или «Пространство, время, тяготение»). Этот последний барьер относился к пространству и времени отдаленного наблюдателя, но все шло в порядке по отношению к пространству и времени для наблюдателя внутри самой области. Здесь же мы имеем барьер, который отнюдь не отступает при нашем приближении к нему.

Переход к (2 + 2)-мерному миру происходил бы при прохождении границы, на которой

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 + 0.dz^2 + c^2\, dt^2.$$

Пространство здесь свелось к двум измерениям, но нет никакого барьера. Условия же в области, где время становится двумерным, не поддаются нашему воображению.

10. СОКРАЩЕНИЕ ФИЦДЖЕРАЛЬДА.

Рассмотрим теперь некоторые следствия, вытекающие из преобразования Лоренца.

Первое уравнение (5.3) может быть написано в виде

$$\frac{x'}{\beta} = x + ut,$$

который показывает, что если отвлечься от перемещения начала координат на ut, то наблюдатель S должен все длины в направлении x, измеренные наблюдателем S', делить на β. С другой стороны, уравнение $y' = y$ показывает, что измерения наблюдателя S совпадают с измерениями наблюдателя S', если они произведены в поперечном направлении к их относительному движению. Пусть S' берет свой стандартный метр (покоящийся относительно него и следовательно движущийся относительно S) и направляет его сначала в поперечном направлении y', а затем в продольном направлении x'. Для наблюдателя S' эта длина в каждом положении равна одному метру, так как это есть его стандартный масштаб, для наблюдателя же S длина равна одному метру в поперечном положении и $\frac{1}{\beta}$ метра в продольном направлении. Таким образом, S находит, что движущийся стержень укорачивается при изменении его положения от поперечного к продольному.

Спрашивается, как длина этого движущегося стержня должна относиться к длине аналогично построенного стержня, находящегося в покое относительно S. Ответ гласит, что поперечные измерения будут теми же самыми, тогда как продольные будут испытывать сокращение.

Мы можем доказать это методом приведения к абсурду. Для этого предположим, что стержень, движущийся в поперечном направлении, будет длиннее, чем аналогичный стержень, находящийся в покое. Возьмем два одинаковых стержня A и A', находящихся в покое относительно S и S' и ориентированных поперечным образом. Тогда наблюдатель S должен рассматривать A' как более длинный стержень, так как он движется относительно него. Обратно S' должен считать более длинным A, движущийся относительно него, но этого не может быть, так как согласно уравнению $y = y'$ обе системы S и S' совпадают в отношении поперечных измерений.

Мы видим, что преобразование Лоренца (5.1) требует, чтобы (x, y, z, t) и (x', y', z', t') были измерены масштабами одинакового строения, но движущимися соответственно с S и S'. Это действительно и подразумевалось в нашем выводе преобразования, ибо основным свойством двух систем и будет то, что они дают одну и ту же формулу (5.2) для интервала, а критерием полного подобия стандартных масштабов и часов является равенство всех соответствующих интервалов, встречающихся в обеих системах.

Четвертое уравнение (5.1) дает

$$t = \beta\left(t' - \frac{ux'}{c^2}\right).$$

Рассмотрим часы, показывающие время t' и которые находятся, следовательно, в покое в системе наблюдателя S $(x' = \text{const})$. Тогда, для любого промежутка времени, отсчитанного по этим часам, имеем

$$\delta t = \beta\,\delta t',$$

так как $\delta x' = 0$. Иначе говоря, наблюдатель S не отсчитывает время по этим движущимся часам, но умножает эти отсчеты на β, как если бы часы отставали. Это согласуется с результатом, уже найденным в (4.9).

Может показаться странным, что мы смогли вывести сокращение материальных стержней и отставание материальных часов из общей геометрии пространства и времени. Но надо помнить, что сокращение и отставание не предполагают каких-либо абсолютных изменений в стержне и часах. «Конфигурация событий», образующая четырехмерную структуру, которую мы называем стержнем, остается неизменной; происшедшее изменение заключается только в том, что пространственная и временная сетка отсчетов наблюдателя пересекла эту структуру в другом направлении.

Мы не будем предсказывать, что случится с движущимся стержнем при действительном эксперименте. При этом абсолютное изменение конфигурации может иметь место или нет, в зависимости от условий, при которых масштаб приводится в движение. Наши результаты относятся к случаю, в котором стержень после того, как он был приведен в движение, остается (согласно всем экспериментам) подобным покоящемуся стержню *).

Когда у нас имеется ряд явлений, связанных друг с другом, то всегда оказывается несколько произвольным решение вопроса, которое из них следует рассматривать как объяснение других. Многим покажется наиболее простым считать что странные свойства фундаментальной скорости *объясняются* указанными раз-

---

*) Может оказаться невозможным изменить движение стержня, не повышая температуры. Наши рассуждения тогда неприменимы до тех пор, пока температура снова не упадет, т. е. пока проверка температуры не покажет, что стержень точно подобен стержню перед изменением движения.

личиями в поведении часов и масштабов наблюдателя. Они захотят сказать, что наблюдатели получают одну и ту же величину скорости света, именно пренебрегая поправками, которые требуются для описания различного поведения их измерительных приспособлений. Это есть относительная точка зрения, согласно которой относительные величины, длина, время и т. д. принимаются за основные. С абсолютной точки зрения, которая рассматривает только интервалы, масштабы двух наблюдателей равны и ведут себя одинаково; так называемые *объяснения* инвариантности скорости света только отвлекают нас от существа вопроса.

Кроме того, признание сокращения Фицджеральда не дает нам возможности избежать парадоксов. Из (5.3) мы нашли, что длина измерительного масштаба в системе S' сокращалась относительно длины масштаба в системе S. Из (5.1) можно аналогично показать, что стержни системы S сокращаются относительно стержней системы S'. Таким образом, имеется полная обратимость между S и S'. Этот парадокс рассмотрен подробно в книге „Пространство, время, тяготение“.

11. ОДНОВРЕМЕННОСТЬ В РАЗЛИЧНЫХ МЕСТАХ

Из четвертого уравнения (5.1), а именно

$$t=\beta\left(t'-\frac{ux'}{c^2}\right),$$

следует, что события в различных местах, одновременные для S', вообще говоря, не одновременны для S. Действительно, если $dt'=0$, то

$$dt=-\frac{\beta\, u\, dx'}{c^2}. \tag{11.1}$$

Представляется интересным более подробно исследовать, как произошла эта разница в оценке одновременности. В п. 4 было объяснено, что согласно условию сравнение времени в двух местах осуществляется переносом часов из одного места в другое с бесконечно малой скоростью. Наши формулы базируются на этом условии, и конечно (11.1) будет верно только в том случае, если это условие выполняется. Появление неопределенности в отсчете одновременности обязано тому факту, что бесконечно малая скорость относительно S' не равна бесконечно малой скорости относительно S.

Рассмотрим, например, две точки A и B, покоящиеся относительно S' на расстоянии x' друг от друга. Положим, что часы находятся в A и движутся по направлению к B с бесконечно малой скоростью du' в течение времени x'/du'. Вследствие этого движения часы будут согласно (4.9) замедлять ход в отношении

$$\left(1 - \frac{du'^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

За время x'/du' полное отставание, таким образом, будет равно выражению

$$\left\{1 - \left(1 - \frac{du'^2}{c^2}\right)^{1/2}\right\} \frac{x'}{du'},$$

которое делается равным нулю, когда du' бесконечно мало. Наблюдатель S' может, следовательно, прямо пользоваться результатом сравнения часов, не делая поправок на их движение.

Рассмотрим теперь этот эксперимент с точки зрения наблюдателя S. Для него часы имели уже скорость $-u$, и потому время, показываемое часами, равно только $1 : \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}$ от истинного времени для S. После дифференцирования оказывается, что добавочная скорость du*) дает добавочное отставание на

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} u \frac{du}{c^2} \qquad (11.2)$$

секунд, отсчитываемых часами на каждую истинную секунду. Благодаря сокращению длины AB по Фицджеральду, расстояние, которое нужно пройти, будет равно $\frac{x'}{\beta}$, так что продолжительность движения будет

$$\frac{x'}{\beta\, du} \qquad (11.3)$$

истинных секунд.

Умножая (11.2) на (11.3), получим, что общее отставание, вызванное движением, будет равно $\frac{ux'}{c^2}$ секунд, отсчитанных часами, или

$$\frac{\beta u x'}{c^2} \text{ истинных секунд для } S. \qquad (11.4)$$

---

*) Заметим, что $du \neq du'$, во вместе с вим > 0.

Таким образом, в то время как S' может пользоваться непоправленным результатом сравнения, наблюдатель S должен благодаря переносу учесть поправку $\frac{\beta ux'}{c^2}$ из-за неправильности показания часов. Эта поправка представляет точную разницу в отсчетах одновременности двумя наблюдателями, данную уравнением (11 · 1).

На практике точное сравнение времени в различных местах производится не переносом часов, а электромагнитными сигналами — обычно беспроволочными сигналами времени для земли и световыми сигналами для различных мест солнечной системы или межзвездного пространства. Поместим, например, часы в точках A и B. Пусть из A отправляется сигнал в момент времени t_1, достигает затем точки B, когда часы в B показывают время t_B, отражается здесь и возвращается в точку A в момент t_2. Наблюдатель S', покоящийся относительно тех и других часов, сделает заключение, что момент t_B в точке B был одновременен с моментом $\frac{1}{2}(t_1+t_2)$ в точке A, так как он ведь принимает, что скорость светового сигнала одинакова в обоих направлениях. Но для наблюдателя S и те и другие часы движутся со скоростью u, поэтому он выводит, что на путь вперед требуется время $\frac{x}{c-u}$, а на обратный путь — время $\frac{x}{c+u}$.

Но мы имеем

$$\frac{x}{c-u}=\frac{x(c+u)}{c^2-u^2}=\frac{\beta^2 x}{c}(c+u),$$

$$\frac{x}{c+u}=\frac{x(c-u)}{c^2-u^2}=\frac{\beta^2 x}{c^2}(c-u).$$

Таким образом, момент t_B прибытия сигнала в точку B должен быть взят на $\frac{\beta^2 xu}{c^2}$ секунд позднее, чем момент времени $\frac{1}{2}(t_1+t_2)$, соответствующий половине пути. Эта поправка, которую вносит наблюдатель S, но не наблюдатель S', согласуется с формулой (11.4), если мы вспомним, что вследствие сокращения Фицджеральда

$$x=\frac{x'}{\beta}.$$

Таким образом, метод переноса часов и метод световых сигналов дают ту же самую поправку при вычислении одновременности наблюдателем S и наблюдателем S'. В обоих случаях вводится некоторое условие для вычисления разности времени в различных местах; это условие соответственно двум методам будет гласить, что, или 1) часы, перемещаемые с бесконечно-малой скоростью от одного места в другое, продолжают давать правильные отсчеты времени и в новом месте, или 2) скорость светового сигнала вдоль какой-либо линии одинакова в обоих направлениях*).

Ни одно из этих условий не является, само по себе, установлением наблюденного факта и не относится к какому-либо внутреннему свойству часов или света; это есть простое выражение правила, с помощью которого мы предполагаем произвести фиктивные деления времени во всем мире. Но взаимное согласие этих двух утверждений есть факт, который мог бы быть испытан наблюдением, хотя, вследствие очевидных практических затруднений это наблюдение не так легко непосредственно произвести. Мы здесь дали теоретическое доказательство этого совпадения, зависящее от справедливости основной аксиомы п. 1.

Обе различные формы нашего условия тесно связаны между собой. Вообще говоря, в любой системе отсчета времени изменение du скорости перемещения часов ведет к изменению скорости их хода, пропорциональному du, но существует некоторая скорость, для которой изменение скорости пропорционально du^2. Принимая такой отсчет времени, чтобы эта стационарная скорость соответствовала его собственному движению, наблюдатель налагает не которую симметрию на пространство и время по отношению к нем-самому, что можно сравнить с симметрией, налагаемой допущением постоянства скорости света во всех направлениях. Аналитически мы наложили такое же общее условие симметрии, принимая (4.6) вместо (4.7) для формы ds^2, что сделало наши

*) Основным случаем, где мы требуем для практических целей точного следования отсчетам времени в местах, далеко отстоящих от земли, является вычисление элементов и средних положений планет и комет.

При этом допускается, что скорость света в любом направлении равна 300 000 *км/сек* — предположение, которое базируется на условии (2). Все экспериментальные методы измерения скорости света определяют только среднюю скорость в обоих направлениях.

пространственно-временные отсчеты симметричными по отношению к интервалам и, вследствие этого, по отношению ко всем экспериментальным критериям.

12. КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ И МАССА.

Кроме протяженности в пространстве и времени, материя обладает инерцией. Мы покажем в дальнейшем, *что инерция так же, как и протяженность, выражается в терминах отношений интервалов*, но это относится к более поздней ступени нашей теории. Пока что мы дадим элементарный анализ вопроса, основанный больше на эмпирических законах сохранения количества движения и энергии, чем на какой-либо глубокой теории о природе инерции.

При обсуждении пространства и времени мы пользовались определенными идеальными аппаратами, которые можно было только несовершенно реализовать на практике, — твердыми масштабами и совершенным циклическим механизмом или часами, которые с абсолютной точки зрения всегда остаются одной и той же конфигурацией. Точно так же при обсуждении свойства инерции нам нужен такой идеальный материальный объект, скажем, идеально упругий биллиардный шар, инерциальные свойства которого остаются постоянными с абсолютной точки зрения. Та трудность, что реальные биллиардные шары не будут совершенно упругими, должна быть преодолена таким же образом, как и трудность с реальными не идеально твердыми масштабами. Идеальному биллиардному шару мы можем сопоставить некоторое постоянное число, так называемую *инвариантную* или *собственную* массу, которая будет определять его абсолютные инерциальные свойства; мы полагаем, что это число остается неизменным в течение всех жизненных перипетий шара, и если временно и изменяется под влиянием столкновений, то все же принимает прежнее значение к моменту исследования состояния тела.

Обычно определенные компоненты количества движения

$$M\frac{dx}{dt}, \; M\frac{dy}{dt}, \; M\frac{dz}{dt} \tag{12.1}$$

не могут удовлетворить какому-либо общему закону сохранения количества движения, кроме случая, когда масса M изменяется со скоростью. Но, взяв незначительно измененное определение

$$m\frac{dx}{ds},\ m\frac{dy}{ds},\ m\frac{dz}{ds}, \tag{12.2}$$

мы сможем удовлетворить закону сохранения количества движения одновременно во всех пространственно-временных системах, если m — инвариантное число. Это было показано в книге «Пространство, время и тяготение».

Сравнивая (12.1) с (12.2), получим

$$M = m\frac{dt}{ds}. \tag{12.3}$$

Мы называем m *инвариантной массой* (*собственной*), а M — *относительной массой*, или просто *массой*. Термин «инвариантный» или «собственный» обозначает неизменность при всяком преобразовании координат, и, в частности, одинаковость для всех наблюдателей; постоянство же в течение всей жизни тела является добавочным свойством массы m, хотя и приписываемым нашим идеальным биллиардным шарам, но которое мы вовсе не считаем верным для материи вообще.

Выбирая единицы длины и времени так, чтобы скорость света оказалась единицей, мы получим из (7.2)

$$\frac{ds}{dt} = (1 - v^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, по (12.3)

$$M = m\,(1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{12.4}$$

Таким образом, масса увеличивается со скоростью в той степени, как это дается Фицджеральдовым сокращением, и когда $v = 0$, то $M = m$. Инвариантная масса, таким образом, равна массе в состоянии покоя, так называемой покоящейся массе.

Естественно расширить (12.2) прибавлением четвертой компоненты следующим образом:

$$m\frac{dx}{ds},\ m\frac{dy}{ds},\ m\frac{dz}{ds},\ m\frac{dt}{ds}. \tag{12.5}$$

Согласно (12.3) четвертая компонента равна M. Таким образом, количество движения и масса (относительная масса) образуют вместе симметричное выражение, причем составляющие количества движения являются пространственными компонентами и масса—временной компонентой. Мы увидим ниже, что выражение (12.5) представляет собою «вектор» и законы сохранения количества движения и массы эквивалентны закону сохранения этого вектора.

В дальнейшем, мы дадим аналитическое доказательство закона изменения массы со скоростью, непосредственно из принципа сохранения массы и количества движения.

Пусть M_1 и M_1' будут значения массы тела, измеренные соответственно наблюдателями S и S'; v_1 и v_1' — скорости этих наблюдателей в направлении x.

Положив

$$\beta_1=\left(1-\frac{v_1^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}},\quad \beta_1'=\left(1-\frac{v_1'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}},\quad \beta=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

мы можем легко вывести из (6.2), что

$$\beta_1 v_1=\beta\beta_1'(v_1'-v).^{*)} \tag{12.6}$$

Пусть для некоторого числа таких частиц, движущихся по прямой, имеет место закон сохранения массы и количества движения с точки зрения измерений наблюдателя S', т. е. пусть $\Sigma M_1'$ и $\Sigma M_1'v$ будут постоянны.

Так как β и u постоянны, то отсюда следует, что величина $\Sigma M_1'\beta(v_1'-u)$ — постоянна. Следовательно, по (12.6) также постоянна и величина $\Sigma M_1'\beta_1\frac{v_1}{\beta_1'}$. (12.71)

Но так как количество движения должно сохраняться и для наблюдателя S, то мы видим, что

$$\Sigma M_1 v_1 \tag{12.72}$$

тоже должно быть постоянной.

---

*) Именно, для $\beta_1 v_1$ получаем:

$$\beta_1 v_1=\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left[\frac{\left(\frac{1-uv_1'}{c^2}\right)^2}{(v'_1-u)^2}-\frac{1}{c^2}\right]^{-\frac{1}{2}}=(v_1'-u).$$

$$\left[\left(1-\frac{uv_1'}{c^2}\right)-\left(\frac{v_1'-u}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=(v_1'-u)\left\{\left(1-\frac{v_1'}{c}\right)\left(1+\frac{u}{c}\right)\left(1+\frac{v_1'}{c}\right)\left(1-\frac{u}{c}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}=(v_1'-u)\beta_1'\beta. \quad (H.)$$

Результаты (12.71) и (12.72) будут согласоваться друг с другом, если

$$\frac{M_1}{\beta_1}=\frac{M_1'}{\beta_1'},$$

и легко видеть, что другого общего решения не может быть. Следовательно, для различных значений v_1 масса M_1 пропорциональна β_1, т. е.

$$M=m\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

где m есть постоянная для данного тела.

Чтобы вызвать заданное изменение скорости δv в первоначальном направлении движения, требуется импульс больший, чем для того, чтобы достичь такого же изменения δw в направлении, ему перпендикулярном. Действительно, составляющие количества движения в двух направлениях были первоначально равны

$$mv\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ и } 0,$$

а после приращения на δv и δw они станут равными

$$m(v+\delta v)\left[1-\{(v+\delta v)^2+(\delta w)^2\}/c^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

и

$$m\,\delta w\left[1-\{(v+\delta v)^2+(\delta w)^2\}/c^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Следовательно с точностью до величин второго порядка в δv и δw изменение составляющих количества движения будет равно

$$m\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\delta v \text{ и } m\left(1-\frac{v^2}{v^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\delta w,$$

или

$$M\beta^2\delta v,\quad M\delta w,$$

где β — фицджеральдовский множитель для скорости v. Коэффициент $M\beta^2$ раньше назывался *продольной массой*, M — *поперечной массой*; однако, продольная масса для общей теории не имеет особого значения, так что этот термин вышел из употребления.

13. ЭНЕРГИЯ.

Когда единицы выбраны так, что $c = 1$, мы имеем приближенио

$$M = m(1 - v^2)^{-\frac{1}{2}} = m + \frac{1}{2} mv^2, \tag{13.1}$$

если скорость v мала по сравнению со скоростью света. Второй член представляет собой кинетическую энергию, так что при изменении скорости изменение массы равно изменению энергии. Это указывает на тождественность массы и энергии. Следует напомнить, что в механике общая энергия системы остается неопределенной с точностью до произвольной аддитивной постоянной, так как там определяются только изменения энергии. При отождествлении энергии с массой мы устанавливаем для каждого тела аддитивную постоянную равной m, и m можно рассматривать как внутреннюю энергию тела.

Приближенный характер формулы (13.1) не нарушает правильности нашего рассуждения. Рассмотрим, например, столкновение двух идеальных биллиардных шаров. Закон сохранения массы (относительной) дает, что величина $\sum m(1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$ остается неизменной.

Закон же сохранения энергии дает сохранение величины

$$\sum m\left(1 + \frac{1}{2} v^2\right).$$

Если бы оба закона были совершенно точны, мы имели бы два уравнения, однозначно определяющие скорости двух шаров, так что эти скорости не могли бы изменяться при столкновении. Таким образом, эти два закона не будут независимы, но один из них является приближенной формой другого. Первый из них есть закон точный, так как он не зависит от выбора пространственно-временной системы отсчета. Следовательно, выражение $\frac{1}{2} mv^2$ для кинетической энергии в элементарной механике будет только приближенным значением, в котором пренебрегается членами v^4 и высших степеней.

Когда единицы длины и времени не подчинены условию, что

$c=1$, соотношение между массой M и энергией E имеет вид

$$M=\frac{E}{c^2}. \tag{13.2}$$

Таким образом, одному грамму соответствует энергия, равная 9.10^{20} эргам. В том, что обе величины измеряют одно и то же мировое соотношение, нет никакого противоречия тождественности массы и энергии. Мировые соотношения могут быть исследованы различными экспериментальными методами, и единицы грамм и эрг как раз и связаны с различными способами исследования соотношения «масса — энергия». Но когда измерение уже однажды было проделано, для нас несущественно, какой экспериментальный метод был для этого выбран, и граммы или эрги одинаково могут употребляться как единицы массы. В самом деле, числовые значения, полученные при определении энергии и массы, переводятся друг в друга так же, как измерения, сделанные аршинами и метрами.

Принцип сохранения массы, таким образом, стал совершенно эквивалентен принципу сохранения энергии. Однако, существует другое независимое соотношение, пожалуй более близко соответствующее первоначальной идее Лавуазье, когда он высказал закон сохранения материи. Я имею в виду неизменность собственной массы, приписанной нашему идеальному биллиардному шару, и которую мы не предполагаем общим свойством материи. Сохранение m есть случайное свойство, подобно твердости, сохранение же M есть неизменный закон природы.

Если тепловое излучение падает на биллиардный шар, то его температура повышается и возрастание кинетической энергии движения молекул увеличивает массу M. Инвариантная масса m также возрастает при этом, так как она ведь равна массе M для покоящегося тела. Здесь нет нарушения сохранения M, так как тепловое излучение имеет массу M_1, которая переходит к шару. Ниже мы покажем однако, что электромагнитные волны не имеют собственной массы, и прибавка к m возникла из ничего. Таким образом, в общем случае собственная масса не сохраняется.

До некоторой степени мы можем избежать этого несохранения, став на микроскопическую точку зрения. Тогда биллиардный шар можно рассматривать как большое число составных частей — электронов и протонов — каждый из которых, как можно думать, сохраняет ту же собственную массу за все время своего существования. Но собственная масса биллиардного шара не равна точно сумме собственных масс, ее составляющих*). Неизменность и постоянное подобие всех электронов представляется современным эквивалентом «сохранения материи» в духе Лавуазье. Все же неизвестно, выражен ли здесь какой-то общий закон природы. Мы готовы допустить возможность, что случайно протон и электрон могут соединиться и уничтожить друг друга. В этом случае масса M перешла бы в электромагнитные волны, излученные при такой катастрофе, в то время как собственная масса m исчезла бы совсем. Точно также, если бы мы могли синтезировать гелий из водорода, то 0,8% инвариантной массы уничтожилось бы, а соответствующая часть относительной массы превратилась бы в энергию излучения.

Мы видим, что хотя в рассмотренных специальных проблемах величина m предполагается вообще постоянной, сохранение ее имеет совершенно другой характер, чем универсальное сохранение M.

14. ПЛОТНОСТЬ И ТЕМПЕРАТУРА.

Рассмотрим объем пространства, ограниченного каким-либо инвариантным способом, например, заключенного в материальный ящик. Подсчет числа дискретных частиц, постоянно находящихся внутри ящика (т. е. движущихся вместе с ним), есть абсолютная операция; пусть полученное при этом абсолютное число будет равно N. Величина объема V ящика, зависящая от измерений в системе отсчета наблюдателя, будет уменьшена в отношении β для наблюдателя, движущегося относительно ящика и частиц (благодаря сокращению Фицджеральда для одного из измерений ящика). Вследствие этого плотность числа частиц $\Sigma = \frac{N}{V}$ подчиняется уравнению

$$\sigma' = \sigma\beta, \qquad (14.1)$$

где σ — плотность числа частиц для наблюдателя, находящегося

*) Это получается потому, что собственная масса каждого электрона есть его относительная масса, отнесенная к осям, движущимся вместе с электроном; собственная же масса биллиардного шара есть относительная масса, отнесенная к осям, покоящимся в биллиардном шаре, как в целом

в относительном движении, и σ — плотность числа частиц для наблюдателя, находящегося в покое относительно частиц.

Отсюда следует, что плотность массы ρ подчиняется уравнению

$$\rho' = \rho\beta^2, \tag{14.2}$$

так как масса каждой частицы уменьшается для движущегося наблюдателя в отношении β.

Величины, отнесенные к пространственно-временной системе наблюдателя, движущегося вместе с рассматриваемым телом, часто отмечаются приставкой «собственный» (по-немецки — Eigen); например: собственная длина, собственный объем, собственная плотность, собственная масса (= инвариантная масса).

Мы редко встречаемся с преобразованием температуры для движущегося наблюдателя. Вообще, слово температура очевидно означает собственную температуру, и движение наблюдателя не входит в рассмотрение.

В термометрии и в теории газов существенно употреблять измерительный прибор, по отношению к которому материя находится в среднем в покое, так как показания термометра, быстро движущегося через жидкость, не имеют никакого практического интереса. Но термодинамическая температура определяется уравнением

$$dS = \frac{dM}{T}, \tag{14.3}$$

где dS есть изменение энтропии при изменении энергии dM. Температура T, определенная этим уравнением, будет зависеть от системы отсчета наблюдателя. Энтропия, очевидно, подразумевается инвариантом, так как она зависит от вероятности статистического состояния системы, сравниваемого с другими возможными состояниями. Таким образом, температура T изменяется благодаря движению в той же самой мере, как dM, что дает нам уравнение

$$T' = \beta T. \tag{14.4}$$

Но применять такое преобразование к адиабатическому газовому уравнению $T = k\rho^{\gamma-1}$ было бы нецелесообразно, так как в этом случае T, очевидно, обозначает собственную температуру и ρ — собственную плотность.

Преобразование Лоренца, вообще говоря, бесполезно применять к макроскопическим, так называемым феноменологическим уравнениям, описывающим состояние материальной среды, и к коэффициентам, встречающимся в них (проницаемость, диэлектрическая постоянная, упругость, скорость звука). Такие уравнения, естественно, образуют более простой и важный вид в осях, движущихся вместе с материей. Преобразование к осям, движущимся относительно системы, вводит большие усложнения, не давая каких-либо очевидных преимуществ и представляет некоторый интерес разве лишь в виде математического упражнения.

15. ОБЩИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ.

Мы получаем преобразование координат, вводя новые координаты x_1', x_2', x_3', x_4', которые представляют собой какие-то функции старых координат x_1, x_2, x_3, x_4. Обратно, x_1, x_2, x_3, x_4 суть функции x_1', x_2', x_3', x_4'. Предполагается при этом, что кратные значения исключены, по крайней мере в рассматриваемой области, так что четверки координат (x_1, x_2, x_3, x_4) и (x_1', x_2', x_3', x_4') одно-однозначно соответствуют друг другу.

Если $x_1 = f_1(x_1', x_2', x_3', x_4')$; $x_2 = f_2(x_1', x_2', x_3', x_4')$; и т. д., то

$$dx_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1'} dx_1' + \frac{\partial f_1}{\partial x_2'} dx_2' + \frac{\partial f_1}{\partial x_3'} dx_3' + \frac{\partial f_1}{\partial x_4'} dx_4' \text{ и т. д.}; \quad (15.1)$$

что можно написать проще так:

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial x_1'} dx_1' + \frac{\partial x_1}{\partial x_1'} dx_2' + \frac{\partial x_1}{\partial x_3'} dx_3' + \frac{\partial x_1}{\partial x_4'} dx_4' \text{ и т. д.} \quad (15.2)$$

Подставляя (15.2) в (2.1), мы видим, что ds^2 будет однородной квадратичной функцией дифференциалов новых координат; и что новые коэффициенты g_{11}', g_{22}' и т. д. могут быть выражены, если это желательно, через старые.

Для примера рассмотрим обычное преобразование к осям, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω, т. е.

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1' \cos\omega x_4' - x_2' \sin\omega x_4' \\ y &= x_1' \sin\omega x_4' + x_2' \cos\omega x_4' \\ z &= x_3' \\ t &= x_4'. \end{aligned}\right\} \quad (15.3)$$

Отсюда следует:

$$dx = dx_1' \cos\omega x_4' - dx_2' \sin\omega x_4' + \omega(-x_1' \sin\omega x_4' - x_2' \cos\omega x_4')\, dx_4',$$

$$dy = dx_1' \sin \omega x_4' + dx_2' \cos \omega x_4' + \omega (x_1' \cos \omega x_4' - x_2' \sin \omega x_4') dx_4',$$
$$dz = dx_3',$$
$$dt = dx_4'.$$

Выбирая единицы пространства и времени так, чтобы $c = 1$, мы имеем для наших начальных неподвижных координат из уравнения (7.1)

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2.$$

Следовательно, подставляя величины, найденные выше, получим

$$ds^2 = -dx_1'^2 - dx_2'^2 - dx_3'^2 + \left\{1 - \omega^2\left(x_1'^2 + x_2'^2\right)\right\} dx_4'^2 + \\ + 2\omega x_2' dx_1' dx_4' - 2\omega x_1' dx_2' dx_4'. \qquad (15.4)$$

Памятуя, что все доступные наблюдению различия координатных систем должны сказываться в выражении интервала, мы заключаем, что эта формула должна заключать в себе все, отличающее вращающуюся систему координат от неподвижной.

В преобразовании (15.3) мы не обращали внимания на какое-либо сокращение масштабов длины или отставание часов, вызванное движением вместе с вращающимися осями. Поэтому здесь речь идет просто о формулах преобразования элементарной кинематики, так что x_1', x_2', x_3', x_4' представляют совершенно точно координаты, какими пользуются в обычной теории вращающихся осей. Но так как мы знаем уже, что элементарная кинематика является слишком грубой, то представляло бы интерес видоизменить формулы (15.3) так, чтобы учесть эти небольшие изменения масштабов и часов. Краткое рассмотрение показывает, что это предложение невыполнимо. Действительно, в п. 14 было показано, что если x_1', x_2', x_3', x_4' обозначают прямоугольные координаты и время, определенные по непосредственным отсчетам масштабов и часов, то

$$ds^2 = -dx_1'^2 - dx_2'^2 - dx_3'^2 + c^2 dx_4'^2, \qquad (15.45)$$

так что координаты, дающие какую-либо другую формулу для интервала, не могут представлять собой непосредственных отсчетов масштабов и часов. Как было показано в конце п. 5, единственными преобразованиями, дающими интервал вида (15.45), будут преобразования Лоренца. Если мы хотим проделать преобразования более общего вида, такие, как например (15.3), то мы по необходимости должны будем отказаться от связи координатной системы с непосредственными отсчетами масштабов и часов. Бесполезно пытаться «улучшить» преобразование перехода к вращающимся осям, так как такое улучшение может только привести нас обратно к координатной системе, подобной системе с неподвижными осями, с которой мы начали.

Непригодность вращающихся осей при измерениях с масштабами и часами может быть рассмотрена и с физической точки зрения. Мы не можем иметь масштаб или часы в покое во вращающейся системе, не удерживая их, т. е. не подвергая молекулярной бомбардировке, что является «внешним влиянием», действием которого на измерения нельзя пренебречь.

В системе координат x, y, z, t масштаб и часы являются естественными средствами исследования. В других системах они будут, в отсутствии внешних воздействий, продолжать измерять ds; но отсчеты ds теперь не будут уже связаны столь простым образом с разностями координат, которые мы желаем определить, и вопрос сведется к более сложным вычислениям, требуемым формулой (2.1). Следовательно, масштаб и часы до некоторой степени теряют свое исключительное положение, и так как они являются довольно сложными приборами, то лучше будет обратиться к более простым средствам исследования. Мы рассмотрим поэтому сейчас два простые вспомогательные объекта — движущуюся материальную частицу и световой импульс.

В обычных прямоугольных координатах и времени x, y, z, t невозмущенная частица движется с равномерной скоростью, так что ее траектория дается уравнениями

$$x = a + bt, \qquad y = c + dt, \qquad z = e + ft, \tag{15.5}$$

т. е. уравнениями прямой линии в четырех измерениях. При подстановке выражений (15.3) мы могли бы найти траекторию во вращающихся координатах, также при подстановке из (15.2) мы получили бы дифференциальные уравнения для любых интересующих нас координат. Но можно пойти другим путем. Дифференциальные уравнения траектории могут быть написаны в виде

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{d^2t}{ds^2} = 0, \tag{15.6}$$

так как отсюда по интегрировании, принимая во внимание условия (7.1), мы получаем обратно уравнения (15.5).

Уравнения (15.6) содержатся в одном единственном утверждении, что для всех произвольно малых вариаций траектории, которые обращаются в нуль на начальном и конечном пределах, выражение

$$\int ds \text{ стационарно} \tag{15.7}$$

— хорошо известное свойство прямой линии.

Получая условие (15.7), мы свободно пользовались геометрией системы x, y, z, t, данной уравнением (7.1), но так как окончательный результат вовсе не содержит координат, то он должен оставаться неизменным для любой системы координат, которой мы будем пользоваться. Чтобы получить в явном виде уравнения траектории в какой-либо данной системе координат, мы должны подставить в (15.7) соответствующее выражение (2.1) для ds и применить затем правила вариационного исчисления. Это вычисление мы проделаем в п. 28.

Путь светового импульса, будучи прямой линией в четырех измерениях, также удовлетворяет условию (15.7); но, так как световой импульс имеет особую скорость c, то это еще вносит добавочное условие, полученное в п. 7, а именно:

$$ds = 0. \tag{15.8}$$

Здесь опять окончательный результат не зависит от какой-либо координатной системы.

Таким образом, мы для поведения движущейся частицы и светового импульса получили уравнения (15.7) и (15.8), которые должны иметь место независимо от выбора координатной системы. Показания наших двух новых вспомогательных объектов так же связаны с интервалом, как в п. 3 были с ним связаны показания масштабов и часов. Нужно, однако, отметить, что в то время, как употребление двух старых эталонов зависит только от правильности основной аксиомы, употребление новых эталонов зависит от справедливости эмпирических законов движения частиц и распространения света. В дедуктивной теории такое обращение к эмпирическим законам является недостатком, от которого мы должны будем стремиться избавиться

16. СИЛОВЫЕ ПОЛЯ.

Положим, что наблюдатель выбрал определенную систему отсчета пространства-времени (x_1, x_2, x_3, x_4), и что ее геометрия дана уравнением

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + \ldots + 2g_{12}dx_1dx_2 + \ldots \tag{16.1}$$

Пусть теперь наблюдатель ошибочно считает, что геометрия системы дается уравнением

$$ds_0^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2, \tag{16.2}$$

так как он лучше знаком из математики с геометрией, основанной на этой формуле. Мы пользуемся обозначением ds_0 для отличия этой ошибочной величины интервала. Так как интервалы можно сравнивать экспериментальными методами, то наш наблюдатель должен скоро открыть, что ds_0 не может быть согласовано с результатами наблюдений, что и доказывает его ошибку. Но человеческий разум не так легко расстается с заблуждениями. Более вероятно то, что наш наблюдатель будет упорствовать в своем мнении и приписывать расхождение с наблюдениями какому-нибудь воздействию, имеющемуся налицо и влияющему на поведение его объектов исследования. Он будет вводить, так сказать, сверхъестественную причину, которую можно будет винить затем в последствиях его ошибки. Посмотрим, как именно он может назвать эту причину.

Из четырех рассмотренных пробных тел движущаяся частица, в общем, наиболее чувствительна к небольшим изменениям геометрии, и при работе с нею наблюдатель раньше всего откроет расхождения. Путь, предначертанный для нее нашим наблюдателем, определится из условия, что

$$\int ds_0 \text{ стационарно,}$$

т. е. будет прямой линией в координатах (x_1, x_2, x_3, x_4). Частица, конечно, не подчиняется этому условию и движется по другому пути, определенному из условия, что

$$\int ds \ldots \text{стационарно.}$$

Поэтому, несмотря на то, что частица, повидимому, не подвержена внешним воздействиям, ее путь отклоняется от «равномерного движения по прямой линии». Мы называем *силой* любое воздействие, которое вызывает отклонение от равномерного движения по прямой линии, в соответствии с определением силы Ньютона. Таким образом, причина, возникшая вследствие ошибки нашего наблюдателя, описывается как «силовое поле». Но силовое поле не всегда вводится вследствие недоразумения, как в вышеописанном случае. Иногда оно сознательно вводится теоретиками, как например центробежная сила. Однако, исключение выражения «силовое поле» из нашего словаря принесло бы мало пользы и много неудобств. Поэтому мы только некоторым образом легализируем способ действий нашего наблюдателя. Мы назовем (16.2) *абстрактной геометрией* системы координат (x_1, x_2, x_3, x_4); она может быть произвольно выбрана наблюдателем. *Естественная же геометрия* дается формулой (16.1).

Силовое поле представляет собой, следовательно, расхождение между естественной геометрией системы координат и абстрактной геометрией, произвольно ей приписанной.

Силовое поле, таким образом, возникает благодаря определенному расположению нашего ума. Если бы принятая нами координатная система не интерпретировалась неверно по сравнению с тем, чем она является в действительности, силового поля не существовало бы. Если мы не будем рассматривать наших вращающихся осей так, как если бы они были невращающимися, центробежной силы не возникнет.

Координаты, для которых естественная геометрия дается уравнением

$$ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2,$$

называются галилеевыми координатами. Они совпадают с теми, которые мы до сих пор называли обыкновенными прямоугольными координатами и временем (причем скорость света c была положена равной единице). Так как эта геометрия нам привычна и хорошо приспособлена к общепринятым представлениям о пространстве, времени и движении, то мы обычно выбираем геометрию Галилея, когда нам предстоит приписать абстрактную геометрию, или же мы пользуемся ее небольшим видоизменением, например, заменяем прямоугольные координаты полярными.

В п. 4 было показано, что при постоянных $g_{\mu\nu}$ координаты могут быть выбраны так, что геометрия Галилея будет действительно естественной геометрией. В этом случае нет надобности вводить силовое поле для того, чтобы спокойно пользоваться нашим обычным представлением; если же мы все же намеренно выберем не-галилеевы координаты и припишем им абстрактную галилееву геометрию, то мы сразу признаем искусственный характер силового поля, введенного для компенсации расхождений. В более общих случаях оказывается невозможным осуществить условия п. 4 точно для всей области, исследуемой нашими экспериментами; в этих случаях никаких галилеевых координат не существует. Тогда обычно берут некоторую произвольную систему (предпочтительно приближающуюся к галилеевой системе) и приписывают ей абстрактную геометрию галилеевой системы. Введенное таким образом силовое поле называется «тяготением».

Необходимо отметить, что прямоугольные координаты и время в той форме, в которой ими обычно пользуются, вряд ли могут рассматриваться как хорошее приближение к галилеевой системе, так как для компенсации ошибки требуется мощная сила земного тяготения.

Обычно координатам (например времени) дают наименование в соответстви с *абстрактной геометрией*, приписываемой системе. Естественная геометрия, вообще говоря, несколько сложнее и для нее номенклатура не разработана столь подробно. Таким образом, когда мы какую-нибудь координату называем «временем», мы либо подразумеваем при этом, что она удовлетворяет рассмотренным в п. 4 экспериментальным требованиям, либо предполагаем, что всякое отклонение от этих требований должно быть приписано вмешательству силового поля. В последнем случае «время» есть произвольное название, полезное тем, что оно делает возможным установление последовательной терминологии для скорости, ускорения и т. д.

Рассмотрим, например, такой случай: наблюдатель, расположенный на земле, нашел координатную систему x_1, x_2, x_3, x_4, вполне удовлетворяющую его требованиям. Убежденный, что он действительно имеет дело с прямоугольными координатами и временем, наблюдатель обозначает их через x, y, z, t, и вся его дальнейшая терминологии — прямая линия, окружность, плотность, равномерная скорость и т. д. согласуется с этим отождествлением.

Однако, как было показано в п. 4, эта терминология только в том случае может находиться в согласии с измерениями, произведенными с помощью часов и масштабов, если удовлетворено условие (16.2); с другой стороны, если (16.2) выполнено, то траектории свободных частиц должны быть прямыми линиями. Опыт, однако, сразу показывает, что этот вывод не соответствует действительности: траектории свободных частиц будут не прямыми, а параболами. Но вместо того, чтобы признать приговор эксперимента и согласиться, что величины x_1, x_2, x_3, x_4 не являются тем, чем он их предполагал, наш наблюдатель для объяснения неудачи испытания вводит силовое поле. Некоторую часть этого силового поля можно было бы устранить, если бы наблюдатель с самого начала ввел несколько иную координатную систему (не вращающуюся с землей). Поскольку силовое поле возникает в связи с вращением координатной системы, оно обычно признается математической фикцией, называемой центробежной силой. Но имеется некоторый остаток этого поля, который не может быть устранен никаким выбором координат, ибо не существует такой координатной системы, которая была бы пригодна для больших областей и обладала бы простыми свойствами, приписанными нами величинам x, y, z, t. Внутренняя природа пространства-времени вблизи земли не такова, чтобы можно было ввести координаты с галилеевой геометрией. Это неустранимое силовое поле и есть поле земного тяготения. Утверждение, что пространство-время вокруг земли «искривлено», — т. е. не допускает галилеевых координат, — не является гипотезой; напротив, оно эквивалентно опытному факту существования неустранимого силового поля, в духе ньютонового определения силы. Именно этот опытный факт требует введения в теорию не-галилеева пространства-времени и не-эвклидова пространства.

17. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ.

В п. 15 мы установили законы движения свободных материальных частиц и световых импульсов в форме, не зависящей от выбора координат. Так как в дальнейшем многое будет зависеть от правильности этих законов, то желательно рассмотреть, какие у нас имеются основания считать их точными и универсальными. Здесь можно итти по трем путям:

a) В главах IV и VI будет показано, что эти законы вытекают совершенно строго из более глубокого изучения природы материи и электромагнитных полей; иначе говоря, что лежащие в их основе гипотезы могут быть выведены из еще более основных предположений.

b) Траектория движущейся частицы или светового импульса определяется однозначно начальными условиями, и, повидимому, невозможно с помощью интервалов определить однозначно какую-нибудь другую траекторию, кроме той, которая задана уравнениями (15.7) и (15.8).

c) Мы можем вынести эти законы индуктивно из опыта.

Если мы полагаемся исключительно на экспериментальную очевидность, мы не можем требовать точности от законов. Очевидно, всегда остается возможность малых поправок к законам, слишком незначительных, чтобы повлиять на результаты производившихся опытов. Убеждение в абсолютной точности уравнений (15.7) и (15.8) может быть оправдано только теоретическими соображениями (*a* или *b*). Но для нас важнее универсальность экспериментальных законов, чем их точность; мы должны предостеречь от неосторожных обобщений законов на условия, существенно отличные от тех, при которых они были установлены опытом.

Мы вывели (15.7) из уравнений (15.5), описывающих наблюдаемое поведение частицы в отсутствии силового поля. Мы допускаем, что это уравнение справедливо во всех случаях. В этом обобщении рискованным моментом является не введение силового поля, так как последнее может быть результатом установки нашего сознания, о котором частица конечно не имеет никакого понятия. Рискованный момент заключается в переходе от тех областей мира, в которых возможны галилеевы координаты (x, y, z, t) к существенно отличным областям, в которых такие координаты не имеют места, иначе говоря, от плоского пространства-времени к неплоскому.

Принцип эквивалентности утверждает, что это обобщение законно. Он по существу представляет собой гипотезу, которая должна проверяться опытным путем каждый раз, как только представится возможность. Кроме того, этот принцип нужно считать скорее догадкой, чем догмой, не допускающей исключений. Возможно, что некоторые явления определяются сравнительно простыми уравнениями, в которые не входят компоненты кривизны мира; эти уравнения имеют одинаковый вид для плоских и для искривленных областей мира. Именно к таким уравнениям и применим принцип эквивалентности. Предположение о том, что свободное движение частиц и распространение света подчиняются законам такого простого типа, является весьма правдоподобным; в соответствии с этим уравнения (15.7) и (15.8) будут применимы во всех случаях. Но существуют и более сложные явления, подчиняющиеся уравнениям, в которые входят компоненты кривизны мира. Члены, содержащие эти компоненты, будут отсутствовать в уравнениях, описывающих эксперименты, произведенные в плоских областях; при переходе же к общему случаю эти члены должны быть вновь восстановлены. Очевидно, должны существовать такие явления, которые позволяют отличать плоский мир от искривленного; в противном случае, мы не могли бы ничего знать о кривизне мира. К этим явлениям принцип эквивалентности неприменим.

Таким образом, принцип эквивалентности утверждает, что *некоторые* из основных дифференциальных уравнений физики имеют одинаковый вид для искривленной области мира и для «соприкасающейся» с ней плоской области мира *). Конечно общего непогрешимого правила для обобщения экспериментальных законов не существует, но принцип эквивалентности указывает на некоторые возможности для таких обобщений, и его указания могут иногда оказаться верными, а иногда нет.

Принцип эквивалентности сыграл большую роль при построении общей теории относительности, но теперь, когда мы уже выработали новый взгляд на природу мира, он стал менее необходим. Наше изложение в этой книге в основном дедуктивно. Мы исходим из общей теории строения мира и приходим к экспериментальным следствиям, так что наш путь ведет от общих законов к частным, а не наоборот.

18. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Исследование внешнего мира в физике есть скорее исследование *структуры*, чем *субстанции*. Структура может быть представлена как совокупность соотношений и вещей, между которыми имеются эти соотношения; в соответствии с этим мы и пытаемся

*) Правильные уравнения для искривленного мира необходимо включают, как частный случай, уже полученные уравнения для плоского мира. Практически мы требуем от принципа эквивалентности указаний о том, применимы ли уравнения плоского мира в их форме и в общем случае или же они должны быть обобщены.

свести все явления к функции соотношений, которые мы называем интервалами, и вещей, которые мы называем событиями.

Если два тела обладают одинаковой структурой во всем, что касается совокупности интервальных соотношений, то, при условии, что наша основная гипотеза правильна, они должны иметь совершенно одинаковые наблюдаемые свойства *). Этим доказывается, что экспериментальные измерения длины и длительности эквивалентны измерениям интервальных соотношений.

Мы приписываем событиям четыре отождествляющих числа или координаты, причем это сопоставление является в широких пределах произвольным. Связь между нашими физическими измерениями интервала и системой отождествляющих чисел выражается общей квадратичной формой (2.1). В частности, когда эти отождествляющие числа могут быть определены так, что в квадратичной форме исчезают члены, содержащие произведения дифференциалов, и остаются только четыре квадрата, координаты будут иметь метрические свойства прямоугольных координат и времени, и должны быть отождествлены в соответствии с этим. Если существует одна такая система, то существует и бесконечное множество других, связанных с ней преобразованием Лоренца, так что нет универсальной пространственно-временной системы отсчета. Мы рассмотрели подробно соотношения между этими различными пространственно-временными системами отсчета. Мы показали, что должна существовать особая скорость, имеющая то замечательное свойство, что ее значение одинаково для всех этих систем, и на основании опыта Майкельсона — Морли, а также опыта Физо, мы нашли, что этим отличительным свойством обладает скорость света.

Однако, невозможно найти такие координаты, которые во всем мире удовлетворяли бы общепринятым определениям прямоугольных координат и времени. В таких случаях мы обычно понимаем наши определения несколько шире и приписываем отступления существующему в области силовому полю. В таком случае у нас уже не будет определенного критерия для решения вопроса о том, какие координаты выбрать в качестве прямоугольных коор-

---

*) Сейчас это утверждение относится только к свойствам протяженности (в пространстве и во времени). Но позже будет показано, что оно справедливо в отношении всех механических свойств. Электромагнитные свойства требуют особого рассмотрения

динат и времени; потому что, каково бы ни было расхождение, его всегда можно приписать соответственно подобранному силовому полю. Силовое поле при этом будет меняться в зависимости от выбора координат; но в общем случае невозможно будет избавиться от него (в большой области) каким-либо выбором координат. Это неустранимое силовое поле приписывается тяготению. Необходимо отметить, что гравитационное действие массивного тела представляет собой, собственно говоря, не какое-либо определенное силовое поле, но свойство неустранимости силового поля. Мы найдем позже, что неустранимость силового поля эквивалентна тому, что на языке геометрии называется кривизной пространственно-временного многообразия.

Для более полного исследования этих проблем нам понадобится особое математическое исчисление, к изложению которого, с самого начала, мы и приступим.

Глава II.

ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

19. КОНТРАВАРИАНТНЫЕ И КОВАРИАНТНЫЕ ВЕКТОРЫ.

Рассмотрим преобразование одной системы координат x_1, x_2, x_3, x_4 в другую — x_1', x_2', x_3', x_4'.

Дифференциалы (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4) преобразовываются согласно уравнениям (15.2), т. е.

$$dx_1' = \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x_1'}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial x_1'}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial x_1'}{\partial x_4} dx_4 \text{ и т. д.}$$

что можно переписать короче:

$$dx_\mu' = \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial x_\mu'}{\partial x_\alpha} dx_\alpha;$$

придавая μ последовательно значения 1, 2, 3, 4, получим четыре таких уравнения.

Всякая совокупность четырех величин, преобразуемых по этому закону, называется *контравариантным вектором*.

Таким образом, если четверка (A^1, A^2, A^3, A^4) переходит в новой системе координат в (A'^1, A'^2, A'^3, A'^4), причем

$$A'^\mu = \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial x_\mu'}{\partial x_\alpha} A^\alpha, \tag{19.1}$$

то совокупность (A^1, A^2, A^3, A^4), сокращенно обозначаемая через A^μ, представляет собой контравариантный вектор. Верхние значки у букв справа (которые, конечно, не являются показателями степени) мы сохраним для обозначения контравариантных векторов.

Если φ есть инвариантная функция точки, т. е. если она имеет в каждой точке определенное значение, не зависящее от выбранной системы координат, то четыре величины

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_4}\right)$$

преобразуются согласно уравнениям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1'} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1'}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_1'}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_1'}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial x_4}{\partial x_1'}\frac{\partial\varphi}{\partial x_4} \text{ и т. д.,}$$

что можно переписать короче так:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu'} = \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\mu'}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}$$

Всякая совокупность четырех величин, преобразуемых по этому закону, называется *ковариантным вектором.*

Поэтому, если A_μ есть ковариантный вектор, то закон его преобразования можно представить в следующем виде:

$$A_\mu' = \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\mu'}A_\alpha. \qquad (19.2)$$

Таким образом, мы имеем два различных типа векторов, отличаемых друг от друга при помощи значка внизу или наверху. Первый же приведенный пример контравариантного вектора dx_μ представляет собой исключение из указанного нами правила, согласно которому значок внизу указывает на ковариантность, а значок наверху — на контравариантность. Подобных исключений, могущих ввести читателя в заблуждение, больше нет, поэтому запомнить эту особенность dx_μ будет не трудно; но иногда все же будет удобно явно указывать на контравариантность этой величины и писать

$$dx_\mu \equiv (dx)^\mu. \qquad (19.3)$$

Вектор может определяться или какой-нибудь совокупностью четырех величин, связанных с некоторой точкой в пространстве-времени, или же совокупностью четырех функций, непрерывно меняющихся от точки к точке. Соответственно этому различают «изолированный вектор» и «векторное поле».

Для иллюстрации понятия ковариантного вектора мы взяли градиент инварианта $\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$, однако ковариантный вектор не является обязательно градиентом инварианта.

Читатель вероятно уже знаком с понятием вектора, но едва ли ему знакомо различие между ковариантными и контравариантными векторами. Это происходит оттого, что в элементарном анализе рассматривается только прямоугольная система координат, а для преобразования одной прямоугольной системы координат в другую правила (19.1) и (19.2) эквивалентны друг другу.

С геометрической точки зрения каждый знаком именно с контравариантным вектором. Действительно, простейший вектор перемещения или расстояния между двумя точками (с учетом направления) определяется при помощи совокупности величин (dx_1, dx_2, dx_3) *), которая, как мы видели, является контравариантным вектором. Ковариантный вектор является новым понятием, которое нельзя интерпретировать столь наглядно геометрически.

20. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА.

Формальные определения предыдущего параграфа едва ли значительно облегчают понимание того, что представляет собой в действительности вектор. Попытаемся рассмотреть этот вопрос более полно, разобрав сперва математическое понятие вектора (которое для нас особенно важно), а затем, как более трудное, и физическое понятие вектора.

Предположим, что нам дана совокупность четырех чисел (A_1, A_2, A_3, A_4), связанных с некоторой точкой и с определенной системой координат. Изменим систему координат и постараемся определить, как изменились эти числа в новой системе координат. Очевидно, что такой вопрос не имеет смысла, так как числа не могут как-нибудь «измениться» сами собой. Взятая нами совокупность чисел останется прежней, если только мы сами не заменим ее другой. Но математик может подойти к вопросу несколько иначе, говоря: «когда я пользуюсь координатами x_1, x_2, x_3, x_4, то мне удобно говорить о числах A_1, A_2, A_3, A_4, а когда я пользуюсь координатами x_1', x_2', x_3', x_4', то на некоторой стадии моего исследования оказывается, что мне теперь уже удобнее говорить о четы-

*) Согласно обычному разложению вектора перемещения на компоненты по косоугольным направлениям

рех новых числах A_1', A_2', A_3', A_4'. Поэтому, для краткости, я предлагаю обозначить обе совокупности чисел одним тем же символом А». «Но—возразим мы ему — это будет совершенно правильно только в том случае, если вы скажете нам точно, какие числа вы будете обозначать символом А в каждой из тех систем координат, которыми вы будете пользоваться. Если же это не будет выполнено, то мы не будем знать, о чем вы говорите».

Предположим, что математик удовлетворил наше требование и представил список чисел, которые будут соответствовать символу А в указанных системах координат. Обозначим эти числа буквами. Итак, пусть символу А будут соответствовать *)

X, Y, Z в некоторой прямоугольной системе координат,

R, Θ, Φ в некоторой полярной системе координат,

Λ, M, N в некоторой эллиптической системе координат...

«Но таким путем я никогда не закончу этот список, — заявит нам математик, — так как число координатных систем, которыми я хочу пользоваться, бесконечно. Теперь мне ясно, что я должен подойти к поставленной задаче иначе. Я дам вам общее правило для нахождения новых значений, соответствующих А при преобразовании одной системы координат в другую. Таким образом для меня окажется необходимым дать всего только одну совокупность значений, и вы сможете сами найти все остальные».

Говоря о *правиле*, математик тем самым отказывается от права придавать А те или иные значения, согласно своему минутному капризу. Он связывает себя некоторого рода закономерностью. В самом деле, мы в праве предполагать, что наш нормально мыслящий собеседник руководствуется каким-то правилом при выборе значений для А. Предположив, что это в действительности имеет место, зададим себе вопрос, можно ли отгадать то правило, которое выберет математик, если нам заранее не известно, какую задачу с величиной А он пытается разрешить. Я думаю, что можно. Не обязательно иметь какие-либо сведения о содержании этой задачи или о том, относится ли она к физическому миру или к чему-нибудь совершенно отвлеченному.

Для нас достаточно знать немного природу самого математика.

Какое же правило он может принять? Рассмотрим величины,

---

*) Мы проведем наше рассуждение ради простоты для случая трех измерений.

которые могут встретиться в этом правиле. Прежде всего это будут две совокупности чисел, между которыми нужно установить связь; обозначим их через X, Y, Z и R, Θ, Φ. Ничего не было сказано о том, что они являются какими-нибудь аналитическими функциями; насколько мы знаем, они являются отдельными числами. Поэтому вводить производные этих величин не имеет смысла. Последние рассматриваются как числа, локализованные в одной и той же точке пространства (x, y, z) или (r, θ, φ), иначе едва ли мог возникнуть вопрос о координатах. Эти числа изменились потому, что система координат изменилась *в этой точке*. Это изменение определяется такими выражениями, как $\frac{\partial x}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial y}$ и т д. Интегральные координаты x, y, z, r, θ, φ не могут войти сами по себе, так как они выражают соотношения данной точки с далеким началом координат, а мы рассматриваем лишь изменения вблизи точки, у которой локализовано (X, Y, Z). Таким образом, правило должно содержать лишь величины X, Y, Z, R, Θ, Φ тем или иным образом соединенные с взаимными производными от x, y, z. Одним из таких правил могло быть следующее:

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{\partial r}{\partial x} X + \frac{\partial r}{\partial y} Y + \frac{\partial r}{\partial z} Z \\ \Theta &= \frac{\partial \theta}{\partial x} X + \frac{\partial \theta}{\partial y} Y + \frac{\partial \theta}{\partial z} Z \\ \Phi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} X + \frac{\partial \varphi}{\partial y} Y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} Z \end{aligned}\right\} \tag{20.1}$$

Применяя это же к преобразованию (r, θ, ψ) в (λ, μ, ν), получим

$$\Lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial r} R + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \Theta + \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \Phi, \tag{20.2}$$

откуда, подставляя значения R, Θ, Φ из (20.1) и собирая члены при X, Y, Z, будем иметь:

$$\begin{aligned} \Lambda = &\left(\frac{\partial \lambda}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) X + \\ &+ \left(\frac{\partial \lambda}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) Y + \\ &+ \left(\frac{\partial \lambda}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) Z = \\ &= \frac{\partial \lambda}{\partial x} X + \frac{\partial \lambda}{\partial y} Y + \frac{\partial \lambda}{\partial z} Z \text{ и т. д.} \end{aligned} \tag{20.3}$$

Итак, мы получили такую же формулу, какую должны были бы получить, применяя правило к непосредственному преобразованию координат (x, y, z) в (λ, μ, ν). Таким образом, правило оказалось внутренне согласованным *). Но обнаружение этого специального правила, определяемого формулой

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

произошло лишь вследствие счастливой случайности и очевидно среди бесконечного количества других формул едва ли будет легко найти такие, которые также обладали бы такого рода «самосогласованностью».

Приведенное выше правило совпадает с тем, которое уже было дано для контравариантного вектора (19.1). Правило для ковариантных векторов также самосогласовано. Других самосогласованных правил для преобразования совокупности трех чисел (или четырех, в случае четырех координат) повидимому не существует **).

Итак, мы видим, что если математик примет во внимание необходимость самосогласованности для своего правила, то он неизбежно должен сделать свою величину **A** контравариантным или ковариантным вектором. Выбор между тем или другим случаем зависит исключительно от его усмотрения. Математик может получить более широкий выбор, если пренебрежет свойством самосогласованности и будет рассматривать некоторую избранную систему координат x, y, z, утверждая, что значения в другой системе координат должны всегда получаться при применении правила прямо к X, Y, Z без допущения промежуточных преобразований. В действительности он этого не делает, быть может,

*) Оно ведет, следовательно, к одному и тому же результату независимо от того, преобразуем ли мы к новой координатной системе непосредственно, или через посредство промежуточных систем координат. (*Н.*)

**) Если не принимать во внимание, что мы можем умножить нашу формулу на любую степень якобиана преобразования. Полученный результат также будет самосогласованным, так как:

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, \theta, \varphi)} \frac{\partial (r, \theta, \varphi)}{\partial (\lambda, \mu, \nu)} = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (\lambda, \mu, \nu)}.$$

Совокупности чисел, преобразуемые при помощи этого добавочного умножения, представляют вырожденные случаи тензоров высших рангов, рассматриваемых ниже.

потому, что никогда не может согласиться с мыслью, что какая-то частная система координат заслуживает такого специального отличия.

Теперь мы видим, что вектор с математической точки зрения есть общее название для бесконечного числа совокупностей величин, причем каждая совокупность сопоставляется с одной из бесконечного числа координатных систем. Произвольность этого сопоставления исключается постулатом, что имеется некоторое правило, которому мы следуем, и что ни одна система координат не получает никакого специального отличия. Говоря математическим языком, преобразования должны составлять *группу*. Величина (R, Θ, Φ) *ни в каком отношении не является той же самой величиной, как* и (X, Y, Z); они имеют общее название и некоторую аналитическую связь, но всякое представление, подобное тождественности, совершенно исключено из математического понятия о векторе.

21. ФИЗИЧЕСКОЕ ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА.

Компоненты силы (X, Y, Z), (X', Y', Z') и т. д. в различных системах декартовых координат, прямоугольных или косоугольных, образуют контравариантный вектор. Это ясно из того, что в элементарной механике сила разлагается на компоненты по правилу параллелограмма сил таким же способом, как и перемещение dx_μ, а мы видели, что dx_μ есть контравариантный вектор. Поскольку рассматривается лишь математическое понятие вектора, величины (X, Y, Z) и (X', Y', Z') не следует рассматривать как тождественные в каком-либо отношении, но при обсуждении вопроса с физической точки зрения мы должны помнить, что обе величины выражают некоторого рода мировое условие или соотношение и что это соотношение должно быть одним и тем же, независимо от того, применяем ли мы для его описания величины (X, Y, Z) или (X', Y', Z'). Физический вектор представляет собой эту смутно понимаемую сущность явления, которая не зависит от системы координат и стоит за нашими измерениями силы.

Свойство мира не может быть непосредственно выражено в математическом уравнении; в последнее может входить только *мера* этого свойства. Всякое число или совокупность чисел, которые могут служить для однозначного определения такого свойства, могут быть названы его мерой. Применяя термин «свойство мира», мы стараемся как можно менее связать себя, включая в этот термин все то, что так или иначе определяет значения наблюдаемых физических величин во внешнем мире.

Простейшим будет тот случай, когда рассматриваемое свойство мира может быть задано одним единственным числом. Возьмем два таких свойства, представляющих соответственно длину волны λ и период T световой волны. Имеем уравнение

$$\lambda = 3 \cdot 10^{10} \cdot T. \tag{21.1}$$

Это уравнение справедливо только тогда, когда числам приписываются значения по определенному закону (в системе CGS). Но оно может быть записано в более общей форме:

$$\lambda = cT, \tag{21.2}$$

где c — скорость, имеющая значение $3 \cdot 10^{10}$ в системе CGS. Это уравнение дает общий вид всех частных уравнений, подобных (21.1). Для каждого нового задания системы мер или системы единиц c имеет различное значение. Метод определения изменения c при переходе к новой системе единиц хорошо известен. В согласии с ним c приписывается *размерность*: «длина/время», и простое правило дает нам возможность определить, как изменяется эта величина c при изменении единиц, в которых измеряются λ и T. Именно: для всякого уравнения общего характера полная размерность каждого члена должна быть одной и той же.

Тензорный анализ распространяет этот *принцип размерностей* на изменения системы мер более общего характера, чем простое изменение единиц. Существуют такие свойства мира, которые не могут быть определены при помощи единственной числовой меры; для некоторых необходимо 4, для других 16, 64 и т. д. чисел. Множество этих чисел таково, что оно не может быть расположено в виде некоторого простого линейного ряда. Рассмотрим теперь уравнение между числовыми мерами двух мировых соотношений, для которых требуется по четыре таких числа. Уравнение, если ему придан необходимый общий вид, должно быть справедливо для всякой возможной системы мер. Это будет иметь место в том случае, если при преобразовании системы мер обе части уравнения преобразуются одинаковым образом, т. е. если мы должны произвести один и тот же ряд математических операций над обеими сторонами уравнения.

Мы можем теперь применить математическое понятие вектора, данное в п. 20. Пусть наше уравнение в некоторой системе мер будет иметь вид

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4 = B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4. \qquad (21.3)$$

Изменим теперь эту систему так, чтобы левая сторона превратилась в *какие-то* четыре числа A_1', A_2', A_3', A_4'. Это изменение мер мы отождествляем с преобразованием ковариантного вектора, связывая с изменением системы мер соответствующее преобразование координат от x_μ к x_μ' по формуле (19.2). Но так как уравнение (21.3) должно удовлетворяться для всех систем мер, то преобразование правой части должно состоять из такой же совокупности операций, и переход от B_1, B_2, B_3, B_4 к B_1', B_2', B_3', B_4' также будет представлять преобразование ковариантного вектора, связанное с *тем же самым* преобразованием координат от x_μ к x_μ'.

Мы пришли, таким образом, к заключению, что в уравнении, которое не зависит от системы числовых мер, обе стороны будут или ковариантными или контравариантными векторами. Позже мы распространим этот вывод на свойства, определяемые 16, 64 числовыми мерами; общее правило состоит в том, что обе части уравнения должны иметь одни и те же элементы ковариантности или контравариантности. Ковариантность или контравариантность представляют собой некоторого рода обобщенные размерности, указывающие, как изменяется мера какого-нибудь свойства мира в том случае, если изменяется мера другого свойства. Обычная теория перехода от одних единиц к другим является лишь элементарным частным случаем.

Координаты являются отождествляющими числами, приписанными точкам пространства-времени. Между числовой мерой и отождествляющим числом нет какого-либо принципиального различия, так что мы можем рассматривать изменение координат как частный случай общего изменения, примененного ко всем числовым мерам. Изменение координат не будет уже больше играть такой выделенной роли, как в п. 20; теперь оно уже эквивалентно другим изменениям мер.

Когда изменение системы мер применялось к случаю (21.3), мы связывали с ним изменение координат; нужно однако заметить, что в этом случае преобразование координат не было однозначным, так как обе части уравнения могли считаться как контравариантными, так и ковариантными. Кроме того, изменение не относилось непосредственно к координатам в реальном мире — это была просто отметка в записной книжке математика, служащая для того, чтобы последний имел удовольствие называть A_μ и B_μ векторами, согласно своему определению. Итак, если изменяется система мер для мирового соотношения A_μ, то изменяются и зависящие от него меры и связи других соотношений. Среди них имеется некоторое соотношение двух событий, которое можно назвать *взаимоположением* *) одного по отношению к другому. Для определения этого соотношения требуется четыре числовых меры. Мы решим, до некоторой степени произвольно, рассматривать взаимоположение как контравариантный вектор и обозначим приписываемые ему числовые меры через $(dx)^\mu$. Условившись в этом раз навсегда, мы тем самым устраним всякую неоднозначность. Благодаря каким-то неясным психологическим причинам, наш ум выделил это трансцендентное понятие взаимоположения так, что мы можем изображать его графически, причем оно понимается нами как *смещение* или расстояние между двумя точками в пространственно-временной системе координат. Его числовые меры $(dx)^\mu$ изображаются графически как разности координат dx_μ, так что для каждой системы мер взаимоположений мы получаем соответствующую координатную систему для местоположений. Эта «настоящая» система координат может теперь заменить абстрактную систему координат из записной книжки математика, потому что, как мы это видели в (19.1), преобразование координат, приводящее к изменению dx_μ, совершенно совпадает с преобразованием, связанным с изменением dx_μ согласно правилу контравариантного вектора.

Я не думаю, чтобы было слишком экстравагантным утверждение, что метод тензорного исчисления, дающий все физические уравнения в форме, не зависящей от выбора системы мер, является единственным возможным способом изучения свойств мира, лежащих в основе различных физических явлений. Физик привык настаивать, иногда совершенно напрасно, на том, что

*) Соотношение „*взаимоположение*“ (aspect, Relativlage) (или графически соответствующее ему *смещение* — displacement, Verschiebung), определяемое при помощи четырех числовых мер, происходит повидимому из соотношения „*интервал*“, определяемого одной числовой мерой, причем принимается в расчет не только взаимный интервал между двумя событиями, но и их интервалы от всех окружающих событий.

все уравнения должны быть выражены в форме, не зависящей от выбранных единиц. Желательно это или нет, зависит от задачи, для которой служит данная формула. Но если мы получаем более глубокие сведения относительно рассматриваемых причин при помощи уравнений, не зависящих от единиц измерения, то, конечно, гораздо большие результаты будут достигнуты при помощи уравнений, совершенно не зависящих от системы мер. Уравнение, обладающее таким общим свойством, называется *тензорным уравнением*.

Когда физик стремится разрешить текущие задачи своей науки, то он может пользоваться любой формой уравнения — в любой системе мер — лишь бы это сокращало производимые им вычисления, ибо в этих задачах он больше имеет дело с внешней стороной своих формул, чем с их внутренним содержанием. Но в некоторый момент физик начинает обращать внимание и на их внутренний смысл и рассматривать соотношение вещей в структуре мира, которое лежит в основании его формулы. Единственный разумный вывод, который мы можем сделать о таком структурном соотношении, заключается в том, что оно существует между свойствами самого мира, а не между числовыми мерами отдельной системы мер. Закон природы находит свое выражение в постоянном соотношении или даже тождестве между двумя свойствами мира, которые характеризуются различными классами наблюдаемых величин, входящих в обе части уравнения. Такое постоянное соотношение, не зависящее от системы мер, может быть выражено только в виде тензорного уравнения.

Необходимо отметить, что если мы возьмем силу (X, Y, Z) и преобразуем ее к полярным координатам в виде ковариантного или контравариантного вектора, то ни в том, ни в другом случае у нас не получится величин, аналогичных полярным компонентам силы в элементарной механике. Последние, с нашей точки зрения, не являются истинными полярными компонентами, а представляют собой лишь прямоугольные компоненты, но в трех новых направлениях, именно радиальном и поперечном. Вообще говоря, при элементарном рассмотрении физических величин применяется только прямоугольная система координат, и поэтому иногда бывают необходимы некоторые дополнительные сведения для того, чтобы решить, будет ли данный физический вектор ковариантиым или контравариаитным. Таким образом, если сила определяется как «масса на ускорение», то она оказывается контравариантной, если же ее определить при помощи равенства: «работа = сила на перемещение», то сила будет уже ковариантным вектором. В последнем случае мы, однако, должны отказаться от метода разложения силы на *косоугольные* компоненты, принятого в элементарной механике.

В последующем изложении будет, вообще говоря, достаточным иметь дело лишь с математическим понятием вектора. Некоторое представление о физическом понятии вектора будет вероятно способствовать более глубокому пониманию разбираемых вопросов, но не является необходимым для формального изложения доказательств.

22. УСЛОВИЕ О СУММИРОВАНИИ.

Условимся в случае, когда в данном выражении один и тот же буквенный значок встречается дважды, производить суммирование по всем его значениям от 1 до 4 *). Например, выражение (2.1) может быть переписано так:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \quad (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}) \tag{22.1}$$

и так как здесь μ и ν встречаются дважды, то этим самым указывается на то, что нужно произвести суммирование

$$\sum_{\mu=1}^{4} \sum_{\nu=1}^{4}.$$

Написав это полностью, получим (2.1,

Точно так же в уравнении

$$A_\mu' = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\mu'} A_\alpha$$

суммирование справа производится по α (но не по μ, которое встречается лишь один раз).

Это уравнение эквивалентно (19.2).

Указанное условие оказывается полезным не только как сокращение, оно приносит громадную пользу при общем анализе, подска-

---

*) Отметим, что это правило относится не только к тензорам, но к любым выражениям, в которых встречаются значки, и применяется независимо от положения значка. (*Н.*)

зывая почти всегда нужное направление. В наших исследованиях будут встречаться случаи суммирования, не нуждающиеся в нашем запоздалом одобрении.

Заметим здесь полезное правило. Всякий буквенный значок, встречающийся в каком-либо члене дважды, является «немым» и может быть заменен на любую другую букву, еще не имеющуюся в этом члене. Два или большее число таких немых значков можно менять местами *). Например, помня, что $g_{\beta\alpha} = g_{\alpha\beta}$, имеем

$$g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x_\mu' \partial x_\nu'} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\lambda'} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\beta}{\partial x_\mu' \partial x_\nu'} \cdot \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\lambda'}, \tag{22.2}$$

что получается после перемены местами немых значков α и β.

В виде дальнейшей иллюстрации докажем, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_\mu}{\partial x_\alpha'}\frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\nu} = \frac{dx_\mu}{dx_\nu} &= 0, \text{ если } \mu \neq \nu \\ &= 1, \text{ если } \mu = \nu \end{aligned}\right\} \tag{22.3}$$

Если правую часть этого уравнения написать полностью, то получим:

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial x_1'}\frac{\partial x_1'}{\partial x_\nu} + \frac{\partial x_\mu}{\partial x_2'}\frac{\partial x_2'}{\partial x_\nu} + \frac{\partial x_\mu}{\partial x_3'} \cdot \frac{\partial x_3'}{\partial x_\nu} + \frac{\partial x_\mu}{\partial x_4'} \cdot \frac{\partial x_4'}{\partial x_\nu};$$

а это выражение, согласно обычной теории, дает изменение ∂x_μ, соответствующее изменению ∂x_ν. Но x_μ и x_ν являются координатами одной и той же системы, так что их изменения независимы; таким образом, dx_μ равно нулю, если только x_μ и x_ν не будут одной и той же координатой, когда конечно $dx_\mu = dx_\nu$. Таким образом, теорема доказана.

Множитель $\dfrac{\partial x_\mu}{\partial x_\alpha'}\dfrac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\nu}$ играет роль *оператора подстановки*, т. е. если $A(\mu)$ есть любое выражение, в которое входит значок μ, то

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial x_\alpha'} \cdot \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\nu} A(\mu) = A(\nu). \tag{22.4}$$

В самом деле, суммирование левой части по μ дает четыре

---

*) Сперва мы будем обращать внимание читателя на такие замены в каждом частном случае, надеясь однако, что в дальнейшем он привыкнет к этому приему, как к одному из простых математических преобразований.

члена, соответствующие значениям $=1, 2, 3, 4$, причем ν равно одному из этих значений. Обозначим три остальные значения через σ, τ, ρ. Тогда, на основании (22.3), получим

$$1 \cdot A(\nu) + 0 \cdot A(\sigma) + 0 \cdot A(\tau) + 0 \cdot A(\rho) = A(\nu);$$

следовательно, умножение выражения на оператор подстановки соответствует замене в нем μ на ν.

23. ТЕНЗОРЫ.

Приведем еще раз оба закона преобразования, данные в п. 19: для контравариантных векторов

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\alpha}} A^{\alpha}, \tag{23.11}$$

для ковариантных векторов

$$A'_{\mu} = \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} A_{\alpha}. \tag{23.12}$$

Мы можем обозначить через $A_{\mu\nu}$ величину, состоящую из 16 компонент, которые мы получим, придавая μ и ν независимо друг от друга значения от 1 до 4. Точно также $A_{\mu\nu\sigma}$ имеет 64 компоненты. Обобщая вышеприведенные законы преобразования, можно произвести классификацию подобных величин следующим образом:

контравариантные тензоры

$$A'^{\mu\nu} = \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial x'_{\nu}}{\partial x_{\beta}} A^{\alpha\beta}; \tag{23.21}$$

ковариантные тензоры

$$A'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\nu}} A_{\alpha\beta}; \tag{23.22}$$

смешанные тензоры

$$A'^{\nu}_{\mu} = \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \cdot \frac{\partial x'_{\nu}}{\partial x_{\beta}} A^{\beta}_{\alpha}. \tag{23.23}$$

Эти выражения называются *тензорами второго ранга*. Точно такие же законы преобразования справедливы и для тензоров высших рангов, например:

$$A'^{\tau}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\nu}} \frac{\partial x_{\gamma}}{\partial x'_{\sigma}} \frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\delta}} A^{\delta}_{\alpha\beta\gamma} \tag{23.3}$$

Быть может, не будет лишним указать читателю, что выражение (23.3) дает общий вид 256 различных уравнений, причем правая сторона каждого из них состоит из суммы 256 членов.

Легко показать, что эти законы преобразований выполняют условие самосогласованности, изложенное в п. 20. Именно, благодаря этой причине для подчиняющихся этому условию величин и выбраны специальные названия.

Если тензор обращается в нуль, т. е. все его компоненты оказываются равными нулю в одной какой-нибудь системе координат, то он остается равным нулю и во всякой другой системе координат, что ясно из линейности приведенных законов преобразования. Очевидно, сумма двух тензоров того же контравариантного или ковариантного характера есть тензор. Следовательно, закон, выражающий равенство нулю суммы некоторого числа тензоров или равенство двух тензоров одного и того же вида, будет независимым от данной системы координат.

Произведение двух тензоров, например, таких, как $A_{\mu\nu}$ и A_{σ}^{τ}, есть тензор вида $A_{\mu\nu\sigma}^{\tau}$. Это положение можно доказать, пользуясь тем, что закон преобразования произведения аналогичен уравнению (23.3).

Общее название *тензора* включает в себя векторы (тензоры первого ранга) и инварианты или скаляры *) (векторы нулевого ранга).

Тензор второго или высших рангов не непременно должен выражаться в виде произведения двух тензоров более низких рангов.

Простым примером тензора второго ранга может служить напряжение в твердом теле или вязкой жидкости. Слагающая напряжения, обозначаемая через p_{xy}, есть y-овая компонента давления на элемент поверхности, перпендикулярный оси x. Таким образом, каждая компонента связывается с двумя направлениями.

24. ВНУТРЕННЕЕ УМНОЖЕНИЕ И СОКРАЩЕНИЕ. ЗАКОН ЧАСТНОГО.

Умножив A_{μ} на B^{ν}, мы получим 16 величин A_1B^1, A_1B^2, A_2B^1, ..., образующих смешанный тензор. Рассмотрим четыре «диагональных» члена A_1B^1, A_2B^2, A_3B^3, A_4B^4. На основании

---

*) Скаляр и инвариант—синонимы. Мы будем обычно применять последнее слово, так как оно более соответствует заключающемуся в нем смыслу.

условия о суммировании $A_\mu B^\mu$ представляет сумму четырех членов. Условие о суммировании ведет нас правильно, ибо каждый из этих членов в отдельности не представляет для нас интереса, так как они не образуют вектора, но их сумма имеет большое значение.

$A_\mu B^\mu$ называется *внутренним произведением* двух векторов в противоположность обыкновенному или *внешнему произведению* $A_\mu B^\nu$.

В прямоугольных координатах внутреннее произведение имеет тот же смысл, как и скалярное произведение, определяемое в общеизвестной элементарной теории векторов; но внешнее произведение отнюдь не является так называемым *векторным произведением* элементарной теории.

Подобным же образом из любого смешанного тензора $A^\tau_{\mu\nu\sigma}$ можно образовать «сокращенный» тензор $A^\sigma_{\mu\nu\sigma}$, который будет на два ранга ниже первого, так как σ превратилась теперь в немой значок.

Для доказательства того, что $A^\sigma_{\mu\nu\sigma}$ есть тензор, мы положим в (23.3) $\tau=\sigma$:

$$A'^\sigma_{\mu\nu\sigma}=\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\delta}A^\delta_{\alpha\beta\gamma}.$$

Оператор подстановки $\dfrac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\sigma}\dfrac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\delta}$ изменяет у $A^\delta_{\alpha\beta\gamma}$ значок δ на γ на основании (22.4). Отсюда

$$A'^\sigma_{\mu\nu\sigma}=\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}A^\gamma_{\alpha\beta\gamma}.$$

Сравнивая полученный результат с законом преобразования (23.22), найдем, что $A^\sigma_{\mu\nu\sigma}$ есть ковариантный тензор второго ранга, так как немые значки γ и σ очевидно эквивалентны друг другу.

Точно также, полагая в (23.23) $\nu=\mu$, будем иметь

$$A'^\mu_\mu=\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\beta}A^\beta_\alpha=A^\alpha_\alpha=A^\mu_\mu,$$

т. е. A^μ_μ не изменяется при преобразовании координат и, следовательно, есть инвариант.

Таким же способом можно показать, что выражения $A_\mu B^\mu$, $A^{\mu\nu}_{\mu\nu}$, $A^\nu_\mu B^\mu_\nu$ являются инвариантами. Вообще, при равенстве верхнего и нижнего значков соответствующие величины перестают быть ковариантными и контравариантными. Если таким образом уничтожаются все значки, то выражение должно быть инвариантным.

Одинаковые значки должны находиться в противоположных положениях; например, выражение $A^\tau_{\mu\sigma\sigma}$ не есть тензор, а поэтому и не представляет для нас интереса.

Итак, мы видим, что значки соответствуют свойству, которое нами было названо обобщенной размерностью членов уравнения. После вычеркивания всех значков, которые встречаются в обоих положениях — верхнем и нижнем, оставшиеся значки должны находиться в том же самом расположении в каждом члене уравнения. Если это условие удовлетворено, то каждый член подвергнется одним и тем же операциям при преобразовании координат и уравнение будет удовлетворяться в любой системе координат. Это можно сравнить с хорошо известным условием, что каждый член должен иметь одну и ту же физическую размерность, следовательно, при изменении единиц должен быть умножен на один и тот же множитель, если уравнение остается справедливым при всякой системе единиц измерения.

Точно так же, как мы делаем заключение о физической размерности некоторой новой величины, входящей в физическое уравнение, можно определять и контравариантную или ковариантную размерность данного уравнения, характер которого до сих пор не был известен. Например, если имеется уравнение

$$A(\mu\nu)B_{\nu\sigma} = C_{\mu\sigma}, \tag{24.1}$$

в котором вначале ничего не известно о свойствах выражения $A(\mu\nu)$, то все же можно сказать, что величина $A(\mu\nu)$ должна быть тензором вида A^ν_μ, для того чтобы имело место

$$A^\nu_\mu B_{\nu\sigma} = C_{\mu\sigma},$$

так как в этом случае обе стороны имеют одинаковую ковариантную размерность.

Уравнение (24.1) символически может быть переписано в следующем виде

$$A(\mu\nu) = C_{\mu\sigma}/B_{\nu\sigma},$$

откуда следует, что не только произведение, но и (символическое) частное двух тензоров есть тензор. Само собой разумеется, последнее действие не является обычным делением.

Этот закон частного чрезвычайно полезен при обнаружении тензорного характера выражений. Очевидно, что приведенные здесь общие соображения не могут претендовать на математическую строгость. В большинстве случаев требуемое доказательство может быть выполнено при помощи однократного или многократного применения следующей теоремы:

Величина, которая при внутреннем умножении на какой-нибудь ковариантный (или контравариантный) вектор дает тензор, сама является тензором.

В самом деле, предположим, что выражение

$$A(\mu\nu)B^{\nu}$$

всегда будет ковариантным вектором при любом выборе контравариантного вектора B^{ν}.

Тогда на основании (23.12) имеем

$$\{A'(\mu\nu)B'^{\nu}\} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\{A(\alpha\beta)B^{\beta}\}. \tag{24.2}$$

Но, применяя (23.11) к обратному преобразованию от координат со штрихом к координатам без штриха, получим

$$B^{\beta} = \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}B'^{\nu}.$$

Отсюда, подставляя найденное значение для B^{β} в (24.2), найдем

$$B'^{\nu}\left[A'(\mu\nu) - \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}A(\alpha\beta)\right] = 0.$$

В виду произвольности величины B'^{ν} выражение, заключенное в скобки, должно равняться нулю. Это показывает, что величина $A(\mu\nu)$ есть ковариантный тензор, подчиняющийся закону преобразования (23.22).

Мы будем в дальнейшем ссылаться на эту теорему, называя ее «строгой теоремой частного».

Интересно на примере подтвердить сделанное выше замечание, что выполнение уравнения (24.1) еще не обусловливает тензорного характера $A(\mu\nu)$. Пусть $F(\mu\nu)$ есть какое-либо выражение, антисимметричное в μ и ν, а $G^{\mu\nu}$ — симметричный тензор, так что

$$F(\mu\nu) = -F(\nu\mu), \quad G^{\mu\nu} = G^{\nu\mu}.$$

Тогда, переставляя немые значки, получаем

$$F(\mu\nu)\,G^{\mu\nu} = -F(\nu\mu)\,G^{\nu\mu} = -F(\mu\nu)\,G^{\mu\nu},$$

так что

$$F(\mu\nu)\,G^{\mu\nu} = 0$$

и произведение $F(\mu\nu)\,G^{\mu\nu}$ будет инвариантно. Отсюда, однако, конечно, еще не следует, что $F(\mu\nu)$ есть ковариантный тензор, так как выведенное сейчас свойство имеет место для *каждого* антисимметричного выражения.

Хотя поэтому случаи, в которых прямое сравнение ко- и контравариантных размерностей не ведет к цели, и более часты, чем кажется вначале, мы будем все же часто пользоваться этим методом в наших исследованиях. В процессе чтения книги читатель должен выработать известную привычку отыскивать тензоры таким способом. Подтверждение открытия более строгим путем никогда не представит особых затруднений. На искусственно подобранных примерах легко показать непригодность рассматриваемого правила; однако, мне неизвестно ни одного реального случая, когда бы оно не имело места.

25. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ТЕНЗОРЫ.

Контравариантный характер величины $dx_\mu = dx^\mu$ в уравнении (22.1) удобно выразить, написав последнее в таком виде:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\,(dx)^\mu\,(dx)^\nu.$$

Так как ds^2 не зависит от системы координат, то эта величина есть инвариант или тензор нулевого ранга. Наше уравнение показывает, что при умножении $g_{\mu\nu}\,(dx)^\mu$ на произвольно выбранный контравариантный вектор $(dx)^\nu$ всегда получается тензор нулевого ранга. Кроме того, так как величина $g_{\mu\nu}$, умноженная на произвольный контравариантный вектор $(dx)^\mu$, всегда дает вектор, то отсюда следует, что $g_{\mu\nu}$ есть тензор.

Это двукратное применение строгой теоремы частного дает возможность заключить, что выражение $g_{\mu\nu}$ представляет собой тензор, причем этот тензор является ковариантным, как это и было предусмотрено заранее его написанием *).

Обозначим через g определитель:

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix}$$

Определим затем $g^{\mu\nu}$ как минор величины $g_{\mu\nu}$ в этом определителе, деленный на g **).

Рассмотрим внутреннее произведение $g^{\mu\sigma} g^{\nu\sigma}$. Ясно, что μ и ν соответствуют двум различным строкам в определителе. Здесь необходимо выполнить следующие действия: умножить по очереди каждый элемент ряда μ на минор соответствующего элемента ряда ν, полученные выражения сложить и сумму разделить на g. Эта операция эквивалентна замене ряда μ на ряд ν и делению получившегося при этом определителя на g. Если $\mu \neq \nu$, то мы получим определитель с двумя одинаковыми рядами, который, как известно, должен равняться нулю. Если же $\mu = \nu$, то, совершая указанные действия, получим, что определитель g нужно разделить на самого себя, т. е. в этом случае результат равен единице.

Итак,

$$\left.\begin{aligned} g_{\mu}^{\nu} = g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} &= 0 \text{ если } \mu \neq \nu \\ &= 1 \text{ если } \mu = \nu \end{aligned}\right\} \tag{25.1}$$

Таким образом выражение g_{μ}^{ν} имеет такое же свойство, как и описываемое формулой (22.4) свойство оператора подстановки. Например ***):

$$g_{\mu}^{\nu} A^{\mu} = A^{\nu} + 0 + 0 + 0. \tag{25.2}$$

---

*) Следует отметить, что при этом доказательстве существенно используется свойство симметрии ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$). Если $A_{\mu\nu}$ есть какое-либо выражение не обязательно симметричное, то из инвариантности $A_{\mu\nu}\, dx_{\mu}\, dx_{\nu}$ вовсе не следует, что $A_{\mu\nu}$ является тензором. Мы можем тогда только заключить, что симметричная часть $\frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$ от $A_{\mu\nu}$ есть тензор. Об антисимметричной же части еще ничего нельзя сказать (см. предпоследний абзац п. 24).

**) Вводя это обозначение, исходим из того, что величина $g^{\mu\nu}$, как это будет доказано далее, есть контравариантный тензор.

***) Заметим, что g_{μ}^{ν} выполняет роль оператора подстановки для *всякого* выражения, а не ограничивается в своем применении только тензорами.

Заметим, что $g^{\nu}_{\nu} \neq g^{\nu}_{\mu}$ при $\mu = \nu$, так как в первом случае подразумевается процесс суммирования. Очевидно, что

$$g^{\nu}_{\nu} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4. \tag{25.3}$$

Из уравнения (25.2) следует, что при умножении выражения g^{ν}_{μ} на произвольный контравариантный тензор мы всегда получим вектор. Следовательно, g^{ν}_{μ} есть тензор. Этот тензор является весьма исключительным, ибо все его компоненты остаются одними и теми же в любой системе координат.

Кроме того, так как $g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma}$ есть тензор, то и $g^{\nu\sigma}$ тоже тензор. Действительно, это можно строго доказать, отметив прежде всего, что выражение $g_{\mu\sigma} A^{\mu}$ представляет собой произвольный ковариантный вектор, так как A^{μ} может быть выбрано каким угодно. Умножая затем этот вектор на $g^{\nu\sigma}$, получим $g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} A^{\mu} = g^{\nu}_{\mu} A^{\mu} = A^{\nu}$, так что произведение всегда оказывается вектором и применима строгая теорема частного.

Тензорный характер величины $g^{\mu\nu}$ может быть также показан при помощи метода, обнаруживающего более ясно причину, благодаря которой $g^{\mu\nu}$ было определено как минор $g_{\mu\nu}$, деленный на g. Так как $g_{\mu\nu} A^{\nu}$ есть ковариантный вектор, то его можно обозначить через B_{μ}. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
g_{11} A^1 + g_{12} A^2 + g_{13} A^3 + g_{14} A^4 &= B_1; \\
g_{21} A^1 + g_{22} A^2 + g_{23} A^3 + g_{24} A^4 &= B_2; \\
g_{31} A^1 + g_{32} A^2 + g_{33} A^3 + g_{34} A^4 &= B_3; \\
g_{41} A^1 + g_{42} A^2 + g_{43} A^3 + g_{44} A^4 &= B_4.
\end{aligned}$$

Решая эти четыре линейных уравнения относительно A^1, A^2, A^3, A^4 обычным образом при помощи определителей, получим, в виду равенства $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$:

$$\begin{aligned}
A^1 &= g^{11} B_1 + g^{12} B_2 + g^{13} B_3 + g^{14} B_4; \\
A^2 &= g^{21} B_1 + g^{22} B_2 + g^{23} B_3 + g^{24} B_4 \text{ и т. д.,}
\end{aligned}$$

так что

$$A^{\mu} = g^{\mu\nu} B_{\nu}.$$

Следовательно, на основании строгой теоремы частного можно заключить, что $g^{\mu\nu}$ есть тензор.

Итак, мы определили три фундаментальных тензора: $g_{\mu\nu}$, g^{ν}_{μ}, $g^{\mu\nu}$, из которых первый является ковариантным, второй — смешанным и третий — контравариантным тензором.

26. СОПРЯЖЕННЫЕ ТЕНЗОРЫ.

Рассмотрим теперь операцию, состоящую в перестановке значка из нижнего в верхнее положение и обратно. Перестановка значка у вектора из нижнего в верхнее положение определяется уравнением

$$A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu},$$

а из верхнего положения в нижнее уравнением

$$A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}.$$

Для тензоров, имеющих более общий характер, как, например, $A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta\mu}$, операция поднимания μ определяется точно таким же образом, а именно:

$$A^{\gamma\delta\mu}_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta\nu}, \tag{26.1}$$

и операция опускания:

$$A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta\mu} = g_{\mu\nu} A^{\gamma\delta\nu}_{\alpha\beta}. \tag{26.2}$$

Эти определения вполне последовательны. В самом деле, если сперва произвести операцию поднимания значка, а затем опускания, то в результате получится первоначальный тензор.

Например, если умножить уравнение (26.1) на $g_{\mu\sigma}$ для того, чтобы опустить значок в выражении, стоящем слева, то будем иметь на основании (25.2)

$$g_{\mu\sigma} A^{\gamma\delta\mu}_{\alpha\beta} = g_{\mu\sigma}\, g^{\mu\nu} A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta\nu} = g^{\nu}_{\sigma} A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta\nu} = A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta\sigma}.$$

Полученный результат представляет собой не что иное, как правило, выраженное формулой (26.2).

Необходимо отметить, что поднимание значка ν при помощи величины $g^{\mu\nu}$ сопровождается подстановкой μ вместо ν. Вся операция в целом весьма аналогична простой замене μ на ν при помощи g^{ν}_{μ}. Итак:

умножение на $g^{\mu\nu}$ дает подстановку и поднимание значка,
умножение на g^{ν}_{μ} дает простую подстановку, а
умножение на $g_{\mu\nu}$ дает подстановку и опускание значка.

В случае несимметричных тензоров может оказаться необходимым отличать чем-нибудь место, из которого значок был поднят, т. е. различать друг от друга величины $A_{\mu}{}^{\nu}$ и $A^{\nu}{}_{\mu}$.

Легко видеть, что это правило связи между тензорами со значками в различных положениях выполняется и для $g^{\mu\nu}$, g^{ν}_{μ}, $g_{\mu\nu}$; действительно, определение величины g^{ν}_{μ} формулой (25.1) есть частный случай равенства (26.1).

В случае прямоугольных координат подинмание или опускание значка не изменяет компонент в трехмерном пространстве *), а в четырехмерном пространстве-времени меняет лишь знаки на обратные у некоторых из компонент галилеевых координат. Так как элементарные определения физических величин относятся к прямоугольной системе координат и времени, то обычно можно пользоватьея любым из сопряженных тензоров для описания физической сущности явления, не нарушая при этом до-релятивистских определений. Это ведет к некоторому расширению представления о тензоре, как величине, не имеющей в самой себе никаких особых ковариантных или контравариантных свойств, но имеющей *компоненты* различной степени ковариантности или контравариантности, представляемые целой системой сопряженных тензоров. Иначе говоря, поднимание или опускание значков не должно рассматриваться как изменение «индивидуальности» данного тензора, так что какое-либо предложение о тензоре $A_{\mu\nu}$ содержит в себе (если позволяет изложение) и заключения о сопряженных тензорах A^{ν}_{μ} и $A^{\mu\nu}$.

Полезно заметить, что немые значки имеют некоторую свободу передвижения между тензорами-множителями в выражениях. Так например,

$$A_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}, \quad A_{\mu\alpha}B^{\nu\alpha} = A_{\mu}^{\ \alpha}B^{\nu}_{\ \alpha}. \tag{26.3}$$

Значок может быть поднят у одного из членов выражения при том условии, что такой же значок будет опущен в другом. Это легко доказать при помощи формул (26.1) и (26.2).

В элементарном векторном анализе два вектора определяются как *перпендикулярные* друг другу, если их скалярное произведение равно нулю, а квадрат *длины* вектора принимается равным скалярному произведению его на самого себя. Соответствующие определения приняты и в тензорном исчислении.

---

*) Если $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$, то $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = g^{\nu}_{\mu}$, так что все три тензора в этом случае являются просто операторами подстановки.

Говорят, что векторы A_μ и B_μ *перпендикулярны* друг к другу, когда

$$A_\mu B^\mu = 0. \tag{26.4}$$

Если l есть *длина* величины A_μ (или A^μ), то

$$l^2 = A_\mu A^\mu. \tag{26.5}$$

Вектор перпендикулярен к самому себе, если его длина равна 0 (изотропный вектор).

Интервал представляет собой длину, соответствующую перемещению dx_μ, так как

$$ds^2 = g_{\mu\nu} (dx)^\mu (dx)^\nu ,$$

или, применяя (26.2)

$$ds^2 = (dx)_\nu (dx)^\nu .$$

Таким образом, перемещение перпендикулярно к самому себе, если оно направлено вдоль пути распространения света, на котором $ds = 0$.

Если вектор A_μ получает бесконечно малое приращение dA_μ в перпендикулярном направлении, то его длина остается неизменной с точностью до бесконечно малых первого порядка, так как на основании (26.5)

$$(l + dl)^2 = (A_\mu + dA_\mu)(A^\mu + dA^\mu);$$

пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, получим:

$$(l + dl)^2 = A_\mu A^\mu + A^\mu dA_\mu + A_\mu dA^\mu ,$$

или, принимая во внимание (26.3)

$$(l + dl)^2 = l^2 + 2 A_\mu dA^\mu ;$$

но $A_\mu dA^\mu = 0$ из условия перпендикулярности (26.4).

В элементарном векторном анализе скалярное произведение двух векторов принимается равным произведению их длин на косинус угла между ними. Согласно общей теории, угол θ между двумя векторами A_μ и B_μ определяется следующей формулой:

$$\cos\theta = \frac{A_\mu B^\mu}{\sqrt{(A_\alpha A^\alpha)(B_\beta B^\beta)}}. \tag{26.6}$$

Ясно, что определяемый таким образом угол представляет собой инвариант и совпадает с обычным определением угла в случае прямоугольных координат. При определении угла между двумя пересекающимися прямыми совершенно не важно, является ли мир кривым или плоским, так как в данном случае имеют значение только начальные направления, которые так или иначе будут лежать в касательной плоскости. Таким образом, угол θ (если он существует) имеет обычное геометрическое значение даже в неэвклидовом пространстве. Не нужно однако думать, что обычные углы остаются инвариантными при преобразовании Лоренца; ясно, что угол в трех измерениях инвариантен только по отношению к преобразованиям, происходящим тоже только в трех измерениях, углом же, инвариантным по отношению к преобразованиям Лоренца, является четырехмерный угол.

Тензор четного ранга всегда можно преобразовать в инвариант, перемещая половину значков в верхнее и половину в нижнее положение, а затем производя сокращения. Так, из $A_{\mu\nu\sigma\tau}$ получаем $A^{\sigma\tau}_{\mu\nu}$ и, сокращая, имеем $A = A^{\mu\nu}_{\mu\nu}$. Этот инвариант называется *следом* *). Другим примером инварианта может служить квадрат длины $A_{\mu\nu\sigma\tau}A^{\mu\nu\sigma\tau}$. Кроме того, возможны случаи промежуточных инвариантов, как например $A^{\alpha}_{\mu\nu\alpha}\,A^{\mu\nu\beta}_{\beta}$.

27. ТРЕХЗНАЧКОВЫЕ СКОБКИ КРИСТОФФЕЛЯ.

Введем два выражения (не тензорных), имеющие большое значение во всем нашем последующем изложении, а именно:

$$[\mu\nu, \sigma] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right) \tag{27.1}$$

$$\{\mu\nu, \sigma\} = \frac{1}{2}\, g^{\sigma\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\right) \tag{27.2}$$

Имеем

$$\{\mu\nu, \sigma\} = g^{\sigma\lambda}\,[\mu\nu, \lambda] \tag{27.3}$$

$$[\mu\nu, \sigma] = g_{\sigma\lambda}\,\{\mu\nu, \lambda\} \tag{27.4}$$

Результат, выражаемый формулой (27.3), очевиден из определений. Чтобы доказать (27.4), умножим (27.3) на $g_{\sigma\alpha}$, тогда

$$g_{\sigma\alpha}\,\{\mu\nu, \sigma\} = g_{\sigma\alpha}\,g^{\sigma\lambda}\,[\mu\nu, \lambda] = g^{\lambda}_{\alpha}\,[\mu\nu, \lambda] = [\mu\nu, \alpha],$$

что эквивалентно формуле (27.4).

---

*) По-немецки Spur.

Сравнивая (26.1) и (26.2), заключаем, что переход от «квадратных» к «фигурным» скобкам и обратно представляет собой такой же процесс, как поднимание и опускание значка.

Возможно, что в некоторых случаях было бы удобно применять обозначения, явно выражающие это обстоятельство, например, писать

$$\Gamma_{\mu\nu,\sigma} = [\mu\nu, \sigma],\ \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \{\mu\nu, \sigma\},$$

но мы будем придерживаться обычных обозначений.

На основании (27.1) найдем, что

$$[\mu\nu, \sigma] + [\sigma\nu, \mu] = \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}. \qquad (27.5)$$

Имеется 40 различных трехзначковых скобок каждого вида. Нелишне будет здесь же заметить, что $g_{\mu\nu}$ являются компонентами обобщенного *потенциала*, а трехзначковые скобки — компонентами обобщенной *силы* в гравитационной теории (см. п. 55).

28. УРАВНЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ.

Найдем теперь уравнения геодезический линии, т. е. линии между двумя точками, для которой соблюдается условие, что $\int ds$ стационарно.

Эта абсолютная линия имеет фундаментальное значение в динамике, но в данный момент она будет нас интересовать только с точки зрения развития тензориого исчисления *).

Сохраняя начало и конец неподвижными, придадим каждой промежуточной точке линии произвольное бесконечно-малое смещение δx_σ, деформируя ее таким образом. Так как

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu,$$

то

$$2\, ds\, \delta(ds) = dx_\mu\, dx_\nu\, \delta g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, \delta(dx_\nu) + g_{\mu\nu}\, dx_\nu\, \delta(dx_\mu) =$$

$$= dx_\mu\, dx_\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \delta x_\sigma + g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, d(\delta x_\nu) + g_{\mu\nu}\, dx_\nu\, d(\delta x_\mu) \text{ **)} \qquad (28.1)$$

---

*) Нашей конечной целью является уравнение (29.3). Другое доказательство (получаемое без помощи вариационного исчисления) приведено в п. 31.

**) Читатель легко сообразить, что в виду симметрии $g_{\mu\nu}$ оба последние члена тождественны друг с другом. Довольно удобно воспользоваться наличием этой симметрии только в конце вычислений.

Условие стационарности имеет вид:

$$\int \delta (ds) = 0, \qquad (28.2)$$

что согласно (28.1) можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\int \left\{ \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\delta x_\sigma + g_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{d}{ds}(\delta x_\nu) + g_{\mu\nu}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{d}{ds}(\delta x_\mu) \right\} ds = 0$$

или, изменяя немые значки в последних двух членах:

$$\frac{1}{2}\int \left\{ \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\delta x_\sigma + \left(g_{\mu\sigma}\frac{dx_\mu}{ds} + g_{\sigma\nu}\frac{dx_\nu}{ds} \right)\frac{d}{ds}(\delta x_\sigma) \right\} ds = 0.$$

Применяя обычный метод интегрирования по частям и вычеркивая проинтегрированную часть полученного выражения, так как $\delta x_\sigma = 0$ на обоих пределах, в результате получим:

$$\frac{1}{2}\int \left\{ \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \frac{d}{ds}\left(g_{\mu\sigma}\frac{dx_\mu}{ds} + g_{\sigma\nu}\frac{dx_\nu}{ds} \right) \right\} \delta x_\sigma \, ds = 0.$$

Это должно быть справедливым для всех значений произвольных смещений δx_σ во всех точках, следовательно, коэффициент в подинтегральном выражении должен равняться нулю во всех точках линии.

Таким образом

$$\frac{1}{2}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \frac{1}{2}\frac{dg_{\mu\sigma}}{ds}\frac{dx_\mu}{ds} - \frac{1}{2}\frac{dg_{\sigma\nu}}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} - \frac{1}{2}g_{\mu\sigma}\frac{d^2x_\mu}{ds^2} - \frac{1}{2}g_{\sigma\nu}\frac{d^2x_\nu}{dx^2} = 0.$$

Но *)

$$\frac{dg_{\mu\sigma}}{ds} = \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}\frac{dx_\nu}{ds} \quad \text{и} \quad \frac{dg_{\sigma\nu}}{ds} = \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds}.$$

Заменим в последних двух членах немые значки μ и ν на ε. Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{1}{2}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{dx}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} \right) - g_{\varepsilon\sigma}\frac{d^2x}{ds^2} = 0. \qquad (28.3)$$

*) Эти простые формулы заслуживают внимания как иллюстрация большого значения условия о суммировании. Закон полного дифференцирования в случае четырех координат остается *формально* таким же, как и при одной координате.

От множителя $g_{\varepsilon\sigma}$ можно освободиться, умножая все выражение на $g_{\alpha\varepsilon}$, чтобы получить подстановочный оператор g_ε^α.

Итак,

$$\frac{1}{2}\frac{dx_\mu}{ds}\cdot\frac{dx_\nu}{ds}\,g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right)+\frac{d^2x_\alpha}{ds^2}=0, \qquad (28.4)$$

или, на основании (27.2):

$$\frac{d^2x_\alpha}{ds^2}+\{\mu\nu,\alpha\}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}=0. \qquad (28.5)$$

Поставляя в это выражение значения $\alpha=1, 2, 3, 4$, получим четыре уравнения, определяющие геодезическую линию *).

29. КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ВЕКТОРА.

Производная от инварианта есть ковариантный вектор (п. 19), но производная от вектора не есть тензор. Мы теперь найдем некоторые тензоры, применяемые в данной теории вместо обычных производных от векторов.

Так как dx_μ — контравариантно, а ds — инвариант, то «скорость» dx_μ/ds есть контравариантный вектор. Отюда, если A_μ есть какой-либо ковариантный вектор, то внутреннее произведение $A_\mu\dfrac{dx_\mu}{ds}$ будет представлять собой инвариант.

Величина изменения этого выражения, рассчитанная на единицу длины вдоль какой-либо выделенной кривой, также не должна зависеть от системы координат, т. е.

$$\frac{d}{ds}\left(A_\mu\frac{dx_\mu}{ds}\right) \text{ есть инвариант.} \qquad (29.1)$$

Однако, здесь предполагается, что мы все время имеем дело с одной и той же абсолютной кривой, как бы ни изменялась

---

*) Так как в дальнейшем мы будем пользоваться также и геодезическими нулевыми линиями, к которым данное в тексте определение непосредственно не относится, то отметим здесь еще следующее:

Если определить геодезические линии с помощью условия

$$\delta\int\sqrt{g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu}=0 \qquad (\mathrm{I})$$

и ввести некоторый обобщенный параметр p, который может и не совпадать с длиной дуги, то мы получим, полагая $\dfrac{dx_\mu}{dp}=\dot{x}_\mu$ и $g_{\mu\nu}\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu=L$,

$$\int\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{L}}\,\delta L\,dp=0.$$

система координат. Поэтому результат, выражаемый формулой 29.1), имеет практическое значение только в том случае, если его применять к кривой, определенной независимо от системы координат. Мы применим поэтому (29.1) к геодезической линии. Выполняя дифференцирование, получим, что выражение

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\cdot\frac{dx_\nu}{ds}\cdot\frac{dx_\mu}{ds}+A_\mu\frac{d^2x_\mu}{ds^2} \tag{29.2}$$

инвариантно вдоль геодезической линии.

Из (28.5) имеем, что вдоль геодезической линии

$$A_\mu\frac{d^2x_\mu}{ds^2}=A_\alpha\frac{d^2x_\alpha}{ds^2}=-A_\alpha\{\mu\nu,\alpha\}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}.$$

Отсюда по условию (29.2) следует, что

$$\frac{dx_\mu}{ds}\cdot\frac{dx_\nu}{ds}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-A_\alpha\{\mu\nu,\alpha\}\right)$$

есть инвариант.

Если отождествить p с длиной дуги s, то L получит значение 1, так что наше условие обращения в нуль вариации интеграла от $g_{\mu\nu}\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu$ примет вид

$$\delta\int g_{\mu\nu}\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu\,dp=0 \tag{II}$$

при условии, что параметр p есть длина дуги s, или какая-либо (не постоянная) линейная функция от s.

Действительно, при введении нового параметра уравнение (II), вообще говоря, не сохраняет своего вида. Если написать дифференциальные уравнения Эйлера-Лагранжа, соответствующие условию (II),

$$\frac{d}{dp}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_\mu}-\frac{\partial L}{\partial x_\mu}=0,$$

то опять получаются уравнения геодезической линии (28.5), выраженные через параметр p:

$$\frac{d^2x_\alpha}{dp^2}+\{\mu\nu,\alpha\}\frac{dx_\mu}{dp}\frac{dx_\nu}{dp}=0, \tag{III}$$

так что эти уравнения соответствуют также и вариационной проблеме (II), которая кажется более общей. В самом деле, при переходе от (II) к (III) совсем не нужно пользоваться тем обстоятельством, что p придано какое-то частное значение.

Однако, оказывается, что уравнения (II) или эквивалентные им уравнения (III) определяют в основном параметр p, так что в общем случае возможен также и переход от (II) к (I). Действительно, если помножить (III) на $2g_{\alpha\beta}\dfrac{dx_\beta}{dp}$, то получим

$$2g_{\alpha\beta}\frac{d^2x_\alpha}{dp^2}\frac{dx_\beta}{dp}+2[\mu\nu,\beta]\frac{dx_\mu}{dp}\frac{dx_\nu}{dp}\frac{dx_\beta}{dp}=0,$$

Теперь результат имеет уже общий характер, так как кривизна, которая характеризует геодезическую линию, была исключена применением уравнений (28.5), и в выражении оставлен только градиент кривой (dx_μ/ds и dx_ν/ds)*).

Так как dx_μ/ds и dx_ν/ds являются контравариантными векторами, то их дополнительный сомножитель есть коваринтный тензор второго ранга. Поэтому можно написать:

или, вставляя значения символов $[\mu\nu,\beta]$ и переставляя соответственным образом немые значки:

$$\left.\begin{aligned} g_{\alpha\beta}\frac{d^2x_\alpha}{dp^2}\frac{dx_\beta}{dp}+g_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dp}\frac{d^2x_\beta}{dp^2}+\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{dp}\frac{dx_\alpha}{dp}\frac{dx_\beta}{dp}&=0,\\ \frac{d\left(g_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dp}\frac{dx_\beta}{dp}\right)}{dp}&=0,\\ g_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dp}\frac{dx_\beta}{dp}&=C. \end{aligned}\right\}\qquad (\mathrm{IV})$$

Следовательно, уравнение (IV) представляет собой „первый интеграл“ уравнений (III), причем значение постоянной C определяется начальными значениями x_α и $\frac{dx_\alpha}{dp}$. Если $C\neq 0$, то отсюда следует, что $\frac{ds}{dp}=\sqrt{C}$, $p=$ $=\frac{s}{\sqrt{C}}+C_1$, так что соответствующая траектория есть также решение (I). Если же начальные значения находятся на „нулевом конусе“ $g_{\alpha\beta}\,dx_\alpha\,dx_\beta=0$, то соответствующая траектория хотя и представляет собой решение (II) и (III), но *не* удовлетворяет условию (I). *В дальнейшем геодезическими линиями будут называться все траектории, удовлетворяющие условию (III)* [или, что то же самое—(II)]. Это будут, следовательно, все кривые, которые представляют собой решения уравнений (III) при соответственном выборе параметра p. Решения с обращающейся в нуль постоянной C в (IV) выделяются среди них тем, это они не являются решениями уравнения (I), но могут быть получены из них посредством предельного перехода. Такие траектории с $C=0$ называют *геодезическими нулевыми линиями.* В случае положительно определенного ds^2 нулевые линии мнимые, так что введение геодезических линий, на основании (I), вполне целесообразно. В общем же случае следует предпочесть определение, примыкающее к (II), хотя интеграл (II) и не имеет наглядного геометрического значения интеграла (I). (*H.*)

*) Обратим внимание на то, что согласно определению геодезической линии, в любой точке в любом направлении можно провести геодезическую линию, так что $\frac{dx_\mu}{ds}$ есть произвольный вектор. (*H.*)

$$A_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\{\mu\nu,\alpha\}\,A_\alpha. \qquad (29.3)$$

Заметим, что выражение $\frac{dx_\mu}{ds}$ есть контравариантный вектор и, таким образом, симметричная часть $\frac{1}{2}(A_{\mu\nu}+A_{\nu\mu})$ выражения $A_{\mu\nu}$, на основании высказанных в п. 25 относительно $g_{\mu\nu}$ соображений, является ковариантным тензором.

С другой стороны, легко непосредственно показать, что антисимметричная часть $\frac{1}{2}(A_{\mu\nu}-A_{\nu\mu})$ выражения $A_{\mu\nu}$ также представляет собою ковариантный тензор. В самом деле, из (29.3) следует:

$$A_{\mu\nu}-A_{\nu\mu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \qquad (29.31)$$

Если отметить теперь подобные же выражения в новых координатах x'_μ штрихами, то будем иметь:

$$\frac{\partial A'_\mu}{\partial x'_\nu}-\frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\mu}=\frac{\partial}{\partial x'_\nu}\left(A_\alpha\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial x'_\mu}\left(A_\alpha\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu}\right)=$$

$$=\frac{\partial A_\alpha}{\partial x'_\nu}\cdot\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}-\frac{\partial A_\alpha}{\partial x'_\mu}\cdot\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu}=\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}\cdot\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\cdot\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}-\frac{\partial A_\alpha}{\partial A_\beta}\cdot\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\cdot\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu},$$

откуда, меняя во втором члене местами значки α и β, по которым производится суммирование, получим

$$\frac{\partial A'_\mu}{\partial x'_\nu}-\frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\mu}=\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}-\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha}\right)\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\cdot\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}. \qquad (29.32)$$

Но это выражение согласно (23.22) указывает на то, что (29.31) есть ковариантный тензор. То же самое справедливо и для $A_{\mu\nu}$. Тензор $A_{\mu\nu}$ называется *ковариантной производной* от $A_{\mu\nu}$.

При поднимании значка получим два сопряженных тензора $A^\mu{}_\nu$ и $A^\nu{}_\mu$, которые необходимо отличать друг от друга, так как $A_{\mu\nu}$ несимметрично относительно обоих значков. Из них наиболее важным является первый, поэтому условимся обозначать его просто через $A^\mu{}_\nu$.

Так как

$$A_\sigma = g_{\sigma\varepsilon} A^\varepsilon,$$

то на основании (29.3) имеем

$$A_{\sigma\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(g_{\sigma\varepsilon} A^\varepsilon) - \{\sigma\nu, \alpha\}(g_{\alpha\varepsilon} A^\varepsilon),$$

и далее, применяя (27,4):

$$A_{\sigma\nu} = g_{\sigma\varepsilon}\frac{\partial A^\varepsilon}{\partial x_\nu} + A^\varepsilon \frac{\partial g_{\sigma\varepsilon}}{\partial x_\nu} - [\sigma\nu, \varepsilon] A^\varepsilon;$$

окончательно, принимая во внимание (27.5), получим

$$A_{\sigma\nu} = g_{\sigma\varepsilon}\frac{\partial A^\varepsilon}{\partial x_\nu} + [\varepsilon\nu, \sigma] A^\varepsilon.$$

Отсюда, умножая все выражение на $g^{\mu\sigma}$ и помня, что выражение $g^{\mu\sigma} g_{\sigma\varepsilon}$ есть подстановочный оператор, будем иметь:

$$A^\mu{}_\nu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} + \{\varepsilon\nu, \mu\} A^\varepsilon. \tag{29.4}$$

Это выражение называется *ковариантной производной* от A^μ. Необходимо твердо запомнить существенное различие между формулами (29.3) и (29.4).

Тензоры A_μ^ν и $A^{\mu\nu}$, получаемые из (29.3) и (29.4) при поднимании второго значка, называются *контравариантными производными* от A_μ и A^μ. Контравариантными производными нам придется, однако, пользоваться весьма редко.

30. КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ТЕНЗОРА.

Ковариантные производные тензоров второго ранга образуются по следующим правилам:

$$A^{\mu\nu}_\sigma = \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \{\alpha\sigma, \mu\} A^{\alpha\nu} + \{\alpha\sigma, \nu\} A^{\mu\alpha}. \tag{30.1}$$

$$A^\nu_{\mu\sigma} \frac{\partial A^\nu_\mu}{\partial x_\sigma} - \{\mu\sigma, \alpha\} A^\nu_\alpha + \{\alpha\sigma, \nu\} A^\alpha_\mu. \tag{30.2}$$

$$A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \{\mu\sigma, \alpha\} A_{\alpha\nu} - \{\nu\sigma, \alpha\} A_{\mu\alpha}. \tag{30.3}$$

Общее правило ковариантного дифференцирования по x_σ можно иллюстрировать на следующем примере

$$A^{\rho}_{\lambda\mu\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_\sigma} A^{\rho}_{\lambda\mu\nu} - \left\{ \lambda\sigma, \alpha \right\} A^{\rho}_{\alpha\mu\nu} - \left\{ \mu\sigma, \alpha \right\} A^{\rho}_{\lambda\alpha\sigma} - \left\{ \nu\sigma, \alpha \right\} A^{\rho}_{\lambda\mu\alpha} +$$

$$+ \left\{ \alpha\sigma, \rho \right\} A^{\alpha}_{\lambda\mu\nu}. \tag{30.4}$$

Как мы видим, каждому значку первоначального тензора соответствует дополнительный член сверх обыкновенной производной. Второй множитель такого дополнительного члена представляет собою первоначальный тензор, причем соответствующий значок заменен каким-то немым значком α, по которому производится суммирование. Первый же множитель является трехзначковой скобкой Кристоффеля, образованной из первоначального значка (которому соответствует данный дополнительный член), из немого значка α и наконец значка дифференцирования σ.

Порядок расположения этих трех значков легко запомнить, если прежде всего принять во внимание, что положение α обратно положению значка μ в первоначальном тензоре (или помещающемуся на этом месте значку α во втором множителе), т. е. его надо располагать за запятой, если α во втором множителе находится внизу, и перед запятой, если α стоит наверху. С другой стороны, значок μ должен занимать то же самое положение, как и в первоначальном тензоре. Наконец, на основании соображений однородности, значок σ всегда должен стоять перед запятой, так как в первом члене ковариантной производной σ играет роль нижнего значка. Весь этот дополнительный член имеет перед собой знак $-$ или $+$, в зависимости от того, занимает ли значок, соответствующий μ, нижнее или верхнее положение.

Доказательство этого правила, прежде всего для случая, когда имеются лишь нижние значки, легче всего получить методом полной индукции. Случай одного значка, т. е. ковариантного вектора, был уже рассмотрен выше. Если мы допустим справедливость этого правила для тензора с n нижними значками, то надо будет доказать его справедливость для тензора с $(n+1)$ значками $(n \geqslant 1)$.

Пусть C^μ будет произвольным контравариантным вектором, тогда, применяя к тензору $A_{\ldots\varkappa\ldots\mu}$ с n ковариантными значками сформулированное выше правило, мы получим тензор с $(n+1)$ ковариантными значками:

$$(A_{\dots\varkappa\dots\mu} C^{\mu})_{\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} (A_{\dots\varkappa\dots\mu} C^{\mu}) - \sum \{\sigma\varkappa, \alpha\} A_{\dots\alpha\dots\mu} \cdot C^{\mu} \quad (30.41)$$

Если вспомнить теперь, что внутреннее произведение ковариантной производной (29.4) от C^{μ} на $A_{\dots\varkappa\dots\mu}$ также представляет собою тензор с $(n+1)$ ковариантными значками, а именно

$$C^{\mu}_{\sigma} A_{\dots\varkappa\dots\mu} = \left(\frac{\partial C^{\mu}}{\partial x_{\sigma}} + \{\sigma\varepsilon, \mu\} C^{\varepsilon}\right) A_{\dots\varkappa\dots\mu}, \quad (30.42)$$

и вычесть поэтому выражение (30.42) из правой части (30.41), то мы опять получим тензор с $(n+1)$ ковариантными значками, т. е.

$$C^{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} A_{\dots\varkappa\dots\mu} - \sum \{\sigma\varkappa, \alpha\} A_{\dots\alpha\dots\mu} C^{\mu} - \{\sigma\varepsilon, \mu\} A_{\dots\varkappa\dots\mu} C^{\varepsilon},$$

откуда, заменяя в последнем члене немые значки ε и μ на μ и α, можем написать

$$\left(\frac{\partial A_{\dots\varkappa\dots\mu}}{\partial x_{\sigma}} - \sum \{\sigma\varkappa, \alpha\} A_{\dots\alpha\dots\mu} - \{\sigma\mu, \alpha\} A_{\dots\varkappa\dots\alpha}\right) C^{\mu}.$$

Но так как C^{μ} есть *произвольный* ковариантный вектор, то выражение в скобках должно быть тензором с $(n+2)$ ковариантными значками, а оно как раз и получается из $A_{\dots\varkappa\dots\mu}$ согласно приведенному выше правилу.

Чтобы доказать теперь это правило также и для тензоров с контравариантными значками, мы предположим, что оно уже доказано для тензора, имеющего какое угодно число ковариантных и n контравариантных значков $(n \geqslant 0)$. Очевидно, что это правило имеет место для $n = 0$. Сделав такое предположение, мы докажем, что оно будет справедливо для произвольного тензора $A^{\dots\lambda\dots\nu}_{\dots\varkappa\dots}$ с $n+1$ контравариантными и любым числом ковариантных значков.

Согласно сделанному предположению, наше правило применимо к тензору $A^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\varkappa\cdots\mu}$ с n ковариантными значками, следовательно, выражение

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma} A^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\varkappa\cdots\mu} - \sum \{\sigma\varkappa, \alpha\} A^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\alpha\cdots\mu} +$$

$$+ \sum \{\sigma\alpha, \lambda\} A^{\cdots\alpha\cdots}_{\cdots\varkappa\cdots\mu} - \{\sigma\mu, \alpha\} A^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\varkappa\cdots\alpha} \tag{30.43}$$

также представляет собою тензор.

Если положить

$$A^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\varkappa\cdots\mu} = g_{\mu\varepsilon} A^{\cdots\lambda\cdots\varepsilon}_{\cdots\varkappa\cdots}; \quad A^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\alpha\cdots\mu} = g_{\mu\varepsilon} A^{\cdots\lambda\cdots\varepsilon}_{\cdots\alpha\cdots},$$

то выражение (30.43) принимает вид

$$g_{\mu\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} A^{\cdots\lambda\cdots\varepsilon}_{\cdots\varkappa\cdots} + A^{\cdots\lambda\cdots\varepsilon}_{\cdots\varkappa\cdots} \frac{\partial g_{\mu\varepsilon}}{\partial x_\sigma} - g_{\mu\varepsilon} \sum \{\sigma\varkappa, \alpha\} A^{\cdots\lambda\cdots\varepsilon}_{\cdots\alpha\cdots} +$$

$$+ g_{\mu\varepsilon} \sum \{\sigma\alpha, \lambda\} A^{\cdots\alpha\cdots\varepsilon}_{\cdots\varkappa\cdots} - g_{\alpha\varepsilon} \{\sigma\mu, \alpha\} A^{\cdots\lambda\cdots\varepsilon}_{\cdots\varkappa\cdots}.$$

Комбинируя теперь второй член с последним и применяя тождества (27.4) и (27.5), т. е.

$$g_{\alpha\varepsilon} \{\sigma\mu, \alpha\} = [\sigma\mu, \varepsilon]; \quad \frac{\partial g_{\mu\varepsilon}}{\partial x_\sigma} = [\sigma\mu, \varepsilon] + [\sigma\varepsilon, \mu],$$

мы получим для нашего тензора следующее выражение:

$$g_{\mu\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} A^{\cdots\lambda\cdots\varepsilon}_{\cdots\varkappa\cdots} - g_{\mu\varepsilon} \sum \{\sigma\varkappa, \alpha\} A^{\cdots\lambda\cdots\varepsilon}_{\cdots\alpha\cdots} + g_{\mu\varepsilon} \sum \{\sigma\alpha, \lambda\} A^{\cdots\alpha\cdots\varepsilon}_{\cdots\varkappa\cdots} +$$

$$+ [\sigma\varepsilon, \mu] A^{\cdots\lambda\cdots\varepsilon}_{\cdots\varkappa\cdots}.$$

Заменяя в последнем члене немой значок ε на α, умножая затем весь тензор на $g^{\mu\nu}$ и принимая во внимание, что выражение $g_{\mu\varepsilon} g^{\mu\nu} = g_\varepsilon^\nu$ представляет собою оператор подстановки $\varkappa$, мы получим тензор

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma} A^{\cdots\lambda\cdots\nu}_{\cdots\varkappa\cdots} - \sum \{\sigma\varkappa, \alpha\} A^{\cdots\lambda\cdots\nu}_{\cdots\alpha\cdots} + \sum \{\sigma\alpha, \lambda\} A^{\cdots\alpha\cdots\nu}_{\cdots\varkappa\cdots} +$$

$$+ \{\sigma\alpha, \nu\} A^{\cdots\lambda\cdots\alpha}_{\cdots\varkappa\cdots},$$

который составлен из $A^{\cdots\lambda\cdots\nu}_{\cdots\varkappa\cdots}$, согласно нашему правилу.

В заключение докажем еще правило для дифференцирования произведения

$$\left(A^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\varkappa\cdots} B^{\cdots\mu\cdots}_{\cdots\nu\cdots}\right)_\sigma = A^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\varkappa\cdots\sigma} B^{\cdots\mu\cdots}_{\cdots\nu\cdots} + A^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\varkappa\cdots} B^{\cdots\mu\cdots}_{\cdots\nu\cdots\sigma}.$$

Оно получается сразу же благодаря тому обстоятельству, что при ковариантном дифференцировании тензор $B^{\cdots\mu\cdots}_{\cdots\nu\cdots}$ оказывается общим множителем для тех дополнительных членов, которые относятся к значкам A, в то время как дополнительные члены, соответствующие значкам B, содержат общим множителем коэффициент $A^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\varkappa\cdots}$. В самом деле:

$$\left(A^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\varkappa\cdots} B^{\cdots\mu\cdots}_{\cdots\nu\cdots}\right)_\sigma = \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(A^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\varkappa\cdots} B^{\cdots\mu\cdots}_{\cdots\nu\cdots}\right) - \sum \left\{\sigma\varkappa, \alpha\right\} A^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\alpha\cdots} B^{\cdots\mu\cdots}_{\cdots\nu\cdots} -$$

$$- \sum \left\{\sigma\nu, \alpha\right\} A^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\varkappa\cdots} B^{\cdots\mu\cdots}_{\cdots\alpha\cdots} + \sum \left\{\sigma\alpha, \lambda\right\} A^{\cdots\alpha\cdots}_{\cdots\varkappa\cdots} B^{\cdots\mu\cdots}_{\cdots\nu\cdots} +$$

$$+ \sum \left\{\sigma\alpha, \mu\right\} A^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\varkappa\cdots} B^{\cdots\alpha\cdots}_{\cdots\nu\cdots} = B^{\cdots\mu\cdots}_{\cdots\nu\cdots}\left(\frac{\partial}{\partial x_\sigma} A^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\varkappa\cdots} -\right.$$

$$\left. - \sum\left\{\sigma\varkappa, \alpha\right\} A^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\alpha\cdots} + \sum \left\{\sigma\alpha, \lambda\right\} A^{\cdots\alpha\cdots}_{\cdots\varkappa\cdots}\right) +$$

$$+ A^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\varkappa\cdots}\left(\frac{\partial}{\partial x_\sigma} B^{\cdots\mu\cdots}_{\cdots\nu\cdots} - \sum \left\{\sigma\nu, \alpha\right\} B^{\cdots\mu\cdots}_{\cdots\alpha\cdots} + \sum \left\{\sigma\alpha, \mu\right\} B^{\cdots\alpha\cdots}_{\cdots\nu\cdots}\right) =$$

$$= B^{\cdots\mu\cdots}_{\cdots\nu\cdots} A^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\varkappa\cdots\sigma} + A^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\varkappa\cdots} B^{\cdots\mu\cdots}_{\cdots\nu\cdots\sigma}.$$

Следовательно, обычное правило дифференцирования произведения формально сохраняется и для ковариантного дифференцирования произведения.

