

Г. В. ЕФИМОВ

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КВАНТОВАННЫХ ПОЛЕЙ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1977

Нелокальные взаимодействия квантованных полей. Ефимов Г. В. Монография. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1977.

В книге дается систематическое изложение теории нелокальных взаимодействий квантованных полей. Проводится исследование различных классов локальных и нелокальных обобщенных функций и с их помощью строится теория нелокальных взаимодействий скалярного поля, а также теория электромагнитных и слабых взаимодействий. Различные методы применяются также в случае неполиномиальных лагранжианов взаимодействия. Показывается, что S -матрица в предлагаемых теориях удовлетворяет всем необходимым требованиям: конечности, релятивистской ковариантности, унитарности, причинности и градиентной инвариантности. Основное внимание уделено внутренней логической замкнутости при построении теории.

Табл. 3, иллюстр. 56, библиогр. 221.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Некоторые обозначения	9
Глава I. Нелокальная квантовая теория поля и проблемы канонического квантования	11
§ 1. Проблемы нелокальной квантовой теории поля	11
§ 2. Каноническое квантование и S -матрица	20
§ 3. Теорема Хаага и ультрафиолетовые расходимости	28
§ 4. Регуляризация гамильтониана взаимодействия	31
§ 5. Теорема Вика и функциональные производные	36
§ 6. S -матрица и никово T -произведение	43
Глава II. Локальные и нелокальные обобщенные функции	48
§ 1. Введение	48
§ 2. Пространства основных функций	51
§ 3. Локальные обобщенные функции	56
§ 4. Носители аналитических функционалов	59
§ 5. Проектирующие последовательности функций	65
§ 6. Нелокальные свойства функций $K(x-y)$	71
§ 7. Нелокальные обобщенные функции. Случай V и VI	75
§ 8. Расширенные функционалы	80
Глава III. Аксиомы квантовой теории S-матрицы	86
§ 1. Основные свойства S -матрицы в локальной и нелокальной квантовой теории поля	86
§ 2. Условие причинности	91
§ 3. Принцип доопределения T -произведения	94
Глава IV. Квантование нелокальной теории скалярных полей	96
§ 1. Введение	96
§ 2. Описание системы и постановка задачи квантования	97
§ 3. Регуляризационная процедура	100
§ 4. Квантование регуляризованного уравнения	103
§ 5. Функции Грина поля $\Phi^\delta(x)$	107
§ 6. Взаимодействующая система до снятия регуляризации	110
§ 7. Функции Грина в пределе $\delta \rightarrow 0$	111
§ 8. Случай нескольких формфакторов	114
§ 9. Физический смысл формфактора	116
Глава V. S-матрица в нелокальной теории скалярного поля	121
§ 1. Введение	121
§ 2. Лагранжианы взаимодействия	122
§ 3. Алгебраическая структура ряда теории возмущений для S -матрицы	125
§ 4. Проблема ультрафиолетовых расходимостей в ряду теории возмущений	128
§ 5. Введение формфактора в теорию	133

§ 6.	Регуляризационная процедура	136
§ 7.	Снятие регуляризации в матричных элементах S -матрицы	141
§ 8.	Нелокальный пропагатор в евклидовой метрике	147
§ 9.	Аналитические свойства евклидовых амплитуд	152
§ 10.	Мажоранта амплитуды n -го порядка по выделенной переменной	164
Глава VI. Унитарность и причинность S-матрицы		167
§ 1.	Введение	167
§ 2.	Схема доказательства унитарности S -матрицы	168
§ 3.	Регуляризация $D_{(\pm)}$ -функций	170
§ 4.	Условие унитарности в теории возмущений	175
§ 5.	Условие унитарности и представление S -матрицы в функциональной форме	179
§ 6.	Непрерывность по параметрам регуляризации	184
§ 7.	Унитарность перенормированной S -матрицы	186
§ 8.	Условие причинности в теории возмущений	191
§ 9.	Причинность запаздывающих функций	193
§ 10.	Представление запаздывающего произведения в n -м порядке теории возмущений	196
Глава VII. Неполномиальные лагранжианы взаимодействия		202
§ 1.	Постановка задачи	202
§ 2.	Модель квантовой теории поля с фиксированным источником	206
§ 3.	Формулировка квантовой теории скалярного поля с неполномиальным взаимодействием	211
§ 4.	Методы асимптотического суммирования	216
§ 5.	Нелокальные методы	226
§ 6.	Сходимость ряда теории возмущений	230
Глава VIII. Нелокальная квантовая электродинамика		238
§ 1.	Введение нелокальности в электродинамику	238
§ 2.	Постановка задачи	243
§ 3.	Нелокальный формфактор $K(x-y)$	246
§ 4.	Регуляризационная процедура	252
§ 5.	Градиентная инвариантность S -матрицы	255
§ 6.	Вычисление простейших примитивных диаграмм Фейнмана	257
§ 7.	Собственная энергия электрона	264
§ 8.	Экспериментальные ограничения на величину «элементарной длины»	273
§ 9.	Уравнения для поля со спином 0 и 1	277
§ 10.	Электродинамика частиц со спином 0 и 1	285
§ 11.	Нелокальность как результат частичного выхода за рамки теории возмущений	299
Глава IX. Нелокальная теория слабых взаимодействий		313
§ 1.	Выбор лагранжианов взаимодействия	313
§ 2.	Регуляризация ряда теории возмущений	320
§ 3.	Электромагнитные и слабые взаимодействия с W -мезоном	322
§ 4.	Второй порядок теории возмущений	327
§ 5.	Градиентная инвариантность S -матрицы в теории слабых взаимодействий	332
§ 6.	Четырехфермионные слабые взаимодействия	334
§ 7.	Некоторые эффекты в нелокальной модели электромагнитных и слабых взаимодействий лептонов	342
§ 8.	К разности масс электрона и μ -мезона	350
§ 9.	Аномальные тождества Уорда и регуляризационная процедура	354
Литература		361
Предметный указатель		366

ПРЕДИСЛОВИЕ

Неверно нынче! Очень даже, мой друг,
неверно! Куда ступить, в которую сторону
идти — никто ныне этого не знает!

М. Е. Салтыков-Щедрин. Благонамеренные
речн.

Безусловно, мысль, высказанную в эпиграфе, многие сочтут уж слишком категоричной, если ее относить к положению в, так сказать, «внутренних проблемах» квантовой теории поля, а также к способности этой теории объяснять и предсказывать различные эффекты в физике элементарных частиц. Однако я думаю, что все же эта мысль не очень далека от истинного положения вещей. История развития идей и методов квантовой теории поля служит тому яркой иллюстрацией. После блестящего успеха в объяснении и предсказании фактически любых явлений, связанных с электродинамическими взаимодействиями электронов и позитронов, квантовая теория поля пережила времена, когда ее пытались забыть, а то и просто отменить как отжившую свой век. Но идеи, заложенные в основы квантовой теории поля, оказались необыкновенно живучими, и мы видим, что периодически возникают всплески всеобщего внимания к очередным результатам, получаемым в ее рамках. Так было, когда оказалось возможным построить самосогласованную теорию для неполномиальных взаимодействий, далее последовали успехи при построении перенормируемой теории в калибровочных полях, что позволило объединить электромагнитные и слабые взаимодействия.

В настоящее время интенсивно разрабатываются идеи, связанные с построением суперсимметричных полей, которые объединяют в один мультиплет спинорные и бозонные поля, и теорией солитонов, обусловленной успехами в развитии методов

§ 6. Регуляризационная процедура	136
§ 7. Снятие регуляризации в матричных элементах S -матрицы	141
§ 8. Нелокальный пропагатор в евклидовой метрике	147
§ 9. Аналитические свойства евклидовых амплитуд	152
§ 10. Мажоранта амплитуды n -го порядка по выделенной переменной	164
Глава VI. Унитарность и причинность S-матрицы	167
§ 1. Введение	167
§ 2. Схема доказательства унитарности S -матрицы	168
§ 3. Регуляризация $D_{(\pm)}$ -функций	170
§ 4. Условие унитарности в теории возмущений	175
§ 5. Условие унитарности и представление S -матрицы в функциональной форме	179
§ 6. Непрерывность по параметрам регуляризации	184
§ 7. Унитарность перенормированной S -матрицы	186
§ 8. Условие причинности в теории возмущений	191
§ 9. Причинность запаздывающих функций	193
§ 10. Представление запаздывающего произведения в n -м порядке теории возмущений	196
Глава VII. Неполиномиальные лагранжианы взаимодействия	202
§ 1. Постановка задачи	202
§ 2. Модель квантовой теории поля с фиксированным источником	206
§ 3. Формулировка квантовой теории скалярного поля с неполиномиальным взаимодействием	211
§ 4. Методы асимптотического суммирования	216
§ 5. Нелокальные методы	226
§ 6. Сходимость ряда теории возмущений	230
Глава VIII. Нелокальная квантовая электродинамика	238
§ 1. Введение нелокальности в электродинамику	238
§ 2. Постановка задачи	243
§ 3. Нелокальный формфактор $K(x - y)$	246
§ 4. Регуляризационная процедура	252
§ 5. Градиентная инвариантность S -матрицы	255
§ 6. Вычисление простейших примитивных диаграмм Фейнмана	257
§ 7. Собственная энергия электрона	264
§ 8. Экспериментальные ограничения на величину «элементарной длины»	273
§ 9. Уравнения для поля со спином 0 и 1	277
§ 10. Электродинамика частиц со спином 0 и 1	285
§ 11. Нелокальность как результат частичного выхода за рамки теории возмущений	299
Глава IX. Нелокальная теория слабых взаимодействий	313
§ 1. Выбор лагранжианов взаимодействия	313
§ 2. Регуляризация ряда теории возмущений	320
§ 3. Электромагнитные и слабые взаимодействия с W -мезоном	322
§ 4. Второй порядок теории возмущений	327
§ 5. Градиентная инвариантность S -матрицы в теории слабых взаимодействий	334
§ 6. Четырехфермионные слабые взаимодействия	342
§ 7. Некоторые эффекты в нелокальной модели электромагнитных и слабых взаимодействий лептонов	342
§ 8. К разности масс электрона и μ -мезона	350
§ 9. Аномальные тождества Уорда и регуляризационная процедура	354
Литература	361
Предметный указатель	366

ПРЕДИСЛОВИЕ

Неверно нынче! Очень даже, мой друг,
 неверно! Куда ступить, в которую сторону
 идти — никто ныне этого не знает!
 М. Е. Салтыков-Щедрин. Властомерные речи.

Безусловно, мысль, высказанную в эпиграфе, многие сочтут уж слишком категоричной, если ее относить к положению в, так сказать, «внутренних проблемах» квантовой теории поля, а также к способности этой теории объяснять и предсказывать различные эффекты в физике элементарных частиц. Однако я думаю, что все же эта мысль не очень далека от истинного положения вещей. История развития идей и методов квантовой теории поля служит тому яркой иллюстрацией. После блестящего успеха в объяснении и предсказании фактически любых явлений, связанных с электродинамическими взаимодействиями электронов и позитронов, квантовая теория поля пережила времена, когда ее пытались забыть, а то и просто отменить как отжившую свой век. Но идеи, заложенные в основы квантовой теории поля, оказались необыкновенно живучими, и мы видим, что периодически возникают всплески всеобщего внимания к очередным результатам, получаемым в ее рамках. Так было, когда оказалось возможным построить самосогласованную теорию для неполиномиальных взаимодействий, далее последовали успехи при построении перенормируемой теории в калибровочных полях, что позволило объединить электромагнитные и слабые взаимодействия.

В настоящее время интенсивно разрабатываются идеи, связанные с построением суперсимметричных полей, которые объединяют в один мультиплет спинорные и бозонные поля, и теорией солитонов, обусловленной успехами в развитии методов

решения нелинейных уравнений. Так что в настоящее время (середина 70-х годов) можно считать, что мы снова переживаем возрождение интереса и надежд, связанных с идеями и методами квантовой теории поля.

Однако имеется один вопрос, который не был решен ни в рамках классической, ни в рамках квантовой теории поля, — это проблема, связанная с взаимодействием частиц с создаваемым ими полем, или, другими словами, с собственной массой частиц. Мнения ученых, как говорится, разошлись. Одни считают это столь существенным недостатком теории, что вообще отказывают такой теории в праве на существование. Другие же, наоборот, видят в этом недостатке ту диалектическую незамкнутость теории, которая должна решаться постепенно при продвижении в глубь материи, т. е. с привлечением новых физических концепций, например, включение полей типа гравитационных и т. д.

Таким образом, должна существовать в некотором смысле единая теория поля, которая должна охватывать все возможные взаимодействия, которые существуют в Природе. И к построению такой единой теории мы будем постепенно, шаг за шагом приближаться.

Большинство физиков считает в настоящее время, что принцип перенормируемости полностью снимает какие бы то ни было вопросы, так что если делается утверждение, что некоторая теория перенормируема, то считается неприличным задавать дальнейшие вопросы о внутренней самосогласованности теории.

Существует еще одна точка зрения, заключающаяся в том, что на любом этапе наших знаний о физике элементарных частиц мы всегда должны располагать самосогласованной, без внутренних противоречий теорией, чтобы быть уверенным, что наблюдающиеся на опыте явления могут или, наоборот, не могут быть ею объяснены. Именно с этих позиций создавалась нелокальная квантовая теория поля. Введение нелокального формфактора, с физической точки зрения, должно означать, что те явления, которые происходят на слишком малых расстояниях, еще недоступных нашим экспериментальным возможностям, могут быть эффективно, т. е. феноменологически, учтены некоторыми параметрами, имеющими разумный физический

смысл. Однако в рамках квантовой теории поля долгое время не удавалось согласовать требования конечности, релятивистской ковариантности, унитарности, разумной причинности и градиентной инвариантности при попытках построения квантовой теории поля, описывающей нелокальные взаимодействия.

Так уж случилось, что более десяти лет назад автор, будучи довольно категоричным противником нелокальной теории, обнаружил более или менее случайно, что разумная нелокальная квантовая теория поля может быть построена, если объединить две идеи: во-первых, начинать построение S -матрицы в евклидовой метрике и, во-вторых, использовать в качестве формфакторов целые функции, не смущаясь, что они разрушают привычную связь между евклидовой и псевдоевклидовой формулировками теории и приводят к экспоненциальному росту амплитуд в физической области энергий. Затем последовали десять лет работы, в течение которых был получен ряд результатов, связанных с возможностью построения конечной S -матрицы для различных нелокальных моделей квантовой теории поля и доказательством непротиворечивости этих построений.

К настоящему времени общая схема описания нелокальных взаимодействий довольно четко прояснилась и возникла необходимость систематизировать полученные результаты, чтобы яснее представить себе, что уже сделано, а что еще предстоит сделать. Кроме того, автора еще многое не удовлетворяет в той схеме формулировки квантовой теории поля с нелокальным взаимодействием, о которой идет речь в предлагаемой книге.

Автор не считает, что в этой книге излагается окончательный вариант построения теории нелокальных взаимодействий; но ему кажется, что к сегодняшнему дню эта теория, хотя еще и не нашла своего места в объяснении физических экспериментов, но в своей математической формулировке и внутренней самосогласованности стоит на том же уровне строгости, какой достигнут в перенормируемых теориях с локальным взаимодействием.

Автор пользуется случаем, чтобы выразить искреннюю благодарность профессору Д. И. Блохинцеву, вниманием и поддержкой которого он пользовался в течение всего времени ра-

боты над проблемами, затронутыми в этой книге. Автору хотелось бы выразить также глубокую признательность В. А. Алябастрову, В. Г. Малышкину, О. А. Могилевскому, Х. Намсраю, М. Л. Ругенбергу и Ш. З. Сельцеру за то, что нам посчастливилось пройти те несколько лет совместной беспокойной работы, полной разочарований и надежд, неудач и успехов, в течение которых нами было получено большинство результатов, составляющих основу этой книги.

Г. В. Ефимов

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Введем ряд общих обозначений. Все компоненты 4-векторов выбраны действительными. Метрика определяется тензором Минковского $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$), для которого

$$g_{\mu\nu} = 0 \text{ при } \mu \neq \nu, \\ g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1.$$

Произведение двух 4-векторов p и k с компонентами

$$p = (p_0, \mathbf{p}) = (p_0, p_1, p_2, p_3), \\ k = (k_0, \mathbf{k}) = (k_0, k_1, k_2, k_3)$$

определено как

$$(pk) = p_\mu k_\nu g_{\mu\nu} = p_\mu k_\mu = p_0 k_0 - p\mathbf{k} = p_0 k_0 - p_1 k_1 - p_2 k_2 - p_3 k_3.$$

Здесь и в дальнейшем мы будем подразумевать суммирование по дважды повторяющимся индексам, опуская знак суммы.

Для временной компоненты 4-вектора $x = (x_0, \mathbf{x})$ часто будем использовать обозначение $x_0 = t$. Производные будем обозначать следующим образом:

$$i \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = i \partial_\alpha = p_\alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3).$$

$$\square = p^2 = -\partial_0^2 + \partial^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

$$\partial^s = \partial_{\mu_1} \cdot \dots \cdot \partial_{\mu_s} = \frac{\partial^s}{\partial x_{\mu_1} \cdot \dots \cdot \partial x_{\mu_s}}.$$

Для функций $f(x)$, заданных в четырехмерном пространстве, будем использовать эквивалентные обозначения

$$f(x) = f(x_0, \mathbf{x}) = f(x_0, x_1, x_2, x_3).$$

Для интегралов по всему четырехмерному пространству от некоторой функции $f(x)$ используются следующие эквивалентные обозначения:

$$\int d^4 x f(x) = \int dx^i f(x) = \int dx_0 \int dx^i(x_0, \mathbf{x}) = \\ = \int dx_0 \int dx_1 \int dx_2 \int dx_3 f(x_0, x_1, x_2, x_3).$$

Иногда будем еще обозначать

$$\int dx = \int_{t_1}^{t_2} dx_0 \int dx = \int_{t_1}^{t_2} dt \int dx.$$

Четырех- и трехмерные δ -функции будем записывать в виде

$$\delta^{(4)}(x) = \delta(x) = \delta(x_0) \delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta(x_0) \delta(x) = \delta(x_0) \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3),$$

опуская верхний индекс (3) или (4).

Матрицы Дирака γ_μ выбираем в виде

$$\gamma_\mu = (\gamma_0, \boldsymbol{\gamma}) \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}.$$

$$\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \quad \gamma_5^2 = +1,$$

$$O_\alpha = \gamma_\alpha (1 + \gamma_5). \quad \not{p} = p_\alpha \gamma_\alpha = p_0 \gamma_0 - \boldsymbol{p} \boldsymbol{\gamma}.$$

Во всей книге (за редкими, специально оговоренными, исключениями) используется система единиц, в которой скорость света и постоянная Планка, деленная на 2π , равны единице, т. е.

$$c = \hbar = 1.$$

В этой системе единиц энергия, импульс и масса имеют размерность обратной длины, а время $x_0 = t$ — размерность длины.

Мы будем всегда обозначать через G, Ω, Γ и т. д. открытые множества в \mathbb{R}^n — вещественном n -мерном пространстве. Через $\bar{G}, \bar{\Omega}, \bar{\Gamma}$ — замыкание этих множеств в \mathbb{R}^n . Тогда $S = \bar{G} \setminus G$ означает границу множества G .

Будем иногда использовать символы \forall и \exists , которые означают: \forall — «для любого» и \exists — «существует». Например, $\forall a \in \Gamma f(a) = 1$ означает, что для любого a , принадлежащего Γ , всегда $f(a) = 1$, и $\exists a \in \Gamma f(a) = 1$ означает, что существуют такие a , принадлежащие Γ , для которых $f(a) = 1$.

Под числом $[a]$ будем понимать целую часть числа a , например,

$$[5] = 5 \quad [5.6] = 5. \quad [\pi] = 3.$$

В тексте принято следующее условие ссылок на формулы. В пределах данной главы первая цифра обозначает номер параграфа этой главы, а вторая цифра — номер формулы в данном параграфе. Если же ссылка делается на формулу другой главы, то добавляется впереди римская цифра, обозначающая главу, где приведена формула.

ГЛАВА I

НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ И ПРОБЛЕМЫ КАНОНИЧЕСКОГО КВАНТОВАНИЯ

И виновата ли мысль в том, что она не останавливается, что она обладает способностью проникновения, что она ищет постичь и усвоить явления жизни?

М. Е. Салтыков-Щедрин, Литературное положение.

§ 1. Проблемы нелокальной квантовой теории поля

Проблемы, связанные с наличием ультрафиолетовых расходимостей в квантовой теории поля при локальном взаимодействии, являются основными при формулировке последовательной и замкнутой теории микрочастиц. Устранение расходимостей в матрице рассеяния методом перенормировок не снимает трудностей теории, поскольку бесконечности из матричных элементов переходят в лагранжиан взаимодействия, и вся постановка задачи квантовой теории поля с лагранжианом взаимодействия носит поэтому довольно условный характер.

Можно сказать, что метод перенормировок не преодолевает основных трудностей теории, а скорее представляет собой довольно успешный путь их обхода, пригодный в тех случаях, когда особо малые масштабы пространства и времени не играют существенной роли. Кроме того, программа перенормировок не прошла для довольно широкого класса так называемых неперенормируемых теорий, в рамках которых описывается ряд физически важных взаимодействий элементарных частиц (например, слабые взаимодействия, взаимодействие векторных бозонов с нуклонами, электродинамика частиц с высшими спинами, киральные теории взаимодействия мезонов с нуклонами и т. д.).

Почти сразу же после того, как были обнаружены трудности с ультрафиолетовыми расходимостями, возникло стремление более глубоко видоизменить теорию, исходя из тех или иных физических идей. Среди попыток подобного рода, имеющих значительную историю, особое место занимает нелокальная квантовая теория поля. История изучения релятивистских теорий поля с нелокальным взаимодействием начинается с 1934 г., когда Г. Ватагин (1934) сделал первую попытку ввести форм-фактор в электродинамику.

Четырех- и трехмерные δ -функции будем записывать в виде

$$\delta^{(4)}(x) = \delta(x) = \delta(x_0) \delta^{(3)}(x) = \delta(x_0) \delta(x) = \delta(x_0) \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3),$$

опуская верхний индекс (3) или (4).

Матрицы Дирака γ_μ выбираем в виде

$$\gamma_\mu = (\gamma_0, \boldsymbol{\gamma}) \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}.$$

$$\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \quad \gamma_5^2 = +1,$$

$$O_\alpha = \gamma_\alpha (1 + \gamma_5). \quad \not{p} = p_\alpha \gamma_\alpha = p_0 \gamma_0 - \boldsymbol{p} \boldsymbol{\gamma}.$$

Во всей книге (за редкими, специально оговоренными, исключениями) используется система единиц, в которой скорость света и постоянная Планка, деленная на 2π , равны единице, т. е.

$$c = \hbar = 1.$$

В этой системе единиц энергия, импульс и масса имеют размерность обратной длины, а время $x_0 = t$ — размерность длины.

Мы будем всегда обозначать через G, Ω, Γ и т. д. открытые множества в \mathbb{R}^n — вещественном n -мерном пространстве. Через $\bar{G}, \bar{\Omega}, \bar{\Gamma}$ — замыкание этих множеств в \mathbb{R}^n . Тогда $S = \bar{G} \setminus G$ означает границу множества G .

Будем иногда использовать символы \forall и \exists , которые означают: \forall — «для любого» и \exists — «существует». Например, $\forall a \in \Gamma f(a) = 1$ означает, что для любого a , принадлежащего Γ , всегда $f(a) = 1$, и $\exists a \in \Gamma f(a) = 1$ означает, что существуют такие a , принадлежащие Γ , для которых $f(a) = 1$.

Под числом $[a]$ будем понимать целую часть числа a , например,

$$[5] = 5 \quad [5.6] = 5. \quad [\pi] = 3.$$

В тексте принято следующее условие ссылок на формулы. В пределах данной главы первая цифра обозначает номер параграфа этой главы, а вторая цифра — номер формулы в данном параграфе. Если же ссылка делается на формулу другой главы, то добавляется впереди римская цифра, обозначающая главу, где приведена формула.

ГЛАВА I

НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ И ПРОБЛЕМЫ КАНОНИЧЕСКОГО КВАНТОВАНИЯ

И виновата ли мысль в том, что она не останавливается, что она обладает способностью проникновения, что она ищет постичь и усвоить явления жизни?

М. Е. Салтыков-Щедрин, Литературное положение.

§ 1. Проблемы нелокальной квантовой теории поля

Проблемы, связанные с наличием ультрафиолетовых расходимостей в квантовой теории поля при локальном взаимодействии, являются основными при формулировке последовательной и замкнутой теории микрочастиц. Устранение расходимостей в матрице рассеяния методом перенормировок не снимает трудностей теории, поскольку бесконечности из матричных элементов переходят в лагранжиан взаимодействия, и вся постановка задачи квантовой теории поля с лагранжианом взаимодействия носит поэтому довольно условный характер.

Можно сказать, что метод перенормировок не преодолевает основных трудностей теории, а скорее представляет собой довольно успешный путь их обхода, пригодный в тех случаях, когда особо малые масштабы пространства и времени не играют существенной роли. Кроме того, программа перенормировок не прошла для довольно широкого класса так называемых перенормируемых теорий, в рамках которых описывается ряд физически важных взаимодействий элементарных частиц (например, слабые взаимодействия, взаимодействие векторных бозонов с нуклонами, электродинамика частиц с высшими спинами, киральные теории взаимодействия мезонов с нуклонами и т. д.).

Почти сразу же после того, как были обнаружены трудности с ультрафиолетовыми расходимостями, возникло стремление более глубоко видоизменить теорию, исходя из тех или иных физических идей. Среди попыток подобного рода, имеющих значительную историю, особое место занимает нелокальная квантовая теория поля. История изучения релятивистских теорий поля с нелокальным взаимодействием начинается с 1934 г., когда Г. Ватагин (1934) сделал первую попытку ввести форм-фактор в электродинамику.

Сразу же наметились две различные точки зрения на подход к построению нелокальной теории. Одна точка зрения заключается в том, что нелокальную теорию следует понимать как принципиально новую теорию подобно тому, как квантовая теория была новой по сравнению с классической физикой. Поэтому новая постоянная размерности длины, которая неизбежно возникает при любых попытках ввести нелокальность в теорию, должна рассматриваться как новая фундаментальная постоянная наряду с такими постоянными, как скорость света c , заряд электрона e , постоянная Планка \hbar . Эта новая постоянная l должна была бы определить новый масштаб расстояний, на которых должны наступить дальнейшие принципиальные изменения в наших представлениях о физическом мире.

Было предложено несколько возможных путей изменения современной теории.

Например, М. А. Марковым (1940) было высказано предположение, что на малых расстояниях величины, характеризующие поле, не являются уже измеримыми. Это приводит к тому, что потенциалы поля не коммутируют с координатами, т. е.

$$[x_\mu, A(x)] \neq 0,$$

где $A(x)$ — потенциал, характеризующий некоторое поле. Сюда же относятся теории, где предполагается, что отсутствует точный смысл у самого понятия об определенной точке пространства-времени, т. е. компоненты оператора координаты не коммутируют:

$$[x_\mu, x_\nu] \neq 0 \text{ для } \mu \neq \nu.$$

Это приводит к теории квантового пространства-времени.

Предпринимались и предпринимаются попытки сформулировать теорию в искривленном пространстве времени или в искривленном пространстве импульсов.

В дальнейшем мы совсем не будем касаться проблем, связанных с этим направлением в квантовой теории поля, и поэтому ограничимся лишь этим кратким перечислением. С деталями читатель может познакомиться в книгах Д. И. Блохинцева (1970), А. Н. Вяльцева (1965) и сборнике, посвященном памяти И. Е. Тамма (1972), где приведены дальнейшие ссылки.

Другая точка зрения состоит в том, что нам надо научиться описывать нелокальные взаимодействия квантованных полей, не меняя фундаментальных основ теории, т. е. не изменяя обычного описания невзаимодействующих частиц. При этом возникающие параметры размерности длины уже не являются универсальными фундаментальными постоянными, а характеризуют лишь область нелокального взаимодействия рассматриваемых квантованных полей. Таким образом, данный подход призван создать необходимый математический аппарат для описания нелокальных взаимодействий, хотя сама постановка задачи тре-

бует привлечения новых физических и математических идей. Настоящая монография посвящена разработке именно этого направления в нелокальной квантовой теории поля, поэтому мы подробнее остановимся на проблемах, возникающих в таком подходе.

Можно сказать, что развитие теории поля с нелокальным взаимодействием в основном определялось «внутренними» потребностями локальной квантовой теории поля. Дело в том, что ультрафиолетовая катастрофа казалась физикам старшего поколения столь принципиальной, что теория не считалась физически приемлемой, если она приводила к ультрафиолетовым расходимостям. Концепция нелокального взаимодействия должна была избавить квантовую теорию поля от этой принципиальной трудности. Были предприняты многочисленные усилия непротиворечивым образом сформулировать квантовую теорию поля с нелокальным взаимодействием.

Эти попытки связаны с именами М. А. Маркова (1940), Д. И. Блохинцева (1948), Х. Мак Мануса (1948), Х. Юкавы (1950), К. Блоха (1952), В. Паули (1953), М. Кретьена и Р. Пайерлса (1953), Е. Штюкельберга и Г. Вандерса (1954) и других. Обзоры этих работ можно найти в книгах М. А. Маркова (1958) и Д. И. Блохинцева (1970).

После многих разнообразных исследований (до середины 50-х годов) выяснилось, что нелокальная квантовая теория поля содержит свои собственные трудности, которые, казалось, столь многочисленны и велики, что почти начисто закрывают этот путь ликвидации ультрафиолетовой катастрофы в локальной квантовой теории поля. Оказалось, что в нелокальной теории невозможно одновременно удовлетворить требованиям конечности, релятивистской инвариантности, унитарности и разумной макроскопической причинности. Возникло убеждение, что нелокальная квантовая теория поля является одной из наименее последовательных и наиболее далеких от реальности направлений в теории элементарных частиц. Эта оценка подкреплялась еще тем фактом, что экспериментально не было найдено (и до сих пор не найдено!) никаких эффектов, явно указывающих на наличие какой-либо «элементарной длины».

В дальнейшем (начало и середина 50-х годов) успех теории перенормировок в квантовой электродинамике погасил общий интерес к нелокальной теории. Возникла вера, что принцип перенормируемости избавляет нас от самой постановки задачи сформулировать теорию без ультрафиолетовых расходимостей и полностью избавляет нас от проблемы, как в квантовой теории поля получить, например, поправку к массе частицы, возникающую в результате взаимодействия.

Однако вернемся к проблемам нелокальной теории поля. Как понималась задача физиками, желавшими построить непротиворечивую квантовую теорию с нелокальным взаимодей-

ствием? Прежде всего казалось, что аппарат локальной теории с его регуляризациями и вычитаниями бесконечных величин более напоминает искусство фокусника, чем строго детерминированные и логические методы математики. Нелокальная теория, по идее ее создателей, не должна была содержать никаких подобных математических трюков. Хотелось бы построение теории видеть в следующей, например, форме.

Рассмотрим для простоты однокомпонентное скалярное поле $\varphi(x)$, плотность гамильтониана для которого в локальном случае имеет вид

$$\mathcal{H}_I(x) = g\varphi^4(x). \quad (1.1)$$

Естественное нелокальное обобщение состоит в том, что вместо (1.1) будем рассматривать гамильтониан

$$\mathcal{H}_I(x) = g \int dx_1 \int dx_2 \int dx_3 \int dx_4 \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(x_4) \times \\ \times F(x - x_1, x - x_2, x - x_3, x - x_4). \quad (1.2)$$

Здесь $F(x - x_1, \dots, x - x_4)$ — некоторый релятивистски инвариантный формфактор, т. е. функция, зависящая от инвариантных переменных $(x - x_j)^2$ и симметричная по всем своим аргументам.

Считалось естественным и единственно разумным, что можно подобрать такой достаточно хороший формфактор, чтобы известное уравнение Томонага — Швингера

$$i \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \Psi[\sigma] = \mathcal{H}_I(x) \Psi[\sigma] \quad (1.3)$$

имело бы математически осмысленное решение и не содержало ультрафиолетовых расходимостей.

Однако эта программа потерпела неудачу. Дело в том, что уравнение (1.3) на самом деле представляет собой бесконечную систему уравнений. Эта система уравнений совместна, если $\mathcal{H}_I(x)$ удовлетворяет так называемому условию интегрируемости

$$[\mathcal{H}_I(x), \mathcal{H}_I(x')] = 0 \quad (1.4)$$

при $(x - x')^2 < 0$. В локальном случае (1.1) условие интегрируемости выполняется, поскольку коммутатор скалярных полей

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = \Delta(x - x') \quad (1.5)$$

исчезает при $(x - x')^2 < 0$. В случае нелокального взаимодействия коммутатор (1.5) заменяется коммутатором от величин типа

$$\left[\int dy F(x - y) \varphi(y), \int dy' F(x' - y') \varphi(y') \right] = \\ = \mathcal{D}(x - x') = \iint dy dy' F(x - y) F(x' - y') \Delta(y - y'). \quad (1.6)$$

Цель введения формфактора состоит в том, чтобы сделать все интегралы конечными. Появление ультрафиолетовых расходимостей связано с тем, что функция $\Delta(x - x')$ имеет особенность на световом конусе $(x - x')^2 = 0$.

Формфактор $F(x - y)$ зависит от $(x - y)^2$ и допускает распространение сигналов со сверхсветовой скоростью. Если, кроме того, он устраняет расходимости из всех интегралов, то он же неизбежно «размазывает» функцию $\Delta(x - x')$. Другими словами, коммутатор $\mathcal{D}(x - x')$ в (1.6) уже не обладает свойством функции $\Delta(x - x')$ обращаться в нуль при $(x - x')^2 < 0$.

Таким образом, при введении формфактора уравнение Томонага — Швингера (1.3) становится противоречивым. Возникающая несовместность системы уравнений (1.3) представляет собой математическое выражение того факта, что введение формфактора в теорию допускает существование сигналов, распространяющихся с бесконечной скоростью.

В дальнейшем были предприняты попытки обойти эту трудность, рассматривая уравнение движения с нелокальным формфактором в гайзенберговом представлении. На первый взгляд кажется, что условия интегрируемости (1.4), столь необходимые при формулировке теории в представлении взаимодействия, возможно, не будут играть никакой роли в представлении Гайзенберга. Но заранее очевидно, что трудности, причина которых физически столь понятна (возможны сигналы с бесконечной скоростью распространения), не могут исчезнуть при переходе к другой эквивалентной математической формулировке.

Рассмотрим, например, уравнение движения для гайзенбергова поля $\varphi(x)$, определяемого гамильтонианом взаимодействия (1.2):

$$(\square - m^2)\varphi(x) = -gJ(x), \quad (1.7)$$

где

$$J(x) = 4 \int dx_1 \int dx_2 \int dx_3 \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) F(0, x - x_1, x - x_2, x - x_3).$$

В локальном случае, для того чтобы уравнение движения определяло вторично квантованное поле $\varphi(x)$, необходимо поставить так называемую квантовополевую задачу Коши. Это означает, что мы должны искать такие решения $\varphi(x)$, которые в некоторый момент времени t_0 удовлетворяют начальным условиям

$$\varphi(\mathbf{x}, t_0) = \varphi_0(\mathbf{x}), \quad \pi(\mathbf{x}, t_0) = \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t_0) = \pi_0(\mathbf{x}) \quad (1.8)$$

и подчиняются каноническим перестановочным соотношениям

$$[\varphi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}', t)] = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = 0, \\ [\varphi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = i\hbar\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (1.9)$$

Здесь $\pi(\mathbf{x}, t)$ — импульс, канонически сопряженный полю $\varphi(\mathbf{x}, t)$.

Обратимся к уравнению (1.7). Во-первых, наличие нелокального формфактора превращает его в интегро-дифференциальное уравнение. Поэтому задание начальных условий (1.8) не гарантирует нам единственности решения. Во-вторых, в силу нелокальности гамильтониана, описывающего систему, не ясно, что такое канонически сопряженный импульс $\pi(x, t)$. Таким образом, первая трудность при рассмотрении гайзенберговских уравнений движения с нелокальным формфактором состоит в том, что мы не можем непосредственно применять процедуру канонического квантования.

В этом случае разумно применить процедуру квантования Янга — Фельдмана (1950). Проинтегрируем уравнение (1.7). В результате получим так называемое уравнение Янга — Фельдмана

$$\varphi(x) = \varphi_{in}(x) - g \int dy \Delta_{ret}(x-y) J(y) \quad (1.10a)$$

или

$$\varphi(x) = \varphi_{out}(x) - g \int dy \Delta_{adv}(x-y) J(y), \quad (1.10b)$$

где $\varphi_{in}(x)$ и $\varphi_{out}(x)$ — асимптотически свободные поля, удовлетворяющие уравнению Клейна — Гордона, $\Delta_{ret}(x-y)$ и $\Delta_{adv}(x-y)$ — соответственно запаздывающая и опережающая функции Грина. Условие квантования требует, чтобы поле $\varphi(x)$ удовлетворяло соотношению

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (\varphi(x) - \varphi_{in}(x)) = 0$$

или

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\varphi(x) - \varphi_{out}(x)) = 0.$$

Фактически эти условия являются начальными условиями на поле $\varphi(x)$ при $t = \mp\infty$. Потребуем, чтобы поле $\varphi_{in}(x)$ (или $\varphi_{out}(x)$) удовлетворяло каноническим перестановочным соотношениям. Тогда уравнение (1.10a) (или (1.10b)) будет определять вторично квантованное гайзенбергово поле $\varphi(x)$. Обозначим решение уравнения (1.10a), выраженное в терминах in-поля, через $\varphi(x; in)$. Решение уравнения (1.10b) обозначим через $\varphi(x; out)$. Поскольку эти уравнения определяют одно поле $\varphi(x)$, мы должны иметь

$$\varphi(x; in) = \varphi(x; out). \quad (1.11)$$

Это — так называемое условие асимптотической полноты. Оно должно выполняться в любой разумной квантовопольевой теории.

Оказывается, в моделях с нелокальным формфактором равенство (1.11) нарушается. Физическая причина, лежащая в основе этого факта, состоит в том, что соотношение

$$[\varphi_{in}(x), \varphi_{in}(y)] = [\varphi_{out}(x), \varphi_{out}(y)] = \Delta(x-y) \quad (1.12)$$

несовместно с (1.11). Действительно, выразим $\varphi_{out}(x)$ через $\varphi_{in}(x)$ из уравнений (1.10) и (1.11):

$$\varphi_{out}(x) = \varphi_{in}(x) - g \int dy \Delta(x-y) J(y) \quad (1.13)$$

и подставим в коммутатор (1.12). Оказывается, что

$$[\varphi_{out}(x), \varphi_{out}(y)] = [\varphi_{in}(x), \varphi_{in}(y)] + O(g).$$

Нелокальный формфактор, входящий в определение величины $J(y)$, «размазывает» функцию $\Delta(x-y)$ под интегралом, так что коммутатор out-полей уже не обращается в нуль при $(x-y)^2 < 0$.

Таким образом, причина, приводящая к несовместности уравнений Томонага — Швингера и к нарушению условия асимптотической полноты при работе в гайзенберговом представлении, одна и та же.

После выяснения принципиальных трудностей нелокальной теории в рамках метода Гамильтона — несовместности представлений взаимодействия и Гайзенберга — были предприняты попытки заменить этот метод некоторой «вычислительной схемой». Предложения, в двух словах, сводились к тому, чтобы в S -матрицу, получаемую из обычной локальной теории, ввести формфактор и изучать таким образом модифицированную S -матрицу независимо от квантовопольевых уравнений. После работ Д. А. Киржница (1966) и Т. Д. Ли и Г. Вика (1969) оказалось, что при использовании формфакторов типа Паули — Вилларса, т. е., например,

$$\bar{F}(p) = \frac{M^2}{M^2 + p^2} \quad \text{или} \quad \frac{M^4}{M^4 + (p^2)^2},$$

где M — некоторая «большая» масса, связанная с «элементарной длиной», возможно так сформулировать «правила вычислений», что получаемая нелокальная S -матрица удовлетворяла бы условиям унитарности и разумной макропричинности. Однако соответствующие правила вычислений оказались столь громоздкими, что реально вычисления можно провести лишь в самых низших порядках теории возмущений. На вопрос, что происходит в высших порядках S -матрицы, ответить точно не удалось. На наш взгляд, недостаток этого подхода состоит прежде всего в том, что вводимые «правила вычислений» слишком искусственны и не носят универсального алгоритмического характера, что реально не позволяет сделать никаких утверждений относительно n -го порядка ряда теории возмущений.

Вообще же в 60-х годах общее отношение к нелокальной квантовой теории поля было крайне скептическим. Было убеждение, что теорема об общей природе локальной коммутативности, доказанной в аксиоматической квантовой теории поля

Д. Я. Петриной (1961) (см. также В. С. Владимиров (1964) и Р. Стритер и А. Вайтман (1966)), начисто закрывает какие бы то ни было перспективы построения непротиворечивой нелокальной теории. Суть теоремы состоит в том, что если коммутатор гайзенбергова поля удовлетворяет условию $[\varphi(x), \varphi(y)] = 0$ при $(x-y)^2 < -l^2$, то этот коммутатор обращается в нуль и при $(x-y)^2 < 0$. Это означает, что поле $\varphi(x)$ локально. Предположения, на которых основана теорема, следующие: трансляционная и релятивистская ковариантность, полнота системы физических состояний с положительной энергией и пространство функций умеренного роста, к которому должны принадлежать все вакуумные средние операторов поля. Последнее предположение казалось естественным, но именно оно предопределяет утверждение теоремы, поскольку в этом пространстве отсутствуют нелокальные релятивистски инвариантные обобщенные функции, как это будет подробно исследовано в гл. II. Лишь в конце 60-х годов М. З. Иофа и В. Я. Файнберг (1969) показали, что если выбрать пространство обобщенных функций с экспоненциальным ростом вакуумных средних, теорема о локальной коммутативности уже не будет иметь места, но все другие основные теоремы аксиоматики (СРТ, связь спина и статистики, теория асимптотических полей) сохраняют свою силу. Таким образом, этот результат поставил нелокальную теорию на тот же уровень строгости, что и локальную, в аксиоматическом подходе в квантовой теории поля.

Однако где же нашелся выход при построении нелокальной теории в лагранжевой формулировке теории? Оказалось, что необходимо изменить постановку задачи в двух основных пунктах.

Во-первых, ранее считалось, что из требования релятивистской инвариантности, накладываемого на формфактор $F(x-x')$, однозначно следует, что формфактор должен зависеть от интервала

$$s^2 = (x-x')^2 = (x_0-x'_0)^2 - (x-x')^2.$$

Например,

$$F(x-x') = \exp \left\{ - \left[\frac{(x-x')^2}{l^2} \right]^2 \right\}. \quad (1.14)$$

Такая зависимость формфактора $F(x-x')$ допускает нарушение причинности в инвариантной области $|s^2| \lesssim l^2$, где l — некоторая малая длина. В направлениях, близких к световому конусу, пространственная и временная протяженности не причинной области могут оказаться сколь угодно большими. Другими словами, формфакторы типа (1.14) не могут обеспечить разумную локализацию области нелокального взаимодействия.

Оказалось, что требованию релятивистской инвариантности удовлетворяют формфакторы вида

$$K(x-x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} \square^n \delta^{(4)}(x-x'), \quad (1.15)$$

допускающие представление

$$(K, f)(x) = \int dx' K(x-x') f(x') = \int_{\rho^2 \leq l^2} d^4 \rho a(\rho^2) f(x_0 + i\rho_4, \mathbf{x} + \boldsymbol{\rho}), \quad (1.16)$$

где интегрирование проводится по четырехмерному евклидову шару

$$\rho^2 = \rho_4^2 + \boldsymbol{\rho}^2 = \rho_4^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 \leq l^2,$$

$a(\rho^2)$ — некоторая интегрируемая функция. Формфактор $K(x-x')$ релятивистски инвариантен, если $f(x)$ — аналитическая целая функция. Выполнение релятивистской инвариантности связано с тем фактом, что группа Лоренца и группа четырехмерных евклидовых вращений изоморфны.

Если в преобразованиях Лоренца

$$x'_0 = x_0 \operatorname{ch} \vartheta + x_3 \operatorname{sh} \vartheta, \quad x'_3 = x_0 \operatorname{sh} \vartheta + x_3 \operatorname{ch} \vartheta,$$

где $\operatorname{th} \vartheta = v/c$, положить $\vartheta = i\psi$, то мы получим евклидово вращение в плоскости (ix_0, x_3) . Ниже будут подробно рассмотрены свойства таких формфакторов.

Из представления (1.16) видно, что подобные формфакторы могут претендовать на описание разумной локализации нелокального взаимодействия.

Во-вторых, квантование системы полей с формфактором рассматривалось традиционным способом, т. е. пытались найти решение полевых уравнений, которые превратились в интегродифференциальные благодаря введению формфактора, и удовлетворить необходимым перестановочным соотношениям. При таком подходе формфактор все время рассматривался как некоторая заданная функция, определяющая решения соответствующих уравнений. На этом пути возникали перечисленные выше трудности.

Выход оказался в неожиданном месте. Оказалось, что формфактор необходимо квантовать. Оказалось, что разумная унитарная и причинная S -матрица получится, если формфактор (или поле, «размазанное» с помощью формфактора) представить в виде суперпозиции некоторых фиктивных квантов, которые должны быть устранены на окончательном этапе вычислений.

Итак, две идеи: новый класс релятивистски инвариантных формфакторов и квантование формфактора — приводят

к построению квантовой теории поля с нелокальным взаимодействием, удовлетворяющей всем необходимым требованиям. Изучению этих проблем и посвящена настоящая монография.

Поскольку наше построение квантовой теории поля с нелокальным взаимодействием по духу ближе методам локальной, чем традиционной нелокальной теории, в следующих разделах мы кратко опишем проблемы, возникающие при каноническом квантовании и построении конечной S -матрицы в локальной квантовой теории поля.

§ 2. Каноническое квантование и S -матрица

Мы будем считать, следуя программе, предложенной Гайзенбергом, что задача квантовой теории поля решена, если создан аппарат, позволяющий вычислять вероятности переходов между состояниями физической системы, в которых частицы могут рассматриваться как невзаимодействующие и стабильные. Совокупность амплитуд вероятностей всех возможных переходов объединяется в матрицу рассеяния, или, как ее обычно называют, S -матрицу теории. Возникает вопрос, как найти ее? Каковы уравнения, из решения которых S -матрица может быть найдена?

Если бы в теории не было ряда трудностей принципиального характера, о которых мы будем говорить в этом разделе, процедура вычисления S -матрицы мало отличалась бы от методов, развитых в нерелятивистской квантовой механике.

Рассмотрим стандартную процедуру канонического квантования на примере теории взаимодействующего однокомпонентного скалярного действительного поля $\varphi(x)$. Плотность лагранжиана обычно выбирается в форме

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_I(x), \\ \mathcal{L}_0(x) &= \frac{1}{2} [\partial_\mu \varphi(x) \partial_\mu \varphi(x) - m^2 \varphi^2(x)], \\ \mathcal{L}_I(x) &= -gU(\varphi(x)).\end{aligned}\quad (2.1)$$

Здесь $U(\varphi(x))$ — локальная функция полей, например, вида

$$\varphi^3, \varphi^4, \varphi^3 e^{-i\varphi^2} \text{ и т. д.}$$

Уравнение движения получается согласно принципу наименьшего действия

$$\delta \int dx \mathcal{L}(x) = 0,$$

откуда следует

$$(\square - m^2)\varphi(x) - gU'(\varphi(x)) = 0. \quad (2.2)$$

Проблема классической теории поля состоит в том, что мы должны решить задачу Коши для полученного уравнения движения, называемого в классической теории поля уравнением Эйлера, т. е. найти такое ограниченное решение уравнения, которое в некоторый момент времени t_0 удовлетворяет начальным условиям

$$\varphi(x, t_0) = f_1(x), \quad \dot{\varphi}(x, t_0) = f_2(x). \quad (2.3)$$

Заметим, что в силу релятивистской инвариантности уравнения начальные условия могут быть заданы на некоторой пространственноподобной поверхности.

В квантовой теории поля обычно используется процедура канонического квантования, которая состоит в следующем. Введем сопряженный импульс к полю $\varphi(x, t)$ в момент времени t :

$$\pi(x, t) = \frac{\delta}{\delta \dot{\varphi}(x, t)} \int dy \mathcal{L}(y, t) = \dot{\varphi}(x, t). \quad (2.4)$$

Постулат квантования гласит, что поле $\varphi(x)$ и сопряженный импульс $\pi(x)$ являются операторами, которые удовлетворяют при совпадающих временах каноническим перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned}[\varphi(x, t), \varphi(y, t)] &= [\pi(x, t), \pi(y, t)] = 0, \\ [\varphi(x, t), \pi(y, t)] &= i\delta(x - y).\end{aligned}\quad (2.5)$$

Развитие поля $\varphi(x)$ во времени определяется уравнением (2.2), которое в квантовой теории поля называется уравнением Гайзенберга. Таким образом, мы должны найти решение уравнения (2.2), удовлетворяющее при совпадающих временах перестановочным соотношениям (2.5), а не начальным условиям задачи Коши (2.3), как это было в классической теории.

Формальное решение поставленной задачи может быть получено следующим образом. Введем плотность гамильтониана системы

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x) &= \pi(x) \dot{\varphi}(x) - \mathcal{L}(x) = \\ &= \frac{1}{2} [\pi^2(x) + (\nabla \varphi(x))^2 + m^2 \varphi^2(x)] + gU(\varphi(x))\end{aligned}\quad (2.6)$$

и гамильтониан

$$H(t) = \int dx \mathcal{H}(x, t). \quad (2.7)$$

Пусть в некоторый начальный момент времени $t = t_0$ нам известны поле и сопряженный импульс

$$\varphi(x, t_0) = \varphi_0(x), \quad \pi(x, t_0) = \pi_0(x), \quad (2.8)$$

которые удовлетворяют перестановочным соотношениям (2.5). Напишем гамильтониан, построенный по этим полям:

$$H = \int dx \mathcal{H}(x), \quad (2.9)$$

где

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} [\pi_0^2(x) + (\nabla\varphi_0(x))^2 + m^2\varphi_0^2(x)] + gU(\varphi_0(x)).$$

Тогда, как нетрудно убедиться, поле и сопряженный импульс

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x, t) = e^{i(t-t_0)H} \varphi_0(x) e^{-i(t-t_0)H} \\ \pi(x) &= \pi(x, t) = e^{i(t-t_0)H} \pi_0(x) e^{-i(t-t_0)H} \end{aligned} \quad (2.10)$$

формально удовлетворяют уравнению Гайзенберга (2.2) и перестановочным соотношениям (2.5), а также начальным условиям (2.8).

Необходимо теперь выбрать представление перестановочных соотношений (2.5). Другими словами, необходимо выбрать пространство состояний, в котором канонические переменные $\varphi_0(x)$ и $\pi_0(x)$ заданы как операторы. Вектор Ψ , описывающий нашу систему, должен принадлежать этому пространству.

Пусть такое пространство выбрано, и пусть вектор Ψ_{t_0} описывает нашу систему в момент времени t_0 . Тогда среднее значение поля в момент времени t дается выражением

$$\langle \Psi_{t_0}, \varphi(x) \Psi_{t_0} \rangle = \langle \Psi_{t_0}, e^{i(t-t_0)H} \varphi_0(x) e^{-i(t-t_0)H} \Psi_{t_0} \rangle. \quad (2.11)$$

Состояние

$$\Psi(t) = e^{-i(t-t_0)H} \Psi_{t_0} \quad (2.12)$$

описывает систему в момент времени t и удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = H \Psi(t) \quad (2.13)$$

с начальным условием

$$\Psi(t_0) = \Psi_{t_0}. \quad (2.14)$$

Однако трудность состоит в том, что в системе с бесконечным числом степеней свободы, которую описывает квантовая теория поля, существует много унитарно неэквивалентных представлений перестановочных соотношений (2.5). Положение усугубляется тем, что в настоящее время еще отсутствует сколь угодно полное описание всех возможных представлений. Поэтому, не зная всех математических возможностей, необходимо решить, из каких соображений следует выбрать представление перестановочных соотношений, в котором определены начальные поля $\varphi_0(x)$ и $\pi_0(x)$.

Обычно предполагается, что в квантовой теории поля следует рассматривать только представление Фока. Это представ-

ление допускает толкование операторов $\varphi_0(x)$ и $\pi_0(x)$ как суперпозицию операторов рождения и уничтожения невзаимодействующих физических частиц, поскольку в нем существует такой нормируемый вектор состояния, который обращается в нуль при действии на него любым оператором уничтожения, и поэтому описывает состояние без частиц, или вакуум. Это свойство является общим как для представления Фока, описывающего систему с бесконечным числом степеней свободы, так и для квантовой механики систем с конечным числом степеней свободы.

Представление Фока естественно возникает при каноническом квантовании системы невзаимодействующих полей или частиц.

Приведем соображения в пользу того, что это представление можно также использовать для описания физических частиц. Действительно, у нас нет экспериментальных возможностей проследить, что происходит с частицами в момент столкновения: слишком на малых расстояниях и за слишком короткие промежутки времени происходят эти события. Судим мы об этих процессах по эффективным сечениям и распределениям частиц после взаимодействия, когда разлетающиеся частицы вполне могут считаться невзаимодействующими.

Таким образом, процесс рассеяния естественно представить в следующем виде. В начальном состоянии, которому разумно приписать время $t = -\infty$, частицы находятся далеко друг от друга, и взаимодействие между ними полностью отсутствует. Затем по мере сближения частиц взаимодействие как-то постепенно «включается», достигает наибольшей силы при максимальном сближении и постепенно «выключается», когда частицы разлетаются после рассеяния. Конечное состояние разумно отнести ко времени $t = +\infty$. Поэтому естественно описывать частицы в начальном и конечном состояниях (при $t = \pm\infty$) лагранжианом без взаимодействия, т. е. положить $g = 0$ в (2.1) и (2.2).

Проведем теперь каноническое квантование системы без взаимодействия. Система описывается лагранжианом $\mathcal{L}_0(x)$ (2.1), а уравнение движения имеет вид

$$(\square - m^2)\varphi(x) = 0. \quad (2.15)$$

Сопряженный импульс $\pi(x)$ к полю $\varphi(x)$ в момент времени t определяется формулой (2.4). Сопряженное поле φ и импульс π также удовлетворяют при совпадающих временах каноническим перестановочным соотношениям (2.5).

Решение уравнения (2.15), удовлетворяющее этим перестановочным соотношениям, имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi^{(-)}(x) + \varphi^{(+)}(x), \\ \pi(x) &= \pi^{(-)}(x) + \pi^{(+)}(x), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$\begin{aligned}\varphi^{(\pm)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} a_{\mathbf{k}}^{\pm} e^{\pm i\mathbf{k}x}, \\ \pi^{(\pm)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (\pm i\omega_{\mathbf{k}}) a_{\mathbf{k}}^{\pm} e^{\pm i\mathbf{k}x}.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Здесь $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$. Операторы $a_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^-$ и $a_{\mathbf{k}}^+$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] &= [a_{\mathbf{k}}^+, a_{\mathbf{k}'}^+] = 0, \\ [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^+] &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').\end{aligned}\quad (2.18)$$

Воспользовавшись формулами (2.6) и (2.7), можно получить гамильтониан невзаимодействующей системы. При определении плотности гамильтониана (2.6) и гамильтониана (2.7) как операторов существует неопределенность в выборе порядка действия операторов, входящих в гамильтониан. Воспользуемся этой свободой и определим H_0 в так называемой нормальной форме

$$H_0 = \int d\mathbf{x} : \mathcal{H}_0(\mathbf{x}, 0) := \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}. \quad (2.19)$$

С помощью перестановочных соотношений (2.18) найдем

$$\begin{aligned}[H_0, a_{\mathbf{k}}] &= -\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}, \\ [H_0, a_{\mathbf{k}}^+] &= \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+.\end{aligned}\quad (2.20)$$

Вернемся теперь к уравнению Шредингера (2.13). Пусть Ψ_E является собственным состоянием H_0 с энергией E , т. е.

$$H_0 \Psi_E = E \Psi_E. \quad (2.21)$$

Рассмотрим состояния $a_{\mathbf{k}} \Psi_E$ и $a_{\mathbf{k}}^+ \Psi_E$. Получим

$$\begin{aligned}H_0 a_{\mathbf{k}} \Psi_E &= \{a_{\mathbf{k}} H_0 + [H_0, a_{\mathbf{k}}]\} \Psi_E = (E - \omega_{\mathbf{k}}) a_{\mathbf{k}} \Psi_E, \\ H_0 a_{\mathbf{k}}^+ \Psi_E &= \{a_{\mathbf{k}}^+ H_0 + [H_0, a_{\mathbf{k}}^+]\} \Psi_E = (E + \omega_{\mathbf{k}}) a_{\mathbf{k}}^+ \Psi_E.\end{aligned}$$

Таким образом, состояние $a_{\mathbf{k}} \Psi_E$ также является собственным состоянием H_0 , но с энергией, уменьшенной на величину $\omega_{\mathbf{k}}$. Состояние $a_{\mathbf{k}}^+ \Psi_E$ также будет собственным состоянием H_0 , но с энергией, возросшей на $\omega_{\mathbf{k}}$. Поэтому операторы $a_{\mathbf{k}}$ и $a_{\mathbf{k}}^+$ называются соответственно операторами уничтожения и рождения частицы с энергией $\omega_{\mathbf{k}}$.

Если мы теперь предположим, что в рассматриваемой нами системе частиц не может быть состояний с произвольно большой отрицательной энергией, то тогда должно существовать

одно или несколько состояний Ψ_0 , удовлетворяющих условию

$$a_{\mathbf{k}} \Psi_0 = 0 \quad (2.22)$$

для всех \mathbf{k} . Такое состояние (мы будем предполагать, что оно единственно) называется вакуумным состоянием, или просто вакуумом, и обозначается через Ψ_0 или $|0\rangle$. Будем считать, что оно нормируемо:

$$(\Psi_0, \Psi_0) = \langle 0 | 0 \rangle = 1. \quad (2.23)$$

Все остальные состояния свободной системы могут быть построены при помощи вакуумного состояния Ψ_0 и операторов рождения $a_{\mathbf{k}}^+$. Состояние n частиц с импульсами $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n$ определяется так:

$$\Psi_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n}^{(n)} = |\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a_{\mathbf{k}_1}^+ \dots a_{\mathbf{k}_n}^+ \Psi_0. \quad (2.24)$$

Легко проверить, что

$$H_0 \Psi_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n}^{(n)} = (\omega_{\mathbf{k}_1} + \dots + \omega_{\mathbf{k}_n}) \Psi_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n}^{(n)}, \quad (2.25)$$

так что энергия системы n частиц является аддитивной суммой энергий всех частиц, как и должно быть при отсутствии взаимодействия. Таким образом, гамильтониан является положительно-определенным оператором.

В гильбертовом пространстве состояний \mathcal{H} векторы состояний $\Psi_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n}^{(n)}$ выберем в качестве базиса. Тогда любое нормируемое состояние системы можно представить в виде

$$\Psi = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n!}} \int d\mathbf{k}_1 \dots \int d\mathbf{k}_n f_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \Psi_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n}^{(n)}, \quad (2.26)$$

где симметричная функция $f_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \in L_2(\mathbb{R}^{3n})$. В дальнейшем мы всегда будем рассматривать многообразие состояний, обладающих лишь конечным числом не равных нулю компонент в разложении (2.26). Тогда

$$(\Psi, \Psi) = \sum_n \frac{1}{n!} \int d\mathbf{k}_1 \dots \int d\mathbf{k}_n |f_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)|^2 < \infty.$$

Построенное нами пространство состояний \mathcal{H} является сепарабельным гильбертовым пространством. Другими словами, пространство \mathcal{H} является пространством Фока, построенным над пространством состояний \mathcal{H}_1 :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1) \oplus \dots \oplus \underbrace{(\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_1)}_n \oplus \dots$$

Здесь \mathcal{H}_0 описывает состояние без частиц и состоит из единственного состояния вакуума Ψ_0 , \mathcal{H}_1 — пространство одноча-

стичных состояний $\Psi^{(1)} = \int dk f(k) \Psi_k^{(1)}$, $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_1$ — симметричное тензорное произведение n множителей \mathcal{H}_1 .

Еще раз подчеркнем, что мы хотим использовать пространство Фока, построенное в предположении отсутствия взаимодействия, для описания взаимодействующей системы частиц.

Рассмотрим теперь взаимодействующую систему. В соответствии с предполагаемой картиной рассеяния, описанной выше, в качестве полей $\varphi_0(x)$ и $\pi_0(x)$ в (2.10) выберем решение для невзаимодействующей системы

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dk}{\sqrt{2\omega_k}} (a_k e^{ikx} + a_k^\dagger e^{-ikx}), \\ \pi_0(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dk}{\sqrt{2\omega_k}} (-i\omega_k) (a_k e^{ikx} - a_k^\dagger e^{-ikx}).\end{aligned}\quad (2.27)$$

Полный гамильтониан (2.9), построенный с помощью операторов $\varphi_0(x)$ и $\pi_0(x)$ (2.27), условимся записывать в нормальной форме, т. е. операторы рождения должны располагаться всегда левее операторов уничтожения. Тогда получим

$$H = H_0 + gH_I, \quad (2.28)$$

где

$$H_0 = \int dk \omega_k a_k^\dagger a_k, \quad gH_I = g \int dx : U(\varphi_0(x)) :,$$

так что $(\Psi_0, H_I \Psi_0) = 0$.

Таким образом, наша система описывается гамильтонианом H (2.28), а развитие системы — уравнением Шредингера (2.13). При этом мы будем искать решение в построенном нами пространстве Фока.

Для решения поставленной задачи о рассеянии частиц удобно перейти в уравнении Шредингера (2.13) к так называемому представлению взаимодействия. Вектор состояния определяется в этом представлении соотношением

$$\Phi(t) = e^{itH_0} \Psi(t). \quad (2.29)$$

Из (2.29) следует, что $\Phi(t)$ подчиняется уравнению

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t) = gH_I(t) \Phi(t), \quad (2.30)$$

где

$$gH_I(t) = e^{itH_0} gH_I e^{-itH_0} = g \int dx : U(\varphi_0(x, t)) :. \quad (2.31)$$

Выпишем попутно формулы, определяющие связь между различными представлениями. Обозначим через B оператор, характеризующий некоторую динамическую переменную системы (например, поле φ , гамильтониан взаимодействия gH_I и т. д.).

В представлении Шредингера этот оператор B не зависит от времени. Оператор

$$\mathcal{B}(t) = e^{iHt} B e^{-iHt} \quad (2.32)$$

принято называть гайзенберговым оператором, зависимость его от времени определяется полным гамильтонианом H . В представлении взаимодействия имеем

$$B(t) = e^{iH_0 t} B e^{-iH_0 t}. \quad (2.33)$$

Из формул (2.32) и (2.33) следует, что

$$\mathcal{B}(t) = V(t) B(t) V^\dagger(t), \quad (2.34)$$

где

$$V(t) = e^{iHt} \cdot e^{-iH_0 t}. \quad (2.35)$$

Введем оператор сдвига по времени $U(t, t_0)$ так, что

$$\Phi(t) = U(t, t_0) \Phi(t_0). \quad (2.36)$$

Этот оператор, согласно (2.30), удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = gH_I(t) U(t, t_0) \quad (2.37)$$

с начальным условием

$$U(t_0, t_0) = 1. \quad (2.38)$$

При конечных t и t_0 этот оператор должен удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned}U(t, t') U(t', t_0) &= U(t, t_0), \\ U(t, t_0) &= U^{-1}(t_0, t) = U^\dagger(t_0, t).\end{aligned}\quad (2.39)$$

Используя приведенные выше формулы, легко получить

$$U(t, t_0) = e^{iH_0 t} \cdot e^{-iH(t-t_0)} \cdot e^{-iH_0 t_0} = V^\dagger(t) V(t_0). \quad (2.40)$$

Пусть начальное состояние Φ_i задано при $t = -\infty$, тогда поведение системы при $t = +\infty$ описывается вектором

$$\Phi = S \Phi_i, \quad (2.41)$$

где

$$S = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(t, t_0). \quad (2.42)$$

Таким образом, оператор S определяет все возможные состояния, в которые может перейти система из состояния Φ_i в результате взаимодействия. Оператор S называется матрицей рассеяния, или просто S -матрицей.

Амплитуда перехода из состояния Φ_i при $t = -\infty$ в состояние Φ_f при $t = +\infty$ дается матричным элементом

$$M_{f \leftarrow i} = (\Phi_f, S \Phi_i). \quad (2.43)$$

Напомним, что начальное Φ_i и конечное состояния Φ_f являются суперпозициями собственных состояний свободного гамильтониана H_0 , т. е. принадлежат пространству Фока.

Однако решение задачи рассеяния по изложенной выше схеме для частиц, описываемых релятивистски инвариантными лагранжианами типа (2.1), наталкивается на две принципиальные проблемы, разрешение которых составляет в настоящее время основную теоретическую задачу квантовой теории поля. Эти проблемы можно сформулировать следующим образом:

представление взаимодействия не существует математически (теорема Хаага);

локальное взаимодействие ведет к ультрафиолетовым расходимостям.

Проанализируем эти трудности теории.

§ 3. Теорема Хаага и ультрафиолетовые расходимости

Нарисованная нами картина рассеяния предполагает, что взаимодействие между частицами отсутствует, если частицы находятся достаточно далеко друг от друга. На первый взгляд в этом утверждении как будто не содержится особых оснований для критики. Однако в этом рассуждении упущено, что частицы постоянно взаимодействуют с вакуумом, как со своего рода физической средой, в которой они движутся. Это, так сказать, физическая сторона проблемы.

Математически несостоятельность изложенной выше картины следует из так называемой теоремы Хаага.

Теорема. *В евклидово-инвариантной теории поля, использующей представление Фока перестановочных соотношений, состояние вакуума евклидово-инвариантно.*

Это утверждение выглядит довольно тривиальным и доказывается просто (см., например, А. Вайтман (1968)). Действительно, пусть канонические переменные $\varphi(\mathbf{x}, t)$ и $\pi(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют соотношениям (2.5). Если теория евклидово-инвариантна, т. е. инвариантна относительно поворотов и сдвигов в трехмерном евклидовом пространстве, то унитарный оператор $U(\mathbf{a}, \omega)$, описывающий некоторое вращение ω и сдвиг на вектор \mathbf{a} , действует на канонические переменные $\varphi(\mathbf{x}, t)$ и $\pi(\mathbf{x}, t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{a}, \omega) \varphi(\mathbf{x}, t) U^+(\mathbf{a}, \omega) &= \varphi(\omega \mathbf{x} + \mathbf{a}, t), \\ U(\mathbf{a}, \omega) \pi(\mathbf{x}, t) U^+(\mathbf{a}, \omega) &= \pi(\omega \mathbf{x} + \mathbf{a}, t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Если Ψ_0 — состояние вакуума, то для всех \mathbf{x} оно удовлетворяет условию

$$\varphi^{(-)}(\mathbf{x}, t) \Psi_0 = 0, \quad (3.2)$$

где

$$\varphi^{(-)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left[\varphi(\mathbf{x}, t) + \frac{i}{\sqrt{m^2 - \nabla^2}} \pi(\mathbf{x}, t) \right].$$

Поэтому, по закону преобразования, состояние $U(\mathbf{a}, \omega) \Psi_0$ также удовлетворяет этому условию. Это означает в силу единственности вакуума, что

$$U(\mathbf{a}, \omega) \Psi_0 = e^{i\alpha(\mathbf{a}, \omega)} \Psi_0, \quad (3.3)$$

где $\alpha(\mathbf{a}, \omega)$ — возможная фаза преобразования. Поскольку преобразование (3.3) — это непрерывное одномерное представление евклидовой группы, то $\alpha(\mathbf{a}, \omega) = 0$. Поэтому

$$U(\mathbf{a}, \omega) \Psi_0 = \Psi_0, \quad (3.4)$$

и теорема доказана.

В квантовой теории поля в изложенной выше формулировке доказанное утверждение приводит к весьма серьезным следствиям. Если теория евклидово-инвариантна, тогда гамильтониан теории имеет вид (2.9), где

$$U(\mathbf{a}, 1) \mathcal{H}(\mathbf{x}) U^+(\mathbf{a}, 1) = \mathcal{H}(\mathbf{x} + \mathbf{a}). \quad (3.5)$$

Для любого трансляционно-инвариантного состояния Ψ выражение $(\Psi, \mathcal{H}(\mathbf{x}) \mathcal{H}(\mathbf{y}) \Psi)$ зависит только от разности $(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, так что

$$\|H\Psi\|^2 = \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} (\Psi, \mathcal{H}(\mathbf{x}) \mathcal{H}(\mathbf{y}) \Psi) = \begin{cases} 0, & \text{если } H\Psi = 0, \\ \infty, & \text{если } H\Psi \neq 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Значит, для того чтобы оператор H был хорошо определен, необходимо, чтобы он уничтожал всякое трансляционно-инвариантное состояние Ψ , на которое он действует.

Рассмотрим теперь H , выраженный через операторы в представлении Фока, и выберем в качестве Ψ состояние вакуума Ψ_0 , поскольку у нас нет иной физической интерпретации для состояния, инвариантного относительно евклидовых преобразований. Тогда мы видим, что оператором H можно подействовать на Ψ_0 , если только он уничтожает это состояние. Таким образом, состояние вакуума Ψ_0 должно быть одновременно собственным состоянием гамильтонианов H и H_0 :

$$H\Psi_0 = 0 \quad \text{и} \quad H_0\Psi_0 = 0, \quad (3.7)$$

если мы хотим, чтобы имела место предполагаемая картина включения и выключения взаимодействия.

Однако соотношения (3.7) одновременно не выполняются для всех гамильтонианов квантовой теории поля, представимых в форме

$$H = H_0 + gH_I, \quad (3.8)$$

где гамильтониан взаимодействия gH_I является функционалом от квантованного поля $\varphi_0(\mathbf{x})$. Действительно, операторы вида

$$gH_I = g \int d\mathbf{x} : \varphi_0^n(\mathbf{x}) : = \\ = \frac{g}{(2\pi)^{\frac{3}{2}(n-2)}} \int \frac{d\mathbf{k}_1}{\sqrt{2\omega_1}} \cdots \int \frac{d\mathbf{k}_n}{\sqrt{2\omega_n}} \delta(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n) \times \\ \times [a_{\mathbf{k}_1}^+ \cdots a_{\mathbf{k}_n}^+ + \dots] \quad (3.9)$$

всегда содержат слагаемые, состоящие только из операторов рождения.

Поэтому оператор

$$V(t) = e^{iHt} \cdot e^{-iH_0 t}, \quad (3.10)$$

определяющий связь между представлениями взаимодействия и Гайзенберга (2.34), на самом деле не определен на пространстве Фока, на котором он должен действовать. Таким образом, уравнения (2.33) и (2.34), определяющие представление взаимодействия, в математическом смысле не существуют. Следует подчеркнуть, что изложенная ситуация представляет собой совершенно нормальное явление в системе с бесконечным числом степеней свободы и появляется всегда, когда мы требуем, чтобы теория была евклидово-инвариантна и имела бы гамильтониан, для которого состояние вакуума не является собственным вектором.

Вторая существенная трудность сформулированной выше теории порождается так называемой ультрафиолетовой катастрофой. В наиболее простой форме эта проблема выглядит следующим образом. Пусть имеется гамильтониан взаимодействия вида

$$gH_I = \int d\mathbf{x} g(\mathbf{x}) : \varphi_0^n(\mathbf{x}) :, \quad (3.11)$$

где $n \geq 2$. Здесь мы ввели функцию включения взаимодействия $g(\mathbf{x})$, достаточно быстро убывающую при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, чтобы разрушить евклидову инвариантность теории и не иметь неприятностей, связанных с теоремой Хаага.

Рассмотрим норму вектора $gH_I \Psi_0$. Имеем

$$\|gH_I \Psi_0\|^2 = \langle 0 | gH_I gH_I | 0 \rangle = n! \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} g(\mathbf{x}) g(\mathbf{y}) F(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.12)$$

Здесь

$$F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{n!} \langle 0 | : \varphi^n(\mathbf{x}) : : \varphi^n(\mathbf{y}) : | 0 \rangle = [\Delta^{(-)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})]^n,$$

$$\Delta^{(-)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}.$$

При $\mathbf{x} \rightarrow 0$ функция $\Delta^{(-)}(\mathbf{x})$ ведет себя, как

$$\Delta^{(-)}(\mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

поэтому

$$F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2n}}\right)$$

при $(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rightarrow 0$, и интеграл (3.12) не существует.

Таким образом, оператор gH_I не существует как хорошо определенная величина на пространстве Фока. Эта проблема возникает всегда, когда мы исходим из релятивистски инвариантного локального лагранжиана, описывающего нетривиальное взаимодействие полей.

§ 4. Регуляризация гамильтониана взаимодействия

Каков выход из перечисленных выше трудностей?

Еще раз напомним, что мы хотим сохранить представление Фока перестановочных соотношений, как наиболее естественное и удобное описание системы физических невзаимодействующих частиц. Введение других так называемых странных представлений перестановочных соотношений представляет собой серьезную математическую проблему, которую мы здесь совсем не будем обсуждать.

Прежде всего следует отметить, что проблемы, связанные с теоремой Хаага и ультрафиолетовой катастрофой, как мы видели, имеют различную природу и поэтому должны решаться различными способами.

Остановимся сначала на проблеме ультрафиолетовых расходимостей. Традиционный способ, при помощи которого можно изучать ее, состоит в том, что вводится промежуточное так называемое ультрафиолетовое обрезание. Дальнейшая задача состоит в том, чтобы изменить постановку проблемы и ввести дополнительные разумные физические и математические предположения, позволяющие на окончательных ступенях вычислений перейти к пределу снятия обрезания. При этом в пределе должна получаться конечная теория, удовлетворяющая всем необходимым условиям.

Можно, например, в гамильтониане взаимодействия заменить поле $\varphi_0(\mathbf{x})$ на «сглаженное» поле $\varphi_{\Lambda}(\mathbf{x})$:

$$\varphi_0(\mathbf{x}) \Rightarrow \varphi_{\Lambda}(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}' h_{\Lambda}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi_0(\mathbf{x}') = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \tilde{h}\left(\frac{\mathbf{k}^2}{\Lambda^2}\right) [a_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^+ e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}]. \quad (4.1)$$

Здесь $h_{\Lambda}(\mathbf{x})$ — вещественная функция:

$$h_{\Lambda}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \tilde{h}\left(\frac{\mathbf{k}^2}{\Lambda^2}\right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad (4.2)$$

такая, что фурье-образ $\tilde{h}\left(\frac{k^2}{\Lambda^2}\right)$ достаточно быстро убывает при $k^2 \rightarrow \infty$. Параметр обрезания Λ введен таким образом, что

$$\tilde{h}\left(\frac{k^2}{\Lambda^2}\right) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \tilde{h}(0) = 1 \quad \text{и} \quad h_\Lambda(x - x') \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \delta(x - x').$$

Тогда функция

$$\begin{aligned} \Delta_\Lambda^{(-)}(x - x') &= \langle 0 | \varphi_\Lambda(x) \varphi_\Lambda(x') | 0 \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{dk}{2\omega_k} \left| \tilde{h}\left(\frac{k^2}{\Lambda^2}\right) \right|^2 e^{-ik(x-x')} \end{aligned} \quad (4.3)$$

ограничена при $x - x' = 0$, так как

$$\Delta_\Lambda^{(-)}(0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{dk}{2\omega_k} \left| \tilde{h}\left(\frac{k^2}{\Lambda^2}\right) \right|^2 < \infty. \quad (4.4)$$

Заметим, что введенная функция обрезания $\tilde{h}\left(\frac{k^2}{\Lambda^2}\right)$ не имеет ничего общего с релятивистски инвариантным формфактором, используемым при построении нелокальной квантовой теории поля.

Вообще говоря, существуют другие способы введения ультрафиолетового обрезания в теорию. Эти способы зависят от той или иной постановки задачи в квантовой теории поля.

Рассмотрим теперь проблему, связанную с теоремой Хаага. В этом случае также используется определенная промежуточная регуляризационная процедура.

Как говорилось ранее, мы будем интересоваться лишь переходами только между асимптотическими свободными состояниями и, следовательно, пытаться строить S -матрицу теории. При этом трудности, связанные с теоремой Хаага, формально не должны возникнуть, поскольку S -матрица определяет переходы между свободными состояниями, описываемыми представлением Фока. Естественно предположить, что гильбертовы пространства начальных \mathcal{H}_i и конечных \mathcal{H}_f состояний совпадают, т. е.

$$\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_f = \mathcal{H}.$$

Поэтому S -матрица, в принципе, существует как унитарный оператор, переводящий состояния из \mathcal{H}_i в \mathcal{H}_f .

Однако если мы ищем S -матрицу как решение квантовое уравнения Шредингера, записанного в представлении взаимодействия, то нам неизбежно приходится иметь дело с проблемой существования этого представления.

Трудности, связанные с теоремой Хаага, легко могут быть устранены, если разрушить евклидову инвариантность теории. Для этого достаточно считать, что наша система заключена в некотором ограниченном объеме, так называемом ящике, или

просто ввести функцию включения взаимодействия, т. е. сделать подстановку

$$gH_I \Rightarrow \int dx g\left(\frac{x}{L}, \frac{t}{L}\right) \mathcal{H}_I(x). \quad (4.5)$$

Здесь функция $g(x)$ достаточно быстро убывает при $|x_\mu| \rightarrow \infty$. Параметр регуляризации L имеет смысл размера «ящика», в который заключена наша система. При $L \rightarrow \infty$

$$g\left(\frac{x}{L}\right) \rightarrow g(0) = g.$$

Параметр L будет всегда выбираться столь большим, что можно будет пренебречь производными от функции включения взаимодействий. Иными словами,

$$\left| \frac{\frac{1}{L} g'\left(\frac{x}{L}\right)}{g\left(\frac{x}{L}\right)} \right| |R| \ll 1,$$

где R — любое характерное время или расстояние для нашей системы.

Таким образом, гамильтониан

$$gH_I^{(\Lambda, L)} = \int dx g\left(\frac{x}{L}, \frac{t}{L}\right) : U(\varphi_h(x)) :, \quad (4.6)$$

регуляризованный двумя параметрами Λ и L , имеющими различное физическое происхождение, является оператором, хорошо определенным на пространстве Фока.

Задача квантовой теории поля должна быть сформулирована таким образом, чтобы на соответствующем этапе существовали предельные переходы $L \rightarrow \infty$, $\Lambda \rightarrow \infty$, приводящие к разумной теории.

Рассмотрим теперь более подробно, что мы можем ожидать при снятии пространственного обрезания $L \rightarrow \infty$ в S -матрице, описывающей переходы между свободными начальными и конечными состояниями системы. Как говорилось выше, параметр L имеет смысл размера ящика, в который заключена наша система. Ее свойства не должны зависеть от размеров ящика. Поэтому описание системы должно получаться в пределе $L \rightarrow \infty$, а в разумной теории такой предел должен существовать.

Как уже упоминалось, физическая причина несостоятельности представления взаимодействия состоит в том, что частица, будучи свободной, тем не менее взаимодействует с вакуумом. Значит, необходимо разумно учесть это взаимодействие. В чем оно может проявиться?

Во-первых, энергия вакуума изменяется в результате взаимодействия. Это приводит к тому, что фаза амплитуды перехода вакуум — вакуум стремится к бесконечности как L^4 при $L \rightarrow \infty$.

Сама эта фаза физического смысла не имеет, поскольку не входит ни в один наблюдаемый эффект. Чтобы устранить ее, достаточно добавить к плотности гамильтониана взаимодействия функцию $E(g(x))$, связанную с изменением энергии вакуума.

Во-вторых, параметр m^2 в лагранжиане (2.1) на самом деле не является массой частицы. Физическая масса частицы определяется взаимодействием, так что, закрывая глаза на наличие ультрафиолетовых расходимостей, следует ожидать:

$$m_{\text{физ}}^2 = m^2 + \delta m^2(g, m^2), \quad (4.7)$$

причем $\delta m^2 = O(g^2)$ при $g \rightarrow 0$.

В-третьих, взаимодействие с вакуумом приводит к тому, что частица только часть времени проводит как «голая», т.е. описывается свободным гамильтонианом H_0 , остальное время она представляется как суперпозиция виртуальных частиц и состояний, возникающих в результате взаимодействия. Обозначим вероятность пребывания свободной физической частицы в состоянии «голой» через Z . Следует ожидать, что

$$Z = Z(g, m^2) < 1, \quad (4.8)$$

причем $Z = 1 - O(g^2)$ при $g \rightarrow 0$.

Таким образом, если мы хотим, чтобы свободный лагранжиан \mathcal{L}_0 (или гамильтониан \mathcal{H}_0) описывал физические частицы с правильной массой, а физические состояния свободных частиц были нормированы на единицу, необходимо плотность полного лагранжиана записать в форме

$$\mathcal{L}(x) = Z(g) [\partial_\mu \varphi(x) \partial_\mu \varphi(x) - m^2 \varphi^2(x)] + \delta m^2(g) \varphi^2(x) - g(x) U(\varphi(x)) - E(g(x)). \quad (4.9)$$

Посмотрим, к какому гамильтониану приводит каноническое квантование системы, описываемой лагранжианом (4.9). Канонически сопряженный импульс равен

$$\pi(x) = \frac{\delta}{\delta \dot{\varphi}(x)} \int d\mathbf{y} \mathcal{L}(\mathbf{y}, t) = Z(g(x)) \dot{\varphi}(x). \quad (4.10)$$

Условия квантования запишутся так:

$$\begin{aligned} [\varphi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{y}, t)] &= [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = 0, \\ [\varphi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

или

$$[\varphi(\mathbf{x}, t), \dot{\varphi}(\mathbf{y}, t)] = \frac{i}{Z(g)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

В случае отсутствия взаимодействия ($g = 0$) получаем обычные перестановочные соотношения (2.5). Запишем плотность

гамильтониана

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2Z} \pi^2 + \frac{Z}{2} [(\nabla \varphi)^2 + m^2 \varphi^2] - \delta m^2 \varphi^2 + gU(\varphi) + E(g) = \\ &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I(g), \end{aligned} \quad (4.12)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \frac{1}{2} [\pi^2 + (\nabla \varphi)^2 + m^2 \varphi^2], \\ \mathcal{H}_I(g) &= gU(\varphi) - \delta m^2 \varphi^2 + E(g) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{Z} - 1 \right) \pi^2 - (1 - Z) [(\nabla \varphi)^2 + m^2 \varphi^2] \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Заметим, что

$$\mathcal{H}_I(g) |_{g=0} = 0.$$

Гамильтониан взаимодействия так зависит от функции включения взаимодействия, что евклидова инвариантность нарушена и в теории отсутствуют проблемы, связанные с теоремой Хаага.

Введем теперь в гамильтониан взаимодействия ультрафиолетовое обрезание, как было сказано выше. Тогда оператор

$$gH_I^{(\Lambda, L)}(t) = \int d\mathbf{x} \mathcal{H}_I^{(\Lambda, L)}(\mathbf{x}, t; g), \quad (4.14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I^{(\Lambda, L)}(\mathbf{x}; g) &= g \left(\frac{x}{L} \right) : U(\varphi_h(x)) : - \delta m^2 \left(g \left(\frac{x}{L} \right) \right) : \varphi_h^2(x) : + \\ &+ E \left(g \left(\frac{x}{L} \right) \right) + \frac{1}{2} : \left\{ \left[\frac{1}{Z \left(g \left(\frac{x}{L} \right) \right)} - 1 \right] \pi_h^2(x) + \right. \\ &\left. + [1 - Z \left(g \left(\frac{x}{L} \right) \right)] [(\nabla \varphi_h(x))^2 + m^2 \varphi_h^2(x)] \right\} :. \end{aligned} \quad (4.15)$$

хорошо определен в пространстве Фока, и существует решение уравнения Шредингера в представлении взаимодействия:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = gH_I^{(\Lambda, L)}(t) \Psi(t). \quad (4.16)$$

Из этого уравнения легко получить формальное представление для S -матрицы теории:

$$S^{(\Lambda, L)} = T_D \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} dt gH_I^{(\Lambda, L)}(t) \right\}. \quad (4.17)$$

Здесь T_D — знак, обозначающий процедуру упорядочения операторов поля по времени — так называемое дайсоновское временное упорядочение. Разлагая (4.17) по степеням гамильтониана

взаимодействия, получим

$$S^{(\Lambda, L)} = 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} dt g H_I^{(\Lambda, L)}(t) + \\ + i^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 g H_I^{(\Lambda, L)}(t_1) g H_I^{(\Lambda, L)}(t_2) + \dots \quad (4.18)$$

Если бы в теории не было ультрафиолетовых расходимостей, то следовало бы ожидать, что функции $E(g)$, $\delta m^2(g)$ и $Z(g)$ могут быть подобраны таким образом, что для S -матрицы существовал бы предел при $L \rightarrow \infty$. Однако наличие ультрафиолетовых расходимостей сильно усложняет ситуацию.

Основной недостаток введенного ультрафиолетового обрезания состоит в том, что оно явно нарушает релятивистскую ковариантность теории. Кроме того, представление S -матрицы в форме (4.17) и (4.18) также не имеет явно релятивистски ковариантной формы. Поэтому в данном представлении устранение ультрафиолетового обрезания, восстановление релятивистской ковариантности и получение конечной ковариантной S -матрицы представляет собой довольно громоздкую и нетривиальную задачу.

Обычно представляют S -матрицу в виде так называемой ви-ковской T -экспоненты. Чтобы наиболее просто получить это представление, необходимо познакомиться с функциональными методами, связанными с переходом от T_D -произведения в (4.17) к разложению S -матрицы по нормально упорядоченным произведениям полевых операторов.

§ 5. Теорема Вика и функциональные производные

Операторы квантовой теории поля, такие как S -матрица, гайзенберговы поля и токи и т. д., задаются первоначально в виде или обычного произведения, или так называемого T -произведения функционалов от квантованных полей $\varphi(x)$ и $\pi(x)$. Переход к нормальной форме произведений операторов поля в таких функционалах полностью определяется теоремой Вика. Алгебраический характер операций, индуцируемых теоремой Вика, позволяет рассматривать S -матрицу и любые другие операторы как функционалы, в которых квантованные поля $\varphi(x)$ и $\pi(x)$ заменяются на произвольные скалярные функции. Тогда математические операции, связанные с приведением произведений операторов к нормальной форме, могут быть представлены в виде функциональных производных. В этом разделе мы приведем все необходимые формулы.

Пусть имеется набор квантованных полей $\{\varphi_j\}$ ($j=1, \dots, N$). В случае однокомпонентного скалярного поля, рассмотренного выше, можно положить $\varphi_1(x) = \varphi(x)$, $\varphi_2(x) = \pi(x)$.

Будем рассматривать операторные функционалы вида

$$T_D B[\varphi] = \sum_n \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n \sum_{I_1 \dots I_n} B_{I_1 \dots I_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \times \\ \times T_D \{\varphi_{I_1}(x_1) \cdot \dots \cdot \varphi_{I_n}(x_n)\}, \quad (5.1)$$

$$N B[\varphi] = \sum_n \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n \sum_{I_1 \dots I_n} B_{I_1 \dots I_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \times \\ \times \{\varphi_{I_1}(x_1) \cdot \dots \cdot \varphi_{I_n}(x_n)\}, \quad (5.2)$$

где $B_{I_1 \dots I_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ — некоторые коэффициентные функции. Нормально упорядоченному операторному функционалу (5.2) поставим в соответствие функционал

$$B[\varphi] = \sum_n \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n \sum_{I_1 \dots I_n} B_{I_1 \dots I_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \times \\ \times \varphi_{I_1}(x_1) \cdot \dots \cdot \varphi_{I_n}(x_n). \quad (5.3)$$

Здесь $\varphi_j(x)$ — уже не операторы, а произвольные скалярные функции. Для простоты мы не будем вводить для них новых обозначений.

Переход от T_D -произведения в (5.1) к нормальному произведению дается формулой

$$T_D B[\varphi] = N E[\varphi]. \quad (5.4)$$

Здесь

$$E[\varphi] = T_D B[\varphi], \quad (5.5)$$

где

$$T_D = \exp \left\{ \frac{1}{2} \iint dx_1 dx_2 \sum_{i, j=1}^N \Delta_{ij}^c(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta \varphi_i(x_1) \delta \varphi_j(x_2)} \right\}, \quad (5.6)$$

а

$$\Delta_{ij}^c(x_1 - x_2) = \overline{\varphi_i(x_1) \varphi_j(x_2)} = \langle 0 | T_D (\varphi_i(x_1) \varphi_j(x_2)) | 0 \rangle \quad (5.7)$$

— так называемая причинная функция Грина.

Произведение двух нормально упорядоченных функционалов равно

$$N B[\varphi] \cdot N C[\varphi] = N D[\varphi], \quad (5.8)$$

где

$$D[\varphi] = B[\varphi] \otimes C[\varphi] = \\ = \exp \left\{ \iint dx_1 dx_2 \sum_{i, j=1}^N \Delta_{ij}^{(-)}(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta \varphi'_i(x_1) \delta \varphi''_j(x_2)} \right\} \times \\ \times B[\varphi'] C[\varphi''] \Big|_{\varphi'_j(x) = \varphi''_j(x) = \varphi_j(x)} \quad (5.9)$$

Здесь

$$\Delta_{if}^{(-)}(x_1 - x_2) = \varphi_i(x_1) \varphi_f(x_2) = \langle 0 | \varphi_i(x_1) \varphi_f(x_2) | 0 \rangle. \quad (5.10)$$

Вывод этих формул дан С. Хори (1952) и Дж. Андерсоном (1954).

Применим функциональный метод к рассматриваемой нами S-матрице (4.17). В данном случае имеем

$$T_D = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dx_1 \int dx_2 \left[\Delta^c(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta\varphi(x_1) \delta\varphi(x_2)} + 2\Delta_{\pi}^c(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta\varphi(x_1) \delta\pi(x_2)} + \Delta_{\pi\pi}^c(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta\pi(x_1) \delta\pi(x_2)} \right] \right\}. \quad (5.11)$$

Сначала проведем все выкладки, не учитывая ультрафиолетового обрезания. Тогда для причинных функций, входящих в (5.11), получим

$$\begin{aligned} \Delta^c(x_1 - x_2) &= \langle 0 | T_D(\varphi(x_1) \varphi(x_2)) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dk e^{ik(x_1 - x_2)}}{m^2 - k^2 - i\epsilon}, \\ \Delta_{\pi}^c(x_1 - x_2) &= \langle 0 | T_D(\varphi(x_1) \pi(x_2)) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dk i k_0 e^{ik(x_1 - x_2)}}{m^2 - k^2 - i\epsilon} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t_2} \Delta^c(x_1 - x_2), \\ \Delta_{\pi\pi}^c(x_1 - x_2) &= \langle 0 | T_D(\pi(x_1) \pi(x_2)) | 0 \rangle = \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{dk}{2\omega_k} \omega_k^2 e^{-i\omega_k |t_1 - t_2| + ik(x_1 - x_2)} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \Delta^c(x_1 - x_2) - i \delta(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Наличие δ -функции в причинной функции $\Delta_{\pi\pi}^c$ позволяет в хронологическом операторе T_D (5.11) выделить член

$$\exp \left[-\frac{i}{2} \int dx \frac{\delta^2}{\delta\pi^2(x)} \right].$$

Гамильтониан взаимодействия (4.15) зависит от канонического импульса квадратичным образом, поэтому функционал

$$I[A, \pi] = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int dx \frac{\delta^2}{\delta\pi^2(x)} \right\} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int dx A(x) \pi^2(x) \right\}, \quad (5.13)$$

где

$$A(x) = \left[\frac{1}{Z(g(x))} - 1 \right] > 0,$$

можно вычислить.

Однако в представлении (5.13) появляется новая трудность, отсутствовавшая ранее, — это наличие второй вариационной

производной по полю $\pi(x)$ в одной точке x . Дело в том, что обычное определение вариационной производной

$$\delta F[\pi] = F[\pi + \delta\pi] - F[\pi] = \int dx \frac{\delta F[\pi]}{\delta\pi(x)} \delta\pi(x)$$

эквивалентно определению

$$\frac{\delta}{\delta\pi(x)} \pi(x') = \delta(x - x'), \quad (5.14)$$

которое справедливо лишь для первых вариационных производных, например,

$$\frac{\delta}{\delta\pi(x)} \int dy f(y) \pi^n(y) = n \int dy f(y) \pi^{n-1}(y) \delta(y - x) = n f(x) \pi^{n-1}(x).$$

Формальное вычисление второй вариационной производной дает, если использовать (5.14):

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{\delta\pi^2(x)} \int dy f(y) \pi^n(y) &= \frac{\delta}{\delta\pi(x)} \{ n f(x) \pi^{n-1}(x) \} = \\ &= n(n-1) f(x) \pi^{n-2}(x) \delta(0). \end{aligned}$$

Полученное выражение, если не бессмысленно, то, по крайней мере, не определено, поскольку δ -функция в теории обобщенных функций определяется лишь как линейный функционал на пространствах непрерывных функций, и поэтому вопрос, чему равно значение δ -функции в точке $x=0$, лишен математического смысла.

Для того чтобы найти функционал $I[A, \pi]$ в (5.13), необходимо как-то определить действие второй вариационной производной.

Поступим стандартным образом. Разобьем все четырехмерное пространство на малые ячейки $\{U_j\}$, 4-объем которых равен малому числу v , и занумеруем их индексом j . Все интегралы в (5.13) представим в виде интегральных сумм:

$$\int dx A(x) \pi^2(x) \Rightarrow \sum_j v A_j \pi_j^2, \quad \int dx \frac{\delta^2}{\delta\pi^2(x)} \Rightarrow \sum_j v \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial\pi_j} \right)^2. \quad (5.15)$$

Здесь

$$A_j = \frac{1}{v} \int_{U_j} dx A(x), \quad \pi_j = \frac{1}{v} \int_{U_j} dx \pi(x).$$

Вариационная производная заменяется согласно правилу: $\frac{\delta}{\delta\pi(x)} \Rightarrow \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial\pi_j}$, а δ -функция заменяется на

$$\delta(x - x') \Rightarrow \frac{1}{v} \delta_{ij},$$

если $x \in U_i$ и $x' \in U_j$.

Тогда (5.13) запишется следующим образом:

$$I[A, \pi] = \prod_j \exp \left\{ -\frac{i}{2} \frac{1}{v} \frac{\partial^2}{\partial \pi_j^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{i}{2} v A_j \pi_j^2 \right\}.$$

После несложных преобразований, связанных с использованием представления

$$\exp \left\{ -\frac{i}{2} v A_j \pi_j^2 \right\} = \frac{1}{\sqrt{-i\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du \exp \left\{ i \left(u^2 - 2 \sqrt{\frac{v A_j}{2}} \pi_j u \right) \right\},$$

получим

$$I[A, \pi] = \prod_j \exp \left\{ \frac{1}{2} \ln Z_j - \frac{i}{2} v (1 - Z_j) \pi_j^2 \right\},$$

где $Z_j = (1 + A_j)^{-1}$. Устремляя $v \rightarrow 0$, получаем

$$I[A, \pi] = \exp \left\{ \frac{\delta(0)}{2} \int dx \ln Z(g(x)) \right\} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int dx \pi^2(x) [1 - Z(g(x))] \right\}. \quad (5.16)$$

Здесь условно записано

$$\delta(0) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v}.$$

Возвращаясь к исходной формуле (4.17), заметим, что соотношения (5.11), (5.12) позволяют считать, что

$$\pi(x) = \frac{\partial}{\partial x_0} \varphi(x) = \dot{\varphi}(x),$$

так что окончательно имеем

$$S = T \exp \left\{ i \int dx \mathcal{L}_I(x) + \frac{\delta(0)}{2} \int dx \ln Z(g(x)) \right\}, \quad (5.17)$$

где

$$T = \exp \left\{ \frac{1}{2} \iint dx_1 dx_2 \Delta^c(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta \varphi(x_1) \delta \varphi(x_2)} \right\}, \quad (5.18)$$

$$\mathcal{L}_I(x) = -g(x) U(\varphi(x)) + \delta m^2(g(x)) \varphi^2(x) - \frac{1}{2} [1 - Z(g(x))] [\partial_\mu \varphi(x) \partial_\mu \varphi(x) - m^2 \varphi^2(x)] - E(g(x)). \quad (5.19)$$

Формула (5.17) называется представлением S -матрицы в форме Вика, а операция T -произведения в (5.17) и (5.18) — виковским T -произведением. В следующем параграфе мы рассмотрим способы дальнейшего исследования S -матрицы при помощи этого представления.

Сейчас же мы хотим более детально обсудить проблемы, связанные с наличием величины $\delta(0)$ в представлении (5.17), что

является дополнительной трудностью теории, отсутствовавшей в исходном представлении (4.17). При раскрытии виковского T -произведения член с $\delta(0)$ компенсируется множителем

$$J = \left\langle 0 \left| T \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int dx [1 - Z(g(x))] [\partial_\mu \varphi(x) \partial_\mu \varphi(x) - m^2 \varphi^2(x)] \right\} \right| 0 \right\rangle = \exp \left\{ \frac{1}{2} \iint dx_1 dx_2 \Delta^c(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta \varphi(x_1) \delta \varphi(x_2)} \right\} \times \exp \left\{ \frac{i}{2} \int dx [1 - Z(g(x))] \varphi(x) (m^2 - \square) \varphi(x) \right\} \Big|_{\varphi(x)=0}. \quad (5.20)$$

Вычисление можно провести, снова разбивая пространство на ячейки. Получим

$$\Delta^c(x_1 - x_2) \Rightarrow \Delta_{ij}, \quad i(m^2 - \square) \delta(x_1 - x_2) \Rightarrow \frac{1}{v^2} \Delta_{ij}^{-1}, \quad \sum_j \Delta_{ij} \Delta_{jk}^{-1} = \delta_{ik}.$$

Интегралы в (5.20) превратятся в интегральные суммы и будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{1}{2} \iint dx_1 dx_2 \Delta^c(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta \varphi(x_1) \delta \varphi(x_2)} \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{ij} \Delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j},$$

$$\frac{1}{2} \int dx [1 - Z(g(x))] \varphi(x) i(m^2 - \square) \varphi(x) \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{ij} \varphi_i \sqrt{(1 - Z_i)(1 - Z_j)} \Delta_{ij}^{-1} \varphi_j.$$

Так как $Z(g(x))$ практически не зависит от x , то принимается

$$\sum_j \Delta_{ij} \sqrt{1 - Z_j} \Delta_{jk}^{-1} \sqrt{1 - Z_k} = (1 - Z_i) \delta_{ik}$$

с точностью до членов $O\left(\frac{1}{L}\right)$, как было сказано выше.

После простых преобразований получим, снова устремляя $v \rightarrow 0$,

$$J = \exp \left\{ -\frac{\delta(0)}{2} \int dx \ln Z(g(x)) \right\}.$$

Таким образом, член с $\delta(0)$ действительно исчезает.

При вычислении J можно поступить иначе. Разлагая вторую экспоненту в (5.20) в ряд, после некоторых вычислений, которые мы здесь опустим, можно получить

$$J = \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sigma_n \right\}, \quad (5.21)$$

где

$$\sigma_n = \int dx_1 \dots \int dx_n B(x_1, x_2) B(x_2, x_3) \dots B(x_n, x_1), \quad (5.22)$$

$$B(x, x') = [1 - Z(g(x))] \delta(x - x').$$

Здесь мы снова использовали тот факт, что функция $g(x) \Rightarrow g(x/L)$ медленно меняется. Подставляя (5.22) в (5.21), получим

$$\sigma_n = \int dx_1 \int dx_n [\delta(x_1 - x_n)]^2 [1 - Z(g(x_1))]^n.$$

Если мы положим

$$[\delta(x)]^2 = \delta(0) \delta(x), \quad (5.23)$$

то тогда

$$\sigma_n = \delta(0) \int dx [1 - Z(g(x))]^n,$$

и окончательно

$$\begin{aligned} J &= \exp \left\{ \frac{\delta(0)}{2} \int dx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [1 - Z(g(x))]^n \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{\delta(0)}{2} \int dx \ln Z(g(x)) \right\}. \end{aligned}$$

Этими двумя способами вычислений мы хотим обратить внимание на то, что математически бессмысленные слагаемые с $\delta(0)$ сокращаются только в том случае, если все выкладки с бесконечными выражениями должным образом согласованы.

В данном случае необходимо, чтобы определение второй вариационной производной $\frac{\delta^2}{\delta\pi^2(x)}$ и определение квадрата δ -функции $[\delta(x)]^2$ были совместны, т.е. должны быть выполнены (в определенном смысле) равенства

$$\frac{\delta^2}{\delta\pi^2(x)} \int dy f(y) \pi^2(y) = 2 \int dy [\delta(x-y)]^2 f(y) = 2f(x) \frac{\delta\pi(x)}{\delta\pi(x)},$$

так что величины $\delta(0)$, появляющиеся в (5.14) при $x = x'$ и в (5.23), должны быть одинаково определены.

Заметим, что если δ -функция представляется в виде несобственного предельного перехода, то это представление должно удовлетворять соотношению (5.23), т.е. если

$$\delta(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \delta_\lambda(x),$$

то при $\lambda \rightarrow 0$ должно выполняться соотношение

$$\int dx [\delta_\lambda(x)]^2 f(x) = \delta_\lambda(0) \int dx \delta(x) f(x) + O(\lambda).$$

Этому соотношению удовлетворяет представление

$$\delta(x) \Rightarrow \delta_v(x) = \begin{cases} \frac{1}{v}, & x \in U_0, \\ 0, & x \notin U_0, \end{cases}$$

где $\int_{U_0} dx = v$. Представление вида

$$\delta(x) \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{\pi\lambda^2}} \right)^4 \exp \left\{ -\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_0^2}{\lambda^2} \right\} = \delta_\lambda(x)$$

соотношению (5.23) уже не удовлетворяет, так как

$$\int dx [\delta_\lambda(x)]^2 f(x) = \frac{\delta(0)}{4} \int dx \delta(x) f(x) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Здесь

$$\delta(0) \Rightarrow \delta_\lambda(0) = 1/\pi^2\lambda^4.$$

Проведенные вычисления показывают, что сингулярный характер перестановочных соотношений и функций Грина в квантовой теории поля требует особой осторожности при использовании различных представлений и преобразований квантовоплевых объектов.

§ 6. S-матрица и виково T-произведение

Целью функциональных преобразований было получение представления S-матрицы в форме виковской T-экспоненты:

$$S^{(L)} = T \exp \left\{ i \int dx \mathcal{L}_I^{(L)}(x) \right\}, \quad (6.1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^{(L)}(x) &= -g\left(\frac{x}{L}\right) U(\varphi(x)) + \delta m^2 \left(g\left(\frac{x}{L}\right)\right) \varphi^2(x) - \\ &- \frac{1}{2} \left[1 - Z\left(g\left(\frac{x}{L}\right)\right) \right] [\partial_\mu \varphi(x) \partial_\mu \varphi(x) - m^2 \varphi^2(x)] - E\left(g\left(\frac{x}{L}\right)\right), \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$T = \exp \left\{ \frac{1}{2} \iint dx_1 dx_2 \Delta^c(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta\varphi(x_1) \delta\varphi(x_2)} \right\}. \quad (6.3)$$

Здесь мы опустили члены с $\delta(0)$, так как нам известен механизм их возникновения и уничтожения.

Преимущество полученного представления (6.1) состоит в том, что S-матрица записана в явно релятивистски ковариантной форме, поскольку зависимость от канонически сопряженного импульса $\pi(x)$ выпала.

Недостаток представления состоит в том, что такие свойства S-матрицы, как унитарность и причинность, необходимо специально доказывать, поскольку само представление их не гарантирует. Впрочем, этот недостаток не является столь уж большим по сравнению с тем, что наличие ультрафиолетовых расходимостей делает математически бессмысленным полученное представление (6.1).

Тем не менее именно представление S-матрицы (6.1) в форме виковской T-экспоненты оказалось той исходной точкой,

начиная с которой удалось наиболее последовательно решить проблему ультрафиолетовых расходимостей в перенормируемых теориях (см., например, книгу Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова (1973)).

Разложим S -матрицу в представлении (6.1) в формальный ряд по степеням лагранжиана взаимодействия. Получим

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n S_n(x_1, \dots, x_n), \quad (6.4)$$

где

$$\begin{aligned} S_n(x_1, \dots, x_n) &= T(\mathcal{L}_I(x_1) \cdot \dots \cdot \mathcal{L}_I(x_n)) = \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \iint dx'_1 dx'_2 \Delta^c(x'_1 - x'_2) \frac{\delta^2}{\delta\varphi(x'_1) \delta\varphi(x'_2)} \right\} \times \\ &\quad \times \mathcal{L}_I(x_1) \cdot \dots \cdot \mathcal{L}_I(x_n). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Если в квантованное поле $\varphi(x)$, входящее в $\mathcal{L}_I(x)$, не введено ультрафиолетовое обрезание, например, как это было сделано в (4.14), то все члены разложения S -матрицы, начиная со второго, содержат ультрафиолетовые расходимости. Проблема устранения этих расходимостей составляет основную задачу теории.

Как проводится изучение ряда теории возмущений? Каждому члену ряда $S_n(x_1, \dots, x_n)$ можно поставить в соответствие совокупность связанных и несвязанных графов. Такое соответствие диктуется алгебраическим характером теоремы Вика, при помощи которой получено представление (6.5). Подставляя сюда $\mathcal{L}_I(x)$ в форме (6.2) и проводя вариационное дифференцирование, получим сумму слагаемых, которым можно поставить в соответствие графы, устроенные следующим образом. Каждый граф имеет n вершин, соответствующих точкам (x_1, \dots, x_n) . Каждой функции $\Delta^c(x_i - x_j)$ соответствует ребро графа, соединяющее вершины x_i и x_j . Полю $\varphi(x_j)$ соответствует линия графа, уходящая из вершины x_j в бесконечность. В каждую вершину графа сходится число линий, соответствующих степеням поля $\varphi(x)$ в лагранжиане взаимодействия (6.2). Такие графы называются диаграммами Фейнмана.

Таким образом, алгебраический характер теоремы Вика, обеспечивающий переход к представлению S -матрицы в виде нормально упорядоченных операторов поля, позволяет провести первоначальную классификацию членов ряда теории возмущений по графам, или диаграммам Фейнмана.

Существенно, что такая классификация не зависит от того, имеются или отсутствуют ультрафиолетовые расходимости в ряду теории возмущений.

Интегралы, соответствующие различным диаграммам Фейнмана, или конечны, или содержат ультрафиолетовые расходи-

мости. В соответствии с этим проводится подробная классификация всех диаграмм и из всей их совокупности выделяются такие, для которых соответствующие интегралы расходятся. При этом говорят, что S -матрица суперперенормируема, если в ряду теории возмущений имеется только конечное число расходящихся диаграмм, перенормируема, если имеется конечное число типов расходящихся диаграмм, и неперенормируема, если число типов расходящихся диаграмм бесконечно.

Чтобы придать математический смысл расходящимся интегралам, вводится определенная регуляризационная процедура, зависящая от некоторого параметра регуляризации Λ , которая делает конечными все матричные элементы ряда возмущений. При снятии регуляризации (обычно при стремлении Λ к бесконечности) возникают бессмысленные расходящиеся выражения. Для компенсации таких выражений в лагранжиан взаимодействия вводят некоторое число контрчленов, зависящих от Λ как от параметра. Операторная структура контрчленов и их явная зависимость от Λ подбираются таким образом, чтобы полностью компенсировать все расходящиеся в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ выражения, возникающие при вычислении амплитуд. Символически изложенная процедура может быть записана в форме

$$S = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} T_{\Lambda} \exp \left\{ i \int dx \mathcal{L}_I(x, \Lambda) \right\}. \quad (6.6)$$

Здесь T_{Λ} обозначает способ построения ряда теории возмущений, т.е. построение диаграмм Фейнмана при помощи причинных функций $\Delta^c(x_i - x_j)$ по алгебраическим правилам Вика раскрытия хронологического произведения и вычисление интегралов, регуляризованных некоторым заданным образом. $\mathcal{L}_I(x, \Lambda)$ обозначает лагранжиан взаимодействия с нужным числом контрчленов, зависящих от Λ .

В силу самого определения суперперенормируемых и перенормируемых теорий следует ожидать, что в этих теориях число операторных структур при необходимых контрчленах также конечно. Это позволяет связать процедуру устранения ультрафиолетовых расходимостей с бесконечной перенормировкой конечного числа физических постоянных (массы, заряда и других констант связи).

В случае неперенормируемых теорий, поскольку число типов расходящихся диаграмм бесконечно, практически невозможно дать алгоритм построения всех необходимых контрчленов. В теории возникает функциональный произвол, который фактически не поддается контролю. Поэтому неперенормируемые теории считаются, вообще говоря, неприемлемыми, хотя, например, одно из основных взаимодействий элементарных частиц — слабое — описывается неперенормируемым лагранжианом.

Таким образом, идея перенормируемости позволила последовательно устранить ультрафиолетовые расходимости и

построить S -матрицу, конечную в каждом порядке теории возмущений и зависящую от конечного числа физических констант.

В этом состоит несомненный успех теории. Возникновение и проведение в жизнь этой идеи связано с именами С. Томонага (1946), Ю. Швингера (1948), Р. Фейнмана (1949), Ф. Дайсона (1949), а окончательное завершение это направление получили в работах Н. Н. Боголюбова, Б. В. Медведева, М. К. Поливанова и Д. В. Широкова (см. монографию Н. Н. Боголюбова и Д. В. Широкова (1973)).

Остановимся на основных идеях подхода Боголюбова и Широкова (1973). Прежде всего формулируются основные требования, которым должна удовлетворять S -матрица. Основные из этих аксиом следующие:

(1) *гильбертово пространство состояний, полнота и спектральность* (рассматриваются состояния только с положительной энергией);

(2) *релятивистская ковариантность*;

(3) *унитарность S -матрицы*;

(4) *причинность S -матрицы*.

Ниже, в гл. III мы подробно обсудим эти аксиомы.

Для того чтобы связать S -матрицу с лагранжианом взаимодействия, возвратимся к разложению S -матрицы по теории возмущений (6.4). Можно заметить, что S -матрица является хорошим оператором в пространстве Фока только с точностью до членов первого порядка по константе связи g . Все остальные члены разложения, начиная со второго, нуждаются в доопределении. Поэтому формулируется принцип соответствия, согласно которому при бесконечно малых константах связи S -матрица должна иметь вид

$$S = 1 + i \int dx \mathcal{L}_I(x). \quad (6.7)$$

Так, S -матрица связывается с лагранжианом взаимодействия. Дальнейшая задача состоит в том, чтобы построить весь ряд теории возмущений так, чтобы S -матрица удовлетворяла всем сформулированным выше аксиомам.

Технический прием основан на наблюдении, что в разложении S -матрицы (6.4) T -произведения лагранжианов взаимодействия (6.5) не определены при совпадающих временах $x_{10} = \dots = x_{n0}$. Этой свободой можно воспользоваться и добавить к (6.5) так называемый квазилокальный оператор вида

$$Z(x_1, \dots, x_n) = \sum_I Z_I \left(\dots, \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \dots \right) \delta(x_1 - x_2) \dots \delta(x - x_n), \quad (6.8)$$

отличный от нуля только в точке $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Коэффициенты в квазилокальном операторе подбираются таким

образом, чтобы матричные элементы оператора вида

$$\text{reg } S_n(x_1, \dots, x_n) = T(\mathcal{L}_I(x_1) \dots \mathcal{L}_I(x_n)) + Z(x_1, \dots, x_n) \quad (6.9)$$

уже не содержали ультрафиолетовых расходимостей.

Показано, что добавление квазилокальных операторов в (6.9) эквивалентно введению в лагранжиан взаимодействия квазилокальных контрчленов, соответствующим образом связанных с (6.8).

Такое построение требует введения дополнительной аксиомы, определяющей характер обобщенных функций, каковыми являются матричные элементы оператора (6.9):

(5) *аксиома интегрируемости* (матричные элементы оператора (6.9) должны быть интегрируемы на некотором пространстве достаточно гладких основных функций).

Изложенный подход позволяет строить конечную S -матрицу, минуя противоречивый путь решения квантовополевого уравнения Шредингера.

Что же, тем не менее, является неудовлетворительным при таком построении S -матрицы?

Во-первых, нефизический параметр регуляризации Λ фигурирует как в определении регуляризационной процедуры T_Λ , так и в задании лагранжиана взаимодействия $\mathcal{L}_I(x, \Lambda)$. Это делает физически бессмысленным лагранжиан взаимодействия. Во-вторых, способ выбора регуляризационной процедуры достаточно произволен и стоит как бы в стороне от идей и постулатов квантования. В-третьих, остается большой класс перенормируемых взаимодействий, для которых неизвестно, как строить конечную S -матрицу. И, наконец, все же остается чувство неудовлетворенности, поскольку ряд чисто физических констант (масса, заряд и т. д.) принципиально не поддаются теоретическому объяснению.

По образному выражению Р. Фейнмана, сказанному в его Нобелевской лекции (см. Р. Фейнман (1968)), «теория перенормировки — это просто один из способов заметить под ковер трудности электродинамики, связанные с расходимостью», а не кардинальное решение проблемы построения конечной S -матрицы в теории взаимодействующих квантованных полей.

ГЛАВА II

ЛОКАЛЬНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Но дело не в доктрине и ее положениях, а в тех приемах, которые употреблялись для ее осуществления и насчет которых мы с самого начала предостерегали тех, кому ведать о сем надлежит.

М. Е. Спалтыков-Щедрин. Сказки.

§ 1. Введение

Среди основных постулатов квантовой теории поля существенное место занимает предположение о характере обобщенных функций, каковыми являются коэффициентные функции в разложении S -матрицы по нормальным произведениям операторов поля или функции Вайтмана в его аксиоматическом подходе (см., например, книги Р. Стритера, А. Вайтмана (1966) и Н. Н. Боголюбова, А. А. Логунова, И. Т. Тодорова (1969)).

Наиболее тонким вопросом является выбор пространства основных функций. Обычно в математической физике исследование некоторой задачи, сформулированной в виде дифференциального или интегрального уравнения, естественно диктует выбор класса функций, в рамках которого гарантируется существование решения поставленной задачи, его единственность и непрерывная зависимость от начальных и краевых условий.

В квантовой теории поля такого однозначного выбора сделать нельзя, поскольку полевое уравнение Шредингера, по существу, математически не определено, как говорилось выше, а в формальном разложении S -матрицы по теории возмущений присутствуют ультрафиолетовые расходимости. Это приводит фактически к функциональному произволу при задании операции T -произведения в определении S -матрицы:

$$S = T \exp \left\{ i \int dx \mathcal{L}_I(x) \right\}.$$

Такое положение, по существу, допускает большую свободу в выборе пространства обобщенных функций, которому должны принадлежать коэффициентные функции S -матрицы. Попытки очертить круг возможных решений этой проблемы неизбежно

требуют изучения пространств основных и обобщенных функций, на которых может быть построена разумная теория.

Долгое время считалось очевидным и принималось практически без обсуждения, что квантовая теория поля должна быть построена на пространстве обобщенных функций умеренного роста. Существенный сдвиг в понимании физической роли математического аппарата квантовой теории поля был сделан Н. Н. Мейманом (1964) и А. Джаффе (1966), которые впервые обратили внимание на то, что выбор пространства основных функций должен быть сделан согласно требованию микропричинности и локальности.

Если же мы чисто постулативно ограничиваем себя определенным классом основных функций, то тем самым предопределяем характер возможных причинных связей в теории. Например, теорема о локальной коммутативности в аксиоматической теории Вайтмана доказывает невозможность построения нелокальной релятивистски инвариантной теории (см., например, Р. Стритер и А. Вайтман (1966)). Однако доказательство опирается на предположение о том, что теория формулируется на пространстве обобщенных функций умеренного роста, среди которых нет нужных релятивистски инвариантных нелокальных обобщенных функций. Так, чисто математический постулат приводит к жестким физическим следствиям.

Таким образом, выбор пространства основных функций, на котором строится теория, связывается с понятием о локальном характере взаимодействия квантованных полей. Для изучения локальных свойств полевых операторов необходимо знание классов локальных и нелокальных обобщенных функций и, следовательно, необходимо развитие соответствующего математического аппарата.

С математической точки зрения понятие локальности связано с возможностью дать определение носителя линейного функционала, заданного на некотором пространстве основных функций. В свою очередь, понятие носителя функционала связано с наличием в пространстве основных функций подпространств таких функций, которые могли бы служить инструментом, позволяющим исследовать пространственно-временные свойства функционалов, встречающихся в квантовой теории поля. Обычно в качестве таких функций выбираются функции из пространства D — пространства бесконечно дифференцируемых функций с ограниченным носителем. С их помощью изучаются пространственно-временные свойства, например, коммутатора гайзенберговских полей $\varphi(x)$:

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = ? \quad (1.1)$$

или причинные свойства S -матрицы в форме Боголюбова

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \left(\frac{\delta S}{\delta\varphi(y)} S^+ \right) = ? \quad (1.2)$$

Требование строгой локальности по А. Джаффе (1966) прямо сформулировано таким образом, чтобы пространство основных функций всегда содержало функции с ограниченным носителем.

Развитие нелокальной квантовой теории поля и теории с неполиномиальными лагранжианами взаимодействия потребовало привлечения пространств аналитических функций, среди которых отсутствуют функции с ограниченным носителем. Однако изучение причинных и локальных свойств теории требует создания методов исследования пространственно-временных характеристик операторнозначных обобщенных функций типа (1.1) или (1.2) в случае, когда они представляют собой аналитические функционалы, т. е. определены лишь на пространствах аналитических функций.

Трудности, которые возникают при исследовании локальных свойств аналитических функционалов, используемых в квантовой теории поля, двоякого рода. Во-первых, математическая проблема состоит в том, что, вообще говоря, носитель аналитического функционала не может быть определен однозначно. Во-вторых, физическая проблема состоит в том, что носитель обобщенной функции, если даже и задан однозначно, лежит в комплексном пространстве \mathbb{C}^4 , в то время как нас интересуют пространственно-временные свойства в вещественном пространстве \mathbb{R}^4 .

Исследованию этих проблем и будет посвящена данная глава. На все поставленные вопросы, связанные с определением локальных и нелокальных обобщенных функций и соответствующих пространств основных функций, могут быть получены ответы при изучении пространственно-временных свойств обобщенных функций вида

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} \square^n \delta^{(4)}(x), \quad (1.3)$$

являющихся обобщением хорошо известной локальной δ -функции. Здесь c_n — некоторые, вообще говоря, комплексные числовые коэффициенты.

Мы говорим, что обобщенная функция (1.3) задана на некотором пространстве основных функций \mathfrak{A} , если для любой $f(x) \in \mathfrak{A}$ определен функционал

$$(K, f) = \int dx K(x) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} \square^n f(x) \Big|_{x=0} < \infty, \quad (1.4)$$

т. е. полученный ряд абсолютно сходится.

Переходя в (1.4) к импульсному пространству, получим

$$(K, f) = \int dp \tilde{K}(p^2) \tilde{f}(p) < \infty. \quad (1.5)$$

Здесь

$$\tilde{K}(p^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} (p^2)^n \quad (1.6)$$

и $\tilde{f}(p)$ — фурье-образ функции $f(x)$. Другими словами, обобщенная функция (1.3) задана на \mathfrak{A} , если ряд (1.6) определяет функцию $\tilde{K}(p^2)$ для всех p^2 и интеграл (1.5) сходится для любой $f(x) \in \mathfrak{A}$. Оба условия (1.4) и (1.5) эквивалентны.

Настоящая глава будет посвящена изучению пространственно-временных свойств обобщенных функций (1.3) для различных последовательностей коэффициентов $\{c_n\}$. Мы получим уже известные и новые пространства основных функций, которые могут быть использованы при построении S -матрицы в квантовой теории поля.

Будем различать случаи:

$$(I) \quad c_n = 0, \quad n > n_0 \geq 0.$$

$$(II) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |c_n|^{1/2n} < \infty.$$

$$(III) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = 0.$$

$$(IV) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = l^2 < \infty.$$

$$(V) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|^{1/n}}{n^\varepsilon} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$$(VI) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|^{1/n}}{n^a} = A < \infty \quad (0 < a < 2).$$

В основу изложения этой главы положены работы автора (1968а, б). Частично эти вопросы обсуждались В. Я. Файнбергом (1967).

§ 2. Пространства основных функций

В этом параграфе мы дадим определение различных пространств функций, которые будут нами использоваться в дальнейшем, и приведем ряд определений и результатов, касающихся теории целых аналитических функций.

Через \mathbb{R}^{4n} и \mathbb{C}^{4n} будем обозначать вещественные и комплексные пространства соответственно. Точки пространства \mathbb{R}^{4n} обозначим через $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_j является 4-вектором с компонентами

$$x_j = (x_{j0}, \mathbf{x}_j) = (x_{j0}, x_{j1}, x_{j2}, x_{j3});$$

соответственно точки пространства \mathbb{C}^{4n} будем обозначать через $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, где $z_j = x_j + iy_j$, x_j и y_j являются 4-векторами.

Если $x \in \mathbb{R}^{4n}$ и $z \in \mathbb{C}^{4n}$, то

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2}, \\ \|x_j\| &= \sqrt{x_{j0}^2 + x_j^2} = \sqrt{x_{j0}^2 + x_{j1}^2 + x_{j2}^2 + x_{j3}^2}, \\ \|z\| &= \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}.\end{aligned}$$

Через G, Ω, Γ и т. д. будем обозначать открытые множества в \mathbb{R}^{4n} , и если \mathbb{R}^{4n} вложено в \mathbb{C}^{4n} , то через $\tilde{G}, \tilde{\Omega}, \tilde{\Gamma}$ — открытые множества в \mathbb{C}^{4n} .

Для обозначения различных пространств функций будем использовать следующие символы:

\mathfrak{A} — некоторое произвольное пространство функций;

\mathfrak{A}' — пространство, сопряженное \mathfrak{A} , т. е. пространство линейных функционалов, заданных на \mathfrak{A} ;

$C = C(\mathbb{R}^{4n})$ — класс всех непрерывных функций, заданных на \mathbb{R}^{4n} ;

$C(q) = C(q, \mathbb{R}^{4n})$ — пространство функций $f(x_1, \dots, x_n)$, определенных в \mathbb{R}^{4n} , q раз дифференцируемых и непрерывных со всеми своими частными производными до q -го порядка включительно;

$C(q, r) = C(q, r, \mathbb{R}^{4n})$ — пространство функций из $C(q)$, для которых ограничены все произведения

$$\left| x_{1\alpha_1} \dots x_{s\alpha_s} \frac{\partial^p f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_{1\beta_1} \dots \partial x_{p\beta_p}} \right| < \infty$$

($s = 0, 1, \dots, r$; $p = 0, 1, \dots, q$; $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$);

$L_p = L_p(\mathbb{R}^{4n})$ — пространство функций, для которых

$$\int dx_1 \dots \int dx_n |f(x_1, \dots, x_n)|^p < \infty;$$

$S = S(\mathbb{R}^{4n})$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций, которые убывают вместе со всеми своими частными производными быстрее любого полинома, т. е.

$$S = S(\mathbb{R}^{4n}) = C(\infty, \infty, \mathbb{R}^{4n});$$

$D = D(\mathbb{R}^{4n})$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в \mathbb{R}^{4n} ;

$D(G)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций, носители которых содержатся в области $G \subset \mathbb{R}^{4n}$;

C_A — класс квазианалитических функций, т. е. если $f(x) \in C_A$ и $\left(\frac{\partial}{\partial x_{j\alpha}}\right)^n f(x) \Big|_{x_{j\alpha} = x_{j\alpha}^0} = 0$ в некоторой точке $x_{j\alpha} = x_{j\alpha}^0$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$, то $f(x) \equiv 0$;

$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(\mathbb{C}^{4n})$ — пространство всех целых аналитических функций;

$\mathfrak{Z}(\tilde{\Omega})$ и $\mathfrak{Z}(\tilde{\Omega})$ — пространство функций, аналитических соответственно на $\tilde{\Omega}$ и $\tilde{\Omega}$;

$\mathfrak{Z}^0 = \mathfrak{Z}(\mathbb{R}^{4n})$ — пространство функций, аналитических на замкнутом множестве \mathbb{R}^{4n} в \mathbb{C}^{4n} , т. е. для любой $f(z) \in \mathfrak{Z}^0$ существует такая окрестность $\mathbb{R}^{4n} \subset \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}^{4n}$, что $f(z)$ аналитична в $\tilde{\Omega}$;

Z — пространство всех целых функций, для которых

$$\int dx_1 \dots \int dx_n |f(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)| < \infty$$

для любых y_1, \dots, y_n ;

$$Z^0 = \mathfrak{Z}^0 \cap L_1.$$

Приведем теперь некоторые определения, касающиеся аналитических целых функций одной комплексной переменной

$$z = x + iy \in \mathbb{C}^1 = \mathbb{R}^1 + i\mathbb{R}^1.$$

Подробности читатель может найти, например, в книгах Е. Титчмарша (1951) и М. А. Евграфова (1962). Пусть $g(z)$ — целая функция. Введем

$$M_g(r) = \max_{|z|=r} |g(z)|. \quad (2.1)$$

Порядком целой функции $g(z)$ называется число

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_g(r)}{\ln r}. \quad (2.2)$$

Если порядок целой функции равен ρ , то это означает, грубо говоря, что $g(z)$ растет как $\exp\{|z|^\rho\}$. Все целые функции, растущие медленнее чем $\exp\{|z|^\varepsilon\}$ при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$, называются целыми функциями нулевого порядка, а все функции, растущие быстрее $\exp\{|z|^N\}$ при любом $N > 0$, — функциями бесконечного порядка.

Пусть $h(r)$ при достаточно больших r — положительная монотонно растущая функция. Если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_g(r)}{h(r)} = 1, \quad (2.3)$$

то мы будем говорить, что точный порядок $g(z)$ равен $h(r)$. Если $h(r) = \sigma r^\rho$, то число σ называется типом функции $g(z)$.

Функция $\lambda(r)$ называется медленно меняющейся, или медленной, если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r\lambda'(r)}{\lambda(r)} = 0.$$

Например, $\lambda(r) = (\ln r)^\alpha \forall \alpha$ или $\lambda(r) = \ln \ln r$.

Понятие точного порядка дает более тонкую градацию роста. Так, скажем, целые функции с точным порядком $h(r) = \sigma r^\rho$ и $h(r) = \sigma r^\rho \lambda(r)$, где $\lambda(r)$ — медленная функция, имеют один и тот же порядок ρ .

Пусть целая функция задана в виде ряда

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n.$$

Введем функцию

$$m_g(r) = \max_{n \geq 0} |g_n| r^n. \quad (2.4)$$

При $r \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\ln M_g(r) \sim \ln m_g(r), \quad (2.5)$$

откуда

$$h(r) \sim \ln m_g(r). \quad (2.6)$$

Это соотношение позволяет оценивать порядок роста целой функции с точностью, достаточной для наших дальнейших исследований.

Продолжим перечисление пространств функций:

\mathfrak{Z}_h — пространство целых функций таких, что для каждой $g(z) = g(z_1, \dots, z_n)$ существуют такие числа $\delta > 0$ и $B > 0$, что

$$|g(z_1, \dots, z_n)| \leq B \exp \left\{ \sum_{j\alpha} h((1-\delta)|z_{j\alpha}|) \right\};$$

$$Z_h = Z \cap \mathfrak{Z}_h;$$

\mathfrak{Z}_∞ — пространство всех целых функций конечного порядка роста, т. е. для любой $g(z) \in \mathfrak{Z}_\infty$ существуют такие положительные b, N, B , что

$$|g(z_1, \dots, z_n)| \leq B \exp \left\{ b \sum_{j\alpha} |z_{j\alpha}|^N \right\};$$

$$Z_\infty = Z \cap \mathfrak{Z}_\infty;$$

\mathfrak{Z}_α — пространство целых функций конечного порядка роста α , т. е. для любой $g(z) \in \mathfrak{Z}_\alpha$ существуют такие положительные b и B , что

$$|g(z_1, \dots, z_n)| \leq B \exp \left\{ b \sum_{j\alpha'} |z_{j\alpha'}|^\alpha \right\};$$

$Z_\alpha = Z \cap \mathfrak{Z}_\alpha$ — это пространство нетривиально при $\alpha \geq 1$;

Z_α^β — пространство целых функций таких, что для любой $g(z) \in Z_\alpha^\beta$ существуют такие положительные b, c и B , что

$$|g(z)| = |g(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)| \leq B \exp \left\{ \sum_{j\alpha} [-c|x_{j\alpha}|^\beta + b|y_{j\alpha}|^\alpha] \right\}.$$

Пространство Z_α^β нетривиально в случаях:

- (1) $\alpha = 1, \quad \beta < 1.$
- (2) $\alpha > 1, \quad \alpha \geq \beta > 0.$

Пространства Z_α^β фактически совпадают с пространствами S_α^β , изученными И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым (1958).

Снова рассмотрим функции одной комплексной переменной. Справедливы следующие представления Фурье для целых функций.

Если для $g(z)$

$$h(r) = \sigma r,$$

то

$$g(z) = \int e^{iz\zeta} d\mu_g(\zeta), \quad (2.7)$$

где $\mu_g(\zeta)$ — комплекснозначная вполне аддитивная мера в комплексной ζ -плоскости, сосредоточенная в области $|\zeta| < \sigma + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Это представление доказано И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым (1958).

Если $g(z) \in \mathfrak{Z}_h$, где $h(r) > 0, h'(r) > 0, h''(r) > 0$, то представление (2.7) справедливо, когда $\mu_g(\zeta)$ — комплекснозначная вполне аддитивная мера в комплексной ζ -плоскости, для которой существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\int |d\mu_g(\zeta)| \exp \{H((1+\varepsilon)|\zeta|)\} < \infty. \quad (2.8)$$

Здесь

$$H(s) = \max_{r \geq 0} (sr - h(r)). \quad (2.9)$$

Это представление доказано автором (1970б).

Если $h(r) = \sigma r^\alpha$, то $H(s) = s^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \cdot (\alpha-1)(\alpha^\alpha \sigma)^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

Будем далее обозначать через \mathfrak{A} пространство фурье-образов функций из \mathfrak{A} , т. е.

$$\tilde{f}(p) = \int dx e^{ipx} f(x) \in \mathfrak{A},$$

если $f(x) \in \mathfrak{A}$. Имеем

$$\tilde{S} = S; \quad \tilde{D} = Z_1 \cap S;$$

\tilde{Z} — пространство функций, убывающих быстрее любой линейной экспоненты, т. е. если $\tilde{f}(p) \in \tilde{Z}$, то

$$\lim_{|p_{j\alpha'}| \rightarrow \infty} |\tilde{f}(p_1, \dots, p_n)| \exp \left\{ N \sum_{j\alpha'} |p_{j\alpha'}| \right\} = 0$$

при любых $N > 0$;

\tilde{Z}_α состоит из функций $\tilde{f}(p_1, \dots, p_n)$, для которых существуют такие числа $N_{j\alpha'}$, что

$$\lim_{|p_{j\alpha'}| \rightarrow \infty} |\tilde{f}(p_1, \dots, p_n)| \exp \left\{ \sum_{j\alpha'} N_{j\alpha'} |p_{j\alpha'}|^\alpha \right\} = 0,$$

где $\gamma = \frac{\alpha}{\alpha-1}$;

$$\tilde{Z}_\alpha^\beta = Z_{\alpha_1}^{\beta_1},$$

где $\alpha_1 = \frac{\beta}{\beta-1}$ и $\beta_1 = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ при $\alpha \geq \beta > 1$.

§ 3. Локальные обобщенные функции

Итак, рассмотрим функционал

$$(K, f) = \int dx K(x) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} \square^n f(x) \Big|_{x=0}. \quad (3.1)$$

Если в пространстве основных функций \mathfrak{A} , к которому принадлежит $f(x)$, содержатся функции с ограниченным носителем, то естественно дать

Определение 1. *Обобщенная функция*

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} \square^n \delta(x)$$

называется *локальной и сосредоточенной в точке $x=0$* , если

$$(K, f) = 0$$

для любых $f(x) \in \mathfrak{A}$, носитель которых не содержит точки $x=0$.

Мы предполагаем, что функций с ограниченным носителем достаточно много в пространстве \mathfrak{A} . Это означает, что если некоторая функция $g(x)$ локально интегрируема и

$$\int dx f(x) g(x) = 0$$

для любой $f(x) \in D(G) \cap \mathfrak{A}$, то $g(x) \equiv 0$ почти всюду на G .

Рассмотрим обобщенные функции $K(x)$ последовательно для всех случаев последовательностей коэффициентов c_n , перечисленных в § 1.

Случай I. *Локальные обобщенные функции при $c_n = 0$, $n > n_0 \geq 0$.* Для того чтобы функционал (3.1) существовал, достаточно потребовать, чтобы функции основного пространства были $2n_0$ раз дифференцируемы по каждому аргументу. Таким образом, мы приходим к пространствам типа $C(q)$, где $2n_0 = q$. Если теперь рассматривать такие $K(x)$, для которых n_0 — любое, но конечное для каждой $K(x)$, то функции основного пространства должны быть бесконечно дифференцируемы и среди них должны быть функции с ограниченным носителем. Мы приходим к пространствам D и S . Пространства функций D , S и $C(q, r) \subset C(q)$ хорошо изучены, на них строится обычная локальная квантовая теория поля. В этом случае обобщенные

функции $K(x)$ удовлетворяют определению 1. Поэтому они являются локальными и обычно их называют обобщенными функциями умеренного порядка роста.

Случай II. *Локальные обобщенные функции при $\sum \frac{1}{n} |c_n|^{1/2n} < \infty$.* *Строгая локальность.* А. Джаффе (1966) поставил задачу следующим образом. Теория будет строго локальной, если пространство основных функций содержит функции с ограниченным носителем.

Обозначим через $\mathfrak{G}(\mathbb{R}^4)$ пространство основных функций, которое является счетно нормируемым, полным, линейным, ядерным пространством.

Аксиома локальности. *Для любого открытого множества $G \subset \mathbb{R}^4$ пространство функций*

$$\mathfrak{L}(G) = \mathfrak{G}(\mathbb{R}^4) \cap D(G)$$

плотно в $D(G)$.

Найдем условия на коэффициенты c_n обобщенной функции $K(x)$, при которых $K(x)$ будет определена на $\mathfrak{G}(\mathbb{R}^4)$. Задача состоит в том, чтобы найти то минимальное пространство функций, которое еще содержит достаточно много функций из пространства D . Идея состоит в использовании теоремы Карлемана (см. ниже) из теории квазианалитических функций, которая дает необходимое и достаточное условие принадлежности пространству C_A (см. § 2). Из теоремы непосредственно следует искомое условие на коэффициенты c_n , при котором пространство основных функций удовлетворяет аксиоме локальности.

Рассмотрим функции одной вещественной переменной $x \in \mathbb{R}^1$. Пусть $f(x) \in C_A$ и

$$\max_{x \in \mathbb{R}^1} |f^{(n)}(x)| \leq B^n A_n. \quad (3.2)$$

Справедлива следующая

Теорема Карлемана. *Необходимым и достаточным условием квазианалитичности пространства C_A является расходимость наименьшей невозрастающей мажоранты ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{-1/n},$$

или, что то же самое, расходимость интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} \ln \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2n}}{A_n^2} \right\}.$$

Доказательство теоремы можно найти, например, в книге Н. Винера и Р. Пэли (1964).

Вернемся теперь к функциям из пространства $\mathfrak{G}(\mathbb{R}^4)$. Аксиома локальности будет выполнена, если пространство основных

функций $\mathfrak{G}(\mathbb{R}^4)$ состоит из таких функций $f(x)$, для которых

$$\max_{x \in \mathbb{R}^4} \left| \frac{\partial^{m_0+\dots+m_3}}{\partial x_0^{m_0} \dots \partial x_3^{m_3}} f(x_0, \dots, x_3) \right| \leq B_0^{m_0} \cdot \dots \cdot B_3^{m_3} A_{m_0} \cdot \dots \cdot A_{m_3},$$

где числа A_m выбираются таким образом, что, во-первых,

$$A_0 = 1 < A_1 < A_2 < \dots < A_m < \dots$$

и, во-вторых, существуют такие подмножества функций в $\mathfrak{G}(\mathbb{R}^4)$, плотные в D , для которых

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{-1/n} < \infty,$$

как непосредственно следует из теоремы Карлемана.

Найдем теперь, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты c_n . По условию, ряд, определяющий функционал

$$(K, f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} \square^n f(x),$$

должен абсолютно сходиться, т. е. должен сходиться ряд

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} \square^n f(x) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|}{(2n)!} |\square^n f(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|}{(2n)!} \mathcal{A}_n < \infty, \quad (3.3)$$

где

$$\mathcal{A}_n = \sum_{m_0+\dots+m_3=n} \frac{n!}{m_0! \dots m_3!} B_0^{2m_0} \cdot \dots \cdot B_3^{2m_3} A_{2m_0} \cdot \dots \cdot A_{2m_3}.$$

Легко видеть, что при некоторых $b > 0$ $\mathcal{A}_n \geq b^{2n} A_{2n}$. Значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n^{-1/2n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{-1/n}.$$

Тогда из условия сходимости ряда (3.3) получим

$$\frac{|c_n|^{1/2n}}{n} \leq \text{const} \cdot \mathcal{A}_n^{-1/2n}.$$

Отсюда окончательно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |c_n|^{1/2n} < \infty. \quad (3.4)$$

Фурье-образ обобщенной функции $K(x)$ записывается в виде

$$\tilde{K}(p^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} p^{2n}.$$

Имеем оценку

$$|\tilde{K}(p^2)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|}{(2n)!} |p^2|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\text{const})^n \frac{|p^2|^n}{\mathcal{A}_n}.$$

Воспользовавшись вновь теоремой Карлемана, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} |\ln |\tilde{K}(u)|| &\leq \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} \ln \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{\mathcal{A}_n} (\text{const})^n \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} \ln \left\{ 2 \sum_{n=0}^{\infty} (\text{const})^{2n} \frac{u^{2n}}{\mathcal{A}_n^2} \right\} < \infty. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} |\ln |\tilde{K}(u)|| < \infty. \quad (3.5)$$

Соотношения (3.4) и (3.5) определяют условия, при которых обобщенная функция $K(x)$ является локальной.

§ 4. Носители аналитических функционалов

При изучении локальных свойств обобщенных функций $K(x)$, для которых коэффициенты $\{c_n\}$ удовлетворяют условиям (III) (стр. 51) и далее, оказывается, что пространства основных функций, на которых этот функционал определен, состоят из аналитических функций. Поэтому в нашем распоряжении отсутствуют функции с ограниченным носителем, и мы не можем воспользоваться определением 1.

В этом параграфе мы дадим некоторые определения и приведем ряд известных фактов из теории аналитических функционалов, которые потребуются нам в дальнейшем (ниже мы в основном следуем определениям книги П. Шапиро (1972)).

Определение 2. Говорят, что компакт $B \subset \tilde{\Omega}$ является определяющим множеством функционала $F \in \mathfrak{Z}'(\tilde{\Omega})$, если для любого открытого $\tilde{\omega} \supset B$ функционал F продолжается на $\mathfrak{Z}(\tilde{\omega})$, т. е. если $\forall \tilde{\omega} \supset B \exists B_{\tilde{\omega}}$ -компакт в $\tilde{\omega}$ и $\exists C_{\tilde{\omega}}$ такие, что $\forall f \in \mathfrak{Z}(\tilde{\omega})$

$$|(F, f)| \leq C_{\tilde{\omega}} \cdot \sup_{B_{\tilde{\omega}}} |f|.$$

Если $F \in \mathfrak{Z}'(\tilde{\Omega})$, то существует по меньшей мере один компакт, определяющий F , и из теоремы Хана — Банаха следует (так как $\mathfrak{Z}(\tilde{\Omega})$ есть замкнутое подпространство $C(\tilde{\Omega})$ -пространства непрерывных на $\tilde{\Omega}$ функций), что существуют такие компакт $B \subset \tilde{\Omega}$ и мера σ с носителем в B , что

$$(F, f) = \int_{\tilde{\Omega}} f d\sigma \quad \forall f \in \mathfrak{Z}(\tilde{\Omega}).$$

При этом, вообще говоря, не существует наименьшего определяющего множества, т.е. определяющего множества, содержащегося во всех определяющих множествах рассматриваемого аналитического функционала. В этом его отличие от носителя линейного функционала, заданного на D , и в этом состоит основная трудность использования данного определения.

Неоднозначность определения носителя аналитического функционала в комплексной области связана с существованием различных представлений аналитического функционала, т.е. с возможностью выбора различных контуров интегрирования в комплексном пространстве.

Существуют, вообще говоря, случаи, когда при некоторых дополнительных условиях можно фиксировать носитель аналитического функционала однозначно.

Случай III. *Локальные обобщенные функции при $\overline{\lim} |c_n|^{1/n} = 0$.* Обобщенные функции этого типа в случае функций одного переменного были впервые рассмотрены Н. Н. Мейманом (1964) и затем М. А. Соловьевым (1971).

Выясним условия, при которых существует функционал

$$(K, f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} \square^n f(x) \Big|_{x=0}. \quad (4.1)$$

Проведем некоторые формальные преобразования, законность которых будет установлена ниже. Представим оператор \square^n в виде

$$\square^n = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^n = a_n \int_{\rho^2=1} d\rho \left(i\rho_4 \frac{\partial}{\partial x_0} + \rho \frac{\partial}{\partial x} \right)^{2n}, \quad (4.2)$$

где

$$a_n = \frac{2^{2n}}{\pi^2} \frac{n!(n+1)!}{(2n)!}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 1. \quad (4.3)$$

Интегрирование в (4.2) проводится по евклидовой четырехмерной сфере $\rho^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2 = \rho^2 + \rho^2 = 1$.

Введем далее функцию комплексного переменного ζ :

$$W(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n a_n}{\zeta^{2n+1}}. \quad (4.4)$$

Из условий (III) стр. 51 и выражений (4.3) следует, что $W(\zeta)$ имеет существенную особенность при $\zeta = 0$. Других особенностей в плоскости комплексного переменного ζ она не имеет. Поэтому

$$c_n a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint d\zeta \zeta^{2n} W(\zeta), \quad (4.5)$$

где интегрирование проводится по любому замкнутому контуру, охватывающему точку $\zeta = 0$. Тогда функционал (4.1) можно представить в виде

$$(K, f) = \frac{1}{2\pi i} \oint d\zeta W(\zeta) \int_{\rho^2=1} d\rho f(i\rho_4 \zeta, \rho \zeta). \quad (4.6)$$

Для того чтобы полученный функционал был определен, необходимо, чтобы функция $f(x)$ была аналитична в окрестности точки $x = 0$.

Если же мы хотим, чтобы существовал функционал

$$(K, f)(x) = \int dx' K(x-x') f(x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} \square^n f(x)$$

для каждого $x \in \mathbb{R}^4$, то тогда пространством основных функций будет \mathcal{S}^0 или Z^0 .

Воспользуемся определением 2. Легко видеть, что функционал (4.1) может быть продолжен на пространство функций, аналитических на любом компакте, содержащем точку $x = 0$. Таким образом, каждый такой компакт является определяющим множеством рассматриваемого функционала, а пересечением всех определяющих множеств является сама точка $x = 0$. Значит, в данном случае точку $x = 0$ можно условно считать носителем аналитического функционала (4.1), т.е. обобщенная функция $K(x)$ с условием (III) является локальной.

Фурье-образ обобщенной функции $K(x)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{K}(p^2) = (K, e^{ipx}) &= \frac{1}{2\pi i} \oint d\zeta W(\zeta) \int_{\rho^2=1} d\rho e^{-\rho_0 \rho_4 \zeta - i\rho \rho \zeta} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint d\zeta W(\zeta) 2\pi^2 \frac{J_1(\zeta \sqrt{-\rho^2})}{\zeta \sqrt{-\rho^2}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь $\rho^2 = \rho_0^2 - \rho^2$ и $J_1(u)$ — функция Бесселя.

Функция $\tilde{K}(p^2)$ является целой в комплексной p^2 -плоскости и имеет порядок роста меньше $1/2$, так как для нее справедлива оценка

$$|\tilde{K}(p^2)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon \sqrt{|p^2|}} \quad (4.8)$$

для произвольных $\varepsilon > 0$. Из теории целых функций известно, что для таких функций в комплексной p^2 -плоскости не существует ни одного направления, вдоль которого эта функция была бы ограничена.

Таким образом, мы видим, что фурье-образы всех обобщенных функций, которые могут рассматриваться как локальные, растут в любом направлении комплексного импульсного p -пространства.

Случай IV. *Нелокальные обобщенные функции при* $\lim |c_n|^{1/n} = l^2$. Рассмотрим теперь обобщенные функции (1.3), когда коэффициенты c_n удовлетворяют условию (IV) (стр. 51), где l — некоторый параметр. Введем функцию $W_l(\xi)$ комплексного переменного ξ по формуле (4.4). В рассматриваемом случае из условий (IV) и соотношений (4.3) следует, что функция $W_l(\xi)$ аналитична в плоскости комплексного ξ вне круга $|\xi| = l$, а внутри этого круга она имеет какие-то особенности, положение которых зависит от конкретного вида коэффициентов c_n . Поэтому

$$c_n a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi| > l} d\xi \xi^{2n} W_l(\xi). \quad (4.9)$$

Тогда для функционала (K, f) можно написать представление

$$(K, f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{l < |\xi| < l+\varepsilon} d\xi W_l(\xi) \int_{\rho^2=1} d\rho f(i\rho_4 \xi, \rho \xi). \quad (4.10)$$

Полученное представление определено для всех $f(z) \in \mathfrak{Z}$.

Исследуем более подробно, где расположены определяющие множества функционала (4.10). Для этого предварительно покажем, что представление (4.10) релятивистски ковариантно на \mathfrak{Z} . Нам необходимо показать, что интеграл в (4.10) по четырехмерному евклидову пространству инвариантен при преобразовании аргументов основной функции $f(x) = f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ под действием однородной группы Лоренца, т. е.

$$\int_{\rho^2=1} d\rho f(\Lambda_{0\mu} \rho_\mu \xi, \Lambda_{j\mu} \rho_\mu \xi) = \int_{\rho^2=1} d\rho f(\rho_0 \xi, \rho_j \xi). \quad (4.11)$$

Здесь $\Lambda_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu\nu}(\theta, \varphi, \psi)$ — матрица представления однородной группы Лоренца, θ — лоренцовский угол, т. е. $\text{th } \theta = v/c$, c — скорость света, v — скорость системы отсчета; φ и ψ — евклидовы углы, определяющие трехмерные вращения. В (4.11) суммирование проводится по $\mu = (0, 1, 2, 3)$ и приняты обозначения $\rho_0 = i\rho_4$ и $j = 1, 2, 3$.

Любое Λ может быть представлено в виде $\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3$, где Λ_1 и Λ_3 — обычные трехмерные вращения, а Λ_2 — чистое преобразование Лоренца вдоль 3-оси. Интеграл в (4.10) или (4.11), очевидно, инвариантен относительно вращений в трехмерном евклидовом пространстве. Поэтому нам достаточно показать инвариантность интеграла при чистом преобразовании Лоренца Λ_2 . В этом случае соотношение (4.11) переписется так:

$$\begin{aligned} \int_{\rho^2=1} d\rho f(i\rho_4 \xi \text{ ch } \theta + \rho_3 \xi \text{ sh } \theta, \rho_1 \xi, \rho_2 \xi, i\rho_4 \xi \text{ sh } \theta + \rho_3 \xi \text{ ch } \theta) = \\ = \int_{\rho^2=1} d\rho f(i\rho_4 \xi, \rho_1 \xi, \rho_2 \xi, \rho_3 \xi). \end{aligned} \quad (4.12)$$

В плоскости (ρ_4, ρ_3) перейдем к полярным координатам $\rho_4 = r \cos \chi$, $\rho_3 = r \sin \chi$; тогда для левой части соотношения (4.12) получим

$$\int_0^{2\pi} d\chi \int_0^1 dr r \iint_{\rho_1^2 + \rho_2^2 = 1 - r^2} d\rho_1 d\rho_2 f(ir\xi \cos(\chi + i\theta), \rho_1 \xi, \rho_2 \xi, r\xi \sin(\chi + i\theta)). \quad (4.13)$$

Поскольку функция $f(z) = f(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathfrak{Z}$, то она будет целой по комплексному аргументу χ в (4.13). При этом подынтегральная функция периодична вдоль вещественной оси в плоскости комплексного χ с периодом 2π . Поэтому в последнем интеграле контур интегрирования по χ от 0 до 2π может быть сдвинут на любое чисто мнимое число, т. е.

$$\int_0^{2\pi} d\chi A(\chi) = \int_{i\theta}^{i\theta+2\pi} d\chi A(\chi) = \int_0^{2\pi} d\chi A(\chi - i\theta),$$

где через $A(\chi)$ обозначена подынтегральная функция в (4.13). Значит, правая часть в (4.12) равна левой части, и наше утверждение доказано.

Рассмотрим теперь пространственно-временные свойства обобщенной функции $K(x)$, т. е. рассмотрим возможные определяющие множества функционала (4.10) согласно определению 2.

В представлении (4.10) можно задаться каким-либо определенным элементом лоренцевской группы $\Lambda = \Lambda(\theta, \varphi, \psi)$ с фиксированными параметрами θ, φ и ψ ; тогда функционал (4.10) будет выглядеть следующим образом:

$$(K, f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{l < |\xi| < l+\varepsilon} d\xi W_l(\xi) \int_{\rho^2=1} d\rho f(\Lambda_{0\mu} \rho_\mu \xi, \Lambda_{j\mu} \rho_\mu \xi). \quad (4.14)$$

Этот функционал может быть расширен на пространство функций $\mathfrak{Z}(\tilde{\Omega}_l(\theta, \varphi, \psi))$, аналитических в области

$$\tilde{\Omega}_l(\theta, \varphi, \psi) = [z: |\Lambda_{0\mu} z_\mu|^2 + |\Lambda_{1\mu} z_\mu|^2 + |\Lambda_{2\mu} z_\mu|^2 + |\Lambda_{3\mu} z_\mu|^2 < l^2 + \varepsilon].$$

В частности,

$$\tilde{\Omega}_l(0, 0, 0) = [z: |z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 < l^2 + \varepsilon],$$

$$\tilde{\Omega}_l(\theta, 0, 0) =$$

$$= [z: |z_0 \text{ ch } \theta + z_3 \text{ sh } \theta|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3 \text{ ch } \theta + z_0 \text{ sh } \theta|^2 < l^2 + \varepsilon].$$

Проекции этих областей на плоскость (x_0, x_3) показаны на рис. 1.

Таким образом, определяющими множествами функционала (4.14) являются множества $\Omega_l(\theta, \varphi, \psi)$, среди которых, как легко

видеть, не существует ни одного, лежащего во всех остальных. Поэтому носитель обобщенной функции $K(x)$ не может быть задан однозначно.

Для фурье-образа обобщенной функции $K(x)$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{K}(p^2) &= (K, e^{ipx}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{l < |\xi| < l+\varepsilon} d\xi W_l(\xi) \int_{\rho^2=1} d\rho e^{-\rho_0 \rho_4 \xi - i\rho \rho_2} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{l < |\xi| < l+\varepsilon} d\xi W_l(\xi) 2\pi^2 \frac{J_1(\xi \sqrt{-p^2})}{\xi \sqrt{-p^2}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Отсюда следует, что функция $\tilde{K}(p^2)$ — целая в комплексной p^2 -плоскости и имеет порядок роста $1/2$ и тип l , так как для нее справедлива оценка

$$|\tilde{K}(p^2)| \leq C_e e^{(l+\varepsilon)\sqrt{|p^2|}}. \quad (4.16)$$

Для таких функций может существовать лишь одно направление в p^2 -плоскости, вдоль которого функция $\tilde{K}(p^2)$ может убывать. Именно такие функции нас будут в дальнейшем интересовать.

Мы будем говорить, что нелокальная функция $K(x)$ принадлежит типу А, если представление (4.9) для $c_n a_n$ может быть записано как

$$c_n a_n = \int_0^l u^{2n} d\sigma_A(u), \quad (4.17)$$

и типу Б, если

$$c_n a_n = (-1)^n \int_0^l u^{2n} d\sigma_B(u), \quad (4.18)$$

где σ_A и σ_B — некоторые вещественные меры на отрезке $(0, l)$. Тогда представление для функционала (4.10) запишется в виде

$$\begin{aligned} \text{тип А} \quad (K_A, f) &= \int_{\rho^2 \leq l^2} d\rho a_A(\rho^2) f(i\rho_4, \rho), \\ \text{тип Б} \quad (K_B, f) &= \int_{\rho^2 \leq l^2} d\rho a_B(\rho^2) f(\rho_4, i\rho), \end{aligned} \quad (4.19)$$

где

$$a_s(\rho^2) = \int_0^l \frac{d\sigma_s(u)}{u^3} \delta(u^2 - \rho^2) \quad (s = A, B).$$

Для фурье-образов получим

$$\begin{aligned} \tilde{K}_A(p^2) &= (2\pi)^2 \int_0^l d\rho \rho^2 a_A(\rho^2) \frac{J_1(\rho \sqrt{-p^2})}{\sqrt{-p^2}}, \\ \tilde{K}_B(p^2) &= (2\pi)^2 \int_0^l d\rho \rho^2 a_B(\rho^2) \frac{J_1(\rho \sqrt{p^2})}{\sqrt{p^2}}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{K}_A(p^2) &= \begin{cases} O(e^{l\sqrt{p^2}}) & \text{при } p^2 \rightarrow +\infty, \\ O\left(\frac{1}{|p^2|}\right) & \text{при } p^2 \rightarrow -\infty, \end{cases} \\ \tilde{K}_B(p^2) &= \begin{cases} O\left(\frac{1}{p^2}\right) & \text{при } p^2 \rightarrow +\infty, \\ O(e^{l\sqrt{|p^2|}}) & \text{при } p^2 \rightarrow -\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Если функция $a_A(u)$ дифференцируема по u $2N$ раз и

$$a_A(u) = [u(l^2 - u)]^{2N} \psi(u), \quad (4.21)$$

то

$$\tilde{K}_A(p^2) = O\left(\frac{1}{|p^2|^{1+N}}\right) \text{ при } p^2 \rightarrow -\infty. \quad (4.22)$$

Если $a_A(u) \in D((0, l^2))$, то $\tilde{K}_A(p^2)$ убывает при $p^2 \rightarrow -\infty$ быстрее любого полинома.

§ 5. Проектирующие последовательности функций

При изучении обобщенных функций $K(x)$ для случая (IV) (стр. 51) оказалось, что среди всех определяющих множеств не существует такого определяющего множества, которое содержалось бы во всех остальных. Таким образом, носитель функционала не может быть определен однозначно.

Как уже говорилось, трудности, которые возникают при исследовании локальных свойств аналитических функционалов, двойного рода. Во-первых, математическая проблема состоит в том, что носитель аналитического функционала не может быть определен однозначно. Во-вторых, физическая проблема состоит в том, что определяющие множества обобщенной функции лежат в комплексном пространстве \mathbb{C}^4 , в то время как нас интересуют пространственно-временные свойства в вещественном пространстве \mathbb{R}^4 .

Физическую картину, лежащую в основе нашего исследования, не претендуя на какую-либо строгость, можно обрисовать следующим образом. Подразумевается, что некоторая физическая система, находящаяся в реальном пространстве \mathbb{R}^4 ,

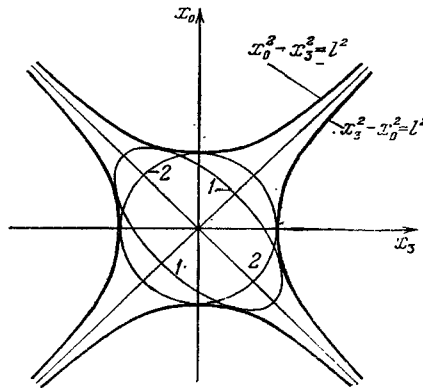


Рис. 1. Проекция некоторых возможных определяющих множеств функционала (4.14) на плоскость (x_0, x_3) : 1 — проекция $\tilde{\Omega}_l(0, 0, 0)$, 2 — проекция $\tilde{\Omega}_l(0, 0, 0)$.

описывается, вообще говоря, комплекснозначными функциями, заданными на вещественном пространстве \mathbb{R}^4 . С другой стороны, эти функции принадлежат некоторому пространству аналитических функций. Значения различных физических характеристик системы задаются функционалами, определенными на этих функциях, и имеют вид

$$(B, f) = \int d\sigma_B(z) f(z), \quad (5.1)$$

где $\sigma_B(z)$ — некоторая мера в комплексном пространстве \mathbb{C}^4 , сосредоточенная на некотором определяющем множестве $\bar{Q} \subset \mathbb{C}^4$.

При данной интерпретации функционал B имеет смысл некоторой физической величины, которая характеризует нашу систему и как-то определяет ее распределение в реальном пространстве \mathbb{R}^4 . Задача состоит в определении понятия сосредоточенности функционала B в вещественном пространстве \mathbb{R}^4 , хотя на самом деле в интеграле (5.1), определяющем этот функционал, интегрирование проводится по комплексному пространству \mathbb{C}^4 .

Наш постулат состоит в том, что локальные свойства в \mathbb{R}^4 определяются проекциями определяющих множеств, расположенных в \mathbb{C}^4 , на вещественное пространство \mathbb{R}^4 . Для реализации этой идеи необходим математический аппарат, т. е. необходимо указать такие подпространства аналитических функций, которые выделяли бы проекцию носителя на \mathbb{R}^4 .

Наше определение состоит в том, что локальные пространственно-временные свойства обобщенных функций в \mathbb{R}^4 , заданных на пространстве целых функций \mathcal{Z} , могут быть определены при помощи проектирующих последовательностей функций $f_{G, \lambda}(x)$, основные свойства которых следующие:

$$(1) \quad f_{G, \lambda}(z) \in Z \subset \mathcal{Z}, \quad \lambda > 0;$$

$$(2) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} f_{G, \lambda}(z) = \begin{cases} 0, & x \notin G, \\ \psi(x + iy), & x \in G, \end{cases} \quad \forall y \in \mathbb{R}^4,$$

где $\psi(z)$ — некоторая достаточно произвольная аналитическая на $G + i\mathbb{R}^4$ функция. Подробно свойства проектирующих последовательностей будут рассмотрены чуть ниже.

Следует подчеркнуть, что сходимость к нулю проектирующей последовательности вне области G не должна быть равномерной. В случае равномерной сходимости к нулю в пространствах более одного числа измерений в области вида

$$O' = \{z \in \mathbb{C}^4, x \in O \subset \mathbb{R}^4, \|y\| \leq 1\}$$

с необходимостью следует сходимость к нулю в более широкой области. Поэтому свойство (2) проектирующих последовательностей не может быть удовлетворено в случае равномерной сходимости к нулю. Причина состоит в том, что в пространствах

многих комплексных переменных не всякая область есть область голоморфности. Подробно роль оболочек голоморфности в вопросе о локализуемости поля была рассмотрена М. А. Соловьевым и В. Я. Файнбергом (1976).

Поэтому следует ожидать, что проектирующие последовательности функций могут дать более детальную характеристику пространственно-временных свойств аналитических функционалов, чем методы, основанные на аналитическом продолжении и имеющие в своей основе определение 2.

Мы будем говорить, что функционал B равен нулю на области $G \subset \mathbb{R}^4$, если

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (B, f_{\Gamma, \lambda}) = 0 \quad (5.2)$$

для любых проектирующих последовательностей $\{f_{\Gamma, \lambda}\}$ таких, что $\Gamma \subseteq G \subset \mathbb{R}^4$.

Проектирующие последовательности функций не различают или, другими словами, относят к одному классу определяющие множества, имеющие одинаковую проекцию на вещественное пространство \mathbb{R}^4 .

Из условия, что функционал B обращается в нуль на областях G_1 и G_2 , не следует, вообще говоря, что он обращается в нуль на $G_1 \cup G_2$. В этом состоит одно из существенных отличий аналитических функционалов от функционалов, заданных на пространствах функций с ограниченным носителем. Поэтому носитель аналитического функционала в самом общем случае не может быть задан однозначно и при помощи проектирующих последовательностей.

Однако для некоторых классов аналитических функционалов (нелокальные обобщенные функции, случай IV, тип А и Б) проектирующие последовательности функций будут служить хорошим инструментом для исследования их пространственно-временных свойств.

Рассмотрим теперь более подробно определение и свойства проектирующих последовательностей функций. Проектирующие последовательности функций в конфигурационном пространстве \mathbb{R}^4 определим следующим образом:

Определение. Будем называть последовательность функций $f_{\Gamma, \lambda}(z)$ проектирующей, если

$$(1) \quad \text{область } \Gamma \subset \mathbb{R}^4;$$

$$(2) \quad f_{\Gamma, \lambda}(z) = f_{\Gamma, \lambda}(z_0, z_1, z_2, z_3) \in Z \quad \forall \lambda > 0;$$

$$(3) \quad \int dx f_{\Gamma, \lambda}(x + iy) = \text{mes } \Gamma \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^4;$$

$$(4) \quad |f_{\Gamma, \lambda}(x + iy)| = O\left(\frac{1}{\|y\|}\right), \quad x \in \Gamma, \quad \|y\| \rightarrow \infty;$$

$$(5) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} f_{\Gamma, \lambda}(x + iy) = 0, \quad x \in \Gamma \subset \mathbb{R}^4, \quad \forall y \in \mathbb{R}^4;$$

$$(6) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} f_{\Gamma, \lambda}(x + iy) = \psi(x + iy), \quad x \in \Gamma \subset \mathbb{R}^4, \quad \forall y \in \mathbb{R}^4,$$

где $\psi(x + iy)$ — некоторая функция, аналитическая на $\tilde{\Gamma} = \Gamma + i\mathbb{R}^4$.

Открытая область $\Gamma \subset \mathbb{R}^4$ называется носителем проектирующей последовательности.

Обозначим пространство всех проектирующих последовательностей при произвольных носителях Γ через Π , а пространство проектирующих последовательностей, носители которых содержатся в некоторой ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^4$, — через $\Pi(G)$.

Заметим, что функции, принадлежащие Π , имеют бесконечный порядок роста.

Пространство Π непусто. Функции пространства Π можно построить, например, следующим образом. В пространстве $Z \subset \mathbb{C}$ существуют функции $g(z)$ одного комплексного переменного, которые удовлетворяют условиям:

(1) Существует такое число d , зависящее от g , что

$$g(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

при $z \rightarrow \infty$ вне полосы $|\operatorname{Re} z| > d$.

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) = 1.$$

Приведем пример такой функции:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du e^{iuz}}{\Gamma(\sqrt{1+u^2})} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{du \cos uz}{\Gamma(\sqrt{1+u^2})}.$$

Для этой функции справедливы следующие оценки:

$$g(z) = \begin{cases} O(e^{-|z|}), & |\operatorname{Re} z| > \frac{\pi}{2}, \quad z \rightarrow \infty; \\ O(\exp\{e^{|z|}\}), & |\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2}, \quad z \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Другой пример. Рассмотрим функцию $e^{(-i\xi)^b}$, где $b \geq 1$. Эта функция при нецелых b имеет разрез, расположенный на луче $[0, -i\infty)$. На луче $[0, +i\infty)$ она растет как $e^{|\xi|^b}$. Рассмотрим контур C в комплексной ξ -плоскости, как показано на рис. 2. Ветви контура C , уходящие в бесконечность при $r \rightarrow \infty$, задаются следующим образом:

$$\xi_{\pm}(r) = r \exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{br^b}\right)\right\} = \pm r \sin \frac{\pi}{br^b} + ir \cos \frac{\pi}{br^b} \approx \pm \frac{\pi}{br^{b-1}} + ir \quad (r \rightarrow \infty).$$

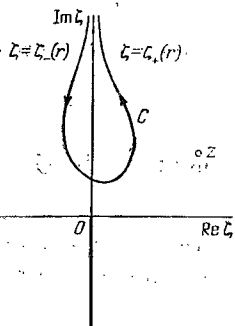


Рис. 2. Контур, на котором убывает функция $\exp\{\exp(-i\xi)^b\}$; жирная линия — линия разреза функции $(-i\xi)^b$.

На этих ветвях контура C имеем $\operatorname{Re} e^{(-i\xi)^b} = -e^{r^b}$ при $r \rightarrow \infty$. Построим функцию

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\xi \exp\{e^{(-i\xi)^b}\}}{(z - \xi)^2},$$

где точка $\xi = z$ лежит вне контура C , как показано на рис. 2.

Функция $h(z)$ является целой и при $z \rightarrow \infty$ удовлетворяет условиям

$$h(z) = \begin{cases} O(\exp\{e^{|z|^b}\}), & \left|\frac{\pi}{2} - \arg z\right| < \frac{\pi}{2b|z|^b}, \\ O\left(\frac{1}{|z|^2}\right), & \left|\frac{\pi}{2} - \arg z\right| > \frac{\pi}{2b|z|^b}. \end{cases}$$

При $b \geq 1$ функция $h(z)$ растет лишь в узкой области около мнимой оси. Поэтому функция

$$g(z) = h(z) [h(z^*)]^*$$

удовлетворяет требуемым условиям.

Построим последовательность функций

$$g_{\Gamma, \lambda}(z) = \int_{\Gamma_{\lambda}} dx' \psi(x') \prod_{\mu=0}^3 \frac{1}{\lambda} g\left(\frac{z_{\mu} - x'_{\mu}}{\lambda}\right). \quad (5.3)$$

Здесь $\psi(x')$ — произвольная целая функция — например, $\psi(x') = e^{iqx'}$, где q — произвольный 4-вектор,

$$\Gamma_{\lambda} = \{x: \min_{\xi \in S} \|x - \xi\| \geq \lambda d, x \in \Gamma \subset \mathbb{R}^4, \xi \in S = \bar{\Gamma} \setminus \Gamma\},$$

Γ — произвольная ограниченная область из \mathbb{R}^4 .

Последовательность (5.3) обладает следующими свойствами:

$$(1) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} g_{\Gamma, \lambda}(z) = \psi(z) \theta_{\Gamma}(z), \quad (5.4)$$

где

$$\theta_{\Gamma}(z) = \begin{cases} 1, & x \in \Gamma, \\ 0, & x \notin \Gamma. \end{cases}$$

Другими словами, в области $\Gamma + i\mathbb{R}^4$ последовательность $g_{\Gamma, \lambda}(z)$ равномерно сходится к аналитической функции $\psi(z)$, а в каждой точке области $(\mathbb{R}^4 \setminus \Gamma) + i\mathbb{R}^4$ сходится (неравномерно) к 0.

(2) Пусть функция четырех переменных $F(x)$ локально интегрируема и

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int dx F(x) g_{\Gamma, \lambda}(x) = 0 \quad (5.5)$$

для $\forall g_{\Gamma, \lambda}(z) \in \Pi(G)$, т.е. при любых целых $\psi(z)$ в (5.3) и $\Gamma \subseteq G$. Тогда $F(x) = 0$ почти всюду на G .

(3) Рассмотрим проектирующую последовательность в пространстве \mathbb{C}^1 :

$$g_{\Gamma, \lambda}(z) = \int_{\Gamma_\lambda} dx' \psi(x') \frac{1}{\lambda} g\left(\frac{z-x'}{\lambda}\right), \quad (5.6)$$

где

$$\Gamma_\lambda = \{x: a + d\lambda < x < b - d\lambda\}.$$

Пусть задан функционал

$$(F, g_{\Gamma, \lambda}) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi F(\xi) g_{\Gamma, \lambda}(\xi),$$

где $F(\xi)$ — целая функция, $\xi_j = \xi_j + i\eta_j$ ($j = 1, 2$) и $\xi_1 < \xi_2$. Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (F, g_{\Gamma, \lambda}) = \begin{cases} 0, & \xi_1 < \xi_2 \leq a < b, a < b \leq \xi_1 < \xi_2, \\ \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi F(\xi) \psi(\xi), & a < \xi_1 < \xi_2 < b, \\ \int_a^{\xi_2} d\xi F(\xi) \psi(\xi), & \xi_1 \leq a < \xi_2 < b, \\ \int_{\xi_1}^b d\xi F(\xi) \psi(\xi), & a < \xi_1 < b \leq \xi_2. \end{cases} \quad (5.7)$$

(4) Построенные нами проектирующие последовательности (5.3) релятивистски нековариантны в том смысле, что существует лишь одна система отсчета, где они имеют вид (5.3). Характеристическая функция области $\theta_\Gamma(x)$ в (5.4) удовлетворяет условию

$$\theta_{\Lambda\Gamma}(\Lambda x) = \theta_\Gamma(x),$$

где Λ — некоторое преобразование однородной группы Лоренца. Этому условию проектирующие последовательности не удовлетворяют при $\lambda > 0$, так как

$$\begin{aligned} g_{\Gamma, \lambda}^{(\Lambda)}(x) &= \int_{\Lambda\Gamma} dx' \psi(\Lambda^{-1}x') \prod_{\mu=0}^3 \frac{1}{\lambda} g\left(\frac{\Lambda_{\mu\nu}x'_\nu - x'_\mu}{\lambda}\right) = \\ &= \int_{\Gamma} dx' \psi(x') \prod_{\mu=0}^3 \frac{1}{\lambda} g\left(\frac{\Lambda_{\mu\nu}(x_\nu - x'_\nu)}{\lambda}\right) \neq g_{\Gamma, \lambda}(x). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Для релятивистски инвариантных функционалов, определяемых интегралами по вещественному пространству \mathbb{R}^4 ,

$$(F, g_{\Gamma, \lambda}^{(\Lambda)}) = \int dx F(x^2) g_{\Gamma, \lambda}^{(\Lambda)}(x)$$

в пределе $\lambda \rightarrow 0$ имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (F, g_{\Gamma, \lambda}^{(\Lambda)}) = \int_{\Lambda\Gamma} dx F(x^2) \psi(\Lambda^{-1}x) = \int_{\Gamma} dx F(x^2) \psi(x),$$

так что различие между последовательностями (5.3) и (5.8) несущественно.

Для релятивистски инвариантных функционалов, задаваемых интегралами по комплексному пространству \mathbb{C}^4 вида (4.19):

$$(K, g_{\Gamma, \lambda}^{(\Lambda)}) = \int d\rho a(\rho^2) g_{\Gamma, \lambda}^{(\Lambda)}(i\rho_4, \rho),$$

в пределе $\lambda \rightarrow 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (K, g_{\Gamma, \lambda}^{(\Lambda_1)}) \neq \lim_{\lambda \rightarrow 0} (K, g_{\Gamma, \lambda}^{(\Lambda_2)})$$

при $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$. Причина такого различия состоит в том, что проекция релятивистски инвариантной области в \mathbb{C}^4 (инвариантной относительно евклидовых четырехмерных вращений в пространстве переменных (x_1, x_2, x_3, x_4)) не является релятивистски инвариантной. Поэтому изучение пространственно-временных свойств обобщенных функций должно проводиться при помощи проектирующих последовательностей $g_{\Gamma, \lambda}^{(\Lambda)}$ при всевозможных Λ .

§ 6. Нелокальные свойства функций $K(x-y)$

Рассмотрим свойства обобщенных функций $K(x-x')$ для случая IV в представлениях (4.19) для типов А и Б при помощи проектирующих последовательностей. Сначала рассмотрим обобщенные функции типа А. Имеем

$$\begin{aligned} (K_A, g_{\Gamma, \lambda}^{(\Lambda)}) &= \int_{\rho^2 \leq l^2} d\rho a(\rho^2) g_{\Gamma, \lambda}^{(\Lambda)}(i\rho_4, \rho) = \\ &= \int d\rho a(\rho^2) \int_{\Gamma} dx' \psi(\Lambda^{-1}x') \prod_{\mu=0}^3 \frac{1}{\lambda} g\left(\frac{\Lambda_{\mu\nu}(\rho_\nu - x'_\nu)}{\lambda}\right) = \\ &= \int d\rho a(\rho^2) \int_{\Lambda\Gamma} dx' \psi(x') \prod_{\mu=0}^3 \frac{1}{\lambda} g\left(\frac{\rho_\mu - x'_\mu}{\lambda}\right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} (K_A, g_{\Gamma, \lambda}^{(\Lambda)}) &= \int_{\rho^2 \leq l^2} d\rho a(\rho^2) \int_{\Lambda\Gamma} dx \psi(x) \delta(x_0) \delta(\rho - x) = \\ &= \int_{\Lambda\Gamma} dx \psi(x) \delta(x_0) \theta(l^2 - x^2) b(x^2), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где

$$\int_{\rho^2 \leq l^2} d\rho a(\rho^2) \delta(\rho - x) = \theta(l^2 - x^2) b(x^2).$$

Полученный интеграл равен нулю всегда, когда

$$\Delta\Gamma \cap R_l = 0, \quad (6.3)$$

где

$$R_l = \{x: x_0 = 0, x^2 \leq l^2\}.$$

Это соотношение выполняется в следующих случаях, во-первых, когда область Γ лежит в конусах будущего или прошедшего с вершиной в точке $x = 0$, во-вторых, когда область Γ лежит вне пространственноподобного конуса

$$x^2 \leq -l^2 \quad (x_0^2 - x^2 \leq -l^2) \quad (6.4)$$

и, в-третьих, для тех областей Γ и тех систем координат Λ , для которых область $\Delta\Gamma$ не пересекается с гиперплоскостью $x_0 = 0$.