[Приведем другое доказательство того, что величины в правой части (30) действительно являются тензорами. Это можно сделать еще при помощи простого обобщения метода, описанного в предыдущем параграфе.

Таким образом, если вместо (29.1) взять выражение

$$\frac{d}{ds}\left(A_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\right),$$

являющееся инвариантным вдоль геодезической линии, то получим

$$\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} + A_{\mu\nu}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{d^2x_\mu}{ds^2} + A_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{d^2x_\nu}{ds^2}.$$

Заменяя вторые производные согласно (28.5), будем иметь, что

$$A_{\mu\nu\sigma}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{dx_\sigma}{ds}$$

есть инвариант; последнее выражение показывает, что $A_{\mu\nu\sigma}$ есть тензор.

Формулы (30.1) и (30.2) получены при помощи поднимания значков ν и μ: детали этого преобразования такие же, как и при выводе формулы (29.4) из (29.3).

Рассмотрим выражение

$$B_{\mu\sigma}C_\nu + B_\mu C_{\nu\sigma},$$

в котором значок σ означает ковариантное дифференцирование. На основании равенства (29.3) это выражение равно

$$\left(\frac{\partial B_\mu}{\partial x_\sigma} - \{\mu\sigma, \alpha\} B_\alpha\right) C_\nu + B_\mu \left(\frac{\partial C_\nu}{\partial x_\sigma} - \{\nu\sigma, \alpha\} C_\alpha\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\sigma}(B_\mu C_\nu) - \{\mu\sigma, \alpha\}(B_\alpha C_\nu) - \{\nu\sigma, \alpha\}(B_\mu C_\alpha).$$

Но, сравнивая с (30.3), мы видим, что полученное выражение есть ковариантная производная от тензора второго ранга $(B_\mu C_\nu)$. Отсюда

$$(B_\mu C_\nu)_\sigma = B_{\mu\sigma} C_\nu + B_\mu C_{\nu\sigma}. \tag{30.5}$$

Таким образом, при ковариантном дифференцировании произведения дистрибутивный закон, соблюдающийся при обычном дифференцировании, остается справедливым.]

Применяя формулу (30.3) к фундаментальному тензору, получим, в виду (27.4) и (27.5),

$$g_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \{\mu\sigma, \alpha\} g_{\alpha\nu} - \{\nu\sigma, \alpha\} g_{\mu\alpha} =$$

$$= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - [\mu\sigma, \nu] - [\nu\sigma, \mu] = 0.$$

Итак, ковариантные производные фундаментальных тензоров тождественно равны нулю, и, следовательно, фундаментальные тензоры могут рассматриваться как *постоянные* при ковариантном дифференцировании. Таким образом, несущественно, поднять ли значок до или после дифференцирования, что нами уже было использовано в предложенных определениях.

Если величина I есть инвариант, то произведение IA_μ есть ковариантный вектор; следовательно, его ковариантная производная будет равна:

$$(IA_\mu)_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(IA_\mu) - \{\mu\nu, \alpha\} IA_\alpha = A_\mu \frac{\partial I}{\partial x_\nu} + IA_{\mu\nu}.$$

Определяя, следовательно, ковариантную производную I_ν инварианта I так, чтобы имело место правило для произведения, мы должны иметь:

$$(IA_\mu)_\nu = I_\nu A_\mu + IA_{\mu\nu},$$

так что

$$I_\nu = \frac{\partial I}{\partial x_\nu}.$$

Итак, ковариантная производная от инварианта имеет такой же вид, как и его обычная производная.

Само собой разумеется, что сохранить обозначение $A_{\mu\nu}$ исключительно для ковариантной производной от A_μ невозможно, поэтому последний значок не означает дифференцирования, если об этом ничего специально не сказано. В тех случаях, когда возможны недоразумения, мы будем обозначать ковариантные и контравариантные производные через $(A_\mu)_\nu$ и $(A_\mu)^\nu$.

Удобство пользования ковариантной производной заключается прежде всего в том, что при постоянстве величин $g_{\mu\nu}$ трехзначковые символы обращаются в нуль и ковариантная производная сводится к обычной производной. Но, вообще говоря, наши физические уравнения выражались при помощи галилеевых координат, в которых величины $g_{\mu\nu}$ постоянны; следовательно, в галилеевых уравнениях можно заменить обычные производные на ковариантные. Очевидно, что при этом ничего не изменится. Такая замена является необходимым шагом при приведении таких уравнений к общему тензорному виду, который имеет место для всех систем координат.

Для иллюстрации найдем общее уравнение для распространения потенциала со скоростью света. В галилеевых координатах это уравнение имеет хорошо известный вид:

$$\Box\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \qquad (30.6)$$

В галилеевой системе координат величины $g^{\mu\nu}$ имеют следующие значения: $g^{44}=1$, $g^{11}=g^{22}=g^{33}=-1$, а остальные компоненты равны нулю.

Поэтому выражение (30.6) можно переписать так:

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu}=0. \tag{30.65}$$

Потенциал φ есть инвариант, а его обычная производная является ковариантным вектором $\varphi_\mu=\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$.

Следовательно, в случае галилеевых координат вместо $\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu}$ можно подставить ковариантную производную $\varphi_{\mu\nu}$.

Таким образом, уравнение принимает вид:

$$g^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu}=0. \tag{30.7}$$

До этого пункта существенным было употребление галилеевых координат, но теперь, при рассмотрении ковариантной размерности равенства (30.7), мы замечаем, что его левая часть представляет собой инвариант. Поэтому при любом преобразовании координат это выражение остается неизменным. Следовательно, равенство (30.7) справедливо для всякой системы координат, если оно соблюдается в одной из них. Применяя формулу (29.3), можно написать (30.7) в более подробном виде:

$$g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu}-\{\mu\nu,\alpha\}\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)=0. \tag{30.8}$$

Эта формула применяется при преобразовании уравнения Лапласа к криволинейным координатам.

Следует помнить, что преобразование координат не меняет свойств пространства. Таким образом, если мы на опыте обнаружили, что потенциал φ распространяется согласно закону, выражаемому формулой (30.6) в декартовых координатах, то отсюда строго следует, что он будет распространяться согласно закону (30.8) по отношению к любой системе координат в плоском пространстве-времени. Отсюда все же еще не видно, что и в случае наличия несводимого к нулю гравитационного поля, изменяющего природу пространства-времени, закон распространения потенциала будет иметь вид (30.8). Однако, предположение, что выражение (30.8) дает общий закон распространения φ в любом пространстве-времени, представляется вполне правдоподобным, так как это предположение подсказывается принципом эквивалентности. Как и все обобщения, проверенные на опыте только в частном случае, оно может быть принято лишь с большой осторожностью.

Оператором $\square$ мы будем часто пользоваться. В произвольных координатах он определяется так:

$$\square A_{\mu\nu\ldots} = g^{\alpha\beta}(A_{\mu\nu\ldots})_{\alpha\beta}, \tag{30.9}$$

или

$$\square = \left((\ldots)_\alpha\right)^\alpha;$$

таким образом, этот оператор означает ковариантное и контравариантное дифференцирования и последующее сокращение.

Перечень правил, употребляемых при ковариантном дифференцировании.

1. Чтобы получить ковариантную производную какого-нибудь тензора $A^{\cdots}_{\cdots}$ по x_σ, нужно, прежде всего, взять от него обычную производную:

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma} A^{\cdots}_{\cdots},$$

затем на *каждый* ковариантный значок μ $(A^{\cdots\cdot}_{\cdots\mu\cdots})$ прибавить член

$$-\left\{\mu\sigma,\ \alpha\right\} A^{\cdots\cdots}_{\cdots\alpha\cdots},$$

а на *каждый* контравариантный значок $\mu\,(A^{\cdots\mu\cdots}_{\cdots\cdots})$, прибавить член

$$+\left\{\alpha\sigma,\ \mu\right\} A^{\cdots\alpha\cdots}_{\cdots\cdots}.$$

2. Ковариантная производная произведения образуется при помощи ковариантного дифференцирования каждого множителя в отдельности по такому же правилу, как и обычное дифференцирование.

3. Фундаментальные тензоры $g_{\mu\nu}$ или $g^{\mu\nu}$ можно считать за постоянные при ковариантном дифференцировании.

4. Ковариантная производная от инварианта равна его обычной производной.

5. При получении вторых, третьих и высших производных отдельные дифференцирования не коммутативны*).

---

*) Последнее правило приведено здесь для полноты. Оно будет рассмотрено ниже в п. 34.

31. ВТОРОЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОВАРИАНТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ.

На основании формулы (23.22), имеем

$$g'_{\mu\nu}=\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}g_{\alpha\beta}.$$

Отсюда, дифференцируя, получим

$$\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'_\lambda}=g_{\alpha\beta}\left\{\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda\,\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}+\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda\,\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\right\}+$$

$$+\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}. \tag{31.11}$$

Здесь было принято во внимание, что

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x'_\lambda}=\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\cdot\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\lambda};$$

кроме того во втором члене, стоящем в фигурных скобках, были переставлены немые значки α и β.

Точно также имеем:

$$\frac{\partial g'_{\lambda\nu}}{\partial x'_\mu}=g_{\alpha\beta}\left\{\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu\,\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda}+\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu\,\partial x'_\lambda}\cdot\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\right\}+$$

$$+\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} \tag{31.12}$$

$$\frac{\partial g'_{\mu\lambda}}{\partial x'_\nu}=g_{\alpha\beta}\left\{\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\nu\,\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda}+\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\nu\,\partial x'_\lambda}\cdot\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\right\}+$$

$$+\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta}. \tag{31.13}$$

Складывая равенства (31.12) и (31.13) и вычитая равенство (31.11), на основании (27.1), получим

$$[\mu\nu,\ \lambda]'=g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu\,\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda}+\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\lambda}[\alpha\beta,\ \gamma]. \tag{31.2}$$

Умножая каждый член полученного выражения на $g'^{\lambda\rho}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho}$ и применяя формулы (27.3) и (23.21), будем иметь

$$\{\mu\nu,\ \rho\}'\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho}=g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu\,\partial x'_\nu}\cdot g'^{\lambda\rho}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho}+$$

$$+g'^{\lambda\rho}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho}\cdot\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}[\alpha\beta,\gamma]= \tag{31.3}$$

$$=g_{\alpha\beta}\,g^{\beta\varepsilon}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu\,\partial x'_\nu}+\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}g^{\gamma\varepsilon}\,[\alpha\beta,\ \gamma]=$$

$$=\frac{\partial^2 x_\varepsilon}{\partial x'_\mu\,\partial x'_\nu}+\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\{\alpha\beta,\ \varepsilon\}. \tag{31.3}$$

Последняя формула дает выражение для второй производной $\frac{\partial^2 x_\varepsilon}{\partial x'_\mu\,\partial x'_\nu}$ через первые производные.

Согласно (23.12) имеем

$$A'_\mu=\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\mu}A_\varepsilon. \tag{31.4}$$

Дифференцируя полученное выражение, получим

$$\frac{\partial A'_\mu}{\partial x'_\nu}=\frac{\partial^2 x_\varepsilon}{\partial x'_\mu\,\partial x'_\nu}A_\varepsilon+\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\mu}\cdot\frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\nu}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_\delta};$$

применяя формулу (31.3) и заменяя немые значки в последнем члене на α и β, найдем

$$\frac{\partial A'_\mu}{\partial x'_\nu}=\left(\{\mu\nu,\ \rho\}'\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho}-\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\{\alpha\beta,\ \varepsilon\}\right)A_\varepsilon+\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}. \tag{31.5}$$

Точно также, согласно (23.12),

$$A_\varepsilon\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho}=A'_\rho.$$

Таким образом, выражение (31.5) принимает вид

$$\frac{\partial A'_\mu}{\partial x'_\nu}-\{\mu\nu,\ \rho'\}\,A'_\rho=\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}-\{\alpha\beta,\ \varepsilon\}A_\varepsilon\right). \tag{31.6}$$

Следовательно, величина

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\{\mu\nu,\ \rho\}A_\rho$$

подчиняется закону преобразования ковариантного тензора. Таким образом, результат, выражаемый формулой (29.3), получен нами вторым способом.

В равенстве (31.4) вместо тензора A_μ можно подставить тензор второго или высших рангов, их производные будут определяться по такому же правилу.

32. ЭЛЕМЕНТЫ ПОВЕРХНОСТИ И ТЕОРЕМА СТОКСА.

Рассмотрим теперь внешнее произведение $\sum^{\mu\nu}$ двух различных перемещений dx_μ и δx_ν. Тензор $\sum^{\mu\nu}$ по отношению к значкам μ и ν не будет симметричным. Произвольный тензор такого вида можно разложить на сумму двух частей, из которых первая часть $\frac{1}{2}\left(\sum^{\mu\nu}+\sum^{\nu\mu}\right)$ симметрична, а вторая $\frac{1}{2}\left(\sum^{\mu\nu}-\sum^{\nu\mu}\right)$ антисимметрична в значках.

Удвоенная*) антисимметричная часть произведения $dx_\mu \delta x_\nu$ называется *элементом поверхности*, составленным двумя перемещениями, и обозначается через $dS^{\mu\nu}$.

Согласно только что сказанному

$$dS^{\mu\nu}=dx_\mu\,\delta x_\nu-dx_\nu\,\delta x_\mu=\begin{vmatrix} dx_\mu & dx_\nu \\ \delta x_\mu & \delta x_\nu \end{vmatrix}. \tag{32.1}$$

В прямоугольных координатах этот детерминант представляет собой площадь проекции параллелограмма, образованного из обоих перемещений, на плоскость $\mu\nu$; таким образом, компонентами тензора являются проекция параллелограмма на шесть координатных плоскостей. В тензоре $dS^{\mu\nu}$ эти компоненты повторяются дважды: один раз с положительным и один раз с отрицательным знаком (что, может быть, соответствует двум сторонам поверхности). Четыре компоненты dS^{11}, dS^{22} и т. д. равны нулю, как и для любого антисимметричного тензора. В прямоугольных координатах смысл термина «элемент поверхности» очевиден, но в других координатных системах его геометрическое значение становится менее ясным.

*) Удваивание первоначального выражения отмечается наличием множителя $\frac{1}{2}$ в большинстве формул, содержащих $dS^{\mu\nu}$.

Элемент поверхности всегда есть тензор второго ранга независимо от числа измерений пространства: но в *трех* измерениях площадь поверхности можно изображать также простым *вектором*, перпендикулярным к поверхности, с длиной, пропорциональной площади. Действительно, в трех измерениях принято всякий антисимметричный тензор изображать соответственым вектором. К счастью, в четырех измерениях наличие этого источника недоразумений невозможно.

Инвариант

$$\frac{1}{2} A_{\mu\nu}\, dS^{\mu\nu}$$

называется *потоком* тензора $A_{\mu\nu}$ сквозь элемент поверхности. Поток зависит только от антисимметричной части тензора $A_{\mu\nu}$, так как внутреннее произведение симметричного и антисимметричного тензоров, очевидно, равно нулю.

Некоторые из важнейших антисимметричных тензоров возникают в результате операции *вихря*.

Если величина $K_{\mu\nu}$ представляет собой ковариантную производную от K_μ, то на основании (29.3) находим, что

$$K_{\mu\nu} - K_{\nu\mu} = \frac{\partial K_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial K_\nu}{\partial x_\mu}, \tag{32.2}$$

так как трехзначковые символы равны нулю. Так как правая сторона равенства представляет собою тензор, то и левая его часть также является тензором.

Правая сторона равенства (32.2) имеет такой же вид, как и «вихрь» в элементарном векторном исчислении, с той лишь разницей, что здесь знак изменен на обратный. Однако, если говорить точнее, то необходимо заметить, что вихрь в элементарной трехмерной теории есть вектор, в то время как наш вихрь является тензором; таким образом, сравнение соответственных знаков не имеет смысла.

Заключение, что ковариантный вихрь имеет формально такое же значение, как и обычный вихрь, неприменимо к контравариантным векторам или тензорам высших рангов, ибо

$$K^\mu_\nu - K^\nu_\mu \neq \frac{\partial K^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial K^\nu}{\partial x_\mu}.$$

В тензорном обозначении знаменитая теорема Стокса принимает следующий вид:

$$\int K_\mu dx_\mu = -\frac{1}{2}\int\int\left(\frac{\partial K_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial K_\nu}{\partial x_\mu}\right) dS^{\mu\nu}, \qquad (32.3)$$

где двойной интеграл берется по какой-либо поверхности, ограниченной контуром интегрирования однократного интеграла. Множитель $\frac{1}{2}$ необходим потому, что каждый элемент поверхности встречается дважды, например, как dS^{12} и $-dS^{21}$. Теорема Стокса может быть доказана следующим образом.

Так как обе части уравнения представляют собой инварианты, то достаточно доказать уравнение для какой-нибудь одной системы координат. Выберем координаты так, чтобы поверхность лежала на одной из основных гиперповерхностей $x_3 = \mathrm{const}$, $x_4 = \mathrm{const}$ и чтобы контур ее состоял из четырех частей, получаемых последовательно заданием $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_1 = \gamma$, $x_2 = \delta$ *); все остальное пространство может быть заполнено координатной сеткой произвольным образом. Элементарная ячейка определяется при помощи образующих ее векторов $(dx_1, 0, 0, 0)$ и $(0, dx_2, 0, 0)$, так что на основании формулы (32.1) получаем:

$$dS^{12} = dx_1 dx_2 = -dS^{21}.$$

Следовательно, правую часть равенства (32.3) можно преобразовать так:

$$-\int_\alpha^\gamma\int_\beta^\delta\left(\frac{\partial K_1}{\partial x_2} - \frac{\partial K_2}{\partial x_1}\right) dx_2 dx_1 = -\int_\alpha^\gamma \{[K_1]^\delta - [K_1]^\beta\} dx_1 + \\ + \int_\beta^\delta \{[K_2]^\gamma - [K_2]^\alpha\} dx_2.$$

Полученное выражение состоит из четырех членов, каждый из которых и дает значение интеграла $\int K_\mu dx_\mu$ для одной из четырех частей контура.

*) Определенный таким образом контур должен, впрочем, иметь углы в точках пересечения, образуемых четырьмя ограничивающими координатными линиями. Так как, однако, обе стороны доказываемого здесь уравнения (32.3) зависят от контура непрерывным образом, то любой контур можно апроксимировать при помощи такого, для которого справедливо вышеупомянутое предположение. (*И.*)

Это доказательство служит хорошей иллюстрацией методов тензорного исчисления. У нас шла речь о соотношении между двумя величинами $K_\mu (dx)^\mu$ и $(K_{\mu\nu} - K_{\nu\mu}) d_1 S^{\mu\nu}$, которые (при рассмотрении их ковариантных размерностей) оказались инвариантами, причем последняя величина была приведена к более простому виду при помощи формулы (32.2). Таким образом, соотношение оказалось не зависящим от выбора координат, хотя в равенстве (32.3) оно имеет такой вид, как если бы оно было отнесено к какой-нибудь определенной системе координат. При доказательстве соотношения между двумя инвариантами, которое должно быть справедливым вообще, мы естественно выбрали такие координаты, которые упрощают рассмотрение; благодаря этому наша работа была значительно сокращена проведением изогнутых ячеек так, чтобы четыре координатные линии и образовывали при этом контур.

33. СМЫСЛ КОВАРИАНТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ.

Предположим, что нам нужно рассмотреть с физической точки зрения вопрос о том, как изменяется силовое поле от точки к точке. Если применять полярные координаты, то изменение радиальной компоненты не всегда еще указывает на неоднородность поля; это изменение хотя бы отчасти можно приписать разнице наклонов между радиальными направлениями в различных точках. Точно так же при употреблении вращающихся осей скорость изменения количества движения h определяется не величиной $\frac{dh_1}{dt}$ и т. д., но выражениями

$$\frac{dh_1}{dt} - \omega_3 h_2 + \omega_2 h_3 \text{ и т. д.} \tag{33.1}$$

Количество движения может быть постоянным даже в том случае, если производные по времени от его компонент во вращающихся осях не равны нулю.

Следовательно, мы должны признать, что изменение физической величины рассматривается вообще как нечто отличное от изменения математических компонент, на которые эта величина разложена. В элементарной теории определение изменения физической величины получается путем отождествления его с изменением компонент в прямоугольной системе координат, движущейся без ускорения; но этот способ не может иметь применения в общем случае, так как может оказаться, что для даниого пространства-времени такие координаты вообще не существуют. Можно ли все же сохранить это понятие *физической* скорости изменения и в общем случае?

Наше внимание направлено на скорость изменения физических величин в виду их значения для законов физики. Так, например, сила есть скорость изменения во времени количества движения, или скорость изменения потенциала в пространстве. Поэтому скорость изменения должна выражаться каким-то тензором, для того чтобы она могла входить в общие физические законы. Кроме того, для согласия с обычными определениями в элементарных случаях требуют, чтобы этот тензор в случае галилеевых координат сводился к скорости изменения прямоугольных компонент. Оба условия выполняются, если определить физическую скорость изменения тензора при помощи его ковариантной производной.

Ковариантная производная $A_{\mu\nu}$ состоит из члена $\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$, дающего обычный градиент, из которого вычитается «поправочное изменение» $\{\mu\nu, \alpha\} A_\alpha$, которое можно приписать криволинейности координатной системы. При применении декартовых координат (прямоугольных или косоугольных) трехзначковые скобки равны нулю, так что здесь, как и следовало ожидать, поправочный член отсутствует. Назовем тензор $A_{\mu\nu}$ скоростью *абсолютного изменения* вектора A_μ.

Рассмотрим на плоскости $x_\nu x_\sigma$ элементарную ячейку, угловыми точками которой будут:

$$A(x_\nu, x_\sigma),\ B(x_\nu + dx_\nu, x_\sigma),\ C(x_\nu + dx_\nu, x_\sigma + dx_\sigma),\ D(x_\nu, x_\sigma + dx_\sigma).$$

Вычислим теперь полное абсолютное изменение векторного поля A_μ при обходе вокруг контура $ABCDA$.

1) От A до B абсолютное изменение, вычисленное для точки x_σ, равно $A_{\mu\nu} dx_\nu$ *).

---

*) Нам пока придется отбросить условие, введенное при суммировании, так как dx_ν и dx_σ представляют собой ребра отдельной ячейки. На основании условия мы получили бы и здесь правильный результат, но последний получился бы слишком быстро, что для нас сейчас является нежелательным.

2) От B до C абсолютное изменение, вычисленное для точки $x_\nu + dx_\nu$, равно $A_{\mu\sigma}\, dx_\sigma$.

3) От C до D абсолютное изменение, вычисленное для точки $x_\sigma + dx_\sigma$, равно $-A_{\mu\nu}\, dx_\nu$.

4) От D до A абсолютное изменение, вычисленное для точки x_ν, равно $-A_{\mu\sigma}\, dx_\sigma$.

Комбинируя (2) и (4), получим окончательный результат, равный разности изменений $A_{\mu\sigma}\, dx_\sigma$ в точках $x_\nu + dx_\nu$ и x_ν. Имеется некоторое искушение приравнять эту разность следующему выражению:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(A_{\mu\sigma}\, dx_\sigma)\, dx_\nu.$$

Но как уже было разъяснено, это дало бы только разность математических компонент, а не «абсолютную разность». Вместо этого нужно взять ковариантную производную, причем получим [благодаря тому, что dx_σ имеет одно и то же значение как для (2), так и для (4)]

$$A_{\mu\sigma\nu}\, dx_\sigma\, dx_\nu.$$

Точно так же из (3) и (1) будем иметь

$$-A_{\mu\nu\sigma}\, dx_\nu\, dx_\sigma,$$

так что полное абсолютное изменение вдоль взятого контура будет равно

$$(A_{\mu\sigma\nu} - A_{\mu\nu\sigma})\, dx_\nu\, dx_\sigma. \qquad (33.2)$$

Естественно ожидать, что при возвращении к нашей исходной точке абсолютное изменение обратится в нуль. Каким образом может произойти в итоге какое-либо абсолютное изменение, если теперь мы получили тот же самый вектор A_μ, из которого мы исходили в самом начале? Несмотря на это, вообще говоря, $A_{\mu\nu\sigma} \neq A_{\mu\sigma\nu}$, т. е. результат ковариантного дифференцирования зависит от того порядка, в котором оно совершается, и выражение (33.2) не равно нулю.

Что этот результат действительно имеет смысл, можно обнаружить при рассмотрении двумерного пространства, например, поверхности океана. В самом деле, если нос корабля все время направляется по кильватерной линии, то его путь будет представлять собой окружность большого круга. Теперь предположим, что корабль движется по некоторому замкнутому пути таким образом, что его положение и курс, т. е. направление движения, в конце движения оказываются такими же, как и в начале. Если учесть все следующие друг за другом изменения курса и сложить все получившиеся при этом углы, то результат не будет равен нулю (или 2π).

В случае движения по треугольнику получится хорошо известный «сферический избыток». Точно также не будет равно нулю и полное изменение скорости. В данном примере мы имеем иллюстрацию того факта, что вектор при возвращении в свое исходное положение не всегда принимает первоначальное значение, т. е. что его полное абсолютное изменение не равно нулю.

Полученный результат может показаться до некоторой степени противоречивым. Это происходит из-за попытки применить к обсуждаемому нами вопросу термин «абсолютное изменение». Термин в некотором отношении нагляден, так как он связывает ковариантное дифференцирование с понятиями элементарной физики. Например, едва ли кто-нибудь поколеблется назвать выражение (33.1) абсолютной скоростью изменения количества движения в отличие от обычной скорости изменения $\frac{dh_1}{dt}$. Но теперь, в более общем случае неэвклидова пространства, после того как нами уже обнаружена указанная связь, лучше не пользоваться этим термином.

Следуя Леви-Чивита и Вейлю, мы будем пользоваться термином *параллельное перемещение* (или параллельный перенос), под которым будет пониматься то, что до сих пор нами называлось перемещением без «абсолютного изменения». Условие для параллельного перемещения заключается в равенстве нулю ковариантной производной *).

$$\delta A_\mu = (A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu})\, dx_\nu\, dx_\sigma,$$

*) Леви-Чивита определяет параллельное перемещение вектора в римановом пространстве, рассматривая последнее как расположенное в эвклидовом пространстве большего числа измерений.

Простейшим случаем будет тот, когда мы имеем кривую поверхность в обыкновенном пространстве. Контравариантный вектор на поверхности можно представить в виде малого перемещения на поверхности, умноженного на какой-нибудь скаляр. Этому соответствует геометрическое изобраили

$$\delta A_\mu = \frac{1}{2} \int\int (A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu})\, dS^{\nu\sigma}, \qquad (33.3)$$

причем соглашение, введенное о суммировании, вновь получает силу. Результат доказан нами только для бесконечно малого контура, ограничивающего собой координатную ячейку, для которой выражение $dS^{\nu\sigma}$ имеет только две неравные нулю компоненты $dx_\nu dx_\sigma$ и $-dx_\nu dx_\sigma$. Но данное уравнение, как мы видим, является тензорным уравнением, а поэтому справедливо для любой системы координат. Следовательно, его можно применять к замкнутым контурам любой формы, так как всегда можно выбрать координаты так, чтобы взятый контур оказался границей координатной ячейки. Но равенство (33.3) и в этом случае пока ограничено в своем применении только бесконечно малыми контурами. Распространить его на контуры конечных размеров нельзя никаким

жение того же вектора в виде касательного вектора к поверхности. Если мы будем рассматривать касательную плоскость как твердое тело, то ее можно перемещать так, чтобы точка касания описывала данную линию на поверхности, вращая плоскость в то же время вокруг некоторой оси.

Легко видеть, что скорость вращения всегда может быть разложена на две составляющие: одна из них направлена по касательной к поверхности, сопряженной с направлением движения точки касания (т. е. по линии пересечения двух бесконечно близких последовательных положений касательной плоскости), другая направлена по нормали. Касательные векторы считаются перемещающимися вдоль линии *параллельно*, если касательная плоскость вращается только вокруг сопряженной касательной, т. е. если нормальная составляющая мгновенной угловой скорости равна нулю. Это определение весьма естественно, так как для наблюдателя, перемещающегося по кривой поверхности и не замечающего ее кривизны, отклонением от параллельного перемещения будет казаться только вращение вокруг оси своего тела, т. е. около нормали к поверхности. Бесконечно малое перемещение конца касательного вектора равно сумме поступательного перемещения, равного перемещению его начала и вращательного перемещения вокруг оси, лежащей в касательной плоскости. Поэтому бесконечно малое изменение самого вектора, равное разности перемещений конца и начала, перпендикулярно к касательной плоскости, так как оно равно вращательному перемещению вокруг оси, лежащей в этой плоскости. Если выразить условие перпендикулярности дифференциала вектора к касательной плоскости через составляющие соответствующего контравариантного вектора на поверхности, то и получим уравнения параллельного перемещения, приведенные в тексте. (*Р.*)

способом, в отличие от теоремы Стокса. Причина этого ограничения заключается в следующем. Пусть в начальной точке взят некоторый *изолированный вектор*, который при параллельном перемещении вдоль контура получит определенное приращение δA_μ. В равенстве (33.3) это выражено через производные *векторного поля* A_μ, простирающегося по всей области интегрирования. Для контура, имеющего большие размеры, мы должны были бы учесть значения A_μ, лежащие далеко от начального вектора и, очевидно, не играющие роли при вычислении δA_μ. Замечательно, что подобная формула существует хотя бы и для бесконечно малого контура; дело заключается в том, что хотя выражение $A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu}$ в данной точке формально относится ко всему векторному полю, на самом деле оно оказывается зависящим только от изолированного вектора A_μ [см. уравнение (34.3)].

Контравариантный вектор $\frac{dx_\mu}{ds}$ определяет направление в четырехмерном мире и интерпретируется как скорость с обычной точки зрения, разделяющей пространство и время. Этот вектор мы будем также называть «скоростью»; его связь с обычным трехмерным вектором (u, v, w) дается равенством

$$\frac{dx_\mu}{ds} = \beta\,(u, v, w, 1)\ ^*),$$

где β есть множитель Фицджеральда, т. е. $\frac{dt}{ds}$. «Длина» (см. формулу 26.5) скорости всегда равна единице. Если мы будем перемещать величину $\frac{dx_\mu}{ds}$ параллельно вдоль определяемого ею направления, то получим геодезическую линию. В самом деле, на основании равенства (29.4) условию для параллельного перемещения можно придать следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{dx_\mu}{ds}\right) + \{\alpha\nu, \mu\}\,\frac{dx_\sigma}{ds} = 0.$$

*) Читатель должен при этом помнить, что операция параллельного переноса переместима с операцией поднимания или опускания значка, так что если два тензора сопряжены друг с другом, то это соотношение не нарушается при параллельном переносе. Действительно тензоры $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$, g_μ^ν, как мы это видели, ведут себя при ковариантном дифференцировании как постоянные множители.

(*Н.*)

Умножая это выражение на $\frac{dx_\nu}{ds}$, получим

$$\frac{d^2x_\mu}{ds^2} + \{\alpha\nu,\ \mu\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0, \tag{33.4}$$

т. е. уравнение геодезической линии (28.5). Итак, если говорить языком, применявшимся в начале этого параграфа, то геодезическую линию можно определить как четырехмерную кривую, направление которой не претерпевает никакого абсолютного изменения.

34. ТЕНЗОР РИМАННА — КРИСТОФФЕЛЯ.

Вторую ковариантную производную от A_μ можно найти, подставляя в формулу (30.3) значение тензора $A_{\mu\nu}$ из уравнения (29.3), т. е.

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu\sigma} = {} & \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \{\mu\nu,\ \alpha\}\, A_\alpha\right) - \{\mu\sigma,\ \alpha\}\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\nu} - \{\alpha\nu,\ \varepsilon\} A_\varepsilon\right) - \\ & - \{\nu\sigma,\ \alpha\}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha} - \{\mu\alpha,\ \varepsilon\}\ A_\varepsilon\right) = \\ = {} & \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\sigma\, \partial x_\nu} - \{\mu\nu,\ \alpha\}\ \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\sigma} - \{\mu\sigma,\ \alpha\}\ \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\nu} - \{\nu\sigma,\ \alpha\}\ \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha} + \\ & + \{\nu\sigma,\alpha\}\ \{\mu\alpha,\varepsilon\}\ A_\varepsilon + \{\mu\sigma,\ \alpha\}\ \{\alpha\nu,\ \varepsilon\}\ A_\varepsilon - A_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu,\alpha\}. \end{aligned} \tag{34.1}$$

Первые пять членов не изменятся, если переменить местами значки ν и σ. Меняя в последнем члене немой значок α на ε, можно переписать последние два члена следующим образом:

$$A_\varepsilon\left(\{\mu\sigma,\ \alpha\}\ \{\alpha\nu,\ \varepsilon\} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\ \{\mu\nu,\ \varepsilon\}\right),$$

откуда

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu} = A_\varepsilon \Bigg(& \{\mu\sigma,\ \alpha\}\ \{\alpha\nu,\ \varepsilon\} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\ \{\mu\nu,\ \varepsilon\} - \{\mu\nu,\ \alpha\}\ \{\alpha\sigma,\ \varepsilon\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\ \{\mu\sigma,\ \varepsilon\}\Bigg). \end{aligned} \tag{34.2}$$

На основании строгой теоремы частного заключаем, что сомножитель вектора A_ε должен быть тензором.

Следовательно,

$$A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu} = A_\varepsilon B^\varepsilon_{\mu\nu\sigma}, \qquad (34.3)$$

где

$$B^\varepsilon_{\mu\nu\sigma} = \{\mu\sigma, \alpha\}\{\alpha\nu, \varepsilon\} - \{\mu\nu, \alpha\}\{\alpha\sigma, \varepsilon\} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\mu\sigma, \varepsilon\} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu, \varepsilon\}. \qquad (34.4)$$

Это выражение называется *тензором Риманна—Кристоффеля*.

Порядок ковариантного дифференцирования можно изменять согласно (34.3) только в том случае, если этот тензор равен нулю.

Опуская значок ε, получим

$$B_{\mu\nu\sigma\rho} = g_{\rho\varepsilon} B^\varepsilon_{\mu\nu\sigma} = \{\mu\sigma, \alpha\}[\alpha\nu, \rho] - \{\mu\nu, \alpha\}[\alpha\sigma, \rho] + \frac{\partial}{\partial x_\nu}[\mu\sigma, \rho] - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}[\mu\nu, \rho] - \{\mu\sigma, \alpha\}\frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x_\nu} + \{\mu\nu, \alpha\}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_\sigma}, \qquad (34.45)$$

причем в последних двух членах значок ε был заменен через α.

На основании формул (27.5) и (27.1) окончательно будем иметь

$$B_{\mu\nu\sigma\rho} = -\{\mu\sigma, \alpha\}[\rho\nu, \alpha] + \{\mu\nu, \alpha\}[\rho\sigma, \alpha] + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\rho \partial x_\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x_\rho \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\rho\nu}}{\partial x_\mu \partial x_\sigma}\right) \qquad (34.5)$$

Из выражения (34.5) видно, что тензор $B_{\mu\nu\sigma\rho}$, будучи антисимметричным по отношению к значкам ν и σ, также антисимметричен и по отношению к μ и ρ *). Таким образом, он симметричен по отношению к двойной перестановке μ и ν, ρ и σ.

Наконец, этот тензор обладает следующим циклическим свойством:

$$B_{\mu\nu\sigma\rho} + B_{\mu\sigma\rho\nu} + B_{\mu\rho\nu\sigma} = 0, \qquad (34.6)$$

что легко доказать при помощи формулы (34.5).

---

*) Обратим внимание на то, что оба первые члена (34.5) можно написать в виде

$$-g^{\alpha\beta}[\mu\sigma, \beta][\rho\nu, \alpha] + g^{\alpha\beta}[\mu\nu, \beta][\rho\sigma, \alpha],$$

откуда сразу ясны различные свойства симметрии.

(*Н.*).

В общем случае тензор четвертого ранга имеет 256 различных компонент. В данном случае, благодаря двойной антисимметричности, их число (если отвлечься от знака) снижается до $6 \cdot 6 = 36$; 30 из них попарно равны, так как μ и ρ можно менять местами с ν и σ, но оставшиеся 6 компонент, в которых μ и ρ являются такой же самой парой чисел, как и ν и σ, все отличаются друг от друга. Итак, остается 21 различных компонент, для которых выражение (34.6) дает еще только одно соотношение. Таким образом, тензор Риманна—Кристоффеля имеет всего 20 *независимых* компонент *).

Тензор Риманна—Кристоффеля зависит исключительно от $g_{\mu\nu}$ и их производных, и принадлежит поэтому к классу фундаментальных тензоров. Обычно из любого тензора при помощи ковариантного дифференцирования можно получить ряды тензоров непрерывно увеличивающихся рангов. Но к фундаментальным тензорам этот процесс неприменим, так как выражение $g_{\mu\nu\sigma}$ равно нулю тождественно. Нам удалось обойти эту трудность—получить фундаментальный тензор четвертого ранга. Теперь при помощи ковариантного дифференцирования ряд можно продолжать бесконечно.

Если тензор Риманна—Кристоффеля равен нулю, то дифференциальные уравнения

$$A_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \{\mu\nu, \alpha\} A_\alpha \doteq 0 \tag{34.7}$$

интегрируемы. В самом деле, интегрирование будет возможно только в том случае, если на основании (34.7) выражения dA_μ или $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} dx_\nu$ обращаются в полный дифференциал, т. е. если

*) Если значки писать в порядке $\mu\rho\sigma\nu$, то следующая схема даст число различных компонент, равное 21:

1212	1223	1313	1324	1423	2323	2424
1213	1224	1314	1334	1424	2324	2434
1214	1234	1323	1414	1434	2334	3434

причем $1234 - 1324 + 1423 = 0$.

Если опустить члены, содержащие значок 4, то останется 6 компонент в трехмерном пространстве. При двух измерениях остается только одна компонента 1212. Доказательство того, что в четырехмерном случае действительно существует 20 независимых компонент тензора Риманна—Кристоффеля см. в п. 36.

$\{\mu\nu, \alpha\} A_\alpha dx_\nu$ есть полный дифференциал. На основании общей теории, необходимым и достаточным условием *) для этого будет выполнение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(\{\mu\nu, \alpha\} A_\alpha) - \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\{\mu\sigma, \alpha\} A_\alpha) = 0,$$

или

$$A_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu, \alpha\} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\mu\sigma, \alpha\}\right) + \{\mu\nu, \alpha\}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\sigma} - \{\mu\sigma, \alpha\}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\nu} = 0\,.$$

Подставляя сюда значения $\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\sigma}$ и $\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\nu}$ из формулы (34.7), получим

$$A_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu, \alpha\} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\mu\sigma, \alpha\}\right) + (\{\mu\nu, \alpha\}\{\alpha\sigma, \varepsilon\} - \{\mu\sigma, \alpha\}\{\alpha\nu, \varepsilon\}) A_\varepsilon = 0.$$

После замены в первом члене немого значка α на ε, условие примет вид:

$$A_\varepsilon B^\varepsilon_{\mu\sigma\nu} = 0.$$

Следовательно, если тензор $B^\varepsilon_{\mu\sigma\nu} = 0$, то дифференциал dA_μ, определяемый из (34.7), будет полным дифференциалом, и интеграл

$$\int dA_\mu\,,$$

взятый между любыми двумя точками, не будет зависеть от пути интегрирования. Вектор A_μ может быть затем перенесен при помощи параллельного переноса в любую точку. При этом получится однозначный результат, не зависящий от пути переноса. Если вектор будет перемещаться таким способом по всему полю, мы получим *однородное векторное поле.*

Эта конструкция однородного векторного поля возможна только в том случае, если тензор Риманна—Кристоффеля исчезает в каждой точке поля. В остальных случаях уравнения не имеют полных интегралов и могут быть проинтегрированы только вдоль некоторых особых путей. Например, всем точкам плоскости можно приписать

---

*) Формулировку и анализ условий интегрируемости для дифференциальных уравнений в полных производных — к чему сводятся обсуждаемые в тексте вопросы — читатель может найти в любом серьезном курсе анализа. Кроме того, здесь можно еще сослаться на изложение вопроса в книге H. Weyl'я, Mathematische Analyse des Raumproblems, стр. 66 — 68, Berlin, 1923.

(*Н.*).

однородное направление, но уже в случае сферической поверхности нет чего-либо аналогичного такому направлению на плоскости.

Формулы, подобные (34.3), могут быть также получены и для вторых производных *тензора* $A_{\ldots\mu\ldots}$, как и для вектора A_μ. Легко можно найти, что

$$A_{\ldots\mu\ldots\nu\sigma}-A_{\ldots\mu\ldots\sigma\nu}=\sum B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}\,A_{\ldots\varepsilon\ldots}, \tag{34.8}$$

где суммирование производится по всем значкам μ первоначального тензора *).

---

*) Таким образом, знак суммы в уравнении (34.8) справа распространяется на столько слагаемых, сколько значков имеет тензор $A_{\ldots\mu\ldots}$; таким образом, каждый значок соответствует слагаемому, не говоря о том, что каждое слагаемое в отдельности представляет всю сумму по ε. Мы укажем здесь подробнее на ход вычислений, приводящий к уравнению (34.8). Имеем

$$(A_{\ldots\lambda\ldots\mu\ldots})_\nu=\frac{\partial A_{\ldots\lambda\ldots\mu\ldots}}{\partial x_\nu}-\sum_\alpha\{\mu\nu,\alpha\}\,A_{\ldots\lambda\ldots\alpha\ldots},$$

где α под знаком суммы обозначает, что сумма берется по всем значкам $A_{\ldots\lambda\ldots\alpha\ldots}$. Продифференцируем этот ковариантный тензор по x_σ, затем разложим обыкновенную производную по x_σ и отделим дополнительные члены, соответствующие значку ν, тогда получим

$$\begin{aligned}(A_{\ldots\lambda\ldots\mu\ldots\nu})_\sigma=&\frac{\partial^2 A_{\ldots\lambda\ldots\mu\ldots}}{\partial x_\nu\,\partial x_\sigma}-\sum_\mu A_{\ldots\lambda\ldots\alpha\ldots}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu,\alpha\}-\\&-\sum_\mu\{\mu\nu,\alpha\}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}A_{\ldots\lambda\ldots\alpha\ldots}-\sum_\lambda\{\lambda\sigma,\beta\}\,A_{\ldots\beta\ldots\mu\ldots\nu}-\\&-\{\nu\sigma,\gamma\}\,A_{\ldots\lambda\ldots\mu\ldots\gamma}.\end{aligned}\tag{a}$$

При этом предпоследняя сумма должна пониматься таким образом, что значок λ или β пробегает через *все* положения значков первоначального тензора $A_{\ldots\lambda\ldots\mu\ldots}$, исключая место занятого ν. Рассмотрим теперь более подробно эту сумму, в которой мы заменим $A_{\ldots\lambda\ldots\mu\ldots}$ на приведенное выше выражение. Но при этом нужно принять во внимание следующее: в дополнительных членах, содержащих $A_{\ldots\lambda\ldots\mu\ldots}$, можно, вообще говоря, непосредственно заменить во втором множителе λ на β. Но в то же самое время совершенно очевидно, что для *одного* из дополнительных членов этого сделать нельзя, именно для того из них, в котором на месте λ стоит значок α, по которому производится суммирование; таким образом, бегущий значок $\lambda=\mu$ стоит на первом месте в трехзначковых

Соответствующие формулы для контравариантных тензоров могут быть получены без всякого труда, если принять во внимание, что тензор $g^{\mu\nu}$ ведет себя при ковариантном дифференцировании как постоянная величина и что значки могут быть подняты у обеих частей равенства (34.8).

35. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМУЛЫ.

Нам понадобится для дальнейшего изложения еще ряд формул. Так как

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} = 0 \text{ или } 1,$$

то

$$g^{\mu\alpha} \cdot dg_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \cdot dg_{\mu\alpha} = 0.$$

Следовательно,

$$g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} g^{\nu\beta} dg^{\mu\alpha} = -g_{\mu}^{\beta} dg^{\mu\alpha} = -dg^{\alpha\beta} \quad (35.11)$$

символах и должен заменяться там на значок β. Если мы выделим соответствующие члены, то получим

$$\sum_{\lambda} \{\lambda\sigma, \beta\} A_{\ldots\beta\ldots\mu\ldots\nu} = \sum_{\lambda} \{\lambda\sigma, \beta\} \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_{\ldots\beta\ldots\mu\ldots} -$$

$$-\sum_{\lambda}\sum_{\mu} \{\lambda\sigma, \beta\} \{\mu\nu, \alpha\} A_{\ldots\beta\ldots\alpha\ldots} - \sum_{\lambda} \{\lambda\sigma, \beta\} \{\beta\nu, \alpha\} A_{\ldots\alpha\ldots}, \quad (b)$$

где в предпоследнем члене λ, μ или β соответствуют *различным* положениям значков, а в последнем члене у тензора $A_{\ldots\alpha\ldots}$ явно отмечен только *один* значок.

Если мы вставим теперь полученное выражение в (a), заменим ν на σ и образуем разность, то, во-первых, в (a) исчезнут первый и последний член, во-вторых, сумма третьего члена (a) и первого члена в (b) и, наконец, второй член в (b).

Таким образом, получим

$$A_{\ldots,\lambda\ldots\mu\ldots\nu\sigma} - A_{\ldots\lambda\ldots\mu\ldots\sigma\nu} = -\sum_{\mu} A_{,\ldots\alpha\ldots} \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu, \alpha\} +$$

$$+\sum_{\mu} A_{,\ldots\alpha\ldots} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\mu\sigma, \alpha\} + \sum \{\lambda\sigma, \beta\} \{\beta\nu, \alpha\} A_{\ldots\alpha\ldots} -$$

$$-\sum \{\lambda\nu, \beta\} \{\beta\sigma, \alpha\} A_{\ldots\alpha\ldots} = \sum A_{\ldots\alpha\ldots} B^{\alpha}_{\lambda\nu\sigma}$$

в соответствии с (34.8). При этом у тензора $A_{\ldots\alpha\ldots}$, стоящего справа, мы отмечаем явно только один значок.

(*Н.*)

Точно также

$$dg_{\alpha\beta} = -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}dg^{\mu\nu} \tag{35.12}$$

Умножая это на $A^{\alpha\beta}$, получим по правилу для опускания значков:

$$A^{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta} = -\left(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}A^{\alpha\beta}\right)dg^{\mu\nu} = -A_{\mu\nu}dg^{\mu\nu} = -A_{\alpha\beta}dg^{\alpha\beta} \tag{35.2}$$

Для любого нефундаментального тензора $B_{\alpha\beta}$ на основании равенства (26.3) соответствующей формулой будет

$$A^{\alpha\beta}dB_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}dB^{\alpha\beta}.$$

Исключение для случая $B_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ происходит благодаря тому, что изменение $dg_{\alpha\beta}$ дает добавочный эффект, меняя операции поднимания и опускания значков.

Выражение для dg можно получить, взяв дифференциал от каждой компоненты тензора $g_{\mu\nu}$ и умножив ее на свой коэффициент $g \cdot g^{\mu\nu}$ в детерминанте.

Таким образом,

$$\frac{dg}{g} = g^{\mu\nu}dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}dg^{\mu\nu} \tag{35.3}$$

Сокращенные трехзначковые скобки будут иметь вид

$$\{\mu\sigma, \sigma\} = \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}\left\{\frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\lambda}\right\} = \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}\frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x_\mu}.$$

Остальные два члена сократились при перемене местами немых значков σ и λ. Применяя (35.3) к последнему выражению, получим

$$\{\mu\sigma, \sigma\} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\lg\sqrt{-g}. \tag{35.4}$$

Мы ввели здесь $\sqrt{-g}$, так как g всегда отрицательно для координат, применяющихся в наших исследованиях.

Нужно еще обратить внимание на возможную ошибку, которая встречается при дифференцировании суммированных выражений. Так например, результатом дифференцирования величины $a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu$ по x_ν будет не $a_{\mu\nu}x_\mu$, но выражение $(a_{\mu\nu} + a_{\nu\mu})\,x_\mu$. Метод выполнения таких дифференцирований может быть иллюстрирован следующим примером. Пусть

$$h_{\nu\tau} = a_{\mu\nu}a_{\sigma\tau}x_\mu x_\sigma,$$

где $a_{\mu\nu}$ — постоянные коэффициенты.

Тогда

$$\frac{\partial h_{\nu\tau}}{\partial x_\alpha} = a_{\mu\nu} a_{\sigma\tau} \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial x_\alpha} x_\sigma + \frac{\partial x_\sigma}{\partial x_\alpha} x_\mu \right) = a_{\mu\nu} a_{\sigma\tau} \left(g^\mu_\alpha x_\sigma + g^\sigma_\alpha x_\mu \right) \quad [\text{см. } (22.3)]$$

Повторяя процесс, будем иметь

$$\frac{\partial^2 h_{\nu\tau}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = a_{\mu\nu} a_{\sigma\tau} (g^\mu_\alpha \, g^\sigma_\beta + g^\sigma_\alpha \, g^\mu_\beta) = a_{\alpha\nu} a_{\beta\tau} + a_{\beta\nu} a_{\alpha\tau}.$$

Отсюда, меняя значки, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\sigma} (a_{\mu\nu} a_{\sigma\tau} x_\mu x_\sigma) = a_{\mu\nu} a_{\sigma\tau} + a_{\sigma\nu} a_{\mu\tau}. \tag{35.5}$$

Точно также, если выражение $a_{\mu\nu\sigma}$ симметрично по отношению к своим значкам, то

$$\frac{\partial^3}{\partial x_\mu \partial x_\nu \partial x_\sigma} (a_{\mu\nu\sigma} x_\mu x_\nu x_\sigma) = 6 \, a_{\mu\nu\sigma}. \tag{35.6}$$

Причиной ошибок может явиться трехкратное повторение значка в одном и том же члене. Но в этих формулах суммирование относится к повторению значков внутри скобок, но не к образованию производных.

Резюме. Тензоры суть величины, преобразуемые по определенным законам. Их значение и удобство применения заключается в том, что всякое тензорное уравнение, справедливое для какой-нибудь одной системы координат, остается верным для всякой другой системы координат. Новые тензоры возникают или при непосредственном рассмотрении правил, согласно которым они преобразуются, или на основании того свойства, что сумма, разность, произведение или частное двух тензоров есть также тензор. В этом заключается обобщение метода размерностей, применяемого в физике.

Основными действиями тензорного исчисления являются: сложение, умножение (внешнее или внутреннее), суммирование (п. 22), сокращение (п. 24), подстановка (п. 25), поднимание и опускание значков (п. 26) и коварнантное дифференцирование (пп. 29, 30). Действия, соответствующего делению, нет; представляющие иногда неудобства множители $g_{\mu\nu}$ или $g^{\mu\nu}$ могут быть устранены умножением на $g^{\mu\sigma}$ или $g_{\mu\sigma}$, причем получается оператор подстановки. Операция суммирования находится практически вне нашего контроля и всегда предстает перед нами как fait accompli [совершившийся факт].

Наиболее характерный прием тензорного исчисления состоит в свободной замене немых значков (т. е. тех, которые встречаются два раза в одном и том же члене), этот процесс вероятно представляет наибольшие трудности для начинающего.

Специального внимания заслуживают фундаментальные или мировые тензоры. Мы обнаружили два таких тензора, а именно: $g_{\mu\nu}$ и $B_{\mu\nu\sigma\rho}$. Последний тензор был выражен при помощи предыдущего и через его первые и вторые производные. Благодаря этим тензорам будет переброшен мост над пропастью, зияющей между чистой геометрией и физикой; в частности, $g_{\mu\nu}$ связывает наблюдаемую величину ds с имеющими лишь математический смысл координатами dx_μ.

Так как в данной книге мы обычно имеем дело с тензорами, то читатель может не оценить всего своеобразия этого рода величин. Своего рода жонглирование, к которому мы как будто прибегаем при различных преобразованиях, возможно только вследствие того, что рассматриваемые величины имеют совершенно исключительный характер.

Дальнейшее развитие тензорного исчисления будет продолжено в п. 48. Но уже сейчас мы достигли той ступени в наших знаниях, на которой мы можем начать излагать теорию тяготения.

Глава III.

ЗАКОН ТЯГОТЕНИЯ.

36. ПЛОСКОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ. ЕСТЕСТВЕННЫЕ КООРДИНАТЫ.

Область мира называется *плоской* или *гомалоидальной*, если в ней возможно построить галилееву систему координат.

В п. 4 было показано, что при постоянных $g_{\mu\nu}$ величина ds может быть представлена в виде суммы квадратов четырех величин, т. е. может быть введена галилеева координатная система. Таким образом, иначе, данное пространство-время называется плоским, если для него можно найти такие координаты, при которых компоненты фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$ были бы постоянными величинами.

Если $g_{\mu\nu}$ постоянны, то все трехзначковые символы равны нулю; так как однако эти трехзначковые символы не образуют тензора, то, вообще говоря, они не будут оставаться равными нулю при введении других координат для той же самой плоской области. Кроме того, если $g_{\mu\nu}$ постоянны, то тензор Риманна—Кристоффеля, образованный из произведений трехзначковых скобок и их производных, также будет равен нулю; как тензор он будет оставаться нулем и при введении какой-либо иной координатной системы для той же области.

Следовательно, равенство нулю тензора Риманна—Кристоффеля представляет собой необходимое условие для наличия плоского пространства-времени.

Это условие является также *достаточным*, т. е. если тензор Риманна—Кристоффеля равен нулю, то мир должен быть плоским.

Доказать это можно следующим образом. Мы нашли (п. 34), что если

$$B^{\epsilon}_{\mu\nu\sigma} = 0, \qquad (36.1)$$

то параллельным переносом вектора по всей области возможно построить однородное векторное поле. Пусть A^{μ}_{α} будут четыре однородных векторных поля, получаемые при значениях $\alpha=1, 2, 3, 4$, так что

$$(A^{\mu}_{(\alpha)})_{\sigma}=0,$$

или на основании (29.4):

$$\frac{\partial A^{\mu}_{(\alpha)}}{\partial x_{\sigma}}=-\{\varepsilon\sigma,\ \mu\}\ A^{\varepsilon}_{(\alpha)}. \tag{36.2}$$

Заметим, что α не является тензорным значком, а просто лишь отличает четыре независимых вектора друг от друга.

Мы будем применять эти четыре однородные векторные поля для определения новой координатной системы, обозначаемой штрихами. Пусть наша единичная координатная клетка будет представлять собой гипер-параллелепипед, образованный четырьмя векторами в каждой точке. Полная система клеток будет получена последовательным параллельным перемещением этой единичной клетки до тех пор, пока не будет заполнена вся область. Одно из ребер единичной клетки, определяемое в старых координатах при помощи равенства

$$dx_{\mu}=A^{\mu}_{(1)},$$

будет задано в новых координатах через

$$dx_{\alpha}'=(1,\ 0,\ 0,\ 0);$$

точно также второе ребро $dx_{\mu}=A^{\mu}_{(2)}$ должно обратиться в $dx_{\alpha}'=(0,\ 1,\ 0,\ 0)$ и т. д. Отсюда вытекает закон преобразования

$$dx_{\mu}=A^{\mu}_{(\alpha)}\ dx_{\alpha}. \tag{36.3}$$

Конечно, построение штрихованной координатной системы зависит от возможности построения однородных векторных полей, а последнее, в свою очередь, зависит от того, удовлетворяется ли условие (36.1) или нет.

Так как величина ds^2 есть инвариант, то (см. 36.3):

$$g'_{\alpha\beta}\,dx'_{\alpha}\,dx'_{\beta}=g_{\mu\nu}\,dx_{\mu}\,dx_{\nu}=g_{\mu\nu}\,A^{\mu}_{(\alpha)}\,A^{\nu}_{(\beta)}\,dx'_{\alpha}dx'_{\beta}\,.$$

Следовательно,

$$g'_{\alpha\beta}=g_{\mu\nu}A^{\mu}_{(\alpha)}\ A^{\nu}_{(\beta)}.$$

Дифференцируя и применяя формулу (36.2), получим

$$\frac{\partial g'_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}=g_{\mu\nu}A^{\mu}_{(\alpha)}\frac{\partial A^{\nu}_{(\beta)}}{\partial x_\sigma}+g_{\mu\nu}A^{\nu}_{(\beta)}\frac{\partial A^{\mu}_{(\alpha)}}{\partial x_\sigma}+A^{\mu}_{(\alpha)}A^{\nu}_{(\beta)}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}=$$

$$=-g_{\mu\nu}A^{\mu}_{(\alpha)}A^{\varepsilon}_{(\beta)}\{\varepsilon\sigma,\ \nu\}-g_{\mu\nu}A^{\nu}_{(\beta)}A^{\varepsilon}_{(\alpha)}\{\varepsilon\sigma,\ \mu\}+A^{\mu}_{(\alpha)}A^{\nu}_{(\beta)}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}.$$

Переставляя немые значки, будем иметь (см. 27.5):

$$\frac{\partial g'_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}=A^{\mu}_{(\alpha)}\ A^{\nu}_{(\beta)}\left[-g_{\mu\varepsilon}\{\nu\sigma,\ \varepsilon\}-g_{\varepsilon\nu}\{\mu\sigma,\ \varepsilon\}+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right]=$$

$$=A^{\mu}_{(\alpha)}\ A^{\nu}_{(\beta)}\left[-[\nu\sigma,\ \mu]-[\mu\sigma,\ \nu]+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right]=0.$$

Следовательно, $g'_{\alpha\beta}$ постоянны во всей области. Итак, мы построили координатную систему, удовлетворяющую условию, что в ней все величины $g_{\mu\nu}$ являются постоянными. Отсюда следует, что данное пространство-время должно быть плоским.

Как мы видим, *однородная* система клеток, т. е. такая, в которой единичные клетки переходят одна в другую параллельным перемещением, необходимо должна быть декартовой системой (прямоугольной или косоугольной). В пространстве-времени, для которого тензор Риманна—Кристоффеля не равен нулю, однородность в таком смысле невозможна; так, например, на сфере не может существовать системы клеток.

Если пространство-время не плоское, то можно ввести координаты, которые будут приближенно галилеевыми в малой области вокруг выделенной точки; величины $g_{\mu\nu}$ в этой области будут хотя и не постоянными, но стационарными. Это сводится к отождествлению искривленного пространства-времени с соприкасающимся плоским пространством-временем, на небольшом расстоянии вокруг точки. Чтобы выразить сказанное аналитически, надо выбрать координаты таким образом, чтобы 40 производных $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ были равны нулю *в избранной точке.* Хотя из общих соображений достаточно очевидно, что это всегда возможно, но все же мы приведем здесь и точное доказательство. Перенеся начало координат в избранную точку, произведем следующее преобразование координат:

$$x_\varepsilon=g^{\mu}_{\varepsilon}\ x'_{\mu}-\frac{1}{2}\{\alpha\beta,\ \varepsilon\}_0\ g^{\mu}_{\alpha}\ g^{\nu}_{\beta}\ x'_{\mu}\ x'_{\nu}, \tag{36.4}$$

причем значения трехзначковых символов должны быть взяты в начале координат. Тогда в начале координат имеем

$$\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\mu} = g^\mu_\varepsilon \tag{36.45}$$

и затем

$$\frac{\partial^2 x_\varepsilon}{\partial x'_\mu \, \partial x'_\nu} = -\{\alpha\beta, \varepsilon\}_0 \, g^\mu_\alpha \, g^\nu_\beta = -\{\alpha\beta, \varepsilon\}_0 \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}.$$

Отсюда, на основании (31.3)

$$\{\mu\nu, \rho\}'_0 \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho} = 0.$$

Но

$$\{\mu\nu, \rho\}'_0 \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho} = \{\mu\nu, \rho\}'_0 \, g^\rho_\varepsilon = \{\mu\nu, \varepsilon\}'_0.$$

Следовательно, в новых координатах трехзначковые символы равны нулю в начале координат, а из равенств (27.4) и (27.5) следует, что первые производные от $g'_{\mu\nu}$ также равны нулю. Именно это предварительное преобразование предполагалось нами еще в п. 4.

Мы перейдем теперь к несколько более трудному преобразованию, важному потому, что оно дает нам новое представление о значении тензора $B^\varepsilon_{\mu\nu}$.

Вторые производные от $g_{\mu\nu}$ (точно так же, как и первые производные) не могут обратиться в нуль в произвольно выделенной точке, если в ней не равен нулю тензор Риманна—Кристоффеля; но, выбирая соответствующим образом координаты, можно наложить на 100 вторых производных большое число других специальных условий. Произведем следующее добавочное преобразование

$$x_\varepsilon = g^\varepsilon_\mu x'_\mu + \frac{1}{6} a^\varepsilon_{\mu\nu\sigma} x'_\mu x'_\nu x'_\sigma, \tag{36.5}$$

где $a^\varepsilon_{\mu\nu\sigma}$ — произвольные коэффициенты, симметричные по отношению к значкам μ, ν, σ. Это преобразование не изменяет значения первых производных от $g_{\mu\nu}$ в начале координат, которые уже были обращены в нуль при помощи предыдущего преобразования, но зато изменяет вторые производные. Дифференцируя (31.3), т. е. равенство

$$\{\mu\nu, \rho\}' \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho} - \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \{\alpha\beta, \varepsilon\} = \frac{\partial^2 x_\varepsilon}{\partial x'_\mu \, \partial x'_\nu},$$

получим в начале координат

$$\frac{\partial}{\partial x'_\sigma}\{\mu\nu,\rho\}'_0\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho}-\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\{\alpha\beta,\varepsilon\}_0=\frac{\partial^3 x_\varepsilon}{\partial x'_\mu\partial x'_\nu\partial x'_\sigma},$$

так как сами трехзначковые символы обращаются в нуль в начале координат.

Отсюда, на основании (36.5)*) и (36.45)

$$\frac{\partial}{\partial x'_\sigma}\{\mu\nu,\rho\}'_0\, g^\varepsilon_\rho - g^\alpha_\mu g^\beta_\nu g^\gamma_\sigma\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\{\alpha\beta,\varepsilon\}_0=a^\varepsilon_{\mu\nu\sigma};$$

а последнее выражение сводится к равенству

$$\frac{\partial}{\partial x'_\sigma}\{\mu\nu,\varepsilon\}'_0-\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu,\varepsilon\}_0=a^\varepsilon_{\mu\nu\sigma}. \tag{36.55}$$

Следовательно, при преобразовании по формуле (36.5), к выражению $\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu,\varepsilon\}$ прибавляется член $a^\varepsilon_{\mu\nu\sigma}$.

Благодаря симметричности коэффициента $a^\varepsilon_{\mu\nu\sigma}$ все три члена

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu,\varepsilon\},\ \frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\mu\sigma,\varepsilon\},\ \frac{\partial}{\partial x_\mu}\{\nu\sigma,\varepsilon\}$$

обязательно должны увеличиться на одну и ту же величину. С другой стороны, в начале координат

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\mu\sigma,\varepsilon\}-\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu,\varepsilon\}=B^\varepsilon_{\mu\nu\sigma}; \tag{36.6}$$

так как остальные члены в равенстве (34.4) обращаются при выбранных нами координатах в нуль.

Мы не можем изменить какую-либо из компонент тензора Римана—Кристоффеля, так как левая часть остается при преобразовании неизменной; подчиняющиеся же этому ограничению (которое вполне объясняется симметрией $a^\varepsilon_{\mu\nu\sigma}$ относительно μ, ν, σ) изменения производных от трехзначковых символов произвольны.

Наиболее симметричным путем можно наложить дальнейшие условия, проделав преобразование, для которого в начале координат

$$\frac{\partial}{\partial x'_\sigma}\{\mu\nu,\varepsilon\}'+\frac{\partial}{\partial x'_\nu}\{\mu\sigma,\varepsilon\}'+\frac{\partial}{\partial x'_\mu}\{\nu\sigma,\varepsilon\}'=0. \tag{36.7}$$

Это соответствует следующим значениям $a^\varepsilon_{\mu\nu\sigma}$:

$$a^\varepsilon_{\mu\nu\sigma}=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu,\varepsilon\}+\frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\mu\sigma,\varepsilon\}+\frac{\partial}{\partial x_\mu}\{\nu\sigma,\varepsilon\}\right)$$

*) О причине исчезновения множителя $1/6$ см. (35.6).

Если произвести такое преобразование, а новые координаты опять обозначить через x_1, x_2, x_3, x_4, то с помощью 80 уравнений (36.7) можно выразить все производные трехзначковых символов в нуле через $B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}$. Действительно, из (36.6) и (36.7) получим

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu,\varepsilon\} + \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu,\varepsilon\} + B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} + \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu,\varepsilon\} + B^{\varepsilon}_{\nu\mu\sigma} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu,\varepsilon\} = -\frac{1}{3}\left(B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} + B^{\varepsilon}_{\nu\mu\sigma}\right).$$

Но отсюда, если принять во внимание исчезновение производных от $g_{\mu\nu}$ в нуле, будем иметь

$$g^{\rho\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}[\mu\nu,\rho] = -\frac{1}{3}\left(B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} + B^{\varepsilon}_{\nu\mu\sigma}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}[\mu\nu,\rho] = -\frac{1}{3}\left(B_{\mu\nu\sigma\rho} + B_{\nu\mu\sigma\rho}\right),$$

$$\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\rho\,\partial x_\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_\sigma}[\mu\rho,\nu] + \frac{\partial}{\partial x_\sigma}[\nu\rho,\mu] = -\frac{1}{3}\left(B_{\rho\nu\sigma\mu} + B_{\nu\rho\sigma\mu} + B_{\mu\rho\sigma\nu} + B_{\rho\mu\sigma\nu}\right)$$

или, принимая во внимание антисимметрию тензора $B_{\mu\rho\sigma\nu}$ по отношению к значкам μ и ν:

$$\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\rho\,\partial x_\sigma} = \frac{1}{3}\left(B_{\mu\nu\sigma\rho} + B_{\nu\mu\sigma\rho}\right) = \frac{1}{3}\left(B_{\mu\nu\sigma\rho} + B_{\mu\nu\rho\sigma}\right). \qquad (36.75)$$

Из доказанной таким образом возможности выразить вторые производные от $g_{\mu\nu}$ в начале координат через компоненты тензора $B_{\mu\nu\rho\sigma}$ следует, однако, что из компонент $B_{\mu\nu\rho\sigma}$ только *точно* 20 являются независимыми; действительно, 100 производных $\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\rho\,\partial x_\sigma}$, которые связаны 80 *линейными* уравнениями (36.7), можно, как мы это видели, выразить через компоненты $B_{\mu\nu\rho\sigma}$, среди которых *самое большее* имеется только 20 линейно независимых. Следовательно, эти 80 уравнений линейно независимы, и среди компонент тензора $B_{\mu\nu\rho\nu}$ имеется 20 линейно независимых, между которыми нельзя даже установить никакой *алгебраической* зависимости.

Координаты, для которых производные $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ равны нулю, а производные $\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma \partial x_\tau}$ удовлетворяют формуле (36.7), называются *каноническими координатами.*

Оба последовательных преобразования, ведущие к получению канонических координат, можно соединить в формулу

$$x_\varepsilon = g_\mu^\varepsilon x'_\mu - \frac{1}{2}\{\mu\nu, \varepsilon\}_0 x'_\mu x'_\nu -$$

$$-\frac{1}{18}\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}\{\nu\sigma, \varepsilon\} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\mu\sigma, \varepsilon\} + \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu, \varepsilon\}\right]_0 x'_\mu x'_\nu x'_\sigma .$$

В начале координат $\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\mu} = g_\mu^\varepsilon$; следовательно, при этом преобразовании тензоры остаются неизменными в начале координат. Например, закон преобразования $C_{\mu\nu\sigma}$ дает

$$C'_{\mu\nu\sigma} = C_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\sigma} = C_{\alpha\beta\gamma}\, g_\mu^\alpha g_\nu^\beta g_\sigma^\gamma = C_{\mu\nu\sigma} .$$

В самом деле преобразование изменяет кривизну и гиперкривизну осей, проходящих через начало координат, но не изменяет углов, образованных их пересечением.

Рассмотрим теперь какой-нибудь тензор, зависящий только от $g_{\mu\nu}$ и их первых и вторых производных. В канонических координатах первые производные равны нулю, а вторые производные являются линейными функциями от $B_{\mu\nu\sigma\varepsilon}$, следовательно и весь взятый нами тензор есть функция от $g_{\mu\nu}$ и $B_{\mu\nu\sigma\varepsilon}$. Но ни тензор сам по себе, ни величины $g_{\mu\nu}$ и $B_{\mu\nu\sigma\varepsilon}$ не изменяются при преобразовании к каноническим координатам, следовательно, то же самое функциональное соотношение справедливо и для каких угодно первоначальных произвольных координат.

Таким образом, мы получаем важное следствие: *Все фундаментальные тензоры, не содержащие производных от $g_{\mu\nu}$ выше, второго порядка являются функциями от $g_{\mu\nu}$ и $B_{\mu\nu\sigma\varepsilon}$.*

Именно, для того чтобы выразить эти тензоры через $g_{\mu\nu}$ и $B_{\mu\nu\sigma\varepsilon}$, надо только положить первые производные от $g_{\mu\nu}$ равными нулю, а для вторых производных подставить выражения (36.75).

Отсюда следует, что рассмотрение тензоров, описывающих свойства пространства - времени, было проделано нами исчерпывающим образом вплоть до производных второго порядка. Если при соответствующим образом выбранных координатах две поверхности обладают одинаковыми значениями $g_{\mu\nu}$ и $B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}$ в какой-либо точке, то они будут касаться одна другой с точностью до третьих степеней от разностей координат. При помощи этих двух тензоров можно определить всю метрику пространства вокруг точки с указанной точностью.

Обратив первые производные в нуль, мы можем при помощи линейного преобразования, изложенного в п. 4, придать $g_{\mu\nu}$ галилеевы значения в избранной нами точке. Полученные таким образом координаты называются *естественными координатами* в этой точке; про величины же, выраженные в этих координатах, говорят, что они заданы в *естественной мере*. Таким образом, естественные координаты эквивалентны галилеевым координатам, если принимать во внимание только $g_{\mu\nu}$ и их первые производные; отличие между обеими появляется лишь при изучении явлений, зависящих от вторых производных.

Преобразование Лоренца (которое не изменяет «естественного» характера координат) позволяет всякое тело, помещенное в данной точке, или наблюдателя, находящегося в этой точке, вместе с его измерительными приборами, привести к покою. В дальнейшем *естественные меры* рассматриваются уже как *собственные меры* материальной системы или наблюдателя. Не мешает заметить, что в указанном случае материя будет в покое как в смысле скорости, так и ускорения (если только на нее не действуют электромагнитные силы), так как для естественных координат не существует ускоряющего поля.

Подведем теперь итоги нашего обсуждения специальных координатных систем. Если тензор Риманна — Кристоффеля равен нулю, то галилеевыми координатами можно пользоваться во всей рассматриваемой области. Если этот тензор не равен нулю, то для данной точки можно найти такие координаты, которые не будут отличаться от галилеевых координат в смысле значений компонент тензора $g_{\mu\nu}$ и их первых, но не вторых, производных. Такие координаты называются *естественными* для данной точки. Галилеевы или естественные координаты могут быть подвергнуты преобразованию Лоренца, так что всегда оказывается возможным выбрать систему, по отношению к которой данный наблюдатель будет находиться в покое. Эта система будет *собственной системой* нашего наблюдения. Хотя, в общем случае, нельзя выбрать естественные координаты таким образом, чтобы они совпадали с гали леевыми координатами и по значениям вторых производных от $g_{\mu\nu}$, но можно ввести 80 частью произвольных условий для 100 вторых производных. Если эти условия выбраны согласно формуле (36.7), то получающиеся координаты называются *каноническими*.

Имеется еще другой способ специализации координат, который мы упомянем здесь для полноты. Всегда возможно выбрать такие координаты, чтобы детерминант $g = -1$ во всей области (как в случае галилеевых координат). Это будет изложено в п. 49.

Можно наконец рассмотреть еще специализированные координаты, которые применяются в частных задачах. Имеются определенные (не-эвклидовы) координаты, с которыми, как это было найдено, удобнее всего иметь дело при изучении гравитационного поля солнца, или кривых миров Эйнштейна, де-Ситтера и т. д. Однако, нужно помнить, что эти вопросы принадлежат к идеализированным задачам, и координатными системами с простыми свойствами, для их описания в действительности можно пользоваться лишь приближенно. Если возможно, то при этом выбирается *стационарная система* координат, т. е. такая, в которой все $g_{\mu\nu}$ не зависят от одной из координат x_4 (имеющей характер времени *). В этом случае интервал, соответствующий какому-нибудь перемещению dx_μ, не зависит от «времени» x_4. Подобная система, конечно, может быть найдена только в том случае, если относительное расположение тяготеющих масс остается неизменным. Если, кроме того, возможно сделать величины g_{14}, g_{24}, g_{34} равными нулю **), то время будет обратимо и, в частности, скорость распространения света вдоль какого-нибудь пути будет одинакова, как в одном, так и в другом направлении; это делает применение термина «время» к x_4 более законным, так как здесь выполняется одно из требований п. 11. Мы будем, если только это возможно, при рассмотрении больших областей мира применять стационарные, статические и обратимые системы; задачи, в которых это упрощение недопустимо, обычно не могут быть решены, как, например, задача двух притягивающихся тел. Для малых областей мира удобнее всего применять естественные координаты.

---

*) dx_4 будет иметь характер времени, если g_{44} всегда положительно

**) Такая система называется *статической*.

37. ЗАКОН ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА.

Сокращенный тензор Риманна — Кристоффеля можно получить из тензора $B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}$, полагая в нем $\varepsilon=\sigma$. Таким образом, на основании (34.4):

$$G_{\mu\nu}=\{\mu\sigma,\alpha\}\{\alpha\nu,\sigma\}-\{\mu\nu,\alpha\}\{\alpha\sigma,\sigma\}+\frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\mu\sigma,\sigma\}-\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu,\sigma\} \quad (37.1)$$

Скобки, в которых один и тот же значок встречается два раза, могут быть упрощены согласно (35.4), а именно

$$\{\mu\sigma,\sigma\}=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\lg\sqrt{-g}.$$

Отсюда, произведя некоторые изменения немых значков, получим

$$G_{\mu\nu}=-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\{\mu\nu,\alpha\}+\{\mu\alpha,\beta\}\{\nu\beta,\alpha\}+\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}\lg\sqrt{-g}-$$
$$-\{\mu\nu,\alpha\}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\lg\sqrt{-g} \quad (37.2)$$

Если бы мы сокращали, положив $\varepsilon=\mu$, мы не получили бы нового тензора, так как

$$B^{\mu}_{\mu\nu\sigma}=g^{\mu\rho}B_{\mu\nu\sigma\rho}=0,$$

благодаря антисимметричности тензора $B_{\mu\nu\sigma\rho}$ по отношению к μ и ρ.

Закон

$$G_{\mu\nu}=0 \quad (37.3)$$

выбран Эйнштейном как закон тяготения в пустом пространстве.

Из (37.2) ясно, что $G_{\mu\nu}$ является симметричным тензором; следовательно, закон тяготения дает 10 дифференциальных уравнений в частных производных для определения $g_{\mu\nu}$. Ниже будет показано (п. 52), что между этими уравнениями имеется 4 тождественных соотношения, так что в действительности число уравнений сводится к шести, и, так как этих уравнений недостаточно для полного определения $g_{\mu\nu}$, то, соответственно произволу в выборе координатной системы, можно добавить еще дальнейшие условия для $g_{\mu\nu}$. Полученные уравнения будут второго порядка, линейные по отношению ко вторым производным тензора $g_{\mu\nu}$. В п. 36

было доказано, что тензоры, не содержащие производных выше второго порядка, всегда могут быть образованы при помощи тензоров $g_{\mu\nu}$ и $B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}$, поэтому, если мы не собираемся пользоваться производными выше второго порядка, то выбор закона тяготения окажется сильно ограниченным, и мы едва ли сможем избежать введения тензора $G_{\mu\nu}$ *).

Не вводя высших производных, которые были бы повидимому излишни в этой задаче, можно предложить, как некоторого рода видоизменение уравнения (37.3), закон

$$G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}, \tag{37.4}$$

где λ—мировая постоянная. Имеются теоретические основания полагать, что это последнее уравнение соответствует действительности; но совершенно ясно, что λ должна быть очень малой постоянной. Поэтому в практических приложениях мы будем пользоваться законом (37.3), как достаточно точным. Введение очень малой постоянной λ ведет к сферическому миру Эйнштейна или де-Ситтера, к чему мы вернемся в главе V.

$$G = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \tag{37.5}$$

называется гауссовой кривизной, или просто *кривизной* пространства-времени. Однако, нужно помнить, что отклонения от плоского характера описываются более точно при помощи тензоров $G_{\mu\nu}$ и $B_{\mu\nu\sigma\rho}$ (иногда называемых *компонентами кривизны*) и что равенство нулю величины G ни в коем случае не является достаточным условием для наличия плоского пространства-времени.

Закон тяготения Эйнштейна выражает тот факт, что геометрия пустых областей мира не тождественна с наиболее общей римановой геометрией, а является только лишь ее ограниченным видоизменением. Действительно, общая геометрия Римана соответствует квадратичной форме (2.1), в которой величины $g_{\mu\nu}$ представляют собой совершенно произвольные функции от координат. Эйнштейн же утверждает, что естественная геометрия пустых областей не является столь общей по своей природе. Согласно его гипотезе, величины $g_{\mu\nu}$ могут принимать лишь те значения,

*) Закон $B_{\mu\nu\sigma\rho} = 0$ (дающий плоское пространство-время для всех пустых областей) очевидно будет слишком узок, так как он не допускает существования неприводимых силовых полей.

которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям (37.3). Напомним, что силовое поле возникает как следствие различия между естественной геометрией координатной системы и приписываемой ей абстрактной галилеевой геометрией; таким образом, всякий закон, управляющий силовым полем, должен быть законом естественной геометрии. В этом и заключается причина, благодаря которой закон тяготения должен выступать как ограничение, накладываемое на естественную геометрию мира. Закон обратных квадратов, являющийся вполне возможным законом изменения с расстоянием предполагаемой абсолютной силы, становится совершенно непонятным (и невозможным), если его трактовать как некоторое ограничение, накладываемое на действительную геометрию мира. Мы должны заменить его некоторым законом, которому подчиняются тензоры, описывающие мировые соотношения, определяющие естественную геометрию.

38. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.

Попытаемся теперь найти частное решение уравнений (37.3) Решение, которое мы получим, как показано ниже, будет соответствовать полю изолированной материальной частицы, все время находящейся в покое в начале координат; при отыскании решения мы будем руководствоваться общими соображениями, которые мы можем иметь о виде решения в случае такой частицы. Эти предварительные аргументы не обязаны быть строгими, так как окончательной проверкой полученной догадкой формулы будет служить факт, что она удовлетворяет установленным уравнениям *).

---

*) Для оценки приведенного ниже решения несомненно существенным является тот факт, что оно, при соблюдении некоторых условий, *является единственным*. На это обстоятельство в статье Шварцшильда обращено особое внимание. Решение, приведенное в тексте, так же, как и у Шварцшильда, получается при соблюдении следующих условий:

1) галилеев характер метрики в бесконечности;
2) равенство нулю g_{41}, g_{42}, g_{43};
3) независимость $g_{\mu\nu}$ от t;
4) шаровая симметрия части ds^2, относящейся к «пространству».

Впрочем, предположение 1) несущественно, как было отмечено Гильбертом (*D. Hilbert*, Grundlagen der Physik, 2. Mitteilung. Gött. Nachr. 1917, Math. Ann. **22**). Биркхофф недавно показал, что предположения 2) и 3) также несущественны, но что, напротив, вытекающее уже из одной только «пространственной» шаровой симметрии выражение

$$ds^2 = \alpha(t, r)\,dt^2 + \beta(t, r)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + \gamma(t, r)\,dr^2 + \lambda(t, r)\,dt\,dr,$$

Для плоского пространства-времени интервал, выраженный через сферические полярные координаты и время, будет равен

$$ds^2 = -dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + dt^2. \tag{38.11}$$

Если мы учтем изменения этого выражения, которые могут быть сделаны без нарушения сферической симметрии в пространстве, симметрии по отношению к прошедшему и будущему времени и без нарушения условия статичности, то наиболее общим возможным выражением для интервала окажется следующее:

$$ds^2 = -U(r)\,dr^2 - V(r)\,(r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2) + W(r)\,dt^2, \tag{38.12}$$

где U, V, W являются произвольными функциями от r. Пусть

$$r_1^2 = r^2 V(r).$$

Тогда равенство (38.12) принимает вид:

$$ds^2 = -U_1(r_1)\,dr_1^2 - r_1^2 d\theta^2 - r_1^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + W_1(r_1)\,dt^2, \tag{38.13}$$

где U_1 и W_1 — произвольные функции от r_1. Нет оснований рассматривать r в выражении (38.12), как величину более сходную с r из формулы (38.11), чем величина r_1. Если функции U, V, W мало отличаются от единицы, то как r, так и r_1 приблизительно имеют те же свойства, как и радиус-вектор в эвклидовой геометрии; но никакая длина в неэвклидовом пространстве не может обладать точно такими же свойствами, как эвклидов радиус-вектор; поэтому совершенно не важно, выберем ли мы в качестве заместителя последнего величину r или r_1. Мы остановимся здесь на величине r_1 и, опуская значок, перепишем уравнение (38.13) в следующем виде

$$ds^2 = -e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + e^{\nu} dt^2, \tag{38.2}$$

где λ и ν будут функциями одного только r.

Более того, так как гравитационное поле частицы (или отклонение от плоского пространства-времени) бесконечно уменьшается при бесконечном увеличении расстояния, то λ и ν должны стремиться к нулю, когда r стремится к бесконечности.

при соответствующем введении новых координат ведет к решению Шварцшильда (*G. D. Birkhoff*. Relativity and Modern Physics, Cambridge, Harvard University Press 1923).

Таким образом, решение Шварцшильда соответствует наиболее общему центрально-симметричному распределению масс, конечно, вне масс—результат, который неоднократно был использован в новейшей литературе. (*Н*).

Следовательно, при бесконечно большом расстоянии от частицы (38.2) сводится к формуле (38.11).

Нашими координатами являются:

$$x_1 = r,\ x_2 = \theta,\ x_3 = \varphi,\ x_4 = t,$$

а компоненты фундаментального тензора (см. 38.2) будут даны выражениями

$$g_{11} = -e^{\lambda},\ g_{22} = -r^2,\ g_{33} = -r^2 \sin^2\theta,\ g_{44} = e^{\nu}, \qquad (38.31)$$

и

$$g_{\mu\nu} = 0,\ \text{если}\ \mu \neq \nu.$$

Детерминант g сводится к произведению элементов его главной диагонали $g_{11}g_{22}g_{33}g_{44}$. Следовательно,

$$-g = e^{\lambda+\nu} r^4 \sin^2\theta\,, \qquad (38.32)$$

а

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}}$$

и т. д., так что

$$g^{11} = -e^{-\lambda},\ g^{22} = -\frac{1}{r^2},\ g^{33} = -\frac{1}{r^2\sin^2\theta},\ g^{44} = e^{-\nu}. \qquad (38.33)$$

Так как все $g^{\mu\nu}$ равны нулю, кроме тех из них, у которых оба значка одинаковы, то суммирование для трехзначковых символов в (27.2) отпадает, и мы имеем просто без суммирования

$$\{\mu\nu,\ \sigma\} = \frac{1}{2} g^{\sigma\sigma}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right).$$

Если значки μ, ν, σ заведомо *различны*, то представятся следующие возможные случаи (причем условие о суммировании временно теряет силу):

$$\left.\begin{aligned}
\{\mu\mu,\ \mu\} &= \frac{1}{2} g^{\mu\mu} \frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x_\mu} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\lg g_{\mu\mu})\\
\{\mu\mu,\ \nu\} &= -\frac{1}{2} g^{\nu\nu} \frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x_\nu}\\
\{\mu\nu,\ \nu\} &= \frac{1}{2} g^{\nu\nu} \frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial x_\mu} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\lg g_{\nu\nu})\\
\{\mu\nu,\ \sigma\} &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (38.4)$$

Теперь легко получить все 40 трехзначковых символа; вычисляя значения тех из них, которые не обращаются в нуль*), получим следующие результаты (причем штрих обозначает дифференцирование по r).

$$\left.\begin{aligned}
\{11,1\} &= \frac{1}{2}\lambda', \\
\{12,2\} &= \frac{1}{r}, \\
\{13,3\} &= \frac{1}{r}, \\
\{14,4\} &= \frac{1}{2}\nu', \\
\{22,1\} &= -re^{-\lambda}, \\
\{23,3\} &= \operatorname{ctg}\theta, \\
\{33,1\} &= -r\sin^2\theta\, e^{-\lambda}, \\
\{33,2\} &= -\sin\theta\cos\theta, \\
\{44,1\} &= \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'.
\end{aligned}\right\} \qquad (38.5)$$

Все остальные 31 скобки равны 0. Заметим, что (21.2) равно $\{12,2\}$ и т. д.

---

*) При этом нужно заметить, что величины $g_{\mu\mu} = \frac{1}{g^{\mu\mu}}$ согласно (38.33) зависят только от $r = x_1$, за исключением g_{33}, которое зависит также от $\theta = x_2$. Таким образом, из (38.4) сразу же получаем, что из скобок $\{\mu\mu, \mu\}$ остается неравной нулю только $\{11,1\}$, а из скобок $\{\mu\mu, \nu\}$ только $\{\mu\mu, 1\}$ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$ и $\{33.2\}$, и, наконец, из скобок $\{\mu\nu, \nu\}$ только $(1\,\nu, \nu\}$ $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ и $\{23,3\}$. Отсюда сразу же получаются формулы (38.5).

Быть может, небезинтересно будет привести еще здесь элегантный метод вычисления скобок Кристоффеля, который был применен Гильбертом (Grundlagen der Physik, 2. Mitteilung. Gött. Nachr. 1917, Math. Ann. 22). Для этой цели очевидно достаточно установить дифференциальные уравнения геодезической линии, так как среди их коэффициентов встречаются все искомые скобки:

$$\frac{d^2x_\sigma}{dp^2} + \{\mu\nu, \sigma\}\frac{dx_\mu}{dp}\frac{dx_\nu}{dp} = 0. \qquad (A)$$

Эти значения должны быть подставлены в $\{37.2\}$. Так как при выполнении этой операции могут встретиться некоторые затруднения, то мы сперва выпишем уравнения (37.2) полностью, опуская члены, равные нулю (их число равно 223).

$$G_{11} = -\frac{\partial}{\partial r}\{11,1\} + \{11,1\}\{11,1\} + \{12,2\}\{12,2\} + \{13,3\}\{13,3\} + \{14,4\}\{14,4\} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\lg\sqrt{-g} - \{11,1\}\frac{\partial}{\partial r}\lg\sqrt{-g},$$

$$G_{22} = -\frac{\partial}{\partial r}\{22,1\} + 2\{22,1\}\{21,2\} + \{23,3\}\{23,3\} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\lg\sqrt{-g} - \{22,1\}\frac{\partial}{\partial r}\lg\sqrt{-g},$$

$$G_{33} = -\frac{\partial}{\partial r}\{33,1\} - \frac{\partial}{\partial\theta}\{33,2\} + 2\{33,1\}\{31,3\} + 2\{33,2\}\{32,3\} - \{33,1\}\frac{\partial}{\partial r}\lg\sqrt{-g} - \{33,2\}\frac{\partial}{\partial\theta}\lg\sqrt{-g},$$

$$G_{44} = -\frac{\partial}{\partial r}\{44,1\} + 2\{44,1\}\{41,4\} - \{44,1\}\frac{\partial}{\partial r}\lg\sqrt{-g},$$

$$G_{12} = \{13,3\}\{23,3\} - \{12,2\}\frac{\partial}{\partial\theta}\lg\sqrt{-g}.$$

Но эти уравнения получаются при выводе дифференциальных уравнений, относящихся к следующей вариационной задаче:

$$\delta\int\left[-e^{\lambda}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 - r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + e^{\nu}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2\right]dp = 0.$$

Они имеют вид

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{\partial V}{\partial\frac{dx_\sigma}{dp}}\right) - \frac{\partial V}{\partial x_\sigma} = 0,$$

где через V обозначено подинтегральное выражение. Таким образом, разделив на коэффициенты при вторых производных, получим уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2r}{dp^2} + \frac{\lambda'}{2}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - re^{-\lambda}\left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 - re^{-\lambda}\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = 0\\
&\frac{d^2\theta}{dp^2} + \frac{2}{r}\frac{d\theta}{dp}\frac{dr}{dp} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 = 0\\
&\frac{d^2\varphi}{dp^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dp}\frac{dr}{dp} + 2\operatorname{ctg}\theta\frac{d\varphi}{dp}\frac{d\theta}{dp} = 0\\
&\frac{d^2t}{dp^2} + \nu'\frac{dt}{dp}\frac{dr}{dp} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Из сравнения уравнений (В) и (А) сразу же получаем для трехзначковых символов значения (38.5). (*Н.*)

Остальные компоненты не содержат членов, отличных от нуля*). Сделаем теперь подстановки из (38.5) и (38.32) и сгруппируем члены; окончательно получим следующие уравнения:

$$G_{11}=\frac{1}{2}\nu''-\frac{1}{4}\lambda'\nu'+\frac{1}{4}\nu'^2-\frac{\lambda'}{r}=0 \tag{38.61}$$

$$G_{22}=e^{-\lambda}\left(1+\frac{1}{2}r(\nu'-\lambda')\right)-1=0 \tag{38.62}$$

$$G_{33}=\sin^2\theta\cdot e^{-\lambda}\left(1+\frac{1}{2}r(\nu'-\lambda')\right)-\sin^2\theta=0. \tag{38.63}$$

$$G_{44}=e^{\nu-\lambda}\left(-\frac{1}{2}\nu''+\frac{1}{4}\lambda'\nu'-\frac{1}{4}\nu'^2-\frac{\nu'}{r}\right)=0. \tag{38.64}$$

$$G_{12}=0. \tag{38.65}$$

Уравнение (38.63) можно отбросить, так как оно является простым повторением уравнения (38.62); таким образом, остаются три уравнения относительно λ и ν. Из уравнений (38.61) и (38.64) имеем $\lambda'=-\nu'$. Так как λ и ν одновременно должны обращаться в нуль при $r=\infty$, то на основании предыдущего необходимо, чтобы:

$$\lambda=-\nu.$$

Тогда уравнение (38.62) принимает вид:

$$e^{\nu}(1+r\nu')=1.$$

---

*) Чтобы установить, какие из $G_{\mu\nu}$ при $\mu\gtrless\nu$ не равны тождественно нулю, рассмотрим по порядку отдельные члены (37.2). *Первый член* $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\{\mu\nu,\alpha\}$ равен нулю, так как α должно быть равно μ или ν [так как $\{\mu\nu,\sigma\}$ для $\mu\neq\nu$, $\mu\neq\sigma$, $\nu\neq\sigma$ равно нулю]. В самом деле, один взгляд на формулы (38.5) уже говорит нам, что как раз те из скобок $\{\mu\nu,\alpha\}$ $(\mu\neq\nu)$, которые не исчезают, не зависят от соответствующей переменной x_α. *Второй член* $\{\mu\alpha,\beta\}\{\nu\beta,\alpha\}$ отличен от нуля только в том случае, когда $\alpha=\mu$, $\beta=\nu$ или $\alpha=\nu$, $\beta=\mu$. Но из формул (38.5) мы сразу видим, что при $\mu\gtrless\nu$ выражения $\{\mu\mu,\nu\}\{\nu\nu,\mu\}$ так же, как и $\{\mu\nu,\mu\}\{\nu\mu,\mu\}$ равны нулю. Из формулы (38.32) для значения величины $-g$ также следует, что при $\mu\neq\nu$ *третий член*

$$\frac{\partial^2\lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}$$

равен 0. В *четвертом члене* второй множитель равен нулю, если α не равно 1 или 2. Поэтому, согласно (38.5), при $\alpha=1$ не может существовать ни одной пары значков μ, ν при $\mu\gtrless\nu$, для которых $\{\mu\nu,\alpha\}\neq 0$. Но при $\alpha=2$ согласно формуле (38.5) принимаются в расчет только пары (1, 2) или, что то же самое, (2, 1). См., между прочим, примечание в п. 62. (*Н.*)

Полагая $e^{\nu} = \gamma$, имеем

$$\gamma + r\gamma' = 1.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\gamma = 1 - \frac{2m}{r}, \tag{38.7}$$

где $2m$ есть постоянная интегрирования.

Легко проверить, что это решение удовлетворяет всем трем уравнениям *). Соответственно этому, подставляя $e^{-\lambda} = e^{\nu} = \gamma$ в уравнение (38.2), получим:

$$ds^2 = -\gamma^{-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + \gamma\, dt^2, \tag{38.8}$$

где $\gamma = 1 - \frac{2m}{r}$; (38.8) представляет собою частное решение гравитационных уравнений Эйнштейна $G_{\mu\nu} = 0$. Решение этого вида впервые было получено Шварцшильдом.

39. ОРБИТЫ ПЛАНЕТ.

Согласно (15.7), путь частицы, свободно двигающейся в пространстве-времени, заданном уравнением (38.8), определяется из уравнений (28.5) геодезической линии, а именно:

$$\frac{d^2x_\alpha}{ds^2} + \{\mu\nu, \alpha\}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = 0. \tag{39.1}$$

Положим сперва $\alpha = 2$, тогда остаются следующие неравные нулю члены

$$\frac{d^2x_2}{ds^2} + \{12, 2\}\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_2}{ds} + \{21, 2\}\frac{dx_2}{ds}\frac{dx_1}{ds} + \{33, 2\}\frac{dx_3}{ds}\frac{dx_3}{ds} = 0.$$

или, применяя (38.5):

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} - \cos\theta\sin\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0. \tag{39.2}$$

Выберем теперь координаты так, чтобы в начальный момент частица двигалась в плоскости $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Тогда, в тот же начальный момент, $\frac{d\theta}{ds} = 0$ и $\cos\theta = 0$, а следовательно и $\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0$.

---

*) Очевидно достаточно проверить уравнение (38.64).

Поэтому частица будет продолжать двигаться в этой плоскости, и мы можем упростить оставшиеся уравнения, полагая везде $\theta = \frac{1}{2}\pi$ *). Уравнения, получаемые при $\alpha = 1, 3, 4$, можно найти тем же путем:

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{1}{2}\lambda' \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - re^{-\lambda}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0. \tag{39.31}$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds} = 0. \tag{39.32}$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \nu'\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds}. \tag{39.33}$$

Последние два уравнения сразу же можно проинтегрировать, причем получим:

$$r^2\frac{d\varphi}{ds} = h, \tag{39.41}$$

$$\frac{dt}{ds} = ce^{-\nu} = \frac{c}{\gamma}, \tag{39.42}$$

где h и c постоянные интегрирования. Вместо того чтобы заниматься интегрированием уравнения (39.31), можно взять уравнение (38.8), которое играет здесь роль интеграла энергии **). Это даст:

$$\gamma^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - \gamma\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = -1. \tag{39.43}$$

---

*) В самом деле, дифференцируя уравнение (39.2) последовательно по s, мы получим $\frac{d^3\theta}{ds^3} = 0, \ldots$

Таким образом полная производная от θ по s в начале координат равна 0, и поэтому величина θ, которая согласно общим теоремам существования может быть разложена вблизи начала координат в ряд Тейлора, не зависит от s.

(*Н.*)

**) Действительно, согласно приведенному в § 28 выводу формулы (IV) из (III), мы видим, что одно из уравнений (III) может быть заменено выражением (IV) в том случае, если соответствующий множитель $g_{\alpha\beta}\frac{dx_\beta}{dt}$ не равен нулю.

(*Н.*)

Исключая dt и ds при помощи (39.41) и (39.42), найдем:

$$\frac{1}{\gamma}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{h^2}{r^2}-\frac{c^2}{\gamma}=-1, \tag{39.44}$$

откуда, умножая все члены уравнения на γ или $\left(1-\frac{2m}{r}\right)$, получим

$$\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{h^2}{r^2}=c^2-1+\frac{2m}{r}+\frac{2m}{r}\frac{h^2}{r^2},$$

или, обозначая $\frac{1}{r}$ через u:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2=\frac{c^2-1}{h^2}+\frac{2m}{h^2}u+2mu^3. \tag{39.5}$$

Дифференцируя по φ и сокращая на $\frac{du}{d\varphi}$, будем иметь

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{m}{h^2}+3mu^2, \tag{39.61}$$

при

$$r^2\frac{d\varphi}{ds}=h. \tag{39.62}$$

Сравним эти выражения с уравнением ньютоновских орбит *):

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{m}{h^2}, \tag{39.71}$$

---

*) Именно, если частица с массою 1 движется под влиянием силы тяготения $K(r)$, исходящей из начала координат некоторой полярной системы координат (r, φ), то согласно ньютоновской механике интеграл энергии и интеграл площадей напишутся так:

$$\frac{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}{2}+\int K(r)\,dr=\text{const};\quad r^2\dot{\varphi}=h, \tag{A}$$

где $\dot{r}=\frac{dr}{dt}$, $\quad \dot{\varphi}=\frac{d\varphi}{dt}$.

Отсюда получаем дифференциальное уравнение орбиты:

$$\frac{1}{2}\frac{h^2}{r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2\right]+\int K(r)\,dr=\text{const}.$$

Если, в частности, $K(r)=\frac{m}{r^2}$, то, полагая $u=\frac{1}{r}$, будем иметь

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2-\frac{2m}{h^2}u=\text{const},$$

откуда, дифференцируя еще раз по φ и разделив на $2\frac{du}{d\varphi}$, получим

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u-\frac{m}{h^2}=0. \tag{B}$$

Уравнения (A) и (B) совпадают с уравнениями (39.72) и (39.71).

(*Н.*)

где

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=h. \qquad (39.72)$$

В уравнении (39.61) отношение $3mu^2$ к $\frac{m}{h^2}$ равно $3h^2u^2$ или [см. (39.62)]

$$3\left(r\frac{d\varphi}{ds}\right)^2.$$

При обычных скоростях эта величина чрезвычайно мала— практически она равна утроенному квадрату отношения орбитальной скорости к скорости света. Например, для земли это отношение равно 0,00000003. Таким образом, практически добавочный член в уравнении (39.61) будет представлять собой исчезающе малую поправку к уравнению ньютоновской орбиты (39.71).

Точно так же, разница между ds и dt из уравнений (39.62) и (39.71) будет в той же степени незначительна (даже если бы мы были вполне уверены в том, что подразумевается под величиной dt в ньютоновской теории).

Собственным временем для тела является величина ds, и может показаться, что дифференциал dt в уравнении (39.72) играет именно такую роль; но, с другой стороны, величину s нельзя рассматривать как координату, так как дифференциал ds не представляет собой полного дифференциала, а ньютоновское «время» всегда принимается за координату.

Таким образом, мы заключаем, что частица, движущаяся в поле, которое нами было здесь исследовано, будет вести себя так, как если бы она находилась под действием ньютоновской силы от частицы с гравитационной массой m, находящейся в начале координат. Движение будет происходить согласно ньютоновской теории, причем отступления от последней будут находиться вне пределов точности тех измерений, при помощи которых эта теория получила свое подтверждение.

Показав, что наше решение удовлетворяет уравнению $G_{\mu\nu}=0$. мы тем самым доказали, что оно описывает возможное состояние мира, которое можно встретить в действительности при соответствующих условиях. Отыскав орбиту частицы, мы выяснили, как это состояние мира, если оно существует, может быть обнаружено при помощи наблюдений. Таким образом, мы заключаем, что пространственно-временное поле, определяемое формулой (38.8), сопутствует частице массы m, находящейся в начале координат (или «вызывается» ею).

Гравитационная масса m в ньютоновской теории рассматривается как мера способности образования данной частицей ускоряющего поля вокруг себя. Единицы измерения при этом нами выбраны так, что скорость света и гравитационная постоянная были равны единице. Необходимо заметить, что до сих пор нами не было приведено никаких оснований для предположения, что величина m, встречающаяся в этой главе, имеет что-либо общее с величиной m, введенной в п. 12 для измерения свойств инерции частицы.

Для круговой орбиты ньютоновская теория дает

$$m = \omega^2 r^3 = v^2 r,$$

если гравитационная постоянная равна единице. Применим этот результат к земле, для которой $v = 30\ \frac{км}{сек}$, т. е. равно 10^{-4} в долях скорости света, а $r = 1{,}5 \cdot 10^8$ *км*. Отсюда масса солнца приблизительно равна 1,5 *км*. Масса земли составляет $^1/_{300000}$ часть массы солнца, поэтому она приближенно равна 5 *мм* *).

Более точно, масса солнца, равная $1{,}99 \cdot 10$ *г*, переходит в гравитационных единицах в 1,47 *км*; другие массы преобразуются в такой же пропорции **).

---

*) Иногда делают возражение против употребления сантиметра как единицы гравитационной (т. е. вызывающей гравитацию) массы; но такие же возражения можно сделать и против применения для этой цели грамма, так как грамм представляет собой на самом деле меру другого свойства частицы, а именно, ее *инерции*. Наша постоянная интегрирования m очевидно является длиной, и читатель, если он хочет явно отметить это обстоятельство, может назвать ее гравитационным радиусом, а не гравитационной массой. Но если уяснить себе, что гравитационный радиус в сантиметрах, инерция в граммах и энергия в эргах представляют собой лишь числовые меры в различных системах *одного и того же* свойства, присущего частице, то будет исключительным педантизмом настаивать на прежнем различии этих единиц, которое вытекло лишь из предположения, что они измеряют свойства, радикально отличающиеся друг от друга.

**) В частности, 1 *г* в гравитационных единицах будет равен:

$$\frac{1 \cdot 47}{1 \cdot 99} 10^{-28}\ см = 7{,}4 \cdot 10^{-29}\ см.$$

(*Н.*)

40. ДВИЖЕНИЕ ПЕРИГЕЛИЯ.

Уравнение (39.5) для планетной орбиты может быть проинтегрировано при помощи эллиптических функций, но мы получим гораздо проще требуемые для астрономии данные методом последовательных приближений.

Будем исходить из уравнений (39.61):

$$d^2u + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2. \tag{40.1}$$

Если пренебречь очень малым членом $3mu^2$, то решение, как и в динамике Ньютона, будет гласить

$$u = \frac{m}{h^2}\left[1 + e \cdot \cos(\varphi - \pi)\right]. \tag{40.2}$$

Постоянные интегрирования e и π представляют собой эксцентриситет и долготу перигелия *).

---

*) Разъясним вкратце применяемые в тексте обозначения. Если две главные оси эллиптической орбиты равны $2a$ и $2b$ ($a \geqslant b$), то *эксцентриситет* e представляет собою отношение расстояния между фокусами $2\sqrt{a^2 - b^2}$ к большей оси $2a$ (в учебниках аналитической геометрии эта величина часто называется *численным эксцентриситетом*); *перигелием* называется ближайшая к притягивающей точке вершина эллипса (для луны эта точка называется *перигеем*); ω есть угол между радиусом-вектором, соединяющим фокус с перигелием, и каким-нибудь закрепленным начальным направлением, лежащим в плоскости орбиты; для планет таким закрепленным направлением служит один из радиус-векторов, направленных к *узлам*-точкам пересечения планетных орбит с плоскостью эклиптики, т. е. с плоскостью земной орбиты.

Различают узлы восходящий и нисходящий, соответственно направлению движения планеты, пересекающей эклиптику в восходящем узле при переходе в северное полушарие.

Положение самого узла определяется его *долготой*, т. е. угловым расстоянием от точки весеннего равноденствия (точки пересечения эклиптики с земным экватором), считаемым в плоскости эклиптики. Долгота восходящего узла обозначается через ☊; через i обозначается *наклон орбиты* планеты, т. е. угол между ее плоскостью и плоскостью эклиптики. Наконец, *параметр* $2l = \frac{2b^2}{a} = 2a(1 - e^2)$ равен длине хорды эллипса, проведенной перпендикулярно к большей полуоси через один из фокусов. Величина l определяется через постоянную площадей h при помощи уравнения, легко получаемого из (40.2):

$$h^2 = ml = ma(1 - e^2).$$

Наконец, $\pi = \tilde{\omega} = ☊ + \omega$ есть долгота перигелия. (*P.*)

Подставим полученное нами первое приближение для u в малый член $3mu^2$, тогда (40.1) принимает вид

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{m}{h^2}+3\frac{m^3}{h^4}+6\frac{m^3}{h^4}e\cos(\varphi-\pi)+$$
$$+\frac{3}{2}\frac{m^3}{h^4}e^2[1+\cos 2(\varphi-\pi)]. \tag{40.3}$$

Из добавочных членов единственным, могущим произвести эффект, доступный наблюдению, является член, содержащий $\cos(\varphi-\pi)$; этот член имеет как раз период такой величины, что может при резонансе служить причиной для постоянно увеличивающегося эффекта.

Так как частный интеграл уравнения

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=A\cos\varphi$$

равен

$$u=\frac{1}{2}A\varphi\sin\varphi,$$

то к интегралу u, выражаемому формулой (40.2), нужно прибавить добавочный член

$$u_1=3\frac{m^3}{h^4}e\varphi\sin(\varphi-\pi). \tag{40.4}$$

Таким образом, во втором приближении

$$u=\frac{m}{h^2}\left[1+e\cos(\varphi-\pi)+3\frac{m^2}{h^2}e\varphi\sin(\varphi-\pi)\right]=$$
$$=\frac{m}{h^2}[1+e\cdot\cos(\varphi-\pi-\delta\pi)],$$

где

$$\delta\pi=3\frac{m^2}{h^2}\varphi, \tag{40.5}$$

причем величиной $(\delta\pi)^2$ пренебрегаем.

В то время как планета сделает один полный оборот по орбите, перигелий π переместится на некоторую долю всей орбиты, равную

$$\frac{\delta\pi}{\varphi}=\frac{3m^2}{h^2}=\frac{3m}{a(1-e^2)}, \tag{40.6}$$

что следует из общеизвестного закона площадей

$$h^2=ml=ma(1-e^2).$$

Применяя третий закон Кеплера (T — время обращения)

$$m = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a^3,$$

получим для перемещения перигелия формулу другого вида

$$\frac{\delta\pi}{\varphi} = \frac{12\pi^2 a^2}{c^2 T^2 (1 - e^2)}, \tag{40.7}$$

где T — период, а c — опять восстановленная скорость света.

Это перемещение перигелия может быть замечено для планеты Меркурия, причем вычисленные данные совпадают с результатами наблюдений.

Для круговой орбиты полагаем $\frac{dr}{ds}$ и $\frac{d^2 r}{ds^2}$ равными нулю, вследствие чего (39.31) принимает следующий вид:

$$-re^{-\lambda}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu' \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} e^{\nu} \frac{\nu'}{r} = \frac{1}{2} \frac{\gamma'}{r} = \frac{m}{r^3};$$

следовательно, третий закон Кеплера выполняется *в точности*. Этот результат не имеет никакого значения для наблюдений, так как он является лишь простым следствием принятого нами определения величины r. Можно было бы взять слегка отличные координатные системы, которые с таким же правом могли претендовать на соответствие полярным координатам в плоском пространстве-времени, но в применении к которым третий закон Кеплера уже не был бы верен.

К результатам только-что указанного типа нужно подходить с большой осторожностью, так как они могли бы представлять интерес например только в том случае, если бы радиус-вектор являлся не условной координатой, а величиной, которую можно непосредственно измерить. Перемещение же перигелия представляет собой явление совершенно другого порядка. Ясно, что число лет, необходимое для того, чтобы орбита, имеющая эксцентриситет, не равный нулю, совершила полный оборот, вернувшись в свое прежнее положение, может быть определено при помощи наблюдений, очевидно независимо от того или иного условия, введенного при определении точной длины радиуса-вектора.

Следующая таблица дает для четырех внутренних планет поправки к движению перигелия за сто лет, предсказываемые теорией Эйнштейна.

Планеты	$\delta\pi$	$e\,\delta\pi$
Меркурий	$+42'',9$	$+8'',82$
Венера	$+8'',6$	$+0'',05$
Земля	$+3'',8$	$+0'',07$
Марс	$+1'',35$	$+0'',13$

Произведение $e\,\delta\pi$ дает лучшее представление о том эффекте, который может быть получен в результате наблюдений. Из таблицы видно, что поправка заметна только для Меркурия, После введения поправок в выражение $e\,\delta\pi$ остаются следующие расхождения между теорией и наблюдениями в отношении вековых изменений элементов орбит внутренних планет:

Планеты	$e\,\delta\pi$	δe	$\sin i\,\delta\,\Omega$	δi
Меркурий . . .	$-0'',58\pm0'',29$	$-0'',88\pm0'',33$	$+0'',46\pm0'',34$	$+0'',38\pm0'',54$
Венера	$-0'',11\pm0'',17$	$+0'',21\pm0'',21$	$+0'',53\pm0'',12$	$-0'',38\pm0'',22$
Земля	$0'',00\pm0'',09$	$+0'',02\pm0'',07$	. . . .	$-0'',22\pm0'',18$
Марс	$+0'',51\pm0'',23$	$+0'',29\pm0'',18$	$-0'',11\pm0'',15$	$-0'',01\pm0'',13$

где i — наклон орбиты, а Ω — долгота восходящего узла.

Приведенные в этой таблице вероятные ошибки включают в себе как ошибки наблюдений, так и теоретические ошибки, получающиеся благодаря незнанию точных значений масс планет. Знак «плюс» означает, что наблюдаемое перемещение больше чем перемещение, определяемое на основании теоретических соображений *).

*) Newcomb, Astronomical Constants. Его данные были слегка исправлены применением в вышеприведенной таблице постоянной, полученной в последнее время для прецессии, см. de Sitter, Monthly Notices, 76, 728.

Поправка Эйнштейна для перигелия Меркурия уничтожила самое большое несоответствие между даными таблицы, которое, согласно ньютоновой теории, было приблизительно в 30 раз больше вероятной ошибки. Из 15 оставшихся поправок 8 имеют величину, превышающую вероятную, а 3 поправки превышают вероятные ошибки вдвое, что довольно точно соответствует соотношению, даваемому теорией ошибок. Но, вопреки нашим ожиданиям, наибольшее отклонение превышает вероятную ошибку наблюдений не в 3 раза, но примерно в $4^1/_2$ раза, в случае значения для долготы узла Венеры. Весьма возможно, что это расхождение имеет под собой реальную почву. Во всяком случае, теория Эйнштейна не дает никакого объяснения о причине этого расхождения *).

41. ОТКЛОНЕНИЕ СВЕТА.

При движении со скоростью, равной скорости света, $ds = 0$ откуда, согласно формуле (39.62), $h = \infty$ и уравнение орбиты (39.61) сводится к следующему

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3mu^2. \tag{41.1}$$

Траектория движения светового импульса также дается уравнением геодезической линии при $ds = 0$ согласно (15.8). Следовательно, уравнение орбиты (41.1) определяет собой путь светового луча **).

---

*) См. обзоры *H. Kienle*, Ergebnisse d. exakten Naturwissenschaften, III 1924,; *J. Hopmann*, Handbuch d. Physik, XXI, 1929, J. Springer. Berlin *J. Chazy*, La théorie de la relativité et la mécanique céleste, Gauthier-Villars, Paris, 1928. Следует заметить, что ни наблюдения, ни теория не могут гарантировать здесь точности в десятые секунды дуги, и что самое определение этих поправок составляет одну из труднейших задач астрономии. (*Р.*)

**) Приведем здесь еще один вывод дифференциального уравнения (41.1) для случая движения со скоростью света, основанный не на предельном переходе, как в тексте, а на замечаниях, сделанных в подстрочном примечании на стр. 105. Согласно этим рассуждениям мы можем сказать, что нулевые геодезические линии также определяются при помощи уравнений (39.2), (39.31), (39.32), (39.33), если только заменить в них параметр s на соответствующий параметр p.

$$\frac{d^2\theta}{dp^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dp}\frac{\theta}{dr} - \cos\theta\sin\theta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 = 0 \tag{a_1}$$

$$\frac{d^2r}{dp^2} + \frac{1}{2}\lambda'\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - re^{-\lambda}\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = 0 \tag{a_2}$$

Будем интегрировать это уравнение при помощи метода последовательных приближений. Пренебрегая членом $3mu^2$, получим решение приближенного уравнения

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=0$$

в виде прямой линии

$$u=\frac{\cos\varphi}{R}. \tag{41.2}$$

Подставляя полученный результат в малый член $3mu^2$, найдем:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{3m}{R^2}\cos^2\varphi.$$

Частным интегралом этого уравнения будет

$$u_1=\frac{m}{R^2}(\cos^2\varphi+2\sin^2\varphi).$$

$$\frac{d^2\varphi}{dp^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{dp}\frac{d\varphi}{dp}=0, \ (a_3) \qquad \frac{d^2t}{dp^2}+\gamma'\frac{dr}{dp}\frac{dt}{dp}=0. \qquad (a_4)$$

Но „первый интеграл" этих уравнений теперь уже равен

$$\gamma^{-1}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2-\gamma\left(\frac{dt}{dp}\right)^2=0. \qquad (b)$$

Из (a_3) и (a_4) точно так же, как и в п. 39, получаем

$$r^2\frac{d\varphi}{dp}=h, \qquad \frac{dt}{dp}=\frac{c}{\gamma},$$

где h и c — постоянные интегрирования.

При помощи этих уравнений можно исключить из (b) dp и dt, после чего будем иметь:

$$\frac{1}{\gamma}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2-\frac{c^2r^4}{h^2\gamma}=0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{\gamma}{r^2}-\frac{c^2}{h^2}=0.$$

Полагая $\frac{1}{r}=u$ и написав для γ значение $1-2\,mu$, найдем:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2-2mu^3-\frac{c^2}{h^2}=0,$$

откуда, дифференцируя по φ и деля на $2\frac{du}{d\varphi}$, окончательно получим

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=3mu^2.$$

(*H.*)

Таким образом, все второе приближение равно

$$u = \frac{\cos\varphi}{R} + \frac{m}{R^2}(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi). \tag{41.3}$$

Умножая на rR, получим, при $u = \frac{1}{r}$,

$$R = r\cdot\cos\varphi + \frac{m}{R}(r\cdot\cos^2\varphi + 2r\sin^2\varphi),$$

или, переходя к прямоугольным координатам при помощи формул $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, будем иметь:

$$x = R - \frac{m}{R}\cdot\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{41.4}$$

Второй член вызывает лишь очень незначительное отклонение от прямой линии $x = R$. Асимптоты этой кривой можно найти, придавая y очень большие значения по сравнению с x. Тогда уравнение принимает вид

$$x = R - \frac{m}{R}(\pm 2y),$$

а малый угол между асимптотами будет равен (в радианах) *)

$$\frac{4m}{R}.$$

Для луча, касающегося поверхности солнца, $m = 1{,}47$ *км*, $R = 697\,000$ *км*, так что отклонение должно было бы равняться $1'',75$. На основании наблюдений солнечного затмения, произведенных английскими экспедициями в 1919 г., были получены следующие результаты:

Экспедиция в Собраль . . . . . . $1'',98 \pm 0'',12$
Экспедиция в Принсипе . . . . $1'',61 \pm 0'',30$ **).

*) Точное значение синуса угла, образуемого асимптотой с прямой $x = R$, легко вычислить, если положить в (41.3) $u = 0$. Тогда, полагая $\frac{m}{R} = \mu$, получим

$$\mu\cos^2\varphi - \cos\varphi - 2\mu = 0, \qquad |\cos\varphi| = \frac{\sqrt{1+8\mu^2}-1}{2\mu},$$

а это выражение как раз и равно синусу искомого угла. Для малых значений μ это выражение приближенно становится равным $\frac{2m}{R}$. Конечно, мы рассматриваем здесь только это приближенное значение, так как уже при выводе уравнения (41.3) мы пренебрегли величиной μ^2.

(*Н.*)

**) Кроме экспедиций 1919 г., организованных Эддингтоном, наиболее удачные результаты были получены экспедицией Ликской обсерватории

В книге автора «Пространство, время и тяготение» было показано, что это отклонение в два раза больше того, которое могло бы быть предсказано на основании ньютоновской теории *).

в 1922 г. (затмение 21 сентября наблюдалось у Австралии). Эти результаты считаются сейчас наиболее авторитетными. Измерения, произведенные с 80 звездами большей камеры, дали отклонение — $1'',87$; 147 звезд, промеренных на фотографиях, полученных с малой камерой, дали отклонение— $1'',82$, в прекрасном согласии с теоретическим значением — $1'',75$.

Наконец, результаты наблюдения затмения 29 мая 1929 г. на Суматре повели к оживленной дискуссии, так как Фрейндлих утверждал о найденном им будто бы противоречии с теорией. Именно, немецкими наблюдателями было получено значение $2'',2$, хотя правильность качественной зависимости ими не оспаривалась. Повидимому однако, выводы Фрейндлиха основаны на неправильных измерениях снимков, вызванных в частности тем, что большинство звезд сравнения лежали по одну сторону от солнца.

A. S. Eddington & C. Davidson, Mem. Roy. Astr. Soc. 62, 1920.

W. W. Campbell & R. J. Trümpler, Lick Observatory Bull. 11, 41, 1923; 13, 130, 1928.

Обзор: *I. Hopmann,* Handbuch d. Physik, XXI. 1929, J. Springer, Berlin.

E. Freundlich, H. Klüber, A. Brunn, Z. f. Astrophys. 3, 171, 1931.

H. Ludendorff S.-A. Astron. Nachricht. 244, 321, 1932. Ответ трех авторов, там же, стр. 415.

R. J. Trümpler, Z. f. Astrophys. 4, 208, 1932. Ответ трех авторов там же, стр. 221.

Обзор: *A. Kopff.* Naturwiss., 20, 486, 1932.

A. Danjon, Journ. de Phys. et le Radium, 3, 281, 1932.

A. Freundlich & A. Brunn, Z. f. Astrophys. 6, 218, 1932. (*Р.*)

*) Ср. «Пространство, время и тяготение», стр. 110.

Мы не будем производить здесь простого подсчета, из которого вытекает искомая формула, но хотели бы напомнить те изящные соображения, благодаря которым автор делает правдоподобным этот результат.

В выражении (38 · 8) для ds^2, а именно:

$$ds^2 = \frac{1}{\gamma}\,dr^2 - r^2 d\,\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + \gamma\, dt^2; \qquad \gamma = 1 - \frac{2m}{r},$$

γ входит при dr^2 и dt^2. При малых скоростях величиною dr^2 можно пренебречь по сравнению с dt^2 и таким образом, только γ в последнем члене вызывает отклонения от «плоского мира» и ведет к закону тяготения Ньютона. Так как, напротив, в случае скорости света $\frac{dr}{dt} = 1$, то для световых лучей нужно учесть еще поправку от первого члена $-\frac{2m}{r}\,dr^2$, которая имеет тот же порядок величины, как и поправка $-\frac{2m}{r}\,dt^2$ в первом случае. Таким образом, отклонение удваивается. Следовательно, можно сказать, что закон тяготения Ньютона основан на неэвклидовом характере связи пространства и времени, в то время как при отклонении световых лучей проявляется и неэвклидов характер одного только пространства. (*Н.*)

В связи с этим был обнаружен следующий парадокс. Так как кривизна светового луча удваивается, то ускорение света в каждой точке тоже в два раза больше ньютоновского ускорения, между тем как для медленно движущегося тела ускорение практически совпадает с ньютоновским. Для человека, опускающегося в лифте с ускорением $\frac{m}{r^2}$, траектории обычных частиц будут представлять собой прямые линии; но из приведенных рассуждений как будто бы следует, что ускорение лифта должно равняться $\frac{2m}{r^2}$ для того, чтобы световые траектории казались прямыми линиями. Не противоречит ли это принципу эквивалентности?

Причина заблуждения лежит в смешении двух значений слова «кривизна». *Координатная* кривизна, получаемая из уравнения траектории (41 · 4), не совпадает с *геодезической кривизной* *). Кривизна в последнем смысле—это кривизна, которая существует для наблюдателя, находящегося в данном месте, в нашем примере — для человека в лифте. Рассмотрим искривленную световую траекторию, проходящую через «холм» **), соответствующий полю солнца. Кривизна этой траектории может быть вычислена путем проектирования ее или на основание «холма», или на касательную плоскость, проведенную в какой-либо точке. Кривизна обеих проекций, вообще говоря, будет различна. Проекция, выраженная в эвклидовых координатах (x, y), применяемых в формуле (4 · 14), представляет собой проекцию на основание холма; применяя же принцип эквивалентности, мы должны взять проекцию в касательной плоскости, так как рассматриваемая область искривленного мира так мала, что мы не в состоянии отличить ее от касательной к ней плоскости.

---

*) Читатель не должен забывать при этом, что под *геодезической кривизной* кривой на *некоторой поверхности* в данной точке P нужно понимать обычную кривизну в P проекции кривой на касательную плоскость, проведенную к поверхности в точке P. (*Н.*)

**) Это выражение, пожалуй, нуждается в некотором пояснении. Автор представляет себе пустой мир, обладающий галилеевой метрикой, как плоское четырехмерное многообразие, вложенное, скажем, в пятимерное пространство. Структурные изменения этой «равнины», или «плоскости», обусловливаемые полем тяготения, т. е. «неровности», с точки зрения такого пятимерного пространства, можно рассматривать как «холмы» в первоначально «плоском» мире. (*Н*).

42. КРАСНОЕ СМЕЩЕНИЕ ФРАУНГОФЕРОВЫХ ЛИНИЙ.

Рассмотрим некоторое число одинаковых атомов, колеблющихся в различных точках данной области. Пусть в течение некоторого промежутка времени атомы находятся в покое *) в нашей координатной системе (r, θ, φ, t). Признаком тождественности атомов между собой является равенство соответствующих им интервалов, следовательно и интервалы *колебаний* всех атомов должны быть одни и те же.

Так как атомы находятся в покое, то можно положить, что dr, $d\theta$, $d\varphi$ в формуле (38.8) равны нулю, так что

$$ds^2 = \gamma \cdot dt^2. \tag{42.1}$$

Следовательно, *периоды* колебаний атомов в различных точках будут обратно пропорциональны $\sqrt{\gamma}$.

Наша система координат является *статической системой*, т. е. величины $g_{\mu\nu}$ не зависят от времени. (Произвольная координатная система вообще не обладает этим свойством; в дальнейшем, когда нам придется рассматривать два или более притягивающихся тел, в большинстве случаев окажется невозможным выбирать строго статическую систему координат). Если наблюдатель находится в покое в системе координат (r, θ, φ, t), то волна, испускаемая одним из атомов, достигнет его через некоторый промежуток времени δt, после того как она оставила атом; благодаря условию статичности этот промежуток времени остается постоянным для всех последующих волн. Следовательно, волны приходят через те же самые промежутки времени, через которые они испускаются. Поэтому мы можем сравнивать периоды времени dt различных атомов, сравнивая периоды получаемых от них волн. Таким образом, можно экспериментально проверить зависимость периодов волн от значений $\sqrt{\gamma}$ в том месте, где они были испущены. Конечно, самым надежным методом является сравнение волн, получаемых от солнечного и земного атомов, периоды которых должны были бы находиться в отношении 1,00000212 : 1. При длине волны в 4000 Å это соответствует относительному перемещению соответствующих спектральных линий

*) Покоящимися предполагаются, конечно, центры тяжести атомов. (*Н.*)

на 0,0082 Å. Данные опыта еще не таковы, чтобы это положение могло обеспечить за собой всеобщее признание; но теперь они во всяком случае более благоприятны для теории Эйнштейна, чем в то время, когда писалась книга «Пространство, время и тяготение» *).

Величина dt является лишь вспомогательной величиной, введенной через уравнение (38.8). Тот факт, что она переносится к нам волнами света, оставаясь неизменной, не имеет никакого физического значения, ибо с самого начала dt было *определено* именно таким образом, чтобы это имело место. Абсолютная величина ds, т. е. интервал колебаний, не переносится к нам, оставаясь неизменным, а постепенно изменяется в течение того времени, когда волны проходят через неэвклидово пространство-время. При наблюдениях астрономы как раз надеются заметить ту абсолютную разность, которая вводится в волны при их прохождении через солнечную систему.

Все рассуждение относится к *одинаковым* атомам, а поэтому возникает вопрос, действительно ли водородные атомы на солнце и на земле одинаковы. Строго говоря, атомы не могут быть в точности подобны друг другу, так как на солнце они находятся в области другого вида пространства-времени, в которой невозможно воспроизвести точно ту же конечную структуру, что и в пространстве-времени вблизи земли.

Но если интервал колебания водородного атома изменяется в зависимости от типа пространства-времени, в котором он находится, то это изменение должно зависеть от каких-либо мировых инвариантов.