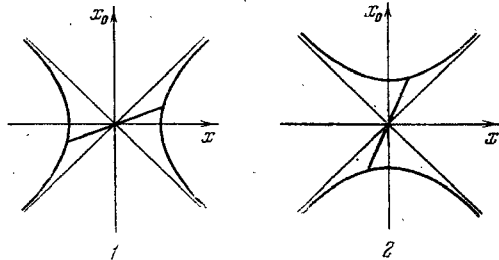


Рис. 3. Положение определяющих множеств обобщенных функций K_A и K_B .

Поскольку Γ ограничена, последнее условие выполняется всегда для достаточно больших скоростей v , определяющих преобразование Лоренца Λ . Таким образом, можно утверждать, что определяющие множества обобщенной функции K_A являются ограниченными и расположенными вне причинного конуса и внутри гиперboloида (6.4), как показано на рис. 3 (1). В той системе координат, где проектирующие последовательности имеют вид (5.3), определяющим множеством исследуемой обобщенной функции K_A является шар R_l (6.3).

С точки зрения изучения причинности и распространения сигналов эти обобщенные функции описывают сигналы, распространяющиеся с бесконечной скоростью в пространственно-подобном направлении на конечном расстоянии, определяемое параметром l . Поэтому рассматриваемые обобщенные функции могут служить кандидатами на роль релятивистски инвариантного описания абсолютно жесткого тела конечных размеров. При помощи обобщенных функций этого типа мы будем строить теорию нелокальных взаимодействий.

Рассмотрим теперь обобщенные функции типа Б. Имеем, повторяя проведенные выше выкладки:

$$\begin{aligned} (K_B, g_{\Gamma, \lambda}^{(\Lambda)}) &= \int_{\rho^2 \leq l^2} d\rho a(\rho^2) g_{\Gamma, \lambda}^{(\Lambda)}(\rho_0, i\rho) = \\ &= \int d\rho a(\rho^2) \int_{\Delta\Gamma} dx' \psi(x') \prod_{\mu=0} \frac{1}{\lambda} g\left(\frac{-i\rho_\mu - x'_\mu}{\lambda}\right), \end{aligned} \quad (6.5)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} (K_B, g_{\Gamma, \lambda}^{(\Lambda)}) &= \int d\rho a(\rho^2) \int_{\Delta\Gamma} dx \psi(x) \delta(\rho_0 - x_0) \delta(x) = \\ &= \int_{\Delta\Gamma} dx \psi(x) \delta(x) \theta(l^2 - x_0^2) c(x_0^2), \end{aligned} \quad (6.6)$$

где

$$\int_{\rho^2 \leq l^2} d\rho a(\rho^2) \delta(\rho_0 - x_0) = \theta(l^2 - x_0^2) c(x_0^2).$$

Полученный интеграл равен нулю всегда, когда

$$\Delta\Gamma \cap C_l = 0, \quad (6.7)$$

где

$$C_l = \{x: x_0^2 \leq l^2, x = 0\}.$$

Это равенство выполняется в следующих случаях: во-первых, когда область Γ лежит вне времениподобных конусов, во-вторых, когда Γ лежит внутри гиперboloидов $x^2 \geq l^2$ ($x_0^2 - x^2 \geq l^2$) и, в-третьих, для тех областей Γ и систем координат Λ , для которых область $\Delta\Gamma$ удалена от точки $x = 0$ на расстояние по времени, большее l .

Таким образом, в этом случае можно утверждать, что определяющие множества обобщенной функции K_B являются ограниченными и лежат во времениподобной области, ограниченной гиперboloидом $x^2 \geq l^2$, как показано на рис. 3 (2).

В системе координат, где проектирующие последовательности имеют вид (5.3), определяющим множеством обобщенной функции K_B является отрезок C_l (6.7).

С точки зрения распространения сигналов обобщенная функция K_B описывает сигналы, распространяющиеся с ограниченной скоростью как в направлении будущего, так и в направлении прошлого. В настоящее время трудно дать разумную физическую интерпретацию обобщенным функциям подобного типа.

Существует одно интересное представление функционала (4.19). Перепишем интеграл в (4.19) в сферических координатах

$$(K_A, f) = \int_0^l dr r^3 \int_0^\pi d\alpha \sin^2 \alpha \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \alpha(r^2) \times \\ \times f(ir \cos \alpha, r \sin \alpha \cos \theta, r \sin \alpha \sin \theta \cos \varphi, r \sin \alpha \sin \theta \sin \varphi). \quad (6.8)$$

В плоскости комплексного переменного $\alpha + i\beta$ интегрирование проводится по отрезку $[0, \pi]$.

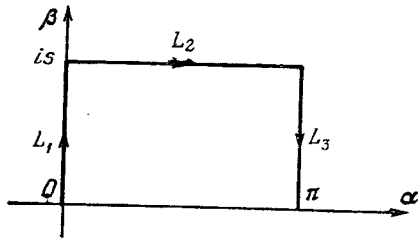


Рис. 4. Контур интегрирования в плоскости $\alpha + i\beta$.

Поскольку подынтегральная функция целая, контур интегрирования можно сдвинуть, как показано на рис. 4. Здесь s — некоторое произвольное положительное число. Легко проверить, что вещественные части аргументов z_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) функции $f(z_0, z_1, z_2, z_3)$ в (6.8) ведут себя следующим образом:

на контурах $L_1 = [0, is]$ и $L_3 = [\pi + is, \pi]$

$$\operatorname{Re} z_\mu = x_\mu = 0,$$

на контуре $L_2 = [is, is + \pi]$

$$\begin{aligned} x_0 &= r \operatorname{sh} s \sin \alpha, \\ x_1 &= r \operatorname{ch} s \sin \alpha \cos \theta, \\ x_2 &= r \operatorname{ch} s \sin \alpha \sin \theta \cos \varphi, \\ x_3 &= r \operatorname{ch} s \sin \alpha \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (6.9)$$

находятся на конусе

$$V_s = \{x: x_0 > 0, x_0^2 = (\operatorname{th} s)^2 x^2\}. \quad (6.10)$$

Для любого $\delta > 0$ всегда s можно выбрать столь большим, что $1 - \delta < \operatorname{th} s < 1$. Это означает, что конус V_s может быть выбран сколь угодно близко к световому конусу $x_0 \geq 0, x^2 = 0$.

Полученное представление интересно тем, что позволяет поместить определяющее множество функционала в область, проекция которой на вещественное пространство \mathbb{R}^4 находится в окрестности светового конуса. Тем самым можно было бы ожидать, что рассматриваемые обобщенные функции могли бы быть кандидатами на описание нелокальных взаимодействий и удовлетворять условию микропричинности.

Однако у нас нет в настоящее время аналитического аппарата, позволившего бы выделить эту проекцию. Проектирующие

последовательности функций вида (5.3) также бессильны помочь в этой проблеме, поскольку проведенное преобразование в (6.8) не является линейным относительно координат x_μ и не может быть связано с преобразованиями Лоренца.

В целом изучение пространственно-временных свойств аналитических функционалов требует дальнейшего изучения.

§ 7. Нелокальные обобщенные функции. Случаи V и VI

Обратимся теперь к обобщенным функциям $K(x)$, для которых коэффициенты $\{c_n\}$ удовлетворяют условиям V и VI.

Прежде всего покажем, что существуют такие меры в комплексной ζ -плоскости, что

$$c_n a_n = \int \zeta^{2n} d\mu(\zeta), \quad (7.1)$$

причем мера $\mu(\zeta)$ удовлетворяет условию

$$\int |d\mu(\zeta)| e^{|\zeta|^{1/N}} < \infty \quad \forall N > 0 \quad (7.2)$$

для случая V и

$$\int |d\mu(\zeta)| e^{c|\zeta|^{2/a}} < \infty \quad \exists c > 0 \quad (7.3)$$

для случая VI при $a < 2$.

Для этого построим функцию

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n a_n}{(2n)!} z^{2n},$$

где числа a_n определяются формулой (4.3). Эта функция является целой. Точный порядок роста функции $g(z)$ обозначим через $H_g(s)$ и оценим его при помощи соотношения (2.6), точность которого достаточна для наших целей. Условия V и VI означают, что для любых $\varepsilon > 0$ и $0 < \alpha < a$ существуют такие положительные числа B_ε и C_ε , B и C , что

$$\begin{aligned} |c_n| &\leq C_\varepsilon B_\varepsilon^n n^{\varepsilon n}, & \varepsilon > 0 & \text{(случай V)}, \\ |c_n| &\leq C B^n n^{an}, & a < 2 & \text{(случай VI)}. \end{aligned}$$

Тогда оценка (2.6) легко проводится. Приведем окончательные результаты.

Случай V. Нелокальные обобщенные функции при $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|^{1/n}}{n^\varepsilon} = 0$

$$\begin{aligned} H_g(s) &\leq \operatorname{const} \cdot s^{1/(1-\varepsilon)} \quad \forall \varepsilon > 0, \\ h_g(r) &= \max_{s \geq 0} (sr - H_g(s)) > r^{1/\varepsilon}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Это означает, что для каждой заданной последовательности коэффициентов $\{c_n\}$, удовлетворяющих условию V, точный порядок роста функции $g(z)$ описывается функцией $H_g(s) = s\lambda(s)$, где $\lambda(s)$ — некоторая медленно меняющаяся функция. Функция $h_g(r)$ в (7.4) растет быстрее любого полинома, т. е.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^N}{h_g(r)} = 0 \quad \forall N > 0.$$

Приведем пример. Пусть

$$c_n = l^{2n} (\ln n)^{2\gamma n},$$

где γ и l — некоторые положительные числа. Тогда

$$H_g(s) = (sl) (\ln sl)^\gamma, \quad h_g(r) = \gamma (r/l) \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot e^{(r/l)^{1/\gamma}}.$$

Значит,

$$|g(z)| \leq \text{const} \cdot \exp\{|z| (\ln|z|)^\gamma\}$$

и мера $\mu_g(\xi)$, определяющая представление Фурье (2.8) функции $g(z)$, удовлетворяет условию

$$\int |d\mu_g(\xi)| e^{h_g((1-\delta)|\xi|)} < \infty$$

при некотором $\delta > 0$. Естественно, что эта мера тем более удовлетворяет условию (7.2).

Случай VI. *Нелокальные обобщенные функции при*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|^{1/n}}{n^a} = A < \infty \quad (0 < a < 2).$$

$$H_g(s) = \text{const} \cdot s^{2/(2-a)},$$

$$h_g(r) = \max_{s \geq 0} (sr - H_g(s)) = \text{const} \cdot r^{2/a}. \quad (7.5)$$

Поэтому мера $\mu_g(\xi)$ в представлении Фурье (2.8) для функции g удовлетворяет условию (7.3) при некоторых $c > 0$.

Воспользовавшись формулами (7.1) и (4.2), получим для функционала (1.4) представление

$$(K, f) = \int d\mu(\xi) \int_{\rho^2=1} d\rho f(i\rho_1\xi, \rho\xi), \quad (7.6)$$

где мера $\mu(\xi)$ удовлетворяет условиям (7.2) и (7.3).

Полученный функционал не может быть ограничен на всем пространстве \mathfrak{Z} . Чтобы получить условие сходимости интеграла в (7.6), проведем оценку:

$$|(K, f)| \leq \int_{\rho^2=1} |d\mu(\xi)| \int d\rho |f(i\rho_1\xi, \rho\xi)| \leq$$

$$\leq \|K\| \max_{\rho^2=1} \max_{|\xi| \geq 0} \{e^{-c|\xi|^q} |f(i\rho_1\xi, \rho\xi)|\}.$$

Здесь c — некоторое положительное число,

$$\|K\| = \int |d\mu(\xi)| e^{c|\xi|^q} < \infty,$$

а $q = N$ для случая V и $q = 2/a$ для случая VI.

Пусть $f(z) \in \mathfrak{Z}_\alpha$, тогда

$$\max_{\rho^2=1} |f(i\rho_1\xi, \rho\xi)| \leq C \max_{\rho^2=1} \exp\left\{A|\xi|^q \sum_{j=1}^4 |\rho_j|^\alpha\right\} \leq Ce^{B|\xi|^\alpha}$$

при некоторых положительных C и B . Имеем

$$|(K, f)| \leq \text{const} \cdot \max_{|\xi|} \exp\{-c|\xi|^q + B|\xi|^\alpha\} < \infty \quad (7.7)$$

только в случае, когда $q > \alpha$.

В случае V обобщенные функции $K(x)$ определены на \mathfrak{Z}_∞ , поскольку q в (7.7) может быть выбрано произвольно большим.

В случае VI обобщенные функции $K(x)$ определены на всех \mathfrak{Z}_α при $\alpha < 2/a$, так как только в этом случае функционал (K, f) конечен согласно оценке (7.7).

Фурье-образ рассматриваемой обобщенной функции

$$\begin{aligned} \tilde{K}(p^2) &= (K, e^{ip^2}) = \\ &= \int d\mu(\xi) \int_{\rho^2=1} d\rho e^{i\rho_1\xi + ip\rho\xi} = \int d\mu(\xi) 2\pi^2 \frac{J_1(\xi\sqrt{-p^2})}{\xi\sqrt{-p^2}} \end{aligned} \quad (7.8)$$

является целой функцией, точный порядок которой равен $H(\sqrt{|p^2|})$. Действительно, справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\tilde{K}(p^2)| &\leq \int |d\mu(\xi)| \left| 2\pi^2 \frac{J_1(\xi\sqrt{-p^2})}{\xi\sqrt{-p^2}} \right| \leq \\ &\leq \|K\| \max_{\xi} \left\{ \left| 2\pi^2 \frac{J_1(\xi\sqrt{-p^2})}{\xi\sqrt{-p^2}} \right| e^{-h(|\xi|)} \right\} \leq \\ &\leq \text{const} \cdot \max_{|\xi|} \exp\{|\xi|\sqrt{|p^2|} - c|\xi|^q\} \leq \\ &\leq \text{const} \cdot \exp\left\{B(\sqrt{|p^2|})^{\frac{q}{q-1}}\right\}. \end{aligned}$$

Значит,

$$(V) \quad \ln|\tilde{K}(p^2)| \leq \sqrt{|p^2|} \cdot \lambda(\sqrt{|p^2|}), \quad (7.9)$$

$$(VI) \quad \ln|\tilde{K}(p^2)| \leq \text{const} \cdot (\sqrt{|p^2|})^{\frac{2}{2-a}},$$

т. е. порядок роста функции $\tilde{K}(p^2)$ в случае VI $\rho \leq \frac{1}{2-a}$.

Итак, мы получили, что в рассматриваемом случае функционал (7.6), где мера удовлетворяет условиям (7.2) и (7.3), определен на пространствах целых функций \mathfrak{Z}_∞ и \mathfrak{Z}_α ($\alpha < 2/a$). Этот

Функционал является существенно нелокальным, так как, по существу, он эквивалентен интегральному оператору с ядром, отличным от нуля во всем пространстве-времени.

Вновь для функций из \mathfrak{Z}_∞ и \mathfrak{Z}_α будем рассматривать два типа:

$$\text{тип А} \quad c_n a_n = \int_0^\infty u^{2n} d\mu_A(u),$$

$$\text{тип Б} \quad c_n a_n = (-1)^n \int_0^\infty u^{2n} d\mu_B(u).$$

Функционал (7.6) записывается в виде

$$\text{тип А} \quad (K_A, f) = \int_0^\infty d\mu_A(u) \int_{\rho^2=1} d\rho f(i\rho u, \rho u),$$

$$\text{тип Б} \quad (K_B, f) = \int_0^\infty d\mu_B(u) \int_{\rho^2=1} d\rho f(\rho u, i\rho u).$$

Фурье-образы $K(p^2)$, являясь целыми функциями точного порядка роста $H(\sqrt{|p^2|})$, согласно (7.4) и (7.5), ведут себя следующим образом:

$$\begin{array}{lll} & p^2 \rightarrow +\infty & p^2 \rightarrow -\infty \\ \tilde{K}_A(p^2) & O(\exp\{H(\sqrt{|p^2|})\}) & O\left(\frac{1}{|p^2|}\right) \\ \tilde{K}_B(p^2) & O\left(\frac{1}{|p^2|}\right) & O(\exp\{H(\sqrt{|p^2|})\}) \end{array}$$

Для изучения пространственно-временных свойств обобщенных функций в случае V могут быть применены проектирующие последовательности функций. Однако в пространствах \mathfrak{Z}_α ($\alpha < 2/a$) проектирующие последовательности функций уже отсутствуют, поскольку \mathfrak{Z}_α состоят из целых функций конечного порядка роста.

В данном случае необходимо использовать другой способ изучения пространственно-временных свойств функций $K(x)$. Таким эвристическим способом, используемым при проверке условий причинности и макропричинности в квантовой теории, является изучение распространения, локализации и размывания волновых пакетов.

С физической точки зрения функции основного пространства описывают распределения какой-либо физической характеристики. Эти распределения, в дальнейшем будем условно называть их волновыми пакетами, задаются в вещественном пространстве-времени, и функции, описывающие их, быстро убывают вне некоторой ограниченной области в пространстве \mathbb{R}^4 .

Обобщенная функция $K(x-x')$, используемая нами в качестве формфактора, имеет смысл оператора распространения, связанного с определенной динамикой процесса. В исследуемом случае нас интересуют ее пространственно-временные свойства. Поэтому нам следует выбрать некоторую функцию $\varphi(x)$, сосредоточенную в какой-либо ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^4$, и посмотреть, где в пространстве \mathbb{R}^4 будет сосредоточена функция

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= (K, \varphi)(x) = \int dx' K(x-x') \varphi(x') = \\ &= \int d\mu(\xi) \int_{\rho^2=1} d\rho \varphi(x_0 + i\rho_4 \xi, \mathbf{x} + \rho \xi). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Согласно основной идее нелокальной теории (см., например, К. Блох (1952) или М. Кретьен и Р. Пайерлс (1953)), условие макроскопической причинности эквивалентно требованию, чтобы «эффективный волновой пакет» $\Phi(x)$ был сосредоточен в некоторой ограниченной области $G_\Phi \subset \mathbb{R}^4$, коль скоро «начальный волновой пакет» $\varphi(x)$ сосредоточен в ограниченной области $G_\varphi \subset \mathbb{R}^4$.

Так как в наших пространствах основных функций отсутствуют финитные функции, нам следует выбрать такой «волновой пакет», который описывается функцией, убывающей «достаточно быстро» вне некоторой ограниченной области $G_\varphi \subset \mathbb{R}^4$. Поскольку причинные сигналы затухают при $x, t \rightarrow \infty$ как $|t|^{-3/2}$ (свойство гладких решений уравнения Клейна—Гордона), в физике принято считать, что функция убывает «достаточно быстро», если она убывает экспоненциально, т.е. удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} |\varphi(x)| e^{a\|x\|^N} = 0 \quad (7.11)$$

при некоторых $a > 0$ и $N > 0$. Тогда условие макроскопической причинности эквивалентно требованию, чтобы «эффективный волновой пакет» $\Phi(x)$ убывал бы достаточно быстро, если функция $\varphi(x)$, характеризующая «начальный волновой пакет», убывает достаточно быстро вне некоторой области G_φ .

Рассмотрим теперь функционал (7.10) в случае VI, когда функции основного пространства принадлежат Z_α ($1 < \alpha < 2/a$). Волновые пакеты, быстро убывающие при $\|x\| \rightarrow \infty$, естественно описывать функциями из пространства $Z_\alpha^a \subset Z_\alpha$. Если $\varphi(x) \in Z_\alpha^a$, то при $|x_\mu| \rightarrow \infty$

$$|\varphi(x)| \sim \exp\left\{-\text{const} \cdot \sum_{\mu=0}^3 |x_\mu|^a\right\}.$$

Заметим, что в пространстве Z_α не существуют функции, которые убывали бы более быстро. Однако такая степень убывания вполне приемлема с точки зрения физических требований (см. (7.11)).

Пусть волновой пакет $\varphi(x)$ в (7.10) описывается функцией из Z_a^a . Запишем функционал (7.10) в импульсном представлении:

$$\Phi(x) = (K, \varphi)(x) = \int dp \tilde{K}(p^2) \tilde{\varphi}(p) e^{ipx}.$$

Функция $\tilde{\varphi}(p) \in Z_{a'}^{a'}$, где $a' = \frac{a}{a-1} > \frac{2}{2-a}$ и $\tilde{K}(p^2) \in Z_{\frac{2}{2-a}}^{\frac{2}{2-a}}$.

Поскольку $a' > \frac{2}{2-a}$, целая функция $\tilde{K}(p^2)$ является мультипликатором в пространстве $Z_{a'}^{a'}$, т. е.

$$\tilde{\Phi}(p) = \tilde{K}(p^2) \tilde{\varphi}(p) \in Z_{a'}^{a'}.$$

Следовательно, $\Phi(x) \in Z_a^a$ и удовлетворяет условию (7.11). Таким образом, «эффективный волновой пакет» $\Phi(x)$ убывает столь же быстро при $|x_\mu| \rightarrow \infty$, что и «начальный волновой пакет».

Итак, мы видим, что в случае VI обобщенные функции $K(x-x')$, определяющие множества которых, строго говоря, занимают все пространство \mathbb{R}^4 , тем не менее не сильно «размывают» физические волновые пакеты и поэтому, в принципе, могут быть использованы при построении нелокальной теории.

§ 8. Расширение функционалов

Коснёмся ещё интересного вопроса о возможном расширении функционалов $K(x-x')$ на более широкие пространства основных функций. Мы увидим, что пространственно-временные свойства нелокальных обобщенных функций, исследуемые при помощи «волновых пакетов», зависят от того, насколько гладкими функциями описываются эти пакеты.

Рассмотрим лишь такие обобщенные функции $K(x-x')$ вида (1.3), для которых фурье-образ $\tilde{K}(p^2)$ является целой функцией в p^2 -плоскости и убывает при $p^2 \rightarrow \pm \infty$, т. е.

$$\lim_{u \rightarrow \pm \infty} \tilde{K}(u) = 0. \quad (8.1)$$

Для простоты будем ещё считать, что

$$\tilde{K}(-u) = \tilde{K}(u). \quad (8.2)$$

Обобщенные функции, удовлетворяющие этим условиям, описываются случаем VI при $a \geq 1$, так как условию (8.1) могут удовлетворять лишь целые функции порядка не ниже первого.

В качестве функций основного пространства выберем функции $\varphi(x) \in Z_a^a$ при $a < 2$, что соответствует выбору $a \geq 1$ в случае VI.

Рассмотрим теперь функционал

$$(K, \varphi)(x) = \int dx' K(x-x') \varphi(x') = \int dp \tilde{K}(p^2) \tilde{\varphi}(p) e^{ipx}. \quad (8.3)$$

Поскольку $K(z)$ — целая функция порядка роста $\rho = \frac{1}{2-a} > 1$ в z -плоскости и удовлетворяет условию (8.1), то для нее справедливо представление Фурье

$$\tilde{K}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{ivu} \mathcal{K}(v) = 2 \int_0^{\infty} dv \mathcal{K}(v) \cos vu, \quad (8.4)$$

где функция $\mathcal{K}(v)$, согласно теореме о представлении целых функций, удовлетворяет неравенству

$$|\mathcal{K}(v)| \leq \text{const} \cdot e^{-|v| \frac{1}{a-1}}.$$

Подставляя представление (8.4) в (8.3) и используя равенство

$$\int d^4 p e^{ivp^2 + ipx} = \frac{-i\pi^2}{v|v|} e^{-i \frac{x^2}{4v}},$$

получим

$$(K, \varphi)(x) = \int dx' \varphi(x') Q((x-x')^2), \quad (8.5)$$

где

$$Q((x-x')^2) = -2\pi^2 \int_0^{\infty} du \mathcal{K}\left(\frac{1}{u}\right) \sin \frac{(x-x')^2 u}{4}. \quad (8.6)$$

Обращая представление Фурье для $\mathcal{K}(v)$ в (8.6), можно получить

$$Q((x-x')^2) = -4\pi \int_0^{\infty} ds \tilde{K}(s) \sqrt{\frac{s}{(x-x')^2}} \times \\ \times \left[K_1(\sqrt{s(x-x')^2}) - \frac{\pi}{2} N_1(\sqrt{s(x-x')^2}) \right], \quad (8.7)$$

где $K_1(u)$ и $N_1(u)$ — известные функции Бесселя.

Таким образом, мы видим, что рассматриваемые функционалы с обобщенными функциями $K(x-x')$ (1.3), определенными на пространствах Z_a^a ($\alpha < 2/a \leq 2$) с дополнительным условием (8.1), эквивалентны функциям $Q((x-x')^2)$, зависящим от интервала $(x-x')^2 = (x_0-x'_0)^2 - (x-x')^2$.

Итак, согласно (8.5) и (8.7), функционал может быть записан в двух эквивалентных формах:

$$\Phi(x) = (K, \varphi)(x) = \int d\mu(\xi) \int_{\rho^2=1} d\rho \varphi(x_0 + i\rho_4 \xi, x + \rho \xi), \quad (8.8)$$

$$\Phi(x) = (K, \varphi)(x) = \int dx' Q((x-x')^2) \varphi(x') = \int dp \tilde{K}(p^2) \tilde{\varphi}(p) e^{ipx}. \quad (8.9)$$

Функционал в форме (8.9) может быть расширен на класс функций $S, D, C(q, r)$ и C как функция $Q(x^2)$ от x^2 .

Интересно проследить, как изменяются свойства «эффективного волнового пакета» $\Phi(x)$, т. е. функционала $(K, \varphi)(x)$, в зависимости от свойств функций основного класса, к которому принадлежит «исходный волновой пакет» $\varphi(x)$.

Если функция $\tilde{\varphi}(p)$ целая, то, как говорилось выше, $\Phi(x)$ убывает столь же быстро, что и $\varphi(x)$. Если $\tilde{\varphi}(p)$ — просто дифференцируемая q раз по каждому аргументу функция, убывающая достаточно быстро вместе со всеми своими производными, то тогда

$$x_0^q \dots x_3^q \Phi(x) = \int dp e^{ipx} \frac{\partial^4 q}{\partial p_0^q \dots \partial p_3^q} \{ \tilde{K}(p^2) \tilde{\varphi}(p) \} < \infty$$

и

$$|\Phi(x)| \leq \frac{\text{const}}{\prod_{\mu=0}^3 (1 + |x_\mu|)^q} \quad (8.10)$$

при $|x_\mu| \rightarrow \infty$. Таким образом, мы видим, что во всех случаях, когда фурье-образ нелокальной обобщенной функции является целой функцией в p^2 -плоскости, «эффективный волновой пакет» убывает столь же быстро, как и исходный.

Положение изменится, если мы в представлении функционала (8.9) будем считать, что функция $Q((x-x')^2)$ может быть достаточно произвольной функцией интервала $(x-x')^2$, т. е. фурье-образ $\tilde{K}(p^2)$ уже не будет целой функцией.

Пусть в качестве формфакторов будут использованы мероморфные функции (формфакторы типа регуляризации Паули — Вилларса), например, $\tilde{K}(p^2) = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - p^2 - i\epsilon}, \frac{\Lambda^4}{\Lambda^4 + (p^2)^2}$ и т. д. Тогда в представлении (8.9) функция $\tilde{K}(p^2)\tilde{\varphi}(p)$ будет также мероморфной, если $\tilde{\varphi}(p)$ — целая, и эффективный волновой пакет $\Phi(x)$ будет убывать не быстрее, чем линейная экспонента, хотя «исходный волновой пакет» $\varphi(x)$ мог убывать быстрее.

Если же вообще не делать никаких предположений о гладкости волнового пакета $\varphi(x)$ и функции $Q((x-x')^2)$, то убывание «эффективного волнового пакета» будет еще более медленным и, более того, возникнет слабо затухающий не причинный сигнал вдоль светового конуса. Действительно, пусть функционал записывается в форме (8.9), и известно, что $Q(x^2)$ — некоторая функция от x^2 , которая быстро убывает при $x^2 \rightarrow \pm \infty$ и приблизительно сосредоточена в области

$$G_K = [x: -l^2 < x^2 < l^2]. \quad (8.11)$$

Пусть теперь «волновой пакет» $\varphi(x) \in C$ и отличен от нуля в области

$$G_\varphi = [x: -a < x_\mu < a, \mu = 0, 1, 2, 3]. \quad (8.12)$$

Тогда легко показать, что действие «пропатора» $Q((x-x')^2)$ на такой волновой пакет приводит к появлению слабо затухающего не причинного сигнала вдоль светового конуса. Для простоты рассмотрим случай двух переменных (t, x) . Имеем

$$\Phi(t, x) = \iint_{-\infty}^{\infty} dt' dx' Q(t'^2 - x'^2) \varphi(t+t', x+x'). \quad (8.13)$$

В плоскости (t', x') (см. рис. 5) нарисуем области, где отличны от нуля подынтегральные функции. Легко видеть, что интеграл

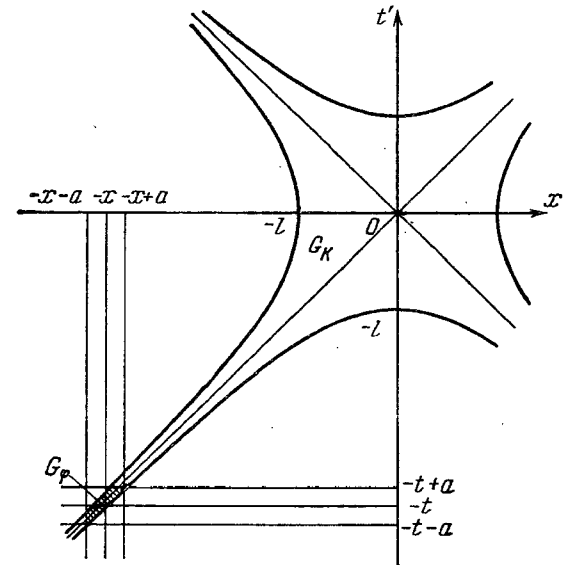


Рис. 5. Область перекрытия волнового пакета φ с формфактором Q в интеграле (8.13).

будет отличен от нуля лишь в том случае, когда области G_K и G_φ пересекаются (заштрихованный участок на рис. 5). При больших t и x это возможно, когда

$$|t - x^2| \leq a, \quad t \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty.$$

При этом функция $\Phi(t, x)$ по порядку величины будет равна

$$\Phi(t, x) \sim Q(0) \varphi(0) al/x,$$

где al/x — порядок величины площади пересечения областей G_K и G_φ при $x \rightarrow \infty$. Таким образом, мы получили, что формфакторы, зависящие от x^2 , приводят к появлению слабо затухающего не причинного сигнала на больших расстояниях вдоль светового конуса. Этот результат хорошо известен (см. К. Блох

Таблица 1

Случай	$\{c_n\}$	Характеристики обобщенных функций	Пространство основных функций	$\tilde{K}(p^2)$	Возможность убывания в p^2 -плоскости	Порядок роста $\tilde{K}(p^2)$
I	$c_n = 0$ $n > n_0 \geq 0$	Локальные Строго локальные	S, D	Полином $ \tilde{K}(p^2) = O(p^2 ^{n_0})$ $p^2 \rightarrow \infty$	Не существует функций убывания при $ p^2 \rightarrow \infty$ в каком-либо направлении p^2 -плоскости	$\rho = 0$
II	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} c_n ^{1/2n} < \infty$		$\mathcal{D} \cap \mathcal{D}$ плотно в D	$\int_0^{\infty} \frac{d\mu \ln \tilde{K}(\mu) }{1 + \mu^2} < \infty$		$\rho < \frac{1}{2}$
III	$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n ^{1/n} = 0$		\mathcal{D}^0, Z^0	$ \tilde{K}(p^2) \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon \sqrt{ p^2 }}$ $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$		$\rho < \frac{1}{2}$
IV	$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n ^{1/n} = l^2 < \infty$	Нелокальные	\mathcal{D}, Z	$ \tilde{K}(p^2) \leq C_\varepsilon e^{(l + \varepsilon) \sqrt{ p^2 }}$ $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$	Существует только одно направление в p^2 -плоскости, вдоль которого $\tilde{K}(p^2)$ может убывать	$\rho = \frac{1}{2}$
V	$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{ c_n ^{1/n}}{n^\varepsilon} = 0$ $\forall \varepsilon > 0$		$\mathcal{D}_\infty, Z_\infty$	$\tilde{K}(p^2) = O(\exp\{\sqrt{ p^2 } \lambda(\sqrt{ p^2 })\})$ $p^2 \rightarrow \infty$		$\rho = \frac{1}{2}$
VI	$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{ c_n ^{1/n}}{n^a} = A < \infty$ $0 < a < 2$		\mathcal{D}_a, Z_a $a < 2/a$	$\tilde{K}(p^2) = O\left(\exp\left\{b(\sqrt{ p^2 })^{\frac{2}{2-a}}\right\}\right)$ $p^2 \rightarrow \infty, \exists b > 0.$		$\rho = \frac{1}{2-a} > \frac{1}{2}$

(1952), М. Кретьев и Р. Пайерлс (1953), Д. И. Блохинцев (1957), Д. А. Киржниц (1966)).

Кроме того, интересно отметить, что функционал в форме (8.9) допускает расширение на δ -образные «волновые пакеты». Если $\varphi(x) = \delta(x)$, то

$$\Phi(x) = \int dx' Q(x'^2) \delta(x + x') = Q(x^2).$$

В этом случае «эффективный волновой пакет» совсем не затухает вдоль светового конуса.

Итак, мы получили известный результат, что пространственно-временные свойства формфактора $K(x - x')$ определяются как свойствами функции $Q(x^2)$, так и свойствами исходного волнового пакета. При этом, чем более «гладкой» функцией описывается исходный волновой пакет, тем быстрее убывает эффективный волновой пакет. Если функции $Q(x^2)$ и исходные волновые пакеты $\varphi(x)$ выбираются таким образом, что их фурье-образы являются целыми функциями, то эффективный волновой пакет (8.8) или (8.9) убывает вне некоторой области, где сосредоточена функция $\varphi(x)$ столь же быстро, как и исходный волновой пакет $\varphi(x)$.

В помещенной здесь итоговой таблице (табл. 1) собраны основные результаты исследований, проведенных в гл. II.

АКСИОМЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ S-МАТРИЦЫ

Законы издавать добрые, человеческому
естеству приличные; противоестественных
же законов, а тем паче невятных и к
исполнению неудобных не публиковать.

М. Е. Салтыков-Щедрин. История одного
города

§ 1. Основные свойства S-матрицы в локальной и нелокальной квантовой теории поля

Как говорилось в гл. I, трудности квантовой теории поля, связанные с теоремой Хаага и наличием ультрафиолетовых расходимостей, заставляют вводить различные промежуточные регуляризации и добавлять некоторое число контрчленов к лагранжиану взаимодействия так, чтобы у регуляризованной матрицы рассеяния $S^{(\Lambda, L)}$ существовал конечный предел

$$S = \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} S^{(\Lambda, L)}. \quad (1.1)$$

Все эти процедуры носят чисто конструктивный характер, так как они, строго говоря, только символически связаны с решением квантовополевого уравнения Шредингера.

Поэтому S-матрица, полученная в результате предельного перехода (1.1), должна быть исследована «внимательно и со всех сторон», чтобы быть уверенным, что ее свойства не противоречат требованиям релятивистской квантовой теории поля.

Для этого нам необходимо перечислить требования (аксиомы), которым должна удовлетворять S-матрица в квантовой теории поля. Эти аксиомы наиболее четко были сформулированы Н. Н. Боголюбовым и использовались в аксиоматическом подходе построения S-матрицы по теории возмущений, а также при выводе дисперсионных соотношений (см. книги Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова (1973) и Н. Н. Боголюбова, Б. В. Медведева и М. К. Поливанова (1958)).

Эта программа построения теории исходит из предложения Гайзенберга рассматривать такие матричные элементы S-матрицы, которые отвечают переходам между асимптотическими устойчивыми состояниями. На опыте мы наблюдаем лишь вероятности переходов между состояниями частиц, которые вполне

могут рассматриваться как свободные и невзаимодействующие. Только по изучению характера этих вероятностных распределений мы можем судить о том, что происходит на малых расстояниях с элементарными частицами.

В этом параграфе мы сформулируем те основные физические положения, на которых основывается рассматриваемый вариант теории. При этом мы не будем ставить себе целью сформулировать непротиворечивую, полную и независимую систему аксиом, как это делается при изложении вайтмановского подхода (см., например, Р. Стритер, А. Вайтман (1966) или Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров (1969)), а только перечислим те физические и математические предположения, удовлетворив которым, мы можем быть уверенными, что построили теорию, приемлемую с физической точки зрения.

Рассмотрим отдельно предположения, касающиеся описания физических состояний системы и свойств S-матрицы, определяющей переходы между асимптотическими свободными состояниями.

1. Физические состояния.

(1) *Рассматриваемые состояния.* Асимптотические состояния системы содержат бесконечно удаленные частицы и их связанные комплексы. Взаимодействие между такими частицами и комплексами равно нулю, и поэтому основные кинематические и динамические характеристики системы — энергия, импульс, момент, спин и т. д. являются аддитивными. Такие состояния описываются векторами состояний, $|\dots\rangle$, являющимися элементами гильбертова пространства \mathcal{H} .

(2) *Релятивистская ковариантность.* Имеется группа G преобразований L , которая включает в качестве подгруппы неоднородную группу Лоренца и может включать также другие преобразования (например, изотопические, градиентные и т. д.). Под действием L амплитуды состояний преобразуются с помощью некоторого унитарного представления U_L . Если в состоянии $|\rho\rangle$ вектор энергии-импульса имеет определенное значение и L_a — трансляция $x \rightarrow x + a$, то

$$U_{L_a} |\rho\rangle = e^{-i\rho a} |\rho\rangle.$$

(3) *Существование вакуума.* Существует единственное состояние, для которого

$$U_L |0\rangle = |0\rangle$$

для всех U_L . Это состояние вакуума.

(4) *Полнота и спектральность.* Существует система собственных амплитуд состояний 4-импульса $|n, \mathbf{p}_n\rangle$, отвечающих неотрицательным значениям энергии. Эта система вместе с амплитудой $|0\rangle$ является полной, так что для любых операторов A и B

$$\langle \alpha | AB | \beta \rangle = \langle \alpha | A | 0 \rangle \langle 0 | B | \beta \rangle + \sum_n \int d\mathbf{p}_n \langle \alpha | A | n, \mathbf{p}_n \rangle \langle n, \mathbf{p}_n | B | \beta \rangle,$$

где $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ — произвольные амплитуды из \mathcal{H} . Здесь n означает совокупность всех остальных дискретных и непрерывных квантовых чисел, которые в совокупности с p_n полностью характеризуют состояние. Если асимптотические состояния исчерпываются состояниями скалярных частиц одного сорта, то соотношение полноты запишется в форме

$$\langle \alpha | AB | \beta \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int dp_1 \dots \int dp_n \langle \alpha | A | p_1, \dots, p_n \rangle \langle p_1, \dots, p_n | B | \beta \rangle,$$

где $|p_1, \dots, p_n\rangle$ — амплитуда n скалярных частиц с импульсами p_1, \dots, p_n .

(5) Асимптотические состояния могут удовлетворять некоторым дополнительным условиям — типа условия Лоренца в квантовой электродинамике:

$$\partial_\mu A_\mu^{(-)}(x) | \dots \rangle = 0,$$

где $A_\mu^{(-)}(x)$ — отрицательно частотная часть оператора электромагнитного поля. Это условие гарантирует, что среди асимптотических состояний отсутствуют состояния с продольными и временными фотонными квантами.

(6) Асимптотические состояния, отвечающие наличию некоторого числа n скалярных частиц определенных сортов α_i с определенными импульсами p_i , можно получить, если ввести обычным образом операторы рождения $a_{\alpha_i p_i}^+$ и уничтожения $a_{\alpha_i p_i}$ частицы α_i -го сорта с импульсом p_i и подействовать ими на амплитуду состояния вакуума:

$$|\alpha_1 p_1, \dots, \alpha_n p_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} a_{\alpha_1 p_1}^+ \dots a_{\alpha_n p_n}^+ |0\rangle, \quad (1.2)$$

где $N = v_1! \dots v_n!$; v_i — число частиц одинакового сорта, присутствующих в состоянии, описываемом амплитудой (1.2). Поскольку пространственно разделенные частицы не взаимодействуют, операторы $a_{\alpha_i p_i}$ и $a_{\alpha_i p_i}^+$ удовлетворяют обычным перестановочным соотношениям

$$[a_{\alpha p}^+, a_{\beta q}^+] = [a_{\alpha p}, a_{\beta q}] = 0, \quad [a_{\alpha p}, a_{\beta q}^+] = \delta_{\alpha\beta} \delta(p - q). \quad (1.3)$$

Решение свободного уравнения

$$(\square - m_\alpha^2) \varphi_\alpha(x) = 0 \quad (1.4)$$

можно записать в виде

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dp}{\sqrt{2\omega_\alpha}} [a_{\alpha p} e^{-ipx} + a_{\alpha p}^+ e^{ipx}], \quad (1.5)$$

где $\omega_\alpha = \sqrt{m_\alpha^2 + p^2}$. Из (1.3) и (1.5) следуют правила коммутации:

$$[\varphi_\alpha(x), a_{\beta p}^+] = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\omega_\alpha}}, \quad [a_{\beta p}, \varphi_\alpha(x)] = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\omega_\alpha}}. \quad (1.6)$$

II. S-матрица.

(1) Существует S-матрица, такая, что амплитуды вероятности перехода от состояния $|\alpha\rangle$ к состоянию $|\beta\rangle$ даются матричным элементом $\langle \beta | S | \alpha \rangle$ матрицы S. Совокупность таких матричных элементов можно представить в форме функционального разложения по нормальным произведениям асимптотических полей, т. е. полей, удовлетворяющих (1.4):

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n} F_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) : \varphi_{\alpha_1}(x_1) \dots \dots \varphi_{\alpha_n}(x_n) :. \quad (1.7)$$

Для простоты мы считаем, что у нас имеются только скалярные частицы n сортов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

(2) Унитарность. Каждый переход между асимптотическими состояниями происходит с определенной вероятностью, а вероятность всех возможных переходов должна равняться единице. Это значит, что S-матрица должна быть унитарной, т. е.

$$SS^+ = S^+S = 1.$$

(3) Стабильность. Если $|\alpha\rangle$ является амплитудой либо вакуума, либо состояния, содержащего одну реальную частицу или один стабильный комплекс, то условие стабильности таких состояний имеет вид

$$S|\alpha\rangle = |\alpha\rangle.$$

(4) Расширение за массовую поверхность. Разложение S-матрицы (1.7) может быть расширено за массовую поверхность, т. е. поля $\varphi_\alpha(x)$ можно считать произвольными коммутирующими операторами или просто произвольными функциями. Таким образом, можно рассматривать S-матрицу как функционал от произвольных скалярных функций $\varphi_\alpha(x)$.

(5) Интегрируемость. Расширенный оператор S обладает вариационными производными любого порядка по асимптотическим полям.

Заметим, что под вариационной производной некоторого операторного выражения $R[\varphi]$, зависящего от локального оператора $\varphi(x)$, понимается

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} R[\varphi] = \left\{ \frac{\delta}{\delta b(x)} R[\varphi + b] \right\}_{b(x)=0},$$

где $b(x)$ — скалярная функция из пространства D.

Коэффициентные функции $F_{a_1 \dots a_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ в разложении S -матрицы по нормальным произведениям асимптотических полей в (1.7) являются интегрируемыми, т. е. обобщенными функциями, определенными на некотором подходящем пространстве основных функций.

(6) *Причинность.* S -матрица должна удовлетворять условию причинности. Это условие подробно рассмотрено в следующем параграфе.

(7) *Принцип соответствия.* Если задан лагранжиан взаимодействия полей

$$\mathcal{L}_I(x) = gU(\varphi_{a_1}(x), \dots, \varphi_{a_n}(x)),$$

то при бесконечно малой константе связи g матрица рассеяния имеет вид

$$S = 1 + i \int dx \mathcal{L}_I(x). \quad (1.8)$$

(8) *Матричные элементы* S -матрицы можно преобразовывать в вакуумные средние вариационных производных S -матрицы с помощью формальных соотношений коммутации (1.6). Отсюда следует, что можно написать для коммутаторов S -матрицы с операторами рождения и уничтожения формулы

$$\begin{aligned} [S, a_{\alpha p}^+] &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dx \frac{\delta S}{\delta \varphi_{\alpha}(x)} \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\omega_{\alpha}}}, \\ [a_{\alpha p}, S] &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dx \frac{\delta S}{\delta \varphi_{\alpha}(x)} \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\omega_{\alpha}}}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Пусть нам известна S -матрица. Рассмотрим процесс столкновения n_i частиц с импульсами p_1, \dots, p_{n_i} , когда в результате взаимодействия возникает n_f частиц с импульсами p'_1, \dots, p'_{n_f} . Матричный элемент процесса определяется следующим образом ($i \neq f$):

$$\begin{aligned} \langle f | S | i \rangle &= \langle p'_1, \dots, p'_{n_f} | S | p_1, \dots, p_{n_i} \rangle = \\ &= \frac{(-i)^{n_f+n_i-1}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}(n_f+n_i)-4}} \cdot \frac{\delta(p'_1 + \dots + p'_{n_f} - p_1 - \dots - p_{n_i})}{\sqrt{n_f! n_i!} \sqrt{2p'_{10} \dots \cdot 2p'_{n_f 0} \cdot 2p_{10} \dots \cdot 2p_{n_i 0}}} \times \\ &\quad \times T_{n_f+n_i}(p'_1, \dots, p'_{n_f}, -p_1, \dots, -p_{n_i}), \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$\begin{aligned} T_n(p_1, \dots, p_n) &= i^{n-1} n^4 \int dx_1 \dots \int dx_n e^{-i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \times \\ &\quad \times \delta(x_1 + \dots + x_n) \langle 0 | \frac{\delta^n S}{\delta \varphi(x_1) \dots \delta \varphi(x_n)} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Задача теории — найти полную амплитуду процесса

$$T_{n_f+n_i}(p'_f, -p_i).$$

(9). *Операция умножения операторных выражений* вида

$$R_f[\varphi] = \sum_n \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n R_f^{(n)}(x_1, \dots, x_n) : \varphi(x_1) \cdot \dots \cdot \varphi(x_n) :$$

задается следующим образом:

$$\begin{aligned} R_1[\varphi] R_2[\varphi] &= R_1[\varphi] \otimes R_2[\varphi] = \\ &= \exp \left\{ \iint dx_1 dx_2 \Delta^{(-)}(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta \varphi_1(x_1) \delta \varphi_2(x_2)} \right\} R_1[\varphi_1] R[\varphi_2] \Big|_{\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi}. \end{aligned}$$

Здесь $\Delta^{(-)}(x_1 - x_2) = \langle 0 | \varphi(x_1) \varphi(x_2) | 0 \rangle$.

Сформулированные выше требования являются достаточными в том смысле, что, удовлетворив им, мы вправе считать построенную нами S -матрицу претендующей на разумное описание взаимодействия элементарных частиц.

§ 2. Условие причинности

В соответствии с принципом причинности всякое событие, происшедшее в системе, может оказать влияние на ход развития системы лишь в будущем и не может оказать влияния на поведение системы в прошлом. Следует заметить, что если бы в квантовой теории поля уравнение Шредингера в представлении взаимодействия

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = H_I(t) \Psi(t) \quad (2.1)$$

имело математический смысл, то условие причинности было бы автоматически выполнено, как свойство решений этого уравнения. Однако, в силу перечисленных выше трудностей теории, мы не гарантированы, что после регуляризаций различного рода сингулярных выражений в матричных элементах S -матрицы полученная S -матрица будет автоматически удовлетворять всем необходимым условиям. Поэтому проверка требования причинности, как и условия унитарности, составляет одну из главных забот при построении самосогласованной теории.

Перейдем к математической формулировке условия причинности. Будем следовать изложению Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова (1973). Введем операцию «включения» и «выключения» взаимодействия. Вместо константы связи g введем функцию $g(x)$ на отрезке $[0, g]$, которая характеризует интенсивность включения взаимодействия. Пусть $g_1(x)$ отлична от нуля в области $G_1 \subset \mathbb{R}^4$, а $g_2(x)$ — в области $G_2 \subset \mathbb{R}^4$. Тогда S -матрица теории удовлетворяет условию микропричинности, если

$$S[g_1 + g_2] = S[g_2] S[g_1]. \quad (2.2)$$

при $G_2 \supset G_1$, т. е. тогда, когда все точки области G_2 лежат в будущем или пространственноподобны относительно всех точек области G_1 .

Условие (2.2) можно записать в дифференциальной форме:

$$R(x, y) = \frac{\delta}{\delta g(x)} \left[\frac{\delta S}{\delta g(y)} S^+ \right] = 0 \quad \text{при } x \preccurlyeq y. \quad (2.3)$$

Это соотношение представляет собой формулировку принципа причинности в дифференциальной форме, данную Н. Н. Боголюбовым и Д. В. Ширковым (1973).

Однако для проверки условия микропричинности в форме (2.3) необходимо знать, каков характер обобщенных функций $\langle \alpha | R(x, 0) | \beta \rangle$ при произвольных физических состояниях $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$. Как говорилось в гл. II, в зависимости от пространства основных функций, на котором определена обобщенная функция (2.3), существуют различные способы исследования локальных свойств функционалов.

Рассмотрим последовательно, как формулируется условие причинности в зависимости от выбора пространств основных функций.

Условие микропричинности I. Если пространство \mathfrak{A} основных функций удовлетворяет условию строгой локальности, т. е. $D \cap \mathfrak{A}$ плотно в D , то S -матрица удовлетворяет условию микропричинности, если

$$\int dx f(x) \langle \alpha | R(x, 0) | \beta \rangle = 0 \quad (2.4)$$

для любых $f(x) \in D(G)$ таких, что $G \cap \bar{V}^+ = 0$, где $V^+ = [x: x_0 > 0, x^2 > 0]$, $\bar{V}^+ = [x: x_0 \geq 0, x^2 \geq 0]$.

Если же пространство основных функций состоит из аналитических функций, среди которых отсутствуют функции с ограниченным носителем, то тогда необходимо воспользоваться методами, развитыми в гл. II.

Условие микропричинности II. Если пространством основных функций является Z , то S -матрица удовлетворяет условию микропричинности, если

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int dx f_{\Gamma, \lambda}(x) \langle \alpha | R(x, 0) | \beta \rangle = 0 \quad (2.5)$$

для любых $f_{\Gamma, \lambda}(x) \in \Pi(G) \subset Z$ таких, что $G \cap \bar{V}^+ = 0$.

Нетрудно видеть, что в случае локализуемых теорий условия I и II совпадают.

Если теория нелокальна, но причинна, тогда S -матрица теории должна удовлетворять условию (2.2) только при $G_2 > G_1$, а при $G_2 \sim G_1$ матричные элементы

$$\langle \alpha | \{S[g_1 + g_2] - S[g_2] S[g_1]\} | \beta \rangle$$

должны достаточно быстро убывать при увеличении расстояния между областями G_1 и G_2 . Сформулируем

Условие причинности III. Если пространством основных функций является Z , то S -матрица удовлетворяет условию причинности, если, во-первых, выполнено (2.5) для всех $f_{\Gamma, \lambda}(x) \in \Pi(G) \subset Z$ таких, что $G \subset V^-$, где $V^- = \{x: x_0 < 0, x_0^2 - x^2 > 0\}$, и, во-вторых, функционал

$$\Phi(x) = \int dx' f(x - x') \langle \alpha | R(x, 0) | \beta \rangle \quad (2.6)$$

убывает при $x \rightarrow \infty$ вне области V^+ столь же быстро, сколь быстро убывает функция $f(x) \in Z$.

Если же

$$\langle \alpha | R(x, 0) | \beta \rangle \in Z'_\rho$$

при некоторых $1 < \rho < \infty$, то, поскольку в пространствах Z_ρ отсутствуют проектирующие последовательности функций, условие II или III уже нельзя применить. Тогда причинность S -матрицы можно проверить, используя метод «эффективных волновых пакетов», о котором говорилось в §§ 7, 8 предыдущей главы. По своей сути, этот метод не способен дать локальную характеристику исследуемых обобщенных функций, но поведение на больших расстояниях он хорошо описывает. Поэтому при помощи этого метода можно сформулировать лишь условие макропричинности, которое нам будет гарантировать, что на больших расстояниях причинность не нарушается. Итак, сформулируем

Условие макропричинности IV. Пусть

$$\langle \alpha | R(x, 0) | \beta \rangle \in Z'_\rho \quad (\rho > 1),$$

и пусть $f(x) \in Z'_\rho \subset Z_\rho$. Тогда S -матрица удовлетворяет условию макропричинности, если

$$\Phi(x) = \int dx' f(x - x') \langle \alpha | R(x', 0) | \beta \rangle$$

убывает при $x \rightarrow \infty$ вне области \bar{V}^+ , как

$$\Phi(x) = O(e^{-\rho \|x\|}).$$

Заметим, что если S -матрица удовлетворяет условию III, то она автоматически удовлетворяет условию макропричинности IV.

Таким образом, если S -матрица будет удовлетворять одному из сформулированных нами условий причинности, мы будем считать, что причинность выполнена в построенной нами теории.

§ 3. Принцип доопределения T -произведения

Как показано в книге Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова (1973), сформулированных требований, накладываемых на S -матрицу, достаточно, чтобы получить следующее представление:

$$S = T \exp \left\{ i \int dx \mathcal{L}_I(x) \right\} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n S_n(x_1, \dots, x_n), \quad (3.1)$$

где

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = T(\mathcal{L}_I(x_1) \cdot \dots \cdot \mathcal{L}_I(x_n)), \quad (3.2)$$

а T обозначает операцию хронологического упорядочения операторов поля. Выражения (3.1) и (3.2) обладают неотделимыми особенностями при совпадающих аргументах $x_i = x_j$, что приводит к возникновению ультрафиолетовых расходимостей. Таким образом, матричные элементы

$$\langle \alpha | T(\mathcal{L}_I(x_1) \cdot \dots \cdot \mathcal{L}_I(x_n)) | \beta \rangle \quad (3.3)$$

не являются в строгом смысле обобщенными функциями. Математическая задача заключается в доопределении выражений (3.1) и (3.2) так, чтобы их любые матричные элементы (3.3) были заданы как обобщенные функции, интегрируемые на одном из пространств основных функций. Такого рода математические операции не определяют сингулярные выражения однозначно. Поэтому знание одного только лагранжиана взаимодействия еще не позволяет найти S -матрицу. Более того, по одному лагранжиану взаимодействия можно построить несколько различных S -матриц. Необходимо привлекать дополнительные принципы, чтобы обеспечить единственность построения S -матрицы по заданному $\mathcal{L}_I(x)$.

В случае обычных так называемых перенормируемых взаимодействий таким принципом является требование перенормируемости, смысл которого состоит в том, что с возникающими математически неопределенными постоянными можно распорядиться минимальным образом, объединив их с физическими константами (массы, постоянные связи и т. д.).

В случае перенормируемых взаимодействий такого принципа уже нет, и поэтому совсем не ясно, как однозначно строить теорию возмущений от порядка к порядку по константе связи.

Поэтому проблема определения операции T -упорядочения выражений типа (3.2) играет главную роль при построении ряда теории возмущений в рассматриваемом нами подходе.

В определение операции T -упорядочения входят, во-первых, задание регуляризационной процедуры, с помощью которой придается математический смысл сингулярным выражениям, и, во-вторых, способ снятия регуляризации, включающий в себя

выбор надлежащих контрчленов, соответствующих формфакторов и т. д.

Регуляризационная процедура должна удовлетворять следующим основным условиям. Во-первых, она должна сохранить всю алгебраическую структуру ряда теории возмущений, связанную с применением теоремы Вика при переходе от хронологического к нормальному упорядочению полевых операторов.

Во-вторых, эта процедура должна придать смысл всем математическим операциям в каждом порядке теории возмущений.

В-третьих, она должна обеспечить возможность перехода к евклидовой метрике для всех матричных элементов S -матрицы. Дело в том, что одной из основных черт современной квантовой теории поля является аналитическая однозначная связь между формулировками теории в псевдоевклидовом и евклидовом пространствах. На важность этой связи впервые обратили внимание Ю. Швингер (1959) и Е. С. Фрадкин (1960). Более точно, амплитуды или функции Грина в квантовой теории поля допускают аналитическое продолжение по времени, т. е. всегда возможен переход к чисто мнимому «времени». Основой этой связи является факт стабильности нашего мира в том смысле, что любая квантовомеханическая система не может излучить сколь угодно большую энергию. Другими словами, гамилтониан H , описывающий систему, всегда ограничен снизу. Считая $H > 0$ (что всегда можно сделать, сдвинув начало отсчета энергии), найдем, что формальное решение уравнения Шредингера $\Psi(t) = e^{-iHt} \Psi_0$ допускает аналитическое продолжение по времени в нижнюю полуплоскость $t \rightarrow t - i\tau$, где $\tau \geq 0$. По всей видимости, этот факт имеет гораздо более глубокое значение, чем это представляется в настоящее время.

И, наконец, в-четвертых, должны быть сформулированы условия, обеспечивающие существование конечного предела при снятии регуляризации. Например, $\Delta_c(x) \in S'$, но $\Delta_c^2(x) \notin S'$. Задача состоит в том, чтобы $\lim [\text{reg} \Delta_c^2(x)] \in S'$, где символ \lim означает процедуру снятия регуляризации.

Таким образом, задача состоит в том, чтобы так определить операцию T в (3.1) или (3.2), чтобы никаких расходимостей при вычислении матричных элементов от $S_n(x_1, \dots, x_n)$ не возникло. По существу, метод, по которому строится $S_n(x_1, \dots, x_n)$ как операторозначная обобщенная функция, заданная на некотором пространстве основных функций, является дополнительным постулатом теории, который гарантирует единственность построения S -матрицы по заданному лагранжиану взаимодействия.

В заключение еще раз повторим, что, удовлетворив перечисленным выше требованиям, мы можем рассматривать полученную S -матрицу, независимо от метода ее построения, в качестве возможного кандидата на описание физической реальности.

**КВАНТОВАНИЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ
СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ**

Мнения по сему предмету разделяются на правильные и неправильные, а в числе последних есть даже много таких, кои, по всей справедливости, могут считаться дерзкими.

М. Е. Салгыков-Щедрин. Дневник прогн-циала в Петербурге.

§ 1. Введение

Как говорилось в гл. I (§ 1), введение нелокального взаимодействия в лагранжиан скалярного поля $\phi(x)$, например, в форме

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \phi(x) (\square - m^2) \phi(x) - g \left\{ \int dx' K(x-x') \phi(x') \right\}^4, \quad (1.1)$$

неизбежно приводит к противоречиям и дополнительным трудностям, если рассматривать формфактор $K(x-x')$ в (1.1) как некоторую заданную функцию.

В настоящей главе мы хотим указать такую процедуру квантования регуляризованной подходящим образом системы классических полей, описываемых нелокальным лагранжианом типа (1.1), которая приводит к появлению дополнительных «духовых» состояний скалярной частицы. При снятии регуляризации «духовые» состояния исчезают, но, как «память» о них, остается формфактор $[K(p^2)]^2$, который эффективно изменяет пропагатор скалярной частицы.

Отдаленной аналогией предлагаемой процедуры может служить метод квантования электромагнитного поля (см., например, книгу С. Швебера (1963)). Реальный физический фотон может находиться лишь в двух состояниях с так называемыми поперечными поляризациями. Однако эти состояния не могут привести к правильной функции распространения. Чтобы получить пропагатор виртуального фотона в форме

$$D_{\mu\nu}(k^2) = \frac{g_{\mu\nu}}{-k^2 - i\epsilon}, \quad (1.2)$$

необходимо ввести в рассмотрение нефизические продольные и скалярные квантовые состояния с индефинитной метрикой.

Условие Лоренца в форме

$$\partial_\mu A_\mu^{(-)}(x) |0\rangle = 0$$

и условие сохранения тока $\partial_\mu J_\mu(x) = 0$ гарантируют, что продольные и скалярные кванты не могут возникнуть в результате взаимодействий физических поперечных квантов с полем электронов. Однако роль продольных и скалярных квантов состоит в том, что они дают вклад в функцию распространения (1.2), т. е. виртуальный фотон состоит как бы из поперечных, продольных и скалярных квантов.

Изложение этой главы основано на работах автора (1974а, б).

§ 2. Описание системы и постановка задачи квантования

Будем рассматривать однокомпонентное скалярное поле $\phi(x)$. Плотность лагранжиана, описывающего классическое поле, записывается в виде

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \phi(x) (\square - m^2) \phi(x) + gU(K(l^2 \square) \phi(x)), \quad (2.1)$$

где l — некоторый заданный параметр, имеющий размерность длины, g — константа связи.

Функция $U(\omega)$ описывает самодействие скалярного поля $\phi(x)$. Будем предполагать, что $U(\omega)$ является аналитической в некоторой окрестности вещественной оси комплексной плоскости $\omega = u + iv$. В остальном — это произвольная функция. В гл. V более подробно будут рассмотрены классы функций взаимодействия $U(\omega)$, для которых можно построить нелокальную S -матрицу, конечную в каждом порядке теории возмущений.

Оператор $K(l^2 \square)$ в (2.1) является нелокальным и может быть представлен в виде

$$K(l^2 \square) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} (l^2 \square)^n, \quad (2.2)$$

так что обобщенная функция $K(x-x') = K(l^2 \square) \delta(x-x')$ принадлежит одному из пространств нелокальных обобщенных функций, рассмотренных в гл. II. В дальнейшем мы будем рассматривать оператор

$$V(-l^2 \square) = [K(l^2 \square)]^2. \quad (2.3)$$

Будем предполагать, что функция $V(-k^2 l^2)$ удовлетворяет следующим условиям (обозначим их совокупность через (E)):

(I) $V(z)$ — целая аналитическая функция в z -плоскости некоторого конечного порядка роста $1/2 \leq \rho < \infty$, т. е. существуют такие $C > 0$ и $b > 0$, что

$$|V(z)| \leq C e^{b|z|^\rho}.$$

$$(2) [V(z)]^* = V(z^*).$$

$$(3) V(-l^2 m^2) = 1.$$

$$(4) V(x) \geq 0 \text{ при вещественных } x.$$

$$(5) V(z) = \begin{cases} O\left(\frac{1}{|z|^\rho}\right), & \operatorname{Re} z \rightarrow +\infty (k^2 \rightarrow -\infty), \\ O(\exp\{b|z|^\rho\}), & \operatorname{Re} z \rightarrow -\infty (k^2 \rightarrow +\infty). \end{cases}$$

(6) в разложении

$$V(-k^2 l^2) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n [(k^2 - m^2) l^2]^n \quad (2.4)$$

коэффициенты v_n удовлетворяют условиям:

а) $v_0 = 1, v_n \geq 0 (n = 1, 2, 3, \dots);$

б) существуют такие постоянные $C > 0$ и $A > 0$, что

$$v_n \leq C \frac{A^n}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho} + 1\right)}.$$

Заметим, что условие $v_n \geq 0$ не является обязательным, однако выполнение этого условия несколько упрощает дальнейшее рассмотрение.

Обобщенная функция $K(x - x') = K(l^2 \square) \delta(x - x')$, где $K(l^2 \square)$ удовлетворяет условиям (E), определена на пространстве основных функций Z_α при $\alpha < 2\rho/(2\rho - 1)$, как было показано в гл. II.

Итак, мы полностью описали все величины, входящие в плотность лагранжиана (2.1), описывающего нашу систему. Уравнение движения, которому подчиняется классическое поле $\phi(x)$, может быть получено, согласно принципу наименьшего действия, и записывается в виде

$$(\square - m^2) \phi(x) = -gK(l^2 \square) U'(K(l^2 \square) \phi(x)).$$

Проблема состоит в том, как понимать это уравнение, каков способ его решения и каковы методы квантования такого сорта уравнений.

Мы поступим следующим образом. Введем поле

$$\Phi(x) = K(l^2 \square) \phi(x), \quad (2.5)$$

тогда плотность полного лагранжиана (2.1) для поля $\Phi(x)$ будет иметь вид

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \Phi(x) E(\square) \Phi(x) + gU(\Phi(x)), \quad (2.6)$$

где

$$E(\square) = \frac{\square - m^2}{V(-l^2 \square)}. \quad (2.7)$$

Формально уравнение движения запишется следующим образом:

$$E(\square) \Phi(x) = -gU'(\Phi(x)) \quad (2.8)$$

для взаимодействующего поля и

$$E(\square) \Phi(x) = \frac{\square - m^2}{V(-l^2 \square)} \Phi(x) = 0 \quad (2.9)$$

для невзаимодействующего.

Возникают аналогичные вопросы — как понимать эти уравнения, как их исследовать и решать и как проводить квантование поля $\Phi(x)$?

Наша идея состоит в следующем. Вместо уравнения (2.8) или (2.9) мы рассмотрим регуляризованное уравнение

$$E^\delta(\square) \Phi^\delta(x) = -gU'(\Phi^\delta(x)) \quad (2.10)$$

или, в случае $g = 0$,

$$E^\delta(\square) \Phi^\delta(x) = 0. \quad (2.10a)$$

Здесь δ — параметр регуляризации такой, что существует предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} E^\delta(\square) = E(\square) = \frac{\square - m^2}{V(-l^2 \square)}. \quad (2.11)$$

Соответственно вместо лагранжиана (2.6) получим

$$\mathcal{L}^\delta(x) = \frac{1}{2} \Phi^\delta(x) E^\delta(\square) \Phi^\delta(x) + gU(\Phi^\delta(x)). \quad (2.12)$$

Регуляризация подбирается таким образом, чтобы функция

$$E^\delta(k^2) = \frac{k^2 - m^2}{V^\delta(-k^2 l^2)}$$

имела нули в некоторой последовательности точек:

$$E^\delta(k^2) \sim (k^2 - m^2) \prod_{j=1}^{\infty} (k^2 - m_j^2(\delta)) \quad (2.13)$$

таких, что $m_j^2(\delta) > 0 (j = 1, 2, 3, \dots)$ и $m_j^2(\delta) \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow \infty$.

Тогда поле $\Phi^\delta(x)$ при $\delta > 0$ может быть проквантовано с привлечением методов индефинитной метрики (см. работы Д. И. Блохинцева (1947), А. Пайса, Г. Уленбека (1950) и К. Надь (1969)).

При $\delta > 0$ для невзаимодействующей системы можно построить гамильтониан H_0^δ и векторное пространство состояний с индефинитной метрикой \mathcal{H}^δ . Далее, для взаимодействующей системы можно найти матрицу рассеяния S^δ , а также различные операторы типа тока

$$J^\delta(x) = i \frac{\delta S^\delta}{\delta \Phi^\delta(x)} S^{\delta+},$$

функций Грина

$$G^\delta(x-y) = \langle 0 | T(\Phi^\delta(x) \Phi^\delta(y) S^\delta) | 0 \rangle$$

и Вайтмана

$$W^\delta(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | \Phi^\delta(x_1) \dots \Phi^\delta(x_n) | 0 \rangle$$

и т. д.

По определению, будем считать, что предел всех этих величин при $\delta \rightarrow 0$ является квантовополевым решением исходной системы (2.6).

Задача состоит в том, чтобы указать такую регуляризационную процедуру, которая при $\delta \rightarrow 0$ обеспечивала бы существование пределов операторов и матричных элементов всех физических величин и приводила бы к самосогласованной теории. Решению этой проблемы и посвящена данная глава.

§ 3. Регуляризационная процедура

Регуляризация будет введена следующим образом. Вместо функции

$$V(-k^2 l^2) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n (k^2 - m^2)^n l^{2n} \quad (3.1)$$

введем регуляризованную функцию

$$V^\delta(-k^2 l^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n (k^2 - m^2)^n l^{2n}}{\prod_{j=1}^{n+2} \left(1 - \frac{\delta}{j^\sigma} \frac{k^2 - m^2}{m^2}\right)}, \quad (3.2)$$

где $\sigma < 1/\rho \leq 2$.

Удобно ввести переменные

$$z = k^2/m^2, \quad \lambda = m^2 l^2, \quad u_n = v_n \lambda^n. \quad (3.3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} V^\delta(-z\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n (z-1)^n}{\prod_{j=1}^{n+2} \left(1 - \frac{\delta}{j^\sigma} (z-1)\right)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u_n (z-1)^n [(n+2)!]^\sigma}{\delta^{n+2} \prod_{j=1}^{n+2} (z - \mu_j(\delta))}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\mu_j(\delta) = 1 + j^\sigma/\delta$.

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{G}^\delta(z) = \frac{z-1}{V^\delta(-z\lambda)}. \quad (3.5)$$

Функция

$$\frac{1}{\mathcal{G}^\delta(z)} = \frac{V^\delta(-z\lambda)}{z-1} \quad (3.6)$$

является мероморфной в комплексной z -плоскости, имеет простые полюсы в точках

$$z = \mu_j(\delta) = 1 + j^\sigma/\delta \quad (j=0, 1, 2, \dots) \quad (3.7)$$

и убывает при $|z| \rightarrow \infty$, исключая луч $[z: \arg z = 0]$, как

$$\left| \frac{1}{\mathcal{G}^\delta(z)} \right| \approx \frac{1}{|z|^\beta} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\delta^{n+2}} u_n [(n+2)!]^\sigma \right|.$$

Здесь ряд сходится согласно условиям (E).

Для мероморфной функции (3.6) справедливо представление

$$\frac{1}{\mathcal{G}^\delta(z)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s A_s(\delta)}{z - \mu_s(\delta)}, \quad (3.8)$$

где

$$A_0(\delta) = 1, \quad A_s(\delta) = \sum_{n=\max(0, s-2)}^{\infty} u_n c_{n,s} (s^\sigma/\delta)^n, \quad (3.9)$$

$$c_{n,s} = \frac{[(n+2)!]^\sigma}{\prod_{j=0}^{s-1} (s^\sigma - j^\sigma) \prod_{j'=s+1}^{n+2} (j'^\sigma - s^\sigma)}. \quad (3.10)$$

Числа $A_s(\delta)$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s A_s(\delta) [\mu_s(\delta)]^N = 0 \quad \text{для } N=0, 1, 2. \quad (3.11)$$

При больших s для чисел $A_s(\delta)$ справедливо неравенство

$$A_s(\delta) \leq \text{const} \cdot \frac{\exp\{B(s^\sigma/\delta)^\rho\}}{\Gamma((1/\rho - \sigma)s)}, \quad (3.12)$$

где B — некоторое число и $\sigma\rho < 1$.

Эта оценка может быть получена следующим образом. Для любого $\sigma < 1/\rho \leq 2$ существует такое целое число k , что $\sigma(k+1) > 1$. Тогда справедливо следующее неравенство для любых двух чисел $A > B$:

$$\frac{1}{A^\sigma - B^\sigma} = \frac{(A^\sigma)^k + (A^\sigma)^{k-1} (B^\sigma) + \dots + (B^\sigma)^k}{A^{\sigma(k+1)} - B^{\sigma(k+1)}} \leq \frac{(k+1)(A^\sigma)^k}{(A-B)^\sigma (k+1)}, \quad (3.13)$$

поскольку

$$A^\beta - B^\beta = \beta \int_B^A du u^{\beta-1} = \beta \int_0^{A-B} dt (t+B)^{\beta-1} \geq \beta \int_0^{A-B} dt t^{\beta-1} = (A-B)$$

при произвольных $\beta > 1$.

При дальнейших оценках используем приближенные равенства

$$\begin{aligned} s^{bs} &\simeq A^s (sl)^b \simeq A^s \Gamma(bs), \\ \Gamma(b_1 s) \Gamma(b_2 s) &\simeq A^s \Gamma((b_1 + b_2)s), \end{aligned} \quad (3.14)$$

справедливые при больших s , с точностью до постоянных множителей и множителей типа A^s , причем точное значение этих постоянных для нас не будет существенным. Поэтому эти числа мы не будем снабжать никакими дополнительными индексами.

Тогда, используя неравенство (3.13) и соотношения (3.14), легко получить, что

$$c_{n,s} \leq \text{const} \cdot A^n B^s, \quad (3.15)$$

где A и B — некоторые постоянные.

Для коэффициентов $A_s(\delta)$ (s велико) получим оценку (3.12), используя (3.14) и (3.15):

$$\begin{aligned} A_s(\delta) &\leq \frac{\text{const}}{\delta} \sum_{n=s}^{\infty} \frac{A^n B^s (s^\sigma/\delta)^n}{\Gamma(n/\rho)} = \\ &= \frac{\text{const}}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n B^s (s^\sigma/\delta)^{n+s} \Gamma(n/\rho) \Gamma(s/\rho)}{\Gamma(n/\rho) \Gamma(s/\rho) \cdot \Gamma(n+s/\rho)} \leq \\ &\leq \text{const} \cdot \left(\frac{B}{\delta}\right)^{s+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n (s^\sigma/\delta)^n}{\Gamma(n/\rho)} \cdot \frac{\Gamma(\sigma s)}{\Gamma(s/\rho)} \leq \text{const} \cdot \frac{\exp\{B(s^\sigma/\delta)^\rho\}}{\Gamma((1/\rho - \sigma)s)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь функцию $-D^\delta(k^2) = [E^\delta(k^2)]^{-1}$. Она обладает следующими свойствами:

(1) $D^\delta(k^2)$ — мероморфная функция в комплексной k^2 -плоскости и имеет простые полюсы в точках

$$k^2 = m_j^2(\delta) = m^2 \mu_j(\delta) = m^2 (1 + j^\sigma/\delta) \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

(2) Вычеты в этих полюсах суть

$$\text{Res}_{k^2=m_j^2(\delta)} D^\delta(k^2) = (-1)^{j+1} A_j(\delta).$$

(3) При $|k^2| \rightarrow \infty$ во всей k^2 -плоскости, кроме луча $[m^2, \infty)$,

$$D^\delta(k^2) = \frac{V^\delta(-k^2 l^2)}{m^2 - k^2} = O\left(\frac{1}{|k^2|^\beta}\right).$$

(4) Возможно, функция $D^\delta(k^2)$ имеет нули в точках $k^2 = a_r$ ($r = 1, 2, 3, \dots$).

$$(5) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} D^\delta(k^2) = \frac{V(-k^2 l^2)}{m^2 - k^2}.$$

§ 4. Квантование регуляризованного уравнения

Рассмотрим классическую систему, описываемую плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L}^\delta(x) = \frac{1}{2} \Phi^\delta(x) E^\delta(\square) \Phi^\delta(x) + gU(\Phi^\delta(x)), \quad (4.1)$$

где регуляризованный оператор $E^\delta(\square)$ обладает свойствами, перечисленными в предыдущем параграфе.

Согласно принципу наименьшего действия, уравнение движения для системы, описываемой лагранжианом (4.1), имеет вид

$$E^\delta(\square) \Phi^\delta(x) = -gU'(\Phi^\delta(x)). \quad (4.2)$$

Это дифференциальное уравнение бесконечного порядка, т.е. фактически это интегральное уравнение. Для решения задачи Коши необходимо задать значения функции $\Phi^\delta(x)$ и всех ее производных в начальный момент времени.

Займемся решением этого уравнения. Мы будем следовать схеме, предложенной А. Пайсом и Г. Уленбеком (1950). Введем систему полей

$$\Phi_j^\delta(x) = \sqrt{A_j(\delta)} \frac{E^\delta(\square)}{\square - m_j^2(\delta)} \Phi^\delta(x), \quad (4.3)$$

где коэффициенты $A_j(\delta)$ введены формулой (3.8), а

$$m_j^2(\delta) = m^2 (1 + j^\sigma/\delta) \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.4)$$

Согласно определению (4.3), поля $\Phi_j^\delta(x)$ не являются независимыми при различных j и удовлетворяют соотношению

$$\sqrt{A_l(\delta)} \frac{E^\delta(\square)}{\square - m_l^2(\delta)} \Phi_l^\delta(x) = \sqrt{A_i(\delta)} \frac{E^\delta(\square)}{\square - m_i^2(\delta)} \Phi_i^\delta(x). \quad (4.5)$$

Поле $\Phi^\delta(x)$ выражается через поля $\Phi_j^\delta(x)$ следующим образом:

$$\Phi^\delta(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \sqrt{A_j(\delta)} \Phi_j^\delta(x). \quad (4.6)$$

Действительно, с одной стороны, справедлива цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \Phi^\delta(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_j(\delta) \frac{E^\delta(\square)}{\square - m_j^2(\delta)} \Phi^\delta(x) = \frac{1}{E^\delta(\square)} E^\delta(\square) \Phi^\delta(x) = \\ &= \Phi^\delta(x); \end{aligned}$$

с другой стороны, воспользовавшись (4.5), получим

$$\begin{aligned}\Phi_j^\delta(x) &= \sqrt{A_j(\delta)} \frac{E^\delta(\square)}{\square - m_j^2(\delta)} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \sqrt{A_i(\delta)} \Phi_i^\delta(x) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i A_i(\delta)}{\square - m_i^2(\delta)} E^\delta(\square) \Phi_i^\delta(x) = \Phi_j^\delta(x).\end{aligned}$$

Используя соотношения (4.3), (4.5) и (4.6), плотность лагранжиана (4.1) в терминах полей $\Phi_j^\delta(x)$ запишем так:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\delta(x) &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \Phi_j^\delta(x) (\square - m_j^2(\delta)) \Phi_j^\delta(x) + \\ &+ gU \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \sqrt{A_j(\delta)} \Phi_j^\delta(x) \right).\end{aligned}\quad (4.7)$$

Считая поля $\Phi_j^\delta(x)$ независимыми и воспользовавшись принципом наименьшего действия, получим из лагранжиана (4.7) бесконечную систему уравнений

$$(\square - m_j^2(\delta)) \Phi_j^\delta(x) = -\sqrt{A_j(\delta)} U' \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \sqrt{A_i(\delta)} \Phi_i^\delta(x) \right) \quad (4.8)$$

для $j=0, 1, 2, \dots$

Полученная система уравнений эквивалентна уравнению (4.2). Действительно, во-первых, соотношение (4.5) является непосредственным следствием системы уравнений (4.8). Во-вторых, уравнение (4.2) выполнено, если $\Phi^\delta(x)$ связано с полями $\Phi_j^\delta(x)$ соотношением (4.6), в чем легко непосредственно убедиться, воспользовавшись (4.6), (4.5) и (4.8):

$$\begin{aligned}E^\delta(\square) \Phi^\delta(x) &= E^\delta(\square) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \sqrt{A_j(\delta)} \Phi_j^\delta(x) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \sqrt{A_j(\delta)} \frac{(\square - m_k^2(\delta))}{\sqrt{A_k(\delta)}} \cdot \sqrt{A_k(\delta)} \frac{E^\delta(\square)}{\square - m_k^2(\delta)} \Phi_j^\delta(x) = \\ &= \frac{\square - m_k^2(\delta)}{\sqrt{A_k(\delta)}} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_j(\delta) \frac{E^\delta(\square)}{\square - m_j^2(\delta)} \Phi_k^\delta(x) = \\ &= \frac{\square - m_k^2(\delta)}{\sqrt{A_k(\delta)}} \Phi_k^\delta(x) = -gU'(\Phi^\delta(x)),\end{aligned}$$

где $k=0, 1, 2, \dots$

Итак, лагранжиан (4.7) и система уравнений (4.8) полностью эквивалентны лагранжиану (4.1) и уравнению (4.2). Поэтому

можно считать, что наша исходная система (4.1) описывается лагранжианом (4.7), где поля $\Phi_j^\delta(x)$ независимы и удовлетворяют уравнениям движения (4.8).

Использованный нами прием известен в теории дифференциальных уравнений. Он применяется, когда одно уравнение с высшими производными заменяется системой уравнений низшего порядка.

Все вышесказанные рассуждения касались классической теории поля. Квантование системы классических полей $\{\Phi_j^\delta(x)\}$ можно провести согласно канонической схеме квантования. Импульс, сопряженный полю $\Phi_j^\delta(x, 0)$, равен

$$\Pi_j^\delta(x, 0) = \frac{\delta}{\delta \Phi_j^\delta(x, 0)} \int dy \mathcal{L}^\delta(y, 0) = (-1)^j \dot{\Phi}_j^\delta(x, 0). \quad (4.9)$$

Условия квантования записываются в виде

$$\begin{aligned}[\Phi_j^\delta(x, 0), \Phi_{j'}^\delta(x', 0)] &= [\Pi_j^\delta(x, 0), \Pi_{j'}^\delta(x', 0)] = 0, \\ [\Phi_j^\delta(x, 0), \Pi_{j'}^\delta(x', 0)] &= i\delta_{jj'} \delta(x - x')\end{aligned}\quad (4.10)$$

или

$$[\Phi_j^\delta(x, 0), \Phi_{j'}^\delta(x', 0)] = i(-1)^j \delta_{jj'} \delta(x - x'). \quad (4.11)$$

Итак, мы видим, что для квантования нашей регуляризованной системы в этом подходе необходимо привлечение индефинитной метрики.

Поскольку точно решить систему уравнений (4.8) мы не в состоянии, а дальнейшая наша задача состоит в построении \mathcal{S} -матрицы по теории возмущений, рассмотрим квантование взаимодействующей системы полей $\{\Phi_j^\delta(x)\}$, т.е. случай, когда $g=0$. Вместо (4.8) получим систему

$$(\square - m_j^2(\delta)) \Phi_j^\delta(x) = 0 \quad (j=0, 1, 2, \dots). \quad (4.12)$$

Решение этих уравнений можно записать в форме

$$\Phi_j^\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dk}{\sqrt{2\omega_{jk}^\delta}} (d_{jk} e^{-ikx} + d_{jk}^\dagger e^{ikx}), \quad (4.13)$$

где

$$\omega_{jk}^\delta = \sqrt{k^2 + m_j^2(\delta)} = \sqrt{k^2 + m^2(1 + j^2/\delta)}.$$

Условия квантования (4.10) и (4.11) приводят к тому, что операторы d_{jk} удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[d_{jk}, d_{j'k'}] = [d_{jk}^\dagger, d_{j'k'}^\dagger] = 0, \quad [d_{jk}, d_{j'k'}^\dagger] = (-1)^j \delta_{jj'} \delta(k - k'). \quad (4.14)$$

Гамильтониан невзаимодействующей системы может быть получен согласно обычным правилам. Запишем его в нормальной форме

$$H_0^\delta = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \int dk \omega_{j\mathbf{k}}^\delta d_{j\mathbf{k}}^+ d_{j\mathbf{k}}. \quad (4.15)$$

Рассматриваемая система состоит из квантов со спектром масс

$$m_j^2(\delta) = \begin{cases} m^2, & j=0, \\ m^2(1+j^\sigma/\delta), & j=1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4.16)$$

Будем далее иногда обозначать

$$d_{0\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}, \quad d_{0\mathbf{k}}^+ = a_{\mathbf{k}}^+. \quad (4.17)$$

При $\delta \rightarrow 0$ масса квантов с $j=1, 2, \dots$ стремится к бесконечности согласно (4.16). Эти кванты будем называть «духовыми состояниями», или просто «духами». Кванты с $j=0$ имеют конечную массу m^2 . Мы будем называть их нормальными частицами, или просто скалярными частицами массы m .

Пространство состояний \mathcal{H}^δ является векторным пространством с индефинитной метрикой. Оно состоит из следующих состояний:

(1) Состояние вакуума $|0\rangle$; оно единственно, определяется условиями $d_{j\mathbf{k}}|0\rangle = 0$ ($j=0, 1, 2, \dots$) и нормировано $\langle 0|0\rangle = 1$.

(2) Одночастичные состояния $|j, \mathbf{k}\rangle = d_{j\mathbf{k}}^+|0\rangle$, нормированные условием $\langle j, \mathbf{k}|j', \mathbf{k}'\rangle = (-1)^j \delta_{jj'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ и являющиеся собственными состояниями гамильтониана (4.15)

$$H_0^\delta |j, \mathbf{k}\rangle = \omega_{j\mathbf{k}}^\delta |j, \mathbf{k}\rangle.$$

(3) Многочастичные состояния. Если имеется группа n частиц с импульсами $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n$, состоящая из $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\alpha$ ($n = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_\alpha$) одинаковых частиц (т. е. с одинаковыми индексами j), то такое состояние описывается вектором

$$|j_1 \mathbf{k}_1, \dots, j_n \mathbf{k}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\nu_1! \dots \nu_\alpha!}} d_{j_1 \mathbf{k}_1}^+ \dots d_{j_n \mathbf{k}_n}^+ |0\rangle.$$

Эти состояния также являются собственными состояниями гамильтониана H_0^δ :

$$H_0^\delta |j_1 \mathbf{k}_1, \dots, j_n \mathbf{k}_n\rangle = (\omega_{j_1 \mathbf{k}_1}^\delta + \dots + \omega_{j_n \mathbf{k}_n}^\delta) |j_1 \mathbf{k}_1, \dots, j_n \mathbf{k}_n\rangle.$$

Все эти состояния образуют полную систему в векторном пространстве \mathcal{H}^δ , т. е.

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \overline{D}_F^\delta | 0 \rangle \langle 0 | + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j_1 \dots j_n=0}^{\infty} (-1)^{j_1 + \dots + j_n} \int d\mathbf{k}_1 \dots \int d\mathbf{k}_n |j_1 \mathbf{k}_1, \dots, j_n \mathbf{k}_n\rangle \times \\ & \times \langle j_1 \mathbf{k}_1, \dots, j_n \mathbf{k}_n | = 1. \end{aligned}$$

Что происходит с пространством \mathcal{H}^δ при $\delta \rightarrow 0$? При $\delta \rightarrow 0$ массы всех «духов» растут согласно (4.16). Поэтому, если мы характеризуем физические состояния определенным значением энергии, то в пределе $\delta \rightarrow 0$ ни одно физическое состояние с произвольным, но конечным значением энергии не может содержать «духов». В этом смысле

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}^\delta = \mathcal{H}. \quad (4.18)$$

Здесь \mathcal{H} является гильбертовым пространством, состоящим из:

(1) вакуума $|0\rangle$, причем $a_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0$;

(2) одночастичных состояний $|\mathbf{k}\rangle = a_{\mathbf{k}}^+|0\rangle$, нормированных условием $\langle \mathbf{k}|\mathbf{k}'\rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$;

(3) многочастичных состояний $|\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a_{\mathbf{k}_1}^+ \dots \dots a_{\mathbf{k}_n}^+ |0\rangle$.

Соотношение полноты записывается следующим образом:

$$\langle 0 | \overline{D}_F^\delta | 0 \rangle \langle 0 | + \sum_{n=1}^{\infty} \int d\mathbf{k}_1 \dots \int d\mathbf{k}_n |\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n\rangle \langle \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n | = 1.$$

§ 5. Функции Грина поля $\Phi^\delta(x)$

Рассмотрим прежде всего перестановочную функцию поля, т. е. коммутатор

$$\Delta^\delta(x-y) = [\Phi^\delta(x), \Phi^\delta(y)]_-. \quad (5.1)$$

Подставляя в (5.1) представление (4.6) и используя (4.13), получим

$$\Delta^\delta(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_j(\delta) \Delta_j^\delta(x). \quad (5.2)$$

Вычисление явного вида различных двухточечных функций Грина проведено в книге Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова (1973). Мы воспользуемся этими результатами. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_j^\delta(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \varepsilon(k_0) \delta(k^2 - m_j^2(\delta)) e^{-ikx} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \varepsilon(x_0) \delta(x^2) - \frac{m_j(\delta)}{4\pi i \sqrt{x^2}} \theta(x^2) J_1(m_j(\delta) \sqrt{x^2}), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} +1, & t > 0, \\ -1, & t < 0, \end{cases} \quad \theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Так как ряд (5.2) абсолютно сходится, то

$$\Delta^\delta(x) = 0 \quad \text{при} \quad x^2 < 0. \quad (5.4)$$

Таким образом, оператор $\Phi^\delta(x)$ удовлетворяет локальным перестановочным соотношениям.