---

*) После того, как было показано (теория Мег Над Саха), что в интересующих нас слоях солнца плотности очень малы (до 10^{-6} атм.), так что эффектом давления можно пренебречь, наибольшей помехой к обнаружению эффекта красного смещения оказалось влияние различных слоев солнца (на разных слоях линии сдвинуты различным образом, даже в смысле знака, вследствие поднимающихся и опускающихся токов). После ряда колебаний наиболее авторитетный знаток и исследователь этой области Сэн-Джон (измерив 1670 линий) окончательно склонился к мнению, что значительная часть наблюдаемого смещения объясняется теорией относительности. Однако, исключить все нерелятивистские влияния окончательно еще не удалось.

St. John, Astrophys. Journ. 67, 195, 1928.

Обзоры: *J. Hopmann,* Handbuch d. Physik, XXI. 1929, J. Springer, Berlin. *E. Freundlich,* Naturwiss. 18, 513, 1930. *(P.)*

Простейшим инвариантом, имеющим различные значения на солнце и на земле, является квадрат длины тензора Риманна — Кристоффеля, а именно

$$B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} B^{\mu\nu\sigma}_{\varepsilon}.$$

Эта величина может быть вычислена из формулы (38.8) методом, применяемым в этой главе для вычисления тензора $G_{\mu\nu}$ Результат будет равен

$$48 \cdot \frac{m^2}{r^6}.$$

Из соображений размерности вытекает, что соответствующее изменение ds должно быть порядка

$$\frac{\sigma^4 m^2}{r^6},$$

где σ — радиус атома. Повидимому никакая другая длина входить в рассмотрение не может. Сравнение солнечных и земных атомов показывает, то эта величина примерно равна 10^{-100}. Во всяком случае, представляется невозможным построить при помощи инвариантов пространства-времени выражение, которое скомпенсировало бы предсказывемое смещение спектральных линий пропорциональное $\frac{m}{r}$.

43. ИЗОТРОПНЫЕ КООРДИНАТЫ.

Выражение для интервала (38.8) можно преобразовать при помощи подстановки

$$r = \left(1 + \frac{m}{2r_1}\right)^2 r_1, \tag{43.1}$$

откуда

$$dr = \left(1 - \frac{m^2}{4r_1^2}\right) dr_1$$

и

$$\gamma = \frac{\left(1 - \frac{m}{2r_1}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2r_1}\right)^2}.$$

Следовательно, (38.8) принимает вид

$$ds^2 = -\left(1+\frac{m}{2r_1}\right)^4 (dr_1^2 + r_1^2\, d\theta^2 + r_1^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2) + \\ + \frac{\left(1-\frac{m}{2r_1}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{2r_1}\right)^2} dt^2. \qquad (43.2)$$

Координаты (r_1, θ, φ) называются *изотропными* полярными координатами. Соответствующие изотропные прямоугольные координаты найдем, положив

$$x = r_1 \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r_1 \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r_1 \cos\theta,$$

откуда получим

$$ds^2 = -\left(1+\frac{m}{2r_1}\right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2) + \frac{\left(1-\frac{m}{2r_1}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{2r_1}\right)^2} dt^2, \qquad (43.3)$$

при

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Эта система координат имеет ряд преимуществ. Например, для того, чтобы получить траекторию движения светового импульса, положим $ds = 0$ в формуле (43.3). Это даст:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{\left(1-\frac{m}{2r_1}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{2r_1}\right)^6}.$$

На расстоянии r_1 от начала координат скорость света согласно этой формуле в любом направлении равна

$$\frac{1-\frac{m}{2r_1}}{\left(1+\frac{m}{2r_1}\right)^3}. \qquad (43.4)$$

При первоначально применявшихся координатах в (38.8) скорость света была различной для радиального и поперечного направлений.

Кроме того, в изотропной системе координат элемент длины $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ небольшого твердого стержня не изменяется при изменении его ориентации. Эта система координат естественно вводится при измерении пространства твердыми масштабами или световой триангуляцией в малой области, например, при измерениях, производимых на земле. Так как, в конце концов, все измерения, содержащиеся в каком-нибудь наблюдении, выполняются в земных лабораториях, то, строго говоря, всегда нужно применять изотропную систему, которая соответствует допущениям, сделанным при этих именно измерениях *). Но на земле величиной $\frac{m}{r}$ можно пренебречь, так что обе системы становятся эквивалентными друг другу и эвклидовым координатам. Неэвклидова геометрия нужна только для теоретической части исследования законов движения планет и распространения света в тех областях, где отношением $\frac{m}{r}$ пренебречь нельзя. Как только световые волны попадают в земную лабораторию, необходимость в применении неэвклидовой геометрии отпадает, и разница между изотропными и неизотропными координатами практически исчезает.

Как в той, так и в другой системе координат скорость света вдоль какой-нибудь линии в одном направлении равна его скорости в обратном направлении. Следовательно, координата t подчиняется требованию п. 11, заключающемуся в том, что одновременность каких-нибудь событий может быть определена при помощи световых сигналов. Если из точки A, в которой находятся часы, мы посылаем в момент времени t_A световой сигнал, который, достигая точки B, немедленно отражается и возвращается в A в момент времени t'_A, то время прибытия в точку B будет равно $\frac{1}{2}(t_A + t_A')$ точно так же, как и в специальной теории относительности. Но другое требование, заключающееся в возможности определения одновременности бесконечно медленного перенесения часов, оказывается невыполнимым в гравитационном поле. Это следует из п. 42, так как ход часов будет зависеть от их положения в поле тяготения. Во всяком случае, медленное перемещение часов будет тогда неосуществимо вследствие ускорения, которое должны испытывать все тела.

*) Однако земная лаборатория свободно падает по направлению к солнцу и поэтому ускоряется по отношению к координатам (x, y, z, t).

Изотропная система могла быть найдена непосредственно при отыскании частных решений уравнений Эйнштейна, имеющих вид (38.12), т. е.

$$ds^2 = -e^{\lambda}\, dr^2 - e^{\mu}(r^2 d\,\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2) + e^{\nu}\cdot dt^2,$$

где λ, μ, ν суть функции от r. Применяя метод п. 38, имеем:

$$\left.\begin{aligned}
G_{11} &= \mu'' + \frac{1}{2}\nu'' + \\
&+ \frac{2}{r}\mu' - \frac{1}{r}\lambda' + \frac{1}{2}\mu'^2 - \frac{1}{2}\lambda'\mu' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{4}\nu'^2 \\
G_{22} &= e^{\mu-\lambda}\left[1 + 2r\mu' + \frac{1}{2}r(\nu' - \lambda') + \frac{1}{2}r^2\mu'' + \right. \\
&\left. + \frac{1}{2}r^2\mu'\left(\mu' + \frac{1}{2}\nu' - \frac{1}{2}\lambda'\right)\right] - 1 \\
G_{33} &= G_{22}\sin^2\theta \\
G_{44} &= -e^{\nu-\lambda}\left[\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{r}\nu' + \frac{1}{2}\nu'\mu' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{4}\nu'^2\right]
\end{aligned}\right\} \quad (43.5)$$

Остальные компоненты равны нулю *).

Благодаря тождественному соотношению между составляющими G_{11}, G_{22} и G_{44}, равенство нулю этого тензора дает только два уравнения для определения трех неизвестных λ, μ, ν.

Поэтому существуют бесконечное число частных решений, отличающихся друг от друга выбором третьего уравнения между λ, μ, ν, которое мы можем ввести по произволу. Два рассмотренных до сих пор решения получены при $\mu = 0$ и $\lambda = \mu$. Та же совокупность решений может быть получена более простым путем, а именно подстановкой в равенство (38.8) произвольных функций от r вместо самого r.

Возможность замены r какой-нибудь функцией от r, без нарушения сферической симметрии, очевидна из того факта, что координаты представляют собой только лишь отождествляющие числа, но аналитически эта возможность связана с наличием тождественного соотношения между G_{11}, G_{22} и G_{44}, вследствие чего число уравнений оказывается недостаточным для определения однозначного решения.

---

*) Некоторым контролем этих формул является также то, что при $\mu=0$ они переходят в (38.6).

(*Н.*)

Это приводит нас к теореме, имеющей большое значение в последующем изложении. Если бы все десять уравнений Эйнштейна $G_{\mu\nu}=0$ являлись независимыми, то десять величин $g_{\mu\nu}$ определялись бы при их помощи однозначно (при определенных граничных условиях). Выражение для ds^2 было бы вполне однозначно и никакое преобразование координат не было бы возможным. Но так как мы знаем, что координаты можно преобразовывать по нашему произволу, то между десятью компонентами g и ν должны существовать тождественные соотношения, как мы и увидим в п. 52.

Некоторый интерес представляет собою другое преобразование формулы (38.8), имеющее вид

$$t=t_1+2m\lg(r-2m); \tag{43.61}$$

при его помощи вводится новое «время» t и вместе с тем немного отличное определение одновременности. Тогда уравнение (38.8) принимает следующий вид:

$$ds^2=(-dr^2-r^2\,d\theta^2-r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2+dt_1^2)-\frac{2m}{r}(dt_1-dr)^2. \tag{43.62}$$

Полагая в (43.62) $ds^2=0$, получим, что в этих координатах радиальная скорость, направленная от солнца, равна 1. Таким образом, это определение времени получается в том случае, если, в предположении постоянства скорости света все часы устанавливаются при помощи световых сигналов, посылаемых солнцем. Правда, при таком исчислении времени радиальные скорости света в двух противоположных направлениях—к солнцу и от солнца — уже не совпадают друг с другом.

Каждому элементу $(dr,\ d\theta,\ d\varphi,\ dt_1)$ соответствует элемент мировой линии притягивающей частицы, обладающий тем свойством, что эфирные волны, исходящие из крайних точек последнего элемента, одновременно достигают обеих крайних точек первого линейного элемента. Легко убедиться, что сопоставленный таким образом линейный элемент имеет компоненты $(0, 0, 0, dt_1-dr)$. Следовательно, мы можем переписать равенство (43 · 62) в следующем виде:

$$ds^2=d\sigma^2-2\Omega d\sigma'^2, \tag{43.63}$$

где через $d\sigma$ и $d\sigma'$ обозначены эвклидовы длины обоих элементов, а через Ω потенциал источника m на $d\sigma$ (взятый так же, как в эвклидовом пространстве).

Уайтхэд *) в своей теории гравитации считает в противоположность эйнштейновской теории, что именно выражение (43.63) описывает действие тяготения. Он рассматривает пространство как эвклидово, отвергая нашу метрическую интерпретацию ds^2. Не считая возможным присоединиться к взглядам Уайтхэда, мы все же отметим здесь тот интересный факт, что его необыкновенно простая формула для интервала (в поле, возмущенном тяготеющим телом) находится в полном согласии с эйнштейновской теорией.

44. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ. ДВИЖЕНИЕ ЛУНЫ.

Поле, описываемое при помощи тензора $g_{\mu\nu}$, может быть (искус ственно) разделено на чисто-инерциальное поле, представленное галилеевыми координатами, и силовое поле, заданное отклонениями компонент $g_{\mu\nu}$ от галилеевых значений. Произвести наложение (суперпозицию) друг на друга силовых полей двух притягивающихся частиц невозможно, так как сумма обоих решений не будет решением уравнений $G_{\mu\nu}=0$, вследствие нелинейности последних относительно $g_{\mu\nu}$.

Для поля двух особых точек или частиц до сих пор еще не найдено никакого решения уравнений Эйнштейна. Простейшим случаем являются две одинаковые частицы, вращающиеся по круговым орбитам вокруг общего центра тяжести. Казалось бы, для двух одинаковых особых точек должно существовать статическое решение; но условия на бесконечности будут отличаться от условий для одной частицы, так как оси, соответствующие статическому решению, образуют так называемую вращающуюся систему. Решение еще не найдено и возможно даже, что такое статическое решение вообще не существует. Мы не думаем, чтобы до сих пор было доказано, что два тела могут вращаться, не излучая энергии гравитационными волнами. При обсуждении этой задачи излучения обычно существует тенденция считать вопрос уже решенным; однако недостаточно заставить частицы равномерно вращаться, вычислить затем возникшие гравитационные волны и проверить, действительно ли излучение гравитационной энергии сквозь сферу бесконечного радиуса равно нулю. Последнее обстоя-

*) *A. N. Whitehead.* The Principle of Relativity (Cambridge University Press), стр. 81.

тельство покажет только, что статическое решение не противоречиво непосредственно, хотя самая возможность его существования и не будет доказана.

Проблема двух тел в теории Эйнштейна остается, таким образом, вызовом математикам, подобно задаче трех тел в теории Ньютона.

Для практических целей достаточен метод последовательных приближений. Мы рассмотрим задачу, состоящую в определении поля, создаваемого совместным притяжением земли и солнца, и применим ее для определения тех изменений в орбите луны, которые требуются новым законом тяготения.

Эта задача была детально исследована де Ситтером *). Мы не будем приводить здесь полного изложения вопроса, но постараемся выяснить самые важные поправки, которые следует искать при более точных наблюдениях.

Имеются три источника ошибок:

1. Сила притяжения солнца не определяется точно из закона Ньютона, поэтому необходимо ввести поправки в возмущения лунной орбиты солнцем.

2. При взаимодействии земного и солнечного гравитационных полей, вследствие их неаддитивности, появляются смешанные члены.

3. Земное поле также изменено и вызывает *помимо всего прочего* движение перигея луны, аналогичное движению перигелия Меркурия. Легко вычислить, однако, что этот эффект слишком мал, чтобы его можно было заметить.

Если обозначить через Ω_S и Ω_E ньютоновские потенциалы солнца и земли, то главные члены поправок (1), (2), (3) соответственно будут иметь порядок величины

$$\Omega_S^2, \quad \Omega_S \Omega_E, \quad \Omega_E^2.$$

Для луны $\Omega_S = 750\ \Omega_E$. Поэтому мы можем обратить наше внимание только на члены типа (1). Если они окажутся слишком малыми, чтобы их можно было заметить, то и подавно не будет иметь смысла вычислять остальные.

Мы получили уравнения планетных орбит из закона Эйнштейна независимо от ньютоновской теории; но при решении задачи движения луны необходимо сосредоточить внимание на различии

*) Monthly Notices, 77, 155.

между формулами Эйнштейна и Ньютона, если мы хотим избежать повторного вычисления всей классической теории движения луны. Чтобы произвести это сравнение, преобразуем (39.31) и (39.32) так, чтобы t входило как независимая переменная.

$$\frac{d^2}{ds^2}=\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{d^2}{dt^2}+\frac{d^2t}{ds^2}\frac{d}{dt}=$$

$$=\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2}{dt^2}+\lambda'\frac{dr}{dt}\frac{d}{dt}\right) \qquad \text{[см. (39.33)]}$$

Отсюда уравнения (39.31) и (39.32) принимают вид:

$$\frac{d^2r}{dt^2}+\frac{3}{2}\lambda'\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-re^{-\lambda}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}e^{2\nu}.\nu'=0,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\lambda'\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}=0.$$

Таким образом, принимая во внимание, что

$$e^{\nu}=e^{-\lambda}=1-\frac{2m}{r},$$

имеем

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\frac{m}{r^2}=R,\\&r\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)=\Phi,\end{aligned}\right\} \qquad (44.1)$$

где

$$\left.\begin{aligned}&R=-\frac{3}{2}\lambda' u^2-\frac{2m}{r^2}v^2+\frac{2m^2}{r^3},\\&\Phi=-\lambda' uv\end{aligned}\right\} \qquad (44.21)$$

и

$$u=\frac{dr}{dt},\quad v=r\frac{d\varphi}{dt}.$$

Уравнения (44.1) показывают, что выражения для R и Φ представляют собой радиальную и поперечную возмущающие силы, которые добавляются теорией Эйнштейна к классической динамике *). С достаточной степенью точности можно положить $\lambda'=-\frac{2m}{r^2}$,

*) Заметим, что при применении полярных координат (r,φ) на плоскости выражения

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2;\quad \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)=r\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$$

представляют радиальное и поперечное ускорения.

(*Н.*)

откуда

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{m}{r^2}(3u^2 - 2v^2) + \frac{2m^2}{r^3}, \\ \Phi &= \frac{m}{r^2}\cdot 2uv. \end{aligned}\right\} \qquad (44.22)$$

В случае трехмерной задачи возмущающими силами будут

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{m}{r^2}(3u^2 - 2v^2 - 2w^2) + \frac{2m^2}{r^3} \\ \Phi &= \frac{m}{r^2}\cdot 2uv \\ Z &= \frac{m}{r^2}\cdot 2uw \;^{*)}. \end{aligned}\right\} \qquad (44.23)$$

Необходимо подчеркнуть, что эти возмущающие силы являются поправками Эйнштейна к закону центральной силы $\frac{m}{r^2}$, где r — *координата, которую мы применяли в нашем предыдущем изложении.* Характеризуют ли эти силы действительное расхождение между законами Эйнштейна и Ньютона, зависит от того, какой смысл придается ньютоновскому символу r. Де Ситтер **), выбирая r, слегка отличающееся от ньютоновского, получает другие выражения для R и Φ.

Нельзя сказать, что при помощи одной из совокупностей возмущающих сил можно лучше объяснить отличие от старой теории, чем при помощи другой, благодаря тому, что сама старая теория

---

*) При этом основная плоскость, от которой ведется отсчет, заменяется другой, также проходящей через притягивающую точку. R и u остаются прежними, но поперечная скорость v и поперечная возмущающая сила Φ оказываются разложенными каждая на две компоненты:

Во-первых:

$$v\cos\alpha \quad \text{и} \quad \Phi\cos\alpha$$

перпендикулярно к радиусу-вектору и параллельно к новой основной плоскости; эти компоненты обозначены в уравнениях (44.23) через v, Φ.

Во-вторых:

$$v\sin\alpha = w \quad \text{и} \quad \Phi\sin\alpha = Z$$

перпендикулярно к радиусу-вектору и к первым компонентам. При этом α есть угол между направлением поперечной скорости v, с одной стороны, и сечением плоскости, перпендикулярной к радиусу-вектору с новой основной плоскостью, с другой. (*Н.*)

**) Monthly Notices, 76, 723, уравнение (53).

не была достаточно ясной. В основу классической теории движения луны был положен закон $\frac{m}{r^2}$. Здесь величина r имеет довольно неопределенный смысл; приписывая ей то или иное значение, можно получить различные поправки к данным классической теории. Но окончательное сравнение при наблюдениях не зависит от выбора промежуточной величины r.

Возьмем неподвижные по отношению к эклиптике прямоугольные оси с солнцем в начале координат, и пусть $(a, 0, 0)$ будут координатами земли в рассматриваемый момент времени, а (x, y, z)*) — координатами луны по отношению к земле.

Принимая, что орбита земли представляет собой окружность, а масса луны бесконечно мала, получим, что скорость земли будет равна $(0, v, 0)$, где $v^2 = \frac{m}{a}$**).

Чтобы найти различие между силами R, Φ, Z, действующими на луну и на землю, продифференцируем (44.23) и положим,

$$\delta r = x, \quad \delta(u, v, w) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),$$

а после дифференцирования

$$r = a, \quad (u, v, w) = (0, v, 0).$$

В результате мы найдем силы, возмущающие движение луны по отношению к земле, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \delta R = X &= \frac{4mx}{a^3}v^2 - \frac{6m^2x}{a^4} - \frac{4m}{a^2}v\frac{dy}{dt} = \\ &= -\frac{2m^2x}{a^4} - \frac{4m}{a^2}v\frac{dy}{dt}, \\ \delta\Phi = Y &= \frac{2m}{a^2}v\frac{dx}{dt}, \\ Z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (44.3)$$

---

*) В последующем изложении принимается, что компоненты w, Z перпендикулярны к плоскости эклиптики, в то время как компоненты R, u лежат в этой плоскости. Хотя это утверждение и не вполне точно, но все же дозволено, потому что диаметр лунной орбиты виден с солнца под очень малым углом. В самом деле, в то время как радиус земной орбиты равен приблизительно 149 000 000 *км*, максимальное удаление луны от земли равно 405 530 *км*. (*Н.*)

**) Именно потому, что ускорение $\frac{v^2}{a}$ должно быть равно $\frac{m}{a^2}$. (*Н.*)

Мы будем опускать член $-\frac{2m^2x}{a_4}$ в выражении для X, так как он слишком мал, чтобы влиять на результаты наблюдений. В самом деле, этот член производит только кажущийся поворот орбиты, получаемый при употреблении неизотропных координат (п. 43). Преобразовывая к новым осям (ξ, η), повернутым на угол θ по отношению к старым (x, y), получим выражения для остающихся компонент возмущающей силы:

$$\left.\begin{aligned} \Xi &= \frac{m}{a^2} v \left(-2\cos\theta\sin\theta\frac{d\xi}{dt} - (4\cos^2\theta + 2\sin^2\theta)\frac{d\eta}{dt}\right) \\ \mathrm{H} &= \frac{m}{a^2} v \left(2\cos\theta\ \sin\theta\frac{d\eta}{dt} + (4\sin^2\theta + 2\cos^2\theta)\frac{d\xi}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \quad (44.4)\,^{*})$$

Будем сохранять оси (ξ, η) все время неподвижными; угол θ, дающий направление, определяющее положение солнца (старая ось X), будет равномерно изменяться и за достаточно долгий промежуток времени будет принимать все значения с одинаковой частотой, независимо от положения луны на ее орбите. Мы можем надеяться наблюдать лишь вековое действие малых сил Ξ, H, аккумулирующееся в течение очень продолжительного промежутка времени. Таким образом, усредняя тригонометрические функции, получим для вековых членов:

$$\left.\begin{aligned} \Xi &= -3\frac{m}{a^2} v \frac{d\eta}{dt} = -2\omega\cdot\frac{d\eta}{dt} \\ \mathrm{H} &= 3\frac{m}{a^2} v \frac{d\xi}{dt} = 2\omega\frac{d\xi}{dt}, \end{aligned}\right\} \quad (44.5)$$

*) Укажем здесь кратко ход вычислений. Формулы преобразования можно написать так:

$$x + iy = e^{i\theta}(\xi + i\eta); \quad X + iY = e^{i\theta}(\Xi + i\mathrm{H}); \quad \Xi + i\mathrm{H} = e^{-i\theta}(X + iY)$$

$$\Xi = X\cos\theta + Y\sin\theta; \quad \mathrm{H} = -X\sin\theta + Y\cos\theta.$$

$$\Xi = -\frac{4m}{a^2} v \frac{dy}{dt}\cos\theta + \frac{2m}{a^2} v \frac{dx}{dt}\sin\theta; \quad \mathrm{H} = \frac{4m}{a^2} v \frac{dy}{dt}\sin\theta + \frac{2m}{a^2} v \frac{dx}{dt}\cos\theta,$$

или в виду

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\cos\theta - \frac{d\eta}{dt}\sin\theta; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\sin\theta + \frac{d\eta}{dt}\cos\theta,$$

$$\Xi = \frac{2mv}{a^2}\left(-\cos\theta\sin\theta\frac{d\xi}{dt} - (2\cos^2\theta + \sin^2\theta)\frac{d\eta}{dt}\right),$$

$$\mathrm{H} = \frac{2mv}{a^2}\left((2\sin^2\theta + \cos^2\theta)\frac{d\xi}{dt} + \cos\theta\sin\theta\frac{d\eta}{dt}\right).$$

(*Н*.)

где

$$\omega = \frac{3}{2}\,\frac{mv}{a^2}. \qquad (44.6)$$

Если (F_ξ, F_η) — ньютоновские силы, то уравнениями движения, включающими вековые возмущающие силы, будут

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\omega\frac{d\eta}{dt} = F_\xi, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} - 2\omega\frac{d\xi}{dt} = F_\eta. \qquad (44.7)$$

Легко видеть, что ω — очень маленькая величина, так что ω^2 можно пренебречь. Уравнения (44.7) оказываются тогда уравнениями Ньютона, отнесенными к осям, вращающимся с угловой скоростью $-\omega$ *). Таким образом, если взять ньютоновскую орбиту и придать ей угловую скорость $+\omega$, то в результате мы получим решение уравнения (44.7).

Таким образом, основной поправкой к теории луны, получаемой на основании уравнений Эйнштейна, является прецессионный эффект, указывающий на то, что результаты классической теории относятся к координатной системе, вращающейся с угловой скоростью ω по отношению к общим инерциальным осям солнечной системы.

Благодаря этому, узел луны и перигей будут двигаться со скоростью ω. Если Ω есть угловая скорость земли, то, в виду (44.6),

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{3m}{2a} = \frac{3}{2}10^{-8}.$$

Поэтому перемещение перигея и узла за столетие будет составлять

$$3\pi \cdot 10^{-6} \text{ радианов} = 1'',94.$$

Отметим еще очень простое теоретическое соотношение, показывающее, что эйнштейновская поправка, вводимая на перемеще-

*) Ибо, если положить $\xi + i\eta = \mathrm{r}$, $F_\xi + iF_\eta = \mathrm{F}$, то уравнения движения, отнесенные к вращающимся осям, напишутся так:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\mathrm{r}e^{-i\omega t}\right) = \mathrm{F}e^{-i\omega t}; \quad \frac{d^2\mathrm{r}}{dt^2} - 2i\omega\frac{d\mathrm{r}}{dt} = \mathrm{F};$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\omega\frac{d\eta}{dt} = F_\xi; \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} - 2\omega\frac{d\xi}{dt} = F_\eta$$

(*II.*)

ние перигея луны, равна *половине* перемещения перигелия земли [см. (40.6)].

Но ни лунная теория, ни наблюдения еще не достигли той степени совершенства, чтобы по ним можно было судить об этом незначительном эффекте, хотя последний лежит только немного ниже границы наблюдения. Наши результаты расходятся с данными де Ситтера только во втором десятичном знаке, который может быть определен лишь приближенно.

Существуют еще хорошо известные неправильные колебания долготы луны, которые достигают довольно больших значений, но обычно считают, что они не могут быть объяснены при помощи какого-нибудь исправления теории тяготения и что причины их возникновения нужно искать в другой области. Во всяком случае, теория Эйнштейна не дает никаких разъяснений по этому вопросу.

Перемещение, равное $1'',94$ в столетие, не свойственно исключительно лишь луне; в самом деле, элементы лунной орбиты не входят в уравнение (44.6). Последнее характеризует свойство окружающего землю пространства — прецессию инерциальной системы координат в этой области по отношению к общим инерциальным осям координат звездной системы. Если бы скорость вращения земли могла быть точно измерена при помощи маятника Фуко или при помощи гидростатических опытов, то полученный при этом результат отличался бы от скорости вращения по отношению к неподвижным звездам именно на указанную величину. Это было впервые отмечено повидимому Скаутеном. Одной из трудностей, наиболее часто приводимой как положение, противоречащее теории относительности, является утверждение, что вращение земли по отношению к среднему положению неподвижных звезд представляет собой абсолютную величину, которую можно определить непосредственно на земле каким-нибудь динамическим способом *). Поэтому особенно важно доказательство, что обе рассматриваемые скорости вращения не в точности равны друг другу и что скорость вращения земли по отношению к звездной системе (причем последняя предполагается совпадающей с общими инерциальными осями координат вселенной) *может быть определена исключительно лишь из астрономических наблюдений.*

---

*) См. „Пространство, время и тяготение“, стр. 156.

Аргумент релятивиста заключается в том, что эффекты, наблюдаемые при опытах с маятником Фуко, могут быть объяснены или силовым полем или вращением, на что анти-релятивист возражает, что силовое поле есть лишь математическое понятие, не существующее в действительности, и что единственно возможной *физической причиной* должно быть только абсолютное вращение. Ему указывают на то, что, выбирая так называемые не вращающиеся оси, он ничего не выигрывает потому, что, во всяком случае, останется главная часть силового поля, а именно: земное поле тяготения. Ответ анти-релятивиста будет заключаться в том, что при помощи своих не вращающихся осей ему удалось приравнять силовое поле в бесконечности нулю, так что остаток может рассматриваться как местное возмущение, производимое землей; между тем, если считать, что начало отсчета находится на земле, то соответствующее силовое поле при удалении от земли становится все больше и больше; таким образом, для релятивиста оказывается необходимым принять существование в удаленных местах громадных сил, возникновению которых нельзя дать никакого физического объяснения.

Однако, предположим, что вращение земли происходит гораздо медленнее, чем в настоящий момент, и что опыт Фуко указывает на вращение, равное всего лишь $-1'',94$ за столетие. Если бы оба спорщика находились на покрытой облаками планете, то они без сомнения еще долго спорили бы, является ли этот эффект абсолютным вращением земли в пространстве. Ирония положения заключалась бы в том, что земля вовсе не вращалась бы в нерелятивистском смысле, и преобразование, предпринятое для объяснения вращения Фуко, действительно было бы эквивалентно введению громадных силовых полей в отдаленных частях пространства, возможность чего ведь и оспаривалась прежде анти-релятивистом особенно сильно. Если затем происхождение величины $1'',94$ окажется выясненным так же, как и в предыдущем исследовании, то анти-релятивист, защищавший ранее утверждение, что наблюдаемый эффект вызывается именно вращением, должен был бы переменить свою позицию и поддерживать теперь уже утверждение, что эффект без сомнения происходит благодаря гравитационному возмущению, оказываемому солнцем на маятник Фуко; релятивист же остается при своей точке зрения, заключающейся в том, что обе причины невозможно отличить друг от друга.

45. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ В ИСКРИВЛЕННОМ МИРЕ.

В своих более поздних работах Эйнштейн принял уравнения более общие, чем (37.4), а именно

$$G_{\mu\nu} = \alpha \cdot g_{\mu\nu}. \tag{45.1}$$

В этом случае выражения (38.61) и т. д. необходимо изменить, подставляя в правую часть величины $\alpha g_{\mu\nu}$. Отсюда получим

$$\frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{2}\lambda'\nu' + \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{\lambda'}{r} = -\alpha e^{\lambda}, \tag{45.21}$$

$$e^{-\lambda}\left(1 + \frac{1}{2}r(\nu' - \lambda')\right) - 1 = -\alpha \cdot r^2, \tag{45.22}$$

$$e^{\nu-\lambda}\left(-\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\lambda'\nu' - \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{\nu'}{r}\right) = \alpha e^{\nu}. \tag{45.23}$$

Из (45.21) и (45.23) следует, что $\lambda' = -\nu'$, поэтому мы можем положить $\lambda = -\nu$. Аддитивная постоянная повлияет лишь на изменение единицы времени. Таким образом, уравнение (45.22) принимает вид

$$e^{\nu}(1 + r\nu') = 1 - \alpha \cdot r^2.$$

Пусть $e^{\nu} = \gamma$, тогда

$$\gamma + r\gamma' = 1 - \alpha \cdot r^2.$$

Интегрируя, получим

$$\gamma = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\alpha r^2. \tag{45.3}$$

Единственное изменение будет состоять в подстановке этого нового значения γ в (38.8).

Произведя соответствующие изменения в вычислениях, приведших от (39.44) к (39.61), найдем уравнение орбиты:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2 - \frac{1}{3}\frac{\alpha}{h^2}\cdot u^{-3} \tag{45.4}$$

Влияние нового члена, зависящего от α, заключается в введении добавочного движения перигелия

$$\frac{\delta\bar{\omega}}{\varphi} = \frac{1}{2}\frac{\alpha h^6}{m^4} = \frac{1}{2}\frac{\alpha a^3}{m}(1-e^2)^3. \tag{45.5}$$

В месте, где $\gamma = 0$, находится непроходимый барьер, так как всякое изменение dr будет соответствовать там бесконечному расстоянию ids, которое нужно определить при помощи измерительных стержней.

Оба положительных корня кубического уравнения (45.3) приближенно равны

$$r = 2m \quad \text{и} \quad r = \sqrt{\frac{3}{\alpha}}.$$

Первый корень можно интерпретировать как границу частицы (если бы такая первичная частица могла вообще существовать), придающую ей как бы некоторую непроницаемость. Второй барьер находится на очень большом расстоянии и может быть назван *горизонтом* мира.

Ясно, что последний барьер (или иллюзия барьера) не может быть на меньшем расстоянии, чем наиболее удаленные наблюдаемые небесные тела, т. е. скажем, на расстоянии 10^{25} *см*. Отсюда для α получаем значение меньшее 10^{-50} $см^{-2}$. Подставляя это значение в (45,5), найдем, что добавочное движение перигелия будет гораздо ниже предела точности наблюдений для всех планет солнечной системы*).

Если в (45.3) положить $m = 0$, то мы этим самым уничтожим частицу в начале координат и получим решение для совершенно пустого мира

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{1}{3}\alpha \cdot r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2 + \\ + \left(1 - \frac{1}{3}\alpha \cdot r^2\right) dt^2. \qquad (45.6)$$

Мы еще остановимся подробнее на этом решении в главе V.

46. ПЕРЕХОД К НЕПРЕРЫВНОЙ МАТЕРИИ.

В ньютоновской теории сил притяжения потенциал Ω в пустом пространстве удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Omega = 0,$$

*) Это едва ли можно было утверждать всего лишь несколько лет назад, когда еще не было известно, что звезды имеются и на расстояниях, гораздо больших 1000 парсеков (парсек есть расстояние, соответствующее параллаксу в 1 сек. и равное примерно $3^1/_4$ световых лет). Горизонт, находящийся на расстоянии 700 парсеков, соответствует вековому движению перигелия земли приблизительно в 1″. Более удаленным планетам соответствуют большие перемещения, прямо пропорциональные их периодам.

элементарным решением которого будет $\Omega = \frac{m}{r}$. Отсюда при помощи хорошо известных рассуждений мы легко можем вывести для непрерывной материи уравнение

$$\Delta\Omega = -4\pi\rho. \tag{46.1}$$

Этот же принцип можно применить и к эйнштейновским потенциалам $g_{\mu\nu}$, которые в пустом пространстве удовлетворяют уравнениям $G_{\mu\nu} = 0$. Элементарное решение было уже нами найдено, и остается определить лишь видоизменение этих уравнений в случае непрерывной материи. Мы не будем здесь рассматривать логические соображения, на основании которых возможен переход от дискретных частиц к непрерывной материи, так как они совершенно одинаковы для обеих теорий.

Если пренебречь членом $\left(\frac{m}{r}\right)$, то изотропное решение (43.3) для частицы, все время находящейся в покое, принимает вид*):

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2m}{r}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2. \tag{46.15}$$

Частица может находиться и не в начале координат при том условии, если r означает расстояние от данной частицы до рассматриваемой точки.

Суммируя силовые поля некоторого числа частиц, получим

$$ds^2 = -(1 + 2\Omega)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + (1 - 2\Omega)\,dt^2, \tag{46.2}$$

где $\Omega = \sum \frac{m}{r}$, т. е. ньютоновский потенциал в рассматриваемой точке.

Неточность, получаемая вследствие пренебрежения взаимодействием силовых полей отдельных частиц, имеет такой же порядок величины, как и ошибка, совершаемая при отбрасывании члена $\frac{m^2}{r^2}$, если число частиц не слишком велико.

---

*) Необходимо заметить, что это приближение, вполне допустимое для излагаемой теперь задачи, становится совершенно неприемлемым при рассмотрении вопроса о перигелии Меркурия. В этом случае нужно было бы также сохранить член с $\left(\frac{m}{r}\right)^2$ в коэффициенте при dt^2.

Вычислим теперь $G_{\mu\nu}$ из выражения (46.2). На основании (46.2) имеем:

$$G_{\mu\nu} = g^{\sigma\rho} \cdot B_{\mu\nu\sigma\rho} =$$
$$= \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\rho \, \partial x_\sigma} + \frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x_\rho \, \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\rho\nu}}{\partial x_\mu \, \partial x_\sigma} \right) \cdot \quad (46.3)$$

Нелинейные члены в производных от $g_{\mu\nu}$ мы не выписываем, так как в них входит член Ω^2, имеющий порядок величины $\left(\frac{m}{r}\right)^2$, которой мы уже условились пренебрегать.

При суммировании останутся только те члены, в которых компоненты фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$ имеют одинаковые значки. Рассмотрим последние три члена, заключенные в скобки; для G_{11} они дадут

$$\frac{1}{2} \left(g^{11} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_1^2} + g^{22} \cdot \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_1^2} + g^{33} \cdot \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x_1^2} + \right.$$
$$\left. + g^{44} \cdot \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2} - g^{11} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_1^2} - g^{11} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_1^2} \right).$$

Подставляя значения $g^{\mu\nu}$ из (46.2), получим (пренебрегая Ω^2) нуль, тоже для G_{22} и G_{33}. Для G_{44} результат равен нулю по другой причине, а именно потому, что Ω не содержит x_4 ($= t$). Таким образом

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \cdot \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma \cdot \partial x_\rho} = \frac{1}{2} \Box g_{\mu\nu} \quad (46.4)$$

так же, как и в выражении (30.65).

Так как время сюда не входит, то [см. (46.2)]:

$$\Box = -\nabla^2 = -\Delta,$$

$$G_{11},\ G_{22},\ G_{33},\ G_{44} = -\frac{1}{2} \nabla^2 (g_{11},\ g_{22},\ g_{33},\ g_{44}) = \nabla^2 \Omega = \Delta \Omega.$$

Итак, производя в этой точке переход к непрерывной материи, найдем, применяя (46.1)

$$G_{11},\ G_{22},\ G_{33},\ G_{44} = -4\pi\rho. \quad (46.5)$$

Точно также

$$G = g^{\mu\nu} \cdot G_{\mu\nu} = -G_{11} - G_{22} - G_{33} + G_{44} = 8\pi\rho$$

в том же приближении.

Рассмотрим теперь тензор, определяемый равенством

$$-8\pi T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G. \tag{46.6}$$

Легко можно найти, что

$$T_{\mu\nu} = 0, \text{ за исключением } T_{44} = \rho, \tag{46.7}$$

а также, подымая значки,

$$T^{\mu\nu} = 0, \text{ кроме } T^{44} = \rho,$$

так как выражения $g^{\mu\nu}$ являются галилеевыми до требуемой степени приближения относительно ρ и Ω.

Рассмотрим затем выражение

$$\rho_0 \cdot \frac{dx_\mu}{ds} \cdot \frac{dx_\nu}{ds},$$

где величина $\frac{dx_\mu}{ds}$ описывает движение материи, а ρ_0 есть собственная плотность (инвариант).

По отношению к применявшимся до сих пор координатам материя находится в покое, следовательно

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{dx_2}{ds} = \frac{dx_3}{ds} = 0, \quad \frac{dx_4}{ds} = 1;$$

таким образом, все компоненты написанного выше выражения равны нулю, за исключением компоненты при $\mu = \nu = 4$, которая равна ρ_0. Соответственно, в этих координатах

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 \frac{dx_\mu}{ds} \cdot \frac{dx_\nu}{ds}, \tag{46.8}$$

так как плотность ρ (46.7) очевидно является собственной плотностью.

Но (46.8) есть тензорное уравнение*) и, будучи справедливым для одной системы координат, оно будет оставаться верным во всякой системе. При помощи (46.6) и (46.8) закон тяготения Эйнштейна можно распространить на область, содержащую непрерывную материю с собственной плотностью ρ_0 и движущуюся со скоростью $\frac{dx_\mu}{ds}$.

---

*) Каждый раз, когда утверждается, что данное уравнение является тензорным, читателю предоставляется проверить равенство ковариантных размерностей обеих частей.

Теперь остается решить вопрос, вызывает ли пренебрежение величиной m^2 какую-нибудь неточность в этих уравнениях *)? Переходя к непрерывной материи, мы беспредельно уменьшаем m для каждой частицы, но увеличиваем число частиц в данном объеме. Чтобы избежать увеличения числа частиц, можно уменьшать объем; в этом предельном случае формула (46.5) будет справедлива для точки внутри очень малой области непрерывной материи. Изменится ли что-нибудь, если мы будем прибавлять в больших количествах окружающую материю? Таким путем мы не получим новых добавок к тензору $G_{\mu\nu}$, так как, поскольку дело касается окружающей материи, точка находится в пустом пространстве. Но уравнения Эйнштейна не линейны, и мы должны поэтому рассмотреть возможные смешанные члены, возникающие в результате взаимодействия.

Для этой цели окружим рассматриваемую точку P маленькой сферой. Пусть $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}$, где величина $\delta_{\mu\nu}$ представляет собой галилеевы значения, а величины $h_{\mu\nu}$ и $h'_{\mu\nu}$ — силовые поля, обусловленные независимо материей, находящейся внутри и вне сферы. Согласно п. 36, можно всегда выбрать такие координаты, чтобы в точке P величины $h'_{\mu\nu}$ и их первые производные обращались в нуль. Кроме того, благодаря сферической симметрии первые производные от $h_{\mu\nu}$ также будут равны нулю **), а сама величина $h_{\mu\nu}$ для бесконечно малой сферы стремится к нулю. Таким образом, все смешанные члены взаимодействия ***), имеющие вид

$$h'_{\sigma\tau} \cdot \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda \cdot \partial x_\rho}, \quad \frac{\partial h'_{\sigma\tau}}{\partial x_\lambda} \cdot \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} \quad \text{и} \quad h_{\sigma\tau} \cdot \frac{\partial^2 h'_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda \, \partial x_\rho},$$

---

*) Смысл этого пренебрежения можно математически сформулировать, пожалуй, следующим образом: мы должны считать произведение массы каждой частицы m на общее число частиц, т. е. «общую массу», бесконечно малой величиной первого порядка, следовательно нам необходимо иметь «бесконечно разреженное распределение материи». Другими словами, мы определяем два первых члена в разложении ds^2 по степеням «общей массы». Ср. к понятию «общей массы» ближайшее примечание автора. (*Н.*)

**) Именно потому, что в виду сферической симметрии $h_{\mu\nu}$ их производные в нуле по двум взаимно противоположным направлениям должны быть равны друг другу, но иметь разные знаки. (*Н.*)

***) При этом подразумеваются нелинейные члены в выражении $G_{\mu\nu}$ [ср. формулу (34.5)]. (*Н.*)

в точке P будут равны нулю. Если ввести указанные ограничения, то смешанных членов взаимодействия не будет вовсе и сумма обоих решений $h_{\mu\nu}$ и $h'_{\mu\nu}$ будет также решением точных уравнений. Итак, выражения (46.5) останутся верными. Мы видим, что сделанные ограничения заключаются очевидно в том, что координаты в точке P должны быть «естественными координатами». Мы уже приняли это во внимание, взяв за собственную плотность величину ρ.

Мы предположили, что материя в точке P не ускоряется по отношению к этим естественным осям в P (первоначальные частицы должны *все время* находиться в покое, так как иначе решение (46 · 15) неприменимо). Если бы материя ускорялась, то необходимо должно было бы существовать напряжение, вызывающее это ускорение. Позже нами будет найдено, что при наличии этого напряжения в $G_{\mu\nu}$ появляются добавочные члены. Формула (46 · 5), строго говоря, приложима только в том случае, если никаких напряжений нет, и непрерывная среда характеризуется только одной переменной, а именно, плотностью.

Читатель вероятно все еще ощущает некоторое сомнение в законности этих доводов, в силу которых было сочтено возможным пренебречь величиной m^2 *). Для того чтобы он не придавал этим моментам слишком большого значения, мы сразу же отметим, что последующее изложение не будет основываться на этих рассуждениях. В следующей главе мы получим такие же формулы при помощи совершенно другого метода и перейдем тогда в обратном направлении от законов непрерывной материи к частному случаю изолированной частицы.

---

*) Чтобы осветить эту трудность, попытаемся выяснить, что представляет собой величина ρ_0 в действительности, если принять, что она не определяется уравнениями (46 · 6) и (46 · 7)? Если поля отдельных частиц не взаимодействуют друг с другом, то ρ_0 равно Σm в единице объема, но если мы примем во внимание это взаимодействие, то значение величины m, являющейся постоянной интегрирования уравнения, которое нельзя применять, остается неопределенным. Говоря математически, мы не можем сказать, во что превратилась бы величина m, если все остальные частицы были бы удалены; эта постановка вопроса не имеет смысла. Физически, без сомнения, можно было бы сказать, чему равняются массы атомов, если они отстоят значительно друг от друга, а также сравнить их с гравитационными действиями атомов при реальных условиях; но для этого пришлось бы прибегнуть к законам строения атома, что лежит совершенно вне данной книги.

Уравнение (46 · 2) является очень удобным выражением для поля тяготения, обязанного своим происхождением статистическому распределению материи. Оно верно только в первом приближении с точностью до величины порядка $\frac{m}{r}$, но второго приближения и не существует, если исключить из рассмотрения случай единственной частицы. Действительно, если в пространстве находится не одна, а несколько частиц, то они непременно будут испытывать ускорения, поэтому мы не сможем найти точного решения уравнений Эйнштейна, которое соответствовало бы некоторому числу частиц, все время находящихся в покое. Отсюда следует, что всякая связь, удерживающая частицы в покое, сама должна обладать свойством вызывать гравитационное поле.

В заключение приведем здесь значения выражения $G_{\mu\nu} - {}^1/_2 g_{\mu\nu} G$, соответствующие симметричной формуле (38.2) для интервала. Подбирая соответствующие (λ) и (ν), можно получить любое распределение непрерывной материи со сферической симметрией.

Итак, мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} G &= -e^{-\lambda}\left(\nu'' - \frac{1}{2}\lambda'\nu' + \frac{1}{2}\nu'^2 + 2\frac{\nu' - \lambda'}{r} + 2\frac{1-e^{\lambda}}{r^2}\right) \\ G_{11} - \frac{1}{2}g_{11}G &= -\frac{\nu'}{r} - \frac{1-e^{\lambda}}{r^2} \\ G_{22} - \frac{1}{2}g_{22}G &= -r^2 e^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{4}\nu'^2 + \frac{1}{2}\frac{\nu'-\lambda'}{r}\right) \\ G_{33} - \frac{1}{2}g_{33}G &= -r^2\sin^2\theta\, e^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{4}\nu'^2 + \frac{1}{2}\frac{\nu'-\lambda'}{r}\right. \\ G_{44} - \frac{1}{2}g_{44}G &= e^{\nu-\lambda}\left(-\frac{\lambda'}{r} + \frac{1-e^{-\lambda}}{r^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (46.9)$$

47. ЭКСПЕРИМЕНТ И ДЕДУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ.

Насколько мы представляем, при изложении нашей математической теории нам пришлось воспользоваться только следующими постулатами:

1. Основная гипотеза (п. 1).

2. Интервал представляет собой квадратичную функцию четырых координатных разностей (п. 2).

3. Траекторией свободно движущейся частицы при всяких обстоятельствах будет геодезическая линия (п. 15).

4. Траектория светового луча есть геодезическая линия, для которой $ds = 0$ (п. 15).

5. Закон тяготения для пустого пространства выражается уравнениями $G_{\mu\nu}=0$ или, более вероятно, $G_{\mu\nu}=\lambda g_{\mu\nu}$, где λ весьма малая постоянная (п. 57).

Постулат 4 включает в себе отождествление скорости света с фундаментальной скоростью, что первоначально было введено в виде отдельного постулата в п. 6.

Теория преследует две цели: первая заключается в отыскании способов, при помощи которых можно проверить справедливость наших постулатов, а вторая — в открытии того, как законы, выражаемые ими, вытекают из строения мира. Мы не можем пренебречь ни той, ни другой целью, и, может быть, и с логической точки зрения, лучше всего было подразделить все исследование на две части. В одной из них излагалось бы, как можно постепенно от экспериментальных данных перейти к принятому в конце концов описанию строения мира, а в другой, исходя из структуры мира, выводились бы все наблюдаемые явления. Вторая часть особенно привлекательна для математика, так как здесь доказательства могут быть сделаны вполне строгими, в то время как на каждой ступени развития первой части вводится какое-нибудь новое предположение или обобщение, которое, как бы оно ни было правдоподобно, едва ли может рассматриваться как неопровержимое. Мы в состоянии показать, что при помощи некоторой определенной структуры мира возможно объяснить все явления, но не можем доказать, что такая структура будет единственной.

Мы можем задать экспериментаторам в порядке возрастающей трудности три вопроса о наших законах. Подтверждаются ли они? Вытекают ли они из опытов? Принуждают ли опыты (в пределах определенных ограничений) к их принятию?

Ответить на последний вопрос особенно трудно, так как всегда имеются некоторые ограничения, могущие привести математика, который хочет придерживаться вполне строгих положений, в замешательство.

Например, какие заключения можно сделать о поле тяготения частицы на основании опыта (если принять остальные четыре постулата)?

Во-первых, наше предположение о том, что интервал может быть выражен при помощи выражения (38 · 2), вероятно окажется оправданным действительностью; кроме того, эксперимент показывает, что на больших расстояниях λ и ν стремятся к нулю. Если

e^{λ} и e^{ν} будут простыми функциями, то коэффициенты в выражении для ds^2 можно разложить в ряд, откуда:

$$ds^2 = -\left(1 + a_1 + \frac{a_2}{r_2} + \cdots\right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + $$
$$+ \left(1 + \;\; - + \frac{b_2}{r^2} + \frac{b_3}{r^3} + \cdots\right) dt^2.$$

Здесь отдельные члены разложения при больших r — скажем, порядка планетной орбиты — будут, по предположению, исчезать весьма быстро.

Принимая теперь во внимание п.п. 39, 41, мы можем заключить следующее:

1. Из закона тяготения Ньютона вытекает, что $b_1 = -2m$.

2. Из наблюдений над отклонением света оказывается, что $a_1 = -2m$ *).

*) Именно, если выполнить еще раз вычисления, приведенные в § 39, исходя вместо уравнения (39·43) из общего уравнения

$$e^{\lambda}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - e^{\nu}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = -1,$$

и упростить его при помощи (39·41) и (39·42), не вводя частных значений e^{λ} и e^{ν}, то получим:

$$e\; h^2\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} - c^2 e^{-\nu} = -1,$$

или, если разделить на $e^{\lambda}h^2$, полагая одновременно $u = \frac{1}{r}$, и затем подставить значения $e^{-\lambda}$, e^{ν}:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + e^{-\lambda} u^2 = \frac{c^2}{h^2} e^{-\lambda} e^{-\nu} - \frac{e^{-\lambda}}{h^2},$$

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = -(a_1 u^3 + \cdots) + \frac{c^2}{h^2}\left(1 + (a_1 - b_1)u + \cdots\right) -$$
$$- \frac{1}{h^2}(1 + a_1 u + \cdots).$$

Или, наконец, дифференцируя по φ и деля на $2\frac{du}{d\varphi}$, окончательно получим

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\left(\frac{3}{2} a_1 u^2 + \cdots\right) + \frac{c^2}{2h^2}\left((a_1 - b_1) + \cdots\right) - \frac{1}{2h^2}(a_1 + \cdots).$$

Если положить здесь для траектории светового луча $h = \infty$ и принять, что наблюдаемая траектория света правильно описывается уравнением (41·1) с точностью до членов третьего порядка от u, то получим

$$a_1 = -2m.$$

Но если, с другой стороны, предположить, что движение планеты описывается верно с точностью до членов второго порядка, то из сравнения постоянных членов следует

$$\frac{m}{h^2} = -\frac{a_1}{2h^2} + \frac{c^2}{2h^2}(a_1 - b_1); \qquad c^2(b_1 + 2m) = 0,$$

так как для планет согласно наблюдениям $c \neq 0$, то следовательно $b_1 = 2m$. (*H*).

Последние два коэффициента a_1 и b_1 не определены еще экспериментально сколько-нибудь точно, а о коэффициентах высших порядков вообще нет никаких опытных данных. Если эти коэффициенты высших порядков равны нулю, то можно вывести, что поле удовлетворяет уравнениям $G_{\mu\nu}=0$.

Если ввести некоторые допущения, то основания для существования закона $G_{\mu\nu}=0$ будут еще более усилены. Так, если для описания поля необходима только одна постоянная m, размерности длины, то b_3 должно содержать m^3, и соответствующий член, имеющий порядок величины $\left(\frac{m}{r}\right)^3$, будет очень малым. Какими бы ни были коэффициенты высших порядков, $G_{\mu\nu}$ будет тогда равно нулю с очень большой степенью точности.

Обращаясь теперь к другой половине нашего исследования, мы должны изложить, каким образом эти 5 законов вытекают из структуры мира. В следующей главе мы, главным образом, будем иметь дело с постулатами (3) и (5), которые не являются независимыми друг от друга. Они будут заменены более общим постулатом, содержащим в себе оба предыдущих и имеющим более аксиоматичный характер. Возникновение 4-го постулата мы проследим в электромагнитной теории в главе VI. Наконец, в последней главе будет предпринята попытка синтезировать их с постулатами 1 и 2.

Следующие ниже указания дадут возможность читателю лучше проследить, что произойдет с этими постулатами при дальнейшем развитии теории в направлении к более основным представлениям.

Постулаты 1 и 2 не рассматриваются более до п. 97. Постулат 3 будет получен непосредственно из закона тяготения в п. 56.

Постулат 4 выводится из электромагнитных уравнений в п. 74. Происхождение же этих уравнений описано в п. 96.

Постулат 5 получается из принципа отождествления в п. 54 и полнее из принципа измерений в п. 66. Возможность законов другого рода рассматривается в п. 62.

В последнем столетии идеальное объяснение явлений природы состояло в построении механической модели, которая бы действовала так, как это указывается опытом. Какова бы ни была практическая ценность подобной модели, в настоящее время никто не считает что при помощи какой-нибудь из них можно было бы получить окончательное объяснение явлений природы. Немного позже пришли к заключению, что при наиболее далеко идущем анализе явлений мы в конце концов придем к некоторой совокупности дифференциальных уравнений, дальнейшее объяснение которых будет уже невозможно. Мы сможем затем проследить modus operandi (т. е. способ действия) с ними; по отношению к последним причинам можно только сказать, что «явления происходят так, а не иначе, потому, что мир построен именно таким образом». Но в кинетической теории газов и в термодинамике имеются законы, которые могут быть объяснены гораздо более удовлетворительно. Основные законы теории газов справедливы не потому, что газ сделан «именно таким образом», а потому что он вообще как-то сделан. Может быть, это нельзя понимать совершенно буквально, но если бы мы смогли обнаружить, что законы Максвелла и закон гравитации были бы столь неизбежны, как и законы теории газов, мы достигли бы гораздо более полного объяснения, чем при помощи произвольного, в конце концов, дифференциального уравнения. Это вызывает стремление к идеалу, заключающемуся не в доказательстве того, что законы природы вытекают из некоторой специальной структуры последней основы всех вещей, но в доказательстве, что эти же самые законы должны оставаться в силе при самых различных строениях этой основы. В полном виде этот идеал вероятно недостижим и, во всяком случае, еще не достигнут. Тем не менее, он будет влиять на наши рассуждения, и нам кажется, что в этом направлении возможен значительный успех.

Глава IV.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА.

48. АНТИСИММЕТРИЧНЫЙ ТЕНЗОР ЧЕТВЕРТОГО РАНГА.

Тензор $A_{\mu\nu}$ называется антисимметричным, если

$$A_{\nu\mu} = -A_{\mu\nu};$$

отсюда следует, что $A_{11} = -A_{11}$ и т. д., так что A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44} должны равняться нулю.

Рассмотрим тензор четвертого ранга $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$, антисимметричный относительно любой пары значков *). Все составляющие с двумя одинаковыми значками должны равняться нулю, так как по определению антисимметрии имеем, например, $E^{\alpha\beta 11} = -E^{\alpha\beta 11}$. В остальных составляющих все значки α, β, γ, δ должны отличаться друг от друга и, следовательно, составлять произвольную перестановку чисел 1, 2, 3, 4. От каждой из этих составляющих мы можем путем ряда транспозиций перейти к E^{1234}, причем каждая транспозиция изменяет только знак. Если мы обозначим для краткости

---

*) Чтобы построить такой тензор, очевидно, достаточно найти для какой-либо координатной системы (x_1, x_2, x_3, x_4) совокупность чисел $e^{\alpha\beta\gamma\delta}$, обладающих свойством антисимметрии относительно любой пары значков. Определенный этим тензор $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$ будет таким, что система чисел $e'^{\alpha\beta\gamma\delta}$ будет обладать свойством антисимметрии относительно любой пары значков *в каждой* координатной системе (x_1', x_2', x_3', x_4'). Действительно, мы имеем:

$$e'^{\alpha\beta\gamma\delta} = e^{\mu\nu\rho\sigma} \cdot \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\gamma'}{\partial x_\rho} \frac{\partial x_\delta'}{\partial x_\sigma};$$

если переставить здесь значки α и β и одновременно с этим немые значки μ, ν, то получим:

$$e'^{\beta\alpha\gamma\delta} = e^{\nu\mu\rho\sigma} \cdot \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\gamma'}{\partial x_\rho} \frac{\partial x_\delta'}{\partial x_\sigma} = -e^{\mu\nu\rho\sigma} \cdot \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\gamma'}{\partial x_\rho} \frac{\partial x_\delta'}{\partial x_\sigma} = -e'^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

(*Н.*)

E^{1234} через E, то каждая из 256 компонент нашего тензора должна иметь одно из значений

$$+E,\ 0,\ -E.$$

Поэтому мы положим

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta} = E \cdot \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{48.1}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \ \ 0$, если не все значки отличны друг от друга;

$= +1$, если можно расположить значки в порядке 1, 2, 3, 4 посредством четного числа транспозиций;

$= -1$, если для этого необходимо нечетное число транспозиций.

Позднее выяснится, что E не есть инвариант и, следовательно, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ не есть тензор.

Величины $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ особенно полезны, когда мы имеем дело с детерминантами.

Если $|k_{\mu\nu}|$ означает детерминант, образованный из элементов $k_{\mu\nu}$, которые могут и не представлять собою тензора, то

$$4!\,|k_{\mu\nu}| = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\varepsilon_{\varepsilon\zeta\eta\theta}\,k_{\alpha\varepsilon}\,k_{\beta\zeta}\,k_{\gamma\eta}\,k_{\delta\theta}, \tag{48.2}$$

так как мы ведь получаем отдельные члены детерминанта, выбирая четыре элемента по одному из каждой строки (так что α, β, γ, δ все отличны друг от друга) и из каждого столбца (так что ε, ζ, η, θ все отличны друг от друга) и приписывая произведению знак $+$ или $-$, смотря по тому, можно ли порядок номеров столбцов перевести в порядок номеров строк посредством четного или нечетного числа транспозиций. Множитель $4!$ необходим по той причине, что при суммировании справа появляется отдельно каждая возможная перестановка *тех же самых* четырех элементов.

С помощью соответствующих формул можно определить и изучить таким же образом детерминанты третьего порядка (из 64 элементов расположенных в кубе) или детерминанты четвертого порядка.

Заметим еще, что

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = 4! \tag{48.31}$$

Чаще всего нам придется иметь дело с фундаментальным детерминантом g и с функциональным детерминантом преобразования J, который, как известно, можно символически представить в виде

$$J = \frac{\partial(x_1', x_2', x_3', x_4')}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}.$$

На основании (48.2) можно написать

$$4!\,g = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\varepsilon\zeta\eta\theta}\, g_{\alpha\varepsilon} g_{\beta\zeta} g_{\gamma\eta} g_{\delta\theta} \tag{48.32}$$

и

$$4!\,J = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\varepsilon\zeta\eta\theta}\,\frac{\partial x_\varepsilon'}{\partial x_\alpha}\,\frac{\partial x_\zeta'}{\partial x_\beta}\,\frac{\partial x_\eta'}{\partial x_\gamma}\,\frac{\partial x_\theta'}{\partial x_\delta}. \tag{48.33}$$

Чтобы иллюстрировать применение наших символов, докажем, что *)

$$g = J^2 g'.$$

Из (48.32) и (48.33) следует

$$\left.\begin{aligned}(4!)^3 J^2 g' = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\varepsilon\zeta\eta\theta}\, g'_{\alpha\varepsilon} g'_{\beta\zeta} g'_{\gamma\eta} g'_{\delta\theta}\times\\ \times\,\varepsilon_{\iota\varkappa\lambda\mu}\varepsilon_{\nu\xi o\bar\omega}\,\frac{\partial x_\nu'}{\partial x_\iota'}\,\frac{\partial x_\xi'}{\partial x_\varkappa}\,\frac{\partial x_o'}{\partial x_\lambda}\,\frac{\partial x_{\bar\omega}'}{\partial x_\mu}\times\\ \times\,\varepsilon_{\rho\sigma\tau\upsilon}\varepsilon_{\varphi\chi\psi\omega}\cdot\frac{\partial x_\varphi'}{\partial x_\rho}\,\frac{\partial x_\chi'}{\partial x_\varkappa}\,\frac{\partial x_\psi'}{\partial x_\tau}\,\frac{\partial x_\omega'}{\partial x_\upsilon}\end{aligned}\right\} \tag{48.41}$$

Правая сторона этого равенства представляет собой выражение, состоящее примерно из 280 биллионов членов, и мы подвергнем сейчас некоторой перестановке те из них, которые отличны от нуля.

В этих отличных от нуля членах буквы ν, ξ, o, $\bar\omega$ означают те же самые значки, что и α, β, γ, δ, только расположенные (вообще говоря) в другом порядке. Переставим четыре множителя, имеющие эти значки так, чтобы они оказались расположенными в том же порядке; при этом значки в знаменателях расположатся в каком-то другом порядке, и мы обозначим их через i, k, l, m. Таким образом мы получим:

$$\frac{\partial x_\nu'}{\partial x_\iota}\,\frac{\partial x_\xi'}{\partial x_\varkappa}\,\frac{\partial x_o'}{\partial x_\lambda}\,\frac{\partial x_{\bar\omega}'}{\partial x_\mu} = \frac{\partial x_o'}{\partial x_i}\,\frac{\partial x_\beta'}{\partial x_k}\,\frac{\partial x_\gamma'}{\partial x_l}\,\frac{\partial x_\delta'}{\partial x_m}. \tag{48.42}$$

Так как число транспозиций в знаменателях и числителях одинаково, то

$$\frac{\varepsilon_{\nu\xi o\bar\omega}}{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}} = \pm 1 = \frac{\varepsilon_{\iota\varkappa\lambda\mu}}{\varepsilon_{iklm}}, \tag{48.43}$$

так что результат перестановки имеет вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\iota\varkappa\lambda\mu}\,\frac{\partial x_\nu'}{\partial x_\iota}\,\frac{\partial x_\xi'}{\partial x_\varkappa}\,\frac{\partial x_o'}{\partial x_\lambda}\,\frac{\partial x_{\bar\omega}'}{\partial x_\mu} =\\ = \varepsilon_{\nu\xi o\bar\omega}\varepsilon_{iklm}\,\frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_i}\,\frac{\partial x_\beta'}{\partial x_k}\,\frac{\partial x_\gamma'}{\partial x_l}\,\frac{\partial x_\delta'}{\partial x_m}.\end{aligned} \tag{48.5}$$

*) Более короткое доказательство будет дано в конце этого параграфа.

После аналогичной перестановки последних четырех множителей мы получаем вместо (48.41):

$$(4!)^3 J^2 g' g = g'_{\alpha\varepsilon} g'_{\beta\zeta} g'_{\gamma\eta} g'_{\delta\theta} \cdot \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_i} \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_k} \frac{\partial x_\gamma'}{\partial x_l} \frac{\partial x_\delta'}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_\varepsilon'}{\partial x_r} \frac{\partial x_\zeta'}{\partial x_s} \frac{\partial x_\eta'}{\partial x_t} \frac{\partial x_\theta'}{\partial x_u} \times$$

$$\times \varepsilon_{iklm} \cdot \varepsilon_{\nu\xi o\varpi} \cdot \varepsilon_{\nu\xi o\varpi} \cdot \varepsilon_{rstu} \cdot \varepsilon_{\varphi\chi\psi\omega} \cdot \varepsilon_{\varphi\chi\psi\omega}.$$

Но согласно (23.22)

$$g'_{\alpha\varepsilon} \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_i} \frac{\partial x_\varepsilon'}{\partial x_r} = g_{ir},$$

следовательно

$$(4!)^3 J^2 g' = (4!)^2 \varepsilon_{iklm} \varepsilon_{rstu} g_{ir} g_{ks} g_{lt} g_{mu} = (4!)^3 g,$$

что и доказывает наше утверждение.

Возвратимся теперь к $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$; закон преобразования этого выражения гласит

$$E'^{\mu\nu\sigma\tau} = E^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial x_\mu'}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\nu'}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\sigma'}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x_\tau'}{\partial x_\delta}.$$

Если помножить это на $\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}$ и принять в расчет (48.1), то получим:

$$E' \cdot \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} = E \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \frac{\partial x_\mu'}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\nu'}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\sigma'}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x_\tau'}{\partial x_\delta},$$

так что согласно (48.31) и (48.33)

$$E' = JE. \tag{48.6}$$

Следовательно, E не инвариантно относительно преобразования координат.

Далее ясно, что

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta} E^{\varepsilon\zeta\eta\theta} g_{\alpha\varepsilon} g_{\beta\zeta} g_{\gamma\eta} g_{\delta\theta}$$

представляет собой инвариант. Но это выражение равно:

$$E^2 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\varepsilon\zeta\eta\theta} g_{\alpha\varepsilon} g_{\beta\zeta} g_{\gamma\eta} g_{\delta\theta} = 4!\, E^2 g.$$

Следовательно

$$E^2 g \text{ есть инвариант.} \tag{48.65}$$

Соответственно этому, в силу (48.6)

$$E^2 g = E'^2 g' = (EJ)^2 g',$$

что и дает второе доказательство соотношения

$$g = J^2 g'.$$

Следствие. Если a есть детерминант, образованный из компонент $a_{\mu\nu}$ какого-либо ковариантного тензора, то $E^2 a$ есть инвариант и имеет место соотношение

$$a = J^2 a'. \tag{48.8}$$

49. ЭЛЕМЕНТ ОБЪЕМА. ТЕНЗОРНАЯ ПЛОТНОСТЬ. ТЕНЗОРНЫЙ ОБЪЕМ.

Мы нашли в п. 32, что элемент площади, соответствующий параллелограмму, образованному двумя перемещениями $\delta_1 x_\mu$, $\delta_2 x_\mu$, представляет собой антисимметричный тензор

$$dS^{\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_1 x_\mu & \delta_1 x_\nu \\ \delta_2 x_\mu & \delta_2 x_\nu \end{vmatrix}.$$

Таким же точно образом мы определим (четырехмерный) элемент объема, соответствующий четырехмерному параллелепипеду, образованному четырьмя смещениями $\delta_1 x_\mu$, $\delta_2 x_\mu$, $\delta_3 x_\mu$, $\delta_4 x_\mu$, как тензор

$$dV^{\mu\nu\sigma\tau} = \begin{vmatrix} \delta_1 x_\mu & \delta_1 x_\nu & \delta_1 x_\sigma & \delta_1 x_\tau \\ \delta_2 x_\mu & \delta_2 x_\nu & \delta_2 x_\sigma & \delta_2 x_\tau \\ \delta_3 x_\mu & \delta_3 x_\nu & \delta_3 x_\sigma & \delta_3 x_\tau \\ \delta_4 x_\mu & \delta_4 x_\nu & \delta_4 x_\sigma & \delta_4 x_\tau \end{vmatrix}. \tag{49.1}$$

Мы видим, что этот детерминант представляет собой антисимметричный тензор четвертого ранга и, следовательно, его 256 составляющих могут иметь только одно из трех значений

$$+dV, \ 0, \ -dV,$$

где $dV = \pm dV^{1234}$. Из (48.65) следует, что $(dV)^2 g$ есть инвариант, следовательно

$$\sqrt{-g} \cdot dV \text{ есть также инвариант.} \tag{49.2}$$

Так как знак dV^{1234} зависит от определенного порядка перечисления углов параллелепипеда, который, вообще говоря, совершенно несуществен, то для представления объемного элемента обычно используется только положительная величина dV. Суммируя по бесконечно малым элементам объема, мы приходим к утверждению, что выражение

$$\int\int\int\int \sqrt{-g}\, dV \tag{49.3}$$

есть инвариант, если интеграл взят по какой-либо области, определенной независимо от координатной системы.

Если четырехкратный интеграл рассматривать как предел суммы, то можно выбрать бесконечно малые параллелепипеды, произвольной формы и ориентации; однако, для аналитического интегрирования мы выберем параллелепипеды так, чтобы они совпадали с клетками положенной в основу координатной сетки, т. е. возьмем

$$\delta_1 x_\mu = (dx_1,\ 0,\ 0,\ 0), \quad \delta_2 x_\mu = (0,\ dx_2,\ 0,\ 0) \text{ и т. д.}$$

Тогда (49.1) сводится к диагональному члену

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

Выраженный таким образом элемент объема мы обозначим через $d\tau$, так что

$$d\tau \equiv dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

Обычно нет необходимости проводить различие между $d\tau$ и более общим выражением dV, и мы будем считать $\sqrt{-g}\,d\tau$ инвариантом. Строго говоря, мы подразумеваем при этом, что $\sqrt{-g}\,d\tau$ ведет себя как инвариант при интегрировании по объему, тогда как $\sqrt{-g}\,dV$ представляет собой истинный инвариант *).

В случае галилеевых кординат x, y, z, t величина $\sqrt{-g} = 1$, так что

$$\sqrt{-g}\,d\tau = dx\,dy\,dz\,dt. \tag{49.41}$$

Если мы представим себе затем в этой галилеевой системе покоящегося наблюдателя, то для него $dx\,dy\,dz$ представляет собой элемент (трехмерного) собственного объема dW, а dt — элемент собственного времени ds. Поэтому

$$\sqrt{-g}\,d\tau = dW\,ds. \tag{49.42}$$

Из формулы (49.41) мы видим, что $\sqrt{-g}\,d\tau$ представляет собой объем четырехмерного элемента в естественных мерах. Этот естественный или инвариантный объем есть *физическое* понятие — результат физических измерений, произведенных с помощью приборов, которые не зависят от координатной системы; ему можно противопоставить *геометрический* объем dV или $d\tau$,

*) Действительно, если перейти от координат $(x_1, \ldots, x_4)$ к координатам $(x_1', \ldots, x_4')$, то $d\tau = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ преобразуется в

$$\left(\sum_1^4 \frac{\partial x_1}{\partial x_i'} dx_i'\right)\left(\sum_1^4 \frac{\partial x_2}{\partial x_i'} dx_i'\right)\left(\sum_1^4 \frac{\partial x_3}{\partial x_i'} dx_i'\right)\left(\sum_1^4 \frac{\partial x_4}{\partial x_i'} dx_i'\right),$$

но не в выражение

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_4)}{\partial(x_1', \ldots, x_4')} dx_1', \ldots, dx_4'. \tag{II.}$$

выражающий число единичных клеток, находящихся в данной области.

Если T есть скаляр, т. е. инвариантная функция координат, то $T\sqrt{-g}\,dV$ инвариантно, следовательно и интеграл

$$\int T\sqrt{-g}\,d\tau,$$

взятый по любой определенной абсолютно четырехмерной области, также инвариантен. Каждая единичная клетка (стороны которой dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 равны единице) привносит к этому инварианту долю $T\sqrt{-g}$. На этом основании мы называем $T\sqrt{-g}$ *скалярной**) или *инвариантной плотностью* (точнее *плотностью инварианта*).

Аналогичный результат получается в случае тензоров. Интеграл

$$\int T^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d\tau,$$

взятый по абсолютно определенной области, не есть тензор; действительно, хотя он представляет собой сумму тензоров, эти тензоры относятся не к одной и той же точке, и поэтому не могут складываться друг с другом (п. 33). Однако, в пределе, когда область становится бесконечно малой, закон преобразования интеграла приближается все больше и больше к закону преобразования простого тензора. Поэтому величина $T^{\mu\nu}\sqrt{-g}$ есть *тензорная плотность* (точнее *плотность тензора*), представляющая собой количество выражаемой этим тензором величины, приходящееся на единичную клетку бесконечно малой области вблизи рассматриваемой точки.

Тензорная плотность, соответствующая какому-либо тензору, будет обозначаться соответствующей жирной буквой; например

$$\mathbf{T}^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu}\sqrt{-g}; \quad \mathbf{T} \equiv T\sqrt{-g}. \tag{49.5}$$

Согласно (48.1):

$$\mathbf{E}^{\alpha\beta\gamma\delta} = E^{\alpha\beta\gamma\delta}\sqrt{-g} = E\sqrt{-g}\cdot\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

---

*) Обычно я избегал излишнего слова „скаляр“, менее выразительного, чем его синоним „инвариант“. Однако, здесь это слово рекомендуется применять для того, чтобы лучше избежать смешения двух величин — плотности некоторого *инварианта* и плотности, *которая сама является инвариантом*. Последняя, именно ρ_0, до сих пор называлась инвариантной плотностью, и ее нужно отличать от введенной здесь плотности $T\sqrt{-g}$, или плотности инварианта.

и так как $E\sqrt{-g}$ есть инвариант, то отсюда следует, что $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ представляет собой тензорную плотность.

Совокупность физических величин можно разделить на две главные категории, которые можно характеризовать как *интенсивности* и *количества*. Так например:

поле ускорения = *интенсивности* определенного соотношения в некоторой точке;

количество движения = *количеству* чего-либо в некотором объеме.

Величины второго рода, естественно, выражаются словами „столько-то на единичную клетку". Поэтому *интенсивность* естественно представляется в виде тензора, а *количество* в виде тензорной плотности. Мы увидим дальше, что $\sqrt{-g}$ постоянно будет входить в наши формулы; это указывает на то, что физические величины, с которыми мы имеем дело, являются скорее тензорными плотностями, чем тензорами. В общей теории тензорные плотности по меньшей мере столь же важны, как и тензоры.

Мы можем говорить о количестве движения в большом объеме только в том случае, когда установлена определенная система координат. Полное количество движения равно сумме количеств движения в различных элементах объема. При преобразовании координат коэффициенты преобразования различны для каждого элемента. Единственный случай, когда мы можем установить количество некоторой величины в большой области независимо от координатной системы, — это случай инварианта; так, например, величина „действия" в конечной области не зависит от координат. Короче говоря, тензорный анализ (исключая вырожденный случай инвариантов) изучает вещи, локализованные в определенной точке, а не распределенные в большой области; поэтому нам обычно приходится применять плотности вместо количеств.

Физическую величину второго рода можно выразить также словами „столько-то на единицу естественного объема ($\sqrt{-g}\,d\tau$)"; в таком случае она будет представлена в виде тензора. В физическом отношении может быть столь же целесообразно выражать ее в этой форме, как и в форме тензорной плотности, т. е. словами „столько-то на единичную клетку ($d\tau$)". Однако, в аналитическом отношении последнее было бы несколько непоследовательно, так как при этом нам пришлось бы одновременно ввести две координатные системы: одну явно, для выражения соответствующей физической величины, а другую (естественную систему) неявно для измерения объема, содержащего эту величину. Представление величин второго рода посредством тензоров нельзя считать физически неправильным; однако, постоянное появление $\sqrt{-g}$ в формулах обнаруживает нашу бессознательную ссылку на естественный объем $\sqrt{-g}\,d\tau$.

В любом пространстве-времени можно выбрать координаты таким образом, чтобы $\sqrt{-g}$ было везде равно 1; действительно, если произвольным образом построить три системы координатных поверхностей, то всегда можно расположить четвертую так, чтобы все клетки имели одинаковый естественный объем. В таких координатных системах тензоры и тензорные плотности эквивалентны, и поэтому вычисления упрощаются; но, хотя это ограничение не ведет к уменьшению общности, оно может затемнить более глубокий смысл теории и поэтому, вообще говоря, введение его нежелательно.

В заключение, имея в виду дальнейшие исследования, мы введем еще одно понятие.

Если разделить тензор на $\sqrt{-g}$, то получится величина, которую мы назовем *тензорным объемом*, точнее *объемом тензора*. Мы будем обозначать тензорные объемы особым шрифтом рондо, так что например:

$$\mathbf{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}\sqrt{-g}, \quad \mathscr{T}^{\mu\nu} = \frac{T^{\mu\nu}}{\sqrt{-g}}. \tag{49.6}$$

Очевидно, что $\mathbf{T}^{\mu\nu}\mathscr{T}^{\mu\nu}$ есть инвариант, так что действия рондо и жирного шрифта взаимно уничтожаются.

Согласно (49.2) dV есть скалярный объем и, следовательно, его нужно было бы обозначить через $d\mathscr{V}$.

Созокупность чисел $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ представляет собой одновременно контравариантную тензорную плотность и ковариантный тензорный объем *).

---

*) Действительно, из (48.65) следует, что

$$\frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}}{\sqrt{-g}} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

где правая сторона есть контравариантный тензор. Если перенести значки вниз, то получим:

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\sigma}g_{\lambda\alpha}g_{\mu\beta}g_{\nu\gamma}g_{\sigma\delta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}g\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\sqrt{-g}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

(*Н.*)

Поэтому мы можем положить

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathfrak{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathrm{E}^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{49.7}$$

Произведение $\mathfrak{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{E}^{\alpha\beta\gamma\delta}$, очевидно, должно быть инвариантным. В действительности это и имеет место, так как в силу (48.31) это произведение имеет постоянное значение $4!$

С помощью этих коэффициентов можно каждому антисимметричному тензору сопоставить ковариантный тензорный объем. Это обстоятельство особенно важно в применении к одно-, двух-, трех- и четырехмерным элементам пространства, которые ведь (кроме одномерного случая) и представляют собою антисимметричные контравариантные тензоры. Так например, четырехмерный элемент объема может быть задан либо посредством тензора $dV^{\alpha\beta\gamma\delta}$, либо посредством скалярного объема $d\mathfrak{V}$, причем эти величины связаны друг с другом соотношением

$$4!\,d\mathfrak{V} = \mathfrak{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}dV^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Подобно этому элемент поверхности может быть представлен либо в виде $dS^{\alpha\beta}$, либо в виде $d\mathfrak{S}'_{\alpha\beta}$, причем

$$d\mathfrak{S}'_{\alpha\beta} = \mathfrak{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}\,dS^{\gamma\delta}. \tag{49.8}$$

Необходимо отметить, что штрих при $\mathfrak{S}'_{\alpha\beta}$ совершенно необходим; так как результатом операции (49.8) не будет $d\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$, т. е. величина, которая, согласно нашим прежним определениям получается из $dS^{\alpha\beta}$, если опустить оба значка вниз и разделить на $\sqrt{-g}$.

В элементарной (трехмерной) теории этим путем получается выражение элемента поверхности посредством сопоставленного ей вектора. Если положить

$$d\mathfrak{S}_{\alpha}' = \mathfrak{E}_{\alpha\beta\gamma}\,dS^{\beta\gamma},$$

то векторный объем $d\mathfrak{S}_{\alpha}'$ может служить мерой элемента поверхности. Однако элементарная теория (ограничивающаяся прямоугольными координатами) не различает векторов от векторных объемов.

Из ковариантного антисимметричного тензора $F_{\alpha\beta}$ можно образовать две различные тензорные плотности: $\mathrm{F}^{\alpha\beta}$ и $\mathrm{F}'^{\alpha\beta}$, именно:

$$\mathrm{F}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}F_{\gamma\delta}\sqrt{-g}, \qquad \mathrm{F}'^{\alpha\beta} = \mathrm{E}^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}, \tag{49.81}$$

причем последняя получается из $F_{\alpha\beta}$ простой перестановкой компонент.

В качестве примера докажем, что

$$|\mathfrak{g}^{\mu\nu}| = |\mathfrak{g}_{\mu\nu}|.$$

Действительно, это уравнение эквивалентно следующему

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\mathcal{E}_{\xi\zeta\eta\theta}\,\mathfrak{g}^{\alpha\epsilon}\,\mathfrak{g}^{\beta\zeta}\,\mathfrak{g}^{\gamma\eta}\,\mathfrak{g}^{\delta\theta} = \mathrm{E}^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\mathrm{E}^{\epsilon\zeta\eta\theta}\,g_{\alpha\epsilon}\,g_{\beta\zeta}\,g_{\gamma\eta}\,g_{\delta\theta}.$$

Здесь обе стороны представляют собой квадрат скалярной плотности и поэтому преобразуются по одинаковому закону. В естественных координатах оба детерминанта тождественны; следовательно, их значения совпадают во всех координатных системах.

50. ПРОБЛЕМА ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

Займемся теперь одной проблемой, имеющей некоторый исторический интерес.

Будем вращать с угловой скоростью ω абсолютно твердый круговой диск из однородного несжимаемого материала и выясним изменение длины его радиуса.

Нас теперь уже не должен смущать старый парадокс, связанный с этой проблемой и заключающийся в том, что окружность, движущаяся со скоростью, касательной к ней в каждой точке, должна укорачиваться, тогда как радиус, перемещающийся в направлении, перпендикулярном к его собственному, не должен измениться. В этом случае (как подробно выяснено например в книге «Пространство, время, тяготение», стр. 76) частная теория относительности как раз становится неприменимой в связи с наличием сильно меняющихся ускорений. Общая же теория относительности дает количественное решение этой проблемы, которое впервые было получено Лоренцом*) с помощью метода, отличного от применяемого здесь.

Сначала нужно выяснить, что мы понимаем под словом «несжимаемый». Если изолировать элемент вращающегося диска и отнести его к осям, по отношению к которым он не имеет ни скорости, ни ускорения (собственная мера), то этот элемент будет находиться в таком же состоянии, как и элемент покоящегося диска, отнесенный к неподвижным осям, с той только разницей, что наш изолированный элемент подвергается давлению, связанному с силами сцепления окружающего вещества. В таком случае слово *несжимаемый* означает, что никакое распределение давления не мо-

*) Nature, 106, 795.

жет вызвать изменения плотности расположения молекул; поэтому эта плотность σ (выраженная в собственной мере — ср. п. 14) будет такой же, как и для элемента не вращающегося диска; наоборот, плотность σ', отнесенная к неподвижным в пространстве координатным осям, вполне может отличаться от нее.

На основании (14.1) мы можем положить

$$\sigma' = \sigma(1 - \omega^2 r^2)^{-\frac{1}{2}},$$

так как ведь ωr есть скорость элемента. Это, действительно, даст правильный результат. Однако, в п. 14 ускорение не было принято во внимание, и нам нужно действовать более строго. Примем за вращающуюся систему штрихование координаты п. 15, тогда с помощью (15.4) легко найдем, что

$$\sqrt{-g'} = 1;$$

так как x_1', x_2', x_3' постоянны для элемента диска, то собственное время равняется

$$ds = \sqrt{1 - \omega^2(x_1'^2 + x_2'^2)}\, dx_4'.$$

Если dW есть собственный объем элемента, то из (49.42) получаем

$$dW ds = \sqrt{-g'}\, dx_1'\, dx_2'\, dx_3'\, dx_4'.$$

Следовательно

$$dW = [1 - \omega^2(x_1'^2 + x_1'^2)]^{-\frac{1}{2}} dx_1'\, dx_2'\, dx_3' =$$
$$= (1 - \omega^2 r'^2)^{-\frac{1}{2}} r'\, dr'\, d\theta'\, dx_3'.$$

Если толщина диска $\delta x_3' = b$, а его край определяется условием $r' = a'$, то полное число частиц в диске равно

$$N = \int \sigma\, dW = 2\pi\sigma b \int_0^{a'} (1 - \omega^2 r'^2)^{-\frac{1}{2}} r'\, dr'.$$

Так как это число не изменяется при вращении, то a' должно быть такой функцией от ω, чтобы

$$\int_0^{a'} (1 - \omega^2 r'^2)^{-\frac{1}{2}} r' dr' = \text{const},$$

или

$$\frac{1}{\omega^2}\left(1 - \sqrt{1 - \omega^2 a'^2}\right) = \text{const}.$$

Разлагая квадратный корень в ряд, получаем приближенно

$$\frac{1}{2} a'^2 \left(1 + \frac{1}{4} \omega^2 a'^2\right) = \text{const},$$

так что, если a — радиус диска в состоянии покоя, то между a и a' имеет место соотношение

$$a' \left(1 + \frac{1}{8} \omega^2 a'^2\right) = a.$$

Отсюда следует с той же точностью

$$a' = a \left(1 - \frac{1}{8} \omega^2 a^2\right).$$

Отметим, что a' есть радиус вращающегося диска, измеренный неподвижными масштабами, так как вращающиеся и неподвижные координаты связаны друг с другом элементарным преобразованием (15.3).

Мы видим, следовательно, что действительное сокращение представляет собой четверть того, которое мы получили бы при непосредственном применении формулы Фицджеральда к окружности диска.

В приведенном доказательстве мы предполагали, что толщина b диска при вращении остается неизменной. Правильность этого предположения следует из общего принципа, уже примененного выше, согласно которому элемент вращающегося диска, отнесенный к собственной системе координат, в точности равен соответствующему элементу невращающегося диска, отнесенному к обычным прямоугольным координатам, так как напряжения, возникающие при вращении, не могут вследствие абсолютной несжимаемости и твердости повлиять на расположение молекул, которое в собственных координатах будет одинаковым во вращающихся и в невращающихся элементах диска; следовательно, какое-либо различие между вращающимся и невращающимся элементом должно быть различием в *описании*, но не во внутренней структуре. Так как при преобразовании к собственной мере координата z вообще не преобразуется, то и толщина b диска, т. е. длина цепочки молекул от нижней до верхней поверхности, остается неизменной.

51. РАСХОДИМОСТЬ ТЕНЗОРА

В элементарном векторном анализе важную роль играет расходимость

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z},$$

которую можно в известной мере истолковать геометрически. В нашем общем обозначении это выражение принимает вид

$$\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\mu}}.$$

Очевидно, что мы получим более основную операцию, если вместо обычной производной возьмем ковариантную; это приведет нас к инварианту

$$(A^{\mu})_{\mu}.$$

Поэтому мы определим *расходимость* тензора, как его сокращенную ковариантную производную.

Из (29.4) мы получим, принимая во внимание (35.4),

$$(A^{\mu})_{\mu}=\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\mu}}+\{\varepsilon\mu,\ \mu\}A^{\varepsilon}=\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\mu}}+A^{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_{\varepsilon}}\sqrt{-g}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}(A^{\mu}\sqrt{-g}), \tag{51.11}$$

так как ε можно заменить на μ. С помощью тензорных плотностей это можно записать так:

$$A^{\mu}_{\mu}\sqrt{-g}=\mathrm{A}^{\mu}_{\mu}=\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\mathrm{A}^{\mu}. \tag{51.12}$$

Расходимость тензора A^{ν}_{μ} на основании (30.2) после аналогичных преобразований примет вид

$$(A^{\nu}_{\mu})_{\nu}=\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}A^{\nu}_{\mu}+\{\alpha\nu,\ \nu\}A^{\alpha}_{\mu}-\{\mu\nu,\ \alpha\}A^{\nu}_{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}(A^{\nu}_{\mu}\sqrt{-g})-$$
$$-\{\mu\nu,\ \alpha\}A^{\nu}_{\alpha}. \tag{51.2}$$

Здесь последний член равен

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}}\right)A^{\beta\nu}.$$

Если $A^{\beta\nu}$ есть симметричный тензор, то, переставляя значки β и ν, мы убедимся, что два члена в скобках уничтожаются взаимно, и остается $-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x_\mu}A^{\beta\nu}$.

Отсюда получаем *для симметричных тензоров*

$$(A^\nu_\mu)_\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(A^\nu_\mu\sqrt{-g}) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}A^{\alpha\beta}, \tag{51.31}$$

или по (35.2)

$$(A^\nu_\mu)_\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(A^\nu_\mu\sqrt{-g}) + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}A_{\alpha\beta}. \tag{51.32}$$

В случае *антисимметричных тензоров*, напротив, удобнее употреблять компоненты с верхними значками

$$(A^{\mu\nu})_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}A^{\mu\nu} + \{\alpha\nu, \nu\}A^{\mu\alpha} + \{\alpha\nu, \mu\}A^{\alpha\nu}. \tag{51.41}$$

Последний член в силу антисимметрии равен нулю. Следовательно,

$$(A^{\mu\nu})_\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(A^{\mu\nu}\sqrt{-g}). \tag{51.42}$$

Если ввести тензорные плотности, то наши результаты принимают следующий вид:

для симметричных тензоров

$$\mathrm{A}^\nu_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\mathrm{A}^\nu_\mu - \frac{1}{2}\mathrm{A}^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}; \tag{51.51}$$

для антисимметричных тензоров

$$\mathrm{A}^{\mu\nu}_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\mathrm{A}^{\mu\nu}. \tag{51.52}$$

52. ЧЕТЫРЕ ТОЖДЕСТВА.

Докажем теперь основную теорему механики:

Расходимость $G^\nu_\mu - \frac{1}{2}g^\nu_\mu G$ *тождественно равна нулю.* (52,

В случае трех измерений равенство нулю расходимости дает уравнение непрерывности потока, как например в гидродинамике $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$. Если прибавить временну́ю координату, то, как мы подробнее увидим дальше, получается условие *сохранения* или *постоянства. Мы увидим, насколько важно для теории материального мира открытие мирового тензора, который по своей природе остается постоянным.*

Мне кажется, что теорему (52) возможно доказать и чисто геометрически с помощью дальнейшего развития соображений § 33. Однако, я не был в состоянии найти это геометрическое доказательство, и поэтому должен ограничиться несколько громоздким аналитическим подтверждением.

По правилам ковариантного дифференцирования имеем

$$(g_\mu^\nu G)_\nu = g_\mu^\nu \frac{\partial G}{\partial x_\nu} = \frac{\partial G}{\partial x_\mu}.$$

Следовательно, наша теорема сводится к равенству

$$G_{\mu\nu}^\nu = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x_\mu}. \tag{52.1}$$

Полагая $\mu = 1, 2, 3, 4$, мы получим четыре тождества, упомянутые в п. 37. Согласно (51.32) имеем, с одной стороны,

$$G_{\mu\nu}^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(G_\mu^\nu \sqrt{-g}\right) + \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu},$$

и так как $G = g^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}$, то, с другой стороны,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x_\mu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}.$$

Поэтому тождество (52.1) сводится к следующему:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu}(G_\mu^\nu \sqrt{-g}) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}. \tag{52.2}$$

Тензорное соотношение (52) будет доказано, если мы покажем, что оно справедливо в некоторой определенной координатной системе; мы должны позаботиться только о том, чтобы наш частный выбор координатной системы не ограничивал свойств пространства-времени, иначе он уничтожил бы общность доказательства. Как было показано в п. 36, мы можем в каждом пространственно-временном многообразии всегда выбрать координаты таким образом, чтобы все первые производные $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ величин $g_{\mu\nu}$ в некоторой определенной точке сделались равными нулю; поэтому мы упростим вычисления, выбрав такие координаты, при которых в рассматриваемой точке

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}=0. \qquad (52.3)$$

Конечно, это условие можно использовать лишь после того, как будут произведены все дифференцирования. Тогда левая сторона (52.2) принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(G_\mu^\nu\sqrt{-g})=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(g^{\nu\tau}g^{\sigma\rho}\sqrt{-g}\cdot B_{\mu\tau\sigma\rho}).$$

На основании (52.3) выраженне $g^{\nu\tau}\ g^{\sigma\rho}\sqrt{-g}$ можно вынести за знак дифференцирования, что приведет к результату

$$g^{\nu\tau}g^{\sigma\rho}\frac{\partial}{\partial x_\nu}B_{\mu\tau\sigma\rho}.$$

В силу (34.5) это можно написать в виде

$$\frac{1}{2}g^{\nu\tau}g^{\sigma\rho}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu\,\partial x_\tau}+\frac{\partial^2 g_{\mu\tau}}{\partial x_\rho\,\partial x_\sigma}-\frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x_\rho\,\partial x_\tau}-\frac{\partial^2 g_{\rho\tau}}{\partial x_\mu\,\partial x_\sigma}\right).$$

Другие члены выражения $B_{\mu\tau\sigma\rho}$ здесь не выписаны, так как они представляют собой произведения двух множителей, обращающихся в нуль (трехзначковых символов), так что после дифференцирования по x_ν всегда остается один множитель, равный нулю.

Если в третьем члене (52.4) переставить σ с τ и ρ с ν, то он в сумме со вторым членом дает нуль и остается

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(G_\mu^\nu\sqrt{-g})=\frac{1}{2}g^{\nu\tau}g^{\sigma\rho}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu\,\partial x_\tau}-\frac{\partial^2 g_{\rho\tau}}{\partial x_\mu\,\partial x_\sigma}\right). \qquad (52.51)$$

Точно также правая сторона (52.2) принимает вид

$$\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}=\frac{1}{2}g^{\nu\tau}\frac{\partial G_{\nu\tau}}{\partial x_\mu}=\frac{1}{2}g^{\nu\tau}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(g^{\sigma\rho}B_{\nu\tau\sigma\rho})=$$
$$=\frac{1}{4}g^{\nu\tau}g^{\sigma\rho}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x_\nu\,\partial x_\tau}+\frac{\partial^2 g_{\nu\tau}}{\partial x_\rho\,\partial x_\sigma}-\frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x_\rho\,\partial x_\tau}-\frac{\partial^2 g_{\rho\tau}}{\partial x_\nu\,\partial x_\sigma}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}g^{\nu\tau}g^{\sigma\rho}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x_\nu\,\partial x_\tau}-\frac{\partial^2 g_{\rho\tau}}{\partial x_\nu\,\partial x_\sigma}\right), \qquad (52.52)$$

так как после перестановки σ с τ и ρ с ν во втором и четвертом членах предпоследнего выражения эти члены становятся равны друг другу и обратны по знаку.

Если сравнить (52.51) и (52.52), то окажется, что наше утверждение доказано, если положенная в основу координатная система обладает в рассматриваемой точке свойствам (52.3); но так как речь идет о тензорном уравнении, то результат должен быть верен в любой системе координат.

Мы дадим в заключение еще более короткое доказательство. Тождество

$$(B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma})_{\tau}+(B^{\varepsilon}_{\mu\sigma\tau})_{\nu}+(B^{\varepsilon}_{\mu\tau\nu})_{\sigma}=0, \tag{52.6}$$

в котором последние значки означают ковариантное дифференцирование, может быть легко доказано непосредственной подстановкой значений из (34.4). Совсем незачем производить при этом все алгебраические выкладки; вычисления достаточно вести до тех пор, пока мы убедимся, что вторые производные трехзначковых символов, будучи взяты в виде циклической суммы, дали нуль, и что все остальные члены содержат по крайней мере один недифференцированный трехзначковый символ в качестве множителя. В таком случае это выражение будет равно нулю, если в рассматриваемой точке ввести естественные координаты; но так как оно представляет собой тензор, то равенство нулю должно иметь место в любой системе координат. Если опустить значок ε и принять во внимание свойства антисимметрии тензора, то тождество (52.6) принимает вид

$$(B_{\mu\nu\sigma\varepsilon})_{\tau}-(B_{\mu\tau\sigma\varepsilon})_{\nu}-(B_{\varepsilon\tau\nu\mu})_{\sigma}=0,$$

откуда после умножения на $g^{\mu\nu}\,g^{\sigma\varepsilon}$ получается уравнение

$$(g^{\mu\nu}\,G_{\mu\nu})_{\tau}-(g^{\mu\nu}\,G_{\mu\tau})_{\nu}-(g^{\sigma\varepsilon}\,G_{\varepsilon\tau})_{\sigma}=0,$$

эквивалентное уравнению (52.1).

Необходимо подчеркнуть, что соотношения

$$G^{\nu}_{\mu\nu}-g^{\nu}_{\mu}\,G^{\alpha}_{\beta}\,G^{\beta}_{\alpha\nu}=0,$$

выведенные вновь таким образом, не ограничивают столь сильно возможных значений G^{ν}_{μ}, как соотношения между самими этими величинами; так например, если шесть из них равны нулю, то отсюда совсем не следует необходимость равенства нулю также и остальных четырех. Что же касается 40 ковариантных производных $(G^{\nu}_{\mu})_{\sigma}$, то четыре из них зависят от остальных 36, так что из равенства нулю 36 величин $(G^{\nu}_{\mu})_{\sigma}$ следует равенство нулю всех 40. Это оказывается существенным при исследовании уравнений тяготения.

53. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ.

Пусть ρ_0 есть собственная плотность материи, а $\frac{dx_\mu}{ds}$ относится к движению материи; далее напишем, как и в (46.8):

$$T^{\mu\nu}=\rho_0\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}. \tag{53.1}$$

В таком случае $T^{\mu\nu}$ (на ряду с соответствующими смешанными и ковариантными тензорами) называют материальным *тензором энергии* (или тензором импульса-энергии).

Для материи, движущейся с какой-либо скоростью по отношению к какой-нибудь системе галилеевых координат, плотность ρ (плотность массы, ср. п. 14) определяется выражением

$$\rho=\rho_0\left(\frac{dt}{ds}\right)^2, \tag{53.2}$$

так как сокращение Фицджеральда $\beta=\frac{dt}{ds}$ входит, как показывает формула (14.2), два раза: один раз вследствие увеличения массы со скоростью и второй раз—вследствие уменьшения объема.

Поэтому в галилеевых координатах

$$T^{\mu\nu}=\rho\frac{dx_\mu}{dt}\frac{dx_\nu}{dt}, \tag{53.3}$$

или если, u, v, w будут составляющими скорости,

$$T^{\mu\nu}=\left\{\begin{matrix}\rho u^2, & \rho vu, & \rho wu, & \rho u\\ \rho uv, & \rho v^2, & \rho wv, & \rho v\\ \rho uw, & \rho vw, & \rho w^2, & \rho w\\ \rho u, & \rho v, & \rho w, & \rho\end{matrix}\right\} \tag{53.4}$$

В случае материи, построенной из атомов, объем, который при макроскопическом рассмотрении считается очень малым, содержит частицы с самым различными движениями. Поэтому отдельные члены в (53.4) нужно просуммировать для различных движений частиц. При макроскопическом рассмотрении суммирование может быть произведено следующим образом.

Пусть (u, v, w) относятся к движению центра тяжести элемента объема, а (u_1, v_1, w_1)—к внутреннему движению частиц относительно *) центра тяжести. Тогда смешанные произведения в таких членах нашего тензора, как $\Sigma\rho\,(u+u_1)\,(v+v_1)$ обращаются в нуль, так что остаются лишь члены вида $\Sigma\,\rho uv+\Sigma\,\rho u_1 v_1$. Но $\Sigma\rho u_1 v_1$ выражает перенос количества движения, соответствующего скорости u теми частицами **), которые проходят через плоскость, перпендикулярную к оси Y; поэтому эта сумма равна тому внутреннему напряжению, которое обычно обозначается через p_{xy}. Следовательно, к выражению (53.4) нужно прибавить тензор, образованный из внутренних напряжений, причем на месте членов ρu, ρv, ρw, ρ в нем будут стоять нули. Знак суммирования можно опустить, если ρ означает плотность макроскопического элемента объема, а u, v, w относятся к его среднему или макроскопическому движению. В таком случае тензор получает вид

$$T^{\mu\nu}=\left\{\begin{matrix} p_{xx}+\rho u^2, & p_{yx}+\rho vu, & p_{zx}+\rho wu, & \rho u \\ p_{xy}+\rho uv, & p_{yy}+\rho v^2, & p_{zy}+\rho wv, & \rho v \\ p_{xz}+\rho uw, & p_{yz}+\rho vw, & p_{zz}+\rho w^2, & \rho w \\ \rho u, & \rho v, & \rho w, & \rho \end{matrix}\right\} \tag{53.5}$$

Рассмотрим теперь уравнения

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=0; \tag{53.6}$$

при $\mu=4$ они дают согласно (53.5)

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0, \tag{53.71}$$

а это есть известное гидродинамическое уравнение непрерывности.

При $\mu=1$ мы получаем в виду (53.71)

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{xz}}{\partial z}=-\left(\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial(\rho uw)}{\partial z}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}\right)=-u\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)-$$
$$-\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}\right)=-\rho\frac{Du}{Dt}. \tag{53.72}$$

---

*) В смысле элементарной механики; следовательно, обычные разности скоростей.

**) Так как каждый член этой суммы есть произведение составляющей количества движения ρu_1 на составляющую скорости v_1 по оси Y. (*Н.*)

Здесь $\dfrac{Du}{Dt}$ представляет собой ускорение элемента жидкости.

Это есть известное уравнение гидродинамики для случая отсутствия объемных сил. Вспомним, что введение галилеевых координат устранило всякое силовое поле, действующее на массу жидкости.

Уравнения (53.71) и (53.72) непосредственно выражают сохранение массы и количества движения, так что в случае галилеевых координат оба эти принципа содержатся в уравнении

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}.$$

Действительно, $\dfrac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$ есть увеличение количества движения и массы на единицу объема. В классической гидродинамике количество движения может возникать в некотором объеме в результате действия объемных сил ρX, ρY, ρZ (т. е. появляться в этом объеме, не переходя через его границы), и соответствующие члены должны в таком случае быть прибавлены к правой стороне уравнения (53.72). Что же касается возникновения массы, то, в противоположность случаю количества движения, это считается невозможным. Поэтому общие уравнения *классической гидродинамики* имеют вид

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = (\rho X,\ \rho Y,\ \rho Z,\ 0). \tag{53.81}$$

В *частной теории относительности* масса эквивалентна энергии, и поэтому объемные силы, действуя на частицы, будут вызывать появление новой массы, так что здесь мы можем написать

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = (\rho X,\ \rho Y,\ \rho Z,\ \rho S), \tag{53.82}$$

где ρS есть работа, произведенная силами ρX, ρY, ρZ. Эти старые формулы, вероятно, справедливы лишь приближенно; более точные формулы должны быть выведены из общей теории относительности, причем нужно будет рассмотреть также и такие случаи, когда имеются силовые поля, и, следовательно, координаты уже не имеют характера галилеевых.

Часто удобнее пользоваться смешанным тензором T^{ν}_{μ} вместо $T^{\mu\nu}$. В случае галилеевых координат мы получим из (53.5) *).

$$T^{\nu}_{\mu} = \begin{array}{c|cccc} & \mu\rightarrow & & & \\ \hline \nu\downarrow & -p_{xx}-\rho u^2, & -p_{yx}-\rho vu, & -p_{zx}-\rho wu, & \rho u \\ & -p_{xy}-\rho uv, & -p_{yy}-\rho v^2, & -p_{zy}-\rho wv, & \rho v \\ & -p_{xz}-\rho uw, & -p_{yz}-\rho vw, & -p_{zz}-\rho w^2, & \rho w \\ & -\rho u & -\rho v & -\rho w & \rho \end{array} \qquad (53.91)$$

Уравнение, эквивалентное (53.82), имеет в этом случае вид

$$\frac{\partial T^{\nu}_{\mu}}{\partial x_{\nu}} = (-\rho X, -\rho Y, -\rho Z, \rho S). \qquad (53.92)$$

Это означает, что $\frac{\partial T^{\nu}_{\mu}}{\partial x_{\nu}}$ есть приращение отрицательного количества движения и положительной массы или энергии на единицу объема.

54. НОВЫЙ ВЫВОД ЗАКОНА ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА.

Мы видели, что в галилеевой системе координат

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0. \qquad (54.1)$$

Очевидно, это есть частный случай тензорного уравнения

$$(T^{\mu\nu})_{\nu} = 0. \qquad (54.21)$$

Вместо него мы можем пользоваться эквивалентным уравнением

$$(T^{\nu}_{\mu})_{\nu} = 0, \qquad (54.22)$$

получающимся при опускании значка μ. Оба уравнения выражают утверждение, что расходимость тензора энергии равна нулю.

Если мы встанем на ту точку зрения, что энергия, напряжение и количество движения относятся к миру (пространству-времени), а не какой-либо чуждой субстанции в мире, то мы должны отождествить тензор энергии с каким-нибудь фундаментальным тензором, т. е. с тензором, образованным с помощью величин $g_{\mu\nu}$.

То обстоятельство, что расходимость T^{ν}_{μ} равна нулю, указывает на возможность отождествления этого тензора с выражением

*) Например, $T^{1}_{2} = g_{\sigma 2}\, T^{\sigma 1} = 0 - T^{21} + 0 + 0$.

$(G^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} g^{\nu}_{\mu} G)$, расходимость которого *тождественно* равна нулю (п. 52). Соответственно этому мы положим

$$G^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} g^{\nu}_{\mu} G = -8\pi T^{\nu}_{\mu}, \tag{54.3}$$

причем введение множителя 8π означает определенный выбор единиц, которыми мы в дальнейшем будем пользоваться.

Переход от (54.1) к (54.21) предполагает применение гипотетического принципа эквивалентности; если же мы примем (54.3) в качестве основного уравнения тяготения, то (54.21) оказывается простым тождеством, не покоящимся ни на каких гипотетических предположениях.

Таким образом, мы приходим к другому обоснованию закона тяготения (46.6) для непрерывно распределенной материи. При этом мы опирались на *принцип отождествления.* Наша дедуктивная теория исходит из интервала (введенного с помощью основного предположения п. 1), из которого можно непосредственно вывести тензор $g_{\mu\nu}$. Далее, мы чисто математически выводим тензоры $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu\sigma\rho}$ и, если необходимо, еще более сложные тензоры. Они представляют собой основной материал для построения нашего мира, и цель дедуктивной теории заключается в том, чтобы сконструировать из этих тензоров мир, который вел бы себя так же, как известный нам физический мир. Если это нам удастся, то масса, количество движения, напряжение и т. д. должны представлять собой общепринятые названия некоторых аналитических величин дедуктивной теории; эта ступень отождествления аналитических тензоров и была достигнута в уравнении (54.3). Если теория дает тензор $G^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} g^{\nu}_{\mu} G$, который согласно нашим наблюдениям обладает в точности теми же свойствами, что и тензор, представляющий массу, количество движения и напряжение материи, то трудно придумать, чего же еще можно от него требовать [*]).

С помощью (53.91) и (54.3) физические величины ρ, u, v, w, p_{xx}, ... p_{zz} отождествляются с составляющими фундаментального тензора в пространстве-времени. Число этих физических вели-

---

*) Для полноты теории необходимо конечно доказать, что определенная таким образом материя обладает стремлением соединяться в атомы и оставлять пустой большие части мира. Однако, теория относительности до сих пор не дала никаких указаний к пониманию атомистики.

чин равно 10, таково же и число различных составляющих тензора $G_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu G$, так что отождествление возможно. Как мы видим, это отождествление дает не кинематическое, а динамическое определение скорости u, v, w материи, что соответствует, например, случаю массивного однородного вращающегося маховика; в этом случае материя не имеет скорости в кинематическом смысле, хотя динамическая скорость и проявляется в гиростатических эффектах *). Ее связь с обычной кинематической скоростью, определяющей направление четырехмерной мировой линии частицы, будет исследована в п. 56.

Если мы положим $\nu = \mu$ и сократим таким образом (54.3), то, принимая во внимание, что $g_\mu^\mu = 4$ и полагая $T_\nu^\nu = T$, получим

$$G = 8\pi T, \tag{54.4}$$

так что уравнение (54.3) может быть записано в следующем эквивалентном виде:

$$G_\mu^\nu = -8\pi \left(T_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu T\right). \tag{54.5}$$

Если составляющее тензора энергии равны нулю, то это уравнение дает

$$G_\mu^\nu = 0,$$

что эквивалентно закону Эйнштейна для пустого пространства, т. е. $G_{\mu\nu} = 0$.

С нашей новой точки зрения закон тяготения Эйнштейна не налагает никаких ограничений на основную структуру мира. $G_{\mu\nu}$ может быть равно или неравно нулю. Если оно равно нулю, то мы говорим, что в пространстве есть некоторое количество движения или энергия; следовательно, наш практический критерий пустоты или заполненности пространства—отсутствия или наличия количества движения и энергии—заключается в равенстве или в неравенстве нулю величины $G_{\mu\nu}$ **).

---

*) См. „Пространство, время и тяготение", стр. 194.

**) Мы занимаемся сейчас только механикой и вряд ли можем обсуждать вопрос о роли, которую играют электромагнитные поля (свет) в создании впечатления о том, что пространство чем-то заполнено. Заметим, однако, что решающим является опыт механической природы. Ведь действительная картина имеет оптические, но не механические свойства твердого тела.

То обстоятельство, что мы отождествили именно этот специальный тензор, совсем не случайно. Расходимость нашего тензора равна нулю, так как он удовлетворяет закону сохранения; а это именно и есть главное условие, при котором его можно признать за субстанцию, потому что, если мы вообще хотим окружить себя воспринимаемым миром, то мы должны считать субстанцией только то, что обладает определенными свойствами постоянства. Может быть, мы и не в состоянии объяснить, почему наш ум отождествляет с субстанцией именно мировой тензор $G_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu G$, но мы можем утверждать, что он вряд ли мог бы отождествить что-либо более простое. Несомненно, существуют люди, не обладающие предрасположением считать существенными вещи, отличающиеся постоянством; но таких людей помещают в сумасшедший дом.

Инвариант

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$$

имеет значение

$$g_{\mu\nu} \rho_0 \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = \rho_0,$$

так как

$$g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = ds^2.$$

Следовательно

$$G = 8\pi T = 8\pi\rho_0. \tag{54.6}$$

Эйнштейн и де-Ситтер получают естественно искривленный мир, полагая вместо (54.3)

$$G_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu (G - 2\lambda) = -8\pi T_\mu^\nu, \tag{54.71}$$

где λ есть постоянная. Так как расходимость g_μ^ν или $g^{\mu\nu}$ равна нулю, то и расходимость этого более общего выражения обращается в нуль, так что законы сохранения массы и количества движения все еще выполняются тождественно. Сокращение (54.71) дает

$$G - 4\lambda = 8\pi T = 8\pi\rho_0. \tag{54.72}$$

Для пустого пространства $G = 4\lambda$ и $T_\mu^\nu = 0$, поэтому уравнение (54.71) сводится к

$$G_\mu^\nu = \lambda g_\mu^\nu,$$

или, как в (37.4),

$$G_{\mu\nu} = \lambda\, g_{\mu\nu}.$$

Если принять во внимание напряжения в материи, распределенной непрерывно, или молекулярные движения в материи, распределенной прерывно, то собственную плотность материи, нужно определять с большой осторожностью. Существуют по крайней мере три определения плотности, имеющие физическое значение; обозначим соответствующие им величины плотности через $\rho_0, \rho_{00}, \rho_{000}$.

1) Положим

$$\rho_0 = T.$$

Сравнение с (54.6) показывает, что это выражение представляет собой сумму плотностей элементарных частиц, движущихся различным образом, *причем каждая частица отнесена к тем осям, относительно которых она покоится* *).

2) Мы можем далее определить плотности различных частиц, относя их к осям, по отношению к которым материя покоится как целое. Результат суммирования получающихся таким образом плотностей мы обозначим через ρ_{00}. Следовательно, $\rho_{00} = T_{44}$ (выраженному в координатной системе, в которой материя покоится как целое).

3) Если отнести идеальную жидкость к таким осям координат, относительно которых она покоится, то все напряжения p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} равны гидростатическому давлению p **). Тензор энергии (53.5) при этом принимает вид

$$T^{\mu\nu} = \begin{matrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{00}. \end{matrix}$$

Если положить $\rho_0 = \rho_{000} - p$, то члены, выражающие давление, представляют собой тензор $-g^{\mu\nu}p$. Отсюда мы получим тензорное уравнение, справедливое в любой координатной системе:

$$T^{\mu\nu} = \rho_{000} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} - g^{\mu\nu}p. \qquad (54.81)$$

---

*) Следовательно, если требуется определить (среднюю) плотность материи в объеме V, то нужно разделить массу каждой частицы на собственный объем области V, выраженный в координатах, жестко связанных с частицей (движущихся вместе с ней). Сумма получающихся таким образом чисел, взятая по всем частицам, дает $\rho_0 = T$. (*Н.*)

**) Отсюда следует, как легко сообразить, равенство нулю p_{xy}, p_{yz}, p_{zx}. (*Н*)

Поэтому, если мы разлагаем тензор энергии на две части, зависящие от двух инвариантов, характеризующих состояние жидкости, то в качестве этих инвариантов нужно выбрать p и ρ_{000}.

Величины ρ_0, ρ_{00}, ρ_{000} связаны друг с другом соотношением

$$\rho_0 = \rho_{00} - 3p = \rho_{000} - 4p. \tag{54.82}$$

Если жидкость *несжимаема*, т. е. если расположение ее частиц не зависит от p, то должно быть выполнено условие $\rho_0 = \text{const}$ *). Несжимаемость означает постоянство плотности частиц (ср. п. 14), а не плотности массы, так что увеличение массы частиц, вызванное их движением по отношению к центру тяжести материи как целого, не нужно принимать в расчет.

В случае жидких и твердых тел напряжения вызываются не только молекулярными движениями, но главным образом силами, с которыми действуют друг на друга соседние молекулы. Эти напряжения, конечно, должны наряду с газовым давлением входить в выражение тензора энергии (иначе он не подчинялся бы закону сохранения). Позже мы покажем, что эти молекулярные силы, если они представляют собой максвелловы электрические силы, не изменяют значения ρ_0, так что в этом случае ρ_0 создается исключительно отдельными молекулами (может быть даже отдельными электронами) и не зависит от типа их расположения **).

Так как из всех трех величин при теоретических исследованиях чаще всего пользуются ρ_0, то в дальнейшем мы будем называть эту величину *собственной плотностью* (или инвариантной плотностью) без дальнейших указаний.

55. СИЛА.

На основании (51.2) уравнение $(T_\mu^\nu)_\nu = 0$ принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(T_\mu^\nu \sqrt{-g}\right) = \{\mu\nu, \alpha\}\, T_\alpha^\nu. \tag{55.1}$$

---

*) Некоторые авторы определяли несжимаемость с помощью условия $\rho_{00} = \text{const}$. Но такое определение заведомо ведет к большой путанице.

**) Весьма возможно, что при весьма плотном расположении атомов напряжения в значительной мере будут создаваться не максвелловыми силами (квантовые явления!). Но так как мы, с другой стороны, не знаем, влияют ли такие силы на значение ρ_0, то остается все же неясным, можно ли считать уравнение $\rho_0 = \text{const}$ точным выражением условия несжимаемости.

Если мы выберем координаты так, что $\sqrt{-g}=1$, то

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} T^\nu_\mu = \{\mu\nu, \alpha\} T^\nu_\alpha. \tag{55.2}$$

В большинстве приложений скорость материи необычайно мала по сравнению со скоростью света, так что в правой стороне этого уравнения величина $T^4_4 = \rho$ будет гораздо больше других компонент тензора T^ν_α. Если в первом приближении пренебречь другими компонентами, мы получим

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} T^\nu_\mu = \{\mu 4, 4\} \ \rho. \tag{55.3}$$

Это согласуется с уравнением (53.92) классической механики, если

$$-X = \{14, 4\}, \quad -Y = \{24, 4\}, \quad -Z = \{34, 4\}. \tag{55.4}$$

Следовательно, трехзначковые символы можно интерпретировать как составляющие силового поля. Три выписанные нами составляющие играют наибольшую роль; они пропорциональны массе или энергии; другие, которыми механика Ньютона пренебрегает, связаны с количеством движения и напряжениями, образующими остальные составляющие тензора энергии.

Ограничение $\sqrt{-g}=1$ несущественно, если мы примем в расчет смешение тензорных плотностей и тензоров, на возможность которого было указано в конце п. 49. Вспомним, что сила (X, Y, Z) появилась в формулах потому, что наша координатная сетка относится к абстрактной галилеевой геометрии, которая не является естественной геометрией (ср. п. 16). Случайно или намеренно, мы поставили себя в положение наблюдателя, который свою не-галилееву координатную сетку ошибочно считает прямоугольными координатами и временем. Поэтому мы отождествляем единичную клетку с единицей естественного объема, а плотность тензора энергии $\mathfrak{T}^\nu_\mu$ на единичную клетку смешиваем с самым тензором энергии, T^ν_μ, приходящимся на единицу естественного объема. На этом основании сохранение предполагаемого тензора энергии должно было бы аналитически выражаться уравнением $\dfrac{\partial \mathfrak{T}^\nu_\mu}{\partial x_\nu} = 0$, а в случае наличия силового поля, уравнения классической гидродинамики должны были бы быть написаны в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\mathrm{T}_1^\nu &= \mathrm{T}_4^4\cdot(-X)\\ \frac{\partial}{\partial x_\nu}\mathrm{T}_2^\nu &= \mathrm{T}_4^4\cdot(-Y)\\ \frac{\partial}{\partial x_\nu}\mathrm{T}_3^\nu &= \mathrm{T}_4^4\cdot(-Z)\\ \frac{\partial}{\partial x_\nu}\mathrm{T}_4^\nu &= \mathrm{T}_4^4\cdot(0)\end{aligned}\right\} \qquad (55.51)$$

причем предполагаемая плотность ρ в действительности есть «плотность плотности» $\rho\sqrt{-g}$ или T_4^4 *).

Так как (55.1) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\mathrm{T}_\mu^\nu = \{\mu\nu,\ \alpha\}\,\mathrm{T}_\alpha^\nu, \qquad (55.52)$$

то результат (55.4) имеет место при любом значении $\sqrt{-g}$.

Для вычисления $\mathrm{T}_{\mu\nu}$ можно использовать также формулу (51.51), так как она дает

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\mathrm{T}_\mu^\nu = \frac{1}{2}\mathrm{T}^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}. \qquad (55.6)$$

---

*) Может показаться, что гораздо удобнее избежать этого смешения, отождествляя с самого начала энергию, количество движения и напряжение с составляющими T_μ^ν, вместо того, чтобы итти обходным путем и сначала отождествить эти величины с T_μ^ν, а потом заметить, что вместо этого тензора мы в действительности пользуемся величиной T_μ^ν. Это затрудняется, однако, тем обстоятельством, что мы не всегда кладем в основу нашей координатной системы абстрактную галилееву геометрию. Если выбрать, например, полярные координаты, то нет никакого основания ожидать смешения площади $dr\,d\vartheta d\varphi$ единичной клетки, к которой относится тензорная плотность T_μ^ν, с естественным объемом $r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi$; в таких случаях гораздо целесообразнее использовать величины T_μ^ν как меру плотности энергии, количества движения и напряжения. Только тогда, когда мы вследствие особой склонности кладем абстрактную геометрию Галилея в основу таких координат, для которых она не является в точности естественной геометрией, T_μ^ν автоматически начинает выражать величины, которые в действительности должны быть представлены тензором T_μ^ν.

Если на правой стороне сохранить лишь главную составляющую T^{44}, то сравнение с (55.51) приводит к соотношениям

$$X = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x},\quad Y = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial y},\quad Z = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial z}. \tag{55.7}$$

Отсюда для статической координатной системы получаем

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{44}}{\partial x}dx + \frac{\partial g_{44}}{\partial y}dy + \frac{\partial g_{44}}{\partial z}dz\right) = -\frac{1}{2}dg_{44},$$

так что компоненты X, Y, Z получаются из потенциала

$$\Omega = -\frac{1}{2}g_{44} + \text{const}.$$

Если выбрать постоянную так, чтобы $g_{44} = 1$, когда $\Omega = 0$, то

$$g_{44} = 1 - 2\,\Omega. \tag{55.8}$$

Формулы (15.4) и (38.8) представляют собой те частные случаи этого соотношения, в которых Ω есть или потенциал центробежной силы, или потенциал сил тяготения Ньютона.

Рассмотрим теперь вкратце важнейшие этапы нашего нового вывода законов механики и тяготения. При этом сосредоточим внимание на мировом тензоре T^{ν}_{μ}, *определенном* соотношением

$$T^{\nu}_{\mu} = -\frac{1}{8\pi}\left(G^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}g^{\nu}_{\mu}G\right).$$

Спрашивается, каким образом мы находим этот тензор в природе, какие названия дает наблюдатель его компонентам? Мы сначала делаем предположение, что при употреблении галилеевых или естественных координат T^4_4 представляет собой количество массы или энергии на единицу объема, T^4_1, T^4_2, T^4_3 — количество движения с обратным знаком на единицу объема, а остальные составляющие содержат напряжения, как это было подробно разобрано в (53.91). Это предположение можно потом подтвердить, исследуя, подчиняются ли действительно составляющие T^{ν}_{μ} тем законам, которые, как мы знаем из опыта, имеют место для массы, количества движения и напряжений. В естественных координатах эти эмпирические законы выражаются уравнением $\dfrac{\partial T^{\nu}_{\mu}}{\partial x_{\nu}} = 0$ и эти соотношения действительно выполняются, так как наш тензор, как следует из его определения, тождественно удовлетворяет уравнению $\left(T_{\mu}^{\nu}\right)_{\nu}=0$. Если же координаты не являются естественными, то тождество $T_{\mu\nu}^{\nu}=0$ дает более общий закон

$$\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \mathrm{T}_{\mu}^{\nu}=\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} \mathrm{T}^{\alpha\beta}.$$

В последнем случае мы приписываем этой системе отсчета абстрактную геометрию Галилея, и соответственно этому должны были бы отождествить составляющие T_{μ}^{ν} попрежнему, как будто бы координаты были естественными; но так как при этом появляется возможность смешения единичной клетки с единицей естественного объема, то мы теперь допускаем, что количество движения с обратным знаком и энергия на единицу объема выражаются *тензорными плотностями* T_1^4, T_2^4, T_3^4, T_4^4.

В величине, стоящей в правой части уравнения, мы узнаем, в согласии с определением силы, как скорости изменения количества движения,—объемную силу (с обратным знаком), действующую на единицу объема; полагая $\mu=1$, 2, 3, мы получим три составляющие силы. Если скорость материи, как в большинстве встречающихся задач, очень мала по сравнению со скоростью света, то в правой части можно оставить лишь составляющую T^{44} или ρ, и тогда сила получается из поля ускорения обычного вида с составляющими $-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_1}$, $-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_2}$, $-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_3}$. Следовательно, потенциал поля ускорения связан с g_{44} соотношением $g_{44}=1-2\,\Omega$. Если это приближение недостаточно, то не существует никакого простого поля ускорения; в этом случае ускорение материи зависит не только от ее положения, но также и от скорости, и даже от напряжений. Закон тяготения Эйнштейна для пустого пространства $G_{\mu\nu}=0$ следует сразу из того толкования, которое было приписано тензору T_{μ}^{ν}.

56. ДИНАМИКА ЧАСТИЦЫ.

Изолированная частица представляет собой узкую трубку в четырехмерном пространстве, внутри которой тензор энергии отличен от нуля, и которая окружена областью, где тензор энергии равен нулю. Эта трубка есть мировая линия или путь частицы в мире.

Мы получим количество движения и массу частицы, интегрируя T_μ^4 по трехмерному объему; если записать результат в виде

$$-Mu, \quad -Mv, \quad -Mw, \quad M,$$

то M есть масса (по отношению к системе координат), а (u, v, w) — *динамическая скорость* частицы, т. е. отношение количества движения к массе.

Кинематическая скорость частицы определяется направлением четырехмерной мировой линией, т. е. величинами $\frac{dx_1}{dx_4}, \frac{dx_2}{dx_4}, \frac{dx_3}{dx_4}$ вдоль трубки. В случае непрерывной материи тензор энергии нельзя разделить на трубки, так что понятие кинематической скорости вовсе не может возникнуть.

Мы должны теперь доказать, что кинематическая скорость частицы равна ее динамической скорости. Строгое математическое доказательство весьма затруднительно, так как необходимо было бы сформулировать такие условия непрерывности тензора энергии внутри бесконечно тонкой трубки, которые, например, исключали бы возможность одновременного присутствия частицы в различных местах; однако, следующие соображения можно повидимому считать достаточными.

Закон сохранения (в естественных координатах)

$$\frac{\partial T^{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial T^{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial T^{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial T^{44}}{\partial x_4} = 0$$

аналогичен трехмерному соотношению для электростатической силы

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Последнее уравнение в связи с теоремой Гаусса приводит к понятию единичных силовых трубок, имеющих в каждой точке направление (X, Y, Z). Поток этого вектора один и тот же сквозь любое сечение трубки. Эти трубки заполняют все пространство. Совершенно аналогично этому в четырех измерениях можно вывести из теоремы Гаусса, что поток $T^{4\nu}$ сквозь любую замкнутую (трехмерную) поверхность равен нулю; поэтому мы можем так же, как и в электростатике, построить трубки постоянного потока, имеющие в каждой точке направление $T^{4\nu}$. Ни одна из этих трубок не может пересекать боковые стенки мировой трубки частицы, так как вне этой мировой трубки $T^{4\nu}$ равно нулю, и, следовательно, условие постоянства потока не может быть удовлетворено.

Поэтому трубки потока должны в среднем иметь то же направление, что и мировая трубка. Но трубки потока имеют направление $(\rho u, \rho v, \rho w, \rho)$ вектора $T^{4\nu}$, т. е. динамической скорости, а мировая трубка — направление $\frac{dx_\mu}{ds}$ кинематической скорости. Поэтому

$$u : v : w : 1 = dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4.$$

Нам незачем заниматься точной формулировкой ограничений необходимых для того, чтобы узкая трубка потока не отклонялась слишком сильно от общего направления мировой трубки частицы или даже изменяла направление на обратное *).

Эти отклонения большей частью взаимно уничтожились бы при интегрировании $T^{4\nu}$ по сечению трубки; однако, они во всяком случае должны были бы быть как-то обусловлены сложностью внутренней структуры частицы, что несовместимо с нашим представлением об элементарной частице.

После того как тождество обеих скоростей доказано, мы можем вместо уравнения (53.4), содержащего динамическую скорость, применить уравнение (53.1), в которое входит скорость кинематическая, т. е. уравнение

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}. \tag{56.1}$$

Из тождества $T^{\mu\nu}_\nu = 0$ следует в виду (51.41)

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(T^{\mu\nu} \sqrt{-g}) = -\{\alpha\nu, \mu\} T^{\alpha\nu} \cdot \sqrt{-g}. \tag{56.2}$$

Будем теперь интегрировать это равенство по малому четырехмерному объему. Каждый из членов левой стороны можно проинтегрировать по одной переменной, что дает

$$\left[\iiint T^{\mu 1} \sqrt{-g}\, dx_2\, dx_3\, dx_4 + \iiint T^{\mu 2} \sqrt{-g}\, dx_1\, dx_3\, dx_4 + \dots\right] =$$
$$= -\iiiint \{\alpha\nu, \mu\} T^{\alpha\nu} \cdot \sqrt{-g}\, d\tau. \tag{56.3}$$

*) Ведь трубки потока могут, например, образовать внутри мировой трубки частицы винтовые линии с малым ходом. Может также случиться, что кривизна мира меняется внутри частицы так сильно, что введение естественных координат вообще становится невозможным. Однако, полагаю я, единственное необходимое ограничение заключается в том чтобы ρ нигде не принимало отрицательного значения.

Предположим теперь, что внутри этого объема находится только одна частица, так что тензор энергии равен нулю везде, кроме узкой трубки. Согласно (56.1) четырехкратный интеграл справа будет равен

$$-\int\int\int\int\{\alpha\nu,\mu\}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\rho_0\sqrt{-g}\,d\tau=-\{\alpha\beta,\mu\}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}m\,ds, \quad (56.4)$$

так как по (49.42) $\rho_0\sqrt{-g}\,d\tau=\rho_0 d\,W\,ds=m\,ds$, где m — собственная масса.

На левой стороне (56.3) трехкратные интегралы равны нулю везде, кроме обеих точек, в которых мировая линия пересекает границы области. Для простоты положим, что эта граница вблизи точек пересечения лежит в плоскостях $dx_1=0$, так что из четырех интегралов остается лишь первый. Левая сторона уравнения (56.3) принимает при этом вид

$$\left[\int\int\int\rho_0\sqrt{-g}\,\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_1}{ds}dx_2\,dx_3\,dx_4\right], \quad (56.51)$$

где квадратная скобка означает разность значений, относящихся к обеим конечным точкам мировой линии.

Геометрический объем наклонного цилиндра, вырезанного из трубки двумя сечениями $dx_2\,dx_3\,dx_4$, находящимся друг от друга на расстоянии ds, измеренном вдоль трубки, равен

$$\frac{dx_1}{ds}ds\,dx_2\,dx_3\,dx_4.$$

Умножив его на $\rho_0\sqrt{-g}$, мы получим содержащееся в цилиндре количество плотности *) ρ_0, равное mds. Поэтому (56.51) сводится к выражению

$$\left[m\frac{dx_\mu}{ds}\right].$$

Разность на обеих границах равна

$$\frac{d}{ds}\left(m\frac{dx_\mu}{ds}\right)ds, \quad (56.52)$$

где ds означает теперь, как и в (56.4) длину мировой линии между обеими границами.

*) *Количество* плотности в четырехмерном объеме, конечно, не есть масса, а величина, имеющая размерность: масса $\times$ время.

Согласно (56.4) и (56.52), уравнение (56.3) сводится к следующему:

$$\frac{d}{ds}\left(m\frac{dx_\mu}{ds}\right)=-m\,\{\alpha\beta,\mu\}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}. \qquad (56.6)$$

Если предположить, что m постоянно, это дает уравнение (28.5) геодезической линии. Таким образом, доказано, что мировая линия изолированной материальной частицы есть геодезическая линия. Постоянство же m можно доказать математически следующим образом.

Из (56.6) следует

$$mg_{\mu\nu}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{d}{ds}\left(m\frac{dx_\mu}{ds}\right)=-m^2\,[\alpha\beta,\nu]\frac{dx_\nu}{ds}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}=$$

$$=-\frac{1}{2}m^2\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_\beta}\frac{dx_\beta}{ds}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}=-\frac{1}{2}m^2\frac{dg_{\alpha\nu}}{ds}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}=$$

$$=-\frac{1}{2}m^2\frac{dg_{\mu\nu}}{ds}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}.$$

Если сложить это уравнение с тем, которое получается из него после перестановки значков μ и ν, то получим

$$g_{\mu\nu}m\frac{dx_\nu}{ds}\frac{d}{ds}\left(m\frac{dx_\mu}{ds}\right)+g_{\mu\nu}m\frac{dx_\mu}{ds}\frac{d}{ds}\left(m\frac{dx_\nu}{ds}\right)+$$

$$+m\frac{dx_\mu}{ds}m\frac{dx_\nu}{ds}\frac{dg_{\mu\nu}}{ds}=0,$$

или

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\mu\nu}m\frac{dx_\mu}{ds}\cdot m\frac{dx_\nu}{ds}\right)=0.$$

В силу (22.1) это дает $\dfrac{dm^2}{ds}=0$. Следовательно, инвариантная масса изолированной частицы остается неизменной.

Поэтому мы можем опустить 3-й постулат п. 47, так как он вытекает из закона тяготения. Закон Эйнштейна определяет не только поле, создаваемое тяготеющей материей, но также и движение частицы под влиянием этого поля, именно движение вдоль геодезической линии.

57. РАВЕНСТВО ТЯЖЕЛОЙ И ИНЕРТНОЙ МАССЫ. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ.

Выражение «гравитационная масса» имеет двоякий смысл; оно может относиться либо: 1) к реакциям частицы в поле тяготения, либо 2) к ее способности создавать поле тяготения. В первом смысле равенство гравитационной и инертной массой содержится уже в определении, так как согласно нашей теории отделение силового поля от поля инерции зависит лишь от нашего произвольного выбора абстрактной геометрии. Поэтому мы будем употреблять это выражение исключительно в смысле 2). Мы показали в пп. 38, 39, что постоянная интегрирования m представляет собой гравитационную массу. Однако, при нашем теперешнем рассмотрении величина ρ_0, входящая в тензор $T_{\mu\nu}$, относится к инертной массе, определенной сохранением энергии и количества движения. Связь устанавливается уравнением (54.3), в левой части которого масса входит постольку, поскольку она определяет величины $g_{\mu\nu}$, т. е. в связи с ее способностью создавать поле тяготения (или «сопровождаться им»); справа же она входит в тензор энергии, который согласно (53.1) содержит ρ_0. Вспомним, что в (54.3) мы произвольно выбрали множитель 8π; теперь нужно оправдать этот выбор *). Этот множитель пропорциональности соответствует постоянной тяготения Ньютона.

Пропорциональность инертной и гравитационной массы так же, как и связывающая их «постоянная тяготения»,—все эти понятия относятся к приближенной схеме Ньютона и применимы лишь в случае настолько слабых полей, что уравнения можно считать линейными. Для более сильных полей теория Ньютона становится неоднозначной и вопрос о том, остается ли постоянная тяготения действительно постоянной, когда масса становится очень большой, оказывается праздным. Поэтому мы рассмотрим здесь только случай очень слабых полей и положим

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{57.1}$$

где $\delta_{\mu\nu}$ имеют значения, соответствующие галилеевым координатам, а $h_{\mu\nu}$ суть малые величины первого порядка, квадратами ко-

*) Собственно говоря, это уже было сделано в п. 46, находящемся в близкой связи с нынешними рассуждениями; однако здесь мы проводим доказательство в обратном порядке.

торых можно пренебречь. Производные от $g_{\mu\nu}$ также представляют собой малые величины первого порядка.

На основании (34.5) мы имеем с точностью до величин второго порядка

$$G_{\mu\nu} = g^{\sigma\rho} B_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma \partial x_\rho} + \frac{\partial^2 g_{\sigma\rho}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu \partial x_\rho} - \frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x_\mu \partial x_\sigma} \right) \tag{57.2}$$

Попробуем удовлетворить этому уравнению, разделив его на два уравнения

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma \partial x_\rho} \tag{57.31}$$

и

$$0 = g^{\sigma\rho} \left(\frac{\partial^2 g_{\sigma\rho}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu \partial x_\rho} - \frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x_\mu \partial x_\sigma} \right). \tag{57.32}$$

Второе уравнение с точностью до величин второго порядка можно написать в виде

$$0 = \delta^{\sigma\rho} \left(\frac{\partial^2 h_{\sigma\rho}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 h_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu \partial x_\rho} - \frac{\partial^2 h_{\nu\rho}}{\partial x_\mu \partial x_\sigma} \right) =$$

$$= -\frac{\partial^2 h}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 h_\mu^\rho}{\partial x_\nu \partial x_\rho} - \frac{\partial^2 h_\nu^\sigma}{\partial x_\mu \partial x_\sigma},$$

если положить

$$h_\mu^\rho = \delta^{\sigma\rho} h_{\mu\sigma}, \quad h = h_\rho^\rho = \delta^{\sigma\rho} h_{\sigma\rho}.$$

Это уравнение будет удовлетворено, если

$$\frac{\partial h_\mu^\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x_\mu}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(h_\mu^\alpha - \frac{1}{2} \delta_\mu^\alpha h \right) = 0.\ ^{*)} \tag{57.4}$$

---

*) Приведем здесь данное впервые Д. Гильбертом (Gött. Nachr. 1917; Math. Ann. 92, стр. 22) строгое доказательство того, что выполнения соотношения (57.4) всегда можно добиться бесконечно малым преобразованием координат, так что разделение (57.2) на (57.31) и (57.32) не ограничивает общности. Действительно, положим

$$\bar{x}_\alpha = x_\alpha + \xi^\alpha (x_1, \ldots, x_4),$$

где ξ^α и их производные представляют собой бесконечно малые первого порядка. В таком случае мы можем, обозначая величины, соответствующие

Что касается уравнения (57.31), то оно может быть записано в виде

$$\square h_{\mu\nu} = 2G_{\mu\nu}, \quad \text{или} \quad \square h_{\mu}^{\alpha} = 2G_{\mu}^{\alpha},$$

откуда следует, что G_{μ}^{α} есть малая величина первого порядка. Поэтому

$$\square\left(h_{\mu}^{\alpha} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\alpha} h\right) = 2\left(G_{\mu}^{\alpha} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\alpha} G\right) = -16\pi T_{\mu}^{\alpha}. \quad (57.5)$$

Это «волновое уравнение» можно проинтегрировать. Так как в него входят лишь малые величины первого порядка, то отклонение от геометрии Галилея может изменить решение только на величины второго порядка; поэтому можно применить известное решение *)

$$h_{\mu}^{\alpha} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\alpha} h = \frac{1}{4\pi}\int \frac{(-16\pi T_{\mu}^{\alpha})'\, dV'}{r'}, \quad (57.6)$$

где штрихи означают, что интегрирование должно быть распространено по каждому элементу объема dV' на расстоянии r' от рассматриваемой точки и в момент времени $t - r'$, т. е. в такой

новым переменным, черточкой над буквой, написать с точностью до величин второго порядка:

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + g_{\mu\lambda}\frac{\partial\xi^{\lambda}}{\partial x_{\nu}} + g_{\lambda\nu}\frac{\partial\xi^{\lambda}}{\partial x_{\mu}} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{\partial\xi_{\mu}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial\xi_{\nu}}{\partial x_{\mu}}$$

$$h - \bar{h} = 2\frac{\partial\xi^{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 2\Xi$$

и отсюда

$$\frac{\partial\left(h_{\mu}^{\nu} - \bar{h}_{\mu}^{\nu}\right)}{dx_{\nu}} = \square\xi_{\mu} + \frac{\partial\Xi}{\partial x_{\mu}}, \quad \frac{\partial(h - \bar{h})}{\partial x_{\mu}} = 2\frac{\partial\Xi}{\partial x_{\mu}},$$

так что мы окончательно получим соотношение (57.4), выбрав ξ_{μ} такими, чтобы имело место соотношение

$$\square\xi_{\mu} = \frac{\partial\left(h_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu} h\right)}{\partial x_{\nu}};$$

но это есть «волновое уравнение», и его можно проинтегрировать точно так же, как и (57.5) с помощью запаздывающих потенциалов типа (57.6).

(*Н.*)

*) *Rayleigh*, Theory of Sound, т. 2, стр. 104, уравнение (3). См. еще, например, *C. Schäfer*, Einführung in die theoretische Physik, т. I, изд. 2, стр. 571, формулы (54), (54a).

момент времени, чтобы волна, распространяющаяся из dV' со скоростью 1, достигла данной точки в момент t.

Если вычислять с помощью (57.6) значение выражения

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(h^\alpha_\mu - \frac{1}{2}\,\delta^\alpha_\mu h\right),$$

то оператор $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ будет означать перемещение рассматриваемой точки в пространстве и времени, влекущее за собой изменение r'. Поэтому мы можем считать r' справа постоянным и подвергнуть этому перемещению элемент dV', к которому относится $(T^\alpha_\mu)'$. При этом мы получим

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(h^\alpha_\mu - \frac{1}{2}\,\delta^\alpha_\mu h\right) = -4\int\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\,(T^\gamma_\mu)\right\}'\frac{dV'}{r'}.$$

Но так как на основании (55.2) $\frac{\partial T^\alpha_\mu}{\partial x_\alpha}$ есть величина второго порядка, то соотношение (57.4) удовлетворяется с требуемой точностью.

В результате мы можем утверждать, что соотношение

$$\square\, h_{\mu\nu} = 2G_{\mu\nu} \tag{57.7}$$

удовлетворяет уравнениям тяготения с точностью до величин второго порядка, так как при этом оба уравнения, на которые мы разбили (57.2), оказываются выполненными. Конечно, уравнение (57.2) может иметь и другие решения, не удовлетворяющие в отдельности (57.31) и (57.32).

В случае статического поля уравнение (57.7), согласно (54.5), сводится к уравнению

$$-\Delta h_{\mu\nu} = 2G_{\mu\nu} = 16\pi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\delta_{\mu\nu}T\right).$$

Далее, в случае покоящейся материи $T = T_{44} = \rho$ (ρ — *инертная плотность*), тогда как другие составляющие $T_{\mu\nu}$ равны нулю. Следовательно

$$\Delta h_{11} = \Delta h_{22} = \Delta h_{33} = \Delta h_{44} = 8\pi\rho.$$

Для одной единственной частицы известное решение этого уравнения имеет вид

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = h_{44} = -\frac{2m}{r}.$$

Поэтому из (57.1) получается следующее полное выражение интервала в согласии с (46.15).

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2m}{r}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2. \quad (57.8)$$

Однако, здесь величина m была введена как инертная масса, а не как простая постоянная интегрирования. Мы показали в пп. 38, 39, что величина m в (46.15) есть гравитационная масса, причем гравитационная постоянная была положена равной единице. Следовательно, инертная и гравитационная массы равны друг другу, и обе они выражаются в одинаковых единицах, если коэффициент пропорциональности между мировым тензором и физическим тензором положен равным 8π, как это и было сделано в (54.3).

В пустом пространстве (57.7) принимает вид

$$\square h_{\mu\nu} = 0,$$

откуда следует, что изменения потенциалов тяготения распространяются в виде волны со скоростью 1, т. е. со скоростью света (п. 30). При этом, однако, нужно иметь в виду, что такое представление о распространении гравитации хотя и допустимо всегда, но отнюдь не является единственно возможным. Когда мы заменяем (57.2) уравнениями (57.31) и (57.32), мы вносим этим ограничение, сводящееся к выбору определенной системы координат *).

Возможны также и другие решения (57.2), соответствующие другим системам координат. Все эти системы координат отличаются от галилеевых координат на малые величины первого порядка. Потенциалы $g_{\mu\nu}$ зависят не только от влияния гравитации, представляющего собой объективную реальность, но кроме того и от произвольного выбора координатной системы. Мы можем заставить «распространяться» изменения координат со «скоростью мысли», и эти изменения будут произвольным образом налагаться на более медленное рассмотренное выше распространение. Однако, разделение физической и условной части изменений $g_{\mu\nu}$ является, повидимому, невозможным.

На основании только-что приведенных рассуждений часто выводилось заключение, что в теории относительности волны тяго-

*) См. сноску о работе Гильберта.

(*Н.*)

тения распространяются со скоростью света, но мы увидим, что это верно лишь в очень условном смысле. Если выбрать координаты так, чтобы они удовлетворяли определенным условиям, геометрический смысл которых не слишком ясен, то скорость волн тяготения окажется равной скорости света; если же координаты выбраны несколько иначе, то их скорость может и не равняться скорости света. Следовательно, этот результат связан исключительно с выбором координат, и, насколько можно судить, применяемые обычно координаты вводятся как раз с той целью, чтобы иметь возможность воспользоваться упрощениями, вытекающими из равенства скоростей распространения гравитации и света. Таким образом, здесь несомненно налицо порочный круг.

Должны ли мы отсюда заключить, что скорость распространения гравитации есть совершенно условное понятие, не имеющее никакого абсолютного значения? Я думаю, что нет. Скорость распространения гравитации есть величина вполне определенная; но только задача ее определения решалась неправильно. Чтобы получить скорость, не зависящую от выбора координатной системы, необходимо рассмотреть распространение мирового инварианта, а не мирового тензора *). Простейшим инвариантом, которым можно воспользоваться для этой цели, является $B_{\mu\nu\sigma\rho} \cdot B^{\mu\nu\sigma\rho}$, так как G и $G_{\mu\nu} \cdot G^{\mu\nu}$ в пустом пространстве равны нулю. Вряд ли можно рассматривать распространение отдельного импульса тяготения, так как в природе невозможно представить себе возникновение такого импульса без обращения к сверхъестественным агентам, вызвавшим возмущение в уравнениях механики. [В частности, мы можем рассмотреть правильную последовательность волн,

---

*) Если произвести бесконечно малое преобразование координат, то скорость света изменится лишь на величины первого порядка. Для того чтобы можно было пренебречь влиянием этого изменения, необходимо рассматривать распространение такой величины, которая сама является бесконечно малой. Вся трудность заключается в том, что тензор $g_{\mu\nu}$ не является бесконечно малым, а величины $h_{\mu\nu}$ хотя и бесконечно малы, но не образуют тензора. Если же гравитационное возмущение выражается *тензором* бесконечно малым первого порядка, например $B_{\mu\nu\sigma\rho}$, то не возникает никаких трудностей. Легко убедиться, что скорость распространения $B_{\mu\nu\sigma\rho}$ примерно равна единице *в каждой* приблизительно галилеевой системе координат. Согласно закону преобразования тензоров, бесконечно малое преобразование

обусловленную движением земли вокруг солнца. В отдаленной точке эклиптики величина инварианта $B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}\cdot B^{\mu\nu\sigma}_{\varepsilon}$ будет меняться с годовой периодичностью; если она имеет максимальное или минимальное значение в тот момент, когда земля видна против солнца, то мы заключаем, что волна возмущения распространялась до нас с той же скоростью, что и свет. На это можно было бы возразить невозможностью доказать, что это возмущение распространялось от земли; ведь оно могло бы представлять собой стационарную волну, постоянно существующую вокруг солнца, и эту волну с таким же правом можно было бы считать причиной годового движения земли, как и его следствием. Это возражение заслуживает внимания, однако мы думаем, что оно неправильно.]

В общем случае, если периодическое гравитационное возмущение распространяется в пространстве, то инвариант $B_{\mu\nu\sigma\rho}\cdot B^{\mu\nu\sigma\rho}$ будет периодически меняться, и этому будет соответствовать независимая ни от какой координатной системы периодичность изменения инвариантных свойств пространства-времени. Заклю-

---

координат изменяет каждый бесконечно малый тензор первого порядка лишь на величины второго порядка.

Действительно, если произвести, например, бесконечно малое преобразование координат

$$x_\alpha = g^\alpha_\mu\, x'_\mu + \xi_\alpha,$$

то из (23.22) следует

$$\delta'_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} = (\delta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})\left(g^\alpha_\mu + \frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x'_\mu}\right)\left(g^\beta_\nu + \frac{\partial\xi_\beta}{\partial x'_\nu}\right) = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + {}$$

$$+ \delta_{\mu\beta}\frac{\partial\xi_\beta}{\partial x'_\nu} + \delta_{\alpha\nu}\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x'_\mu},$$

с [точ]ностью до величин второго порядка. Следовательно, разность между $h'_{\mu\nu}$ и $h_{\mu\nu}$ будет того же порядка величины, что и само $h_{\mu\nu}$, поэтому закон распространения $h_{\mu\nu}$ даже приближенно неприменим к $h'_{\mu\nu}$.

В противоположность этому, в случае, например, тензора Риманна-Кристоффеля $B_{\mu\nu\sigma\rho}$, компоненты которого являются в нашем случае бесконечно малыми величинами первого порядка, мы можем написать с точностью до величин второго порядка:

$$B'_{\mu\nu\sigma\rho} = B_{\alpha\beta\gamma\delta}\left(g^\alpha_\mu + \frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x'_\mu}\right)\left(g^\beta_\nu + \frac{\partial\xi_\beta}{\partial x'_\nu}\right)\left(g^\gamma_\sigma + \frac{\partial\xi_\gamma}{\partial x'_\sigma}\right)\left(g^\delta_\rho + \frac{\partial\xi_\delta}{\partial x'_\rho}\right) = B_{\mu\nu\sigma\rho},$$

так что закон распространения $B_{\mu\nu\sigma\rho}$ в первом приближении применим и к $B'_{\mu\nu\sigma\rho}$.

чить отсюда, что это абсолютное изменение распространяется со скоростью света, было бы, конечно, слишком поспешно. Однако, если мы имеем возмущение, которое уже совсем не связано с создавшей его материальной системой, то с ним может происходить только одно: это возмущение не может покоиться, потому что абсолютного покоя не существует, оно должно перемещаться, и так как существует только одна (фундаментальная) скорость, не зависящая от системы отсчета, то ему не остается другого выбора, как перемещаться с этой скоростью.

В случае плоских волн этот вывод можно подтвердить малой части аналитически; одновременно, это исследование сможет осветить вопрос о том, каким образом «сопровождающие волны», зависящие только от волнообразной структуры (осциллирующего характера) выбранных координат, налагаются на первичные волны, представляющие инвариантные возмущения свойств пространства времени. Мы рассмотрим лишь волны бесконечно малой амплитуды и положим, как и прежде,

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}.$$

Возьмем плоские волны, распространяющиеся со скоростью V в отрицательном направлении оси X, так что величины $h_{\mu\nu}$ зависят только от $(x + Vt)$ и периодичны относительно этого аргумента. Если мы, как обычно, будем писать (x_1, x_2, x_3, x_4) вместо (x, y, z, t), то аргумент величин $h_{\mu\nu}$ будет равен $(x_1 + Vx_4)$. Если обозначить штрихом дифференцирование по этому аргументу, то

$$\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_1^2} = h''_{\mu\nu}; \quad \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_1 \partial x_4} = Vh''_{\mu\nu}, \quad \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_4^2} = V^2 h''_{\mu\nu}, \tag{57.91}$$

а остальные вторые производные $g_{\mu\nu}$ равны нулю.

Тензор Римана—Кристоффеля мы вычислим с помощью формулы (34.5):

$$(\mu\rho\nu\sigma) = B_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma \partial x_\rho} + \frac{\partial^2 g_{\sigma\rho}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu \partial x_\rho} - \frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x_\mu \partial x_\sigma}\right), \tag{57.92}$$

где члены второго порядка (произведения символов Кристоффеля) опущены. Для 21 различных составляющих (см. сноску на стр. 99) из (57.91) и (57.92) легко получаются следующие значения:

$$\left.\begin{array}{ll}
(1212)=\frac{1}{2}\,h''_{22}; & (1224)=-\frac{1}{2}\,Vh''_{22};\\
(1213)=\frac{1}{2}\,h''_{23}; & (1234)=-\frac{1}{2}\,Vh''_{23}=(1324);\\
(1313)=\frac{1}{2}\,h''_{33}; & (1334)=-\frac{1}{2}\,Vh''_{33};\\
\multicolumn{2}{c}{(2424)=\frac{1}{2}\,V^2h''_{22};}\\
\multicolumn{2}{c}{(2434)=\frac{1}{2}\,V^2h''_{23};}\\
\multicolumn{2}{c}{(3434)=\frac{1}{2}\,V^2h''_{33};}\\
\multicolumn{2}{c}{(1223)=(1323)=(1423)=(2323)=(2324)=(2334)=0}\\
\multicolumn{2}{c}{(1424)=\frac{1}{2}\,V^2h''_{12}-\frac{1}{2}\,Vh''_{24},}\\
\multicolumn{2}{c}{(1434)=\frac{1}{2}\,V^2h''_{13}-\frac{1}{2}\,Vh''_{34},}\\
\multicolumn{2}{c}{(1214)=\frac{1}{2}\,h''_{24}-\frac{1}{2}\,Vh''_{12},}\\
\multicolumn{2}{c}{(1314)=\frac{1}{2}\,h''_{34}-\frac{1}{2}\,Vh''_{13},}\\
\multicolumn{2}{c}{(1414)=\frac{1}{2}\,V^2h''_{11}-Vh''_{14}+\frac{1}{2}\,h''_{44}}
\end{array}\right\}\quad(57.93)$$

Тензор Эйнштейна $G_{\mu\nu}$ определяется с точностью до величин второго порядка выражением

$$G_{\mu\nu}=g^{\sigma\rho}B_{\mu\nu\sigma\rho}=g^{\sigma\rho}\,(\mu\rho\nu\sigma)=\delta^{\sigma\rho}\,(\mu\rho\nu\sigma).$$

Например,

$$G_{23}=\delta^{\sigma\rho}(2\rho\,3\sigma)=$$
$$=-(2131)-(2232)-(2333)+(2434)=-(1213)-0-0+(2434).$$

Эти результаты вытекают из антисимметрии тензора $B_{\mu\nu\sigma\rho}$ *).

*) Если принять во внимание свойства симметрии относительно внешних значков, указанные в п. 34 [в случае компоненты (2232), и — в случае (2333) — относительно внутренних значков].

(*И.*)

Если вычислить также и другие компоненты *), то мы получим окончательно уравнения Эйнштейна в виде:

$$\left.\begin{aligned}
G_{11} &= -(1212)-(1313)+(1414)=0\\
G_{22} &= -(1212)-(2323)+(2424)=0\\
G_{33} &= -(1313)-(2323)+(3434)=0\\
G_{44} &= -(1414)-(2424)-(3434)=0\\
G_{12} &= -(1323)+(1424)=0\\
G_{13} &= (1223)+(1434)=0\\
G_{14} &= (1224)+(1334)=0\\
G_{23} &= -(1213)+(2434)=0\\
G_{24} &= -(1214)+(2334)=0\\
G_{34} &= -(1314)-(2324)=0
\end{aligned}\right\} \tag{57.94}$$

Если вставить сюда значения $(\mu\rho\nu\sigma)$ из (57.93), то, опуская общий множитель $\frac{1}{2}$, получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
-(h''_{22}+h''_{33})+V^2h''_{11}-2Vh''_{14}+h''_{44} &= 0\\
-h''_{22}+V^2h''_{22} &= 0\\
-h''_{33}+V^2h''_{33} &= 0\\
-(V^2h''_{11}-2Vh''_{14}+h''_{44})-V^2(h''_{22}+h''_{33}) &= 0\\
V^2h''_{12}-Vh''_{24} &= 0\\
V^2h''_{13}-Vh''_{34} &= 0\\
-V(h''_{22}+h''_{33}) &= 0\\
-h''_{23}+V^2h''_{23} &= 0\\
-h''_{24}+Vh''_{12} &= 0\\
-h''_{34}+Vh''_{13} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{57.95}$$

Эти уравнения можно проинтегрировать, попросту уничтожая штрихи, означающие дифференцирование. Постоянные интегрирования должны равняться нулю, так как $h_{\mu\nu}$ — периодические функции. Тогда уравнения сведутся к следующим семи соотношениям

$$h_{22}+h_{33}=0; \tag{57.96}$$

$$(1-V^2)\,h_{22}=(1-V^2)\,h_{33}=(1-V^2)\,h_{23}=0; \tag{57.97}$$

$$h_{24}=Vh_{12};\quad h_{34}=Vh_{13}; \tag{57.98}$$

$$h_{44}-2Vh_{14}+V^2h_{11}=0 \tag{57.99}$$

---

*) При этом только нужно принять во внимание, что все выражения $(\mu\rho\nu\sigma)$, у которых значения трех значков равны, должны быть равны нулю вследствие их антисимметрии относительно внешних или внутренних значков. (*Н.*)

«Коэффициенты возмущения» $h_{\mu\nu}$ распадаются на три группы:

Поперечно-поперечные h_{22}, h_{33}, h_{23}.
Продольно-поперечные h_{12}, h_{13}, h_{24}, h_{34}.
Продольно-продольные h_{11}, h_{14}, h_{44}.

Мы увидим, что эти три группы представляют собой возмущения, распространяющиеся совершенно независимо друг от друга; так например, наличие или отсутствие продольно-продольных волн не оказывает никакого влияния на условия (57.98), которым должны удовлетворять коэффициенты, характеризующие продольно-поперечные волны. Мы обозначим эти три типа волн через *TT*, *LT*, *LL* *). Для волн *TT* величины h_{22}, h_{23} и h_{33} не могут одновременно равняться нулю; поэтому из (57.97) следует:

$$1 - V^2 = 0.$$

Значит, волны *TT* распространяются со скоростью единицы, т. е. со скоростью света.

Для волн *LL* и *LT* величины h_{22}, h_{23} и h_{33} равны нулю, и нет никакого независимого уравнения, определяющего V. Значение V, получающееся из уравнений (57.98) или (57.99), зависит от коэффициентов $h_{\mu\nu}$, характеризующих возмущение, и не обнаруживает никакой тенденции приближаться к скорости света.

Чтобы иметь теперь возможность отделить первичное возмущение пространства-времени от псевдо-волн, обусловленных выбором осциллирующих систем координат, вернемся к рассмотрению тензора Риманна—Кристоффеля (57.93).

Вследствие условий (57.98) и (57.99) пять последних коэффициентов нашей таблицы равны нулю. Остающиеся коэффициенты содержат только h''_{22}, h''_{23} и h''_{33}. Поэтому тензор Риманна—Кристоффеля зависит только от волн *TT*. Для волн *LL* или *LT* тензор Риманна—Кристоффеля равен нулю, так что пространство-время оказывается плоским, а предположенное возмущение — математической фикцией. Эти волны тотчас же исчезают, если произвести соответствующее преобразование координат.

Инвариант $B_{\mu\nu\sigma\rho} B^{\mu\nu\sigma\rho}$ зависит только от коэффициентов h''_{22}, h''_{23} и h''_{33}, характеризующих волны *TT*, и распространяется с соответствующей скоростью, т. е. со скоростью света. Это подтверждает сделанный нами выше вывод о том, что абсолютные

*) T — transversal (поперечный), L — longitudinal (продольный).

изменения тяготения, не зависящие от координатной системы, распространяются со скоростью света.

Теперь становится ясным также и смысл введенного нами выше ограничения (57.32) координатной системы. Оно было сделано с той целью, чтобы сделать скорость распространения псевдоволн LL или LT равной скорости распространения действительных волн TT. Однако, при этом псевдо-волны, распространяющиеся со скоростью света, используют свое сходство с действительными волнами для того, чтобы незаметно ускользнуть от нашего контроля. Изучение вопроса при этом, конечно, значительно упрощается, так как уравнение $\Box h_{\mu\nu} = 0$ применимо теперь ко всем волнам; но, с другой стороны, физическое понимание явлений при таком полном слиянии обоих видов волн становится гораздо труднее. Волны TT наиболее общего вида можно разложить на три «составляющие» («поляризованные» волны), соответственно коэффициентам

$$h_{23}, \; h_{22} - h_{33}, \; h_{22} + h_{33}.$$

Но согласно (57.96) распространение волн третьего рода в пустом пространстве невозможно. Это связано с тем, что такие волны несут с собой энергию (причем не псевдо-энергию $\mathfrak{t}_\mu^\nu$, которая переносится всеми волнами TT, а действительную энергию T_μ^ν), тогда как тензор T_μ^ν должен в пустом пространстве равняться нулю. Интересно отметить, что волны третьего рода все же могут распространяться в пространстве, которое хотя и свободно от всякой материи, но не является пустым в буквальном смысле слова. Такими волнами являются световые волны. Таким образом, электромагнитное распространение гравитационных возмущений заполняет пробел в нашем изложении *).

Интересен далее вопрос о том, будет ли стержень, вращающийся в некоторой плоскости вокруг своей центральной точки, терять энергию в виде излучаемых им волн тяготения. На этот вопрос Эйнштейн **) ответил в утвердительном смысле. Мы вернемся к нему в пп. 59а, 74а, но результат приведем уже здесь. Если I—момент инерции стержня, а ω его угловая скорость, то

---

*) О доказательстве этого—см. *Eddington*, Proc. Roy. Soc. 102 A. 281.

**) *Einstein*, Berl. Sitzungsber. 1918. стр. 154; ср. также *Eddington*, l. c.

энергия, излучаемая в единицу времени, равна $\frac{32}{5} I^2 \omega^6$, если все величины выражать в такой системе единиц, чтобы постоянная тяготения и скорость света были равны 1. Переходя к единицам CGS, мы получаем выражение

$$\left(\frac{32}{5} I^2 \omega^6\right) \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-60} \text{ эргов в секунду.}$$

Излучение зависит от асимметрии (точнее, от отклонения от вращательной симметрии) стержня; в случае круглого диска, вращающегося в своей плоскости вокруг своего центра, энергия совсем не будет излучаться. Далее, легко показать, что во всех случаях, с которыми на практике приходится иметь дело, излучение энергии происходит необычайно медленно.

Не вполне ясно, излучают ли гравитационную энергию двойные звезды, но, по всей вероятности, мы получим в этом случае результат того же порядка. Разница между стержнем и двойной звездой заключается в том, что в первом случае систему удерживают в равновесии силы сцепления, а во втором — тяготения. Если же для сохранения равновесия ввести достаточно сильное поле тяготения, то его уже нельзя будет считать бесконечно малым, и первое приближение окажется совершенно неприменимым.

Этому же вопросу посвящены замечания в конце п. 74а.

58. ЛАГРАНЖЕВА ФОРМА УРАВНЕНИЙ ТЯГОТЕНИЯ.

Функция Лагранжа определяется выражением

$$\mathrm{L} = g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \left(\{\mu\alpha, \beta\} \{\nu\beta, \alpha\} - \{\mu\nu, \alpha\} \{\alpha\beta, \beta\}\right) \tag{58.1}$$

выражение справа представляет собой часть выражения

$$\mathrm{G} = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \sqrt{-g}.$$

Для бесконечно малой вариации L мы получаем

$$\begin{aligned} \delta \mathrm{L} = \{\mu\alpha, \beta\}\, \delta\left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \{\nu\beta, \alpha\}\right) + \{\nu\beta, \alpha\}\, \delta\left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \{\mu\alpha, \beta\}\right) - \\ - \{\mu\nu, \alpha\}\, \delta\left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, \{\alpha\beta, \beta\}\right) - \{\alpha\beta, \beta\}\, \delta\left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, \{\mu\nu, \alpha\}\right) - \\ - \left(\{\mu\alpha, \beta\} \{\nu\beta, \alpha\} - \{\mu\nu, \alpha\} \{\alpha\beta, \beta\}\right) \delta\left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\right). \end{aligned} \tag{58.2}$$

Первый член в (58.2) принимает согласно (27.2) и (35.11) вид

$$\frac{1}{2}\{\mu\alpha,\beta\}\,\delta\left[\sqrt{-g}\cdot g^{\mu\nu}g^{\alpha\varepsilon}\left(\frac{\partial g_{\nu\varepsilon}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\beta\varepsilon}}{\partial x_\nu}-\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x_\varepsilon}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\{\mu\alpha,\beta\}\,\delta\left(\sqrt{-g}\cdot g^{\mu\nu}g^{\alpha\varepsilon}\;\frac{\partial g_{\nu\varepsilon}}{\partial x_\beta}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\{\mu\alpha,\beta\}\,\delta\left(\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\beta}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\{\mu\nu,\alpha\}\,\delta\left(\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right). \qquad (58.31)$$

Второй член сводится к тому же выражению. Третий член согласно (35.4) равен

$$-\{\mu\nu,\alpha\}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\sqrt{-g}\right). \qquad (58.32)$$

При преобразовании четвертого члена мы можем применить уравнение

$$g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\{\mu\nu,\alpha\}=-\frac{\partial}{\partial x}\,(g^{\alpha\nu}\sqrt{-g}),$$

вытекающее *) из (51.44), так как расходимость $g^{\alpha\nu}$ равна нулю.

Поэтому после некоторых изменений немых значков четвертый член принимает вид

$$\{\nu\beta,\beta\}\;g^\alpha_\mu\;\delta\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\,(g^{\mu\nu}\sqrt{-g})\right). \qquad (58.33)$$

Если подставить эти значения в (58.2), то получим

$$\delta\mathbf{L}=[-\{\mu\nu,\alpha\}+g^\alpha_\mu\{\nu\beta,\beta\}]\;\delta\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\mu\nu}\sqrt{-g})\right]-[\{\mu\alpha,\beta\}\{\nu\beta,\alpha\}-$$

$$-\{\mu\nu,\alpha\}\{\alpha\beta,\beta\}]\;\delta\,(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}). \qquad (58.4)$$

Положим далее

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}\sqrt{-g};\;\;\mathfrak{g}^{\mu\nu}_\sigma=\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\,(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}). \qquad (58.45)$$

---

*) Заметим, что при выводе формулы (51.41) антисимметрия $A^{\mu\nu}$ еще не была использована.

(*Н.*)

Тогда из (58.4) вытекают соотношения

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{g}^{\mu\nu}} = -\left[\{\mu\alpha, \beta\}\{\nu\beta, \alpha\} - \{\mu\nu, \alpha\}\{\alpha\beta, \beta\}\right] \tag{58.51}$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{g}^{\mu\nu}_{\alpha}} = \left[-\{\mu\nu, \alpha\} + g^{\alpha}_{\mu}\{\nu\beta, \beta\}\right], \tag{58.52}$$

если выразить L в функции $\mathrm{g}^{\mu\nu}$ и $\mathrm{g}^{\mu\nu}_{\alpha}$.

Сравнение с (37.2) приводит к соотношению

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{g}^{\mu\nu}_{\alpha}} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{g}^{\mu\nu}}. \tag{58.6}$$

Этот напоминает уравнения Лагранжа классической динамики. Если рассматривать $\mathrm{g}^{\mu\nu}$ как координату q, а x_{α} как четырехмерное время t, так что $\mathrm{g}^{\mu\nu}_{\alpha}$ представляет собой скорость q', то уравнения тяготения $G_{\mu\nu} = 0$ соответствуют известным уравнениям

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial q'} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial q} = 0.$$

Обе следующие формулы выражают важные свойства функции Лагранжа:

$$\mathrm{g}^{\mu\nu} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{g}^{\mu\nu}} = -\mathrm{L} \tag{58.71}$$

$$\mathrm{g}^{\mu\nu}_{\alpha} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{g}^{\mu\nu}_{\alpha}} = 2\mathrm{L}. \tag{58.72}$$

Первая сразу следует из (58.51). Чтобы доказать вторую, примем во внимание, что по (30.4)

$$\mathrm{g}^{\mu\nu}_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (g^{\mu\nu}\sqrt{-g}) = \sqrt{-g}\, \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\{\alpha\varepsilon, \varepsilon\} =$$
$$= \sqrt{-g}\,\left[-\{\varepsilon\alpha, \mu\}\, g^{\varepsilon\nu} - \{\varepsilon\alpha, \nu\}\, g^{\mu\varepsilon} + \{\alpha\varepsilon, \varepsilon\}\, g^{\mu\nu}\right],$$

так как ковариантная производная от $g^{\mu\nu}$ равна нулю.

Поэтому из (58.52) вытекает

$$\mathrm{g}^{\mu\nu}_{\alpha} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{g}^{\mu\nu}_{\alpha}} = \sqrt{-g}\,[\{\mu\nu, \alpha\}\,\{\varepsilon\alpha, \mu\}\, g^{\varepsilon\nu} + \{\mu\nu, \alpha\}\,\{\varepsilon\alpha, \nu\}\, g^{\varepsilon\mu} -$$
$$- \{\mu\nu, \alpha\}\,\{\alpha\varepsilon, \varepsilon\}\, g^{\mu\nu} - \{\nu\beta, \beta\}\, g^{\alpha}_{\mu}\{\varepsilon\alpha, \mu\}\, g^{\varepsilon\nu} -$$
$$- \{\nu\beta, \beta\}\, g^{\alpha}_{\mu}\{\varepsilon\alpha, \nu\}\, g^{\varepsilon\mu} + \{\nu\beta, \beta\}\, g^{\alpha}_{\mu}\{\alpha\varepsilon, \varepsilon\}\, g^{\mu\nu}],$$

что после изменения немых значков согласно (58.1) превращается в выражение

$$\sqrt{-g}\ [\{\beta\nu,\alpha\}\}\ \{\mu\alpha,\beta\}\ g^{\mu\nu}+\{\mu\beta,\alpha\}\ \{\nu\alpha,\beta\}\ g^{\nu\mu}-\{\mu\nu,\alpha\}\ \{\iota\beta,\beta\}\ g^{\mu\nu}-$$
$$-\{\nu\beta,\beta\}\ \{\mu\alpha,\alpha\}\ g^{\mu\nu}-\{\alpha\beta,\beta\}\ \{\nu\mu,\alpha\}\ g^{\nu\mu}+$$
$$+\{\nu\beta,\beta\}\ \{\mu\varepsilon,\varepsilon\}\ g^{\mu\nu}]=2\mathrm{L}.$$

Уравнения (58.71) и (58.72) показывают, что лагранжева функция есть однородная функция «координат» порядка — 1, и «скоростей» порядка 2.

Выведем еще одно весьма полезное выражение для G. Согласно (58.6) имеем

$$\mathrm{G}=\mathrm{g}^{\mu\nu}G_{\mu\nu}=\mathrm{g}^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{g}^{\mu\nu}_\alpha}-\mathrm{g}^{\mu\nu}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{g}^{\mu\nu}},$$

а это в силу (58.71) и (58.72) дает

$$\mathrm{G}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mathrm{g}^{\mu\nu}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{g}^{\mu\nu}_\alpha}\right)-\mathrm{g}^{\mu\nu}_\alpha\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{g}^{\mu\nu}_\alpha}-\mathrm{g}^{\mu\nu}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{g}^{\mu\nu}}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mathrm{g}^{\mu\nu}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{g}^{\mu\nu}_\alpha}\right)-\mathrm{L}. \tag{58.8}$$

Мы видим, что $(\mathrm{G}+\mathrm{L})$ имеет вид *расходимости* (51.12); но величина, расходимость которой равна $(\mathrm{G}+\mathrm{L})$, не есть векторная плотность, и точно также L не есть скалярная плотность.

Выведем еще одну формулу, которая нам понадобится в п.59. Согласно (35.3)

$$d\,(g^{\mu\nu}\sqrt{-g})=\sqrt{-g}\ (dg^{\mu\nu}+g^{\mu\nu}\cdot\frac{1}{2}\ g^{\alpha\beta}\,dg_{\alpha\beta}).$$

Отсюда, применяя (35.2), получим

$$G_{\mu\nu}\cdot d\,(g^{\mu\nu}\sqrt{-g})=\sqrt{-g}\ (-G^{\mu\nu}dg_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\ Gg^{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta})=$$
$$=-(G^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\ g^{\mu\nu}\ G)\sqrt{-g}\cdot dg_{\mu\nu}=8\pi\mathrm{T}^{\mu\nu}dg_{\mu\nu}. \tag{58.91}$$

Следовательно

$$8\pi\mathrm{T}^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}=G_{\mu\nu}\mathrm{g}^{\mu\nu}_\alpha=\mathrm{g}^{\mu\nu}_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_\beta}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{g}^{\mu\nu}_\beta}-\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{g}^{\mu\nu}}\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\mathrm{g}^{\mu\nu}_\alpha\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{g}^{\mu\nu}_\beta}\right)-\frac{\partial}{\partial x_\beta}\,\mathrm{g}^{\mu\nu}_\alpha\cdot\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{g}^{\mu\nu}_\beta}-\mathrm{g}^{\mu\nu}_\alpha\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{g}^{\mu\nu}}. \tag{58.92}$$

Но

$$\frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}_\beta} \frac{\partial g^{\mu\nu}_\beta}{\partial x_\alpha},$$

и, так как

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}{\partial x_\beta},$$

то (58.92) сводится к уравнению

$$8\pi T^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(g^{\mu\nu}_\alpha \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}_\beta}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left\{g^{\mu\nu}_\alpha \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}_\beta} - g^\beta_\alpha L\right\} \tag{58.93}$$

59. ПСЕВДО-ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ.

Законы сохранения материальной энергии и количества движения формально выражаются уравнениями

$$\frac{\partial T^\nu_\mu}{\partial x_\nu} = 0, \tag{59.1}$$

или, если обозначить координаты через x, y, z, t,

$$\frac{\partial}{\partial x} T^1_\mu + \frac{\partial}{\partial y} T^2_\mu + \frac{\partial}{\partial z} T^3_\mu + \frac{\partial}{\partial t} T^4_\mu = 0.$$

Умножим это на $dx\,dy\,dz$ и проинтегрируем по заданной трехмерной области. Последний член будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\int\int T^4_\mu \, dx\,dy\,dz,$$

а остальные три члена будут поверхностными интегралами по границе области. В таком случае закон (59.1) утверждает, что скорость изменения величины

$$\int\int\int T^4_\mu \, dx\,dy\,dz$$

равна некоторым выражениям, описывающим процессы на границе области. Другими словами, изменения интеграла никогда не могут возникнуть внутри области; их причины должны переходить через ее границу. В этом и заключается смысл «сохранения интеграла».

Уравнение (59.1) применимо только к таким координатным системам, для которых нет никакого силового поля. Мы обобщили это уравнение в соответствующее тензорное уравнение $T^{\nu}_{\mu\nu} = 0$, которое уже не является математическим выражением сохранения чего-либо. Интересно сравнить этот путь с традиционным методом, в котором уравнение (59.1) обобщается таким образом, что форма закона сохранения явно остается.

В классической механике закон сохранения спасают введением нового вида энергии — потенциальной энергии, не содержащейся в T^{ν}_{μ}. При этом предполагается, что потенциальная энергия запасена в поле тяготения; количество движения и компоненты напряжения тоже могут иметь какие-то невидимые дополнения в поле тяготения. Поэтому к T^{ν}_{μ} нужно прибавить добавочное выражение t^{ν}_{μ}, объединяющее потенциальную энергию, количество движения и напряжение. Тогда закон сохранения должен иметь место только для всей суммы. Если положить

$$S^{\nu}_{\mu} = T^{\nu}_{\mu} + t^{\nu}_{\mu}, \tag{59.2}$$

то искомое обобщение (59.1) будет гласить

$$\frac{\partial S^{\nu}_{\mu}}{\partial x_{\nu}} = 0. \tag{59.3}$$

Разница между релятивистским и классическим пониманием заключается таким образом в следующем. В обеих теориях устанавливается, что хотя T^{ν}_{μ} и сохраняется в некоторых случаях, но в общем случае это сохранение не имеет места. В теории относительности ищется более общий закон, которому подчиняется T^{ν}_{μ}, справедливый также и в том случае, когда T^{ν}_{μ} не сохраняется точно; этим законом оказывается соотношение $T^{\nu}_{\mu\nu} = 0$. Классическая же теория вводит новый вид энергии таким образом, чтобы закон сохранения оставался верным, но для другой величины, а именно в форме $\dfrac{\partial S^{\nu}_{\mu}}{\partial x_{\nu}} = 0$. Следовательно, релятивистская теория придерживается физической величины и видоизменяет закон. Классическая же теория придерживается закона и видоизменяет физическую величину. Оба эти метода, конечно, можно выразить эквивалентными формулами, и мы в предшествующих исследованиях называли уравнение $T^{\nu}_{\mu\nu} = 0$ законом сохранения энергии и количества движения, потому что, хотя это уравнение и не имеет вида закона сохранения, оно все же выражает в точности те свойства, которые классическая механика приписывает закону сохранения.

Релятивистское изучение дало нам возможность открыть точные уравнения, и мы можем применить их теперь для получения точного выражения величины S^{ν}_{μ}, введенной при классическом изучении.

Очевидно, что t^{ν}_{μ}, а следовательно и S^{ν}_{μ} не могут быть тензорными плотностями, так как при употреблении естественных координат величина t^{ν}_{μ} равна нулю в соответствующей точке, и поэтому должна была бы всегда равняться нулю, если бы она была тензорной плотностью. Назовем t^{ν}_{μ} псевдо-тензорной плотностью потенциальной энергии.

Явное выражение t^{ν}_{μ} должно быть вычислено из условия (59.3); (55.6) дает при этом

$$\frac{\partial t^{\nu}_{\mu}}{\partial x_{\nu}} = -\frac{\partial T^{\nu}_{\mu}}{\partial x_{\nu}} = -\frac{1}{2}\, T^{\alpha\beta}\, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}},$$

что согласно (58.93) равно

$$-\frac{1}{16\pi}\, \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left\{ g^{\alpha\beta}_{\mu}\, \frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}_{\nu}} - g^{\nu}_{\mu}\, L \right\}.$$

Поэтому *)

$$16\pi t^{\nu}_{\mu} = g^{\nu}_{\mu}\, L - g^{\alpha\beta}_{\mu}\, \frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}_{\nu}}. \tag{59.4}$$

Это напоминает гамильтонов интеграл энергии в общей динамике

$$-h = L - \sum q'\, \frac{\partial L}{\partial q'}.$$

Посредством сокращения можно из (59.4) получить псевдо-скалярную плотность; принимая во внимание (58.72), мы получим

$$16\pi t = 4L - g^{\alpha\beta}_{\mu}\, \frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}_{\mu}} = 2L.$$

---

*) К этому выражению t^{ν}_{μ} можно, конечно, прибавить добавочный член «расходимость» которого равна нулю.

Если сравнить это выражение с (54.4), то обе формулы можно сопоставить следующим образом

$$\left.\begin{aligned} L &= 8\pi t \\ G &= 8\pi T \end{aligned}\right\} \qquad (59.5)$$

Необходимо подчеркнуть, что в этом параграфе речь идет о переходе от старой к новой точке зрения. Величина t_μ^ν представляет собой потенциальную энергию классической механики, мы же вообще не считаем ее каким-либо видом энергии. Она не является тензорной плотностью, и ее можно сделать равной нулю в любой точке, произведя соответствующее преобразование координат. Мы не рассматриваем t_μ^ν как некоторое абсолютное свойство, характеризующее структуру мира. Действительно, мы можем простым выбором координат получить отличные от нуля значения t_μ^ν в пустом пространстве, не содержащем тяготеющей материи. Тензорная плотность T_μ^ν содержит всю наблюдаемую энергию, и мы называем ее либо гравитационной, либо материальной энергией, смотря по тому, выражена ли она через $g_{\mu\nu}$ или через ρ_0, u, v, w.

Эта разница между классическим и релятивистским взглядом на энергию заставляет вспомнить замечание, сделанное нами во введении, об определении физических величин. После того как был найден принцип сохранения энергии, физики превратили его практически в определение энергии, так что энергия рассматривалась как *нечто*, подчиняющееся закону сохранения. При этом физик следовал приемам чистого математика, когда он, вместо того чтобы описать измерение энергии, определял ее посредством тех свойств, которыми он наделял ее по своему желанию. Подобный способ в свете новейших исследований оказался очень неудачным. Верно, конечно, что можно найти величину S_μ^ν, удовлетворяющую такому определению, но только она не представляет собой тензора и поэтому не может явиться непосредственной мерой какого-либо инвариантного мирового соотношения. Вместо того чтобы обременять себя подобной величиной, не представляющей сейчас существенного интереса, мы возвращаемся к первоначальной идее vis viva («живой силы») — правда обобщенной, поскольку в нее включена теплота или «живая сила» молекул, но зато не потенциальная энергия. При этом мы находим, что эта «живая сила» сохраняется формально не во всех случаях, но что она подчиняется закону, согласно которому ее расходимость равна нулю; это обстоятельство является с нашей новой точки зрения более простым и значительным, чем простое сохранение.

Проинтегрировав по изолированному материальному телу, можно положить

$$\int\int\int \mathrm{T}_1^4\, dx\, dy\, dz = -Mu, \qquad \int\int\int \mathrm{T}_3^4\, dx\, dy\, dz = -Mw,$$
$$\int\int\int \mathrm{T}_2^4\, dx\, dy\, dz = -Mv, \qquad \int\int\int \mathrm{T}_4^4\, dx\, dy\, dz = -M,$$

и

$$\int\int\int \mathrm{S}_1^4\, dx\, dy\, dz = -M'u', \qquad \int\int\int \mathrm{S}_3^4\, dx\, dy\, dz = -M'w'$$
$$\int\int\int \mathrm{S}_2^4\, dx\, dy\, dz = -M'v', \qquad \int\int\int \mathrm{S}_4^4\, dx\, dy\, dz = +M',$$

причем последние выражения содержат потенциальную энергию и количество движения тела. Изменения величин $M'u'$ и т. д. могут обусловливаться только подведением энергии снаружи через поверхность тела, а изменения Mu и т. д. — только взаимным притяжением его частиц. Очевидно, направление кинематической скорости, т. е. направление мировой линии тела, определяется отношениями $u:v:w:1$, тогда как направление $u':v':w':1$ изменяется в зависимости от выбора системы координат.

59а. ПОТЕРЯ ЭНЕРГИИ ВРАЩАЮЩИМСЯ СТЕРЖНЕМ

Рассмотрим материальную систему, находящуюся в периодическом движении и отдающую свою энергию T_4^4 в форме гравитационных волн. Окружим эту систему замкнутой поверхностью S, проходящей в пустом пространстве. Если проинтегрировать (59.3) по области, ограниченной этой поверхностью S, то (при $\mu = 4$) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int (\mathrm{T}_4^4 + \mathrm{t}_4^4)\, dx\, dy\, dz =$$
$$= -\int\int\int \left(\frac{\partial \mathrm{S}_4^1}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{S}_4^2}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{S}_4^3}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz =$$
$$= -\int\int (l\mathrm{S}_4^1 + m\mathrm{S}_4^2 + n\,\mathrm{S}_4^3)\, dS,$$

где l, m, n — направляющие косинусы внутренней нормали. Так как на самой поверхности $\mathrm{T}_\mu^\nu = 0$, то это выражение приводится к следующему

$$-\int\int (l\mathrm{t}_4^1 + m\,\mathrm{t}_4^2 + n\,\mathrm{t}_4^3)\, dS.$$

Если бы можно было отвлечься от изменений $\mathfrak{t}_4^4$ в области, ограниченной поверхностью S, то последний интеграл давал бы уменьшение материальной энергии $\mathfrak{T}_4^4$ системы в единицу времени. Строго говоря, $\mathfrak{t}_4^4$ не может оставаться постоянным, когда состояние материальной системы меняется, так как при этом соответствующим образом должно измениться и поле тяготения. При действительном вычислении это изменение $\mathfrak{t}_4^4$ не принимается в расчет, так как мы ищем квазистационарное решение *). Такое решение предполагает установившееся состояние как системы, так и окружающего поля, так что всякая потеря энергии должна быть компенсирована непрерывным притоком новой энергии к системе. Очевидно, необходимый для этого приток энергии в единицу времени равен

$$\int\int(l\mathfrak{t}_4^1+m\,\mathfrak{t}_4^2+n\,\mathfrak{t}_4^3)\,dS. \qquad (59.1\text{a})$$

Следовательно, составляющие псевдотензора $\mathfrak{t}_4^1$, $\mathfrak{t}_4^2$, $\mathfrak{t}_4^3$ образуют «вектор Пойнтинга», поток которого сквозь замкнутую поверхность равен энергии, уносимой гравитационными волнами. То обстоятельство, что этот вектор выражает поток энергии, можно было бы предвидеть по аналогии с $\mathfrak{T}_4^1$, $\mathfrak{T}_4^2$, $\mathfrak{T}_4^3$. Однако, необходимо иметь в виду, что, согласно предыдущему параграфу, потенциальная энергия, протекающая сквозь поверхность S', представляет фикцию; в частности, указываемая этим вектором *локализация* потока энергии, на которую указывает этот вектор, не имеет никакого физического значения. Поэтому величины $\mathfrak{t}_4^1$, $\mathfrak{t}_4^2$, $\mathfrak{t}_4^3$ нужно считать просто вспомогательными математическими потери чинами, которые необходимы для вычисления полной вели- энергии (59.1а).

Согласно (59.4) и (58.52) для $\mu\neq\nu$ мы получаем

$$16\pi\,\mathfrak{t}_\mu^\nu=\mathfrak{g}_\mu^{\alpha\beta}\left[\{\alpha\beta,\nu\}-g_\alpha^\nu\frac{\partial}{\partial x_\beta}\lg\sqrt{-g}\right]. \qquad (59.2\text{a})$$

Возьмем теперь полученное в п. 57 приближенное решение для таких волн тяготения, которые исходят из материальных источников. Если

$$g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu},$$

*) Последнему соответствует «состояние» (здесь: состояние движения), очень медленно меняющееся со временем. (*И.*)

то, с точностью до величин второго порядка,

и

$$\left.\begin{aligned} -g &= 1 - h_{11} - h_{22} - h_{33} + h_{44} = 1 + h \\ g^{\mu\nu} &= \delta^{\mu\nu} - h^{\mu} \qquad (h^{\mu\nu} = \delta^{\mu\alpha}\,\delta^{\nu\beta}\,h_{\alpha\beta})\ ^{*)} \end{aligned}\right\} \tag{59.31a}$$

Поэтому

$$g^{\mu\nu}\sqrt{-g} = \delta^{\mu\nu} - \left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\delta^{\mu\nu} h\right). \tag{59.32a}$$

Если положить

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\delta_{\mu\nu} h, \tag{59.33a}$$

то из (59.32a) вытекает

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta}_{\mu} = -\frac{\partial \gamma^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}},$$

и все выражение (59.2a) сводится к следующему:

$$16\pi\, \mathfrak{t}^{\nu}_{\mu} = \frac{\partial \gamma^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}}\left\{-\frac{\partial \gamma^{\nu}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{1}{2}\,\delta^{\nu\sigma}\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma}} - \frac{1}{4}\,\delta^{\nu\sigma}\,\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial \gamma}{\partial x_{\sigma}}\right\}^{**)},$$

или, если вместо $\delta^{\nu\sigma}\dfrac{\partial}{\partial x_{\sigma}}$ написать $\dfrac{\partial}{\partial x^{\nu}}$,

$$16\pi\, \mathfrak{t}^{\nu}_{\mu} = -\frac{\partial \gamma^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial \gamma^{\nu}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial \gamma}{\partial x^{\nu}}\right). \tag{59.4a}$$

---

*) Действительно, для этих значений $g^{\mu\nu}$ мы можем написать с точностью до членов второго порядка

$$g_{\mu\sigma}\, g^{\sigma\nu} = (\delta_{\mu\sigma} + h_{\mu\sigma})\,(\delta^{\sigma\nu} - \delta^{\sigma\beta}\,\delta^{\alpha\nu}\,h_{\alpha\beta}) = \delta_{\mu\sigma}\,\delta^{\sigma\nu} + \delta^{\sigma\nu}\,h_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\,\delta^{\sigma\beta}\,\delta^{\alpha\nu}\,h_{\alpha\beta} = \delta^{\nu}_{\mu},$$

так как два последние члена: $\delta^{\sigma\nu}\,h_{\mu\sigma}$ и

$$-\delta_{\mu\sigma}\,\delta^{\sigma\beta}\,\delta^{\alpha\nu}\,h_{\alpha\beta} = -\delta^{\beta}_{\mu}\,\delta^{\alpha\nu}\,h_{\alpha\beta} = -\delta^{\alpha\nu}\,h_{\alpha\mu} = -\delta^{\sigma\nu}\,h_{\sigma\mu}$$

равны и обратны по знаку. (*H*).

**) Проделаем это вычисление несколько подробнее. $\{\alpha\beta,\nu\}$ с точностью до величин второго порядка равно

$$\{\alpha\beta,\ \nu\} = \frac{1}{2}\,g^{\nu\sigma}\left[\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma}}\right] = \frac{1}{2}\,\delta^{\nu\sigma}\left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma}}\right),$$

Уравнения (57.4) и (57.5), определяющие поле тяготения, можно теперь написать в виде

$$\frac{\partial \gamma^{\alpha}_{\mu}}{\partial x_{\alpha}} = 0 \tag{59.51a}$$

и

$$\Box \gamma^{\alpha}_{\mu} = -16\pi T^{\alpha}_{\mu}. \tag{59.52a}$$

В целях облегчения действительного вычисления можно еще больше упростить (59.4а). Если положить

$$p^{\nu}_{\mu} = \frac{\partial \gamma^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial \gamma^{\nu}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} - \frac{1}{2} \delta^{\nu}_{\mu} \frac{\partial \gamma^{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma}} \frac{\partial \gamma^{\sigma}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}},$$

то получим

$$\frac{\partial p^{\nu}_{\mu}}{\partial x_{\nu}} = \frac{\partial \gamma^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left(\frac{\partial \gamma^{\nu}_{\alpha}}{\partial x_{\nu}} \right) + \frac{\partial \gamma^{\nu}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial^2 \gamma^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} -$$
$$- \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma^{\sigma}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial^2 \gamma^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu} \partial x_{\sigma}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma^{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma}} \frac{\partial^2 \gamma^{\sigma}_{\alpha}}{\partial x_{\mu} \partial x_{\beta}}.$$

н, так как здесь по α и β производится суммирование, то это эквивалентно

$$\delta^{\nu\sigma} \frac{\partial h_{\alpha\sigma}}{\partial x_{\beta}} - \frac{1}{2} \delta^{\nu\sigma} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma}}. \tag{a}$$

Для $g^{\nu}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \log \sqrt{-g}$ мы получаем в том же приближении

$$\delta^{\nu}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \lg \sqrt{1+h} = \frac{1}{2} \delta^{\nu}_{\alpha} \frac{\partial h}{\partial x_{\beta}}. \tag{b}$$

С другой стороны, мы имеем с точностью до величин второго порядка

$$\gamma^{\nu}_{\mu} = \delta^{\nu\sigma} \gamma_{\mu\sigma} = \delta^{\nu\sigma} h_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} \delta^{\nu}_{\mu} h, \quad \gamma = \gamma^{\nu}_{\nu} = h - 2h = -h.$$

Если мы выразим (a) и (b) через γ с помощью соотношений

$$h_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \gamma,$$

то вместо (a) получим

$$\delta^{\nu\sigma} \frac{\partial \gamma_{\alpha\sigma}}{\partial x_{\beta}} - \frac{1}{2} \delta^{\nu}_{\alpha} \frac{\partial \gamma}{\partial x_{\beta}} - \frac{1}{2} \delta^{\nu\sigma} \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma}} + \frac{1}{4} \delta^{\nu\sigma} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma}{\partial x_{\sigma}},$$

а вместо (b)

$$-\frac{1}{2} \delta^{\nu}_{\alpha} \frac{\partial \gamma}{\partial x_{\beta}}.$$

Следовательно,

$$16\pi t^{\nu}_{\mu} = -\frac{\partial \gamma^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} \left(\frac{\partial \gamma^{\nu}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} - \frac{1}{2} \delta^{\nu\sigma} \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma}} + \frac{1}{4} \delta^{\nu\sigma} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma}{\partial x_{\sigma}} \right),$$

что совпадает с выражением, стоящим в тексте. (*Н.*)

Оба последние члена равны друг другу (так как ведь операторы $\delta^{\mu\nu}$ и $\delta_{\mu\nu}$, переносящие значки вверх и вниз, можно переставлять со знаком дифференцирования), поэтому все три последние члена дают в сумме нуль. Первый член равен нулю на основании (59.51а). Следовательно, $\frac{\partial p_\mu^\nu}{\partial x_\nu}=0$, так что p_μ^ν представляет собой функцию, которую можно свободно прибавить к решению (59.4) дифференциального уравнения для $16\pi\,\mathfrak{t}_\mu^\nu$ *). При $\mu\neq\nu$ это прибавление дает

$$32\pi\,\mathfrak{t}_\mu^\nu=\frac{\partial\gamma^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}-\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma}{\partial x_\mu}\frac{\partial\gamma}{\partial x^\nu},\tag{59.6a}$$

где, хотя $\mathfrak{t}_\mu^\nu$ уже не есть та же самая величина, что в (59.4а), но так же, как и прежде, является допустимым выражением для потенциальной энергии и т. д. Так как каждый из множителей верен с точностью до величин второго порядка, то все выражение верно с точностью до величин третьего порядка относительно $h_{\mu\nu}$.

Найдем теперь решение для стержня, вращающегося в плоскости YZ около своей середины. Пусть $2a$ — его длина, σ — масса на единицу длины и ω — угловая скорость вращения. В момент, когда стержень направлен по оси Y, его скорость, имеющая тогда направление оси Z, дает определенную долю составляющей T_{33} тензора энергии; полная величина ее для всего стержня, которую мы обозначим через $\{T_{33}\}$, равна $\frac{2}{3}\sigma\omega^2a^3$. При этом неизбежно должно иметь место растяжение стержня в направлении Y; если вычислить составляющую напряжения p_{yy} по законам элементарной динамики и проинтегрировать ее по всей длине стержня, то полная величина составляющей $\{T_{22}\}$ окажется равной $-\frac{2}{3}\sigma\omega^2a^3$ **).

---

*) См. сноску на стр. 250.

**) Действительно, сила напряжения, действующая в сечении стержня, находящемся на расстоянии ρ от его середины, сообщает элементам соответствующей половины стержня, удаленным от середины на расстояние

Если же стержень образует с осью Y угол ωt, то соответствующие результаты имеют вид

$$\{T_{22}\} = -\{T_{33}\} = -\frac{2}{3}\sigma\omega^2 a^3 \cos 2\omega t,$$

$$\{T_{23}\} = -\frac{2}{3}\sigma\omega^2 a^3 \sin 2\omega t.$$

Мы получим эти соотношения, если преобразуем вышеуказанные результаты к новым осям с помощью тензорного закона преобразования *).

Решение уравнения $\square\gamma_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}$ для точечного источника $\{T_{\mu\nu}\}$ определяется [см. (57.6)] выражением

$$\gamma_{\mu\nu} = -4\frac{\{T_{\mu\nu}\}_{t-r}}{r},$$

$r > \rho$, ускорение $-\omega^2 r$. Значит, составляющая напряжения p_{yy} на расстоянии ρ от середины равна

$$-\sigma\int_\rho^a \omega^2 r = -\frac{1}{2}\sigma\omega^2(a^2-\rho^2).$$

Следовательно, полная величина p_{yy} равна

$$2\int_0^a -\frac{1}{2}\sigma\omega^2(a^2-\rho^2)\,d\rho = -\sigma\omega^2\left(a^2\rho-\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = -\frac{2}{3}\sigma\omega^2 a^3. \quad (H.)$$

*) Действительно, квадратичная форма $T_{22}y^2 + 2T_{23}yz + T_{33}z^2$ имеет при $t = 0$ значение

$$-\frac{2}{3}\omega^2\sigma a^3(y^2-z^2) = -\frac{2}{3}\omega^2\sigma a^3 \mathbf{R}(y+iz)^2,$$

где $\mathbf{R}f$ означает вещественную часть f. С другой стороны, мы получим формулы преобразования от вращающихся к неподвижным осям, сравнивая в формуле

$$y_1 + iz_1 = (y+iz)e^{i\omega t},$$

вещественные и мнимые части. Это дает следующее значение квадратичной формы в любой момент t:

$$-\frac{2}{3}\omega^2\sigma a^3 \mathbf{R}(y-iz)^2 = -\frac{2}{3}\omega^2\sigma a^3 \mathbf{R}(y_1+iz_1)^2 e^{-2i\omega t} =$$

$$= -\frac{2}{3}\omega^2\sigma a^3(y_1^2 - z_1^2)\cos 2\omega t + 2y_1 z_1 \sin 2\omega t,$$

откуда и следуют приведенные в тексте значения $T_{\mu\nu}$. (H.)

так что, полагая $p = 2\omega$, получим

$$\gamma_{22} = -\gamma_{33} = \frac{2}{3}\sigma p^2 a^3 \frac{\cos p(t-r)}{r},$$

$$\gamma_{23} = \frac{2}{3}\sigma p^2 a^3 \frac{\sin p(t-r)}{r}.$$

Но это не единственные неравные нулю составляющие $\gamma_{\mu\nu}$, так как хотя, например, $\{T_{24}\} = 0$, легко все же убедиться, что вращающийся стержень является «дипольным» источником γ_{24} *). Остальные составляющие можно вычислить из уравнения (59.51a) которое дает следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\gamma_{24}}{\partial t} &= \frac{\partial\gamma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_{23}}{\partial z}, \\ \frac{\partial\gamma_{34}}{\partial t} &= \frac{\partial\gamma_{23}}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_{33}}{\partial z}, \\ \frac{\partial\gamma_{44}}{\partial t} &= \frac{\partial\gamma_{24}}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_{34}}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (59.7a)$$

Для решения нашей задачи об излучении нам нужно рассмотреть точки, находящиеся на большом расстоянии от стержня, так что можно сохранить лишь члены порядка $\frac{1}{r}$ и пренебречь величинами порядка $\frac{1}{r^2}$. Тогда получаются следующие значения:

$$\gamma_{22} = A\cos p(t-r), \quad \gamma_{23} = A\sin p(t-r), \quad \gamma_{33} = -A\cos p(t-r),$$

$$\gamma_{24} = A\left(-\frac{y}{r}\cos p(t-r) - \frac{z}{r}\sin p(t-r)\right),$$

$$\gamma_{34} = A\left(-\frac{y}{r}\sin p(t-r) + \frac{z}{r}\cos p(t-r)\right),$$

$$\gamma_{44} = A\left(\frac{y^2-z^2}{r^2}\cos p(t-r) + \frac{2yz}{r^2}\sin p(t-r)\right),$$

где $A = \frac{2}{3}\frac{\sigma p^2 a^3}{r}$, и может рассматриваться как постоянная при каждом дифференцировании. Точно так же мы найдем, что

$$\gamma = -\gamma_{11} - \gamma_{22} - \gamma_{33} + \gamma_{44} = \gamma_{44}.$$

---

*) Относительно принципиальных соображений о необходимости появления в данной задаче «дипольных» источников — см. работу автора, цитированную на стр. 243. *(П.)*

Нормальная составляющая потока энергии $\mathfrak{t}_4^{\nu}$ сквозь сферу очень большого радиуса r определяется согласно (59.6а) выражением

$$
\begin{aligned}
32\pi\, \mathfrak{t}_4^{\nu} &= -\frac{\partial \gamma^{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma}{\partial t}\frac{\partial \gamma}{\partial r} = \\
&= -\frac{\partial \gamma_{22}}{\partial t}\frac{\partial \gamma_{22}}{\partial r} - 2\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial t}\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial r} - \frac{\partial \gamma_{33}}{\partial t}\frac{\partial \gamma_{33}}{\partial r} + \\
&+ 2\frac{\partial \gamma_{24}}{\partial t}\frac{\partial \gamma_{24}}{\partial r} + 2\frac{\partial \gamma_{34}}{\partial t}\frac{\partial \gamma_{34}}{\partial r} - \frac{\partial \gamma_{44}}{\partial t}\frac{\partial \gamma_{44}}{\partial r} + \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma}{\partial t}\frac{\partial \gamma}{\partial r} = p^2 A^2\left[\frac{2x^2}{r^2} + \frac{1}{4}\frac{(y^2+z^2)^2}{r^4} + \right. \\
&+ \frac{y^4+z^4-6y^2z^2}{4r^4}\cos 2p\,(t-r) + \\
&\left. + \frac{yz\,(y^2-z^2)}{r^4}\sin 2p\,(t-r)\right] {}^{*)} \qquad (59.8\text{a})
\end{aligned}
$$

При усреднении по всей поверхности сферы периодические члены выпадают, и среднее значение $32\pi\,\mathfrak{t}_4^{\nu}$ оказывается равным $\frac{4}{5}p^2 A^2$ **), так что в единицу времени излучается постоянное количество энергии $4\pi r^2 \cdot \frac{4}{5}p^2A^2$, или $\frac{1}{10}\left(\frac{2}{3}\sigma p^3 a^3\right)^2$.

---

*) При вычислении нужно принять во внимание, что радиальные производные от $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ равны нулю. (*Н.*)

**) Вычисление среднего значения выражения, стоящего в скобках, можно выполнить следующим образом [мы обозначаем при этом среднее значение f через $M(f)$].

По соображениям симметрии

$$M\left(\frac{x^2}{r^2}\right) = M\left(\frac{y^2}{r^2}\right) = M\left(\frac{z^2}{r^2}\right) = \frac{1}{3}M\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right) = \frac{1}{3}M(1) = \frac{1}{3}.$$

С другой стороны, вводя полярные координаты

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\cos\varphi,\ z = r\sin\theta\sin\varphi,$$

получим для $M\left(\frac{y^2z^2}{r^4}\right)$ значение:

Это можно написать также в виде

$$\frac{32}{5}\, I^2\omega^6,$$

$$M(\sin^4\theta\cos^2\varphi\sin^2\varphi)=\frac{1}{4}M(\sin^4\theta\sin^2 2\varphi)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\sin^4\theta\sin^2 2\varphi\sin\theta\,d\varphi\,d\theta=\frac{1}{16\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin^5\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{16}\int\limits_0^{\pi}\sin^5\theta\,d\theta=\frac{1}{2^9 i}\int\limits_0^{\pi}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^5\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2^8 i}\int\limits_0^{\pi}e^{5i\theta}d\theta-5\int\limits_0^{\pi}e^{3i\theta}\,d\theta+10\int\limits_0^{\pi}e^{i\theta}d\theta=\frac{1}{2^7}\left(\frac{1}{5}-\frac{5}{3}+10\right)=\frac{1}{15}.$$

Поэтому

$$M\left(\frac{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2}{r^4}\right)=M\left(\frac{y^2z^2}{r^4}\right)+M\left(\frac{z^2x^2}{r^4}\right)+M\left(\frac{x^2y^2}{r^4}\right)=\frac{1}{5}.$$

Далее имеем

$$M\left(\frac{2x^2}{r^2}\right)=\frac{2}{3};\quad M\left(\frac{(y^2+z^2)^2}{4r^4}\right)=\frac{1}{12}M\left(\frac{(y^2+z^2)^2+(z^2+x^2)^2+(x^2+y^2)^2}{r^4}\right)=$$

$$=\frac{1}{12}M\left(\frac{2(x^2+y^2+z^2)^2-2(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)}{r^4}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}M\left(1-\frac{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2}{r^4}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}M\left(\frac{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2}{r^4}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{30}=\frac{2}{15},$$

$$M\left(\frac{y^4+z^4-6y^2z^2}{r^4}\right)=M\left(\frac{(y^2+z^2)^2-8y^2z^2}{r^4}\right)=4\cdot\frac{2}{15}-8\cdot\frac{1}{15}=0.$$

Наконец, среднее значение выражения $\frac{yz(y^2-z^2)}{r^4}$ также равно нулю, так как это выражение меняет знак при перестановке y и z. Поэтому окончательно среднее значение выражения, стоящего в тексте в скобках, получается равным $\frac{4}{5}$.

Равенство нулю средних значений коэффициентов при $\cos 2p(t-r)$ и $\sin 2p(t-r)$ можно было бы ожидать и по физическим соображениям, так как полный поток энергии через поверхность сферы достаточно большого радиуса должен быть (в принятом здесь приближении) постоянным, откуда и можно было бы непосредственно получить среднее значение $\frac{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2}{r^4}$. *(Н.)*

где I означает момент инерции стержня относительно его середины *).

Чтобы выразить полученный результат в единицах CGS, примем во внимание, что $I^2\omega^6$ имеет размерность ($см^4\, г^2\, сек^{-6}$), тогда как скорость изменения энергии имеет размерность ($см^2\, г\, сек^{-3}$). Поэтому в (59.9а) нужно добавить множитель размерности $\left(\frac{см}{г}\right)\left(\frac{сек}{см}\right)^3$. В принятых нами единицах (см. п. 39) 1 $г$ эквивалентен $7{,}4 \cdot 10^{-29}$ $см$, а одна секунда — $3 \cdot 10^{10}$ $см$, так что переводный множитель в единицы CGS равен

$$\frac{7{,}4 \cdot 10^{-29}}{(3 \cdot 10^{10})^3} = 2{,}7 \cdot 10^{-60}.$$

Например, стержень с массой в 1 $кг$ и длиной 2 $м$, делающий 50 оборотов/сек., теряет в течение года $3 \cdot 10^{-35}$ своей вращательной энергии.

В п. 74а мы еще раз вернемся к этой задаче и получим тот же результат другим методом, который обладает по сравнению с настоящим, в главных чертах принадлежащим Эйнштейну, рядом преимуществ.

60. ДЕЙСТВИЕ.

Инвариантный интеграл

$$A = \int\int\int\int \rho_0 \sqrt{-g}\, d\tau \tag{60.11}$$

представляет собой *действие* материи в четырехмерной области.

По (49.42) мы имеем

$$A = \int\int\int\int \rho_0\, dW\, ds = \int\int dm\, ds, \tag{60.12}$$

где m—инвариантная масса или энергия.

Следовательно, действие частицы с энергией m в течение собственного времени ds равно $m\, ds$, что согласуется с определением действия в обычной механике как произведения энергии

---

*) Этот момент инерции равен $\int\limits_{-a}^{a} \sigma x^2\, dx = \frac{2}{3}\sigma a^3$. *(П.)*

на время. Согласно (54.6) величину A можно также написать в виде

$$A=\frac{1}{8\pi}\int\int\int\int G\sqrt{-g}\,d\tau, \tag{60.2}$$

так что $G\sqrt{-g}$ или $\mathfrak{G}$ (с точностью до числового множителя) представляет плотность действия поля тяготения. Заметим, что материальное и гравитационное действия являются просто различными формами одного и того же понятия; поэтому их вовсе не нужно складывать друг с другом для получения полного действия.

Когда мы утверждаем, что гравитационное и материальное действия одно и то же, мы должны при этом иметь в виду тот особый смысл, который почти всегда связывается со словом действие. Со времени введения этого понятия в науку действие всегда рассматривалось как нечто, имеющее единственное *raison d'être* (смысл существования) в том, чтобы быть варированным, более того *варированным таким способом, который противоречит законам природы.* Поэтому мы должны помнить, что тот, кто начинает говорить о действии, вероятно намерен рассматривать невозможные состояния мира (это конечно не означает, что он говорит бессмыслицу—он лишь вскрывает важные свойства возможных состояний, сравнивая их с невозможными состояниями). Следовательно, мы не можем совсем *игнорировать* различие между материальным и гравитационным действием; такое различие конечно невозможно, но ведь мы занимаемся как раз рассмотрением невозможных соотношений.

В связи с этим нам нужно теперь сопоставить оба понимания действия. Прежде всего, действие есть некоторая физическая величина, имеющая определенное численное значение, определяемое формулой (60.11) или (60.2), и очень важная вследствие своей инвариантности. С другой стороны, действие представляет собой некоторую математическую функцию независимых переменных, и ее функциональная форма, которая единственно и имеет значение, зависит от того, какое из двух выражений положено в основу. Нам придется специально рассматривать ее частные производные, а они, конечно, зависят от переменных, через которые выражено действие.

Гамильтонов метод вариации интеграла имеет для наших целей особое значение; сейчас мы разберем несколько примеров его применения. Мы считаем чрезвычайно неудачным то обстоятельство, что этот важный метод почти всегда употребляется в форме принципа стационарного действия. Рассматривая вариацию интеграла для малых вариаций $g_{\mu\nu}$ или других переменных, мы получаем обобщенные производные, которые я назову *гамильтоновыми производными*. Разумеется, существуют и такие интегралы, у которых гамильтоновы производные равны нулю, так что соответствующий интеграл обладает свойством стационарности. Но, как в обычном дифференциальном исчислении мы занимаемся не только проблемами максимумов и минимумов, но в некоторой мере интересуемся и производными, не обращающимися в нуль, так и гамильтоновы производные могут заслуживать нашего внимания даже в том случае, когда они обманывают наши ожидания и оказываются неравными нулю.

Рассмотрим теперь вариацию гравитационного действия в некоторой области, т. е. выражение

$$8\pi\delta A=\delta\int G\sqrt{-g}\,d\tau$$

при сколь угодно малых вариациях $\delta g_{\mu\nu}$, обращающихся в нуль на границе области и вблизи не (так что их первые производные тоже обращаются в нуль). На основании (58.8) имеем

$$\delta\int G\sqrt{-g}\,d\tau=-\delta\int \mathbf{L}\,d\tau+\delta\int\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mathbf{g}^{\mu\nu}\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{g}^{\mu\nu}_\alpha}\right)d\tau.$$

Но так как $\mathbf{L}$ есть функция переменных $\mathbf{g}^{\mu\nu}$ и $\mathbf{g}^{\mu\nu}_\lambda$, то

$$\int\delta\mathbf{L}\,d\tau=\int\left(\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{g}^{\mu\nu}}\delta\mathbf{g}^{\mu\nu}+\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{g}^{\mu\nu}_\alpha}\delta\mathbf{g}^{\mu\nu}_\alpha\right)d\tau;$$

отсюда, после интегрирования второго члена по частям, следует

$$\int\delta\mathbf{L}\,d\tau=\int\left(\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{g}^{\mu\nu}}-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{g}^{\mu\nu}_\alpha}\right)\delta\mathbf{g}^{\mu\nu}d\tau+\int\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{g}^{\mu\nu}_\alpha}\delta\mathbf{g}^{\mu\nu}\right)d\tau.$$

В силу (58.6) подинтегральное выражение первого интеграла справа равно $-G_{\mu\nu}\delta\mathbf{g}^{\mu\nu}$, так что мы получаем соотношение

$$\delta\int G\sqrt{-g}\,d\tau=\int G_{\mu\nu}\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right)d\tau+$$
$$+\int\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mathbf{g}^{\mu\nu}\delta\left(\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{g}^{\mu\nu}_\alpha}\right)\right)d\tau. \tag{60.3}$$

Второй член может быть сразу проинтегрирован: в результате получится трехкратный интеграл по границе четырехмерной области, который обращается в нуль, так как по предположению все вариации на границе равны нулю. Следовательно,

$$\delta \int G \sqrt{-g}\, d\tau = \int G_{\mu\nu} \delta\left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\right) d\tau, \tag{60.41}$$

или, принимая во внимание (58.91),

$$\delta \int G \sqrt{-g}\, d\tau = -\int \left(G^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} G\right) \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d\tau. \tag{60.42}$$

Коэффициент $-\left(G^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} G\right)$ я называю *гамильтоновой производной* от G по величинам $g_{\mu\nu}$ *) и обозначаю ее так:

$$\frac{\mathfrak{h} G}{\mathfrak{h} g_{\mu\nu}} = -\left(G^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} G\right) = 8\pi T^{\mu\nu} \tag{60.43}$$

Мы видим из (60.42), что действие A может быть стационарно только в том случае, когда тензор энергии $T^{\mu\nu}$ равен нулю, т. е. в пустом пространстве. Иначе говоря, действие стационарно только тогда, когда его нет, и даже в этом случае не всегда.

Казалось бы, отсюда можно вывести заключение, что принцип стационарного действия, вообще говоря, неверен. Тем не менее, несколько видоизмененная формулировка принципа может иметь очень большое значение. В действительном мире пространство, занятое материей (электронами) необычайно мало по сравнению с пустыми областями; таким образом, принцип наименьшего действия хотя и не является универсальным, все же выражает чрезвычайно общую тенденцию — имеющую, правда, некоторые исключения **).

Наша теория не объясняет атомистического строения материи; но повидимому, именно в стационарной вариации действия мы

---

*) Величину $-\left(G^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} G\right)$ можно также назвать гамильтоновой производной от *плотности* $\mathfrak{G}$, соответствующей величине G; это обозначение следует употреблять в тех случаях, когда плотность рассматривается, как нечто первичное, как, например, в некоторых исследованиях главы VII. (*Н.*)

**) Электромагнитные поля мы не причисляем к этим исключениям, потому что мы их вообще еще не рассматривали. Наоборот, действие материи полностью включено, так что выясняющаяся непригодность принципа в применении к материи является постоянным исключением.

имеем тот путь, идя по которому, можно было бы приблизиться к разрешению этой сложной проблемы, хотя мы до сих пор еще не знаем точной формулировки атомных законов. Можно подозревать, что в этих законах играет роль «действие», которое может меняться только прерывным образом.

Однако, это ни в коем случае не означает, что принцип наименьшего действия классической механики неверен. Он становится неприменимым только тогда, когда мы хотим обобщить его на такие изменения состояний системы, которые до сих пор не рассматривались. Ясно, что, производя все более широкое обобщение, мы должны притти к границам применимости принципа. Мы можем различать следующие состояния мира: a) возможные состояния, b) состояния, которые мы принимаем во внимание, хотя они и невозможны, и c) невозможные состояния, не принимаемые нами во внимание. Обобщение принципа заключается в переносе некоторых состояний из класса (c) в класс (b); однако для такого переноса должны быть определенные границы, потому что в противном случае мы пришли бы к утверждению, что неравенство $\delta A \neq 0$ не только не является каким-либо возможным уравнением, но даже не является и невозможным *)

) Близкие состояния, рассматриваемые в принципе стационарного действия, противоречат физическим возможностям (так как только исходное состояние находится в согласии с законами природы); однако, они удовлетворяют некоторым условиям, которые неявно вводятся вместе с выбором символов, служащих для математической формулировки проблемы. Смотря по тому, выполнены ли эти условия или нет, мы и различаем «принимаемые во внимание» состояния (в тексте пункт b) от состояний «не принимаемых во внимание» (в тексте c). Если бы мы не ввели такого различия, то каким образом можно было бы описать близкое варьированное состояние с действием $A+\delta A$ $(\delta A \neq 0)$? Хотя такое состояние и невозможно, но одно это обстоятельство еще не исключает его из рассмотрения, так как ни одно из рассматриваемых в принципе стационарного действия соседних состояний не является возможным. Это состояние не только невозможно, но его кроме того нельзя сформулировать с помощью математических выражений, достаточных для описания других невозможных состояний. Принцип наименьшего действия можно вероятно с полным правом сравнить с утверждением, что „если бы законы арифметики перестали быть верными, то $2+2$ было бы больше или равно (но наверное не меньше) 4. Это утверждение могло бы иметь смысл только в том случае, если бы рассматриваемые „неправильные системы арифметики“ имели совершенно определенный тип неправильности. В наиболее же общем случае это утверждение очевидно не имеет смысла.

61. ОБЩЕЕ СВОЙСТВО ИНВАРИАНТОВ.

Пусть K есть какая-либо инвариантная функция величин $g_{\mu\nu}$ и их производных до любого порядка, так что

$$\int K\sqrt{-g}\,d\tau \text{ есть инвариант.}$$

Бесконечно малые вариации $\delta(K\sqrt{-g})$ можно представить в виде суммы членов, содержащих линейно величины $\delta g_{\mu\nu}$, $\delta\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right)$, $\delta\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)$ и т. д. С помощью обычного метода интегрирования по частям, употребляемого в вариационном исчислении, все эти выражения можно свести к членам с $\delta g_{\mu\nu}$ и полным дифференциалам.

Поэтому в случае вариаций, обращающихся в нуль на границе области, мы можем написать

$$\delta\int K\sqrt{-g}\,d\tau = \int P^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d\tau, \qquad (61.1)$$

где выражения $P^{\mu\nu}$ можно вычислить, если известен вид функции K. Полные дифференциалы дают интегралы по граничной поверхности, вариация которых равна нулю. Согласно нашему прежнему обозначению (60.43), мы имеем

$$P^{\mu\nu} = \frac{\mathfrak{d} K}{\mathfrak{d} g_{\mu\nu}}. \qquad (61.2)$$

Не уменьшая общности, мы можем предположить, что $P^{\mu\nu}$ симметрично относительно μ и ν, так как всякое антисимметричное слагаемое выпало бы при внутреннем умножении под знаком интеграла на $\delta g_{\mu\nu}$. Далее $P^{\mu\nu}$ должно быть тензором, так как $\delta g_{\mu\nu}$ есть произвольный тензор.

Рассмотрим теперь случай, когда вариации $\delta g_{\mu\nu}$ происходят только от преобразования координат. Тогда (61.1) обращается в нуль, притом не вследствие какого-либо свойства стационарности, а из-за инвариантности K. Но так как $\delta g_{\mu\nu}$ теперь уже не являются произвольными независимыми переменными, то отсюда нельзя вывести заключение о том, что $P^{\mu\nu}$ равно нулю.

Произведем теперь бесконечно малое преобразование координат (которое на границе и вблизи ее должно сводиться к тождественному преобразованию), при котором точке, характеризуемой в старой системе координатами x_α, в новой системе соответствовали бы координаты $x_\alpha + dx_\alpha$. Преобразованный фундаментальный тензор $g'_{\mu\nu}$, мы можем представить в виде $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, где $\delta g_{\mu\nu}$ также являются бесконечно малыми первого порядка. Связь между $g_{\mu\nu}$ и $g'_{\mu\nu}$ определяется законом преобразования (23.22), причем следует принять во внимание, что $g'_{\mu\nu}$ нужно взять не в точке x_σ, но в соответствующей ей точке $x_\sigma + \delta x_\sigma$. Таким образом мы получим

$$g_{\mu\nu}(x_\sigma) = g'_{\alpha\beta}(x_\sigma + \delta x_\sigma) \frac{\partial(x_\alpha + \delta x_\alpha)}{\partial x_\mu} \frac{\partial(x_\beta + \delta x_\beta)}{\partial x_\nu},$$

или, если принять во внимание, что $g'_{\alpha\beta}(x_\sigma + dx_\sigma)$ с точностью до величин первого порядка равно $g'_{\alpha\beta}(x_\sigma)$, или даже $g_{\alpha\beta}(x_\sigma)$ и не писать аргумента x_σ в составляющих g, то, с точностью до величин второго порядка:

$$g_{\mu\nu} = \left(g_{\alpha\beta}(x_\sigma + \delta x_\sigma) + \delta g_{\alpha\beta}(x_\sigma + \delta x_\sigma)\right) \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\nu} + g_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial(\delta x_\beta)}{\partial x_\nu} + $$
$$+ g_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\nu} \frac{\partial(\delta x_\alpha)}{\partial x_\mu}.$$

Но очевидно, что $\delta g_{\alpha\beta}(x_\sigma + \delta x_\sigma)$ с точностью до величины второго порядка равно $\delta g_{\alpha\beta}(x_\sigma)$. Далее по (22.3) мы имеем

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\mu} = g^\alpha_\mu, \quad \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\nu} = g^\beta_\nu.$$

Следовательно,

$$g_{\mu\nu}(x_\sigma) = g_{\mu\nu}(x_\sigma + \delta x_\sigma) + \delta g_{\mu\nu}(x_\sigma) + g_{\mu\beta} \frac{\partial(\delta x_\beta)}{\partial x_\nu} + g_{\alpha\nu} \frac{\partial(\delta x_\alpha)}{\partial x_\mu}.$$

Если принять еще во внимание, что

$$g_{\mu\nu}(x_\sigma + \delta x_\sigma) = g_{\mu\nu}(x_\sigma) + \delta x_\sigma \frac{\partial g_{\mu\nu}(x_\sigma)}{\partial x_\sigma},$$

то мы получаем наконец для $\delta g_{\mu\nu}$ значение

$$-\delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\beta} \frac{\partial(\delta x_\beta)}{\partial x_\nu} + g_{\alpha\nu} \frac{\partial(\delta x_\alpha)}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \delta x_\alpha \qquad (61.3)$$

В таком случае (61.1) дает

$$\delta\int K\sqrt{-g}d\tau = -\int P^{\mu\nu}\sqrt{-g}\left(g_{\mu\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\delta x_\alpha)+g_{\nu\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\delta x_\alpha)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\delta x_\alpha\right)d\tau,$$

или, после интегрирования по частям,

$$\int\left\{\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(g_{\mu\alpha}P^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right)+\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(g_{\nu\alpha}P^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right)-P^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right\}\delta x_\alpha d\tau =$$
$$=2\int\left\{\frac{\partial}{\partial x}\,\mathfrak{P}^\nu_\alpha-\frac{1}{2}\,\mathfrak{P}^{\mu\nu}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right\}\delta x_\alpha\,d\tau,$$

и, наконец, на основании (51.51)

$$2\int P^\nu_{\alpha\nu}\delta x_\alpha\sqrt{-g}\,d\tau. \qquad (61.4)$$

Это выражение должно обращаться в нуль при всех произвольных вариациях δx_α, т. е. при всех деформациях координатной сетки; следовательно мы получаем

$$\left(P^\nu_\alpha\right)_\nu=0, \qquad (61.5)$$

что и доказывает следующую общую теорему:

Гамильтонова производная всякого фундаментального инварианта есть тензор, расходимость которого равна нулю.

Теорема п. 52 есть частный случай этой теоремы, так как на основании (60.43) $T^{\mu\nu}$ есть гамильтонова производная от G.

62. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ.

До сих пор мы отождествляли тензор энергии с величиной $G^\nu_\mu-\frac{1}{2}g^\nu_\mu G$ главным образом потому, что расходимость этого выражения тождественно равна нулю, но, с другой стороны, только что доказанная теорема позволяет нам построить другие фундаментальные тензоры, обладающие указанным свойством; следовательно, существуют также и другие возможности отождествления тензора энергии. Простейшими фундаментальными инвариантами можно считать следующие три:

$$K=G; \qquad K'=G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}; \qquad K''=B^\rho_{\mu\nu\sigma}.B^{\mu\nu\sigma}_\rho; \qquad (62.1)$$

До сих пор мы в качестве тензора энергии брали $\frac{\mathfrak{h}K}{\mathfrak{h}g_{\mu\nu}}$; но если бы мы вместо этого приняли $\frac{\mathfrak{h}K'}{\mathfrak{h}g_{\mu\nu}}$, то законы сохранения энергии и количества движения были бы также выполнены, так как расходимость последнего тензора также равна нулю; наконец, с таким же правом можно было бы использовать $\frac{\mathfrak{h}K''}{\mathfrak{h}g_{\mu\nu}}$.

Для пустого пространства тензор энергии должен по условию равняться нулю, так что закон тяготения в пустом пространстве при трех возможных предположениях о тензоре энергии выражается уравнениями

$$\frac{\mathfrak{h}K}{\mathfrak{h}g_{\mu\nu}} = 0; \quad \frac{\mathfrak{h}K'}{\mathfrak{h}g_{\mu\nu}} = 0; \quad \frac{\mathfrak{h}K''}{\mathfrak{h}g_{\mu\nu}} = 0 \tag{62.2}$$

Легко убедиться, что оба последние тензора содержат четвертые производные от $g_{\mu\nu}$. Значит, если мы сможем установить в качестве необходимого условия, что закон тяготения в пустом пространстве должен выражаться с помощью дифференциальных уравнений *второго* порядка, то единственным возможным тензором энергии окажется тот, который мы употребляли до сих пор. В случае уравнений четвертого порядка вопрос о природе граничных условий, дополняющих дифференциальные уравнения, оказался бы очень сложным, но это конечно не может явиться основанием к тому, чтобы попросту отбросить эти уравнения.

Оба последние тензора представляют собой необычайно сложные выражения, но если применять их для определения поля изолированной частицы, то с ними можно все же оперировать. Действительно, так как такое поле симметрично, то оно должно иметь общий вид (38.2), так что остается отыскать лишь неопределенные коэффициенты λ и ν, являющиеся функциями только от r. Величину K' можно без труда выразить через λ и ν с помощью уравнений (38.6); но так как для K'' получается значительно более простое выражение, то разберем именно этот последний случай. Применение метода п. 38 дает

$$\mathbf{K}'' = K''\sqrt{-g} = 2e^{\frac{1}{2}(\lambda+\nu)} \sin\theta \Big\{ e^{-2\lambda} (\lambda'^2 + \nu'^2) + \\ + 2r^2 e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{4}\lambda'\nu' - \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{1}{2}\nu'' \right)^2 + \frac{2(1-e^{\lambda})^2}{r^2} \Big\}. \tag{62.3}$$

Ясно, что для вариаций, исходящих из симметричного состояния, интеграл выражения K'' будет стационарным; следовательно, мы можем ограничиться рассмотрением вариаций λ и ν, а также их производных по r *). Поэтому уравнения тяготения $\frac{\mathfrak{h}K''}{\mathfrak{h}g_{\mu\nu}} = 0$

*) Доказать это можно следующим образом (ср. соображения, которые высказывает *H. Weyl*, Raum, Zeit, Materie, 5-е изд., стр. 253—254, при выводе шварцшильдовского решения уравнений тяготения Эйнштейна). Если обозначить $\frac{\mathfrak{h}K''}{\mathfrak{h}g_{\mu\nu}}$ через $k_{\mu\nu}$, то $k_{\mu\nu}$ есть тензор второго порядка, и квадратичная дифференциальная форма $k_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu$ ковариантна с $g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu$; поэтому для частного типа (38.12) интервала ds^2 она допускает те же преобразования, что и (38.12), и поэтому имеет аналогичный вид:

$$k_{11} = -\overline{U},\ k_{22} = -\overline{V}r^2,\ k_{33} = -\overline{V}r^2\sin^2\theta,\ k_{44} = \overline{W},$$
$$k_{\mu\nu} = 0, \qquad (\mu \gtrless \nu),$$

где $\overline{U}, \overline{V}, \overline{W}$ зависят от U, V, W из выражения (38.12). Поэтому тензор $k_{\mu\nu}$ обращается в нуль, когда $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$ равны нулю. Если же вычислить K'', кладя в основу (38.2), и варьировать по U, V, W, то с точностью до интегралов по граничной поверхности

$$\delta\int K''\sqrt{-g}\,d\tau = \int\left(\overline{U}\delta U + \overline{V}\delta V\left(r^4 + r^4\sin^4\theta\right) + \overline{W}\delta W\right)\sqrt{-g}\,d\tau.$$

Достаточно, таким образом, рассмотреть три уравнения

$$\frac{\mathfrak{h}K''}{\mathfrak{h}U} = 0,\quad \frac{\mathfrak{h}K''}{\mathfrak{h}V} = 0,\quad \frac{\mathfrak{h}K''}{\mathfrak{h}W} = 0.$$

Между этими тремя уравнениями имеется линейная зависимость. Действительно, если произвести бесконечно малое преобразование координат, заменяя r на $r + \delta r$, где δr зависит только от r, то U, V, W испытывают вариации

$$\delta U = U'\delta r,\ \delta V = \left(V' + \frac{2}{r}\right)\delta r,\ \delta W = W'\delta r.$$

Из инвариантности K'' вытекает поэтому тождество

$$U'\frac{\mathfrak{h}K''}{\mathfrak{h}U} + \left(V' + \frac{2}{r}\right)\frac{\mathfrak{h}K''}{\mathfrak{h}V} + W'\frac{\mathfrak{h}K''}{\mathfrak{h}W} = 0,$$

так что все три уравнения (a) будут удовлетворены, когда гамильтоновы производные K'' по U и W обратятся в нуль, если только $V' + \frac{2}{r} \neq 0$. Поэтому при $V = 1$, $V' = 0$ мы можем ограничиться рассмотрением уравнений (62.4). (*H.*)

эквивалентны обоим уравнениям

$$\frac{\mathfrak{H}K''}{\mathfrak{H}\lambda}=0, \qquad \frac{\mathfrak{H}K''}{\mathfrak{H}\nu}=0. \tag{62.4}$$

При вариации, например, λ мы получаем

$$\delta\int \mathrm{K}d\tau=\int\left(\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial\lambda}\,\delta\lambda+\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial\lambda'}\,\delta\lambda'+\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial\lambda''}\,\delta\lambda''\right)d\tau=$$

$$=\int\left\{\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial\lambda}-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial\lambda'}\right)+\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial\lambda''}\right)\right\}\delta\lambda\, d\tau+\text{поверхностные интегралы.}$$

При этом уравнения (62.4) принимают лагранжев вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathfrak{H}\mathrm{K}''}{\mathfrak{H}\lambda}&=\frac{\partial \mathrm{k}''}{\partial\lambda}-\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \mathrm{K}''}{\partial\lambda'}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{\partial \mathrm{K}''}{\partial\lambda''}=0\\ \frac{\mathfrak{H}\mathrm{K}''}{\mathfrak{H}\nu}&=\frac{\partial \mathrm{K}''}{\partial\nu}-\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \mathrm{K}''}{\partial\nu'}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{\partial \mathrm{K}''}{\partial\nu''}=0.\end{aligned}\right\} \tag{62.5}$$

Из этих уравнений нужно определить λ и ν.

Мы покажем, что одно точное решение этих уравнений имеет тот же вид, что и решение п. 38, а именно

$$e^{-\lambda}=e^{\nu}=\gamma=1-\frac{2m}{r}. \tag{62.6}$$

Действительно, если вычислить частные производные от выражений (62.3) и после дифференцирования вставить значения (62.6) мы получим

$$\frac{\partial \mathrm{K}''}{\partial\lambda}=-\frac{3}{2}\,\mathrm{K}''+4\,\frac{(1-e^{-\lambda})}{r^2}\cdot 2\,e^{\frac{1}{2}(\lambda+\nu)}\sin\theta=$$

$$=\left(-72\,\frac{m^2}{r^4}+16\,\frac{m}{r^3}\right)\cdot\,\sin\theta,$$

$$\frac{\partial \mathrm{K}''}{\partial\lambda'}=2\,e^{\frac{1}{2}(\lambda+\nu)}\sin\theta\left\{2e^{-2\lambda}\,\lambda'+r^2e^{-2\lambda}\left(\frac{1}{4}\,\lambda'\nu'-\frac{1}{4}\,\nu'^2\;\;\frac{1}{2}\nu''\right)\nu'\right\}=$$

$$=\left(24\,\frac{m^2}{r^3}-8\,\frac{m}{r^2}\right)\sin\theta,$$

$$\frac{\partial \mathrm{K}''}{\partial\lambda''}=0,$$

$$\frac{\partial \mathrm{K}''}{\partial\nu}=\frac{1}{2}\,\mathrm{K}''-24\,\frac{m^2}{r^4}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial K''}{\partial \nu'} = 2\,e^{\frac{1}{2}(\lambda+\nu)} \sin\theta \left\{ 2e^{-2\lambda}\,\nu' + 4r^2 e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{4}\lambda'\nu' - \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{1}{2}\nu'' \right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{1}{4}\lambda' - \frac{1}{2}\nu' \right) \right\} = \left(-40\frac{m^2}{r^3} + 8\frac{m}{r^2} \right) \sin\theta,$$

$$\frac{\partial K''}{\partial \nu''} = -2e^{\frac{1}{2}(\lambda+\nu)} \sin\theta \cdot 2r^2 e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{4}\lambda'\nu' - \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{1}{2}\nu'' \right) =$$
$$= \left(16\frac{m^2}{r^2} - 8\frac{m}{r} \right) \sin\theta,$$

а для этих значений производных уравнения (62.5) удовлетворятся в точности.

Уравнение $\dfrac{\mathfrak{H}K'}{\mathfrak{H}g_{\mu\nu}} = 0$ также удовлетворяется этим решением, так как

$$\delta(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \sqrt{-g}) = G_{\mu\nu}\,\delta(G^{\mu\nu}\sqrt{-g}) + G^{\mu\nu}\sqrt{-g}\;\delta G_{\mu\nu},$$

и, следовательно, вариация $K'\sqrt{-g}$ обращается в нуль везде, где $G_{\mu\nu} = 0$. Каждое поле тяготения, подчиняющееся закону Эйнштейна, подчиняется также и другому предложенному нами закону, но обратное, вообще говоря, не имеет места.

Несомненно, существуют еще другие симметричные решения обоих новых уравнений тяготения, которые уже не подчиняются закону Эйнштейна, так как дифференциальные уравнения четвертого порядка требуют двух дополнительных произвольных граничных условий или вблизи частицы, или на бесконечности. Можно было бы задать вопрос, почему такие уравнения исключены в природе? На это мы можем только ответить: по тем же причинам, что и отрицательные массы, точные диполи, электроны необычной массы и другие теоретически мыслимые особенности; основная элементарная частица ведь удовлетворяет условиям, которые нам в настоящее время совершенно неизвестны.

Таким образом все три закона тяготения (62.2) повидимому допустимы. Каждый из них может привести к тому же самому полю тяготения солнца, и все астрономические явления протекают во всех трех случаях одинаково. Небольшие различия могли бы оказаться в тех смешанных членах, которые обусловлены взаимодействием двух или более притягивающих друг друга тел; но при изложении теории луны мы видели, что эти различия слишком малы, чтобы их можно было обнаружить посредством астрономических измерений. Далее, каждый из этих законов приводит к одним и тем же механическим явлениям, так как для всех трех выполняются законы сохранения энергии и количества движения. Поэтому я не уверен, что, спрашивая, какой из этих трех законов есть закон действительного мира, мы задаем вопрос, имеющий какой-либо смысл. Во всяком случае, вопрос этот весьма неясен, и последующие соображения нужно считать лишь предварительными попытками его выяснения.

Тензор энергии должен был дать нам определение материи, так как он обладает свойствами, которыми в физике описывается материя. Наши три тензора энергии дают нам три различные материальные мира, и возникает вопрос, который из них мы исследуем, когда рассматриваем окружающий нас мир. Но если все три материальные мира ведут себя (в пределах ошибок наблюдения) совершенно одинаково, то повидимому невозможно решить, наблюдаем ли мы один или другой или даже все три вместе.

Другими словами: каждое наблюдение дает некоторое соотношение между T_μ^ν наших тел и T_μ^ν других объектов, или же между соответствующими $T_\mu'^{\nu}$, или $T_\mu''^{\nu}$. Если это соотношение во всех трех случаях одно и то же, то не имеет смысла спрашивать, между какими из трех тел и трех соответствующих миров имеет место это соотношение. В конечном счете реальностью является только самое соотношение. Поэтому, выбирая T_μ^ν в качестве тензора энергии, мы только отдаем предпочтение простейшему из трех различных способов представления опытных фактов.

Вряд ли можно сомневаться в том, что между гамильтоновыми производными трех фундаментальных инвариантов имеется некоторое тождественное соотношение. Открытие этого соотношения вероятно пролило бы несколько света на эту загадочную проблему.

63. ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПОТОК ЧАСТИЦЫ.

Рассмотрим теперь пустую область мира и попытаемся, варьируя внутри области величины $g_{\mu\nu}$, вызвать появление в ней одной или нескольких частиц малой массы δm. Согласно (60.12) и (60.2)

$$\delta\int G\sqrt{-g}\;d\tau = 8\pi\sum\delta m\cdot ds, \tag{63.1}$$

где левая сторона равна нулю на основании (60.42), так как пространство в начале было пустым. В действительном мире нет таких частиц, для которых $\delta m \cdot ds$ было бы отрицательно; поэтому появление каких-либо частиц в пустой области оказывается невозможным до тех пор, пока существует ограничение, что $g_{\mu\nu}$ и их первые производные не должны быть варьированы на границе. Чтобы сделать возможным появление частиц, мы должны уничтожить это ограничение и, следовательно, восстановить член

$$\delta \int G \sqrt{-g}\, d\tau = \int \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\mathfrak{g}^{\mu\nu} \delta \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\alpha}} \right) \right) d\tau, \qquad (63.2)$$

который мы до сих пор опускали в (60.3). Если произвести первое интегрирование, то правая сторона (63.2) дает поток (внешней) нормальной составляющей вектора

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} \delta \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\alpha}} \right) = g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, \delta \left[-\{\mu\nu, \alpha\} + g^{\alpha}_{\mu} \{\nu\beta, \beta\} \right], \qquad (63.3)$$

проходящий сквозь трехмерную граничную поверхность рассматриваемой области.

Пусть область имеет форму длинной трубки и пусть мировая линия появляющейся частицы с гравитационной массой δm идет по оси этой трубки. Поток (63.3) есть инвариант, так как $\delta m \cdot ds$ инвариантно; поэтому мы можем выбрать специальные координаты п. 38, относительно которых частица покоится. Пусть трубка имеет радиус r; рассчитаем теперь поток на элемент длины трубки $dt = ds$. Мы получим нормальную составляющую вектора (63.3), полагая $\alpha = 1$, так что для потока получается выражение

$$\iiint g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, \delta \left[-\{\mu\nu, 1\} + g^{1}_{\mu} \{\nu\beta, \beta\} \right] d\theta\, d\varphi\, dt =$$
$$= 4\pi r^2 ds \cdot \left[-g^{\mu\nu} \delta \{\mu\nu, 1\} + g^{1}_{\nu} \delta \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \log \sqrt{-g} \right) \right], \qquad (63.4)$$

которое согласно (38.5) равно

$$4\pi r^2 ds \left\{ e^{-\lambda} \delta \left(\frac{1}{2} \lambda' \right) - \frac{1}{r^2} \delta \left(r e^{-\lambda} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \delta \left(r \sin^2 \theta\, e^{-\lambda} \right) - \right.$$
$$\left. - e^{-\nu} \delta \left(\frac{1}{2} e^{\nu - \lambda} \nu' \right) - e^{-\lambda} \delta \left(\frac{2}{r} \right) \right\}. \qquad (63.5)$$

Наконец, если принять во внимание, что вариации содержат только δm, то это выражение сводится к следующему

$$4\pi r^2 ds \left(-\delta\gamma' - \frac{2}{r} \delta\gamma \right) = 8\pi \delta m ds. \qquad (63.6)$$

При этом мы не приняли во внимание потоки сквозь оба конца цилиндра, которые очевидно компенсируют друг друга.

Это подтверждение общего результата (63.1) для случая одной частицы является в то же время новым доказательством тождества гравитационной и инертной массы.

Мы видим, таким образом, что каждая частица сопровождается некоторым потоком величины (63.3) сквозь все окружающие поверхности. Этот поток характеризует материальную частицу, и только с его помощью мы вообще узнаем о ее существовании; в смысле наблюдения этот поток и есть частица. Пока пространство пусто, поток сквозь все окружающие частицу поверхности один и тот же независимо от их расстояния от частицы, так как радиус r трубки в окончательной формуле отсутствует; мы видим, что в некотором смысле закон Ньютона об обратной пропорциональности квадрату расстояния имеет непосредственный аналог в теории Эйнштейна.

В общем случае поток изменяется при прохождении через область, содержащую другие частицы или непрерывную материю, так как при этом первый член справа в (60.3) уже будет отличен от нуля. Аналитически это можно приписать нелинейности уравнений поля; физическая же причина заключается в том, что исходящее из частицы действие вряд ли может оказывать влияние на окружающую материю, не претерпевая при этом само никаких изменений. В разобранном нами случае одной единственной частицы поток, связанный с δm, не зависел от первоначально имевшейся массы m; но это — исключение, объясняющееся симметричностью условий, благодаря которым при $T^{\mu\nu}$, отличном от нуля, интеграл от $T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$ обращается в нуль. В общем же случае, поток, созданный добавочной массой δm, изменяется, если первоначально имелась материя и в окружающей среде.

Для изолированной частицы m постоянно и ds в каждой области стационарно по отношению к вариациям траектории частицы, так как это условие эквивалентно (56.6). Следовательно, действие $8\pi\sum m\,ds$ в какой-либо области также стационарно по отношению к таким вариациям. Возникает вопрос, каким образом это можно согласовать с результатом, полученным в п. 60, что принцип действия неприменим к областям, содержащим материю. Решение этого вопроса заключается в следующем. Если мы сообщим $g_{\mu\nu}$ произвольные вариации, то материя, содержащаяся в цилиндре, уже не будет, вообще говоря, состоять из отдельных *частиц*, отделенных друг от друга промежутками, в которых тензор энергии равен нулю. Поэтому действие стационарно лишь при специальных вариациях $g_{\mu\nu}$ вблизи каждой частицы.

Конечно, в действительном мире те вариации, при которых нарушается принцип действия, т. е. те, которые нарушают симметрию частиц, невозможны. Но это обстоятельство несущественно: ведь вариации траектории частицы вообще невозможны, так как каждая частица в реальном мире не может двигаться иначе, чем она в действительности движется. Вся задача принципа наименьшего действия заключается в том, чтобы указать отношение действительного состояния мира к немного варьированным состояниям, которые в действительности не могут существовать. Поэтому нарушение принципа не может быть само по себе оправдано. Но теперь мы можем понять, почему он дает правильные результаты в обычной механике; ведь там единственные величины, которые варьируются, это траектории частиц, тогда как более общие вариации состояния мира, при которых принцип перестает быть верным, не рассматриваются совсем.

64. ИТОГИ.

Мы изложили математическую теорию четырехмерного пространства-времени, в которой пары точек связаны друг с другом абсолютным соотношением, называемым интервалом. Для того чтобы эта теория не оставалась чисто математическим упражнением, но была бы применима к действительному миру, необходимо величины, появляющиеся в теории, каким-либо образом связать с данными опыта. В предыдущих главах мы добились этого, отождествляя математический интервал с величиной, представляющий собой результат практических измерений с масштабами и часами. Наоборот, в последней главе этот пункт соприкосновения теории и опыта отошел на задний план, и наше внимание было направлено на другую возможность установления искомой связи, а именно, мы отождествили даваемую теорией величину

$$G_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu} G,$$

в виду ее свойства сохранения, с материей, или, вернее, с некоторой механической абстракцией материи, обладающей измеримыми свойствами: массой, количеством движения и напряжениями, достаточными для описания всех механических явлений. Установив эту связь между математической теорией и действительным миром, мы сделали громадный шаг вперед.

После того как мы получили теперь две точки соприкосновения с физическим миром, возможно уже замкнуть круг наших рассуждений. Во-первых, существует цепь чисто дедуктивных заключений, ведущая от математического интервала к математическому тензору энергии. Во-вторых, цепь связывает физические проявления тензора энергии и интервала; она ведет от материи, определенной теперь с помощью тензора энергии, к интервалу, который при этом рассматривается как результат измерений, произведенных с этой материей. Нам еще предстоит изучение этой второй цепи.

Если бы действительная материя не имела никаких других свойств, кроме тех, которые заключаются в функциональной форме выражения

$$G_{\mu}^{\nu}-\frac{1}{2}\,g_{\mu}^{\nu}\,G,$$

то, я думаю, измерения с ней были бы невозможны. В самом деле, свойство, делающее материю доступной измерению, есть ее прерывность (не обязательно в строгом смысле, но прерывность с макроскопической точки зрения, т. е. атомистическое строение). До сих пор мы только один раз сделали попытку использовать найденную нами материю для измерения интервала — именно при исследовании динамики частицы в п. 56; при этом нам пришлось предположить существование дискретных частиц. При этом предположении мы замкнули тогда круг наших исследований для одного из важнейших пробных тел — для движущейся частицы, геодезическое движение которой используется в астрономии для сравнения интервалов. Но только в начале следующей главы мы займемся более общей теорией применения материи для целей измерения интервалов. Мы увидим тогда, как существенно этот замкнутый круг идей определяет тот взгляд на структуру мира, который находит себе выражение в нашей формулировке законов механики.

Специальная особенность нашего отношения к природе заключается в том, что мы придаем особое значение всему постоянному, перманентному; на том же основании нам кажется гораздо более значительным создание чего-либо внутри области, чем обычное вхождение объекта через границу области. Когда, например, мы исследуем, как зависит инвариант от переменных, введенных для описания мира, мы придаем гораздо бо́льшее значение таким изменениям, которые сводятся к созданию нового, чем таким, которые представляют собой простые перегруппировки. Может быть, именно поэтому гамильтонова производная инварианта представляет собою гораздо более важную для нас величину, чем, например, обыкновенная производная. Благодаря своей «созидающей» способности гамильтонова производная представляется нам активным агентом, действующим в пассивном поле пространства-времени. До тех пор, пока мы не примем во внимание эту специальную особенность наших практических склонностей, метод Гамильтона с его устранением граничных интегралов будет казаться нам несколько искусственным. В действительности же гамильтонов метод является, наоборот, естественным для вывода физических величин, являющихся основными в нашей картине мира, так как он основывается на тех принципах, которые и обусловливают основное значение этих физических величин. Специальная форма метода Гамильтона, известная под именем принципа наименьшего действия и исследующая, в частности, гамильтоновы производные, обращающиеся в нуль, повидимому не допускает очень общих применений. Во всяком случае она представляется более приспособленной для того, чтобы давать изящные математические формулы, чем приводить к новым физическим точкам зрения. Установить равенство или тождество двух физических величин, конечно, гораздо проще, чем размышлять над поведением величины, которая представляет их разницу, даже в том случае, если эта величина возможно отличается важным свойством, заключающимся в том, что она не может существовать!

Согласно точке зрения, которую мы установили в этой главе, закон тяготения $G_{\mu\nu}=0$ нельзя рассматривать как выражение естественной структуры пространства-времени, которая насильственно нарушается только в тех точках, где находится какой-либо внешний агент (материя). Различие же заполненного и незаполненного пространства получается на основе нашего особого представления о пространстве-времени, которое, как мы видели, заключается в том, что гамильтоновы производные главного инварианта G выступают в качестве активных агентов на пассивном фоне. Поэтому те области, в которых эти производные равны нулю, мы считаем пустыми и закон $G_{\mu\nu}=0$ лишь и выражает это различие.

Обычная потенциальная энергия поднятого вверх груза не считается в нашей теории энергией и поэтому не входит в выражение тензора энергии. Она оказывается излишней, так как свойство нашего тензора энергии было формулировано в виде общего закона, более простого с абсолютной точки зрения, чем формальный закон сохранения. Потенциальная энергия и количество движения $\mathfrak{t}_{\mu}^{\nu}$, которые нам нужны, если мы хотим удержать формальный вид закона сохранения, не образуют тензора; их нужно рассматривать как математическую фикцию, а не как представление каких-либо имеющих физический смысл мировых соотношений. Псевдо-тензор энергии $\mathfrak{t}_{\mu}^{\nu}$ можно по произволу создавать или уничтожать, выбирая соответствующим образом систему координат, и он не обращается обязательно в нуль в мире, не содержащем тяготеющей материи (в плоском мире). Поэтому невозможно считать его чем-то аналогичным действительному тензору энергии.

Глава V.

КРИВИЗНА ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ.

65. КРИВИЗНА ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ.

В общей римановой геометрии, принятой в нашей теории за основу, $g_{\mu\nu}$ могут быть любыми десятью функциями четырех координат x_μ.

Четырехмерный континуум, подчиняющийся римановой геометрии, может быть „графически“ представлен поверхностью четырех измерений, начерченной в эвклидовом гиперпространстве достаточно большого числа измерений. Фактически требуется 10 измерений — соответственно числу $g_{\mu\nu}$. Действительно, пусть $(y_1, y_2, \ldots, y_{10})$ будут прямоугольные эвклидовы координаты, а (x_1, x_2, x_3, x_4) — параметры на этой поверхности; тогда уравнения поверхности будут иметь вид

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \ldots, y_{10} = f_{10}(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Для интервала на поверхности эвклидова геометрия, имеющая место для y, дает:

$$-ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 + \ldots + dy_{10}^2 =$$

$$= \left\{ \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f_{10}}{\partial x_1}\right)^2 \right\} dx_1^2 + \ldots +$$

$$+ \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial f_{10}}{\partial x_1} \frac{\partial f_{10}}{\partial x_2} \right\} 2dx_1\, dx_2 + \ldots$$

Приравнивая коэффициенты при dx_1 заданным функциям g_μ, мы получаем 10 дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial f_{10}}{\partial x_\mu} \frac{\partial f_{10}}{\partial x_\nu} = g_{\mu\nu}.$$

Эти уравнения должны быть удовлетворены 10 функциями f_x. Очевидно, в общем случае это возможно только тогда, когда мы имеем не меньше 10 этих f_x.

Когда мы пользуемся выражением «кривизна» по отношению к пространству-времени, мы всегда мыслим последнее помещенным таким именно образом в эвклидовом пространстве более высокого числа измерений. Мы не хотим этим сказать, что такое пространство более высокого числа измерений существует; целью такого изображения является лишь желание более ясно представить себе метрические свойства мира. Следует помнить также, что большое число четырехмерных поверхностей в 10 измерениях будет обладать одной и той же метрикой, т. е. каждая поверхность может быть наложена на другую сгибанием без растяжения, и любая из них может быть выбрана для представления метрики пространства-времени. Таким образом, геометрическое свойство выбранной для представления поверхности не обязательно должно быть свойством, внутренне присущим пространственно-временному континууму.

Четырехмерная поверхность, могущая свободно искривляться в шести дополнительных измерениях, обладает невероятным количеством возможностей. Рассмотрим сначала простейший случай, когда вся поверхность или хотя бы небольшая часть ее может быть начерчена в пятимерном эвклидовом пространстве.

Возьмем за начало координат какую-либо точку на поверхности. Пусть (x_1, x_2, x_3, x_4) будут прямоугольными координатами в касательной (четырехмерной) плоскости в начале координат. Обозначим пятую прямоугольную ось, направленную по нормали, через z. Эвклидова геометрия дает

$$-ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + dz^2, \qquad (65.1)$$

причем мнимые значения для ds соответствуют, как обычно, вещественному расстоянию в пространстве. Четырехмерная поверхность будет определяться одним соотношением между пятью координатами. Зададим его в виде

$$z = f(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Если начало координат не является особой точкой, эту функцию можно разложить по степеням x. Отступления от касательной плоскости будут величинами второго порядка малости по сравнению с расстояниями, параллельными плоскости; следовательно z не будет содержать членов, линейных относительно x. Следовательно, разложение начинается с однородной квадратичной функции, и уравнение с точностью до величин второго порядка будет иметь вид

$$2z = a_{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu}. \tag{65.2}$$

Для заданного значения z квадратичная форма (65.2) называется *индикатрисой*.

Радиус кривизны всякого нормального (ортогонального) сечения поверхности находится хорошо известным способом. Если t — радиус индикатрисы в направлении сечения (с направляющими косинусами l_1, l_2, l_3, l_4), то радиус кривизны будет равен

$$\rho = \frac{t^2}{2z} = \frac{1}{a_{\mu\nu}\, l_{\mu}\, l_{\nu}}.$$

В частном случае, если оси повернуты до совпадения с главными осями индикатрисы, выражение (65.2) обращается в следующее

$$2z = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 + k_4 x_4^2, \tag{65.3}$$

и главные радиусы кривизны поверхности будут величинами, обратными k_1, k_2, k_3, k_4.

Дифференцируя (65.2), имеем

$$dz = a_{\mu\nu} x_{\mu} dx_{\nu}, \quad dz^2 = a_{\mu\nu}\, x_{\mu} dx_{\nu} a_{\sigma\tau} x_{\sigma}\, dx_{\tau};$$

подставляя это в (65.1), получаем

$$-ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + (a_{\mu\nu}\, a_{\sigma\tau}\, x_{\mu}\, x_{\sigma})\, dx_{\nu}\, dx_{\tau}$$

для точек в нашем четырехмерном континууме. Следовательно,

$$-g_{\nu\tau} = g_{\nu}^{\tau} + a_{\mu\nu}\, a_{\sigma\tau}\, x_{\mu}\, x_{\sigma}. \tag{65.4}$$

Отсюда видно, что в начале координат $g_{\mu\nu}$ имеют эвклидовы значения, а их первые производные исчезают; вторые же производные задаются в виду (35.5) уравнениями

$$\frac{\partial^2 g_{\nu\tau}}{\partial x_{\mu}\, \partial x_{\sigma}} = -(a_{\mu\nu}\, a_{\sigma\tau} + a_{\sigma\nu}\, a_{\mu\tau}).$$

Вычислим теперь тензор Римана—Кристоффеля, пользуясь (34.5) и помня, что первые производные равны нулю:

$$B_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\sigma\rho}}{\partial x_{\mu}\, \partial x_{\nu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma} \partial x_{\rho}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x_{\nu}\, \partial x_{\rho}} - \frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x_{\mu}\, \partial x_{\sigma}}\right) =$$

$$= a_{\mu\nu} a_{\sigma\rho} - a_{\mu\sigma}\, a_{\nu\rho}. \tag{62.51}$$

Отсюда, на основании того, что $g^{\sigma\rho}$ имеют эвклидовы значения — g^{ρ}_{σ}, получим

$$G_{\mu\nu} = g^{\sigma\rho} B_{\mu\nu\sigma\rho} = -a_{\mu\nu}\left(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}\right)+a_{\mu\sigma}a_{\nu\sigma}. \qquad (65.52)$$

В частности

$$G_{11} = -a_{11}\left(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}\right)+a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2+a_{14}^2 =$$
$$=\left(a_{12}^2-a_{11}a_{22}\right)+\left(a_{13}^2-a_{11}a_{33}\right)+\left(a_{14}^2-a_{11}a_{44}\right). \qquad (65.53)$$

Аналогично

$$G = g^{\mu\nu}\cdot G_{\mu\nu} = -G_{11}-G_{22}-G_{33}-G_{44} =$$
$$= -2\left\{\left(a_{12}^2-a_{11}a_{22}\right)+\left(a_{13}^2-a_{11}a_{33}\right)+\left(a_{14}^2-a_{11}a_{44}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(a_{23}^2-a_{22}a_{33}\right)+\left(a_{24}^2-a_{22}a_{44}\right)+\left(a_{34}^2-a_{33}a_{44}\right)\right\}. \qquad (65.54)$$

Если оси выбраны таким образом, как и в случае (65.3), эти формулы дадут:

$$\left.\begin{aligned} G_{11} &= -k_1\left(k_2+k_3+k_4\right),\\ G_{22} &= -k_2\left(k_1+k_3+k_4\right);\ \text{и т. д.}\end{aligned}\right\} \qquad (65.55)$$

и

$$G = 2\left(k_1k_2+k_1k_3+k_1k_4+k_2k_3+k_2k_4+k_3k_4\right) \qquad (65.6)$$

Инвариант G получает, таким образом, сравнительно простую интерпретацию в терминах главных радиусов кривизны; он представляет собой обобщение хорошо известного инварианта двумерных поверхностей $\dfrac{1}{\rho_1\rho_2}$ или k_1k_2. Но такая интерпретация возможна только в простом случае пяти измерений. В общем же случае пяти измерений недостаточно для того, чтобы проставить даже и малую часть поверхности вблизи начала координат; действительно, если мы положим в (65.55) $G_{\mu\nu}=0$, то получим, что все $k_\mu=0$, и отсюда по (65.51) $B_{\mu\nu\sigma\rho}=0$. Мы видим поэтому, что невозможно представить указанным путем естественное поле тяготения ($G_{\mu\nu}=0$, $B_{\mu\nu\sigma\rho}\neq 0$) в эвклидовом пятимерном пространстве.