Введем теперь функции $\Delta_{(\pm)}^\delta(x)$ обычным образом:

$$\Delta_{(-)}^\delta(x-y) = \Delta_{(+)}^\delta(y-x) = \langle 0 | \Phi^\delta(x) \Phi^\delta(y) | 0 \rangle. \quad (5.5)$$

Имеем

$$\Delta_{(\pm)}^\delta(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_j(\delta) \Delta_j^\delta(x), \quad (5.6)$$

где

$$\Delta_j^\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \theta(\mp k_0) \delta(k^2 - m_j^2(\delta)) e^{-ikx}. \quad (5.7)$$

При $x^2 \rightarrow 0$

$$\Delta_j^\delta(x) = -\frac{i}{4\pi} \varepsilon(\mp x_0) \delta(x^2) - \frac{1}{4\pi^2 x^2} + \frac{m_j^2}{16\pi^2} \ln \frac{m_j^2 |x^2|}{4} + \frac{im_j^2}{16\pi} \varepsilon(\mp x_0) \theta(x^2) + O(x^2 \ln x^2).$$

Подставляя это разложение в (5.6) и учитывая (3.11), получим

$$\Delta_{(\pm)}^\delta(x) = \frac{m^2}{16\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_j(\delta) \mu_j \ln \mu_j + O(x^2 \ln x^2).$$

Отсюда следует, что функция $\Delta_{(\pm)}^\delta(x)$ ограничена в нуле и

$$\Delta_{(\pm)}^\delta(0) = \frac{m^2}{16\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_j(\delta) \mu_j \ln \mu_j < \infty. \quad (5.8)$$

Это означает, что оператор $\Phi^\delta(x)$ хорошо определен, так как

$$\langle 0 | \Phi^\delta(x) \Phi^\delta(x) | 0 \rangle = \Delta_{(-)}^\delta(0) < \infty. \quad (5.9)$$

Рассмотрим теперь причинную функцию Грина:

$$\Delta_c^\delta(x-y) = \langle 0 | T(\Phi^\delta(x) \Phi^\delta(y)) | 0 \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_j(\delta) \Delta_{jc}^\delta(x-y), \quad (5.10)$$

$$\text{где } \Delta_{jc}^\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dk e^{-ikx}}{m_j^2(\delta) - k^2 - i\varepsilon}, \text{ или}$$

$$\Delta_c^\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int dk \tilde{\Delta}_c^\delta(k^2) e^{-ikx}, \quad (5.11)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_c^\delta(k^2) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j A_j(\delta)}{m_j^2(\delta) - k^2 - i\varepsilon} = \\ &= \frac{1}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n i^{2n} (k^2 - m^2)^n}{\prod_{j=1}^{n+2} \left(1 - \frac{\delta(k^2 - m^2 + i\varepsilon)}{j^2 m^2}\right)}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Функция $\tilde{\Delta}_c^\delta(k^2)$ аналитична в комплексной k^2 -плоскости при $\text{Im } k^2 \geq 0$ и имеет простые полюсы в точках $k^2 = m_j^2(\delta) - i\varepsilon$ ($j=0, 1, 2, \dots$).

Запаздывающая и опережающая функции Грина могут быть построены согласно формулам

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{ret}}^\delta(x) &= \theta(x_0) \Delta^\delta(x) = \Delta_c^\delta(x) + \Delta_{(+)}^\delta(x), \\ \Delta_{\text{adv}}^\delta(x) &= -\theta(-x_0) \Delta^\delta(x) = \Delta_c^\delta(x) - \Delta_{(-)}^\delta(x). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Эти функции удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{ret}}^\delta(x) &= 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} x^2 < 0, \\ x^2 > 0, \quad x_0 < 0, \end{cases} \\ \Delta_{\text{adv}}^\delta(x) &= 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} x^2 < 0, \\ x^2 > 0, \quad x_0 > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Итак, мы видим, что все функции Грина и перестановочная функция удовлетворяют требованиям локальной квантовой теории поля. Значит, поле $\Phi^\delta(x)$ является локальным.

Между регуляризованными функциями Δ_c^δ и $\Delta_{(\pm)}^\delta$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \Delta_c^\delta(x) &= \theta(x_0) \Delta_{(-)}^\delta(x) + \theta(-x_0) \Delta_{(+)}^\delta(x), \\ \Delta_c^{\delta*}(x) &= \theta(x_0) \Delta_{(+)}^\delta(x) + \theta(-x_0) \Delta_{(-)}^\delta(x). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Отметим еще одно соотношение, играющее важную роль при доказательстве унитарности регуляризованной S -матрицы:

$$\langle 0 | T(\partial_\mu \Phi^\delta(x) \cdot \partial_\nu \Phi^\delta(y)) | 0 \rangle = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial y_\nu} \langle 0 | T(\Phi^\delta(x) \Phi^\delta(y)) | 0 \rangle. \quad (5.16)$$

Другими словами, при $\delta > 0$ T -произведение в смысле Вика (правая часть соотношения (5.16)) равно T -произведению в смысле Дайсона (левая часть (5.16)). Действительно, для полей $\Phi_j^\delta(x)$ легко получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial y_\nu} \langle 0 | T(\Phi_j^\delta(x) \Phi_j^\delta(y)) | 0 \rangle &= \\ &= \langle 0 | T(\partial_\mu \Phi_j^\delta(x) \cdot \partial_\nu \Phi_j^\delta(y)) | 0 \rangle + i(-1)^j \delta_{j\nu} \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} \delta(x-y). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial y_\nu} \langle 0 | T(\Phi^\delta(x) \Phi^\delta(y)) | 0 \rangle - \langle 0 | T(\partial_\mu \Phi^\delta(x) \cdot \partial_\nu \Phi^\delta(y)) | 0 \rangle &= \\ &= i \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} \delta(x-y) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_j(\delta) = 0 \end{aligned}$$

согласно (3.11). Отсюда следуют соотношения, которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_\nu \Delta_c^\delta(x) &= \theta(x_0) \partial_\mu \partial_\nu \Delta_{(-)}^\delta(x) + \theta(-x_0) \partial_\mu \partial_\nu \Delta_{(+)}^\delta(x), \\ \partial_\mu \partial_\nu \Delta_{(-)}^\delta(x) &= \theta(x_0) \partial_\mu \partial_\nu \Delta_c^\delta(x) + \theta(-x_0) \partial_\mu \partial_\nu \Delta_c^{\delta*}(x). \end{aligned} \quad (5.17)$$

§ 6. Взаимодействующая система до снятия регуляризации

Взаимодействующая система описывается плотностью лагранжиана (4.7). Полный гамильтониан этой системы имеет вид

$$H^\delta = H_0^\delta + H_I^\delta, \quad (6.1)$$

где H_0^δ дается соотношением (4.15), а

$$H_I^\delta = -g \int d\mathbf{x} : U(\Phi^\delta(\mathbf{x}, 0)) :. \quad (6.2)$$

В представлении взаимодействия

$$H_I^\delta(t) = e^{-itH_0^\delta} H_I^\delta e^{itH_0^\delta} = -g \int d\mathbf{x} : U(\Phi^\delta(\mathbf{x}, t)) :. \quad (6.3)$$

Хотя оператор $\Phi^\delta(x)$ определен, как было показано в предыдущем параграфе, гамильтониан $H_I^\delta(t)$ не определен, поскольку теория трансляционно-инвариантна и в ней присутствуют трудности, связанные с теоремой Хаага. Как говорилось в гл. I, следует ввести промежуточную регуляризацию, заменив постоянную связи g на функцию включения взаимодействия:

$$g \Rightarrow g\left(\frac{x}{L}, \frac{t}{L}\right) = g\left(\frac{x}{L}\right).$$

Такая регуляризация одновременно учитывает, во-первых, что наша система помещается в «ящик», чем разрушается евклидова инвариантность гамильтониана, и, во-вторых, что взаимодействие адиабатически включается и выключается на бесконечности, т. е. при $t \rightarrow \pm\infty$. Параметр регуляризации L имеет смысл линейного размера области четырехмерного пространства, где взаимодействие отлично от нуля. Снятие регуляризации соответствует переходу к пределу $L \rightarrow \infty$, при этом

$$g\left(\frac{x}{L}\right) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} g(0) = g. \quad (6.4)$$

Будем считать, что функция включения взаимодействия $g(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

(1) $g(x)$ принадлежит основному пространству функций, на котором определены коэффициентные функции S -матрицы (в данном случае это будет Z_α при $\alpha < 2\rho/(2\rho - 1)$, где ρ — порядок роста нелокального формфактора).

$$(2) 0 \leq g(x) \leq g(0) = g.$$

$$(3) \int dx g(x) = \int dt \int d\mathbf{x} g(\mathbf{x}, t) < \infty.$$

(4) $\partial^s g(x)|_{x=0} = 0$ ($s = 1, 2, 3, 4$), где $\partial^s = \partial_{\mu_1} \cdot \dots \cdot \partial_{\mu_s}$ ($\mu_j = 0, 1, 2, 3$).

Таким образом, гамильтониан (6.3) в представлении взаимодействия запишется в виде

$$H_I^{\delta, L}(t) = - \int dx g\left(\frac{x}{L}, \frac{t}{L}\right) : U(\Phi^\delta(x, t)) :. \quad (6.5)$$

Еще раз напомним, что при $\delta > 0$ гамильтониан $H_I^{\delta, L}$ хорошо определен, так что не надо вводить никакого ультрафиолетового обрезания.

Тогда регуляризованная S -матрица записывается стандартным способом:

$$\begin{aligned} S^{\delta, L} &= T \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I^{\delta, L}(t) \right\} = \\ &= T \exp \left\{ i \int dx g\left(\frac{x}{L}\right) : U(\Phi^\delta(x)) : \right\}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Здесь T имеет смысл оператора строгого упорядочения квантовых полей $\Phi^\delta(x)$ по времени. Хронологическая свертка, или причинная функция Грина операторов $\Phi^\delta(x)$, дается формулами (5.10) — (5.12).

Поскольку операторы $\Phi^\delta(x)$ и $H_I^{\delta, L}$ хорошо определены и локальны, $S^{\delta, L}$ -матрица на векторном пространстве \mathcal{H}^δ унитарна и микропричинна, т. е.

$$S^{\delta, L} (S^{\delta, L})^+ = S^{\delta, L} \otimes^\delta (S^{\delta, L})^+ = 1, \quad (6.7)$$

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \left(\frac{\delta S^{\delta, L}}{\delta g(y)} (S^{\delta, L})^+ \right) = 0 \quad (6.8)$$

при $x \ll y$.

Наша дальнейшая задача состоит в доказательстве существования последовательности пределов $S^L = \lim_{\delta \rightarrow 0} S^{\delta, L}$, $S = \lim_{L \rightarrow \infty} S^L$.

Здесь первый переход $\delta \rightarrow 0$ означает устранение всех «духовых» состояний из теории. Второй переход $L \rightarrow \infty$ означает переход к бесконечному объему и включению взаимодействия во всем четырехмерном пространстве.

Доказательство существования этих пределов будет проведено в следующей главе.

§ 7. Функции Грина в пределе $\delta \rightarrow 0$

Прежде чем изучать предельный переход $\delta \rightarrow 0$ в коэффициентных функциях S -матрицы, мы рассмотрим, к чему стремятся двухточечные функции Грина, полученные выше, в пределе $\delta \rightarrow 0$.

Функции Грина в пределе $\delta \rightarrow 0$ являются обобщенными функциями, заданными на пространстве основных функций Z_α ($\alpha < \frac{2\rho}{2\rho-1}$). Поэтому мы должны рассматривать несобственные предельные переходы, т. е. изучать пределы

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int dx G^\delta(x) f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int dk \tilde{G}^\delta(k) \tilde{f}(k), \quad (7.1)$$

где $G^\delta(x)$ — некоторая функция Грина, а $f(x) \in Z_\alpha$.

Прежде всего рассмотрим перестановочную функцию $\Delta^\delta(x)$. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int dx \Delta^\delta(x) f(x) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int dk \tilde{\Delta}^\delta(k) \tilde{f}(k) = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \tilde{f}(k) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_j(\delta) \varepsilon(k_0) \delta(k^2 - m_j^2(\delta)) = \\ &= \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \varepsilon(k_0) \delta(k^2 - m^2) \tilde{f}(k) + \lim_{\delta \rightarrow 0} Q^\delta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q^\delta &= \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \tilde{f}(k) \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j A_j(\delta) \varepsilon(k_0) \delta(k^2 - m_j^2(\delta)) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_j(\delta) \iint \frac{dk dk_0}{(2\pi)^3} \tilde{f}(k, k_0) \varepsilon(k_0) \delta(k^2 - m_j^2(\delta)). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Получим оценку

$$\begin{aligned} I_j^\delta &= \left| \iint \frac{dk dk_0}{(2\pi)^3} \tilde{f}(k, k_0) \varepsilon(k_0) \delta(k^2 - m_j^2(\delta)) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{dk}{2\omega_{j\mathbf{k}}^\delta} [|\tilde{f}(k, \omega_{j\mathbf{k}}^\delta)| + |\tilde{f}(k, -\omega_{j\mathbf{k}}^\delta)|] \leq \\ &\leq \text{const} \cdot \int \frac{dk}{\omega_{j\mathbf{k}}^\delta} \exp\{-B[|\mathbf{k}|^\nu + (\omega_{j\mathbf{k}}^\delta)^\nu]\}. \end{aligned}$$

где $\nu = \alpha/(\alpha-1) > 2\rho \geq 1$, B — некоторое положительное число. Воспользуемся неравенством

$$|\mathbf{k}|^\nu + (\omega_{j\mathbf{k}}^\delta)^\nu \geq h_1 m_j^\nu + h_2 |\mathbf{k}|^\nu,$$

где $h_1 = 2^{\nu/2-1}$, $h_2 = 1 + 2^{\nu/2-1}$. Получим

$$\begin{aligned} I_j^\delta &\leq e^{-Bh_1 m_j^\nu} \cdot \text{const} \cdot \int \frac{dk \exp\{-Bh_2 |\mathbf{k}|^\nu\}}{\sqrt{k^2 + m_j^2(\delta)}} \leq \\ &\leq \frac{\delta}{j^\sigma} \text{const} \cdot \exp\left\{-B_1 \left(\frac{j^\sigma}{\delta}\right)^{\nu/2}\right\}. \end{aligned}$$

где $B_1 = Bh_1 m^\nu$. Теперь для величины Q^δ имеем оценку

$$|Q^\delta| \leq \sum_{j=1}^{\infty} A_j(\delta) I_j^\delta \leq \text{const} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta \exp\left\{B \left(\frac{j^\sigma}{\delta}\right)^\rho - B_1 \left(\frac{j^\sigma}{\delta}\right)^{\nu/2}\right\}}{j^\sigma \Gamma\left(\left(\frac{1}{\rho} - \sigma\right) j\right)}.$$

Поскольку $\nu > 2\rho$, то

$$|Q^\delta| \leq \delta \cdot \text{const} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^\sigma \Gamma\left(\left(\frac{1}{\rho} - \sigma\right) j\right)} \leq \delta \cdot \text{const}.$$

Окончательно имеем $\lim_{\delta \rightarrow 0} Q^\delta = 0$.

Таким образом, перестановочная функция $\Delta^\delta(x)$ в пределе $\delta \rightarrow 0$ переходит в перестановочную функцию скалярного поля $\Phi(x)$:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta^\delta(x) = \Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \varepsilon(k_0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ikx}. \quad (7.4)$$

Точно таким же образом легко доказать, что в смысле обобщенных функций, заданных на Z_α :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta_{(\pm)}^\delta(x) = \Delta_{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \theta(\mp k_0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ikx}. \quad (7.5)$$

Существование этих пределов означает, что существует слабый предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Phi^\delta(x) = \Phi(x), \quad (7.6)$$

где $\Phi(x)$ — поле скалярной частицы массы m , подчиняющееся уравнению $(\square - m^2)\Phi(x) = 0$.

Итак, в пределе $\delta \rightarrow 0$ все «духовые» состояния исчезают. Это согласуется с утверждением

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}^\delta = \mathcal{H},$$

сделанным в конце § 4.

Рассмотрим теперь причинную функцию $\Delta_c^\delta(x)$. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int dx \Delta_c^\delta(x) f(x) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int \frac{dk}{(2\pi)^4 i} \tilde{f}(k) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j A_j(\delta)}{m_j^2(\delta) - k^2 - i\varepsilon} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int \frac{dk}{(2\pi)^4 i} \tilde{f}(k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n t^{2n} (k^2 - m^2)^n}{\prod_{j=0}^{n+2} \left(1 - \frac{\delta}{j^\sigma} \cdot \frac{k^2 - m^2 + i\varepsilon}{m^2}\right)} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dk V(-k^2) \tilde{f}(k)}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}. \end{aligned}$$

поскольку $f(x) \in Z_\alpha$.

Таким образом, причинная функция $\tilde{\Delta}_c^\delta(k)$ в пределе $\delta \rightarrow 0$ переходит в

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{\Delta}_c^\delta(k) = \tilde{\Delta}_c(k) = \frac{V(-k^2 l^2)}{m^2 - k^2 - i\epsilon}. \quad (7.7)$$

Функция $\tilde{\Delta}_c(k)$ имеет только один полюс при $k^2 = m^2$, соответствующий скалярной частице массы m . Полюсы, соответствующие «духовым» состояниям, исчезли. Функция $V(-k^2 l^2)$ является целой и не соответствует никакому реальному состоянию. Она описывает нелокальный характер взаимодействия скалярных частиц.

Итак, в пределе $\delta \rightarrow 0$ теория становится нелокальной. Происходит как бы следующее. «Духи», удаляясь при предельном переходе, как память о себе, делают теорию нелокальной. Таким образом, нелокальный характер взаимодействия, заложенный в лагранжиане классических полей (2.1), в квантовой теории поля проявляется как остаточный эффект от нефизических «духовых» состояний, когда эти «духи» устраняются из теории при предельном переходе.

§ 8. Случай нескольких формфакторов

Предложенный выше способ квантования применим в случае, когда лагранжиан взаимодействия содержит только один формфактор $K(\square)$. В данном параграфе мы рассмотрим вопрос, как провести квантование нелокальной системы, если в лагранжиане взаимодействия имеется несколько различных формфакторов $K_a(\square)$ ($a = 1, 2, \dots, N$), т. е.

$$\mathcal{L}_I(x) = gU(K_1(\square)\varphi(x), \dots, K_N(\square)\varphi(x)). \quad (8.1)$$

Будем считать, что все $K_a(\square)$ удовлетворяют условиям (E), стр. 97. Обозначим

$$\Phi_a(x) = K_a(\square)\varphi(x). \quad (8.2)$$

Наша задача состоит в том, чтобы при построении ряда теории возмущений получить следующие функции Грина:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \Phi_a(x) \Phi_b(y) | 0 \rangle &= \Delta_{(-)}(x-y), \\ \langle 0 | T(\Phi_a(x) \Phi_b(y)) | 0 \rangle &= K_a(\square) K_b(\square) \Delta_c(x-y). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Поэтому задача регуляризации состоит в подборе такой операторной структуры регуляризованных операторов $\Phi_a^\delta(x)$, чтобы в пределе снятия регуляризации были выполнены соотношения (8.3).

Пусть

$$K_a(k^2 l^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(a)} [l^2(k^2 - m^2)]^n, \quad (8.4)$$

$$K_a(k^2 l^2) K_b(k^2 l^2) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^{(ab)} [l^2(k^2 - m^2)]^n, \quad (8.5)$$

где

$$v_n^{(ab)} = \sum_{n+n_2=n} c_{n_1}^{(a)} c_{n_2}^{(b)}. \quad (8.6)$$

Введем регуляризацию следующим образом:

$$[K_a(k^2 l^2) K_b(k^2 l^2)]^\delta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n^{(ab)} [l^2(k^2 - m^2)]^n}{\prod_{j=1}^{n+2} \left(1 - \frac{\delta(k^2 - m^2)}{j^\sigma m^2}\right)}. \quad (8.7)$$

Справедливо представление, аналогичное (3.8):

$$\frac{[K_a(k^2 l^2) K_b(k^2 l^2)]^\delta}{m^2 - k^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j A_j^{(ab)}(\delta)}{m_j^2(\delta) - k^2}. \quad (8.8)$$

Здесь

$$m_j^2(\delta) = m^2 \left(1 + \frac{j^\sigma}{\delta}\right), \quad (8.9)$$

$$A_j^{(ab)}(\delta) = \sum_{n=\max\{0, j-2\}}^{\infty} \frac{v_n^{(ab)} (m^2 l^2)^n [(n+2)!]^\sigma}{\prod_{s=0}^{j-1} (j^\sigma - s^\sigma) \prod_{s'=j+1}^{n+2} (s'^\sigma - j^\sigma)} \left(\frac{j^\sigma}{\delta}\right)^{n+1}, \quad (8.10)$$

$$A_0^{(ab)}(\delta) = 1,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_j^{(ab)}(\delta) [m_j^2(\delta)]^N = 0 \quad (N=0, 1, 2). \quad (8.11)$$

Введем квантовое поле

$$\Phi_{(ab)}^\delta(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \Phi_{(ab)j}^\delta(x) \sqrt{|A_j^{(ab)}(\delta)|}, \quad (8.12)$$

где

$$\Phi_{(ab)j}^\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dk}{\sqrt{2\omega_{jk}^\delta}} (f_{jk}^{(ab)} e^{-ikx} + h_{jk}^{(ab)+} e^{ikx}). \quad (8.13)$$

Операторы $f_{jk}^{(ab)}$ и $h_{jk}^{(ab)+}$ определены следующим образом. При $a=b$

$$f_{jk}^{(aa)} = h_{jk}^{(aa)} = d_{jk}^{(a)} \quad (8.14)$$

и удовлетворяются коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} [d_{jk}^{(a)}, d_{j'k'}^{(a')}] &= [d_{jk}^{(a)+}, d_{j'k'}^{(a')}] = 0, \\ [d_{jk}^{(a)}, d_{j'k'}^{(a')}] &= (-1)^j \delta_{aa'} \delta_{jj'} \delta(k-k'). \end{aligned} \quad (8.15)$$

При $a \neq b$

$$f_{jk}^{(ab)} = h_{jk}^{(ba)+} \quad (8.16)$$

и удовлетворяются коммутационные соотношения:

$$[f_{jk}^{(ab)}, f_{j'k'}^{(a'b')}] = [h_{jk}^{(ab)}, h_{j'k'}^{(a'b')}] = (-1)^j \delta_{aa'} \delta_{bb'} \delta_{jj'} \delta(k-k'). \quad (8.17)$$

Остальные коммутаторы равны нулю. Из этих соотношений следует, что

$$[\Phi_{(aa)l}^{\delta}(x)]^+ = \Phi_{(aa)l}^{\delta}(x), \quad [\Phi_{(ab)l}^{\delta}(x)]^+ = \Phi_{(ba)l}^{\delta}(x). \quad (8.18)$$

Введем теперь поля

$$\Phi_a^{\delta}(x) = \sum_{b=1}^N \Phi_{(ab)}^{\delta}(x). \quad (8.19)$$

Легко проверить, что

$$\langle 0 | \Phi_a^{\delta}(x) \Phi_b^{\delta}(y) | 0 \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_j^{(ab)}(\delta) \Delta_{j(-)}(x-y),$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(\Phi_a^{\delta}(x) \Phi_b^{\delta}(y)) | 0 \rangle &= \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_j^{(ab)}(\delta) \Delta_{jc}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dk [K_a(k^2 l^2) K_b(k^2 l^2)]^{\delta} e^{-ikx}}{m^2 - k^2 - i\epsilon}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Таким образом, изложенное выше квантование операторов $\Phi_a^{\delta}(x)$ ($a = 1, \dots, N$) приводит к желаемой регуляризации функций Грина $\Delta_c^{\delta}(x-y)$ и $\Delta_{(-)}^{\delta}(x-y)$, которые используются при построении ряда теории возмущений для S -матрицы.

§ 9. Физический смысл формфактора

Остановимся на физическом смысле формфактора, введенного в (8.1). На простой модели квантовой теории поля покажем, что формфакторы из исследуемого нами класса дают релятивистски инвариантное описание протяженных объектов в квантовой теории поля. Пусть имеется бесконечно тяжелый источник, расположенный в точке $x=0$. Поле создается путем излучения и поглощения скалярных частиц с массой m . Предположим, что плотность лагранжиана взаимодействия этой системы записывается в виде

$$\mathcal{L}_I(x) = g\varphi(x) K(\square l^2) J(x), \quad (9.1)$$

где $\varphi(x)$ — поле скалярных частиц с массой m , а функция $J(x)$ описывает источник. Будем считать, что источник точечный и расположен в точке $x=0$. Кроме того, предполагаем, что источник включается в бесконечно удаленном прошлом и выключается в бесконечно удаленном будущем. Для определенности положим

$$J(x) \Rightarrow J(x, T) = J(x, x_0, T) = e^{-x_0^2/T^2} \delta(x). \quad (9.2)$$

Здесь T — большой параметр, характеризующий интервал времени, в течение которого включен источник. В конце вычислений необходимо перейти к пределу $T \rightarrow \infty$.

Функция $K(\square l^2)$ характеризует область нелокального взаимодействия около источника. Будем считать, что функция $K(k^2 l^2)$ удовлетворяет всем условиям (E) при $\rho = 1/2$, кроме условия нормировки. Это условие мы обсудим ниже.

Для $K(k^2 l^2)$ при $\rho = 1/2$ справедливо представление

$$K(k^2 l^2) = \int_{\rho^2 \leq l^2} d^4 \rho a(\rho^2) e^{ik_0 \rho - i\rho k}. \quad (9.3)$$

При $k_0 = 0$ положим

$$K(-k^2 l^2) = \int d\rho b(\rho^2) e^{i\rho k}. \quad (9.4)$$

Связь между функциями $a(u)$ и $b(u)$ может быть найдена из соотношений

$$K(k^2 l^2) = \int d^4 \rho a(\rho^2) e^{ik_E \rho} = \int dr b(r^2) e^{ikr},$$

где $k^2 = -k_E^2 = -\mathbf{k}^2$, $k_E = (ik_0, \mathbf{k})$, или

$$K(k^2 l^2) = 2\pi^2 \int_0^l dt \sqrt{t} \frac{J_1(\sqrt{t(-k^2)})}{\sqrt{-k^2}} a(t) = 2\pi \int_0^l ds b(s) \frac{\sin \sqrt{s(-k^2)}}{\sqrt{-k^2}}.$$

Из этих соотношений легко получить

$$b(s) = \int_s^l \frac{dt a(t)}{\sqrt{t-s}}, \quad a(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_t^l \frac{ds [b(s) + 2sb'(s)]}{\sqrt{s-t}}. \quad (9.5)$$

Потенциал, создаваемый источником в точке $x=r$, равен гайзенбергову оператору поля $\varphi(x)$, усредненному по вакууму:

$$W(x) = \langle 0 | T(\varphi(x) S) | 0 \rangle. \quad (9.6)$$

В данном случае состояние вакуума $|0\rangle$, не содержащее скалярных частиц, является состоянием, описывающим источник. Будем вычислять потенциал, создаваемый полем $\varphi(x)$ около источника.

Путь вычисления следующий. Мы построим полную S -матрицу, согласно развиваемым нами методам. Полная S -матрица должна удовлетворять условию стабильности $\langle 0 | S | 0 \rangle = 1$. Однако для того чтобы удовлетворить этому условию, к лагранжиану (9.1) надо добавить контрчлен, отвечающий за перенормировку энергии основного состояния источника, или вакуума. Этот контрчлен ΔE описывает энергию взаимодействия источника с полем скалярных частиц. Поскольку мы предполагаем, что взаимодействие адиабатически включается и выключается, этот контрчлен должен иметь вид

$$\Delta E(x_0) = e^{-2x_0^2/T^2} \cdot \Delta E. \quad (9.7)$$

Введем теперь регуляризационную процедуру, связанную с нелокальным взаимодействием, как это было описано выше.

Согласно процедуре квантования, изложенной в предыдущем параграфе, мы должны проквантовать два поля $\varphi(x)$ и $\Phi(x) = K(\square l^2)\varphi(x)$ таким образом, чтобы проквантованные поля $\varphi^\delta(x)$ и $\Phi^\delta(x)$ приводили к следующим причинным функциям:

$$\begin{aligned}\Delta_c(x-y) &= \langle 0 | T(\varphi^\delta(x)\varphi^\delta(y)) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dk e^{-ik(x-y)}}{m^2 - k^2 - i\epsilon}, \\ D_c^\delta(x-y) &= \langle 0 | T(\varphi^\delta(x)\Phi^\delta(y)) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dk [K(k^2 l^2)]^\delta e^{-ik(x-y)}}{m^2 - k^2 - i\epsilon}, \\ \mathcal{D}_c^\delta(x-y) &= \langle 0 | T(\Phi^\delta(x)\Phi^\delta(y)) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dk [K^2(k^2 l^2)]^\delta e^{-ik(x-y)}}{m^2 - k^2 - i\epsilon}.\end{aligned}$$

Это можно сделать, как говорилось выше.

С учетом всего вышесказанного получим для S -матрицы:

$$S = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} S^{(\delta, T)}, \quad (9.9)$$

где

$$S^{(\delta, T)} = T \exp \left\{ ig \int dx \Phi^\delta(x) J(x, T) - i \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \Delta E(x_0) \right\}. \quad (9.10)$$

Средние значения операторов полей, т. е. функций Грина, вычисляются по формуле

$$\begin{aligned}G_n(x_1, \dots, x_n) &= \langle 0 | T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) S) | 0 \rangle = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \langle 0 | T(\varphi^\delta(x_1) \dots \varphi^\delta(x_n) S^{(\delta, T)}) | 0 \rangle.\end{aligned} \quad (9.11)$$

Воспользовавшись теоремой Вика, получим

$$S^{(\delta, T)} = S_r^{(\delta, T)} \langle 0 | S^{(\delta, T)} | 0 \rangle, \quad (9.12)$$

где

$$S_r^{(\delta, T)} = : \exp \left\{ ig \int dx \Phi^\delta(x) J(x, T) \right\} :, \quad (9.13)$$

$$\langle 0 | S^{(\delta, T)} | 0 \rangle =$$

$$= \exp \left\{ -\frac{g^2}{2} \iint dx_1 dx_2 J(x_1, T) \mathcal{D}_c^\delta(x_1 - x_2) J(x_2, T) - i \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \Delta E(x_0) \right\}. \quad (9.14)$$

Задача состоит в том, чтобы подобрать ΔE таким образом, чтобы

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \langle 0 | S^{(\delta, T)} | 0 \rangle = 1. \quad (9.15)$$

Рассмотрим выражение (9.14). После простых вычислений получим, используя (9.2) и (9.7):

$$\begin{aligned}\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(-\frac{g^2}{2} \right) \iint dx_1 dx_2 J(x_1, T) \mathcal{D}_c^\delta(x_1 - x_2) J(x_2, T) &= \\ &= iT^2 \frac{g^2}{2^5 \pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 e^{-T^2 k_0^2 / 2} \int dk \frac{[K(k_0^2 - k^2)]^2}{m^2 + k^2 - k_0^2 - i\epsilon} = \\ &= iT \frac{g^2}{4(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dk [K(-k^2)]^2}{m^2 + k^2} + O\left(\frac{1}{T}\right), \\ &- i \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \Delta E(x_0) = -iT \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \Delta E.\end{aligned}$$

Таким образом, пределы в (9.9) и (9.15) существуют, если

$$\Delta E = \frac{g^2}{2(2\pi)^3} \int \frac{dk [K(-k^2)]^2}{m^2 + k^2} < \infty. \quad (9.16)$$

Регуляризованная S -матрица дается выражением (9.13).

Рассмотрим теперь потенциал $W(x)$. Подставляя в (9.6) матрицу $S_r^{(\delta, T)}$ (9.13), получим

$$\begin{aligned}W(x) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \langle 0 | T(\varphi^\delta(x) S_r^{(\delta, T)}) | 0 \rangle = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} ig \int dy D_c^\delta(x-y) J(y, T).\end{aligned} \quad (9.17)$$

Переходя к пределам $\delta \rightarrow 0$ и $T \rightarrow \infty$, после простых вычислений получаем, что $W(x)$ не зависит от x_0 и

$$W(r) = W(r, 0) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{dk K(-k^2 l^2)}{m^2 + k^2} e^{ikr}. \quad (9.18)$$

Воспользовавшись представлением (9.4), получим

$$\begin{aligned}W(r) &= \frac{g}{4\pi} \int d\rho b(\rho^2) \frac{e^{-m|r-\rho|}}{|r-\rho|} = \\ &= \begin{cases} \frac{g}{rm} \left[e^{-mr} \int_0^r d\rho \rho b(\rho^2) \operatorname{sh} m\rho + \operatorname{sh} mr \int_r^l d\rho \rho b(\rho^2) e^{-m\rho} \right], & r < l \\ \frac{g}{4\pi} K(m^2 l^2) \frac{e^{-mr}}{r}, & r > l. \end{cases}\end{aligned} \quad (9.19)$$

Здесь

$$K(m^2 l^2) = \int dr b(r^2) \frac{\operatorname{sh} m \sqrt{r^2}}{m \sqrt{r^2}}.$$

Таким образом, потенциал, создаваемый точечным источником $J(x) = \delta(x)$, представляет собой потенциал шара радиуса l . Поэтому функция

$$\mathcal{J}(x) = K(\square l^2) J(x) = K(\square l^2) \delta^{(3)}(x) = K(\Delta l^2) \delta^{(3)}(x)$$

описывает источник, являющийся шаром радиуса l . Распределение вещества внутри этого шара задается функцией $b(r^2)$. Потенциал взаимодействия, создаваемый единичным точечным элементом вещества, является потенциалом Юкавы.

Заметим, что потенциал $W(r)$ вне шара радиуса l совпадает с потенциалом точечной частицы, причем сила взаимодействия определяется постоянной $g_{\text{эфф}} = gK(m^2 l^2)$. Выбираемая нами нормировка $K(m^2 l^2) = 1$ означает, что константа связи g в лагранжиане взаимодействия выбрана таким образом, что именно она определяет потенциал источника на больших расстояниях.

Проведенное исследование показало, что в статическом пределе используемые нами релятивистски инвариантные обобщенные функции $K(x-x') = K(\square l^2) \delta^{(4)}(x-x')$ дают правильное описание протяженных объектов и следует ожидать, что они могут служить хорошей основой для релятивистски инвариантного описания нелокальных взаимодействий.

ГЛАВА V

S-МАТРИЦА В НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Я пришел к тому убеждению, что недостаточность результатов происходит оттого, что тут употребляются совсем не те приемы. Я не знаю, что именно нужно, но бессилие старых, традиционных уловок для меня очевидно.

М. Е. Салтыков-Щедрин. Благонамеренные речи.

§ 1. Введение

В предыдущей главе был указан один из способов, может быть самый предпочтительный, введения нелокальности в теорию. Поскольку в настоящее время идеи нелокальной теории лишь только начинают завоевывать право на существование, следует изучить различные возможные способы построения теории нелокального взаимодействия квантованных полей.

Еще раз подчеркнем, что успех построения квантовополевой теории нелокальных взаимодействий предопределяется двумя положениями:

(1) Нелокальный формфактор в импульсном пространстве должен быть целой аналитической функцией от p^2 , убывающей в евклидовой области при $p^2 \rightarrow -\infty$.

(2) Формфактор должен быть проквантован, т. е. представлен на промежуточном этапе (так сказать, в несобственном смысле) в виде суперпозиции фиктивных квантов, которые должны быть устранены в конце вычислений. Другими словами, должна быть введена соответствующая регуляризационная процедура, обеспечивающая переход к евклидовой метрике.

В этой главе мы укажем другие возможности построения нелокальной S-матрицы в теории однокомпонентного скалярного поля для достаточно широкого класса лагранжианов взаимодействия, когда методы локальной квантовой теории поля принципиально не могут быть применены.

Мы рассмотрим алгебраическую структуру каждого члена ряда теории возмущений для S-матрицы и выясним те достаточные требования, удовлетворив которым, можно быть уверенным, что все необходимые аксиомы будут выполнены для построенной S-матрицы.

Таким образом, потенциал, создаваемый точечным источником $J(x) = \delta(x)$, представляет собой потенциал шара радиуса l . Поэтому функция

$$\mathcal{J}(x) = K(\square l^2) J(x) = K(\square l^2) \delta^{(3)}(x) = K(\Delta l^2) \delta^{(3)}(x)$$

описывает источник, являющийся шаром радиуса l . Распределение вещества внутри этого шара задается функцией $b(r^2)$. Потенциал взаимодействия, создаваемый единичным точечным элементом вещества, является потенциалом Юкавы.

Заметим, что потенциал $W(r)$ вне шара радиуса l совпадает с потенциалом точечной частицы, причем сила взаимодействия определяется постоянной $g_{\text{эфф}} = gK(m^2 l^2)$. Выбираемая нами нормировка $K(m^2 l^2) = 1$ означает, что константа связи g в лагранжиане взаимодействия выбрана таким образом, что именно она определяет потенциал источника на больших расстояниях.

Проведенное исследование показало, что в статическом пределе используемые нами релятивистски инвариантные обобщенные функции $K(x - x') = K(\square l^2) \delta^{(4)}(x - x')$ дают правильное описание протяженных объектов и следует ожидать, что они могут служить хорошей основой для релятивистски инвариантного описания нелокальных взаимодействий.

ГЛАВА V

S-МАТРИЦА В НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Я пришел к тому убеждению, что недостаточность результатов происходит оттого, что тут употребляются совсем не те приемы. Я не знаю, что именно нужно, но бессиле старых, традиционных уловок для меня очевидно.

М. Е. Салтыков-Щедрин. Благонамеренные речи.

§ 1. Введение

В предыдущей главе был указан один из способов, может быть самый предпочтительный, введения нелокальности в теорию. Поскольку в настоящее время идеи нелокальной теории лишь только начинают завоевывать право на существование, следует изучить различные возможные способы построения теории нелокального взаимодействия квантованных полей.

Еще раз подчеркнем, что успех построения квантовополевой теории нелокальных взаимодействий предопределяется двумя положениями:

(1) Нелокальный формфактор в импульсном пространстве должен быть целой аналитической функцией от p^2 , убывающей в евклидовой области при $p^2 \rightarrow -\infty$.

(2) Формфактор должен быть проквантован, т. е. представлен на промежуточном этапе (так сказать, в несобственном смысле) в виде суперпозиции фиктивных квантов, которые должны быть устранены в конце вычислений. Другими словами, должна быть введена соответствующая регуляризационная процедура, обеспечивающая переход к евклидовой метрике.

В этой главе мы укажем другие возможности построения нелокальной S-матрицы в теории однокомпонентного скалярного поля для достаточно широкого класса лагранжианов взаимодействия, когда методы локальной квантовой теории поля принципиально не могут быть применены.

Мы рассмотрим алгебраическую структуру каждого члена ряда теории возмущений для S-матрицы и выясним те достаточные требования, удовлетворив которым, можно быть уверенным, что все необходимые аксиомы будут выполнены для построенной S-матрицы.

Далее будет сформулирована регуляризационная процедура, хотя, на первый взгляд, и отличающаяся от процедуры квантования, описанной в предыдущей главе, но, по своей сути, полностью с ней идентичная. Преимущество новой регуляризации состоит лишь в большей универсальности.

Затем будет доказано существование конечного предела для нелокальной S -матрицы при снятии регуляризации в каждом порядке теории возмущений. Это доказательство справедливо и для варианта нелокальной теории, описанного в предыдущей главе.

Далее мы покажем, что в теории возмущений для любых физических процессов амплитуды, рассматриваемые как аналитические функции инвариантных импульсных переменных, имеют в любой ограниченной области точно такие же особенности, как и в локальной теории.

Таким образом, в этой главе будет показано, что в рамках нелокальной теории фактически для произвольного лагранжиана взаимодействия можно построить S -матрицу, которая в каждом порядке теории возмущений конечна и имеет ту же аналитическую структуру, что и в локальной теории. Доказательство унитарности и причинности будет дано в следующей главе.

В основу изложения этой главы положены работы автора (1967, 1968б, 1970а и в).

§ 2. Лагранжианы взаимодействия

Мы будем рассматривать только однокомпонентное скалярное поле $\varphi(x)$. Обобщение методов на теорию взаимодействия нескольких скалярных полей не представляет никаких принципиальных трудностей.

Плотность лагранжиана записывается в виде

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_I(x), \quad (2.1)$$

где

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) (\square - m^2) \varphi(x), \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_I(x) = gU(\varphi(x)). \quad (2.3)$$

Функция $U(\varphi)$ представима в виде ряда

$$U(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} \varphi^n. \quad (2.4)$$

Здесь $\{u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots\}$ — некоторая последовательность вещественных чисел, задающих форму взаимодействия.

Будем предполагать, что для последовательности вещественных чисел $\{u_n\}$ существует в комплексной ζ -плоскости мера

$\sigma(\zeta)$ такая, что

$$u_n = i^n \int \zeta^n d\sigma(\zeta). \quad (2.5)$$

Тогда функция $U(\varphi)$ может быть записана в форме

$$U(\varphi) = \int d\sigma(\zeta) e^{i\zeta\varphi}. \quad (2.6)$$

Поскольку коэффициенты u_n вещественны, мера $\sigma(\zeta)$ удовлетворяет условию

$$i^n \int \zeta^n d\sigma(\zeta) = (-i)^n \int (\zeta^*)^n [d\sigma(\zeta)]^*. \quad (2.7)$$

Кроме того, предположим, что существует неотрицательная монотонно растущая функция $M(u)$ такая, что

$$\int |d\sigma(\zeta)| e^{NM(|\zeta|)} < \infty \quad (2.8)$$

при любых $N > 0$.

Представление (2.6) удобно тем, что оно исчерпывает все исследуемые в настоящее время формы самодействия скалярного поля.

Так, если $U(\varphi)$ — полином $U(\varphi) = \sum_{n=3}^N a_n \varphi^n$, то, вводя функцию

$$W_N(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=3}^N \frac{(-i)^n a_n n!}{\zeta^{n+1}},$$

получим

$$U(\varphi) = \oint d\zeta W_N(\zeta) e^{i\zeta\varphi}.$$

Если $U(\varphi)$ — функция, непрерывная и абсолютно интегрируемая на вещественной оси $(-\infty, \infty)$, тогда

$$U(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \tilde{U}(v) e^{i\varphi v},$$

где $\int_{-\infty}^{\infty} dv |\tilde{U}(v)| < \infty$.

Если $U(\varphi) \in Z_\alpha$ ($\alpha \geq 1$) (например, $U(\varphi) \sim e^{-\varphi^2}$, $e^{-\varphi^{2n}}$, $\frac{\sin \varphi}{\varphi}$ и т. д.), тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv |\tilde{U}(v)| \exp \left\{ a |v|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right\} < \infty$$

при некоторых $a > 0$.

Если $U(\varphi)$ аналитична в некоторой окрестности вещественной оси $|\operatorname{Im} \varphi| < d$, тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv |\tilde{U}(v)| e^{a|v|} < \infty$$

для $0 < a < d$. Примерами таких функций могут быть функции $\frac{\varphi^3}{1+\varphi^2}$, $\frac{\varphi^4}{\sqrt{1+\varphi^4}}$ и т. д.

Для функций $U(\varphi)$, аналитических в точке $\varphi = 0$, но имеющих особенности на вещественной оси типа $\frac{1}{1-\varphi}$, $\frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2}}$ и т. д., представление (2.6) также справедливо. Так, например,

$$\frac{1}{1-\varphi} = \int_0^{\infty} dv e^{-(1-\varphi)v} = i \int_0^{\infty} dv e^{-i(1-\varphi)v},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} dv J_0(v) e^{i\varphi v},$$

где $J_0(v)$ — функция Бесселя. Эти представления задают функцию $U(\varphi)$ в окрестности точки $\varphi = 0$ и могут использоваться для аналитического продолжения во всю φ -плоскость.

Можно рассмотреть такие экзотические формы взаимодействия, как, например,

$$U(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp(iv\varphi) \cdot \exp\{-[\ln(1+v^2)]^{1+\nu}\},$$

где $\nu > 0$. В этом случае функция $U(\varphi)$ неаналитична в точке $\varphi = 0$. Коэффициенты u_n в этом случае растут при $n \rightarrow \infty$, как

$$|u_n| \sim \exp\left\{\operatorname{const} \cdot n^{\frac{1+\nu}{\nu}}\right\},$$

так что ряд (2.4) в этом случае является асимптотическим. Такие формы взаимодействия, как увидим ниже, приводят к очень быстрому росту амплитуд физических процессов с ростом энергии.

Таким образом, рассматриваемый класс лагранжианов взаимодействия, задаваемый представлением (2.6), достаточно широк. Мы увидим далее, что методы нелокальной квантовой теории поля позволяют рассмотреть их единым образом.

§ 3. Алгебраическая структура ряда теории возмущений для S -матрицы

Прежде чем приступить к изложению различных способов введения нелокального формфактора в теорию, рассмотрим алгебраическую структуру ряда теории возмущений, следующую из формального представления для S -матрицы в виде T -произведения (см. гл. I), можно вычислять матричные элементы переходов между различными физическими состояниями. В процессе этих вычислений необходимо приводить члены S -матрицы к нормальной форме. При переходе от T -произведения к N -произведению удобно пользоваться теоремой Вика в функциональной форме (см. § 5 гл. I). В гл. I говорилось также, что S -матрицу в каждом порядке теории возмущений можно представить в виде совокупности диаграмм Фейнмана и затем изучать условия существования интегралов для каждой диаграммы Фейнмана в отдельности.

Наиболее хорошо эта методика разработана в квантовой электродинамике, мезодинамике, в теории слабых взаимодействий. Вообще такой графический анализ ряда теории возмущений наиболее удобен во всех тех случаях, когда лагранжиан взаимодействия является полиномом не очень высокой степени (третьей или четвертой) от операторов взаимодействующих полей.

Если же лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_I(x) = gU(\varphi(x))$ является полиномом достаточно высокой степени или неполиномиально зависит от поля $\varphi(x)$, то для построения диаграмм Фейнмана удобнее пользоваться так называемой суперпропагаторной техникой.

Пусть функция, определяющая лагранжиан взаимодействия, может быть представлена в виде (2.6). Ряд теории возмущений может быть получен при разложении по константе связи T -экспоненты в формуле (III.3.1). Воспользовавшись представлением (2.6), получим

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n g(x_1) \dots g(x_n) \int d\sigma(\xi_1) \dots \int d\sigma(\xi_n) \times$$

$$\times : \exp\{i(\xi_1 \varphi(x_1) + \dots + \xi_n \varphi(x_n))\} : \exp\left\{-\sum_{i < j} \xi_i \xi_j \Delta_c(x_i - x_j)\right\}.$$

(3.1)

Здесь мы ввели функцию включения взаимодействия $g(x)$, чтобы избавиться от проблем, связанных с интегрированиями по всему 4-пространству.

Введем обозначения

$$w_{ij} = w(\xi_i \xi_j; x_i - x_j) = \exp\{-\xi_i \xi_j \Delta_c(x_i - x_j)\} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\xi_i \xi_j)^n}{n!} [\Delta_c(x_i - x_j)]^n, \quad (3.2)$$

$$d\mu_j = dx_j g(x_j) d\sigma(\xi_j) \exp\{i\xi_j \varphi(x_j)\}. \quad (3.3)$$

Тогда ряд (3.1) можно записать в компактном виде

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \dots \int d\mu_1 \dots d\mu_n : \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 + w_{ij}). \quad (3.4)$$

Здесь w_{ij} представляет собой двухточечную функцию — так называемый «суперпропагатор», описывающий сумму графов Фейнмана вида, показанного на рис. 6.

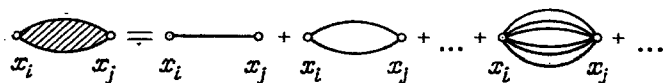


Рис. 6. Сумма графов Фейнмана, определяющая «суперпропагатор».

Матричные элементы различных физических процессов являются фурье-образами от суперпропагатора w_{ij} и от произведений суперпропагаторов вида $\prod_{i, j \in G} w_{ij}$, где i и j пробегает значения в зависимости от конкретно выбранной диаграммы Фейнмана G .

Рассмотрим произведение

$$A_{nn}(1, \dots, n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 + w_{ij}). \quad (3.5)$$

Точкам x_1, \dots, x_n поставим в соответствие вершины диаграммы, или графа $(1, \dots, n)$, а функциям w_{ij} — ребра графа, соединяющие вершины i и j . Тогда произведению (3.5) соответствует сумма обыкновенных, или линейных, вообще говоря, несвязных графов с n вершинами. Напомним, что обыкновенным, или линейным графом называется граф без петель, у которого каждые две вершины связаны не более чем одной линией. Обозначим через G_{kj_k} некоторый связный граф с k вершинами. Индекс j_k обозначает тип графа; он выбирается произвольно и изменяется в пределах $1 \leq j_k \leq N_k$, где N_k — число различных связных графов с k вершинами. На рис. 7 показаны различные связные графы для числа вершин $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Пусть теперь графу G_{kj_k} поставлена в соответствие функция $F_{kj_k}(1, \dots, k)$. При этом мы не будем различать графы, полу-

чающиеся друг из друга перестановкой вершин. Это означает, что $F_{kj_k}(1, \dots, k)$ при фиксированных k и j_k описывает сумму графов по всевозможным перестановкам вершин.

k	Связные графы	N_k
1		1
2		1
3		2
4		6
5		22

Рис. 7. Различные связные графы для числа вершин $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Например, согласно обозначениям, принятым на рис. 7, имеем

$$F_{31}(1, 2, 3) = \mathcal{P}(1, 2, 3) w_{12} w_{23} = w_{12} w_{23} + w_{12} w_{13} + w_{13} w_{23},$$

$$F_{32}(1, 2, 3) = \mathcal{P}(1, 2, 3) w_{12} w_{23} w_{31} = w_{12} w_{23} w_{31},$$

$$F_{42}(1, 2, 3, 4) = \mathcal{P}(1, 2, 3, 4) w_{14} w_{24} w_{34} = w_{14} w_{24} w_{34} + w_{13} w_{23} w_{34} + w_{12} w_{23} w_{24} + w_{12} w_{13} w_{14}.$$

Здесь $\mathcal{P}(1, 2, \dots, k)$ — оператор, симметризирующий функцию по индексам $1, 2, \dots, k$.

По определению, положим $F_{0j_0} \equiv 1$. Тогда произведение (3.5) можно представить в виде

$$A_{nn}(1, \dots, n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 + w_{ij}) = \\ = \sum_{\{k_j, j_{k_j}\}} \mathcal{P}(1, \dots, k_1 | k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2 | \dots | \dots, k_1 + k_2 + \dots + k_v) \times \\ \times F_{k_1 j_{k_1}}(1, \dots, k_1) F_{k_2 j_{k_2}}(k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2) \cdot \dots \\ \dots \cdot F_{k_v j_{k_v}}(n - k_v + 1, \dots, n). \quad (3.6)$$

Здесь v — число компонент связности данного n -вершинного графа, т. е. число связных графов, на которое разбивается некоторый n -вершинный несвязный граф. Суммирование в (3.6) проводится по всем возможным разбиениям: $k_j, j_{k_j}; k_j \geq 0$;

$\sum_{j=1}^v k_j = n; 1 \leq j_{k_j} \leq N_{k_j}$. Оператор $\mathcal{P}(1, \dots, k_1 | k_1 + 1, \dots, \dots, k_1 + k_2 | \dots | \dots, n)$ симметризует произведения функций в (3.6) по произвольным разбиениям n точек на $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_v!}$ всевозможных совокупностей по k_1, \dots, k_v точек в каждой.

Таким образом, формула (3.6) дает представление S -матрицы в n -м порядке теории возмущений в виде набора всевозможных связных диаграмм Фейнмана. Ниже мы получим условие, которым должны удовлетворять функции, соответствующие произвольным графам Фейнмана, чтобы унитарность и причинность были выполнены в произвольном порядке теории возмущений.

Заметим еще, что полученные представления (3.2), (3.3), (3.4) и (3.6) справедливы как для полиномиальных, так и неполономиальных лагранжианов взаимодействия.

§ 4. Проблема ультрафиолетовых расходимостей в ряду теории возмущений

Сейчас нам хотелось бы привести ряд общих соображений, которые бы прояснили, что мы можем ожидать в случае успешного построения конечной унитарной S -матрицы, а также каковы мыслимые пути введения нелокальных формфакторов в теорию.

Рассмотрим S -матрицу в первом порядке по константе связи g . Имеем

$$S_1 = i \int dx \mathcal{L}_I(x) = ig \int dx \sum_{n=3}^{\infty} \frac{u_n}{n!} : \varphi^n(x) : , \quad (4.1)$$

где S_1 описывает любые упругие и неупругие процессы с любым числом входящих и выходящих частиц, причем амплитуды всех

этих процессов являются константами. Так, амплитуда рождения n частиц с импульсами k_1, \dots, k_n при соударении двух частиц с импульсами p_1 и p_2 равна

$$\langle k_1, \dots, k_n | S_1 | p_1, p_2 \rangle = \\ = \frac{i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}n-1}} \cdot \frac{\delta(k_1 + \dots + k_n - p_1 - p_2)}{\sqrt{n! 2!} \sqrt{2k_{10} \dots 2k_{n0}} \sqrt{2p_{10} \cdot 2p_{20}}} g u_{n+2}.$$

Все матричные элементы S_1 хорошо определены, и никаких проблем с ультрафиолетовыми расходимостями в данном порядке теории возмущений не возникает.

Во втором порядке теории возмущений, действуя формально, легко получить

$$S_2 = \frac{i^2}{2!} \iint dx_1 dx_2 T(\mathcal{L}_I(x_1) \mathcal{L}_I(x_2)) = \\ = \frac{i^2}{2!} \iint dx_1 dx_2 \sum_{m_1, m_2=0}^{\infty} F_{m_1, m_2}^{(2)}(x_1 - x_2) : \frac{\varphi^{m_1}(x_1) \varphi^{m_2}(x_2)}{m_1! m_2!} : , \quad (4.2)$$

где

$$F_{m_1, m_2}^{(2)}(x_1 - x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+m_1} u_{n+m_2}}{n!} [\Delta_c(x_1 - x_2)]^n. \quad (4.3)$$

Воспользовавшись (2.5) и (3.2), получим

$$F_{m_1, m_2}^{(2)}(x_1 - x_2) = i^{m_1+m_2} \iint d\sigma(\xi_1) d\sigma(\xi_2) \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \omega(\xi_1 \xi_2, x_1 - x_2). \quad (4.4)$$

Причинную функцию скалярного поля $\Delta_c(x_1 - x_2)$ будем рассматривать как краевое значение аналитической функции

$$\Delta_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dke^{ikx}}{m^2 - k^2 - i\epsilon} = \frac{m}{4\pi^2} \cdot \frac{K_1(m\sqrt{-x^2})}{\sqrt{-x^2}}, \quad (4.5)$$

где $K_1(u)$ — функция Макдональда, масса m имеет отрицательную мнимую добавку $m \rightarrow m - i\epsilon$. Полученный ряд (4.3) обладает особенностями двух сортов. Во-первых, в случае неполономиальных лагранжианов взаимодействия существуют такие последовательности коэффициентов $\{u_n\}$, для которых ряд расходится при любых значениях комплексного переменного Δ_c . Во-вторых, если даже ряд (4.3) сходится в случае полиномиальных лагранжианов взаимодействия (ряд (4.3) всегда содержит конечное число членов), функция $F_{m_1, m_2}^{(2)}(x)$ имеет неинтегрируемую при $x=0$ особенность, поскольку причинная функция $\Delta_c(x)$ сингулярна при $x=0$:

$$\Delta_c(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (x^2 \rightarrow 0).$$

Поэтому ни функция $F_{m_1, m_2}^{(2)}(x_1 - x_2)$ в (4.3) и (4.4), ни суперпропагатор w_{ij} не являются интегрируемыми.

Таким образом, вычисление фурье-образа функции $F_{m,m_2}^{(2)}(x)$ в (4.3) составляет главную трудность при изучении ряда теории возмущений для любых нетривиальных лагранжианов взаимодействия.

На математическом языке это означает, что хотя причинная функция является обобщенной функцией, заданной на пространстве Шварца S , ее произведения (3.2) и (4.3) уже не являются обобщенными функциями. Необходимо как-то доопределить произведение типа (3.2) и (4.3) так, чтобы суперпропагатор w_{ij} был определен как обобщенная функция, заданная на некотором подходящем пространстве основных функций.

Задание операции умножения обобщенных функций, совместной с основными аксиомами, является одной из основных математических проблем современной квантовой теории поля.

Предположим, что мы как-то умеем придать математический смысл интегралам

$$\tilde{F}_{m,m_2}^{(2)}(p) = i \int dx e^{ipx} F_{m,m_2}^{(2)}(x) \quad (4.6)$$

и что эти интегралы в некотором «пиквикском» смысле конечны. Какими свойствами должны обладать функции $\tilde{F}_{m,m_2}^{(2)}(p)$, если унитарность и причинность выполнены?

Для простоты рассмотрим член матрицы рассеяния $\tilde{F}_{22}^{(2)}(p)$, дающий вклад в амплитуду упругого рассеяния. Согласно (4.3), эта функция может быть представлена в некотором смысле как сумма диаграмм Фейнмана (см. рис. 6). Если S -матрица унитарна в каждом порядке теории возмущений, тогда мнимая часть $\tilde{F}_{22}^{(2)}(p)$ при $p^2 > 4m^2$ должна быть равна

$$\begin{aligned} \text{Im } \tilde{F}_{22}^{(2)}(p) &= \rho_{22}(p^2) = \sum_n \langle 2 | S_1 | n \rangle \langle n | S_1^\dagger | 2 \rangle = \\ &= \sum_{n=2}^{[\sqrt{p^2/m}]} \frac{u_{n+2}^2}{n!} \Omega_n(p^2), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $\Omega_n(p^2)$ — фазовый объем n скалярных частиц с массой m :

$$\Omega_n(x^2) = \frac{1}{(2\pi)^3(n-1)} \int \frac{dk_1}{2\omega_1} \dots \int \frac{dk_n}{2\omega_n} \delta(p - k_1 - \dots - k_n). \quad (4.8)$$

Здесь $\omega_i = \sqrt{m^2 + k_i^2}$, $x^2 = p^2$, знак $[b]$ обозначает целую часть числа b .

Функция $\Omega_n(x^2)$ в (4.8) называется фазовым объемом n частиц с массой m при энергии $x = \sqrt{p^2}$. Вычисление функции $\Omega_n(x^2)$ при произвольных n и x^2 представляет собой достаточно сложную задачу. Наиболее удобная формула, пригодная как

для численных, так и для аналитических расчетов, приведена в книге Г. И. Копылова (1970):

$$\Omega_n(x^2) = C_n x^{\frac{n-3}{2}} (x - nm)^{\frac{3n-5}{2}} \Psi_n\left(\frac{nm}{x}\right), \quad (4.9)$$

где

$$C_n = \frac{1}{(4\pi)^2(n-1)(n-2)!},$$

$$\Psi_n(t) = \left[\frac{(8\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{2} \cdot \frac{(n-1)!(n-2)!}{n^{n/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}(n-1)\right)} \right]^{\Lambda(t)}$$

Функция $\Lambda(t)$ табулирована, ее график приведен на рис. 8, откуда видно, что $\Lambda(t) \leq t$. Для наших целей, т. е. для определения лишь порядка роста исследуемых функций, достаточно использовать оценку сверху, которая легко получается из приведенных выше формул. Именно, существуют такие константы $C > 0$ и $A > 0$, что

$$\Omega_n(x^2) \leq \frac{CA^n x^{\frac{n-3}{2}} (x - nm)^{\frac{3n-5}{2}}}{\Gamma(2n+1)}. \quad (4.10)$$

Если же нам необходимо производить оценку при достаточно больших x и n , то удобнее пользоваться более простой формулой

$$\Omega_n(x^2) \leq CA^n \frac{x^{n/2} (x - nm)^{3n/2}}{(2n)^{2n} e^{-2n}}. \quad (4.11)$$

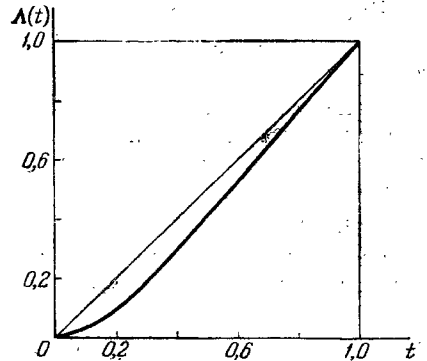


Рис. 8. График функции $\Lambda(t)$.

Здесь, конечно, константы C и A отличны от постоянных в (4.10). Этой оценкой мы будем пользоваться в дальнейшем.

Поскольку коэффициенты u_{n+2}^2 положительны, мнимая часть (4.7) растет с ростом p^2 . Если все $u_n \neq 0$, то она растет быстрее, чем любая конечная степень p^2 . В табл. 2 приведены примеры зависимости роста функции $\rho_{22}(p^2)$ от вида коэффициентов u_n .

Вообще в теории с неполиномиальными лагранжианами взаимодействия единственными математически хорошо определенными величинами следует считать функции

$$\rho_{m,m_2}(p) = \sum_{n=2}^{[\sqrt{p^2/m}]} \frac{u_{n+m_1} u_{n+m_2}}{n!} \Omega_n(p^2), \quad (4.12)$$

Таблица 2

$U(\varphi)$	u_n	$\ln \rho_{22}(p^2)$ ($p^2 \rightarrow \infty$)	$U(\varphi)$	u_n	$\ln \rho_{22}(p^2)$ ($p^2 \rightarrow \infty$)
φ^N	$u_n = 0, n > N$	$N \ln p^2$	$\frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}$	$\sim \Gamma(n)$	$\sqrt{p^2} \ln \sqrt{p^2}$
$\sin \varphi$	$\sim a^n$	$\text{const} \cdot (p^2)^{1/2}$	$\sum_n n! \varphi^n$	$\sim \Gamma(2n)$	$4 \sqrt{p^2} \ln \sqrt{p^2}$
$e^{-\varphi^2}$	$\sim \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$	$\text{const} \cdot \sqrt{p^2}$	$\sum_n e^{n^2} \varphi^n$	$\sim e^{n^2}$	$2p^2$
$e^{-\varphi^4}$	$\sim \Gamma\left(\frac{3}{4}n\right)$	$\frac{1}{2} \sqrt{p^2} \ln \sqrt{p^2}$			

так как они определяются конечными суммами и имеют смысл для любых последовательностей коэффициентов $\{u_n\}$. По существу, наша задача состоит в том, чтобы восстановить теорию по этим спектральным функциям, пользуясь общими принципами квантовой теории поля.

Что теперь можно сказать о поведении всей амплитуды $\tilde{F}_{m,m_2}^{(2)}(p)$? Ее реальная часть может быть найдена лишь только после определения интеграла (4.6). Однако из общих соображений следует предполагать, что $\tilde{F}_{m,m_2}^{(2)}(p)$, являясь амплитудой второго порядка теории возмущений, должна иметь простой полюс в точке $p^2 = m^2$ с вычетом $u_{1+m_1} u_{1+m_2}$ и точку ветвления при $p^2 = 4m^2$. Скачок на этом разрезе равен $2i\rho_{m,m_2}(p^2)$. Других особенностей в конечной плоскости p^2 эта амплитуда не должна иметь. Таким образом, можно надеяться, что функция $\tilde{F}_{m,m_2}^{(2)}(p)$, если она существует, представляется в виде

$$\tilde{F}_{m,m_2}^{(2)}(p) = \frac{u_{1+m_1} u_{1+m_2}}{m^2 - p^2 - i\epsilon} + \tilde{W}(p^2) + \frac{\tilde{V}(p^2)}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dx^2 \rho_{m,m_2}(x^2)}{(x^2 - p^2 - i\epsilon) \tilde{V}(x^2)}. \quad (4.13)$$

Здесь $\tilde{W}(p^2)$ и $\tilde{V}(p^2)$ — целые функции в плоскости комплексного p^2 , вещественные при вещественных p^2 и такие, что интеграл в (4.13) сходится. Если $\tilde{W}(p^2)$ и $\tilde{V}(p^2)$ являются целыми функциями порядка роста меньше $1/2$, то амплитуда $\tilde{F}_{m,m_2}^{(2)}(p)$ соответствует локальной теории. Если же $\tilde{W}(p^2)$ и $\tilde{V}(p^2)$ — целые функции порядка роста $1/2$ или выше, то $\tilde{F}_{m,m_2}^{(2)}(p)$ соответствует нелокальной теории.

Мы будем предполагать, что нелокальность вводится в теорию таким образом, что амплитуды $\tilde{F}_{m,m_2}^{(2)}(p)$ имеют вид (4.13), причем порядок роста ρ функций $\tilde{W}(p^2)$ и $\tilde{V}(p^2)$ равен или больше $1/2$: $\rho \geq 1/2$. Явный вид этих функций определяется способом введения нелокальности. Некоторые возможные варианты будут обсуждены ниже.

Далее потребуем, чтобы $\tilde{F}_{m,m_2}^{(2)}(p) = O\left(\frac{1}{(-p^2)^{1+a}}\right)$ при $p^2 \rightarrow -\infty$, где $a > 1$. Это требование убывания матричных элементов в евклидовом направлении позволяет однозначно определить любые интегралы, соответствующие матричным элементам S -матрицы во всех остальных порядках теории возмущений.

Кроме того, это требование необходимо, чтобы формфакторы можно было интерпретировать как функции, описывающие пространственное распределение вещества или заряда внутри частицы, имеющей некоторый пространственный размер.

Мы рассмотрим далее способы введения нелокального формфактора в теорию, чтобы обеспечить необходимое поведение амплитуд вида (4.13). В гл. VII будут рассмотрены методы, связанные с суммированием асимптотических рядов вида (4.3) для неполиномиальных лагранжианов взаимодействия $\mathcal{L}_I = gU(\varphi)$, которые приводят к нелокальной квантовой теории поля.

§ 5. Введение формфактора в теорию

В гл. IV был дан один из способов введения нелокальности в теорию, связанный с изменением лагранжиана классического поля. Возможно, что этот путь является наиболее приемлемым в настоящее время. Однако этот путь не единственный, существуют другие возможности, которые связаны непосредственно с определением операции T -произведения. В гл. IV было показано также, что изменение лагранжиана взаимодействия вида (IV.1.1) приводит к изменению пропагатора свободной частицы (IV.7.7). Можно поступить иначе. Пропагатор свободной частицы, появляющийся как результат хронологического упорядочения, согласно теореме Вика,

$$\Delta_c(x_1 - x_2) = \langle 0 | T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)) | 0 \rangle, \quad (5.1)$$

не определен при совпадающих аргументах $x_1 = x_2$. Если теория нелокальная, то можно считать, что T -произведение не определено не только в точке $x_1 = x_2$, но и в некоторой их окрестности. Тогда в правую часть (5.1) можно добавить нелокальную обобщенную функцию. Итак, постулируем, что

$$\Delta_c(x_1 - x_2) \Rightarrow D_c(x_1 - x_2) = \langle 0 | T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)) | 0 \rangle + \frac{1}{i} K(x_1 - x_2), \quad (5.2)$$

где $K(x - x')$ — некоторая нелокальная обобщенная функция из одного из исследованных нами в гл. II классов. В импульсном пространстве получим

$$\tilde{D}_c(k^2) = \frac{1}{m^2 - k^2 - i\epsilon} + \tilde{K}(k^2) = \frac{V(-k^2)}{m^2 - k^2 - i\epsilon}, \quad (5.3)$$

где

$$V(-k^2) = 1 + (m^2 - k^2) \tilde{K}(k^2).$$

Мы предполагаем, что функция $V(z)$ ($z = -k^2$) удовлетворяет следующим условиям (обозначим их совокупность через (E_1)):

(1) $V(z)$ — целая аналитическая функция в комплексной z -плоскости и имеет некоторый конечный порядок роста $1/2 \leq \rho < \infty$.

(2) При $\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty$ ($k^2 \rightarrow -\infty$) функция $V(z)$ достаточно быстро убывает. Мы будем рассматривать случаи:

a) $V(z) = O\left(\frac{1}{|z|^a}\right)$ ($a > 1$);

б) $\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty} |z|^N |V(z)| = 0$ ($\forall N > 0$).

(3) $[V(z)]^* = V(z^*)$.

(4) $V(-m^2) = 1$.

(5) Функция $V(z)$ может быть неотрицательной на вещественной оси, т. е. $V(x) \geq 0$, что имеет место всегда, когда нелокальность вводится в лагранжиан взаимодействия (см. гл. IV), но может быть и знакопеременной, если исходить из способа введения формфактора, как излагалось выше.

Приведем примеры возможных функций:

$$V_1(-k^2) = e^{-l^2(m^2 - k^2)}, \quad V_2(-k^2) = \left[\frac{\sin l \sqrt{m^2 - k^2}}{l \sqrt{m^2 - k^2}} \right]^4, \quad (5.4)$$

$$V_3(-k^2) = 2^s \Gamma(1+s) \frac{J_s(\sqrt{l^2(m^2 - k^2)})}{(\sqrt{l^2(m^2 - k^2)})^s},$$

где $J_s(u)$ — функция Бесселя при некотором заданном $s > 0$.

Условия (E_1) являются более общими, чем условия (E) , приведенные на стр. 97, так что функция, удовлетворяющая условиям (E) , тем самым удовлетворяет и условиям (E_1) .

Основное, так сказать, «техническое» отличие такого способа введения формфактора в пропагатор скалярной частицы от способа, описанного в предыдущей главе, состоит в том, что формфактор $V(-k^2)$ в (5.3) не является неотрицательной функцией, как это было в гл. IV. Это обстоятельство может быть использовано в различных случаях.

Кроме того, для такого способа не проходит физическая интерпретация формфактора, как функции, описывающей пространственное распределение вещества или заряда, как это было продемонстрировано в § 9 гл. IV.

Таким образом, добавление в пропагатор нелокальной обобщенной функции, удовлетворяющей принципу физической локальности, не означает, с физической точки зрения, изменение формы взаимодействия полей, как это было в случае, рассмотренном в гл. IV. Смысл такого изменения (5.2) состоит в том, что в схеме построения S -матрицы по методу Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова (1973) возникает произвол при определении оператора $S_2(x_1, x_2) = T(\mathcal{L}_I(x_1)\mathcal{L}_I(x_2))$ при совпадающих аргументах. При этом, конечно, такой произвол существует для

всех операторов $S_n(x_1, \dots, x_n) = T(\mathcal{L}_I(x_1) \dots \mathcal{L}_I(x_n))$ во всех порядках теории возмущений. Однако для устранения ультрафиолетовых расхождений при сохранении унитарности теории достаточно провести изменение лишь в пропагаторе свободной частицы. В этом состоит дополнительный постулат теории.

Существенно заметить, что изменение пропагатора, согласно (5.2) или (5.3), меняет динамику процесса, так как пропагаторы определяют амплитуды физических реакций. Поэтому математическая проблема определения выражений вида (5.2) должна разрешаться в рамках некоторых физических предположений.

Еще одна возможность состоит в том, что можно непосредственно постулировать в представлении (4.13) функции $\tilde{W}(\rho^2)$ и $\tilde{V}(\rho^2)$. Следовательно, в теории будут обеспечены такие требования как унитарность, причинность и т. д., а весь произвол, связанный с определением интеграла (4.6), будет сконцентрирован в определении этих двух функций $\tilde{W}(\rho^2)$ и $\tilde{V}(\rho^2)$.

Все вышесказанное справедливо и для проблемы определения суперпропагатора ω_{ij} , с помощью которого строится ряд теории возмущений для S -матрицы. Мы будем предполагать, что нелокальность вводится в теорию таким образом, что суперпропагатор $\omega(\zeta, x)$ ($\zeta = \zeta_i \zeta_j$, $x = x_i - x_j$) может быть представлен как

$$\omega(\zeta, x) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int dke^{-ikx} \tilde{\omega}(\zeta, k), \quad (5.5)$$

где

$$\tilde{\omega}(\zeta, k) = \int_{m^2}^{\infty} \frac{dx^2 \rho(\zeta, x^2, k^2)}{x^2 - k^2 - i\epsilon}. \quad (5.6)$$

Фурье-преобразование (5.5) понимается в смысле фурье-преобразования обобщенных функций.

Будем говорить, что функция $\rho(\zeta, x^2, k^2)$ удовлетворяет совокупности условий (E_2) , если

(1) Она является целой аналитической функцией в комплексной k^2 -плоскости и имеет порядок роста $1/2 \leq \rho < \infty$.

(2) При $k^2 \rightarrow \pm \infty$ и некотором $A > 0$

$$\rho(\zeta, x, k^2) = \begin{cases} O(\exp\{A|k^2|^\rho\}), & k^2 \rightarrow +\infty, \\ O\left(\frac{1}{|k^2|^a}\right) & (a > 1), \quad k^2 \rightarrow -\infty \end{cases}$$

для любых ζ , равномерно для всех $x^2 \in [m^2, +\infty)$.

(3) Функция $\rho(\zeta, x^2, k^2)$ определена для всех $x^2 \in [m^2, +\infty)$ и убывает при $x^2 \rightarrow \infty$ таким образом, что функция

$$v(\zeta, k^2) = \int_{m^2}^{\infty} \frac{dx^2}{x^2} \rho(\zeta, x, k^2)$$

во-первых, является целой в ζ - и k^2 -плоскостях, и, во-вторых, для нее справедлива следующая оценка при некоторых $C > 0$ и $A > 0$:

$$|v(\zeta, k^2)| \leq C \exp\{A|k^2|^\rho + M_1(|\zeta|)\}.$$

Здесь функция $M_1(u)$ такая, что для $u_1 > 0$ и $u_2 > 0$

$$M_1(u_1 u_2) \leq M(u_1) + M(u_2),$$

где функция $M(u)$ определяется формулой (2.8). В-третьих, при $k^2 \rightarrow -\infty$

$$v(\zeta, k^2) = O\left(\frac{1}{|k^2|^a}\right) \quad (a > 1).$$

(4) Функция $\rho(\zeta, \kappa^2, k^2)$ нормирована условием

$$\rho(\zeta, \kappa^2, k^2) = \rho_0(\zeta, k^2) = -\zeta \delta(k^2 - m^2) + \sum_{n=2}^{[\sqrt{k^2/m}]} \frac{(-\zeta)^n}{n!} \Omega_n(k^2).$$

(5) $[\rho(\zeta, \kappa^2, k^2)]^* = \rho(\zeta^*, \kappa^2, (k^2)^*)$.

Далее мы покажем, что методы нелокальной квантовой теории поля приводят к суперпропагаторам $\tilde{w}(\zeta, k^2)$, обладающим перечисленными выше свойствами.

Все вопросы, связанные с интегрированием произведений суперпропагаторов по мере $\sigma(\zeta)$, определяющей лагранжиан взаимодействия в (2.6), будут рассмотрены нами в гл. VII. Сейчас же мы будем считать, что все эти интегралы существуют и удовлетворяют всем необходимым требованиям.

§ 6. Регуляризационная процедура

В гл. IV была введена регуляризационная процедура, которая связывалась с методом квантования нелокального лагранжиана взаимодействия. Однако при построении ряда теории возмущений при помощи пропагаторов

$$\tilde{D}_c(k^2) = \frac{V(-k^2)}{m^2 - k^2 - i\epsilon} \quad (6.1)$$

или суперпропагаторов

$$\tilde{w}(\zeta, k) = \int_{m^2}^{\infty} \frac{dx^2 \rho(\zeta, \kappa^2, k^2)}{x^2 - k^2 - i\epsilon}. \quad (6.2)$$

где функции $V(-k^2)$ и $\rho(\zeta, \kappa^2, k^2)$ удовлетворяют условиям (E_1) и (E_2) , удобнее пользоваться несколько другим способом регуляризации. К изложению этого нового способа регуляризации мы сейчас и перейдем. Сначала мы рассмотрим регуляризацию пропагатора (6.1), а затем суперпропагатора (6.2).

Пусть нелокальный формфактор удовлетворяет условиям (E_1) ; тогда в области $k^2 < m^2$ для него справедливо представление Меллина

$$V(-k^2) = \frac{1}{2i} \int_{-a-i\infty}^{-a+i\infty} \frac{d\zeta v(\zeta)}{\sin \pi \zeta} (m^2 - k^2 - i\epsilon)^\zeta. \quad (6.3)$$

Функция $v(\zeta)$ обладает следующими свойствами:

(1) Она регулярна в полуплоскости $\text{Re } \zeta \geq -a$ и в этой области

$$|v(\xi + i\eta)| \leq C \frac{e^{\pi|\eta|}}{(1+|\eta|)^N \Gamma\left(\frac{|\xi|}{\rho} + 1\right)}$$

при любых $N > 0$ и некотором $C > 0$.

(2) В точках $\zeta = -1, -2, \dots, -[a]$ она имеет нули, по крайней мере, первого порядка.

(3) $v(0) = 1$.

(4) $v^*(\zeta) = v(\zeta^*)$.

Для функций V_1, V_2 и V_3 в (5.4), в частности, имеем

$$v_1(\zeta) = \frac{l^{2\zeta}}{\Gamma(1+\zeta)}, \quad v_2(\zeta) = \frac{l^{2\zeta} [2^{4\zeta+5} - 2^{2\zeta+3}]}{\Gamma(5+2\zeta)}, \quad (6.4)$$

$$v_3(\zeta) = \frac{l^{2\zeta} \Gamma(1+s)}{2^{2\zeta} \Gamma(1+\zeta) \Gamma(1+s+\zeta)}.$$

Легко видеть, что эти функции удовлетворяют перечисленным выше условиям.

Представление (6.3) справедливо при $k^2 < m^2$. Для перехода в область $k^2 > m^2$ необходимо перейти при интегрировании в ζ -плоскости от контура $L_0 = [\zeta: \zeta = \xi + i\eta, \xi = -a, -\infty < \eta < \infty]$ к контуру

$$L_\theta = [\zeta: \zeta = -a + r e^{\pm i(\frac{\pi}{2} - \theta)}, 0 \leq r < \infty] \quad (0 < \theta \leq \pi/2), \quad (6.5)$$

как показано на рис. 9.

Введем регуляризованную функцию

$$\tilde{D}_c^\delta(k^2) = \frac{1}{2i} \int \frac{d\zeta v(\zeta) e^{\delta\zeta} (m^2 - k^2 - i\epsilon)^{\zeta-1}}{\sin \pi \zeta}, \quad (6.6)$$

где $0 \leq \theta \leq \pi/4$. Эта функция $\tilde{D}_c^\delta(k^2)$ при $\delta > 0$ удовлетворяет совокупности следующих условий, которую мы обозначим через (A_1) :

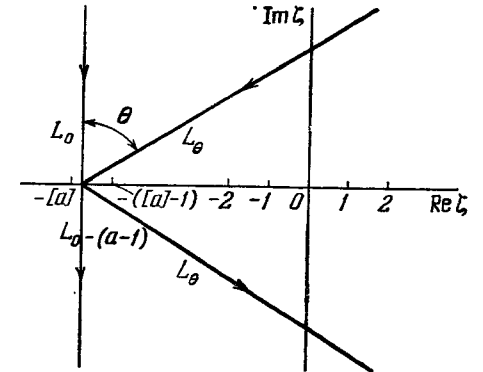


Рис. 9. Контур интегрирования L_0 и L_θ .

(1) Она определена во всей комплексной k^2 -плоскости и регулярна везде, кроме разреза вдоль луча $[m^2, +\infty)$.

$$(2) \quad \tilde{D}_c^\delta(k^2) = O\left(\frac{1}{|k^2|^{a+1}}\right) \text{ при } |k^2| \rightarrow \infty.$$

$$(3) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{D}_c^\delta(k^2) = D_c(k^2) = \frac{V(-k^2)^2}{m^2 - k^2 - i\epsilon}.$$

Для функции $\tilde{D}_c^\delta(k^2)$ существует фурье-образ

$$D_c^\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int dk e^{-ikx} \tilde{D}_c^\delta(k^2) = \frac{1}{2i} \int_{-a+i\infty}^{-a-i\infty} \frac{d\zeta v(\zeta) e^{i\delta\zeta^2}}{\sin \pi\zeta} D_c(\zeta, m^2, x), \quad (6.7)$$

где

$$D_c(\zeta, m^2, x) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int dk e^{-ikx} (m^2 - k^2 - i\epsilon)^{\zeta-1} = i \frac{2^\zeta m^{2(1+\zeta)} e^{-i\pi\zeta}}{8\pi\Gamma(1-\zeta)} \cdot \frac{H_{1+\zeta}^{(2)}(m\sqrt{x^2 - i\epsilon})}{(m\sqrt{x^2 - i\epsilon})^{1+\zeta}}. \quad (6.8)$$

Здесь $H_\nu^{(2)}(z)$ — функция Ганкеля, для которой при $\text{Re } \nu < 0$ справедливо разложение в окрестности точки $z=0$:

$$\left(\frac{z}{2}\right)^\nu H_\nu^{(2)}(z) = \frac{1}{i \sin \pi\nu} \left\{ e^{i\pi\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(-\nu + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \right\} = \frac{1}{i \sin \pi\nu} \left\{ \frac{e^{i\pi\nu}}{\Gamma(1+\nu)} - \left(\frac{z}{2}\right)^{-2\nu} \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} + O(z^2) \right\}. \quad (6.9)$$

Используя это представление, получим

$$D_c(\zeta, m^2, 0) = \frac{m^{2(1+\zeta)}}{(4\pi)^2 \zeta (1+\zeta)}. \quad (6.10)$$

Поэтому функция $D_c^\delta(x)$ ограничена в точке $x=0$, так как

$$D_c^\delta(0) = \frac{1}{2i} \int_{-a+i\infty}^{-a-i\infty} \frac{d\zeta v(\zeta) e^{i\delta\zeta^2} \cdot m^{2(1+\zeta)}}{\sin \pi\zeta (4\pi)^2 \zeta (1+\zeta)} < \infty. \quad (6.11)$$

Из представлений (6.7) и (6.9) также следует, что функция $D_c^\delta(x)$ $[a-1]$ раз непрерывно дифференцируема по x в точке $x^2=0$.

Таким образом, при $\delta > 0$ $D_c^\delta(x)$ является локально интегрируемой функцией, и произведения типа $\prod_{i,j} D_c^\delta(x_i - x_j)$ также локально интегрируемы.

В смысле обобщенных функций $\lim_{\delta \rightarrow 0} D_c^\delta(x) = D_c(x)$, т. е.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int dx D_c^\delta(x) f(x) = \int dx D_c(x) f(x) = \int dp D_c(p^2) \tilde{f}(p)$$

для любой $f(x) \in Z_\alpha$ ($\alpha < \frac{2\rho}{2\rho-1}$).

Рассмотрим теперь суперпропагатор $\tilde{\omega}(\zeta, k)$ (6.2). Пусть функция $\rho(\zeta, \kappa^2, k^2)$ удовлетворяет условиям (E_2). Тогда для нее справедливо представление Меллина в области $k^2 < \kappa^2$:

$$\rho(\zeta, \kappa^2, k^2) = \frac{1}{2i} \int_{-a+i\infty}^{-a-i\infty} \frac{d\chi R(\zeta, \kappa^2, \chi)}{\sin \pi\chi} (\kappa^2 - k^2 - i\epsilon)^\chi. \quad (6.12)$$

Исходя из свойств функций $\rho(\zeta, \kappa^2, k^2)$, получаем, что:

(1) Функция $R(\zeta, \kappa^2, \chi)$ регулярна в полуплоскости $\text{Re } \chi \geq -a$ и в этой области существует такая положительная функция $C(|\zeta|, \kappa^2)$, что

$$|R(\zeta, \kappa^2, \chi)| \leq \frac{C(|\zeta|, \kappa^2) e^{\pi|\eta|}}{(1+|\eta|)^N \Gamma\left(1 + \frac{|\xi|}{\rho}\right)}$$

при любых $N > 0$, где $\chi = \xi + i\eta$. В точках $\chi = -1, -2, \dots, -[a]$ функция $R(\zeta, \kappa^2, \chi)$ имеет нули, по крайней мере, первого порядка.

$$(2) \quad R(\zeta, \kappa^2, 0) = \rho_0(\zeta, \kappa^2).$$

$$(3) \quad [R(\zeta, \kappa^2, \chi)]^* = R(\zeta^*, \kappa^2, \chi^*).$$

(4) Функция

$$r(\zeta, \chi) = \int_{m^2}^{\infty} d\kappa^2 R(\zeta, \kappa^2, \chi)$$

целая по ζ и регулярна в полуплоскости $\text{Re } \chi \geq -a$. Для нее справедлива оценка

$$|r(\zeta, \chi)| \leq C \frac{e^{\pi|\eta| + M_1(|\zeta|)}}{(1+|\eta|)^N \Gamma\left(1 + \frac{|\xi|}{\rho}\right)}$$

при любых $N > 0$. При $\chi = -1, -2, \dots, -[a]$ она имеет нули, по крайней мере, первого порядка.

Подчеркнем еще раз, что представление (6.12) справедливо при $k^2 < \kappa^2$. Для перехода в область $k^2 > \kappa^2$ необходимо перейти от интегрирования в χ -плоскости по контуру $L = L_0$ к контуру L_θ , как показано на рис. 9. Формула (6.12) с интегралом по контуру L_θ ($0 < \theta \leq \pi/2$) дает представление для $\rho(\zeta, \kappa^2, k^2)$ при всех $k^2 \in (-\infty, +\infty)$.

Введем в рассмотрение регуляризованную функцию

$$\rho^\delta(\zeta, \kappa^2, k^2) = \frac{1}{2i} \int_{L_\theta} \frac{d\chi R(\zeta, \kappa^2, \chi) e^{\delta\chi^2}}{\sin \pi\chi} (\kappa^2 - k^2 - i\varepsilon)^\chi, \quad (6.13)$$

где $0 \leq \theta \leq \pi/4$.