Мы будем продолжать называть инвариант G гауссовой кривизной и в более общих случаях, несмотря на то, что его не удается интерпретировать через главные кривизны *).

Представляется также весьма удобным ввести величину, назы-

---

* *Herglotz*, Leipz. Ber. 68, 199, 1916, указал, что и в общем случае гауссову кривизну и сокращенный тензор кривизны можно определить геометрически при помощи гауссовых кривизн соответствующих двумерных сечений. (*H.*)

ваемую *радиусом сферической кривизны*, т. е. радиус гиперсферы, имеющей ту же самую гауссову кривизну, что и рассматриваемая поверхность *).

Рассмотрим геометрию общего случая. При 10 измерениях нормаль **) есть многообразие 6 измерений, в котором мы можем взять прямоугольные координаты $z_1, z_2, \ldots, z_6$. Поверхность будет тогда определяться шестью уравнениями, имеющими вблизи начала координат вид:

$$2z_r = a_{r\mu\nu}\, x_\mu\, x_\nu \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6).$$

Радиус кривизны нормального сечения по направлению l_μ будет

$$\rho = \frac{t^2}{2\sqrt{(z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_6^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\{(a_{1\mu\nu}\, l_\mu\, l_\nu)^2 + \ldots + (a_{6\mu\nu}\, l_\mu\, l_\nu)^2\}}}\,.$$

Не имеет однако большого смысла развивать далее свойства кривизны нормального сечения, зависящие от поверхности, выбранной для изучения метрики пространства-времени, но не присущей самой метрике. Мы пойдем поэтому другим путем, введя радиус сферической кривизны, имеющий инвариантные свойства.

Возвращаясь на время к пяти измерениям, рассмотрим то *трехмерное* пространство, которое образовано сечением нашей поверхности плоскостью $x_1 = 0$; пусть $G_{(1)}$ — его гауссова кривизна. $G_{(1)}$ будет получена из G при отбрасывании всех членов, содержащих значок 1, измерения, не входящего больше в рассмотрение. Следовательно, $G - G_{(1)}$ будет состоять из этих членов G, содержащих значок 1; по (65.53) и (65.54) мы имеем

$$\frac{1}{2}\,(G - G_{(1)}) = -G_{11}. \qquad (65.71)$$

---

*) Гиперсфера четырех измерений, по определению, является поверхностью четырех измерений, вачерченной в пяти измерениях, так что к ней приложимо (65.6). Следовательно, если ее радиус есть R, то мы имеем $G = \frac{12}{R^2}$; для трех измерений $G = \frac{6}{R^2}$; для двух измерений $G = \frac{2}{R^2}$. (*Н.*)

**) Если в десятимерном эвклидовом многообразии дано k-мерное линейное множество направлений $(dx_1, \ldots, dx_{10})$, исходящих из начала, причем $x_1, \ldots, x_{10}$ являются обычными эвклидовыми прямоугольными координатами, то соответствующее $(n - k)$-мерное нормальное многообразие состоит из совокупности точек, координаты которых $y_1, \ldots y_{10}$ удовлетворяют всем уравнениям

$$y_1\, dx_1 + \ldots + y_{10}\, dx_{10} = 0. \qquad (Н.)$$

Вводя значение $g_{11} = -1$ в начале координат, получим:

$$G_{11} - \frac{1}{2} g_{11} G = \frac{1}{2} G_{(1)}. \qquad (65.72)$$

Этот результат, полученный для случая пяти измерений, является вполне общим. Рассматривая путь, которым мы достигли (65.4), мы увидим, что каждое из шести z будет сказываться на значении $g_{\nu\tau}$ просто в виде аддитивного члена; нам, следовательно, надо только сложить $a_{\mu\nu} a_{\sigma\tau} x_\mu x_\sigma$ для шести значений $a_{\mu\nu} a_{\sigma\tau}$, введенных шестью членами dz_r^2. Все последующие вычисления содержат лишь линейные уравнения, и, следовательно, то, что справедливо для одного z, будет справедливо и для шести z. Таким образом, (65.72) имеет место и в общем случае, когда мы имеем 10 измерений.

Рассмотрим теперь инвариантную квадратичную форму:

$$\left(G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G\right) dx_\mu dx_\nu = 3. \qquad (65.81)$$

Обозначим через ρ_1 радиус-вектор этой формы в направлении x_1, так что $dx_\mu = (\rho_1\ 0, 0, 0)$ есть точка на поверхности, соответствующей этой квадратичной форме. Предыдущее уравнение дает

$$\left(G_{11} - \frac{1}{2} g_{11} G\right) \rho_1^2 = 3,$$

так что согласно (65.72)

$$G_{(1)} = \frac{6}{\rho_1^2}. \qquad (65.82)$$

Но для гиперсферы радиуса R в *трех* измерениях ($k_1 = k_2 = k_3 = \frac{1}{R}$, а k_4 исчезает) гауссова кривизна равна $\frac{6}{R^2}$. Следовательно, ρ_1 есть радиус сферической кривизны трехмерного сечения мира, перпендикулярного к оси x_1.

Так как квадратичная форма (65.81) инвариантна, то ось x_1 может быть взята в любом направлении. Мы видим, следовательно, что *«радиус-вектор квадратичной формы*

$$\left(G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G\right) dx_\mu dx_\nu = 3$$

в любом направлении равен радиусу сферической кривизны соответствующего трехмерного сечения мира». Мы назовем эту квадратичную форму *квадратичной формой кривизны*.

66. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАКОНА ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА.

Возьмем закон Эйнштейна для пустого пространства в его позднейшем виде (37.4)

$$G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}, \tag{66.1}$$

где λ — мировая постоянная, до настоящего времени точно не известная, но столь малая, что она заметно не нарушает согласия с наблюдениями основного уравнения $G_{\mu\nu} = 0$. Мы сразу же получаем из (66.1): $G = 4\lambda$, и отсюда

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = -\lambda g_{\mu\nu}.$$

Подставляя это выражение в (65.81), получим для квадратичной формы кривизны

$$-\lambda g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = 3,$$

или

$$-ds^2 = \frac{3}{\lambda}. \tag{66.2}$$

Мы видим, что квадратичная форма кривизны представляет собой сферу радиуса $\sqrt{\frac{3}{\lambda}}$, и радиус кривизны в любом направлении *) и в любой точке пустого пространства имеет постоянную длину $\sqrt{\frac{3}{\lambda}}$. Обратно, если радиус кривизны в любом направлении пустого пространства изотропен и однороден, то имеет место закон Эйнштейна (66.1).

Для выяснения всего значения утверждения, что радиус кривизны имеет постоянную длину, требуется более внимательное рассмотрение вопроса. Длина не есть абсолютная величина, и наш результат может только означать *постоянное отношение радиуса кривизны к тому материальному масштабу длины*, которым мы пользуемся при наших измерениях, в частности, при измерениях, подтверждающих закон

$$G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}.$$

---

*) Мы пользуемся здесь сокращенным термином «радиус кривизны в некотором направлении» вместо «радиус сферической кривизны трехмерного сечения мира, перпендикулярного этому направлению». В теории нет другого радиуса кривизны, *связанного с направлением*, с которым можно было бы спутать данный.

Для того чтобы было возможно непосредственное сравнение, материальный масштаб-стандарт должен быть доставлен на место, где находится измеряемая длина и установлен в ее направлении. Правда, мы часто пользуемся косвенными методами, обходя прямое транспортирование и ориентировку, но проверкой этих косвенных методов всегда служит тот факт, что они дают тот же результат, что и непосредственное сравнение, и их пригодность зависит от справедливости основных законов природы. Мы как раз рассматриваем здесь один из этих основных законов и, допустив пригодность этих косвенных методов сравнения, мы попали бы в порочный круг. Следовательно, точным выражением наших результатов будет утверждение, что радиус кривизны в любой точке и в любом направлении находится в постоянном отношении с длиной некоторой определенной единицы измерений, помещенной в ту же точку и имеющей то же направление.

Если мы возьмем обратное сравнение, то получим более наглядный результат:

Длина какого-либо определенного материального тела находится в постоянном отношении к радиусу «кривизны мира в той точке и в том направлении, где это тело находится». (66.3)

Закон этот как-будто уже не имеет отношения к структуре пустого континуума. Это есть закон строения вещества, показывающий, какие размеры должно принять данное собрание молекул для того, чтобы находиться в равновесии с окружающими условиями в мире.

Возможность существования в пространстве электрона является замечательным фактом, объяснения которому еще не найдено. Его структура должна определяться неизвестными еще нам уравнениями, которые очевидно должны допускать только два решения: одно — дающее отрицательный электрон, другое — дающее электрон положительный (или протон)*). Когда мы решим эти уравнения, чтобы определить радиус электрона в любом направлении, результат непременно будет иметь следующий вид:

Радиус электрона в данном направления равен численной константе, умноженной на некоторую функцию от условий, имеющихся в пространстве, где данный электрон находится.

---

*) В настоящее время положительным электроном, или позитроном, называют частицу с массой электрона (а не протона), но с положительным зарядом (т. е. зарядом протона). (*Р.*)

В левой части стоит направленная длина, следовательно, и величиина в правой части должна быть направленной длиной. Мы только-что нашли одну направленную длину, характерную для пустого пространства, в которое был помещен электрон, именно радиус сферической кривизны соответствующего сечения мира. Повидимому, учитывая третьи и четвертые производные от $g_{\mu\nu}$, можно было бы построить другие независимые направленные длины. Но такое построение очевидно сопряжено с большими трудностями довольно неправдоподобного характера. Поэтому мы имеем все основания полагать, что решение неизвестных еще нам уравнений будет гласить: *радиус электрона в любом направлении равен численному коэффициенту $\times$ радиус кривизны пространства-времени в этом же направлении.*

Это сразу дает нам закон (66.3).

От электрона можно перейти к атому, затем к аггрегату атомов, из которых составлены практические материальные единицы измерений. Таким образом, мы видим, что закон тяготения Эйнштейна является почти неизбежным следствием факта употребления материальных измерительных приспособлений, независимо от того, каковы на самом деле законы, согласно которым устанавливается равновесие материальных тел с пустым пространством вокруг них.

Представим себе прежде всего мир, в котором кривизна, отнесенная к некоторому избранному (не материальному) измерительному стандарту, была бы неизотропна. Электрон, внесенный в такой мир, должен будет обладать такой же анизотропией, для того чтобы он мог удовлетворять всем тем условиям равновесия, что и симметричный электрон в изотропном мире. Пусть затем эта анизотропия остается во всяком материальном теле, образованном из таких электронов. Наконец, когда мы *измеряем* мир, т. е. производим сравнения материальных тел, эта анизотропия, встречаясь у обоих партнеров сравнения, в результате исключается. Закон тяготения Эйнштейна выражает результат этого исключения. Симметрия и однородность, утверждаемые законом Эйнштейна, не являются, следовательно, свойствами внешнего мира, но свойствами процессов измерения.

С этой точки зрения константа λ не может быть нулем, и пустое пространство имеет конечный радиус кривизны по отношению к принятым масштабам длины. Электрон никогда не мог бы решить, какой размер он должен иметь, если бы не существовала какая-то независимая длина, с которой он мог бы сравниваться.

Следует заметить, что прямоугольные координаты (x_1, x_2, x_3, x_4), которыми мы пользовались в этой и предыдущих главах, соответствуют эвклидовым координатам, а не галилеевым. Следовательно, x_4 есть мнимое время и $G_{(4)}$ не лежит в каком-нибудь действительном направлении мира. В вещественном временнóм направлении мы не имеем никакого радиуса кривизны. Это отнюдь не означает, что наше рассуждение ограничено тремя измерениями, оно относится ко всем направлениям в четырехмерном мире вне светового конуса и приложимо к пространственным измерениям вещественных тел, движущихся с любой скоростью ниже скорости света. Вещественная квадратичная форма кривизны ограничена световым конусом, и ее математическое продолжение лежит не внутри конуса, но в направлении мнимого времени, которое нас не интересует.

Из рассмотрения протяжения во временнóм направлении мы получаем подтверждение высказанных положений, которое не является совсем фантастическим. Мы указывали, что электрон не знал бы, какой размер ему принять, если бы в пространстве не существовали независимые длины, с которыми он мог бы сравниться. Аналогично, электрон не мог бы знать, как долго он должен существовать, если бы не существовало определенного промежутка времени, с которым он мог бы сравниваться. Но в направлении времени не существует радиуса кривизны. Таким образом, электрон *не* знает, как долго он должен существовать, а поэтому он и существует бесконечно.

Мы получили бы иные законы тяготения, из рассматривавшихся в п. 62, если бы радиус единицы вещества устанавливался как определенная часть не радиуса кривизны, но других направленных длин (более сложного происхождения), характеризующих пустое пространство.

В п. 38 нам пришлось постулировать, что поле тяготения первичной частицы материи обладает свойствами симметрии. Теперь мы оправдали этот постулат. Мы ввели в теорию относительности новый и весьма значительный принцип, а именно, что сама симметрия может быть лишь относительной; частица же которая, поскольку мы имеем дело с механикой, должна быть отождествлена со своим полем тяготения, сама является мерой симметрии. Мы придем к тому же выводу, если попытаемся определять симметрию по распространению света, т. е. примем за меру симметрии конус $ds=0$. Если геометрическое место $ds=0$ обладает полной симметрией по отношению к некоторой оси (взятой за ось времени t), то очевидно, что ds^2 должно выражаться формулой (38.12).

Теперь можно отдать себе отчет в двойной связи поля и материи, материи и поля, друг с другом. Материя выводится из основного тензора $g_{\mu\nu}$ с помощью выражения $G_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu G$; но первоначально подобным образом определенная материя и служила для измерения фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$. В этом параграфе мы рассмотрели лишь одно простое следствие из этой связи, а именно закон тяготения. Однако, чтобы вывести отсюда все следствия, нужен более глубокий анализ, который мы и попытаемся развить в VII главе II части.

67. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ И СФЕРИЧЕСКИЙ МИР.

В предыдущем параграфе мы указали, что λ не равна нулю, и, следовательно, в каждой точке пространства-времени мы имеем небольшую, но конечную кривизну. Этот результат позволяет сделать некоторые заключения о форме и размерах мира как целого.

Были предложены две формы мира:

1. *Цилиндрический мир Эйнштейна.* В нем пространственные измерения соответствуют сфере, временно́е же измерение не искривлено.

2. *Сферический мир де Ситтера.* Здесь все измерения сферичны, но так как пространственным координатам эквивалентно мнимое время, а не действительное, то сечения, соответствующие действительному времени, будут не кругами, а гиперболами.

Мы дадим аналитическое описание этих двух форм мира. Точка на поверхности шара радиуса R задается двумя угловыми переменными θ и φ, так что

$$-ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

Распространяя это на случай трех измерений, мы получим при трех переменных углах

$$-ds^2 = R^2\{d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\}. \qquad (67.11)$$

Следовательно, интервал в мире Эйнштейна задается в виде*):

$$ds^2 = R^2 d\chi^2 - R\sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + dt^2. \qquad (67.2)$$

Конечно, такой вид приложим только к форме мира в большом масштабе. Незначительные неправильности, происходящие от аккумулирования материи в звезды и звездные скопления, следует рассматривать как местные отклонения, которыми можно пренебречь.

Если мы будем итти от начала координат в любом направлении, то расстояние, измеренное твердыми масштабами, окажется равным $R\chi$; но поверхность сферы радиуса $R\chi$ будет не $4\pi R^2\chi^2$, а $4\pi^2 R^2\sin^2\chi$**). В далеких областях совсем не так много простора, как предполагал Эвклид. Мы достигнем «наибольшей сферы» на расстоянии $\frac{1}{2}\pi R$; если мы пойдем далее, то последующие сферы будут все уменьшаться и сведутся на расстоянии πR к точке; πR есть наибольшее расстояние, которое вообще может существовать. Весь объем пространства (определенный твердыми масштабами) конечен и равен

$$\int_0^{\pi} 4\pi R^2 \sin^2\chi \; R d\chi = 2\pi^2 R^3. \qquad (67.2)$$

Несмотря на то, что объем пространства конечен, последнее не имеет границ; не существует также какого-нибудь центра сферического пространства, каждая выбранная точка находится в таком же отношении ко всему остальному пространству, как и всякая другая точка.

Для получения формы мира де Ситтера мы обобщим (67.11) на четыре измерения (т. е. получим сферическую четырехмерную поверхность, начерченную в эвклидовом пространстве пяти измерений). Для четырех угловых переменных $\omega, \zeta, \theta, \varphi$ имеем

$$-ds^2 = R^2[d\omega^2 + \sin^2\omega\{d\zeta^2 + \sin^2\zeta\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\}]. \qquad (67.31)$$

Чтобы получить более ясную физическую интерпретацию,

---

*) В работе «Die Lösungen der Feldgleichungen der Schwere von Schwarzschild, Einstein und Trefftz und ihre Vereinigung». Berl. Sitzungsber. 1923, стр. 27 и сл. Лауэ предложил важное обобщение формы Эйнштейна. (*Н.*)

**) Потому что элемент длины дуги на «сфере Эйнштейна» радиуса $R\chi$ получается из (67.12) при $d\chi = dt = 0$ в виде

$$R^2\sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2),$$

т. е. в форме элемента длины эвклидовой сферы радиуса $R\sin\chi$. (*Н.*)

перейдем к другой координатной системе путем следующего преобразования:

$$\cos\omega = \cos\chi \cdot \cos it$$
$$\operatorname{ctg}\zeta = \operatorname{ctg}\chi \cdot \sin it$$

и его обращения *)

$$\left.\begin{aligned} \sin\chi &= \sin\zeta \cdot \sin\omega \\ \operatorname{tg} it &= \cos\zeta \cdot \operatorname{tg}\omega \end{aligned}\right\} \qquad (67.32)$$

После подстановки получаем:

$$ds^2 = -R^2 d\chi^2 - R^2 \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + R^2 \cos^2\chi\, dt^2. \text{ **)} \qquad (67.33)$$

Поскольку дело касается (χ, θ, φ), это выражение совпадает с эйнштейновой формой (67.12), но переменная t, которую следует рассматривать как «время» ***) в этом мире, обладает уже иными свойствами. Для покоящихся часов (χ, θ, $\varphi = \text{const}$) мы получаем:

$$ds = R\cos\chi\, dt, \qquad (67.4)$$

так что «продолжительность» любого периода пропорциональна $\sec\chi$. С удалением от начала координат удары маятника становятся все реже и реже; в частности, колебания атома становятся все медленнее. Более того, мы можем обнаружить опытным путем это замедление атомных колебаний, так как оно передается нам без

---

*) Проще всего убедиться в этом, если принять во внимание, что обе системы формул получаются при сравнении двух различных параметрических представлений для решений уравнения

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

а именно

$$x_1 = \cos\omega,\ x_2 = \sin\omega\cos\zeta,\ x_3 = \sin\omega\sin\zeta$$

и

$$x_1 = \cos\chi\cos it,\ x_2 = \cos\chi\sin it,\ x_2 = \sin\chi. \qquad (H.)$$

**) В силу первого из уравнений (67.32) для проверки этого результата нужно только показать, что обе дифференциальные формы

$$d\omega^2 + \sin^2\omega\, d\zeta^2, \text{ и } d\chi^2 - \cos^2\chi\, dt^2$$

связаны друг с другом указанным выше преобразованием. Для облегчения вычислений мы даем выражения для $d\omega$ и $d\zeta$:

$$d\omega = \frac{\sin\chi\cos it}{\sin\omega}\, d\chi + i\sin it\,\frac{\cos\chi}{\sin\omega}\, dt.$$
$$d\zeta = d\,\frac{\sin it}{\sin^2\omega}\, d\chi - t\cos it \operatorname{ctg}\chi \sin^2\zeta\, di. \qquad (H.)$$

***) Скорость света в начале координат равна теперь R; время в обычных единицах было бы равно Rt.

изменения светом, излученным атомами. Координаты (67.33) образуют статическую систему, в которой скорость света не зависит от t; следовательно, все световые импульсы запаздывают при прохождении на одно и то же «время» и достигают нас с теми же интервалами t, с которыми они были испущены; поэтому спектральные линии, исходящие из далеко расположенных покоящихся тел, должны казаться смещенными в сторону красной части спектра.

На «горизонте» $\chi=\frac{1}{2}\pi$ всякое конечное значение ds соответствует бесконечному dt. Требуется бесконечно большое время для того, чтобы что-либо могло произойти. Все процессы в природе замирают, поскольку их можно наблюдать из начала координат.

Но нам следует вспомнить, что симметричность основной формулы (67.31) дает нам возможность любую точку пространства и времени выбрать за начало координат без изменения конечного результата—это значит, что не может быть никакой разницы в явлениях природы на горизонте и в начале координат. Наблюдатель на горизонте не заметит остановки хода явлений, действительно, у него есть свой горизонт на расстоянии $\frac{1}{2}\pi R$, где, как ему будет казаться, все находится в полном покое. Пошлем теперь луч света из начала координат на горизонт и обратно. (Мы берем здесь двойной путь для того, чтобы интервал времени можно было отсчитать на одних и тех же часах в начале координат. Физический смысл времени при ординарном пути менее очевиден.) Положим $ds=0$. Тогда скорость света получится по формуле

$$0=-R^2 d\chi^2+R^2\cos^2\chi\, dt^2,$$

отсюда

$$dt=\pm\sec\chi\, d\chi,$$

или

$$t=\pm\log\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\chi\right)+\text{const}. \tag{67.5}$$

Последнее выражение должно быть взято в пределах $\chi=0$ и $\frac{1}{2}\pi$, а затем еще раз с обратным законом в пределах $\frac{1}{2}\pi$ и 0. Результат равен бесконечности, так что подобное путешествие никогда не будет закончено.

Де Ситтер устраняет поэтому парадокс остановки времени на горизонте, замечая, что эта остановка отражается только на событиях, которые произошли до начала или после конца вечности. Более подробно мы рассмотрим однако этот вопрос в п. 70.

68. ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО.

Уравнение (67.11) для сферического пространства, появляющееся как в эйнштейновой, так и в де ситтеровой формах интервала, может быть истолковано также, как формула слегка измененного типа мира, так называемого «эллиптического пространства». С современной точки зрения это название довольно неудачно, так как оно ни в какой степени не выясняет его природы. Мы можем подойти к вопросу эллиптического пространства следующим путем. Предположим, что в сферическом пространстве физические процессы, протекающие в каких-либо точках, точно подобны процессам, протекающим в антиподных точках, так что одна половина мира представляет собой точное подобие другой. Пусть A, B, A', B'—четыре точки, каждая на расстоянии 90° от предыдущей по дуге большого круга. Перейдем теперь из точки B' через точку A в точку B; если мы будем продолжать наш путь вдоль BA', мы не сможем сказать, не повторяем ли мы совершенное уже один раз путешествие вдоль $B'A$. Нам хочется допустить, что дуга $B'A$ на самом деле является непосредственным продолжением AB, и что B и B' — одни и те же точки, только помещенные в силу какой-то ошибки при проекции далеко друг от друга так же, как например мы видим Берингово море, помещенное на двух краях карты, в проекции Меркатора. Оставим метафизикам решать вопрос, могут ли два предмета быть точно подобны как по внутренним свойствам, так и по отношению к окружающим предметам и в то же время отличаться в смысле их тождественности. Физику нет дела до таких мистических различий в тождестве. В рассматриваемом нами случае физик без всяких колебаний заявит, что наблюдатель исследует вторично ту же самую полусферу *).

---

*) При определенном способе перехода из точки B' в точку B наблюдатель все же заметил бы, что он находится в эллиптическом, а не в сферическом пространстве. Представим себе, что он переходит из точки B' в точку B по большому кругу сферы, оставаясь все время на наружной поверхности сферы. По приходе в точку B он заметит, что хотя точка B и соседние с нею физически тождественны с точкой B' и соседними с нею, однако те точки, которые в точке B' находились слева от него, теперь окажутся справа и обратно. В этом и сказывается физически различие в связности между сферическим и эллиптическим пространством. Геометриче-

Мы видим, что сферический мир в данном случае состоит не из двух подобных полусфер, но всего лишь из одной полусферы, которую мы представляем себе для удобства проектирования дважды повторенной. Дифференциальная геометрия для такого мира будет та же, что и для сферы и дается уравнением (67.11), но *связность* будет различна. Точно так же плоскость и цилиндр обладают одной и той же дифференциальной геометрией, но различными свойствами связности. На граничном круге каждой полусферы противоположные концы диаметров следует считать совпадающими, что не поддается графической интерпретации; но, конечно, это обстоятельство не может служить аргументом против существования такой связи.

Эта полусфера, возвращающаяся сама в себя подобным сопоставлением антиподных точек, представляет собой тип эллиптического пространства. Для дальнейшего нам не понадобится специально рассматривать эллиптическое пространство. Достаточно запомнить, что, принимая сферическое пространство, мы возможно дважды воспроизводим физический мир; например, рассмотрен-

---

ски это различие можно формулировать так: если итти по плоскости сферического пространства, двигаясь все время прямолинейно, то мы сперва придем в противоположную точку той же плоскости, а затем вернемся в исходную точку и при этом окажемся на той же стороне плоскости, что и в начале движения; при таком же движении в эллиптическом пространстве мы окажемся при возвращении в исходную точку на противоположной стороне плоскости (что соответствует приходу в противоположную точку в сферическом пространстве) и лишь при продолжении движения в том же направлении мы окажемся при вторичном возвращении в ту же точку на той же стороне плоскости, что и в начале движения (что соответствует возвращению в исходную точку в сферическом пространстве).

Мы видим, таким образом, что твердое тело, скользящее по прямой в эллиптическом пространстве без вращения, т. е. так, что плоскости, проходящие через эту прямую, скользят по себе самим, оказывается, тем не менее, при первом возвращении в исходную точку повернутым на 180° вокруг той же прямой.

Подобно тому как для перехода от сферической плоскости к эллиптической достаточно считать две противоположные точки сферической плоскости за одну точку эллиптической, можно перейти и от эллиптической плоскости к сферической, для чего достаточно отличать друг от друга точки эллиптической плоскости, совпадающие, но лежащие на противоположных сторонах плоскости, и считать эти точки за противоположные точки сферической плоскости. (*Р.*)

ный уже объем $2\pi^2 R^3$ может относиться к такому удвоенному миру.

Все затруднения, связанные с представлением сферического или цилиндрического пространства, происходят главным образом потому, что мы мыслим себе пространство как некий континуум, в котором предметы локализованы. Но мы выяснили уже, что это понятие положения не является первичным, но получается как результат вычисления из более основного понятия расстояния или протяженности. Пользуясь словом «пространство», нам трудно отбросить представления, не играющие роли. Поэтому в дальнейшем мы от него отказываемся и явно указываем, что мы будем рассматривать *сетку интервалов* (или расстояний, так как мы сейчас не оперируем со временем). Соотношение «интервала», или расстояния между двумя точками имеет несколько трансцендентный характер, который можно сравнить, например, с понятиями разности потенциалов или химического сродства; причину того, почему это понятие всегда ассоциируется с геометрическими представлениями, следует искать не столько в его внутренней сущности, сколько в человеческой психологии. Мы связываем численные значения с интервалами точно так же, как мы связываем их и с любым другим соотношением для двух точек, и получаем таким образом сетку, в которой каждой стороне клетки сопоставлено некоторое число. Мы можем теперь сделать нитяную модель этой сетки, где длина ниток будет соответствовать численным значениям интервалов. Очевидно, что форма этой модели, т. е. существование или несуществование неожиданных пересечений, не может быть предсказана априорно, но может явится лишь следствием наблюдения и эксперимента. Может оказаться, что сетка соответствует решетке, построенной математиком в эвклидовом пространстве, но может быть она будет иметь свойства связности, которые не поддаются представлению в такой форме. Графическое изображение весьма удобно как средство, но опасно как привычка. Если можно найти графическую интерпретацию, соответствующую действительному характеру сетки, то конечно ею следует пользоваться, но не следует думать, что какие-либо соображения о пригодности для графического изображения могли повлиять на конструкцию нашей сетки. Мы знаем из опыта, что небольшие части сетки могут легко быть изображены как решетка в плоском пространстве, подобно тому, как небольшие части земной поверхности могут быть нанесены на плоскую карту; но отсюда вовсе не следует, что земля является плоской, или что наша сетка в целом может быть представлена в пространстве, имеющем простой односвязный характер.

69. ЗАКОН ТЯГОТЕНИЯ ДЛЯ КРИВОГО ПРОСТРАНСТВА.

При помощи результата (43.5) выражения $G_{\mu\nu}$ могут быть вычислены как для эйнштейнова мира, так и для мира де Ситтера. Уравнения де Ситтера (67.33) имеют уже канонический вид, где r заменено на χ; положим далее

$$e^{\lambda}=R^2, \quad e^{\mu}=R^2\frac{\sin^2\chi}{\chi^2}, \quad e^{\nu}=R^2\cos^2\chi.$$

Отсюда для производных по χ имеем:

$$\lambda'=0, \quad \mu'=2\operatorname{ctg}\chi-\frac{2}{\chi}, \quad \nu'=-2\operatorname{tg}\chi,$$

$$\mu''=-2\operatorname{cosec}^2\chi+\frac{2}{\chi^2}, \quad \nu''=-2\sec^2\chi.$$

Принимая во внимание (43.5), с помощью несложных преобразований мы получаем:

$$G_{11}=-3, \quad G_{22}=-3\sin^2\chi, \quad G_{33}=-3\sin^2\chi\sin^2\theta, \quad G_{44}=3\cos^2\chi$$

что эквивалентно уравнению

$$G_{\mu\nu}=\frac{3}{R^2}g_{\mu\nu}. \tag{69.11}$$

Мы видим, что мир де Ситтера соответствует измененному закону тяготения

$$G_{\mu\nu}=\lambda\cdot g_{\mu\nu},$$

и радиус этого мира определяется из формулы

$$\lambda=\frac{3}{R^2}\cdot \tag{69.12}$$

Аналогично форма Эйнштейна (67.12) дает:

$$e^{\lambda}=R^2, \quad e^{\mu}=R^2\frac{\sin^2\chi}{\chi^2}, \quad e^{\nu}=1,$$

откуда по (43·5)

$$G_{11}=-2, \quad G_{22}=-2\sin^2\chi, \quad G_{33}=-2\sin^2\chi\sin^2\theta, \quad G_{44}=0. \tag{69.21}$$

$$G=\frac{6}{R^2}. \tag{69.22}$$

Эти выражения не могут быть согласованы с законом $G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$, так как G_{44} исчезает. Форма Эйнштейна не является поэтому естественной формой пустого пространства, но тем не менее она может быть формой действительного мира, если материя в последнем распределена соответствующим образом. Чтобы найти требуемое распределение материи, нам надо вычислить тензор энергии (54.71)

$$-8\pi T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G + \lambda g_{\mu\nu}.$$

Мы получим:

$$\left.\begin{aligned} -8\pi T_{11} &= \left(-\frac{1}{R^2} + \lambda\right) g_{11} \\ -8\pi T_{22} &= \left(-\frac{1}{R^2} + \lambda\right) g_{22} \\ -8\pi T_{33} &= \left(-\frac{1}{R^2} + \lambda\right) g_{33} \\ -8\pi T_{44} &= \left(-\frac{3}{R^2} + \lambda\right) g_{44} \end{aligned}\right\} \qquad (69.3)$$

Распределение материи, вытекающее из этих значений тензора энергии, остается неопределенным, так как мы можем еще по произволу располагать λ. Наблюдение показывает, что в пределах звездной системы скорости материальных частиц—молекул, или звезд — обычно очень малы сравнительно со скоростью света. Пожалуй, довольно рискованно переоценивать значение этого замечания; так, астрономические данные показывают, что с расширением границ изучаемой вселенной все более увеличиваются и наблюдаемые скорости; так например, спиральные туманности, повидимому наиболее отдаленные из доступных наблюдению объектов, имеют скорости порядка 500 *км* в сек., т. е. приблизительно в 10 раз больше, чем скорости, наблюдаемые в нашей звездной системе. Вполне возможно, что на еще более далеких от нас расстояниях скорости будут еще больше. В решении Эйнштейна мы все же принимаем, что средняя скорость материальных частиц всегда мала сравнительно со скоростью света, т. е. что общие свойства мира соответствуют условиям

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0, \quad T_{44} = \rho, \quad T = \rho_0,$$

где ρ_0—средняя плотность (в естественных мерах) материи в пространстве.

В этом случае (69.3) дает:

$$\lambda = \frac{1}{R^2}, \quad 8\pi \rho_0 = \frac{2}{R^2}. \tag{69.4}$$

Если M — вся масса, заключенная в пространстве, то по (67.2) имеем

$$M = 2\pi^2 R^3 \rho_0 = \frac{1}{2}\pi R. \tag{69.5}$$

R вряд ли может быть меньше, чем 10^{18} *км*, так как расстояния до некоторых шаровых звездных скоплений больше этой величины *). Следовательно, если гравитационная масса солнца равна 1,5 *км*, то вся масса мира должна равняться по меньшей мере триллиону солнц, если справедлива форма Эйнштейна.

Представляется естественным рассматривать формы Эйнштейна и де Ситтера как крайние случаи, считая, что действительная форма мира лежит где-то между ними. Очевидно, что пустой мир де Ситтера мыслится как предельный случай; присутствие звезд и туманностей видоизменяет его, приближая к решению Эйнштейна. Но и мир Эйнштейна, содержащий массы, во много раз превышающие предположения астрономов, должен быть рассматриваем как другой крайний случай, а именно: как мир, содержащий столько материи, сколько он вообще может содержать.

Такая точка зрения отрицает возможность окончательного решения в пользу того или другого решения. Будет ли эйнштейново или де ситтерово решение более близким к истине, определяется только лишь количеством материи, которое оказалось случайно созданным в мире. Но, как мы увидим дальше, это компромиссное рассуждение подверглось сильным нападкам.

70. СФЕРИЧЕСКИЙ МИР ДЕ СИТТЕРА.

Если в уравнении (67.33) положить $r = R.\sin\chi$, мы получим

$$ds^2 = -\gamma^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + \gamma\, dt^2, \tag{70.1}$$

где

$$\gamma = 1 - \frac{r^2}{R^2} = 1 - \frac{1}{3}\lambda r^2,$$

причем для t вновь введена обычная единица. Это решение для пустого пространства уже было нами получено раньше, см. уравнение (45.6).

---

*) В последнее время найдены спиральные туманности на расстоянии 10^{21} *км*. (*Р.*)

Нам остается ввести полученное для γ выражение в формулы пп. 38, 39, чтобы получить уравнения движения материальных частиц и световых волн в де ситтеровом пустом мире. Так, например, уравнение (39.31) может быть переписано в виде

$$\frac{d^2r}{ds^2}-\frac{1}{2}\frac{\gamma'}{\gamma}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-r\gamma\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2+\frac{1}{2}\gamma\gamma'\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=0,$$

откуда следует

$$\frac{d^2r}{ds^2}=-\frac{\frac{1}{3}\lambda r}{1-\frac{1}{3}\lambda r^2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+r\left(1-\frac{1}{3}\lambda r^2\right)\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2+$$
$$+\frac{1}{3}\lambda r\left(1-\frac{1}{3}\lambda r^2\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2. \tag{70.21}$$

Для покоящейся частицы получаем, в частности,

$$\frac{dr}{ds}=0,\quad \frac{d\varphi}{ds}=0,\quad \left(\frac{dt}{ds}\right)^2=\gamma^{-1},$$

откуда

$$\frac{d^2r}{ds^2}=\frac{1}{3}\lambda r. \tag{70.22}$$

Таким образом, покоящаяся частица не останется, вообще говоря, в покое, если она не находится в начале координат, но будет удаляться с ускорением, возрастающим по мере увеличения расстояния. Собрание частиц, находившихся первоначально в покое, будет стремиться рассеяться, если только их взаимное тяготение не достаточно сильно, чтобы этому противодействовать *).

Мы легко можем убедиться, что в мире Эйнштейна не существует подобной тенденции к рассеянию. Частица, помещенная где бы то ни было, будет находиться в покое. Действительно, это совершенно необходимо для логической замкнутости решения Эйнштейна, так как оно требует, чтобы мир был наполнен материей, имеющей весьма малую скорость. В виде возражения против мира де Ситтера иногда приводится то, что этот мир пере-

*) Возможно, размеры нашего Млечного пути таковы, что в его отдаленных частях это космическое отталкивание превосходит гравитационные силы системы и определяет таким образом верхнюю границу протяженности совокупности звезд. Не исключено, что наличие космического отталкивания влияет также на развитие спиральных туманностей, если они являются новыми галактиками.

стает быть статическим, коль скоро мы внесем в него материю, но это обстоятельство пожалуй скорее говорит за теорию де Ситтера, чем против нее.

Одной из наиболее загадочных проблем космогонии являются колоссальные скорости спиральных туманностей. Радиальные скорости их имеют порядок 600 *км* в сек., причем преобладают туманности, удаляющиеся от солнечной системы. Обычно считается (хотя этот взгляд и оспаривается некоторыми авторитетными исследователями), что спиральные туманности являются самыми удаленными из известных нам объектов, так что именно здесь мы можем ожидать эффектов, обязанных общей кривизне мира. Теория де Ситтера дает двойное объяснение этого удаления: во-первых, существует общая тенденция к рассеянию [см. (70. 22)]; во-вторых, мы имеем общее смещение к красному концу спектра спектральных линий удаленных объектов, происходящее от замедления атомных колебаний (67. 4). Это последнее смещение может быть ошибочно истолковано как движение удаления от нас.

Самые обширные измерения радиальных скоростей спиральных туманностей были произведены профессором В. М. Слайфером на Лауэллевской обсерватории. Он любезно предоставил в наше распоряжение приведенную на стр. 303—305 таблицу, содержащую много еще неопубликованных данных. Эта таблица содержит вероятно все данные, полученные до февраля 1922 г.*).

---

*) Начатая Слайфером работа по исследованию радиальных скоростей внегалактических туманностей (см. сводку в статье G. Strömberg'a, Astrophys. Journ. **61**, 354, 1925) была значительно расширена на Маунт-Вильсоновской обсерватории. В 1929 году появилась статья Хэббля, в которой были собраны результаты исследования туманностей, удаленных от нас на расстояние до двух миллионов парсеков (1 парсек $= 3{,}259$ световых лет $= 30{,}84 \cdot 10^{12}$ *км*). Парсек — расстояние, соответствующее параллаксу в $1''$.

В этой работе Хэббль установил соотношение между величиной кажущегося допплеровского смещения линий, т. е. видимой, наблюдаемой скоростью туманности и ее расстоянием от нас. Это замечательное соотношение, получившее ныне характер одного из самых фундаментальных законов природы, выражается простой формулой для скорости удаления V: $V = D/1790$, где расстояние D выражено в миллионах парсеков; или иначе: на каждые миллион парсеков скорость увеличивается на 560 *км*/сек. (*Edwin Hubble*, Proc. Nat. Ac. Sci., Washington, **15**, 168, 1929). Формула Хэббля получается непосредственно из *нестационарного* решения уравнений Эйнштейна, дающего *расширяющуюся* вселенную. См. работы Фридмана и Лемэтра, цитир. в приложении к русскому изданию.

В 1931 году Хюмэсон сообщил измерение скоростей еще нескольких де-

Здесь замечательно огромное преобладание удалений над приближениями. К сожалению, мы еще не имеем (1922 г.) достаточно данных о южных туманностях и не можем поэтому сделать окончательного заключения. Но даже если эти последние дадут такое же преобладание удалений над приближениями, космогонические трудности вряд ли будут полностью устранены де ситтеровой теорией. Из таблицы мы видим, что две туманности*) (включая и Большую

сятков туманностей, расширив пределы исследованной области до 82 миллионов парсеков. Подробный анализ измерений расстояния и скоростей туманностей, подтвердивший основное соотношение Хэббля, дан в статье Хэббля и Хюмэсона (*Edwin Hubble and Milton L. Humason*, Astrophys. Journ. **74**, 49, 1931); см. также сводную статью Кэртиса, откуда и взята в основном новая таблица, помещенная в тексте (*Heber D. Curtis*, The nebulae, Handbuch d. Astrophysik, том V, 2-я половина, 1-я часть, 1933 г., J. Springer, Berlin).

Числа в первом столбце относятся к New General Catalogue. Во втором столбце помещены галактические координаты: долгота l, считаемая от апекса, и широта b, отсчитываемая от плоскости Млечного пути. Знак «+» в третьем столбце означает скорость, направленную от нас, знак «—» — к нам. В четвертом столбце помещена первая буква фамилии автора, описавшего данную туманность: Х — Хюмэсон, С — Слайфер, С* — Слайфер с сотрудниками, Сэн — Сэнфорд, П — Пиз, В — Вильсон.

Данные Слайфера 1922 года, о которых говорится в тексте, вошли полностью в вышеприведенную таблицу, только координаты—склонение и прямое восхождение—заменены галактическими. В пятом столбце дается локализация туманностей: «л» — означает принадлежность к «локальному» скоплению галактик, к которому принадлежит и наш Млечный путь; «из» указывает на то, что данная туманность «изолирована», еще не отнесена к нашему рою галактик и вместе с тем не входит ни в одну из групп или скоплений туманностей, видимых в направлении одного из созвездий (напр. Virgo, Cancer и т. д.). В шестом столбце «С» означает спиральную туманность, «Э» — эллиптическую, «ирр» — иррегулярную, не имеющую особой формы. В седьмом столбце приведены видимые размеры наибольшего и наименьшего диаметров туманностей в угловой мере в секундах. В восьмом столбце дана поверхностная яркость, т. е. яркость одной квадратной минуты поверхности туманности, по Вирцу. Наконец, в последнем столбце даны расстояния в миллионах световых лет, причем буквы указывают авторов: Х — Хюмэсона, ХХ — Хэббля-Хюмэсона, дС — де Ситтера. Отсутствие указания автора означает, что расстояние выведено по формуле Хэббля. Знак вопроса везде указывает на неокончательный характер результатов. По данным 1933 г., частью неопубликованным, на Маунт-Вильсоновской обсерватории измерены скорости туманностей в Gemini величиной в 24 000 и 30 000 *км* (!) (*Р.*)

*) N. G. C. 221 и 224 повидимому могут считаться за одну систему. Эти две приближающиеся к нам туманности являются самыми большими спиральными туманностями на небе.

РАДИАЛЬНЫЕ СКОРОСТИ СПИРАЛЬНЫХ ТУМАННОСТЕЙ

NGC	Галактические координаты		Радиальная скорость в км/сек	Автор	Локализация	Тип туманности	Видимые размеры туманности		Поверхност. яркость	Расстояние
	l	b								
205	63°.9	−22°.1	− 300	Х	Л	С	8′	3′	11.7	0.8 Х
221	64.4	−23.1	− 185	С	Л	Э	2.6	1.8	8.9	0.8 Х
224	64.1	−23.1	− 220	С*	Л	С	120	30	8.8	0.8 ХХ
278	66.4	−18.2	+ 650	С	Л	С	1.2		—	5.0 Х
380	70.2	−31.4	+4400	Х	Pisces	С	0.3		—	24.0 ХХ
383	70.2	−31.4	+4500	Х	Pisces	С?	0.3		—	24.0 ХХ
384	70.2	−31.6	+4500	Х	Pisces	С	0.25		—	24.0 ХХ
385	70.2	−31.6	+4900	Х	Pisces	С?	0.25		—	24.0 ХХ
404	70.3	−28.1	− 25	С	Л	Э	1.3		11.1	91.2 дС
584	94.2	−68.9	+1800	С	Л?	С?	2		10.6	11.4 ХХ
598	77.0	−32.6	− 70	П	Л	С	55	40	12.1	0.7 дС
936	110.0	−54.7	+1300	С	Л	С (пересеченная)	3	2	11.1	7.7 Х
1023	88.5	−20.2	+ 300	С	Л	С	6	1.3	10.2	3.4 дС
1068	115.7	−52.2	+ 920	С*	Л	С	2.5	1.7	9.8	2.3 Х
1270	93.9	−14.3	+4800	Х	Perseus	С	0.5	0.2	—	36.0 ХХ
1273	93.9	−14.3	+5800	Х	Perseus	С?	0.5		12.4	36.0 ХХ
1275	94.0	−14.2	+5200	Х	Perseus	С?	0.5		—	36.0 ХХ
1277	94.0	−14.2	+5200	Х	Perseus	С	0.4	0.1	—	36.0 ХХ
1700	147.5	−27.7	+ 800	П	Л	С?	0.5	0.3	11.1	5.1 дС
2562	145.2	+28.0	+5100	Х	Cancer	С	0.4	0.2	—	29.5 ХХ
2563	145.2	+28.0	+4800	Х	Cancer	С	1.1	0.5	—	29.5 ХХ
2681	110.0	+38.4	+ 700	Сэн	Л	С	2.5	1.5	—	5.8 дС
2683	132.9	+38.3	+ 400	С*	Л	С	10	1	11.4	3.2 дС
2841	109.7	+43.0	+ 600	С	Л	С	6	1.6	—	5.1 дС
2859	132.6	+44.8	+1500	Х	Л?	С (пересеченная)	1.4	0.7	11.3	8.5
2950	98.0	+43.7	+1500	Х	Л?	Э?	1.0	0.4	—	8.5
3031	85.2	+39.8	− 30	С	Л	С	16	10	—	2.4 ХХ
3034	84.3	+39.4	+ 290	С	Л	ирр	7	1.5	—	2.6 Х
3115	190.4	+37.7	+ 600	С	Л	С?	4	1	9.8	3.3 Х
3193	154.7	+54.8	+1300	Х	Л?	С	1.0	0.8	11.0	7.6
3227	158.7	+55.4	+1150	Х	Л?	С	3	1.2	—	8.1 дС
(Christie)	170.3	+48.5	+19600	Х	Leo	С?	0.5?		—	105 ХХ
3368	176.3	+57.6	+ 940	С	Л	С	7	3.5	10.7	5.7 Х
3379	175.1	+58.0	+ 810	С*	Л	Э	2		10.2	4.8 Х
3489	176.0	+61.2	+ 600	С	Л	С	2.5	1	10.3	3.6 Х

NGC	Галактические координаты l	b	Радиальная скорость в *км/сек*	Автор	Локализация	Тип туманности	Видимые размеры туманности		Поверхност. яркость	Расстояние
3521	197.7	+53.5	+ 730	С	Л	С	4.0	1.0	10.3	4.1 Х
3610	86.4	+53.5	+1850	Х	из	С?	1.0	0.7	11.0	1
3623	181.4	+64.7	+ 800	С	Л	С	8	2	10.9	5.0 Х
3627	181.9	+64.7	+ 650	С	Л	С	8	2.5	10.6	4.3 дС
4051	104.5	+64.6	+ 650	С	Л	С	4	2	12.0	5.4 дС
(Baade 24)	83.4	+58.1	+11800	Х	Ursa major	С	0.5?		—	150
4111	92.1	+71.2	+ 800	С	Л	С	3.8	0.5	10.3	5.8 Х
4151	97.1	+74.1	+ 960	С*	Л	С	2.6	1.6	10.8	7.3 дС
4192	207.0	+75.9	+1150	Х	Л? (Virgo)	С	8	2	12.0	6.0 ХХ
4214	102.1	+77.4	+ 300	С	Л	С	8	4	11.8	2.8 дС
4258	80.8	+67.8	+ 500	С	Л	С	20	[illegible]	—	4.6 Х
4374	220.1	+74.6	+1050	Х	Л?(Virgo)	Э	2	1.8	10.5	6.0 ХХ
4382	206.2	+80.2	+ 500	С	Л?(Virgo)	С	4	2	10.4	3.7 дС
4449	79.4	+71.5	+ 200	С	Л	Магелланово	3.5	2	—	2.3 дС
4472	229.4	+71.0	+ 850	С	Л?(Virgo)	С	2		10.2	5.7 дС
4486	225.9	+75.6	+ 800	С	Л?(Virgo)	Э	2		10.4	5.5 дС
4526	232.7	+70.9	+ 580	С	Л?(Virgo)	С	5	1	10.7	3.9 Х
4565	166.0	+86.6	+1100	С	Л	С	15	1.1	11.2	7.6 Х
4594	241.8	+52.8	+1140	С*	Л	С	7	1.5	9.7	7.2 Х
4649	238.9	+75.4	+1090	С	Л?(Virgo)	Э?	2		10.3	7.5 дС
4736	73.4	+74.7	+ 290	С	Л	С	5	3.5	—	3.0 дС
4826	262.6	+85.4	+ 150	С	Л	С	3	4	11.0	1.3 дС
4853	21.1	+88.1	+7600	Х	Coma Berenices	Э?	0.3		—	45 ХХ
4860	27.7	+87.6	+7900	Х		Э?	0.5		—	45 ХХ
4865	26.0	+87.9	+5000	Х		Э?	0.5		—	45 ХХ
4872	24.4	+87.7	+6900	Х	Coma Berenices	С?	1.0		—	45 ХХ
4874	24.4	+87.7	+7000	Х		С?	0.2		—	45 ХХ
4881	35.6	+86.6	+6900	Х		Э?	0.3		—	45 ХХ
4884	26.6	+88.2	+6700	Х		С?	1.5	0.8	—	45 ХХ
4895	26.4	+86.5	+8500	Х		С?	1	0.3	—	45 ХХ
4045	26.0	+86.5	+6600	Х	Coma Berenices	Э?	0.5?		—	45 ХХ
5005	46.3	+78.3	+ 900	С	Л	С	4.5	1.5	10.9	6.6 Х
5055	49.9	+73.1	+ 450	С	Л	С	8	3	—	3.6 Х
5194	49.0	+67.5	+ 250	С	Л	С	12	6	10.9	3.0 дС
5236	261.1	+42.9	+ 500	С	Л	С	10	8	—	2,9 Х

NGC	Галактические координаты l	b	Радиальная скорость в $км/сек$	Автор	Локализация	Тип туманности	Видимые размеры туманности		Поверхност. яркость	Расстояние
5457	45.9	+59.3	+ 300	X	Л	С	27		12.2	3.0 дС
5866	36.0	+51.3	+ 650	С	Л	С	3	1	10.9	6.0 дС
6359	34.9	+33.7	+3000	X	нз	С?	0.2		—	21.6 дС
6658	355.4	+14.6	+4100	X	нз	С	0.4	0.2	—	24
6661	355.6	+14.6	+3900	X	нз	С?	0 5		—	23
6702	18.5	+18.7	+2250	X	нз	С?	0.2		—	12
6703	18.6	+18.6	+2000	X	нз	С?	0.3		—	12
6710	0.2	+11.6	+5100	X	нз	С?	0.2		—	29
6822	327.8	—18.3	— 150	X	Л	Магелланово	20		—	1,0 Шэпли
6824	32.0	+14.6	+3200	X	нз	С?	0.9	0.5	—	19
7217	29.6	—20.6	+1050	X	Л	С	2.5	2	11.4	6
7242	34.8	—17.0	+5000	X	нз	Э?	0.5		—	29
7331	36.8	—21.7	+ 500	С	Л	С	9.5	2	10.8	5.2 дС
7611	30.3	—48.8	+3400	X	Pegasus	С	0.7	0.3	—	23.5 XX
7616	30.4	—49.0	+3900	X	Pegasus	Э	0.2		—	23,5 XX
7619	30.3	—49.2	+3800	X	Pegasus	Э	0.8		11.5	23,5 XX
7623	30.3	— 49.1	+3800	X	Pegasus	Э?	0.3		—	23,5 XX
7626	30.5	—49.2	+3700	X	Pegasus	Э	0.7		11.6	23,5 XX
Large Cloud	224	—32	+ 280	B	Л	Магеллановы	432		—	0.09 Шэпли
Small Cloud	244	—43	+ 170	B	Л		216		—	0.1 „

туманность Андромеды) приближаются к нам с весьма большими скоростями. Как раз эти скорости оказались особенно точно определенными. В полной формуле (70.21) мы не находим членов, которые при каких-либо разумных условиях давали бы движение по направлению к началу координат *). Мы находимся поэтому в затруднении, рассматривая даже эти движения как исключения. С другой стороны, скорость, направленная к началу координат, величиной в 300 *км*/сек, лежит еще в пределах, достигаемых отдельными звездами или звездными скоплениями.

Закон сохранения энергии имеет место в мире де Ситтера **); но

*) Мы ограничены областями, в которых $\left(1-\frac{1}{3}\lambda r^2\right)$ положительно, так как свет не может перейти через барьер.

**) В том смысле, что можно достичь его выполнения введением неинвариантной энергии t_μ^ν. (*Н.*)

с практической точки зрения он нарушается в больших системах, какова например система спиральных туманностей, так как эти последние могут черпать кинетическую энергию из источников, обычно не включаемых в рассмотрение.

Уравнение (39.44) для траектории частицы, движущейся в гравитационном поле,

$$\frac{1}{\gamma}\left(\frac{h}{r^2}\,\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{h^2}{r^2}-\frac{c^2}{\gamma}=-1$$

после подстановки значений γ дает

$$\left(\frac{h}{r^2}\,\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{h^2}{r^2}=c^2-1+\frac{1}{3}\lambda h^2+\frac{1}{3}\lambda r^2$$

или, полагая $u=\frac{1}{r}$,

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2=\frac{c^2-1}{h^2}+\frac{1}{3}\lambda+\frac{\frac{1}{3}\lambda}{h^2u^2},$$

откуда, дифференцируя, получаем

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=-\frac{\frac{1}{3}\lambda}{h^2}u^{-3}. \tag{70.3}$$

Траектория будет такой же, как у частицы, находящейся под действием силы отталкивания, прямо пропорциональной расстоянию (это относится только к форме орбиты, но не к скорости на орбите)*). Для движения светового импульса постоянная площадей $h=\infty$ и пути лучей света будут даваться решениями уравнения $\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=0$, т. е. прямыми линиями. Определение рас-

---

*) Суть дела станет наиболее ясной, если мы приведем уравнение (70.21) при помощи (70.1) $\left(\text{положив при этом } \theta=\frac{\pi}{2}\right)$ к следующему простому виду

$$\frac{d^2r}{ds^2}-r\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=\frac{1}{3}\lambda r.$$

Учитывая закон площадей, имеющий здесь место, в неизменном виде, а именно: $r^2\frac{d\varphi}{ds}=h$, мы получим отсюда дифференциальные уравнения движения материальной точки под действием центральной силы, пропорциональной r и направленной от начала координат. При этом, однако, время необходимо отождествить с s, а не с t.

стояний посредством измерения параллаксов основано на допущении, что свет распространяется по прямым линиям, и следовательно в нашей системе координат (r, θ, φ) метод будет точным. Поскольку расстояния до небесных тел определены посредством параллаксов и параллактических движений, координата r будет согласована с принятыми расстояниями *). Этот результат несколько отличен от решения, данного в п. 38 для поля частицы, где координата r не имела непосредственного значения, связанного с наблюдениями. Радиальные расстояния, определяемые непосредственными операциями с измерительными масштабами, соответствуют не r, но $R\chi$.

Определенная спектроскопически радиальная скорость не точно эквивалентна $\frac{dr}{dt}$, но расхождение будет незначительно. Импульс света, испущенный атомом, расположенным в точке $r = R\sin\chi$, в момент времени t, достигнет наблюдателя, расположенного в начале координат в момент t', где t', согласно (67.5), равно

$$t' = t + \log\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\chi\right),$$

так что для временного интервала между двумя импульсами имеем согласно (67.33), (70.1)

$$dt' = dt + \sec\chi\, d\chi = \left(1 + \sec\chi \frac{d\chi}{dt}\right)\frac{dt}{ds}\, ds = \left(\sec\chi + \sec^2\chi \frac{d\chi}{dt}\right) ds,$$

---

*) Сферический мир де Ситтера можно представить себе спроектированным на некоторый плоский мир, понимая под r, θ, φ полярные координаты такого эвклидова мира. Все реальные астрономические измерения производятся в солнечной системе, т. е. вблизи начала координат, где величиной λr^2 можно пренебречь, и где сферический мир совпадает с эвклидовым вспомогательным пространством. Так например, *действительно измеренные* в мире углы будут представлены равными углами в пространстве проекций, но выведенный теоретически угол, под которым отрезок «солнце — земля» виден с отдаленной туманности, будет отличаться в пространстве проекций от соответствущего угла в мире. Косвенные определения расстояния весьма удаленных объектов астрономы производят на основании допущения эвклидовой геометрии, во-первых, и прямолинейного распространения света, во-вторых. Оба эти допущения имеют место только в пространстве проекций, но не в реальном мире, и поэтому определенное таким методом расстояние будет расстоянием r в пространстве проекций (а не расстоянием в мире $\int ds = R\chi$).

пренебрегая квадратом скорости атома. Если dt_0' — время для аналогичного атома, покоящегося в начале координат, то

$$\frac{dt'}{dt_0'} = \sec\chi + \sec^2\chi\,\frac{d\chi}{dt} = \sec\chi + \sec^3\chi\,\frac{1}{R}\,\frac{dr}{dt}. \qquad (70.4)$$

Первый член дает общее смещение к красному концу, зависящее от положения, но не от скорости. Учтя уже это смещение, мы должны второй член отнести за счет скорости $\sec^3\chi\,\frac{dr}{dt}$, а не $\frac{dr}{dt}$. Поправка эта вряд ли имеет практическое значение.

Если бы в течение времени $R\chi$, которое требуется свету, чтобы пройти путь от объекта до начала координат, действовало ускорение $\frac{1}{3}\lambda r$, найденное в (70.22), оно изменило бы скорость на величину порядка $\frac{1}{3}\lambda r^2$, или $\frac{r^2}{R^2}$. Допплер-эффект от такой скорости был бы приближенно такого же порядка, как и смещение к красному концу, происходящее от замедления атомных колебаний. Мы можем поэтому рассматривать красное смещение для далеких покоящихся предметов как некоторое «*предварение*» движения удаления от нас, которое будет осуществлено лишь тогда, когда свет достигнет нас. Если объяснение смещения к красному концу спектра, даваемое теорией де Ситтера для спиральных туманностей, справедливо, мы не должны рассматривать выведенные большие скорости их удаления как совсем фиктивные; правда, туманности, испуская свет, который мы сейчас исследуем, не обладали еще этими скоростями, которые мы им приписываем, но они как раз достигли их в настоящее время. Мы можем понять с этой точки зрения даже факт остановки времени на горизонте. Для этого предположим, что мы наблюдаем систему, которая *сейчас* обладает скоростью света — эту скорость она получила в течение бесконечно большого промежутка времени, протекшего с момента испускания наблюдаемого нами света.

В связи с этим часто отмечался следующий парадокс. Возьмем координатную систему, отнесенную к наблюдателю A, покоящемуся в начале координат, и пусть наблюдатель B находится в момент t в покое на большом расстоянии от начала координат. Колебания атомов в B (измеренные в момент t) будут медленнее, чем соответственные колебания атомов в A. Но так как наша координатная система является статической, то эта разница будет обнаружена *любым* наблюдателем, экспериментально измеряющим частоты света, которые он получает. Следовательно, и наблюдатель в B должен обнаружить эту разницу и заключить, что свет, приходящий из A, смещен к фиолетовому концу относительно его стандартного атома. Но это нелепо, так как, выбрав B за начало координат, мы должны ожидать для света, пришедшего из A, смещения к красному концу. Ошибочность рассуждений заключается в том, что мы опустили из рассмотрения все, что происходит в течение продолжительного времени распространения света от A до B или от B до A, а в течение этого времени наблюдатели уже перестали находиться в относительном покое, так что нам приходится принять во внимание компенсирующее влияние Допплер-эффекта.

Для того чтобы получить более ясное геометрическое представление о мире де Ситтера, рассмотрим лишь одно пространственное измерение, опуская координаты θ и φ. Тогда уравнение (67.31) дает

$$-ds^2 = R^2(d\omega^2 + \sin^2\omega\, d\zeta^2) = R^2(d\chi^2 - \cos^2\chi\, dt^2) = \\ = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

где

$$x = R\sin\omega\cos\zeta = R\cos\chi\sin it,$$
$$y = R\sin\omega\sin\zeta = R\sin\chi,$$
$$z = R\cos\omega = R\cos\chi\cos it,$$

и

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Мы видим, что действительные значения χ и t соответствуют мнимым значениям ω и ζ и что, соответственно, для действительных событий x мнимо, а y и z действительны. Введем новую действительную координату $\xi = -ix$, тогда действительное пространство-время будет представлено однополым гиперболоидом, ось которого направлена вдоль оси ξ, именно

$$y^2 + z^2 - \xi^2 = R^2,$$
$$ds^2 = d\xi^2 - dy^2 - dz^2.$$

Таким образом геометрия здесь имеет галилеев характер.

Мы имеем тогда

$$r = R\sin\chi = y; \quad \operatorname{tgh} t = -i \cdot \operatorname{tg} it = -\frac{ix}{z} = \frac{\xi}{z},$$

так что пространственная сетка дается плоскостями, перпендикулярными оси y, а временная — плоскостями, проходящими через ось y и разрезающими гиперболоид на полосы.

Пути световых пучков $ds=0$ являются образующими гиперболоида*). Пути свободных частиц будут геодезическими линиями (не эвклидовыми)**) на гиперболоиде, и, исключая значение $y=0$, линии пространственной сетки не будут итти по геодезическим линиям, так что частицы не будут находиться в покое.

Координатная система (r, t) одного наблюдателя не покрывает целиком всего мира. Пределы от $t=-\infty$ до $t=+\infty$ соответствуют изменению величины $\frac{\xi}{z}$ в пределах ± 1. Весь опыт каждого отдельного наблюдателя за все время от $t=-\infty$ до $t=+\infty$ заключен внутри полосы, вырезанной двумя перпендикулярными друг другу плоскостями. Перемещая начало координат, мы даем возможность другому наблюдателю исследовать другую полосу.

Возникал еще следующий вопрос, действительно ли пуст мир де Ситтера? В формуле (70.1) мы имеем особую точку $r=\sqrt{\frac{3}{\lambda}}$, подобную особой точке $r=2m$ в решении уравнения для частицы материи. Не должны ли мы предположить, что и первая особая точка так же дает материю — «горизонт масс», или кольцо масс на периферии, необходимое для поддержания пустого пространства внутри. Если бы это было так, то повидимому и мир де Ситтера не мог бы существовать без больших количеств материи так же, как и мир Эйнштейна. Де Ситтер только сумел убрать пыль в углы, где ее нельзя наблюдать.

Особая точка в ds^2 не обязательно указывает на присутствие материальных частиц, так как мы можем соответствующим преобразованием координат вводить такие особые точки или устранять их совсем. Не известно, что является виной этой особенности: структура ли мира или непригодная координатная система? В конеч-

*) Потому что направления на гиперболоиде $ds^2=0$, исходящие из точки $y=R$, $z=0$, $\xi=0$, определяются уравнениями $dy=0$, $d\xi^2-dz^2=0$, $d\xi=\pm d$. А это как раз будут направления обеих образующих гиперболоида

$$\begin{Bmatrix} y-\xi=R-z \\ y+\xi=R+z \end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} y-\xi=R+z \\ y+\xi=R-z \end{Bmatrix},$$

проходящих через точку $y=R$, $z=0$, $\xi=0$. (*H.*)

**) В том смысле, что мероопределение на гиперболоиде имеет вид $=d\xi^2-dy^2-dz^2$. (*H.*)

ной области мы с самого начала обходим это затруднение выбором подходящей координатной системы и в дальнейшем допускаем только такие преобразования, которые не имеют в данной области особых точек. Но мы вряд ли можем применить такой метод к рассмотрению всего конечного мира, так как все обычные аналитические преобразования, даже простое перенесение начала координат, вводят где-нибудь особую точку. Если форма пустого мира де Ситтера верна, то невозможно указать на такую координатную систему, которая представляла бы всю действительную протяженность пространства-времени без особых точек. Это бесспорно неудобно для математиков, но я не вижу никаких других следствий указанного возражения.

Весь мир де Ситтера может быть обойден рядом последовательных процессов. Это означает, что ограниченный в виду вещественного времени опыт наблюдателя A распространяется лишь на некоторую полосу, A должен затем передать B описание своего мира, опыт которого частично перекрывает опыт мира B, частично являющийся новым и т. д., все время идя перекрывающимися полосами. Уравнение $G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$ основано на рассуждениях п. 66 и простым применением этого уравнения от точки к точке мы распространим его на весь мир де Ситтера, ни разу не столкнувшись с каким-либо барьером или горизонтом масс.

Мы пользовались здесь довольно неточным термином «опыт наблюдателя», понимая под ним полосу «мира» между двумя отсчетами вещественного «времени» $t = t \pm \infty$. Но эта часть мира не отделена причинной связью от остальной части и события вне ее столь же реальны, как и внутри. События, происшедшие до $t = -\infty$, могут вызвать следствия, протекающие вблизи наблюдателя, и он даже может *увидеть* их в достаточно сильный телескоп. Но если он захочет вычислить из своих наблюдений, *когда* эти события должны были произойти, он найдет невозможным отнести их к какому-нибудь действительному значению t. Покоящаяся (статическая) система времени-пространства является здесь как раз только искусственным приемом, который и заставляет нас допустить, что события, разыгрывающиеся «вне нашего времени», могут влиять на наши опыты.

Поэтому я считаю, что горизонт масс есть просто иллюзия наблюдателя, находящегося в начале координат и постоянно отодвигается по мере того, как мы к нему приближаемся.

71. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ МИР ЭЙНШТЕЙНА.

Эйнштейн не рассматривает соотношение (69.5)

$$M=\frac{1}{2}\pi R=\frac{1}{2}\pi\lambda^{-\frac{1}{2}}, \qquad (71.1)$$

как простой предельный случай, когда количество находящейся в мире материи случайно как раз достаточно для того, чтобы мир стал цилиндричным. Он рассматривает эту формулу как необходимое соотношение между λ и M, так что константа λ, входящая в закон тяготения, является функцией всей массы, находящейся в мире, а объем пространства обусловлен количеством материи, которое в нем заключено. Сразу же возникает вопрос, каким именно образом значение λ может приспособиться к величине M. Создание новой звездной системы в далекой части мира не только должно сказаться у нас в виде появления добавочного нового поля тяготения, но и изменить самый закон тяготения. Мы не можем проследить распространение этого изменения, и зависимость λ от удаленных масс имеет вид чистого действия на расстоянии.

Однако, мы получим более правдоподобную связь, если рассмотрим обратную зависимость M как функцию от λ. Предположим, что в мире происходит постепенное уничтожение материи (напр. слияние протонов и электронов), тогда уравнение (71.1) показывает, что радиус пространства будет постепенно сокращаться; неясно только, что является установленным масштабом длины, которым предполагается измерять R. Естественным стандартом длины в теоретических рассуждениях всегда служит сам радиус R. Выбирая его за единицу, мы имеем $M=\frac{1}{2}\pi$, какое бы ни было число элементарных частиц в мире. При таком выборе единицы массы масса частицы должна быть обратно пропорциональна числу частиц. Но гравитационная масса есть радиус шарика, находящийся в какой-то непосредственной связи со строением частицы. Мы должны поэтому заключить, что при уничтожении материи эта сфера должна раздуваться, как будто бы было уменьшено какое-то давление. Мы могли бы попытаться представить это давление потоком тяготения (п. 63), исходящим от каждой частицы но очень сомнительно, чтобы это привело к удовлетворительному решению. Но как бы то ни было, представление о том, что каждая частица стремится монополизировать все пространство и что отдельные частицы стесняют друг друга взаимным давлением, является как будто простейшей интерпретацией уравнения (71.1), если такое понимание приемлемо само по себе.

Мы не знаем, увеличится ли действительный (или электрический) радиус частицы в том же отношении — если позволительно гадать, я думаю, что он зависит от квадратного корня из этого отношения *). Но этот радиус, от которого зависит шкала обычных материальных масштабов, не имеет никакого отношения к уравнению (71.1), и если мы предположим, что он не изменяется, то соображения п. 66 останутся совершенно правильными. В пользу гипотезы Эйнштейна говорит то обстоятельство, что среди постоянных природы есть одна постоянная, представляющая собой очень большое отвлеченное число, именно: отношение радиуса электрона к его гравитационной массе, равное $3 \cdot 10^{42}$.

Объяснение наличия такого отвлеченного числа (порядок величины которого столь значительно отличается от единицы) в схеме мира представляет известные трудности; последние, однако, можно было бы устранить, связав это число с числом частиц в мире — числом, которое вероятно определяется чистым случаем **). Мысль, что полное число частиц могло бы играть роль при определении констант в мировых законах, представляется весьма заманчивой легче предположить, что законы природы определяются тем случайным обстоятельством, что в мире существует определенное число частиц, чем считать, что эти законы обусловлены тем же самым числом, как символом какого-то таинственного соотношения в зернистой структуре континуума

В мире Эйнштейна одно направление не искривлено, и это дает нечто вроде абсолютного времени. Наш критик, который сидит и ждет еще с п. 1 со своей до сих пор неиспользованной этикеткой «истинное время», несомненно, воспользуется этим случаем, чтобы ее приклеить. Кроме того, в некоторой мере восстанавливается и абсолютная скорость, так как по нашему предположению существует такая система отсчета, относительно которой мате-

---

*) См. приложение к русскому изданию.

**) Квадрат числа $3 \cdot 10^{42}$ вполне мог бы быть величиной порядка полного числа протонов и электронов. Соответствующий радиус был бы равен 10^{14} парсеков. Этот результат впрочем существенно изменится, если в качестве основной структуры принять вместо электрона протон.

риальные тела обладают лишь малыми скоростями. В соответствии с воззрениями Эйнштейна, наличие материи необходимо однако для существования пространственно-временной системы отсчета, так что эта пространственно-временная система отсчета в некоторой мере материализуется, причем чистой теории эфира тем самым приходится отчасти потерять свою столь ценную неопределенность. Так как количество материи, необходимой для мира Эйнштейна, во много раз превосходит данные астрономов, было высказано предположение, что большая часть материи равномерно распределена в пространстве и ввиду этой равномерности не может быть обнаружена. Это, однако, подозрительно напоминает попытки восстановить обычный материальный эфир в его правах, ограничив его, впрочем, строгим запретом: ни в каком случае не выполнять никаких физических воздействий, чтобы не опровергнуть принципа относительности. Мы можем не останавливаться на этом предположении, так как оно ведет к излишним трудностям. Я полагаю, что материя, рассматриваемая в теории Эйнштейна, есть обыкновенная звездная материя. Вследствие неправильности распределения звезд пространство в действительности совсем не является сферой, и наши формулы имеют целью только приближение к действительной форме.

Преобразование Лоренца все еще имеет место также и в этом случае для ограниченной области. Уже при самом возникновении общей теории относительности было установлено, что специальная теория относительности применима только к таким областям мира, где $g_{\mu\nu}$ постоянны; следовательно, она вряд ли потерпит ущерб от того, что ее нельзя применять ко всему сферическому пространству. Кроме того, специальная теория относительности приведена теперь в полное согласие с общей. Преобразования теории относительности относятся к дифференциальным уравнениям физики, и многие недоразумения в этом вопросе возникают только из-за стремления найти такие простые примеры, в которых эти уравнения можно проинтегрировать для всего пространства-времени, как это бывает в некоторых математических упражнениях.

На дальнейших свойствах мира Эйнштейна мы не будем долго останавливаться. Сферический мир Эйнштейна представляется тривиальным по сравнению с миром де Ситтера. Система отсчета каждого наблюдателя относится ко всему миру, так что области конечного времени различных наблюдателей совпадают. Не существует никаких рассеивающих сил, которые обусловливали бы соответствующие движения. Свет описывает конечный путь через весь мир за конечное время. Не существует никакого пассивного горизонта и, в частности, никакого действительного или фиктивного горизонта массы. Мир Эйнштейна не дает никакого объяснения смещению спектральных линий удаленных объектов к красному концу спектра, и это обстоятельство является его недостатком с точки зрения астронома. На основании этого и ряда других соображений я склонялся бы к тому, чтобы отказаться от гипотезы Эйнштейна в пользу гипотезы де Ситтера, если бы первая не давала известной надежды объяснить наличие среди постоянных природы большого отвлеченного числа.

Первоначально Эйнштейн пришел к мысли о введении цилиндрического мира под влиянием трудностей, представляемых проблемой абсолютного вращения. Однако, нам незачем возвращаться к обсуждению этих трудностей. Кажущийся парадокс абсолютного вращения возникает вследствие ненужного ограничения наших представлений о том, что может явиться в этом случае существенной причиной. Трудность представляется обычно в следующей форме: так как ориентация не абсолютна, а только относительна, то и изменение координат не может быть абсолютным; поэтому невозможно считать абсолютное изменение ориентации причиной какого-нибудь наблюдаемого явления. Хотя, собственно говоря, относительное изменение ориентации может вызвать наблюдаемые эффекты, но эти эффекты можно с одинаковым правом приписать либо вращению самого тела, либо вращению остальной материи во всем мире. Последнее заключение правильно, но обычно связывается с воззрением Маха, по которому все механические явления могут быть в конечном счете сведены к относительному положению и к изменениям положения масс во всем мире; так что, если, например, задать плотность в каждой пространственно-временной точке четырехмерного слоя, простирающегося на малый, но не исчезающе малый промежуток времени, то дальнейший ход механических явлений был бы этим вполне определен. В рамках теории относительности это воззрение представляется совершенно нелогичным, так как для этой теории плотность массы представляет собою только один из десяти компонент тензора энергии, и было бы неправильно одну определенную компоненту считать единственной сущностью, обусловливающей явления. Если же мы встанем на точку зрения, вполне естественную в теории относительности, что ход событий причинно обусловливается не только распределением плотности, но и распределением всего тензора энергии, то вопрос об абсолютном вращении не будет возбуждать никаких трудностей Действительно, телу, которое по обычным воззрениям находится в состоянии абсолютного вращения, соответствует другое распределение тензора энергии, чем в том случае, когда оно не вращается. В таком случае, в предположении, что это различие влечет за собой наблюдаемые следствия, нет ничего парадоксального. То обстоятельство, что при отсутствии внешних тел отсчета мы не можем описать это различие как изменение ориентации масс, из которых состоит тело, является совершенно несущественным.

Пусть, например, упомянутый выше слой четырехмерного мира содержит совершенно однородное, состоящее из непрерывно-распределенной материи, кольцо, которое вращается, как колесо, по отношению к окружающей массе. (Для интересующей нас проблемы допустимо принять совершенно равномерное распределение материи, так как атомистическое строение материи вряд ли может играть роль для проблемы абсолютного вращения.) Мы можем теперь, не меняя распределения массы ни в одной из точек пространственно-временного мира, заменить наше кольцо не вращающимся. Но в таком случае изменится распределение тензора энергии. Дальнейшая история мира в обоих случаях будет протекать различно, и это вполне естественно, так как начальные условия были совершенно различны. Однако, это различие не относится к различным ориентациям материи кольца, так как в случае совершенно однородного кольца невозможно установить разницы ориентаций; оно относится к состоянию, которое устанавливается на основании динамических, а не кинематических признаков. Мы видим, что в этом случае существует даже *относительное* вращение, которое не проявляется в изменении ориентации. Но если сделать в кольце маленький надрез, то изменение ориентации становится наблюдаемым; явление вращения надреза можно предсказать на основе распределения тензора энергии с помощью тождеств $T^{\mu\nu}_{\nu} = 0$. Но хотя это случайное проявление распределения тензора энергии делает возможным измерение скорости вращения обычными методами, мы все же не считаем его непосредственной причиной дальнейших событий. Действительной причиной является распределение самого тензора энергии, независимо от того, имеется ли налицо какое-либо кинематическое проявление такого распределения или нет.

Резюмируем: определенные явления на Земле сводятся к причине, которая вообще называется абсолютным вращением Земли. Независимо от того, правильно ли это название или нет, эта причина существует и представляет собой измеримую физическую величину. Истинная сущность этой причины есть некоторое распределение тензора энергии, которое абсолютным образом отличается от распределения в случае невращающейся планеты *).

Термин «абсолютный» здесь вполне правилен, название же «вращение» менее удовлетворительно, так как наше сознание связывает с ним представление об изменении ориентации. Если изменения относительной ориентации проявляются явно, то они представляют собой случайные, сопровождающие явления (которые облегчают практическое измерение рассматриваемой физической величины), но их наличие ни в коем случае не существенно и не связано с существованием самой физической величины.

72. ПРОБЛЕМА ОДНОРОДНОГО ШАРА.

Мы рассмотрим теперь задачу, в которой искривление пространства возникает благодаря наличию обыкновенной материи, для того чтобы сравнить результаты с теми, которые получаются в случае естественно искривленного пространства.

Задача определения ds^2 внутри однородного жидкого шара рассматривалась Шварцшильдом, Нордстремом и де Дондером.

Решение Шварцшильда имеет вид **):

$$ds^2 = -e^{\lambda}\, dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + e^{\nu}\, dt^2,$$

*) Условие отсутствия «абсолютного вращения» может быть выражено посредством тензорного уравнения, связывающего $T_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$.

**) Решение Шварцшильда представляет большой интерес, но я не думаю, что оно относится к той задаче, которую автор хотел разобрать, а именно к случаю несжимаемой жидкости. Поэтому я не привожу здесь рассуждений, ведущих к этому решению, а ограничиваюсь рассмотрением того распределения материи, которое соответствует этому решению. Полное изложение этого вопроса можно найти в книге: *de Donder*, La gravifique Einsteinienne, p. 169, Gauthier-Villars, 1921. При выводе решения исходят из основных гравитационных уравнений, причем пренебрегают естественным искривлением пространства по сравнению с тем, которое вызывается наличием материального шара.

где

$$e^{\lambda}=\frac{1}{1-\alpha r^2},$$

$$e^{\nu}=\frac{1}{4}\left(3\sqrt{1-\alpha a^2}-\sqrt{1-\alpha r^2}\right)^2; \qquad (72.1)$$

причем a и α обозначают постоянные.

Для этого вида ds^2 соответствующие формулы (46.9) после поднятия одного значка примут вид

$$\begin{aligned}
-8\pi\, T_1^1 &= e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}-\frac{e^{\lambda}-1}{r^2}\right)\\
-8\pi\, T_2^2 &= e^{-\lambda}\left\{\frac{1}{2}\nu''-\frac{1}{4}\lambda'\nu'+\frac{1}{4}\nu'^2+\frac{1}{2}\frac{\nu'-\lambda'}{r}\right\}\\
-8\pi\, T_3^3 &= -8\pi\, T_2^2\\
-8\pi\, T_4^4 &= e^{-\lambda}\left(-\frac{\lambda'}{r}-\frac{e^{\lambda}-1}{r^2}\right).
\end{aligned} \qquad (72.2)$$

Из (72.1) следует, что

$$\frac{e^{\lambda}-1}{r^2}=\frac{1}{2}\,\frac{\lambda'}{r};\quad \frac{1}{2}\nu''-\frac{1}{4}\lambda'\nu'+\frac{1}{4}\nu'^2=\frac{1}{2}\,\frac{\nu'}{r}.$$

Поэтому

$$T_1^1=T_2^2=T_3^3=\frac{1}{8\pi}e^{-\lambda}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\lambda'-\nu'\right)}{r} \qquad (72.31)$$

$$T_4^4=\frac{1}{8\pi}e^{-\lambda}\,\frac{3}{2}\,\frac{\lambda'}{r}=\frac{3\alpha}{8\pi}. \qquad (72.32)$$

Компоненты T_4^4 и T_1^1, T_2^2, T_3^3, отнесенные к системе координат $(r,\ \theta,\ \varphi)$, представляют собой плотность и систему напряжений. Вследствие этого решение Шварцшильда дает для каждой точки равномерную плотность и изотропное гидростатическое давление.

Дальнейшие вычисления, произведенные на основании (72.31), дают следующее выражение для давления:

$$p=-T_1^1=\frac{\alpha}{8\pi}\,\frac{\frac{3}{2}\left(1-\alpha r^2\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\left(1-\alpha a^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}\left(1-\alpha a^2\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left(1-\alpha r^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \qquad (72.4)$$

Отсюда мы видим, что давление исчезает при $r=a$ и стало бы отрицательным, если бы мы попытались распространить решение за границу $r=a$. Поэтому шар $r=a$ представляет собой границу жидкости. Если необходимо распространить решение на область, лежащую вне шара, то надо исходить из другого вида ds^2, который соответствует уравнениям для пустоты.

До тех пор пока $a<\sqrt{\frac{8}{9\alpha}}$, давление остается везде конечным. Это условие дает верхнюю границу для размеров жидкого шара заданной плотности. Такая граница должна существовать, так как присутствие материи увеличивает кривизну пространства и уменьшает его общий объем. Очевидно, что объем материального шара не может быть больше объема пространства.

Для не слишком больших шаров (например, не на много превышающих размеры звезд), это решение приближенно соответствует задаче о равновесии несжимаемой жидкости. В самом деле, все необходимые для этого условия удовлетворены, а именно:

1) плотность равномерна;

2) на поверхности давление исчезает;

3) система напряжений соответствует некоторому изотропному гидростатическому давлению и удовлетворяет поэтому условию равновесия для идеальной жидкости;

4) давление нигде не становится бесконечным, отрицательным или мнимым.

Обычно при преобразовании координат компоненты тензора энергии изменяются, так что сначала нужно убедиться в том, что выбрана правильная система координат, которой для данного случая будут естественные координаты, если хотят эти компоненты интерпретировать как давление и плотность. Чтобы перейти от координат (r, θ, φ, t) к естественным координатам в точке P, надо изменить единицы измерения для r и θ вблизи точки P. При этом преобразовании координат *смешанный* тензор T_{μ}^{ν} остается неизменным [ср. с правилом преобразования (23, 23)], так как исчезают все компоненты, не расположенные по главной диагонали, тогда как оба тензора $T^{\mu\nu}$ и $T_{\mu\nu}$ могут и не оставаться неизменными. Вследствие этого формулы (72.31) и (72.32) остаются в силе и при выборе в упомянутой точке естественной координатной системы, так что произвол в выборе исходных координат не повлияет на правильность наших заключений.

Вместе с тем заключение о том, что решение соответствует случаю идеальной жидкости с равномерным распределением плотности, относится только к плотности T_4^4 или ρ_{00}. Однако, на основании приведенных в п. 54 положений, условие постоянства ρ_{00} для несжимаемой жидкости представляется невыполнимым. Нам ведь нужно решение, для которого T или ρ_0 оставались бы постоянными во всем жидком шаре; однако, решение этой задачи не содержится в исследованиях Шварцшильда.

До тех пор пока размеры шара малы, это различие не приводит к большому расхождению; однако, для больших шаров давление вблизи центра очень велико, и оба решения могут сильно отличаться друг от друга. Легко доказать, что для больших шаров, где $a > \sqrt{\frac{5}{9\alpha}}$, решение Шварцшильда дает в центральной точке отрицательное значение для T. Поэтому повидимому, даже не доходя до границы $a = \sqrt{\frac{8}{9\alpha}}$, решение уже перестает иметь какой-либо физический смысл. Приходится весьма сожалеть, что решение перестает быть действительным как раз для больших шаров, ибо существование верхней границы для шаров является одним из интереснейших пунктов всей проблемы. Насколько мне известно, в деле получения точного решения для жидкого шара еще не достигнуто никакого значительного успеха, который мог бы пролить свет на характер уменьшения радиуса пространства при увеличении размеров шара.

Во всяком случае, я делаю эти замечания не без колебаний, так как трудно сказать, как будет вести себя действительная жидкость в том случае, когда очень сильно нарастающее давление уже не сможет более значительно сближать элементарные частицы. Относительно природы давления в газе имеется полная ясность, так как оно определяется здесь скоростями молекул. Напротив, в жидкости могли бы возникнуть максвелловские электромагнитные напряжения, и тогда заключение о том, что ρ_0 постоянно, не соответствовало бы действительности. С другой стороны, кроме того могли бы выступить на сцену какие-нибудь таинственные квантовые явления, о которых мы вообще ничего не можем сказать.

Если принять, что порядок величины результата Шварцшильда

$$a < \sqrt{\frac{8}{9\alpha}}$$

верен, то радиус наибольшей возможной водяной сферы был бы равен 370 миллионам *км*. Радиус звезды Бетельгейзе равен приблизительно половине этого значения; ее плотность, однако, чересчур мала, чтобы было возможным сделать какое-либо интересное применение вышеприведенного результата.

Если принять эйнштейновское видоизменение закона гравитации, где λ зависит от общего количества материи в мире, то легко определить величину наибольшей сферы. По (69.4) $R^2 = \frac{1}{4\pi\rho_0}$, отсюда R (для воды) приблизительно равно 300 миллионам *км*.

Глава VI.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО.

73. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Для описания электромагнитного поля в классической теории пользуются скалярным потенциалом Φ и векторным потенциалом (F, G, H). Электрическая сила (X, Y, Z) и магнитная сила (α, β, γ) получаются путем дифференцирования этих величин

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial t} \text{ и т. д.} \\ \alpha &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \text{ и т. д.} \end{aligned}\right\} \tag{73.1}$$

В классической теории совершенно не рассматривается взаимодействие поля тяготения и электромагнитного поля. Поэтому эти определения так же как и уравнения Максвелла относятся к случаю, когда поля тяготения нет, т. е. к галилеевым координатам. Мы берем специальную систему галилеевых координат и полагаем для этой системы

$$\varkappa^{\mu} = (F, G, H, \Phi). \tag{73.21}$$

Если мы условимся понимать под $\varkappa^{\mu}$ контравариантный вектор, мы сможем найти его компоненты в любой другой координатной системе — галилеевой или иной — обычным преобразованием, но конечно, физический смысл этих компонент можно установить только после особого анализа. В частности, мы не можем принять на веру, что компоненты $\varkappa^{\mu}$ в другой галилеевой системе будут совпадать с новыми F, G, H и Φ, экспериментально определенными для этой новой системы. Предварительно мы определили $\varkappa^{\mu}$ для всех координатных систем, но уравнение (73.21), связывающее потенциалы с экспериментально проверяемыми величинами, пока что имеет место только для одной избранной галилеевой системы.

С помощью галилеевых $g_{\mu\nu}$ опустим значки и получим

$$\varkappa_\mu = (-F,\ -G,\ -H,\ \Phi). \tag{73.32}$$

Затем, согласно уравнению (32.2), введем тензор

$$F_{\mu\nu} \equiv \varkappa_{\mu\nu} - \varkappa_{\nu\mu} = \frac{\partial \varkappa_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \varkappa_\nu}{\partial x_\mu}, \tag{73.3}$$

тогда по (73.1) получаем:

$$F_{14} = \frac{\partial \varkappa_1}{\partial x_4} - \frac{\partial \varkappa_4}{\partial x_1} = \frac{\partial(-F)}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = X \text{ и т. д.},$$

$$F_{23} = \frac{\partial \varkappa_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \varkappa_3}{\partial \varkappa_2} = \frac{\partial(-G)}{\partial z} - \frac{\partial(-H)}{\partial y} = \alpha, \text{ и т. д.},$$

т. е. электрические и магнитные силы образуют вместе вихрь электромагнитного потенциала. Полная схема для $F_{\mu\nu}$ будет:

$$F_{\mu\nu} = \left.\begin{matrix} 0 & -\gamma & \beta & -X \\ \gamma & 0 & -\alpha & -Y \\ -\beta & \alpha & 0 & -Z \\ X & Y & Z & 0 \end{matrix}\right\} \tag{73.41}$$

Пользуясь опять галилеевым $g^{\mu\nu}$, поднимем значки и получим

$$F^{\mu\nu} = \left.\begin{matrix} 0 & -\gamma & \beta & X \\ \gamma & 0 & -\alpha & Y \\ -\beta & \alpha & 0 & Z \\ -X & -Y & -Z & 0 \end{matrix}\right\} \tag{73.42}$$

Обозначим через ρ плотность электрического заряда *) и через σ_x, σ_y, σ_z плотность электрического тока.

Положим теперь

$$J^\mu = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ \rho). \tag{73.5}$$

Здесь опять-таки мы не предполагаем, что компоненты J^μ в какой-нибудь иной, кроме исходной, системе координат, окажутся экспериментально найденными плотностями тока и заряда.

---

*) Буква ρ во всей этой главе (до введения ρ_0^* в п. 80) будет в отличие от обозначений I—V и VII глав употребляться для обозначения плотности электрического заряда. (*Н.*)

Общепринятыми законами электромагнитного поля являются следующие уравнения, данные Максвеллом:

$$\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}=-\frac{\partial \alpha}{\partial t};\quad \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}=-\frac{\partial \beta}{\partial t};\quad \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=-\frac{\partial \gamma}{\partial t};\qquad (73.61)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y}-\frac{\partial \beta}{\partial z}=\frac{\partial X}{\partial t}+\sigma_x;\quad \frac{\partial \alpha}{\partial z}-\frac{\partial \gamma}{\partial x}=\frac{\partial Y}{\partial t}+\sigma_y;\qquad (73.62)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x}-\frac{\partial \alpha}{\partial y}=\frac{\partial Z}{\partial t}+\sigma;$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\rho;\qquad (73.63)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial z}=0.\qquad (73.64)$$

Мы пользуемся здесь единицей заряда, предложенной Хивисайдом-Лоренцом, так что множитель 4π пропадает. Скорость света, как обычно, принимается за единицу. Диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость не встречаются в точной теории, так как они будут величинами, появляющимися лишь в макроскопических уравнениях. Из рассмотрения схем (73.41) и (73.42) видно, что уравнения Максвелла эквивалентны следующим:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}+\frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}=0,\qquad (73.71)$$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=J^\mu.\qquad (73.72)$$

Первое уравнение обнимает 4 уравнения (73.61) и (73.64) второе же — (73.62) и (73.63). Подставляя $F_{\mu\nu}=\frac{\partial \varkappa_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial \varkappa_\nu}{\partial x_\mu}$ в уравнение (73.71), мы видим, что последнее удовлетворяется тождественно. Аналогично (73.72) является упрощенной формой для случая галилеевых координат уравнения $(F^{\mu\nu})_\nu=J^\mu$.

Уравнения Максвелла принимают, таким образом, простой вид *тензорных уравнений*:

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial \varkappa_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial \varkappa_\nu}{\partial x_\mu}\,{}^{*}),\qquad (73.73)$$

---

*) Это уравнение нужно понимать в том смысле, что *его разрешимость* относительно $\varkappa_\mu$ эквивалентна условиям интегрируемости соответствующих

$$F^{\mu\nu}_{\nu} = J^{\mu}. \qquad (73.74)$$

Согласно (51.52) второе *уравнение* можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{F}^{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = \mathbf{J}^{\mu}. \qquad (73.75)$$

В виду антисимметричности $\mathbf{F}^{\mu\nu}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{F}^{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}\,\partial x_{\nu}}$ исчезает, так как при суммировании все члены попарно уничтожаются, т. е.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}^{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}\,\partial x_{\nu}} = \frac{\partial \mathbf{J}^{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0, \qquad (73.76)$$

откуда, согласно (51.12), получаем

$$(J^{\mu})_{\mu} = 0. \qquad (73.77)$$

Расходимость четырехмерного вектора тока-заряда («четырех-вектора») равна нулю.

Для наших исходных координат (73.77) принимает вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \qquad (73.78)$$

Если ток вызван движением заряда со скоростью (u, v, w), то мы имеем: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z = \rho u, \rho v, \rho w$ и таким образом:

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Это является обычным уравнением непрерывности (ср. 53.71), выражающим закон сохранения электрического заряда.

Отметим, что даже и в не-галилеевых координатах четырех-вектор тока-заряда точно удовлетворяет закону сохранения

$$\frac{\partial \mathbf{J}^{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0.$$

Это следует сопоставить со случаем энергии и количества движения материи. Мы знаем, что в общем случае мы не можем для этих последних компонент написать формулу

$$\frac{\partial \mathbf{T}^{\nu}_{\mu}}{\partial x_{\nu}} = 0,$$

уравнений (73.71). Пользуясь этим случаем, напоминаем, что уравнения (73.73) определяют вектор $\varkappa_{\mu}$ *однозначно с точностью до градиента некоторого скаляра* [ср. п. 74 (а)]. (*Н.*)

но что требуется ввести добавочный псевдотензор энергии $\mathfrak{t}^{\nu}_{\mu}$ для сохранения вида закона. И $T^{\mu\nu}$ и J^{μ} обладают тем свойством, которое мы в теории относительности считаем за естественное обобщение сохранения, т. е. $T^{\mu\nu}_{\nu} = 0$; $J^{\mu}_{\mu} = 0$.

Если заряд движется со скоростью, компоненты которой равны

$\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, то мы получаем

$$J^{\mu} = \left(\rho\frac{dx}{dt}, \rho\frac{dy}{dt}, \rho\frac{dz}{dt}\right), \rho = \rho\frac{ds}{dt}\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}, \frac{dt}{ds}\right). \tag{73.81}$$

В скобках стоит контравариантный вектор $\rho\frac{ds}{dt}$, следовательно, $\frac{ds}{dt}$ представляет собой инвариант.

Но $\frac{ds}{dt}$ дает Фицджеральдово сокращение, так что объем, который был бы сочтен за единичный наблюдателем, двигающимся вместе с зарядом, будет равен $\frac{ds}{dt}$ для наблюдателя, покоящегося в избранной системе координат. Инвариант $\rho\frac{ds}{dt}$ есть заряд этого объема, т. е. единицы собственного объема.

Введем величину $\rho_0 = \rho\frac{ds}{dt}$, так что ρ_0 есть собственная плотность заряда. Если A^{μ} обозначает вектор скорости $\frac{dx_{\mu}}{ds}$ заряда, то (73.81) принимает вид

$$J^{\mu} = \rho_0 A^{\mu}. \tag{73.82}$$

Заряд в отличие от массы не изменяется от движения относительно наблюдателя. Это следует из того, что количество заряда в строго ограниченном объеме (единице собственного объема) есть инвариант. Причину того, что масса и заряд ведут себя различно, можно уяснить на основании формулы (53.2), где вводится множитель Фицджеральда $\frac{ds}{dt}$.

Для наблюдателя S, пользующегося исходной галилеевой системой координат, величины $\varkappa_{\mu}$, $F_{\mu\nu}$ и J^{μ} представляют собой электромагнитный потенциал, силу и ток, согласно определению.

Для другого наблюдателя S', движущегося с другой скоростью, мы имеем соответствующие величины $\varkappa'_{\mu}$, $F'_{\mu\nu}$, J'_{μ}, получаемые по правилам преобразования, но мы еще не доказали, что это будут как раз те величины, которые измерит наблюдатель S', если он будет экспериментально определять потенциал, силу и ток с помощью движущихся с ним приборов. Наблюдатель S' будет считать некоторые величины за потенциал, силу и ток очевидно потому, что они будут в отношении его мира играть ту же роль, что и величины $\varkappa_{\mu}$, $F_{\mu\nu}$ и J^{μ} для мира наблюдателя S. «Играть ту же роль» — это значит обладать теми же свойствами, или удовлетворять тем же соотношениям или уравнениям. Но $\varkappa'_{\mu}$, $F'_{\mu\nu}$ и J'^{μ} удовлетворяют тем же уравнениям в системе координат наблюдателя S', что и $\varkappa_{\mu}$, $F_{\mu\nu}$ и J^{μ} в системе S, *так как фундаментальные соотношения* (73.73), (73.74) и (73.77) являются *тензорными соотношениями, справедливыми во всех координатных системах.* Так как уравнения Максвелла являются тензорными уравнениями, то мы можем отождествить $\varkappa_{\mu}$, $F_{\mu\nu}$ и J^{μ} с экспериментально найденными значениями потенциала силы и тока не только в выбранной нами системе координат, но и в любой галилеевой системе.*)

Наше доказательство в некотором отношении не совсем полно. Существуют ведь и другие уравнения, нами еще до сих пор не рассмотренные, которым удовлетворяют электромагнитные переменные; например, имеется уравнение, описывающее движение заряженной частицы в электромагнитном поле. Мы покажем в п. 76, что оно тоже имеет тензорный вид, т. е. что все переменные со штрихами играют в экспериментах мира S' ту же роль, что и переменные без значков в экспериментах мира S. Но уже и в указанной форме наше доказательство достаточно для того, чтобы показать, что *если* в системе S' существуют потенциал, сила и ток, аналогичные потенциалу, силе и току мира S, то они будут выражены величинами $\varkappa_{\mu}$, $F_{\mu\nu}$ и J^{μ}, так как другие величины не будут удовлетворять выведенным уравнениям. Пред-

*) Собственно говоря, на опыте возможно непосредственно определять лишь составляющие тензоров $F_{\mu\nu}$ и J^{μ}, тогда как вектор $\varkappa_{\nu}$ может быть вычислен, исходя из них. Хотя решение $\varkappa_{\nu}$ уравнений (73.73) не определяется однозначно их левыми сторонами, но его можно инвариантным образом нормировать с помощью *тензорного уравнения* $(\varkappa^{\mu}{}_{;\mu}) = 0$, играющего роль добавочного условия. Если прибавить еще соответствующие — *инвариантные* — граничные условия, то величина $\varkappa_{\mu}$ определится из $F_{\mu\nu}$ *однозначно и инвариантно* (ср. п. 74а). (*Н.*)

варительное же условие, выраженное словом «если», всегда осуществлено, поскольку специальный принцип относительности остается в силе.

Если наблюдатель пользуется не-галилеевыми координатами, он обычно обходится с ними как с галилеевыми, а все расхождения относит за счет введенного силового поля. Величины x_μ, $F_{\mu\nu}$ и J^μ будут, следовательно, отождествлены с потенциалом, силой и током совершенно так же, как если бы координаты были галилеевыми. Эти величины не будут уже удовлетворять уравнениям Максвелла в их первоначальном виде, но будут относиться к нашим обобщенным уравнениям, написанным в тензорной форме (73.73) и (73.74). Замена (73.72) более общим видом (73.74) распространяет применение классических уравнений на случай, когда кроме электромагнитного действует также и гравитационное поле. *)

Упомянем в заключение о другом виде уравнений (73.71) и (73.72), в котором их формальная аналогия становится яснее. Если $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ означает величину, введенную в п. 48, то, как легко убедиться, (73.71) можно написать в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial F_{\gamma\delta}}{\partial x_\beta}=0, \tag{73.91}$$

причем 4 уравнения (73.71) соответствуют значениям α, равным 1, 2, 3, 4. Мы показали в п. 49, что $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ есть контравариантная тензорная плотность, так что уравнение

$$2\mathfrak{F}'^{\alpha\beta}=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}$$

определяет тензорную плотность $\mathfrak{F}'^{\alpha\beta}$. Легко убедиться, что компоненты $\mathfrak{F}'^{\alpha\beta}$ отличаются от компонент $F_{\alpha\beta}$ только порядком расположения. Так как $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ может принимать лишь одному из постоянных значений $0, +1, -1$, то умножение на $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ можно переставлять с оператором $\frac{\partial}{\partial x_\beta}$, так что из (73.91) вытекает уравнение $\frac{\partial \mathfrak{F}'^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=0$. Поэтому уравнения Максвелла можно написать в виде

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\mathfrak{J}^\mu,\quad \frac{\partial \mathfrak{F}'^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=0. \tag{73.92}$$

---

*) Следовательно, новые члены, зависящие от трехзначковых символов, которые при этом появляются в уравнениях (73.74), представляют собой отклонения, которые можно приписать действию тяготения. (*Н.*)

74. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ.

а) Распространение электромагнитного потенциала.

Известно, что электромагнитные потенциалы F, G, H и Φ не определены однозначно. Они участвуют в явлениях лишь в виде своих вихрей, т. е. электромагнитной силы. Вихрь же не изменится, если мы заменим $-F$, $-G$, $-H$ и Φ через

$$-F+\frac{\partial V}{\partial x},\ -G+\frac{\partial V}{\partial y},\ -H+\frac{\partial V}{\partial z},\ \Phi+\frac{\partial V}{\partial t},$$

где V — произвольная функция координат. Последние выражения дают то же самое электромагнитное поле, и, следовательно, могут быть с тем же правом приняты за электромагнитные потенциалы.

Для освобождения от этого произвола обычно из всех возможных значений потенциалов выбирают те, для которых удовлетворяется условие:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}+\frac{\partial \Phi}{\partial t}=0.$$

Аналогично, в обобщенных координатах мы избавляемся от произвола в $\varkappa_\mu$, полагая

$$(\varkappa^\mu)_\mu=0. \tag{74.1}$$

После наложения затем граничных условий на бесконечности значение $\varkappa_\mu$ становится вполне определенным.

Из (73.74) и (73.3) следует

$$J_\mu=(F^\alpha_\mu)_\alpha=(g^{\alpha\beta}F_{\mu\beta})_\alpha=g^{\alpha\beta}(F_{\mu\beta})_\alpha=g^{\alpha\beta}(\varkappa_{\mu\beta\alpha}-\varkappa_{\beta\mu\alpha}),$$

что, в виду (34.3), равно

$$g^{\alpha\beta}(\varkappa_{\mu\beta\alpha}-\varkappa_{\beta\alpha\mu}+B^\varepsilon_{\beta\alpha\mu}\varkappa_\varepsilon)=g^{\alpha\beta}(\varkappa_\mu)_{\beta\alpha}-(\varkappa^\alpha_\alpha)_\mu+G^\varepsilon_\mu\varkappa_\varepsilon.$$

Оператор $g^{\alpha\beta}(\ldots)_{\alpha\beta}$ мы обозначили ранее через $\Box$. Согласно (74.1) $\varkappa^\alpha_\alpha=0$.

Следовательно

$$\Box\varkappa_\mu=J_\mu-G^\varepsilon_\mu\varkappa_\varepsilon. \tag{74.31}$$

Для пустого пространства получаем:

$$\Box\varkappa_\mu=0. \tag{74.32}$$

Это показывает, что $\varkappa_\mu$ распространяется с основной скоростью. Если принять закон тяготения $G_{\mu\nu}=\lambda g_{\mu\nu}$ для кривого пространства-времени, то для пустого пространства это уравнение будет иметь вид

$$(\square+\lambda)\varkappa_\mu=0. \tag{74.33}$$

b) Распространение электромагнитной силы. Для определения соответствующего закона распространения $F_{\mu\nu}$ мы естественно попытаемся взять вихрь от (74.31); отметим однако, что операции образования вихря и действие $\square$ не коммутативны. Из уравнения (74.2) при помощи (34.8) имеем

$$\begin{aligned}J_{\mu\nu}&=g^{\alpha\beta}(\varkappa_{\mu\beta\alpha\nu}-\varkappa_{\beta\mu\alpha\nu})=g^{\alpha\beta}(\varkappa_{\mu\beta\nu\alpha}-\varkappa_{\beta\mu\nu\alpha})-\\&-g^{\alpha\beta}(B^{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha}\varkappa_{\varepsilon\beta}+B^{\varepsilon}_{\beta\nu\alpha}\varkappa_{\mu\varepsilon}-B^{\varepsilon}_{\beta\nu\alpha}\varkappa_{\varepsilon\mu}-B^{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha}\varkappa_{\beta\varepsilon})=\\&=g^{\alpha\beta}(\varkappa_{\mu\beta\nu}-\varkappa_{\beta\mu\nu})_\alpha-g^{\alpha\beta}(B^{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha}F_{\varepsilon\beta}-B^{\varepsilon}_{\beta\nu\alpha}F_{\varepsilon\mu})=\\&=g^{\alpha\beta}(\varkappa_{\mu\nu\beta}-\varkappa_{\beta\mu\nu}+B^{\varepsilon}_{\mu\beta\nu}\varkappa_\varepsilon)_\alpha-B_{\mu\nu\alpha\varepsilon}F^{\varepsilon\alpha}-G^{\varepsilon}_{\nu}F_{\varepsilon\mu}{}^{*}),\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}J_{\mu\nu}-J_{\nu\mu}&=g^{\alpha\beta}(\varkappa_{\mu\nu\beta}-\varkappa_{\nu\mu\beta}-B^{\varepsilon}_{\beta\mu\nu}\varkappa_\varepsilon+B^{\varepsilon}_{\mu\beta\nu}\varkappa_\varepsilon-B^{\varepsilon}_{\nu\beta\mu}\varkappa_\varepsilon)_\alpha-\\&-(B_{\mu\nu\alpha\varepsilon}-B_{\nu\mu\alpha\varepsilon})F^{\varepsilon\alpha}-G^{\varepsilon}_{\nu}F_{\varepsilon\mu}+G^{\varepsilon}_{\mu}F_{\varepsilon\nu}.\end{aligned}$$

Циклическое соотношение (34.6) дает:

$$B^{\varepsilon}_{\beta\mu\nu}+B^{\varepsilon}_{\mu\nu\beta}+B^{\varepsilon}_{\nu\beta\mu}=0,\quad B^{\varepsilon}_{\beta\mu}-B^{\varepsilon}_{\mu\beta\nu}+B^{\varepsilon}_{\nu\beta\mu}=0.$$

В силу антисимметричности имеем:

$$(B_{\mu\nu\alpha\varepsilon}-B_{\nu\mu\alpha\varepsilon})F^{\varepsilon\alpha}=2B_{\mu\nu\alpha\varepsilon}F^{\varepsilon\alpha}$$

и окончательно получаем:

$$J_{\mu\nu}-J_{\nu\mu}=g^{\alpha\beta}(\varkappa_{\mu\nu}-\varkappa_{\nu\mu})_{\beta\alpha}-G^{\varepsilon}_{\nu}F_{\varepsilon\mu}+G^{\varepsilon}_{\mu}F_{\varepsilon\nu}-2B_{\mu\nu\alpha\varepsilon}F^{\varepsilon\alpha},$$

так что

$$\square F_{\mu\nu}=J_{\mu\nu}-J_{\nu\mu}-G^{\varepsilon}_{\mu}F_{\varepsilon\nu}+G^{\varepsilon}_{\nu}F_{\varepsilon\mu}+2B_{\mu\nu\alpha\varepsilon}F^{\varepsilon\alpha}. \tag{74.71}$$

В случае пустого **) бесконечного мира ($G^{\varepsilon}_{\mu}=0$) это дает уравнение

$$\square F_{\mu\nu}=2B_{\mu\nu\alpha\varepsilon}F^{\varepsilon\alpha}. \tag{74.42}$$

---

*) Так как

$$\begin{aligned}g^{\alpha\beta}B^{\varepsilon}_{\beta\nu\alpha}F_{\varepsilon\mu}&=g^{\alpha\beta}B_{\beta\nu\alpha\varepsilon}F^{\varepsilon}_{\mu}=g^{\alpha\beta}B_{\nu\beta\varepsilon\alpha}F^{\varepsilon}_{\mu}=-g^{\alpha\beta}B_{\nu\varepsilon\beta\alpha}F^{\varepsilon}_{\mu}=\\&=-G_{\nu\varepsilon}F^{\varepsilon}_{\mu}=-G^{\varepsilon}_{\nu}F_{\varepsilon\mu}.\end{aligned} \qquad (Н.)$$

**) В котором нет ни материи, ни зарядов, так что

$$J^\mu=0. \qquad (Н.)$$

Для мира, обладающего кривизной, но не содержащего материи*), в котором, следовательно,

$$G^{\epsilon}_{\mu} - \lambda g^{\epsilon}_{\mu} = 0, \; B_{\mu\nu\alpha\epsilon} = \frac{1}{3}\lambda\,(g_{\mu\nu}\,g_{\alpha\epsilon} - g_{\mu\alpha}\,g_{\nu\epsilon})\,^{**})$$

имеем

$$\left(\Box + \frac{4}{3}\lambda\right) F_{\mu\nu} = 0. \tag{74.43}$$

Не следует удивляться тому, что скорость распространения электромагнитного потенциала не равна скорости распространения электромагнитной силы (см. 74.33 и 74.43). Первая физически не существенна, так как она зависит от произвольного допущения, что $\varkappa^{\mu}_{\mu} = 0$. Результат же (74.42) является, как мне кажется, довольно неожиданным. Он показывает, что в уравнение распространения электромагнитной силы входит тензор Риманна-Кристоффеля, и, следовательно, это явление не принадлежит к числу тех, для которых обычные галилеевы уравнения могут быть сразу же обобщены по принципу эквивалентности. Это заставляет нас усомниться в справедливости нашего допущения о пригодности инвариантных уравнений распространения света ($ds = 0$, $\delta \int ds = 0$) во всех случаях. В последующем разделе мы убедимся, однако, в справедливости сделанного допущения.

c) Распространение волнового фронта. Понятие «луча» света физической оптики никоим образом не элементарно.

---

*) В котором опять

$$J^{\mu} = 0. \qquad (H.)$$

**) По сообщению автора проще всего можно доказать это тензорное уравнение, представив, что мир де Ситтера (с «мнимым временем») находится в плоском пространстве 5 измерений, так что можно применять формулу (65.51). Если уравнение (65.2) соответствующей гиперповерхности взять в виде (65.3), то все числа k_1, k_2, k_3, k_4 будут равны обратным значениям радиуса кривизны, т. е. согласно (69.12), $\sqrt{\frac{\lambda}{3}}$. Но по (65.4) в начале координат $g_{\nu\tau} = -g^{\nu}_{\tau} = -\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\,a_{\nu\tau}$. Поэтому (65.51) дает для начала координат

$$B_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{\lambda}{3}\,(g_{\mu\nu}\,g_{\sigma\rho} - g_{\mu\sigma}\,g_{\nu\rho}),$$

что, конечно, имеет место, независимо от выбранной координатной системы в каждой точке мира де Ситтера. (H.)

За исключением случая бесконечного фронта волны, луч является некоторой абстракцией, и для полного выяснения смысла ее необходимо рассмотреть вопрос о диффракционных полосах. Мы не предполагаем здесь заниматься столь общими рассуждениями и, следовательно, не будем пытаться сразу получить здесь пути лучей света для случая обобщенных координат. Нашей задачей будет привести общие формулы к такому виду, чтобы последующий анализ развивался уже по обычным путям физической оптики.

Фундаментальное уравнение, рассматриваемое в обычной теории электромагнитных волн, пишется так:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varkappa_\mu=0. \tag{74.51}$$

Это та форма, которую принимает $\square\varkappa_\mu=0$ в галилеевых координатах. Если пространство и время являются не плоскими, мы не можем сразу же перейти к такой упрощенной форме $\square\varkappa_\mu$, но мы можем добиться значительного упрощения, применяя естественные координаты для рассматриваемой точки. В этом случае трехзначковые символы (но не их производные) исчезают, и мы имеем

$$\square\varkappa_\mu=g^{\alpha\beta}(\varkappa_\mu)_{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2\varkappa_\mu}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\{\mu\beta,\varepsilon\}\,\varkappa_\varepsilon\right).$$

Таким образом закон, распространения $\square\varkappa_\mu=0$ в естественных координатах принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varkappa_\mu=g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\beta,\varepsilon\}\,\varkappa_\varepsilon. \tag{74.52}$$

На первый взгляд это выражение не кажется очень многообещающим в отношении оправдания принципа эквивалентности. Мы не можем при каком бы то ни было выборе координат заставить все производные трехзначковых символов обратиться в нуль, так как они определяют тензор Римана—Кристоффеля. Дело выглядит так, как будто закон распространения в кривом пространстве-времени содержит тензор Римана-Кристоффеля, и, следовательно, будет иным, чем для плоского пространства времени. Положение спасается, однако, внутренним умножением на $g^{\alpha\beta}$. Возможно, именно, выбрать координаты так, чтобы выражение $g^{\alpha\beta} \dfrac{\partial\{\mu\beta, \varepsilon\}}{\partial x_\alpha}$ исчезло для всех 16 возможных комбинаций μ и ε *).

Для таких координат (74.52) сводится к (75.51) и обычное решение для плоского пространства-времени будет применимо в рассматриваемой точке.

Решение (74.51), дающее плоские волны, имеет вид:

$$\varkappa_\mu = A_\mu e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(lx+my+nz-ct)}. \tag{74.53}$$

Здесь A_μ — постоянный вектор, l, m, n — направляющие косинусы, так что $l^2+m^2+n^2=1$. Подставляя это в уравнение (74.51), мы видим, что последнее будет удовлетворено, если $c^2=1$ и первые и вторые производные от l, m, n, c исчезают. Согласно обычному толкованию этих уравнений косинусы (l, m, n) дают направление луча, а c — скорость распространения вдоль луча.

Равенство нулю первых и вторых производных от (l, m, n) показывает, что направление луча для данной точки есть величина стационарная [световые колебания соответствуют величине $F_{\mu\nu}$ (а не $\varkappa_\mu$) и если бы первые производные не были равны нулю, то направление луча не обязательно совпадало бы с l, m, n; стационарность же зависит также от равенства нулю и вторых производных]. Далее, скорость c вдоль луча будет равна единице.

Отсюда следует, что в пространстве-времени любого вида луч будет геодезической линией, а скорость будет всегда удовлетворять уравнению $ds=0$. Сформулированный в таком виде результат, хотя и был выведен для весьма специальной координатной системы, будет однако справедлив и для любой другой системы, как выраженный инвариантным образом. Но выражение для потенциала (74.53), конечно, пригодно только для специальных координатных систем.

Таким образом, мы убедились в справедливости для распро-

---

*) По формуле (36.55) возможно путем преобразования увеличить $\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\{\mu\beta, \varepsilon\}$ на любую произвольную величину $a^{\varepsilon}_{\mu\beta\alpha}$, симметричную относительно μ, β и α. Шестнадцать величин $g^{\alpha\beta} a^{\varepsilon}_{\mu\beta\alpha}$ ($\mu, \varepsilon = 1, 2, 3, 4$) не обязаны удовлетворять каким-либо условиям симметрии и могут быть выбраны независимо друг от друга. Следовательно мы можем подходящим преобразованием заставить исчезнуть правую часть (74.52).

странения светового импульса закона [47.(4)] допущенного нами прежде гипотетически *).

d) Решение уравнения $\Box \varkappa^{\mu} = J^{\mu}$. Допустим, что пространство-время можно считать плоским в искомом приближении, т. е. что мы имеем право взять галилеевы координаты. Наше уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \varkappa^{\mu}}{\partial t^2} - \nabla^2 \varkappa^{\mu} = J^{\mu}.$$

Решением его будет хорошо известное из теории распространения звука выражение

$$\{\varkappa^{\mu}\}_{x,y,z,t} = \frac{1}{4\pi}\int\int\int \{J^{\mu}\}_{\xi,\eta,\zeta,t-r} \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r}, \tag{74.61}$$

где r — расстояние между (x, y, z) и (ξ, η, ζ) (см. п. 57).

Доли, привносимые в $\varkappa^{\mu}$ каждым элементом тока или заряда, просто складываются. Следовательно нам достаточно рассмотреть элемент заряда de, двигающийся со скоростью A^{μ} и определить ту часть $\varkappa^{\mu}$, которая ему соответствует. Пользуясь уравнением (73.81), имеем

$$\varkappa^{\mu} = \frac{1}{4\pi}\frac{ds}{dt} A^{\mu} \int\int\int \rho \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}, \tag{74.62}$$

где все величины в правой части взяты в момент времени $t - r$.

Для бесконечно малого элемента объема мы берем $\rho = \text{const}$ и пишем пределы интегрирования. Но эти пределы должны быть взяты для момента времени $t - r$, что вводит важный множитель, дающий своего рода Допплер-эффект. Если элемент заряда ограничен двумя плоскостями, перпендикулярными направлению r, то интегрирование будет производиться между передней плоскостью в момент времени $t - r$ и задней плоскостью в момент $t - r - dr$. Если v_r есть компонента скорости по направлению r, то передняя плоскость за время dr успеет переместиться на расстояние $v_r dr$. Таким образом, мгновенная толщина элемента заряда в момент времени $t - r$ будет меньше, чем расстояние между пределами интегрирования в отношении $1 : 1 - v_r$, и интегрирование

*) Другой вывод см. у *M. v. Laue,* Die Relativitätstheorie, изд. 1-е, том II, стр. 147 и сл. *(Н.)*

нужно произвести по объему в $\left(\frac{1}{1-v_r}\right)^{\Delta}$ раз большему, чем мгновенный объем элемента заряда; отсюда

$$\int\int\int \rho d\xi\, d\eta\, d\zeta = \frac{de}{1-v_r}.$$

Вводя, как обычно, обозначение β для множителя Фицджеральда $\frac{dt}{ds}$, получим из (74.62)

$$\varkappa^{\mu} = \left\{\frac{A^{\mu}de}{4\pi r\beta(1-v_r)}\right\}_{t-r} = \left\{\frac{de(u, v, w, 1)}{4\pi r(1-v_r)}\right\}_{t-r} {}^{*}). \quad (74.71)$$

В большинстве приложений движение заряда может рассматриваться как прямолинейное в течение времени распространения потенциала на расстоянии r. В этом случае

$$\{r(1-v_r)\}_{t-r} = \{r\}_t,$$

так как мгновенное расстояние меньше первоначального на величину $v_r r$. Тогда результат получает следующий вид:

$$\varkappa^{\mu} = \left\{\frac{A^{\mu}de}{4\pi r\beta}\right\}_t = \left\{\frac{de(u, v, w, 1)}{4\pi r}\right\}_t. \quad (74.72)$$

Мы видим, что скалярный потенциал Φ заряда не меняет своей величины при прямолинейном движении и должен подсчитываться для каждого данного, а не для первоначального положения заряда. Уравнение (74.71) можно переписать в псевдотензорной форме:

$$\varkappa^{\mu} = \left\{\frac{A^{\mu}de}{4\pi A^{\nu}R_{\nu}}\right\}_{R^{\alpha}R_{\alpha}=0}, \quad (74.8)$$

---

*) Так как приведенный в тексте пример применения преобразования, может быть, не вполне выясняет значение последнего, отметим еще следующее: когда некоторый объем заполняется субстанцией — носительницей источников, стоящих под знаком интеграла в выражении запаздывающего потенциала — естественно заменить координатный объем $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ элементом *собственного объема*. При этом *недостаточно* разделить на β, необходимо еще, в связи с условием для границ интегрирования, характерных для запаздывающих потенциалов, ввести множитель $\frac{1}{1-v_r}$. Таким образом, формуле (74.71) соответствует формула

$$\int\int\int (P)_{t-r}\frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r} = \int\int\int \left(\frac{P}{\beta}\right)_{t-r}\frac{dV}{r(1-v_r)}, \quad (74.71^{*})$$

где dV есть элемент собственного объема. (*Н.*)

где R^μ — псевдовектор, представляющий расстояние от заряда (ξ, η, ζ, τ) до точки (x, y, z, t), где определяется $\varkappa^\mu$.

Условие $R^\alpha R_\alpha = 0$ дает:

$$-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-(z-\zeta)^2+(t-\tau)^2=0,$$

так что

$$\tau = t - r\,^*).$$

Кроме того

$$A^\gamma R_\gamma = -\beta u(x-\xi)-\beta v(y-\eta)-\beta w(z-\zeta)+\beta(t-\tau)=$$
$$=-\beta v_r r+\beta r = r\beta(1-v_r).$$

Конечное перемещение R^μ не является вектором в общей теории. Мы назвали его псевдовектором, так как он ведет себя как вектор в галилеевых координатах и при преобразовании Лоренца. Таким образом, уравнение (74.8) нельзя применять к другим координатам, кроме галилеевых.

Выведем, наконец, еще одну формулу, представляющую потенциал (74.71) в более удобно для многих целей виде, который мы используем в ближайших параграфах. Именно, в то время как в (74.71) значение потенциала в момент времени t было выражено через положение и интенсивность источников в момент $(t-\tau)$, причем τ было переменно от источника к источнику, наша новая формула даст разложение потенциала в момент t через положение и интенсивность источников также в момент времени t.

Рассмотрим закрепленную точку P в момент t и движущуюся точку P' в момент $(t-\tau)$, причем пусть P' движется так, что расстояние PP' будет заданной функцией от $(t-\tau)$, т. е.

$$PP' = r = f(t-\tau).$$

Тогда для компоненты скорости P' вдоль $P'P$ в направлении к P получим

$$v_r = -\frac{dr}{dt} = -f'(t-\tau).$$

Пусть теперь испущенная из P' в момент $(t-\tau)$ волна достигает точки Q в направлении $P'P$ в момент t. Обозначая расстояние PQ через α и положив скорость волн равной единице, имеем

$$\alpha = \tau - r = \tau - f(t-\tau). \tag{74.91}$$

---

*) Другое решение $\tau = t + r$ недопустимо по физическим соображениям, так как оно противоречит принципу причинности при *обычных* начальных и граничных условиях. По этому поводу см. однако *A. Einstein u. W. Ritz*. Phys. Z., IX, 1908. *(НР.)*

Таким образом α есть функция τ и обратно. Дифференцирование (74.91) по α дает

$$1=\frac{d\tau}{d\alpha}+f'(t-\tau)\frac{d\tau}{d\alpha}=(1-v_r)\frac{d\tau}{dx}.$$

Поэтому, если $\varphi(t-\tau)$ будет некоторой величиной, сопоставленной источнику P' в момент $(t-\tau)$, то мы получим

$$\left\{\frac{\varphi}{r(1-x_r)}\right\}_{t-\tau}=\frac{\varphi(t-\tau)}{f(t-\tau)}\frac{d\tau}{d\alpha}=\frac{d}{d\alpha}F(t-\tau),$$

если

$$F'=\frac{-\varphi}{f}. \tag{74.92}$$

Значение τ, которое нужно взять при вычислении запаздывающего потенциала, получается из условия совпадения Q с P, т. е. при $\alpha=0$. Поэтому имеем

$$\left[\frac{\varphi}{r(1-v_r)}\right]=\left\{\frac{dF(t-\tau)}{d\alpha}\right\}_{\alpha=0}, \tag{74.93}$$

где квадратные скобки указывают на то, что значение выражения в скобках нужно взять в момент времени $t-\tau$.

Если мы запишем уравнение (74.91) в виде

$$(t-\tau)=(t-\alpha)-f(t-\tau),$$

то формула Лагранжа, для разложения неявных функций, если принять во внимание (74.92), дает

$$F(t-\tau)=F(t-\alpha)-F'(t-\alpha)\,f(t-\alpha)-$$
$$-\sum_2^\infty\frac{1}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\alpha^{n-1}}\left(F'(t-\alpha)\,\{f(t-\alpha)\}^n\right)=F(t-\alpha)+\varphi(t-\alpha)+$$
$$+\sum_2^\infty\frac{1}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\alpha^{n-1}}\left(\varphi(t-\alpha)\,\{f(t-\alpha)\}^{n-1}\right).$$

Подставим это разложение в (74.93) и примем во внимание, что $\frac{\partial}{\partial\alpha}=-\frac{\partial}{\partial t}$; в таком случае мы получим:

$$\left[\frac{\varphi}{r(1-v_r)}\right]=-F'(t)-\frac{d}{dt}\varphi(t)+\sum_2^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(\varphi(t)\,\{f(t)\}^{n-1}\right).$$

Поэтому окончательно получается

$$\left[\frac{\varphi}{r(1-v_r)}\right]=\frac{\varphi}{r}-\frac{d\varphi}{dt}+\sum_2^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(r^{n-1}\varphi\right), \tag{74.94}$$

где в правой части r и φ нужно взять в момент t.

74a. ВТОРОЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ ВРАЩАЮЩИМСЯ СТЕРЖНЕМ.

Воспользуемся теперь вычислениями предыдущих параграфов для рассмотрения поставленной в п. 59a задачи новым методом, при котором мы вообще не заботимся о судьбе потерянной энергии и который представляет особый исторический интерес.

Если гравитационные волны не распространяются мгновенно, то обусловленное этим запаздывание может привести к возникновению касательных составляющих силы, так что получается пара сил, стремящаяся замедлить вращение. Лаплас предполагал, что если бы гравитационные волны распространялись со скоростью света, то возникающая при этом замедляющая пара сил имела бы порядок величины, допускающей возможность наблюдения в астрономических системах. В виду отсутствия этого эффекта он заключил, что тяготение распространяется во всяком случае со значительно большей скоростью. В настоящее время мы знаем, что ожидавшиеся Лапласом эффекты первого порядка сокращаются и что потеря энергии, определяемая формулой (59 . 9a), представляет собой действительно остаток эффекта Лапласа, который по новой теории оказывается эффектом 3-го порядка. Стержень останавливается потому, что, при конечной скорости распространения от одного конца к другому, гравитационные действия его отдельных частиц направлены не в точности вдоль стержня, так что образуется пара сил, которая в конце концов приводит к остановке стержня, или, короче говоря, потому, что действие и противодействие не в точности равны и противоположно направлены. Излагаемый в дальнейшем новый вывод результата (59 . 9a), несколько более короткий, чем прежнее доказательство, основывается именно на этом представлении.

Проинтегрируем по трехмерной области, охватывающей стержень, формулу (55 . 6) при $\mu = 4$.

$$\frac{\partial T_4^\nu}{\partial x_\nu} = \frac{1}{2} T^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}.$$

При этом мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int T_4^4 \, dV = \frac{1}{2} \int T^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} \, dV, \qquad (74 . 1a)$$

так как остальные члены в левой части дают поверхностные интегралы, обращающиеся в нуль, ибо на границе области нет материи. Уравнение (74.1a) дает скорость изменения материальной энергии области, т. е. стержня, потому что последний представляет собой единственную материальную систему в области.

Для вычисления значений $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}$ в (74.1a) воспользуемся уравнением (57.7).

$$\Box\, h_{\alpha\beta} = 2G_{\alpha\beta} = -16\pi\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta}\,T\right). \tag{74.2a}$$

Мы уже изучали решение этого волнового уравнения в п. 74 (d). Из (74.71) следует

$$h_{\alpha\beta} = -4\int\left[\frac{T'_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta}\,T'}{r\,(1 - v_r)}\right]dV'. \tag{74.3a}$$

Квадратные скобки означают, что выражение в них надо взять в соответственно выбранный предшествующий момент времени, или, иначе говоря, что речь идет о «значениях, отсчитываемых назад». r есть расстояние между движущимся источником dV' в этот момент и точкой, в которой вычисляются $h_{\alpha\beta}$; наконец, v_r есть составляющая скорости dV' по направлению к точке наблюдения. Хотя здесь окажется нужным сохранить и высшие степени скорости в коэффициентах периодических членов, однако мы можем не принимать во внимание фицджеральдовский множитель β, который, собственно говоря, должен был бы входить в качестве постоянного, не зависящего от времени множителя. Точно так же мы можем в формуле (74.3a) заменить $\mathbf{T}^{\alpha\beta}$ на $T^{\alpha\beta}$, так как при этом мы пренебрегаем квадратами и произведениями величин $h_{\alpha\beta}$ по сравнению с их первыми степенями.