Легко убедиться, что при $\delta > 0$ функция $\rho^\delta(\zeta, \kappa^2, k^2)$

(1) регулярна во всей комплексной k^2 -плоскости, за исключением точки ветвления при $k^2 = \kappa^2 - i\varepsilon$;

$$(2) \quad \rho^\delta(\zeta, \kappa^2, k^2) = O\left(\frac{1}{|k^2|^a}\right) \text{ при } |k^2| \rightarrow \infty;$$

$$(3) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho^\delta(\zeta, \kappa^2, k^2) = \rho(\zeta, \kappa^2, k^2).$$

Воспользовавшись (6.13), получим для суперпропагатора $\tilde{w}(\zeta, k)$ регуляризованное выражение

$$\tilde{w}^\delta(\zeta, k) = \int_{m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \rho^\delta(\zeta, \kappa^2, k^2)}{\kappa^2 - k^2 - i\varepsilon}. \quad (6.14)$$

Функция $\tilde{w}^\delta(\zeta, k)$ удовлетворяет следующим условиям (A_2):

(1) Она аналитична в k^2 -плоскости всюду, кроме линии ветвления вдоль луча $[m^2, +\infty)$.

$$(2) \quad \tilde{w}^\delta(\zeta, k) = O\left(\frac{1}{|k^2|^{a+1}}\right) \text{ при } |k^2| \rightarrow \infty.$$

$$(3) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{w}^\delta(\zeta, k) = \tilde{w}(\zeta, k)$$

для любых k^2 .

(4) Существует фурье-образ

$$\begin{aligned} \omega^\delta(\zeta, x) &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int dk e^{-ikx} \tilde{w}^\delta(\zeta, k) = \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-a+i\infty}^{-a-i\infty} \frac{d\chi e^{\delta\chi^2}}{\sin \pi\chi} \int_{m^2}^{\infty} d\kappa^2 R(\zeta, \kappa^2, \chi) D_c(\chi, \kappa^2, x), \end{aligned} \quad (6.15)$$

где $D_c(\chi, \kappa^2, x)$ дается формулой (6.8).

Функция $\omega^\delta(\zeta, x)$ также ограничена в нуле, т. е. $\omega^\delta(\zeta, 0) < \infty$. Таким образом, при $\delta > 0$ суперпропагатор $\omega^\delta(\zeta, x)$ является ограниченной функцией, так что произведения таких функций интегрируемы.

В смысле обобщенных функций $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega^\delta(\zeta, x) = \omega(\zeta, x)$, т. е.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int dx \omega^\delta(\zeta, x) f(x) = \int dx \omega(\zeta, x) f(x) = \int dk \tilde{w}(\zeta, k) \tilde{f}(k)$$

для любой $f(x) \in Z_\alpha$ ($\alpha < \frac{2\rho}{2\rho-1}$).

Регуляризованная S -матрица может быть записана в виде

$$S^\delta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \dots \int : d\mu_1 \dots d\mu_n : \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 + w_{ij}^\delta). \quad (6.16)$$

Для эрмитово сопряженной S -матрицы получим, используя условие (2.7):

$$S^{\delta+} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int : d\mu_1 \dots d\mu_n : \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 + w_{ij}^{\delta+}), \quad (6.17)$$

где

$$w_{ij}^{\delta+} = [w_{ij}^\delta(\zeta_i^* \zeta_j^*, x_i - x_j)]^*. \quad (6.18)$$

§ 7. Снятие регуляризации в матричных элементах S -матрицы

Рассмотрим теперь, как перейти к пределу $\delta \rightarrow 0$ в интегралах, определяющих некоторый произвольный матричный элемент S -матрицы.

Как говорилось выше, ряд теории возмущений строится согласно диаграммной технике Фейнмана, где каждой линии диаграммы сопоставляется или нелокальный пропагатор $D_c(x_i - x_j)$ (5.2) и (5.3) или суперпропагатор $w(\zeta_i \zeta_j, x_i - x_j)$ (5.5) и (5.6). В x -пространстве матричный элемент какого-либо процесса в n -м приближении теории возмущений будет представляться суммой выражений вида

$$F^\delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i, j \in G} D_c^\delta(x_i - x_j) \quad (7.1a)$$

или

$$F^\delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i, j \in G} w(\zeta_i \zeta_j, x_i - x_j), \quad (7.1b)$$

где $i, j = 1, \dots, n$ соответственно выбранной связной диаграмме G . Ниже мы будем рассматривать только выражения (7.1b). Все нижесказанное без каких-либо изменений справедливо и для (7.1a). Зависимость амплитуды (7.1b) от переменных ζ_1, \dots, ζ_n будет рассмотрена нами в гл. VII.

Если в (7.1b) перейти к импульсному представлению, то получим

$$\begin{aligned} \tilde{F}^\delta(p_1, \dots, p_n) &= \int dx_1 \dots \int dx_n e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} F^\delta(x_1, \dots, x_n) = \\ &= (2\pi)^4 \delta(p_1 + \dots + p_n) T^\delta(p_1, \dots, p_n), \end{aligned} \quad (7.2)$$

где

$$T^\delta(p_1, \dots, p_n) = \int \dots \int \prod_{i=1}^L dl_i \prod_{j=1}^N \tilde{w}^\delta(\zeta_j, k_j). \quad (7.3)$$

Здесь N — число внутренних линий в диаграмме, L — число независимых интегрирований, $\zeta_j = \zeta_{j_1} \zeta_{j_2}$, k_j — 4-импульс, соответствующий данной линии в диаграмме, соединяющей точки x_j и $x_{j'}$, l_i — 4-импульсы, по которым проводится интегрирование. Импульс k_j является суммой вида

$$k_j = \sum_{\nu=1}^L \theta_{j\nu} l_\nu + \sum_{\mu=1}^n \theta_{j\mu} p_\mu, \quad (7.4)$$

где числа $\theta_{j\nu}$ и $\theta_{j\mu}$ могут принимать только одно из трех значений: $-1, 0, +1$, в зависимости от выбранной линии в диаграмме.

Интегралы в (7.3) хорошо сходятся при $\delta > 0$, так как функция $\tilde{w}^\delta(\zeta, k)$ убывает, как $|k^2|^{-1-a}$ ($a > 1$) согласно условиям (A_2) . Поступим далее следующим образом. Интеграл (7.3) можно переписать в виде

$$T^\delta(p_1, \dots, p_n) = \int \dots \int \prod_{i=1}^L dl_i \int \dots \int \prod_{s=1}^L dl_{s0} \prod_{j=1}^N \tilde{w}^\delta(\zeta_j, k_{j0}, k_j). \quad (7.5)$$

Функция $\tilde{w}^\delta(\zeta_j, k_{j0}, k_j)$ имеет в плоскости $k_{j0} + ik_{j4}$ две линии ветвления, которые начинаются в точках

$$\omega_j^\pm = \pm \sqrt{m^2 + k_j^2} \mp i\epsilon \quad (7.6)$$

и направлены в сторону увеличения $\sqrt{m^2 + k_j^2} \rightarrow +\infty$.

В пространстве \mathbb{C}^L переменных интегрирования $z_i = l_{i0} + il_{i4}$ ($i = 1, \dots, L$) подынтегральная функция в (7.5) имеет линии ветвления, которые, согласно (7.4) и (7.6), начинаются в точках, определяемых уравнениями:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^L \theta_{j\nu} z_\nu^+ &= Q_j - \omega_j + i\epsilon, \\ \sum_{\nu=1}^L \theta_{j\nu} z_\nu^- &= Q_j + \omega_j - i\epsilon \quad (j = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Здесь

$$Q_j = - \sum_{\mu=1}^n \theta_{j\mu} p_{\mu 0}, \quad \omega_j = \sqrt{m^2 + \left(\sum_{\nu} \theta_{j\nu} l_\nu + \sum_{\mu} \theta_{j\mu} p_\mu \right)^2}. \quad (7.8)$$

Линии ветвления направлены в сторону увеличения чисел $\omega_j \rightarrow +\infty$.

Доказательство возможности перехода к пределу при $\delta \rightarrow 0$ в (7.5) вытекает из следующей леммы. Прежде всего дадим

Определение. Будем говорить, что функция n комплексных переменных $f(z_1, \dots, z_n)$, где $z_\mu = x_\mu + iy_\mu$ ($\mu = 1, \dots, n$) принадлежит классу \mathcal{H} , если она удовлетворяет условиям:

(1) Функция $f(z_1, \dots, z_n)$ имеет конечное число точек ветвления, определяемых уравнениями

$$\sum_{\nu=1}^n b_{j\nu} z_\nu^+ = P_j - \Omega_j + i\epsilon, \quad \sum_{\nu=1}^n b_{j\nu} z_\nu^- = P_j + \Omega_j - i\epsilon. \quad (7.9)$$

Здесь $j = 1, \dots, N$, где N — некоторое конечное число, $\epsilon > 0$, $b_{j\nu}$ и P_j — вещественные числа, Ω_j — положительные числа. Линии разреза, начинающиеся в точках, определяемых уравнениями (7.9), направлены в сторону увеличения чисел $\Omega_j \rightarrow +\infty$.

(2) На бесконечности для функций $f(z_1, \dots, z_n)$ справедливы оценки

$$f(z_1, \dots, z_n) = \begin{cases} O\left(\frac{1}{|y_\mu|^{a_\mu}}\right) & x_\mu \text{ фиксированы, } y_\mu \rightarrow \pm\infty, \\ O(e^{|x_\mu|^{p_\mu}}) & x_\mu \rightarrow \pm\infty, y_\mu \text{ фиксированы} \end{cases} \quad (7.10)$$

при некоторых $a_\mu > 0$ ($\mu = 1, \dots, n$).

(3) Существуют такие функции $f^\delta(z_1, \dots, z_n)$, которые

а) при $\delta > 0$ имеют те же особенности (7.9), кроме бесконечно удаленной точки;

б) при $\delta > 0$ убывают, когда $|z_\mu| \rightarrow \infty$, как

$$f^\delta(z_1, \dots, z_n) = O\left(\frac{1}{|z_\mu|^{a_\mu}}\right); \quad (7.11)$$

в) существует предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f^\delta(z_1, \dots, z_n) = f(z_1, \dots, z_n)$$

равномерно в любой ограниченной области аналитичности функции $f(z_1, \dots, z_n)$.

Тогда справедлива следующая

Лемма. Пусть $f_s(z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{H}$ ($s = 1, \dots, m$), и пусть числа $\alpha_\mu^{(s)}$ в (7.10) и (7.11) таковы, что сходится интеграл

$$f^\delta(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \prod_{s=1}^m f_s^\delta(x_1, \dots, \xi, \dots, x_n) \quad (7.12)$$

для всех вещественных x_1, \dots, x_n . Тогда $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{H}$.

Доказательство. Поскольку $f_s(x_1, \dots, \xi, \dots, x_n) \in \mathcal{H}$, то в комплексной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ подынтегральная функция в (7.12) имеет, согласно (7.9), две группы линий ветвления, начинающихся в точках

$$\begin{aligned} \zeta_j^+ &= \sum_{\nu} b'_{j\nu} x_\nu + P_j - \Omega_j + i\epsilon, \\ \zeta_j^- &= \sum_{\nu} b'_{j\nu} x_\nu + P_j + \Omega_j - i\epsilon. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Вещественные коэффициенты $b'_{j\nu}$ определяются числами $b_{j\nu}$, явный вид этой зависимости для нас не является существенным. Положение особенностей ζ_j^+ и ζ_j^- при вещественных x_1, \dots, x_n в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ показано на рис. 10.

Рассмотрим функцию $f^\delta(x_1, \dots, x_n)$, определяемую интегралом (7.12). Особенности этой функции в пространстве \mathbb{C}^n могут

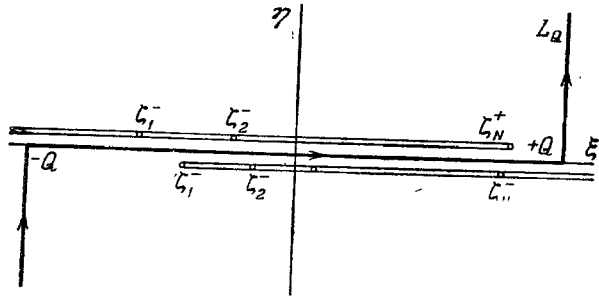


Рис. 10. Положение особенностей подынтегральной функции в интеграле (7.12) и контур L_Q .

возникнуть только в результате зажима контура интегрирования, т.е. при таких значениях комплексных переменных z_1, \dots, z_n , при которых

$$\zeta_{j_1}^+(z_1, \dots, z_n) = \zeta_{j_2}^-(z_1, \dots, z_n), \quad \zeta_{j_2}^+(z_1, \dots, z_n) = \zeta_{j_1}^-(z_1, \dots, z_n) \quad (7.14)$$

для всевозможных значений j_1 и j_2 . Подставив (7.13) в (7.14), получим, что функция $f^\delta(z_1, \dots, z_n)$ имеет конечное число линий ветвления, начинающихся в точках, определяемых уравнениями

$$\sum_{\nu=1}^n b_{(j_1 j_2) \nu} z_\nu^+ = P_{(j_1 j_2)} - \Omega_{(j_1 j_2)} + i\varepsilon, \quad \sum_{\nu=1}^n b_{(j_1 j_2) \nu} z_\nu^- = P_{(j_1 j_2)} + \Omega_{(j_1 j_2)} - i\varepsilon. \quad (7.15)$$

Здесь

$$b_{(j_1 j_2) \nu} = \frac{1}{2} [b'_{j_1 \nu} - b'_{j_2 \nu}], \quad P_{(j_1 j_2)} = \frac{1}{2} [P_{j_1} - P_{j_2}], \quad \Omega_{(j_1 j_2)} = \frac{1}{2} [\Omega_{j_1} + \Omega_{j_2}].$$

Линии ветвления направлены в сторону увеличения чисел $\Omega_{(j_1 j_2)} \rightarrow \infty$.

Функция $f^\delta(z_1, \dots, z_n)$ убывает при $|z_j| \rightarrow \infty$, поскольку интеграл (7.12) сходится и подынтегральные функции убывают при $|z_j| \rightarrow \infty$ согласно условию леммы.

Чтобы перейти к пределу $\delta \rightarrow 0$, достаточно в интеграле (7.12) перейти к интегрированию по контуру L_Q , показанному на рис. 10, где

$$Q = \max_j \{ |\operatorname{Re} \zeta_j^+| + \gamma, |\operatorname{Re} \zeta_j^-| + \gamma \} \quad (\gamma > 0).$$

Такой переход сделать возможно, поскольку подынтегральная функция при произвольных, но конечных x_1, \dots, x_n аналитична и убывает в областях $\{\zeta: \xi > Q, \eta \geq 0\}$, $\{\zeta: \xi < -Q, \eta \leq 0\}$. На контуре L_Q можно перейти к пределу

$$f(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\delta \rightarrow 0} f^\delta(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{L_Q} d\zeta \prod_{s=1}^m f_s^\delta(x_1, \dots, \zeta, \dots, x_n) = \int_{L_Q} d\zeta \prod_{s=1}^m f_s(x_1, \dots, \zeta, \dots, x_n).$$

Последний интеграл сходится, поскольку функции $f_s(x_1, \dots, \xi + i\eta, \dots, x_n)$ убывают при фиксированном ξ и $|\eta| \rightarrow \infty$. Функция $f(z_1, \dots, z_n)$ будет расти при $|x_j| \rightarrow \infty$ и убывать при $|y_j| \rightarrow \infty$.

Таким образом, функция $f^\delta(z_1, \dots, z_n)$ удовлетворяет последнему условию. Значит, $f(z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{H}$. Лемма доказана.

Вернемся к амплитуде $T^\delta(p_1, \dots, p_n)$ в (7.5). Каждый суперпропэгатор $\tilde{w}^\delta(\zeta, k_{j_0}, k_j) \in \mathcal{H}$, поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} dl_{j_0} \prod_s \tilde{w}^\delta(\zeta_s, k_{s_0}, k_s) \in \mathcal{H},$$

и, следовательно, любое конечное число интегралов такого типа (которые существуют, поскольку, по условию, подынтегральные функции убывают достаточно быстро) определяет функцию

$$\int \dots \int \prod_{j=1}^L dl_{j_0} \prod_{s=1}^N \tilde{w}^\delta(\zeta_s, k_{s_0}, k_s) \in \mathcal{H}.$$

Таким образом, существует предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} T^\delta(p_1, \dots, p_n) = T(p_1, \dots, p_n) \quad (7.16)$$

при произвольных вещественных внешних импульсах p_1, \dots, p_n .

Иногда бывает удобно рассматривать амплитуду $T^\delta(p_1, \dots, p_n)$ в евклидовой метрике, когда все внешние импульсы находятся в евклидовом пространстве. Это соответствует переходу $p_{j_0} \rightarrow ip_{j_4}$. Переход в физическую область осуществляется путем аналитического продолжения по инвариантным импульсным переменным.

В этом случае переход к пределу $\delta \rightarrow 0$ в (7.5) можно осуществить следующим образом. В интеграле (7.3) или (7.5)

можно перейти к евклидовой метрике, повернув контуры интегрирования по l_{j0} на угол $\pi/2$, т. е. $l_{j0} \rightarrow l_{j4}$. Одновременно необходимо перейти к евклидовым внешним импульсам $p_{j0} \rightarrow ip_{j4}$. Если поворот по всем аргументам l_{j0} ($j = 1, \dots, L$) и p_{s0} ($s = 1, \dots, n$) проводить одновременно, т. е. положить

$$l_{j0} = r_j e^{i\varphi} \quad (j = 1, \dots, L), \quad p_{s0} = \rho_s e^{i\varphi} \quad (s = 1, \dots, n), \quad (7.17)$$

то каждый аргумент k_i^2 ($i = 1, \dots, N$) у функций $\tilde{w}^\delta(\zeta_i, k_i)$ будет находиться в верхней полуплоскости комплексного переменного k_i^2 , где функция $\tilde{w}^\delta(\zeta_i, k_i)$ аналитична и убывает. Действительно, поскольку импульс k_i связан с импульсами l_j и p_s формулой (7.4), то в случае одновременного поворота (7.17) получим

$$\begin{aligned} \text{Im } k_i^2 &= \text{Im} \left\{ \left[\sum_{\nu} \theta_{i\nu} r_\nu e^{i\varphi} + \sum_{\mu} \theta_{i\mu} \rho_\mu e^{i\varphi} \right]^2 - k_i^2 \right\} = \\ &= \left[\sum_{\nu} \theta_{i\nu} r_\nu + \sum_{\mu} \theta_{i\mu} \rho_\mu \right]^2 \sin 2\varphi \geq 0 \end{aligned} \quad (7.18)$$

при всех $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

После поворота (7.17) в интеграле (7.3) или (7.5) можно перейти к пределу, поскольку функции $\tilde{w}(\zeta, -k_E)$ убывают при $k_E^2 \rightarrow +\infty$ согласно условиям (E_2) . Поэтому сходятся интегралы, соответствующие любым диаграммам Фейнмана. Окончательно получим

$$T(p_{1E}, \dots, p_{2E}) = i^L \int \dots \int \prod_{j=1}^L dl_{jE} \prod_{s=1}^N \tilde{w}(\zeta_s, k_{sE}). \quad (7.19)$$

Итак, амплитуда $T(p_{1E}, \dots, p_{nE})$ определяется сходящимся интегралом (7.19). Она зависит от скалярных произведений евклидовых внешних импульсов

$$(p_{iE} p_{jE}) = p_{i4} p_{j4} + p_i p_j. \quad (7.20)$$

Реальная физическая амплитуда зависит от скалярных произведений псевдоевклидовых внешних импульсов

$$(p_i p_j) = p_{i0} p_{j0} - p_i p_j. \quad (7.21)$$

Заметим далее, что, во-первых, всевозможные скалярные произведения n псевдоевклидовых и n евклидовых импульсов задаются одним и тем же числом инвариантных переменных и, во-вторых, амплитуда $T(p_1, \dots, p_n)$ — аналитическая функция своих инвариантных переменных.

Интеграл (7.19) определяет амплитуду T во всей области евклидовых внешних импульсов. Чтобы получить физическую амплитуду, соответствующую данной диаграмме Фейнмана, необходимо аналитически продолжить функцию (7.19) по инвариантным импульсным переменным к физическим значениям

скалярных произведений $(p_i p_j)$. При этом продолжение должно быть сделано таким образом, чтобы скалярные произведения

$$z_{ij} = -(p_{iE} p_{jE}) = (p_i p_j) \quad (7.22)$$

всегда оставались вещественными, а квадрат массы скалярной частицы имел отрицательную мнимую добавку $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$.

Следует заметить, что изложенная процедура полностью эквивалентна обычному методу при рассмотрении диаграмм Фейнмана в теории возмущений.

Итак, мы получили в пределе сгустия регуляризации ряд теории возмущений, свободный от ультрафиолетовых расходимостей. Изложенное доказательство справедливо без каких-либо изменений в случае пропагаторов, удовлетворяющих условиям (E) и (E_1) .

§ 8. Нелокальный пропагатор в евклидовой метрике

В этом параграфе приведем ряд полезных формул, проясняющих структуру нелокальных пропагаторов и отдельных матричных элементов S -матрицы.

Пусть в теории возможен переход к евклидовой метрике ($k_0 \rightarrow ik_4$, $x_0 \rightarrow -ix_4$), как говорилось выше. Рассмотрим, к чему приводит введение нелокального формфактора в пропагатор (6.1) в евклидовом x -пространстве. Имеем

$$D_c(x_E^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dk_E V(k_E^2 l^2) e^{ik_E x_E}}{m^2 + k_E^2}, \quad (8.1)$$

где $x_E^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Интегрируя по евклидовым углам, получим

$$D_c(x_E^2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty du u \frac{J_1(\sqrt{u x_E^2})}{2\sqrt{u x_E^2}} \cdot \frac{V(u l^2)}{m^2 + u}. \quad (8.2)$$

Поведение функции $D_c(x_E^2)$ при $x_E^2 \rightarrow 0$ определяется поведением формфактора $V(u l^2)$ при $u \rightarrow \infty$. Если $V(u l^2) = O\left(\frac{1}{u^a}\right)$, то получим

$$D_c(x_E^2) = \begin{cases} O\left(\frac{1}{(x_E^2)^{1-a}}\right), & 0 < a < 1, \\ O(\ln x_E^2), & a = 1, \\ O(1), & a > 1. \end{cases} \quad (8.3)$$

При $a > 1$

$$D_c(0) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{du u V(u l^2)}{m^2 + u} < \infty. \quad (8.4)$$

Чтобы выяснить поведение функции $D_c(x_E^2)$ при $x_E^2 \rightarrow \infty$, разобьем интеграл (8.1) на два слагаемых:

$$D_c(x_E^2) = \Delta_c(x_E^2) + R(x_E^2), \quad (8.5)$$

где

$$\Delta_c(x_E^2) = \Delta_c(m, x_E^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dk_E e^{ik_E x_E}}{m^2 + k_E^2}, \quad (8.6)$$

$$R(x_E^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dk_E [V(k_E^2 l^2) - V(-m^2 l^2)] e^{ik_E x_E}}{m^2 + k_E^2}. \quad (8.7)$$

Подынтегральная функция в (8.7) — целая того же порядка роста, что и $V(k_E^2 l^2)$, поэтому поведение ее фурье-образа при $x_E^2 \rightarrow \infty$ определяется порядком роста ρ следующим образом:

$$R(x_E^2) = O(\exp\{-\text{const} \cdot (x_E^2)^\gamma\}), \quad (8.8)$$

где $\gamma = \rho/(2\rho - 1) > 1/2$ при $\rho > 1/2$.

Если $\rho = 1/2$, то существует такое число l^2 , что

$$R(x_E^2) = 0 \quad \text{при} \quad x_E^2 > l^2. \quad (8.9)$$

Удобно далее представить $D_c(x_E^2)$ в следующем виде:

$$D_c(x_E^2) = \Delta_c(x_E^2) \vartheta(x_E^2). \quad (8.10)$$

Здесь $\vartheta(u)$ — вещественная непрерывная функция, которая удовлетворяет следующим асимптотическим условиям:

(1) При $u \rightarrow 0$

$$\vartheta(u) = \begin{cases} O(u^a), & 0 < a < 1, \\ O(u \ln u), & a = 1, \\ O(u), & a > 1. \end{cases} \quad (8.11)$$

(2) При $u \rightarrow \infty$

$$\vartheta(u) = \begin{cases} 1 + O(\exp\{-\text{const} \cdot u^\gamma\}), & \rho > 1/2, \\ 1, & \rho = 1/2. \end{cases} \quad (8.12)$$

где $\gamma = \rho/(2\rho - 1) > 1/2$.

С другой стороны, если нам известна функция $\vartheta(u)$, тогда можно получить выражение для формфактора в представлении (8.1) через функцию $\vartheta(u)$. Рассмотрим

$$\tilde{D}_c(k_E^2) = \int dx_E e^{ik_E x_E} \Delta_c(x_E^2) \vartheta(x_E^2). \quad (8.13)$$

Воспользовавшись тождеством

$$\vartheta(x_E^2) = \int_0^{x_E^2} du \vartheta'(u) = \int_0^\infty du \vartheta'(u) \theta(x_E^2 - u), \quad (8.14)$$

легко получить после некоторых вычислений

$$\tilde{D}_c(k_E^2) = \frac{V(k_E^2 l^2)}{m^2 + k_E^2}, \quad (8.15)$$

$$V(k_E^2 l^2) = \int_0^\infty du \vartheta'(u) J(m^2 u, -k_E^2 u), \quad (8.16)$$

где

$$\begin{aligned} J(m^2 u, -k_E^2 u) &= \\ &= m \sqrt{u} \left[-J_2(\sqrt{u k_E^2}) K_1(\sqrt{m^2 u}) + \frac{m}{\sqrt{k_E^2}} J_1(\sqrt{u k_E^2}) K_2(\sqrt{m^2 u}) \right] = \\ &= m \sqrt{u} \left[I_2(\sqrt{u k^2}) K_1(\sqrt{m^2 u}) + \frac{m}{\sqrt{k^2}} I_1(\sqrt{u k^2}) K_2(\sqrt{m^2 u}) \right]. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Здесь $k_E^2 = -k^2$, $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — функции Бесселя. Заметим, что

$$J(m^2 u, m^2 u) \equiv 1, \quad (8.18)$$

поскольку справедливо следующее тождество для функций Бесселя:

$$I_{\nu+1}(z) K_\nu(z) + I_\nu(z) K_{\nu+1}(z) \equiv \frac{1}{z}.$$

Поэтому

$$V(-m^2 l^2) = \int_0^\infty du \vartheta'(u) = \vartheta(\infty) - \vartheta(0) = 1. \quad (8.19)$$

Приведем простейший пример. Пусть

$$\vartheta(x_E^2) = \theta(x_E^2 - l^2), \quad (8.20)$$

тогда

$$V(k_E^2 l^2) = J(m^2 l^2, -k_E^2 l^2). \quad (8.21)$$

С помощью полученных формул вычислим интеграл

$$T(k_E^2) = \int dx_E e^{ik_E x_E} [D_c(x_E^2)]^n, \quad (8.22)$$

который соответствует амплитуде второго порядка теории возмущений, когда происходит обмен n виртуальными скалярными частицами. В (8.22) подставим представление (8.10), получим

$$T(k_E^2) = \int dx_E e^{ik_E x_E} [\Delta_c(x_E^2)]^n [\vartheta(x_E^2)]^n. \quad (8.23)$$

Воспользуемся тождеством

$$[\Delta_c(x_E^2)]^n = \int_{(nm)^2}^\infty d\kappa^2 \Omega_n(\kappa^2) \Delta_c(\kappa, x_E^2). \quad (8.24)$$

Здесь $\Delta_c(\kappa, x_E^2)$ — причинная функция скалярного поля (8.6) с массой κ , $\Omega_n(\kappa^2)$ — фазовый объем скалярных частиц с массой m , определяемый формулой (4.8).

Получим тождество (8.24). В причинной функции (8.6) проведём интегрирование по k_4 :

$$\Delta_c(m, x_E^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk \int dk_4 \frac{\exp(ik_4 x_4 + ikx)}{k_4^2 + m^2 + k^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{dk}{2\omega} \exp(-|x_4|\omega + ikx).$$

Проведём следующие преобразования:

$$\begin{aligned} [\Delta_c(m, x_E^2)]^n &= \frac{1}{(2\pi)^{3n}} \int \frac{dk_1}{2\omega_1} \dots \int \frac{dk_n}{2\omega_n} \exp\{-|x_4|(\omega_1 + \dots + \omega_n) + ix(k_1 + \dots + k_n)\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{nm}^{\infty} d\omega \int dk \exp\{-|x_4|\omega + ikx\} \Omega_n(\omega^2 - k^2) = \\ &= \int_{(nm)^2}^{\infty} d\kappa^2 \Omega_n(\kappa^2) \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{nm}^{\infty} d\omega \int dk \delta(\kappa^2 - \omega^2 + k^2) \exp(-|x_4|\omega + ikx) = \\ &= \int_{(nm)^2}^{\infty} d\kappa^2 \Omega_n(\kappa^2) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{dk}{2\omega_\kappa} \exp(-|x_4|\omega_\kappa + ikx), \end{aligned}$$

где $\omega_\kappa = \sqrt{\kappa^2 + k^2}$. Отсюда и получаем окончательно формулу (8.24).

Далее используем представление

$$[\Phi(x_E^2)]^n = \int_0^{\infty} du \theta(x_E^2 - u) \frac{d}{du} [\Phi(u)]^n. \quad (8.25)$$

Подставляя формулы (8.24) и (8.25) в (8.23) и проводя интегрирование, как это было сделано ранее, получим

$$T(k_E^2) = \int_{(nm)^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \Omega_n(\kappa^2) V_n(\kappa^2, k_E^2)}{\kappa^2 + k_E^2}, \quad (8.26)$$

где

$$V_n(\kappa^2, k_E^2) = \int_0^{\infty} du \frac{d}{du} [\Phi(u)]^n \cdot J(u\kappa, -k_E^2 u). \quad (8.27)$$

Функция $V_n(\kappa^2, -k^2)$ ($k^2 = -k_E^2$) обладает следующими свойствами.

Она вещественна при вещественных k^2 и нормирована условием

$$V_n(\kappa, -\kappa) = 1. \quad (8.28)$$

Если функция $\Phi(u)$ удовлетворяет условиям (8.11) и (8.12), то

$$V_n(\kappa, -k^2) = \begin{cases} O(\exp\{\text{const} \cdot n^{1-2\rho} (k^2)^\rho\}), & \rho > \frac{1}{2}, \\ O(\exp\{\text{const} \cdot \sqrt{k^2}\}), & \rho = \frac{1}{2} \end{cases}$$

при $k^2 \rightarrow +\infty$, κ^2 фиксировано;

$$V_n(\kappa, -k^2) = \begin{cases} O(\kappa^{-2na}), & 0 < a < 1, \\ O(\kappa^{-2n} \ln^n \kappa^2), & a = 1, \\ O(\kappa^{-2n}), & a > 1 \end{cases}$$

при $\kappa \rightarrow \infty$, k^2 фиксировано;

$$V_n(\kappa^2, -k^2) = \begin{cases} O(|k^2|^{-na}), & 0 < a < 1, \\ O(|k^2|^{-n} \ln^n |k^2|), & a = 1, \\ O(|k^2|^{-n}), & a > 1 \end{cases}$$

при $k^2 \rightarrow -\infty$, κ^2 фиксировано.

Запишем амплитуду (8.26) в пространстве Минковского, т. е. положим $k_E^2 = -k^2$:

$$T(-k^2) = \int_{(nm)^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \Omega_n(\kappa^2) V_n(\kappa^2, -k^2)}{\kappa^2 - k^2 - i\varepsilon}. \quad (8.29)$$

Интеграл этот сходится, когда $a > 1 - 1/n$ при $0 < a < 1$, и всегда при $a \geq 1$.

Функция $T(-k^2)$ имеет разрез в комплексной k^2 -плоскости вдоль луча $[(nm)^2, +\infty)$, причём мнимая часть на верхнем берегу разреза равна

$$\text{Im} T(-k^2) = \pi \Omega_n(k^2). \quad (8.30)$$

Асимптотическое поведение реальной части амплитуды определяется поведением функции $V_n(\kappa^2, -k^2)$:

$$\text{Re} T(-k^2) = O(\exp\{\text{const} \cdot t \cdot n^{1-2\rho} (k^2)^\rho\}) \quad (8.31)$$

при $k^2 \rightarrow +\infty$ и

$$\text{Re} T(-k^2) = O(|k^2|^{-n-1}) \quad (a > 1) \quad (8.32)$$

при $k^2 \rightarrow -\infty$.

Получим теперь представление для суперпропатора

$$\omega(\xi, x_E) = \exp\{-\xi D_c(x_E^2)\} - 1, \quad (8.33)$$

где причинная функция $D_c(x_E^2)$ дается выражениями (8.1) и (8.13).
Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\xi, k_E) &= \\ &= \int dx_E e^{ik_E x_E} w(\xi, x_E) = \int dx_E e^{ik_E x_E} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{n!} [D_c(x_E^2)]^n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{n!} \int_{(nm)^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \Omega_n(\kappa^2) V_n(\kappa^2, k_E^2)}{\kappa^2 + k_E^2} = \int_{m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \rho(\xi, \kappa^2, -k_E^2)}{\kappa^2 + k_E^2}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Здесь

$$\rho(\xi, \kappa^2, -k_E^2) = \sum_{n=1}^{[\kappa/m]} \frac{(-\xi)^n}{n!} \Omega_n(\kappa^2) V_n(\kappa^2, k_E^2),$$

где $V_n(\kappa^2, k_E^2)$ дается формулой (8.27). Легко проверить, что функция $\rho(\xi, \kappa^2, -k_E^2)$ удовлетворяет всем условиям (E_2) .

§ 9. Аналитические свойства евклидовых амплитуд

В этом параграфе мы покажем, что введение формфакторов, являющихся целыми функциями, и определение амплитуд, соответствующих произвольной диаграмме Фейнмана, интегралами по евклидову импульсному пространству не меняют аналитические свойства амплитуд по сравнению с локальной теорией в любой конечной области изменения инвариантных импульсных переменных.

Пусть задан некоторый произвольный граф Фейнмана с n внешними линиями. Построим в четырехмерном евклидовом импульсном пространстве амплитуду, соответствующую этому графу. Будем считать n внешних импульсов q_j евклидовыми, удовлетворяющими закону сохранения $q_1 + \dots + q_n = 0$. Каждой внутренней линии поставим в соответствие пропагатор

$$D(k^2) = \frac{V(k^2)}{m^2 + k^2}, \quad (9.1)$$

где k — евклидов 4-импульс. Функция $V(k^2)$ удовлетворяет условиям (E_1) (стр. 134). Тогда амплитуда, соответствующая заданному графу, описывается интегралом вида

$$\tilde{F}(q_1, \dots, q_n) = \int \dots \int \prod_{i=1}^L dl_i \prod_j \frac{V(k_j^2)}{m^2 + k_j^2}. \quad (9.2)$$

Здесь k_j ($j = 1, \dots, N$) — евклидовый 4-импульс, соответствующий данной линии в диаграмме и зависящий от l и q согласно (7.4), m — масса скалярной частицы. Интегрирование в (9.2)

проводится по четырехмерному евклидову импульсному пространству; l_i — 4-импульсы, по которым проводится интегрирование. Будем считать, что число независимых интегрирований равно L .

Этот интеграл хорошо сходится, так как предполагается, что функция $V(k^2)$ достаточно быстро убывает при $k^2 \rightarrow \infty$.

Как говорилось выше, евклидова амплитуда \tilde{F} (9.2) совпадает (с точностью до постоянного множителя) с реальной амплитудой, соответствующей процессу, описываемому тем же самым графом Фейнмана, в евклидовой области пространственно-подобных внешних импульсов p_j , от которых зависит реальная амплитуда. Переход в физическую область внешних импульсов p_j должен осуществляться аналитическим продолжением амплитуды по соответствующим инвариантным импульсным переменным. При этом необходимо помнить, что все массы имеют отрицательные мнимые добавки $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$.

Необходимо подчеркнуть, что в случае, когда $V(k^2) = 1$ или $V(k^2)$ — просто полиномы по k^2 , амплитуда \tilde{F} в (9.2) совпадает с локальной псевдоевклидовой амплитудой в указанной выше области пространственноподобных внешних импульсов, поскольку в этом случае евклидова и псевдоевклидова формулировки эквивалентны (см. Ю. Швингер (1959)). Заметим, что анализ Л. Д. Ландау (1959) особенностей амплитуд в теории возмущений начинается именно с выражения для амплитуды в евклидовой метрике.

Итак, наша задача состоит в изучении аналитических особенностей амплитуды \tilde{F} в (9.2) по инвариантным импульсным переменным. Покажем, что по сравнению с аналогичной амплитудой скалярной теории амплитуда \tilde{F} при конечных значениях импульсных переменных не имеет дополнительных особенностей, связанных с наличием целой функции $V(k^2)$. Действительно, после параметризации Фейнмана получим

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= (N-1)! \int_0^1 \dots \int_0^1 da_1 \dots da_N \times \\ &\times \delta\left(1 - \sum_{i=1}^N a_i\right) \int \dots \int \frac{\prod_i dl_i \prod_j V(k_j^2)}{\left[\sum_j a_j (k_j^2 + m^2)\right]^N}, \end{aligned} \quad (9.3)$$

где N — число внутренних линий.

Путем преобразования переменных интегрирования из выражения, стоящего в знаменателе, всегда можно устранить члены, линейные по отношению к l_j , после чего получим (мы точно следуем рассуждениям Л. Д. Ландау (1959))

$$\sum_{j=1}^N a_j (k_j^2 + m^2) = \{P_2(\alpha, q_i q_j) + m^2\} + P_1(\alpha, l'_i l'_j). \quad (9.4)$$

Здесь P_1 — однородная квадратичная форма от новых переменных интегрирования l'_i с коэффициентами, зависящими только от параметров α_j , P_2 — также однородная квадратичная форма от векторов q_j , характеризующих свободные концы рассматриваемой диаграммы.

Так как квадратичная форма P_2 зависит от скалярных произведений $q_i q_j$, то с учетом (7.22) получаем в точности исходное выражение, с которого начинал Ландау при выводе своих известных уравнений.

Зависимость числителя от внешних импульсов не может привести ни к каким дополнительным особенностям в конечной области инвариантных импульсных переменных, поскольку в числителе стоит целая функция от скалярных произведений $q_i q_j$ и параметров α_j .

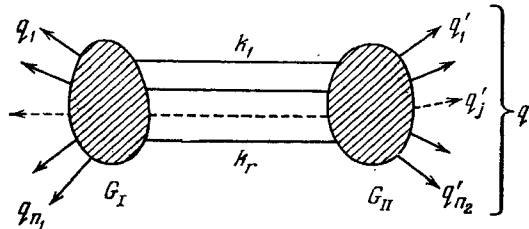


Рис. 11 Разбиение произвольного связного графа G на два связных подграфа G_I и G_{II} , соединенных r линиями.

Остается, однако, очень важный вопрос о величине скачков на соответствующих разрезах у функции \tilde{F} . Этот вопрос непосредственно связан с унитарностью S -матрицы теории. Мы докажем следующее свойство амплитуды \tilde{F} , известное как правило Р. Кутковского (1960) для нормальных порогов. Пусть связный граф G , которому соответствует амплитуда \tilde{F} , может быть разбит на два связных подграфа G_I и G_{II} , соединенных r внутренними линиями (рис. 11):

$$\tilde{F} = \int \dots \int dk_1 \dots dk_r \tilde{F}_I(q_j, k_i) \times \times \prod_{v=1}^r \frac{V_v(k_v^2)}{m_v^2 + k_v^2} \tilde{F}_{II}(q'_j, k_i) \delta(q - k_1 - \dots - k_r). \quad (9.5)$$

Здесь через q_j ($j = 1, \dots, n_1$) и q'_j ($j = 1, \dots, n_2$) обозначены внешние импульсы соответственно подграфов G_I и G_{II} ; при этом $q = q'_1 + \dots + q'_{n_2} = -(q_1 + \dots + q_{n_1}) = k_1 + \dots + k_r$ ($n = n_1 + n_2$ — число внешних линий). Функции $\tilde{F}_I(q_j, k_i)$ и $\tilde{F}_{II}(q'_j, k_i)$ описывают подграфы G_I и G_{II} ; они зависят от скалярных произведений векторов q_j , q'_j и k_i .

Тогда амплитуда \tilde{F} , рассматриваемая как функция от комплексного переменного $z = -q^2$, имеет связанную с данным разрезом линию ветвления, начинающуюся в точке

$$z = (m_1 + \dots + m_r)^2, \quad (9.6)$$

а скачок функции \tilde{F} на этом разрезе дается формулой

$$\Delta \tilde{F}(z) = i(2\pi)^r \prod_{v=1}^r V_v(-m_v^2) \int d\tilde{k}_1 \dots \int d\tilde{k}_r \prod_{v=1}^r \theta(k_{v0}) \delta(m_v^2 + \tilde{k}_v^2) \times \times \delta(\tilde{q} - \tilde{k}_1 - \dots - \tilde{k}_r) \tilde{F}_I(q_j, \tilde{k}_i) \tilde{F}_{II}(q'_j, \tilde{k}_i). \quad (9.7)$$

Здесь под \tilde{k}_v понимаются четырехмерные векторы с компонентами (ik_{v0}, \mathbf{k}_v) , так что $\tilde{k}_v^2 = -k_{v0}^2 + \mathbf{k}_v^2$ и $(\tilde{k}_v, q) = k_{v0} q + ik_{v0} q_4$, а $d\tilde{k}_v = dk_{v0} d\mathbf{k}_v$. Вектор $\tilde{q}(iq_0, \mathbf{q})$ удовлетворяет соотношению

$$\tilde{q}^2 = -q_0^2 + \mathbf{q}^2 = -z. \quad (9.8)$$

Под функциями $\tilde{F}_I(q_j, \tilde{k}_i)$ и $\tilde{F}_{II}(q'_j, \tilde{k}_i)$ следует понимать аналитическое продолжение к соответствующим значениям скалярных аргументов (q_j, \tilde{k}_i) и т. д. исходных функций $\tilde{F}_I(q_j, k_i)$ и $\tilde{F}_{II}(q'_j, k_i)$, описывающих подграфы G_I и G_{II} .

Докажем справедливость формулы (9.7). Сначала докажем эту формулу для амплитуды с двумя промежуточными линиями, а затем по индукции докажем ее для амплитуд с произвольным числом промежуточных линий.

Итак, рассмотрим амплитуду \tilde{F} , которая может быть представлена в виде двух блоков, соединенных двумя промежуточными линиями, как показано на рис. 12. Этой диаграмме соответствует амплитуда

$$\tilde{F} = \int dk_1 \int dk_2 \frac{V_1(k_1^2)}{m_1^2 + k_1^2} \cdot \frac{V_2(k_2^2)}{m_2^2 + k_2^2} \delta(q - k_1 - k_2) \times \times \tilde{F}_I(q_j; k_1, k_2) \tilde{F}_{II}(q'_j; k_1, k_2). \quad (9.9)$$

Удобно ввести обозначение

$$\Phi(k_1, k_2) = \tilde{F}_I(q_j; k_1, k_2) \tilde{F}_{II}(q'_j; k_1, k_2), \quad (9.10)$$

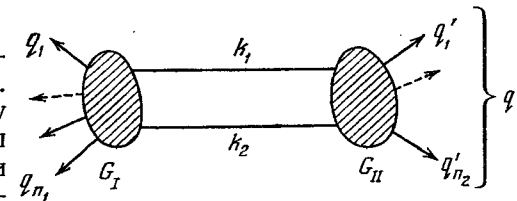


Рис. 12 Два подграфа G_I и G_{II} , соединенных двумя промежуточными линиями.

поскольку $k_1 + k_2 = q$. Здесь через k_1 и k_{14} обозначены соответственно три пространственных и четвертая временная компоненты вектора k_1 .

Нас будет интересовать особенность амплитуды F по переменной $z = -q^2$, возникающая только из-за наличия у диаграммы двух промежуточных линий. Особенности, связанные с аналитическими свойствами подграфов G_I и G_{II} , учитываться не будут. Ниже мы коснемся вопроса, как особенности подграфов G_I и G_{II} могут повлиять на ход нашего доказательства.

Сделаем в интеграле (9.9) замену переменных, положив $x_1 = k_1^2$ и $x_2 = k_2^2$. Получим после некоторых вычислений

$$\tilde{F}(z) = \int_0^{\infty} \frac{dx_1 V_1(x_1)}{m_1^2 + x_1} f(x_1, z), \quad (9.11)$$

где

$$f(x_1, z) = \int_{x_2^-}^{x_2^+} \frac{dx_2 V_2(x_2)}{m_2^2 + x_2} B(x_1, x_2, z), \quad (9.12)$$

$$B(x_1, x_2, z) =$$

$$\begin{aligned} &= \int dk_1 \int dk_2 \delta(x_1 - k_1^2) \delta(x_2 - k_2^2) \delta(q - k_1 - k_2) \Phi(k_1, k_{14}) = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda(x_1, x_2, -z)}}{8(-z)} \int dn \Phi\left(n \sqrt{\frac{\lambda(x_1, x_2, -z)}{4(-z)}}, -\frac{x_2 - x_1 + z}{2\sqrt{-z}}\right), \end{aligned} \quad (9.13)$$

$$z = -q^2, \quad (9.14)$$

$$x_2^{\pm} = (\sqrt{x_1} \pm \sqrt{-z})^2, \quad (9.15)$$

$$\begin{aligned} \lambda(a, b, c) &= 2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2 = \\ &= [(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - c][c - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2]. \end{aligned} \quad (9.16)$$

При интегрировании в (9.13) координатные оси выбраны таким образом, что вектор q имеет только четвертую компоненту ($q = 0, q_4 = \sqrt{q^2}$). Интегрирование в последнем интеграле в (9.13) проводится по всем направлениям трехмерного единичного вектора n .

Функции $B(x_1, x_2, z)$, $f(x_1, z)$ и $F(z)$ зависят от других аргументов, связанных со структурой подграфов G_I и G_{II} . Мы не будем явно указывать эту зависимость, так как она нас сейчас интересовать не будет.

Все выписанные выше выражения определены лишь в области $z < 0$. Наша задача аналитически продолжить функцию $F(z)$ в область $z > 0$ и найти особенности этой функции, связанные только с наличием двух выделенных промежуточных линий.

Прежде всего рассмотрим особенности подынтегрального выражения в (9.11). У подынтегральной функции имеется полюс в точке $x_1 = -m_1^2$, а функция $f(x_1, z)$ имеет особенности в комплексной плоскости x_1 . Эти особенности возникают, когда один из пределов интегрирования в (9.12) совпадает с полюсом в точке $x_2 = -m_2^2$, что приводит к соотношению

$$(\sqrt{x_1} \pm \sqrt{-z})^2 = -m_2^2, \quad (9.17)$$

откуда

$$x_1^{\pm} = -(m_2 \pm i\sqrt{-z})^2. \quad (9.17a)$$

Проследим, как движутся особенности x_1^+ и x_1^- в плоскости комплексного переменного x_1 и как они приводят к появлению особенности у функции $F(z)$. При z отрицательном x_1^+ и x_1^- комплексны. Когда z начинает увеличиваться, достигает нулевого значения и становится положительным, особенности x_1^+ и x_1^- опускаются на отрицательную вещественную ось: $x_1^{\pm} = -(m_2 \pm \sqrt{z})^2$ (мы принимаем $\sqrt{-z} = -i\sqrt{z}$ при $z > 0$ *).

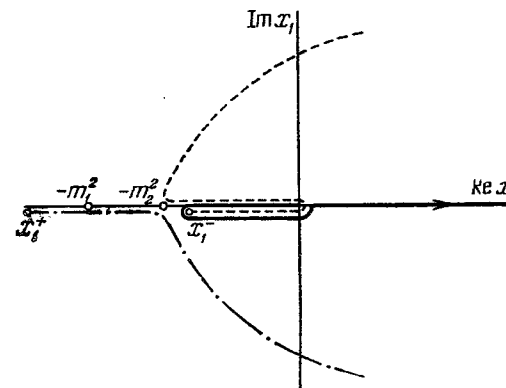


Рис. 13. Движение особенностей в x_1 -плоскости: пунктир — траектория особенности x_1^- , штрих-пунктир — траектория особенности x_1^+ , жирная линия — контур интегрирования по x_1 .

С увеличением z точка x_1^+ движется вдоль вещественной оси налево и никак не влияет на особенности функции $F(z)$. Точка x_1^- движется вдоль вещественной оси направо, при $z = m_2^2$ достигает точки $x_1 = 0$, огибает ее по часовой стрелке (поскольку масса m_2 имеет отрицательную мнимую добавку $m_2 - i\varepsilon$), захватывает контур интегрирования и при $z > m_2^2$ движется налево (рис. 13). Заметим, что точка $z = m_2^2$ не является особенностью

* Заметим, что особенности у функций $F(z)$ при $z = 0$ не существуют, так как другой выбор знака $\sqrt{-z} = i\sqrt{z}$ приводит к тому же самому результату.

функции $\tilde{F}(z)$, так как оба направления обхода точки $x_1 = 0$ особенностью x_1^- приводят к одинаковому результату. Особенность у функции $\tilde{F}(z)$ возникает, когда точка x_1^- , ведущая контур интегрирования, совпадает с полюсом $x_1 = -m_1^2$, происходит зажим контура интегрирования. Имеем

$$-(m_2 - \sqrt{z})^2 = -m_1^2 \quad (z > m_2^2), \quad (9.18)$$

откуда

$$z = (m_1 + m_2)^2. \quad (9.18a)$$

Это и есть положение особенности у амплитуды $\tilde{F}(z)$, связанное с наличием двух промежуточных линий у графа, показанного на рис. 12. При $z > (m_1 + m_2)^2$ контур интегрирования по x_1 показан на рис. 14. Обозначим этот контур через L_+ .

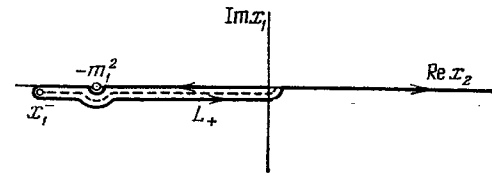


Рис. 14. Контур интегрирования в интеграле (9.11) при $z > (m_1 + m_2)^2$.

Для вычисления скачка функции $\tilde{F}(z)$ на разрезе, начинающемся в точке $z = (m_1 + m_2)^2$, необходимо вычислить функцию на другом берегу разреза. Для этого следует взять интеграл для $\tilde{F}(z)$ с другим обходом особенности. Этот контур, который мы обозначим через

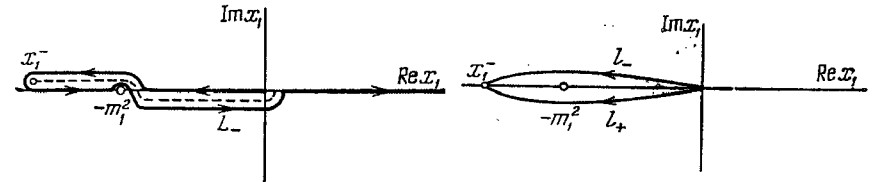


Рис. 15. Контур интегрирования L_- в интеграле (9.11) при другом обходе особенности. Рис. 16. Контур интегрирования L_{\pm} .

L_- , показан на рис. 15. Для дальнейшего удобно представить функцию на верхнем и нижнем берегах разреза в виде

$$\tilde{F}_{\pm}(z) = \int_{L_{\pm}} \frac{dx_1 V_1(x_1)}{m_1^2 + x_1} \Delta f(x_1, z) + \int_0^{\infty} \frac{dx_1 V_1(x_1) f(x_1, z)}{m_1^2 + x_1}, \quad (9.19)$$

где

$$\Delta f(x_1, z) = f_+(x_1, z) - f_-(x_1, z). \quad (9.19a)$$

Здесь через L_{\pm} обозначены контуры, показанные на рис. 16, а через $f_{\pm}(x_1, z)$ — значения функции $f(x_1, z)$ на верхнем и нижнем берегах разреза этой функции, начинающегося в точке x_1^- .

Из (9.19) легко вычислить скачок функции $\tilde{F}(z)$. Имеем

$$\Delta \tilde{F}(z) = \tilde{F}_+(z) - \tilde{F}_-(z) = \int_l \frac{dx_1 V_1(x_1)}{m_1^2 + x_1} \Delta f(x_1, z), \quad (9.20)$$

где через l обозначена разность контуров $l_+ - l_-$. Таким образом, интеграл (9.20) представляет собой интеграл по замкнутому контуру вокруг полюса $x_1 = -m_1^2$. Это дает

$$\Delta \tilde{F}(z) = -2\pi i \theta(z - (m_1 + m_2)^2) V_1(-m_1^2) \Delta f(-m_1^2, z). \quad (9.21)$$

Займемся теперь вычислением $\Delta f(-m_1^2, z)$. Для этого вернемся к выражению (9.12). При $z > 0$ имеем $x_2^{\pm} = (\sqrt{x_1} \mp i\sqrt{z})^2$. Нас интересует скачок функции $f(x_1, z)$ при отрицательных значениях x_1 . Полагая $\sqrt{x_1} = -i\sqrt{-x_1}$, поскольку контур

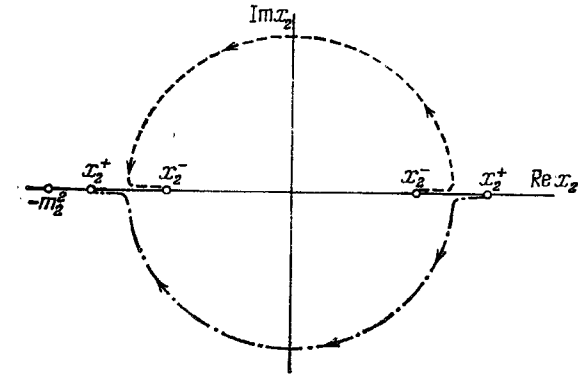


Рис. 17. Движение точек x_2^{\pm} в x_2 -плоскости. Пунктир и штрих-пунктир — траектории точек x_2^- и x_2^+ соответственно; движение происходит последовательно из областей $(z < 0, x_1 > 0) \rightarrow (z > 0, x_1 < 0)$.

интегрирования по x_1 мы поворачивали по часовой стрелке около точки $x_1 = 0$, имеем $x_2^{\pm} = -(\sqrt{-x_1} \pm \sqrt{z})^2$. На рис. 17 показано движение точек x_2^{\pm} .

Особенность x_1^- возникает, когда верхний предел $x_2^+ = -(\sqrt{x_1} + \sqrt{z})^2$ совпадает с полюсом $x_2 = -m_2^2$:

$$-(\sqrt{-x_1} + \sqrt{z})^2 = -m_2^2 \quad \text{или} \quad x_1 = -(m_2 - \sqrt{z})^2. \quad (9.22)$$

Значения функции $f(x_1, z)$ на верхнем и нижнем берегах разреза получатся, если интегралы для $f(x_1, z)$ вычислять по контурам C_+ и C_- , связанным с двумя возможными обходами

особенности. Эти контуры показаны на рис. 18. Имеем в итоге

$$f_{\pm}(x_1, z) = \int_{C_{\pm}} \frac{dx_2 V_2(x_2)}{x_2 + m_2^2} B(x_1, x_2, z). \quad (9.23)$$

Отсюда легко можно найти

$$\begin{aligned} \Delta f(x_1, z) &= f_+(x_1, z) - f_-(x_1, z) = \int_C \frac{dx_2 V_2(x_2)}{m_2^2 + x_2} B(x_1, x_2, z) = \\ &= -2\pi i V_2(-m_2^2) B(x_1, -m_2^2, z), \end{aligned} \quad (9.24)$$

так как контур $C = C_+ - C_-$ является замкнутым контуром

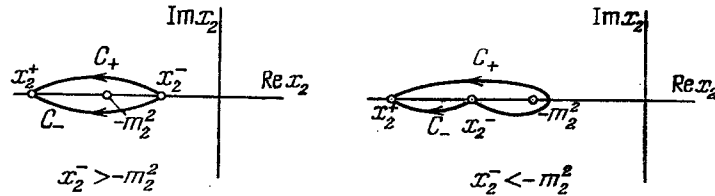


Рис. 18. Контуры интегрирования C_{\pm} в x_2 -плоскости.

вокруг полюса $x_2 = -m_2^2$ и интеграл равен вычету подынтегральной функции в точке $x_2 = -m_2^2$.

Подставляя (9.24) в (9.21), получаем

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{F}(z) &= \\ &= -(2\pi)^2 \theta(z - (m_1 + m_2)^2) V_1(-m_1^2) V_2(-m_2^2) B(-m_2^2, -m_2^2, z). \end{aligned} \quad (9.25)$$

Преобразуем $B(-m_2^2, -m_2^2, z)$. Возвращаясь к (9.13), можно заметить, что функция $\sqrt{\lambda(x_1, x_2, -z)}$ меняет знак, когда происходит движение контура интегрирования, как показано на рис. 17. Это связано с тем, что можно написать: $\sqrt{\lambda(x_1, x_2, -z)} = \sqrt{(x_2^+ - x_2)(x_2 - x_2^-)}$ в области $x_1 > 0$ и $z < 0$. Легко видеть, что при переходе в область $z > 0$ и $x_1 < 0$ происходит вращение контура интегрирования около точек ветвления этой функции, что приводит к появлению множителя $(-i)^2 = -1$. Итак,

$$\sqrt{\lambda(x_1, x_2, -z)} = -|\sqrt{\lambda(x_1, x_2, -z)}| \quad (9.26)$$

при $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ и $0 < z < (m_1 + m_2)^2$. При переходе по переменной z через порог $z = (m_1 + m_2)^2$ получим

$$\sqrt{\lambda(-m_1^2, -m_2^2, -z)} = -i\sqrt{-\lambda(m_1^2, m_2^2, z)}, \quad z > (m_1 + m_2)^2, \quad (9.27)$$

так как нас интересует значение функции на верхнем берегу разреза. Окончательно, с учетом (9.26) и (9.27), функция $B(-m_1^2, -m_2^2, z)$ может быть записана в виде

$$\begin{aligned} B(-m_1^2, -m_2^2, z) &= \\ &= \frac{-i\sqrt{-\lambda(m_1^2, m_2^2, z)}}{8z} \int dn \Phi\left(n \sqrt{\frac{-\lambda(m_1^2, m_2^2, z)}{4z}}, -i \frac{z + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{z}}\right). \end{aligned} \quad (9.28)$$

Подставляя (9.28) в выражение для скачка (9.25), легко убедиться, что полученная формула совпадает с (9.7) в случае $r = 2$, если выбрать систему координат, где вектор \vec{q} имеет только четвертую компоненту, отличную от нуля ($q = 0$, $q_0 = \sqrt{z}$). Таким образом, мы доказали формулу (9.7) для случая диаграмм с двумя промежуточными линиями.

Заметим, что для нашего доказательства достаточно считать аналитические свойства подграфов G_I и G_{II} такими, что особенности функций \tilde{F}_I и \tilde{F}_{II} не совпадают с изучаемыми особенностями или существует способ, благодаря которому их можно разделить, например, в случае, если совпадение особенностей происходит только при определенных значениях масс или инвариантных импульсных переменных, от которых зависят функции \tilde{F}_I и \tilde{F}_{II} , а при других значениях этих переменных особенности разделяются. Такое положение как раз имеет место в каждом порядке теории возмущений для каждой отдельной диаграммы Фейнмана.

Выпишем еще одну формулу, которая нам понадобится в дальнейшем. Так как нами показано, что функция $\tilde{F}(z)$ имеет разрез, начинающийся в точке $z = (m_1 + m_2)^2$ и скачок $\Delta \tilde{F}(z)$ на этом разрезе известен и, кроме того, $\tilde{F}(z)$ обладает конечным числом особых точек, то функция $\tilde{F}(z)$ может быть представлена в виде

$$\tilde{F}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(m_1 + m_2)^2}^{\infty} \frac{dz' \Delta \tilde{F}(z')}{z' - z - i\epsilon} \cdot \frac{A(z)}{A(z')} + B(z), \quad (9.29)$$

где через $A(z)$ и $B(z)$ обозначены некоторые функции, которые обладают всеми особенностями функции $\tilde{F}(z)$, кроме данного разреза. Конкретный вид функций $A(z)$ и $B(z)$ в дальнейшем для нас не будет существовать.

Еще заметим, что функции $\tilde{F}(z)$, $\Delta \tilde{F}(z)$, $A(z)$ и $B(z)$ зависят от других импульсных переменных, которые мы для простоты не ввели в обозначения.

Итак, мы доказали формулу (9.7) для случая $r = 2$. Рассмотрим теперь диаграмму Фейнмана, которая может быть разбита на два блока, соединенных $r + 1$ промежуточными линиями

(рис. 11). Этой диаграмме соответствует амплитуда (9.5), где вместо r надо поставить $r+1$. Перепишем выражение (9.5) в виде

$$\tilde{F} = \int \frac{dk_{r+1} V_{r+1}(k_{r+1}^2)}{m_{r+1}^2 + k_{r+1}^2} \int dk P(q_j, q'_j; k_{r+1}, k) \delta(q - k_{r+1} - k), \quad (9.30)$$

где

$$P(q_j, q'_j; k_{r+1}, k) = \int dk_1 \dots \int dk_r \prod_{\nu=1}^r \frac{V_\nu(k_\nu^2)}{m_\nu^2 + k_\nu^2} \delta(k - k_1 - \dots - k_r) \times \\ \times \tilde{F}_I(q_j, k_i) \tilde{F}_{II}(q'_j, k_i). \quad (9.31)$$

Предположим теперь, что функция $P(q_j, q'_j; k_{r+1}, k)$, рассматриваемая как функция комплексного переменного $\xi = -k^2$, имеет линию разреза, начинающуюся в точке $\xi = (m_1 + \dots + m_r)^2$ и связанную с наличием r промежуточных линий, причем скачок на этой линии разреза дается формулой (9.7). В случае $r=2$ это утверждение доказано выше. Наша задача состоит в том, чтобы показать, что если формула (9.7) справедлива для r промежуточных линий, то она будет справедлива и в случае $r+1$ линий.

Согласно сделанному выше замечанию, $P(q_j, q'_j; k_{r+1}, k)$ можно записать в виде

$$P(q_j, q'_j; k_{r+1}, k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(m_1 + \dots + m_r)^2}^{\infty} \frac{d\sigma^2 \Delta P(\sigma^2)}{\sigma^2 + k^2 - i\epsilon} \cdot \frac{A(-k^2, \dots)}{A(\sigma^2, \dots)} + \\ + B(-k^2, \dots), \quad (9.32)$$

где функции $A(-k^2, \dots)$ и $B(-k^2, \dots)$ имеют ту же природу, что и в (9.29). Для простоты мы не вводим никаких дополнительных индексов и не указываем всех переменных, от которых эти функции зависят. Подставляя (9.32) в (9.30), получим

$$\tilde{F} = \int \frac{dk_{r+1} V_{r+1}(k_{r+1}^2)}{m_{r+1}^2 + k_{r+1}^2} \int dk \delta(q - k - k_{r+1}) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{(m_1 + \dots + m_r)^2}^{\infty} \frac{d\sigma^2 \Delta P(\sigma^2)}{\sigma^2 + k^2 - i\epsilon} \cdot \frac{A(-k^2, \dots)}{A(\sigma^2, \dots)} + B(-k^2, \dots) \right\}. \quad (9.33)$$

Интеграл с функцией $B(-k^2, \dots)$ не дает вклада в особенность, происходящую из-за наличия $r+1$ промежуточных линий, которые мы рассматриваем. Опуская этот член, перепишем амплитуду в виде

$$\tilde{F} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(m_1 + \dots + m_r)^2}^{\infty} \frac{d\sigma^2 R(\sigma^2, q^2) \Delta P(\sigma^2)}{A(\sigma^2, \dots)}, \quad (9.34)$$

где

$$R(\sigma^2, q^2) = \int \frac{dk_{r+1} V_{r+1}(k_{r+1}^2)}{m_{r+1}^2 + k_{r+1}^2} \int \frac{dk A(-k^2, \dots)}{\sigma^2 + k^2} \delta(q - k - k_{r+1}). \quad (9.35)$$

Легко видеть, что функция $R(\sigma^2, q^2)$ имеет в точности такую же структуру диаграммы с двумя промежуточными линиями, которая была рассмотрена выше, см. (9.9). Поэтому для нее справедлива формула (9.29)

$$R(\sigma^2, q^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma + m_{r+1})^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \Delta R(\kappa^2, \sigma^2)}{\kappa^2 + q^2 - i\epsilon} \cdot \frac{A_1(-q^2, \dots)}{A_1(\kappa^2, \dots)} + \\ + B_1(-q^2, \sigma^2), \quad (9.36)$$

где

$$\Delta R(\kappa^2, \sigma^2) = i(2\pi)^2 \theta(\kappa^2 - (\sigma + m_{r+1})^2) V_{r+1}(-m_{r+1}^2) A(\sigma^2, \dots) \times \\ \times \int d\tilde{k}_{r+1} \int d\tilde{k} \theta(k_{r+1,0}) \delta(\tilde{k}_{r+1}^2 + m_{r+1}^2) \theta(k_0) \times \\ \times \delta(\tilde{k}^2 + \sigma^2) \delta(\tilde{p} - \tilde{k}_{r+1} - \tilde{k}), \quad (9.37)$$

где $\tilde{p}^2 = -\kappa^2$. Подставляя (9.36) в (9.34) и меняя порядок интегрирования по σ^2 и κ^2 , получим

$$\tilde{F} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(m_1 + \dots + m_{r+1})^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \Delta \tilde{F}(\kappa^2) A_1(-q^2)}{(\kappa^2 + q^2 - i\epsilon) A_1(\kappa^2)} + B_2(-q^2), \quad (9.38)$$

где

$$\Delta \tilde{F}(\kappa^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(m_1 + \dots + m_r)^2}^{(\kappa - m_{r+1})^2} d\sigma^2 \Delta R(\kappa^2, \sigma^2) \cdot \frac{\Delta P(\sigma^2)}{A(\sigma^2, \dots)}. \quad (9.39)$$

Воспользовавшись формулами (9.37) и (9.7), получим

$$\Delta \tilde{F}(\kappa^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(m_1 + \dots + m_r)^2}^{(\kappa - m_{r+1})^2} d\sigma^2 i(2\pi)^2 \theta(\kappa^2 - (\sigma + m_{r+1})^2) V_{r+1}(-m_{r+1}^2) \times \\ \times \int d\tilde{k}_{r+1} \int d\tilde{k} \theta(k_{r+1,0}) \delta(\tilde{k}_{r+1}^2 + m_{r+1}^2) \theta(k_0) \delta(\tilde{k}^2 + \sigma^2) \times \\ \times \delta(\tilde{p} - \tilde{k} - \tilde{k}_{r+1}) i(2\pi)^r \prod_{\nu=1}^r V_\nu(-m_\nu^2) \times \\ \times \int d\tilde{k}_1 \dots \int d\tilde{k}_r \prod_{\lambda=1}^r \theta(k_{\lambda 0}) \delta(\tilde{k}_\lambda^2 + m_\lambda^2) \times \\ \times \delta(\tilde{k} - \tilde{k}_1 - \dots - \tilde{k}_r) \tilde{F}_I(q_j, \tilde{k}_i) \tilde{F}_{II}(q'_j, \tilde{k}_i) = \\ = i(2\pi)^{r+1} \prod_{\nu=1}^{r+1} V_\nu(-m_\nu^2) \int d\tilde{k}_1 \dots \int d\tilde{k}_{r+1} \prod_{\nu=1}^{r+1} \theta(k_{\nu 0}) \delta(\tilde{k}_\nu^2 + m_\nu^2) \times \\ \times \delta(\tilde{p} - \tilde{k}_1 - \dots - \tilde{k}_{r+1}) \tilde{F}_I(q_j, \tilde{k}_i) \tilde{F}_{II}(q'_j, \tilde{k}_i), \quad (9.40)$$

так как

$$\int_{(m_1 + \dots + m_r)^2}^{(x - m_{r+1})^2} d\sigma^2 \int d\vec{k} \theta(k_0) \delta(\vec{k}^2 + \sigma^2) \delta(\vec{p} - \vec{k}_{r+1} - \vec{k}) = 1.$$

Окончательное выражение для $\Delta F(x^2)$ полностью совпадает с (9.7), где вместо r взято $r + 1$, что доказывает справедливость формулы (9.7). Следует заметить, что проделанные здесь вычисления справедливы с точностью до оговорок, сделанных выше.

Итак, нами доказано правило Кутковского для нормальных порогов в случае произвольных диаграмм Фейнмана, когда диаграммы записываются в евклидовом импульсном пространстве, а в качестве функций обрезания выбираются целые функции.

Отметим еще раз, что в случае $V(k^2) = 1$ проведенное доказательство является доказательством правила Кутковского для обычных диаграмм квантовой теории поля, поскольку псевдоевклидовы интегралы для амплитуд физических процессов в евклидовой области пространственноподобных внешних импульсов всегда могут быть записаны в евклидовом пространстве, а переход в физическую область всегда можно рассматривать как аналитическое продолжение по инвариантным импульсным переменным.

Что касается аномальных особенностей диаграмм, то они возникают обычным образом при учете аналитических свойств подграфов G_I и G_{II} . Например, появление аномальной особенности для обыкновенной треугольной или четырехугольной диаграммы можно проследить, представляя соответствующую амплитуду в виде (9.29) и изучая затем особенности функции $\Delta F(z)$ по другим инвариантам, от которых она зависит.

Таким образом, мы видим, что нелокальный формфактор, удовлетворяющий условиям (E_1) , фактически не нарушает аналитическую структуру диаграмм Фейнмана локальной теории.

§ 10. Мажоранта амплитуды n -го порядка по выделенной переменной

Пусть задана амплитуда $T_n(p_1, \dots, p_n)$, соответствующая некоторому произвольному связному графу n -го порядка теории возмущений, т. е. имеющему n вершин, и зависящая от k внешних импульсов (p_1, \dots, p_n) . Пусть амплитуда построена из пропагаторов вида (6.1), удовлетворяющих условиям (E_1) .

Покажем, что для такой амплитуды по любой выделенной переменной (например, p_1) и остальных фиксированных

справедливы оценки

$$T_n(p_1, \dots, p_k) = O(\exp\{(n-1) \text{const} \cdot (p_1^2)^{\rho_1}\}) \quad (p_1^2 \rightarrow +\infty), \quad (10.1)$$

$$T_n(p_1, \dots, p_k) = O\left(\frac{1}{|p_1^2|^{(1+a)}}\right) \quad (p_1^2 \rightarrow -\infty). \quad (10.2)$$

Эти оценки вытекают из следующих утверждений.

Во-первых, как говорилось в § 7, конечное выражение для произвольного матричного элемента в n -м порядке теории возмущений строится как предел соответствующего регуляризованного выражения (7.1а) или (7.1б). При переходе к пределу $\delta \rightarrow 0$ при произвольных внешних импульсах p_1, \dots, p_k в интегралах, определяющих амплитуду в (7.3), мы переходим к контурам интегрирования L_Q (см. подробности в § 7), на которых существовал предел при $\delta \rightarrow 0$.

Во-вторых, из теории графов известно (см., например, книгу А. А. Зыкова (1969)), что минимальная цепь, соединяющая две произвольные вершины в некотором связном графе с n вершинами, состоит не более чем из $n - 1$ граней. Переменные интегрирования в (7.3) всегда можно выбрать таким образом, чтобы от p_1 зависели только те пропагаторы, которые сопоставляются по правилам Фейнмана звеньям этой цепи. Возможный пример показан на рис. 19.

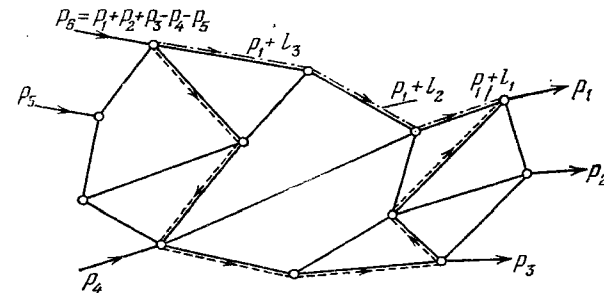


Рис. 19. Граф с двенадцатью вершинами и возможные цепи, зависящие от p_1 . Асимптотическое поведение амплитуды определяется цепью с минимальным числом граней.

В-третьих, каждый граф содержит формфакторы, зависящие от p_1 , таким образом, что в каждом интегрировании в (7.3) по независимому циклу имеется, по крайней мере, хотя бы один формфактор, который от p_1 не зависит. Этот формфактор, по условиям (E_1) , убывает достаточно быстро в евклидовом направлении, чтобы обеспечить сходимость интеграла.

В-четвертых, при снятии регуляризации $\delta \rightarrow 0$, как говорилось в § 7, мы переходим к интегрированию по контурам, где Q

зависит от величины максимального импульса в физической области. В рассматриваемом случае это будет импульс p_1 . Поскольку все остальные внешние импульсы фиксированы, величина Q в каждом интеграле по своему контуру L_Q будет порядка $p_{10} = \sqrt{p_1^2}$, так как всегда можно выбрать систему координат, где $p_1 = \{p_{10} = \sqrt{p_1^2}, p_1 = 0\}$.

Отсюда следует, что необходимая оценка при $p_1^2 \rightarrow \infty$ получится, если оценить максимум подынтегрального выражения на контуре L_Q в точках $\pm Q$. Используя далее условия (E_1) , немедленно получаем первую оценку (10.1).

Вторая оценка (10.2) получается просто, поскольку в этом случае (когда $p_1^2 \rightarrow -\infty$), во-первых, величина Q не зависит от p , во-вторых, минимальная цепь состоит из одного ребра (мы ищем минимальное возможное убывание амплитуды), поэтому можно непосредственно воспользоваться условиями (E_1) .

ГЛАВА VI

УНИТАРНОСТЬ И ПРИЧИННОСТЬ S-МАТРИЦЫ

Произведем все это систематически, не отступая, но и не увлекаясь; соблюдаем необходимую для общего плана симметрию и не предадимся при сем никаким мечтаньям, кроме тех, кои всякому усердному и ревностному исполнителю свойственны.

М. Е. Салтыков-Щедрин, Помпадуры и помпадурши.

§ 1. Введение

Постулаты унитарности и причинности S -матрицы в квантовой теории поля являются одними из основных требований, без выполнения которых теория не может рассматриваться самосогласованной и физически приемлемой. Поэтому доказательство унитарности и причинности имеет первостепенное значение при построении S -матрицы для различных моделей квантовой теории поля.

Если задан лагранжиан взаимодействующих квантованных полей, S -матрица ищется в виде формального разложения по степеням функции включения взаимодействия

$$S[g] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n g(x_1) \dots g(x_n) S_n(x_1, \dots, x_n). \quad (1.1)$$

При определении операторных выражений $S_n(x_1, \dots, x_n)$ (1.1) оказывается, что коэффициентные функции $K_{\dots m_j \dots}(x_1, \dots, x_n)$ в разложении $S_n(x_1, \dots, x_n)$ по нормальным произведениям квантованного поля

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_1, \dots, m_n} K_{\dots m_j \dots}(x_1, \dots, x_n) : \varphi^{m_1}(x_1) \dots \varphi^{m_n}(x_n) : \quad (1.2)$$

выражаются через произведения причинных функций рассматриваемых полевых операторов и строятся как предел локально интегрируемых функций $K_{\dots m_j \dots}^{\delta}(x_1, \dots, x_n)$ при помощи

зависит от величины максимального импульса в физической области. В рассматриваемом случае это будет импульс p_1 . Поскольку все остальные внешние импульсы фиксированы, величина Q в каждом интеграле по своему контуру L_Q будет порядка $p_{10} = \sqrt{p_1^2}$, так как всегда можно выбрать систему координат, где $p_1 = \{p_{10} = \sqrt{p_1^2}, p_1 = 0\}$.

Отсюда следует, что необходимая оценка при $p_1^2 \rightarrow \infty$ получится, если оценить максимум подинтегрального выражения на контуре L_Q в точках $\pm Q$. Используя далее условия (E_1) , немедленно получаем первую оценку (10.1).

Вторая оценка (10.2) получается просто, поскольку в этом случае (когда $p_1^2 \rightarrow -\infty$), во-первых, величина Q не зависит от p , во-вторых, минимальная цепь состоит из одного ребра (мы ищем минимальное возможное убывание амплитуды), поэтому можно непосредственно воспользоваться условиями (E_1) .

ГЛАВА VI

УНИТАРНОСТЬ И ПРИЧИННОСТЬ S-МАТРИЦЫ

Произведем все это систематически, не отступая, но и не увлекаясь; соблюдаем необходимую для общего плана симметрию и не предаемся при сем никаким мечтаньям, кроме тех, кои всякому усердному и ревностному исполнителю свойственны.

М. Е. Салтыков-Щедрин, Помпадуры и помпадури.

§ 1. Введение

Постулаты унитарности и причинности S-матрицы в квантовой теории поля являются одними из основных требований, без выполнения которых теория не может рассматриваться самосогласованной и физически приемлемой. Поэтому доказательство унитарности и причинности имеет первостепенное значение при построении S-матрицы для различных моделей квантовой теории поля.

Если задан лагранжиан взаимодействующих квантованных полей, S-матрица ищется в виде формального разложения по степеням функции включения взаимодействия

$$S[g] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n g(x_1) \dots g(x_n) S_n(x_1, \dots, x_n). \quad (1.1)$$

При определении операторных выражений $S_n(x_1, \dots, x_n)$ (1.1) оказывается, что коэффициентные функции $K_{\dots m_j \dots}(x_1, \dots, x_n)$ в разложении $S_n(x_1, \dots, x_n)$ по нормальным произведениям квантованного поля

$$\begin{aligned} S_n(x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_n} K_{\dots m_j \dots}(x_1, \dots, x_n) : \varphi^{m_1}(x_1) \dots \varphi^{m_n}(x_n) : \quad (1.2) \end{aligned}$$

выражаются через произведения причинных функций рассматриваемых полевых операторов и строятся как предел локально интегрируемых функций $K_{\dots m_j \dots}^{\delta}(x_1, \dots, x_n)$ при помощи

вводящейся регуляризационной процедуры, задаваемой параметром δ таким образом, что в несобственном смысле существует предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} K_{\dots m_j \dots}^{\delta}(x_1, \dots, x_n) = K_{\dots m_j \dots}(x_1, \dots, x_n), \quad (1.3)$$

или, иначе,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} S^{\delta}[g] = S[g]. \quad (1.4)$$

Совершенно не очевидно, что S -матрица, полученная таким способом, удовлетворяет исходным аксиомам и, в частности, условию унитарности

$$S[g] S^+[g] = S^+[g] S[g] = 1 \quad (1.5)$$

или причинности.

В локальной теории условия унитарности и причинности непосредственно используются при формулировке вычитательного метода регуляризации, что гарантирует выполнение этих аксиом для S -матрицы в каждом порядке теории возмущений, по крайней мере, в случае перенормируемых взаимодействий.

В настоящей главе мы докажем унитарность и причинность S -матрицы в построенной нами нелокальной квантовой теории поля. Сначала мы подробно рассмотрим условие унитарности, а затем условие причинности.

В основу содержания этой главы положены работы В. А. Алябастрова и автора (1973, 1974).

§ 2. Схема доказательства унитарности S -матрицы

Пусть нам известна S -матрица в виде функционального разложения (1.1), где операторы $S_n(x_1, \dots, x_n)$ даются разложением типа (1.2). Если S -матрица конечна и удовлетворяет аксиомам квантовой теории поля, то коэффициентные функции $K_{\dots m_j \dots}(x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяют следующим условиям:

(1) Они трансляционно-инвариантны, т. е.

$$K_{\dots m_j \dots}(x_1 + a, \dots, x_n + a) = K_{\dots m_j \dots}(x_1, \dots, x_n).$$

(2) Они интегрируемы на некотором пространстве достаточно гладких основных функций \mathfrak{A} , т. е. существует интеграл

$$\int \dots \int dx_1 \dots dx_n K_{\dots m_j \dots}(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) < \infty$$

для любых $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{A}$. Используемые нами пространства основных функций были описаны в гл. II.

Если коэффициентные функции $K_{\dots m_j \dots}(x_1, \dots, x_n)$ известны, тогда известно разложение и для $S^+[g]$. Следуя Н. Н. Боголюбову и Д. В. Ширкову (1973), можно показать, что коэффи-

циентные функции, получающиеся в результате умножения двух операторных функций с различными независимыми аргументами

$$S_n(x_1, \dots, x_n) \otimes S_{n_2}^+(y_1, \dots, y_{n_2}) \quad (2.1)$$

и имеющие вид

$$K_{\dots m_j \dots}(x_1, \dots, x_n) K_{(-)}(x-y) K_{\dots m_l \dots}(y_1, \dots, y_{n_2}), \quad (2.2)$$

где

$$K_{(-)}(x-y) = \prod_{s,t} \Delta_{(-)}(x_s - y_t) \text{ и } \tilde{\Delta}_{(-)}(k) = 2\pi\theta(k_0) \delta(k^2 - m^2), \quad (2.3)$$

могут быть определены как интегрируемые несобственные функции на пространстве \mathfrak{A} .

Таким образом, если нам известна S -матрица в виде разложения (1.1), то тогда произведение

$$S[g] S^+[g] \stackrel{\text{df}}{=} S[g] \otimes S^+[g]$$

задано в каждом порядке теории возмущений как операторо-значная обобщенная функция на пространстве основных функций \mathfrak{A} . Задача состоит в том, чтобы доказать, что

$$S[g] \otimes S^+[g] = 1.$$

Исходя из способа определения конечной S -матрицы с помощью несобственного предельного перехода, мы построим наше доказательство следующим образом.

Очевидно, что S -матрица будет унитарной, если существует такая регуляризационная процедура, которая обладает следующими свойствами:

(1) Регуляризованные функции $K_{\dots m_j \dots}^{\delta}(x_1, \dots, x_n)$ непрерывны и ограничены и

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} K_{\dots m_j \dots}^{\delta}(x_1, \dots, x_n) = K_{\dots m_j \dots}(x_1, \dots, x_n),$$

т. е. определена регуляризованная $S^{\delta}[g]$ -матрица и существует несобственный предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} S^{\delta}[g] = S[g].$$

(2) Положительно-частотные функции Грина $K_{(-)}(x-y)$, определяющие операцию произведения в (2.1) и (2.2), также регуляризуются и существует предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} K_{(-)}^{\delta}(x-y) = K_{(-)}(x-y)$$

или, символически,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \otimes^{\delta} = \otimes.$$

(3) В соотношении

$$J[g] = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \lim_{\delta_3 \rightarrow 0} S^{\delta_1}[g] \otimes^{\delta_2} S^{\delta_3+}[g]$$

предел не зависит от порядка предельных переходов к точке $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = +0$, т. е. оператор

$$J(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = S^{\delta_1}[g] \otimes^{\delta_2} S^{\delta_3+}[g]$$

непрерывен в точке $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = +0$.

(4) Регуляризация подобрана таким образом, что

$$S^\delta[g] \otimes^\delta S^{\delta+}[g] = 1.$$

Действительно, если все эти условия выполнены, справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} S[g] \otimes S^+[g] &= \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \lim_{\delta_3 \rightarrow 0} S^{\delta_1}[g] \otimes^{\delta_2} S^{\delta_3+}[g] = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} S^\delta[g] \otimes^\delta S^{\delta+}[g] = \lim_{\delta \rightarrow 0} 1 = 1, \end{aligned}$$

что означает

$$S[g] S^+[g] = 1.$$

Ниже мы последовательно покажем, что введенная нами регуляризация удовлетворяет всем перечисленным условиям. Следовательно, мы сможем утверждать, что построенная нами S -матрица унитарна.

§ 3. Регуляризация $D_{(\pm)}$ -функций

Рассмотрим сначала регуляризацию $D_{(\pm)}$ -функций, соответствующих пропагатору $D_c(x^2)$ (V. 6.1), а затем — суперпропагатору $\omega(\xi, x)$ (V. 5.5).

Для положительно- и отрицательно-частотных функций Грина справедливы тождества

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{(\pm)}(k) &= 2\pi\theta(\mp k_0) \delta(k^2 - m^2) = 2\pi\theta(\mp k_0) V(-k^2 l^2) \delta(k^2 - m) = \\ &= \frac{1}{i} \left[\frac{V(-k^2 l^2)}{m^2 - k^2 - i\epsilon} - \frac{V(-k^2 l^2)}{m^2 - k^2 \mp i\epsilon k_0} \right] = \\ &= \frac{1}{2i} \int_{L_0} \frac{d\xi v(\xi)}{\sin \pi\xi} \cdot \frac{1}{i} [(m^2 - k^2 - i\epsilon)^{\xi-1} - (m^2 - k^2 \mp i\epsilon k_0)^{\xi-1}], \quad (3.1) \end{aligned}$$

где $0 \leq \theta \leq \pi/4$.

Введем регуляризованные функции

$$\tilde{D}_{(\pm)}^\delta(k) = \frac{1}{2i} \int_{-a+i\infty}^{-a-i\infty} \frac{d\xi v(\xi) e^{\delta\xi^2}}{\sin \pi\xi} \tilde{D}_{(\pm)}(\xi, m^2, k), \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{(\pm)}(\xi, m, k) &= \frac{1}{i} [(m^2 - k^2 - i\epsilon)^{\xi-1} - (m^2 - k^2 \mp i\epsilon k_0)^{\xi-1}] = \\ &= 2\pi\theta(\mp k_0) \theta(k^2 - m^2) \frac{\sin \pi\xi}{\pi} (k^2 - m^2)_+^{\xi-1}. \quad (3.3) \end{aligned}$$

Представление (3.3) может рассматриваться двумя различными способами. С одной стороны, оно означает, что в комплексной k_0 -плоскости контуры интегрирования $C^{(\pm)}$, определяющие соответственно $D_{(\pm)}$ -функции, должны быть выбраны так, как показано на рис. 20. С другой стороны, функция $(k^2 - m^2)_+^{\xi-1}$ может пониматься в смысле обобщенных функций (см. книгу

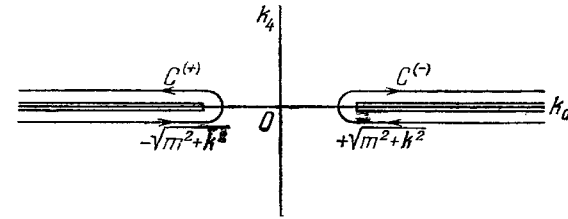


Рис. 20. Контуры интегрирования $C^{(\pm)}$ в k_0 -плоскости, определяющие $D_{(\pm)}$ -функции в (3.3).

И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова (1959)). Тогда она имеет в комплексной ξ -плоскости полюсы первого порядка в точках $\xi = 0, -1, -2, \dots$

Кроме того, существенно, что

$$\tilde{D}_{(\pm)}^\delta(k) \sim \theta(\mp k_0) \theta(k^2 - m^2). \quad (3.4)$$

В x -пространстве получим

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{(\pm)}^\delta(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int dk e^{-ikx} \cdot \tilde{D}_{(\pm)}^\delta(k) = \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-a+i\infty}^{-a-i\infty} \frac{d\xi v(\xi) e^{\delta\xi^2}}{\sin \pi\xi} \cdot D_{(\pm)}(\xi, m^2, x), \quad (3.5) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{(\pm)}(\xi, m^2, x) &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int dk e^{-ikx} \cdot \tilde{D}_{(\pm)}(\xi, m^2, k) = \\ &= \frac{i2^\xi m^2 (1+\xi)}{8\pi\Gamma(1-\xi)} \left\{ \frac{e^{-i\pi\xi} H_{1+\xi}^{(2)}(m\sqrt{x^2 - i\epsilon})}{(m\sqrt{x^2 - i\epsilon})^{1+\xi}} + \right. \\ &\quad \left. + 2\theta(\pm x_0) \theta(x^2) \frac{J_{-(1+\xi)}(m\sqrt{x^2})}{(m\sqrt{x^2})^{1+\xi}} \right\}. \quad (3.6) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в фигурных скобках в (3.6) совпадает с причинной функцией $D_c(\zeta, m^2, x)$, рассмотренной нами в § 6 гл. V. Эта функция ограничена в точке $x = 0$.

Второе слагаемое представляет собой функцию, также ограниченную в точке $x = 0$, поскольку для функции Бесселя справедливо разложение

$$\left(\frac{z}{2}\right)^\nu J_{-\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-2\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1-\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} [1 + O(z^2)]. \quad (3.7)$$

Таким образом, функции $D_{(\pm)}(\zeta, m^2, x)$, так же как и $D_c(\zeta, m^2, x)$, ограничены в точке $x = 0$ и

$$D_{(\pm)}(\zeta, m^2, 0) = D_c(\zeta, m^2, 0) = \frac{m^{2(1+\zeta)}}{(4\pi)^2 \zeta (1+\zeta)}.$$

Сравнивая представления (3.5) и (V.6.7), легко можно увидеть, что между функциями D_c^δ и $D_{(\pm)}^\delta$ существуют соотношения

$$\begin{aligned} D_c^\delta(x) &= \theta(x_0) D_{(-)}^\delta(x) + \theta(-x_0) D_{(+)}^\delta(x), \\ D_{(-)}^\delta(x) &= \theta(x_0) D_c^\delta(x) + \theta(-x_0) D_c^{\delta*}(x). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Кроме того, справедливы соотношения

$$\partial^s D_c^\delta(x) = \theta(x_0) \partial^s D_{(-)}^\delta(x) + \theta(-x_0) \partial^s D_{(+)}^\delta(x) \quad (3.9)$$

для $s \leq 2[a] + 2$ при $a > [a]$ и $s \leq 2a + 1$ при $a = [a]$.

Для того чтобы показать справедливость равенств (3.9), рассмотрим разность

$$\begin{aligned} R_s(x) &= \partial_0^s D_c^\delta(x) - [\theta(x_0) \partial_0^s D_{(-)}^\delta(x) + \theta(-x_0) \partial_0^s D_{(+)}^\delta(x)] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s_1=1}^s \frac{s!}{s_1!(s-s_1)!} \delta^{(s_1-1)}(x_0) \partial_0^{s-s_1} [D_{(-)}^\delta(x) - D_{(+)}^\delta(x)]. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались равенствами (3.8) и соотношением

$$\partial_0^{s_1} \theta(\pm x_0) = \pm \frac{1}{2} \delta^{(s_1-1)}(x_0).$$

При $x^2 \rightarrow 0$ имеем, согласно (3.6) и (3.7),

$$D_{(-)}^\delta(x) = D_{(+)}^\delta(x) - D_c^\delta(x) = \varepsilon(x_0) \theta(x^2) (x^2)^{a-1} O(1).$$

Поэтому функция

$$F^\delta(x_0) = \int dx D^\delta(x) f(x),$$

где $\forall f(x) \in S$, при $x_0 \rightarrow 0$ ведет себя как

$$F^\delta(x_0) = \varepsilon(x_0) |x_0|^{2a+1} O(1),$$

т. е. она $2[a] + 1$ раз непрерывно дифференцируема в точке $x_0 = 0$ и при $a > [a]$ все ее $2[a] + 1$ производных обращаются в нуль. Если же $a = [a]$, то только $2a$ производных функции $F^\delta(x_0)$ обращаются в нуль при $x_0 = 0$. Это означает, что функционал

$$\begin{aligned} (R_s, f) &= \int dx_0 \int dx R_s(x_0, x) f(x_0, x) = \\ &= \sum_{s_1=1}^s \frac{(-1)^{s_1+1} s!}{s_1!(s-s_1)!} \int dx_0 \delta(x_0) \partial_0^{s_1-1} \int dx f(x_0, x) \partial_0^{s-s_1} D^\delta(x_0^2 - x^2) = 0 \end{aligned}$$

для всех $s \leq 2[a] + 2$ при $a > [a]$ и $s \leq 2a + 1$ при $a = [a]$ и любых $f(x_0, x) \in S$. Тем самым доказана справедливость соотношений (3.9).

Рассмотрим теперь регуляризацию функций $w_{(\pm)}$, соответствующих суперпропатору w (V.5.5). Имеем

$$\begin{aligned} w_{if}^{(\pm)} &= w^{(\pm)}(\zeta_i \zeta_j, x_i - x_j) = \exp\{-\zeta_i \zeta_j \Delta_{(\pm)}(x_i - x_j)\} - 1 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\zeta_i \zeta_j)^n}{n!} [\Delta_{(\pm)}(x_i - x_j)]^n. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Воспользовавшись представлением

$$[\Delta_{(\pm)}(x)]^n = \int_{(nm)^2} d\kappa^2 \Omega_n(\kappa^2) \Delta_{(\pm)}(\kappa, x), \quad (3.11)$$

справедливым при $x \neq 0$, легко получить

$$w_{(\pm)}(\zeta, x) = \int_{m^2}^{\infty} d\kappa^2 \rho_0(\zeta, \kappa^2) \Delta_{(\pm)}(\kappa, x). \quad (3.12)$$

Фурье-образ функции $w_{(\pm)}(\zeta, x)$ равен

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{(\pm)}(\zeta, k) &= \int_{m^2}^{\infty} d\kappa^2 \rho_0(\zeta, \kappa^2) \tilde{\Delta}_{(\pm)}(\kappa, k) = \\ &= \int_{m^2}^{\infty} d\kappa^2 \rho(\zeta, \kappa^2, k^2) \tilde{\Delta}_{(\pm)}(\kappa, k). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь мы воспользовались условиями (E_2) , сформулированными на стр. 135, и тождествами (3.1).

Регуляризация функции $\tilde{w}_{(\pm)}$ вводится согласно (V.6.13):

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{(\pm)}^\delta(\zeta, k) &= \int_{m^2}^{\infty} d\kappa^2 \rho^\delta(\zeta, \kappa^2, k^2) \tilde{\Delta}_{(\pm)}(\kappa, k) = \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-a+i\infty}^{-a-i\infty} \frac{d\chi e^{\delta\chi^2}}{\sin \pi\chi} \int_{m^2}^{\infty} d\kappa^2 R(\zeta, \kappa^2, \chi) \tilde{D}_{(\pm)}(\chi, \kappa^2, k), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $\tilde{D}_{(\pm)}(\chi, \kappa^2, k)$ дается формулой (3.3). В x -представлении получим, используя формулу (3.6):

$$\tilde{w}_{(\pm)}^\delta(\zeta, x) = \frac{1}{2i} \int_{-a+i\infty}^{-a-i\infty} \frac{d\chi e^{\delta\chi^2}}{\sin \pi\chi} \int_{m^2}^{\infty} d\kappa^2 R(\zeta, \kappa^2, \chi) D_{(\pm)}(\chi, \kappa^2, x). \quad (3.15)$$

Функции $D_{(\pm)}(\chi, \kappa^2, x)$ и $\tilde{D}_{(\pm)}(\chi, \kappa^2, k)$ как обобщенные функции, заданные на пространстве Z_α ($\alpha < \frac{2\rho}{2\rho-1}$), в χ -плоскости являются мероморфными функциями, которые имеют полюсы первого порядка в точках $\chi=0, -1, -2, \dots$ и растут при $\text{Re } \chi \rightarrow +\infty$ как $\Gamma(\beta\chi) \simeq \exp\{\beta\chi \ln \chi\}$, где $\beta < 1/\rho$.

Поскольку функция $R(\zeta, \kappa^2, \chi)$ убывает как $\left[\Gamma\left(\frac{\chi}{\rho}\right)\right]^{-1}$, а $\beta < 1/\rho$, то интеграл в (3.14) и (3.15) сходится, если перейти к контуру интегрирования L_θ ($0 < \theta \leq \pi/4$) в плоскости χ . Тогда можно перейти к пределу $\delta \rightarrow 0$, и мы получим

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{w}_{(\pm)}^\delta(\zeta, k) = \tilde{w}_{(\pm)}(\zeta, k).$$

При $\delta > 0$ в пределе $k^2 \rightarrow \pm \infty$ имеем

$$\tilde{w}_{(\pm)}^\delta(\zeta, k) = O\left(\frac{1}{|k^2|^{1+a}}\right).$$

Функция $w_{(\pm)}^\delta(\zeta, x)$ непрерывна и ограничена при вещественных x . В точке $x=0$ она равна

$$w_{(\pm)}^\delta(\zeta, 0) = \frac{1}{(4\pi)^2 2i} \int_{-a+i\infty}^{-a-i\infty} \frac{d\chi e^{\delta\chi^2}}{\chi(1+\chi) \sin \pi\chi} \int_{m^2}^{\infty} d\kappa^2 \kappa^{2(1+\chi)} R(\zeta, \kappa^2, \chi).$$

Сравнивая представление (V.6.15) и (3.15), получим, что между функциями w^δ и $w_{(\pm)}^\delta$ справедливы соотношения, аналогичные (3.8) и (3.9):

$$\partial^s w^\delta(\zeta, x) = \theta(x_0) \partial^s w_{(-)}^\delta(\zeta, x) + \theta(-x_0) \partial^s w_{(+)}^\delta(\zeta, x) \quad (3.16)$$

для $0 \leq s \leq 2[a] + 2$ при $a > [a]$ и $0 \leq s \leq 2a + 1$ при целых $a = [a]$.

§ 4. Условие унитарности в теории возмущений

Мы будем требовать выполнения условия унитарности $SS^+ = S+S = 1$ в каждом порядке теории возмущений. Посмотрим, каким свойствам должен удовлетворять матричный элемент, соответствующий произвольной связной диаграмме Фейнмана, чтобы условие унитарности было выполнено.

Используя представление (V.3.4) для S -матрицы и соотношение унитарности $SS^+ = S+S = 1$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \dots \int : d\mu_1 \dots d\mu_n : A_n(1, 2, \dots, n) = 0. \quad (4.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_n(1, \dots, n) &= \\ &= \sum_{n_1+n_2=n} (-1)^{n_2} P(1, \dots, n_1 | n_1+1, \dots, n) \times \\ &\quad \times A_{nn_1}(1, \dots, n_1 | n_1+1, \dots, n), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} A_{nn_1}(1, \dots, n_1 | n_1+1, \dots, n) &\stackrel{\text{Df}}{=} \\ &\stackrel{\text{Df}}{=} A_{nn_1}(\zeta_1 x_1, \dots, \zeta_{n_1} x_{n_1} | \zeta_{n_1+1} x_{n_1+1}, \dots, \zeta_n x_n) = \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n_1} (1 + w_{ij}) \prod_{\substack{1 \leq k \leq n_1 \\ n_1+1 \leq l \leq n}} (1 + w_{kl}^{(-)}) \prod_{n_1+1 \leq s < t \leq n} (1 + w_{st}^+). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Формула (4.1) может быть представлена в виде суммы, каждый член которой $A_{nn_1}(1, \dots, n_1 | n_1+1, \dots, n)$ описывает некоторый линейный, вообще говоря, несвязный граф с n вершинами. В случае $n_1 = n$ эта сумма записывается в виде (V.3.5). Представление этой суммы в виде набора связных графов было рассмотрено в § 3 гл. V.

Совокупности графов, описываемых функциями A_{nn} и A_{nn_1} , при $n_1 \neq n$, как легко видеть из (V.3.5) и (4.3), изоморфны, если не различать между собой ребра графов, которым соответствуют различные суперпропагаторы w_{ij} , $w_{ij}^{(-)}$, w_{ij}^+ . Поэтому A_{nn_1} представима формулой, аналогичной (V.3.6):

$$\begin{aligned} A_{nn_1} &= \\ &= \sum_{\{k, l_k\}} \sum_{\{p, l_p\}} P(1, \dots, k_1 | k_1+1, \dots, k_1+k_2 | \dots | \dots, k_1+\dots+k_\nu) \times \\ &\quad \times F_{k_1 l_{k_1}, p_1 l_{p_1}}(1, \dots, k_1) \cdot \dots \cdot F_{k_\nu l_{k_\nu}, p_\nu l_{p_\nu}}(n-k_\nu, \dots, n), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} F_{kl, p l_p}(1, \dots, k) &= \\ &= P(1, \dots, p | p+1, \dots, k) F_{kl, p l_p}(1, \dots, p | p+1, \dots, k). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь через $F_{k|_k, p|_p}(1, \dots, p | p+1, \dots, k)$ обозначена функция, описывающая связный граф $G_{k|_k, p|_p}$, который разбит на два подграфа из p и $k-p$ вершин. Индекс j_p указывает на способ разбиения и изменяется в пределах $1 \leq j_p \leq M_{k|_k, p|_p}$, где $M_{k|_k, p|_p}$ обозначает число таких независимых разбиений. Ребрам графа $G_{k|_k, p|_p}$, соединяющим вершины из первой подгруппы $(1, \dots, p)$, соответствует функция $\omega(\zeta_i \zeta_j, x_i - x_j)$, из второй подгруппы $(p+1, \dots, k)$ — функция $\omega^+(\zeta_i \zeta_j, x_i - x_j)$, а линиям, соединяющим вершины первой и второй подгрупп, — функция $\omega_{(-)}(\zeta_i \zeta_j, x_i - x_j)$. По определению,

$$F_{k|_k, p|_p}(1, \dots, p | p+1, \dots, k) |_{p=k} = F_{k|_k}(1, \dots, k).$$

С учетом (V.3.6) и (4.4) функция $A_n(1, \dots, n)$ в (4.2) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} A_n(1, \dots, n) &= \\ &= \sum_{n_1+n_2=n} (-1)^{n_1} \sum_{\{k|_k\}} \sum_{\{p|_p\}} P(1, \dots, k_1 | k_1+1, \dots, k_1+k_2 | \dots \\ &\quad \dots | n - k_v + 1, \dots, n) F_{k_1|_k_1, p_1|_p_1}(1, \dots, k_1) \cdot \dots \\ &\quad \dots \cdot F_{k_v|_k_v, p_v|_p_v}(n - k_v + 1, \dots, n) = \\ &= (-1)^n \sum_{\{k|_k\}} P(1, \dots, k_1 | \dots | n - k_v + 1, \dots, n) \times \\ &\quad \times \prod_{i=1}^v \left\{ \sum_{\{p_i|_p_i\}} (-1)^{p_i} F_{k_i|_k_i, p_i|_p_i} \left(\sum_{l=1}^{i-1} k_l + 1, \dots, \sum_{l=1}^i k_l \right) \right\}. \quad (4.6) \end{aligned}$$

Подставляя (4.6) в (4.1), получим, что S -матрица будет унитарной, если

$$\int \dots \int : d\mu_1 \cdot \dots \cdot d\mu_k : \sum_{\{p, j_p\}} (-1)^p F_{k|_k, p|_p}(1, \dots, k) = 0 \quad (4.7)$$

или, подробнее,

$$\begin{aligned} &\int dx_1 \dots \int dx_n g(x_1) \dots g(x_n) \int d\sigma(\zeta_1) \dots \\ &\quad \dots \int d\sigma(\zeta_n) : \exp \{ i(\zeta_1 \Phi(x_1) + \dots + \zeta_n \Phi(x_n)) \} : \times \\ &\quad \times \sum_{\{p|_p\}} (-1)^p F_{k|_k, p|_p}(\zeta_1 x_1, \dots, \zeta_k x_k) = 0. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Рассмотрим, например, для функции $F_{4_2}(1, 2, 3, 4)$ условие (4.7) согласно обозначениям рис. 7. Графически это условие показано на рис. 21. Здесь вертикальная волнистая черта

определяет линию разбиения графа G_{4_2} на два подграфа. Функции, соответствующие этим разбиениям; строятся таким образом, что ребрам, соединяющим точки, расположенные слева от волнистой линии, соответствует функция ω_{ij} , справа — функция ω_{ij}^+ , а ребрам, соединяющим точки, одна из которых находится слева, а другая справа от волнистой линии, соответствует функция $\omega_{(-)}$. После этого необходимо полностью симметризовать полученную функцию по всем аргументам $(1, \dots, n) = (\zeta_1 x_1, \dots, \zeta_n x_n)$.

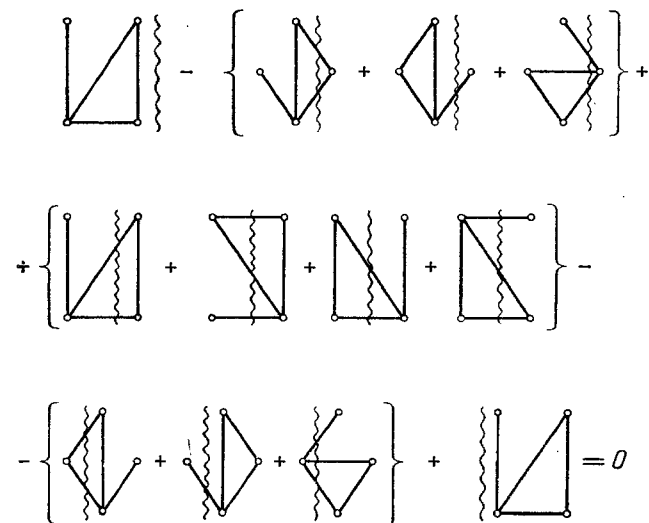


Рис. 21. Условие унитарности, записанное графически для функции $F_{4_2}(1, 2, 3, 4)$.

Формулы (4.7) и (4.8) представляют собой условие унитарности для любого связного графа Фейнмана. Таким образом, если эти соотношения будут выполнены для произвольного связного графа, то тем самым S -матрица будет унитарной в каждом порядке теории возмущений.

Кроме того, отсюда следует еще одно важное следствие. Пусть мы вводим некоторую операцию, которая удаляет из ряда теории возмущений какую-либо группу связных графов, характеризующихся некоторым признаком. И пусть ни при каких разбиениях оставшихся связных графов на два подграфа нельзя получить никакой из удаленных графов. Тогда такая операция не нарушает условия унитарности.

Примером такой группы связных графов являются совокупность всех так называемых вакуумных петель, т. е. графов без внешних линий. Поэтому удаление всех вакуумных петель из ряда теории возмущений не нарушает унитарности S -матрицы.

Другую такую совокупность графов образуют вакуумные петли, образуемые членами с \mathbb{Z} в лагранжиане взаимодействия $\mathcal{L}_I(x)$ (I.5.19) или (I.6.2). Эта совокупность графов описывается функцией J в (I.5.20) и после суммирования приводится к множителю с $\delta(0)$, что было подробно рассмотрено в § 5 гл. I.

Покажем теперь, следуя М. Велтману (1963), что для функций $F_{klk, p}^{\delta}$, построенных из регуляризованных суперпропагаторов ω^{δ} , $\omega^{\delta+}$ и $\omega^{\delta-}$, справедливо тождество

$$\int d\mu_1 \dots \int d\mu_n \sum_{\{p|p\}} (-1)^p F_{klk, p}^{\delta}(1, \dots, k) \equiv 0, \quad (4.9)$$

обеспечивающее выполнение условия $S^{\delta} \otimes S^{\delta+} \equiv 1$. С учетом соотношения (3.16) легко проверить, что при $x_{r0} \leq x_{j0}$ ($j=1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, k$)

$$F_{klk, p}^{\delta}(1, \dots, r, \dots, p|p+1, \dots, k) = F_{klk, p-1}^{\delta}(1, \dots, r-1, r+1, \dots, p|r, p+1, \dots, k). \quad (4.10)$$

Здесь

$$F_{klk, p}^{\delta}(1, \dots, p|p+1, \dots, k) = \sum_{j=1}^{M_{klk, p}} F_{klk, p|p}^{\delta}(1, \dots, p|p+1, \dots, k).$$

Соотношение (4.10) непосредственно следует из равенств

$$\begin{aligned} \omega^{\delta}(\xi_r \xi_s, x_r - x_s) &= \omega^{\delta-}(\xi_r \xi_s, x_r - x_s) \\ (s &= 1, \dots, r-1, r+1, \dots, p), \\ \omega^{\delta-}(\xi_r \xi_t, x_r - x_t) &= \omega^{\delta+}(\xi_r \xi_t, x_r - x_t) \\ (t &= p+1, \dots, k), \end{aligned}$$

справедливых при $x_{r0} \leq x_{j0}$. Поэтому легко проверить, что

$$\begin{aligned} B(1, \dots, k) &= \sum_{p=0}^k (-1)^p P(1, \dots, p|p+1, \dots, k) \times \\ &\times F_{klk, p}^{\delta}(1, \dots, p|p+1, \dots, k) = 0, \quad (4.11) \end{aligned}$$

поскольку в сумме (4.11) содержится 2^k членов и все они попарно сокращаются в силу (4.10).

Действительно, пусть среди аргументов $\{x_{10}, \dots, x_{k0}\}$ один является наименьшим. Без ограничения общности можно счи-

тать $x_{10} \leq x_{j0}$ ($j=2, 3, \dots, k$). Тогда сумму в (4.11) можно разбить на два слагаемых:

$$\begin{aligned} &\sum_{p=0}^k (-1)^p P(1, \dots, p|p+1, \dots, k) F_{klk, p}^{\delta}(1, \dots, p|p+1, \dots, k) = \\ &= \sum_{p=1}^k (-1)^p P(2, \dots, p|p+1, \dots, k) F_{klk, p}^{\delta}(1, \dots, p|p+1, \dots, k) + \\ &\quad + \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p P(2, \dots, p+1|p+2, \dots, k) \times \\ &\quad \times F_{klk, p}^{\delta}(2, \dots, p+1|1, p+2, \dots, k). \quad (4.12) \end{aligned}$$

Принимая во внимание (4.10), получим

$$\begin{aligned} B(1, \dots, k) &= \sum_{p=1}^k (-1)^p P(2, \dots, p|p+1, \dots, k) \times \\ &\quad \times F_{klk, p-1}^{\delta}(2, \dots, p|1, p+1, \dots, k) + \\ &\quad + \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p P(2, \dots, p+1|p+2, \dots, k) \times \\ &\quad \times F_{klk, p}^{\delta}(2, \dots, p+1|1, p+2, \dots, k) = \\ &= \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p P(2, \dots, p+1|p+2, \dots, k) \times \\ &\quad \times \{-F_{klk, p}^{\delta}(2, \dots, p+1|1, p+2, \dots, k) + \\ &\quad + F_{klk, p}^{\delta}(2, \dots, p+1|1, p+2, \dots, k)\} \equiv 0. \quad (4.13) \end{aligned}$$

Итак, мы видим, что $B(1, \dots, k) \equiv 0$ при любых соотношениях между аргументами $\{x_{10}, \dots, x_{k0}\}$, т. е. при любом выборе минимального аргумента. Этим доказывается равенство (4.11).

Отметим, что проведенные рассуждения справедливы при условии, что суперпропагаторы ω^{δ} , $\omega^{\delta+}$ и $\omega^{\delta-}$, из которых строятся функции $F_{klk, p}^{\delta}$, являются локально интегрируемыми и подчиняются соотношениям (3.16).

§ 5. Условие унитарности и представление S-матрицы в функциональной форме

В предыдущем параграфе условие унитарности было рассмотрено на языке диаграмм Фейнмана в каждом порядке теории возмущений. В настоящем параграфе мы покажем, используя представление S-матрицы в функциональной форме (I.6.1),

что если двухточечные функции Грина \mathcal{D}_c^δ и $\mathcal{D}_{(\pm)}^\delta$ удовлетворяют соотношениям (3.8) и (3.9), то S -матрица унитарна.

Как говорилось в § 5 гл. I, математические операции в квантовой теории поля, связанные с приведением к нормальной форме произведений квантованных полей, заданных первоначально в виде обычного или T -произведения, полностью определяются теоремой Вика и носят чисто алгебраический характер. Это позволяет рассматривать S -матрицу и любые другие операторы как функционалы, когда полевые операторы типа $\varphi(x)$ считаются произвольными скалярными функциями. Все необходимые формулы были приведены в § 5 гл. I.

Введем функционал, соответствующий S -матрице:

$$S_{t_2, t_1}[\varphi] = T \exp \left\{ i \int_{t_1}^{t_2} dx g(x) U(\varphi(x)) \right\}. \quad (5.1)$$

Будем обозначать

$$S[\varphi] = S_{\infty, -\infty}[\varphi].$$

Операция T -произведения задается формулой (I.5.6) (или I.6.3), что в данном случае то же самое. Операция умножения, которую мы обозначаем символом \otimes , задается формулой (I.5.9). Будем предполагать, что функции $\mathcal{D}_c(x)$ и $\mathcal{D}_{(-)}(x)$ ограничены и непрерывны и

$$\mathcal{D}_c(0) = \mathcal{D}_c^*(0) = \mathcal{D}_{(-)}(0) = \mathcal{D}_{(+)}(0) < \infty.$$

Все эти утверждения справедливы для регуляризованных функций при $\delta > 0$. Кроме того, эти функции удовлетворяют соотношениям (3.8) и (3.9). В данном параграфе мы опустим для простоты индекс δ у \mathcal{D} -функций.

Заметим еще, что обычно лагранжиан взаимодействия выбирается в нормально упорядоченной форме. Для того чтобы учесть это обстоятельство при формальных функциональных преобразованиях, необходимо перейти от нормального к обычному произведению операторов. Это означает, что вместо (V.2.6) мы должны рассматривать

$$U(\varphi(x)) = \int d\sigma(\xi) e^{\frac{1}{2} \xi^2 \mathcal{D}_c^{(0)}} \cdot e^{i\xi\varphi(x)}. \quad (5.2)$$

Лагранжиан взаимодействия (I.6.2) содержит производные. Формально члены с производными также можно учесть в представлении типа (5.2). Однако в этом случае представление оказывается довольно громоздким, в то время как суть преобразований не меняется. Поэтому мы здесь ограничимся только рассмотрением случая (5.2).

Покажем, что S -матрица (5.1) удовлетворяет следующим соотношениям:

$$S_{t_2, t_1}[\varphi] \otimes S_{t_1, t_0}[\varphi] = S_{t_2, t_0}[\varphi], \quad (5.3)$$

$$S_{t_1, t_0}^+[\varphi] \otimes S_{t_2, t_1}^+[\varphi] = S_{t_2, t_0}^+[\varphi],$$

$$T\{\Psi(\varphi(x)) S[\varphi]\} = S_{\infty, x_0}[\varphi] \otimes \Psi(\varphi(x)) \otimes S_{x_0, -\infty}[\varphi], \quad (5.4)$$

$$S_{t_2, t_1}[\varphi] \otimes S_{t_2, t_1}^+[\varphi] = 1, \quad (5.5)$$

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \left[\frac{\delta}{\delta\varphi(y)} S[\varphi] \otimes S^+[\varphi] \right] = 0 \quad (5.6)$$

при $x_0 < y_0$.

Сразу же заметим, что соотношение (5.6), так называемое условие причинности, является следствием первых трех. Действительно, пусть справедливы формулы (5.3)–(5.5), тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\varphi(y)} S[\varphi] &= ig(y) T\{U'(\varphi(y)) S[\varphi]\} = \\ &= ig(y) S_{\infty, y_0}[\varphi] \otimes U'(\varphi(y)) \otimes S_{y_0, -\infty}[\varphi]. \end{aligned}$$

Далее, используя (5.3) и (5.5), получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\varphi(y)} S[\varphi] \otimes S^+[\varphi] &= \\ &= ig(y) S_{\infty, y_0}[\varphi] \otimes U'(\varphi(y)) \otimes S_{y_0, -\infty}[\varphi] \otimes S_{y_0, -\infty}^+[\varphi] \otimes S_{\infty, y_0}^+[\varphi] = \\ &= ig(y) S_{\infty, y_0}[\varphi] \otimes U'(\varphi(y)) \otimes S_{\infty, y_0}^+[\varphi]. \end{aligned}$$

Легко видеть, что условие (5.6) выполнено, поскольку полученное выражение не зависит от поля $\varphi(x)$ при $x_0 < y_0$.

Рассмотрим теперь соотношения (5.3). Согласно нашим определениям, имеем

$$\begin{aligned} S_{t_2, t_1}[\varphi] \otimes S_{t_1, t_0}[\varphi] &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \iint dx_1 dx_2 \left[\mathcal{D}_c(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta\varphi_1(x_1) \delta\varphi_1(x_2)} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. 2\mathcal{D}_{(-)}(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta\varphi_1(x_1) \delta\varphi_2(x_2)} + \mathcal{D}_c(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta\varphi_2(x_1) \delta\varphi_2(x_2)} \right] \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ i \int_{t_1}^{t_2} dx g(x) U(\varphi_1(x)) + i \int_{t_0}^{t_1} dx g(x) U(\varphi_2(x)) \right\} \Big|_{\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi}. \end{aligned}$$

Поскольку областью определения функции $\varphi_1(x)$ является интервал (t_1, t_2) , а функции $\varphi_2(x)$ — интервал (t_0, t_1) , то, во-первых, можно положить $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \varphi(x)$ и, во-вторых, $\mathcal{D}_{(-)}(x_1 - x_2) = \mathcal{D}_c(x_1 - x_2)$ во втором слагаемом первой

экспоненты, так как $x_{10} > x_{20}$ при $x_{10} \in (t_1, t_2)$, $x_{20} \in (t_0, t_1)$. Поэтому имеем

$$S_{t_2 t_1}[\varphi] \otimes S_{t_2 t_0}[\varphi] = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_2} dx_1 \int_{t_0}^{t_2} dx_2 \mathcal{D}_c(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta \varphi(x_1) \delta \varphi(x_2)} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ i \int_{t_0}^{t_2} dx g(x) U(\varphi(x)) \right\} = S_{t_2 t_0}[\varphi].$$

Соотношение (5.4) проверяется столь же просто; для этого достаточно вновь воспользоваться определениями операций T и \otimes .

Обратимся теперь к соотношению унитарности (5.5). Имеем

$$S_{t_2 t_1}[\varphi] \otimes S_{t_2 t_1}^+[\varphi] = T_1 \otimes_{12} T_2^+ E_{t_2 t_1}[\varphi_1, \varphi_2] \Big|_{\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi}, \quad (5.7)$$

где

$$T_i = T \left[\frac{\delta}{\delta \varphi_i} \right] \quad (i = 1, 2),$$

$$E_{t_2 t_1}[\varphi_1, \varphi_2] = \exp \left\{ i \int_{t_1}^{t_2} dx g(x) [U(\varphi_1(x)) - U(\varphi_2(x))] \right\}. \quad (5.8)$$

Воспользуемся тождеством

$$\exp \left\{ i \int_{t_1}^{t_2} dx_0 f(x_0) \right\} = 1 - \int_{t_1}^{t_2} dx_0 \frac{d}{dx_0} \exp \left\{ i \int_{x_0}^{t_2} dx'_0 f(x'_0) \right\} = \\ = 1 + i \int_{t_1}^{t_2} dx_0 f(x_0) \exp \left\{ i \int_{x_0}^{t_2} dx'_0 f(x'_0) \right\} \quad (5.9)$$

при

$$f(x_0) = \int dx g(x_0, \mathbf{x}) [U(\varphi_1(x_0, \mathbf{x})) - U(\varphi_2(x_0, \mathbf{x}))].$$

Подставляя это тождество в (5.8) и используя представление (5.2) для лагранжиана взаимодействия, получим

$$S_{t_2 t_1}[\varphi] \otimes S_{t_2 t_1}^+[\varphi] = \\ = 1 + i \int_{t_1}^{t_2} dx \int d\sigma(\xi) T_1 \otimes_{12} T_2^+ [e^{i\zeta\varphi_1(x)} - e^{i\zeta\varphi_2(x)}] e^{\frac{\xi^2}{2} \mathcal{D}_c(0)} \times \\ \times E_{t_2 x_0}[\varphi_1, \varphi_2] \Big|_{\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi}. \quad (5.10)$$

Легко получить следующие соотношения:

$$T_1 e^{i\zeta\varphi_1(x)} T_1^{-1} = \\ = \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{2} \mathcal{D}_c(0) + i\zeta\varphi_1(x) + i\zeta \int dx' \mathcal{D}_c(x-x') \frac{\delta}{\delta \varphi_1(x')} \right\}, \\ T_2 e^{i\zeta\varphi_2(x)} T_2^{-1} = \\ = \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{2} \mathcal{D}_c(0) + i\zeta\varphi_2(x) + i\zeta \int dx' \mathcal{D}_c^*(x-x') \frac{\delta}{\delta \varphi_2(x')} \right\}, \\ \otimes_{12} e^{i\zeta\varphi_1(x)} \otimes_{12}^{-1} = \exp \left\{ i\zeta\varphi_1(x) + i\zeta \int dx' \mathcal{D}_{(-)}(x-x') \frac{\delta}{\delta \varphi_2(x')} \right\}, \\ \otimes_{12} e^{i\zeta\varphi_2(x)} \otimes_{12}^{-1} = \exp \left\{ i\zeta\varphi_2(x) + i\zeta \int dx' \mathcal{D}_{(+)}(x-x') \frac{\delta}{\delta \varphi_1(x')} \right\}, \\ T_1 e^{i\zeta\varphi_2(x)} T_1^{-1} = e^{i\zeta\varphi_2(x)}, \quad T_2^+ e^{i\zeta\varphi_1(x)} (T_2^+)^{-1} = e^{i\zeta\varphi_1(x)}.$$

С помощью этих соотношений формулу (5.10) можно записать в виде

$$S_{t_2 t_1}[\varphi] \otimes S_{t_2 t_1}^+[\varphi] = 1 + i \int_{t_1}^{t_2} dx \int d\sigma(\xi) \left[e^{i\zeta\varphi_1(x)} \times \right. \\ \times \exp \left\{ i\zeta \int dx' \left(\mathcal{D}_c(x-x') \frac{\delta}{\delta \varphi_1(x')} + \mathcal{D}_{(-)}(x-x') \frac{\delta}{\delta \varphi_2(x')} \right) \right\} - \\ \left. - e^{i\zeta\varphi_2(x)} \exp \left\{ i\zeta \int dx' \left(\mathcal{D}_{(+)}(x-x') \frac{\delta}{\delta \varphi_1(x')} + \mathcal{D}_c^*(x-x') \frac{\delta}{\delta \varphi_2(x')} \right) \right\} \right] \times \\ \times E_{t_2 x_0}(\varphi_1, \varphi_2) \Big|_{\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi}. \quad (5.11)$$

Заметим теперь, что аргумент $x_0 - x'_0 < 0$ у всех функций \mathcal{D}_c , \mathcal{D}_c^* , $\mathcal{D}_{(-)}$ и $\mathcal{D}_{(+)}$ в больших скобках, поскольку x'_0 принадлежит интервалу (x_0, t_2) . Поэтому, согласно (3.8), имеем

$$\mathcal{D}_{(-)}(x-x') = \mathcal{D}_c^*(x-x'), \quad \mathcal{D}_{(+)}(x-x') = \mathcal{D}_c(x-x').$$

Формула (5.11) примет вид

$$S_{t_2 t_1}[\varphi] \otimes S_{t_2 t_1}^+[\varphi] = 1 + i \int_{t_1}^{t_2} dx \int d\sigma(\xi) [e^{i\zeta\varphi_1(x)} - e^{i\zeta\varphi_2(x)}] \times \\ \times \exp \left\{ i\zeta \int dx' \left[\mathcal{D}_c(x-x') \frac{\delta}{\delta \varphi_1(x')} + \mathcal{D}_c^*(x-x') \frac{\delta}{\delta \varphi_2(x')} \right] \right\} \times \\ \times S_{t_2 x_0}[\varphi_1] \otimes S_{t_2 x_0}^+[\varphi_2] \Big|_{\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi}.$$

В правой части в больших квадратных скобках можно положить $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, поскольку все операторы, зависящие от

вариационных производных, стоят правее этой скобки. Поэтому все выражение равно нулю, и окончательно имеем

$$S_{t,t}[\Phi] \otimes S_{t,t}^+[\Phi] = 1. \quad (5.12)$$

Еще раз заметим, что наличие производных в лагранжиане взаимодействия не меняет справедливости проведенных выкладок. Выполнение соотношений (3.9) гарантирует, что и в этом случае унитарность будет выполнена.

§ 6. Непрерывность по параметрам регуляризации

Покажем, что для выбранной нами регуляризации $\mathcal{D}_{(-)}$ -функций (см. § 3) справедливо следующее утверждение.

Пусть $K_1^\delta(x_1, \dots, x_n)$ и $K_2^\delta(y_1, \dots, y_m)$ являются трансляционно-инвариантными функциями, и в слабом несобственном смысле

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} K_1^\delta(x_1, \dots, x_n) = K_1(x_1, \dots, x_n),$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} K_2^\delta(y_1, \dots, y_m) = K_2(y_1, \dots, y_m).$$

где $K_1(x_1, \dots, x_n)$ и $K_2(y_1, \dots, y_m)$ — обобщенные функции, заданные на некотором пространстве \mathfrak{A} основных функций. Пусть, кроме того, аргументы (x_1, \dots, x_n) и (y_1, \dots, y_m) независимы. Тогда предел

$$\lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \lim_{\delta_3 \rightarrow 0} K_1^{\delta_1}(x_1, \dots, x_n) \prod_{s,t} \mathcal{D}_{(-)}^{\delta_2}(x_s - y_t) K_2^{\delta_3}(y_1, \dots, y_m) =$$

$$= K_1(x_1, \dots, x_n) \prod_{s,t} \mathcal{D}_{(-)}(x_s - y_t) K_2(y_1, \dots, y_m)$$

существует как обобщенная функция на \mathfrak{A} и не зависит от способа перехода к пределу $\delta_j \rightarrow 0$ ($j = 1, 2, 3$).

Доказательство фактически содержится в книге Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова (1973) и основано на том простом обстоятельстве, что из ограниченности суммы положительных величин вытекает ограниченность каждого отдельного слагаемого.

Действительно, рассмотрим функционал

$$B(\delta_1, \delta_2, \delta_3) =$$

$$= \int dx_1 \dots \int dx_n \int dy_1 \dots \int dy_m f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \times$$

$$\times K_1^\delta(x_1, \dots, x_n) \prod_{s,t} D_{(-)}^{\delta_2}(x_s - y_t) K_2^{\delta_3}(y_1, \dots, y_m),$$

где $f \in \mathfrak{A}$. Перейдем к импульсному пространству. Из трансляционной инвариантности функций $K_1^\delta(x_1, \dots, x_n)$ и $K_2^\delta(y_1, \dots, y_m)$ следует

$$\tilde{K}_1^\delta(p_1, \dots, p_n) = \int dx_1 \dots \int dx_n e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} K_1^\delta(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= (2\pi)^4 \delta(p_1 + \dots + p_n) \tilde{\mathcal{K}}_1^\delta(p_1, \dots, p_n),$$

где

$$\tilde{\mathcal{K}}_1^\delta(p_1, \dots, p_n) =$$

$$= n^4 \int dx_1 \dots \int dx_n e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \delta(x_1 + \dots + x_n) K_1^\delta(x_1, \dots, x_n).$$

Для функции $B(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ получим после несложных преобразований:

$$B(\delta_1, \delta_2, \delta_3) =$$

$$= \int dp_1 \dots \int dp_n \int dk_1 \dots \int dk_m \tilde{f}(p_1, \dots, p_n, k_1, \dots, k_m) \times$$

$$\times \delta\left(\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m k_i\right) Q^{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(p_1, \dots, p_n, k_1, \dots, k_m).$$

Здесь

$$Q^{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(p_1, \dots, p_n, k_1, \dots, k_m) =$$

$$= \left\{ \prod_{s,t} \int dq_{st} \right\} \delta\left(\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{s,t} q_{st}\right) \prod_{st} \tilde{D}_{(-)}^{\delta_2}(q_{st}) \times$$

$$\times \tilde{\mathcal{K}}_1^{\delta_1}\left(\dots, p_j - \sum_t q_{jt}, \dots\right) \tilde{\mathcal{K}}_2^{\delta_3}\left(\dots, k_i + \sum_s q_{si}, \dots\right). \quad (6.1)$$

Так как $\tilde{D}_{(-)}^\delta(q) \sim \theta(q_0) \theta(q^2 - m^2)$, интегрирование в (6.1) проводится по конечной области. Следовательно, предел при $\delta_j \rightarrow 0$ ($j = 1, 2, 3$) существует независимо по каждому параметру δ_j , поскольку каждая из функций $\tilde{\mathcal{K}}_1^{\delta_1}$, $\tilde{D}_{(-)}^{\delta_2}$ и $\tilde{\mathcal{K}}_2^{\delta_3}$ сходится к конечному пределу.

Таким образом, функция $B(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ непрерывна в точке $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = +0$ и

$$\lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \lim_{\delta_3 \rightarrow 0} B(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = \lim_{\delta \rightarrow 0} B(\delta, \delta, \delta) = B(+0, +0, +0).$$

Поскольку коэффициентные функции регуляризованной S -матрицы удовлетворяют сформулированным условиям, полученный результат справедлив для нашей S -матрицы. Именно, оператор

$$J(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = S^{\delta_1}[g] \otimes^{\delta_2} S^{\delta_3+}[g] \quad (6.2)$$

непрерывен в точке $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = +0$. Поэтому предел $\delta_j \rightarrow 0$ для оператора (6.2) не зависит от порядка переходов к точке $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ и, в частности,

$$\lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \lim_{\delta_3 \rightarrow 0} S^{\delta_1} [g] \otimes S^{\delta_2} S^{\delta_3} [g] = \lim_{\delta \rightarrow 0} S^{\delta} [g] \otimes S^{\delta} [g].$$

§ 7. Унитарность перенормированной S-матрицы

Таким образом, все условия на регуляризационную процедуру, сформулированные в § 2, выполнены, и, следовательно, S-матрица унитарна в каждом порядке теории возмущений.

Однако проведенное доказательство унитарности S-матрицы справедливо только в случае, когда функция включения взаимодействия $g(x)$ отлична от постоянной и достаточно быстро убывает при $|x| \rightarrow \infty$. Физическая S-матрица описывает взаимодействие, включенное всюду, т. е. при $g(x) = g = \text{const}$.

В матрице рассеяния $S[g]$, построенной нами, еще нельзя положить $g(x) = g = \text{const}$, поскольку при таком переходе возникают расходимости при больших x . Эти расходимости связаны, во-первых, с амплитудой перехода вакуум — вакуум, которая имеет вид $\langle 0 | S[g] | 0 \rangle = \exp \{i\Phi[g]\}$, причем при $g(x) \rightarrow g$ $\Phi[g] \rightarrow \int d^4x \cdot \delta E = \infty$, где δE — поправка к энергии вакуума за счет так называемых вакуумных петель, и, во-вторых, с расходимостями, связанными с перенормировкой массы δm^2 и волновой функции скалярной частицы. В ряду теории возмущений эти расходимости возникают при переходе на массовую поверхность в диаграммах Фейнмана, имеющих собственно энергетические добавки во внешние линии скалярных частиц, как показано на рис. 22.

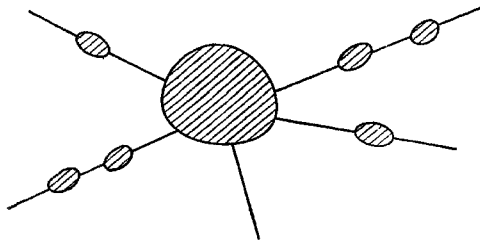


Рис. 22. Диаграмма Фейнмана с возможными собственно энергетическими добавками во внешние линии

Для перехода к $g(x) = g = \text{const}$ поступим следующим образом. Будем считать, что функция включения взаимодействия $g(x)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} (1) \quad & g(x) \in Z_\alpha \quad \left(\alpha < \frac{2\rho}{2\rho-1} \right); \\ (2) \quad & 0 \leq g(x) \leq g; \\ (3) \quad & \partial^s g(x) |_{x=0} = 0 \quad (s = 1, 2, 3, 4); \\ (4) \quad & g(0) = g. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Введем, как это делалось в § 4 гл. I, большой параметр L и выберем функцию включения взаимодействия в виде $g\left(\frac{x}{L}\right)$, так что S-матрица регуляризована двумя параметрами δ и L : $S^{\delta, L}[g]$. Наша задача состоит в том, чтобы доказать существование последовательности пределов

$$S = \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} S^{\delta, L}[g] = \lim_{L \rightarrow \infty} S^L[g] \quad (7.2)$$

и показать, что предельная S-матрица унитарна, т. е. $SS^+ = 1$.

Путь нашего доказательства следующий. Мы введем в лагранжиан взаимодействия ряд контрчленов, зависящих от δ и L , и покажем, что матрица $S^L = \lim_{\delta \rightarrow 0} S^{\delta, L}$ унитарна с контрчленами.

Контрчлены подбираются таким образом, что в разложении теории возмущений они «убирают» ряд связанных графов, описывающих в пределе $L \rightarrow \infty$ переход вакуум — вакуум и диаграммы с добавками собственной энергии во внешние линии, как показано на рис. 21. Таким образом, в пределе $L \rightarrow \infty$ в разложении теории возмущений будут отсутствовать все опасные диаграммы, а для остальных диаграмм предел при $L \rightarrow \infty$ существует. Поскольку «условие унитарности» для каждого связанного графа (4.7) выполняется независимо от остальных связанных графов, перенормированная S-матрица будет унитарна в каждом порядке теории возмущений.

Для проведения перенормировок, о которых говорилось выше, в лагранжиан взаимодействия необходимо добавить несколько контрчленов, после чего он принимает вид (см. (I. 6.2))

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1,r}(x, g(x)) = & -g(x) : U(\varphi(x)) : + \frac{1}{2} \delta m^2(g(x)) : \varphi^2(x) : - \\ & - \frac{1}{2} [1 - Z(g(x))] : \varphi(x) (\square - m^2) \varphi(x) : - E(g(x)). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Контрчлены ищутся в виде рядов по степеням функции включения взаимодействия:

$$\delta m^2(g(x)) = \sum_{n=2}^{\infty} \delta m_{(n)}^2 [g(x)]^n, \quad (7.4)$$

$$1 - Z(g(x)) = \sum_{n=2}^{\infty} Z_{(n)} [g(x)]^n, \quad (7.5)$$

$$E(g(x)) = \sum_{n=2}^{\infty} E_{(n)} [g(x)]^n. \quad (7.6)$$

Величины $\delta m_{(n)}^2$ и $Z_{(n)}$ выбираются следующим образом. В n -м порядке теории возмущений вычисляется массовый оператор скалярной частицы, т. е. подсчитывается вклад всех сильно связанных диаграмм собственной энергии n -го порядка теории

возмущений, имеющих вид, представленный на рис. 23. Эти вклады подсчитываются при помощи перенормированной S -матрицы. Массовый оператор в n -м порядке теории возмущений

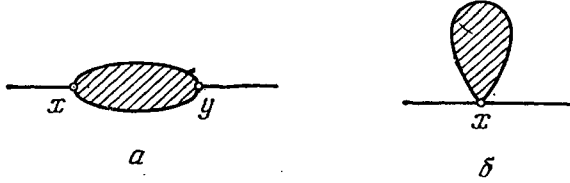


Рис. 23. Диаграммы собственной энергии скалярного поля.

обозначим через $\Sigma_{(n)}^{\delta, L}(\rho^2)$. Согласно результатам гл. V, существует предел

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \Sigma_{(n)}^{\delta, L}(\rho^2) = \Sigma_{(n)}(\rho^2). \quad (7.7)$$

Выберем

$$g^n \delta m_{(n)}^2 = \Sigma_{(n)}(m^2), \quad g^n Z_{(n)} = \left. \frac{d}{d\rho^2} \Sigma_{(n)}(\rho^2) \right|_{\rho^2=m^2} = \Sigma'_{(n)}(m^2).$$

Такой выбор перенормированных констант приводит к тому, что оператор собственной энергии, подсчитанный с помощью перенормированной S -матрицы

$$S_r^{\delta, L} = T^{\delta} \exp \left\{ i \int dx \mathcal{L}_{l,r} \left(x, g \left(\frac{x}{L} \right) \right) \right\},$$

в каждом порядке теории возмущений после перехода к пределу $\delta \rightarrow 0, L \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\Sigma_r_{(n)}(\rho^2) = \Sigma_{(n)}(\rho^2) - g^n \delta m_{(n)}^2 - g^n Z_{(n)}(\rho^2 - m^2) \quad (7.8)$$

и удовлетворяет условиям

$$\Sigma_r_{(n)}(m^2) = \Sigma'_{r(n)}(m^2) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\left. \frac{\Sigma_r_{(n)}(\rho^2)}{m^2 - \rho^2 - i\varepsilon} \right|_{\rho^2=m^2} = 0. \quad (7.9)$$

Это означает, что в ряду теории возмущений отсутствуют связанные диаграммы с собственно энергетическими вкладами во внешние линии.

Контрчлен с $E(g(x))$ призван перенормировать члены, связанные с переходом вакуум — вакуум. Величины $E_{(n)}$ выбираются

следующим образом. Имеем

$$\langle 0 | S^{\delta, L} [g] | 0 \rangle = \exp \{ i \Phi^{\delta, L} [g] \}, \quad (7.10)$$

где

$$\Phi^{\delta, L} [g] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^{n-1}}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n g \left(\frac{x_1}{L} \right) \dots g \left(\frac{x_n}{L} \right) \int d\sigma(\xi_1) \dots \dots \int d\sigma(\xi_n) \sum_{I_n} F_{nI_n}^{\delta}(1, \dots, n).$$

Предел в (7.10) при $\delta \rightarrow 0$ существует. Выберем

$$E_{(n)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} (-i)^{n-1} n^4 \int dx_1 \dots \int dx_n \delta(x_1 + \dots + x_n) \times \times \int d\sigma(\xi_1) \dots \int d\sigma(\xi_n) \sum_{I_n} F_{nI_n}^{\delta}(x_1 \xi_1, \dots, x_n \xi_n).$$

Обозначим

$$G_{(n)}^{\delta}(p_1, \dots, p_n) = (-i)^{n-1} n^4 \int dx_1 \dots \int dx_n \delta(x_1 + \dots + x_n) \times \times e^{-i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \int d\sigma(\xi_1) \dots \int d\sigma(\xi_n) \sum_{I_n} F_{nI_n}^{\delta}(x_1 \xi_1, \dots, x_n \xi_n),$$

тогда

$$E_{(n)}^{\delta} = G_{(n)}^{\delta}(0, \dots, 0).$$

В ряду теории возмущений для перенормированной S -матрицы диаграммы, описывающие вакуумные петли, будут группироваться следующим образом:

$$A_n = (-i)^{n-1} \int dx_1 \dots \int dx_n \prod_{j=1}^n g \left(\frac{x_j}{L} \right) \int d\sigma(\xi_1) \dots \dots \int d\sigma(\xi_n) \sum_{I_n} F_{nI_n}^{\delta}(1, \dots, n) - \int dx \left[g \left(\frac{x}{L} \right) \right]^n G(0, \dots, 0) = = \int dp_1 \dots \int dp_n \prod_{j=1}^n [L^4 \tilde{g}(L p_j)] \delta(p_1 + \dots + p_n) \times \times \{ G(p_1, \dots, p_n) - G(0, \dots, 0) \}.$$

Производя замену $p_j = q_j L^{-1}$ и полагая $\lambda = L^{-1}$, получим

$$A_n = \int dq_1 \dots \int dq_n \prod_{j=1}^n \tilde{g}(q_j) \delta(q_1 + \dots + q_n) \times \times \frac{1}{\lambda^4} \{ G(\lambda q_1, \dots, \lambda q_n) - G(0, \dots, 0) \}. \quad (7.11)$$

Функции $\tilde{g}(q)$ хорошо убывают при $|q| \rightarrow \infty$, так что интеграл (7.11) хорошо сходится при $\lambda > 0$. При $\lambda \rightarrow 0$ имеем

$$\frac{1}{\lambda^4} \{G(\lambda q_1, \dots, \lambda q_n) - G(0, \dots, 0)\} = \\ = \left\{ \frac{1}{\lambda^3} B + \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{3!} B^3 + \frac{1}{4!} B^4 \right\} G(s_1, \dots, s_n) \Big|_{s_j=0} + \\ + O(\lambda), \quad (7.12)$$

где

$$B = \sum_{j=1}^n q_{j\mu} \frac{\partial}{\partial s_{j\mu}}.$$

Подставляя это разложение в (7.11), получим, что в силу условия (3) (см. (7.1))

$$A_n = O(\lambda) = O\left(\frac{1}{L}\right),$$

и в пределе $L \rightarrow \infty$ все вакуумные петли исчезают из ряда теории возмущений.

Таким образом, перенормировочные контрчлены удаляют в пределе $L \rightarrow \infty$ из ряда теории возмущений диаграммы перехода вакуум — вакуум — вакуумные петли и диаграммы с собственно энергетическими вкладами во внешние линии скалярных частиц.

Остальные диаграммы в ряду теории возмущений остаются без изменений.

Введение в лагранжиан взаимодействия контрчленов, согласно (7.3), не изменяет по существу проведенное выше доказательство унитарности матрицы рассеяния. Еще раз напомним, что опасным, с точки зрения методов доказательства унитарности перенормированной S -матрицы, является появление в (7.3) контрчлена Z перенормировки волновой функции, поскольку последний содержит слагаемое с производными от квантованного поля $\varphi(x)$. Появление такого типа членов может привести к тому, что способы хронологического упорядочения по Вику и по Дайсону не будут совпадать. Однако регуляризованные $D_c^\delta(x)$ - и $D_{(\pm)}^\delta(x)$ -функции, так же как и суперпропагаторы $w_c^\delta(\xi, x)$ и $w_{(\pm)}^\delta(\xi, x)$, удовлетворяют условиям (3.9) и (3.16). Это означает, что способы хронологического упорядочения по Дайсону и Вику совпадают, и, следовательно, доказательства унитарности, проведенные в §§ 4 и 5, справедливы и для эрмитовых лагранжианов с производными.

Таким образом, проведенное выше доказательство остается в силе для перенормированной $S_r^{\delta, L}$ -матрицы, т. е.

$$S_r^{\delta, L} [g] \otimes S_r^{\delta, L+} [g] \equiv 1.$$

В силу непрерывности по параметру δ в точке $\delta = 0$ имеем

$$S_r^L \otimes S_r^{L+} = 1.$$

Как уже сказано, контрчлены в пределе $L \rightarrow \infty$ устраняют все графы Фейнмана, описывающие вакуумные петли и собственно энергетические вклады во внешние линии скалярных частиц. Для остальных графов Фейнмана предел $L \rightarrow \infty$ существует. Поэтому существует непрерывность при переходе к пределу $L_1 \rightarrow \infty$ и $L_2 \rightarrow \infty$ в выражении

$$\lim_{L_1 \rightarrow \infty} \lim_{L_2 \rightarrow \infty} S_r^{L_1} \otimes S_r^{L_2+} = \lim_{L \rightarrow \infty} S_r^L \otimes S_r^{L+}$$

в силу нашего построения перенормированной S -матрицы.

Таким образом, введенная нами регуляризация удовлетворяет всем достаточным условиям, обеспечивающим унитарность S -матрицы в каждом порядке теории возмущений, и, следовательно, $S_r S_r^+ = 1$.

§ 8. Условие причинности в теории возмущений

Найдем условия, которым должна удовлетворять амплитуда, соответствующая произвольному связному графу Фейнмана, чтобы причинность была выполнена в n -м порядке теории возмущений. Для этого прежде всего рассмотрим графическую структуру оператора

$$J(y) = -i \frac{\delta}{\delta \varphi(y)} S[\varphi] \otimes S^+[\varphi]. \quad (8.1)$$

Используя представление (V.3.4) для S -матрицы, получим

$$J(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \dots \int : d\mu(y) d\mu_1 \dots d\mu_n : A_{n+1}(x; 1, 2, \dots, n). \quad (8.2)$$

Здесь

$$d\mu(y) = d\sigma(\xi) i \xi e^{i \xi \varphi(y)}, \\ A_{n+1}(x; 1, 2, \dots, n) = \sum_{n_1+n_2=n} (-1)^{n_2} P(1, \dots, n_1 | n_1+1, \dots, n) \times \\ \times A_{n+1, n_1}(\xi y, \xi_1 x_1, \xi_2 x_2, \dots, \xi_{n_1} x_{n_1} | \xi_{n_1+1} x_{n_1+1}, \dots, \xi_n x_n). \quad (8.3)$$

Функция A_{n+1, n_1} задается формулой (4.3). Проводимые сейчас преобразования отличаются от выкладок, сделанных нами при изучении условия унитарности, тем, что имеется выделенная точка (ξ, y) , которая не может находиться в правой части (8.3). Представим функцию A_{n+1, n_1} в виде совокупности графов согласно формуле (4.4); тогда для A_{n+1} в (8.3) будет справедлива формула (4.6). Подставляя представление (4.6) в (8.3) и воспользовавшись условием унитарности для каждого связного графа (4.7), получим, что вклад в оператор $J(y)$ в n -м порядке

теории возмущений дают только связанные n -вершинные графы

$$J(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} J_n(y), \quad (8.4)$$

где

$$J_n(y) = \sum_{I_n} G_{nI_n}(y), \quad (8.5)$$

$$G_{nI_n}(y) = : \int d\mu(y) \int d\mu_1 \dots \int d\mu_n : \times \\ \times \sum_{\{p, I_p\}} (-1)^p P(1, \dots, p | p+1, \dots, n-1) \times \\ \times F_{nI_n, pI_p}(y; 1, \dots, p | p+1, \dots, n-1). \quad (8.6)$$

Как и ранее, мы постоянно используем тот факт, что для пропагаторов D или суперпропагаторов ω , с помощью которых строятся функции F_{nI_n, pI_p} , справедливы соотношения (3.9) и (3.16). Покажем теперь, что всегда

$$\sum_{\{p, I_p\}} (-1)^p P(1, \dots, p | p+1, \dots, n-1) \times \\ \times F_{nI_n, pI_p}(y; 1, \dots, p | p+1, \dots, n-1) = 0, \quad (8.7)$$

если $x_{j_0} < y_0$ для любого j из совокупности $(1, \dots, n-1)$. Действительно, пусть ν аргументов $x_{j_0}, \dots, x_{j_\nu}$ ($\nu \leq n-1$) меньше y_0 , и пусть среди этих ν аргументов x_{j_0} наименьший:

$$x_{j_0} \leq x_{j_\lambda} \leq y_0 \quad (\lambda = 2, \dots, \nu).$$

Тогда справедливы все рассуждения, которые были сделаны при выводе условия унитарности в теории возмущений (см. § 4) и выражение (8.7) равно нулю.

Таким образом, можно записать

$$G_{nI_n}(y) = : \int d\mu(y) \int_{y_0} d\mu_1 \dots \int_{y_0} d\mu_n : \times \\ \times \sum_{\{p, I_p\}} (-1)^p P(1, \dots, p | p+1, \dots, n-1) \times \\ \times F_{nI_n, pI_p}(y; 1, \dots, p | p+1, \dots, n-1), \quad (8.8)$$

где

$$\int_{y_0} d\mu_j = \int d\sigma(\xi_j) \int_{y_0} dx \int dx_{j_0} e^{i\xi\varphi(x_j)}.$$

Поскольку полученное выражение не зависит от поля $\varphi(x)$ при $x_0 < y_0$, то

$$R_{nI_n}(x, y) = \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} G_{nI_n}(y) = 0 \quad (8.9)$$

для $x_0 < y_0$. Дифференцируя (8.8) по полю $\varphi(x)$ и используя (8.9), получим

$$R_{nI_n}(x, y) = : \int d\mu(x) \int d\mu(y) \int d\mu_1 \dots \int d\mu_n : \times \\ \times \sum_{\{p, I_p\}} (-1)^p P(1, \dots, p | p+1, \dots, n-2) \times \\ \times [F_{nI_n, pI_p}(x; y, 1, \dots, p | p+1, \dots, n-2) - \\ - F_{nI_n, p+1, I_{p+1}}(y, 1, \dots, p | x, p+1, \dots, n-2)]. \quad (8.10)$$

Это соотношение является условием причинности для каждого связанного графа в теории возмущений.

С точки зрения функциональных методов условие причинности для S -матрицы, как было показано в § 5, является прямым следствием группового свойства

$$S_{t_2 t_1}[\varphi] \otimes S_{t_1 t_0}[\varphi] = S_{t_2 t_0}[\varphi]$$

и условия унитарности

$$S_{t_2 t_1}[\varphi] \otimes S_{t_2 t_1}^+[\varphi] = 1.$$

Все полученные соотношения справедливы лишь для регуляризованных пропагаторов. В пределе снятия регуляризации выражения вида (8.10) в x -пространстве становятся обобщенными функциями, для исследования пространственно-временных свойств которых необходимо применять методы, развитые в гл. II.

§ 9. Причинность запаздывающих функций

В этом параграфе мы продемонстрируем выполнение условия причинности на примере обычных запаздывающих функций, когда нелокальные формфакторы имеют порядок роста $\rho = 1/2$. В этом случае для изучения пространственно-временных свойств обобщенных функций необходимо использовать проектирующие последовательности функций (см. гл. I).

Прежде всего рассмотрим нелокальную запаздывающую функцию $D_{\text{ret}}(x)$, фурье-образ которой имеет вид

$$\tilde{D}_{\text{ret}}(p) = \frac{V(-p^2 l^2)}{m^2 - p^2 - i\epsilon p_0}. \quad (9.1)$$

Функция $V(-p^2 l^2)$ удовлетворяет всем условиям (E_1) (стр. 134) при $\rho = 1/2$. Для этой функции справедливо представление

$$V(-p^2 l^2) = \int_{\rho^2 \leq l^2} d\rho a(\rho^2) e^{\rho\omega_4 + i\rho p}. \quad (9.2)$$

Интегрирование проводится по евклидову шару $\rho^2 = \rho_4^2 + \rho^2 \leq l^2$.

Функция $D_{\text{ret}}(x)$ является обобщенной функцией, заданной на пространстве Z , так что существует функционал

$$(D_{\text{ret}}, f) = \int dp \tilde{D}_{\text{ret}}(p) \tilde{f}(p) < \infty$$

для любой $f \in Z$. Для этого функционала в x -пространстве справедливо представление

$$(D_{\text{ret}}, f) = \int_{\rho^2 \leq t^2} d\rho a(\rho^2) \int dx \Delta_{\text{ret}}(m, x) f(x_0 + i\rho_4, \mathbf{x} + \boldsymbol{\rho}), \quad (9.3)$$

где

$$\Delta_{\text{ret}}(m, x) = \frac{1}{2\pi} \theta(x_0) \left\{ \delta(x^2) - \theta(x^2) \frac{m}{2\sqrt{x^2}} J_1(m\sqrt{x^2}) \right\}.$$

Условие причинности будет выполнено, если нам удастся показать, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (D_{\text{ret}}, g_{\Gamma, \lambda}) = 0 \quad (9.4)$$

для любой проектирующей последовательности $g_{\Gamma, \lambda} \in \Pi(G)$ при $G \subset V^-$. Доказательство состоит в том, что определяющее множество функционала (9.3) лежит вне конуса V^- , где любая

проектирующая последовательность функций из $\Pi(G)$ сходится к нулю (подробности см. в §§ 5 и 6 гл. II).

Итак, рассмотрим

$$(D_{\text{ret}}, g_{\Gamma, \lambda}) = \int d\rho a(\rho) f_{\Gamma^-, \lambda}(i\rho_4, \boldsymbol{\rho}), \quad (9.5)$$

где

$$f_{\Gamma^-, \lambda}(z) = \int dx' \Delta_{\text{ret}}(m, x') g_{\Gamma, \lambda}(z + x'). \quad (9.6)$$

Функция $f_{\Gamma^-, \lambda}(z)$ для любых $\Gamma \subset G$ стремится к нулю вне области

$$G = \{z: x = \xi + \eta, \xi \in G, \eta \in V^-, y \in \mathbb{R}^4\}.$$

Рис. 24 Положение областей V^+ G и G^- при проверке условия причинности для запаздывающей функции D_{ret} .

На рис. 24 показано положение областей V^+ , V^- , G , G^- , Γ и Γ^- . Тогда для функционала (9.5) справедливы все выводы § 6 гл. II и условие причинности (9.4) выполнено. В пространственноподобной области, когда область G лежит вне конусов V^+ и V^- , функционал (9.5) будет достаточно быстро убывать при увеличении

расстояния между G и конусами V^+ и V^- согласно утверждениям §§ 7 и 8 гл. II.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть запаздывающая функция $D_{\text{ret}}(x)$ в импульсном пространстве допускает представление Йоста — Лемана — Дайсона (см. Р. Йост и Х. Леман (1957) и Ф. Дайсон (1958)):

$$\tilde{D}_{\text{ret}}(p) = \int d^4u \left\{ \int_{M^2} \frac{dx^2 W_1((u-p)^2) \Phi(u, x^2)}{W_1(x^2)(x^2 - (p-u)^2 - i\varepsilon(p-u)_0)} + W_2(u; (u-p)^2) \right\}. \quad (9.7)$$

Предполагается, что все интегралы в данном представлении хорошо сходятся. Функция $W_1(z)$ удовлетворяет условиям (E_1) при $\rho = 1/2$ и не имеет нулей при $\text{Re } z > 0$. Функция $W_2(u, z)$ удовлетворяет условиям (E_1) при $\rho = 1/2$ по второму аргументу z равномерно по отношению к первой переменной u . Интегрирование по u проводится по ограниченной области. Функция (9.7) также является обобщенной функцией, заданной на пространстве Z основных функций, т. е. существует функционал

$$(D_{\text{ret}}, f) = \int dp \tilde{D}_{\text{ret}}(p) \tilde{f}(p).$$

Простыми преобразованиями для этого функционала легко получить представление

$$(D_{\text{ret}}, f) = \int d^4u \int_{\rho^2 \leq t^2} d\rho \int dx f(x_0 + i\rho_4, \mathbf{x} + \boldsymbol{\rho}) \times \times e^{-i[u_0(x_0 + i\rho_4) - u(x + \boldsymbol{\rho})]} \left\{ a_1(\rho^2) \int_{M^2} \frac{dx^2 \Phi(u, x^2)}{W_1(x^2)} \Delta_{\text{ret}}(x, x) + \delta^4(x) a_2(u, \rho^2) \right\}. \quad (9.8)$$

Структура этого выражения совпадает с (9.5). Поскольку предполагается, что интегралы в (9.8) достаточно хорошо сходятся, то все выкладки, проведенные выше, справедливы и в этом случае. Итак, получим

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (D_{\text{ret}}, g_{\Gamma, \lambda}) = 0$$

$\forall g_{\Gamma, \lambda} \in \Pi(G)$, если $G \subset V^-$.

Таким образом, условие причинности выполняется, если соответствующие запаздывающие функции могут быть представлены в форме (9.7). Задача теперь состоит в том, чтобы показать, что в нелокальной теории матричные элементы S -матрицы, ответственные за выполнение причинности, допускают представление (9.7).

Заметим, что доказательство было проведено для формфакторов порядка роста $\rho = 1/2$. В случае $\rho > 1/2$, когда нельзя уже использовать проектирующие последовательности функций, необходимо воспользоваться методами, изложенными в § 7 гл. II, для проверки условия причинности, как это было сформулировано в § 2 гл. III. Проведение соответствующих выкладок не представляет принципиальных трудностей, и мы предоставляем их читателю.

§ 10. Представление запаздывающего произведения в n -м порядке теории возмущений

Как было показано в § 8 этой главы, запаздывающая операторозначная обобщенная функция, возникающая при исследовании условия причинности,

$$R(x, y) = \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \left(\frac{\delta S}{\delta\varphi(y)} S^+ \right)$$

в ряду теории возмущений может быть представлена в виде

$$R(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} g^n \sum_{j_n} R_{nj_n}(x, y), \quad (10.1)$$

где сумма по j_n означает суммирование по всем связным диаграммам в n -м порядке теории возмущений.

Покажем, что для любого матричного элемента $\langle \alpha | R_{nj_n}(x, 0) | \beta \rangle$ справедливо представление (9.7), т. е.

$$\langle \alpha | R_{nj_n}(x, 0) | \beta \rangle = \int dp e^{-ipx} R_{nj_n}(p). \quad (10.2)$$

Здесь

$$\tilde{R}_{nj_n}(p) = \int d^4u \left\{ \int_{M^2} \frac{dx^2 W_1((u-p)^2) \Phi(u, x^2)}{W_1(x^2) (x^2 - (p-u)^2 - i\epsilon(p-u)_0)} + W_2(u, (u-p)^2) \right\}, \quad (10.3)$$

где функции $W_1(z)$ и $W_2(u, z)$ удовлетворяют условиям (E_1) и, кроме того,

$$\begin{aligned} |W(z)| &\leq C \exp\{L_n \sqrt{z}\}, \quad |z| \rightarrow \infty, \\ W(z) &= O\left(\frac{1}{|z|^{1+a}}\right), \quad \operatorname{Re} z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Здесь L_n — некоторое число, зависящее от l и порядка теории возмущений n .

Прежде всего отметим, что функция $\tilde{R}_{nj_n}(p)$ обладает следующими свойствами, совокупность которых обозначим (O) :

(O. 1) Функция $\tilde{R}_{nj_n}(p)$ строится как предел регуляризованного выражения $\tilde{R}_{nj_n}^\delta(p)$, т. е.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{R}_{nj_n}^\delta(p) = \tilde{R}_{nj_n}(p).$$

Предел при $\delta \rightarrow 0$ существует (как показано в § 7 гл. V).

(O. 2) Аналитические свойства предельных амплитуд $\tilde{R}_{nj_n}(p)$ в конечной плоскости импульсных переменных те же самые, что и в локальной теории, кроме бесконечно удаленной точки (как показано в § 9 гл. V).

(O. 3) Все матричные элементы убывают в пространственно-подобных направлениях импульсных переменных, так что при $p^2 \rightarrow -\infty$

$$\tilde{R}_{nj_n}(p) = O\left(\frac{1}{|p^2|^{1+a}}\right).$$

(O. 4) Матричные элементы в каждом порядке теории возмущений растут во времениподобном направлении, так что при $p^2 \rightarrow +\infty$

$$\tilde{R}_{nj_n}(p) = O(\exp\{(n-1)(l+\epsilon)\sqrt{p}\})$$

(свойства (O. 3) и (O. 4) доказаны в § 10 гл. V).

(O. 5) До снятия регуляризации S^δ -матрица соответствует локальной теории, так что при $\delta > 0$

$$R_{nj_n}^\delta(x, 0) = 0 \quad (\delta > 0)$$

при $x \in V^+ = \{x: x_0 > 0, x^2 > 0\}$, т. е.

$$R_{nj_n}^\delta(x, 0) = \theta(x_0) \theta(x^2) r^\delta(x),$$

где $r^\delta(x)$ — локально интегрируемая функция (это показано в § 8 этой главы).

(O. 6) До снятия регуляризации

$$\tilde{R}_{nj_n}^\delta(p) = O\left(\frac{1}{|p^2|^{1+a}}\right)$$

при $|p^2| \rightarrow \infty$.

Этих свойств запаздывающей функции $\tilde{R}_{nj_n}(p)$ достаточно, чтобы доказать справедливость представления (10.3). Действительно, используя свойства (O. 5) и (O. 6) и следуя работам Дайсона, Лемана, Йоста, упомянутым выше, можно получить для $\tilde{R}_{nj_n}^\delta(p)$ представление

$$\tilde{R}_{nj_n}^\delta(p) = \int d^4u \int_0^\infty \frac{dx^2 \Phi^\delta(u, x^2)}{x^2 - (p-u)^2 - i\epsilon(p-u)_0}. \quad (10.5)$$

Здесь интегрирование по u проводится по конечной области, поскольку функция $\Phi^\delta(u, \kappa^2)$ отлична от нуля в области

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{Q+K}{2} - u\right) \in V^+, \\ \left(\frac{Q+K}{2} + u\right) \in V^+, \\ \kappa^2 \geq \max \left\{ 0, m - \sqrt{\left(\frac{Q+K}{2} - u\right)^2}, \right. \\ \left. m - \sqrt{\left(\frac{Q+K}{2} + u\right)^2} \right\}, \end{array} \right. \quad (10.6)$$

где Q и K являются импульсами состояний $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$. Представление (10.5) явным образом выделяет аналитическую структуру рассматриваемой функции по импульсу p .

Из свойства (O. 1) и того факта, что интегрирование по вектору u проводится по конечной области, следует, что существует предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Phi^\delta(u, \kappa^2) = \Phi(u, \kappa^2), \quad (10.7)$$

где функция $\Phi(u, \kappa^2)$ отлична от нуля в области S (10.6) и при $\kappa \rightarrow +\infty$

$$\Phi^\delta(u, \kappa^2) = O\left(\frac{1}{(\kappa^2)^\alpha}\right) \quad (\delta > 0),$$

$$\Phi(u, \kappa^2) = O(\exp\{(n-1)(l+\varepsilon)\kappa\}).$$

Рассмотрим теперь функцию

$$I^\delta(u, z) = \int_0^\infty \frac{d\kappa^2 \Phi^\delta(u, \kappa^2)}{\kappa^2 - z}. \quad (10.8)$$

Эта функция

(1) отлична от нуля при $u \in S'$, где область

$$S' = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{Q+K}{2} - u\right) \in V^+, \\ \left(\frac{Q-K}{2} + u\right) \in V^+; \end{array} \right.$$

(2) аналитична по z при $u \in S'$ всюду, за исключением разреза вдоль луча $[0, \infty)$, причем скачок функции $I^\delta(u, z)$ на этом разрезе равен

$$I^\delta(u, \kappa^2 + i\varepsilon) - I^\delta(u, \kappa^2 - i\varepsilon) = 2\pi i \Phi^\delta(u, \kappa^2)$$

при $\kappa^2 > 0$;

(3) имеет конечный предел при $\delta \rightarrow 0$:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} I^\delta(u, z) = I(u, z),$$

причем

$$I(u, z) = O\left(\exp\left\{(n-1)(l+\varepsilon)\sqrt{|z|} \cos \frac{\varphi}{2}\right\}\right)$$

при $|z| \rightarrow \infty$, где $\varphi = \arg z$.

Для того чтобы воспользоваться интегральной формулой Коши для функции $I^\delta(u, z)$, введем в рассмотрение некоторую целую функцию $W(z)$, обладающую следующими свойствами:

$$(1) \quad W(z) = O\left(\exp\left\{L_n \sqrt{|z|} \cos \frac{\varphi}{2}\right\}\right)$$

при $|z| \rightarrow \infty$, $\varphi = \arg z$, $L_n > (n-1)(l+\varepsilon)$;

$$(2) \quad [W(z)]^* = W(z^*);$$

(3) все нули функции $W(z)$ вещественны и отрицательны, т. е.

$$W(z_j) = 0$$

при $z_j = -a_j^2 < 0$ ($j = 1, 2, \dots$).

Примером такой функции может быть функция $W(z) = \operatorname{ch} L_n \sqrt{z}$. Свойства (1) и (2) для нее выполнены, нули этой функции расположены в точках

$$z_j = -\left[\frac{\pi}{L_n} \left(j - \frac{1}{2}\right)\right]^2 \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Для функции $I^\delta(u, z) [\operatorname{ch} L_n \sqrt{z}]^{-1}$ справедливо представление

$$\frac{I^\delta(u, z)}{\operatorname{ch} L_n \sqrt{z}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{d\xi I^\delta(u, \xi)}{\operatorname{ch} L_n \sqrt{\xi} \cdot (\xi - z)}. \quad (10.9)$$

Контур интегрирования C_R показан на рис. 25.

В этом представлении можно перейти к пределу $\delta \rightarrow 0$:

$$I(u, z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} I^\delta(u, z) = \frac{\operatorname{ch} L_n \sqrt{z}}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{d\xi I(u, \xi)}{\operatorname{ch} L_n \sqrt{\xi} \cdot (\xi - z)}. \quad (10.10)$$

В силу перечисленных выше свойств функции $I(u, z)$ в этом представлении можно устремить радиус контура интегрирования $R \rightarrow \infty$. Интеграл по большому кругу стремится к нулю, так как на нем

$$\frac{I(u, \xi)}{\operatorname{ch} L_n \sqrt{\xi}} = O\left(\exp\left\{-(L_n - (n-1)(l+\varepsilon))\sqrt{|\xi|} \cos \frac{\varphi}{2}\right\}\right).$$

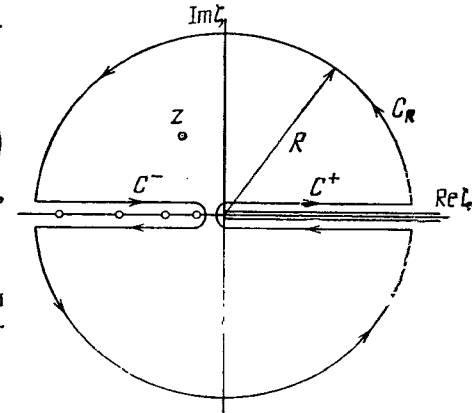


Рис. 25. Контур интегрирования C_R .

Скачок на разрезе вдоль положительной вещественной полуоси равен

$$I(u, \kappa^2 + i\varepsilon) - I(u, \kappa^2 - i\varepsilon) = 2\pi i \Phi(u, \kappa^2).$$

Интегрирование по контуру, охватывающему отрицательную вещественную полуось, сводится к сумме вычетов в нулях функции $\text{ch } L_n \sqrt{z}$.

Окончательно получим

$$I(u, z) = \text{ch } L_n \sqrt{z} \int_0^\infty \frac{d\kappa^2 \Phi(u, \kappa^2)}{\text{ch } L_n \kappa \cdot (\kappa^2 - z)} + W_2(u, z). \quad (10.11)$$

Здесь

$$W_2(u, z) = \frac{\text{ch } L_n \sqrt{z}}{L_n} \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j \sqrt{-a_j} I(u, a_j)}{z - a_j}, \quad (10.12)$$

где $a_j = -\left[\frac{\pi}{L_n} \left(j + \frac{1}{2}\right)\right]^2$. Функция $W_2(u, z)$ является целой порядка роста $1/2$. Действительно, ряд в (10.12) сходится равномерно для всех $z \neq a_j$, поскольку

$$I(u, a_j) = O\left(\frac{1}{|a_j|^{1+a}}\right)$$

при $a_j \rightarrow -\infty$ согласно свойству (O.3), и поэтому представляет собой мероморфную функцию с полюсами первого порядка, совпадающими с нулями функции $\text{ch } L_n \sqrt{z}$.

Таким образом, для функции $\tilde{R}_{nj_n}(p)$ получаем представление

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{nj_n}(p) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{R}_{nj_n}^\delta(p) = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int d^4u \left\{ \int_0^\infty \frac{d\kappa^2 \text{ch } L_n \sqrt{(u-p)^2} \Phi^\delta(u, \kappa^2)}{\text{ch } L_n \kappa \cdot (\kappa^2 - (p-u)^2 - i\varepsilon(p-u)_0)} + W_2^\delta(u, (u-p)^2) \right\} = \\ &= \int d^4u \left\{ \text{ch } L_n \sqrt{(u-p)^2} \int_0^\infty \frac{d\kappa^2 \Phi(u, \kappa^2)}{\text{ch } L_n \kappa (\kappa^2 - (p-u)^2 - i\varepsilon(p-u)_0)} + \right. \\ &\quad \left. + W_2(u, (u-p)^2) \right\}. \quad (10.13) \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Таким образом, условие причинности выполнено для любой связной диаграммы Фейнмана в ряду теории возмущений.

Итак, оказалось, что нелокальная S -матрица, построенная с помощью формфакторов, являющихся целыми функциями порядка роста $\rho = 1/2$, удовлетворяет условию причинности. Сей-

час еще трудно в полной мере оценить этот факт и понять, какие более глубокие причины лежат в основе этого результата. Возможно, что мы имеем некоторое обобщение квантовополевого уравнения Шредингера. В локальном случае имеем

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = g H_I(t) \Psi(t),$$

где $g H_I(t) = g \int dx : \varphi^N(x, t) :$. Такое уравнение ведет к микропричинной S -матрице, поскольку взаимодействие локально. Формально наше введение нелокальности можно представить так:

$$\varphi(x, t) \Rightarrow \int_{\rho^2 \leq t^2} d\rho a(\rho^2) \varphi(x + \rho, t + i\rho_4),$$

или, иначе,

$$H_I(t) \Rightarrow \int_{-l}^l d\tau H_I(t + i\tau).$$

Следует подчеркнуть, что эти формулы носят чисто формальный характер, поскольку пока никакой операторной реализации нелокальной теории без привлечения регуляризационной процедуры найти не удалось.

По всей видимости, при такой замене гамильтониан, хотя и соответствует нелокальной теории, но решения уравнения

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = \mathcal{E} \left\{ g \int_{-l}^l d\tau H_I(t + i\tau) \Psi(t) \right\},$$

где знаком \mathcal{E} обозначена еще неизвестная операция, обладают основными свойствами причинной и, может быть, микропричинной теории. Эти проблемы требуют дальнейшего изучения.

**НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**

Желать следует только того, что к достижению возможно; ежели же будешь желать недостижимого, как, например, укрощения стихий, прекращения течения времени и подобного, то сам себя не токмо не взвысишь, а наипаче сконфузишь.

М. Е. Салгыков-Щедрин. История одного города.

§ 1. Постановка задачи

В конце 60-х и начале 70-х годов заметно усилился интерес к изучению перенормируемых и неполиномиальных взаимодействий в квантовой теории поля. Этот повышенный интерес был связан с тем, что, используя киральную группу, удалось объяснить ряд явлений мезон-нуклонных взаимодействий. Изучение киральных и калибровочных групп привело к появлению перенормируемых и неполиномиальных лагранжианов взаимодействия. На повестку дня встал вопрос, как работать с такими лагранжианами. Правда, в дальнейшем удалось, используя калибровочные преобразования и идею спонтанного нарушения симметрии, свести ряд взаимодействий, представляющих физический интерес, к перенормируемому типу.

Следует еще раз отметить, что в настоящее время принято считать (так сказать, общепринятое общественное мнение), что принцип перенормируемости является, по сути дела, *физическим* (1) требованием, по которому следует производить выбраковку физически приемлемых теорий. Безусловно, для перенормируемых теорий созданы и уже опробированы методы, которые позволяют получать конечные результаты. Сам же принцип перенормируемости позволяет существенно сузить класс рассматриваемых взаимодействий. Однако, как говорилось в гл. I, вместе с тем перенормируемая квантовая теория поля, как и классическая теория электромагнитного поля, остается, если не внутренне противоречивой, то, по крайней мере, незамкнутой, поскольку проблема собственной энергии (или массы частиц) остается нерешаемой в рамках этих теорий.

Поэтому выходы за рамки идей и методов перенормируемых теорий представляли и представляют глубокий теоретический интерес, поскольку дают нам надежду в конце концов построить внутренне непротиворечивую и замкнутую релятивистскую теорию взаимодействий элементарных частиц. К настоящему времени уже имеется несколько разработанных методов, позволяющих описывать определенные классы перенормируемых взаимодействий в полном согласии с основными требованиями, предъявляемыми к S -матрице теории.

В проблемах обоснования этих методов на сегодняшний день еще существует много нерешенных проблем, среди которых следует выделить две основные. Отсутствие их решения рассматривается на современном этапе как существенный недостаток этого подхода. Во-первых, эти методы не связаны пока ни с какой процедурой квантования, а имеют характер предписаний, которые необходимо производить уже в самом ряду теории возмущений для S -матрицы. Во-вторых, они искусственны в том смысле, что не связаны ни с каким динамическим принципом или иной формулировкой, например, уравнения Шредингера. Поэтому тот функциональный произвол, который фактически существует в ряду теории возмущений для S -матрицы в случае перенормируемых взаимодействий и который фиксируется вводимым методом регуляризации, пока еще не находит должного математического или физического объяснения.

Тем не менее несомненный успех теории состоит в следующем: в настоящее время уже выяснены фактически все достаточные условия, при выполнении которых можно быть уверенным, что построенная S -матрица удовлетворяет всем необходимым аксиомам квантовой теории поля в каждом порядке теории возмущений. Кроме того, с математической точки зрения немалым достижением теории следует считать тот результат, что весь произвол, связанный с определением расходящихся интегралов и асимптотических рядов, возникающих при изучении S -матрицы для неполиномиальных лагранжианов взаимодействия, оказывается сосредоточенным лишь во втором порядке теории возмущений, и никаких новых неопределенностей не возникает в высших порядках разложения S -матрицы по константе связи.

Прежде чем формулировать задачу, решением которой мы будем заниматься в этой главе, дадим краткий исторический обзор литературы, связанной с постановкой и решением обсуждаемых здесь проблем.

Первыми исследованиями в этой области были работы С. Окубо (1954) и Р. Арновитта и С. Дезера (1955). Проблема, грубо говоря, сводилась к исследованию интеграла

$$F(p^2) = \int dx e^{ipx} f(\Delta_c(x)), \quad (1.1)$$

где $f(u)$ — некоторая функция, например, $e^{\lambda \Delta_c(x)}$, $\frac{1}{1 + \lambda \Delta_c(x)}$ и т. д. Методы, предложенные упомянутыми выше авторами для определения интегралов вида (1.1), приводили к функциям, аналитические свойства которых противоречили требованию унитарности S -матрицы.

Затем последовал почти десятилетний перерыв, в течение которого не появилось практически ни одной заметной работы, посвященной интересующей нас проблеме. В 1963 г. Е. С. Фрадкин (1963) и автор этой книги одновременно и независимо предложили метод построения конечной S -матрицы в теории однокомпонентного скалярного поля для неполиномиальных лагранжианов определенного вида. По сравнению с предыдущими исследованиями существенный шаг вперед, который предопределил дальнейший успех этого направления, состоял в использовании евклидовой метрики как исходной точки формулировки теории.

В том же 1963 г. Г. Фейнберг и А. Пайс (1963) предложили в теории слабых взаимодействий с W -мезонами так называемый метод ператизации, также по сути своей связанный с определением интеграла (1.1), однако этот метод приводил к нарушению унитарности. В последующие годы поток работ в этом направлении непрерывно рос. Следует выделить направление, в основу которого положено определение интеграла (1.1) для $f(\Delta) = \exp(\lambda \Delta)$, приводящее к локальной теории поля по классификации, изложенной в гл. II. Разработка этого направления связана с именами М. К. Волкова (1968), А. Салама, Р. Дельбурго, Дж. Стразди (1969), Х. Лемана и К. Полмейера (1971). Несколько иной подход к изучению выражений типа (1.1) при помощи дифференциальных уравнений был рассмотрен Б. А. Арбузовым и А. Т. Филипповым (1965).

Мы не будем далее перечислять другие подходы, которые лишь немногим отличаются от упомянутых выше. Отсылаем читателя к обзорам автора (1969) и М. К. Волкова (1971), где приведены дальнейшие ссылки и краткое описание других возможных определений интеграла (1.1).

В этой главе мы будем изучать проблемы, возникающие при попытке использовать неполиномиальные лагранжианы взаимодействия при построении конечной S -матрицы по теории возмущений. Методы, которые мы будем применять, имеют прямую связь с методами нелокальной квантовой теории поля.