Из (74.1a) и (74.3a) для уменьшения энергии стержня со временем получается выражение

$$2\int\int\left\{T^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{T'_{\alpha\beta}}{r\,(1 - v_r)}\right] - \frac{1}{2}\,T\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{T'}{r\,(1 - v_r)}\right]\right\}dV\,dV', \tag{74.4a}$$

так как в рассматриваемом приближении $T^{\alpha\beta}\,\delta_{\alpha\beta} = T$. Это интегральное представление выражает зависимость потери энергии от взаимодействия пар элементов стержня dV, dV'.

Значения квадратных скобок в формуле (74.4a), относящиеся к моменту $t-r$, могут быть выражены через значения r и $T'_{\alpha\beta}$, в момент t с помощью ряда, выведенного в конце п. 74 *).

$$\left[\frac{T'_{\alpha\beta}}{r\,(1-v_r)}\right]=\frac{T'_{\alpha\beta}}{r}-\frac{d}{dt}T'_{\alpha\beta}+\sum_{2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(r^{n-1}T'_{\alpha\beta}),\quad(74.5a)$$

где величины, стоящие справа, относятся уже к моменту t.

Пусть теперь стержень вращается в плоскости xy около своего центра, совпадающего с началом координат, причем пусть в момент $t=0$ он направлен вдоль оси x. Пусть dV находится в точке с абсциссой x, а dV' — в точке с абсциссой x'; в таком случае (переменное) расстояние источника dV' от неподвижной точки x, в которой находится dV в момент $t=0$, будет равно

$$r=(x'^2-x'^2-2xx'\cos\omega t)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

Это выражение и нужно подставить в (74.5а), причем t после выполнения всех дифференцирований следует положить равным нулю. В нашем случае выражение (74.5а) можно несколько упростить, если принять во внимание, что каждой компоненте $T'^{\alpha\beta}$, не обращающейся в нуль при $t=0$, соответствует компонента $T'_{\alpha\beta}$ являющаяся *четной* функцией t, так что ее производные нечетного порядка обращаются в нуль при $t=0$. Поэтому в нашем случае можно написать:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{T'_{\alpha\beta}}{r\,(1-v_r)}\right]=-\frac{d^2}{dt^2}T'_{\alpha\beta}-\frac{1}{6}\frac{d^4}{dt^4}\{T'_{\alpha\beta}(x^2+x'^2-2xx'\cos\omega t\}-$$
$$-\frac{1}{120}\frac{d^6}{dt^6}\{T'_{\alpha\beta}(x^2+x'^2-2xx'\cos\omega t)^2\}-\ldots\qquad(74.6a)$$

Это разложение нужно подставить теперь в (74.5а) и (74.4а) и определить низшие члены, не обращающиеся в нуль. Мы предположим при этом, что стержень симметричен (хотя его плотность может и не быть постоянной), так что члены с нечетными степенями x или x' при интегрировании исчезают.

а) Компоненты напряжений T^{11}, T^{22} **). Значения T^{11} и T^{22} малы по сравнению с компонентами импульса и массы; поэтому достаточно вычислить только первый член разложения

) Собственно говоря, при этом используется формула (74.71); dV' есть собственный объем элемента стержня. (*Н.*)

**) T^{12} обращается в нуль при $t=0$, так как при этом [ср. определение $T^{\mu\nu}$ к (53.5)] как p_{xy}, так и ρuv равны нулю. (*Н.*)

(74.6a). Так как в нем r отсутствует, то интеграл распадается на произведение двух независимых интегралов. Поэтому соответствующий член в выражении (74.4a) будет равен

$$-2\int T^{11}\,dV\frac{d^2}{dt^2}\int T'_{11}\,dV'-2\int T^{22}\,dV\frac{d^2}{dt^2}\int T'_{22}\,dV'. \qquad (74.7\text{a})$$

Если (линейная) плотность стержня равна σ, то $T^{22}dV=$ $=\sigma\omega^2x^2\,dx$, поэтому

$$\int T^{22}\,dV=I\omega^2,$$

где I — момент инерции стержня, равный $\int\sigma x^2\,dx$.

Компонента T^{11} представляет собой напряжение в стержне, и из законов элементарной механики следует, что ее интеграл равен $-I\omega^2$.

Для движущегося источника соответствующие интегралы будут равны $I\omega^2\cos 2\omega t$ и $-I\omega^2\cos 2\omega t$. Поэтому (74.7a) дает окончательно для момента $t=0$ значение $16I^2\omega^2$.

b) Компоненты импульса T^{24}, T^{42} *). Компоненты T^{24} и T^{42} определяются следующими уравнениями:

$$T^{24}\,dV=\sigma\,\omega x\,dx;\quad T'_{24}\,dV'=-\sigma'\omega\,x'dx\cos\omega\,t.$$

Первый член в (74.6a) дает теперь при интегрировании нуль, так как в него входят нечетные степени x и x'. Что касается второго члена (74.6a), то он дает:

$$-2\int\int\sigma\,\omega\,x\,dx\cdot\sigma'\omega\,x'dx'\cdot\frac{1}{6}\left(2\omega\right)^4xx'=-\frac{16}{3}\,TI^2\omega^6;$$

тот же результат дает и T^{42}, так что в общем доля компонент импульса оказывается равной $-\dfrac{32}{3}\,I^2\,\omega^6$.

c) Компоненты массы T^{44}, T. В этом случае мы имеем $T^{44}\,dV=\sigma\,dx$; $T_{44}'\,dV'=\sigma\,dx'$. Здесь только третий член формулы (74.6a) дает при интегрировании выражение, не обращающееся в нуль и равное

$$2\int\int\sigma\,dx\cdot\sigma'\,dx'\cdot\frac{1}{120}(2\omega)^6\,2x^2\,x'^2=\frac{32}{15}I^2\,\omega^6.$$

Но в рассматриваемом здесь приближении собственная плотность T равна координатной плотности T^{44}, так что половина

---

*) Компонента T^{14} очевидно обращается в нуль при $t=0$, так как скорость направлена перпендикулярно к оси x. (*Н.*)

этого выражения компенсируется членом с T, и окончательно получается $\frac{16}{15} I^2 \omega^6$.

Из a), b) и c) получается окончательно для потери энергии то же выражение, что и в п. 59a:

$$\left(16 - \frac{32}{3} + \frac{16}{15}\right) I^2 \omega^6 = \frac{32}{5} I^2 \omega^6.$$

Если обозначить через a порядок величины линейных размеров и через v порядок линейных скоростей системы, то полученный результат по порядку величины равен $\left(\frac{M}{a}\right)^2 v^6$, где M полная масса. Так как h_{44} будет порядка $\left(\frac{M}{a}\right)$, то пренебрежение высшими степенями $h_{\mu\nu}$ вызывает в a пренебрежение членами порядка $\left(\frac{M}{a}\right)^3 v^4$ и $\left(\frac{M}{a}\right)^4 v^2$. Первое при известных условиях допустимо, второе же допустимо почти наверное. Таким образом, в основу наших приближений кладется допущение, что величинами этого порядка можно пренебречь по сравнению с $\left(\frac{M}{a}\right)^2 v^6$. Существование систем малой массы и большой скорости, сдерживаемых силами сцепления, для которых справедливы наши приближения, не представляет трудности для теории. В противоположность этому для систем, сдерживаемых силами тяготения, $\left(\frac{M}{a}\right)$ неизбежно будет того же порядка, что и v^2, так что наши приближения становятся неправильными. Таким образом, этим методом нельзя исследовать потери энергии двойными звездами — если этот эффект вообще существует.

Во всяком случае, необходимо согласиться с тем, что возможность применения указанного метода к системам, сдерживаемым силами сцепления, и неприменимость его к системам, сдерживаемым силами тяготения, обусловливается нашим относительным незнанием природы сил сцепления. Возможно, что силы сцепления распространяются с основной скоростью c; в таком случае наше предположение, что напряжение во вращающемся стержне в точности совпадает по направлению с последним, оказалось бы не вполне правильным. С другой стороны, сила сцепления связывает соседние частицы, и вряд ли возможно себе представить, что она распространяется по стержню от одного конца его к другому подобно гравитационному притяжению. На этом основании можно считать выроятным, что влиянием скорости распространения сил сцепления можно пренебречь, но даже в том случае, если бы это влияние достигало заметной величины, вряд ли можно было бы предполагать, что запаздывание сил сцепления могло бы само по себе *ускорить* вращение, так что не видно, каким образом может быть компенсирована найденная выше потеря энергии, обусловленная тяготением. Задача становится гораздо сложнее в случае двойной звезды, так как при этом необходимо принять во внимание возмущающее действие поля тяготения на распространение его собственных потенциалов, и мы не можем быть уверены даже в том, что знак нашего результата останется таким же.

Исследованная нами потеря энергии вращающимся стержнем представляет интерес также в связи с проблемой абсолютного вращения. Часто можно услышать утверждение, что движущаяся звезда постепенно останавливается под влиянием обратного давления своего собственного излучения. Очевидно, в этом рассуждении должна заключаться ошибка, так как не существует никакого «покоя», к которому можно было бы привести звезду*). Точно так же можно было бы думать, что допущение относительно постепенной остановки вращающегося стержня самого по себе должно быть ошибочным. Однако, на самом деле, теория относительности не отрицает абсолютного вращения, или по крайней мере не отрицает его с той же определенностью, как в случае абсолютного поступательного движения.

75. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОРЕНЦА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ СИЛЫ.

Преобразование Лоренца для наблюдателя S', движущегося относительно наблюдателя S со скоростью u вдоль оси X, напишется так:

$$x_1' = q(x_1 - ux_4);\quad x_2' = x_2;\quad x_3' = x_3;\quad x_4' = q(x_4 - ux_1), \tag{75.1}$$

где $q = (1 - u^2)^{-\frac{1}{2}}$.

*) Ошибка заключается в том, что при этом пренебрегают постепенным уменьшением массы звезды вследствие излучения энергии — неравная нулю сила $\frac{d(Mv)}{dt}$ несовместима с равномерной скоростью, если масса M меняется.

Мы пишем здесь q вместо β, чтобы избежать путаницы с компонентой магнитной силы β. Имеем:

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}=\frac{\partial x_4'}{\partial x_4}=q;\quad \frac{\partial x_1'}{\partial x_4}=\frac{\partial x_4'}{\partial x_1}=-qu;\quad \frac{\partial x_2'}{\partial x_2}=\frac{\partial x_3'}{\partial x_3}=1;\quad (75.2)$$

все же остальные производные исчезнут.

Для вычисления электромагнитной силы в системе S' через компоненты силы в S мы применим общие формулы преобразования (23.21). Тогда получим:

$$\gamma'=F'^{12}=\frac{\partial x_1'}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_2'}{\partial x_\beta}F^{\alpha\beta}=\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\frac{\partial x_2'}{\partial x_2}F^{12}+$$
$$+\frac{\partial x_1'}{\partial x_4}\frac{\partial x_2'}{\partial x_2}F^{42}=q\gamma-q\,uY.$$

Аналогично, для других составляющих имеем:

$$\left.\begin{array}{lll} X'=X; & Y'=q(Y-u\gamma); & Z'=q(Z+u\beta)\\ \alpha'=\alpha; & \beta'=q(\beta+uZ); & \gamma'=q(Y-uY)\end{array}\right\}\quad (75.3)$$

Эти формулы были даны Лоренцом. Более общие формулы когда скорость наблюдателя S' равна (u, v, w), становятся весьма сложными. Мы рассмотрим лишь приближенный случай, когда можно пренебречь квадратом скорости. В этом случае $q=1$ и формулы (75.3) должны на основании соображений симметрии иметь следующий вид:

$$\left.\begin{array}{l} X'=X-w\beta+v\gamma\\ \alpha'=\alpha+wY-vZ\end{array}\right\}\text{ и т. д.}\quad (75.4)$$

76. МЕХАНИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.

На основании элементарных законов физики частица материи, несущая электрический заряд плотности ρ, испытывает в электростатическом поле действие механической (пондеромоторной) силы

$$\rho X,\ \rho Y,\ \rho Z$$

на единицу объема. Движущиеся заряды, образующие электрический ток величиной $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ на единицу объема, подвергаются действию магнитного поля, испытывая таким путем механическую силу

$$\gamma\sigma_y-\beta\sigma_z,\ \alpha\sigma_z-\gamma\sigma_x,\ \beta\sigma_x-\alpha\sigma_y$$

на единицу объема.

Следовательно, если (P, Q, R) — полная механическая сила на единицу объема, то

$$\left.\begin{aligned} P &= \rho X + \gamma\sigma_y - \beta\sigma_z \\ Q &= \rho Y + \alpha\sigma_z - \gamma\sigma_x \\ R &= \rho Z + \beta\sigma_x - \alpha\sigma_y \end{aligned}\right\} . \tag{76.1}$$

Работа механических сил равна

$$S = \sigma_x X + \sigma_y Y + \sigma_z Z \text{ *)}.$$

Магнитная часть силы не совершает работы, так как она направлена под прямым углом к направлению потока заряженных частиц.

Из (73.41) и (73.5) мы находим, что эти выражения эквивалентны следующему:

$$(P, Q, R, -S) = F_{\mu\nu} J^{\nu} .$$

Обозначим вектор $F_{\mu\nu}J^{\nu}$ через h_{μ}. Поднимая значки при помощи галилеевых $g_{\mu\nu}$, получим:

$$(P, Q, R, S) = -h^{\mu} = -F^{\mu}_{\nu} J^{\nu} . \tag{76.2}$$

Действие механической силы изменит количество движения и энергию материальной системы. Следовательно, тензор энергии, взятый сам по себе, не будет сохранять свою величину. Для того, чтобы сохранить законы постоянства энергии и количества движения, мы должны приписать электромагнитному полю количество движения и энергию, изменения которых равны и противоположны соответственным изменениям в материальной системе **). Полный тензор энергии будет состоять, следовательно, из двух частей: M^{ν}_{μ} —

---

*) Именно, сила на путь, т. е. скалярное произведение силы (P, Q, R) на смещение $\left(\frac{\sigma_x}{\rho}, \frac{\sigma_y}{\rho}, \frac{\sigma_z}{\rho}\right)$ (*Н.*)

**) Не обращая внимания на предупреждение, данное нам судьбой потенциальной энергии (п. 59), мы опять подвергаемся риску, обобщая энергию, для того чтобы удовлетворить установленному ранее закону. Я не могу поручиться, что этой опасностью можно пренебречь. Но в данном случае мы стоим на более твердой почве, так как знаем, что существует мировой тензор, который удовлетворяет требуемому закону $T^{\mu\nu}_{\nu} = 0$, тогда как потенциальная энергия вводилась нами для сохранения закона $\frac{\partial \mathfrak{S}^{\nu}_{\mu}}{\partial x_{\nu}} = 0$ и утверждение, что существует тензор, с подобными свойствами было лишь теоретической возможностью, которая ведь и оказалась неверной.

тензора энергии материальной и E_μ^ν — тензора энергии электромагнитной.

Мы сохраним обозначение T_μ^ν для обозначения полного тензора — величины, всегда остающейся постоянной, которую, следовательно, можно отождествить с $G_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu G$; тогда

$$T_\mu^\nu = M_\mu^\nu + E_\mu^\nu. \tag{76.3}$$

Так как P, Q, R и S измеряют скорость возрастания количества движения и энергии механической системы, то их можно приравнять $\frac{\partial M^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$ на основании (53.52). Тогда имеем:

$$\frac{\partial M^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = -h^\mu.$$

Равное и противоположное изменение количества движения и энергии электромагнитного поля соответственно будет дано величиной $\frac{\partial E^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = + h^\mu$. Эти уравнения применимы к галилеевым или естественным координатам. Мы перейдем в общим координатам, вводя ковариантные производные, и получим следующие тензорные уравнения:

$$M_\nu^{\mu\nu} = -h^\mu = -E_\nu^{\mu\nu}, \tag{76.4}$$

которые уже независимы от координатной системы. Соответственно имеем

$$T_\nu^{\mu\nu} = (M^{\mu\nu} + E^{\mu\nu})_\nu = 0.$$

Рассмотрим теперь заряд, движущийся со скоростью (u, v, w). Мы получим по (75.4)

$$\rho X' = \rho X - (\rho w)\beta + (\rho v)\gamma = \rho X - \sigma_z\beta + \sigma_y\gamma = P.$$

Мы пренебрегли при этом квадратом скорости и в этом приближении $\rho' = \rho$. Поэтому, с точностью до второго порядка в скорости, механическая сила, действующая на движущийся заряд, будет равна $(\rho X', \rho Y', \rho Z')$ так же, как для покоящегося заряда она равнялась $(\rho X, \rho Y, \rho Z)$. Силу, действующую на движущийся заряд, мы получаем, либо применяя формулу (76.1) к первоначальным координатам, либо переходя к новым координатам, в которых заряд находится в покое, так что σ_x, σ_y, $\sigma_z = 0$. Эквивалентность обоих способов вычисления находится в согласии с принципом относительности для равномерных движений.

Если не пренебрегать квадратом скорости, то мы вовсе не получим такого простого соотношения. Механическая сила (масса × ускорение) не будет одинакова в штрихованных и нештрихованных системах, так как масса и ускорение изменятся прибавлением членов, содержащих квадраты скорости. В самом деле, мы и не можем ожидать какого-нибудь простого соотношения между механической (P, Q, R) и электрической (X, Y, Z) силами в различных координатных системах, так как первая является ведь частью вектора (именно — h^μ), а вторая частью тензора второго ранга.

Можно было бы пожалуй ожидать, что с появлением электронной теории вещества будет излишним вводить особый материальный тензор энергии $M^{\mu\nu}$, и что полные энергия и количество движения войдут в тензор энергии электромагнитного поля. Однако, мы не можем обойтись без $M^{\mu\nu}$. Дело заключается в том, что электрон нельзя рассматривать как чисто электромагнитное явление; иначе говоря, в его строении есть нечто, не описываемое максвелловой теорией электромагнитного поля. Для того чтобы воспрепятствовать заряду электрона распасться под влиянием собственных сил отталкивания, необходимо ввести немаксвелловы силы сцепления. Энергия напряжения и количество движения этих сил и составляют материальный тензор энергии.

Разложение тензора T^ν_μ на материальную и электромагнитную части можно понимать еще несколько иначе, как будет указано в конце п. 82.

77. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ

Для того чтобы определить явно значения E^ν_μ, мы вернемся к следующему соотношению предыдущего параграфа:

$$E^\nu_{\mu\nu} = h_\mu = F_{\mu\nu} J^\nu = F_{\mu\nu} F^{\nu\sigma}_\sigma. \tag{77.1}$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$E^\nu_\mu = -F^{\nu\alpha} F_{\mu\alpha} + \frac{1}{4} g^\nu_\mu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \tag{77.2}$$

Для проверки правильности этого решения образуем его расходимость, помня, что ковариантное дифференцирование подчиняется обыкновенному закону дистрибутивности и что g_μ^ν — постоянные.

$$E_{\mu\nu}^\nu = -F_\nu^{\nu\alpha} F_{\mu\alpha} - F^{\nu\alpha} F_{\mu\alpha\nu} + \frac{1}{4} g_\mu^\nu (F_\nu^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta\nu}),$$

или по (26.3)

$$= -F_\nu^{\nu\alpha} F_{\mu\alpha} - F^{\nu\alpha} F_{\mu\alpha\nu} + \frac{1}{2} g_\mu^\nu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta\nu}$$

а отсюда, после изменения немых значков,

$$= -F_\nu^{\nu\alpha} F_{\mu\alpha} - \frac{1}{2} F^{\beta\alpha} F_{\mu\alpha\beta} - \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} F_{\mu\beta\alpha} + \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta\mu},$$

или, наконец, в виду антисимметрии $F^{\mu\nu}$,

$$= F^\alpha F_{\mu\alpha} + \frac{1}{2} F^{\alpha\beta}(F_{\mu\alpha\beta} + F_{\beta\mu\alpha} + F_{\alpha\beta\mu}).$$

Легко проверить, что

$$F_{\mu\alpha\beta} + F_{\beta\mu\alpha} + F_{\alpha\beta\mu} = \frac{\partial F_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial F_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} = 0$$

на основании (30.3) и (73.71); члены, содержащие трехзначковые символы, взаимно уничтожаются.

Отсюда в согласии с (77.1)

$$E_{\mu\nu}^\nu = F_\nu^{\alpha\nu} F_{\mu\alpha} = J^\alpha F_{\mu\alpha}.$$

Интересно определить составляющие тензора энергии (77.2) в галилеевых координатах, пользуясь (73.41) и (73.42). Мы получаем

$$F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - X^2 - Y^2 - Z^2). \tag{77.3}$$

$$E_1^1 = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) + \frac{1}{2}(X^2 - Y^2 - Z^2). \tag{77.41}$$

$$E_1^2 = \alpha\beta + XY. \tag{77.42}$$

$$E_1^4 = \beta Z - \gamma Y. \tag{77.43}$$

$$E_4^4 = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2). \tag{77.44}$$

Последнее выражение дает энергию или массу электромагнитного поля; третья формула дает количество движения, обе же первые формулы выражают напряжения поля. Во всех случаях результат согласуется с классической теорией.

Количество движения, выражающее скорость передвижения массы, является также и выражением скорости течения энергии. С этой, второй, точки зрения оно часто называется вектором Пойнтинга. Из (77.43) видно, что количество движения по терминологии элементарной теории векторов представляет собой векторное произведение электрической и магнитной сил.

Из E_μ^ν мы можем образовать скаляр E, аналогично тому, как T было ранее получено из T_μ^ν. Инвариантная плотность T будет тогда состоять из двух частей, происходящих от электромагнитного поля (E) и от материи, или не-максвелловых напряжений, заключенных в электроне (M). Однако E тождественно равно нулю, так что электромагнитное поле ничего не прибавляет к инвариантной плотности, которую следует целиком отнести за счет не-максвелловых связывающих напряжений. Из (77.2), сокращая, имеем

$$E = -F^{\mu\alpha}F_{\mu\alpha} + \frac{1}{4}g_\mu^\mu F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = 0, \tag{77.5}$$

так как

$$g_\mu^\mu = 4.$$

Вопрос о природе инерции материи ведет к интересному парадоксу. Мы должны различать между инвариантной массой m, происходящей от инвариантной плотности T, и относительной массой M, происходящей от координатной плотности T^{44}.

Мы уже видели, что первая не может быть отнесена за счет электромагнитного поля. С другой стороны, вообще принимают, что вторая — обычная — масса, которая встречается в физике, происходит исключительно из электромагнитного поля электронов, и что инерция материи, таким образом, является просто энергией электромагнитного поля, заключенного в ней. Вероятно этот взгляд, возникший на основании работ Дж. Дж. Томсона *),

*) Ср. Phil. Mag. **11**, 229, 1881. Это представление приводит, правда, к трудности, которой иногда не замечают. Вычисленная на основании рассмотрения количества движения инерция или масса поля электрона отличается множителем $^2/_3$ от того значения, которое получается из рассмотрения максвелловской энергии. Отклонение можно объяснить только в том случае, если принять во внимание не-максвелловские напряжения (ср. примечание в конце п. 78). Я оставил в стороне это усложнение при обсуждении парадокса, приведенного в тексте. Оно, однако, способно только еще больше подчеркнуть трудность рассмотрения максвелловых свойств электрона отдельно от не-максвелловых свойств.

в основном верен и обычная или относительная масса может быть рассматриваема как чисто электромагнитная, а инвариантная масса является целиком не электромагнитной.

Каким же образом оказывается, что для покоящегося электрона инвариантная и относительная массы равны друг другу и являются в сущности синонимами? Вероятно разграничение на максвелловы и не-максвелловы напряжения искусственно — так же как разграничение гравитационных и инерциальных полей. Настоящим решением вопроса было бы в этом случае получение таких электромагнитных уравнений, чтобы оба вида напряжений оказались неразрывно связанными в одно целое. Но до тех пор, пока мы не знаем законов, которым подчиняются эти не-максвелловы напряжения, вряд ли возможно избежать такого разделения. С нашей настоящей точки зрения мы можем объяснить парадокс следующим образом.

Для покоящегося электрона относительная масса полностью определяется компонентой E^{44}; но компоненты напряжения $E^{\mu\nu}$ приносят добавочную долю к E, которая целиком уничтожает влияние E^{44}, и в результате получается $E=0$. Эти напряжения уравновешиваются не-максвелловыми напряжениями $M^{11}, \ldots, M^{33}$. Это равенство напряжений не обязательно имеет место в точности для каждого элемента объема, но должно выполняться точно для всей области, окружающей электрон. Таким образом, член, уничтожающий E^{44}, уничтожается сам, и E^{44} опять восстанавливается. Окончательно имеем результат, что полное значение T для покоящегося электрона равно полному значению E^{44}.

Обычно принимается, что не-максвелловы напряжения относятся главным образом к внутренней части или к ближайшей области вокруг электрона, а не путешествуют свободно оторвавшись, как это имеет место, например, с максвелловыми напряжениями в виде световых волн.

Я буду придерживаться этого взгляда для того, чтобы не слишком уклоняться от изложения других авторов, хотя, собственно говоря, нет никаких особых оснований считать этот взгляд правильным *).

---

*) Мы можем избежать трудности, расширяя понятие электронов или материи так, чтобы оно охватило все области, где максвелловы уравнения уже непригодны (например, области, содержащие кванты).

Если все не-максвелловы напряжения тесно связаны с электронами, то ясно, что для областей, не содержащих материи, E^{ν}_{μ} будет полностью представлять весь тензор энергии. В этом случае (54.3) дает

$$G^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} g^{\nu}_{\mu} G = -8\pi E^{\nu}_{\mu}; \tag{77.6}$$

сокращая, мы получаем

$$G = 8\pi E = 0;$$

и наше уравнение упрощается для областей, содержащих электромагнитные поля, но не материю, и принимает вид

$$G_{\mu\nu} = -8\pi E_{\mu\nu} \tag{77.7}$$

Мы замечаем, что гауссова кривизна пространства-времени равна нулю, если только в области нет электронов, даже в том случае, когда имеется электромагнитная энергия.

Так как для электромагнитной энергии инвариантная масса $m = 0$, а относительная M — конечна, то значит и $\frac{ds}{dt} = 0$, согласно уравнению (12.3), т. е. $M = m\frac{dt}{ds}$. Следовательно свободная электромагнитная энергия всегда должна иметь скорость света.

78. ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА.

Эта проблема отличается от проблемы поля тяготения нейтральной материальной частицы (п. 38) в том отношении, что электрическое поле простирается сквозь все пространство, и, следовательно, тензор энергии нельзя ограничить точкой или небольшим шариком около начала координат.

Берем, как и раньше, для самого общего случая симметричного поля (38.2)

$$g_{11} = -e^{\lambda}, \quad g_{22} = -r^2; \quad g_{33} = -r^2 \sin^2\theta; \quad g_{44} = e^{\nu}. \tag{78.1}$$

Так как электрическое поле является чисто статическим, то $F = G = H = \varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = 0$, а $\varkappa_4$ — функция одного только r. Единственными не равными нулю компонентами $F_{\mu\nu}$ будут

$$F_{41} = -F_{14} = \varkappa'_4, \tag{78.2}$$

причем штрих означает дифференцирование по r. Тогда имеем

$$F^{41} = g^{44} g^{11} F_{41} = -e^{-(\lambda+\nu)} \varkappa'_4$$

и

$$\mathfrak{F}^{41} = F^{41}\sqrt{-g} = -e^{-1/2(\lambda+\nu)}r^2 \sin\theta \varkappa_4'.$$

Отсюда по (73.75) получаем условие отсутствия заряда и тока (исключая особую точку в начале координат):

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{41}}{\partial x_1} = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(e^{-1/2(\lambda+\nu)} r^2 \varkappa_4'\right) = 0, \tag{78.3}$$

так что

$$\varkappa_4' = \frac{\varepsilon}{r^2} e^{1/2(\lambda+\nu)}, \tag{78.4}$$

где ε — постоянная интегрирования.

Подставляя это в (77.2), получаем

$$E_1^1 = -E_2^2 = -E_3^3 = E_4^4 = \frac{1}{2} e^{-\lambda-\nu}\varkappa_4'^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{r^4}. \tag{78.5}$$

На основании (77.7) мы должны подставить вместо нуля в правую часть формул (38.61 — 38.64) выражение $-8\pi E_{\mu\nu}$. Первое и четвертое уравнения дают, как и раньше, $\lambda' = -\nu'$, второе же уравнение имеет теперь вид:

$$e^{\nu}(1 + r\nu') - 1 = -8\pi g_{22} E_2^2 = -4\pi\frac{\varepsilon^2}{r^2};$$

отсюда, полагая $e^{\nu} = \gamma$, получим

$$(r\gamma)' = \gamma + r\gamma' = 1 - 4\pi\frac{\varepsilon^2}{r^2},$$

так что

$$r\gamma = r + 4\pi\frac{\varepsilon^2}{r} - 2m,$$

где $2m$ — постоянная интегрирования.

Поэтому поле тяготения электрона будет дано уравнением:

$$ds^2 = -\gamma^{-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 + \gamma\, dt^2,$$

где

$$\gamma = 1 - \frac{2m}{r} + 4\pi\frac{\varepsilon^2}{r^2}. \tag{78.6}$$

Этот результат был выведен впервые повидимому Нордстремом. Наш вывод заимствован у Джеффри*).

Влияние члена $4\pi\frac{\varepsilon^2}{r^2}$ таково, что эффективная масса уменьшается с увеличением r. Этого, конечно, и следовало ожидать,

*) Proc. Roy. Soc. 99, 128, 1921.

так как масса или энергия распространена по всему пространству. Мы не можем положить постоянную m равной нулю, так как это даст силу *отталкивания*, действующую на незаряженную частицу и изменяющуюся обратно пропорционально кубу расстояния. Действительно, по (55.8) приближенный ньютонов потенциал равен

$$\frac{m}{r} - 2\pi\frac{\varepsilon^2}{r}.$$

Постоянную m можно отождествить с массой, величину $4\pi\varepsilon$ — с электрическим зарядом частицы. Как известно, для электрона экспериментальные значения будут равны *):

$$m = 7 \cdot 10^{-56}\ \text{см}, \quad a = \frac{2\pi\varepsilon^2}{m} = 1{,}5 \cdot 10^{-13}\ \text{см}.$$

Величина a обычно считается того же порядка, что и радиус электрона, так что во всех точках вне электрона выражение $\frac{m}{r}$ имеет порядок 10^{-40}, или еще меньший. Так как $\lambda + \nu = 0$, то (78.4) дает:

$$F_{41} = \varkappa_4' = \frac{\varepsilon}{r^2},$$

что оправдывает наше отождествление $4\pi\varepsilon$ с электрическим зарядом.

Разобранный пример показывает, как мало́ поле тяготения электронного заряда. Мы можем рассматривать большинство проблем электромагнетизма, не принимая во внимание не-эвклидового характера геометрии пространства-времени, необходимо обусловленного наличием электромагнитного поля, так как все отклонения от эвклидовой геометрии обычно имеют столь малую величину, что ими вполне можно пренебречь. Если уменьшать r, то величина γ, даваемая формулой (78.6), будет уменьшаться до минимума при $r = 2a$, но затем станет увеличиваться и достигает бесконечности при $r = 0$. Электромагнитное поле и поле тяготения не имеют особых точек, исключая точку $r = 0$. Таким образом, возможно иметь электрон, который строго является особой точкой, но тем не менее имеет конечные заряд и массу.

Решение для поля тяготения незаряженной частицы в этом

*) Обращаем внимание читателя на то, что в п. 80 при объяснении пондеромоторной силы за основу берется несколько иное соотношение между m и a [см. (80.6)]. (*Н.*)

отношении ведет себя совсем иначе. Мы имеем здесь особую точку при $r=2m$, так что поверхность частицы должна лежать вие шара с радиусом $2m$. Кроме того, эта особая точка вызваиа исчезновением γ, тогда как для случая электрона особой точкой будет γ, обращающаяся в бесконечность.

Приведенное доказательство того, что точечный электрон может иметь точно такие свойства, какие наблюдаются у электронов, является интересным замечанием в противовес распространенному утверждению, что радиус электрона известен с *достоверностью*. Все же, в общем, я считаю более вероятным, что электрон имеет некоторую структуру конечных размеров; наше решение в этом случае конечно имеет место лишь до тех пор, пока мы не проникаем внутрь электрона, так что вопрос об особой точке в начале координат тогда и не может возникнуть.

Если мы примем, что вне шара радиуса $r=a$ мы не встретим уже субстанции электрона, то полная энергия электромагнитного поля вне этого шара будет равна массе электрона, определяемой на опыте, и значение $\dfrac{2\pi\varepsilon^2}{m}$ для a как раз и было определено из этого условия. Поэтому a обычно принимается за радиус электрона*). Если мы допустим, что электромагнитное поле простирается и внутри этой области, то у нас получится избыток энергии, и, следовательно, необходимо будет допустить, что внутри шара имеется отрицательная энергия, т. е. что влияние особой точки эквивалентно введению такой отрицательной энергии. Допущение отрицательной энергии, конечно, нельзя слишком приветствовать с обычной точки зрения.

В п. 80 будут приведены другие доводы в пользу того, что заряд электрона распределен в объеме радиуса, в грубом приближении равного a. Я полагаю поэтому, что точечный электрон есть не более чем математический курьез и что решение (78.6) следует ограничить значениями r большими, чем a.

---

*) Еще чаще принимают, что радиус электрона равен $\frac{4}{3}a$. Это значение получается в том случае, если масса электрона определяется из рассмотрения количества движения, а не энергии, как было сделано выше. Простое исследование причины различия этих результатов можно найти у *E. C. Stoner'a*: Proc. Cambr. Phil. Soc., **21**, 552, **1923**.

79. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ДЕЙСТВИЕ.

Инвариантный интеграл

$$A=\frac{1}{4}\int F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d\tau \tag{79.1}$$

называется действием электромагнитного поля. Согласно (77 · 3) этот интеграл принимает в галилеевых координатах вид

$$\int dt\int\int\int\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-X^2-Y^2-Z^2)dx\,dy\,dz. \tag{79.2}$$

Рассматривая магнитную энергию как кинетическую (T), а электрическую, как потенциальную (V), получаем вместо этого величину

$$\int (T-V)\,dt,$$

т. е. интеграл по времени от лагранжевой функции *). Получение электромагнитных уравнений при помощи вариации этого интеграла проделано в классических работах Лармора **).

Мы покажем теперь, что два наиболее важные электромагнитные тензора, а именно: тензор энергии $E^{\mu\nu}$ и четырехвектор тока-заряда J^{μ} являются гамильтоновыми производными от электромагнитного действия, а именно:

$$\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}g_{\mu\nu}}\left(\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)=\frac{1}{2}\cdot E^{\mu\nu} \tag{79.31}$$

$$\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}\varkappa_{\mu}}\left(\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)=-J^{\mu} \tag{79.32}$$

Рассмотрим сперва небольшие вариации $\delta g_{\mu\nu}$, при постоянных $\varkappa_{\mu}$. Тогда $F_{\mu\nu}$ (но не $F^{\mu\nu}$) тоже будут постоянными. Мы получаем:

$$\begin{aligned}\delta\,(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\sqrt{-g})&=F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,\delta\,(\sqrt{-g})+F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta})=\\&=F^{\sigma\tau}F_{\sigma\tau}\sqrt{-g}\,\frac{1}{2}\,\frac{\delta g}{g}+F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,(g^{\mu\alpha}\,\delta g^{\nu\beta}+g^{\nu\beta}\,\delta g^{\mu\alpha})=\\&=\sqrt{-g}\left\{-\frac{1}{2}F^{\sigma\tau}F_{\sigma\tau}g_{\nu\beta}\,\delta g^{\nu\beta}+2F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}g^{\mu\alpha}\,\delta g^{\nu\beta}\right\},\end{aligned}$$

---

*) В динамике мы имеем два интеграла, которые имеют стационарные свойства при соответствующих условиях варьирования, а именно $\int T dt$ и $\int (T-V)\,dt$. Первый из них есть действие согласно первоначальному определению. В общей теории этим термином обозначаются безразлично оба интеграла, так как там нет ясного указания, какую именно энергию мы должны принять за потенциальную.

**) Aether and Matter, гл. VI.

что согласно (77.2) и (35.2) равно

$$-2E_{\nu\beta}\sqrt{-g}\,\delta g^{\nu\beta}=2E^{\nu\beta}\sqrt{-g}\,\delta g_{\nu\beta} \qquad \text{(по 35.2)}$$

Отсюда сразу получаем (79.31).

Рассмотрим теперь вариации $\delta\varkappa_\mu$ при постоянных $g_{\mu\nu}$. Получаем:

$$\delta\left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\sqrt{-g}\right)=2F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta F_{\mu\nu}=$$

$$=2F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\left(\frac{\partial(\delta\varkappa_\mu)}{\partial x_\nu}-\frac{\partial(\delta\varkappa_\nu)}{\partial x_\mu}\right)=4F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\frac{\partial(\delta\varkappa_\mu)}{\partial x_\nu},$$

благодаря антисимметрии $F^{\mu\nu}$, или, наконец,

$$=-4\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right)\delta\varkappa_\mu+4\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta\varkappa_\mu\right).$$

Второй член может быть здесь отброшен, так как он является полным дифференциалом и дает поверхностный интеграл по границе, где вариации должны исчезнуть. Следовательно, по (73.75)

$$\delta\int F^{\mu\nu}F_{\nu\mu}\sqrt{-g}\,d\tau=-4\int\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right)\delta\varkappa_\mu\,d\tau=$$

$$=-4\int J^\mu\delta\varkappa_\mu\sqrt{-g}\,d\tau.$$

Отсюда и получаем (79.32).

Для областей свободных от электронов имеем

$$T^{\mu\nu}-E^{\mu\nu}=0.$$

Отсюда в виду (60.43) и (79.31)

$$\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}\,g_{\mu\nu}}\left(G-4\pi F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)=0. \tag{79.4}$$

В чисто гравитационной механике, пренебрегая электромагнитными полями, мы получили, что действие G стационарно для областей, не содержащих материи. Теперь мы видим, что при включении электромагнитных полей стационарной величиной будет уже $G-4\pi F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Больше того, это выражение стационарно как для вариаций $\delta\varkappa_{\mu\nu}$, так и для вариаций $\delta g_{\mu\nu}$, так как при отсутствии электронов J^μ должно равняться нулю.

Таким образом, величина $G-4\pi F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ играет большую роль, с физической точки зрения, при разграничении материи (электронов) и электромагнитных полей. Но это значение не заметно в аналитическом выражении, так как комбинация двух инвариантов G и $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ различного типа, именно одного следа (Spur) и другого квадрата длины представляется совершенно лишенной смысла. Мы можем рассматривать данную форму выражения лишь как переходную ступень к более простой. Впоследствии мы увидим, что $G-4\pi F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, может быть, и не является точным выражением величины, обладающей важным физическим значением; эта форма может явиться только приближением к некоторому более простому аналитическому выражению, в котором гравитационные и элетромагнитные переменные находятся в более разумной комбинации.

В то время как материальное действие и действие гравитационное по существу являются лишь двумя разными проявлениями одной и той же вещи, электромагнитное действие стоит совершенно в стороне. Не существует никакого гравитационного действия, связанного с электромагнитным полем, так как E тождественно равно нулю. Таким образом, всякое материальное или гравитационное действие просто складывается с действием электромагнитным, если только можно пользоваться термином «сложение», когда речь идет о величинах, которые представляются нам столь различными.

80. ОБЪЯСНЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИЛЫ.

Почему движется заряженная частица, помещенная в электромагнитное поле? Мы могли бы попытаться ответить, что объяснение очевидно: имеется электрическая сила, которая, так сказать, уже поджидает частицу, а природа силы и заключается как раз в том, чтобы заставлять тела двигаться. Но этот ответ, по существу, есть игра словами. Электрическая сила не есть сила в механическом смысле слова, она не имеет ничего общего с толканием или тягой. Электрическая сила описывает некоторое мировое соотношение, существенно отличное от тех, которые описываются механической силой или напряжениями; рассуждения п. 76 опирались лишь на эмпирические закономерности без теоретического обсуждения последних.

Если мы хотим получить представление о состоянии эфира с точки зрения механических сил, мы должны пользоваться напряжениями (77.41) и (77.42). В самом деле, свойство «толкать и тянуть» описывается тензором электромагнитной энергии $E_{\mu\nu}$, а не электромагнитной силой $F_{\mu\nu}$. Наша задача — объяснить, почему в достаточной мере произвольная комбинация электромагнитных переменных $F_{\mu\nu}$ может обладать свойствами механических напряжений.

Для того чтобы свести задачу к простейшему виду, рассмотрим изолированный электрон. В электромагнитном поле его мировая линия не совпадает с геодезической, но отклоняется от нее согласно законам, установленным экспериментально. Следует обратить внимание на то, что поведение отдельного электрона было непосредственно определено на опыте; это один из немногих случаев, когда законы микрокосмоса были найдены прямым путем, а не выведены гипотетически из макроскопических экспериментов. Мы хотим понять теперь, к выполнению какой цели стремится электрон, отклоняясь от геодезической линии, — понять какое условие его существования окажется выполнененным при этом и сделает возможной четырехмерную структуру ускоренного электрона, в то время как аналогичная структура вдоль геодезической линии является невозможной.

Нам требуется объяснить следующий закон:

$$-\rho_0^*\left\{\frac{d^2x_\mu}{ds^2}+\{\alpha\beta,\mu\}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}\right\}=h^{\mu]}=F^{\mu}_{\nu}J^{\nu}. \qquad (80.1)$$

Это тензорное уравнение соответствует элементарному электростатическому закону $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=Xe$ и дает его естественное обобщение. При этом ρ_0^* обозначает инвариантную плотность массы.

Пусть A^μ есть вектор скорости электрона $\left(A^\mu=\dfrac{dx_\mu}{ds}\right)$ и ρ_0 — собственная плотность заряда, тогда по (73.82) имеем:

$$J^\mu=\rho_0 A^\mu \qquad (80.21)$$

и далее

$$\frac{d^2x_\mu}{ds^2}+\{\alpha\beta,\mu\}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}=\frac{dx}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{dx_\mu}{ds}+\{\alpha\nu,\mu\}\frac{dx_\alpha}{ds}\right)=A^\nu(A^\mu)_\nu, \qquad (80.22)$$

как и при выводе (33.4).

Что касается опытной проверки (80.1), то отметим прежде всего, что X или $F_{\mu\nu}$ относятся к приложенному внешнему полю, при этом возможное вообще изменение поля, происходящее от самого ускоряющего электрона, во внимание не принято.

Чтобы явно подчеркнуть это последнее обстоятельство, обозначим внешнее поле через $F'_{\mu\nu}$. Тогда уравнение, которое мы хотим объяснить, принимает вид:

$$\rho_0^* A' (A^\mu)_\nu = -F'^\mu_\nu (\rho_0 A^\nu),$$

или, после опускания значка μ,

$$mA^\nu A_{\mu\nu} = -F'_{\mu\nu} eA^\nu \tag{80.3}$$

Мы заменили здесь *плотности* массы и заряда ρ_0^*, и ρ_0 соответствующими *количествами* m, e.

Рассмотрим теперь поле вокруг электрона, вызываемое им самим. Оно определяется согласно (74.41) уравнением

$$\Box F_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} - J_{\nu\mu} - G^\varepsilon_\mu F_{\varepsilon\nu} + G^\varepsilon_\nu F_{\varepsilon\mu} + 2B_{\mu\nu\alpha\varepsilon} F^{\varepsilon\alpha}.$$

Рассуждения п. 78 показывают, что мы можем пренебречь полем тяготения, вызываемым электроном или внешним полем. Тогда приближенно получаем:

$$\Box F_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} - J_{\nu\mu}.$$

Как и в случае (74.72) решение будет иметь вид:

$$F_{\mu\nu} = \int \frac{de(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu})}{4\pi\beta r} = \frac{1}{4\pi\beta}(A^{\mu\nu} - A^{\nu\mu}) \int \frac{de}{r}, \tag{80.4}$$

если все части электрона имеют одну и ту же скорость A^μ. Этот результат получен пока что для галилеевых координат, но он представляет тензорное уравнение, имеющее место во всех координатных системах, если только $\int \frac{de}{\beta r}$ рассматривается как инвариант и вычисляется в собственной мере; мы будем подсчитывать последнюю величину в собственной мере, и, следовательно, опустим множитель β.

Предположим теперь, что электрон движется таким образом, что его собственное поле в объеме, занимаемом самим электроном, в среднем как раз уравновешивает приложенное внешнее поле $F'_{\mu\nu}$. Выражение для $F_{\mu\nu}$, усредненное для всех элементов заряда, составляющих электрон, будет определяться из формулы:

$$eF_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) \int\int \frac{de_1 de_2}{r_{12}} = \frac{1}{4\pi}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) \frac{e^2}{a},$$

где $\frac{1}{a}$ — среднее значение $\frac{1}{r_{12}}$ для каждой пары точек в электроне. При усреднении мы можем оставить неопределенными точные веса, с которыми нужно брать эти точки, отметив просто, что a есть длина, сравнимая с радиусом той сферы, внутри которой распределен заряд (или его большая часть).

Если это значение $F_{\mu\nu}$ должно быть равно и противоположно $F'_{\mu\nu}$, то мы получаем:

$$-eA^{\nu}F'_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}A^{\nu}\left(A_{\mu\nu}-A_{\nu\mu}\right)\frac{e^2}{a}=A^{\nu}A_{\mu\nu}\frac{e^2}{4\pi a}, \tag{80.5}$$

так как

$$A^{\nu}A_{\nu\mu}=A_{\nu}(A^{\nu})_{\mu}=\frac{1}{2}\left(A_{\nu}A^{\nu}\right)_{\mu}=\frac{1}{2}(1)_{\mu}=0,$$

так как квадрат длины вектора скорости обязательно равен единице.

Результат (80.5) совпадает с (80.3), если массу электрона положить равной

$$m=\frac{e}{4\pi a}. \tag{80.6}$$

Наблюдаемый на опыте закон движения электрона соответствует, таким образом, условию, что действующее на электрон результирующее электромагнитное поле равно нулю. Мы не должны поэтому представлять себе, что результирующее электромагнитное поле имеет что-нибудь общее с тянущим усилием, отклоняющим электрон. Оно, вообще говоря, никогда не имеет возможности как-либо воздействовать на электрон, потому что при существовании результирующего поля электрон не мог бы вовсе существовать; он являлся бы невозможной структурой.

Интерес этого рассуждения заключается в том, что оно привело нас к выяснению одного из условий возможности существования электрона, оказавшегося весьма простым, а именно, что в среднем результирующая электромагнитная сила внутри электрона должна равняться нулю *). Это условие очевидно выполняется

---

*) Точные границы области, где результирующая сила равна нулю неизвестны. Существенно здесь то, что на некоторой критической поверхности (или внутри некоторого объема) поле должно быть достаточно симметричным, чтобы не иметь результирующей.

для симметричного покоящегося электрона в отсутствии силового поля. То же условие в общем виде приводит нас к уравнению движения (80.1).

Для возможности существования электрона необходимы немаксвелловы напряжения, хотя мы до сих пор еще не в состоянии указать законов, которым они подчиняются. Существование электронов противоречит законам электромагнитного поля, с которыми мы сейчас оперируем, так что с настоящей точки зрения покоящийся электрон, не находящийся под действием внешнего поля, представляется *чудом*. Наши последние вычисления показывают, что электрон, испытывающий в поле внешних сил ускорение, задаваемое (80.1), является *точно таким же чудом*. Это все, что дает наше объяснение.

Электромагнитное поле внутри электрона в среднем уничтожится, если оно достаточно симметрично. Здесь как будто имеется аналогия с условием, выведенным нами в п. 56, для возможности существования материальной частицы, а именно, что ее поле тяготения должно обладать свойствами симметрии. Кроме того, мы имеем аналогию и в условиях, определяющих ускорение в обоих случаях. Незаряженное тело движется таким образом, чтобы относительно него результирующая сила тяготения была равна нулю; точно так же электрон движется так, что результирующая электромагнитная сила относительно него исчезает.

Мы привели определенное основание для симметрии гравитационного поля частицы именно то, что в практических измерениях сама частица является мерилом симметрии. Мне кажется, что подобное объяснение существует и для электрической симметрии электрона, но оно до сих пор еще не дано. Последующие рассуждения, которые рекомендуется сравнить с пп. 64, 66, покажут, где лежат трудности.

Величиной, аналогичной интервалу, здесь будет поток $F_{\mu\nu}\, dS^{\mu\nu}$. Так же, как в механике, основным инвариантом является интервал между двумя соседними точками, в электромагнетизме основным инвариантом будет поток сквозь небольшую поверхность. Две электрические системы будут эквивалентны в смысле наблюдаемых эффектов тогда и только тогда, если соответствующие потоки равны. Равенство потоков может, таким образом, быть установлено абсолютно; различные потоки могут быть измерены (согласно какой-либо принятой условной системе единиц) приборами, состоящими из электрических материалов. От потока мы можем математически перейти к четырехвектору заряда-тока, а последний позволит нам установить второй контакт между математической теорией и действительным миром, именно путем отождествления электричества. Чтобы замкнуть круг, мы должны были бы показать, что при помощи определенного таким путем электричества можно построить приборы, которыми можно измерить исходный поток, но в этом месте аналогия отказывается служить, по крайней мере, в настоящее время. Измерение электромагнитных потоков электричеством требует введения известной прерывности, получаемой, однако, на практике только при помощи сложных приспособлений, как-то: изоляции, постоянной контактной разности потенциалов и т. д. Повидимому мы еще не имеем возможности столь же непосредственно связать теорию электрических измерений с наличием прерывности, присущей электрическому заряду, как это имеет место при геометрических измерениях, зависящих от прерывности материи. Поэтому нам не хватает еще последнего звена нашей логической цепи, и, очевидно не представляется возможным заключить, что прерывная единица электрического заряда должна стать таким же стандартом для установления электрической симметрии, каким для геометрической симметрии является (ориентированная различным образом) прерывная единица материи.

Согласно (80.6) масса электрона равна $\frac{e^2}{4\pi a}$, где a — длина порядка радиуса электрона. Это находится в согласии с обычными представлениями о размерах электрона и противоречит понятию о точечном электроне, которое мы рассматривали в п. 78, как одну из возможностей. Входящая сюда масса является однако константой чисто электромагнитного происхождения и входит только в уравнения, содержащие электромагнитные силы. Когда правая часть уравнения (80.1) исчезает, электрон описывает геодезическую линию совершенно так же, как и незаряженная частица; величина m в этом случае есть просто постоянный множитель, на который можно сократить уравнение. Нам остается поэтому рассмотреть связь между массой электромагнитной

$$m_e = \frac{e^2}{4\pi a} \qquad (80.71)$$

и тяжелой m_g (т. е. возбуждающей тяготение) массой, заданной формулой

$$m_g ds = \frac{1}{8\pi}\int G\sqrt{-g}\,d\tau. \tag{80.72}$$

Считая все отрицательные электроны одинаковыми *), мы получим, что отношение $\frac{m_g}{m_e}$ должно быть постоянным для электрона; аналогично оно должно быть постоянным и для положительного электрона. Но положительные и отрицательные электроны имеют существенно разную структуру, и сразу не очевидно, что $\frac{m_g}{m_e}$ для них одинаково. Действительно, нет экспериментального доказательства, что это отношение одинаково для обоих родов электричества. Всякое поле тяготения, которое доступно наблюдению, практически вызывается равным числом положительных и отрицательных электронов, так что мы не имеем никакой возможности различить вносимые обоими сортами частиц доли. Но если допустить, что принцип сохранения энергии применим даже тогда, когда положительные и отрицательные электроны разведены на очень далекие расстояния (еще не осуществленные экспериментально), то можно доказать, что $\frac{m_g}{m_e}$ одинаково для обоих родов электронов.

Из уравнения (80.1) мы можем вывести величину электромагнитного тензора, как и в пп. 76, 77; однако, в этом случае $E^{\mu\nu}$ не будет выражено в тех же единицах, что и полный тензор энергии $G_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu G$, так как масса, фигурирующая в (80.1), есть m_e, а не m_g. Следовательно, закон (77.6) для пустого пространства должен быть переписан в виде

$$G_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu G = -8\pi\frac{m}{m_e}\left(-F^{\nu\alpha}F_{\mu\alpha} + \frac{1}{4} g_\mu^\nu F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right). \tag{80.8}$$

Мы можем проверить это уравнение, во-первых, для движения положительного электрона и, во-вторых, для движения электрона

*) Положительным электроном здесь назван протон (не позитрон!), отрицательным же обычный электрон отрицательного заряда. (*Р.*)

отрицательного. Очевидно, в обоих случаях мы получили бы несовместные уравнения, если только $\frac{m_g}{m_e}$ для положительного электрона не имело бы того же значения, что и для отрицательного. Если это условие равенства не будет выполнено, мы сможем нарушить законы сохранения энергии и количества движения, так как возможно сначала перевести кинетическую энергию отрицательного электрона в свободную электромагнитную энергию, а эту последнюю затем превратить в кинетическую энергию положительного электрона.

Следовательно, $\frac{m_g}{m_e}$ есть мировая постоянная, и ее можно положить равной единице в уравнении (80.1), если мы надлежащим образом выберем единицы для $F^{\mu\nu}$.

81. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ОБЪЕМ.

Если $a_{\mu\nu}$ есть некоторый тензор, то его детерминант $|a_{\mu\nu}|$ можно преобразовать по закону (48,8)

$$|a_{\mu\nu}| = J^2 |a'_{\mu\nu}|,$$

откуда следует, как и в (49,3), что

$$\int \sqrt{|a_{\mu\nu}|}\, d\tau \tag{81.1}$$

будет инвариантом для любой четырехмерной области. Мы уже разбирали случай $a_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$, и естественно рассмотреть теперь случай $a_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$. Так как тензор $g_{\mu\nu}$ определяет нам метрику пространства-времени, а соответствующий инвариант давал метрический объем (естественный объем) области, то представляется естественным назвать соответствующий инвариант V_e *электромагнитным объемом области*

$$V_e = \int \sqrt{|F_{\mu\nu}|}\, d\tau. \tag{81.2}$$

Аналогия с метрическим объемом будет чисто-аналитическая.

Так как $|F_{\mu\nu}|$ есть симметричный детерминат четного порядка, то он является полным квадратом, и подинтегральное выражение в (81.2) есть рациональная функция от $F_{\mu\nu}$. Инвариант V_e приводится сразу к виду

$$V_e = \int (F_{23} F_{14} + F_{31} F_{24} + F_{12} F_{34})\, d\tau,$$

или в галилеевых координатах

$$V_e = \int (\alpha X + \beta Y + \gamma Z)\, d\tau. \tag{81.32}$$

Любопытно отметить, что скалярное произведение электрической и магнитной сил играет столь малую роль в классической теории, тогда как выражение (81.32), казалось бы, является основным инвариантом поля. Кроме факта его исчезновения в случае распространения электромагнитных волн в пространстве, свободном от связанного электрического поля (т. е. на большом удалении от электронов), этот инвариант не имеет других особых свойств. Может быть при более детальном изучении строения электрона окажется, что он имеет большее значение.

Из (81.31) получаем:

$$V_e = \int \sum \left(\frac{\partial \varkappa_1}{\partial x} \frac{\partial \varkappa_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \varkappa_1}{\partial x_3} \frac{\partial \varkappa_2}{\partial x_4} \right) d\tau,$$

где суммирование распространено на все перестановки значков, что равняется

$$\int \sum \left\{ \frac{\partial}{\partial x_4} \left(\varkappa_1 \frac{\partial \varkappa_2}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\varkappa_1 \frac{\partial \varkappa_2}{\partial x_4} \right) \right\} d\tau.$$

Поэтому инвариант V_e сводится к поверхностному интегралу по краю области и исследовать его вариации по методу Гамильтона не имеет смысла. Электромагнитный объем области ведет себя аналогично потоку сквозь трехмерную границу этой области.

82. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ.

Для макроскопической трактовки нужно рассмотреть распределение и движение электронов в среднем; соответствующее непрерывное распределение средних значений будет задаваться двумя новыми величинами:

электрическим смещением P, Q, R и магнитной индукцией a, b, c,

добавляемыми к электрической силе X, Y, Z и магнитной силе

α, β, γ. Группируя эти величины крест-накрест, мы получим два основные электромагнитные тензора:

$$F_{\mu\nu} = \begin{matrix} 0 & -c & b & -X, \\ c & 0 & -a & -Y \\ -b & a & 0 & -Z \\ X & Y & Z & 0 \end{matrix} \qquad H^{\mu\nu} = \begin{matrix} 0 & -\gamma & \beta & P \\ \gamma & 0 & -\alpha & Q \\ -\beta & \alpha & 0 & R \\ -P & -Q & -R & 0 \end{matrix} \tag{82.1}$$

Теперь $H^{\mu\nu}$ играет ту же роль, что прежде играло $F^{\mu\nu}$, но оно уже не может быть получено из $F_{\mu\nu}$ простым поднятием значков. Соотношение между двумя тензорами дается уравнениями состояния вещества; в простейших случаях оно определяется двумя константами: диэлектрической постоянной $\varkappa$ и магнитной проницаемостью μ.

Уравнения (73.73) и (73.74) заменяются следующими обычными уравнениями классической теории:

$$\left.\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{\partial \varkappa_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \varkappa_\nu}{\partial x_\mu} \\ H^{\mu\nu}_{\nu} &= J^\mu \end{aligned}\right\} \tag{82.2}$$

Заметим, что $\dfrac{\partial H}{\partial y} - \dfrac{\partial G}{\partial z}$ теперь равно a, но не α. В простейшем случае уравнения состояния будут иметь вид:

$$(P,\ Q,\ R) = \varkappa\,(X,\ Y,\ Z); \qquad (a,\ b,\ c) = \mu\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma), \tag{82.3}$$

так что

$$H^{11},\ H^{12}, \ldots, H^{33} = \frac{1}{\mu}(F^{11}, F^{12}, \ldots, F^{33});\ H^{14},\ H^{24},\ H^{34} = \varkappa\,(F^{14},\ F^{24},\ F^{34}).$$

Эти упрощенные уравнения уже не будут тензорными уравнениями и будут иметь место только в той координатной системе, по отношению к которой материя покоится. Для общих координат уравнения состояния должны иметь вид:

$$H^{\mu\nu} = p^{\mu\alpha} p^{\nu\beta} F_{\alpha\beta},$$

где $p^{\mu\nu}$ — тензор.

Закон сохранения электрического заряда может быть выведен из уравнения $H^{\mu\nu}_{\nu} = J^\mu$ совершенно аналогично, как в (73.76).

Макроскопический метод вводится преимущественно ради практических целей, а не как расширение теории. Поэтому мы не будем развивать его здесь дальше. Для более подробного и общего рассмотрения макроскопических уравнений электромагнетизма в случае, когда макроскопические уравнения вещества не имеют изотропного характера, отошлем читателя к работе де Дондера *). Де Дондер вводит величины $(\overline{F}_{\mu\nu})$, которые являются чем-то средним между $F_{\mu\nu}$ и $H_{\mu\nu}$. Это имеет отношение к трудности, возникающей при введении плотности действия и тензора энергии на основании рассмотренных в этом параграфе понятий. Из наиболее естественной формы плотности действия $F_{\mu\nu}H^{\mu\nu}$ путем гамильтонового дифференцирования получается для тензора энергии, выражение:

$$-F_{\mu\alpha}H^{\nu\alpha}+\frac{1}{4}g_{\mu}^{\nu}F_{\alpha\beta}H^{\alpha\beta},$$

совершенно аналогичное (77.2). Расходимость этого тензора не дает однако ожидаемого выражения механической силы $F_{\mu\nu}H^{\nu\sigma}_{\sigma}$ или $F_{\mu\nu}J^{\mu}$. С другой стороны, если взять величины $(\overline{F}_{\mu\nu})$, то плотность действия принимает симметричный вид $\overline{F}_{\mu\nu}\overline{F}^{\mu\nu}$ и вывод выражения $\overline{F}_{\mu\nu}\overline{F}^{\nu\sigma}_{\sigma}$ для механической силы удается без всяких затруднений.

Макроскопически непрерывные величины, во всяком случае являются фикциями, и имеется известный произвол в выборе тех фиктивных величин, которые мы склонны рассматривать как обобщение величин, первоначально определенных для пустого пространства. Согласно первоначальному пониманию теории Максвелла электрическое смещение было величиной, существенно отличной от электрической силы, и поляризация среды выражалась только в изменении констант в уравнениях, связывавших обе величины. Согласно же новейшему пониманию обе величины, смещение и сила, по существу являются одним и тем же, и благодаря наличию поляризации среды численные значения обеих величин (в среднем) увеличиваются. Метод де Дондера соответствует последнему представлению и является, повидимому, лучшим приближением к процессам, действительно разыгрывающимся в микроскопических областях. Вместе с тем представляется желательным сохранить также введенные выше величины $F_{\mu\nu}$ и $H^{\mu\nu}$. Их теоретический интерес заключается прежде всего в том, что они подсказывают возможное обобщение теории Максвелла в напра-

*) *T. de Donder, C. R.* 9 июля 1923 г.: см. также La gravitique Einsteinienne.

влении введения при некоторых обстоятельствах, например внутри электрона, двух независимых электромагнитных тензоров (ковариантного и контравариантного). Это представление лежит в основе теории материи, развитой Г. Ми.

Добавим, наконец, несколько замечаний о связи выводов пп. 76, 77 с макроскопической теорией. Уравнение (76.2), из которого определяются механические действия электромагнитного поля, является существенно *макроскопическим* уравнением, в котором содержатся результаты экспериментов с материей в больших областях. Отсюда еще не следует, что они имеют место также для одного электрона; повидимому, они как раз и неприменимы в последнем случае.

Это ограничение сферы действия указанного уравнения несколько затемняется тем фактом, что эмпирически найденный закон движения отдельного электрона обладает сходством с (76.2), способным ввести в заблуждение. Но мы уже разъяснили в п. 80, что «действующая» при этом на электрон сила будет равна $F'^{\mu}_{\nu} J^{\nu}$, где F'^{μ}_{ν} есть внешнее приложенное поле, а не измененное присутствием ускоренного электрона «наличное» в действительности поле F^{μ}_{ν}. При макроскопическом непрерывном распределении четырехмерного вектора тока разница между F и F' не играет роли, если мы не рассматриваем поляризации; но при дискретном распределении электронов $F-F'$ будет того же порядка величины, что и F', и при том как раз в тех точках, которые нас интересуют, т. е. там, где $J^{\mu} \neq 0$. Согласно п. 80 условие для пустого пространства $F_{\mu\nu} F^{\mu\sigma}_{\sigma} = 0$ должно быть заменено требованием, чтобы интеграл от $F_{\mu\nu} F^{\mu\sigma}_{\sigma}$, взятый по всему электрону, равнялся нулю, или каким-либо иным эквивалентным этому по существу условием. Наличие интегрального уравнения в законах физического микрокосма согласуется с современными представлениями.

Уравнение (76.2) привело нас к выражению E^{ν}_{μ} для электромагнитного тензора энергии. Поэтому этот тензор также относится только к макроскопическому электромагнитному полю и, следовательно, не имеет ничего общего с силами большой величины внутри атомов и между ними. Затем мы видели, что весь тензор энергии, для которого тождественно выполняется закон сохранения, составлен из двух частей M^{ν}_{μ} и E^{ν}_{μ}, которые можно рассматривать как доли от непрерывно распределенной материи и непрерывного электромагнитного поля. Вопрос о том, можем ли мы обойтись без M_{μ}^{ν}, при макроскопической трактовке не имеет смысла, так как в этом случае вообще нельзя рассматривать полей отдельных электронов.

При переходе к «микроскопическому» рассмотрению мы исходим из предположения, что состояние мира в каждой точке может быть описано при помощи величин $g_{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$. В этом случае мы также формально образуем общие выражения $T_{\mu\nu}$ и $E_{\mu\nu}$ на основании (54.3) и (77.2). Выражение $T_{\mu\nu}$, очевидно, сохраняет свое значение, так как оно тождественно удовлетворяет закону сохранения; но выражение $E_{\mu\nu}$, с другой стороны, представляет интерес лишь постольку, поскольку его можно рассматривать как аналог первоначальному электромагнитному тензору энергии, существующему вне материи. Тензоры $T_{\mu\nu}$ и $E_{\mu\nu}$ вне материи совпадают, внутри же материи они не могут равняться друг другу, так как E тождественно равно нулю. Разность между ними обозначается, как не максвеллов тензор энергии $M_{\mu\nu}$. Мы видим, что разделение тензора $T_{\mu\nu}$ на $M_{\mu\nu}+E_{\mu\nu}$ будет различным, смотря по тому, рассматриваем ли мы проблему «микроскопически» или «макроскопически», так как в последнем случае в тензоре $M_{\mu\nu}$ содержится также энергия сильных максвелловых полей в непосредственной близости к электронам.

Глава VII.

ГЕОМЕТРИЯ МИРА.

I. ТЕОРИЯ ВЕЙЛЯ.

83. ЕСТЕСТВЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ГЕОМЕТРИЯ МИРА

Метод графических изображений употребляется обычно при изучении всех физических величин. Чаще всего им пользуются, если желательно сопоставить ряд данных таким образом, чтобы их можно было охватить одним взглядом, что однако не является единственной целью. Мы ведь не всегда чертим кривые на листе бумаги; этот способ можно использовать также и тогда, когда речь идет о изображении в мысленном математическом пространстве какого угодно числа измерений и, может быть, даже с неэвклидовой геометрией. Значительное преимущество этого метода заключается в том, что, когда графическое представление выполнено, сразу становится возможным применение всей обширной геометрической номенклатуры—прямая линия, градиент, кривизна и т. д.,— а наличие общепонятной номенклатуры чрезвычайно полезно при изучении абстрактных вещей.

Поэтому представляется рациональным добиваться ясности, осуществляя графическое изображение всех физических величин, с которыми мы имеем дело. Таким образом геометризуется физика. Однако, графическое изображение не предполагает никаких гипотез об истинной природе изображаемых величин. Поэтому возможность представить весь мир физики в едином геометрическом изображении является доказательством не каких-либо особых свойств мира, но, самое большее, доказательством изобретательности математика.

Для графического изображения таких физических величин, как электрическая сила, потенциал, температура и т. д., особого правила не существует; мы можем, например, изображать изотермы прямыми линиями, эллипсами или сферами, сообразно требованиям наглядности. Но имеются определенные физические величины (т. е. результаты манипуляций и вычислений), которые обладают естественным графическим толкованием; мы мыслим о них обычно геометрически и почти не сознаем, что в этом представлении есть нечто условное. Например, мы инстинктивно воспринимаем измеренные нами расстояния и направления графически, и пространство, в котором мы их изображаем, является для нас *действительным пространством*. Однако, эти величины по своей внутренней природе не отличаются от других физических величин, которые мы, вообще говоря, не изображаем геометрически. Если бы мы исключили элемент человеческого (не следует ли лучше сказать— элемент дочеловеческого?) в познании природы, то способ графического изображения результатов измерений или оценок расстояния показался бы столь же искусственным, как и графическое изображение показаний термометра. Мы ни в коем случае не можем утверждать, что какой-либо сверхчеловеческий интеллект воспринимал бы расстояние так же, как и мы; может быть, он и допустил бы, что наш метод располагать содержание зрительного впечатления в трехмерном пространстве остроумен и полезен для научных целей, но он, несомненно, не считал бы это пространство более *реальным*, чем пространство-pv индикаторной диаграммы.

Во всех наших предыдущих исследованиях мы изучали это неиспорченное софистикой графическое представление определенных физических величин под именем *естественной геометрии*. Введением четвертого измерения мы немного расширили круг идей, чтобы включить также и время, и мы нашли затем, что в этой естественной геометрии находят себе полное представление не только величины, обычно считающиеся геометрическими, но также и механические величины, такие, как сила, плотность, энергия. Так например, мы видели (65.72), что тензор энергии составляется из выражений для гауссовой кривизны сечений действительного пространства-времени. Однако, электромагнитные величины, введенные в предшествующей главе, не были еще представлены графически; относительно вектора $\varkappa_\mu$ мы предположили только, что он существует в действительном пространстве, но не говорили, что он измеряет какие-либо свойства этого действительного пространства. Таким образом, до настоящего момента наша геометризация физики являлась неполной.

В дальнейшем открываются два пути для обобщения наших геометрических воззрений. Во-первых, можно предположить, что риманнова геометрия, приписанная нами действительному пространству, применима к нему не вполне точно, и что истинной является геометрия более общего типа, в которой вектор $\varkappa_\mu$ играет фундаментальную роль, так что его можно воспринимать геометрически, как одну из основных характеристик действительного пространства. По причинам, которые выяснятся дальше в этой главе, я не думаю, что это было бы правильным решением. Другая возможность заключается в том, чтобы придать всем нашим переменным, включая и $\varkappa_\mu$, соответствующий геометрический смысл в некотором новом мысленном пространстве, которое не является действительным пространством. При достаточном остроумии последнее должно оказаться успешным, так как ведь с этим не связаны никакие гипотезы о действительной природе изображаемых величин. Такая обобщенная графическая схема может быть найдена либо полезной, либо бесполезной для развития наших знаний; во всяком случае, мы попытаемся ее осуществить в надежде, что она сделает более понятной связь между электромагнитными и гравитационными явлениями. Я думаю, что эта надежда нас не обманет.

В главе IX книги «Пространство, время и тяготение» не-риманнова геометрия Вейля все время рассматривалась как улучшенная и теперь уж точная естественная геометрия. В этом заключалась также первоначальная цель теории Вейля *).

Поэтому сначала мы будем ее развивать именно в этом понимании. Но в конце концов мы, как и сам Вейль, придем ко второй возможности и увидим, что его не риманнову геометрию не следует применять к *действительному* пространству-времени. Она скорее относится к графическому представлению того комплекса

*) Первая работа Вейля (Berliner Sitzungsberichte, 30 мая 1918 г.) в этом отношении довольно неясна. Она содержит математическое изложение улучшенной римановой геометрии, «физическое применение очевидно». Однако дальше в явной форме утверждается, что отсутствие электромагнитных полей есть необходимое условие применимости теории Эйнштейна, мнение, которого, как я думаю, сейчас уже нельзя придерживаться.

соотношений, который лежит в основе всей физики, и в котором проявляется взаимная связь между электромагнитными и метрическими переменными. Став на эту точку зрения, мы естественно переходим к более общей геометрии комплекса соотношений, изложенной во второй части этой главы.

При этом необходимо различать между *естественной геометрией*, являющейся единственной истинной геометрией в том смысле, какой этому слову придает физик, и *геометрией мира*, т. е. чистой геометрией, относящейся к мысленному графическому представлению всех физических величин. Может быть, мы могли бы пойти еще дальше и утверждать, что мировая геометрия стремится дать сжатое описание фундаментального комплекса соотношений, лежащего в основе различных проявлений пространства, времени, материи и электромагнетизма. Однако, такое утверждение оказывается слишком расплывчатым, когда мы пытаемся начать его анализировать. Так как графическое представление во всяком случае условно, то мы не можем сказать, что какой-либо один метод правильнее другого. Поэтому две геометрии, изложенные в первой и второй части этой главы, нельзя считать противоречащими друг другу. Я ввожу вторую геометрию исключительно по той причине, что считаю ее более наглядной и более широкой, но ни в коем случае не потому, что считаю изложение с помощью первой геометрии недопустимым.

В последующем обзоре теории Вейля я не придерживаюсь данного ее автором порядка изложения, а исхожу из принятой здесь точки зрения, несколько (хотя, надеюсь, и несущественно) отличающийся от первоначальной. Может быть, и не совсем честно излагать теорию с другого — по крайней мере, с точки зрения ее автора — конца; но я уверен, что мое изложение не уменьшит блеска этой работы, представляющей собой, несомненно, наибольшее достижение теории относительности со времени работ Эйнштейна.

84. НЕИНТЕГРИРУЕМАЯ ДЛИНА.

Мы нашли в п. 33, что изменение δA_μ вектора при параллельном переносе вдоль малого замкнутого контура равно

$$\delta A_\mu = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu})dS^{\nu\sigma} = \frac{1}{2}B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}A_\varepsilon dS^{\nu\sigma} = \frac{1}{2}B_{\mu\nu\sigma\varepsilon}A^{\varepsilon}dS^{\nu\sigma}. \quad (84.1)$$

Отсюда следует, что

$$A^{\mu}\,\delta A_{\mu}=\frac{1}{2}B_{\mu\nu\sigma\varepsilon}A^{\mu}A^{\varepsilon}dS^{\nu\sigma}=0,$$

так как $B_{\mu\nu\sigma\varepsilon}$ антисимметрично относительно μ и ε.

Следовательно, на основании (26.4) δA_{μ} перпендикулярно к A_{μ}, и длина вектора A_{μ} не изменяется при его параллельном переносе вдоль контура; изменяется же только направление.

На примере корабля, плывущего по искривленной поверхности океана (п. 33), мы пытались наглядно объяснить, как в искривленном мире может получиться это изменение направления. Убедившись в том, что нет ничего логически невозможного в изменении направления, мы теперь вполне можем допустить непротиворечивость предположения о том, что и длина тоже может меняться; правда, мы только-что привели доказательство, что длина не меняется, но это означает лишь, что изменение длины исключено какими-то условиями, которые мы, может быть по недосмотру, ввели в постулаты римановой геометрии. В самом деле, мы можем сконструировать геометрию, в которой имеет место изменение длины, не впадая при этом в противоречие.

В этой более общей геометрии мы имеем вместо (84.1)

$$\delta A_{\mu}=\frac{1}{2}{}^{*}B_{\mu\nu\sigma\varepsilon}A^{\varepsilon}dS^{\nu\sigma}, \tag{84.21}$$

где ${}^{*}B_{\mu\nu\sigma\varepsilon}$ есть более общий тензор, уже *не* антисимметричный относительно μ и ε. Он будет, однако, антисимметричен относительно ν и σ, так как симметричная часть его не имеет значения в (84.21) в силу антисимметрии $dS^{\nu\sigma}$.

Полагая

$$R_{\mu\nu\sigma\varepsilon}=\frac{1}{2}\left({}^{*}B_{\mu\nu\sigma\varepsilon}-{}^{*}B_{\varepsilon\nu\sigma\mu}\right),$$

$$F_{\mu\nu\sigma\varepsilon}=\frac{1}{2}\left({}^{*}B_{\mu\nu\sigma\varepsilon}+{}^{*}B_{\varepsilon\nu\sigma\mu}\right),$$

где, следовательно, R антисимметрично, а F симметрично относительно μ и ε, мы получим

$$\delta A_{\mu}=\frac{1}{2}\left(R_{\mu\nu\sigma\varepsilon}+F_{\mu\nu\sigma\varepsilon}\right)A^{\varepsilon}dS^{\nu\sigma}. \tag{84.22}$$

Тогда изменение длины l вектора A_μ определяется из формулы

$$\delta(l^2) = 2A^\mu \delta A_\mu = F_{\mu\nu\sigma\varepsilon} A^\mu A^\varepsilon dS^{\nu\sigma} \tag{84.3}$$

и, вообще говоря, не равно нулю.

Чтобы получить геометрию Вейля, мы должны наложить на $F_{\mu\nu\sigma\varepsilon}$ два ограничения:

(a) $F_{\mu\nu\sigma\varepsilon}$ имеет вид $g_{\mu\varepsilon}F_{\nu\sigma}$,

(b) $F_{\nu\sigma}$ есть вихрь некоторого вектора.

Второе ограничение логически необходимо. Мы выразили изменение вектора вдоль контура формулой, содержащей площадь, ограниченную контуром. Мы можем однако выбирать различные поверхности, ограниченные одним и тем же контуром, и всегда должны получить одну и ту же величину δA_μ. Легко убедиться на основании теоремы Стокса, что это может иметь место только тогда, когда множитель при $dS^{\nu\sigma}$ есть вихрь некоторого вектора.

Первое же ограничение не является безусловно необходимым, и во второй части этой главы мы его отбросим. Чтобы выяснить его смысл, введем условие (a) в (84.3), тогда получим

$$\delta(l^2) = F_{\nu\sigma} g_{\mu\varepsilon} A^\mu A^\varepsilon dS^{\nu\sigma} = F_{\nu\sigma} l^2 dS^{\nu\sigma},$$

так что

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{1}{2} F_{\nu\sigma} dS^{\nu\sigma}. \tag{84.4}$$

Следовательно, изменение длины пропорционально начальной длине и не зависит от направления вектора, в то время как в более общей формуле (84.3) изменение длины зависило также и от направления.

Одним из результатов этого ограничения является то, что нулевая длина остается нулевой и после параллельного переноса вдоль замкнутого контура. Таким образом, если мы наблюдали нулевую длину в какой-либо точке мира, мы можем совершенно однозначно переносить ее в любую другую точку и опознать ее там тоже как нулевую длину. Конечные же длины нельзя переносить однозначно, для них нужно всегда указывать путь, вдоль которого происходил параллельный перенос.

Нулевая длина имеет большое значение в теории оптических явлений, так как в геометрии Эйнштейна всякий элемент пути светового импульса есть вектор, длина которого равна нулю, так что если бы не существовало вполне определенной нулевой длины, световой импульс не знал бы, какой путь ему избрать. Теория Вейля не пытается в этом отношении видоизменить теорию Эйнштейна, требующую существования абсолютной нулевой длины, и именно поэтому накладывает ограничение (а) на тензор $F_{\mu\nu\sigma\epsilon}$.

Другой результат этого ограничения заключается в том, что можно однозначно сравнивать между собой длины, относящиеся к одной точке, но различающиеся направлениями. Неоднозначность появляется при сравнении длин, относящихся к различным точкам.

85. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КАЛИБРОВКИ.

На основании предшествующего параграфа сравнение длин, относящихся к различным точкам, невозможно (за исключением нулевой длины), так как результат сравнения будет зависеть от пути, по которому эти длины приведены к совпадению.

В римановой геометрии мы считали, что возможность сравнения длин не подлежит сомнению. Каждому интервалу в каждой точке приписывалось определенное значение, именно: результат сравнения со стандартным масштабом, и мы ничуть не беспокоились о том, каким образом могло бы быть выполнено это сравнение для двух, находящихся на некотором расстоянии друг от друга интервалов. Мы должны теперь построить геометрию континуума так, чтобы эта трудность нашла себе явное выражение.

Предположим, что принята некоторая определенная, хотя и произвольная *система масштабов**); иначе говоря, пусть в каждой точке пространства-времени установлена некоторая стандартная длина интервала, и каждый интервал измеряется посредством стандарта, находящегося в той же точке. Это позволяет избежать неоднозначности, связанной с перенесением интервалов от одной точки к другой для сравнения с единственным стандартом.

Рассмотрим некоторый отрезок в точке P (с координатами x_μ) и перенесем его посредством параллельного переноса в бесконечно близкую точку P (с координатами $x_\mu + dx_\mu$). Пусть его начальная длина, измеренная посредством масштаба, относящегося к точке P,

*) Или «система калибровки», как мы ее будем еще называть.

есть l, а конечная длина, измеренная масштабом P, есть $l+dl$. Мы можем выразить изменение длины формулой

$$d(\lg l) = \varkappa_\mu dx_\mu, \tag{85.1}$$

где $\varkappa_\mu$ означает некоторое векторное поле. Если мы изменим систему масштабов, то мы, конечно, получим другие значения l, а следовательно и $\varkappa_\mu$.

Для малых расстояний от P до P' можно и не указывать пути перемещения. Действительно, согласно (84.4) разность результатов, соответствующих различным путям, пропорциональна площади, ограниченной этими путями, и поэтому есть величина второго порядка относительно dx_μ. Поэтому при бесконечно малом PP' неоднозначность становится неизмеримо малой по сравнению с выражением первого порядка.

Нашу систему отсчета возможно теперь изменять в двух направлениях — изменением координат и изменением масштабов. Поведение величин $g_{\mu\nu}$ и $\varkappa_\mu$ при преобразованиях координат было подробно изучено в п. 23. Нам остается рассмотреть вопрос о том, как они будут преобразовываться при изменении масштабов.

Мы получим новую систему масштабов, если в каждой точке изменим стандартную длину в отношении λ, где λ — произвольная функция координат. Если стандартная длина уменьшается в отношении λ, то длина смещения увеличивается в том же отношении. Мы получим, отмечая штрихом величины, относящиеся к новой системе,

$$ds' = \lambda\, ds. \tag{85.2}$$

Составляющие dx_μ смещения не изменяются, так как мы не изменяли системы координат, поэтому

$$dx'_\mu = dx_\mu. \tag{85.3}$$

Следовательно,

$$g'_{\mu\nu} dx'_\mu dx'_\nu = ds'^2 = \lambda^2 ds^2 = \lambda^2 g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = \lambda^2 g_{\mu\nu} dx'_\mu dx'_\nu,$$

так что

$$g'_{\mu\nu} = \lambda^2 g_{\mu\nu}. \tag{85.41}$$

Отсюда сразу следует

$$g' = \lambda^8 g. \tag{85.42}$$

$$g'^{\mu\nu} = \lambda^{-2} g^{\mu\nu}. \tag{85.43}$$

$$\sqrt{-g'}\, d\tau' = \lambda^4 \sqrt{-g}\, d\tau. \tag{85.44}$$

Далее, на основании (85.1) имеем

$$\varkappa'_\mu dx_\mu = d\lg l' = d\lg(\lambda\, l) = d\lg l + d\lg\lambda =$$
$$= \varkappa_\mu dx_\mu + \frac{\partial \lg\lambda}{\partial x_\mu} dx_\mu;$$

откуда, полагая

$$\varphi = \lg\lambda, \tag{85.51}$$

получим

$$\varkappa'_\mu = \varkappa_\mu + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}. \tag{85.52}$$

Вихрь вектора $\varkappa_\mu$ обладает важным свойством; именно, если положить

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial\varkappa_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial\varkappa_\nu}{dx_\mu},$$

то, на основании (85.52), мы видим, что

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu},$$

так что $F_{\mu\nu}$ не зависит от системы масштабов. Это имеет место только для ковариантного тензора F_μ; если же мы перенесем один или оба значка наверх, то в формулы преобразования придется опять ввести функцию λ согласно (85.43).

Мы видим, что геометрия континуума зависит теперь от 14 функций, меняющихся от точки к точке, именно: от десяти величин $g_{\mu\nu}$ и четырех величин $\varkappa_\mu$. Эти функции можно подвергать рассмотренным только-что преобразованиям калибровки и преобразованиям координат, рассмотренным в главе II. Подобные преобразования не изменяют внутренних свойств мира, но какие-либо изменения величин $g_{\mu\nu}$ и $\varkappa_\mu$, не сводящиеся к преобразованиям калибровки или координат, обусловливают изменения внутреннего состояния мира. Поэтому следует ожидать, что последние изменения скажутся также и на физических проявлениях мира.

Теперь возникает вопрос, в чем заключаются физические проявления, связанные с изменениями $\varkappa_\mu$? Все явления механики зависят от $g_{\mu\nu}$, так что можно предположить, что рассматриваемые изменения обнаружатся не в механике или, по крайней мере, что первичный эффект не является механическим. С другой стороны, мы уже знаем, что явления электромагнетизма не могут быть выражены в зависимости только от $g_{\mu\nu}$; поэтому напрашивается предположение, что изменения $\varkappa_\mu$ проявляются физически в изменениях электромагнитного поля.

Мы видели, что электромагнитное поле описывается некоторым вектором, тоже обозначенным нами через $\varkappa_\mu$, и почти очевидной представляется попытка отождествить его с вектором $\varkappa_\mu$, введенным в геометрию Вейля. На основании данных опыта физическое состояние мира не определяется полностью величинами $g_{\mu\nu}$, а является необходимым ввести дополнительно некоторый вектор. На основании нашей теоретической геометрии природа континуума так же не вполне определена величинами $g_{\mu\nu}$, и здесь тоже необходимо ввести добавочный вектор. Вряд ли возможно избежать вывода, что эти два вектора должны быть тождественны.

Более того, мы можем согласно (85.52) изменением масштаба заменить $\varkappa_\mu$ на $\varkappa_\mu + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$, не изменяя при этом состояния мира. С другой стороны, в начале п. 74 мы выяснили, что то же самое изменение возможно произвести в отношении электромагнитного потенциала, не изменяя при этом электромагнитного поля.

По изложенным основаниям мы действительно произведем указанное отождествление. Величины $\varkappa_\mu$ и $F_{\mu\nu}$ нашей геометрической теории суть не что иное, как электромагнитные потенциал и сила главы VI. Далее для наших нынешних целей удобнее устранить нормирующее условие $\varkappa_\mu^\mu = 0$ (74.1), так как этим мы преждевременно ограничились бы некоторой частной системой масштабов.

Необходимо принять во внимание, что в результате такого отождествления электромагнитные силы оказываются выраженными в некоторых естественных единицах, отношение которых к системе CGS пока не известно. Например, мы можем изменять коэффициент пропорциональности в (77.7), величина же $F_{\mu\nu}$ не изменяется при любом изменении системы масштабов (85.6), так что ее значение есть отвлеченное число. Поэтому возникает вопрос, скольким вольтам на сантиметр соответствует значение $F_{\mu\nu} = 1$ в заданной системе координат. Эта проблема довольно трудна, однако в п. 102 мы дадим некоторую, хотя грубую и довольно сомнительную, оценку.

Я не думаю, что наше дальнейшее исследование прибавит что-либо существенное к соображениям, говорящим в пользу электромагнитного истолкования величины $\varkappa_\mu$. Все покоится полностью на том, несомненно весьма важном обстоятельстве, что, уничтожая одно искусственное ограничение, имеющееся в римановой геометрии, мы получаем как раз правильное число переменных, необходимых для физического описания мира.

86. ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО КАЛИБРОВКИ.

В дальнейшем полезно будет узнать те тензоры и инварианты, которые, обладая известными уже нам характерными свойствами в отношении преобразований координат, не изменяются при любых преобразованиях системы масштабов. Мы будем называть их *ин-тензорами* и *ин-инвариантами*.

Существуют и другие тензоры и инварианты, которые при изменении калибровки умножаются на какую-либо степень величины λ. Мы их назовем *ко-тензорами* и *ко-инвариантами*. Изменение масштаба является обобщением изменения единиц в физических уравнениях, причем здесь единица перестает быть постоянной величиной и становится произвольной функцией положения. Нам придется иметь дело только с *одной* единицей — единицей интервала. Координаты не имеют никакого отношения к нашей единице, так как это просто числа, устанавливающие совпадение событий, и поэтому dx_μ есть ин-вектор. Заметим, что если мы меняем единичную клетку прямоугольной координатной системы, изменяя ее длину от мили до километра, то этим мы преобразуем координаты, а не масштаб. Различие будет яснее в случае не-декартовых координат. В случае галилеевых координат особенно легко смешать эти преобразования, так как в этом частном случае значения $g_{\mu\nu}$ таковы, что длина стороны единичной клетки равна единице интервала; поэтому не так-то легко представить себе, что *расстояние* между двумя узлами координатной сетки есть число, равное единице, в то время как *интервал* между ними равен 1 *км*.

Согласно (85.6) электромагнитная сила $F_{\mu\nu}$ есть ин-тензор, в то время как $F^{\mu\nu}$ есть только ко-тензор, а $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ — ко-инвариант.

Преобразуя трехзначковый символ $[\mu\nu, \sigma]$ изменением масштаба, мы получим по (85.41)

$$[\mu\nu,\sigma]' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\lambda^2 g_{\mu\sigma})}{\partial x_\nu} + \frac{\partial(\lambda^2 g_{\nu\sigma})}{\partial x_\mu} - \frac{\partial(\lambda^2 g_{\mu\nu})}{\partial x_\sigma}\right),$$

$$= \lambda^2[\mu\nu,\sigma] + \frac{1}{2} g_{\mu\sigma}\frac{\partial(\lambda^2)}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} g_{\nu\sigma}\frac{\partial(\lambda^2)}{\partial x_\mu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\frac{\partial(\lambda^2)}{\partial x_\sigma},$$

или в силу (85.51), полагая $\varphi_\mu \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$,

$$\lambda^2[\mu\nu,\sigma] + \lambda^2(g_{\mu\sigma}\varphi_\nu + g_{\nu\sigma}\varphi_\mu - g_{\mu\nu}\varphi_\sigma).$$

Умножая обе стороны на $g'^{\sigma\alpha} = \lambda^{-2} g^{\sigma\alpha}$, мы получим

$$\{\mu\nu,\alpha\}' = \{\mu\nu,\alpha\} + g^\alpha_\mu\varphi_\nu + g^\alpha_\nu\varphi_\mu - g_{\mu\nu}\varphi^\alpha. \qquad (86.1)$$

Положим

$${}^*\{\mu\nu,\alpha\} \equiv \{\mu\nu,\alpha\} - g^\alpha_\mu\varkappa_\nu - g^\alpha_\nu\varkappa_\mu + g_{\mu\nu}\varkappa^\alpha; \qquad (86.2)$$

тогда по формулам (86.1) и (85.52)

$${}^*\{\mu\nu,\alpha\}' = {}^*\{\mu\nu,\alpha\}. \qquad (86.3)$$

«Обобщенный трехзначковый символ» ${}^*\{\mu\nu,\alpha\}$ обладает, следовательно, свойством «ин», т. е. не изменяется при преобразовании калибровки. Но, разумеется, он не является тензором.

В дальнейшем мы будем обозначать звездочкой впереди (*) обобщенные величины, соответствующие каким-либо выражениям в геометрии Риманна и не зависящие от системы калиброовки (или ковариантные ей). Следующий пример иллюстрирует общий метод нахождения таких величин.

Пусть A^ν_μ — симметричный ин-тензор. Его расходимость (51.31) при преобразовании калибровки изменяется следующим образом:

$$A'^\nu_{\mu\nu} = \frac{1}{\lambda^4\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(A^\nu_\mu\lambda^4\sqrt{-g}) - \frac{1}{2}(\lambda^{-2}A^{\alpha\beta})\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\lambda^2 g_{\alpha\beta}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(A^\nu_\mu\sqrt{-g}) - \frac{1}{2}A^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} +$$

$$+ A^\nu_\mu\frac{1}{\lambda^4}\frac{\partial\lambda^4}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}A^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda^2}{\partial x_\mu} = A^\nu_{\mu\nu} + 4A^\nu_\mu\varphi_\nu - A\varphi_\mu,$$

если положить $A^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = A$.

Следовательно, в силу (85.52), выражение

$$^*A^{\nu}_{\mu\nu} \equiv A^{\nu}_{\mu\nu} - 4A^{\nu}_{\mu}\varkappa_{\nu} + A\varkappa_{\mu} \qquad (86.4)$$

не меняется при преобразовании калибровки и поэтому представляет собой ин-вектор.

Эта операция может быть названа ин-ковариантным дифференцированием, а результат ее есть ин-расходимость.

Результат изменяется, если $A^{\mu\nu}$ является ин-тензором, так что A^{ν}_{μ} есть ко-тензор. Различные сопряженные тензоры не имеют в геометрии Вейля одинакового значения, так как только один из них может быть ин-тензором.

В дальнейшем, при отсутствии особых оговорок, последний значок будет обозначать обыкновенное ковариантное (а не ин-ковариантное) дифференцирование *).

---

*) Выведем еще дифференциальные уравнения параллельного переноса в дополнение к замечаниям п. 85. Естественно принять в качестве обобщенной ковариантной производной ин-вектора A_{μ} обобщение выражения (29.3) $A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \{\mu\nu, \alpha\}\, A_{\alpha}$,

а именно: выражение

$$^*A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - {}^*\{\mu\nu, \alpha\}\, A_{\alpha}\,.$$

Тот факт, что это выражение, очевидно инвариантное относительно калибровки, в то же время представляет собой обычный тензор, следует, в силу (86.2), из следующего равенства

$$^*A_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + g^{\alpha}_{\mu}\varkappa_{\nu}A_{\alpha} + g^{\alpha}_{\nu}\varkappa_{\mu}A_{\alpha} - g_{\mu\nu}\varkappa^{\alpha}A_{\alpha}.$$

Если теперь мы определим, как и в п. 33 параллельный перенос A_{μ} в геометрии Вейля из того условия, чтобы $^*A_{\mu\nu}$ при этом обращалось в нуль, то точно так же, как и при выводе формулы (33.3) для приращения δA_{μ} при прохождении бесконечно малого замкнутого пути, ограничивающего площадку $dS^{\nu\sigma}$, получается выражение

$$\delta A_{\mu} = \frac{1}{2}\int\int (^*A_{\mu\nu\sigma} - {}^*A_{\mu\sigma\nu})\; dS^{\nu\sigma},$$

где $^*A_{\mu\nu\sigma}$ и $^*A_{\mu\sigma\nu}$ означают вторые ковариантные производные от A_{μ}. Точное повторение вычисления, сделанного в начале п. 34, дает для $^*A_{\mu\nu\sigma} - {}^*A_{\mu\sigma\nu}$ выражение, аналогичное (34.3),

$$^*A_{\mu\nu\sigma} - {}^*A_{\mu\sigma\nu} = A_{\varepsilon}\, {}^*B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma},$$

где $^*B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}$ составляется из символов $^*\{\mu\nu, \alpha\}$ точно так же (ср. (87.1)), как $B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}$ из символов $\{\mu\nu, \alpha\}$ (ср. (34.4). (*Н.*)

87. ОБОБЩЕННЫЙ ТЕНЗОР РИМАННА—КРИСТОФФЕЛЯ.

Аналогично формуле (34.4) положим

$$
\begin{aligned}
{}^*B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} = &-\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\, {}^*\{\mu\nu,\, \varepsilon\} + {}^*\{\mu\sigma,\, \alpha\}\, {}^*\{\alpha\nu,\, \varepsilon\} + \\
&+\frac{\partial}{\partial x_\nu}\, {}^*\{\mu\sigma,\, \varepsilon\} - {}^*\{\mu\nu,\, \alpha\}\, {}^*\{\alpha\sigma,\, \varepsilon\}
\end{aligned}
\qquad (87.1)
$$

Это выражение является ин-тензором, так как символы со звездочками не зависят от калибровки. С другой стороны, из формулы (87.4), которая будет выведена немного ниже, мы увидим, что такое обобщение не уничтожает свойств обычного тензора.

Рассмотрим первые два члена. Из них сразу можно получить затем полное выражение, если переставить ν и σ и произвести вычитание, что можно проделать или на каждой ступени вычислений, или в результате. Добавочные члены, появляющиеся благодаря наличию звездочек, имеют в силу (86.2) следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(-g^{\varepsilon}_{\mu}\varkappa_\nu - g^{\varepsilon}_{\nu}\varkappa_\mu + g_{\mu\nu}\varkappa^{\varepsilon}\right) + \left(-g^{\alpha}_{\mu}\varkappa_\sigma - g^{\alpha}_{\sigma}\varkappa_\mu + \right.\\
&\left. + g_{\mu\sigma}\varkappa^{\alpha}\right)\{\alpha\nu,\varepsilon\} + \left(-g^{\varepsilon}_{\alpha}\varkappa_\nu - g^{\varepsilon}_{\nu}\varkappa_\alpha + g_{\alpha\nu}\varkappa^{\varepsilon}\right)\{\mu\sigma,\alpha\} + \\
&+\left(-g^{\alpha}_{\mu}\varkappa_\sigma - g^{\alpha}_{\sigma}\varkappa_\mu + g_{\mu\sigma}\varkappa^{\alpha}\right)\left(-g^{\varepsilon}_{\alpha}\varkappa_\nu - g^{\varepsilon}_{\nu}\varkappa_\alpha + g_{\alpha\nu}\varkappa^{\varepsilon}\right) = \\
&= g^{\varepsilon}_{\mu}\frac{\partial\varkappa_\nu}{\partial x_\sigma} + g^{\varepsilon}_{\nu}\frac{\partial\varkappa_\mu}{\partial x_\sigma} - g_{\mu\nu}\frac{\partial\varkappa^{\varepsilon}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\varkappa^{\varepsilon} - \varkappa_\sigma\{\mu\nu,\varepsilon\} - \varkappa_\mu\{\sigma\nu,\varepsilon\} + \\
&+ g_{\mu\sigma}\{\alpha\nu,\varepsilon\}\varkappa^{\alpha} - \varkappa_\nu\{\mu\sigma,\varepsilon\} - g^{\varepsilon}_{\nu}\{\mu\sigma,\alpha\}\varkappa_\alpha + \varkappa^{\varepsilon}[\mu\sigma,\nu] + g^{\varepsilon}_{\mu}\varkappa_\sigma\varkappa_\nu + \\
&\qquad + g^{\varepsilon}_{\nu}\varkappa_\sigma\varkappa_\mu - g_{\mu\nu}\varkappa_\sigma\varkappa^{\varepsilon} + g^{\varepsilon}_{\sigma}\varkappa_\mu\varkappa_\nu + \\
&+ g^{\varepsilon}_{\nu}\varkappa_\mu\varkappa_\sigma - g_{\sigma\nu}\varkappa_\mu\varkappa^{\varepsilon} - g_{\mu\sigma}\varkappa^{\varepsilon}\varkappa_\nu - g_{\mu\sigma}g^{\varepsilon}_{\nu}\varkappa^{\alpha}\varkappa_\alpha + g_{\mu\sigma}\varkappa_\nu\varkappa^{\varepsilon},
\end{aligned}
\qquad (87.2)
$$

а это эквивалентно выражению

$$
\begin{aligned}
g^{\varepsilon}_{\mu}\frac{\partial\varkappa_\nu}{\partial x_\sigma} + g^{\varepsilon}_{\nu}(\varkappa_\mu)_\sigma - g_{\mu\nu}(\varkappa^{\varepsilon})_\sigma + g^{\varepsilon}_{\nu}\varkappa_\mu\varkappa_\sigma - g^{\varepsilon}_{\nu}\, g_{\mu\sigma}\varkappa_\alpha\varkappa^{\alpha} + \\
+ g_{\mu\sigma}\varkappa_\nu\varkappa^{\varepsilon}.
\end{aligned}
\qquad (87.3)
$$

[Чтобы иметь возможность проследить за деталями этого преобразования, перенумеруем отдельные члены выражения (87.2) по порядку от 1 до 19. Тогда мы увидим, что члены, имеющие следующие нумера или следующие пары членов, симметричны относительно ν и σ и поэтому выпадают, когда мы произведем указанную перед формулой (87.2) операцию: 5 и 8, 6, 11, 12 и 14, 13 и 17, 16. Далее, 4 и 10 вместе дают $-[\nu\sigma, \mu]\,\varkappa^{\varepsilon}$, а это выражение можно отбросить по той же причине. Члены 2 и 9, будучи сложены, дают $g^{\varepsilon}_{\nu}(\varkappa_{\mu})_{\sigma}$. Наконец, переставим 7 с соответствующим ему членом $-g_{\mu\nu}\left\{{\alpha\sigma, \atop \varepsilon}\right\}\varkappa^{\alpha}$, стоящим во второй половине полного выражения, и сложив это выражение с 3, получим $-g_{\mu\nu}(\varkappa^{\varepsilon})_{\sigma}$].

Поэтому перестановка ν и σ и вычитание приводят к следующему полному выражению

$$
\begin{gathered}
B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} = B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} + g^{\varepsilon}_{\mu}\left(\frac{\partial\varkappa_{\nu}}{\partial x_{\sigma}} - \frac{\partial\varkappa_{\sigma}}{\partial x_{\nu}}\right) + (g^{\varepsilon}_{\nu}\,\varkappa_{\mu\sigma} - g^{\varepsilon}_{\sigma}\,\varkappa_{\mu\nu}) + \\
+ (g_{\mu\sigma}\,\varkappa_{\nu} - g_{\mu\nu}\,\varkappa^{\varepsilon}_{\sigma}) + (g^{\varepsilon}_{\nu}\,\varkappa_{\mu}\,\varkappa_{\sigma} - g^{\varepsilon}_{\sigma}\,\varkappa_{\mu}\,\varkappa_{\nu}) + \\
+ (g^{\varepsilon}_{\sigma}\,g_{\mu\nu} - g^{\varepsilon}_{\nu}\,g_{\mu\sigma})\,\varkappa_{\alpha}\,\varkappa^{\alpha} + (g_{\mu\sigma}\,\varkappa_{\nu} - g_{\mu\nu}\,\varkappa_{\sigma})\,\varkappa^{\varepsilon}. \qquad (87.4)
\end{gathered}
$$

Если теперь положить $\varepsilon = \sigma$, то получим сокращенный ин-тензор

$$
\begin{gathered}
{}^{*}G_{\mu} = G_{\mu\nu} - F_{\mu\nu} + (\varkappa_{\mu\nu} - 4\varkappa_{\mu\nu}) + (\varkappa_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\,\varkappa^{\alpha}_{\alpha}) + \\
+ (\varkappa_{\mu}\,\varkappa_{\nu} - 4\varkappa_{\mu}\,\varkappa_{\nu}) + (4g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu})\,\varkappa_{\alpha}\,\varkappa^{\alpha} + (\varkappa_{\mu}\,\varkappa_{\nu} - g_{\mu\nu}\,\varkappa_{\alpha}\,\varkappa^{\alpha}) = \\
= G_{\mu\nu} - 2F_{\mu\nu} - (\varkappa_{\mu\nu} + \varkappa_{\nu\mu}) - g_{\mu\nu}\,\varkappa^{\alpha}_{\alpha} - 2\varkappa_{\mu}\,\varkappa_{\nu} + 2g_{\mu\nu}\,\varkappa_{\alpha}\,\varkappa^{\alpha}\,(87.5)\,^{*})
\end{gathered}
$$

Помножим, наконец, это на $g^{\mu\nu}$. Тогда сокращение даст нам ко-инвариант

$$
{}^{*}G = G - 6\varkappa^{\alpha}_{\alpha} + 6\,\varkappa_{\alpha}\,\varkappa^{\alpha}. \qquad (87.6)
$$

Умножение на $g^{\mu\nu}$ опять вводит зависимость от калибровки, так что при ее изменении ${}^{*}G$ умножается на λ^{-2}.

Если значок ε переносится в формуле (87.4) вниз, то

$$
g_{\mu\varepsilon}\left(\frac{\partial\varkappa_{\nu}}{\partial x_{\sigma}} - \frac{\partial\varkappa_{\sigma}}{\partial x_{\nu}}\right) = g_{\mu\varepsilon}\,F_{\nu\sigma}
$$

будет единственной составной частью ${}^{*}B_{\mu\nu\sigma\varepsilon}$, которая симметрична относительно μ и ε, что согласуется с условием (a) геометрии Вейля (п. 84).

---

*) Единица величин $\varkappa_{\mu}$ произвольна, и те $\varkappa_{\mu}$, которые употребляются в обобщенной теории части II, соответствуют удвоенным $\varkappa_{\mu}$ этих формул. Это нужно принять во внимание, например, при сравнении (87.5) и (94.3).

88. ИН-ИНВАРИАНТЫ ОБЛАСТИ.

Не существует функций от $g_{\mu\nu}$ и x_μ, которые были бы функциями положения и в то же время ин-инвариантами. Однако, возможно следующим образом найти ин-инвариантные плотности.

Так как $\sqrt{-g}$ при преобразовании калибровки умножается на λ^4, то эту величину нужно сочетать с ко-инвариантами, которые при этом умножаются на λ^{-4}. Таким способом мы получаем следующие выражения, которые, как легко убедиться, представляют собой ин-инвариантные плотности:

$$({}^*G)^2 \sqrt{-g},\ {}^*G_{\mu\nu}\,{}^*G^{\mu\nu} \sqrt{-g},\ {}^*B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}\,{}^*B^{\mu\nu\sigma}_{\varepsilon} \sqrt{-g}. \qquad (88.1)$$

$$F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu} \sqrt{-g}. \qquad (88.2)$$

Ин-инвариантные плотности можно построить также и из фундаментального тензора шестого ранга. Пусть ${}^*({}^*B_{\mu\nu\sigma\rho})_{\alpha\beta}$ есть вторая ин-ковариантная производная ко-тензора ${}^*B_{\mu\nu\sigma\rho}$. Диагональная сумма, образованная поднятием трех значков и сокращением, изменяется пропорционально λ^{-4} и образует, будучи умножена на $\sqrt{-g}$, ин-инвариантную плотность. В зависимости от выбора значков можно получить три различные диагональные суммы (три следа), но я полагаю, что между ними существуют определенные соотношения, так что имеется лишь одно независимое выражение. Простейшим из этих следов будет

$$g^{\mu\nu}\, g^{\sigma\rho}\, g^{\alpha\beta}\, {}^*({}^*B_{\mu\nu\sigma\rho})_{\alpha\beta} \sqrt{-g} = {}^*\Box\, {}^*G \cdot \sqrt{-g}. \qquad (88.3)$$

Если $\mathbf{A}$ есть некоторая ин-инвариантная плотность, то интеграл

$$\int \mathbf{A}\, d\tau,$$

взятый по какой-либо четырехмерной области, есть отвлеченное число, не зависящее ни от системы координат, ни от системы масштабов. Такое число определяет свойство области, которое можно назвать абсолютным в самом широком смысле этого слова, и весьма вероятно, что какой-либо один или больше инвариантов области находятся в некотором простом отношении ко всем физическим величинам, измеряющим наиболее общие свойства мира. Простейшей операцией, применимой к инвариантам области, является, повидимому, гамильтоново дифференцирование, так что тензорам $\frac{\mathfrak{h}A}{\mathfrak{h}g_{\mu\nu}}$, $\frac{\mathfrak{h}A}{\mathfrak{h}x_\mu}$ необходимо придать особый смысл.

Как показал Вейль, только в четырехмерном пространстве существует более или менее простое множество таких ин-инвариантов области. При нечетном числе измерений таких инвариантов не существует вовсе. При двух измерениях есть только один, именно $^*G\sqrt{-g}$, при шести и восьми измерениях все инварианты будут очень сложны; они содержат производные по крайней мере четвертого порядка, или же построены чрезвычайно искусственно. В этом обстоятельстве можно было бы видеть известное обоснование четырехмерности мира. Далее можно было бы заключить, что мир с нечетным числом измерений не мог бы содержать ничего абсолютного, что, конечно, немыслимо.

Однако, эти заключения нуждаются в известном видоизменении, так как существует чрезвычайно простой инвариант области, который, кажется, до сих пор всегда упускался из виду по той причине, что он не принадлежит к обычно рассматриваемому типу, а именно: выражение

$$\int\sqrt{-^*|G_{\mu\nu}|}\,d\tau$$

на основании (81.1) представляет собой инвариант, так как оно не содержит ничего зависящего от калибровки. Это выражение не *более* неразумно, чем другие ин-инварианты, так как последние содержат $\sqrt{-g}$. Позже мы увидим, что оно вполне аналогично метрическому объему и электромагнитному объему (п. 81) области. Этот ин-инвариант, который мы назовем *обобщенным объемом*, существовал бы даже и в том случае, если бы мир имел нечетное число измерений.

Заметим еще, что $F^{\mu\nu}\sqrt{-g}$ или $\mathbf{F}^{\mu\nu}$ есть ин-тензорная плотность. Таким образом, для того чтобы формулы имели физический смысл, необходимо, чтобы с контравариантным тензором всегда был связан множитель $\sqrt{-g}$. Плотность электромагнитного действия должна иметь вид

$$F_{\mu\nu}\,\mathbf{F}^{\mu\nu},$$

а плотность энергии

$$F_{\mu\alpha}\mathbf{F}^{\nu\alpha}+\frac{1}{4}g^{\nu}_{\mu}F_{\alpha\beta}\mathbf{F}^{\alpha\beta}.$$

Таким образом, поле характеризуется либо *интенсивностью* $F_{\mu\nu}$, либо *количеством* плотности $\mathbf{F}_{\mu\nu}$. Оба способа описания не зависят от калибровки.

89. ЕСТЕСТВЕННАЯ КАЛИБРОВКА.

Большая часть законов механики, исследованных в главах I—V, была выражена тензорными, но не ин-тензорными уравнениями. Поэтому они могут быть верны только при некоторой определенной системе масштабов и перестают иметь место при преобразовании последней. Ту калибровку, при которой эти законы имеют место (если они вообще имеют место), мы назовем *естественной калибровкой*. Она так же относится к общей системе масштабов, как галилеевы координаты к наиболее общей системе координат.

До сих пор мы обобщали уравнения физики, установленные первоначально для галилеевых систем координат таким образом, чтобы они получили форму, не зависящую от координатной системы. Точно таким же образом мы должны сейчас обобщить уравнения, имеющие место при естественной калибровке путем замены их ин-тензорными уравнениями, справедливыми при любой калибровке. Но прежде чем перейти к этому, необходимо выяснить, что собственно будет достигнуто таким обобщением. Вряд ли было бы целесообразно обобщать галилеевы формулы для тех случаев, когда можно пользоваться галилеевыми координатными системами. К обобщенным формулам мы перешли именно потому, что открыли существование в мире таких областей, для которых не существует галилеевой системы координат. Точно также нам только тогда действительно понадобятся интензорные уравнения механики, если существуют области мира, где не имеет места естественная калибровка, т. е. такие, в которых невозможно найти систему масштабов, дающих в точности формулы Эйнштейна. Первоначальная идея теории Вейля и заключалась, как я полагаю, в том, что электромагнитные поля представляют собой как раз такие области. Для них следовательно ин-тензорная форма была бы существенной.

Однако, между произведенным Эйнштейном обобщением галилеевой геометрии и тем обобщением геометрии Риманна, которое сделал Вейль, имеется существенное различие. Мы непосредственно доказали, что условия, при которых становятся невозможными галилеевы координаты, *должны* проявляться как поле тяготения. Согласно определению силы в этом и заключается смысл понятия силового поля. В противоположность этому мы не можем доказать, что уничтожение естественной калибровки проявляется как электромагнитное поле. Мы лишь высказали предположение, что те мировые соотношения, которые измеряются вектором $\varkappa_\mu$, входящим в ин-тензорные уравнения, с одной стороны, приводят к уничтожению римановой геометрии, а *с другой* — обнаруживаются в виде электромагнитных явлений.

Согласно первоначальной точке зрения теория Вейля, неоднозначность при сравнении длин в различных местах обнаруживалась до сих пор экспериментально только в случае электромагнитных явлений, о которых мы ведь и предполагаем, что они зависят от этой неопределенности, хотя (поскольку только можно судить) и не определяются ею непосредственно. Это не столь удивительно, если мы попытаемся оценить порядок величины этой неопределенности. Повидимому можно ожидать, что $\frac{dl}{l}$ из формулы (84.4),

е.

$$\frac{dl}{l} = \frac{1}{2} F_{\nu\delta} dS^{\nu\sigma},$$

будет порядка единицы, если взять электромагнитную силу, сравнимую с той, которая действует на поверхности электрона, т. е. с $4 \cdot 10^{10}$ *вольт/см*, а длину замкнутого пути — сравнимой с радиусом кривизны мира. Но в таком случае при обычных наблюдениях $\frac{dl}{l}$ будет лежать далеко за границей возможности наблюдения. Поэтому мы всегда можем употреблять такую калибровку, которая определяется переносом материальных масштабов и для целей практики может считаться вполне однозначной. Тем не менее, эта обычная калибровка обладает некоторой весьма малой теоретической неоднозначностью, которая имеет практическое значение лишь постольку, поскольку она одновременно обнаруживается как причина электрических явлений. Та калибровка, которая употребляется на практике, есть естественная калибровка, в которой имеют место все выведенные нами выше формулы. Впрочем, это утверждение не вполне точно, так как употребляемая калибровка слегка неопределенна, а теоретические формулы по предположению вполне точны. Выражаясь строже, можно сказать, что естественная калибровка есть та точная калибровка, с которой все практические калибровки совпадают в приближении, достаточном для всех наблюдаемых механических и метрических явлений.

По Вейлю естественная калибровка определяется из условия

$$^{*}G = 4\lambda, \tag{89.1}$$

где λ везде постоянно*).

Эту попытку согласовать теоретическую неоднозначность нашей системы мер с ее хорошо известной практической пригодностью, вероятно, можно провести до конца, хотя она и кажется несколько искусственной. Однако, возможна и совсем другая точка зрения, покоящаяся на следующем предположении.

Сравнение длин в различных местах есть совершенно однозначный процесс, не имеющий никакого отношения к параллельному переносу вектора.

Действительный перенос масштаба с места на место не нужно смешивать с параллельным переносом вектора, представляющего смещение или расстояние между концами масштаба. Если это предположение правильно, то *риманнову геометрию Эйнштейна*, в которой каждому интервалу соответствует однозначно определенная длина, нужно считать совершенно точной. Неопределенность параллельного переноса не влияет тогда на результаты Эйнштейна. Геометрию же Вейля нельзя рассматривать как *естественную геометрию*, ее значение лежит в совершенно иной области.

Сам Вейль также пришел к тому заключению, что следует предпочесть вторую точку зрения. Вейль вводит очень полезное различение таких величин, которые определяются стремлением *к сохранению* (Beharrung, persistence) и таких, которые определяются стремлением *к установлению* (Einstellung, adjustment) и приходит к тому заключению, что мера длины материальных тел определяется установлением **).

---

*) Это предположение будет разобрано ниже, на стр. 391. (*Н*).

**) Приведем здесь соответствующее место (Weyl, «Raum—Zeit—Materie», 4 изд., стр. 280): «Я различаю в природе величины, определяющиеся посредством *сохранения* и *установления*; разница выяснится на следующем примере. Мы можем придать любое направление в пространстве оси вращающегося волчка; однако, если такое произвольное начальное направление задано, то в случае волчка, предоставленного самому себе, направление во все последующие моменты времени будет определяться некоторым *стремлением к сохранению* действующим от момента к моменту: ось волчка в каждое мгновение испытывает параллельный перенос. Прямо противоположен этому случай магнитной стрелки в магнитном поле: ее направление, независимо от

Величина электрона определяется установлением в отношении радиуса кривизны мира, а не сохранением чего-либо в продолжении его истории. На эту точку зрения мы стали уже в п. 66, и возможность объяснения закона тяготения Эйнштейна с ее помощью показала нам ее ценность.

Обобщенная теория части II почти неизбежно приведет ко второй точке зрения. Первая форма теории не столько была прямо опровергнута, сколько была оставлена вследствие ее бесплодности. Она перестала казаться столь заманчивой после того, как к решению проблемы подошли с более широкой точки зрения. Тогда стало ясно, что совсем незачем вводить при сравнении длин неоднозначность, слишком малую, чтобы ее можно было проверить практически, вводить только для того, чтобы получить удовлетворение от геометрического истолкования вектора $\varkappa_{\mu}$, имеющего другие, гораздо более важные, проявления.

Новая точка зрения совершенно изменяет смысл теории Вейля. Действительно, при этом она перестает быть гипотезой, а становится графическим представлением фактов, и ее ценность заключается в наглядности, обусловленной этим графическим представлением. Теперь нам уже ни на один момент не нужно задумываться над отождествлением электромагнитного потенциала с геометрическим вектором $\varkappa_{\mu}$. Геометрический вектор и есть потенциал, так мы именно таким образом и решаем графически представить потенциал. Мы рассматриваем мысленное пространство, в котором имеет место геометрия Вейля, и представляем потенциал тяготения через величины $g_{\mu\nu}$ этого пространства, а электромагнитный потенциал — через величины $\varkappa_{\mu}$. При этом мы находим, что все другие величины, которыми занимается физика, могут быть представлены более или менее простыми геометрическими величинами в этом пространстве, и что вся картина дает нам возможность наиболее общим образом охватить соотношения между физическими величинами, в особенности такие явления, в которых принимают участие и электромагнитные и механиче-

предыдущего состояния системы, в каждый момент определяется тем, что система в силу своего строения в каждый момент времени *устанавливается* однозначно определенным образом в направлении поля, в котором она находится. Относительно величин, подчиняющихся исключительно стремлению к сохранению, у нас нет никаких оснований априори предполагать, что их перемещения интегрируемы». (W) ские переменные. Параллельный перенос вектора в этом пространстве есть вполне определенная операция, в некоторых случаях допускающая непосредственную физическую интерпретацию. Так например, если незаряженная частица свободно движется вдоль геодезической линии, то вектор ее скорости переносится параллельно вдоль ее пути (33.4); если же движется материальный масштаб, то параллельный перенос не имеет места, так что этот последний процесс должен быть описан с помощью других геометрических понятий, покоящихся на уравнении естественной калибровки (89.1).

Тот факт, что в части II этой главы мы будем рассматривать мысленное пространство с еще более общей геометрией, совсем не следует рассматривать как противоречие с нашими нынешними исследованиями. Мы можем с помощью какого-либо другого графического представления изучить большее количество соотношений, однако совсем незачем в связи с этим отвергать то, что мы уже узнали с помощью первого представления.

Рассмотрим теперь принятое Вейлем уравнение калибровки ${}^*G = 4\lambda$, являющееся, повидимому, наиболее естественным. Предположим, что первоначально мы положили в основу другую калибровку, в которой ${}^*G$ не постоянно. Величина ${}^*G$ представляет собой ко-инвариант, изменяющийся в отношении μ^{-2}, когда мера интервала изменяется в отношении μ. Поэтому мы можем получить новую калибровку, в которой ${}^*G$ постоянно, если изменим меру интервала в отношении $G^{\frac{1}{2}}$.

В силу (87.6) уравнение калибровки эквивалентно *) следующему

$$G - 6\,\varkappa^{\alpha}_{\alpha} + 6\,\varkappa_{\alpha}\varkappa^{\alpha} = 4\lambda. \tag{89.2}$$

Но по (54.72) собственная плотность материи равна

$$\rho_0 = \frac{1}{8\pi}\left(G - 4\lambda\right) = \frac{3}{4\pi}\left(\varkappa^{\alpha}_{\alpha} - \varkappa_{\alpha}\varkappa^{\alpha}\right). \tag{89.3}$$

Для пустого пространства или пространства, содержащего лишь электромагнитные поля, но не электроны, $\rho_0 = 0$, так что везде

$$\varkappa^{\alpha}_{\alpha} = \varkappa_{\alpha}\varkappa^{\alpha}, \tag{89.4}$$

за исключением областей внутри электрона. Это условие

*) Следует обратить внимание на то, что уравнение (89.2) представляет в известном смысле подтверждение предположения (89.1). Действительно оно показывает, что при «естественной калибровке» величина ${}^*G$ очень мало зависит от постоянной 4λ, где λ — постоянная, входящая в (37.4). (*Н.*)

заменяет уравнение (74.1) $\varkappa^\alpha_\alpha = 0$, введенное раньше для однозначного нормирования электромагнитного потенциала.

Мы не можем представить себе никаких измерений с часами, масштабами, движущимися материальными частицами или световыми волнами *внутри* электрона, так что калибровка, относящаяся к такой области, должна быть чисто теоретической и не имеет никакого значения для практических измерений. По соображениям непрерывности мы определим естественную калибровку в этой области тем же уравнением $^*G = 4\lambda$; оно столь же допустимо, как и любое другое. Внутри электрона $\varkappa^\alpha_\alpha$ не равно $\varkappa_\alpha \varkappa^\alpha$, и их разность определяет массу электрона в согласии с (89.3). Однако, необходимо уяснить себе, что это применение (89.3) является чисто условным; хотя это уравнение как будто и относится к экспериментально определимым величинам, но условия здесь таковы, что невозможно представить себе никаких приборов, с помощью которых можно было бы выполнить эти эксперименты.

90. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ ВЕЙЛЯ.

Вейль принимает в качестве плотности действия выражение

$$A\sqrt{-g} = \left(^*G^2 - \alpha F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}, \tag{90.1}$$

где постоянная α — отвлеченное число. Он делает гипотезу, что для этой плотности действия имеет место принцип стационарного действия при любых вариациях $\delta g_{\mu\nu}$, $\delta\varkappa_\mu$, равных нулю на границах рассматриваемой области. Следовательно

$$\frac{\mathfrak{h}A}{\mathfrak{h}g_{\mu\nu}} = 0, \qquad \frac{\mathfrak{h}A}{\mathfrak{h}\varkappa_\mu} = 0. \tag{90.2}$$

Сам Вейль замечает, что его принцип действия вероятно не осуществляется в природе в точности в этой форме. Но все же данный метод решения вопроса весьма поучителен, как дающий пример единого принципа, установление которого является целью этого направления в науке.

Вариация выражения $^*G^2\sqrt{-g}$ равна

$$2\,{}^*G\,\delta(^*G\sqrt{-g}) - {}^*G^2\,\delta(\sqrt{-g}),$$

что при естественной калибровке превращается согласно (89.1) в

$$8\lambda\,\delta(^*G\sqrt{-g}) - 16\lambda^2\,\delta(\sqrt{-g}).$$

Отсюда по (87.6)

$$\frac{1}{8\lambda}\delta(A\sqrt{-g})=\delta\{(G-6\varkappa^{\alpha}_{\alpha}+6\varkappa_{\alpha}\varkappa^{\alpha}-2\lambda-\beta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\sqrt{-g}\},$$

где

$$\beta=\frac{\alpha}{8\lambda}.$$

Член $\varkappa^{\alpha}_{\alpha}\sqrt{-g}$ можно опустить, так как по (51.11)

$$\varkappa^{\alpha}_{\alpha}\sqrt{-g}=\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}(\varkappa^{\alpha}\sqrt{-g}).$$

Это выражение может быть проинтегрировано и дает поверхностный интеграл по граничной поверхности рассматриваемой области. Поэтому гамильтонова производная этого члена равна нулю.

Далее на основании (35.11) и (35.3)

$$\delta(\varkappa_{\alpha}\varkappa^{\alpha}\sqrt{-g})=\varkappa_{\alpha}\varkappa_{\beta}\,\delta(g^{\alpha\beta}\sqrt{-g})+g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}(\varkappa_{\alpha}\delta\varkappa_{\beta}+\varkappa_{\beta}\delta\varkappa_{\alpha})=$$

$$=\varkappa_{\alpha}\varkappa_{\beta}\sqrt{-g}\left(\delta g^{\alpha\beta}+\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\right)+2g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,\varkappa_{\beta}\delta\varkappa_{\alpha}=$$

$$=\varkappa_{\alpha}\varkappa_{\beta}\sqrt{-g}\left(-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}+\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu}+2\varkappa^{\alpha}\sqrt{-g}\,\delta\varkappa_{\alpha}=$$

$$=\sqrt{-g}\left(-\varkappa^{\mu}\varkappa^{\nu}+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\varkappa_{\alpha}\varkappa^{\alpha}\right)\delta g_{\mu\nu}+2\varkappa^{\alpha}\sqrt{-g}\,\delta\varkappa_{\alpha}.$$

Следовательно

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}g^{\mu\nu}}(\varkappa_{\alpha}\varkappa^{\alpha})=\left(-\varkappa^{\mu}\varkappa^{\nu}+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\varkappa_{\alpha}\varkappa^{\alpha}\right),\qquad(90\cdot41)$$

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}\varkappa_{\alpha}}(\varkappa_{\alpha}\varkappa^{\alpha})=2\varkappa^{\alpha}\qquad(90\cdot42)$$

Гамильтоновы производные других членов выражения (90.3) уже были найдены в (60·43), (79·31) и (78·32). Складывая все эти результаты, мы получим, принимая во внимание (54·71)

$$\frac{1}{8\lambda}\frac{\mathfrak{H}A}{\mathfrak{H}g_{\mu\nu}}=-\left(G^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}G\right)-6\left(\varkappa^{\mu}\varkappa^{\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\varkappa_{\mu}\varkappa^{\alpha}\right)-$$

$$-\lambda g^{\mu\nu}-2\beta E^{\mu\nu}=8\pi T^{\mu\nu}-2\beta E^{\mu\nu}-6\left(\varkappa^{\mu}\varkappa^{\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\varkappa_{\alpha}\varkappa^{\alpha}\right)\qquad(90\cdot51)$$

и

$$\frac{1}{8\lambda}\frac{\mathfrak{H}A}{\mathfrak{H}\varkappa_{\mu}}=12\varkappa^{\mu}+4\beta J^{\mu}\qquad(90\cdot52)$$

Эти выражения должны равняться нулю, если гипотеза (90·2) правильна. Равенство нулю (90·51) показывает, что тензор полной энергии складывается из тензора электромагнитной энергии и некоторого другого члена, который, может быть, позволено отождествить с тензором материальной энергии, происходящим от сил, связывающих электрон*). Постоянная $\frac{2\beta}{8\pi}$ обусловливает связь естественных гравитационных и электромагнитных единиц. Тензор материальной энергии представляет собой разность между общим тензором и его электромагнитной частью и, следовательно, равен

$$M^{\mu\nu} = \frac{3}{4\pi}\left(\varkappa^{\mu}\varkappa^{\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \varkappa_{\alpha}\varkappa^{\alpha}\right), \tag{90·61}$$

откуда, умножая на $g_{\mu\nu}$, имеем

$$\rho_0 = M = -\frac{3}{4\pi}\varkappa_{\alpha}\varkappa^{\alpha}. \tag{90·62}$$

Равенство нулю (90·52) дает замечательное уравнение

$$\varkappa^{\mu} = -\frac{1}{3}\beta J^{\mu}, \tag{90·71}$$

и так как $J^{\mu}_{\mu} = 0$ (73·77), то

$$\varkappa^{\mu}_{\mu} = 0, \tag{90·72}$$

Если учесть это ограничение $\varkappa^{\mu}_{\mu} = 0$ (89·3), то окажется, что формула (90·62) для ρ_0 согласуется с найденной выше.

Уравнение (90·62) превращается в силу (90·71) в следующее

$$\rho_0 = -\frac{\beta^2}{12\pi} J_{\mu} J^{\mu}.$$

Это показывает, что материя не может быть образована без электрических зарядов и токов. Но так как плотность материи всегда положительна, то четырехвектор электрического заряда-тока внутри электрона должен быть *пространственным* вектором, так что квадрат его длины должен быть отрицательным. Отсюда как будто бы следует, что электрон не может быть построен из элементарных электростатических зарядов, но скорее распадается на какие-то части, более близкие магнитным зарядам.

Нужно заметить, что результат (90·72) несовместим с формулой

---

* Я сомневаюсь в правильности этой интерпретации. См. конец § 100.

$\varkappa_\alpha\varkappa^\alpha = \varkappa^\alpha_\alpha$, которую мы установили для пустого пространства (89 · 4). Объяснение этому противоречию дает формула (90 · 71), утверждающая, что четырехмерный вектор тока должен быть отличен от нуля везде, где существует $\varkappa_\mu$, так что пространство в действительности не может быть пустым. По предположению Вейля, условие $\varkappa^\alpha_\alpha = 0$ имеет место при всех обстоятельствах, тогда как добавочное условие $\varkappa^\alpha_\alpha = \varkappa_\alpha\varkappa^\alpha$, установленное для пустого пространства, имеет место лишь при $J^\mu = 0$. Принимается следовательно, что вне того, что обычно считается границей электрона, существует четырехвектор заряда-тока малой величины $\frac{3}{\beta}\varkappa^\alpha$, простирающейся на все пространство, в котором есть электромагнитный потенциал.

Для изолированного покоющегося электрона в галилеевых координатах имеет место соотношение $\varkappa_4 = \frac{e}{r}$, так что $\varkappa_\alpha\varkappa^\alpha = \frac{e^2}{r^2}$. Интегрируя по бесконечному пространству, мы получаем как будто бы бесконечный результат; однако, принимая во внимание конечный радиус мира, результат будет порядка e^2R. На основании (90 · 62) это представляет собой ту часть (отрицательной) массы электрона, которая не сконцентрирована внутри ядра *). Действительная масса, как было найдено в п. 80, есть величина порядка $\frac{e^2}{a}$, где a — радиус ядра. Обе эти массы e^2R и $\frac{e^2}{a}$ непосредственно сравнивать невозможно, так как они выражены в различных единицах, связанных постоянной β, значение которой пока не определено. Так как, однако, они имеют различную размерность по отношению к длине, то можно предположить, что они будут сравнимы, если положить в основу естественную единицу длины, т. е. радиус мира. Но в этом случае $\frac{e^2}{a}$ по крайней мере в 10^{36} раз больше e^2R, так что та часть массы, которая лежит вне ядра, совершенно незначительна.

Изложенный выше принцип действия является, очевидно, чисто умозрительным. Я предоставляю читателю судить о том, в какой мере полученные результаты делают правдоподобным этот или другой аналогичный закон, и в какой мере их можно рассматривать,

*) Не нужно ее смешивать с массой энергии электромагнитного поля. Наше теперешнее исследование относится к *инвариантной массе*, которую поле не изменяет (ср. п. 77).

как нечто вроде reductio ad absurdum. Два обстоятельства заслуживают однако быть отмеченными.

1. Если мы сравним вид обоих главных тензоров аиергии

$$T_\mu^\nu = -\frac{1}{8\pi}\left\{G_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu (G - 2\lambda)\right\},$$

$$E_\mu^\nu = -F_{\mu\sigma} F^{\nu\sigma} + \frac{1}{4} g_\mu^\nu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta},$$

то нам покажется совершенно загадочным, каким образом второй из них может содержаться в первом, так как между ними пет никакого сходства. Связь несколько упрощается, если принять во внимание, что разность этих выражений входит в производную $\frac{\mathfrak{h} A}{\mathfrak{h} g_{\mu\nu}}$ (90 · 51), сопровождаемая членом, которым вероятно можно пренебречь повсюду, кроме области внутри электрона.

Таким образом, связь между этими двумя тензорами хотя и приводится к более простому виду с помощью принципа действия Вейля, но ни в коем случае не объясняется последним. Ясно, что это «действие» в том виде, в каком оно введено Вейлем, не имеет глубокого значения; в нем просто соединены два различных ин-инварианта. Вычитать $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ из ${}^*G^2$ — это фантастическая операция, которая теоретически может быть оправдана так же мало как и вычитание E_μ^ν из T_μ^ν. В лучшем случае мы можем рассматривать принятую форму действия A, как шаг вперед в направлении более естественной комбинации электромагнитных переменных.

2. Первый член в выражении действия член ${}^*G^2 \sqrt{-g}$ был выбран вместо более простого ${}^*G\sqrt{-g}$ по той причине, что последний не есть ин-инвариантная плотность, и его поэтому нельзя было бы считать мерой какого-либо абсолютного свойства области. Интересно проследить, каким образом это улучшение ведет к появлению члена $\delta(-2\lambda\sqrt{-g})$ в (90 · 3), так что космологический член кривизны вводится теперь в выражение тензора энергии совершенно естественно и неизбежно. Следует сравнить это с вариацией $G\sqrt{-g}$, вычисленной в п. 60, в которой такого рода членов не было. То обстоятельство, что теория Вейля приписывает ин-инварианту ${}^*G^2\sqrt{-g}$ более фундаментальное значение, чем ко-инварианту ${}^*G\sqrt{-g}$, несомненно, означает шаг вперед по направлению к истине.

II. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ.

91. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС.

Пусть некоторое бесконечно малое смещение A^μ, находящееся в точке P (с координатами x_μ) переносится параллельно самому себе в точку P' (с координатами $x_\mu + dx_\mu$), бесконечно близкую к P. Наиболее общее возможное непрерывное выражение для изменения A^μ имеет вид

$$dA^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\alpha} A^\alpha dx_\nu, \tag{91,1}$$

где величины $\Gamma^\mu_{\nu\alpha}$, о которых не предполагается, что они образуют тензор, представляют систему 64 произвольных коэффициентов. Как величины A^α, так и приращения dx_ν бесконечно малы, так что нет нужды вводить члены более высокого порядка.

Исходя из этого понятия бесконечно малого параллельного переноса, мы построим вновь всю теорию. При этом мы придем к обобщению геометрии еще более широкому, чем теория Вейля. Исходная наша аксиома заключается в том, что параллельный перенос имеет для основных свойств мира определенное значение. Вопрос о том, каково это значение, является уже менее существенным. Основной идеей будет то, что из всего множества смещений, исходящих из точки P', может быть выбрано одно определенное смещение $A^\mu + dA^\mu$, которое в известном смысле *эквивалентно* смещению A^μ в точке P. Мы не будем определять точнее природу этой эквивалентности, но допустим лишь, что она имеет отношение к той роли, которую играет A^μ в комплексе соотношений, лежащих в основе мира физики.

Отметим прежде всего следующее:

1. Предполагается, что указанная эквивалентность существует лишь в пределе, когда P и P' бесконечно близки друг к другу. Для более удаленных точек эквивалентность, вообще говоря, может быть только приближенной, и с увеличением расстояния становится неопределенной. Ее можно сделать однозначной, выбирая определенный путь, связывающий обе точки, и устанавливая эквивалентность шаг за шагом вдоль этого пути.

2. Не предполагается, что рассматриваемая эквивалентность может быть установлена между какими-либо другими мировыми

соотношениями, кроме отрезков. До сих пор мы применяли параллельный перенос к любому тензору, но в этой новой теории мы его используем только для отрезков или смещений.

3. Наконец, не предполагается существование какого-либо исчерпывающего правила для опытного установления нашей эквивалентности. Это очень трудный пункт, которым мы лучше займемся позже. Основная идея заключается в том, что схема эквивалентности может не нуждаться в опытном определении и допускать определенные преобразования точно так же, как и схема отсчета координат не определяется из опыта и допускает известные преобразования.

Пусть PP_1 представляет смещение $A^\mu = \delta x_\mu$, которое при параллельном переносе в P' превращается в $P'P'_1$. Тогда, на основании (91 · 1), разность координат точек P'_1 и P_1 равна

$$A^\mu + dA^\mu = \delta x_\mu - \Gamma^\mu_{\nu\alpha}\,\delta x_\alpha\, d x_\nu,$$

так что координаты точки P_1 по отношению к P равны

$$dx_\mu + \delta x_\mu - \Gamma^\mu_{\nu\alpha}\,\delta x_\alpha\, dx_\nu. \qquad (91 \cdot 2)$$

Переставляя оба смещения, т. е. смещая PP' вдоль PP_1, мы придем в ту же самую точку P'_1, только в том случае, если

$$\Gamma^\mu_{\nu\alpha} = \Gamma^\mu_{\alpha\nu} \qquad (91 \cdot 3)$$

Когда равенство (91 · 3) выполнено, то имеет место «закон параллелограмма», по которому, если смещение AB эквивалентно CD, то AC эквивалентно BD.

Это есть условие, необходимое для так называемой *аффинной геометрии*. Она положена в основу Вейлем и другими авторами. Однако, Скаутен произвел чисто геометрическое исследование, в котором уничтожено и это ограничение. В дальнейшем мы все же будем его придерживаться.

Вопросы, касающиеся исходных аксиом знания, всегда трудны. Вообще говоря, нам приходится начинать где-то несколько выше основ и развивать теорию как назад, вплоть до самого фундамента, так и вперед в направлении к следствиям. Я откладываю до п. 98 разрешение вопроса о том, в какой мере аксиома параллельного переноса и условие аффинности геометрии являются существенными при представлении свойств комплекса соотношений посредством математических выражений. Теперь же я перейду к выводу дальнейших следствий из введенных здесь соотношений.

По соображениям симметрии число независимых $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}$ сводится к 40 величинам, изменяющимся от точки к точке. Они служат для описания комплекса мировых соотношений и должны содержать все, что имеет значение для физики. Наша ближайшая задача заключается в том, чтобы показать, как можно извлечь обычные физические переменные из этого сырого материала.

92. ПЕРЕНОС ВДОЛЬ БЕСКОНЕЧНО МАЛОГО ЗАМКНУТОГО ПУТИ.

Пусть смещение A^{μ} переносится параллельно самому себе вдоль малого замкнутого пути C.

В силу (91 · 1) уравнение параллельного переноса гласит

$$\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} = -\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} A^{\alpha}. \tag{92 · 1}$$

Следовательно, разность между начальным и конечным значением равна

$$\delta A^{\mu} = \int_{c} \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} dx_{\nu} = -\int_{c} \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} A^{\alpha} dx_{\nu},$$

или, по теореме Стокса (32 · 3),

$$\frac{1}{2}\iint\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_{\sigma}}\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}A^{\alpha}\right)-\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\left(\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}A^{\alpha}\right)\right\} dS^{\nu\sigma}.$$

Здесь подинтегральная функция равна

$$A^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x_{\sigma}}\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}-\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}\right)+\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x_{\sigma}}-\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x_{\nu}},$$

или по (92 · 1)

$$A^{\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial x_{\sigma}}\Gamma^{\mu}_{\nu\epsilon}-\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\Gamma^{\mu}_{\sigma\epsilon}\right)-\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\epsilon}A^{\epsilon}+\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\epsilon}A^{\epsilon}=-{}^{*}B^{\mu}_{\epsilon\nu\sigma}A^{\epsilon},$$

где

$${}^{*}B^{\mu}_{\epsilon\nu\sigma} = -\frac{\partial}{\partial x_{\sigma}}\Gamma^{\mu}_{\nu\epsilon}+\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\Gamma^{\mu}_{\sigma\epsilon}+\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\epsilon}-\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\epsilon}. \tag{92 · 2}$$

Отсюда получается

$$\delta A^\mu = -\frac{1}{2}\int\int {}^*B^\mu_{\varepsilon\nu\sigma}\, A^\varepsilon\, dS^{\nu\sigma}. \tag{92·31}$$

Эта формула, как и в п. 33, применима лишь к бесконечно малым замкнутым контурам. При вычислении подинтегральной функции мы принимали, что A^α удовлетворяет условию (92 · 1) параллельного переноса не только на самом пути переноса, но и во всех точках внутри контура. Это предложение не выполняется в точности ни при каком определенном значении A^σ, так как если оно справедливо для одного какого-либо контура переноса, то для другого оно, вообще говоря, не будет иметь места. Но разница будет порядка $dS^{\nu\sigma}$, а множитель $dS^{\nu\sigma}$ входит еще один раз под знаком интеграла; следовательно, (92 · 31) будет правильно, поскольку можно пренебречь квадратом площади контура.

Полагая для малого замкнутого пути $\sum^{\nu\sigma} = \int\int dS^{\nu\sigma}$, мы вместо (92 · 31) получим в пределе

$$\delta A^\mu = -\frac{1}{2}\, {}^*B^\mu_{\varepsilon\nu\sigma}\, A^\varepsilon \sum^{\nu\sigma}, \tag{92·32}$$

что показывает тензорный характер $B^\mu_{\varepsilon\nu\sigma}$ *). Более того, это есть ин-тензор, так как до сих пор мы еще не ввели никакой калибровки. И вообще все величины, которые мы сейчас вводим должны обладать «ин»-свойствами, так как до сих пор мы даже не начинали изучения понятия длины.

Мы можем теперь построить путем сокращения ин-тензор второго ранга. Переставляя значки ε и μ, чтобы получить более привычное их расположение, мы имеем

$${}^*B^\varepsilon_{\mu\nu\sigma} = -\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Gamma^\varepsilon_{\nu\mu} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\Gamma^\varepsilon_{\sigma\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\varepsilon_{\nu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}\Gamma^\varepsilon_{\sigma\alpha} \tag{92·41}$$

$${}^*G_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\mu} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\Gamma^\alpha_{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}\Gamma^\beta_{\beta\alpha}. \tag{92·42}$$

---

*) Другое, независимое от этого, доказательство того, что ${}^*B^\mu_{\varepsilon\nu\sigma}$ есть тензор, получается из уравнения (94 · 1); поэтому, если читателю кажется сомнительной строгость приведенных рассуждений, он может рассматривать их просто как соображения в пользу правдоподобности этого допущения и использовать другое доказательство тензорных свойств ${}^*B^\mu_{\varepsilon\nu\sigma}$.

Другой сокращенный ин-тензор мы получим из (92 · 41), полагая $\varepsilon = \mu$ и изменяя немые значки в последнем члене

$$-2F_{\nu\sigma} = -\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Gamma^\alpha_{\nu\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\Gamma^\alpha_{\sigma\alpha} \tag{92 · 43}$$

Положим теперь

$$\Gamma_\nu \equiv \Gamma^\alpha_{\nu\alpha}, \tag{92,5}$$

тогда получим

$$2F_{\nu\sigma} = \frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial x_\nu}. \tag{92.55}$$

С другой стороны, из (92.42) видно *), что

$${}^*G_{\mu\nu} - {}^*G_{\nu\mu} = \frac{\partial \Gamma_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial x_\mu} = 2F_{\mu\nu}, \tag{92.6}$$

так что $F_{\mu\nu}$ есть антисимметричная часть ${}^*G_{\mu\nu}$. Таким образом, второй способ сокращения ${}^*B^\mu_{\varepsilon\nu\sigma}$ не прибавляет ничего, чего нельзя было бы получить первым способом, и, следовательно, нам незачем особо рассматривать $F_{\mu\nu}$.

При таком порядке построения теории ин-тензоры ${}^*B^\varepsilon_{\mu\nu\sigma}$ и ${}^*G_{\mu\nu}$ являются самыми основными мерами внутренней структуры мира. Они предшествуют величинам $g_{\mu\nu}$, которые вводятся лишь в дальнейшей стадии развития нашей теории. Заметим, что мы пока еще не имеем возможности переносить значки вверх или вниз, или определить инвариант, аналогичный ${}^*G$, так как у нас еще нет величины $g_{\mu\nu}$. Если же мы хотим уже на этой ступени построить инвариант четырехмерной области, то мы должны взять «обобщенный объем».

$$\iiiint \sqrt{-|{}^*G_{\mu\nu}|}\,d\tau,$$

который, следовательно, более элементарен, чем другие инварианты области, перечисленные в п. 88.

---

*) Здесь мы впервые использовали симметрию $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$. Если $\Gamma^\alpha_{\nu\mu} \neq \Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, то вычисление становится чрезвычайно сложным.

Можно было бы задать вопрос, существует ли другой путь получения тензоров, кроме рассмотрения параллельного переноса вдоль замкнутого контура. Я думаю, что нет, потому что, если последовательность переносов кончается не в исходной точке, то мы будем иметь дело с начальным и конечным смещениями в различных местах, когда сравнение невозможно.

Уравнение (92.55) не содержит непосредственного доказательства того, что $F_{\mu\nu}$ есть вихрь некоторого вектора, так как, несмотря на введенное обозначение, Γ_μ не есть вектор. Но так как $F_{\mu\nu}$ есть тензор, то

$$2F'_{\alpha\beta} = 2F_{\mu\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\beta} = \frac{\partial \Gamma_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\beta}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\beta} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x'_\beta}\left(\Gamma_\mu\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\left(\Gamma_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\beta}\right).$$

Пусть теперь $2\varkappa'_\alpha = \Gamma_\mu \dfrac{\partial x_\mu}{\partial x'_\alpha}$, так что в нештрихованной координатной системе $2\varkappa_\mu = \Gamma_\mu$, но это равенство, вообще говоря, не имеет места в других системах. Так как для каждой штрихованной (и для определенной нештрихованной) системы

$$2\varkappa'_\mu = 2\varkappa_\mu\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu}, \tag{92.65}$$

то $\varkappa'_\alpha$ подчиняется закону преобразования (23.12) ковариантного вектора; так как далее этот закон преобразования имеет указанное в п. 20 свойство инвариантности, то мы можем уничтожить теперь ограничение определенной нештрихованной координатной системой. Тогда (92.65) превратится в следующее выражение

$$F'_{\alpha\beta} = \frac{\partial \varkappa'_\alpha}{\partial x'_\beta} - \frac{\partial \varkappa'_\beta}{\partial x'_\alpha}.$$

Следовательно, $F'_{\alpha\beta}$ действительно есть вихрь вектора $\varkappa'_\alpha$, хотя этот вектор и не должен быть во всех координатных системах равен Γ'_α. Общее решение уравнения

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma'_\alpha}{\partial x'_\beta} - \frac{\partial \Gamma'_\beta}{\partial x'_\alpha}\right) = \frac{\partial \varkappa'_\alpha}{\partial x'_\beta} - \frac{\partial \varkappa'_\beta}{\partial x'_\alpha}$$

будет

$$\Gamma'_\alpha = 2\kappa'_\alpha + \frac{\partial \Omega}{\partial x'_\alpha} \tag{92.7}$$

и, так как Ω не обязательно инвариантно, то Γ'_α может и не быть вектором *).

93. ВВЕДЕНИЕ МЕТРИКИ.

До сих пор интервал ds между двумя точками еще не появлялся в нашей теории. Вспомним, что интервал есть длина соответствующего смещения; поэтому нам нужно рассмотреть, каким образом смещению dx_μ (контравариантному ин-вектору) можно приписать длину (инвариант). Мы введем здесь этот инвариант в следущем виде:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu\,. \tag{93.11}$$

Для того чтобы интервал был инвариантным, величины $g_{\mu\nu}$ должны очевидно образовывать тензор, который, однако, является пока произвольным.

Предположение о каком-либо частном виде тензора $g_{\mu\nu}$ эквивалентно введению определенной системы калибровки, т. е. такой системы, которая приписывает однозначную меру интервалу между любыми двумя точками. В теории Вейля калибровка является частью физической, частью условной; предполагается, что длины, различно направленные, но находящиеся в одной точке, можно сравнивать экспериментальными (оптическими) методами; но относительно длин, находящихся в разных точках, не предполагается, что их можно сравнивать физическими методами (переносом часов и стандартных стержней), так что единица длины в каждой точке устанавливается условно. Я думаю, что такое двойственное определение длины нежелательно, и что длину нужно считать либо чисто условным, либо чисто физическим понятием. В настоящей главе мы рассматриваем ее как чисто условный инвариант, свойства которого мы желаем изучить, так что длина в том виде, как она здесь определяется, не есть что-либо, что должно согласоваться с обычными физическими опытами. Позже мы рассмотрим, как нужно выбрать $g_{\mu\nu}$, чтобы условная длина могла быть уста-

*) Ср. например формулу (94.7). (*Н.*)

новлена обычными физическими опытами и таким образом превратиться в физическую длину, но сейчас тензор $g_{\mu\nu}$ совершенно произволен.

Не уменьшая общности, мы можем предположить, что $g_{\mu\nu}$ является симметричным тензором, так как антисимметричная часть пропадает при умножении на $dx_\mu dx_\nu$ в (93.11) и поэтому не имеет значения.

Пусть l есть длина отрезка A_μ, так что

$$l^2 = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu. \tag{93.12}$$

Если A^μ перемещается путем параллельного переноса на dx_σ, то

$$d(l^2) = \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} A^\mu A^\nu + g_{\mu\nu} A^\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\sigma} + g_{\mu\nu} A^\mu \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\sigma}\right) dx_\sigma,$$

что, по (91.1) равно

$$= \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} A^\mu A^\nu - g_{\mu\nu} A^\nu \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} A^\alpha - g_{\mu\nu} A^\mu \Gamma^\nu_{\sigma\alpha} A^\alpha\right) dx_\sigma$$

и, наконец, после изменения немых значков

$$\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - g_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} - g_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\right) A^\mu A^\nu dx^\sigma.$$

Положим, в согласии с обычным правилом опускания значков

$$\Gamma_{\sigma\mu,\,\nu} = g_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha_{\sigma\mu};$$

тогда в результате получим

$$d(l^2) = \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \Gamma_{\sigma\mu,\,\nu} - \Gamma_{\sigma\nu,\,\mu}\right) A^\mu A^\nu (dx)^\sigma. \tag{93.2}$$

Но $d(l^2)$, как разность двух инвариантов, само представляет собой инвариант. Следовательно, величина, стоящая в скобках, есть ковариантный тензор третьего ранга *), очевидно симметрич-

*) Если представить A^μ в виде суммы $B^\mu + C^\mu$ двух независимых векторов B^μ и C^μ, то, так как коэффициент при $2K_{\mu\nu,\,\sigma}$ в (93.2) симметричен относительно μ и ν, величина $K_{\mu\nu,\,\sigma} B^\mu C^\nu (dx)^\sigma$ будет инвариантна, откуда сразу вытекает, что $K_{\mu\nu,\,\sigma}$ есть тензор. (*Н.*)

ный относительно μ и ν. Обозначим его через $2K_{\mu\nu,\sigma}$, так что

$$2K_{\mu\nu,\sigma}=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}-\Gamma_{\sigma\mu,\nu}-\Gamma_{\sigma\nu,\mu}. \tag{93.3}$$

Аналогично

$$2K_{\mu\sigma,\nu}=\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}-\Gamma_{\nu\mu,\sigma}-\Gamma_{\nu\sigma,\mu}$$

$$2K_{\nu\sigma,\mu}=\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}-\Gamma_{\mu\nu,\sigma}-\Gamma_{\mu\sigma,\nu}.$$

Складывая два последние выражения и вычитая (93.3), получим

$$K_{\mu\sigma,\nu}+K_{\nu\sigma,\mu}-K_{\mu\nu,\sigma}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right)-\Gamma_{\mu\nu,\sigma} \tag{93.4}$$

Если положить

$$S_{\mu\nu,\sigma}=K_{\mu\nu,\sigma}-K_{\mu\sigma,\nu}-K_{\nu\sigma,\mu}, \tag{93.5}$$

то (93.4) принимает вид

$$\Gamma_{\mu\nu,\sigma}=[\mu\nu,\sigma]+S_{\mu\nu,\sigma},$$

так что, если поднять значок σ, мы получим, наконец,

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu}=\{\mu\nu,\sigma\}+S^\sigma_{\mu\nu}. \tag{93.6}$$

Если $K_{\mu\nu,\sigma}$ имеет в частности вид $g_{\mu\nu}\varkappa_\sigma$, то

$$S^\sigma_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}\varkappa^\sigma-g^\sigma_\mu\varkappa_\nu-g^\sigma_\nu\varkappa_\mu,$$

так что (93.6) сводится к (86.2), причем

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu}={}^*\{\mu\nu,\sigma\}.$$

Таким образом, геометрия Вейля представляет частный случай нашей общей теории параллельного переноса. Его ограничение $K_{\mu\nu,\sigma}=g_{\mu\nu}\varkappa_\sigma$ эквивалентно ограничению, указанному в п. 84.

Формула $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}=\{\mu\nu,\sigma\}+S^\sigma_{\mu\nu}$ позволяет без труда переходить от различных результатов, полученных в метрической геометрии, к соответствующим результатам аффинной геометрии. Так например, мы знаем, что каждому тензору $A_{\mu\nu}$ соответствует тензор $A_{\mu\nu\sigma}$, определяемый соотношением

$$A_{\mu\nu\sigma}=\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}-\{\mu\sigma,\varepsilon\}A_{\varepsilon\nu}-\{\nu\sigma,\varepsilon\}A_{\mu\varepsilon}. \tag{93.7}$$

Отсюда следует, что ин-тензору $A_{\mu\nu}$ соответствует ин-тензор

$$(A_{\mu\nu})_\sigma = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \Gamma^\varepsilon_{\mu\sigma} A_{\varepsilon\nu} - \Gamma^\varepsilon_{\nu\sigma} A_{\mu\varepsilon}, \qquad (93.71)$$

так как разность правых сторон (93.7) и (93.71) очевидно есть тензор.

Однако, введение в аффинную геометрию, в которой метрические понятия не играют никакой роли, некоторой вспомогательной метрики, нужной лишь для проведения доказательства наших предположений и в конце концов подлежащей исключению, представляется весьма неудовлетворительным. Хотя такие доказательства конечно правильны, но они напоминают нам о понятиях, которые мы как раз хотели бы совершенно устранить.

Поэтому весьма желательно отметить, что операция аффинного (или ин-ковариантного) дифференцирования может быть введена непосредственно, безотносительно к какой-либо вспомогательной или иной метрике. В некотором векторном поле разность вектора $A^\mu + dA^\mu$, относящегося к точке $x_\mu + dx_\mu$ и вектора $A^\mu + \delta A^\mu$, который в точке $x_\mu + dx_\mu$ эквивалентен вектору A^μ, относящемуся к точке x_μ, тоже есть вектор. Поэтому в силу (91.1) величина

$$dA^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} A^\alpha dx_\nu$$

тоже есть вектор и, следовательно

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} A^\alpha \qquad (93.8)$$

есть тензор. Этот тензор мы назовем аффинной производной $(A^\mu)_\nu$ вектора A^μ. Определение аффинных производных тензоров более высокого порядка легко получается, если принять во внимание следующие правила, обеспечивающие тензорный характер аффинных производных:

a) Аффинная производная инварианта есть обычная его производная.

b) Аффинная производная произведения подчиняется обычному правилу дифференцирования произведения.

Из a) и b) следует, например, что

$$\frac{\partial (A_{\mu\nu} B^\mu C^\nu)}{\partial x_\sigma} = (A_{\mu\nu} B^\mu C^\nu)_\sigma = (A_{\mu\nu})_\sigma B^\mu C^\nu + A_{\mu\nu} (B^\mu)_\sigma C^\nu +$$
$$+ A_{\mu\nu} B^\mu (C^\nu)_\sigma.$$

Если подставить сюда для $(B^{\mu})_{\sigma}$ и $(C^{\nu})_{\sigma}$ выражения, построенные аналогично выражению (93.8) для $(A^{\mu})_{\sigma}$, то для $(A_{\mu\nu})_{\sigma}$ получается выражение (93.71).

Далее легко получить, что

$$((A_{\mu})_{\nu})_{\sigma} - ((A_{\mu}))_{\sigma\nu} = {}^{*}B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} A_{\varepsilon} \tag{93.9}$$

чем и доказываются непосредственно тензорные свойства ${}^{*}B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}$ [ср. (34.3)].

Если метрическая величина $\sqrt{-g}$ не существует вовсе, то не может быть и постоянного соотношения между тензорами и соответствующими тензорными плотностями. Однако, несмотря на это, и в аффинной геометрии существуют тензорные плотности, не зависящие ни от каких метрических понятий *). Это обстоятельство связано с существованием тензорной плотности $\mathrm{E}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (п. 49), представляющей собой число, очевидно не зависящее от положенной в основу метрики.

Можно построить также аффинные производные тензорных плотностей, например:

$$(\mathrm{A}^{\mu\nu})_{\sigma} = \frac{\partial \mathrm{A}^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} + \Gamma^{\nu}_{\varepsilon\sigma} \mathrm{A}^{\varepsilon\nu} + \Gamma^{\nu}_{\varepsilon\sigma} \mathrm{A}^{\mu\varepsilon} - \Gamma^{\varepsilon}_{\varepsilon\sigma} \mathrm{A}^{\mu\nu}, \tag{93.91}$$

что будет соответствовать «метрическим» ковариантным производным

$$\mathrm{A}^{\mu\nu}_{\sigma} = \frac{\partial \mathrm{A}^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} + \{\varepsilon\sigma, \mu\} \mathrm{A}^{\varepsilon\nu} + \{\varepsilon\sigma, \nu\} \mathrm{A}^{\mu\varepsilon} - \{\varepsilon\sigma, \varepsilon\} \mathrm{A}^{\mu\nu} \tag{93.92}$$

Не трудно убедиться, что между аффинными производными обобщенного тензора Риманна — Кристоффеля имеется циклическое соотношение

$$({}^{*}B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma})_{\tau} + ({}^{*}B^{\varepsilon}_{\mu\sigma\tau})_{\nu} + ({}^{*}B^{\varepsilon}_{\mu\tau\nu})_{\sigma} = 0, \tag{93.93}$$

аналогичное соотношению (52.6).

Тензор $2K_{\mu\nu,\sigma}$, введенный в (93.3), можно теперь весьма просто интерпретировать геометрически: это есть аффинная производная от $g_{\mu\nu}$.

---

*) Определение их при этом очевидно должно быть таково, чтобы закон преобразования отличался от (23.3) лишь появлением на правой стороне формулы множителя

$$J = \frac{\partial (x_1', x_2', x_3', x_4')}{\partial (x_1, x_2, x_3, x_4)} \tag{H.}$$

94. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИН-ТЕНЗОРОВ.

В формуле (92.41) мы выразили ${}^*B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}$ через величины $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$, не образующие тензора. С помощью (93.6) мы можем выразить теперь ${}^*B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}$ через тензоры $g_{\mu\nu}$ и $S^{\sigma}_{\mu\nu}$. Если подставить значения $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ из (93.6) в (92.41), то получается

$$
\begin{aligned}
{}^*B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} = &-\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu,\varepsilon\} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\mu\sigma,\varepsilon\} + \{\mu\sigma,\alpha\}\{\nu\alpha,\varepsilon\} - \{\mu\nu,\alpha\}\{\sigma\alpha,\varepsilon\} - \\
&-\frac{\partial}{\partial x_\sigma} S^{\varepsilon}_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} S^{\varepsilon}_{\mu\sigma} + S^{\alpha}_{\mu\sigma}\{\nu\alpha,\varepsilon\} + S^{\varepsilon}_{\nu\alpha}\{\mu\sigma,\alpha\} - S^{\alpha}_{\mu\nu}\{\sigma\alpha,\varepsilon\} - \\
&- S^{\varepsilon}_{\sigma\alpha}\{\mu\nu,\alpha\} + S^{\alpha}_{\mu\sigma} S^{\varepsilon}_{\nu\alpha} - S^{\alpha}_{\mu\nu} S^{\varepsilon}_{\sigma\alpha}.
\end{aligned}
$$

Первые четыре члена дают обыкновенный тензор Риманна — Кристоффеля (34.4). Дальнейшие шесть членов сводятся к выражению

$$-(S^{\varepsilon}_{\mu\nu})_\sigma + (S^{\varepsilon}_{\mu\sigma})_\nu,$$

где последние значки означают обычное (не ин-ковариантное) дифференцирование, так как, например, по (30.4), имеет место

$$(S^{\varepsilon}_{\mu\nu})_\sigma = \frac{\partial}{\partial x_\sigma} S^{\varepsilon}_{\mu\nu} - \{\mu\sigma,\alpha\} S^{\varepsilon}_{\alpha\nu} - \{\nu\sigma,\alpha\} S^{\varepsilon}_{\mu\alpha} + \{\alpha\sigma,\varepsilon\} S^{\alpha}_{\mu\nu}.$$

Следовательно

$$ {}^*B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} = B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} - (S^{\varepsilon}_{\mu\nu})_\sigma + (S^{\varepsilon}_{\mu\sigma})_\nu + S^{\alpha}_{\mu\sigma} S^{\varepsilon}_{\nu\alpha} - S^{\alpha}_{\mu\nu} S^{\varepsilon}_{\sigma\alpha} \tag{94.1}$$

Эта формула делает очевидным тензорный характер ${}^*B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}$, в то время как формула (92.41) выражала явно его ин-свойство.

Если мы теперь произведем, сокращение, полагая $\varepsilon = \sigma$, и напишем

$$S^{\alpha}_{\mu\alpha} = 2\varkappa_\mu, \tag{94.2}$$

то получим

$$ {}^*G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - (S^{\alpha}_{\mu\nu})_\alpha + 2\varkappa_{\mu\nu} + S^{\alpha}_{\mu\beta} S^{\beta}_{\nu\alpha} - 2\varkappa_\alpha S^{\alpha}_{\mu\nu}. \tag{94.3}$$

Далее умножение на $g^{\mu\nu}$ дает

$$ {}^*G = G + 2\lambda^{\alpha}_{\alpha} + 2\varkappa^{\alpha}_{\alpha} + 4\varkappa_\alpha\lambda^{\alpha} + S^{\alpha\beta}_{\gamma} S^{\gamma}_{\alpha,\beta},\text{*}) \tag{94.4}$$

где

$$S^{\alpha}_{\alpha,\mu} = -2\lambda_\mu. \tag{94.5}$$

---

*) Здесь $S^{\alpha\beta}_{\gamma}$ означает $g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} S_{\gamma\mu,\nu}$. (*Н.*)

Разница между (94.5) и (94.2) заключается в том, что λ_μ получена в результате приравнивания друг другу обоих симметричных значков, в то время как при образовании $\varkappa_\mu$ один из симметричных значков положен равным третьему значку тензора S. Конечно, $\varkappa_\mu$ и λ_μ совершенно различные векторы.

Единственный член в правой части (94.3), не симметричный относительно μ и ν, есть $2\varkappa_{\mu\nu}$.

Положим теперь

$$R_{\mu\nu} \doteq G_{\mu\nu} + (\varkappa_{\mu\nu} + \varkappa_{\nu\mu}) - (S^\alpha_{\mu\nu})_\alpha - 2\varkappa_\alpha S^\alpha_{\mu\nu} + S^\alpha_{\mu\beta} S^\beta_{\nu\alpha} \qquad (94.61)$$

$$F_{\mu\nu} \doteq \varkappa_{\mu\nu} - \varkappa_{\nu\mu}, \qquad (94.62)$$

так что

$$^*G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}, \qquad (94.63)$$

где $R_{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$ представляют симметричную и антисимметричную часть $G_{\mu\nu}$. Очевидно обе величины

$$R_{\mu\nu}\left[= \frac{1}{2}(^*G_{\mu\nu} + {}^*G_{\nu\mu})\right] \text{ и } F_{\mu\nu}\left[= \frac{1}{2}(^*G_{\mu\nu} - {}^*G_{\nu\mu})\right],$$

являются ин-тензорами.

Если мы положим далее

$$^*B_{\mu\nu\sigma\varepsilon} = R_{\mu\nu\sigma\varepsilon} + F_{\mu\nu\sigma\varepsilon},$$

где $R_{\mu\nu\sigma\varepsilon}$ антисимметрично, а $F_{\mu\nu\sigma\varepsilon}$ симметрично относительно μ и ε, то после вычисления, которого мы не будем здесь приводить, получается

$$F_{\mu\nu\sigma\varepsilon} = (K_{\mu\varepsilon,\,\nu})_\sigma - (K_{\mu\varepsilon,\,\sigma})_\nu,$$

результат, который представляет интерес в связи с соображениями п. 84. Однако величины $R_{\mu\nu\sigma\varepsilon}$ и $F_{\mu\nu\sigma\varepsilon}$ не являются ин-тензорами, так как при переносе вниз значков ε были введены $g_{\mu\nu}$.

Далее, из (92.5) и (93.6) следует

$$\Gamma_\mu = \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} = \{\mu\alpha,\ \alpha\} + S^\alpha_{\mu\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\lg\sqrt{-g}) + 2\varkappa_\mu. \qquad (94.7)$$

Сравнение с (92.7) показывает, что функция Ω, которая там была неопределенной, здесь оказывается равной $\lg\sqrt{-g}$, и, следовательно, не является инвариантом.

95. ЕСТЕСТВЕННАЯ КАЛИБРОВКА МИРА.

Введем теперь естественную калибровку мира. Тензор $g_{\mu\nu}$, который до сих пор оставался произвольным, должен быть теперь выбран так, чтобы длины смещений совпадали с теми длинами, которые дают измерения, произведенные при помощи материальных и оптических приборов. Но каждый прибор, употребляемый для измерения мира, сам представляет собой часть мира. Следовательно, естественная калибровка означает калибровку мира с помощью его самого. Это может означать только то, что тензор $g_{\mu\nu}$, определяющий естественную калибровку, не входит извне, но представляет собой тензор, уже содержащийся в геометрии мира. Мы нашли только один такой тензор второго ранга, именно $^*G_{\mu\nu}$. Следовательно, естественная длина определяется выражением

$$l^2 = {}^*G_{\mu\nu} A^\mu A^\nu.$$

Здесь антисимметричная часть $^*G_{\mu\nu}$ выпадает и у нас остается

$$l^2 = R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu.$$

На основании (93.12) мы должны положить

$$\lambda g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}, \tag{95.1}$$

причем универсальная постоянная λ вводится для того, чтобы иметь возможность вместо естественных единиц длины, отношение которых к обычным единицам неизвестно, употреблять сантиметр.

В п. 66 уже был в сущности рассмотрен способ, которым тензор $R_{\mu\nu}$ приводился в связь с измерениями, проделанными при помощи материальных приборов, на основании своего (предполагаемого) значения для структуры материи. Нам остается только заменить тензор $G_{\mu\nu}$, который мы употребляли в этом параграфе, его более общей формой $R_{\mu\nu}$, так как $G_{\mu\nu}$ не есть ин-тензор и получает определенное значение лишь *после того*, как сформулировано уравнение калибровки (95.1). Основные моменты этих соображений заключаются в следующем.

Примем сначала какую-нибудь произвольную условную калибровку, не стоящую в какой-либо связи с физическими измерениями. Пусть смещение A^μ представляет проведенный в некотором направлении радиус какой-либо определенной единицы материальной структуры, например, средние размеры электрона, или атома кислорода, или капли воды, содержащей 10^{20} молекул при температуре ее максимальной плотности. A^μ определяется законами, в основном нам неизвестными. Но точно так же, как мы часто можем открыть результаты неизвестных нам физических законов с помощью соображений о размерности, принимая в расчет физические константы, которые могут входить в эти результаты, так и здесь мы можем определить условие, которому удовлетворяет A^μ, принимая во внимание все мировые тензоры, имеющиеся в нашем распоряжении. Согласно этому методу искомое условие имеет вид

$$R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = \text{const}. \tag{95.11}$$

Если теперь мы начнем производить различные измерения в мире употребляя в качестве единицы радиус этого материального образования, то тем самым мы примем калибровку (и $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$), при которой длина l этого радиуса равна единице, т. е.

$$1 = l^2 = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu. \tag{95.12}$$

Сравнение (95.11) и (95.12) приводит к выводу, что $g_{\mu\nu}$ должно отличаться от $R_{\mu\nu}$ лишь постоянным множителем. Таким образом мы получаем (95.1) *).

На ряду со сравнениями с помощью материальных единиц мы можем сравнивать длины отрезков также оптическим путем. Мы должны показать, что и эти измерения тоже приводят к калибровке (95.1). Световые импульсы, исходящие из какой-либо точки пространства-времени, заполняют некоторое коническое геометрическое место, некоторый конус. Этот конус существует независимо от калибровки и координатной системы, поэтому он должен определяться ин-тензорным уравнением. Единственное ин-тензорное уравнение, определяющее конус второго порядка, которое можно образовать с помощью имеющихся у нас тензоров, есть

$$R_{\mu\nu}\, dx_\mu dx_\nu = 0, \tag{95.21}$$

*) Заметим, что предполагаемая изотропия материальной единицы или электрона не означает непременно симметрию формы, а только независимость от ориентации. Так например, масштаб метра обладает требуемой изотропией, потому что он по условию при любой ориентации имеет ту же длину.

Если сравнить это с формулой Эйнштейна для светового конуса

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu dx_\nu = 0, \tag{95.22}$$

то опять получается

$$R_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}. \tag{95.23}$$

Заметим однако, что сравнение длин оптическими методами дает нам меньше, чем употребление материальных единиц длины. Действительно, уравнения (95.21) и (95.22) были бы совместны даже и в том случае, если бы λ было функцией от координат, в то время как сравнение с помощью материальных единиц требует, чтобы оно было универсальной постоянной. Именно поэтому развитая Вейлем теория преобразований калибровки лежит по середине между чистой математикой и физикой. Вейль принимает, что физическое сравнение длин совершается оптическими методами, так что его преобразования калибровки ограничиваются такими, которые не нарушают уравнения (95.23); возможности же сравнения длин посредством материального переноса он не допускает, вводя поэтому λ как функцию, которая определяется совершенно условно и может и не быть постоянной. Поэтому в понятии «длины» у Вейля имеются и физические и условные элементы.

Такая двойственная калибровка, даже если она и не логична, может для некоторых проблем оказаться полезной, в частности в том случае, когда мы описываем электромагнитное поле без всякого отношения к материи или предпосылаем такое описание введению материи. Даже и без материи электромагнитное поле может быть использовано для своей собственной калибровки в пределах равенства (95.23), в котором, следовательно, λ есть функция положения. Таким образом, в этих пределах мы можем калибровать наши тензоры, не вводя при этом всей проблемы материи. Различные ин-тензоры и ин-инварианты теории Вейля уже не будут инвариантны относительно неограниченных преобразований калибровки, появляющихся в обобщенной теории; они становятся однако определенными, если используется лишь оптическая калибровка, в то время как обычные инварианты и тензоры определяются на основании их связи с материальными масштабами. В частности $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$ не есть полная ин-тензорная плотность, однако она имеет некоторый абсолютный смысл сама по себе, так как $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$ измеряет электромагнитное поле, и, обратно, электромагнитные поля (световые волны) будут достаточны для ее калибровки. Эту величину можно сравнить с тензором $F^{\mu\nu}$, который может быть прокалиброван только с помощью материальных масштабов; $T^{\mu\nu}$ также имеет абсолютный смысл, но уже не сам по себе. На этом основании возникают проблемы, для изучения которых особенно подходящими являются введенные Вейлем более ограниченные преобразования калибровки, и поэтому мы полагаем, что его теория не заменяется обобщенной теорией, но лишь дополняется ею.

Если положить в основу естественную калибровку мира, то его состояние будет описываться с помощью тензоров $g_{\mu\nu}$ и $K^{\sigma}_{\mu\nu}$ *). Если последний равен нулю, то мы обнаруживаем физически только тензор $g_{\mu\nu}$, т. е. чистую метрику**). Но метрика есть единственное свойство пространства — при этом я разумею конечно физическое и житейское понятие пространства, математик же может своему пространству приписывать все свойства, какие он только пожелает. Если $K^{\sigma}_{\mu\nu}$ не равно нулю, то должно иметься еще нечто, что воспринимается не как свойство чистого пространства. Следовательно, $K^{\sigma}_{\mu\nu}$ должно быть приписано чему-то «вещному»***). Если же ничего «вещного» не имеется, т. е. пространство совершенно пусто, то $K^{\sigma}_{\mu\nu} = 0$, и $R_{\mu\nu}$ в силу (94.61) сводится к $G_{\mu\nu}$. Поэтому уравнение калибровки для пустого пространства приводится к виду

$$G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}, \qquad (95.3)$$

а это есть не что иное, как закон тяготения (37.4). Следовательно, уравнение калибровки есть лишь другая форма закона тяготения.

Из (66.2) следует, что естественная единица длины (при $\lambda = 1$) в любом направлении в пустом пространстве равна радиусу кривизны мира, умноженному на $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Мы не знаем значения его, но, конечно, оно должно быть очень велико.

---

*) Где $K^{\sigma}_{\mu\nu}$ есть на основании п. 93 тензор третьего ранга по отношению к $g_{\mu\nu}$. *(Н.)*

**) Заметим, что тогда в силу (93.6) $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \left\{ {\mu\nu, \sigma} \right\}$, так что аффинная связь относится к риманнову пространству с метрикой $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$. *(Н.)*

***) Электромагнитное поле есть нечто вещественное, а поле тяготения нет, потому что теория Эйнштейна показала, что оно является лишь формой проявления метрики.

Относительно определения пустого пространства условием $K^{\sigma}_{\mu\nu}=0$ необходимо, однако, сделать оговорку. Возможно, что мы не сможем никакими физическими опытами обнаружить непосредственно тензор $K^{\sigma}_{\mu\nu}$, но лишь определенные комбинации его составляющих. В этом случае нельзя было бы говорить, что определенные значения $K^{\sigma}_{\mu\nu}$ соответствуют некоторой вещи, если бы обнаруживаемые на опыте комбинации составляющих этого тензора для этих его значений обращались в нуль — совершенно так же, как отличные от нуля значения $\varkappa_{\mu}$ не соответствуют никакому электромагнитному полю, если вихрь $\varkappa_{\mu}$ равен нулю. Однако это не влияет на правильность уравнения (95.3), так как каждое его нарушение устанавливается физическими опытами и поэтому может быть описано с помощью таких комбинаций составляющих $K^{\sigma}_{\mu\nu}$, которые имеют физический смысл.

96. ПРИНЦИП ОТОЖДЕСТВЛЕНИЯ.

В пп. 91—93 мы развили чистую геометрию, с помощью которой должен быть описан комплекс мировых соотношений. Этот комплекс соотношений проявляется в нашем опыте как физический мир, состоящий из *пространства, времени и вещей*. Переход от геометрического к физическому описанию может быт, выполнен только тем путем, что мы отождествим тензоры, измеряющие физические величины, с тензорами, найденными в чистой геометрии; поэтому мы должны сначала спросить себя, какими экспериментальными свойствами обладает данный физический тензор, а потом поискать геометрический тензор, обладающий теми же свойствами *в силу математических тождеств*.

Если нам удастся провести эту программу полностью, то тем самым мы из комплекса элементарных соотношений построим мир определенных сущностей, который ведет себя так же и подчиняется тем же законам, что и величины, познаваемые из физических опытов. Физическая теория вряд ли может итти еще дальше. Вопрос, каким образом ум познает эти величины и сплетает их в живую картину воспринимаемого мира, является в большей мере психологической, чем физической проблемой.

Первым шагом в нашем переходе от математики к физике будет отождествление геометрического тензора $R_{\mu\nu}$ с физическим тензором $g_{\mu\nu}$, выражающим метрику физического пространства и времени. Так как метрика есть единственное физически воспринимаемое свойство пространства и времени, то можно также сказать, что мы уже отождествили пространство и время с некоторыми элементами основного комплекса соотношений. Теперь следует перейти в отождествлению «вещей». Физическое же описание «вещей» в основном совершается в три приема.

1. В *тензоре энергии* объединяются энергия, импульс и напряжения на единицу объема. Он обладает свойством сохранения $(T^{\nu}_{\mu})_{\nu}=0$, что дает нам возможность произвести следующее отождествление

$$-8\pi T^{\nu}_{\mu}=G^{\nu}_{\mu}-\frac{1}{2}g^{\nu}_{\mu}(G-2\lambda), \tag{96.1}$$

причем правая сторона тождественно удовлетворяет закону сохранения. Постоянная λ пока что может быть еще произвольной. Если же мы, как это обычно делается, примем за начальное состояние, от которого отсчитываются энергия, импульс и напряжения, состояние пустого (свободного также и от электромагнитных полей) пространства, то для пустого пространства, приравнивая нулю (96.1), мы получим, как и в п. 54, условие

$$G_{\mu\nu}=\lambda g_{\mu\nu},$$

так что λ должна быть той же постоянной, которая входит в (95.3).

2. *Тензор* $F_{\mu\nu}$ *электромагнитных сил* обладает тем свойством, что он удовлетворяет первой половине уравнений Максвелла

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}+\frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_{\mu}}+\frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_{\nu}}=0. \tag{96.2}$$

Это соотношение выполняется тождественно, если $F_{\mu\nu}$ есть вихрь какого-нибудь ковариантного вектора. Поэтому мы отождествим $F_{\mu\nu}$ с тем ин-тензором, который мы, предвосхищая дальнейшее, уже обозначили через $F_{\mu\nu}$ и который, как мы видели, представляет собой вихрь вектора $\varkappa_{\mu}$ (94.62).

3. *Четырехмерный вектор заряда-тока* J^{μ} удовлетворяет закону сохранения электрического заряда:

$$J^{\mu}_{\mu}=0.$$

Расходимость J^{μ} будет тождественно равна нулю, если само J^{μ} есть расходимость антисимметричного контравариантного тензора. Поэтому мы производим отождествление J^{μ} согласно формуле

$$J^{\mu} = F^{\mu\nu}_{\nu},$$

причем тогда окажется удовлетворенной также и вторая половина уравнений Максвелла.

Чтобы доказать правильность подобных отождествлений, необходимо исследовать, обладают ли определенные таким образом физические тензоры всеми свойствами, которые должны быть им приписаны на основании данных эксперимента. Однако существует еще один общий физический закон, который не содержится явно в данных нами определениях, именно, закон механической силы электромагнитного поля. Мы можем здесь показать только очень несовершенным образом, что наши тензоры удовлетворяют этому закону, так как полное доказательство потребовало бы более детального знания структуры электрона. Но соображения п. 80 показывают, что этот закон весьма правдоподобен.

При отождествлении «вещей» мы не ограничивались ин-тензорами, так как объекты, рассматриваемые в физике, находятся в физическом пространстве и времени и, следовательно, предполагают естественную калибровку. Законы сохранения и уравнения Максвелла, которые мы использовали для отождествления «вещей», не имели бы уже места при произвольной системе масштабов.

Несомненно мыслимы и отождествления и другого типа*).

*) Эйнштейн в своем видоизменении этой теории использовал несколько отличное отождествление величин $g_{\mu\nu}$ (ср. уравнение (4) приложения), которое однако в отсутствии электромагнитного поля сводится к данному мною. Прежде чем решить, кто из нас нашел правильное общее отождествление, необходимо поставить вопрос, было ли когда-либо вообще точно определено измерение длины в электромагнитном поле. Физик, который хочет произвести очень точное измерение длины, считает необходимым правилом предосторожности поставить свои опыты в исчезающе малом поле; таким образом физическая практика не знает особого определения длины, измеренной в электромагнитном поле. Поэтому я не думаю, чтобы вообще одно из этих отождествлений можно было назвать правильным, а другое ложным; но одно может быть предпочтительнее другого, если оно увеличивает наглядность. Впрочем, отождествление Эйнштейна также обладает всеми преимуществами, на которые я указал при формулировке моих положений, и, может быть, его следует предпочесть.

Так например, можно было бы $F_{\mu\nu}$ отождествить с вихрем λ_μ *), а не с вихрем $\varkappa_\mu$. Тогда фундаментальному ин-тензору $^*G_{\mu\nu}$ ничто не соответствовало бы в физическом мире — он ничего бы не делал, чтобы оправдать свое существование. Мы ввели наиболее естественное отождествление, и самое разумное, пожалуй, остановиться на нем до тех пор, пока его неприемлемость не будет доказана решающими экспериментами. Во всяком случае, число отождествлений, возможных при имеющемся материале, весьма ограничено.

97. РАЗВЕТВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Фундаментальный ин-тензор $^*G_{\mu\nu}$ распадается на симметричную часть $R_{\mu\nu}$ и антисимметричную $F_{\mu\nu}$. Первая часть равна $\lambda g_{\mu\nu}$ или, при употреблении естественной единицы длины ($\lambda = 1$), просто равна $g_{\mu\nu}$. Тогда мы имеем равенство

$$^*G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu},$$

из которого особенно ясно видно, что поле (или эфир) характеризуется двумя величинами, именно потенциалом тяготения (или метрикой) и электромагнитной силой. Обе эти величины соединены простейшим возможным образом в один тензор, служащий для описания комплекса основных мировых соотношений, и отсюда мы видим общее основание для этого неизбежного разветвления на симметричный и антисимметричный — геометрически-механический и электромагнитный элементы.

Эйнштейн получил эти тензоры из физики, установив их существование на наблюдаемых явлениях. Мы же, напротив, приходим к ним дедуктивным путем, стремясь показать возможно более полным образом, что они должны существовать для комплекса основных соотношений почти любого типа. Мы подтверждаем предположение Эйнштейна, что интервал ds^2 есть абсолютная величина, так как это есть наш ин-инвариант $R_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$. Мы

---

*) Вихрь λ_μ не есть ин-тензор, но, как сказано выше, нет оснований для того, чтобы ограничиваться ин-тензорами. Если бы мы на практике измеряли магнитный поток путем сравнения его с потоком магнита, переносимого с места на место, так же, как мы измеряем длину посредством переноса масштабов, то необходимо было бы взять ин-тензор. В действительности однако употребляется не этот способ измерения.

подтверждаем затем известное свойство $F_{\mu\nu}$, заключающееся в том, что эта величина есть вихрь некоторого вектора.

Мы можем далее не только оправдать предположение, что естественная геометрия есть геометрия Римана, а не сверх-риманнова геометрия Вейля, но в состоянии также указать основание того, почему формула для интервала должна быть квадратичной. А именно, единственной простой абсолютной величиной, относящейся к двум точкам, является

$$^*G_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu.$$

Чтобы получить какой-либо другой ин-инвариант, мы должны были бы перейти к таким выражениям, как например,

$$^*B^\rho_{\mu\nu\sigma}\, {}^*B^\sigma_{\lambda\tau\rho}\, dx_\mu\, dx_\nu\, dx_\lambda\, dx_\tau.$$

Хотя это последнее выражение четвертого ранга теоретически и выражает тоже некоторое абсолютное свойство, относящееся к паре точек, но вряд ли можно ожидать, что при физическом исследовании мира мы столкнемся с ней столь же непосредственно, как и с вышенаписанным квадратичным выражением.

Полученное таким путем новое понимание этих основных моментов и является главным преимуществом нашей обобщенной теории.

98. СТРУКТУРА ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ.

Мы переходим теперь к более подробному анализу понятий, от которых зависят основные аксиомы параллельного переноса и аффинной геометрии.

Основа вещественного мира, по нашему предположению, будет обладать *субстанцией* и *структурой*. Субстанцию мы не можем описать, мы можем ее только наименовать. Попытка итти дальше наименования сейчас же ведет к приписыванию некоторой структуры. Наоборот, структуру можно до известной степени описать, и, будучи сведена к своим элементарным составным частям, она оказывается не чем иным, как комплексом соотношений. Далее, эти соотношения не могут быть абсолютно несравнимыми, потому что, если бы ничто в мире не было сравнимым с чем-либо другим, то все части мира были бы сходны друг с другом в своем несходстве и невозможны были бы даже зачатки структуры.

Аксиома параллельного переноса есть выражение этой сравнимости, и постулированная таким образом сравнимость представляется почти минимальной мыслимой. Только соотношения, близкие друг к другу, т. е. связанные в комплексе соотношений, предполагаются сравнимыми, и понятие эквивалентности применяется только к одному типу соотношений. Это сравнимое соотношение называется смещением. Выражая его графически, мы приходим к представлению о пространственной ориентации; основание, по которому нам кажется естественным выражать графически именно это специальное соотношение, лежит вне поля зрения физики.

Таким образом, наша аксиома параллельного переноса есть геометрическая форма принципа, который можно было бы назвать «сравнимостью близких соотношений».

В рассуждениях теории относительности есть некоторый пробел, который никогда не был продуман исчерпывающим образом. Мы относим все явления к системе координат, но при этом не объясняем, каким образом систему координат (т. е. метод приписывания событиям в целях их отождествления некоторых чисел) следует вводить с самого начала. Можно было бы думать, что вопрос о том, как она была найдена, не имеет значения, так как системы координат в теории относительности, к счастью, являются совершенно произвольными. Однако, произвольность координатной системы на самом деле все же ограничена. Действительно, мы можем употреблять любые непрерывные преобразования, но наша теория не рассматривает таких прерывных преобразований координат, которые означали бы перестановку точек континуума. Ограничивая изменения координат непрерывными преобразованиями, мы как будто желаем сохранить нечто, соответствующее *порядку перечисления* точек.

Ясно, что этот «порядок», который мы инстинктивно стремимся сохранить, должен быть структурным порядком точек, т. е. таким порядком, который определяется их взаимными соотношениями в структуре мира. В противном случае тензоры, выражающие основные черты структуры и поэтому, повидимому, имеющие физическое значение, оказались бы прерывными при координатном описании мира. Насколько мне известно, единственная попытка вывести метод координатного упорядочения из некоторого постулированного структурного отношения была сделана Роббом *). Для специальной теории относительности эта попытка как будто бы оказалась успешной, хотя соответствующие исследования чрезвычайно затруднительны. В общей же теории относительности, напротив, очень трудно указать даже путь разрешения этой проблемы. Ни в коем случае нельзя считать очевидным, что взаимная связь соотношений необходимо устанавливает такое упорядочение континуума, которого требует и координатное представление. Я не могу ничего сказать по этому поводу. Нужно согласиться с тем, что мы совершаем скачок, когда, установив существование сравнимого соотношения, называемого смещением, переходим затем к предположению, что упорядочение точек, вызванное этим соотношением, будет аналогично тому, которое неявно постулируется при графическом изображении смещения как разности координат.

Этот скачок указывает на нечто более существенное, чем временное отсутствие строгого вывода. Он означает, что пространство и время — только приближенные понятия, которые в конце концов должны быть заменены более общим представлением об упорядочении событий природы, не укладывающихся в рамки четырехмерной координатной системы. Именно в этом направлении некоторые физики надеются найти решение противоречий квантовой теории. Было бы ошибочным предполагать, что представление о расположении в пространстве и времени, соответствующее наблюдению макроскопических явлений, можно без изменений применять к таким явлениям, в которых участвует малое число квантов. Если допустить, что это является правильным решением, то становится бесполезным пытаться ввести квантовые явления в готовые формулы нашей теории. Эти явления оказываются исключенными уже в самом начале принятием некоторой координатной системы отсчета.

Соотношение смещения между мировыми точками (событиями) и соотношение «эквивалентности» между смещениями представляют собой элементы одной и той же идеи, которую мы расчленили для облегчения ее математической обработки. Утверждение, что соотношение смещения между A и B имеет такое-то

*) «The absolute Relations of Time and Space» (Cambridge University Press). Robb использует соотношение «до — после»

значение, не имеет никакого абсолютного смысла; наоборот, утверждение о том, что соотношение смещения между A и B «эквивалентно» соотношению смещения между C и D, есть некоторое абсолютное высказывание (или, по крайней мере, могло бы быть таковым). Таким образом, четыре точки являются наименьшим числом точек, для которого возможно установить какое-либо абсолютное структурное соотношение *). Последними элементами структуры при этом оказываются четырехточечные элементы. Приняв условия (91.3) аффинной геометрии, я ограничил возможные высказывания о четырехточечном элементе утверждением о том, что четыре точки образуют или не образуют параллелограмм. Оправдание введения аффинной геометрии основывается поэтому на вполне правдоподобном предположении, что четырехточечные элементы можно различать по некоторому очень простому свойству, именно по тому, принадлежат ли они к некоторому определенному типу, условно называемому *параллелограммным*, или нет. Если мы разлагаем свойство быть параллелограммом на двойную эквивалентность AB, CD и AC, BD, то это означает только определение того, что следует понимать под эквивалентностью смещений.

Я не придаю особого веса этому оправданию аффинной геометрии. Вполне может случиться, что четырехточечные элементы отличаются друг от друга свойством, которое можно назвать *трапецоидальностью*, обладая которым, пары сторон уже не будут переставными. В этом случае мы должны были бы различать элемент $ABCD$, трапецоидальный по отношению к AB и CD от элемента, трапецоидального по отношению к AC и BD. Я вполне готов считаться с той возможностью, что условие аффинности не всегда выполнено, что ведет к новым явлениям, не содержащимся в изложенной теории. Однако, пожалуй, лучше всего будет, если мы, поставив себе целью достижение наибольшей общности, будем выполнять обобщение постепенно, подвергая исследованию каждую ступень обобщения, прежде чем подниматься к следующей ступени. Что касается трудностей, которые могут встретиться на пути наиболее общего описания структуры

*) Если исключить вырожденный случай, когда две точки совпадают, и поэтому приходится иметь дело с тремя точками. Но для трех точек не существует никакого абсолютного утверждения, которое соответствовало бы утверждению, что четыре точки образуют или не образуют параллелограмм.

мировых соотношений, то здесь необходимо иметь в виду возможность того, что в физике мы имеем дело не с индивидуальными отношениями, а со статистическими средними, и, может быть, принятые нами упрощения становятся возможными именно благодаря усреднению.

99. ТЕНЗОР ${}^*B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}$.

Сверх тензоров $g_{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$, которые были так хорошо использованы Эйнштейном, наше исследование извлекло на свет еще некоторое количество как будто бы бесполезного хлама. Мы получили полный тензор ${}^*B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}$ который до сих пор использовался только в сокращенной форме, т. е. так, что некоторые его компоненты игнорировались вообще, а другие находили применение не индивидуально, а в виде линейных комбинаций (сумм). Пока решение проблемы структуры электрона не продвинулось вперед, было бы преждевременно окончательно отбрасывать какой-либо материал, который все же мог бы оказаться существенным, хотя в настоящий момент нет особых оснований предполагать, что весь тензор будет чем-нибудь полезен при построении электронов.

При теперешнем состоянии наших знаний тензор ${}^*B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}$ нельзя считать физической величиной; он *содержит* физическую величину ${}^*G_{\mu\nu}$. Два состояния мира, описываемые различными ${}^*B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}$, но одним и тем же ${}^*G_{\mu\nu}$, — это, насколько нам известно, тождественные состояния, точно так же, как две конфигурации событий, описываемые различными координатами, но одинаковыми интервалами, будут тождественными конфигурациями. Но если так, то величины $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}$ должны, кроме преобразований координат, допускать и другие преобразования, не изменяющие ничего в физическом состоянии мира.

Поэтому тензор $K^{\sigma}_{\mu\nu}$ может принимать любое из бесконечного ряда значений, причем физическое состояние мира от этого не изменится. Может быть, возможно показать, что среди этих значений есть и значение $g_{\mu\nu}\varkappa^{\sigma}$, приводящее к геометрии Вейля; однако, я не уверен, что это действительно имеет место. Высказывалось мнение, что появление в изложенной обобщенной теория величин, не имеющих физического смысла, есть недостаток теории и что геометрия Вейля, содержащая в точности наблюдаемое число «степеней свободы» обладает, в связи с этим, преимуществом в сравнении с ней. Для некоторых целей это может быть и верно, но не для проблем, которые мы теперь рассматриваем.

Для того чтобы понять, почему структура мира такова, что имеет место данное наблюдаемое явление, мы необходимо должны сравнить ее с другими структурами более общего типа; а это предполагает рассмотрение «не-физических» величин, которые существуют в гипотетических сравниваемых мирах, но которых нет в физической природе, так как они не существуют в действительном мире. Если мы откажемся рассматривать любое состояние, которое мыслимо, но не действительно, то мы ничего не сможем сказать о действительности; мы сможем лишь догматически предписывать ее.

Чтобы представить себе, что мы выигрываем благодаря такой более широкой точке зрения, рассмотрим вопрос о том, почему поле описывается в точности 14 потенциалами. Прежнее наше объяснение приписывало это наличию 14 переменных в наиболее общем типе геометрии. Теперь мы видим, что это ошибочно и что естественное обобщение геометрии Риманна приводит к 40 переменным; и это число несомненно может быть еще повышено. Действительная причина ограничения числа потенциалов четырнадцатью заключается в том, что, даже кладя в основу геометрию с 40 переменными, мы получаем фундаментальный ин-тензор второго порядка, содержащий 14 переменных*); а наблюдаемые явления определяются именно интензором (т. е. числовой мерой физического состояния мира), а не геометрией мира (т. е. произвольным графическим изображением его).

«Хлам», который мы нашли, не может причинить вреда. Если он не влияет на структуру электронов или квантов, то мы ничего не можем узнать о нем, так как в таком случае не существует приборов, с помощью которых его можно было бы открыть; если же мы обнаружим, что он влияет на их структуру, то тем самым мы откроем его. Важно только устранить его из проблем, для которых он несущественен, а это легко сделать, так

---

*) В формуле (94.63) тензор $F_{\mu\nu}$ имеет 6 линейно независимых составляющих, однако они зависят от 4 составляющих, например, вектора $\varkappa_{\mu}$. (*Н.*)

как введением тензора $^*G_{\mu\nu}$, мы уже отделим золото от примеси. Совсем не обязательно специализировать возможную структуру соотношений в мире, давая бесполезным переменным определенное значение, именно нуль. Это лишает нас возможности отметить то интересное само по себе обстоятельство, что мир вел бы себя таким же точно образом и в том случае, если бы они не равнялись нулю.

Мы видим, что можно принять одну из следующих двух точек зрения:

1. *Существуют* (в физическом смысле слова) только такие вещи, которые могут быть открыты возможными экспериментами.

2. Нам может быть известна только часть *существующих* (в расширенном смысле слова) вещей, причем выбор обусловлен свойствами тех приборов, которые могут быть использованы для исследования природы.

Оба представления справедливы в соответствующих областях. В прежней части этой книги первое из них оказалось особенно полезным для освобождения физики от метафизических понятий. Но если мы зададим вопрос, почему структура мира такова, что в ней играют роль именно величины $g_{\mu\nu}$ и $\varkappa_\mu$ и больше ничего, то мы не сможем при этом игнорировать тот факт, что структура мира не может обнаруживаться в таких проявлениях, для открытия которых не существует никаких приборов. Поэтому совсем незачем вводить особые ограничения структуры мира с целью исключения всего, что не может быть установлено физикой, и после этого удивляться этим ограничениям. Ясно, что причиной этих ограничений является тогда не структура мира.

100. ДИНАМИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ ОБЩИХ СВОЙСТВ МИРОВЫХ ИНВАРИАНТОВ.

Применим теперь метод п. 61 к мировым инвариантам, зависящим от электромагнитных переменных. Пусть $\mathfrak{K}$ есть некоторая скалярная плотность, зависящая от $g_{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}$, $\varkappa_\mu$ и их производных до некоторого порядка, так что интеграл

$$\int \mathfrak{K}\, d\tau,$$

взятый по любой области, есть инвариант.

$F_{\mu\nu}$ можно было бы выразить через производные от $\varkappa_\mu$. Однако, при настоящем исследовании мы этого не будем делать, так как нас главным образом интересует тот случай, когда K не зависит от самих $\varkappa_\mu$, а только от их вихря, так что K содержит лишь $g_{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$.

Как и в п. 61, интегрирование по частям при условии, что вариации равны нулю на границе области интегрирования, дает

$$\delta \int K d\tau = \int (\mathrm{P}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} - \mathrm{H}^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} + \mathrm{Q}^\mu \delta\varkappa_\mu) d\tau. \tag{100.1}$$

При этом

$$P^{\mu\nu} = \frac{\mathfrak{h} K}{\mathfrak{h} g_{\mu\nu}}, \quad H^{\mu\nu} = -\frac{\mathfrak{h} K}{\mathfrak{h} F_{\mu\nu}}, \quad Q^\mu = \frac{\mathfrak{h} K}{\mathfrak{h} \varkappa_\mu}, \tag{100.2}$$

и $P^{\mu\nu}$ — симметричный, а $H^{\mu\nu}$ — антисимметричный тензор.

Тогда мы получим

$$\mathrm{H}^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = \mathrm{H}^{\mu\nu} \left(\frac{\partial (\delta\varkappa_\mu)}{\partial x_\nu} - \frac{\partial (\delta\varkappa_\nu)}{\partial x_\mu} \right) = 2\,\mathrm{H}^{\mu\nu} \frac{\partial (\delta\varkappa_\mu)}{\partial x_\nu},$$

что с точностью до полного дифференциала равно

$$-2 \frac{\partial \mathrm{H}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \delta\varkappa_\mu,$$

или, в силу (51.52),

$$-2\,\mathrm{H}^{\mu\nu}_\nu \delta\varkappa_\mu.$$

Отсюда, наконец,

$$\delta \int K d\tau = \int \{\mathrm{P}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + (2\,\mathrm{H}^{\mu\nu}_\nu + \mathrm{Q}^\mu) \delta\varkappa_\mu\} d\tau. \tag{100.3}$$

Предположим теперь, что вариация $\delta g_{\mu\nu}$ и $\delta\varkappa_\mu$ происходит только от произвольных вариаций δx_α системы координат по правилам преобразования тензоров и векторов. Сам инвариант при этом не меняется, так что его вариация равна нулю. Повторение вычисления, приведшего нас к (61.3), дает следующее выражение для изменения $\varkappa_\mu$ при сравнении точек с одинаковыми координатами x_α в исходной и новой системе:

$$-\delta\varkappa_\mu = \varkappa_\alpha \frac{\partial (\delta x_\alpha)}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \varkappa_\mu}{\partial x_\alpha} \delta x_\alpha.$$

Отсюда следует с точностью до полного дифференциала

$$-(\mathrm{Q}^\mu + 2\,\mathrm{H}^{\mu\nu}_\nu) \delta\varkappa_\mu = \left\{ \frac{\partial \varkappa_\mu}{\partial x_\alpha} (\mathrm{Q}^\mu + 2\,\mathrm{H}^{\mu\nu}_\nu) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \{\varkappa_\alpha (\mathrm{Q}^\mu + 2\,\mathrm{H}^{\mu\nu}_\nu)\} \right\} \delta x_\alpha.$$

Так как на основании (73.76) $\frac{\partial \mathbf{H}^{\mu\nu}_{\nu}}{\partial x_\mu} \equiv 0$, то коэффициент при δx_α равен

$$\{F_{\mu\alpha}(\mathbf{Q}^\mu + 2\mathbf{H}^{\mu\nu}_{\nu}) - \varkappa_\alpha \mathbf{Q}^\mu_\mu\}.$$

Если использовать преобразование (61.3) вариации $\delta g_{\mu\nu}$, то уравнение (100.3) при произвольных вариациях δx_α, равных нулю на границе области интегрирования, сводится к виду

$$0 = \int \{2\mathbf{P}^\nu_{\alpha\nu} - F_{\mu\alpha}(\mathbf{Q}^\mu + 2\mathbf{H}^{\mu\nu}_{\nu}) + \varkappa_\alpha \mathbf{Q}^\mu_\mu\}\, \delta x_\alpha\, d\tau.$$

Поэтому должно тождественно иметь место равенство

$$\mathbf{P}^\nu_{\sigma\nu} = F_{\mu\alpha}\mathbf{H}^{\mu\nu}_{\nu} + \frac{1}{2}\cdot F_{\mu\alpha}\mathbf{Q}^\mu - \frac{1}{2}\varkappa_\alpha \mathbf{Q}^\mu_\mu,$$

которое мы, деля на $\sqrt{-g}$ и изменяя немые значки, перепишем так

$$P^\nu_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}H^{\nu\sigma}_{\sigma} - \frac{1}{2}(F_{\mu\nu}Q^\nu + \varkappa_\mu Q^\nu_\nu). \tag{100.42}$$

Рассмотрим сначала случай, когда К зависит только от $g_{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$, так что $Q^\mu = 0$. Тогда получаем уравнение

$$P^\nu_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}H^{\nu\sigma}_{\sigma}, \tag{100.43}$$

совершенно аналогичное уравнению, описывающему механическую силу электромагнитного поля (ср. п. 76)

$$M^\nu_{\mu\nu} = -h_\mu = -F_{\mu\nu}J^\nu = -F_{\mu\nu}F^{\nu\sigma}_{\sigma}.$$

Мы уже выяснили прежде, что каждое выражение, о котором на основании физических представлений установлено, что оно представляет собой тензор энергии, должно являться гамильтоновой производной некоторого инварианта по $g_{\mu\nu}$, и мы показали далее, что именно этим обстоятельством обусловлена справедливость закона сохранения. *Теперь мы видим, что общая теория инвариантов позволяет предвидеть также и поведение любого, выведенного таким образом, тензора по отношению к электромагнитному полю*, так как из нее следует, что сохранение этого тензора при этом нарушается пондеромоторной силой типа $F_{\mu\nu}H^{\nu\sigma}_{\sigma}$.

Если мы отождествим P^ν_μ с материальным тензором энергии, то $H^{\mu\nu}_{\nu}$ должно быть отождествлено с четырехмерным вектором тока *), так что

$$J^{\mu} = H^{\mu\nu}_{\nu}, \tag{100.44}$$

а это и есть общее уравнение (82.2). Отсюда без дальнейших ограничений следует закон сохранения электрического заряда $\left(J^{\mu}_{\mu} = 0\right)$.

Предшествующее исследование показывает, что антисимметричная часть важнейшего мирового тензора $^{*}G$ обнаруживается на опыте посредством таких же проявлений, как и сила. Эта сила действует на некоторый вектор потока (так же, как электромагнитная сила действует на ток и заряд); а этот вектор потока представляет течение чего-то постоянно сохраняющегося. Таким образом, оказывается возможным предсказать существование электричества и качественную природу электрических явлений.

Если мы желаем взять для K определенную функцию, то необходимо иметь в виду, что равенство (100.42) есть тождество. Оно не дает никакой новой связи между $g_{\mu\nu}$ и $\varkappa_{\mu}$. Если бы мы произвели все подстановки, то окончательный результат вероятно оказался бы совершенным пустяком и нисколько не соответствовал бы тем мощным общим методам, которые были применены. Главный интерес заключается не в самом тождестве, а в общем методе, который к нему приводит. Мы имели основания предполагать, что процесс гамильтонова дифференцирования действительно есть процесс создания воспринимаемого вокруг нас мира, так что в этом исследовании мы открываем законы физики, изучая те пути, которыми создавался физический мир. Тождества, выражающие эти законы, будучи отделены от соответствующего контекста, могут оказаться с математической точки зрения тривиальными; но наш способ их вывода дает ключ к объяснению того, почему они представляют выражение основных законов природы, установленных в нашем опыте **).

---

*) Это определение электрического заряда посредством механических действий, испытываемых заряженными телами, в точности соответствует определению, употребляемому на практике. Наше прежнее определение заряда и тока, как величины $F^{\mu\nu}_{\nu}$, соответствовало числовой мере силы особой точки электромагнитного поля.

**) Изложение нашей теории здесь заканчивается. Начиная отсюда и до конца п. 102, мы рассматриваем различные возможности, которые могут встретиться на пути дальнейшего развития, но здесь мы уже не можем руководиться никакими надежными обстоятельствами и соображениями, и может оказаться, что мы еще не владеем правильным методом.

Для того чтобы наши выводы согласовались с теорией Максвелла, необходимо наличие равенства $H^{\mu\nu}=F^{\mu\nu}$. Поэтому, в силу (100.2), инвариант K должен содержать член $-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Единственным естественным способом скомбинировать линейно этот член с другими, не содержащими $F_{\mu\nu}$, будет образование инварианта $\frac{1}{2}{}^*G_{\mu\nu}{}^*G^{\nu\mu}$ или $-\frac{1}{2}{}^*G_{\mu\nu}{}^*G^{\mu\nu}$. Положим

$$K=\frac{1}{2}{}^*G_{\mu\nu}{}^*G^{\nu\mu}=\frac{1}{2}(R_{\mu\nu}+F_{\mu\nu})(R^{\nu\mu}+F^{\nu\mu})\ ^{*)};$$

или, вследствие антисимметрии $F_{\mu\nu}$,

$$K=\frac{1}{2}(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}). \tag{100.5}$$

Величины $R_{\mu\nu}$ можно выразить в функции основных переменных двумя способами: либо на основе уравнения калибровки

$$R_{\mu\nu}=\lambda g_{\mu\nu},$$

либо с помощью общих выражений (87.5) и (94.61). Если мы примем первую форму, то из (100.43) получается тождество, которое, однако, очевидно не будет представлять собой желаемого соотношения энергии.

Если же мы примем более общее выражение, то необходима некоторая осторожность. По предположению $\mathrm{K}=K\sqrt{-g}$ должно быть инвариантной плотностью, если это выражение действительно имеет то фундаментальное значение, которое мы ему приписываем. Но в той форме, в какой оно написано, оно ин-инвариантно в теории Вейля **), но не в нашей обобщенной теории. Мы можем сделать его формально ин-инвариантным, если напишем $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\sqrt{-g}$ в виде

$$g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}R_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}\sqrt{-g},$$

*) Необходимо принять во внимание, что выбор ${}^*G^{\mu\nu}$ в качестве второго множителя обусловил бы (ср. 10132) другой знак при $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ в (100.5). (*Н.*)

**) Ср. п. 88. Там свойство ин-инвариантности выводилось из некоторых соображений о весе величины, в то время как для ин-инвариантности в общей аффинной геометрии характерна возможность вывода из коэффициентов $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ аффинной связи. (*Н*) где для $g^{\mu\nu}$ нужно вставить значения, соответствующие естественной калибровке, тогда как значения тензора $R_{\mu\nu}$ могут быть произвольными, соответствуя любой калибровке. Но при этом общая теория делается в высшей степени сложной, так что мы удовлетворимся частичным обобщением выражения, лежащего в основе теории Вейля, которое, однако, в достаточной мере выяснит особенности новой теории. Именно, мы положим

$$R_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu},$$

причем λ есть переменная величина, зависящая от координат. Соответственно этому

$$R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = 4\lambda^2 = \frac{1}{4} {}^*G^2 \text{ *)},$$

так что

$$K = \frac{1}{8} ({}^*G^2 - 4 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \sqrt{-g}. \qquad (100.6)$$

Сравнивая это с (90.1), мы видим, что K эквивалентно выражению для действия, принятому Вейлем.

Это, может быть, проливает некоторый свет на смысл комбинации ${}^*G^2$ с $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, важное значение которой мы установили уже в (90.1). Последняя представляет собой вырожденную форму естественной комбинации ${}^*G_{\mu\nu} {}^*G^{\nu\mu}$, соответствующую калибровке Вейля. Перестановка значков во втором множителе первоначально является искусственным приемом для того, чтобы получить в окончательном результате нужный знак, но вероятно ее можно оправдать непосредственно.

Если эта точка зрения на происхождение соотношения (90.1) правильна, то постоянная α должна быть равна 4. Тогда $\beta = \frac{1}{2\lambda}$, и на основании (90.51) тензор полной энергии и тензор электромагнитной энергии, если их написать в виде

$$E^{\mu\nu},\ 8\pi\lambda T^{\mu\nu}, \qquad (100.7)$$

оказываются выраженными в одинаковых единицах. Численные результаты, которые можно получить на этом основании, будут разобраны в п. 102.

---

*) Однако, пока что этого не нужно смешивать с предположением Вейля $^*G = 4\lambda$, в котором λ есть универсальная постоянная. (*Н.*)

При рассуждениях п. 90 было сделано предположение, что $P^{\mu\nu}\left(=\frac{\mathfrak{h}K}{\mathfrak{h}g_{\mu\nu}}\right)$ равно нулю. Я не думаю, чтобы существовали какие-либо особые основания для введения произвольного принципа действия такого рода, и мне кажется более вероятным, что P есть не равный нулю тензор энергии. Но это как будто бы приводит к излишнему количеству тензоров энергии, так как благодаря наличию в (100.42) неравного нулю коэффициента Q^{μ} в равенстве (90.51) появляется член $\left(\varkappa^{\mu}\varkappa^{\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\varkappa_{\alpha}\varkappa^{\alpha}\right)$, который тоже играет какую-то роль. В п. 90 было предположено, что этот член представляет собой тензор материальной энергии, но я склонен думать, что его следует интерпретировать иначе. Чтобы освободить материальную энергию, мы должны заставить электроны расширяться, ослабляя связывающие их силы. Предположим, что мы произвели небольшое виртуальное изменение такого рода. При этом процессе, кроме освобождения материальной энергии, произойдет еще и другое изменение энергии области, а именно, так как электрон был масштабом длины, то при этом придется заново калибровать всю гравитационную энергию. Возможно, что член $\left(\varkappa^{\mu}\varkappa^{\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\varkappa_{\alpha}\varkappa^{\alpha}\right)$ соответствует именно этому последнему изменению. Если это верно, то ничто не мешает нам отождествить $P^{\mu\nu}$ с действительным тензором материальной энергии.

101. ОБОБЩЕННЫЙ ОБЪЕМ

Предположим теперь, что ${}^*G_{\mu\nu}$ и есть тот материал, из которого нужно построить физический мир; в таком случае, нам надо найти простейшие инварианты, которые можно образовать с помощью этого тензора. Значение слова «простой», конечно, весьма неопределенно и в некоторой мере зависит от наших взглядов. Для распределения по степени простоты я выбираю ту последовательность, в которой различные величины появляются при построении физического мира из основного материала ${}^*G_{\mu\nu}$. Еще до введения процесса калибровки, с помощью которого мы получаем $g_{\mu\nu}$, а потом (при помощи более или менее сложных вычислений с детерминантами) и $g^{\mu\nu}$, мы можем построить ин-инварианты, относящиеся соответственно к одномерным, двухмерным и четырехмерным областям.

1. Для элемента линии $(dx)^\mu$ простейшим ин-инвариантом будет

$$G_{\mu\nu}(dx)^\mu (dx)^\nu, \tag{101.11}$$

который физически проявляется как квадрат длины.

2. Для элемента поверхности $ds^{\mu\nu}$ простейшим ин-инвариантом является

$$^*G_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}, \tag{101.12}$$

которому можно придать физический смысл потока электромагнитной силы. Заметим, что этот ин-инвариант, хотя формально и относится к элементу поверхности, зависит в действительности только от свойств контура, ограничивающего элемент поверхности.

3. Для элемента объема $d\tau$ простейший ин-инвариант есть

$$V = \sqrt{-|^*G_{\mu\nu}|}\, d\tau, \tag{101.13}$$

который был нами назван обобщенным объемом, но до сих пор еще не получил физической интерпретации.

Вычислим сначала $|^*G_{\mu\nu}|$ в галилеевых координатах *). Из формулы

$$^*G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}$$

следует, если вставить галилеевы значения для $g_{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$,

$$|^*G_{\mu\nu}| = \begin{vmatrix} -\lambda & -\gamma & \beta & -X \\ \gamma & -\lambda & -\alpha & -Y \\ -\beta & \alpha & -\lambda & -Z \\ X & Y & Z & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\{\lambda^4 + \lambda^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 - X^2 - Y^2 - Z^2) - \\ - (\alpha X + \beta Y + \gamma Z)^2\}. \tag{101.2}$$

Отношение употребляемой здесь абсолютной единицы электромагнитной силы к практической единице до сих пор не известно, но те поля, которые мы употребляем при лабораторных опытах,

*) Иначе говоря, мы вводим координатную систему, которая будет *канонической* в точке P (ср. п. 36), и в которой, следовательно, значения $g_{\mu\nu}$ в точке P являются галилеевыми, и кроме того ограничиваемся такой областью вокруг точки P, в которой можно с достаточной точностью считать величины $g_{\mu\nu}$ постоянными. (*Н.*)

должны соответствовать малым значениям $F_{\mu\nu}$ *). Если это верно, то можно пренебречь четвертыми степенями $F_{\mu\nu}$ и мы получаем приближенно

$$V = \sqrt{-|{}^*G_{\mu\nu}|}\, d\tau = \left\{\lambda^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-X^2-Y^2-Z^2)\right\} d\tau,$$

или, в силу (77.3),

$$= \left(\lambda^2 + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right) d\tau.$$

Так как λ есть инвариант, то мы сразу можем написать результат для любой другой координатной системы, именно

$$V = \left(\lambda^2 + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right) \sqrt{-g}\, d\tau. \tag{101.31}$$

или, при естественной калибровке, при которой $R_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$,

$$V = \frac{1}{4}(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \sqrt{-g}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\, {}^*G_{\mu\nu}\, {}^*G^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d\tau. \tag{101.32}$$

Таким образом, если обобщенный объем есть фундаментальный ин-инвариант, из которого выводятся законы динамики, то нужно ожидать, что наши приближенные экспериментальные законы относятся к инварианту ${}^*G_{\mu\nu}\,{}^*G^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d\tau$, который при не очень сильных электромагнитных полях с большим приближением равен обобщенному объему.

В равенстве (100.5) мы приняли $K = {}^*G_{\mu\nu}\,{}^*G^{\nu\mu}$. Перестановка верхних значков в $G^{\nu\mu}$ повидимому существенна, если $\dfrac{\mathfrak{h} K}{\mathfrak{h} g_{\mu\nu}}$ должно представлять материальную энергию (или равняться нулю в силу принципа действия Вейля). Если не переставлять значков, то гамильтоновы производные, кроме тензора полной энергии, будут содержать тензор электромагнитной энергии, тогда как естественно было бы придавать большее значение разности этих двух тензоров. Заметим, что.

$${}^*G_{\mu\nu}\,{}^*G^{\nu\mu} = {}^*G_{\mu\nu}\,{}^*G^{\mu\nu} - \varkappa_{\mu\nu} \frac{\mathfrak{h}({}^*G_{\mu\nu}\,{}^*G^{\mu\nu})}{\mathfrak{h}\varkappa_{\mu\nu}} \tag{101.33}$$

---

*) Это впрочем не слишком очевидно, так как наше предположение не подтверждается вычислениями следующего параграфа.

(причем вариации $\varkappa_\mu$ принимаются в расчет лишь постольку, поскольку они влияют на $F_{\mu\nu}$) *). Поэтому представляется, что рассмотренный выше инвариант K выводится из V посредством процесса исключения координат $\varkappa_\mu$. Уравнение (101.33) и представляет собой как раз обычный прием динамики, приводящий к измененной функции Лагранжа **).

Если правильна та точка зрения, что инварианты, дающие обычно употребляемые в физике уравнения, в действительности являются лишь приближениями к более точным выражениям, построенным с помощью обобщенного объема, то должно оказаться возможным предсказание членов второго порядка, которыми нужно дополнить употребляемые обычно уравнения. Для пояснения достаточно будет рассмотреть исправление уравнений Максвелла, к которому приводит этот метод.

Мы нашли в (79.32), что J^μ есть гамильтонова производная от $\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d\tau$. Теперь же мы предположим, что J^μ более точно есть гамильтонова производная от $\sqrt{-|{}^*G_{\mu\nu}|}\, d\tau$, по $\varkappa_\mu$ ***). Мы положим в основу галилеевы (или естественные) координаты; здесь удобно, затем, использовать обозначения п. 82, в котором мы писали (a, b, c) вместо (α, β, γ).

---

*) Это соотношение в силу (94.63) сводится к следующему:

$$\varkappa_{\mu\nu} \frac{\mathfrak{h}({}^*G_{\mu\nu}\, {}^*G^{\mu\nu})}{\mathfrak{h}\, \varkappa_{\mu\nu}} = {}^*G_{\mu\nu} ({}^*G^{\mu\nu} - {}^*G^{\nu\mu}) = -4\, {}^*G_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -4 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu};$$

здесь левая сторона согласно (94.62) равна:

$$\varkappa_{\mu\nu} \frac{\mathfrak{h}({}^*G_{\mu\nu}\, G^{\mu\nu})}{\mathfrak{h}\, F_{\mu\nu}} - \varkappa_{\nu\mu} \frac{\mathfrak{h}({}^*G_{\mu\nu}\, {}^*G^{\mu\nu})}{\mathfrak{h}\, F_{\mu\nu}} = F_{\mu\nu} \frac{\mathfrak{h}({}^*G_{\mu\nu}\, {}^*G^{\mu\nu})}{\mathfrak{h}\, F_{\mu\nu}} =$$

$$= F_{\mu\nu} \frac{\mathfrak{h}(g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta}\, {}^*G_{\alpha\beta}\, {}^*G_{\gamma\delta})}{\mathfrak{h}\, F_{\mu\nu}} = -2 F_{\mu\nu} g^{\mu\gamma} g^{\nu\delta}\, {}^*G_{\gamma\delta} - 2 F_{\mu\nu} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}\, {}^*G_{\alpha\beta},$$

что после изменения немых значков приводится к выражению

$$-4 F_{\mu\nu}\, {}^*G^{\mu\nu} = -4 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

(*Н.*)

**) Ср., например, *E. T. Whittaker*, Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper, стр. 58 и след. (§ 38), Berlin, Julius Springer 1924.

***) Мы рассматриваем вариации $\varkappa_\mu$ лишь постольку, поскольку они влияют на $F_{\mu\nu}$.

Пусть

$$\Delta = -|{}^*G_{\mu\nu}| = \lambda^4 + \lambda^2 (a^2 + b^2 + c^2 - X^2 - Y^2 - Z^2) - S^2,$$

где

$$S = aX + bY + cZ.$$

Тогда

$$\delta(\sqrt{\Delta}) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \lambda^2 \left\{ \left(a - \frac{SX}{\lambda^2} \right) \delta a + \ldots - \left(X + \frac{Sa}{\lambda^2} \right) dX - \ldots \right\}.$$

Если магнитная проницаемость и диэлектрическая постоянная определены выражениями

$$\mu = \frac{1}{\varkappa} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\lambda^2}, \tag{101.41}$$

так что

$$\alpha = \frac{\lambda^2 a}{\sqrt{\Delta}}, \quad P = \frac{\lambda^2 X}{\sqrt{\Delta}},$$

и если кроме того положить

$$S' = \frac{S}{\sqrt{\Delta}} = \frac{\alpha X + \beta Y + \gamma Z}{\lambda^2}, \tag{101.42}$$

то мы получим

$$\delta(\sqrt{\Delta}) = (\alpha - XS')\, \delta \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \right) +$$
$$+ \ldots - (P + aS')\, \delta \left(-\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \ldots,$$

или, с точностью до полного дифференциала,

$$= \left\{ -\frac{\partial}{\partial t} (P + aS') - \frac{\partial}{\partial z} (\beta - YS') + \frac{\partial}{\partial y} (\gamma - ZS') \right\} \delta F + \ldots$$
$$+ \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (P + aS') + \frac{\partial}{\partial y} (Q + bS') + \frac{\partial}{\partial z} (R + cS') \right\} \delta(-\Phi).$$

Приравнивая коэффициенты соответствующим составляющим четырехвектора тока $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \rho)$, мы получим

$$\sigma_x + \frac{\partial}{\partial t} (P + aS') = \frac{\partial}{\partial y} (\gamma - ZS') - \frac{\partial}{\partial z} (\beta - YS')$$

. . . .

$$\rho = \frac{\partial}{\partial x} (P + aS') + \frac{\partial}{\partial y} (Q + bS') + \frac{\partial}{\partial z} (R + cS').$$

Эти уравнения принимают классический вид (ср. вторую четверку уравнений (82.2))

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial t}+\sigma'_x\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\rho',\end{array}\right\}\qquad(101.5)$$

если

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_x'=\sigma_x+\frac{\partial(aS')}{\partial t}+\frac{\partial(ZS')}{\partial y}-\frac{\partial(YS')}{\partial z}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \rho'=\rho-\frac{\partial(aS')}{\partial x}-\frac{\partial(bS')}{\partial y}-\frac{\partial(cS')}{\partial z}\end{array}\right\}\qquad(101.6)$$

Но, в силу (73.61) и (73.64), уравнения (101.6) сразу дают

$$\left.\begin{array}{l}\sigma'_x=\sigma_x+a\frac{dS'}{dt}+Z\frac{\partial S'}{\partial y}-Y\frac{\partial S'}{\partial z}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \rho'=\rho-a\frac{\partial S'}{\partial x}-b\frac{\partial S'}{\partial y}-c\frac{\partial S'}{\partial z}.\end{array}\right\}\qquad(101.7)$$

Действие членов второго порядка проявляется следовательно в том, что эфиру фиктивно приписываются определенные равенством (101.41) значения диэлектрической постоянной и магнитной проницаемости и в том, что вводятся фиктивный заряд и ток, определенные равенством (101.7).

Что касается распространения света, то здесь при исправлении уравнений Максвелла ничего не меняется, так как $\sqrt{\mu\varkappa}$ равен единице, и поэтому скорость распространения света остается неизменной; фиктивные заряды и токи при этом также не появляются, так как S' равно нулю, когда магнитная и электрическая силы перпендикулярны друг другу.

Было бы интересно выяснить вопрос о том, нельзя ли все электрические заряды приписать таким же образом членам второго порядка в чистых уравнениях поля так, чтобы введение внешних токов и зарядов (σ_x, σ_y, σ_z, ρ) стало излишним. Однако я полагаю, что это вряд ли возможно. Весь фиктивный заряд в некоторой трехмерной области в силу (101.6) равен

$$\int\int\int(\rho'-\rho)\,dx\,dy\,dz=-\int\int B_n S'\,dS,$$

где B_n есть нормальная составляющая магнитной индукции на границе области. Но в таком случае $B_n S'$ в поле одного электрона должно убывать обратно пропорционально квадрату расстояния. Вряд ли можно предполагать, что электрон способен оказывать подобные магнитные действия.

Легко убедиться, что фиктивный заряд удовлетворяет закону сохранения независимо от истинного заряда.

Нам казалось не лишенным интереса разобрать несколько подробнее видоизменение уравнений Максвелла, которое может получиться при дальнейшем развитии теории. Наиболее интересным, может быть, является то обстоятельство, что в отношении распространения электромагнитных волн ничего не меняется. Однако, предположенные изменения ни в коем случае не претендуют на окончательность.

102. ЧИСЛЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ.

Наши электромагнитные величины были выражены в абсолютных единицах, отношение которых к единице C. G. S. до сих пор неизвестно. Но пожалуй теперь мы будем в состоянии определить эту единицу несколько точнее, так как мы нашли уже выражения, которые, как мы полагаем, имеют определенное физическое значение и в которые входят в совершенно естественной связи тензор полной энергии и тензор энергии электромагнитной. На основании (100.6) постоянная Вейля α в п. 90 равна 4, так что $\beta = \frac{1}{2\lambda}$. Поэтому в (90.51) входит линейная комбинация

$$8\pi T^{\mu\nu} - \frac{1}{\lambda} E^{\mu\nu},$$

которая вряд ли могла бы иметь физический смысл, если бы она не представляла собой разности двух тензоров, выраженных в одинаковых единицах. Весьма вероятно поэтому, что в электромагнитном поле должно иметь место равенство

$$E^{\mu\nu} = 8\pi\lambda\, T^{\mu\nu} = -\lambda \left\{ G^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\, (G - 2\lambda) \right\},$$

где $E^{\mu\nu}$ должно быть выражено в естественных единицах, связанных с $F_{\mu\nu}$. Все это покоится на том предположении, что в выражении ${}^{*}G_{\mu\nu}$ метрические и электромагнитные переменные входят в их естественной связи.

Постоянная λ, от которой зависит радиус кривизны мира, нам неизвестна. Так как однако наше знание звездной вселенной простирается на расстояние примерно в 10^{25} *см*, то мы примем, что

$$\lambda = 10^{-50}\ \textit{см}^{-2}.$$

Весьма возможно, что λ значительно меньше.

Рассмотрим теперь однородное электростатическое поле с напряжением в 1500 вольт на 1 *см*, т. е. 5 электростатических единиц. Плотность энергии при этом равна $\frac{5^2}{8\pi}$, или практически 1 эрг на 1 *см*³. Если разделить энергию на квадрат скорости света, то получим массу в $1{,}1 \cdot 10^{-21}$ *г*. Мы выразим ее в гравитационных единицах, приняв во внимание, что масса Солнца, $1{,}99 \cdot 10^{33}$ *г*, эквивалентна $1{,}47 \cdot 10^{5}$ *см*. Тогда мы получим, что плотность гравитационной массы T_4^4 электрического поля (напряжением в 1500 вольт на сантиметр) равна $8{,}1 \cdot 10^{-50}$ *см* на 1 *см*³.

Из уравнения $E^{\mu\nu} = 8\pi\lambda T^{\mu\nu}$ следует

$$E_4^4 = 2 \cdot 10^{-98}\ \textit{см}^{-4}.$$

Для электростатического поля, направленного по оси x галилеевой системы координат, мы имеем

$$E_4^{'4} = \frac{1}{2} F_{14}^2,$$

следовательно

$$F_{14} = 2 \cdot 10^{-49}\ \textit{см}.$$

Собственно говоря, это не относится непосредственно к сантиметру как масштабу для калибровки, так как F_{14} есть интензор; но так как мы взяли галилеевы координаты, то сантиметр дает в то же время и величину единичной клетки, образованной сеткой координатных линий.

Следовательно, электрическая сила в 1500 вольт на 1 *см* измеряется в естественных мерах числом $2 \cdot 10^{-49}$, если в основу положена система галилеевых координат, в которой единичная клетка имеет размер в 1 *см*.

Рассмотрим теперь два стержня длины l, находящиеся друг от друга на расстоянии δx_1 *см*, и пусть между ними в течение времени δx_4 (измеренного тоже в сантиметрах, т. е. по расстоянию, которое за это время пройдет свет) приложена разность потенциалов $\delta\varkappa_4$. Сравним их длины в начале и в конце опыта. Если в течение этого промежутка времени стержни испытывали параллельный перенос в пространстве-времени, то при этом сравнении должно получиться расхождение

$$\frac{\delta l}{l}=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\,dS^{\mu\nu}=F_{41}\,\delta x_1\,\delta x_4=\frac{\partial\varkappa_4}{\partial x_1}\,\delta x_1\,\delta x_4=\delta\varkappa_4\,\delta x_4,$$

определяемое равенством (84.4) *). Если, например, длина наших стержней равна 1 *м* и если между ними в течение одного года (одного светового года $=10^{18}$ *см*) приложена разность потенциалов в 1,5 миллиона вольт, то для расхождения получается значение

$$\delta l=10^2\cdot 2\cdot 10^{-49}\cdot 10^3\cdot 10^{18}\ \text{см}=2\cdot 10^{-26}\ \text{см}.$$

Мы уже видели раньше, что длина стержня не определяется параллельным переносом; но, очевидно, полученное расхождение невозможно установить на опыте даже в том случае, если бы длины сравнивались именно этим способом. Значение F_{14} зависит от единичной клетки координатной системы. Если мы возьмем клетку размером 10^{25} *см*, сравнимую, следовательно, с предполагаемым радиусом мира, то значение, полученное нами выше, необходимо на основании правил преобразования ковариантных тензоров умножить на 10^{50}. Поэтому естественная единица электрической силы, отнесенная к такой естественной сетке, равна примерно 75 вольт/*см*. Этот результат зависит от принятого нами радиуса мира и естественная единица в действительности может оказаться значительно меньше 75 вольт/*см*, но вряд ли больше. Весьма удивительным является то обстоятельство, что эта естественная единица электрической силы имеет тот же по-

---

*) Примем, что первый стержень покоится в точке $x_1=0$ оси x_1, в то время как второй стержень тоже находится на оси x_1 и оба раза переносится для сравнения длин в место, где находится первый. В таком случае пути, пройденные обоими стержнями за время от x_4 до x_4+dx_4, ограничивают в пространстве и времени поверхность четырехугольника с площадью $dx_1\,dx_4$. Хотя в этом случае, строго говоря, речь и не идет о замкнутом пути, описанном *одним* стержнем (это ведь противоречило бы и принципу причинности), однако формула (84.4) все же применима, так как при ее выводе $F_{\nu\sigma}$ все равно предполагалось постоянным внутри описываемой поверхности с точностью до величин второго порядка. (*Н.*)

рядок величин, с которым мы имеем дело в наших лабораторных опытах; мы скорее ожидали бы, что эта единица будет порядка электрической силы на границе электрона. Эта трудность возбуждает некоторое сомнение в том, находимся ли мы на вполне правильном пути.

Этот результат можно представить в другой форме, в которой он покажется менее сомнительным. Представим себе весь сферический мир, заполненный электрическим полем, напряжением около 75 вольт на 1 *см*, в течение такого промежутка времени, который нужен световому лучу, чтобы пробежать весь мир. Электромагнитное действие выражается инвариантом, т. е. отвлеченным числом, не зависящим ни от координат, ни от калибровки; полная величина действия имеет в этом случае порядок единицы. Естественная единица действия, очевидно, значительно больше элементарного кванта действия. Если принять то значение радиуса мира, которое здесь положено в основу, то окажется, что она равна 10^{115} квантов.

103. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Сделаем теперь обзор всех общих физических результатов, которые были установлены, или оказались правдоподобными в течение нашего исследования. Числа в скобках будут означать параграфы, в которых разбирались соответствующие вопросы.

Мы не даем никакого объяснения существованию электронов или квант, но во всех остальных отношениях теория как будто бы вполне охватывает физические явления. Конечно, мы исключили очень большую часть новой физики, но это та часть, в которой до сих пор невозможны вообще никакие объяснения. Изучаемая здесь область относится к достаточно замкнутой в себе системе законов природы, которая поэтому может изучаться независимо от других явлений, хотя в определенный момент и возникают затруднения — именно тогда, когда мы приходим в близкое соприкосновение с проблемой природы электрона.

Если бы мы могли написать действительно полную систему всех уравнений, имеющих место в физическом мире, то эти уравнения сами давали бы определения всех входящих в них величин, ибо каждое определение физической величины, т. е. каждая формулировка способа, при помощи которого такую величину можно познать и измерить, сама может быть представлена в виде физического уравнения. Если число независимых уравнений не больше числа определяемых величин, то субстанция мира не управляется никаким общим законом и все законы природы, которые мы открываем, должны уже содержаться неявно в определении подчиняющихся им величин. Такие, казалось бы, тривиальные законы тем не менее представляются замечательными, так как в действительном опыте мы имеем дело с мысленными образами, приводимыми в связь с физическими величинами посредством процесса, который физика не в состоянии объяснить. Однако мы примем, что число n независимых уравнений больше числа m искомых определений. Тогда мы можем разделить уравнения на m уравнений *определяющих* и $n-m$ уравнений *контрольных*.

Обычно предполагается, что мы не в состоянии установить действительные контрольные уравнения, относящиеся к области строения электронов и действия квант, и что необходимо радикальное изменение наших методов, чтобы иметь возможность исследовать также и эти области. Теория поля (которая, как мы видели в п. 82, имеет существенно макроскопический характер) обходит исключенную область, не имея однако возможности полностью избежать соприкосновения с ней. Мы нашли, что число уравнений поля превышает на единицу число необходимых определений, так что должно существовать одно контрольное уравнение, которое относится к запретной области (хотя это и скрыто макроскопическим усреднением). В наших исследованиях мы в качестве этого уравнения принимали закон пондеромоторной силы электромагнитного поля. (Выбор контрольного уравнения совершенно произволен; например, в элементарной электростатике закон пондеромоторной силы есть определение электрического заряда, а контрольным делается тогда какое-либо другое уравнение.)

Если мы убедились, что m определяющих и одно контрольное уравнение установлены правильно, то может показаться, что наша задача решена — поскольку мы не касаемся исключенной области. Вопрос при этом остается не вполне выясненным, но, повидимому, это и неизбежно, раз мы могли его коснуться лишь частично. Тем не менее, в некоторой мере возможно и дальнейшее выяснение вопроса. Мы можем определять все, что нам угодно, но в действительности мы определяем только некоторые вещи, которые особенно значительны, особенно важны с некоторой определенной точки зрения. Мы делаем конечно шаг вперед, устанавливая, что точка зрения, к которой относятся наши исследования, является *единой* — что „значительность в нашей картине мира“ есть некоторое вполне определенное, поддающееся точной математической формулировке свойство. Это придает характер некоторой закономерности выбору наших определяющих уравнений. Повидимому загадка этой значительности лежит в исключенной области с ее неизвестными контрольными уравнениями, или же мы можем связать ее с особенностями нашего восприятия, что, может быть, в конце концов, сводится к тому же. В теории поля мы должны удовлетвориться установлением формального принципа гамильтонова дифференцирования и констатированием достигнутого таким путем единства в формулировке определяющих уравнений.

Мир физики распадается для нас на две части, одну из которых мы можем изучать методами анализа непрерывных величин, в то время как к другой эти методы неприменимы. Мы не претендуем на то, что мы в силах априорно предсказывать, как будет себя вести природа, но все же не невозможно указать некоторые границы поведения той части природы, к которой наши методы применимы, если нам известны пределы применимости этих методов. Следовательно, если существует область или структура (например макроскопическое поле), удовлетворяющая этому условию, и если мы имеем критерий „значительности“, позволяющий выбирать величины, изучение которых важно, то мы можем оказаться в состоянии предсказать свойства поля. Именно это и пытается сделать аффинная теория второй части главы VII, и, как я полагаю, небезуспешно. Основная идея при этом заключается в том, что аффинная связь есть наиболее общая структура, лежащая в области применимости непрерывного анализа (утверждение, которое мы все же полностью не доказали) и поэтому может быть принята в качестве исходной точки для предсказаний.

Один контрольный закон не может быть предсказан априорно, так как его корни находятся в исключенной области, и поэтому он не связан с границами применимости наших обычных математических методов. Может случиться, что, и не пытаясь проследить микроскопическое происхождение этого закона, мы окажемся в состоянии представить его в виде простого формального выражения, зависящего от макроскопических величин. Теории действия Вейля (90) и Эйнштейна [приложение в конце книги] и имеют целью сведение этого формального выражения к простейшей форме. При этом однако возникает затруднение, заключающееся в том, что каждый закон стационарного действия как будто бы неизбежно ведет к *двум* контрольным уравнениям, соответственно симметричной и антисимметричной части действия, и поэтому необходимо предположить, что излишнее уравнение (90.71) находится за пределами практического наблюдения. Автору кажется предпочтительнее совершить небольшое вторжение в запрещенную область, вместо того, чтобы искать чисто формальное выражение контрольного закона; тогда мы найдем, что этот закон эквивалентен простому ограничению структуры электрона, состоящему в том, что некоторое интегральное свойство, наличие которого хорошо установлено при отсутствии внешних полей, должно сохраняться во всех вообще случаях (80). Принцип действия, несомненно, кажется заманчивым потому, что с его помощью удается сделать теорию поля формально замкнутой, не затрагивающей исключенной области. Это преимущество однако несколько затемняется сознанием того, что замкнутость может быть лишь формальной.

Мы занимались *построением мира* — такого мира, который бы подчинялся тем же законам, как и действительный мир вокруг нас. Важнейшая часть проблемы распадается на два раздела: строительный материал и процесс построения.

Строительный материал. Работа с избранным материалом, уже имеющим все свойства, которыми должна обладать законченная постройка, доставила бы строителю мало удовлетворения. Наше желание, напротив, заключается в том, чтобы достигнуть цели, используя сырой материал. В игре в построение мира мы теряем очко каждый раз, когда нам приходится требовать необычного материала, специально приготовленного для поставленной цели. Рассматривая наиболее общий вид структуры соотношений, который мы были в состоянии себе представить — конечно, в предположении, что речь идет именно о *структуре*, мы нашли, что в нашем распоряжении в качестве строительного материала всегда имеется интензор $^*G_{\mu\nu}$, состоящий из симметричной и антисимметричной частей $B_{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$, причем последняя представляет собой вихрь некоторого вектора (97.98). Это все, что нам нужно для не исключенной выше области физики.

Процесс построения. Здесь по самой природе вещей мы неизбежно выходим на момент за пределы физики. Мир, который нам нужно построить из сырого материала, есть мир восприятия, и поэтому процесс построения должен зависеть от природы воспринимающего. С помощью величин $^*G_{\mu\nu}$ можно построить много различных вещей, но они появляются в воспринимаемом мире только в том случае, если воспринимающий ими интересуется. Мы не можем исключить из рассмотрения вопрос о том, какого типа вещи могут возбуждать интерес у воспринимающего их. Процесс построения математической теории должен итти в ногу с тем процессом, посредством которого дух познающего наполняет жизнью определенные избранные структурные свойства мира. Мы нашли основания для предположения, что эта творческая деятельность духа в основном протекает параллельно математическому процессу гамильтонова дифференцирования некоторого инварианта (64).

В некотором смысле дедуктивная теория враждебно противостоит экспериментальной физике. Последняя стремится решающими опытами определить природу важнейших вещей; теория же, наоборот, стремится свести к минимуму достигнутые таким образом успехи, показывая, в каких широких пределах природа вещей совместима со всеми экспериментальными результатами. Мы убедились в этом на примере попытки установить, каков должен быть тот инвариант, гамильтоново дифференцирование которого приводит к важнейшим величинам физики. Определение этого инварианта чрезвычайно важно, потому что от него зависит форма закона тяготения и выражения для массы, энергии, импульса и других основных величин. Решение этого вопроса повидимому невозможно без обращения к несколько сомнительному принципу простоты. С этим был связан явный пробел в наших рассуждениях, заключающийся в том, что мы оказались не в состоянии исключить более определенным образом различные возможные альтернативы (62). Но можно ли вообще надеяться на такой успех дедуктивной теории, когда все необходимые следствия вытекали бы непосредственно из нее, не требуя произвольного выбора определенного инварианта?

Мы показали, что физические величины, получающиеся при гамильтоновом дифференцировании, должны в силу математических тождеств обладать определенными свойствами. Если не принимать во внимание антисимметричную часть $F_{\mu\nu}$ интензора, то они обладают свойством сохранения или постоянства; именно таким образом и получаются масса, энергия и импульс (61). Если же принять во внимание также и $F_{\mu\nu}$, то эти механические явления видоизменяются таким образом, что влияние $F_{\mu\nu}$ оказывается аналогичным действию электрической или магнитной силы, действующих, соответственно, на заряд или ток (100). Таким образом, мы установили роль, которую играет $F_{\mu\nu}$ в этих явлениях.

Все пространственно-временные соотношения заключены в ининварианте $^*G_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$, выражающем абсолютное соотношение (*интервал*) между двумя точками с разностями координат dx_μ (97). Для того чтобы понять, каким образом эта величина выражает пространственно-временные соотношения, мы должны были изучить принципы измерения пространства и времени с помощью материальных и оптических приборов (95). Мы показали, что измерения основаны на соблюдении некоторых условий, вводящих в измеряемое пространство изотропию и однородность, которым первоначально в изучаемой структуре соотношений ничего не соответствует. Эта изотропия и однородность находят себе точное выражение в законе тяготения Эйнштейна (66).

Переход от пространственно-временного соотношения интервала к пространству и времени в отдельности, как к сетке отсчетов локализации в мире, выполняется посредством выбора таких координат, чтобы квадратичная форма $^*G_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$ распалась на сумму четырех квадратов (4). То обстоятельство, что знак одного из этих квадратов противоположен знаку трех остальных, представляет собой особое свойство мира, которое мы должны были оставить без объяснения. Выделенная таким образом координата называется временем. Так как это распадение на четыре квадрата может быть произведено многими способами, то пространственно-временная система отсчета необходимо оказывается неопределенной, и мы сразу получаем преобразование Лоренца, связывающее отсчеты пространства и времени различных наблюдателей (5). Так возникает *специальная* теория относительности. Дальнейшее следствие заключается в том, что существует определенная абсолютная скорость (6) и что возмущения тензора $F_{\mu\nu}$ (электромагнитные волны) распространяются в пустоте с этой скоростью (74). Распадение на четыре квадрата, вообще говоря, возможно только в бесконечно малой области, так что для всего мира не существует такой координатной системы, в которой можно было бы полностью разделить пространство и время. Однако, мы все же располагаем известной свободой в этом смысле, благодаря тому, что можно принять систему отсчета, в которой пространство и время не строго разделены, причем наблюдаемые расхождения можно тогда приписать некоторому силовому полю (16). Благодаря этой свободе пространственно-временная система отсчета становится совершенно неопределенной; каждую координатную систему можно рассматривать как пространственно-временную систему отсчета и ни одну систему нельзя предпочесть другим так как все они в равной мере требуют для своего оправдания наличия силового поля. Так получается *общая* теория относительности.

Закон тяготения для непрерывно распределенной материи получается наиболее непосредственно путем отождествления тензора материальной энергии с некоторой геометрической величиной (54), а это опять приводит к закону тяготения для пустого пространства, как к частному случаю. Этот подход тесно связан с выводом закона для пустого пространства из свойств изотропии, обусловленных процессом измерения, так как при этом составляющие тензора энергии отождествляются с коэффициентами квадратичной формы кривизны (65). Для того чтобы вывести поле частицы (38) или движение частицы во внешнем поле (56), мы должны были постулировать свойства симметрии частицы (или, по крайней мере, симметрию типичной средней частицы); но эти свойства зависят не от самой частицы, а от того, что частица представляет собой стандарт симметрии для измерений (66). Далее мы показали, что наши соображения приводят как к классическому закону тяготения Ньютона (39), так и к тем уточнениям, которые ввел Эйнштейн при вычислении движения перигелия Меркурия (40) и отклонения светового луча (41).

Можно анализировать механические явления без электродинамики, но вряд ли возможно рассматривать электродинамику без механики. Отсюда возникает некоторое затруднение для нашего анализа электричества, так как естественная связь обеих теорий лежит в исключенной области строения электрона. На практике электрическая и магнитная силы определяются по их механическому действию на заряды и токи, и мы исследовали эти механические действия как в общем случае (100), так и в особенности по отношению к электрону (80). Первая половина уравнений Максвелла удовлетворяется потому, что $F_{\mu\nu}$ представляет собой вихрь вектора (92); а вторая половина приводит к отождествлению величины $F^{\mu\nu}_{\nu}$ с четырехмерным вектором тока (73). Выведенный таким образом тензор электромагнитной энергии совпадает в галилеевых координатах с тем, который определяется классическими формулами (77).

Так как силовое поле относится к определенной принятой пространственно-временной системе отсчета, то потенциальную энергию нельзя больше считать равноправной с кинетической энергией. Она не представляется каким-либо тензором (59) и сводится к искусственному выражению, появляющемуся в результате математической обработки и которое никак нельзя считать простейшим. Хотя значение величины „действия" усиливается вследствие инвариантности последнего, тем не менее роль принципа наименьшего действия снижается, так как он не допускает никаких достаточно широких обобщений (60, 63).

Для того чтобы размеры материальных тел могли иметь определенную величину, необходимо, чтобы кривизна мира была отлична от нуля в пустом пространстве. В то время как дифференциальные уравнеиия, от которых зависит форма мира, получаются довольно просто, интегрированный вид их не вполне ясен, так как он зависит от неизвестной плотности распределения материи. Были предложены две возможные формы (67) — мир Эйнштейна, соответствующий большому количеству материи, и мир де Ситтера, соответствующий малому ее количеству сравнительно с миром Эйнштейна (69). Но в то время как в мире де Ситтера количество материи является случайным, в мире Эйнштейна оно устанавливается определенным законом (71). Этот закон в настоящее время представляется загадочным, но не исключена возможность, что он является естественным предвосхищением будущего развития теории. С другой стороны, существование спиральных туманностей говорит, может быть, в пользу формы де Ситтера, в которой нет этого загадочного закона.

Сможет ли в конце концов теория относительности быть расширена настолько, чтобы объяснить также явления исключенной области физики, вход в которую в настоящее время преграждают законы атомистики? С одной стороны, может показаться нелепым преувеличением требование, чтобы величественное творение Эйнштейна обязательно дало ключ ко всем загадкам вселенной. С другой стороны, нет никаких оснований предполагать, что в течение немногих протекших лет исчерпаны уже все выводы из новых представлений. Может случиться, что законы атомистики обязаны своим существованием только нашему представлению мира, соответственно некоторому обобщению принципа отождествления и принципа измерения. Но пожалуй столь же вероятно и другое предположение, что, после того как теория относительности устранит все добавочные законы, появляющиеся лишь в нашем понимании мира, останется еще некоторый внешний мир, развивающийся по определенным специальным законам.

Физик, который хочет исследовать природу, производит эксперименты. Он оперирует с материальными структурами, посылает световые лучи от точки к точке, отмечает пространственные и временные совпадения и производит с получаемыми при этом числами математические операции. Результат, который он получает, есть физическая величина, которая, как думает физик, соответствует чему-то в структуре мира. В некотором смысле это правильно, потому что все, что случается во внешнем мире, становится доступным нашему познанию лишь постольку, поскольку оно влияет на результаты этих экспериментальных операций. Однако мы не должны предполагать, что закон, которому подчиняется физическая величина, обусловливается обязательно теми мировыми соотношениями, которым эта величина „соответствует“. Его корни можно вскрыть, если исследовать весь ряд операций, из которых возникает данная физическая величина. Объектом физического изучения являются результаты измерений, и мораль теории относительности заключается в том, что мы только тогда сможем узнать, какой сущности *соответствуют* физические величины, если мы сначала поймем, чем они *являются*.

104. НОВАЯ ТЕОРИЯ ЭЙНШТЕЙНА *).

Недавно Эйнштейн опубликовал весьма убедительное развитие теории второй части главы VII (Berl. Sitzungsber., 1923, стр. 32, 76, 137). Это развитие можно рассматривать как вариант разобранной в п. 90 теории действия Вейля, цель которой заключается в выводе законов поля и тензоров поля из одного единственного инварианта области. Теория Эйнштейна очень формальна, какими впрочем и должны быть все подобные теории действия, и я не могу освободиться от подозрения, что ее математическое изящество достигнуто пожалуй приемами, которые не ведут по прямому пути действительного физического прогресса. Из недавней беседы с Эйнштейном я узнал, что и он склоняется к тому же мнению. Поскольку однако пути дальнейшего развития столь неясны, было бы неразумно совсем оставлять без внимания возможность продвижения вперед на каком-либо новом пути; поэтому мы приведем в дальнейшем результаты Эйнштейна, которые главным образом интересны для тех, кто придерживается взглядов, несколько отличных от идей автора на изучаемую проблему.

*) С особым удовольствием я узнал, что проф. Эйнштейн составил специально для немецкого издания этой книги изложение своих новых исследований. Мое изложение этой теории в примечаниях ко второму английскому изданию не прибавляет ничего существенного к выводам Эйнштейна; я не могу претендовать также и на более ясное и понятное изложение, так что настоящее приложение вполне могло бы быть опущено в этом издании. Однако представлялось нерациональным выбрасывать какие-либо части английского издания.

Я думаю, что читателю лучше всего будет начать со статьи Эйнштейна и только после этого с помощью настоящего приложения привести новые идеи в связь с общим ходом идей книги. При сравнении обоих изложений необходимо принять во внимание, что каждое из них было написано без знания о другом. Но, конечно, мои замечания основываются на более ранних сообщениях Эйнштейна.

Пусть K есть скалярная плотность, зависящая только от ${}^*G_{\mu\nu}$, а $P^{\mu\nu} = \dfrac{\partial K}{\partial^* G_{\mu\nu}}$, так что

$$\delta K = P^{\mu\nu}\,\delta\,{}^*G_{\mu\nu}. \tag{1}$$

Эйнштейн принимает, что существует действие $K\,d\tau$, которое остается стационарным при всех вариациях аффинной связи, описываемой коэфициентами $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$. Другими словами *)

$$\delta \int K\,d\tau = \int \frac{\mathfrak{h} K}{\mathfrak{h} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}\,\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,d\tau. \tag{2}$$

Условие стационарности гласит:

$$\frac{\mathfrak{h} K}{\mathfrak{h} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}} = 0.$$

Если подставить в (1) значения ${}^*G_{\mu\nu}$ из (92.42), то после обычного интегрирования по частям получится с точностью до полного дифференциала

$$\delta K = \frac{\partial P^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\,\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \frac{\partial P^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\,\delta\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} +$$
$$+ P^{\mu\nu}\left(\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}\,\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}\,\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,\delta\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}\,\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right),$$

или, после изменения немых значков,

$$\delta K = \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\left(\frac{\partial P^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \delta^{\nu}_{\alpha}\,\frac{\partial P^{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\varepsilon}\,P^{\varepsilon\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\varepsilon}\,P^{\mu\varepsilon} - \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}\,P^{\mu\nu} - \delta^{\nu}_{\alpha}\,\Gamma^{\mu}_{\sigma\tau}\,P^{\sigma\tau}\right).$$

Это можно преобразовать следующим образом:

$$\delta K = \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\left\{(P^{\mu\nu})_{\alpha} - \delta^{\nu}_{\alpha}(P^{\mu\sigma})_{\sigma}\right\}, \tag{3}$$

*) В неметрической геометрии нет никакой однозначной связи между K и K, и поэтому нужно ввести непосредственно гамильтоновы производные *скалярной плотности*, так как первоначальное определение (60.43) не относилось к этому случаю. В нашем случае определение и дается уравнением (2). Чтобы сделать это определение совершенно однозначным, необходимо еще явным образом постулировать, что гамильтоновы производные по симметричным величинам сами симметричны, а по антисимметричным величинам сами антисимметричны. Отметим еще, что проф. де Дондер еще ранее ввел наименование «гамильтониан от K» для той величины, которую я назвал гамильтоновой производной.

где $(\mathrm{P}^{\mu\nu})_\alpha$ есть аффинная производная (93.91), т. е.

$$(\mathrm{P}^{\mu\nu})_\alpha = \frac{\partial \mathrm{P}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\varepsilon} \mathrm{P}^{\varepsilon\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\varepsilon} \mathrm{P}^{\mu\varepsilon} - \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} \mathrm{P}^{\mu\nu}. \tag{4}$$

Так как $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \neq \delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}$, то приравнять нулю можно только суммы двух соответствующих коэффициентов (при $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ и $\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}$), а не коэффициенты при $\delta\Gamma$ в отдельности. Поэтому условие стационарности выражается следующими уравнениями:

$$(\mathrm{P}^{\mu\nu} + \mathrm{P}^{\nu\mu})_\alpha - \delta^{\nu}_{\alpha}(\mathrm{P}^{\mu\sigma})_\sigma - \delta^{\mu}_{\alpha}(\mathrm{P}^{\nu\sigma})_\sigma = 0. \tag{5}$$

Эйнштейн отождествляет $\mathrm{P}^{\mu\nu}$ с суммой тензорных плотностей симметричного и электромагнитного поля, образующих симметричную и антисимметричную часть $\mathrm{P}^{\mu\nu}$, т. е.

$$\mathrm{P}^{\mu\nu} = \mathrm{g}^{\mu\nu} + \mathrm{F}^{\mu\nu}. \tag{6a}$$

Это аналогично предложенному автором отождествлению ${}^*G_{\mu\nu}$ с $g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}$, но, очевидно, не совпадает с ним. Так как теперь $F_{\mu\nu}$ отождествляется посредством (6a), то для антисимметричной части ${}^*G_{\mu\nu}$ необходимо ввести другой символ, например $\Phi_{\mu\nu}$:

$${}^*G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \Phi_{\mu\nu}. \tag{6b}$$

Из (4) следует, что антисимметричный тензор $\mathrm{F}^{\mu\nu}$ удовлетворяет соотношению

$$(\mathrm{F}^{\mu\sigma})_\sigma = \frac{\partial \mathrm{F}^{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma} = \mathrm{J}^{\mu},$$

где J^{μ} есть вектор; поэтому (5) дает

$$2(\mathrm{g}^{\mu\nu})_\alpha - \delta^{\nu}_{\alpha}(\mathrm{g}^{\mu\sigma})_\sigma - \delta^{\mu}_{\alpha}(\mathrm{g}^{\nu\sigma})_\sigma - \delta^{\nu}_{\alpha}\mathrm{J}^{\mu} - \delta^{\mu}_{\alpha}\mathrm{J}^{\nu} = 0. \tag{7}$$

Если произвести сокращение, полагая $\nu = \alpha$, то получим

$$-3(\mathrm{g}^{\mu\alpha})_\alpha - 5\mathrm{J}^{\mu} = 0,$$

так что (7) принимает более простой вид

$$(\mathrm{g}^{\mu\nu})_\alpha + \frac{1}{3}\delta^{\nu}_{\alpha}\mathrm{J}^{\mu} + \frac{1}{3}\delta^{\mu}_{\alpha}\mathrm{J}^{\nu} = 0. \tag{8}$$

Если сравнить это с ковариантными и аффинными производными в (93.91) и (93.92), то получим

$$(\mathrm{g}^{\mu\nu})_\alpha - \mathrm{g}^{\mu\nu}_{\alpha} = S^{\mu}_{\alpha\varepsilon}\mathrm{g}^{\varepsilon\nu} + S^{\nu}_{\alpha\varepsilon}\mathrm{g}^{\mu\varepsilon} - S^{\varepsilon}_{\alpha\varepsilon}\mathrm{g}^{\mu\nu}, \tag{9}$$

где, как и в (93.6),

$$S^{*}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \{\mu\nu,\ \alpha\}. \tag{10}$$

Так как ковариантная производная $g^{\mu\nu}_{\alpha}$ от $g^{\mu\nu}$ равна нулю, то, перенося в (8) и (9) значки вниз и деля на величину $\sqrt{-g}$, входящую в выражение плотности, мы получим

$$S_{\alpha\nu,\ \mu} + S_{\alpha\mu,\ \nu} - g_{\mu\nu} S^{\varepsilon}_{\alpha\varepsilon} + \frac{1}{3} g_{\alpha\nu} J_{\mu} + \frac{1}{3} g_{\alpha\mu} J_{\nu} = 0,$$

откуда, после умножения на $g^{\mu\nu}$,

$$S^{\varepsilon}_{\alpha\varepsilon} = \frac{1}{3} J_{\alpha}.$$

Следовательно

$$S_{\alpha\nu,\ \mu} + S_{\alpha\mu,\ \nu} - \frac{1}{3} g_{\mu\nu} J_{\alpha} + \frac{1}{3} g_{\alpha\nu} J_{\mu} + \frac{1}{3} g_{\alpha\mu} J_{\nu} = 0.$$

Если решить эти уравнения относительно тензора S, то мы получим *):

$$S_{\mu\nu,\ \alpha} = \frac{1}{6} g_{\alpha\nu} J_{\mu} + \frac{1}{6} g_{\alpha\mu} J_{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} J_{\alpha}.$$

С помощью (10) мы выразим теперь коэффициенты аффинной связи через обычные физические величины:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \{\mu\nu,\ \alpha\} + \frac{1}{6} g^{\alpha}_{\nu} J_{\mu} + \frac{1}{6} g^{\alpha}_{\mu} J_{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} J^{\alpha}. \tag{11}$$

Если подставить эти значения в (92.42) или (94.3), то после простого вычисления **) получим:

$$\left.\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu} + \frac{1}{6} J_{\mu} J_{\nu}, \\ \Phi_{\mu\nu} &= \frac{1}{6}\left(\frac{\partial J_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial J_{\nu}}{\partial x_{\mu}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

---

*) Если подвергнуть значки α, ν, μ циклической перестановке и сложить три получающиеся при этом уравнения, то вследствие симметрии $S_{\alpha\nu,\mu}$ относительно α, ν мы получим

$$S_{\alpha\nu,\ \mu} + S_{\mu\alpha,\ \nu} + S_{\nu\mu,\ \alpha} = -\frac{1}{6}\,(g_{\alpha\nu} J_{\mu} + g_{\mu\alpha} J_{\nu} + g_{\nu\mu} J_{\alpha}),$$

а отсюда и из вышенаписанного уравнения следует

$$S_{\nu\mu,\ \alpha} = \frac{1}{6} g_{\alpha\nu} J_{\mu} + \frac{1}{6} g_{\alpha\mu} J_{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} J_{\alpha}. \qquad (H.)\ (11)$$

**) Вычисление производится следующим образом. Если сравнить (94.2) с написанным выше выражением для $S^{\varepsilon}_{\alpha\varepsilon}$, то для вектора $\varkappa_{\mu}$ получаем

$$\varkappa_{\mu} = \frac{1}{6} J_{\mu}.$$

Поэтому выражение (94.62) дает для тензора, обозначенного теперь

Таким образом мы выразили ${}^{*}G_{\mu\nu}$ через обычные физические переменные.