Для простоты мы будем рассматривать теорию однокомпонентного скалярного поля $\varphi(x)$. Обобщение на случай нескольких полей, связанных какой-либо простой группой преобразований типа изотопической, не представляет труда. Однако введение групп типа киральной или калибровочной требует дополнительных исследований, которые еще предстоит сделать в будущем.

Итак, мы рассматриваем однокомпонентное скалярное поле. Плотность лагранжиана записывается в виде $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_I(x)$, где

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{1}{2} (\partial_\nu \varphi(x) \partial_\nu \varphi(x) - m^2 \varphi^2(x)), \quad (1.2)$$

$$\mathcal{L}_I(x) = -gU(\varphi(x)). \quad (1.3)$$

Здесь $U(\alpha)$ — некоторая функция от α , аналитичная в окрестности точки $\alpha = 0$:

$$U(\alpha) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{u_n}{n!} \alpha^n. \quad (1.4)$$

Первоначальную нашу задачу можно было бы сформулировать следующим образом. Возможно ли найти такие существенно нелинейные лагранжианы взаимодействия $\mathcal{L}_I(x)$ (1.3), для которых S -матрица конечна и унитарна в каждом порядке теории возмущений?

Интуитивно могло бы показаться, что трудности квантовой теории поля возникают в области, где поля φ велики. Действительно, свободное мезонное поле представляет собой совокупность несвязанных между собой осцилляторов, т. е. частиц, движущихся в квадратичной потенциальной яме φ^2 . Любое взаимодействие, изменяющее на бесконечности по φ асимптотику квадратичной ямы (например, φ^4), приводит, казалось бы, к тому, что новая система собственных функций в этой измененной яме уже кардинально отличается от собственных функций осциллятора и в пределе бесконечного числа степеней свободы может быть даже ортогональна ей (теорема Хаага). Казалось бы, если взаимодействие выбрать таким образом, что лагранжиан $\mathcal{L}_I = -gU(\varphi)$ растет с ростом φ медленнее φ^2 , то в такой теории отсутствуют трудности, связанные с большими энергиями. Одновременно существование теории возмущений без расходимостей говорило бы о том, что собственные состояния полного гамильтониана можно разлагать по собственным состояниям свободного.

Однако оказалось, и это будет продемонстрировано в следующем параграфе, что все эти интуитивные соображения ошибочны. Эффект бесконечного числа степеней свободы квантованного поля оказывается более существенным. Нельзя говорить о какой-либо возможности разложения стационарных состояний полного гамильтониана H по стационарным состояниям свободного H_0 . Это полностью согласуется с результатом аксиоматического подхода в квантовой теории поля, когда допускается существование унитарной S -матрицы перехода между асимптотическими свободными полями φ_{in} и φ_{out} , а существование половинной унитарной матрицы $S(t, -\infty)$ для конечных t запрещено теоремой Хаага.

Из всего вышесказанного следует, что построение по теории возмущений конечной S -матрицы по нелинейному лагранжиану имеет мало общего с предположением, что малое возмущение мало изменяет состояние свободного поля. Поэтому нашу задачу можно сформулировать таким образом:

Возможно ли неполиномиальному лагранжиану взаимодействия типа (1.3) поставить в соответствие унитарную S -матрицу, свободную от расходимостей в каждом порядке теории возмущений?

Слова «поставить в соответствие» следует понимать в духе методов суммирования расходящихся рядов (см. книгу Г. Харди (1951)). Полная аналогия с этими методами будет видна ниже. В основу содержания этой главы положены работы автора (1963, 1968б, 1969).

§ 2. Модель квантовой теории поля с фиксированным источником

В этом параграфе на примере модели, описывающей взаимодействие скалярных мезонов с точечным фиксированным источником, мы попытаемся понять, что происходит при введении существенно нелинейного или, как сейчас принято говорить, неполиномиального взаимодействия. Модель описывается гамильтонианом

$$H = H_0 + H_I, \quad (2.1)$$

где

$$H_0 = \frac{1}{2} \int dx : [\pi^2(x) + (\nabla\varphi(x))^2 + m^2\varphi^2(x)] :, \quad (2.2)$$

$$H_I = g \int dx \delta(x) : U(\varphi(x)) : = g : U(\varphi(0)) :. \quad (2.3)$$

Здесь $\varphi(x)$ и $\pi(x)$ — операторы бозонного поля, $U(\varphi)$ — некоторая функция от φ . Если $U(\varphi) = \varphi^n$, где $n \geq 2$, то гамильтониан (2.1) описывает нетривиальную теорию, где есть рассеяние и другие физические процессы. Основное, что будет нас интересовать, это наличие ультрафиолетовых расходимостей в случае точечного взаимодействия при $n \geq 2$. Заметим, что модели с $n \geq 3$ являются неперенормируемыми теориями.

Эта модель привлекательна тем, что позволяет поставить квантовополевую задачу в полном соответствии с обычным уравнением Шредингера, общий анализ которого нам известен.

Приступим к формулировке проблемы. Будем предполагать, что система заключена в кубический ящик объема V . Вектор импульса бозонов k имеет тогда компоненты, кратные $2\pi V^{-1/2}$. Введем операторы рождения a_k^+ и уничтожения a_k для свободных бозонов с помощью фурье-разложения:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (a_k e^{ikx} + a_k^+ e^{-ikx}), \quad (2.4)$$

где $\omega_k = \sqrt{m^2 + k^2}$ и $[a_k, a_{k'}^+] = \delta_{k, k'}$. Тогда для H_0 и H_I получим

$$H_0 = \sum_k \omega_k a_k^+ a_k, \quad H_I = g : U \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (a_k + a_k^+) \right) :. \quad (2.5)$$

Гамильтониан взаимодействия H_I взят в нормальной форме. Что это означает для функций $U(\varphi)$ сложного вида, обсудим ниже.

Соотношение $a_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_k + ip_k)$ определяет эрмитовы операторы q_k и p_k , подчиняющиеся соотношениям коммутации:

$$[q_k, q_{k'}] = [p_k, p_{k'}] = 0, \quad [q_k, p_{k'}] = i\delta_{k, k'}$$

В представлении, где переменные q_k диагональны, можно положить

$$p_k = -i \frac{\partial}{\partial q_k}. \quad (2.6)$$

Вектор состояния поля будет функцией $\Psi = \Psi(q_k)$ с различными числовыми переменными q_k (в бесконечном числе). Включение q_k и p_k в (2.5) даст

$$H_0 = \sum_k \frac{1}{2} \omega_k (p_k^2 + q_k^2 - 1), \quad (2.7)$$

$$H_I = g : U \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{q_k}{\sqrt{\omega_k}} \right) :. \quad (2.8)$$

Квантовополевое уравнение Шредингера для стационарных состояний взаимодействующей системы запишется в виде

$$\left\{ \sum_k \frac{\omega_k}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial q_k^2} + q_k^2 - 1 \right) + g : U \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{q_k}{\sqrt{\omega_k}} \right) : \right\} \Psi = E\Psi. \quad (2.9)$$

Это уравнение является полным аналогом обычного уравнения Шредингера только с бесконечным числом степеней свободы.

Наша задача — решить уравнение (2.9) с помощью теории возмущений (разлагая по константе g) и попытаться найти класс функций $U(\varphi)$, для которых существует конечный предел при $V \rightarrow \infty$.

Свободный гамильтониан представляет собой набор не связанных между собой осцилляторов. Собственные функции H_0 есть бесконечные произведения

$$\Psi(\{n_k\}) = \prod_k h_{n_k}(q_k), \quad (2.10)$$

где

$$h_n(q) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \pi^{1/2}}} H_n(q) e^{-q^2/2}, \quad (2.11)$$

$h_n(q)$ — ортонормированные функции Эрмита. Собственные функции $\Psi(\{n_k\})$ зависят от системы целых чисел $\{n_k\}$; каждому импульсу k сопоставляется целое неотрицательное число n_k , которое является числом бозонов с импульсом k . Собственное значение, соответствующее $\Psi(\{n_k\})$, равно $E = \sum_k n_k \omega_k$. Для основного состояния (бозонный вакуум) все $n_k = 0$.

Рассмотрим теперь гамильтониан взаимодействия (2.8). В нашем представлении он является функцией от числовых переменных q_k , так что может рассматриваться как обычный потенциал. Мы хотим рассматривать H_I как малое возмущение. Разумно априори требовать, поскольку H_0 представляет собой набор осцилляторов, что возмущение не должно расти при $|q_k| \rightarrow \infty$ быстрее q_k^2 . Будем даже считать, что

$$\lim_{|\varphi| \rightarrow \infty} :U(\varphi): = 0. \quad (2.12)$$

Кроме того, необходимо рассматривать гамильтониан взаимодействия в нормальной форме. Обычно, когда $H_I(\varphi)$ является только конечной суммой вида $H_I(\varphi) = c_1 \varphi + \dots + c_N \varphi^N$, под нормальным произведением $:\varphi^m:$ понимают такую расстановку операторов рождения a_k^+ и уничтожения a_k , когда все операторы a_k стоят правее операторов a_k^+ . Эквивалентным этому будет следующее определение. Пусть рассматривается матричный элемент $\langle 0| :H_I(\varphi) : |n\rangle$, где $|0\rangle = \Psi(\{0\})$ и $|n\rangle = \Psi(\{n_k\})$, а $n = \sum_k n_k$; тогда под нормальной формой $:H_I(\varphi):$ понимается такая его форма, что при любых n выполнено равенство

$$\langle 0| :H_I(\varphi) : |n\rangle = c_n \langle 0| \varphi^n : |n\rangle = c_n \langle 0| \varphi^n |n\rangle. \quad (2.13)$$

Пусть теперь задана некоторая функция $U(\varphi)$, которая разлагается в ряд Тейлора в окрестности точки $\varphi = 0$:

$$U(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_m}{m!} \varphi^m. \quad (2.14)$$

Тогда под нормальной формой оператора $U(\varphi)$ будем понимать функцию $:U(\varphi):$, удовлетворяющую равенству

$$\langle 0| :U(\varphi) : |n\rangle = \frac{u_n}{n!} \langle 0| \varphi^n |n\rangle. \quad (2.15)$$

Подставляя в (2.15) явные выражения для $|0\rangle$ и $|n\rangle$ по (2.10) и проводя интегрирование, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \int_{-\infty}^{\infty} dv :U(v): \frac{H_n\left(\frac{v}{\sqrt{2D}}\right) e^{-v^2/2D}}{(\sqrt{2D})^n} = u_n, \quad (2.16)$$

где величина $D = \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{2\omega_k}$ считается на этой стадии расчета конечной величиной и должна автоматически выпасть из выражений для амплитуд физических процессов.

Из формулы (2.16) функция $:U(\varphi):$ может быть найдена, если воспользоваться тем обстоятельством, что полиномы Эрмита образуют полную ортогональную систему

$$:U(\varphi): = \pi^{1/4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_m}{\sqrt{m!}} (\sqrt{D})^m h_m\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2D}}\right) e^{\varphi^2/4D}. \quad (2.17)$$

Так как при нашей постановке задачи $:U(\varphi):$ должна рассматриваться как функция от φ , то ряд (2.17) должен сходиться при любых D . Из теории ортогональных рядов (см., например, книгу С. Качмажа и Г. Штейнгауза (1958)) известно, что для этого необходимо:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|u_m|}{\sqrt{m!}} (\sqrt{D})^m = 0, \quad (2.18)$$

откуда следует, что u_m должны удовлетворять неравенству

$$|u_m| < A^m m^{\sigma m}, \quad (2.19)$$

где $0 < \sigma < 1/2$ и A — некоторая константа. Это означает, что функция $U(\varphi)$ (2.14) является целой аналитической функцией в комплексной плоскости φ и принадлежит пространству $Z_{\sigma'}$ ($\sigma' = \frac{1}{1-\sigma}$).

Примером такой функции, которая, кроме того, удовлетворяет (2.12), может служить

$$U(\varphi) = \int_0^{\infty} ds e^{-s} \sin \varphi s^{\sigma} \quad (0 < \sigma < 1/2). \quad (2.20)$$

Легко получить, что

$$:U(\varphi): = \int_0^{\infty} ds e^{-s} : \sin \varphi s^{\sigma} : = \int_0^{\infty} ds e^{-s + \frac{D}{2} s^{2\sigma}} \sin \varphi s^{\sigma}. \quad (2.21)$$

Важно отметить, что для лагранжианов взаимодействия, для которых функция $U(\varphi)$ имеет разрывы в комплексной плоскости φ , условие (2.19) не выполнено, так как там $|u_m| \sim m!$ при $m \rightarrow \infty$, и поэтому ряд (2.17) для $:U(\varphi):$ расходится и, следовательно, не представляет собой никакой функции от φ .

Подсчитаем поправку к энергии основного состояния источника по теории возмущений. Первая исчезающая поправка

имеет второй порядок по g и дается, как известно, формулой

$$E_0^{(2)} = \sum'_{n_k} \frac{|(0|H_I|n)|^2}{E_0^{(0)} - \sum n_k \omega_k}, \quad (2.22)$$

где штрих у суммы означает, что при суммировании по промежуточным состояниям $\{n_k\}$ опущен член с квантовыми числами вакуума (все $n_k = 0$). Выберем $E_0^{(0)} = 0$. Воспользовавшись (2.10), (2.11), (2.14) и (2.15), получим

$$(0|H_I|n) = (\Psi(\{0\}), H_I \Psi(\{n_k\})) = gu_n \prod_k \frac{1}{\sqrt{n_k} (2V\omega_k)^{n_k}}, \quad (2.23)$$

где $n = \sum_k n_k$.

Подставляя (2.23) в (2.22) и проводя некоторые простые преобразования, можно получить

$$E_0^{(2)} = -g^2 \int_0^\infty dt R(t), \quad (2.24)$$

где

$$R(t) = \sum_{m=1}^\infty \frac{u_m}{m!} \Delta^m(t). \quad (2.25)$$

Здесь

$$\Delta(t) = \frac{1}{V} \sum_k \frac{e^{-t\omega_k}}{2\omega_k} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{dk e^{-t\omega}}{2\omega} \xrightarrow{t \rightarrow 0} O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Ряд для функции $R(t)$ сходится при любом t в силу условия (2.19), но при $t \rightarrow 0$ очень сильно растет; так, для гамильтониана взаимодействия (2.20) при $t \rightarrow 0$ получим

$$R(t) = O\left(\exp\left\{at^{-\frac{1}{1-2\sigma}}\right\}\right),$$

где a — некоторая положительная константа.

Таким образом, для класса лагранжианов, для которых $U(\varphi)$ является функцией φ , при точечном взаимодействии ультрафиолетовые расходимости в теории возмущений не только не устраняются, но и являются существенно более сильными, чем в обычных перенормируемых теориях с $H_I(\varphi)$, имеющими вид полинома.

Итак, получен отрицательный ответ на вопрос, возможно ли в квантовой теории поля считать H_I аналогом обычного потенциала в уравнении Шредингера. Это означает, что влияние бесконечного числа степеней свободы поля чрезвычайно велико и таково, что стационарные состояния полного гамильтониана H не разлагаются по стационарным состояниям H_0 , как это отмечалось еще Л. Ван-Ховом (1952).

§ 3. Формулировка квантовой теории скалярного поля с неполиномиальным взаимодействием

В § 4 гл. V были приведены общие соображения по поводу того, что мы можем ожидать в случае успешного построения конечной унитарной S -матрицы по неполиномиальному лагранжиану взаимодействия. Теперь мы сформулируем те общие требования к методам суммирования рядов вида (V.4.3), которые приводили бы к представлению (V.4.13) для амплитуд физических процессов.

Основной чертой, общей для всех методов, является необходимость формулировать теорию в евклидовой метрике. Переход к евклидовой метрике может быть сделан или при помощи какой-либо промежуточной регуляризации, или просто постулирован. Мы будем считать, что S -матрица в евклидовой метрике задается следующим выражением, непосредственно получающимся из функциональных представлений, о которых говорилось в гл. I:

$$S[\varphi] = \exp\left\{\frac{1}{2} \iint dx_1 dx_2 \Delta_c(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)}\right\} \times \\ \times \exp\left\{-\int dx g(x) U(\varphi(x))\right\}. \quad (3.1)$$

Здесь все интегралы записаны в евклидовом пространстве. Мы не будем для них в этой главе вводить никаких специальных индексов, чтобы не загромождать обозначения.

Причинная функция в евклидовой метрике

$$\Delta_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dk e^{ikx}}{m^2 + k^2} = \frac{m}{(2\pi)^2} \frac{K_1(m\sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2}} \quad (3.2)$$

вещественна, положительна и

$$\Delta_c(x) = \begin{cases} O\left(\frac{1}{x^2}\right), & x^2 \rightarrow 0, \\ O(e^{-m\sqrt{x^2}}), & x^2 \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.3)$$

Разложим функционал $S[\varphi]$ (3.1) в ряд по константе связи g :

$$S[\varphi] = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n g(x_1) \dots g(x_n) S_n(x_1, \dots, x_n), \quad (3.4)$$

где

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \Delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial\alpha_i \partial\alpha_j}\right\} U(\alpha_1) \dots U(\alpha_n) = \\ = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^\infty F_{m_1}^{(n)} \dots m_n (\Delta_{ij}) \frac{\alpha_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{\alpha_n^{m_n}}{m_n!}. \quad (3.5)$$

Здесь $\Delta_{ij} = \Delta_c(x_i - x_j)$, $\alpha_j = \varphi(x_j)$ ($j = 1, \dots, n$).

Разлагая далее в (3.5) функции $F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(\Delta_{ij})$ по Δ_{ij} , получим асимптотические ряды вида

$$F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(\Delta_{ij}) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0} C_{m_1 \dots m_n; k_1 \dots k_n}^{(n)} \prod_{i < j} \Delta_{ij}^{k_i + k_j}. \quad (3.6)$$

Коэффициенты $C_{m_1 \dots m_n; k_1 \dots k_n}^{(n)}$ известны и являются произведениями коэффициентов u_n из (1.4). Их явный вид для нас не является существенным.

Условие, что лагранжиан взаимодействия (1.3) или (1.4) выбран в нормально упорядоченной форме, приводит к тому, что в функциональном операторе в (3.5), соответствующем T -произведению, отсутствуют диагональные члены $\Delta_{jj} = \Delta_c(0) = \infty$.

Наша проблема заключается в определении функций $F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(\Delta_{ij})$ в разложении (3.5), где $U(\alpha)$ — некоторая заданная функция от α , разложимая в ряд (1.4) вблизи точки $\alpha = 0$.

Сначала мы рассмотрим, какими свойствами должны обладать функции $F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(\Delta_{ij})$, чтобы были решены проблемы с ультрафиолетовыми расходимостями, а затем выясним вопросы, связанные с определением действия дифференциального оператора в (3.5).

Функции $F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(\Delta_{ij})$, рассматриваемые как функции вещественных дополнительных переменных Δ_{ij} , должны удовлетворять следующим условиям (C):

(1) Условие интегрируемости:

$$\max_{0 \leq \Delta_{ij} < \infty} |F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(\Delta_{ij})| < \infty. \quad (3.7)$$

(2) Условие вещественности амплитуд в евклидовой области импульсных переменных: функции $F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(\Delta_{ij})$ должны быть вещественными на интервалах

$$0 \leq \Delta_{ij} < \infty. \quad (3.8)$$

(3) Условие асимптотического разложения: если разбить n точек (1, 2, ..., n) графа, которому соответствует функция $F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}$, на две произвольные группы G_1 и G_2 по n_1 и n_2 точек в каждой ($n_1 + n_2 = n$) и выделить те функции $\Delta_{l_1 l_2}$ ($l_1 \in G_1$, $l_2 \in G_2$), которые соответствуют ребрам графа, соединяющим точки этих двух групп, то должно выполняться соотношение

$$F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(\Delta_{ij}) \sim \prod_{l_1=1}^{n_1} \prod_{l_2=1}^{n_2} \sum_{n_{l_1 l_2}=0}^{\infty} F^{(n_1)} \dots m_j + \sum_{k=n_1+1}^n n_{jk} \dots (x_1, \dots, x_{n_1}) \frac{\Delta_{l_1 l_2}^{n_{l_1 l_2}}}{n_{l_1 l_2}!} \times \times F^{(n_2)} \dots m_j + \sum_{l=1}^{n_1} n_{lj} \dots (x_{n_1+1}, \dots, x_n) \quad (3.9)$$

при $\Delta_{l_1 l_2} \rightarrow 0$. Здесь ∞ — знак асимптотического разложения.

Так, во втором порядке теории возмущений разложение (V.4.3) является асимптотическим рядом для $F_{m_1 m_2}^{(2)}(\Delta_c)$.

Условие асимптотического разложения, во-первых, требует, чтобы функции $F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(\Delta_{ij})$ при разложении по Δ_{ij} давали асимптотические ряды (3.6), и, во-вторых, является необходимым условием для выполнения унитарности S -матрицы. Дело в том, что при доказательстве унитарности в теории возмущений необходимо показать, что мнимая часть амплитуды n -го порядка связана с амплитудами низших порядков. При аналитическом продолжении по инвариантным переменным необходимо производить вычитание асимптотических рядов по отдельным Δ_{ij} , при этом коэффициентами этих асимптотических рядов должны быть коэффициентные функции низших порядков.

Еще раз отметим, что все эти требования не являются достаточными условиями, чтобы задать однозначно функции $F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}$. Необходимо наложить какие-то дополнительные условия, природа происхождения которых в настоящее время еще не ясна.

Покажем во втором порядке теории возмущений, что если функция $F_{m_1 m_2}^{(2)}(\Delta_c)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям, то интеграл

$$\tilde{F}_{m_1 m_2}^{(2)}(p^2) = \int dx_E e^{iq_E x_E} F_{m_1 m_2}^{(2)}(\Delta_c(x_E)), \quad (3.10)$$

определенный при $p^2 = -q_E^2 < 0$, продолжается в физическую область $p^2 > 4m^2$ и удовлетворяет условию унитарности, т. е.

$$\text{Im} \tilde{F}_{m_1 m_2}^{(2)}(p^2) = \pi \rho_{m_1 m_2}(p^2), \quad (3.11)$$

где $\rho_{m_1 m_2}(p^2)$ дается формулой (V.4.12).

Действительно, интеграл (3.10) в силу условий (C) существует для $p^2 = -q_E^2 < 0$. Полагая для простоты $F_{m_1 m_2}^{(2)}(\Delta_c) = F(\Delta_c)$ и опуская индекс E , представим интеграл (3.10) в форме

$$\tilde{F}(p^2) = \int dx e^{iqx} F(\Delta_c(x)) = \tilde{P}_1(p^2) + \tilde{P}_2(p^2) + \tilde{P}_3(p^2), \quad (3.12)$$

где

$$\tilde{P}_1(p^2) = \int dx e^{iqx} \theta(a^2 - x^2) F(\Delta_c(x)),$$

$$\tilde{P}_2(p^2) = \int dx e^{iqx} \theta(x^2 - a^2) \left\{ F(\Delta_c(x)) - \sum_{n=1}^N c_n \Delta_c^n(x) \right\},$$

$$\tilde{P}_3(p^2) = \int dx e^{iqx} \theta(x^2 - a^2) \sum_{n=1}^N c_n \Delta_c^n(x).$$

Здесь a — некоторый фиксированный параметр, N — произвольное целое число. Кроме того, мы предполагаем, что в асимптотическом разложении

$$F(\Delta_c) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Delta_c^n, \quad (3.13)$$

согласно условиям (C), $c_n = \frac{u_{n+m_1} u_{n+m_2}}{n!}$.

Рассмотрим сначала $\tilde{P}_1(p^2)$. Интегрируя по евклидовым углам, получим

$$\tilde{P}_1(p^2) = (2\pi)^2 \int_0^a du u^2 \frac{J_1(u\sqrt{-p^2})}{\sqrt{-p^2}} F(\Delta_c(u)). \quad (3.14)$$

Легко видеть, что интеграл сходится для любых комплексных p^2 и, следовательно, определяет в комплексной p^2 -плоскости целую функцию порядка роста $1/2$.

Функция $\tilde{P}_2(p^2)$ может быть представлена как

$$\tilde{P}_2(p^2) = (2\pi)^2 \int_a^{\infty} du u^2 \frac{J_1(u\sqrt{-p^2})}{\sqrt{-p^2}} \left\{ F(\Delta_c(u)) - \sum_{n=1}^N c_n \Delta_c^n(u) \right\}. \quad (3.15)$$

Поскольку

$$F(\Delta_c(u)) - \sum_{n=1}^N c_n \Delta_c^n(u) = O(e^{-(N+1)mu})$$

при $u \rightarrow \infty$ согласно (3.13), то $\tilde{P}_2(p^2)$ определяет аналитическую функцию от p^2 в области $\text{Re } p^2 < (N+1)^2 m^2$.

Рассмотрим теперь $\tilde{P}_3(p^2)$. Воспользуемся тождеством (V.8.24). Подставляя это тождество в интеграл, определяющий функцию $\tilde{P}_3(p^2)$, после простых вычислений получим

$$\tilde{P}_3(p^2) = \frac{c_1}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dx^2 \rho_N(x^2) J(x^2 a^2, p^2 a^2)}{x^2 - p^2 - i\varepsilon}, \quad (3.16)$$

где

$$\rho_N(x^2) = \sum_{n=2}^N c_n \Omega_n(x^2).$$

Функция $J(x^2 a^2, p^2 a^2)$ определяется формулой (V.8.17). Полученный интеграл сходится, поскольку при $x \rightarrow \infty$ $\rho_N(x^2) = O(x^{2(N-1)})$ и $J(x^2 a^2, p^2 a^2) = O(e^{-ax})$. Кроме того, выполнено условие нормировки (V.8.18). Таким образом, функция $\tilde{P}_3(p^2)$ имеет простой полюс в точке $p^2 = m^2$ и линию разреза, начи-

нающуюся в точке $p^2 = 4m^2$. Если $4m^2 < p^2 < (N+1)^2 m^2$, то

$$\text{Im } \tilde{P}_2(p^2) = \pi \rho(p^2),$$

где

$$\rho(p^2) = \sum_{n=2}^{\lfloor \sqrt{p^2}/m \rfloor} c_n \Omega_n(p^2)$$

согласно условию унитарности.

Поскольку число N может быть выбрано произвольно большим, для функции $\tilde{F}(p^2) = \tilde{F}_{m_1 m_2}^{(2)}(p^2)$ справедливо представление (V.4.13) в полном соответствии с требуемыми условиями.

Рассмотрим теперь проблему неоднозначности, связанную с суммированием асимптотических рядов. Пусть две функции $F_1(\Delta_c)$ и $F_2(\Delta_c)$ удовлетворяют условиям (C). Тогда функция $f(\Delta_c) = F_1(\Delta_c) - F_2(\Delta_c)$ имеет существенно особую точку при $\Delta_c = 0$ в комплексной Δ_c -плоскости такую, что

$$\lim_{\Delta_c \rightarrow +0} \Delta_c^N f(\Delta_c) = 0$$

при любых $N > 0$. Это означает, что в импульсном пространстве функция

$$\tilde{f}(p^2) = \int dx e^{iqx} f(\Delta_c(x)) = (2\pi)^4 \int_0^{\infty} du u^2 \frac{J_1(u\sqrt{-p^2})}{\sqrt{-p^2}} f(\Delta_c(u))$$

является целой функцией, поскольку интеграл сходится для любых комплексных p^2 .

Следовательно, неоднозначность в определении функции $F(\Delta_c)$ в рамках условий (C) ведет к неоднозначности в выборе целой функции $\tilde{W}(p^2)$ в представлении (V.4.13).

Вернемся к проблеме определения функции S_n в (3.5). Математическая проблема состоит в том, что оператор в (3.5) или не определен на функциях $U(\alpha_j)$ во всей области изменения параметров $0 \leq \Delta_{ij} < \infty$ или приводит к функциям $F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}(\Delta_{ij})$, которые не удовлетворяют условиям (C).

Особенно просто это можно увидеть на функциях $U(\alpha)$, для которых справедливо представление Фурье

$$U(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \tilde{U}(\beta) e^{i\alpha\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} \alpha^n, \quad (3.17)$$

где

$$u_n = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta (i\beta)^n \tilde{U}(\beta).$$

Будем далее предполагать, что существуют такие положительные σ , b и C , что

$$|\tilde{U}(\beta)| \leq C e^{-b|\beta|^\sigma}. \quad (3.18)$$

При этом $\sigma \geq 1$, так что функция $U(\alpha)$ целая, если $\sigma > 1$, или, если $\sigma = 1$, аналитична в некоторой окрестности вещественной оси $|\operatorname{Im} \alpha| < b$.

Тогда для S_n легко получить

$$S_n = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_n \tilde{U}(\beta_1) \dots \tilde{U}(\beta_n) e^{i(\alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n)} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \Delta_{ij} \beta_i \beta_j \right\}. \quad (3.19)$$

В силу того, что в квадратичной форме $\sum_{i \neq j} \Delta_{ij} \beta_i \beta_j$ отсутствуют диагональные элементы, она не является положительно-определенной и поэтому интеграл в (3.18) или расходится ($\sigma \leq 2$ в условии (3.18)), или определяет растущую при $\Delta_{ij} \rightarrow \infty$ функцию ($\sigma > 2$ в условии (3.18)).

Поэтому, если мы хотим удовлетворить условиям (С), необходимо как-то иначе определять действие оператора в (3.5).

Существуют следующие возможности решения этой проблемы. Одна из них состоит в определении действия функционального оператора в (3.5), что соответствует введению метода суммирования асимптотических рядов (3.6). Другая возможность состоит в том, что надо с самого начала ввести нелокальный формфактор или во взаимодействие, т. е. рассматривать $\mathcal{L}_I = gU(K(I^2 \square)\varphi(x))$, или непосредственно в суперпропагатор $\omega(\xi_i \zeta_j, x_i - x_j)$, как об этом говорилось в гл. V. Третий подход состоит в том, что мы не вводим никаких методов суммирования, а хотим так определить интеграл в (1.1) или в (3.10), где функция $F_{m_1, m_2}^{(2)}(\Delta_c)$ определяется рядом (V.4.12), чтобы функция $\tilde{F}_{m_1, m_2}^{(2)}(p^2)$ обладала всеми необходимыми свойствами, т. е. для нее было бы справедливо представление (V.4.13).

Ниже мы будем рассматривать только первые две возможности, поскольку они решаются в рамках нелокальной теории поля, развиваемой в этой книге. Описание методов и проблем, связанных с третьей возможностью, можно найти в обзорах автора (1969) и М. К. Волкова (1971), о которых говорилось в § 1 этой главы.

§ 4. Методы асимптотического суммирования

В этом параграфе мы рассмотрим два возможных метода определения функционального оператора в (3.5), которые приводят к функциям $F_{m_1, \dots, m_n}^{(n)}(\Delta_{ij})$, удовлетворяющим условиям (С).

I. Функциональный метод. Этот метод был предложен, как говорилось выше, одновременно и независимо в 1963 г. Е. С. Фрадкиным и автором этой книги. Это была первая по-

пытка построить конечную квантовую теорию с неполиномиальным лагранжианом взаимодействия. Исходная идея состояла в том, что конечная теория может быть построена только для определенного класса лагранжианов $\mathcal{L}_I = gU(\varphi)$, растущих с ростом φ не быстрее чем φ^2 . «Техническая» задача заключалась в проблеме, как найти и описать этот класс.

Метод основан на интегральном представлении дифференциального оператора в (3.5) в виде операторов сдвига в комплексной плоскости. Рассмотрим сначала второй порядок теории возмущений

$$S_2 = \exp \left\{ \Delta_c \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right\} U(\alpha_1) U(\alpha_2). \quad (4.1)$$

Формально справедливо представление

$$\exp \left\{ \Delta_c \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right\} = \\ = \frac{1}{\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \exp \left\{ -t_1^2 - t_2^2 + \sqrt{\Delta_c} \left[(t_1 + it_2) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + (t_1 - it_2) \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right] \right\}. \quad (4.2)$$

Подставляя это представление в (4.1) и действуя формально оператором сдвига на функцию $U(\alpha)$, получим

$$S_2 = \frac{1}{\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 e^{-t_1^2 - t_2^2} U(\alpha_1 + \sqrt{\Delta_c} (t_1 + it_2)) U(\alpha_2 + \sqrt{\Delta_c} (t_1 - it_2)).$$

Делая замену переменных

$$t_1 = u_1 - \frac{1}{2\sqrt{\Delta_c}} (\alpha_1 + \alpha_2), \quad t_2 = u_2 - \frac{1}{2i\sqrt{\Delta_c}} (\alpha_1 - \alpha_2),$$

получаем окончательно

$$S_2 = \frac{1}{\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} du_1 du_2 U(\sqrt{\Delta_c} (u_1 + iu_2)) U(\sqrt{\Delta_c} (u_1 - iu_2)) \times \\ \times \exp \left\{ -\left[u_1 + iu_2 - \frac{\alpha_1}{\sqrt{\Delta_c}} \right] \left[u_1 - iu_2 - \frac{\alpha_2}{\sqrt{\Delta_c}} \right] \right\}. \quad (4.3)$$

Разлагая функцию S_2 в (4.3) в ряд по α_1 и α_2 , получаем для функции $F_{m_1, m_2}^{(2)}(\Delta_c)$ представление в виде конечной суммы

$$F_{m_1, m_2}^{(2)}(\Delta_c) = \\ = \sum_k \frac{(-1)^{m_1 + m_2 + k} m_1! m_2!}{(k - m_1)! (k - m_2)! (m_1 + m_2 - k)!} \frac{1}{\Delta_c^k} Y_{k - m_1, k - m_2}(\Delta_c), \quad (4.4)$$

где суммирование проводится по всем разрешенным значениям k ,

$$\begin{aligned}
 Y_{n_1 n_2}(\Delta_c) &= \\
 &= \frac{\Delta_c^{\frac{n_1+n_2}{2}}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du_1 du_2 e^{-u_1^2 - u_2^2} u_1^{n_1} u_2^{n_2} |U(\sqrt{\Delta_c}(u_1 + iu_2))|^2 = \\
 &= \Delta_c^{\frac{n_1+n_2}{2}} \int_0^{\infty} dr e^{-r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta (\sqrt{r} \cos \theta)^{n_1} (\sqrt{r} \sin \theta)^{n_2} |U(\sqrt{r\Delta_c} e^{i\theta})|^2.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь мы перешли к интегрированию по полярным координатам.

Из формул (4.3) и (4.4) видно, что для того чтобы функции $F_{m_1 m_2}^{(2)}(\Delta)$ удовлетворяли условиям (С), необходимо, чтобы функции $U(\alpha)$, определяющие лагранжиан взаимодействия, удовлетворяли следующим условиям:

(1) $U(\alpha + i\beta)$ аналитична в окрестности точки $\alpha = 0$ и имеет только конечное число разрезов в комплексной $(\alpha + i\beta)$ -плоскости.

(2) Существует интеграл

$$\int \int_{\alpha, \beta \in G} d\alpha d\beta |U(\alpha + i\beta)|^2 < \infty \tag{4.6}$$

по любой ограниченной области $G \subset \mathbb{C}$.

$$(3) \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{|U(z)|}{|z|^2} = 0. \tag{4.7}$$

Например, это могут быть функции $\frac{\alpha^3}{(1 + \alpha^2)^{3/4}}$, $\frac{\alpha^4}{(1 + \alpha^2)^{3/4}}$ и т. д.

Предлагаемый метод является в прямом, непосредственном смысле методом суммирования расходящегося ряда, каким является разложение (4.3), поскольку выкладки, при помощи которых окончательное выражение (4.3) получено из (4.1), являются формальными и математически некорректны. Дело в том, что требование (4.7) не удовлетворяют целые функции, для которых определен дифференциальный оператор (4.1). Условию (4.7) могут удовлетворять только функции с разрезами (не с полюсами, поскольку в этом случае условие (4.6) не будет выполнено), но для таких функций не будет определен оператор в (4.1), поскольку наличие линий ветвления у функции $U(\alpha)$ не позволяет в строгом смысле применять операцию сдвига в комплексной плоскости. У выражений, получаемых на промежуточных этапах, могут возникнуть дополнительные вклады, связанные с особенностями, которые изменяют окончательное выражение (4.3). Поэтому формулировка метода состоит как раз в утверждении, что под результатом действия

дифференциального оператора в (4.1) мы понимаем выражение (4.3).

Выражение для S_n легко получается, если применить предлагаемую процедуру для каждого дифференциального оператора в (3.5). В результате получим

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{1 \leq i \neq j < n} dt_{ij} \exp \left\{ - \sum_{1 \leq i \neq j < n} t_{ij}^2 \right\} \times \\
 &\times \prod_{l=1}^n U \left(\alpha_l + \sum_{1 \leq l < i} \sqrt{\Delta_{li}} (t_{li} + it_{il}) + \sum_{l < j \leq n} \sqrt{\Delta_{jl}} (t_{jl} - it_{jl}) \right).
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Далее необходимо сделать соответствующую линейную замену переменных

$$t_{ij} = u_{ij} + \sum_l A_{ij, l} \alpha_l,$$

чтобы избавиться от параметров α_l в аргументе функций взаимодействия $U(\alpha)$.

Полученное выражение достаточно сложно, однако легко видеть, что из условий (С) удовлетворены свойства (1) и (2). По всей видимости, функции $F_{m_1}^{(n)} \dots m_n$, получающиеся при разложении (4.8), удовлетворяют и свойству (3), хотя это еще не доказано.

Таким образом, предлагаемый метод позволяет строить S-матрицу в любом порядке теории возмущений.

В качестве примера рассмотрим подробнее второй порядок теории возмущений для функции взаимодействия

$$U(\alpha) = \frac{\alpha^s}{(1 + \alpha^2)^\gamma}, \tag{4.9}$$

где s — некоторое целое число, γ — положительный параметр, причем $\gamma < 1$ согласно условию (4.6).

Подставляя (4.9) в (4.5) и проводя интегрирование, получим

$$\begin{aligned}
 Y_{n_1 n_2}(\Delta_c) &= \frac{(-1)^r}{2^{2\gamma-1}} \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \Delta_c^{s+l-r} f^r \frac{\Gamma(s+l-r+1)}{2^{s+l}} \times \\
 &\times \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{s+l-r}{2} \rfloor} \frac{(-1)^q (2s+2l-2q)!}{q!(s+l-q)!(s+l-r-2q)!} A_{2\gamma+r, s+l-q+1/2}^{(r)} (f^2 \Delta_c^2),
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

где $n_1 + n_2 = 2l$, $|n_1 - n_2| = 2r$, l и r — целые числа. Если $n_1 + n_2$ — нечетное, то $Y_{n_1 n_2} = 0$. Далее, в формуле (4.10)

$$A_{\sigma, \mu}^{(r)}(z) = \int_0^{\infty} \frac{dt t^{\sigma-1} J_r(t)}{(1 + zt^2)^\mu}. \tag{4.11}$$

Выпишем асимптотику функции $A_{\sigma, \mu}^{(r)}$ при больших и малых z :

$$A_{\sigma, \mu}^{(r)}(z) = \begin{cases} z^{-\left(\frac{\sigma+r}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\mu - \frac{\sigma+r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\sigma+r}{2}\right)}{2^{r+1} \Gamma(\mu) \Gamma(r+1)} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right] & (z \gg 1), \\ \frac{2^{\sigma-1} \Gamma\left(\frac{\sigma+r}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{r-\sigma}{2}\right)} [1 + O(z)] & (z \ll 1). \end{cases} \quad (4.12)$$

Функции $A_{\sigma, \mu}^{(r)}(z)$ имеют особенность в точке $z=0$.

Наличие в (4.10) множителя $\Gamma(1-\gamma)$ говорит о том, что полученное выражение, рассматриваемое как аналитическая функция параметра γ , имеет полюсы при положительных целочисленных значениях γ . Это согласуется с условием интегрируемости функции $|U(\alpha)|^2$ (4.6), которое требует, чтобы $0 < \gamma < 1$.

Обратимся теперь к росту функции $F_{m, m_2}(\Delta_c)$ с увеличением Δ_c . Максимальная степень Δ_c , как легко можно увидеть из представлений (4.4) и (4.10), есть $\Delta_c^{s-2\gamma}$, что соответствует поправке к энергии вакуума, т. е. функции $F_{00}^{(2)}(\Delta_c)$. С другой стороны, условие сходимости интеграла

$$\int dx F_{00}^{(2)}(\Delta_c(x)) < \infty$$

требует, чтобы $F_{00}^{(2)}(\Delta_c) = O(\Delta_c^{2-\delta})$ при некоторых $\delta > 0$. Отсюда следует, что необходимо выполнение условия

$$s - 2\gamma < 2, \quad (4.13)$$

которое согласуется с условием (4.7). Это ограничение для взаимодействия (4.9) с $s=3$ означает, что параметр γ должен быть выбран из интервала $1/2 < \gamma < 1$, например,

$$\mathcal{L}_I(x) = \frac{g\varphi^3(x)}{(1 + f\varphi^2(x))^{3/4}}. \quad (4.14)$$

Подсчитаем поправку к массе скалярной частицы из-за взаимодействия (4.14). Эта поправка определяется интегралом

$$\delta m^2 = i \int dx e^{ipx} S_{11}(x), \quad (4.15)$$

где $p^2 = m^2$, а

$$S_{11}(x_1 - x_2) = \left\langle 0 \left| \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(x_1) \delta\varphi(x_2)} \right| 0 \right\rangle. \quad (4.16)$$

Подставляя в (4.16) S -матрицу во втором порядке теории возмущений, получим

$$S_{11}(x) = -g^2 \left[F_{11}^{(2)}(\Delta_c) + \delta(x) \int dy F_{20}^{(2)}(\Delta_c(y)) \right], \quad (4.17)$$

где F_{20} и F_{11} определяются формулами (4.4) и (4.10). Первый член соответствует диаграмме Фейнмана, показанной на рис. 26, а, а второй на рис. 26, б. На этих рисунках цифрами отмечены вершины, а заштрихованный промежуток между ними соответствует сумме всевозможных внутренних линий, какие получились бы, если лагранжиан (4.14) разложить в ряд по f и каждому члену полученного ряда сопоставить диаграмму Фейнмана.

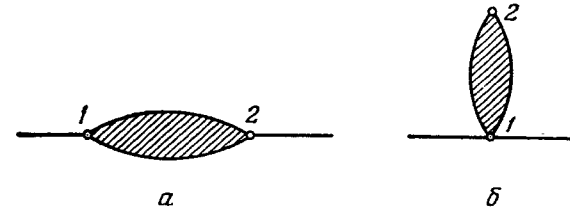


Рис. 26. Диаграммы Фейнмана второго порядка теории возмущений дающие вклад в поправку к массе скалярной частицы.

Подставим (4.17) в (4.15) и проинтегрируем по евклидовым углам, после чего получим

$$\delta m^2 = -g^2 \left[\frac{4\pi^2}{m} \int_0^\infty d\beta \beta^2 I_1(m\beta) F_{11}^{(2)}(\Delta_c(\beta)) + 2\pi^2 \int_0^\infty d\beta \beta^3 F_{20}^{(2)}(\Delta_c(\beta)) \right].$$

Подставляя сюда функции F из (4.4) с учетом (4.10), окончательно получим

$$\delta m^2 = -g^2 [35b_4 - 35b_3 + 6b_2 - 7d_3 + 3d_2], \quad (4.18)$$

где

$$b_n = \frac{3}{m} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) (2\pi)^{1/2} \int_0^\infty d\beta \beta^2 I_1(\beta m) \left(\frac{m}{4\pi^2\beta} K_1(m\beta)\right)^2 A_{1/2, n+1/2}^{(0)}(f^2 \Delta_c^2(\beta)),$$

$$d_n = 15f \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) (2\pi^3)^{1/2} \int_0^\infty d\beta \beta^3 \left(\frac{m}{4\pi^2\beta} K_1(m\beta)\right)^2 A_{1/2, n+1/2}^{(1)}(f^2 \Delta_c^2(\beta)).$$

Каждый из полученных интегралов сходится. Полученные интегралы имеют особенность в точке $f=0$. Можно проверить, что при $f \rightarrow 0$ $\delta m^2 = O(\ln f)$, что соответствует логарифмическому характеру расходимости поправки к массе в теории с $\mathcal{L}_I = g\varphi^3(x)$.

В заключение можно сказать, что предлагаемый метод явно не содержит никаких неоднозначностей. Осталась еще нерешенной задача проверки, удовлетворяет ли разложение (4.8) всем условиям (C). Дальнейшие шаги в изучении этого метода должны состоять в применении его к теориям с достаточно сложной группой типа киральной или калибровочной.

II. Метод прямого суммирования. Можно предложить другой способ определения действия дифференциального оператора в (3.5). Этот способ довольно очевидно обеспечит выполнение всех условий (C) для функций $F_{m_1}^{(n)} \dots m_n$.

Поступим следующим образом. Будем считать, что функция $U(\alpha)$ представима в виде интеграла Фурье (3.17). Рассмотрим выражение (3.19). При разложении экспоненты в ряды по Δ_{ij} каждый член в таком разложении интегрируется и получаются асимптотические ряды (3.6). Однако, как говорилось выше, в целом полученный интеграл (3.19) либо расходится при любых Δ_{ij} , либо сходится, но определяет функцию, растущую с ростом Δ_{ij} быстрее любой конечной степени Δ_{ij} , т. е. не удовлетворяет условиям (C).

Постулируем следующую регуляризующую процедуру. Будем считать, что действие оператора $\exp\left\{\Delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}\right\}$ на $\exp\{i(\alpha_i \beta_i + \alpha_j \beta_j)\}$ под знаком интеграла в (3.19) равно $\exp\left\{\Delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}\right\} \exp\{i(\alpha_i \beta_i + \alpha_j \beta_j)\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exp\{i(\alpha_i \beta_i + \alpha_j \beta_j) - \Delta_{ij} \beta_i \beta_j\} \theta(1 - \lambda \Delta_{ij}^a \beta_i^2 \beta_j^2), \quad (4.19)$$

где a и λ — некоторые положительные параметры, причем $a > 2$. Используя (3.19) и (4.19), получим для коэффициентных функций $F_{m_1}^{(n)} \dots m_n(\Delta_{ij})$ в (3.5) следующее выражение:

$$F_{m_1}^{(n)} \dots m_n(\Delta_{ij}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_n \prod_{i=1}^n (i\beta_i)^{m_i} \tilde{U}(\beta_i) \times$$

$$\times \prod_{1 \leq i < j \leq n} e^{-\Delta_{ij} \beta_i \beta_j} \theta(1 - \lambda \Delta_{ij}^a \beta_i \beta_j). \quad (4.20)$$

Прежде всего отметим, что полученная формула в случае взаимодействий типа $U(\varphi) = \varphi^3$ или $U(\varphi) = \varphi^4$ дает обычное выражение для коэффициентных функций. В этом смысле вводимая процедура регулярна.

Безусловно, предлагаемая процедура неоднозначна. В (4.20) уже появились новые произвольные безразмерные константы a и λ . Кроме того, вместо $\theta(1 - \lambda \Delta_{ij}^a \beta_i^2 \beta_j^2)$ можно было бы ввести $\theta(1 - \lambda \Delta_{ij}^a \beta_i^2) \theta(1 - \lambda \Delta_{ij}^a \beta_j^2)$ или $\theta(1 + \lambda \Delta_{ij}^a \beta_i \beta_j)$. Эта неоднозначность соответствует известной ситуации, заключающейся в том, что суммирование асимптотических рядов есть неоднозначная процедура. Суммирование осуществляется с точностью до функций, имеющих существенную особенность в точках $\Delta_{ij} = 0$, для которых асимптотический ряд равен нулю (типа $\exp\{-1/\Delta_{ij}\}$). К чему приводит эта неоднозначность в амплитудах физических

процессов, говорилось выше, где речь шла об аналитическом продолжении в физическую область.

Рассмотрим S -матрицу с коэффициентными функциями (4.20). Покажем, что функции $F_{m_1}^{(n)} \dots m_n$ удовлетворяют всем перечисленным выше условиям для класса функций $U(\alpha)$, которые удовлетворяют соотношениям (3.17) и (3.18). Легко видеть, что условия (1) и (2) из (C) выполнены. Функции $F_{m_1}^{(n)} \dots m_n$ ограничены при любых Δ_{ij} , если $a \geq 2$:

$$|F_{m_1}^{(n)} \dots m_n(\Delta_{ij})| \leq e^{\frac{n(n+1)}{2\sqrt{\lambda}}} b_{m_1} \cdot \dots \cdot b_{m_n}, \quad (4.21)$$

где $b_m = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta |\beta^m \tilde{U}(\beta)| < \infty$.

Для выполнения условия (3) достаточно показать, что в коэффициенты асимптотического разложения $F_{m_1}^{(n)} \dots m_n(\Delta_{ij})$ по каждому Δ_{ij} введенная θ -функция не дает никакого вклада, т. е. интеграл вида

$$F(\Delta_c) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_1 d\beta_2 K(\beta_1, \beta_2) e^{-\Delta_c \beta_1 \beta_2} \theta(1 - \lambda \Delta_c^a \beta_1^2 \beta_2^2), \quad (4.22)$$

где

$$K(\beta_1, \beta_2) = (i\beta_1)^{m_1} (i\beta_2)^{m_2} \tilde{U}(\beta_1) \tilde{U}(\beta_2) V(\beta_1, \beta_2),$$

а $V(\beta_1, \beta_2)$ — ограниченная функция, разлагается в асимптотический ряд при $\Delta_c \rightarrow 0$:

$$F(\Delta_c) \propto A_0 + \Delta_c A_1 + \frac{\Delta_c^2}{2} A_2 + \dots + \frac{\Delta_c^n}{n!} A_n + \dots$$

Здесь

$$A_n = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_1 d\beta_2 (-\beta_1 \beta_2)^n K(\beta_1, \beta_2). \quad (4.23)$$

Действительно, сделаем в (4.22) тождественное преобразование:

$$e^{-\Delta_c \beta_1 \beta_2} \theta(1 - \lambda \Delta_c^a \beta_1 \beta_2) = \sum_{l=0}^N \frac{\Delta_c^l}{l!} (-\beta_1 \beta_2)^l -$$

$$- \sum_{l=0}^N \frac{\Delta_c^l}{l!} (-\beta_1 \beta_2)^l \theta(\lambda \Delta_c^a \beta_1 \beta_2 - 1) +$$

$$+ \left[e^{-\Delta_c \beta_1 \beta_2} - \sum_{l=0}^N \frac{(-\Delta_c \beta_1 \beta_2)^l}{l!} \right] \theta(1 - \lambda \Delta_c^a \beta_1 \beta_2) \quad (4.24)$$

Подставляя (4.24) в (4.22), получим

$$F(\Delta_c) = F_1(\Delta_c) + F_2(\Delta_c) + F_3(\Delta_c),$$

где

$$F_1(\Delta_c) = \int_{-\infty}^{\infty} \int d\beta_1 d\beta_2 K(\beta_1, \beta_2) \sum_{l=0}^N \frac{\Delta_c^l}{l!} (-\beta_1 \beta_2)^l = \sum_{l=0}^N \frac{\Delta_c^l}{l!} A_l,$$

$$F_2(\Delta_c) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int d\beta_1 d\beta_2 K(\beta_1, \beta_2) \sum_{l=0}^N \frac{\Delta_c^l}{l!} (-\beta_1 \beta_2)^l \theta(\lambda \Delta_c^a \beta_1^2 \beta_2^2 - 1),$$

$$F_3(\Delta_c) = \int_{-\infty}^{\infty} \int d\beta_1 d\beta_2 K(\beta_1, \beta_2) \frac{(\Delta_c \beta_1 \beta_2)^{N+1}}{N!} \times \\ \times \int_0^1 du (1-u)^N e^{-\Delta_c \beta_1 \beta_2 u} \theta(1 - \lambda \Delta_c^a \beta_1^2 \beta_2^2).$$

Можно легко показать, используя (3.18), что при $\Delta_c \rightarrow 0$ $F_2(\Delta_c) = O\left(\exp\left\{-\frac{\text{const}}{(\lambda \Delta_c^a)^{\sigma/4}}\right\}\right)$ и $F_3(\Delta_c) = O(\Delta_c^{N+1})$, поэтому

$$F(\Delta_c) = \sum_{l=0}^N \frac{\Delta_c^l}{l!} A_l + O(\Delta_c^{N+1}), \quad (4.25)$$

что и доказывает (4.23).

Таким образом, коэффициентные функции (4.20) удовлетворяют всем условиям (С).

Покажем теперь, что для суперпропагатора

$$\mathcal{D}(x) = e^{-\Delta_c(x)\beta} \theta(1 - \lambda \Delta_c^a(x)\beta^2) \quad (4.26)$$

в импульсном пространстве справедливо представление (V.4.13). Действительно, воспользовавшись результатами § 8 гл. V, легко получить

$$\mathcal{D}(x) = \left[1 - \beta \Delta_c(m, x) + \int_{4m^2}^{\infty} dx^2 \rho(\beta, x^2) \Delta_c(x, x) \right] \theta(m\sqrt{x^2} - f(\beta)), \quad (4.27)$$

где $\beta = \beta_1 \beta_2$ и, согласно (V.8.24),

$$\rho(\beta, x^2) = \sum_{n=2}^{[x/m]} \frac{(-\beta)^n}{n!} \Omega_n(x^2).$$

Для функции $\rho(\beta, x^2)$ справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\rho(\beta, x^2) = \begin{cases} O(|\beta|^{x/m}) & \text{при } \beta \rightarrow \infty, x \text{ фиксировано,} \\ O(\exp\{\text{const} \cdot (|\beta|x)^{1/3}\}) & \text{при } x \rightarrow \infty, \beta \text{ фиксировано.} \end{cases}$$

Здесь приведены лишь главные асимптотические члены, множители более слабого роста опущены.

Функция $f(\beta)$ является корнем уравнения $\lambda \beta^2 \Delta_c^a(x) = 1$. Воспользовавшись формулой (3.2), это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{K_1(m\sqrt{x^2})}{m\sqrt{x^2}} = \frac{(2\pi)^2}{(\lambda m^2 \beta^2)^{1/a}},$$

откуда, по определению, $m\sqrt{x^2} = f(m\beta)$, где $f(u)$ — положительная монотонно возрастающая функция, причем

$$f(u) = \begin{cases} \text{const} \cdot u^{1/a} (1 + O(u)) & \text{при } u \rightarrow 0, \\ \frac{2}{a} \ln u + O(\ln \ln u) & \text{при } u \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (4.28)$$

Фурье-образ функции $\mathcal{D}(x)$ легко представить, воспользовавшись результатами гл. V, в следующем виде:

$$\tilde{\mathcal{D}}(q) = \int dx e^{iqx} \mathcal{D}(x) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q) + G(\beta, q^2), \quad (4.29)$$

где

$$G(\beta, q^2) = - \left(\frac{2\pi f(\beta)}{m^2} \right)^2 \frac{J_1(f(\beta)\sqrt{q^2/m^2})}{\sqrt{q^2/m^2}} - \frac{\beta J(f^2, -f^2 q^2/m^2)}{m^2 + q^2} + \\ + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dx^2 \rho(\beta, x^2) J(f^2 x^2/m^2, -f^2 q^2/m^2)}{x^2 + q^2},$$

где $J(a, b)$ дается формулой (V.8.17). Если x^2 и q^2 фиксированы, то при $|\beta| \rightarrow \infty$, учитывая (4.28), получим

$$J\left(\frac{f^2(\beta)x^2}{m^2}, -\frac{f^2(\beta)q^2}{m^2}\right) = O(|\beta|(\sqrt{-q^2/m^2} - x/m)).$$

Здесь выписан лишь главный асимптотический член.

В формуле (4.29) первый член (δ -функция) соответствует случаю, когда между точками, которые соединяет данный пропагатор, нет обмена виртуальной частицей, т. е. точки не соединены обычной линией. Второй и третий члены в точности имеют вид (V.4.13), причем в данном случае функции $V(s)$ и $W(s)$ известны и являются целыми функциями порядка 1/2.

Таким образом, мы видим, что в рамках этого метода может быть построена конечная S -матрица, унитарная в каждом порядке теории возмущений.

Этот метод показывает также, что у нас, по сути дела, имеются достаточно широкие возможности, чтобы получить конечную S -матрицу фактически для любого лагранжиана взаимодействия. Дальнейшая задача состоит в том, чтобы искать физические и математические аргументы, которые помогли бы понять, что означают вводимые нами методы суммирования.

§ 5. Нелокальные методы

Конечную S -матрицу в случае неполиномиальных лагранжианов взаимодействия можно также построить, вводя нелокальный формфактор или в суперпропагатор $\omega(\xi_i \xi_j, x_i - x_j)$ в представлении (V.5.6), или в пропагатор $\Delta_c(x_i - x_j)$. В гл. V было показано, что введение нелокальных формфакторов рассматриваемого нами класса делает конечными матричные элементы S -матрицы во всех порядках теории возмущений.

В этом параграфе будем изучать условия существования функций $S_n(x_1, \dots, x_n)$ в разложении (3.5) и условия сходимости ряда теории возмущений для функционала $S[\varphi]$ в зависимости от вида лагранжиана взаимодействия.

Как и всюду в этой главе, будем работать в евклидовой метрике, предполагая, что соответствующие переходы из псевдоевклидовой в евклидову метрику и наоборот всегда могут быть сделаны (см. гл. V). Будем рассматривать в этом параграфе только случай, когда формфактор вводится в лагранжиан взаимодействия следующим образом:

$$\mathcal{L}_I(x) = gU(K(l^2 \square)\varphi(x)), \quad (5.1)$$

так что причинная функция поля $\Phi(x) = K(l^2 \square)\varphi(x)$ в евклидовой метрике записывается в виде

$$D_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dkV(k^2 l^2) e^{ikx}}{m^2 + k^2}. \quad (5.2)$$

Предполагается, что формфактор $V(k^2 l^2)$ удовлетворяет всем условиям (E). Существенно, что

$$0 < D_c(0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dkV(k^2 l^2)}{m^2 + k^2} < \infty \quad (5.3)$$

и $V(k^2 l^2) \geq 0$.

Относительно функции взаимодействия $U(\varphi)$ будем предполагать, что она аналитична в окрестности точки $\varphi = 0$, так что ряд

$$U(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} \alpha^n \quad (5.4)$$

сходится в некотором круге $|\alpha| < r$. Коэффициенты u_n — вещественные числа. Функция $U(\alpha)$ может быть представлена в виде

$$U(\alpha) = \int d\sigma(\zeta) e^{i\alpha\zeta}, \quad (5.5)$$

где $\sigma(\zeta)$ — некоторая вполне аддитивная мера в комплексной ζ -плоскости такая, что сходится интеграл

$$\int |d\sigma(\zeta)| e^{r|\zeta|} < \infty, \quad (5.6)$$

где r — радиус сходимости ряда (5.4).

Далее, не будем выбирать лагранжиан взаимодействия в нормальной форме. В рамках нелокальной теории это можно сделать, поскольку $D_c(0) < \infty$ согласно предположению (5.3). Ниже будет видно, к чему приводит это предположение.

Тогда для функции $S_n(x_1, \dots, x_n)$ в разложении (3.5) получим

$$\begin{aligned} S_n(x_1, \dots, x_n) &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{ij} D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right\} \prod_{i=1}^n U(\alpha_i) = \\ &= \int d\sigma(\zeta_1) \dots \int d\sigma(\zeta_n) e^{i(\alpha_1 \zeta_1 + \dots + \alpha_n \zeta_n)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{ij} \zeta_i D_{ij} \zeta_j \right\}, \quad (5.7) \end{aligned}$$

где $D_{ij} = D_c(x_i - x_j)$.

Найдем условия, при которых это представление математически определено. Прежде всего заметим, что, с одной стороны, квадратичная форма $\sum_{ij} a_i D_c(x_i - x_j) a_j$ является положительно-определенной при любых вещественных a_1, \dots, a_n , так как

$$\sum_{ij} a_i D_c(x_i - x_j) a_j = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dkV(k^2 l^2)}{m^2 + k^2} \left| \sum_{j=1}^n a_j e^{ikx_j} \right|^2 \geq 0.$$

С другой стороны, для этой формы легко получить оценку сверху

$$\sum_{ij} a_i D_c(x_i - x_j) a_j \leq n D_c(0) (a_1^2 + \dots + a_n^2),$$

причем эта оценка не может быть улучшена. Итак,

$$0 \leq \sum_{ij} a_i D_c(x_i - x_j) a_j \leq n D_c(0) (a_1^2 + \dots + a_n^2). \quad (5.8)$$

Воспользовавшись этим неравенством и полагая в формуле (5.7) $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} |S_n| &\leq \int |d\sigma(\zeta_1)| \dots \int |d\sigma(\zeta_n)| e^{-(\alpha_1 \eta_1 + \dots + \alpha_n \eta_n)} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{ij} \xi_i D_{ij} \xi_j + \frac{1}{2} \sum_{ij} \eta_i D_{ij} \eta_j \right\} \leq \\ &\leq \prod_{j=1}^n \int |d\sigma(\zeta_j)| \exp \left\{ -\alpha_j \eta_j + \frac{n}{2} D_c(0) \eta_j^2 \right\}. \quad (5.9) \end{aligned}$$

Отсюда немедленно следует, что выражение (5.9) математически определено, если сходится интеграл

$$\int |d\sigma(\xi)| e^{N\eta^2} < \infty \quad (5.10)$$

при любых $N > 0$.

Найдем теперь класс функций $U(\alpha)$, удовлетворяющих условиям (5.6) и (5.10). Полагая $\alpha \rightarrow \alpha + i\beta$, получим

$$\begin{aligned} |U(\alpha + i\beta)| &= \left| \int d\sigma(\xi) \exp \{i(\alpha + i\beta)(\xi + i\eta)\} \right| \leq \\ &\leq \int |d\sigma(\xi)| e^{|\alpha| |\eta| + |\beta| |\xi|} \leq \\ &\leq \max_{|\eta|, |\xi|} e^{|\alpha| |\eta| - N |\eta|^2} \cdot e^{|\beta| |\xi| - r |\xi|} \cdot \int |d\sigma(\xi)| e^{N\eta^2 + r |\xi|} \leq \\ &\leq \text{const} \cdot e^{\alpha^2/N} \cdot \max_{|\xi|} \exp \{(|\beta| - r) |\xi|\} \quad (5.11) \end{aligned}$$

при любых $N > 0$.

Из этой оценки следует, что функция $U(\alpha + i\beta)$ должна:

- (1) быть аналитической в некоторой полосе $-\infty < \alpha < \infty$, $-r < \beta < r$;
- (2) расти внутри полосы медленнее любой гауссовской экспоненты, т. е.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pm \infty} |U(\alpha + i\beta)| e^{-\epsilon \alpha^2} = 0$$

для $|\beta| < r$ и любых $\epsilon > 0$.

Для других функций $U(\alpha)$, в частности для функций, имеющих особенности на вещественной оси α , представление (5.7) математически не определено.

Итак, для класса функций $U(\alpha)$, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, S -матрица будет конечна, унитарна и причинна в каждом порядке теории возмущений.

Из оценки (5.9) легко получить, что

$$|S_n(x_1, \dots, x_n)| \leq \text{const} \cdot e^{s(n)}, \quad (5.12)$$

где $s(n) \geq An^2$. Отсюда следует, что ряд теории возмущений довольно сильно расходится. Необходимы какие-либо мощные методы суммирования, чтобы получить конечную полную S -матрицу теории.

В классе функций $U(\alpha)$, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, особое место занимают функции, которые убывают при $\alpha \rightarrow \pm \infty$. Будем рассматривать класс функций $U(\alpha)$, для которых справедливо представление в виде интеграла Фурье (3.17) и выполнено условие (3.18).

Для таких функций представление (5.7) всегда существует:

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_n \tilde{U}(\xi_1) \dots \tilde{U}(\xi_n) e^{i(\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n)} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{ij} \xi_i D_c(x_i - x_j) \xi_j \right\}. \quad (5.13) \end{aligned}$$

Согласно оценке (5.8), имеем

$$|S_n(x_1, \dots, x_n)| \leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi |\tilde{U}(\xi)| \right\}^n. \quad (5.14)$$

Итак, в этом случае выражение (5.13) хорошо определено. Кроме того, оценка (5.14) говорит о том, что ряд теории возмущений сходится. Прежде чем переходить к доказательству сходимости ряда теории возмущений в рассматриваемом здесь случае, нам хотелось бы обсудить выбор лагранжиана взаимодействия в виде нормального или обычного произведения операторов поля.

При получении представления (5.7) и оценки (5.14) предполагалось, что лагранжиан взаимодействия

$$\mathcal{L}_I^{(1)}(x) = g \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \tilde{U}(\xi) e^{i\xi \Phi(x)} \quad (5.15)$$

выбран не в нормально упорядоченной форме. Выберем теперь, как обычно, лагранжиан взаимодействия в нормально упорядоченной форме:

$$\mathcal{L}_I^{(2)}(x) = g \int d\xi \tilde{U}(\xi) : e^{i\xi \Phi(x)} :. \quad (5.16)$$

Тогда, согласно теореме Вика и условию $D_c(0) < \infty$, лагранжиан (5.16) снова можно записать в виде обычного произведения:

$$\mathcal{L}_I^{(2)}(x) = g \int d\xi \tilde{U}(\xi) e^{1/2 D_c(0) \xi^2} e^{i\xi \Phi(x)}. \quad (5.17)$$

Таким образом, мы получили, по сравнению с (5.15), дополнительный множитель

$$\tilde{U}(\xi) \Rightarrow \tilde{U}(\xi) e^{1/2 D_c(0) \xi^2}. \quad (5.18)$$

Для сходимости интегралов в представлении (5.13) для лагранжиана $\mathcal{L}_I^{(2)}$ необходимо, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi |\tilde{U}(\xi)| e^{1/2 D_c(0) \xi^2} < \infty. \quad (5.19)$$

Отсюда следует, что функция $U(\alpha)$ в этом случае должна быть целой функцией в комплексной α -плоскости порядка $\rho \leq 2$.

Если же в лагранжиане $\mathcal{L}_l^{(1)}$ (5.15) перейти к нормальной форме, то получим

$$\mathcal{L}_l^{(1)}(x) = g \int d\xi \tilde{U}(\xi) e^{-1/2 D_c(0) \xi^2} : e^{i\xi \Phi(x)} : . \quad (5.20)$$

Из этого представления следует довольно любопытное следствие. Если функция $U(\alpha)$, определяющая лагранжиан взаимодействия, убывает при $\alpha \rightarrow \pm\infty$, т. е. удовлетворяет условию (5.13), и лагранжиан выбран не в нормальной форме, то после перехода к нормальному произведению и в лагранжиане взаимодействия и в каждом порядке теории возмущений для S -матрицы появляется дополнительный множитель $\exp\left\{-\frac{1}{2} D_c(0) \xi^2\right\}$.

При $l \rightarrow 0$ этот множитель ведет себя как $\exp\left\{-\text{const} \cdot \frac{\xi^2}{l^2}\right\}$. Каждый член ряда теории возмущений $S_n(x_1, \dots, x_n)$ зависит от параметра элементарной длины l таким образом, что

$$\lim_{l \rightarrow 0} S_n(x_1, \dots, x_n) = 0. \quad (5.21)$$

Итак, в рассматриваемом подходе при переходе к точечному взаимодействию при описанных выше условиях реальное взаимодействие полностью исчезает, тогда как в обычной нелокальной теории (полиномиальные и нормально упорядоченные лагранжианы) при $l \rightarrow 0$ возникают обычные ультрафиолетовые расходимости локальной квантовой теории поля.

§ 6. Сходимость ряда теории возмущений

Рассмотренная в предыдущем параграфе модель с неполиномиальным лагранжианом взаимодействия, удовлетворяющим условию

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pm\infty} U(\alpha) = 0, \quad (6.1)$$

и с нелокальной причинной функцией $D_c(x)$, для которой

$$D_c(0) < \infty, \quad (6.2)$$

обладает еще одним очень важным свойством — для этой модели сходится ряд теории возмущений в евклидовой области.

Приведенные в предыдущем параграфе оценки позволяют доказать сходимость ряда теории возмущений для S -матрицы, рассматриваемой как функционал от скалярных функций $\Phi(x)$, только в случае, если вместо константы связи g ввести функцию $g(x)$, характеризующую степень включения взаимодействия. При этом $g(x)$ должна удовлетворять условию

$$\int dx g(x) = gV_4 < \infty, \quad (6.3)$$

где величина V_4 имеет смысл четырехмерного объема. Тогда ряд теории возмущений

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n g(x_1) \dots g(x_n) S_n(x_1, \dots, x_n) \quad (6.4)$$

мажорируется рядом

$$S_M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \int dx g(x) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi |\tilde{U}(\xi)| \right\}^n = \exp \left\{ gV_4 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi |\tilde{U}(\xi)| \right\}. \quad (6.5)$$

Следовательно, ряд (6.4) абсолютно сходится. Полученное условие сходимости еще не имеет отношения к сходимости рядов для различных амплитуд физических процессов, которые не содержат никаких особенностей, связанных с интегрированием по 4-мерному пространству. Однако эта оценка явилась первым обнадеживающим указанием, что ряды теории возмущений должны сходиться и для амплитуд, представимых в виде суммы только связанных графов.

Первое доказательство было проведено Д. Я. Петриной и В. И. Скрипником (1971), которые применили методы статистической физики, используя ту глубокую аналогию, которая существует между квантовой теорией поля и статистической физикой. Они получили систему уравнений типа Кирквуда — Зальцбурга для коэффициентных функций матрицы рассеяния в евклидовой области. Оказалось, что при бесконечном объеме $V_4 \rightarrow \infty$ решение системы уравнений существует, т. е. ряды теории возмущений сходятся, в некотором радиусе сходимости $g < g_{\text{крит}}$.

Другое доказательство, основанное на оценке суммы связанных диаграмм в n -м порядке теории возмущений, было дано А. Г. Басуевым (1973). К изложению этого доказательства мы сейчас и перейдем.

В рассматриваемом нами случае S -матрица, как функционал от скалярного поля $\Phi(x)$, может быть представлена в форме (V.3.4)

$$S[\Phi] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d\mu_1 \dots \int d\mu_n \prod_{i < j} (1 + w_{ij}), \quad (6.6)$$

где

$$d\mu_j = g(x_j) dx_j d\xi_j \tilde{U}(\xi_j) e^{i\xi_j \Phi(x_j)}, \quad (6.7)$$

$$w_{ij} = e^{-\xi_i D_c(x_i - x_j) \xi_j} - 1.$$

Все интегралы, повторяем, записываются в евклидовой метрике.

Как говорилось в гл. V, произведение $\prod_{i < j} (1 + w_{ij})$ представляет собой набор всех связанных и несвязных графов Фейнмана теории возмущений. Из теории перечисления графов (см., например, книгу Ф. Харари (1973)) известно, что в функционале

$$B[\varphi] = \ln S[\varphi] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d\mu_1 \dots \int d\mu_n \left\{ \prod_{i < j} (1 + w_{ij}) \right\}_{\text{св}} \quad (6.8)$$

содержатся только связанные графы теории возмущений. Здесь введено обозначение

$$\left\{ \prod_{i < j} (1 + w_{ij}) \right\}_{\text{св}} = \mathcal{P}_n(1, 2, \dots, n), \quad (6.9)$$

которое означает, что из всевозможных графов, соответствующих произведению $\prod_{i < j} (1 + w_{ij})$, оставлены только все связанные графы с n вершинами.

Удобно для дальнейших вычислений и оценок ввести в функцию w_{ij} параметр λ следующим образом:

$$w_{ij}(\lambda) = e^{-\lambda \Delta_{ij}} - 1, \quad (6.10)$$

где $\Delta_{ij} = \xi_i D_c(x_i - x_j) \xi_j$. Необходимые нам оценки должны быть взяты при $\lambda = 1$.

Доказательство сходимости ряда теории возмущений основано на использовании следующего неравенства:

$$|\mathcal{P}_n| \leq \leq \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \left\{ \left[\sum_{i < j} |\Delta_{ij}| \right]^{n-1} \right\}_{\text{св}} \cdot \exp \left\{ \lambda \max_{\varepsilon_j = \pm 1} \left[- \sum_{i < j} \varepsilon_i \Delta_{ij} \varepsilon_j \right] \right\}. \quad (6.11)$$

причем, согласно (5.8),

$$\lambda \max_{\varepsilon_j = \pm 1} \left[- \sum_{i < j} \varepsilon_i \Delta_{ij} \varepsilon_j \right] \leq \frac{\lambda}{2} D_c(0) (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2).$$

Приступим к доказательству этого неравенства.

Для доказательства нам потребуется тождество, вытекающее из определения функции \mathcal{P}_n (6.9). Заметим, что в операциях, которые мы будем проводить ниже, учитывается только понятие связности рассматриваемых графов и непосредственно не будет использоваться явный вид функций Δ_{ij} , которые ставятся в соответствие ребрам графов. Поэтому выкладки, проводимые ниже, будут справедливы для любой матрицы $\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$. Тождество записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{P}_n(1, \dots, n) &= \\ &= - \sum_{1 \leq k < l \leq n} \Delta_{kl} e^{-\lambda \Delta_{kl}} \mathcal{P}_{n-1}((kl), 1, \dots, k-1, k+1, \dots, l-1, l+1, \dots, n). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Здесь $\mathcal{P}_{n-1}((kl), 1, \dots, k-1, k+1, \dots, l-1, l+1, \dots, n)$ — функция от $n-1$ точек — вершин графа, под которой понимается следующее.

Обозначим множество всех n вершин $\{1, \dots, n\}$ через $M^{(n)}$. Из этого множества можно выделить две какие-либо вершины, например k и l , и считать эту объединенную вершину за одну точку в образовавшемся множестве $n-1$ вершин:

$$M_{(kl)}^{(n-1)} = \{(kl), 1, \dots, k-1, k+1, \dots, l-1, l+1, \dots, n\}. \quad (6.13)$$

Тогда ребру графа, соединяющему вершину (kl) нового множества с любой из оставшихся $n-2$ вершин, сопоставляется пропагатор $\Delta_{kj} + \Delta_{lj}$, т. е. это ребро должно соединять точку j с одной из выделенных вершин k или l множества $M^{(n)}$. Остальные вершины соединяются, как и прежде, пропагаторами Δ_{ij} .

Все вышесказанное есть не что иное, как графическая интерпретация выделения слагаемого Δ_{kl} из суммы

$$\sum_{(i < j) \in M^{(n)}} \Delta_{ij} = \Delta_{kl} + \sum_{(i' < j') \in M_{(kl)}^{(n-1)}} \bar{\Delta}_{i'j'}, \quad (6.14)$$

где переменные i', j' принимают все значения из нового множества $M_{(kl)}^{(n-1)}$ (6.13). При этом вершину (kl) с остальными соединяет пропагатор

$$\bar{\Delta}_{i'j'} = \Delta_{i'k} + \Delta_{il} \quad (j' = (kl)), \quad (6.15)$$

другие вершины соединяются обычными пропагаторами

$$\bar{\Delta}_{i'j'} = \Delta_{i'j'} \quad (i', j' \neq (kl) \text{ в } M_{(kl)}^{(n-1)}). \quad (6.16)$$

Тогда тождество (6.12) получается очевидным образом. Необходимо взять связную часть от равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \prod_{(i < j) \in M^{(n)}} (1 + w_{ij}(\lambda)) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \exp \left\{ - \lambda \sum_{i < j} \Delta_{ij} \right\} = \\ &= - \sum_{(k < l) \in M^{(n)}} \Delta_{kl} e^{-\lambda \Delta_{kl}} \cdot \exp \left\{ - \lambda \sum_{(i' < j') \in M_{(kl)}^{(n-1)}} \bar{\Delta}_{i'j'} \right\} = \\ &= - \sum_{(k < l) \in M^{(n)}} \Delta_{kl} e^{-\lambda \Delta_{kl}} \prod_{(i' < j') \in M_{(kl)}^{(n-1)}} (1 + \bar{w}_{i'j'}(\lambda)). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Операция взятия связной части является линейной, поэтому она переставима с операцией дифференцирования. Так как в каждом слагаемом в (6.17) точки k и l соединены, по крайней мере, одним пропагатором Δ_{kl} , то от второго произведения надо брать связную часть по оставшимся аргументам из множества $M_{(kl)}^{(n-1)}$ (6.13). Отсюда следует справедливость (6.12).

Неравенство (6.11) докажем по индукции. При $n = 2$, очевидно, имеем

$$|\mathcal{P}_2| = |e^{-\lambda\Delta_{12}} - 1| \leq \lambda |\Delta_{12}| e^{\lambda |\Delta_{12}|}. \quad (6.18)$$

При $n = 3$, воспользовавшись тождеством (6.12) и формулами (6.18) и (6.15), получим

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{P}_3 \right| &\leq |\Delta_{12}| e^{-\lambda\Delta_{12}} \mathcal{P}_2((12), 3) + |\Delta_{13}| e^{-\lambda\Delta_{13}} \mathcal{P}_2((13), 2) + \\ &+ |\Delta_{23}| e^{-\lambda\Delta_{23}} \mathcal{P}_2((23), 1) \leq \\ &\leq \lambda \{ |\Delta_{12}| + |\Delta_{13}| + |\Delta_{23}| + |\Delta_{12}| + |\Delta_{13}| + |\Delta_{23}| \} \times \\ &\times \exp \{ \lambda \max [(-\Delta_{12} + |\Delta_{13}| + |\Delta_{23}|), (-\Delta_{13} + |\Delta_{12}| + |\Delta_{23}|), \\ &(-\Delta_{23} + |\Delta_{12}| + |\Delta_{13}|)] \}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что в данном случае максимальный показатель в экспоненте

$$\lambda \max_{\varepsilon_j = \pm 1} \left\{ - \sum_{i < j} \varepsilon_i \Delta_{ij} \varepsilon_j \right\} \leq \frac{\lambda}{2} D_0(0) (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)$$

согласно оценке (5.8). Тогда неравенство принимает вид

$$\left| \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{P}_3 \right| \leq \leq \lambda \{ (|\Delta_{12}| + |\Delta_{23}| + |\Delta_{31}|)^2 \}_{\text{св}} \exp \left\{ \lambda \max_{\varepsilon_j = \pm 1} \left(- \sum_{i < j} \varepsilon_i \Delta_{ij} \varepsilon_j \right) \right\},$$

откуда получаем, учитывая, что $\mathcal{P}_3|_{\lambda=0} = 0$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_3| &\leq \int_0^\lambda d\lambda' \left| \frac{\partial}{\partial \lambda'} \mathcal{P}_3 \right| \leq \\ &\leq \frac{\lambda^2}{2} \{ (|\Delta_{12}| + |\Delta_{23}| + |\Delta_{31}|)^2 \}_{\text{св}} \exp \left\{ \lambda \max_{\varepsilon_j = \pm 1} \left(- \sum_{i < j} \varepsilon_i \Delta_{ij} \varepsilon_j \right) \right\}. \end{aligned}$$

Итак, неравенство (6.11) справедливо для $n = 2$ и $n = 3$.

Пусть теперь неравенство (6.11) справедливо для \mathcal{P}_{n-1} . Тогда, используя (6.12) и (6.11), для $n - 1$ получим

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{P}_n \right| &\leq \sum_{(k < l) \in M^{(n)}} |\Delta_{kl}| \cdot e^{-\lambda\Delta_{kl}} \cdot |\mathcal{P}_{(n-1)}((kl), \dots)| \leq \\ &\leq \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} \sum_{(k < l) \in M^{(n)}} |\Delta_{kl}| \left\{ \left[\sum_{(i < j) \in M_{(kl)}^{(n-1)}} |\bar{\Delta}_{ij}| \right]^{n-2} \right\}_{\text{св}} e^{-\lambda\mathcal{D}_{kl}}, \quad (6.19) \end{aligned}$$

где

$$-\lambda\mathcal{D}_{kl} = -\lambda\Delta_{kl} + \lambda \max_{\varepsilon_j = \pm 1} \left(- \sum_{(i < j) \in M_{(kl)}^{(n-1)}} \varepsilon_i \bar{\Delta}_{ij} \varepsilon_j \right).$$

Рассмотрим сначала выражение $-\lambda\mathcal{D}_{kl}$, стоящее в показателе экспоненты. Пусть набор чисел $\bar{\varepsilon}_j$, где $j \in M_{(kl)}^{(n-1)}$, осуществляет максимум суммы, тогда, согласно определениям (6.13), (6.14) и (6.15), получим

$$\begin{aligned} -\lambda\mathcal{D}_{kl} &= -\lambda\Delta_{kl} - \lambda \sum_j (\Delta_{kj} + \Delta_{lj}) \bar{\varepsilon}_{(kl)} \bar{\varepsilon}_j - \lambda \sum_{\substack{i < j \\ (i, j \neq k, l)}} \Delta_{ij} \bar{\varepsilon}_i \bar{\varepsilon}_j = \\ &= -\lambda \sum_{i < j} \bar{\varepsilon}_i \Delta_{ij} \bar{\varepsilon}_j \leq \lambda \max_{\varepsilon_j = \pm 1} \left(- \sum_{i < j} \varepsilon_i \Delta_{ij} \varepsilon_j \right)_i. \end{aligned}$$

Здесь мы считаем, что $\bar{\varepsilon}_k = \bar{\varepsilon}_l = \bar{\varepsilon}_{(kl)}$. Таким образом, полученная оценка сверху для \mathcal{D}_{kl} не зависит от (kl) .

Для оставшейся суммы в (6.19) справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sum_{k < l} |\Delta_{kl}| \left\{ \left[\sum_{(i' < j') \in M_{(kl)}^{(n-1)}} |\bar{\Delta}_{i'j'}| \right]^{n-2} \right\}_{\text{св}} &= \\ &= \left\{ \left[\sum_{(i < j) \in M^{(n)}} |\Delta_{ij}| \right]^{n-1} \right\}_{\text{св}}. \quad (6.20) \end{aligned}$$

Действительно, в каждом связном графе из n вершин, определяемом произведением в правой части (6.20), число пропагаторов равно $n - 1$. Значит, эти графы представляют собой так называемые деревья. Поэтому выделение одного произвольного пропагатора, или ребра, Δ_{kl} означает, что остальные $n - 2$ пропагаторов, или ребер, должны образовывать связный граф из $n - 1$ вершин, среди которых две вершины k и l принимаются за одну. Таким образом, мы получаем в точности определение множества $M_{(kl)}^{(n-1)}$ (6.13). Это доказывает справедливость (6.20).

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{P}_n \right| &\leq \\ &\leq \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} \left\{ \left[\sum_{i < j} |\Delta_{ij}| \right]^{n-1} \right\}_{\text{св}} \exp \left\{ \lambda \max_{\varepsilon_j = \pm 1} \left(- \sum_{i < j} \varepsilon_i \Delta_{ij} \varepsilon_j \right) \right\}, \end{aligned}$$

откуда немедленно следует (6.11).

При помощи доказанного неравенства (6.11) рассмотрим сходимость ряда, определяющего поправку к энергии вакуума, т. е.

$$\langle 0 | S | 0 \rangle = S[\varphi]|_{\varphi=0} = \exp \{ B[\varphi] \}|_{\varphi=0} = \exp \{ V_4 \Delta E \}. \quad (6.21)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
 |V_4 \Delta E| &= |B[\varphi]|_{\varphi=0} \leq \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{l=1}^n \int dx_l g(x_l) \int d\xi_l |\tilde{U}(\xi_l)| |\mathcal{P}_n(x_1, \dots, x_n)| \leq \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n-1)!} \prod_{l=1}^n \int d\xi_l |\tilde{U}(\xi_l)| e^{\frac{1}{2} D_c(0) \xi_l^2} \int dx_l g(x_l) \times \\
 &\quad \times \left\{ \left[\sum_{i < j} |\xi_i D_c(x_i - x_j) \xi_j| \right]^{n-1} \right\}_{\text{св}}. \quad (6.22)
 \end{aligned}$$

Как говорилось выше, графы, которые присутствуют в (6.22) — это графы-деревья. Число пропагаторов в них равно $n-1$, поэтому интегрирование по dx дает в пределе $g(x) \rightarrow g$:

$$\begin{aligned}
 \prod_{l=1}^n \int dx_l g(x_l) \left\{ \left[\sum_{i < j} |\xi_i D_c(x_i - x_j) \xi_j| \right]^{n-1} \right\}_{\text{св}} &= \\
 = g V_4 \left[g \int dx D_c(x) \right]^{n-1} \left\{ \left[\sum_{i < j} |\xi_i| |\xi_j| \right]^{n-1} \right\}_{\text{св}} &\leq \\
 \leq g^n V_4 \left[\frac{V(0)}{m^2} \right]^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j| \right)^{2n-2}. \quad (6.23)
 \end{aligned}$$

Далее необходимо провести оценку интеграла

$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_n \prod_{l=1}^n \tilde{U}(\xi_l) e^{\frac{1}{2} D_c(0) \xi_l^2} \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j| \right)^{2n-2}.$$

Покажем, что если

$$|\tilde{U}(\xi)| e^{\frac{1}{2} D_c(0) \xi^2} \leq C e^{-b|\xi|^\sigma}, \quad (6.24)$$

то

$$C_n \leq AB^n n! (n-1)!, \quad (6.25)$$

где A , B и C — некоторые постоянные, связанные с видом функции взаимодействия $\tilde{U}(\xi)$. В конце предыдущего параграфа было проведено обсуждение различных возможностей в выборе лагранжиана в виде нормального или обычного произведения и связанного с этим поведения функции $\tilde{U}(\xi)$ при больших ξ .

Получим оценку (6.25). Имеем

$$\begin{aligned}
 C_n &\leq C^n 2^n \int_0^\infty d\xi_1 \dots \int_0^\infty d\xi_n e^{-b(\xi_1^\sigma + \dots + \xi_n^\sigma)} \left(\sum_{j=1}^n \xi_j \right)^{2n-2} = \\
 &= (2C)^n \int_0^\infty du u^{3n-2} \int_0^1 \dots \int_0^1 dt_1 \dots dt_n \delta(1-t_1 - \dots - t_n) e^{-u^\sigma b(t_1^\sigma + \dots + t_n^\sigma)}.
 \end{aligned}$$

Замечая далее, что

$$\min_{\substack{0 \leq t_1 + \dots + t_n \leq 1 \\ 0 \leq t_j}} (t_1^\sigma + \dots + t_n^\sigma) = n^{1-\sigma},$$

$$\int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 dt_n \delta(1-t_1 - \dots - t_n) = \frac{1}{(n-1)!},$$

получим

$$C_n \leq \frac{(2C)^n}{(n-1)!} \int_0^\infty du u^{3n-2} e^{-n^{1-\sigma} u^\sigma b} = \frac{(2C)^n}{\sigma b \frac{3n-1}{\sigma}} \cdot \frac{n^{3n-1} \Gamma\left(\frac{3n-1}{\sigma}\right)}{(n-1)! n^{\frac{3n-1}{\sigma}}},$$

откуда при $n \rightarrow \infty$ следует оценка (6.25).