Дальнейшее исследование зависит от предположений о частном виде функции K. Вспомним, что принцип действия Вейля привел к двум законам природы, выраженным формулами (90.61) и (90.71). Если считать вероятным, что эти законы являются действительными законами природы, то необходимо попытаться отождествить K таким образом, чтобы те же законы вытекали и из рассматриваемой теории. Первый шаг заключается в том, что мы приведем формулы Вейля в связь с употребляемыми теперь символами. Если, в соответствии с соображениями стр. 394, положить $\beta = 4\pi$ *), то эти формулы принимают вид:

$$\varkappa_{\mu} = -\frac{4\pi}{3} J_{\mu}, \tag{13}$$

$$M_{\mu\nu} = \frac{3}{4\pi}\left(\varkappa_{\mu}\varkappa_{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\varkappa_{\alpha}\varkappa^{\alpha}\right) = \frac{4\pi}{3}\left(J_{\mu}J_{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}J_{\alpha}J^{\alpha}\right). \tag{14}$$

через $\Phi_{\mu\nu}$, вторую формулу (12). Чтобы вычислить например $R_{\mu\nu}$ из (94.61), мы исходим из выражения

$$S^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{6} g^{\alpha}_{\nu} J_{\mu} + \frac{1}{6} g^{\alpha}_{\mu} J_{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} J^{\alpha},$$

вытекающего сразу из формулы, выведенной выше для $S_{\mu\nu,\,\alpha}$. Прежде всего, вследствие равенства $(J^{\alpha})_{\alpha} = 0$ (ср. (73.78), мы имеем

$$(S^{\alpha}_{\mu\nu})_{\alpha} = \frac{1}{6}(J_{\mu\nu} + J_{\nu\mu}) = \varkappa_{\mu\nu} + \varkappa_{\nu\mu}.$$

Но для четвертого и пятого члена в (94.61) следует

$$2\varkappa_{\alpha} S^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{3} J_{\sigma}\left(\frac{1}{6} g^{\alpha}_{\nu} J_{\mu} + \frac{1}{6} g^{\alpha}_{\mu} J_{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} J^{\alpha}\right) = \frac{1}{9} J_{\mu} J_{\nu} - \frac{1}{6} g_{\mu\nu} J_{\alpha} J^{\alpha}.$$

$$S^{\alpha}_{\nu\beta} S^{\beta}_{\mu\alpha} = \left(\frac{1}{6} g^{\alpha}_{\nu} J_{\beta} + \frac{1}{6} g^{\alpha}_{\beta} J_{\nu} - \frac{1}{2} g_{\beta\nu} J^{\alpha}\right)\left(\frac{1}{6} g^{\beta}_{\mu} J_{\sigma} + \frac{1}{6} g^{\beta}_{\alpha} J_{\mu} - \frac{1}{2} g_{\sigma\mu} J^{\beta}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{6\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 6} + \frac{4}{6\cdot 6} - \frac{1}{6\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 6} + \frac{1}{2\cdot 2}\right) J_{\mu} J_{\nu} =$$

$$= -\left(\frac{1}{6\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 6}\right) g_{\mu\nu} J_{\beta} J^{\beta} = \frac{5}{18} J_{\mu\nu} - \frac{1}{6} g_{\mu\nu} J_{\alpha} J^{\alpha}.$$

Если вставить эти значения в (94·61), то получим сразу первую формулу (12). (*H.*)

*) Действительно, если отказаться от употребления «естественных» гравитационных и электромагнитных единиц, то оказывается возможным с помощью соответствующего выбора единиц сделать равной единице постоянную $\frac{2\beta}{8\pi}$, которая, как указано на стр. 315, характеризует отношение этих единиц. (*H*).

Поэтому из (12) следует:

$$T_{\mu\nu} - M_{\mu\nu} = -8\pi\left\{\left(G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(G - 2\lambda)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}\left(J_\mu J_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} J_\alpha J^\alpha\right)\right\} = -8\pi\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(R - 2\lambda)\right).$$

Эта разность между полным тензором энергии и тензором энергии, относящейся к электронам, должна представлять тензор энергии Максвелла $E_{\mu\nu}$.

Следовательно

$$E_{\mu\nu} = -8\pi\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(R - 2\lambda)\right).$$

Так как $E = 0$, то сокращение дает $R = 4\lambda$. Далее из (12) и (13) следует

$$\Phi_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial \varkappa_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \varkappa_\nu}{\partial x_\mu}\right) = -\frac{1}{8\pi} F \ .$$

Поэтому формулы Вейля (103.51) и (103.52) соответствуют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} E_{\mu\nu} &= -8\pi(R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}), \\ F_{\mu\nu} &= -8\pi\Phi_{\mu\nu}. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Но мы имеем

$$\delta(F_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu}) = \left(\frac{g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}}{\sqrt{-g}}\right)\delta(\mathbf{F}^{\mu\nu}\mathbf{F}^{\alpha\beta}) + \mathbf{F}^{\mu\nu}\mathbf{F}^{\alpha\beta}\delta\left(\frac{g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}}{\sqrt{-g}}\right),$$

или, согласно (35.12), (35.3) и (77.2),

$$\delta(F_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu}) = F_{\mu\nu}\,\delta\mathbf{F}^{\mu\nu} + F_{\alpha\beta}\,\delta\mathbf{F}^{\alpha\beta} +$$

$$+ \frac{\mathbf{F}^{\mu\nu}\mathbf{F}^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}\left(-g_{\mu\alpha} g_{\nu\sigma} g_{\beta\tau}\,\delta g^{\sigma\tau} - g_{\nu\beta} g_{\mu\sigma} g_{\alpha\tau}\,\delta g^{\sigma\tau} + \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} g_{\sigma\tau}\,\delta g^{\sigma\tau}\right) =$$

$$= 2(F_{\mu\nu}\,\delta\mathbf{F}^{\mu\nu} + \mathbf{E}_{\sigma\tau}\,\delta g^{\sigma\tau}).$$

С другой стороны, из $E = E_{\sigma\tau}\, g^{\sigma\tau} = 0$ следует:

$$E_{\sigma\tau}\,\delta\mathbf{g}^{\sigma\tau} = E_{\sigma\tau}\sqrt{-g}\;\delta g^{\sigma\tau} + E_{\sigma\tau}\, g^{\sigma\tau}\,\delta\sqrt{-g} = \mathbf{E}_{\sigma\tau}\,\delta g^{\sigma\tau}.$$

Поэтому мы получаем

$$-\frac{1}{16\pi}\delta(F_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu}) = -\frac{1}{8\pi}(F_{\mu\nu}\delta\mathbf{F}^{\mu\nu} + E_{\mu\nu}\,\delta\,\mathbf{g}^{\mu\nu}) =$$

$$= (R_{\mu\nu}\delta\mathbf{g}^{\mu\nu} + \Phi_{\mu\nu}\,\delta\mathbf{F}^{\mu\nu}) - \lambda g_{\mu\nu}\,\delta\mathbf{g}^{\mu\nu}.$$

Если положить $\alpha = 32\pi\lambda$, то в силу соотношения $g_{\mu\nu}\,\delta\,\mathfrak{g}^{\mu\nu} = 2\delta\sqrt{-g}$ отсюда следует:

$$-\frac{1}{16}\delta\left(-\alpha\sqrt{-g} + F_{\mu\nu}\,\mathrm{F}^{\mu\nu}\right) = {}^*G_{\mu\nu}\,\delta\,\mathrm{P}^{\mu\nu}. \tag{16}$$

Эйнштейн замечает, что каждой плотности K можно сопоставить другую плотность K', определяемую выражением

$$\mathrm{K}' = \mathrm{K} - {}^*G_{\mu\nu}\frac{\partial\mathrm{K}}{\partial\,{}^*G_{\mu\nu}} = \mathrm{K} - {}^*G_{\mu\nu}\,\mathrm{P}^{\mu\nu}. \tag{17}$$

Эта «видоизмененная» *) плотность вряд ли в меньшей мере является основной, чем первоначальная плотность. Из (1) и (17) следует

$$\left.\begin{aligned} \delta\,\mathrm{K} &= \mathrm{P}^{\mu\nu}\,\delta\,{}^*G_{\mu\nu}, \\ -\delta\,\mathrm{K}' &= {}^*G_{\mu\nu}\,\delta\,\mathrm{P}^{\mu\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Если сравнить (16) и (18), то мы получим окончательный результат Эйнштейна:

$$\mathrm{K}' = \frac{1}{16\pi}\left(-\alpha\sqrt{-g} + F_{\mu\nu}\,\mathrm{F}^{\mu\nu}\right).$$

Член с α в K', представляющийся очень искусственным усложнением выражения для K', получается из космологического члена с λ в выражении энергии. Мы получили бы более простой результат, если бы могли отказаться от космологического члена и вернуться к первоначальному незамкнутому пространству Эйнштейна. Так как $\lambda = \frac{1}{4}R$, то отсюда следовало бы, что $R = 0$.

Гамильтоновы производные по $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ повидимому представляют собой величины, имеющие для структуры мира основное значение; что же касается гамильтоновых производных по $g_{\mu\nu}$ и $\varkappa_{\mu}$, то они должны давать такие величины, которые имели бы значение, если бы мы считали содержанием мировых событий деятельность электромагнитного процесса $\varkappa_{\mu}$ в пассивной метрике $g_{\mu\nu}$. Эйнштейн использовал такие вариации, которые приспособлены к его цели — формулировке господствующего закона мировой структуры; автор употреблял другие вариации, так как он стремился получить основные величины, появляющиеся в обычной физике.

*) Ср. замечания, связанные с формулой (101.33). *(Н.)*

Если искать скалярную плотность идеальной простоты, то было бы трудно указать что-либо другое, кроме обобщенного объема (101.13). Поэтому мы сейчас исследуем, что получится, если мы в качестве K возьмем величину $\sqrt{-|{}^*G_{\mu\nu}|}$ *).

Так как при этом K есть однородная квадратичная (но иррациональная) функция величин ${}^*G_{\mu\nu}$, то из (17) следует

$$\mathrm{K}' = \mathrm{K} - 2\mathrm{K} = -\mathrm{K}. \tag{19}$$

Если, далее, положить $\Delta = |{}^*G_{\mu\nu}|$, то мы получим

$$\mathbf{P}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\sqrt{-\Delta}} \cdot \text{минор } {}^*G_{\mu\nu}.$$

На основании известной теоремы детерминант, составленный из миноров, имеет значение Δ^3. Поэтому

$$\left|\mathbf{P}^{\mu\nu}\right| = \frac{\Delta^3}{16\Delta^2} = \frac{1}{16}\Delta.$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{4}\mathrm{K} = \sqrt{-|\mathbf{P}^{\mu\nu}|} = \sqrt{-|\mathfrak{g}^{\mu\nu} + \mathfrak{F}^{\mu\nu}|} = \sqrt{-|g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}|}. \tag{20}$$

Последнее уравнение получается совершенно так же, как уравнение (49.9).

Итак, мы видим, что хотя физические тензоры у Эйнштейна и у автора отождествляются различно, обобщенный объем в обоих случаях отождествляется (с точностью до численного множителя) одинаково, и произведенное в п. 101 преобразование K применимо также и здесь. Мы вводим множитель λ, чтобы иметь возможность употреблять обычные единицы длины вместо неизвестной естественной единицы; если пренебречь четвертыми степенями $F_{\mu\nu}$, то мы получим по (101.31):

$$\frac{1}{4}\mathrm{K} = \left(\lambda^2 + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}$$

или

$$-\mathrm{K}' = 4\lambda^2\sqrt{-g} + F_{\mu\nu}\mathfrak{F}^{\mu\nu}. \tag{21}$$

*) Эйнштейн первоначально исходил из обобщенного объема и пришел к уравнениям (5). Но в его третьей работе те же уравнения были получены независимо от вида K, так что обобщенный объем оказался несущественным. (*Н.*)

Это отличается от прежнего отождествления K' только коэффициентом при $\sqrt{-g}$, и мы таким образом совершенно естественно получаем член, соответствующий космологическому члену в выражении энергии. Но этот член стоит здесь с *неправильным знаком* *).

Следующие рассуждения указывают правильный способ устранить это затруднение со знаком. Обобщенный объем составляется из определителей

$$4!\,\Delta = \mathrm{E}^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\mathrm{E}^{\varepsilon\zeta\eta\theta}\,{}^*G_{\alpha\varepsilon}\,{}^*G_{\beta\zeta}\,{}^*G_{\gamma\eta}\,{}^*G_{\delta\theta}. \tag{22}$$

Пусть

$$4!\,\Delta' = \mathrm{E}^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\mathrm{E}^{\varepsilon\zeta\eta\theta}\,{}^*G_{\alpha\varepsilon}\,{}^*G_{\zeta\beta}\,{}^*G_{\gamma\eta}\,{}^*G_{\theta\delta}. \tag{23}$$

Это выражение также представляет собой квадрат скалярной плотности, но не является детерминантом **).

Новое выражение Δ' не менее естественно, чем Δ. Чтобы получить член, квадратичный относительно $F_{\mu\nu}$, мы должны взять два из четырех множителей ${}^*G_{\alpha\varepsilon}$, ${}^*G_{\zeta\beta}, \ldots$, из которых составляется $F_{\mu\nu}$. Очевидно из шести возможных комбинаций две дадут одинаковые знаки Δ и Δ', а четыре — различные. Поэтому и знаки квадратичных членов в Δ и Δ' противоположны, так что, заменяя Δ на Δ', мы получим нужный нам знак ***).

Таким образом мы приходим к следующему заключению. Если предположить, что естественные метрические и электромагнитные единицы таковы, что четвертой степенью электромагнитной силы можно пренебречь, то вся система законов поля (кроме определяющих уравнений) содержится в условии

$$\delta\int\sqrt{-\Delta'}\,d\tau = 0, \tag{24}$$

для всех бесконечно малых вариаций аффинной связи, обращающихся в нуль на границах области.

Но насколько я могу судить, естественные единицы не удовлетворяют этому предположению (п. 102), и четвертые степени, которыми мы здесь пренебрегли, могут повести к дальнейшим усложнениям.

---

*) Разница в абсолютной величине коэффициента не имеет значения, так как она уравновешивается произволом в выборе единицы для $F_{\mu\nu}$.

**) На это выражение обратил мое внимание проф. *Р. Вейценбёк*.

***) Мне указали, что эти соображения еще недостаточны, ибо Δ связано через свои миноры с величинами $F_{\mu\nu}$, тогда как для Δ' нужно было бы произвести непосредственное вычисление вариации (24), которое, однако, очень громоздко.

105. ТЕОРИЯ ЭДДИНГТОНА И ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА.

Альберт Эйнштейн.

Проф. Эддингтон и проф. Курант побудили меня добавить к немецкому переводу этой книги небольшое приложение о применении принципа Гамильтона в теории Эддингтона. Я охотно иду навстречу этому предложению, хотя в пользу взглядов, которые здесь будут изложены, я и не могу привести никаких аргументов, кроме того соображения, что они в рамках идей Вейля — Эддингтона представляются вполне естественными.

Будем исходить из основных идей Эддингтона, заключающихся в том, что все величины теории поля так же, как и их естественные связи, должны быть сведены к закону аффинной связи, т. е. к величинам $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$, определенным формулой (92.1). В п. 92 уже было показано, что существует инвариантный интеграл, у которого подинтегральная функция есть тензорная плотность $\mathfrak{H}$, зависящая только от $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ и их первых производных. Естественно поэтому попытаться вывести законы поля из вариационного принципа, в котором такой интеграл варьируется по $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ как независимым переменным. Проделав эти вычисления, мы придем к несколько иной, чем у Эддингтона, формулировке связи между величинами $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ и метрическим полем, определяемым величинами $g_{\mu\nu}$.

Пусть $\mathfrak{H}$ есть тензорная плотность, зависящая только от величин $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ и их первых производных. Пусть далее для каждой вариации $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$, обращающейся в нуль на границе рассматриваемой области, выполняется условие

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}\, d\tau\right\} = 0, \tag{1}$$

где $d\tau = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$.

Прежде чем выводить следствия из этой аксиомы, мы допустим произвольное в логическом отношении ограничение. Мы предположим, что скалярная плотность $\mathfrak{H}$ зависит от величин Γ не наиболее общим мыслимым образом, т. е. образована из $^*B^\varepsilon_{\mu\nu\sigma}$ (92.41) не произвольным образом, но исключительно при помощи сокращенного тензора $^*G_{\mu\nu}$ (92.42), т. е. из симметричной и антисимметричной частей этого тензора:

$$\gamma_{\mu\nu} = -\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu}\right) - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu}\right). \tag{3}$$

В соответствии с этим предположением мы получим вместо (1):

$$\int(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\delta\gamma_{\mu\nu} + \mathfrak{f}^{\mu\nu}\delta\varphi_{\mu\nu})\,d\tau = 0, \tag{1a}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} &= \mathfrak{g}^{\mu\nu}, \\ \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\varphi_{\mu\nu}} &= \mathfrak{f}^{\mu\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

В (1a) нужно выразить $\delta\gamma_{\mu\nu}$ и $\delta\varphi_{\mu\nu}$ с помощью (2) и (3) через $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ и $\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$. Принимая во внимание, что 40 вариаций $\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ можно выбрать независимо друг от друга, мы получим из (1a) 40 уравнений:

$$(\mathfrak{g}^{\mu\nu})_\alpha - \frac{1}{2}(\mathfrak{g}^{\mu\sigma})_\sigma\delta^\nu_\alpha - \frac{1}{2}(\mathfrak{g}^{\nu\sigma})_\sigma\delta^\mu_\alpha - \frac{1}{2}\mathfrak{i}^\mu\delta^\nu_\alpha - \frac{1}{2}\mathfrak{i}^\nu\delta^\mu_\alpha = 0. \tag{1b}$$

При этом мы ввели тензорные плотности

$$(\mathfrak{g}^{\mu\nu})_\alpha = \frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{g}^{\sigma\nu}\Gamma^\mu_{\sigma\alpha} + \mathfrak{g}^{\mu\sigma}\Gamma^\nu_{\sigma\alpha} - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\alpha\sigma}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{i}^\mu = \frac{\partial\mathfrak{f}^{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma}. \tag{6}$$

40 уравнений (1b) позволяют выразить 40 величин $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ через $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ и их производные. Чтобы сделать это, необходимо от контравариантных тензорных плотностей перейти к контравари-

антным тензорам, а от них к ковариантным. С этой целью определим тензоры $g^{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ посредством уравнений:

$$\left.\begin{aligned} g^{\mu\nu}\sqrt{-g} &= \mathfrak{g}^{\mu\nu}, \\ g_{\mu\sigma}g^{\nu\sigma} &= \delta_\mu^\nu, \\ g &= |g_{\mu\nu}|, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

и, далее, векторы i^μ и i_μ посредством уравнений:

$$\left.\begin{aligned} i^\mu\sqrt{-g} &= \mathfrak{i}^\mu, \\ i_\mu &= g_{\mu\nu}i^\nu; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

тогда после элементарного вычисления *) получаем

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}i^\alpha + \\ + \frac{1}{6}\delta_\mu^\alpha i_\nu + \frac{1}{6}\delta_\nu^\alpha i_\mu \tag{1c}$$

Этот результат ясно указывает, что $g_{\mu\nu}$ можно рассматривать как метрический тензор. Выражение для $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, получающееся из вариационного принципа, имеет большое сходство с тем, которое получается из теории Вейля; здесь также на ряду с метрическим тензором появляется четырехмерный вектор.

Уравнения поля для $g_{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ уже заключаются в полученных результатах, если выбрано определенное выражение для гамиль-

---

*) Сначала мы получаем, сокращая (1b) по значкам ν, α: $(\mathfrak{g}^{\mu\nu})_\sigma = -\frac{5}{3}\mathfrak{i}^\mu$, откуда вместо (1b) можем написать:

$$(\mathfrak{g}^{\mu\nu})_\alpha + \frac{1}{3}\mathfrak{i}^\mu\delta_\alpha^\nu + \frac{1}{3}\mathfrak{i}^\nu\delta_\alpha^\mu = 0.$$

Заменим здесь $(\mathfrak{g}^{\mu\nu})_\alpha$ их выражением (5). Теперь можно с помощью первого из уравнений (7) перейти к контравариантной форме:

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + g^{\mu\sigma}\Gamma_{\sigma\alpha}^\nu + g^{\nu\sigma}\Gamma_{\sigma\alpha}^\mu + \frac{1}{3}i^\mu\delta_\alpha^\nu + \frac{1}{3}i^\nu\delta_\mu^\alpha + g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} - \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma\right) = 0.$$

Умножив на $g_{\mu\nu}$, мы увидим, что выражение в скобках в последнем члене равно $-\frac{1}{3}i_\alpha$. Переходя к ковариантным значкам и решая относительно Γ, мы и получим уравнение (1c).

тоновой функции H. Уравнения эти получаются из выражений (2) и (3), если выразить их правую и левую стороны через $g_{\mu\nu}$ и $f^{\mu\nu}$. Для правых сторон это дает уравнение (1c), для левых сторон—уравнение (4). Действительно, если H задано как функция $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$, то можно с помощью (4) выразить $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$ через $g^{\mu\nu}$ и $f^{\mu\nu}$ и результат подставить в левые стороны (2) и (3).

Однако, поскольку речь идет о левых сторонах уравнений (2) и (3), мы придем к цели проще следующим образом. Так как мы до сих пор не сделали еще никакого предположения относительно выбора скалярной плотности H как функции γ и φ, то уравнения (4) выражают не что иное, как то, что выражение

$$g^{\mu\nu}\, d\gamma_{\mu\nu} + f^{\mu\nu}\, d\varphi_{\mu\nu}$$

есть полный дифференциал (по отношению к переменным $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$). Этому эквивалентно утверждение, что выражение

$$\gamma_{\mu\nu}\, dg^{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}\, d\, f^{\mu\nu}$$

есть также полный дифференциал, так как оно отличается от предыдущего только тем, что теперь мы, обратно, $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$ рассматриваем как функции от $g^{\mu\nu}$ и $f^{\mu\nu}$. В таком случае наш результат означает, что существует функция H^* от $g^{\mu\nu}$ и $f^{\mu\nu}$, имеющая характер скалярной плотности и удовлетворяющая условиям

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} &= \frac{\partial H^*}{\partial g^{\mu\nu}}, \\ \varphi_{\mu\nu} &= \frac{\partial H^*}{\partial f^{\mu\nu}}. \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

Выбор функции H^* полностью определяет левую сторону (2) и (3). Функции H и H^* однозначно определяют друг друга. Действительно мы имеем:

$$dH + dH^* = d\left(\gamma_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}\, f^{\mu\nu}\right), \tag{9}$$

и если H^* есть однородная квадратичная функция от $f_{\mu\nu}$ и однородная функция нулевого порядка от $g^{\mu\nu}$, то

$$H = H^*. \tag{9a}$$

Принимая во внимание теорию Максвелла, положим

$$H^* = -\frac{\beta}{2} f_{\sigma\beta} f^{\sigma\beta} \sqrt{-g} = -\frac{\beta}{2}\, g_{\sigma\alpha}\, g_{\tau\beta}\, f^{\sigma\tau} f^{\alpha\beta} \sqrt{-g}. \tag{10}$$

Здесь β есть постоянная, g есть определитель $|g^{\alpha\beta}|$, $g_{\sigma\alpha}$ — нормированные миноры элементов $g^{\sigma\alpha}$ *).

Отсюда после простого вычисления вытекает:

$$dH^* = -\beta\left[\left(\frac{1}{4}\, g_{\alpha\beta}\, f_{\sigma\tau} f^{\sigma\tau} - f_{\alpha\sigma} f^{\sigma}_{\beta}\right)\delta g^{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta}\,\delta f^{\alpha\beta}\right], \qquad (11)$$

или, согласно (4a),

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} &= -\beta\left(\frac{1}{4}\, g_{\alpha\beta}\, f_{\sigma\tau} f^{\sigma\tau} - f_{\alpha\sigma} f^{\sigma}_{\beta}\right) = -\beta\, E_{\mu\nu}, \\ \varphi_{\mu\nu} &= -\beta\, f_{\mu\nu}. \end{aligned}\right\} \qquad (11a)$$

Эти уравнения определяют в связи с (2), (3) и (1c) уравнения поля. $E_{\mu\nu}$ есть электромагнитный тензор энергии теории Максвелла. Заметим, что к функции H можно было бы прибавить член вида $\mathrm{const}\cdot\sqrt{-g}$, соответствующий „космологическому" члену общей теории относительности.

После этого вычисления мы получаем уравнения поля в виде:

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= -\beta\, E_{\mu\nu} - \frac{1}{6}\, i_{\mu}\, i_{\nu}, \\ \beta f_{\mu\nu} &= \frac{1}{6}\left(\frac{\partial i_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial i_{\nu}}{\partial x_{\mu}}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

где $G_{\mu\nu}$, как и в (37.2), означает сокращенный тензор Римана. Что касается физического смысла этих уравнеиий, то величине $f_{\mu\nu}$ нужно во всяком случае приписать значение тензора электромагнитного поля. Первое из уравнений (12) в точности соответствует обычным уравнениям поля общей теории относительности, однако только в том случае, когда кроме метрического поля имеется еще электромагнитное, что прибавляет определенный энергетический член, соответствующий плотности тока. Второе из уравнений (12) повидимому противоречит опыту; действительно, оно требует, чтобы электромагнитное поле обращалось в нуль везде, где плотность заряда равна нулю.

Однако это затруднение не так велико, так как мы не знаем, не связаны ли с электромагнитными полями очень малые плот-

*) Из (10) и (9) легко убедиться, что при этом предположении уравнение (9a) удовлетворяется.

ности электрических масс. Чтобы иметь возможность судить о допустимости уравнений (12), мы должны далее принять во внимание, что единица электромагнитного поля должна быть изменена, если длина измеряется в сантиметрах, а масса и энергия — в граммах. В таком случае мы должны вместо (12) написать уравнения:

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= -\beta^2\alpha E_{\mu\nu} - \frac{1}{6}\alpha^2 i_\mu i_\nu, \\ \beta f_{\mu\nu} &= \frac{1}{6}\left(\frac{\partial i_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial i_\nu}{\partial x_\mu}\right). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

На основании второго из этих уравнений существует потенциальный вектор f_μ электромагнитного поля $\left(f_{\mu\nu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\right)$, определяемый уравнением

$$6\beta f_\mu = i_\mu. \tag{14}$$

Поэтому первое уравнение поля мы можем написать в виде

$$G_{\mu\nu} = -\beta\,\alpha^2 E_{\mu\nu} - 6\beta^2\alpha^2 f_\mu f_\nu. \tag{15}$$

Существование полей, практически не связанных с током, требует согласно (14), чтобы величина β была исчезающе малой. В таком случае последний член в (15) также будет исчезающе малым по сравнению с максвелловым членом энергии. В этом случае наш метод ведет к тем же уравнениям, которые первоначально установила общая теория относительности и которые были получены без всякого обобщения геометрических основ за пределы системы Риманна.

Эти уравнения поля во всяком случае не приводят к электрону, как к решению без особых точек. Далее, опыт до сих пор не дал никаких подтверждений тому выводу, что электромагнитные поля вызывают в тех точках, где они существуют, появление четырехмерного тока. Окончательный результат этого исследования к сожалению производит на меня впечатление, что произведенное Вейлем и Эддингтоном углубление геометрических основ не смогло привести к прогрессу физических знаний. Я надеюсь, дальнейшее развитие теории покажет, этот пессимистический взгляд был необоснованным.

106. О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СФЕРИЧЕСКОГО МИРА ЭЙНШТЕЙНА *).

А. С. Эддингтон.

1. Работая вместе с доктором Мак Витти, я несколько месяцев тому назад предпринял исследование с целью выяснения вопроса, является ли сферическая вселенная Эйнштейна устойчивой. Прежде чем наш анализ был закончен, мы познакомились со статьей аббата Лемэтра **), который дает замечательно полное решение различных вопросов, связанных с космогоническими построениями Эйнштейна и де Ситтера. Не будучи выраженным в явной форме, из его уравнений все же сразу становится очевидным тот факт, что мир Эйнштейна неустойчив. Это является важным обстоятельством, на которое как будто не обращали до сих пор внимания при обсуждении космогонических гипотез. Астрономы чрезвычайно интересуются этими проблемами благодаря их связи с поведением спиральных туманностей, и моей целью является рассмотрение вопроса с астрономической точки зрения, хотя мое первоначальное желание получить некоторый принципиально новый результат и было предупреждено блестящим решением Лемэтра.

Конечность пространства зависит от „космической постоянной“ λ, которая входит в гравитационные уравнения Эйнштейна $G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$ для пустого пространства. На основании общих философских соображений ***) едва ли можно сомневаться в том, что эта форма уравнений является гораздо более правильной, чем

---

*) *A. S. Eddington*, Monthly Notices R.A.S. May, 1930. XC, 668.

**) *G. Lemaitre*, Annales de la Société scientifique de Bruxelles 47A, 49 (19 7); см. также работу *А. Фридмана*, Z. Phys. 21, 326, 1924, пришедшего к этим же результатам еще раньше.

***) Nature of the Physical world, V I.

первоначальная форма $G_{\mu\nu}=0$, но λ настолько мала, что ею можно пренебречь во всех применениях, за исключением тех из них, в которых встречаются очень большие расстояния. Если отвлечься от значений, которые могут быть приписаны величине λ на основании астрономических исследований внегалактической вселенной, эта величина является совершенно неизвестной, или, лучше сказать, мы не знаем, как выразить длины предметов и масштабов наших обычных размеров в терминах естественной космической единицы длины: $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Форма и размеры пространства зависят не только от λ, но и от количества материи, содержащейся во вселенной, и от способа ее распределения. Естественно, что пространство будет иметь сферическую форму только в том случае, если материя (которая согласно уравнениям Эйнштейна определяет геометрию) равномерно распределена по всему пространству. Ограничивая свое внимание сферическим пространством, мы, строго говоря, должны предполагать, что вселенная заполнена материей равномерной плотности, но практически нам необходимо настаивать на такой равномерности только в *большом масштабе*, т. е. мы будем предполагать достаточно правильное распределение по всему пространству галактических систем, заполняющих вселенную.

Если постулировать, далее, что эта сферическая вселенная постоянна и неизменна, то возможно только одно единственное решение, т. е. мир Эйнштейна. Для равновесия пространство должно иметь определенный радиус и содержать определенное количество массы (определенной в зависимости от космической постоянной λ).

Математически решение де Ситтера также является равновесным решением, но теперь нам понятно, что это происходит только потому, что в совершенно пустом мире не может быть ничего, что могло бы указать на отклонение от состояния равновесия.

2. *Расширяющиеся вселенные.* Можно найти бесконечное множество решений, представляющих собою сферические миры, не находящиеся в состоянии равновесия. Оставаясь сферическими, они расширяются или сжимаются, в то время как радиус (выраженный через наши обыкновенные единицы, которые находятся в постоянном, хотя и неизвестном, отношении к космической

няет две теории, но выясняет также смысл явлений в пограничной области, чего до сих пор не была в состоянии проделать ни одна единице $\left.\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$ является функцией времени. Так как в расширяющемся сферическом мире галактические системы продолжают заполнять равномерно пространство, то с течением времени они все дальше и дальше удаляются друг от друга. Поэтому решения, дающие расширяющиеся миры, имеют астрономический интерес, как возможное объяснение наблюдаемого рассеивания спиральных туманностей *).

Так же, как и в решении Эйнштейна, интервалом, соответствующим сферическому пространству и не искривленному времени, будет.

$$ds^2 = -a^2\left\{d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right\} + dt^2, \qquad (1)$$

где a есть радиус пространства, а (χ, θ, φ) — угловые координаты **). Мы допускаем теперь, что a есть функция от t. Лемэтр показал, что гравитационные уравнения Эйнштейна дают следующие значения для плотности ρ и давления p материи в пространстве (I):

$$8\pi\rho = -\lambda + 3\left\{\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{1}{a^2}\right\}, \qquad (2)$$

$$8\pi p = \lambda - \left\{\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{1}{a^2}\right\} - \frac{2}{a}\frac{d^2a}{dt^2}, \qquad (3)$$

причем единицы измерения выбраны так, что скорость света и постоянная тяготения равны единице. Из (2) и (3) имеем:

$$\frac{6}{a}\frac{d^2a}{dt^2} = 2\lambda - 8\pi(\rho + 3p) \qquad (4)$$

3. *Затухание индивидуальных движений.* Мы будем рассматривать некоторую галактическую систему как находящуюся „в покое“, если ее угловые координаты (χ, θ, φ) остаются постоянными. Легко проверить, что в этом случае ее четырехмерной траекторией будет геодезическая линия. В смысле наблюдений галактические системы,

---

*) Я рассматриваю расширяющиеся вселенные именно благодаря этой причине, но уравнения всегда имеют такой вид, что время обратимо, и поэтому каждому решению, дающему расширяющийся мир, соответствует решение, дающее мир сжимающийся.

**) Для расстояний, малых по сравнению с a, приближенно можно написать $\frac{r}{a} = \chi = \sin\chi$, и (1) превращается в обычное выражение для сферических полярных координат (r, θ, φ).

находящиеся „в покое", будут казаться удаляющимися друг от друга, так как масштаб всего распределения увеличивается. Дело происходит так, как если бы галактики были скреплены с поверхностью резинового баллона, который непрерывно раздувается. Беспорядочные индивидуальные движения по отношению к „покоящимся" осям, все равно — галактических систем, звезд или атомов, вызывают давление p, выражаемое уравнением (3). На основании обычной кинетической теории p равно $^2/_3$ от кинетической энергии в единице объема. К этому выражению должно быть прибавлено давление излучения, распространяющегося в пространстве.

Лемэтр получил удивительный результат, что при расширении вселенной давление изменяется *адиабатически*. Кинетическая энергия индивидуальных движений (подобно теплу) уменьшается на величину работы $p\,dV$, производимой давлением при расширении объема вселенной. (Расширение, однако, не *вызывается* давлением; ниже мы увидим, что расширение происходит даже тогда, когда $p = 0$.) Отсюда следует, что в то время как вселенная расширяется, индивидуальные движения галактических систем замедляются не только относительно по сравнению с масштабом системы, но и абсолютно. В самом деле, средняя скорость беспорядочного движения изменяется пропорционально $\frac{1}{a}$. Таким образом, если расширение в предшествующий период было значительным, то мы могли бы ожидать, что спиральные туманности должны теперь находиться почти в полном „покое"; следовательно правильное рассеивание не может быть сильно замаскировано индивидуальными движениями.

4. *Сохранение массы.* Рассмотрение вопроса о расширении вселенной чрезвычайно упрощается, если мы имеем право предположить, что общая масса вселенной остается постоянной. Это не будет строго верно. Мы можем рассматривать или собственную массу или относительную массу (т. е. массу относительно осей, находящихся „в покое"). К несчастию ни та, ни другая не сохраняется в точности:

1) собственная масса сохраняется, если не принимать во внимание излучения; относительная масса уменьшается благодаря уменьшению кинетической энергии беспорядочного движения, на которое указывалось в п. 3;

2) при превращении материи в излучение сохраняется отно-

сительная масса; собственная же масса уменьшается, так как излучение не имеет собственной массы.

Таким образом возможно, что обе массы несколько уменьшаются с течением времени. Однако учет этих изменений ведет к излишним усложнениям. В последующем изложении мы обычно будем принимать $p=0$, так что собственная и относительная массы не будут отличаться друг от друга, и как та, так и другая в нашей степени приближения *) будут оставаться постоянными.

5. *Неустойчивость вселенной Эйнштейна.* Полагая в (4) $p=0$, будем иметь

$$3\frac{d^2a}{dt^2}=a(\lambda-4\pi\rho).$$

Для равновесия (решение Эйнштейна) мы должны поэтому иметь $\rho=\frac{\lambda}{4\pi}$. Если же имеется незначительное возмущение такое, что $\rho<\frac{\lambda}{4\pi}$, то $\frac{d^2a}{dt^2}$ будет положительно, а следовательно вселенная расширяется. Расширение влечет за собой уменьшение плотности; таким образом, дефицит делается все больше и $\frac{d^2a}{dt^2}$ увеличивается. Аналогично, если имеется незначительный избыток массы, происходит сокращение, которое непрерывно увеличивается.

Первоначальное незначительное возмущение может произойти без постороннего вмешательства. Если мы исходим из равномерно распределенной в пространстве туманности, которая (благодаря обычной гравитационной неустойчивости) постепенно конденсируется в галактические системы, то действительная масса может и не меняться, в то время как эквивалентная масса, которая вводится при применении уравнений к совершенно однородному распределению, должна несколько измениться. Представляется вполне возможным, что именно этот эволюционный процесс и вызвал расширение вселенной. Однажды начавшись, это расширение должно было продолжаться со все увеличивающейся скоростью. Однако я не смог доказать теоретически, что конденсация должна была вызвать расширение, а не сокращение.

Мы можем с другой стороны предположить, что начальное

*) Вопросы, связанные с давлением, будут полно разобраны в новой статье проф. де Ситтера.

состояние равновесия было нарушено превращением материи в излучение. Такое превращение не изменяет ρ (так как масса излучения равна массе превращаемой материи), но оно ведет к увеличению p. Из уравнения (4) мы видим, что увеличение p делает величину $\frac{d^2a}{dt^2}$ отрицательной; таким образом мир начал бы сжиматься. Следовательно, это объяснение должно быть отброшено. Из общих соображений представляется мало вероятным, чтобы превращение материи в излучение могло бы начаться раньше, чем произошла значительная конденсация в галактические системы и последующее за этим расширение.

Только что появилась статья Тольмана *), в которой удаление туманностей объясняется превращением материи в излучение. Однако ясно, что это не может служить „объяснением", так как согласно (4) превращение материи в излучение стремится замедлить расширение. Для упрощения задачи Тольман вводит искусственное условие, эквивалентное уравнению $\frac{d(\lg a)}{dt} = \mathrm{const}$. Я думаю, что он определяет в своей статье не скорость превращения материи, которая как будто бы „объясняет" наблюдаемое значение величины $\frac{d(\lg a)}{dt}$ но, на самом деле, скорость, которая препятствовала бы увеличению $\frac{d(\lg a)}{dt}$.

Мы можем сравнить условия равновесия: (a), когда мир содержит только покоящуюся материю, и условия (b), когда он содержит только излучение.

Полагая в (2) и (3)

$$\frac{da}{dt},\ \frac{d^2a}{dt} = 0,$$

получим

$$8\pi\rho = -\lambda + \frac{3}{a^2},\quad 8\pi p = \lambda - \frac{1}{a^2},$$

так что

$$\frac{1}{a^2} = 4\pi(\rho + p),\ \lambda = 4\pi(\rho + 3p).$$

---

*) Proc. Nat. Acad. Sci. 16, 320, April, 1930. Леметр в заключительном параграфе своей работы повидимому поддерживает ту же точку зрения.

a) Для покоящейся материи $p=0$. Отсюда

$$a^2=\frac{1}{\lambda}.$$

b) Для излучения $\rho=3p$. Откуда

$$a^2=\frac{\frac{3}{2}}{\lambda}.$$

Общая масса будет равна

$$\text{a)}\ \frac{\pi}{2}\lambda^{-\frac{1}{2}},\quad \text{b)}\ \frac{\pi}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\lambda^{-\frac{1}{2}}.$$

Разность масс в этих двух крайних случаях равна всего лишь 8%.

6. Скорость расширения. Полагая $p=0$, обозначим через a_e, M_e, радиус и массу вселённой Эйнштейна, a, M — радиус и массу рассматриваемой системы. Напомним, что a есть функция времени, а остальные три величины постоянны. Для вселенной Эйнштейна получим

$$\frac{2}{\pi}M_e=a_e=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \tag{5}$$

Полный объем сферического мира равен $2\pi^2 a_e^3$, откуда плотность $\rho_e=\frac{1}{4\pi a_e^2}=\frac{\lambda}{4\pi}$, что согласуется с ранее найденным результатом. Масса измеряется здесь в гравитационных единицах, в которых масса солнца приблизительно равна 1,5 *км*.

Из (2) имеем

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2+1=\frac{1}{3}a^2(\lambda+8\pi\rho)=\frac{1}{3}a^2\lambda+\frac{4M}{3\pi a},$$

откуда

$$\frac{da}{dt}=\sqrt{\frac{1}{3}a^2\lambda-1+\frac{4M}{3\pi a}}. \tag{6}$$

Возможны три случая:

a) Если $M>M_e$, то правая часть не может обратиться в нуль при каком-либо положительном значении a и система может непрерывно расширяться от очень маленького до очень большого радиуса. Минимум величины $\frac{da}{dt}$ найдем, дифференцируя (6) по a,

$$\frac{2}{3}a\lambda=\frac{4M}{3\pi a^2},$$

откуда

$$a^3 = \frac{2M}{\pi\lambda},$$

или согласно (5)

$$\frac{a}{a_e} = \sqrt[3]{\frac{M}{M_e}}.$$

Когда радиус, увеличиваясь, проходит через это значение a, то скорость расширения замедляется и затем опять увеличивается.

Трудность в допущении этого решения состоит в том, что оно повидимому требует внезапного и непонятного начала всех вещей.

b) Если $M < M_e$, то правая часть обращается в нуль при двух положительных значениях a, например R_1 и R_2, и делается мнимой для значений a, лежащих между R_1 и R_2. Таким образом, или мир, начиная расширяться с конечной скоростью, достигает радиуса R_1 и затем опять сжимается, или, начиная сжиматься с конечной скоростью, сжимается до радиуса R_2 и затем расширяется опять. Для реальной вселенной трудно найти естественную начальную точку в данном случае.

Если мы решим принять случай (b), то это как будто приведет нас к тому, что действительная вселенная вначале имела радиус R_2, и, следовательно, мы имели первоначально $\frac{da}{dt} = 0$; затем вселенная непрерывно расширялась.

Если $a \to R_2$, то $\frac{da}{dt} \to 0$ так же, как и $\sqrt{a - R_2}$, и, следовательно радиус мало отличается от R_2 только в течение конечного промежутка времени. Взяв за нынешнюю скорость расширения любое из значений, лежащих в разумных границах, мы будем неприятно удивлены, найдя для возникновения вселенной весьма недавнюю дату.

c) В предельном случае $M = M_e$, как в п. 106.5. Тогда R_1 и R_2 совпадают с a_e. Если $a \to a_e$, то $\frac{da}{dt} \to 0$ так же, как и $(a - a_e)$; следовательно, время, в течение которого радиус мало отличается от a_e, будет логарифмически бесконечно.

Здесь мы находим, по крайней мере, философское удовлетворение, видя, как мир начал развиваться бесконечно медленно из первоначального однородного распределения в неустойчивом состоянии равновесия. Поэтому этот случай наиболее привлекателен. Но в физике логарифмические бесконечности обычно бывают обманчивы и в практических применениях оказываются совсем не такими уж большими. Я не думаю, чтобы мы очень значительно увеличили действительный возраст галактических систем по сравнению с случаем (b), принимая $M = M_e$. Мы допускаем, что эволюция началась бесконечно давно, но, начавшись на самом деле, она, оказывается, требует срока не столь отличного от случая (b).

При $M = M_e$ уравнение (6) можно проинтегрировать, не пользуясь эллиптическими функциями. Довольно сложный результат приведен в статье Лемэтра [уравнение (30)].

7. *Возможность видеть вокруг мира.* Вопрос, дебатировавшийся, пожалуй, больше благодаря своей оригинальности, чем благодаря практическому значению, заключается в том, можно ли видеть вокруг всей вселенной.

Хорошо известно, что это возможно в мире Эйнштейна и невозможно в мире де Ситтера. Расширяющаяся вселенная Лемэтра принадлежит к промежуточному типу, и любопытно, что ответ, который она дает, также является половинчатым. Мы можем видеть все части мира, но не очень вероятно, чтобы нас можно было видеть из всех частей мира.

Мы получим траекторию светового луча, полагая $ds = 0$ в (1). Поместив себя в начало координат $\chi = 0$ в момент времени t_0, мы будем находиться на траектории луча света, уравнением которой будет

$$0 = -a^2\, d\chi^2 + dt^2,$$

так что для прошлого (события в χ, t, которые мы видим теперь)

$$\chi = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a}, \tag{7}$$

и для будущего

$$\chi = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{a}. \tag{8}$$

Так как в прошлом a всегда было меньше, чем в настоящем, то χ в (7) беспредельно увеличивается, если $t \to -\infty$; следовательно мы можем увидеть что-либо вокруг мира много раз, если мир существовал достаточно долго. В будущем a будет непрерывно увеличиваться со все возрастающей скоростью и возможно, что интеграл (8) будет стремиться при $t \to \infty$ к конечному пределу, меньшему чем 2π.

Лемэтр, воспользовавшись астрономическими данными, вычислил, что это так и есть на самом деле. Наблюдатели, для которых координата χ меньше этого предельного значения, не смогут никогда увидеть событий, происходящих сейчас в нашей галактике; они видят более ранние события, но их бесконечное время жизни дает им возможность следить за нашей историей только вплоть до некоторого момента, когда скорость увеличения радиуса мира делается слишком большой.

Или иначе, скорость света в некотором угле (т. е. в доле всего замкнутого пути вокруг сферического пространства) уменьшается при увеличении радиуса пространства. Сперва, когда радиус мал, световая волна может сделать несколько полных оборотов, но в конце концов для нее становится возможным только асимптотическое приближение к некоторому определенному положению.

Из любопытства я при помощи формулы Лемэтра вычислил момент времени, когда круговое путешествие света перестанет быть возможным. При расширении это должно случиться очень скоро, а именно: как только a достигнет значения $1{,}003\ a_e$. [Это применимо к случаю (c).] Когда расширение достигнет этой величины, то всякая световая волна, которая будет существовать в это время, вступит на свой последний круг; волны, которые будут испущены позже, уже никогда не смогут совершить замкнутого пути. Я могу добавить, что так называемое „эллиптическое пространство“ имеет разрез, который разделяет пополам то расстояние, которое должно быть пройдено; обманувшись в своих ожиданиях при распространении по этому пути, свет может вернуться в свою исходную точку, если он вышел из нее не позже того момента, когда a сделалось равным $1{,}003\ a_e$.

8. *Смещение спектральных линий.* Предположим, что мы находимся „в покое“ в $\chi = 0$, и видим некоторый предмет, находящийся „в покое“ на расстоянии χ; тогда, варьируя пределы интегрирования выражения (7), получим

$$\theta = \frac{\delta t_0}{a(t_0)} - \frac{\delta t}{a(t)},$$

где $a(t)$ есть радиус мира в момент времени t.

Отсюда

$$\frac{\delta t_0}{\delta t} = \frac{a(t_0)}{a(t)}, \tag{9}$$

т. е. отношение периода света наблюденного к периоду света испущенного равно отношению радиуса вселенной в момент наблюдения к радиусу в момент испускания. Это определяет величину смещения к красному концу спектра.

Мы можем непосредственно найти скорость расширения вселенной в настоящее время. Среднее смещение к красному концу спектра спиральных туманностей доходит до 500 *км/сек* на мегапарсек, или около $\frac{1}{2000}$ скорости света на расстояние, соответствующее миллиону световых лет. Следовательно, мы должны положить в формуле (9) $\frac{\delta t_0}{\delta t} = \frac{2001}{2000}$ для интервала $t_0 - t = 1\,000\,000$ лет. Таким образом, радиус вселенной за последний миллион лет увеличился на $\frac{1}{2000}$.

Мы получили поразительный результат: он указывает, что в пределах обычного геологического времени радиус мира успел удвоиться.

Пусть

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \frac{1}{A}.$$

Тогда на основании предыдущих результатов получим:

$$A = 2 \cdot 10^9 \text{ световых лет.}$$

Это дает представление о масштабах явления, с которым мы имеем дело. Из (5) мы можем вычислить, что (фиктивный) мир Эйнштейна *) радиуса A имел бы массу $2 \times 10^{22} \odot$ и плотность

$$\rho_A = 3 \cdot 10^{-28} \text{ г/см}^3.$$

Принимая во внимание, что плотность вблизи солнца имеет порядок величины 10^{-24}, или, в крайнем случае, 10^{-23}, и допуская

*) Для мира Эйнштейна (при $p=0$) имеется только один возможный радиус, и он сейчас неизвестен. Мы вычисляем здесь (для сравнения), какова была бы плотность, если бы этот неизвестный радиус оказался равным A; позже мы увидим, что он в действительности меньше, чем A.

существование больших сравнительно пустых областей между галактиками, мы можем сказать, что плотность ρ действительной вселенной, вероятно, значительно меньше, чем ρ_A. Этим заключением мы воспользуемся в п. 106.9.

Если мы пытаемся смотреть назад в давно прошедшее, как например в проблеме „возможности видеть вокруг мира“, то возможно, что отношение $\frac{a(t_0)}{a(t)}$ будет большим и то, что первоначально было видимым светом, будет смещено в инфракрасную область. Таким образом в расширяющейся вселенной имеется своего рода постепенное стирание следов прошлого, осуществляющееся путем перехода к все более и более длинным волнам.

Упомянем, наконец, об известной фантазии о „призраках“ звезд или туманностей, образующихся благодаря тому, что испускаемые световые волны могут будто бы вновь сойтись, после того как они обошли вокруг мира: в действительности же этот эффект едва ли может осуществиться, так как неправильности вселенной почти наверное воспрепятствует такой сходимости лучей.

Эти призраки становятся с возрастом мира все краснее и краснее и, наконец, перестают быть видимыми.

9. *Некоторые численные результаты.* Если даже мы примем, на основании теоретических соображений, указанных в п. 6, что $M = M_e$, то для определения a все же необходимо знание еще одной астрономической величины кроме A. Этой требуемой величиной является задание действительной средней плотности мира. Сейчас еще невозможно определить эту величину с достаточной достоверностью.

Пусть $\frac{a}{a_e} = q$, так что q есть мера расширения, которое, по предположению, началось с момента нарушения первоначального состояния равновесия. При $M = M_e$ получаем из (5) и (6):

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{1}{3}q^2 - 1 + \frac{2}{3q}},$$

так что

$$\frac{1}{A^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{3}q^2 - 1 + \frac{2}{3q}\right). \qquad (10)$$

Но

$$4\pi\rho = \frac{2M_e}{\pi a^3} = \frac{1}{a^2 q}.$$

Отсюда

$$\frac{\rho_A}{\rho} = \frac{1}{4\pi\rho A^2} = \frac{1}{3} q^3 - q + \frac{2}{3}. \tag{11}$$

Для нашей расширяющейся вселенной $q > 1$, а из выражения (11) следует, что $\rho_A > \rho$. Согласие этого результата с выводом, сделанным нами в последнем параграфе на основании наблюдений является удовлетворительным фактом. Если мы правы, предполагая, что ρ *значительно меньше*, чем ρ_A, то q будет велико, и выражения (11) и (10) приближенно можно написать так:

$$\frac{\rho_A}{\rho} = \frac{1}{3} q^3; \quad \frac{a^2}{A^2} = \frac{1}{3} q^2.$$

Отсюда

$$a_e^2 = \frac{1}{3} A^2. \tag{13}$$

Следовательно

$$a_e = 1200 \text{ миллионов световых лет.}$$

Можно считать, что значения ρ, полученные например Хэбблем верны, с точностью до множителя, равного 100. Соответствующее определение величин q и a может быть произведено с точностью до множителя $(100)^{\frac{1}{3}}$. Таким образом до сих пор наше знание величины радиуса мира остается еще очень неопределенным.

Мы заключаем, что радиус пространства первоначально был равен приблизительно 1200 миллионам световых лет, что с тех пор он значительно увеличился, но до значения практически неопределимого, и что теперь скорость расширения пространства равна $1^0/_0$, приблизительно в 20 миллионов лет, причем эта скорость будет сохраняться беспредельно долго *).

10. Различные вопросы. Мир де Ситтера соответствует $\rho = 0$ и является пределом, к которому стремится вселенная, так как плотность уменьшается благодаря увеличению объема пространства. Если принять случай (с), т. е. $M = M_e$, то история расширения

*) Из (6) видно, что $\frac{1}{a}\frac{da}{dt}$ при $a \to \infty$ стремится к определенному пределу, равному $\sqrt{\frac{1}{3}\lambda}$.

вселенной сводится к постепенному переходу от мира Эйнштейна к миру де Ситтера. Согласно п. 106.9 расширение достигло уже таких размеров, что модель де Ситтера дает теперь гораздо лучшее приближение, но это всецело зависит от того, насколько правильно наше утверждение о том, что действительная средняя плотность вселенной значительно меньше, чем 10^{-28} *г/см*^{3}. Если допустить это, то теоретические соображения, основанные на вселенной де Ситтера, не требуют никаких радикальных изменений при условии, что они не касаются ранней истории прошлого.

Однако, де Ситтер применял исчисление пространства, времени и понятия „покоя", отличающиеся от того, который излагался в п. 106.1, так что эти же явления были описаны им иными способами. В частности, он ввел «замедление времени» на больших расстояниях от начала координат, что не встречается в новых формулах. Новое описание менее парадоксально, и его, без сомнения, легче понять, на что уже указали многие исследователи. Более того, оно имеет то преимущество, что теперь мы приближаемся к миру де Ситтера как к пределу ряда миров с постепенно уменьшающейся плотностью, между тем как прежде мы должны были начинать с абсолютно пустого мира и весьма осторожно помещать в нем несколько материальных тел.

Против мира Эйнштейна первоначально выдвигалось возражение, что здесь до некоторой степени восстанавливается абсолютность пространства и времени. То же самое относится и к расширяющейся вселенной Лемэтра, в которой имеется естественное определение понятия „покоя". В этом, однако, нет никакого действительного конфликта с принципом относительности. Существование единственного масштаба для всех отчетов вытекает из введенного нами искусственного условия, а именно из требования полной однородности ρ и p; для вселенной, которая не является идеально сферичной, стандартного масштаба уже более не существует. Можно следующим образом иллюстрировать смысл такого масштаба. В идеально сферической вселенной Эйнштейна лучи света, испускаемые звездой, обойдя вокруг всего мира, сходятся вместе и образуют изображение, или звезду - призрак в точке P, в то время как сама звезда передвинулась в точку P'. В общем случае P' не будет совпадать с P; в самом деле, после испускания света звезда могла распасться на части, которые рассялись в различные точки P'. Мы рассматриваем PP', как признак абсолютного движения звезды, и находящимся „в покое“ называем такое тело, которое совпадает со своим собственным призраком. Если мир не точно сферичен, то сведение в фокус вновь сходящихся лучей будет несовершенным, и изображение будет размазано на большой площади. Призрак больше не будет определять никакой определенной точки и наша формулировка понятия „покоя“ теряет смысл. Это положение дела совершенно аналогично абсолютному вращению; для совершенно однородного мира можно определить величину, которую при некоторых допущениях можно назвать „абсолютным вращением“; в неоднородном мире определение теряет смысл, но в действительной вселенной отклонение от эвклидовой геометрии настолько мало, что абсолютное вращение может быть сохранено как приближенное понятие.

Для общего качественного рассмотрения полезно запомнить, что член с λ в гравитационных уравнениях эквивалентен силе отталкивания, исходящей от начала координат и изменяющейся прямо пропорционально расстоянию; ход явлений существенным образом зависит от того, преобладает или нет это отталкивание над обычным гравитационным притяжением всей наличной материи. За исключением случая замкнутого пространства, отталкивание должно преобладать на достаточно больших расстояниях. Только в том случае, если мы имеем дело с настолько обширной областью, что ее полная кривизна достигает значительной доли сферы, это простое заключение начинает терять смысл главным образом благодаря тому, что возникает ряд вопросов, связанных с условными определениями расстояния, одновременности и т. д., если область уже не может более рассматриваться как приближенно плоская.

11. Масштаб времени. Происходящее теперь быстрое расширение вселенной очевидно неблагоприятно для длинных временных масштабов порядка биллионов лет. Трудно сделать решающее возражение, но все же здесь имеется общее несоответствие. Мы не можем вычислить тот период времени, который протек с момента возмущения эйнштейновского равновесия началом эволюционного развития до тех пор, пока отклонение от состояния равновесия не достигло значительной величины; но с того времени, когда радиус вселенной увеличился, скажем, в 1,5 раза от своей первоначальной величины, до наших дней едва ли прошло более чем 10^{10} лет. Если солнце в действительности существовало в виде звезды в течение 5 биллионов лет, то представляется довольно странным тот факт, что оно ожидало так долго для того, чтобы затем образовать свою систему планет как раз в то время, когда вселенная стала стремиться к состоянию рассеяния.

Вселенная удваивает теперь свой радиус каждые 1400 миллионов лет, и, если эта скорость и будет увеличиваться в будущем, то лишь очень незначительно. Через 10^{10} лет спиральные туманности станут на 10 величин слабее, чем теперь. При масштабах времени в биллион лет астрономы должны считать себя чрезвычайно счастливыми, что они как раз существуют на том отрезке времени, чтобы наблюдать эти интересные, но преходящие черты неба.

Это последнее заключение не зависит от специальной теории сферического пространства; оно покоится на тех современных данных, полученных из наблюдений, что спиральные туманности (за исключением ближайших трех или четырех) удаляются от нас с такой скоростью, что они будут через сравнительно короткий промежуток времени находиться вне пределов, доступных нашему наблюдению, и что нет туманностей, которые бы, наоборот, приближались к нам, заменяя первые. Если только не будет придумана теория, из которой вытекает наличие сил, противодействующих этому удалению, то у нас нет никаких данных, на основании которых мы могли бы отрицать это быстрое удаление туманностей из нашего соседства.

12. Заключение. Доказательство неустойчивости модели Эйнштейна сильно укрепляет наши аргументы в пользу интерпретации удаления спиральных туманностей, как указания на кривизну мира. В то время, когда подобное объяснение было впервые предложено де Ситтером, все, что было известно по этому поводу, заключалось в том, что из двух моделей, которые удовлетворяют точным уравнениям Эйнштейна, из одной следует явление такого рода. Теперь же положение таково, что для всякого мира, который удовлетворяет гравитационным уравнениям Эйнштейна, явление удаления (или противоположное ему, т. е. наличие общей скорости приближения) с необходимостью должно получаться с течением времени; явление не просто согласуется с теорией, но предсказывается последней. Конечно возможно, что удаление туманностей не является теоретически предсказываемым расширением; оно может быть некоторой локальной особенностью, маскирующей гораздо меньшее общее расширение, но искушение отождествить наблюдаемое и предсказываемое расширения очень велико.

Наше исследование является неполным в том отношении, что мы только имели возможность изучить совокупность галактических систем, рассеянных по всему миру. Было бы желательно восполнить его рассмотрением тех случаев, когда материальная система заключена в части пространства. Эта задача ведет к большим математическим трудностям, но следует надеяться, что они не непреодолимы.

Теория дает величину полной массы вселенной, которая является довольно достоверной. Так как в начале полная масса образовывала вселенную Эйнштейна с радиусом в 1200 миллионов световых лет (п. 106.9), то из обычных формул легко найти, что она равна

$$11 \cdot 10^{22} \odot = 2{,}3 \cdot 10^{55} г.$$

Следует напомнить, что единственное астрономическое явление, использованное при выводе этой величины, заключается в смещении к красному концу спектров туманностей, оцениваемое в 500 *км/сек* на мегапарсек. Кроме того, было постулировано: во-первых, что $M = M_e$, так как это условие необходимо, если согласно обычным эволюционным идеям вселенная должна иметь начало, и, во-вторых, что средняя плотность материи во всей вселенной значительно меньше, чем 10^{-28}.

Заметим, что на основании этих данных можно заключить, что полное число протонов во вселенной равно $1{,}4 \cdot 10^{79}$. Другой способ вычисления, дает число равное половине этого, так как возможно, что одна половина сферического мира представляет собою простой математический дубликат другой.

107. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И КВАНТЫ

А. С. Эддингтон.

Выход в свет русского издания «Теории относительности» дает мне повод добавить несколько замечаний о новейшем развитии теории, являющемся ее естественным продолжением.

В начале последнего параграфа книги (п. 103) я писал: «Мы не даем никакого объяснения факту существования электронов или квант, но во всех остальных отношениях теория как будто бы вполне охватывает физические явления".

Я полагал, что теория относительности в то время (1922 г.) была уже настолько законченной системой, что до тех пор, пока не шла речь о включении атомных явлений, не было никаких оснований предполагать каких-либо существенных улучшений основ теории. Конечно, можно было развивать отдельные следствия теории, как например теорию расширяющейся вселенной Фридмана—Лемэтра, но не было необходимости менять фундамента теории до тех пор, пока квантовые явления не созрели до включения в общую схему.

В конце концов теория относительности (включая теорию поля) и квантовая теория (включающая атомные явления) должны слиться в одну общую систему. Мы были далеки от такого объединения, так как квантовая теория находилась еще в плачевном состоянии. Однако, построение волновой механики дало квантовой теории значительно более логический базис. В 1928 г. П. А. М. Дирак опубликовал свою работу о «Релятивистском волновом уравнении электрона». Это уравнение образует мост между теорией относительности и теорией квант, и я полагаю, что оно дает нам именно ту совершенно новую идею, которая требовалась для объединения обеих теорий. Сам Дирак развил следствия из своего уравнения только в квантовой области; я пытался в моих исследованиях обобщить выводы на область теории относительности. Я убежден, что открытие Дирака не только объединяет две теории, но выясняет также смысл явлений в пограничной области, чего до сих пор не была в состоянии проделать ни одна схема. В частности, уравнение Дирака позволяет теоретически вычислить три фундаментальные постоянные: 1) постоянную «тонкой структуры» $\frac{hc}{2\pi e^2}$, 2) отношение масс электрона и протона, 3) космическую постоянную. Так как эти постоянные определены также опытным путем, то мы имеем определенную экспериментальную проверку новых идей о природе массы и электрического заряда.

Уравнение Дирака вводит волновые символы ψ_α, φ_α, которые хотя и имеют по четыре компоненты, не преобразуются однако подобно векторам или каким-либо тензорам обычного тензорного исчисления. Хотя уравнение Дирака содержит эти невекторные величины, оно является все же инвариантным относительно преобразований Лоренца. Проф. Ч. Дж. Дарвин возбудил мой интерес к этому вопросу, отметив, что обычный тензорный анализ обладал серьезным дефектом, не включив в рассмотрение вопроса об инвариантности величин подобного рода. Действительно, тензорный анализ был специально придуман для рассмотрения вопросов инвариантности, и его основным принципом является, что для того, чтобы быть инвариантным, уравнение должно быть непременно тензорным.

Причину этого дефекта в тензорном анализе можно уяснить себе, вспомнив рассуждения пп. 20, 21, в которых мы различали понятие *математического* и *физического* вектора. Первоначально тензорный анализ был исключительно математической теорией; мы связали его с геометрией и, следовательно, с физикой, отождествляя тензор, являющийся отправным пунктом теории (контравариантный вектор) со смещением $(dx)^\mu$. Это отождествление было охарактеризовано нами как «несколько произвольное». Теперь оказывается, что именно подобный способ отождествления и сделал обычный тензорный анализ непригодным для трактовки атомных явлений.

Поэтому я развил новый тензорный анализ, в котором основными векторами (контравариантным и ковариантным вектором) являются дираковские величины ψ_α и φ_α. При помощи последних мы можем определить тензоры высшего ранга. Эти новые тензоры называются волновыми в отличие от тензоров старого тензорного анализа, которые мы будем называть пространственными.

Волновые и пространственные тензоры связаны друг с другом весьма любопытным образом. Мы можем образовать систему шестнадцати матриц из четырех строк и колонн каждая, обладающих следующими свойствами: 1) все они являются корнями квадратными из -1, 2) все матрицы попарно коммутируют или антикоммутируют друг с другом, согласно некоторой специальной схеме, которую я не буду здесь приводить*). Обозначив эти матрицы через E_μ, можно показать, что любая матрица $\mathbf{T}$, состоящая из четырех строк и колонн, может быть выражена в виде:

$$\mathbf{T}=\sum_{1}^{16} t_\mu E_\mu, \tag{1}$$

где t_μ — алгебраические коэффициенты.

Волновой тензор второго ранга и является подобной матрицей, так что мы можем охарактеризовать его 16 компонентами t_μ, полученными указанным образом. *Мы можем затем доказать, что если T есть смешанный волновой тензор второго ранга, то его компоненты t_μ образуют пространственные тензоры.* В действительности эти шестнадцать компонент дают нам два обычных пространственных вектора, один антисимметрический тензор второго ранга (шестивектор) и два инварианта.

Таким образом, когда мы достигли волновых тензоров второго ранга, мы можем перейти к пространственным векторам и следовательно включить все тензоры обычного тензорного анализа в общую схему, построенную на волновых векторах. Мы должны только пользоваться при этом разложением (1), которое является совершенно чуждым обычному тензорному анализу.

Легко доказать, что волновое уравнение Дирака действительно является тензорным уравнением в тензорном волновом анализе, но не в обычном исчислении пространственных тензоров. Это обеспечивает его инвариантные свойства.

Полное изложение нового исчисления волновых тензоров заняло бы слишком много места. Я оставлю в стороне математический аппарат теории и постараюсь указать общую идею его физических приложений. Волновой вектор для сложной системы из двух зарядов является величиной с двумя значками $\psi_{\alpha\beta}$. Если бы два заряда были совершенно независимыми и не взаимодейство-

*) См. Journal London Mathematical Society, **7**, 58, или Proceedings of the Royal Society **133**, 311.

вали друг с другом, $\psi_{\alpha\beta}$ было бы просто произведением $\psi_\alpha \psi_\beta'$ отдельных волновых векторов; но в случае взаимодействующих зарядов мы можем только сказать, что $\psi_{\alpha\beta}$ есть ковариантный волновой тензор второго ранга, который должен быть определен соответствующим волновым уравнением. Это волновое уравнение можно написать в виде:

$$(H + H' + I)\psi = 0, \tag{2}$$

где $H\psi = 0$, $H'\psi' = 0$ будут волновыми уравнениями для двух отдельных зарядов, а I есть член взаимодействия, выражающий взаимную электростатическую и электромагнитную потенциальную энергию.

Для того чтобы трактовать величину с двумя значками $\psi_{\alpha\beta}$ тем же методом, как мы рассматривали величину с одним значком ψ_α, нам нужны две системы по 16 матриц, E_μ и F_μ. Соответственно этому общий смешанный тензор 4-го ранга T может быть разложен на 256 компонент $t_{\mu\nu}$, где

$$T = \sum_1^{16}\sum_1^{16} t_{\mu\nu} E_\mu F_\nu.$$

Но для дальнейшего желательно выделить симметричную и антисимметричную части тензора T и написать

$$T = \sum_{\mu\nu} u_{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} + v_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu}, \tag{3}$$

где

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(E_\mu F_\nu + E_\nu F_\mu), \quad \delta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(E_\mu F_\nu - E_\nu F_\mu) \tag{4}$$

Имеется 136 различных $\gamma_{\mu\nu}$ и 120 $\delta_{\mu\nu}$.

Это разделение вызвано тем, что благодаря неразличимости электрических зарядов, волновой вектор должен удовлетворять условиям симметрии, и в теории преобразований (которая выражает принцип относительности) могут встречаться только преобразования, соответствующие $\gamma_{\mu\nu}$. Преобразования же выражения $\delta_{\mu\nu}$ смешивают симметричные и антисимметричные волновые тензоры и должны быть поэтому отброшены.

В то время когда я начал развивать эту теорию *), Дж. А. Гонт

*) Proc. Roy. Soc. 122, 358, 1929.

дал выражение для энергии взаимодействия между двумя зарядами, которое в нашем обозначении имеет вид:

$$I = \frac{2\pi e^2}{hc} \frac{E_1F_1 + E_2F_2 + E_3F_3 + E_4F_4}{r_{12}}, \tag{5}$$

где r_{12} есть расстояние между двумя зарядами 1 и 2. Матричное выражение (5) не является в настоящее время общепризнанным; согласно моим дальнейшим исследованиям здесь должен стоять член $\frac{1}{4}\sum_{1}^{16} E_\mu F_\mu$, но точная форма выражения не играет большой роли в связи с настоящими рассуждениями. Множитель $hc/2\pi e^2$ есть безразмерная величина (часто называемая «постоянной тонкой структуры»), равная согласно экспериментальным данным приблизительно 137.

Таким образом, в числителе мы имеем четыре из 136 величин $\gamma_{\mu\nu}$, в знаменателе же мы имеем величину, равную примерно 136. Мне показалось, что это обстоятельство может, пожалуй, дать ключ к разгадке происхождения постоянной тонкой структуры. Я предположил смутно, что энергия $1/r_{12}$ является равнораспределенной между 136 степенями свободы, соответствующим смещениям (релятивистским преобразованием), связанным с 136 $\gamma_{\mu\nu}$, и что четыре подобные компоненты, соответствующие четырем направлениям в пространстве-времени, как раз образовали энергию взаимодействия I, входящую в волновое уравнение.

Нужно отметить, что $\frac{1}{r}$ есть естественный вид выражения энергии в волновой механике. Фундаментальный постулат де Бройля утверждал, что «действие» нужно отождествить с фазовым углом волны. Для массы (или энергии) m и смещения ds действие равно $m\,ds$. Эту величину нужно отождествить с фазовым углом $d\theta$. Для того чтобы представить $d\theta$ как геометрический угол, мы должны связать смещение ds с угловым движением вокруг центра вращения на расстоянии r таком, что $d\theta = \frac{ds}{r}$. Таким образом, m оказывается отождествленным с $\frac{1}{r}$.

Так как фазовый угол равен $m\,ds$, то волновую функцию можно написать в виде $e^{imds}\psi_0$. Вспоминая, что все наши матрицы E_μ

являются корнями квадратными из -1, мы можем установить контакт с дираковской теорией, подставляя вместо i матрицу E_s, связанную с направлением ds, так что волновая функция принимает вид

$$\psi = e^{E_s m\, ds}\psi_0. \tag{6}$$

Если смещение ds вокруг центра вращения совершается *путем вращения координатных осей отсчета*, то преобразование ψ, вызванное заменой осей, будет иметь вид (по формулам исчисления волновых тензоров)

$$\psi = e^{\frac{1}{2}E_s\, ds/r}\psi_0. \tag{7}$$

Сравнивая (6) и (7), мы видим, что кажущаяся масса (или энергия) $\frac{1}{2r}$ возникает только по отношению к вращающимся осям; или, как мы можем сказать иначе, благодаря разнице между ковариантной и обычной производной, в случае когда одна из координат является угловой переменной. В случае двух взаимодействующих частиц всякое вращение очевидно происходит относительно точки, лежащей по средине между ними, так что $r = \frac{1}{2}r_{12}$. Таким образом, кажущаяся масса $\frac{1}{2r}$ равна $\frac{1}{r_{12}}$.)

Теперь возникает следующий вопрос: какой вид взаимного вращения двух зарядов связан с энергией взаимодействия? Оно должно быть смещением, возможным в том случае, когда два заряда рассматриваются вместе, но не имеющим смысла, когда они рассматриваются отдельно. Мой ответ гласит, что это будет вращение или преобразование, которое изменяет отождествление двух зарядов. Хорошо известно, что если мы имеем заряды, расположенные в двух точках, перестановка зарядов в этих точках (т. е. нумерация их числами 2, 1, вместо 1, 2) меняет ψ на $-\psi$. Это изменение можно представить как непрерывное преобразование, если взять волновую функцию в виде $e^{i\theta}\psi$ или, общее, в виде $e^{P\theta}\psi$, где P есть матричный квадратный корень из -1. Тогда при увеличении θ на π заряды оказываются переставленными.

Так как электроны являются неразличимыми, то характеристика тождества не имеет для них физического смысла. Начальное положение, от которого отсчитывается угол θ, является произвольным. Мы кладем в основу некоторое «отождествление» так же произвольно, как мы выбираем некоторую пространственно-временную систему отсчета; но и любое другое отождествление, или любая другая координатная система будут совершенно эквивалентны. Изменение θ есть релятивистское преобразование, подобное изменению угловой переменной, обозначающей ориентацию относительно избранной системы пространства времени. В обычной динамике подобные угловые переменные называются «игнорируемыми» или «циклическими» координатами; моменты, сопряженные с ними, должны быть включены в гамильтонову функцию.

Это преобразование тождества характерно для неразличимых объектов; поэтому его нужно рассматривать как некоторую новую степень свободы сверх 136 релятивистских преобразований, соответствующих $\gamma_{\mu\nu}$, встречающихся в геометрии различимых объектов. Таким образом, для двух электронов мы имеем 137 степеней свободы. Это обстоятельство является причиной того, почему знаменатель $\frac{hc}{2\pi e^2}$ в формуле (5) равен 137 вместо 136, как предполагалось первоначально. Я полагаю однако, что множитель 136/137 повидимому будет встречаться также и в других приложениях теории, так как полный анализ какого-либо действительного эксперимента над электронами должен включать геометрию как различимых, так и неразличимых объектов, участвующих в опыте.

Мы заключаем отсюда, что волновая функция ψ для двух зарядов является не только функцией координат, употребляемых для описания различных тел, но также и функцией «угла перестановки» θ, и что циклический момент, сопряженный с координатой θ, приводит к члену взаимодействия I в волновом уравнении.

К этому же выводу мы можем притти, исходя из другой точки зрения. В классической физике взаимодействие между двумя частицами означает разницу в поведении одной из них в зависимости от присутствия или отсутствия другой. В квантовой теории эти соотношения переводятся на язык вероятности, и взаимодействие означает разницу в нашем ожидании поведения. Вероятности, связанные с одной частицей, изменяются благодаря присутствию другой. Имеются два способа рассмотрения этого изменения: или мы можем включить его в априорную вероятность и принять «новую статистику»; или же мы можем рассматривать изменение как возмущение априорной вероятности некоторым данным силовым полем.

Обе возможности были испробованы при описании взаимодействия пар электронов. Мы вводим между ними электрическое отталкивание, которое является специальным фактором, изменяющим априорную вероятность распределения. Мы допускаем также, что электроны подчиняются новой статистике — статистике Ферми — Дирака. Первый способ рассмотрения полезен в одних проблемах, второй — в других. Но странным является то обстоятельство, что в ортодоксальной квантовой физике повидимому не был уяснен тот факт, что оба способа рассмотрения являются *альтернативными* представлениями одного и того же взаимодействия. Обычно предполагается, что эти оба способа описывают совершенно не связанные взаимодействия. Предполагается, что в дополнение к ферми-дираковской модификации априорной вероятности (которая, как допускается, обязана переставимости электронов) существует еще электрическое отталкивание, которое не связано с фактом переставимости электронов. Я думаю, что в то время, когда я высказал взгляд на обычную электростатическую и электромагнитную энергию двух зарядов, как на *перестановочную энергию* *), понятие энергии перестановки было совершенно новым; но с тех пор Дирак и другие авторы пришли независимо к тому же понятию. Хотя в настоящее время термин «энергия обмена» (или перестановочная энергия) весьма привычен, я считаю, что физики, употребляющие его, еще не приняли моего отождествления электрической энергии с энергией обмена, хотя (поскольку это можно утверждать сейчас) обе энергии выражаются *точно одной и той же формулой*. В некотором смысле я нахожу психологию физика квантиста еще более странной, чем поведение электрона.

Я хочу особенно подчеркнуть, что так как переставимость изменяет вероятность распределения некоторого числа зарядов, она должна быть также принята во внимание при определении вероятности распределения двух зарядов, описываемых величиной ψ. До некоторой степени это обстоятельство учитывается уже в современной квантовой механике путем ограничения функций ψ одними антисимметричными, но здесь требуется еще точное аналитическое рассмотрение всех следствий указанного факта перестави-

*) Loc. cit, 1929.

мости. Довольно трудно рассматривать переставимость средствами *непрерывного* анализа; но волновая механика весьма успешно истолковала квантовые «скачки» методами непрерывного анализа, и повидимому нет оснований считать, что она окажется менее приспособленной для рассмотрения скачков переставимости. Мои собственные попытки в этом направлении привели меня к результату, что энергия обмена I равна $iP/137r$, где P есть матричный квадратный корень из -1; это дает для постоянной тонкой структуры значение $hc/2\pi e^2 = 137$, как было уже предположено*) раньше.

Может быть, эффект перестановки станет более ясным путем следующей иллюстрации. Как-то один астроном, наблюдавший двойную звезду, компоненты которой обладали столь близкими яркостями, что были неразличимыми, переместил местами обе компоненты, после того как они значительно приблизились друг к другу. Конечно, полученная им результирующая орбита соответствует силовому полю, весьма отличному от ньютонового. Вспоминая, что определимы не положения электронов, но только «вероятности положений», мы видим, что перестановки подобного рода, как происходящие со статистической регулярностью, должны быть допущены теорией. Поэтому здесь так же, как в нашем астрономическом примере, эффект переставимости сведется к созданию кажущегося силового поля, которое мои вычисления отождествляют с обычной кулоновской силой.

Применяя исчисления волновых тензоров к другой проблеме**), я получил, что масса m элементарной частицы (протона или электрона) определяется из квадратного уравнения

$$10m^2 - 136mm_0 + m_0^2 = 0, \tag{8}$$

где

$$m_0 = \sqrt{N/R} \tag{9}$$

и N есть полное число частиц (протонов или электронов) во вселенной, а R — радиус кривизны пустого пространства-времени [см. уравнение (69.12] R $\sqrt{3/\lambda}$. Единица массы выбрана здесь так, что $h/2\pi = 1$.

Отношение двух корней уравнения (8) равно $1847 \cdot 60$; таким

*) Proceedings of the Royal Society, **138**, 17, 1932.

) Большею частью неопубликовано; предварительная статья в Proceedings of the Royal Society, **133, 605; **134**, 524, 1931.

является, следовательно, теоретическое отношение масс протона и электрона. Коэффициенты 136, 10, 1 являются, соответственно, числом симметричных преобразований волнового вектора с двумя значками $\psi_{\alpha\beta}$, простого волнового вектора ψ_{α} и скаляра ψ. Уравнение получается после замены функции с двумя значками, представляющей электрон или протон в связи с некоторой физической системой отсчета, через волновую функцию с одним значком, представляющую физическую систему отсчета, и другую волновую функцию, представляющую электрон. Следуя методам, принятым в волновой механике, последняя волновая функция ограничена изменениями только в одном измерении, так что она в действительности является скаляром.

Из уравнений (8) и (9) возможно определить космическую постоянную λ через известные физические постоянные и предсказать отсюда скорость удаления спиральных туманностей. Результат достаточно хорошо согласуется с астрономическими данными.

Объединенная теория, включающая релятивизм и волновую механику, потребует еще для своего развития много дальнейшей работы, но я уверен, что в настоящее время путь прогрессу указан, и что нам требуется теперь не интуиция совершенно новых идей, но исчерпывающий анализ понятий, известных уже в настоящее время.

Май 1933 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

А. Классические работы, приводящие к современному состоянию теории:

B. Riemann. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Abh. d. K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, **13**, 133 (Habilitationsschrift 1854) — (русский перевод издан в Казани в 1898 г.).

H. A. Lorentz. Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden, 1895.

J. Larmor. Aether and Matter. Chap. XI, Cambridge 1900.

H. A. Lorentz. Electromagnetic Phenomena in a System Moving with Any Velocity Smaller than That of Light. Proc. Roy. Acad., Amsterdam, **6**, 809, 1904.

H. Poincaré. Sur la dynamique de l'électron. Rend. del Circolo Matematico di Palermo, **21**, 129, 1906.

A. Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Ann. Phys. **17**, 891, 1905.

H. Minkowski. Raum und Zeit (доклад в Кельне 2/IX, 1908) Gesammelte Abh. Bd. 2.

A. Einstein. Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes. Ann. Phys. **35**, 898, 1911.

A. Einstein. Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. Phys. **49**, 760, 1916.

A Einstein. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Berl. Ber. 142, 1917.

H. Weyl. Gravitation und Elektrizität, Berl. Ber. 465, 1917.

Лоренц-Пуанкаре-Эйнштейн-Минковский. Сборник классиков релятивизма (в печати, ГТТИ. Л).

В. Книги.

A. Einstein. Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie (J. A. Barth, Leipzig, 1916).

W. Pauli. Relativitätstheorie, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band V, Teil 2, Heft 4, Teubner Leipzig 1922 (с очень большим списком литературы).

S. Becquerel. Le principe de la relativité et le principe de la gravitation. Paris, 1922.

M. v. Laue. Die Relativitätstheorie. (Bd. I und II). Vieweg, Braunschweig, 1923.

H. Weyl. Raum, Zeit, Materie, 5. Auflage, J. Springer, Berlin, 1923 (с большим списком литературы).

E. Cunningham. Relativity and the Electron Theory. Longmans, 1921 (особенно полное изложение экспериментальных основ теории).

T. de Donder. La Gravifique Einsteinienne. Ann. de l'Obs. Roy. de Belgique. **1** (3), 75, 1921. Также отдельным изданием у Gauthier Villars, Paris. (Рекомендуется как пример изложения, весьма отличающегося от проведенного в книге, но приходящего к тем же результатам. См. в особенности теорию электромагнитного поля в гл. V).

Математические основы тензорного анализа были установлены в следующих двух работах:

G. Ricci et *T. Levi-Civita*. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. Math. Ann. 54, 125, 1901.

T. Levi-Civita. Nozione di parallelismo in una varietà qualunque. Rend. del Circ. Mat. di Palermo, 42, 173, 1917.

А. А. Фридман и *В. К. Фредерикс*. Теория относительности (ч. I, тензорный анализ), Л. 1923.

T. Levi-Civita. Fragen der klassischen und relativistischen Mechanik (параллелизм и кривизна, геометрическая оптика) J. Springer. Berlin 1924.

T. Levi-Civita. Der absolute Differentialkalkül, J. Springer, Berlin, 1928. (Имеются итальянское и англ. издания, готовится русский перевод.)

J. E. Wright. Invariants of Quadratic Differential Forms. Cambr. Math. Tracts, № 9.

E. Cartan. Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann, Paris, 1928.

J. Schouten. Der Ricci-Kalkül. J. Springer, Berlin, 1924 (обобщенные пространства). В печати 2-е изд., переработанное совместно с *D. J. Struik*'ом, Noordhoff. Groningen.

Э. Картан. Метод подвижного репера, теория непрерывных групп и обобщенные пространства. ГТТИ. М.-Л. 1933.

H. Galbrun. Introduction à la théorie de la relativité (Calcul differentiel absolu et géometrie), Gauthier Villars, Paris, 1923.

L. P. Eisenhart. Riemannian Geometry. Princeton University Press, 1926.

L. P. Eisenhart. Non-riemannian Geometry. New York, 1927. (Amer. Math. Soc. Colloquium Publicat., vol. 8).

W. Blaschke. Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie (два тома). J. Springer, Berlin, 1923, 1924.

H. Weyl. Mathematische Analyse des Raumproblems. J. Springer, Berlin, 1923.

J. Knoblauch. Differentialgeometrie. Teubner, Leipzig.

Th. de Donder. Ann. Institut Henri Poincaré, 1, 77, 1930.

Сборник статей *E. Bauer*'а, *F. Perrin*'а, *L. de Broglie, G. Darmois, E. Cartan*'а, и *L. Langevin*'а в серии Actualités scientifiques et industrielles, XL—XLV.

L. Silberstein. Theory of relativity. (Содержит кватернионную трактовку частн. т. отн.).

L. Silberstein. Size of the Universe. Oxford University Press, 1930.

A. S. Eddington. The Expanding Universe. Cambridge University Press, 1933.

R. C. Tolman. Relativity, Thermodynamics and Cosmogony. Oxford University Press, 1934 (в печати).

D. J. Struik. Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung. Berlin. 1922.

A. A. Robb. The Absolute Relations of Time and Space, Cambridge University Press, 1921.

H. Bauer. Mathematische Einführung in die Gravitationstheorie Einsteins. Wien, 1922.

A. A. Robb. A Theory of Time and Space. Cambridge, 1914. (п. 98).

O. Veblen. Projektive Relativitätstheorie. J. Springer, Berlin, 1933.

J. Chazy. La théorie de la relativité et la mécanique céleste. Gauthier Villars, Paris 1928, 1930 (2 тома) (весьма полная трактовка).

M. Lecat. Bibliographie de la relativité. M. Lamertin, Bruxelles, 1924 (указано 1175 авторов, 3775 статей).

Hans Israel, Erick Ruckhaber, Rudolf Weinmann. Hundert Autoren gegen Einstein. Leipzig, R. Voigtländer, 1931.

P. Lenard. Über Relativitätsprinzip, Äther, Gravitation. Leipzig 1921 (критика).

A. Einstein. Äther und Relativitätstheorie. J. Springer, Berlin, 1922.

B'. Популярные и учебные книги.

А. С. Эддингтон. Время, пространство и тяготение. Пер. с англ. Одесса, Mathesis, 1923.

С. И. Вавилов. Экспериментальные основания теории относительности, М. 1928.

М. Борн. Теория относительности Эйнштейна и ее физические основы. Пер. с нем.

Э. Фрейндлих. Основы теории тяготения Эйнштейна. Пер. с нем. М.-Л. 1922.

Я. И. Френкель. Теория относительности, Л. 1923.

А. Копф. Основы теории относительности. Пер. с нем. ГТТИ, М.-Л., 1932.

Э. Борель. Пространство и время. Пер. с фр. М. 1924.

А. Эйнштейн. Четыре лекции по теории относительности. Пер. с нем.

А. Эйнштейн. Теория относительности в общедоступном изложении. Пер. с нем.

Я. И. Френкель. Электродинамика. Ч. I. ГТТИ Л. (в печати).

C. Общие вопросы.

A. Einstein. Berl. Ber. 778, 844, 1915 (общие основы).

A. E. Harward. Phil. Mag. **44**, 380, 1922. (Тождественные соотношения теории Эйнштейна, п. 52).

H. Hilbert. Göttinger Nachr., 395, 1915; **53**, 1917. (Общие основы, п. 61).

E. Kasner. Americ. Journ. Math. **43**, 130, 1921, (представление поля тяготения солнца в плоском шестимерном пространстве).

A. Einstein, Berl. Ber. 688, 1916; 154, 1918 (гравитационные волны).

F. Klein. Ges. Abh. **1**; Göttinger Nachr. 394, 1918 (законы тяготения и замкнутый мир, п. 67, 70).

C. Lanczos. Z. Phys., **59**, 514, 1930 (законы сохранения).

R. C. Tolman. Phys. Rev. **35**, 875, 1930 (законы сохранения).

M. Laue. Berl. Ber. 27, 1923 (анализ решения Шварцшильда).

E. Schrödinger. Ann. Phys. **77**, 325, 1925 (принцип относительности в классической механике).

M. Abraham. Jahrb. d. Radioak. XI, 470, 1915 (гравитация). M. Laue, ebenda, XIV, 263, 1917 (частный принцип относит.; работы Ми, Нордштрема и др.)

G. Y. Rainich. Physica, **6**, 149, 1926 (симметрия зарядов и масс в общей теории относительности).

A. Einstein. Berl. Ber. 235, 1931 (закон движения в общ. т. отн.).

K. Lanczos. Phys. Z. **23**, 723, 1927 (закон движения в общ. т. отн).

K. Lanczos. Acta Litt. Ac. Sci, Univ. Hungaricae, **2**, 182, 1932, (вариационный принцип в общ. т. отн.).

H. A. Lorentz. Versl. Akad. Amsterdam, **23**, 1073; **24**, 1389, 1759; **25**, 468 (принцип Гамильтона).

H. Handreck. Z. f. Phys. **50**, 397, 1928 (тщательный анализ уравнений г. отн.).

A. Einstein. Berl. Ber. 1111, 1916 (принцип Гамильтона).

H. Weyl. Ann. Phys. **54**, 117, 1917 „ „

E. Schrödinger. Phys. Z. **19**, 1918. „ „

H. Bauer. Ebenda 163; *A. Einstein.* Ebenda 115; *A. Einstein.* Berl. Ber. 448, 1918. (Дискуссия о законах сохранения).

H. Bauer. Phys. Z. **29**, 954, 1928 (решение уравнений общ. т. отн.).

N. Bohr. Roy. Dan. Acad. Copenhagen, 1928; Nature, **123**, 434, 1929 (о синтезе т. отн. и квантов).

A. Einstein. Berl. Ber. 349, 1919 (гравитация и элементарные частицы).

W. F. G. Swann. Rev. Modern Phys. **2**, 243, 1930 (т. отн. и электродинамика).

Alfred A. Robb. Proc. Roy. Soc. **129**, 549, 1930 (симметричный линейный элемент).

B. Hoffmann. Rev. Modern Phys. **4**, 173, 1932 (общее физическое изложение релятивизма).

C. Lanczos. Ann. Phys. **13**, 621, 1932 (регулярные решения ур-ний Эйнштейна).

T. Lewis. Proc. Roy. Soc. **136**, 176, 1932 (решения гравитац. ур-ний с аксиальной симметрией).

J. Le Roux. C. R. **193**, 628, 1931 (инвариантность относительно касательного преобразования).

J. Delsarte. Journ. de Mathém. **13**, 19, 1934 (решения ур-ний с бинарными ds^2).

O. J. Lodge and *A. Lodge.* Phil. Mag. **15**, 706, 1933 (геометр. трактовка преобразований Лоренца).

J. Larmor. Questions in Physical Indetermination, C. R. du Congres International des Math. Strasbourg, 1920.

H. A. Lorentz. Proc. Amsterdam, **19**, 1341; **20**, 23, 1916 (теория тяготения).

G. Mie. Ann. Phys. **37**, 511; **39**, 1; **40**, 1, 1912, 1913 (теория материи).

G. Nordström. Proc. Amsterdam. **20**, 1918 (энергия гравитац. поля, пп. 43, 59, 78).

A. Einstein und *J. Grommer.* Berl. Ber. 2, 1927 (материя, как особые точки уравнений тяготения).

A. Einstein. Berl. Ber. **215**, 1927 (материя, как особые точки ур-ний тяготения).

K. Schwarzschild. Berl. Ber. 189, 1916 (гравитационное поле частицы, п. 38).

K. Schwarzschild. Ebenda, 424, 1916 (гравитационное поле шара из несжимаемой жидкости, п. 72).

H. P. Soh. Journ. Math. Phys. **12**, 298, 1933 (комплексный четырехмерный элемент линии).

J. Haag. Mém. de Sci. Math. № 46 (анализ ур-ний т. отн.).

G. Darmois. Ebenda. № 25 (анализ ур-ний т. отн.).

D. Более специальные вопросы.

J. A. Schouten. Verhandel d. kön. akad. v. wetensch. te Amsterdam, 12.

J. A. Schouten. Proc. Amsterdam, **21**, 533, 1918, **23**, 1108, 1922 (прецессия в связи с неэвклидовостью пространства, п. 44).

A. D. Fokker. Proc. Amsterdam, **23**, 729, 1921 (геодезическая прецессия, п. 44).

G. Herglotz. Ann. Phys., **36**, 493, 1911 (механика деформируемых тел, п. 53).

G. B. Jeffrey. Proc. Roy. Soc. A., **99**, 123, 1921 (поле электрона).

E. A. Milne. Cambr. Proc., **20**, 344, 1921 (релятивистские ур-ния вязкой жидкости).

C. Somigliana. Lincei Rend., **31**, 409, 1922 (указание на вывод преобразований Лоренца *Voigt*'ом в 1887 г.).

G. Lemaître. Phil. Mag., **48**, 164, 1924 (движение твердого тела в спец. теории относительности).

P. A. M. Dirac. Phil. Mag., **47**, 1158, 1924 (равенство кинематической и динамической скоростей).

W. de Sitter. Proc., Amsterdam **27**, 291, 1924 (наблюдения двойных звезд говорят за постоянство скорости света против теории Рица).

H. Thirring, Z. Phys., **31**, 133, 1925 (наблюдения двойных звезд говорят за постоянство скорости света против теории Рица).

И. Тамм. Ж. Р. Ф.-Х. О., **56**, 248, 1924 (электродинамика анизотропных сред).

V. Frèedericksz und *A. Isakson*. Z. Phys., **38**, 788, 1926 (протяженный электрон в общей теории относительности).

N. R. Sen. Z. Phys., **40**, 667, 1927 (энергия электрической частицы).

H. Thirring. Z. Phys. **33**, 153, 1925 (аберрация и центробежная сила).

G. Y. Rainich. Proc. Nat. Ac. Sci. **14**, 654, 1928 (излучение и т. отн.).

N. R. Sen. Proc. Roy. Soc., **116**, 73, 1927 (коэффициент Френеля в общей т. отн.).

M. v. Laue. Die Optik der bewegten Körper. Handb. d. Experimentalphysik, **18**, 39. Leipzig. Akad. Verlagsgesell. 1928.

P. Zeeman (с сотрудниками). Arch. Neerland., **10**, 131, 1927 (сборник статей о распространении света в движущихся телах).

D. Meksyn. Phil. Mag., **6**, 977, 1928 (задача двух центров).

S. Gupta. Z. Phys., **69**, 686, 1931.

Chr. Möller. Z. Phys., **55**, 451, 1929 (радиоактивный распад с учетом общей теории отн.).

L. Hanni. Tohoku Math. Journ., **31**, 14, 1929 (ур-ния Эйнштейна и теория Ханни переменных векторных полей).

W. Band. Phil. Mag., **7**, 434; 1183, 1929 (теория Уайтхеда и Эйнштейна).

O. R. Baldwin. Proc. Roy. Soc., **123**, 119, 1929 (расходящиеся волны в общей теории отн.).

J. Gosh. Tohoku Math. Journ., **32**, 322, 1930 (твердое тело в мире де Ситтера).

J. G. Hagen. Naturwiss. **18**, 805, 1930 (два доказательства вращения земли при помощи маятника Фуко).

T. Takeuchi. Proc. Phys. Math. Soc. Japan, **12**, 220, 1930 (о давлении Пуанкарэ).

R. C. Tolman, P. Ehrenfest and *B. Podolsky*. Phys. Rev., **37**, 602, 1931 (гравитационное поле света).

F. H. Maberly. Nature, **129**, 317, 1932 (поверхность Мебиуса, как модель мира).

R. J. Kennedy and *E. M. Thorndike*. Phys. Rev., **39**, 871, **42**, 400, 1932 (эксперимент, показывающий относительность времени).

A. Maior. Phys. Z. **33**, 683, 1932 (излучение в гравитационном поле).

R. Becker. Naturwiss., **20**, 917, 1932 (униполярная индукция).

J. Gosh. Indian Phys. Math. Journ., **3**, 139, 1932 (гравит. поле однородной сферы).

M. v. Laue. Berl. Ber., № 11|13, 445, 1933 (материя и заполнение пространства).

J. M. H. Etherington. Phil. Mag., **15**, 761, 1933 (определение расстояния в общ. т. отн.).

J. Gosh. Z. Phys., **85**, 511, 1933 (гравитационное поле электрона).

T. Levi-Civita. Rend. dei Lincei, **26**, 458, 1917, (статика).

T. Levi-Civita. Ebenda, **26**, 307; **27**, 3; **27**, 183, 1917—1919 (связь с теорией Ньютона).

T. Levi-Civita. Ebenda, (характеристики и бихарактеристики ур-ний Эйнштейна).

G. Nordström. Proc. Amsterdam, **21**, 68, 1918 (проблема однородного шара п. 72).

T. de Droste. Proc. Amsterdam, **19**, 447, 1916 (задача многих тел, п. 44).

K. Lanczos. Z. Phys., **44**, 773, 1927 (материя, как особые точки ур-ний тяготения).

Дискуссии о релятивизме: Nature, **107** (дискуссия о понятии эфира). Monthly Notices, **80**, 96; 1919; Proc. Roy. Soc. **97**, 66, 1920.

Дискуссия о релятивизме на съезде в Наугейме. Phys. Z. **21**, 649, 1920; затем *H. Weyl*, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 1922.

Дискуссия о релятивизме, Nature **106**, 1921 (номер от 17 февраля).

W. O. Kermack, W. H. M'Crea and *E. T. Whittaker*. Proc. Edinburgh, **53**, 31, 1932/33 (нулевые геодез. линии в римановом пространстве).

E. Термодинамика общей теории относительности (см. также раздел G)

R. C. Tolman. Phys. Rev., **37**, 1639, 1931; **35**, 875; **35**, 896, 1930; **35**, 904, 1930; **38**, 797, 1931; **38**, 1758, 1931; **39**, 320, 1931. (см. также книгу Тольмана).
R. C. Tolman and *P. Ehrenfest.* Phys. Rev., **36**, 1797, 1930; **37**, 1639, 1931.
R. C. Tolman and *H. P. Robertson.* Phys. Rev., 43, 564, 1933.
M. v. Laue. Berl. Ber., № 14, 341, 1932.

F. Опыт Майкельсона и астрономические вопросы.

M. v. Laue. Z. Phys. 10, 89, 1922 (скорость света в движущихся телах).
H. Kienle. Ergebniss. d. exakten Naturwiss. III, 1924 (обзор астроном. доказательств).
J. Hopmann. Handb. d. Phys. XXI, 1929 (обзор астроном. доказательств).
A. Kopff. Naturwiss. **20**, 486, 1932 (обзор астроном. доказательств).
A. A. Michelson and *H. G. Gale.* Nature, **115**, 566, 1925 (влияние вращения земли на скорость света).
A. A. Michelson and *H. G. Gale.* Astrophys. Journ. **61**, 140, 1925; **65**, 1, 1927.
E. Freundlich. Naturwiss. 13, 485, 1925.
A. S. Eddington. Nature, **115**, 870, 1925 (дискуссия об опытах Миллера).
G. Joos. Phys. Z. **27**, 1, 1926; **31**, 801, 1930. (Экспериментальная проверка опытов Миллера).
G. Joos. Ann. d. Phys. **7**, 385, 1930.
G. Joos. Naturwiss. **19**, 784, 1931 (обзор).
Dayton C. Miller. Rev. Modern Phys. **5**, 203, 1933 (обзор опытов по обнаружению эфирного ветра и абсолютного движения земли).
Конференция по опыту Майкельсона-Морли. Naturwiss. **17**, 923, 1929 (статья Эпштейна). Astrophys. Journ. **68**, 341, 1928 (обширная дискуссия с участием Майкельсона, Миллера, Кэннеди, Лоренца, Эпштейна, Хедрика и др.).
A. Piccard and *E. Stahel.* Naturwiss. **14**, 935, 1926; **16**, 25, 1928 (опыты с интерферометром на аэростате).
A. Piccard and *E. Stahel.* Journ. d. phys. **9**, 49, 1928.
A. A. Michelson, F. G. Pease and *F. Pearson.* Journ. Optical Soc. Am. **18**, 181, 1929 (последн. опыты Майкельсона).
E. Esclangon. C. R. **182**, 921; **183**, 116, 1926; **185**, 1593, 1927 (попытка обнаружить движение солнечной системы).
L. Courvoisier. Astronom. Nachricht. NN 5416, 5519, 5599, 5715, 5772, 5910 (попытка обнаружить абсол. движение земли).
R. Tomaschek und *W. Schaffernicht.* Ann. Phys. **15**, 787, 1932.
Nature, **125**, 566, 1930 (К. Максвелл и Опыт Майкельсона).
A. A. Michelsón. Naturwiss. **19**, 779, 1931 (первая работа Майкельсона с примечанием Лауэ).
A. S. Eddington and *C. Davidson.* Mem. Roy. Astr. Soc. **62**, 1920.
F. W. Dyson, A. S. Eddington and *C. Davidson,* S.-A. Phil. Trans. **220**, 291, 1920 (обсуждение результатов измерений во время затмения 1919 г).
J. Soldner (с примечаниями *Lenard*'а) Ann. Phys. **65**, 593, 1921 (отклонение света по динамике Ньютона).
L. P. Eisenhart. Science, **58**, 516, 1923.
R. Trümpler. Science, **58**, 161, 1923.
Grossmann. Z. Phys. **5**, 280, 1922 (о поправке к перигелию Меркурия).
J. Bauschinger. Enz. d. Math. Wiss. **VI 2**, **17**; Naturwiss. 217, 246, 1922 (пересчет элементов планет).
W. W. Campbell and *R. J. Trümpler.* Lick observatory. Bull. **11**, 41, 1923; **13**, 130, 1928.
G. F. Dodwell and *C. R. Davidson.* Month. Not. **84**, 150, 1924 (результаты наблюдений отклонения света, полученные экспедицией в 1922 г.).

F. Groze. Journ. d. phys. **4**, 198, 1923 (красное смещение линий).
F. Groze. Journ. d. phys. **2**, 50, 1931 (астрономические доказательства).
E. F. Freundlich. Naturwis. **18**, 513, 1930 (красное смещение фраунгоферовых линий).
St. John. Astrophys. Journ. **67**, 195, 1928 (красное смещение).
A. Kopff. Naturwiss., **20**, 486, 1932 (о работах Фрейндлиха).
A. Danjon. Journ. d. phys., **3**, 281, 1932 (анализ наблюдения смещения звезд при затмении).

Обсуждение измерений затмения 1929 г.:

R. J. Trümpler. Z. Astrophys., **4**, 208, 1932.
E. F. Freundlich, H. Klüber und *A. Brunn.* Ebenda, **3**, 171, 1931; **4**, 221, 1932.
H. Ludendorff. S.-A. Astron. Nachr. **244**, 321, 1932 (критика работы Фрейндлиха). (Ответ трех авторов, там же, стр. 415).
E. Freundlich and *Brunn.* Z. Astrophys., **6**, 218, 1933 (теория наблюдения отклонения света).
E. Freundlich, H. Klüber and *A. Brunn.* Ann. v. d. Boscha-sterrenwacht Lemfang (Java), **5**, 1, 1933 (дальнейшие исследования отклонения света).
L. Courvoisier. Astron. Nachr. **248** 269, 1933 (резюме наблюдений).
L. Courvoisier. Astron. Nachr. **250**, 133, 1933 (лоренцово сокращение жидкостей).
L. Courvoisier. Astron. Nachr. **249**, 273, 1933 (5-я статья об опытах по определению движения земли относительно эфира).

G. Космология.

A. Einstein. Berl. Ber., **142**, 1917 (введение космологической постоянной, замкнутый мир).
W. de Sitter, Amsterdam proc., **19**, 1217, 1917.
W. de Sitter. Monthly Not., **76**, 699; **77**, 155; **78**, 3, 1917 (мир де Ситтера).
A. Friedman. Z. Phys., **10**, 377, 1922 (первое нестатическое решение).
A. Einstein. Berl. Ber. 270, 1918 (о мире де Ситтера).
A. Einstein. Z. Phys. **11**, 326; 1923. **16**, 228, 1923 (возражение Фридману и затем признание его работы).
K. Lanczos. Phys. Z., **23**, 539, 1922 (дальнейший анализ решения Фридмана).
K. Lanczos. 7. Phys. **17**, 168, 1923 (мир де Ситтера).
K. Lanczos. 7. Phys. **21**, 73, 1924 (стационарные миры).
H. Weyl. Phys. Z. **24**, 230, 1923 (мир де Ситтера, формула для скорости удаления туманностей).
H. Weyl. Naturwiss. **12**, 197, 1924 (диалог о космических проблемах).
A. Friedman. Z. Phys., **21**, 326, 1924 (миры отрицательной кривизны).
M. v. Laue und *N. Sen.* Ann. Phys. **74**, 252, 1924 (мир де Ситтера).
G. Lemaître. J. Math. and Phys. **4**, 188, 1925 (стационарный мир де Ситтера).
H. Weyl. Phil. Mag. **47**, 907; **48**, 348, 1924 (красное смещение в мире де Ситтера).
E. P. Hubble. Astrophys. Journ. **64**, 321, 1926 (равномерное распределение туманностей по вселенной).
G. Lemaître. Ann. Soc., Sci., Bruxelles. **47**, 49, 1927 (анализ нестатического мира (перевод в Month. Not., **91**, 483, 1931).
H. P. Robertson. Phil. Mag., **5**, 835, 1928 (мир де Ситтера).
F. Zwicky, Proc. Nat. Ac., **15**, 773, 1929 (о красном смещении).
E. P. Hubble. Proc. Nat. Ac., **15**, 168, 1929 (эмпирическая формула для скорости удаления туманностей).
H. P. Robertson. Proc. Nat. Ac., **15**, 822, 1929 (общий анализ).

R. C. Tolman. Proc. Nat. Ac., **15**, 297, 1929 (**миры Эйнштейна и де Ситтера, как единственно возможные статические и сферически симметричные**).
L. Silberstein. Nature, **124**, 179, 1929 (**величина радиуса кривизны**).
L. Silberstein. Phys. Rev. **33**, 1074, 1929.
A. S. Eddington, Month. Not., **90**, 668, 1930 (см. **приложение к настоящей книге**).
G. Lemaître. (BAN) Bull. Astron. Inst. Netherlands **5**, 273, 1930 (**дальнейший анализ нестатической вселенной**).
W. de Sitter. BAN, **5**, 211, 274, 1930 (**нестатическая вселенная, влияние уничтожения материи**).
W. de Sitter, Proc. Nat. Ac., **15**, 474, 1930 (**анализ нестатической вселенной**).
R. C. Tolman. Proc. Nat. Ac. **16**, 320, 1930 (**уничтожение материи в нестатической вселенной**).
C. Wirtz. Astron. Nachr., **222**, 26, 1924 (**туманности и мир де Ситтера**).
K. Lundmark. Month. Not., **84**, 747, 1924 (**мир де Ситтера и туманности**).
H. Shapley. Proc. Nat., Ac. **15**, 565, 1929 (**скорости туманностей**).
J. H. Oort, BAN **5**, 239, 1930 (**скорости туманностей**).
J. H. Oort, BAN **6**, 155, 1930.
L. Silberstein, Nature, **113**, 602, 1924 (**скорости туманностей**).
C. V. L. Charlier. Ark. Math. Astr. Fys., **16**, 1921 (**перелятивистская космология**). Lund Medd. № 98.
Seeliger. Astron. Nachr., **177**, 129, 1895 (**ньютоновская космология**).
A. Einstein. Ann. d. Phys., **55**, 243, 1918 (**общие вопросы**).
W. de Sitter. BAN **5**, 211, **1930** (**нестатический мир**).
W. de Sitter. BAN **5**, 274, 1930 „ „
W. de Sitter. BAN **6**, 141, 1931 „ „
W. de Sitter. BAN **6**, 146, 1931 „ „
W. de Sitter. BAN 153, 1931 (**термодинамика нестатического мира**).
McCrea and *McVittie*. Monthly Not., **91**, 128, 1930 (**сжимающаяся вселенная**).
G. C. McVittie, Month. Not. **91**, 274, 1931 (**задача** *n* **тел и расширение мира**).
V. Frèedericksz und *A. Schechter*. Z. Phys., **51**, 584, 1928 (**аберрация и параллаксы в различных мирах**).
K. Schwarzschild. VJS **35**, 337, 1900 (**о кривых мирах: до-релятивистская трактовка**).
H. Vogt. Astron. Nachr., **241**, 217, 1931 (**неустойчивость вселенной**)
H. Vogt. Astron. Nachr., **242**, 181, 1931 (**спиральные туманности**).
J. Chazy. C. R. **183**, 1093, 1928 (**эффект Допплера Физо в мире де Ситтера**).
L. Silberstein. Month. Not., **85**, 285, 1925 (**радиус мира**).
L. Silberstein. Month. Not., **84**, 747, 1924 „ „
L. Silberstein. Month. Not., **84**. 363, 1624 „ „
L. Silberstein. Pop. Astron., **38**, 92, 1930 (**скорости туманностей в мире де Ситтера**).
L. Silberstein. Phil. Mag., **47**, 907, 1924 (**скорость туманностей в мире де Ситтера**).
R. C. Tolman. Proc. Nat. Ac., **16**, 409; **511**, **582**, 1930 (**трактовка нестатического элемента**).
L. Silberstein. The Size of the Universe. Oxford University Press, 1930.
H. Weyl. Phil. Mag., **9**, 936, 1930 (**расширяющаяся вселенная**).
A. Einstein. Berl. Ber., 235, **1931** (**нестатическая вселенная без космологического члена**).
O. Heckmann. Götting. Nachr., **127**, 1931 (**миры отрицательной кривизны**).
E. P. Hubble and *M. L. Humason*. Astrophys. Journ. **74**, 43, 1931 (**основная работа по радиальным скоростям туманностей**).
M. v. Laue Berl. Ber. 123, 1931 (**распространение волн света в мире переменной кривизны**).
A. Haas. Nature, **127**, 201, 1931 (**связь радиальной скорости туманностей с аннигиляцией материи**).

G. Lemaître. Monthly Not. **91**, **483**, **490**, 1931 (равновесная и расширяющаяся вселенная).

A. S. Eddington. Nature, **127**, **447**, 1931 (общие соображения о конце мира).

W. H. McCrea and *G. C. McVittie,* Monthly Not., **92**, ', 1931 (полемика с Леметром).

W. de Sitter. Bull. Astron. Inst. Nehterlands, **6**, 141, **1931** (случай постоянной массы).

G. Lemaître. Proc. Nat. Ac. **17**, 153, 1931 (термодинамика).

R. C. Tolman. Phys. Rev., **38**, **797**, **1931** (термодинамика вселенной).

R. C. Tolman. Phys. Rev., **38**, 1758, 1931 (условия периодической вселенной).

G. Castelnuovo. Monthly Not., **91**, 829, 1931 (мир де Ситтера и движение туманностей).

E. T. Whittaker. Proc. Roy. Soc, **133**, **93**, 1931 (об определении расстояния в кривом мире).

J. H. Oort. Bull. Astron. Inst. Nehterlands, **6**, 155, 1931 (возражения в некоторых пунктах Хэбблю).

A. Einstein and *W. de Sitter.* Proc. Nat. Acad., **18**, 213, **1932** (связь расширения и плотности).

O. Heckmann. Götting. Nachr. № **1**, 97, 1932 (анализ решений для мира с переменным радиусом).

H. Vogt. Astron. Nachr., **245**, **271**, 1932 (расширение мира, как отталкивание).

G. C. McVittie. Monthly Not., **92**, 500, 1932 (влияние конденсации материи на радиус кривизны).

W. de Sitter. Proc., Amsterdam **35**, 596, 1932 (анализ миров Фридмана).

M. Kohler. Z. Astrophys. **5**, **374**, 1932 (красное смещение и яркость).

R. C. Tolman and *M. Ward.* Phys. Rev., **39**, 835, 1932 (миры без космологического члена).

H. Shaply and *A. Ames.* Ann. Astron, Observ., Harvard. **88**, **43**, **1932** (внегалактические туманности).

H. P. Robertson. Rev. Modern Phys., **5**, 62, 1933 (обзор).

F. Zwicky. Acta Phys. Helvetica, **6**, **110**, **1933** (красное смещение и внегалактические туманности).

A. Haas. Wiener An. № 11, **91**, 1932 (радиус электрона и радиус мира).

M. Kohler. Ann. Phys. **16**, **129**, 1933 (космологические вопросы).

A. Haas. Naturwiss. **20**, **316**, 1932 (представление об ускоряющейся вселенной).

N. R. Sen. Indian Phys. Math. Journ. **3**, 89, 1932 (излучение в расширяющемся мире).

W. R. Mason. Phil. Mag. **14**, 386, 1932 (пульсирующий мир).

V. V. Narliker. Phil. Mag. **14**, **433**, 1932 (изменение космологического члена и расширение мира).

A. S. Eddington. Nature, **129**, **421**, 1932.

O. Lodge. Ebenda. **129**, **434**, **1932**.

R. C. Tolman. Phys. Rev., **39**, 320, 1932 (термодинамика пульсирующего во времени мира).

M. Bronstein. Sow. Phys. **3**, 73, 1933 (несохранение энергии и расширение мира).

E. A. Milne. Z. Astrophys., **6**, **1**, 1933; **6**, 244, 1933 (общая структура мира и расширяющаяся вселенная, критика искривленного мира и решений Фридмана-Лемэтра).

E. Freundlich. Naturwiss., **21**, 54, 1933 (изложение теории Мильна).

D. D. Kosambi. E. A. Milne. Nature **130**, 507, 1932.

H. Dingle. Z. Astrophys. **7**, **167**, 1933 (о теории Мильна).

R. Zaykoff. Z. Astrophys., **6**, 1933.

A. C. Banerji. Current Science, **1**, 160, 1932.

N. R. Sen. Proc. Roy. Soc., **140**, 269, 1933 (расширение вселенной по представлению Эддингтона о конденсирующихся центрах).

W. de Sitter. Monthly Not., **93**, 628, 1933 (расширяющаяся вселенная и продолжительности мировых периодов).
J. H. Klark. Nature, **132**, 406, 1933 (о причине красного смещения).
A. S. Eddington. Nature, **132**, 501, 1933 (полемика о причине красного смещения).
H. P. Robertson. Z. Astrophys. **7**, 153, 1933 (теория Мильна).
E. A. Milne. Z. Astrophys, **7**, 180, 1933 (ответ Робертсону).
E. Reichenbächer. Z. Astrophys. **7**, 369, 1933 (о переменном радиусе); **7**, 208, 1933 (гравитация в мире де Ситтера).
H. Dingle. Z. Astrophys. **7**, 167, 1933 (о теории Мильна).
S A. Korff. Phys. Rev., **44**, 300, 1933 (плотность энергии во вселенной).
H. P. Robertson. Z. Astrophys., **7**, 153, 1933 (о теории Мильна. Кратко в Phys. Rev., **44**, 318, 1933).
E. Reichenbächer. Z. Astrophys., **7**, 208, 1933 (симметричное поле тяжести в мире де Ситтера).
E. Hubble. Astrophys. Journ., **79**, 8, 1934 (распределение внегалактических туманностей).
E. Freundlich. Naturwiss., **21**, 86, 1933 (общая картина мира).
O. Halpern. Phys. Rev., **44**, 855, 1933 (связь постоянной Хэббля с атомными постоянными).
H. D. Curtis. The Nebulae. Handb. d. Astrophys., V, 2 (наиболее полный обзор всех вопросов о туманностях с громадной литературой).
О туманностях см. годовые отчеты обсерватории на Маунт Вильсоне.
W. O. Kermack and *M. W. Mc Crea.* Month. Not. **93**, 519, 1933 (теория Мильна).

II. Релятивистская квантовая механика.

Общие основы.

N. Bohr. Atomtheorie und Naturbeschreibung. J. Springer. Berlin 1931.
H. Weyl. Gruppentheorie und Quantenmechanik. 2-te Auflage, Hirzel. Leipzig, 1931.
П. А. М. Дирак. Основы квантовой механики (перевод с англ.). ГТТИ, Л., 1932.
P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc. A. **117**, 351; **118**, 610, 1928.
P. A. M. Dirac. Ann. Institut Henri Poincaré, 357, 1930.
В. А. Фок. Начала квантовой механики. Кубуч, Л. 1932.
В. Гейзенберг. Физические принципы квантовой теории (перевод с нем.). ГТТИ, Л. 1932.
W. Pauli. Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik. Handbuch der Physik (Geiger-Scheel), XXIV, 2 Hälfte, J. Springer, Berlin, 1931 (с очень подробным списком литературы).
Н. Бор. Статьи по квантовой механике (готовятся к печати). ГТТИ. Л.

Направление Эддингтона.

A. S. Eddington. Proc. Roy. Soc. A., **122**, 359, 1929 (постоянная тонкой структуры) **138**, 17, 1932.
A. S. Eddington. Proc. Roy. Soc. A., **133**, 311, 1931; (теория спиноров).
„ „ „ „ „ **133**, 605; **134**, 523, 1931; **143**, 327, 1934 (массы протона и электрона, связь с радиусом мира).
A. S. Eddington. Journ. London Math. Soc., **8**, 142, 1932 (спиноры).
W. N. Bond, Nature, **133**, 327, 1934 (связь с экспериментом).
H. Weyl, Naturwis., **22**, 145, 1934 (общая картина мира).

Уравнение Дирака в общей теории относительности.

V. Fock et *D. Iwanenko,* C. R. **188**, 1470, 1929.
V. Fock, Z. Phys., **54**, 798, 1929.
H. Weyl. Z. Phys., **56**, 330, 1929; Naturwiss., **19**, 49, 1931.
E. Schrodinger, Berl. Ber. 105, 1932.
J. A. Schouten. Journ. Math. Phys., **10**, 239; 272, 1931

V. Bargmann. **Berl. Ber.** 346, **1932.**
G. C. McVittie. **Month.** Not., **92, 868,** 1932.
L. Infeld **und** *B. L. van der Waerden.* **Berl. Ber., 2, 1933.**
L. Infeld. **Phys.** Z., 33, 475, **1932.**
T. Levi-Civita. **Berl. Ber. 240,** 1933.

Теория спиноров.

L. B. van der Waerden, Götting. Nachr. 100, 1929.
O. Laporte and *G. E. Uhlenbeck.* Phys. Rev. **37, 1380,** 1931.
E. Guth. Wiener Ber., Dezember, 1928.
D. Iwanenko und *K. Nikolsky.* Z. Phys. **63, 129, 1930.**
K. Nikolsky. C. R. Leningrad, 701; 667, **1930.**
J. A. Schouten. Proc. Amsterdam 32, 105, 1929; **33, 189, 1930;** Z. Phys., **84** 92, **1933.**
K. Nikolsky. Z. Phys., **83,** 284, 1933.
A. Einstein und *W. Mayer.* Berl. Ber., 474, 522, **1932.**
A. Einstein und *W. Mayer.* Proc. Amsterdam, **36,** 615, **1933.**
G. Mie. Ann. d. Phys., **17, 465,** 1933.
V. Bargmann, Acta Phys. Helvetica, **1933.**

Общие вопросы.

E. Schrödinger. Ann. Inst. Henri Poincaré, 2, 269; Berl. Ber. 418, 1930; 66, 238, **1931.**
V. Ambarzumian und *D. Iwanenko.* Z. Phys. **64, 563, 1930.**
L. Landau und *R. Peierls.* Z. Phys., **69,** 56, 1931.
A. Markoff. **Sow. Phys., 1,** 387, 1932.
J. A. Schouten. Z. Phys., **81, 129,** 405; **82,** 92, 1933 (единая теория поля).
N. Bohr. Convegno di Fisica Nucleare, **Roma,** 1932.
N. Bohr. Journ. Chem. Soc. February. **1932.**
П. А. М. Дирак. **„Атомное ядро“ (сборник ядерной конференции). ГТТИ,** 1934.
P. A. M. Dirac. Proc. Roy Soc. A. **126, 360,** 1930.

Квантовая электродинамика

O. Klein, Z. Phys. **41,** 407, **1927.**
P. Jordan und *W. Pauli,* Z. Phys. **47,** 151, **1928.**
W. Heisenberg und *W. Pauli,* Z. Phys. **56, 1, 1929; 59,** 168, **1930.**
P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A. **136,** 453, **1932.**
P. A. M. Dirac. V. A. Fock, B. Podolsky. Sow. Phys., 2, 468, 1932.
L. Rosenfeld. La théorie quantique des champs. Ann. Inst. Henri Poincaré.
E. Fermi. **Rev. Modern Phys. 4,** 87, 1932.
M. Born. **Proc. Roy. Soc., 143,** 410, 1934 **(см. п. 101 книги).**
К. В. Никольский. **Фотон. ГТТИ.** Л. 1934.
P. Jordan und *O. Klein.* Z. Phys. **45,** 751, 1927.
P. Jordan und *E. Wigner.* Z. Phys. **47,** 671, 1928.
L. Landau und *R. Peierls.* Z. Phys. **62, 188,** 1930.

J. Единая теория поля.

Пятимерие.

Th. Kaluza. Berl. Ber., 966, 1921.
A. Einstein. Berl. Ber., 23, 26, 1927.
O. Klein. Z. Phys., **37,** 895, 1926; **46,** 188, 1927.
V. Fock. Z. Phys., **39,** 226, **1926.**
H. Mandel. Z. Phys., **45,** 285, 1927; **54,** 564, 1929; **54,** 567, **1929;** 56, 838, 1929.
E. Reichenbacher. Z. Phys., **50,** 425, **1928.**
E. Reichenbächer. Phys. Z. **29,** 908, 1928.
G. Rumer. Götting. Nachr., 92, 1929.
H. T. Flint. Proc. Roy. Soc., **141,** 363, 1933.

Проективный релятивизм.

O. Veblen and *B. Hoffman.* Phys. Rev., **36**, 810, 1930.
A. Einstein und *W. Mayer.* Berl. Ber., 541, 1931; 130, 1932.
J. A. Schouten and *D. van Dantzig.* Z. Phys. **78**, 639, 1932, **81**, 129, 405, 1933.
J. A. Schouten and *D. van Dantzig.* Proc. Amsterdam., **34**, 1398, 1931, **35**, 642–844, 1932.
B. Hoffman. Phys. Rev., **43**, 615, 964, 1933; **37**, 88, 1931.
O. Veblen. Die projektive Relativitätstheorie. J. Springer, Berlin, 1933.
W. Pauli et *J. Solomon.* Journ. d. phys., 3, 452, 582, 1932.
W. Pauli. Ann. Phys. **18**, 305, 337, 1933.

Параллелизм вдали.

A. Einstein. Berl. Ber. 217, 224, 1928; 2, 156, 1929; 18, 401, 1930.
R. Weitzenböck. Ebenda, 466, 1928.
T. Levi-Civita. Ebenda, 137, 1929 (лучшее изложение).
A. Einstein und *W. Mayer.* Ebenda, 110, 1930; 257, 1931.
A. S. Eddington. Nature, 123, 280, 1929.
Ig. Tamm und *L. Leontowitsch.* Z. Phys., **57**, 354, 1929.
Ig. Tamm. Phys. Z., **30**, 652, 1929 (применение к квантам).
H. Reichenbach. Z. Phys., **53**, 683, 1929.
N. Rosen and *M. S. Vallarta.* Phys. Rev., 36, 110, 1936.
H. T. K. Piaggio. Nature, 123, 839, 877, 1929.
A. Einstein. Ann. Inst. Henri Poincaré **1**, 1, 1930.
L. Infeld. Phys. Z. 32. 110, 1931.
C. Lanczos. Ergebnisse d. exakt. Naturwiss., **10**, 97, 1931.
C. Lanczos. Z. f. Phys., 75, 63, 1932 (вектор потенциал в римановой геометрии).

Различные варианты единой теории поля.

A. S. Eddington. Proc. Roy. Soc. A. **99**, 104, 1921 (пп. 91—97).
L. P. Eisenhart and *O. Veblen.* Proc. Nat. Ac. Sci., **8**, 19, 1922 (обобщение римановой геометрии, пп. 84, 91).
L. P. Eisenhart. Ann. of Math. 24, 367, 1922.
H. Weyl. Math. Zeitschr. 2, 384, 1918; Götting. Nachr. 99, 1921 (теория Вейля).
H. Weyl. Phys., Z., 22, 473, 1921, (теория Вейля).
H. Weyl. Ann. d. Phys., **65**, 541, 1921; Math. Z., **12**, 114, 1922 (теория Вейля, см. п. 97).
O. Veblen and *T. Y. Thomas.* Trans. Amer. Math. Soc. **25**, 551, 1923.
L. Infeld. Phys. Z. **29**, 810, 1928.
G. Rumer. Götting. Nachr., 92, 1929.
G. Rumer. Z. Phys. **58**, 273, 1929.
P. Straneo. Berl. Ber., 319, 1931.
P. Straneo. Lincei Rend. **13**, 695, 1931. Ebenda 15, 462, 1932.
P. Straneo. Ebenda **13**, 770, 1931 (учет кручения пространства).
L. Infeld. Lincei Rend., **15**, 157, 1932 (учет кручения пространства).
G. Rumer. Götting. Nachr. № 2, 148, 1931.
P. Straneo. Z. Phys., **77**, 829, 1932.
P. Straneo. Lincei Rend. **16**, 139, 1932.
C. Lanczos. Z. f. Phys. 73, 147, 1931.
D. D. Kosambi. Berl. Ber., № 14, 342, 1932 (основы аффинной теории поля).
E. Cartan. Ann. de l'École Norm. sup. **40**, 325, 1923; **41**, 1, 1924; **42**, 17, 1928 (пространства аффинной и конформной связности; учет кручения).
J. A. Schouten. Rend. Circolo Mat. Palermo. **50**, 1, 1926.

ИМЕННОЙ И ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Оглавление