Собирая полученные оценки (6.25) и (6.23) и подставляя их в ряд (6.22), получим

$$|\Delta E| \leq \text{const} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} g^n \left[\frac{BV(0)}{2m^2} \right]^n,$$

откуда следует, что ряд теории возмущений будет сходиться при

$$g < g_{\text{крит}} = \frac{2m^2}{BV(0)}. \quad (6.26)$$

Можно легко убедиться, что аналогичные условия сходимости могут быть получены для любых матричных элементов S -матрицы. При этом условие сходимости ряда (6.26) остается тем же самым для любых амплитуд.

Проблема, которая возникает в связи с этим немаловажным результатом, состоит в том, чтобы выяснить, что происходит с амплитудами физических процессов при продолжении в физическую область. Два факта вселяют надежду, что, может быть, на этом пути удастся получить первую нетривиальную модель релятивистски инвариантной нелокальной квантовой теории поля, удовлетворяющую всем необходимым аксиомам квантовой теории поля. Во-первых, ряд теории возмущений сходится в евклидовой области и, во-вторых, в физической области S -матрица унитарна в каждом порядке теории возмущений.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Всякое заблуждение имеет крупицу правды, но правды преждевременной, которая по этой причине и именуется заблуждением.

М. Е. Салтыков-Щедрин. Благонамеренные речи.

§ 1. Введение нелокальности в электродинамику

Наибольший успех в квантовой теории поля выпал на долю квантовой электродинамики, описывающей динамику взаимодействия фотонов и фермионов (электронов, μ -мезонов, протонов и т. д.). Здесь удалось построить непротиворечивым образом S -матрицу, удовлетворяющую всем общим требованиям локальной квантовой теории поля, и дать хороший математический аппарат, позволяющий рассчитывать фактически любые эффекты взаимодействия фотонов с заряженными фермионами. Более того, квантовая электродинамика блестяще подтвердилась на опыте. Вплоть до сегодняшнего дня экспериментально не найдено ни одного эффекта, который бы не укладывался в рамки локальной квантовой электродинамики.

За последние годы заметно усилился интерес к вопросу, до каких пределов справедлива квантовая электродинамика, где границы ее применимости (см. обзор С. Бродского и С. Дрелла (1972) и доклад Б. Рихтера на XVII Международной конференции по физике элементарных частиц в Лондоне (1974)).

Для оценки ожидаемых экспериментальных следствий, связанных с отклонением от локальности квантовой электродинамики, необходимо иметь хорошую непротиворечивую схему построения нелокальной теории, удовлетворяющей всем общим требованиям квантовой теории поля: ковариантности, унитарности, причинности, градиентной инвариантности, конечности.

Обычно отклонение экспериментально измеренного сечения некоторого процесса от теоретически вычисленного, согласно локальной теории, параметризуется формулами типа $\sigma_{\text{эксп}}/\sigma_{\text{теор}} = 1 + m^2/M^2$ или $\sigma_{\text{эксп}}/\sigma_{\text{теор}} = 1 + q^2/M^2$. Затем находятся пределы возможного изменения нового параметра M . Подобная параметризация имеет весьма далекое отношение к непротиворе-

чивому описанию нелокального взаимодействия. Кроме того, параметры M , вообще говоря, должны быть разными в различных экспериментах. И поэтому результаты одного опыта никак не связаны с результатами другого.

Имеющиеся схемы построения внутренне непротиворечивой нелокальной электродинамики основаны на предписаниях, заимствованных из метода регуляризации Паули — Вилларса. О недостатках таких модификаций теории мы подробно говорили в гл. I.

В этой главе мы применим методы, развитые в предыдущих главах, к описанию электромагнитных взаимодействий заряженных частиц. По сравнению с теорией скалярного поля, развитой выше, в теории электромагнитных взаимодействий появляется требование градиентной инвариантности, что привносит определенные трудности при построении S -матрицы. Это требование накладывает свои ограничения на используемые методы построения конечной теории в случае нелокального взаимодействия токов заряженных частиц с электромагнитным полем.

В данной главе мы изложим вариант нелокальной квантовой электродинамики, удовлетворяющей всем необходимым аксиомам гл. III. Будет предложено ковариантное описание взаимодействия фотонов с протяженным электроном, т. е. электроном, который представляет собой заряженный шар радиуса l с некоторым распределением плотности заряда внутри этого шара.

С точки зрения описания эксперимента мы предлагаем в рамках самосогласованной квантовой теории поля некоторую феноменологическую схему, параметрами которой являются l — «элементарная длина» (на самом деле — размер заряженной частицы) и некоторая функция, описывающая распределение заряда внутри шара радиуса l . Поскольку l достаточно мало, в формулы, описывающие различные физические процессы, войдут несколько моментов функции распределения заряда. Преимущество предлагаемой схемы состоит в том, что l и параметры, описывающие распределение заряда электрона, едины для всей совокупности экспериментов по квантовой электродинамике.

В изложении этой главы использованы работы автора (1972, 1973, 1974в), а также работы автора совместно с О. А. Могилевским (1972) и Х. Намсраем (1975) и диссертация О. А. Могилевского (1975).

Каким же образом следует ввести нелокальность в электродинамику? Как известно, взаимодействие полей заряженных частиц с электромагнитным полем определяется требованием калибровочной инвариантности. Это означает, что при описании электромагнитного поля потенциалами A_μ физическое содержание теории не изменится при калибровочном преобразовании

$$A_\mu(x) \Rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x). \quad (1.1)$$

так как тензор электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x)$$

инвариантен по отношению к калибровочному преобразованию (1.1).

Обычно требуют, чтобы лагранжиан системы взаимодействующих заряженных полей Φ_j с электромагнитным полем A_μ был инвариантен относительно группы градиентных преобразований:

$$\begin{cases} A_\mu(x) \Rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x), \\ \Phi_j(x) \Rightarrow \Phi_j(x) e^{iq_j f(x)}, \\ \Phi_j^*(x) \Rightarrow \Phi_j^*(x) e^{-iq_j f(x)}, \end{cases} \quad (1.2)$$

где q_j означает заряд поля Φ_j . Инвариантность полного лагранжиана $\mathcal{L}(\Phi_j, \Phi_j^*, A_\mu)$ относительно градиентной группы (1.2) приводит к сохранению тока

$$\partial_\mu J_\mu(x) = 0, \quad (1.3)$$

где

$$J_\mu(x) = i \sum_j q_j \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \Phi_j^*(x))} \Phi_j^*(x) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \Phi_j(x))} \Phi_j(x) \right\}. \quad (1.4)$$

Следует подчеркнуть, что градиентное преобразование (1.2) уже подразумевает локальность взаимодействия электромагнитного поля с заряженными полями. Единственной электромагнитной характеристикой поля Φ_j является его заряд q_j , который фигурирует в преобразованиях (1.2). Явный вид лагранжиана взаимодействия электромагнитного поля с заряженными полями выбирается обычно согласно принципу «минимальности», который гласит, что при действии на переменную поля Φ_j оператором ∂_μ он заменяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Phi_j(x) &\Rightarrow \{\partial_\mu - iq_j A_\mu(x)\} \Phi_j(x), \\ \partial_\mu \Phi_j^*(x) &\Rightarrow \{\partial_\mu + iq_j A_\mu(x)\} \Phi_j^*(x). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Эта общепринятая процедура приводит ко всем трудностям, возникающим в локальной квантовой теории поля.

Наше нелокальное обобщение теории электромагнитных взаимодействий состоит в следующем. Мы предполагаем, что вместо группы градиентных преобразований (1.2) имеют место следующие преобразования:

$$\begin{cases} A_\mu(x) \Rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x), \\ \Phi_j(x) \Rightarrow \Phi_j(x) \exp \left\{ iq_j \int dx' K_j \left(\frac{x-x'}{l_j} \right) f(x') \right\}, \\ \Phi_j^*(x) \Rightarrow \Phi_j^*(x) \exp \left\{ -iq_j \int dx' K_j \left(\frac{x-x'}{l_j} \right) f(x') \right\}, \end{cases} \quad (1.6)$$

где $K_j(x/l_j)$ — некоторая вещественная, вообще говоря, обобщенная функция (формфактор), нормированная условием

$$\int dx K_j \left(\frac{x}{l_j} \right) = 1. \quad (1.7)$$

Параметр l_j («элементарная длина») характеризует размер области нелокального взаимодействия.

Группа преобразований (1.6) отличается от (1.2) изменением фазы преобразования заряженных полей Φ_j . При градиентных преобразованиях с постоянной фазой $f = \text{const}$ преобразования (1.6) совпадают с общепринятыми (1.2), поскольку функция K_j нормирована условием (1.7).

Преобразования (1.6) с произвольной функцией $f(x)$ формально гарантируют сохранение электромагнитного тока заряженных полей (1.3), причем в этом случае имеем

$$\begin{aligned} J_\mu(x) &= \\ &= i \sum_j q_j \int dx' K_j \left(\frac{x-x'}{l_j} \right) \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \Phi_j^*(x'))} \Phi_j^*(x') - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \Phi_j(x))} \Phi_j(x) \right\}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Локальный вариант получается при $K_j \left(\frac{x-x'}{l_j} \right) = \delta(x-x')$.

Принцип «минимальности» электромагнитного взаимодействия в нелокальном случае вместо (1.5) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Phi_j(x) &\Rightarrow \left\{ \partial_\mu - iq_j \int dx' K_j \left(\frac{x-x'}{l_j} \right) A_\mu(x') \right\} \Phi_j(x), \\ \partial_\mu \Phi_j^*(x) &\Rightarrow \left\{ \partial_\mu + iq_j \int dx' K_j \left(\frac{x-x'}{l_j} \right) A_\mu(x') \right\} \Phi_j^*(x). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Каков физический смысл калибровочных преобразований заряженных полей в (1.6)? Величины q_j , l_j , $K_j \left(\frac{x-x'}{l_j} \right)$ характеризуют заряженное поле, а не электромагнитное. Если, как говорилось выше, q_j определяет заряд поля Φ_j , то функция $K_j \left(\frac{x-x'}{l_j} \right)$ должна характеризовать его пространственное распределение, а параметр l_j должен определять размер этого пространственного распределения. В данной интерпретации параметр l_j не является «элементарной длиной», под которой обычно понимается некоторая новая фундаментальная постоянная размерности длины, одинаковая для всех полей заряженных

частиц. В нашем подходе каждое поле заряженных частиц может характеризоваться своими параметрами q_j , l_j и $K_j\left(\frac{x-x'}{l_j}\right)$, поскольку, вообще говоря, каждая частица может иметь свой собственный заряд и свое пространственное распределение заряда, отличающееся от других частиц.

В качестве иллюстрации рассмотрим стационарную картину, когда поля не зависят от времени. Групповые преобразования (1.6) в этом случае запишутся так:

$$\begin{aligned} A_0(\mathbf{x}) &\Rightarrow A_0(\mathbf{x}), \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) &\Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \partial f(\mathbf{x}), \\ \Phi_j(\mathbf{x}) &\Rightarrow \Phi_j(\mathbf{x}) \exp\left\{iq_j \int d\mathbf{x}' K_j\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{l_j}\right) f(\mathbf{x}')\right\}, \\ \Phi_j^*(\mathbf{x}) &\Rightarrow \Phi_j^*(\mathbf{x}) \exp\left\{-iq_j \int d\mathbf{x}' K_j\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{l_j}\right) f(\mathbf{x}')\right\}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Вектор тока в этом случае будет иметь вид

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sum_j \int d\mathbf{x}' K_j\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{l_j}\right) \mathbf{J}_j(\mathbf{x}'), \quad (1.11)$$

где

$$\mathbf{J}_j(\mathbf{x}) = iq_j \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial \Phi_j^*(\mathbf{x}))} \Phi_j^*(\mathbf{x}) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial \Phi_j(\mathbf{x}))} \Phi_j(\mathbf{x}) \right\}. \quad (1.12)$$

Поэтому электромагнитное взаимодействие вида $\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{J}(\mathbf{x})$ означает, что вектор потенциала электромагнитного поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ связан с локальным током j -й заряженной частицы $\mathbf{J}_j(\mathbf{x})$ через некоторый пространственный формфактор $K_j\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{l_j}\right)$. А это означает, что заряд частицы распределен в пространстве и это распределение характеризуется функцией $K_j\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{l_j}\right)$.

В случае взаимодействия электромагнитного и электронно-позитронного полей Дирака полный лагранжиан классических полей имеет вид

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_{A,0}(x) + \mathcal{L}_{e,0}(x) + \mathcal{L}_I(x), \quad (1.13)$$

где

$$\mathcal{L}_{A,0}(x) = -\frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu(x) \partial_\nu A_\mu(x), \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{e,0}(x) &= \bar{\psi}(x) (i\hat{\partial} - m) \psi(x), \\ \mathcal{L}_I(x) &= e\bar{\psi}(x) \hat{\mathcal{A}}(l, x) \psi(x). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь

$$\hat{\mathcal{A}}_\mu(l, x) = \int dx' K\left(\frac{x-x'}{l}\right) A_\mu(x'), \quad (1.16)$$

e — заряд электрона. Лагранжиан свободного электромагнитного поля $\mathcal{L}_{A,0}(x)$ записан с учетом условия Лоренца $\partial_\mu A_\mu(x) = 0$.

Калибровочная группа (1.6) в этом случае записывается в виде

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\Rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x), \\ \psi(x) &\Rightarrow \psi(x) \exp\left\{ie \int dx' K\left(\frac{x-x'}{l}\right) f(x')\right\}, \\ \bar{\psi}(x) &\Rightarrow \bar{\psi}(x) \exp\left\{-ie \int dx' K\left(\frac{x-x'}{l}\right) f(x')\right\}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

§ 2. Постановка задачи

При изучении лагранжиана (1.13) с калибровочной группой (1.17) возникают следующие проблемы.

I. Как квантовать систему (1.13)? Можно ли построить канонический формализм и полностью провести динамическое описание квантовополевой системы (1.13)?

II. Как построить S -матрицу? Какие условия должны быть на нее наложены? Может ли быть она сделана конечной?

III. Каков физический смысл функции $K(x/l)$? Каково ее происхождение? Может ли быть она выбрана однозначно?

Ответ на первую группу вопросов был дан в гл. IV и V. Этим подходом мы будем пользоваться при построении квантовой электродинамики с нелокальным взаимодействием.

Построение S -матрицы будет проведено согласно идеям, изложенным в гл. III, и методам, о которых подробно говорилось в последующих главах. Обеспечение градиентной инвариантности теории предъявляет дополнительные требования к вводимой регуляризации, и об этом мы будем говорить подробнее ниже.

Наша задача состоит в следующем. Мы будем исходить из принципа соответствия, согласно которому при бесконечно малом заряде e S -матрица имеет вид

$$S = 1 + i \int dx e(x) \bar{\psi}(x) \hat{\mathcal{A}}(l, x) \psi(x). \quad (2.1)$$

Зная S -матрицу при бесконечно малом заряде, необходимо в рамках теории возмущений найти представление S -матрицы в форме функционального разложения по нормальным произведениям асимптотических не взаимодействующих полей —

электромагнитного поля $A_\mu(x)$ и поля электронов $\psi(x)$:

$$\begin{aligned}
 S = & \sum_{m, n, l} \frac{1}{m!n!l!} \int dx_1 \dots \int dx_m \int dy_1 \dots \int dy_n \int dz_1 \dots \int dz_l \times \\
 & \times F_{\alpha_1 \dots \alpha_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{\mu_1 \dots \mu_l} (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_l) \times \\
 & \times : \psi_{\alpha_1}(x_1) \dots \psi_{\alpha_m}(x_m) \bar{\psi}_{\beta_1}(y_1) \dots \bar{\psi}_{\beta_n}(y_n) A_{\mu_1}(z_1) \dots A_{\mu_l}(z_l) : = \\
 = & \sum_{m, n, l} \frac{1}{m!n!l!} \int dp_1 \dots \int dp_m \int dk_1 \dots \int dk_n \int dq_1 \dots \int dq_l \times \\
 & \times \tilde{F}_{\alpha_1 \dots \alpha_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{\mu_1 \dots \mu_l} (p_1, \dots, p_m, k_1, \dots, k_n, q_1, \dots, q_l) \times \\
 & \times : \psi_{\alpha_1}(p_1) \dots \psi_{\alpha_m}(p_m) \bar{\psi}_{\beta_1}(k_1) \dots \bar{\psi}_{\beta_n}(k_n) A_{\mu_1}(q_1) \dots A_{\mu_l}(q_l) : . \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Здесь операторы $A_\mu(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют свободным уравнениям

$$\square A_\mu(x) = 0, \quad (i\hat{\partial} - m)\psi(x) = 0 \quad (2.3)$$

с дополнительным условием Лоренца

$$\partial_\mu A_\mu^{(-)}(x) | 0 \rangle = 0. \quad (2.4)$$

Рассматриваемый вариант теории основывается на физических предположениях и аксиомах, изложенных в гл. III. В этом подходе для построения физической приемлемой теории достаточно указать способ построения S -матрицы, который приводит к матрице рассеяния, удовлетворяющей всем перечисленным аксиомам.

Наша задача состоит в том, чтобы найти S -матрицу в виде ряда по теории возмущений. Формально, по аналогии с локальной теорией, S -матрица записывается в виде

$$S = T \exp \left\{ i \int dx e(x) \bar{\psi}(x) \hat{\mathcal{A}}(l, x) \psi(x) \right\}. \quad (2.5)$$

Для получения ряда теории возмущений необходимо разложить экспоненту в (2.5) в ряд по $e(x)$ и перейти к N -произведению операторов поля $A_\mu(x)$ и $\psi(x)$ согласно теореме Вика.

По определению, будем считать, что «хронологическая» свертка операторов фермионного поля электронов будет обычной:

$$S(x-y) = \langle 0 | T(\psi(x) \bar{\psi}(y)) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dpe^{-ip(x-y)}}{m - \hat{p} - i\epsilon}, \quad (2.6)$$

а «причинная» функция «размазанного» электромагнитного поля запишется в виде

$$\begin{aligned}
 D_{\mu\nu}(x-y) = g_{\mu\nu} D(x-y) = \overline{\mathcal{A}_\mu(l, x) \mathcal{A}_\nu(l, y)} = \\
 = \int dx' \int dy' K\left(\frac{x-x'}{l}\right) K\left(\frac{y-y'}{l}\right) \langle 0 | T(A_\mu(x) A_\nu(y)) | 0 \rangle = \\
 = \frac{-g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dk [\tilde{K}(k^2 l^2)]^2 e^{-ik(x-y)}}{-k^2 - i\epsilon}, \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

где

$$K(k^2 l^2) = \int dx e^{ikx} K\left(\frac{x}{l}\right). \quad (2.8)$$

Таким образом, мы получаем обычный ряд теории возмущений с тем единственным отличием, что причинные функции фотонного поля

$$\Delta_{\mu\nu}(x-y) = -g_{\mu\nu} \Delta(x-y) = \frac{-g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dke^{-ik(x-y)}}{-k^2 - i\epsilon} \quad (2.9)$$

заменяются на функцию (2.7).

Обсудим теперь формальное определение S -матрицы (2.5). Как подробно обсуждалось в § 6 гл. III, в локальной и тем более нелокальной квантовой теории поля T -произведение, по существу, не означает операцию строгого упорядочения операторов поля по времени, поскольку в ряду теории возмущений присутствуют ультрафиолетовые расходимости. Поэтому символически схема построения конечной S -матрицы по теории возмущений может быть представлена в виде

$$S = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} T_\Lambda \exp \left\{ i \int dx \mathcal{L}_I(x, \Lambda) \right\}, \quad (2.10)$$

где T_Λ обозначает хронологическое упорядочение операторов поля плюс некоторую регуляризационную процедуру, которая делает конечными все матричные элементы ряда теории возмущений, Λ — параметр регуляризации. Предел $\Lambda \rightarrow \infty$ означает снятие регуляризации.

Мы сформулируем вспомогательную регуляризационную процедуру таким образом, чтобы предел в (2.10) существовал и S -матрица удовлетворяла всем необходимым требованиям в каждом порядке теории возмущений. При этом лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_I(x)$ не будет содержать бессмысленных бесконечных контрчленов. Если же в теории надо будет сделать какие-либо перенормировки, то они будут означать не процедуру устранения расходимостей, а переход от одних, менее удобных, к другим, более удобным физическим параметрам. Все перенормировочные постоянные будут конечны.

В нелокальной квантовой электродинамике лагранжиан взаимодействия будет формально иметь вид точно такой же,

как и в локальной теории (см., например, книгу Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова (1973)):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(x) = & e : \bar{\psi}(x) \hat{\mathcal{A}}(l, x) \psi(x) : + \\ & + e(Z_1 - 1) : \bar{\psi}(x) \hat{\mathcal{A}}(l, x) \psi(x) : - \delta m : \bar{\psi}(x) \psi(x) : + \\ & + (Z_2 - 1) : \bar{\psi}(x) (i\hat{D} - m) \psi(x) : - (Z_3 - 1) \frac{1}{4} : F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) : . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Только в случае нелокальной теории перенормировочные константы $Z_1, Z_2, Z_3, \delta m$ будут конечны, причем в силу тождества Уорда $Z_1 = Z_2$.

§ 3. Нелокальный формфактор $K(x-y)$

Остановимся на основном вопросе нелокальной теории: в классе каких функций следует искать формфактор $K\left(\frac{x-y}{l}\right)$, чтобы построенная с его помощью S -матрица удовлетворяла всем перечисленным выше требованиям?

Как было показано в предыдущих главах при изучении нелокальной теории скалярного квантованного поля, наиболее критическим к выбору класса допустимых формфакторов является требование унитарности S -матрицы. Именно, оказалось, что унитарная S -матрица может быть построена в случае, если формфактор $K\left(\frac{x-y}{l}\right)$ релятивистски инвариантен и функция

$$K(k^2 l^2) = \int dx e^{ikx} K\left(\frac{x}{l}\right) \quad (3.1)$$

является, во-первых, целой аналитической функцией в k^2 -плоскости и, во-вторых, достаточно быстро убывает в пространственноподобном направлении, т. е. при $k^2 \rightarrow -\infty$.

В случае квантовой электродинамики будем предполагать, что формфактор $V(-k^2 l^2) = [K(k^2 l^2)]^2$ удовлетворяет условиям (E) (см. § 2 гл. IV). Этих условий достаточно, чтобы сделать конечными все матричные элементы в теории возмущений (см. ниже).

В евклидовой метрике для пропагатора

$$D(k_E^2) = \frac{V(k_E^2 l^2)}{k_E^2} \quad (3.2)$$

справедливы все те представления, о которых говорилось в § 8 гл. V. Необходимо лишь положить массу $m = 0$ во всех приведенных там формулах. В случае электродинамики, когда масса фотона равна нулю, имеются некоторые дополнительные особенности, которые мы рассмотрим подробнее.

Прежде всего коснемся физического смысла формфактора. Как было показано в § 9 гл. IV, вводимые нами формфакторы

связаны с пространственным распределением заряда — «сильного», как было в показанном там примере, и электрического, как будет в электродинамике. Действительно, рассмотрим функцию

$$W(r) = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int dk \frac{[K(k^2 l^2)]^2}{k^2} e^{ikr}. \quad (3.3)$$

Подставив формфактор $K(k^2 l^2)$ в представлении (IV.9.4) в (3.3), получим

$$W(r) = \frac{e^2}{4\pi} \iint \frac{dr_1 dr_2 b(r_1^2) b((r_2 - r)^2)}{|r_1 - (r_2 - r)|}. \quad (3.4)$$

Полученная формула есть не что иное, как электростатическая энергия взаимодействия двух сферически-симметричных зарядов, центры которых находятся на расстоянии r друг от друга, а распределение заряда описывается функцией $b(r^2)$.

При $r = 0$ функция $W(0)$ представляет собой так называемую собственную электростатическую энергию электрона в классической теории поля. Если электрон точечный (это означает, что в формуле (3.4) следует положить $b(r^2) = \delta(r)$), то мы получаем известный в классической электродинамике результат, что собственная энергия электрона растет, как

$$W(0) \sim e^2/l, \quad (3.5)$$

где l имеет смысл размера электрона и $l \rightarrow 0$.

Однако энергия взаимодействия, или потенциал, двух электронов $W(r)$ конечна при $r = 0$, если функции $b(r^2)$ являются некоторыми гладкими распределениями. Как говорилось выше (стр. 117), случай формфакторов порядка роста $\rho = 1/2$ означает, что распределение $b(r^2)$ ограничено, т. е. весь заряд распределен внутри сферы некоторого заданного радиуса l . Если же порядок роста формфакторов $\rho > 1/2$, то это означает, что $b(r^2)$ отлично от нуля во всем пространстве, однако быстро убывает с ростом r :

$$b(r^2) = \exp\left\{-\text{const} \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^\gamma\right\}, \quad (3.6)$$

где $\gamma = \frac{2\rho}{2\rho-1} > 1$. Ниже, в § 7 мы детально обсудим проблему собственной энергии электрона в классической и квантовой теориях поля.

Приведем теперь несколько представлений формфактора $V(-k^2 l^2)$, которые будем использовать в дальнейшем. В евклидовой метрике для формфактора $V(k_E^2 l^2)$ справедливо представление Меллина

$$V(k_E^2 l^2) = \frac{1}{2i} \int_{-a-i\infty}^{-a+i\infty} \frac{d\xi v(\xi) (k_E^2 l^2)^\xi}{\sin \pi \xi}. \quad (3.7)$$

где

$$v(\xi) = \frac{1}{\Gamma(2\xi + 2) l^{2\xi}} \iint \frac{dr_1 dr_2 b(r_1^2) b(r_2^2)}{|r_1 - r_2|^{-2\xi}} = -\frac{\sin \pi \xi}{2\pi^2 l^{2\xi}} \int \frac{dk K^2(k^2 l^2)}{|k|^{3+2\xi}}. \quad (3.8)$$

Выпишем еще одно представление. Если функция $V(-k^2 l^2)$ удовлетворяет условиям (E), являясь целой функцией порядка роста $\rho = 1/2$, то для нее справедливо представление типа (II. 4.20):

$$V(k_E^2 l^2) = \int_{-1}^1 du (1 - u^2)^{2\alpha-1} \psi(u) \cos(u \sqrt{k_E^2 l^2}), \quad (3.9)$$

где $\psi(u)$ — должное число раз непрерывно дифференцируемая функция и

$$V(0) = \int_{-1}^1 du (1 - u^2)^{2\alpha-1} \psi(u) = 1. \quad (3.10)$$

Подставляя это представление в (3.8), получим еще одну формулу

$$v(\xi) = \frac{1}{\Gamma(1 + 2\xi)} \int_{-1}^1 du (1 - u^2)^{2\alpha-1} (u^2)^\xi \psi(u). \quad (3.11)$$

С физической точки зрения наибольший интерес представляет случай $\rho = 1/2$, когда покоящийся электрон можно интерпретировать как заряженный шар радиуса l .

Можно поставить вопрос, существуют ли какие-либо принципы физического или математического характера, которые позволили бы выбрать формфактор $V(-k^2 l^2)$ или, что то же самое, потенциал $W(r)$ однозначно? Оказывается, что такие принципы существуют.

Физически естественно поставить задачу: найти такие формфакторы $V(-k^2 l^2)$, для которых потенциал двух покоящихся электронов $W(r)$ примет наименьшее возможное значение в нуле, т. е. при $r = 0$. Математически имеет решение следующая задача:

среди целых функций $V(z)$ порядка роста $\rho = 1/2$ и типа σ , удовлетворяющих условиям:

$$V(0) = 1, \\ V(x) = |K(x)|^2 \text{ на вещественной полуоси } 0 \leq x < \infty, \quad (3.12)$$

$$\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}} V(u) < \infty,$$

найти функцию, минимизирующую функционал

$$\mu[V] = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}} V(u) = \text{const} \cdot W(0). \quad (3.13)$$

Сравнивая (3.13) с (3.3) и (3.4), легко видеть, что рассматриваемый функционал представляет собственную энергию электрона.

Эта задача относится к классу экстремальных задач в теории целых функций (см. подробнее книгу И. И. Ибрагимова (1962)) и имеет единственное решение. Приведем его. Для этого перепишем условие (3.13) в виде

$$\mu[V] = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}} V(u) = 2 \int_0^\infty dt |K(t^2)|^2. \quad (3.14)$$

Функция $K(t^2)$ является целой функцией первого порядка роста и типа $\sigma/2$. Поэтому по теореме Пэли — Винера справедливо представление

$$K(t^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} du e^{iut} g(u),$$

где $g(u) \in L_2(-\sigma/2, \sigma/2)$. Так как K зависит от t^2 , то функция $g(u)$ четная, и, следовательно,

$$K(t^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sigma/2} g(u) \cos ut du. \quad (3.15)$$

Используя равенство Парсеваля, из (3.14) получим

$$\mu[V] = \int_0^\infty dt |K(t^2)|^2 = \int_0^{\sigma/2} du |g(u)|^2. \quad (3.16)$$

Кроме того, имеем

$$K(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sigma/2} du g(u) = 1. \quad (3.17)$$

Пусть теперь имеется система полиномов $\{P_n(x)\}$, ортонормированных с весом 1 на отрезке $[0, \sigma/2]$, т. е.

$$\int_0^{\sigma/2} du P_n(u) P_{n'}(u) = \delta_{nn'}, \quad P_0(u) = \sqrt{2/\sigma}.$$

Тогда функция $g(u)$ может быть разложена по этой системе:

$$g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(u).$$

Формулы (3.16) и (3.17) запишутся теперь в виде

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sigma/2} du g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} c_0 \sqrt{\frac{\sigma}{2}} = 1,$$

$$\mu[V] = \int_0^{\sigma/2} du |g(u)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2.$$

Ясно, что

$$\min_{\{g\}} \mu[V] = \min_{\{c_n\}} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = |c_0|^2 = \frac{\pi}{\sigma}.$$

Значит, $g(u) = \sqrt{\pi/\sigma}$ и

$$K(t^2) = \frac{2}{\sigma} \int_0^{\sigma/2} du \cos ut = \frac{\sin(\sigma t/2)}{(\sigma t/2)}.$$

Окончательно

$$V(z) = \left[\frac{\sin \frac{\sigma}{2} \sqrt{z}}{\frac{\sigma}{2} \sqrt{z}} \right]^2. \quad (3.18)$$

Посмотрим теперь, какое распределение заряда описывает полученный формфактор (3.18). Для этого подсчитаем, согласно (IV.9.4), плотность распределения заряда $b(r^2)$, соответствующую функции

$$K(k^2 l^2) = \frac{\sin \frac{\sigma}{2} \sqrt{k^2 l^2}}{\frac{\sigma}{2} \sqrt{k^2 l^2}}. \quad (3.19)$$

Имеем после очевидных вычислений

$$b(r^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk K(k^2 l^2) e^{ikr} = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(r - \sigma l/2)}{r^2}. \quad (3.20)$$

Это распределение описывает равномерно заряженную сферу радиуса $\sigma l/2$. Подсчитаем теперь энергию взаимодействия двух электронов по формуле (3.4). В результате получим

$$W(r) = \begin{cases} \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{\sigma l} \left(2 - \frac{r}{\sigma l}\right), & r < \sigma l, \\ \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{r}, & r > \sigma l. \end{cases} \quad (3.21)$$

Теперь, возвращаясь к представлению (3.7), приведем окончательно формулы для формфактора (3.18):

$$V(-k^2 l^2) = \left[\frac{\sin \sqrt{-k^2 l^2}}{\sqrt{-k^2 l^2}} \right]^2. \quad (3.22)$$

Для функции $v(\zeta)$ в представлении (3.8) получаем

$$v(\zeta) = \frac{2^{1+2\zeta}}{\Gamma(2\zeta+3)}. \quad (3.23)$$

Интересно вычислить функцию $D(x_E^2)$ в евклидовой метрике:

$$D(x_E^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dk_E V(k_E^2 l^2)}{k_E^2} e^{ik_E x_E} = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{x_E^2}, & x_E^2 > 4l^2, \\ \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{x_E^2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{x_E^2}{4l^2}} + \frac{x_E^2}{4l^2} \ln \frac{2l}{\sqrt{x_E^2}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{x_E^2}{4l^2}} \right) \right\}, & x_E^2 < 4l^2. \end{cases}$$

Заметим, что при $x_E^2 \rightarrow 0$

$$D(x_E^2) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{4l^2} \ln \frac{4l}{\sqrt{x_E^2}},$$

в то время как в локальной теории при $x_E^2 \rightarrow 0$

$$\Delta(x_E^2) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{x_E^2}.$$

Следует подчеркнуть, что решение экстремальной задачи, сформулированной выше, приводит к минимальной степени убывания формфактора, а именно

$$V(k_E^2 l^2) = O\left(\frac{1}{k_E^2}\right) \text{ при } k_E^2 \rightarrow \infty.$$

Если же мы к сформулированным выше условиям для функции $V(z)$ (стр. 248) добавим условие убывания формфактора, например,

$$V(u) = O\left(\frac{1}{u^a}\right) \text{ при } u \rightarrow \infty,$$

где $a > 1$, то в этом случае экстремальная задача решения не имеет. Необходимо вводить еще дополнительные условия, которые уже не имеют прозрачного физического смысла. Поэтому мы ограничимся только рассмотренным выше случаем. Заметим, однако, что в случае спинорной электродинамики степень

убывания полученного формфактора (3.18) или (3.22) вполне достаточна, чтобы сходились все диаграммы теории возмущений, кроме поправок к энергии вакуума, что физического интереса не представляет.

Другой способ введения формфактора будет рассмотрен нами в § 11.

В заключение приведем еще формулы для случая, когда электрон представляет собой равномерно заряженный шар радиуса l . Тогда, как нетрудно показать,

$$V(-k^2 l^2) = \frac{9}{(-k^2 l^2)^2} \left[\frac{\sin \sqrt{-k^2 l^2}}{\sqrt{-k^2 l^2}} - \cos \sqrt{-k^2 l^2} \right]^2 \quad (3.24)$$

и

$$v(\xi) = \frac{9 \cdot 2^{4+2\xi} [2\xi^2 + 7\xi + 5]}{\Gamma(2\xi + 7)}. \quad (3.25)$$

§ 4. Регуляризационная процедура

Как уже неоднократно говорилось, построение S -матрицы по теории возмущений возможно лишь в рамках определенного математического аппарата. Сформулируем теперь регуляризационную процедуру, которой мы будем пользоваться при вычислении матричных элементов в теории возмущений.

В квантовой электродинамике в ряду теории возмущений подлежат регуляризации, во-первых, нелокальные пропагаторы фотона и, во-вторых, замкнутые спинорные циклы, образованные пропагаторами электронов.

Нелокальные формфакторы $V(-k^2 l^2)$ мы будем регуляризовать способом, о котором говорилось в гл. V. Все необходимые формулы легко получаются из формул для пропагаторов скалярных частиц, если положить массу $m = 0$. Так, для регуляризованного пропагатора фотона имеем в импульсном представлении

$$\tilde{D}^{\delta}(k^2) = \frac{l^2}{2i} \int_{-a+i\infty}^{-a-i\infty} d\xi v(\xi) \frac{e^{\delta\xi^2} [l^2(-k^2 - i\epsilon)]^{\xi-1}}{\sin \pi\xi}, \quad (4.1)$$

где $a > 0$.

Для регуляризации спинорных пропагаторов будем использовать так называемую градиентно-инвариантную процедуру Паули—Вилларса. Это означает, что спинорные причинные функции электрона регуляризуются не по отдельности, а замкнутыми спинорными циклами:

$$\sum_j c_j \text{Sp}[\gamma S_{M_j}(x_1 - x_2) \gamma S_{M_j}(x_2 - x_3) \dots]. \quad (4.2)$$

Поскольку в квантовой электродинамике максимальная расходимость квадратичная, то достаточно ограничиться двумя вспомо-

гательными массами M_1 и M_2 . В этом случае условия на коэффициенты c_j записываются в виде

$$\begin{aligned} 1 + c_1 + c_2 &= 0, \\ 1 + c_1 \Lambda_1 + c_2 \Lambda_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $M_j^2 = m^2 \Lambda_j$, Λ_j ($j = 1, 2$) — большие безразмерные параметры регуляризации, которые мы выберем в виде $\Lambda_j = \Lambda + \epsilon_j$ ($\Lambda \gg 1$; $0 < \epsilon_j \ll 1$). При такой регуляризации электрон-электронная петля (так называемая поляризация вакуума) расходится логарифмически при $\Lambda \rightarrow \infty$.

Мы предлагаем вместо условий (4.3) ввести три вспомогательные массы со следующими условиями на коэффициенты c_1 , c_2 и c_3 :

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= -1, \\ c_1 \Lambda_1 + c_2 \Lambda_2 + c_3 \Lambda_3 &= -1, \\ c_1 \ln \Lambda_1 + c_2 \ln \Lambda_2 + c_3 \ln \Lambda_3 &= d, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где d — некоторое конечное число, которое должно быть выбрано из условий нормировки физического заряда электрона (см. ниже, § 6). Регуляризационная процедура с дополнительными условиями впервые была предложена Д. А. Славновым (1974) в теории скалярного поля.

В рамках введенных нами регуляризаций сходятся все матричные элементы в ряду теории возмущений.

Для снятия регуляризации в матричных элементах S -матрицы достаточно воспользоваться одним из методов, описанных в гл. V, т. е. перейти к евклидовой метрике по всем внутренним импульсам в интегралах, соответствующих любым связанным диаграммам Фейнмана, после чего перейти к пределу $\delta \rightarrow 0$,

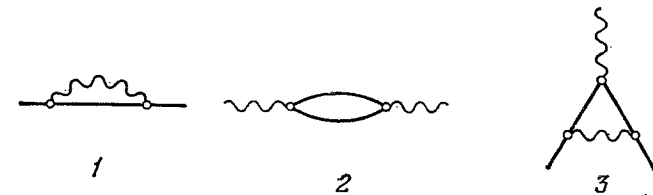


Рис. 27. Прimitives неприводимые диаграммы Фейнмана, соответствующие собственной энергии электрона, поляризации вакуума и вершинной части.

поскольку функции $\tilde{D}(k^2)$ убывают достаточно быстро при $k^2 \rightarrow -\infty$. Спинорные циклы конечны в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ согласно условиям (4.4).

В обычной локальной квантовой электродинамике расходящимися являются матричные элементы, соответствующие примитивным неприводимым диаграммам Фейнмана 1, 2, 3, показанным на рис. 27. Мы не будем рассматривать диаграммы,

показанные на рис. 28, поскольку вклад диаграмм 4 равен нулю согласно теореме Фарри, а интегралы, соответствующие диаграммам 5, сходятся в силу градиентной инвариантности, так как пропагаторы электронов соответствуют обычной локальной теории.

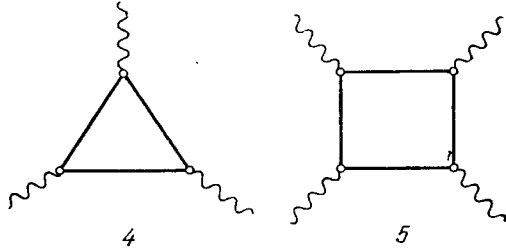


Рис. 28. Диаграммы Фейнмана, соответствующие спинорным циклам третьего и четвертого порядков.

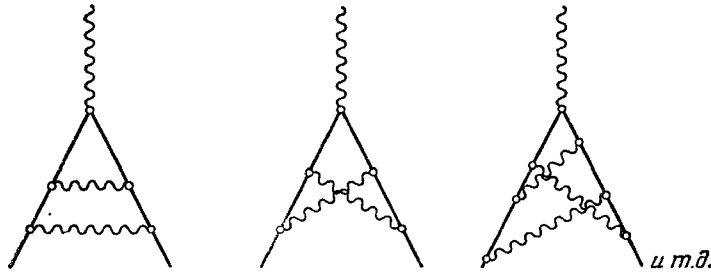


Рис. 29. Диаграммы Фейнмана, описывающие вершинную часть в высших порядках теории возмущений



Рис. 30. Диаграммы Фейнмана, описывающие поляризацию вакуума в высших порядках теории возмущений.

Элементы S -матрицы, соответствующие диаграммам собственной энергии I и вершинной части 3 , будут сходить, поскольку пропагатор фотона $\tilde{D}(k^2)$ убывает достаточно быстро в евклидовой области. То же самое можно сказать о любых неприводимых диаграммах, описывающих вершинную часть и показанных на рис. 29. Диаграммы, показанные на рис. 30, и все остальные диаграммы в ряду теории возмущений также сходятся. Интеграл, соответствующий диаграмме 2 на рис. 27 (по-

ляризация вакуума), будет также конечен в силу выбранной нами модифицированной процедуры Паули — Вилларса.

В ряду теории возмущений в квантовой электродинамике по сравнению с теорией скалярного поля имеется два сорта пропагаторов (фотонные и фермионные) и соответственно два типа регуляризаций (регуляризация фотонных пропагаторов и регуляризация фермионных циклов). Таким образом, S -матрица регуляризуется параметром δ и набором параметров $\{\Lambda_m\}$, поскольку каждый цикл регуляризуется независимо, т. е. мы имеем $S^{\delta(\Lambda)}$ -матрицу.

Как говорилось выше, снятие регуляризации по Λ , т. е. переход к $\Lambda \rightarrow \infty$, фактически нетривиально только в одной диаграмме поляризации вакуума (диаграмме 2 на рис. 27). Интегралы, соответствующие любым другим замкнутым циклам, будут сходиться даже без введения регуляризации. Анализ диаграммы поляризации вакуума (см. § 6) показывает, что аналитические свойства этой диаграммы находятся в полном соответствии с требованиями унитарности. Поэтому оператор $S^{\delta} = \lim_{\{\Lambda_m \rightarrow \infty\}} S^{\delta(\Lambda)}$ существует, и его свойства относительно фермионных операторов поля определяются локальной теорией.

Доказательство унитарности матрицы $S = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\{\Lambda_m \rightarrow \infty\}} S^{\delta(\Lambda)}$ проводится теперь в полном соответствии с доказательством в нелокальной квантовой теории скалярного поля (гл. VI).

§ 5. Градиентная инвариантность S -матрицы

Требование градиентной инвариантности S -матрицы, т. е. инвариантности относительно преобразования

$$A_\mu(x) \Rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \quad (5.1)$$

с произвольной функцией $f(x)$ может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_{1\mu_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{n\mu_n}} \left(\frac{\delta^n S}{\delta A_{\mu_1}(x_1) \cdots \delta A_{\mu_n}(x_n)} \right) = 0 \quad (5.2)$$

при условии, что фермионные операторы электронного поля подчиняются свободным уравнениям движения.

Для доказательства (5.2) достаточно ограничиться рассмотрением случая с $n = 1$, т. е.

$$\partial_\mu \frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} = 0. \quad (5.3)$$

Прежде всего проведем формальное доказательство, основываясь только на представлении

$$S = T \exp \left\{ i \int dx \mathcal{L}_I(x) \right\}. \quad (5.4)$$

Мы будем предполагать, что представление (5.4) обеспечивает построение ряда теории возмущений с причинными функциями (2.7) и S -матрица разлагается в ряд по нормальным произведениям полевых операторов, подчиняющихся свободным уравнениям движения. Мы не будем учитывать введенную нами регуляризацию, но затем покажем, что изложенное доказательство справедливо и в рамках этих регуляризаций.

Воспользовавшись представлением (5.4), получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} &= iT \left\{ \left(\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \int dy \mathcal{L}_I(y) \right) S \right\} = \\ &= i \int dx' K \left(\frac{x-x'}{l} \right) T \left\{ \left(\frac{\delta}{\delta A_\mu(l, x')} \int dy \mathcal{L}_I(y) \right) S \right\} = \\ &= i \int dx' K \left(\frac{x-x'}{l} \right) T \{ e\bar{\psi}(x') \gamma_\mu \psi(x') S \}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} T \{ \psi(x) S \} &= \psi(x) S + \int dy S(x-y) T \{ ie\hat{\mathcal{A}}(l, y) \psi(y) S \}, \\ i\hat{\partial} T \{ \psi(x) S \} &= T \{ [m\psi(x) - ie\hat{\mathcal{A}}(l, x) \psi(x)] S \}, \\ i\hat{\partial} T \{ \bar{\psi}(x) \gamma_\mu S \} &= T \{ [-m\bar{\psi}(x) + ie\bar{\psi}(x) \hat{\mathcal{A}}(l, x)] S \}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Эти соотношения справедливы, если теория возмущений строится, согласно теореме Вика, с хронологическими свертками фермионных операторов (2.6), а S -матрица (2.2) зависит от операторов поля, удовлетворяющих свободным уравнениям.

С помощью этих формул получим

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} &= \int dy K \left(\frac{x-y}{l} \right) \frac{\partial}{\partial y_\mu} \frac{\delta S}{\delta A_\mu(l, y)} = \\ &= \int dy K \left(\frac{x-y}{l} \right) T \{ [m(\bar{\psi}(y) \psi(y)) - ie\bar{\psi}(y) \hat{\mathcal{A}}(l, y) \psi(y) - \\ &\quad - m(\bar{\psi}(y) \psi(y)) + ie\bar{\psi}(y) \hat{\mathcal{A}}(l, y) \psi(y)] S \} = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Итак S -матрица градиентно-инвариантна в рамках данного формального рассмотрения. Покажем теперь, что приведенные формальные преобразования справедливы в границах нашей процедуры регуляризации.

Ряд теории возмущений для S -матрицы представляет собой набор диаграмм Фейнмана, где оператор электромагнитного поля $A_\mu(x)$ всегда связан с электронной линией. Возможны два случая: или эта линия не замкнута, или она образует замкнутый цикл. Доказательство градиентной инвариантности математически сводится к изучению действия на S -матрицу оператора $\partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}$. Поскольку в этот оператор входит только первая вариационная производная по электромагнитному полю $A_\mu(x)$, можно рассматривать преобразования типа проведенных

в (5.5)–(5.7) для каждой незамкнутой линии и каждого замкнутого цикла совершенно независимо. Так как масса электрона является инвариантом при градиентном преобразовании, а преобразования (5.5)–(5.7) затрагивают только операторы и пропагаторы заряженных полей, проведенные выкладки справедливы независимо для каждой отдельной незамкнутой линии и для каждого отдельного цикла, входящего в произвольную диаграмму. Поэтому S -матрица градиентно-инвариантна в каждом порядке теории возмущений в рамках сформулированных правил регуляризации.

§ 6. Вычисление простейших примитивных диаграмм Фейнмана

В этом параграфе мы продемонстрируем методы вычислений в нелокальной теории на примере примитивных неприводимых диаграмм Фейнмана, соответствующих собственной энергии электрона, поляризации вакуума и вершинной части. Эти диаграммы изображены на рис. 27.

Рассмотрим сначала диаграмму собственной энергии, представленную на рис. 27 (1). Этой диаграмме соответствует матричный элемент

$$-i : \bar{\psi}(x) \Sigma(x-y) \psi(y) :, \quad (6.1)$$

где

$$\Sigma(x-y) = -ie^2 \gamma_\mu S(x-y) \gamma_\mu D(x-y).$$

Переходя в импульсное представление и воспользовавшись нашей регуляризационной процедурой, что позволяет перейти к евклидовой метрике поворотом $k_0 \rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}} k_4$, получим в пределе $\delta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(p) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} (-ie^2) \int dx e^{ipx} \gamma_\mu S(x) \gamma_\mu D^\delta(x) = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int dk \frac{V^\delta(-k^2 l^2)}{-k^2 - i\epsilon} \gamma_\mu \frac{m + \hat{p} - \hat{k}}{m^2 - (p-k)^2 - i\epsilon} \gamma_\mu = \\ &= \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int dk_E \frac{V(k_E^2 l^2)}{k_E^2} \gamma_\mu^{(E)} \frac{m - \hat{p}_E + \hat{k}_E}{m^2 + (p_E - k_E)^2} \gamma_\mu^{(E)}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $p_E = (-ip_0, \mathbf{p})$, $\gamma^{(E)} = (-i\gamma_0, \boldsymbol{\gamma})$, $k_E = (k_4, \mathbf{k})$, так что

$$\begin{aligned} p_E k_E &= p_4 k_4 + \mathbf{p} \mathbf{k} = -ip_0 k_4 + \mathbf{p} \mathbf{k}, \\ \hat{p}_E &= (p_E \gamma^{(E)}) = p_4 \gamma_4 + \mathbf{p} \boldsymbol{\gamma} = -p_0 \gamma_0 + \mathbf{p} \boldsymbol{\gamma} = -(p \boldsymbol{\gamma}) = -\hat{p}, \\ \hat{k}_E &= k_4 \gamma_4 + \mathbf{k} \boldsymbol{\gamma} = -i\gamma_0 k_4 + \mathbf{k} \boldsymbol{\gamma}, \\ \gamma_\mu^{(E)} \gamma_\nu^{(E)} + \gamma_\nu^{(E)} \gamma_\mu^{(E)} &= -2\delta_{\mu\nu}, \quad (\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = \delta_{44} = 1), \\ \gamma_\mu^{(E)} \hat{p}_E \gamma_\mu^{(E)} &= 2\hat{p}_E, \quad \hat{p}_E^2 = -p_E^2 = p^2. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Воспользовавшись представлением (3.7) для формфактора $V(k_E^2 l^2)$, получим после некоторых вычислений

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(p) &= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{2i} \int_{-a+i\infty}^{-a-i\infty} \frac{d\zeta v(\zeta) l^{2\zeta}}{\sin \pi \zeta} \int \frac{dk_E [4m + 2(\beta_E - k_E)]}{(k_E^2)^{1-\zeta} [m^2 + (k_E - p_E)^2]} = \\ &= \frac{e^2}{8\pi} \cdot \frac{1}{2i} \int_{-a+i\infty}^{-a-i\infty} \frac{d\zeta v(\zeta) (m^2 l^2)^\zeta}{(\sin \pi \zeta)^2 \Gamma(1+\zeta)} F(\zeta, p), \end{aligned} \quad (6.4)$$

где

$$F(\zeta, p) = \frac{1}{\Gamma(1-\zeta)} \int_0^1 du \left(\frac{1-u}{u}\right)^\zeta \left(1 - \frac{p^2}{m^2} u\right)^\zeta (2m - \beta u). \quad (6.5)$$

Функция $F(\zeta, p)$ регулярна в полуплоскости $\text{Re} \zeta > -1$. Разложение функции (6.4) в ряд по $m^2 l^2$ имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(p) &= \frac{e^2}{8\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v(n)}{n!} (m^2 l^2)^n \times \\ &\times \left\{ F(n, p) \left[\ln m^2 l^2 + \frac{v'(n)}{v(n)} - \psi(n+1) \right] + \frac{\partial}{\partial n} F(n, p) \right\}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Здесь

$$\psi(u) = \frac{d}{du} \ln \Gamma(u).$$

Если мы считаем, что элементарная длина l достаточно мала и импульс p также не очень велик, т. е. $m^2 l^2 \ll 1$ и $p^2/m^2 < 1$, то легко получить с точностью до членов порядка $(m^2 l^2)^2$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(p) &= \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 du (2m - u\beta) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} u\right) - \\ &- \frac{e^2}{16\pi^2} \left[\left(3 \ln \frac{1}{m^2 l^2} + 3v'(0) + 3\psi(1) + 1\right) + \right. \\ &\left. + 4m^2 l^2 v(1) \left(\ln \frac{1}{m^2 l^2} - \frac{v'(1)}{v(1)} - \frac{5}{12} \frac{p^2}{m^2} \right) \right] - \\ &- \frac{e^2}{16\pi^2} (m - \beta) \left[\left(\ln \frac{1}{m^2 l^2} - v'(0) + 1 \right) - m^2 l^2 v(1) \frac{p^2}{3m^2} \right] + O((m^2 l^2)^2). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Подсчитаем поправку к массе электрона

$$\delta m = m_0 - m = -\tilde{\Sigma}(m) = \frac{3e^2}{16\pi^2} \left\{ \ln \frac{1}{m^2 l^2} + O(1) \right\}. \quad (6.8)$$

Полученное выражение находится в полном соответствии с обычным результатом в локальной квантовой электродинамике. Проблему собственной массы электрона мы подробно обсудим в § 7.

Следует заметить, что постоянная Z_2 перенормировки волновой функции должна выбираться из условия

$$\bar{u}(p) \frac{\tilde{\Sigma}(p) + \delta m}{\hat{p} - m} u(p) = Z_2 \bar{u}(p) u(p),$$

где $u(p)$ — решение уравнения Дирака $(\hat{p} - m)u(p) = 0$. В этом случае выражение для Z_2 содержит инфракрасную особенность, и поэтому в интеграл, определяющий $\tilde{\Sigma}(p)$ в (6.4), необходимо ввести «массу» фотона.

Рассмотрим диаграмму поляризации вакуума, представленную на рис. 27 (2). Член матрицы рассеяния, соответствующий этой диаграмме, представим в виде

$$-i : A_\mu(x) \Pi_{\mu\nu}(x-y) A_\nu(y) :, \quad (6.9)$$

где

$$\Pi_{\mu\nu}(x-y) = -ie^2 \text{Sp} \{ \gamma_\mu S(x-y) \gamma_\nu S(y-x) \}. \quad (6.10)$$

Используя принятый нами метод регуляризации, получим в импульсном пространстве

$$\text{reg} \Pi_{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dpe^{-ip(x-y)} \text{reg} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p). \quad (6.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \text{reg} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) &= \\ &= \frac{e^2}{(2\pi)^4 i} \int dk \sum_{j=0}^3 c_j \text{Sp} \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{M_j - k - i\varepsilon} \gamma_\nu \frac{1}{M_j - (k - \beta) - i\varepsilon} \right\} = \\ &= (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2) \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 du (1-u) \times \\ &\times \left\{ \ln \left(1 - u(1-u) \frac{p^2}{m^2} \right) + \sum_{j=1}^3 c_j \ln \left(\Lambda_j - u(1-u) \frac{p^2}{m^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Согласно условию (4.4), получим в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon_j \rightarrow 0} \text{reg} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) = (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \tilde{\Pi}(p^2), \quad (6.13)$$

где

$$\tilde{\Pi}(p^2) = \tilde{\Pi}_r(p^2) + \frac{e^2}{12\pi^2} d,$$

а

$$\tilde{\Pi}_r(p^2) = \frac{e^2}{12\pi^2} p^2 \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dx^2}{x^2(x^2 - p^2 - i\varepsilon)} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{x^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{x^2} \right). \quad (6.14)$$

Итак, в рамках принятой нами регуляризационной процедуры поляризационный оператор $\tilde{\Pi}(p^2)$ конечен при снятии регуляризации и будет совпадать с перенормированным выражением в обычной локальной электродинамике, если выбрать произвольную постоянную регуляризации $d=0$. В этом случае $\tilde{\Pi}(p^2)$ нормирован условием

$$\Pi(0) = \tilde{\Pi}_r(0) = 0. \quad (6.15)$$

Это означает, что постоянная d должна определять перенормировку заряда электрона, а выбор $d=0$ соответствует тому, что, по крайней мере, во втором порядке теории возмущений не происходит перенормировки заряда e , т. е. физический заряд электрона совпадает с затравочным.

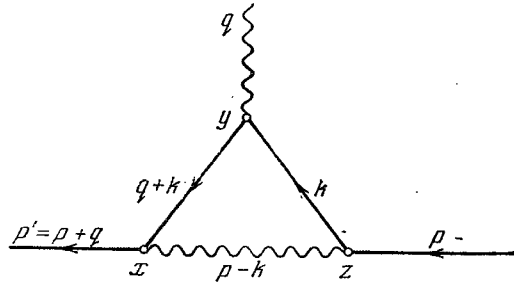


Рис. 31. Вершинная диаграмма третьего порядка.

Рассмотрим диаграмму, представленную на рис. 27 (3). Этой диаграмме соответствует матричный элемент

$$ie : \bar{\psi}(x) \Gamma_\mu(x, z | y) \psi(z) A_\mu(y) : , \quad (6.16)$$

где введена вершинная функция третьего порядка

$$\Gamma_\mu(x, z | y) = ie^2 \gamma_\nu S(x-y) \gamma_\mu S(y-z) \gamma_\nu D(x-z). \quad (6.17)$$

Выберем импульсные переменные, как показано на рис. 31. Переходя к импульсному представлению, получим в евклидовой метрике

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_\mu(p_1, p) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} ie^2 \int dy \int dz e^{ipz + iay} \gamma_\nu S(y) \gamma_\mu S(z-y) \gamma_\nu D^\delta(z) = \\ &= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{dk_E V((p_E - k_E)^2 I^2) \gamma_\nu (m - \hat{k}_E - \hat{q}_E) \gamma_\mu (m - \hat{k}_E) \gamma_\nu}{(p_E - k_E)^2 [m^2 + (k_E + q_E)^2] (m^2 + k_E^2)}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Проведем интегрирование по виртуальному импульсу k_E , используя стандартную процедуру объединения знаменателей. Переходя к метрике Минковского согласно условиям

$(p_{iE} p_{jE}) = -(p_i p_j)$, получим

$$\tilde{\Gamma}_\mu(p_1, p) = -\frac{e^2}{8\pi} \cdot \frac{1}{2i} \int_{-a+i\infty}^{-a-i\infty} \frac{d\xi v(\xi) (m^2 I^2)^\xi}{(\sin \pi \xi)^2 \Gamma(1+\xi)} F_\mu(\xi; p_1, p), \quad (6.19)$$

где $F_\mu(\xi; p_1, p) = [\gamma_\mu F_1(\xi; p_1, p) + F_{2\mu}(\xi; p_1, p)]$. Здесь

$$\begin{aligned} F_1(\xi; p_1, p) &= \frac{1}{\Gamma(1-\xi)} \iiint_0^1 \frac{d\alpha d\beta d\gamma \delta (1-\alpha-\beta-\gamma)}{\left[\beta + \gamma - \alpha\gamma \frac{p^2}{m^2} - \beta\gamma \frac{q^2}{m^2} - \alpha\beta \frac{(p+q)^2}{m^2} \right]^{-\xi}}, \\ F_{2\mu}(\xi; p_1, p) &= \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \iiint_0^1 \frac{d\alpha d\beta d\gamma \delta (1-\alpha-\beta-\gamma)}{\left[\beta + \gamma - \alpha\gamma \frac{p^2}{m^2} - \beta\gamma \frac{q^2}{m^2} - \alpha\beta \frac{(p+q)^2}{m^2} \right]^{1-\xi}} \times \\ &\quad \times \frac{1}{m^2} [m^2 \gamma_\mu - 2mq_\mu + 4m(\beta q_\mu - \alpha p_\mu) + \\ &\quad + (\alpha\beta - \beta\hat{q}) \gamma_\mu \hat{q} + (\alpha\beta - \beta\hat{q}) \gamma_\mu (\alpha\hat{p} - \beta\hat{q})]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Получим теперь вершинную часть в двух случаях. Во-первых, когда $q=0$ и p — произвольное и, во-вторых, q — произвольное, а p и p_1 лежат на массовой поверхности. В первом случае, полагая в формуле (6.20) $q=0$, после некоторых преобразований имеем

$$\begin{aligned} F_\mu(\xi; p, p) &= \frac{1}{\Gamma(1-\xi)} \int_0^1 du \left(\frac{1-u}{u} \right)^\xi \left(1 - u \frac{p^2}{m^2} \right)^\xi \times \\ &\quad \times \left\{ u \gamma_\mu + \frac{\xi u 2p_\mu (2m - u\hat{p})}{m^2 - up^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Сравнивая полученную формулу с выражением (6.5) для оператора собственной энергии электрона, легко заметить, что

$$F_\mu(\xi; p, p) = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} F(\xi, p), \quad (6.22)$$

откуда следует тождество Уорда

$$\tilde{\Gamma}_\mu(p, p) = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} \tilde{\Sigma}(p). \quad (6.23)$$

Во втором случае положим

$$\bar{u}(p_1) \tilde{\Gamma}_\mu(p_1, p) u(p) = \bar{u}(p_1) \Lambda_\mu(q) u(p), \quad (6.24)$$

где $\bar{u}(p_1)$ и $u(p)$ — решения уравнения Дирака: $(\hat{p} - m)u(p) = 0$, $\bar{u}(p_1)(\hat{p}_1 - m) = 0$. Подставляя в (6.24) вершинную часть $\tilde{\Gamma}_\mu(p_1, p)$ (6.19), получим после соответствующих преобразований

$$\bar{u}(p_1) F_\mu(\xi; p_1, p) u(p) = \bar{u}(p_1) \Lambda_\mu(\xi, q) u(p). \quad (6.25)$$

Здесь

$$\Lambda_\mu(\zeta, q) = \gamma_\mu f_1(\zeta, q^2) + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} q_\nu f_2(\zeta, q^2),$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu),$$

$$f_j(\zeta, q^2) = \frac{1}{\Gamma(1-\zeta)} \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\alpha d\beta d\gamma \alpha^{-\zeta} \delta(1-\alpha-\beta-\gamma)}{[\lambda\alpha + (1-\alpha)^2 - \beta\gamma \frac{q^2}{m^2}]^{1-\zeta}} g_j(\alpha, \beta, \gamma; q^2), \quad (6.26)$$

$$g_1(\alpha, \beta, \gamma; q^2) = [(1-\alpha)^2(1-\zeta) + 2\alpha\zeta] - [\beta\gamma + \zeta(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)] \frac{q^2}{m^2},$$

$$g_2(\alpha, \beta, \gamma; q^2) = 2\zeta\alpha(1-\alpha).$$

Здесь мы ввели параметр $\lambda = \mu_\phi^2/m^2$, учитывающий «массу» фотона, чтобы избежать инфракрасных расходимостей в вершинной части.

Окончательно

$$\Lambda_\mu(q) = \gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} q_\nu F_2(q^2), \quad (6.27)$$

где

$$F_j(q^2) = -\frac{e^2}{8\pi} \cdot \frac{1}{2i} \int_{-a+i\infty}^{-a-i\infty} \frac{d\zeta v(\zeta) (m^2 l^2)^\zeta}{(\sin \pi\zeta)^2 \Gamma(1+\zeta)} f_j(\zeta, q^2).$$

Легко видеть, что вершинная часть $\Lambda_\mu(q)$ удовлетворяет условию градиентной инвариантности

$$q_\mu \bar{u}(p_1) \Lambda_\mu(q) u(p) = 0.$$

Выпишем первые члены разложения для функций $F_1(q^2)$ и $F_2(q^2)$ по двум малым параметрам $m^2 l^2$ и q^2/m^2 :

$$F_1(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \left[\ln \frac{1}{m^2 l^2} - 2 \ln \frac{m^2}{\mu_\phi^2} - v'(0) + \frac{9}{2} - 6C - 3v(1) m^2 l^2 \right] + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{q^2}{m^2} \left\{ \frac{2}{3} \left(\ln \frac{m}{\mu_\phi} - \frac{3}{8} \right) + \frac{m^2 l^2}{3} \left[v(1) \left(\ln m^2 l^2 + 2C - \frac{13}{6} \right) + v'(1) \right] \right\}. \quad (6.28)$$

где $C = 0,577215\dots$ — постоянная Эйлера, $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$,

$$F_2(q^2) = -\frac{\alpha}{2\pi} \left[1 - \frac{2}{3} v(1) m^2 l^2 \right]. \quad (6.29)$$

Слагаемое в (6.28), не зависящее от q^2 , определяет перенормировочную константу Z_1 и подлежит перенормировке. Остальные слагаемые могут быть определены в тех или иных экспериментах. О некоторых таких экспериментах речь будет идти в § 8.

Рассмотрим теперь подробнее роль перенормировочных постоянных, которые введены в лагранжиан (2.11). Массовый оператор с учетом перенормировочных постоянных δm и Z_2 записывается в виде

$$\tilde{\Sigma}_r(p) = \{mA(p^2) + B(p^2)\hat{p}\} + \delta m - (Z_2 - 1)(\hat{p} - m). \quad (6.30)$$

Здесь через $A(p^2)$ и $B(p^2)$ обозначены структурные функции массового оператора (6.4) и (6.5). Представление (6.30) справедливо в любом порядке теории возмущений. Постоянные δm и Z_2 выбираются из условия, чтобы

$$\lim_{q \rightarrow 0} \bar{u}(p) \frac{\tilde{\Sigma}_r(p+q)}{m - (\hat{p} + \hat{q})} u(p) = 0. \quad (6.31)$$

Здесь q — некоторый 4-вектор такой, что $(pq) \neq 0$. Вектор p лежит на массовой поверхности, т. е. $p^2 = m^2$ и $\hat{p}u(p) = mu(p)$. Подставляя представление (6.30) в (6.31) и используя свойства решений уравнения Дирака

$$\bar{u}(p) \gamma_\mu u(p) = \frac{p_\mu}{m} \bar{u}(p) u(p),$$

получаем

$$\begin{aligned} \delta m &= -m(A(m^2) + B(m^2)), \\ Z_2 - 1 &= B(m^2) + 2m^2(A'(m^2) + B'(m^2)). \end{aligned} \quad (6.32)$$

Подставляя найденные значения перенормировочных констант в (6.30), получим следующее выражение для массового оператора:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_r(p) &= m(A(p^2) - A(m^2)) + \\ &+ (B(p^2) - B(m^2))\hat{p} - 2m^2(A'(m^2) + B'(m^2))(\hat{p} - m). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Вершинная часть с учетом перенормировочной постоянной записывается в виде

$$\tilde{\Gamma}_{r\mu}(p_1, p) = \tilde{\Gamma}_\mu(p_1, p) + (Z_1 - 1)\gamma_\mu. \quad (6.34)$$

Тождество Уорда (6.23) должно выполняться и для перенормированных величин $\tilde{\Sigma}_r(p)$ и $\tilde{\Gamma}_{r\mu}(p, p)$. Отсюда следует, что

$$Z_2 = Z_1. \quad (6.35)$$

Еще раз обратим внимание на то, что в нелокальной теории, которую мы рассматриваем, все перенормировочные постоянные δm , Z_1 и Z_2 конечны и являются некоторыми функциями от «элементарной длины» l . При этом δm и Z_2 выбираются из условия нормировки массового оператора (6.31), а величина Z_1 выбирается согласно тождеству Уорда.

Перенормированный оператор поляризации вакуума записывается в виде

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) = (g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu) \left[\tilde{\Pi}_r(p^2) + \frac{\alpha}{3\pi} d + Z_3 - 1 \right]. \quad (6.36)$$

Выбирая $Z_3 = 1 - \frac{\alpha}{3\pi} d$, получим нормировку для $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}$: $\tilde{\Pi}_r(0) = 0$. Как говорилось выше, это условие гарантирует, что заряд e в лагранжиане взаимодействия является физическим наблюдаемым зарядом и $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$.

§ 7. Собственная энергия электрона

Проблема собственной энергии точечного электрона, т. е. энергии взаимодействия точечного электрона с им же создаваемым электромагнитным полем, оставалась до сих пор не решенной ни в рамках классической, ни в рамках квантовой теории поля. Более того, принято считать, что собственная энергия электрона в классической и квантовой теории поля имеет различную природу (см., например, обсуждение этого вопроса в книге С. Швебера (1963)). Обычно к такому выводу приходят при сравнении выражения для поправки к массе электрона за счет электромагнитных взаимодействий во втором порядке теории возмущений в квантовой электродинамике

$$\delta m_{\text{кв}} = \frac{3}{16\pi^2} \cdot \frac{e^2}{\hbar c} m \ln \left(\frac{\hbar}{mcr_0} \right)^2 \quad (7.1)$$

с классической собственной энергией электрона

$$\delta m_{\text{кл}} = b \frac{e^2}{2c^2 r_0}. \quad (7.2)$$

Здесь параметр r_0 (размерности длины) имеет смысл радиуса электрона, или, как еще его называют, радиуса обрезания. Безразмерный коэффициент b , который по величине порядка единицы, зависит от характера распределения заряда внутри электрона.

Сравнение формул (7.1) и (7.2) показывает, что квантовая поправка к массе в отличие от классической зависит от массы электрона и растет лишь логарифмически при $r_0 \rightarrow 0$. Переход $\hbar \rightarrow 0$ в (7.1), что соответствует переходу к классическому пределу, приводит к явно бессмысленному результату. Поэтому формулы (7.1) и (7.2) говорят о том, что принцип соответствия между квантовой и классической теориями не выполняется в задаче о собственной энергии электрона.

Какие причины могут лежать в основе столь важного вывода? Первое, что сразу же приходит в голову, это предположение о том, что в пределе $\hbar \rightarrow 0$ нельзя использовать теорию возмущений, поскольку параметр разложения $\alpha = e^2/4\pi\hbar c$ при

$\hbar \rightarrow 0$ становится большим. Однако трудность с поправкой к массе электрона не исчезнет, если мы будем считать, что ряды теории возмущений могут быть просуммированы и полная теория удовлетворяет всем аксиомам локальной квантовой теории поля. Действительно, поправка к массе δm определяется значением массового оператора Σ на массовой поверхности:

$$\Sigma(p) = \frac{e^2}{(2\pi)^4 \hbar c} \int dk \gamma_\mu G(p-k) \Gamma_\mu(p-k, p) \mathcal{D}(k), \quad (7.3)$$

где $p^2 = m^2$, $\hat{p}u(p) = tu(p)$, G и \mathcal{D} — полные функции Грина электрона и фотона, а Γ — полная вершинная часть. Если полная теория локальна, тогда функции Грина электрона и фотона убывают при $k \rightarrow \infty$ не быстрее, чем функции Грина свободных полей, т. е.

$$G(k) = O(1/k) \quad \text{и} \quad \mathcal{D}(k) = O(1/k^2).$$

Согласно тождеству Уорда, получим

$$\Gamma_\mu(p-k, p) = O(1/k),$$

откуда следует, что интеграл в (7.3) расходится логарифмически, как и во втором порядке теории возмущений.

Кроме того, сама формулировка локальной квантовой электродинамики исключает постановку задачи о поправке к массе электрона, поскольку имеет дело лишь с наблюдаемой массой электрона.

Таким образом, оставаясь в рамках локальной квантовой электродинамики, вообще ничего нельзя сказать о величине поправки к массе электрона.

Тогда возникает вопрос, откуда появилась формула (7.1) и какие предположения лежат в ее основе? Обычно формула (7.1) получается в рамках регуляризации Паули — Вилларса, которая состоит в том, что свободный пропагатор фотона заменяется выражением

$$\frac{1}{-k^2 - i\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{-k^2 - i\epsilon} \cdot \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - k^2 - i\epsilon}. \quad (7.4)$$

Здесь Λ — импульс обрезания, связанный с радиусом обрезания r_0 соотношением

$$r_0 = \hbar/\Lambda c. \quad (7.5)$$

Замена (7.4) означает, что теория становится нелокальной. Более того, если мы хотим рассматривать теорию при конечных Λ , то при энергиях, превышающих Λ , унитарность S -матрицы нарушается, что соответствует рождению квантов массы Λ . Поэтому замена (7.4), строго говоря, приводит к «плохой», нефизической, нелокальной электродинамике.

Параметр Λ мы можем считать конечным только тогда, когда энергии электронов и фотонов, участвующих в тех или иных процессах, много меньше Λ . Тогда параметр Λ будет в какой-то мере учитывать внутреннюю структуру электрона на малых расстояниях, которая обуславливается физическими причинами, еще нам неизвестными (например, учет слабых взаимодействий или гравитации).

Из всего вышесказанного следует, что формула (7.1) имеет реальный смысл при условии $\Lambda/m \gg 1$ или

$$r_0 \ll \hbar/mc. \quad (7.6)$$

Полученное условие (7.6) запрещает переход к классическому пределу $\hbar \rightarrow 0$, поскольку при фиксированном r_0 и $\hbar \rightarrow 0$ формула (7.1) «выходит» из пределов (7.6), где она справедлива.

Резюмируя все сказанное выше, можно утверждать, что вывод о нарушении принципа соответствия в задаче о собственной массе электрона основывается, во-первых, на самой формулировке локальной квантовой электродинамики, где этот вопрос принципиально не может быть поставлен, и, во-вторых, на отсутствии нелокальной квантовой теории поля, в рамках которой можно непротиворечивым образом описать взаимодействие протяженного электрона с электромагнитным полем.

Развиваемая нами теория описания нелокальных взаимодействий квантовых полей удовлетворяет всем необходимым аксиомам при любом значении параметра l , или r_0 , характеризующего область нелокального взаимодействия. Поэтому мы можем ожидать, что принцип соответствия будет выполнен в нашем случае. Действительно, оказывается, что при $\hbar \rightarrow 0$ квантовая поправка $\delta m_{\text{кв}}$ переходит в $\delta m_{\text{кл}}$ во втором порядке теории возмущений. При этом все поправки в высших порядках теории возмущений стремятся к нулю при $\hbar \rightarrow 0$. К доказательству этих утверждений мы сейчас и перейдем.

Рассмотрим подробнее структуру интеграла, определяющего поправку к массе электрона. Для этого удобно вернуться к выражению (6.2) для массового оператора. Используя (6.32) и выбирая систему координат, где вектор $p_E = (-im, 0)$, получим

$$\delta m = \frac{e^2}{(2\pi)^4 \hbar} \int \frac{dk_E V\left(\frac{k_E^2 l^2}{\hbar^2}\right)}{k_E^2} \frac{2m - 2ik_4}{k_E^2 - 2imk_4}. \quad (7.7)$$

Здесь мы явно указали зависимость от постоянной Планка \hbar , поскольку нас будет интересовать предел $\hbar \rightarrow 0$. Интегрируя по евклидовым углам, после некоторых преобразований выражение (7.7) можно привести к виду

$$\delta m = \frac{m}{(2\pi)^2} \cdot \frac{e^2}{\hbar} \int_0^\infty du V\left(4\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 u\right) M(u), \quad (7.8)$$

где $M(u) = 2u + (1 - 2u)\sqrt{1 + 1/u}$, $\lambda = \hbar/mc$ — комптоновская длина волны электрона.

Уже из полученной формулы видно, что величина поправки к массе δm имеет два предела — (7.1) и (7.2) — соответственно в случаях $l \ll \lambda$ и $l \gg \lambda$. Действительно, асимптотическое поведение функции $M(u)$ определяется так:

$$M(u) = \begin{cases} 1/\sqrt{u}, & u \ll 1, \\ 3/4u, & u \gg 1. \end{cases}$$

Естественно считать, что функция $V(u)$ порядка единицы при $u \ll 1$ и быстро убывает при $u > 1$, так что

$$\delta m \simeq m \frac{e^2}{\hbar c} \int_0^{(\lambda/l)^2} du M(u).$$

При $l \ll \lambda$ вклад в интеграл дают большие значения u , поэтому

$$\int_0^{(\lambda/l)^2} du M(u) \simeq \frac{3}{4} \int_1^{(\lambda/l)^2} \frac{du}{u} = \frac{3}{4} \ln\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2$$

и

$$\delta m \simeq \frac{3m}{16\pi^2} \frac{e^2}{\hbar c} \ln\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2,$$

т. е. получаем квантовое выражение для собственной массы (7.1). При $l \gg \lambda$ вклад в интеграл дают малые значения u , поэтому

$$\int_0^{(\lambda/l)^2} du M(u) \simeq \int_0^{(\lambda/l)^2} \frac{du}{\sqrt{u}} = 2 \frac{\lambda}{l}$$

и

$$\delta m \simeq m \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \text{const} \cdot \frac{\hbar}{mcl} = \text{const} \cdot \frac{e^2}{c^2 l}.$$

т. е. получаем классическое выражение для собственной массы (7.2), которое не зависит ни от постоянной Планка \hbar , ни от массы электрона m .

Таким образом, полученная нами формула для поправки к массе (7.7) или (7.8) справедлива при любых соотношениях между «элементарной длиной» l и комптоновской длиной волны электрона $\lambda = \hbar/mc$ и в пределах $l \ll \lambda$ и $l \gg \lambda$ дает правильную асимптотику квантовой и классической теории поля соответственно.

Интересно представить интеграл (7.8), определяющий поправку к массе, в несколько ином виде, воспользовавшись связью функции $V\left(-\frac{k^2 l^2}{\hbar^2}\right)$ с формфактором $K\left(\frac{k^2 l^2}{\hbar^2}\right)$ и пред-

ставлением последнего в виде интеграла (IV.9.4) от плотности заряда $b(r^2)$. После некоторых простых преобразований можно получить

$$\delta m = \frac{m}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{\hbar} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \int \frac{dk}{\sqrt{k^2}} V(k^2 l^2) M\left(\frac{k^2 \lambda^2}{4}\right) = \frac{e^2}{2c^2} \int dr_1 \int dr_2 b(r_1^2) W(|r_1 - r_2|) b(r_2^2). \quad (7.9)$$

Здесь

$$W(r) = \frac{\lambda}{2(2\pi)^3} \int \frac{dk}{\sqrt{k^2}} e^{ikr} M\left(\frac{k^2 \lambda^2}{4}\right) = \frac{1}{\pi^2 \lambda \rho} \int_0^\infty ds \sin s \rho M(s^2) = \frac{1}{2\pi \lambda} \cdot \frac{e(\rho)}{\rho}, \quad (7.10)$$

где

$$e(\rho) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\rho} \left\{ -\frac{4}{\rho^2} + \rho K_1(\rho) + 2K_2(\rho) + \rho \int_0^\infty du K_0(u) \right\}.$$

$\rho = \frac{2r}{\lambda}$. Здесь K_ν — функция Макдональда. Асимптотическое поведение функции $e(\rho)$ при малых и больших ρ дается формулами

$$e(\rho) = \begin{cases} \frac{3}{2\pi} \rho \left(\ln \frac{2}{\rho} + \frac{5}{4} - C + O(\rho) \right), & \rho \ll 1, \\ 1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right), & \rho \gg 1. \end{cases} \quad (7.11)$$

$C = -\psi(1) = 0,57722\dots$ — постоянная Эйлера.

На рис. 32 показаны графики функций $\frac{e(\rho)}{\rho}$, $\frac{1}{\rho}$ и $\frac{3}{2\pi} \left(\ln \frac{2}{\rho} + \frac{5}{4} - C \right)$, дающие представление о том, как изменяется закон Кулона на малых расстояниях.

Функция $W(r)$ представляет собой потенциал взаимодействия между двумя точечными зарядами, получающийся в квантовой теории поля, т. е. с учетом релятивистской инвариантности взаимодействия и с учетом статистики Ферми, которой подчиняются электроны. Именно поэтому на малых расстояниях (по сравнению с комptonовской длиной волны электрона $r \ll \lambda$) этот потенциал отличается от кулоновского. На больших расстояниях (фактически при $r \gg (2-3)\lambda$, как видно из рис. 32) потенциал $W(r)$ практически совпадает с кулоновским. Следует еще раз подчеркнуть, что «большие» и «малые» расстояния определяются комptonовской длиной волны электрона $\lambda = \hbar/mc$.

Формулы (7.1) и (7.2) могут быть так же легко получены из представления (7.9) и оценок (7.11). Действительно, инте-

гралы по r в (7.9) проводятся по области $|r| \ll l$. Поэтому при $l \ll \lambda$ имеем

$$\delta m \simeq \frac{e^2}{2c^2} \int dr_1 \int dr_2 \frac{3}{(2\pi)^2 \lambda} \ln \frac{\lambda}{|r_1 - r_2|} b(r_1^2) b(r_2^2) \simeq m \frac{3}{16\pi^2} \frac{e^2}{\hbar c} \ln \left(\frac{\hbar}{mcl} \right)^2 + O(1), \quad (7.12)$$

поскольку функция $b(r^2)$ нормирована условием $\int dr b(r^2) = 1$ и

$$\int dr_1 \int dr_2 b(r_1^2) \ln \frac{l}{|r_1 - r_2|} b(r_2^2) = O(1).$$

При $l \gg \lambda$ имеем

$$\delta m = \frac{e^2}{8\pi c^2} \iint \frac{dr_1 dr_2 b(r_1^2) b(r_2^2)}{|r_1 - r_2|} \quad (7.13)$$

в точном соответствии с классическим результатом.

Таким образом, принцип соответствия выполнен в рассматриваемой нами квантовой электродинамике с нелокальным взаимодействием во втором порядке теории возмущений.

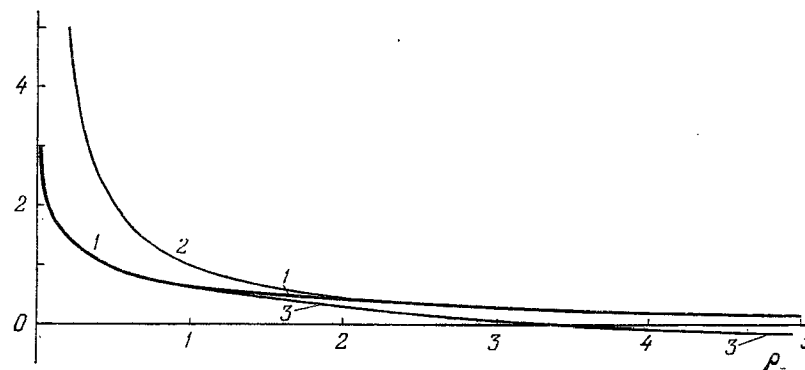


Рис. 32 Графики функций $\frac{e(\rho)}{\rho}$ — кривая 1, $1/\rho$ — кривая 2 и $\frac{3}{2\pi} \left(\ln \frac{2}{\rho} + \frac{5}{4} - C \right)$ — кривая 3.

Остается теперь существенный вопрос, что происходит в высших порядках теории возмущений, поскольку разложение массового оператора идет по параметру $e^2/\hbar c$, который стремится к бесконечности при $\hbar \rightarrow 0$. Оказывается, что в разложении

$$\delta m = m \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^n \mathcal{M}_n \left(\frac{\hbar}{mcl} \right) \quad (7.14)$$

при $\hbar \rightarrow 0$

$$\mathcal{M}_n \left(\frac{\hbar}{mcl} \right) = O \left(\left(\frac{\hbar}{mcl} \right)^{n+1} \right) \quad (7.15)$$

для всех $n \geq 2$, так что

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \delta m = \lim_{\hbar \rightarrow 0} m \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \mathcal{M}_1 \left(\frac{\hbar}{mcl} \right) = \text{const} \cdot \frac{e^2}{c^2 l}, \quad (7.16)$$

а вклад всех высших порядков теории возмущений оказывается равным нулю.

Мы покажем, что в четвертом порядке теории возмущений поправка к массе электрона равна нулю при $\hbar \rightarrow 0$. Мы не будем проводить все выкладки, поскольку они достаточно длинные. Укажем лишь путь доказательства. Поправка к массе определяется вкладами в массовый оператор четвертого порядка, возникающими за счет диаграмм, показанных на рис. 33.

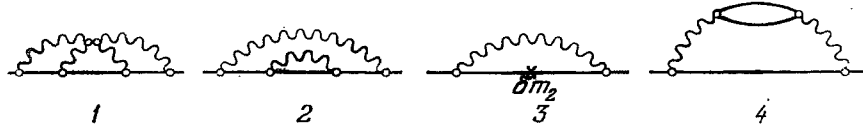


Рис. 33. Диаграммы Фейнмана, дающие вклад в массовый оператор в четвертом порядке теории возмущений.

Заметим, что необходимо учесть вклад, возникающий от контрчлена δm_2 второго порядка теории возмущений. Вклад от контрчленов Z_1 и Z_2 можно не учитывать, поскольку в нашем случае Z_1 и Z_2 конечны и равны в силу тождества Уорда, так что они автоматически сокращаются в сумме диаграмм 1—3.

Запишем интегралы, соответствующие вкладам δm_4 , в евклидовой метрике согласно изложенной в § 6 процедуре. Удобно во всех интегрированиях по виртуальным евклидовым импульсам сделать замену $k_E = \hbar q_E$, чтобы устранить зависимость от \hbar в формфакторе

$$V \left(\frac{k_E^2 l^2}{\hbar^2} \right) = V(q_E^2 l^2).$$

Тогда оказывается, что вклад от диаграммы 4 на рис. 33 с оператором поляризации вакуума стремится к нулю, как $O(\hbar)$, поскольку $\Pi_{\mu\nu}(\hbar q) = O(\hbar^4)$ при $\hbar \rightarrow 0$ согласно (6.13). Вклады от диаграмм 1—3 лишь в сумме обращаются в нуль, как $O(\hbar)$. Для того чтобы убедиться в этом, удобно проводить вычисления в системе координат, где $p_E = (-im, 0)$, а спинор Дирака выглядит, как

$$u(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} v, \quad (7.17)$$

и нормирован условием $\bar{u}(p)u(p) = 1$. В этом случае пропагатор электрона может быть представлен в виде

$$S_E(p + \hbar q) = \frac{1}{m + \hat{p}_E + \hbar \hat{q}_E} = \frac{m(1 + \gamma_0) - \hbar \hat{q}_E}{\hbar [-2imq_4 + \hbar(q_4^2 + q^2)]} = \frac{m(1 + \gamma_0) - \hbar(q\gamma - i\gamma_0 q_4)}{\hbar(-2im) \left[1 + \frac{i\hbar}{2m} q_4 - f \left(\frac{\hbar^2 q^2}{m^2} \right) \right] \left[q_4 + i \frac{\hbar}{m} f \left(\frac{\hbar^2 q^2}{m^2} \right) \right]}, \quad (7.18)$$

где $f(u) = (\sqrt{1+u} - 1)/2$.

При вычислениях в каждом порядке теории возмущений необходимо функцию (7.18) разложить в ряд по $\hbar^2 q^2$ и ограничиться некоторой конечной степенью, связанной с исследуемым порядком теории возмущений.

Так, при изучении четвертого порядка достаточно взять

$$S_E(p + \hbar q) = \frac{m(1 + \gamma_0) - \hbar(q\gamma - i\gamma_0 q_4)}{\hbar(-2im) \left(1 + i \frac{\hbar}{2m} q_4 \right) (q_4 + i\epsilon)}, \quad (7.19)$$

а при изучении шестого

$$S_E(p + \hbar q) = \frac{m(1 + \gamma_0) - \hbar(q\gamma - i\gamma_0 q_4)}{\hbar(-2im) \left(1 + i \frac{\hbar}{2m} q_4 \right) (q_4 + i\epsilon)} \times \left[1 - \frac{\hbar q^2}{4m^2} \left(1 + i \frac{\hbar}{2m} q_4 \right)^{-1} \right] \left[1 - \frac{i\hbar q^2}{2m} (q_4 + i\epsilon)^{-1} \right]. \quad (7.20)$$

Заметим, что переход $\hbar \rightarrow 0$ в двух множителях в знаменателе (7.18) и, следовательно, в (7.19) и (7.20) может быть выполнен независимо, поскольку в комплексной q_4 -плоскости особенности $q_4 = -i\hbar$ и $q_4 = i2m/\hbar$ никак не связаны друг с другом.

Тогда вклад от диаграмм 1—3 можно записать в следующем виде, где интегрирование проводится по евклидову пространству:

$$\delta m_4 = \text{const} \cdot \frac{e^4}{\hbar} \iint \frac{dq_1 dq_2 V(q_1^2 l^2) V(q_2^2 l^2)}{q_1^2 q_2^2} \cdot \frac{1}{(-2im)^3} \times \\ \times \bar{u}(p) \{ \gamma_\mu S_E(p + \hbar q_1) \gamma_\nu S_E(p + \hbar q_1 + \hbar q_2) \gamma_\mu S_E(p + \hbar q_2) \gamma_\nu + \\ + \gamma_\mu S_E(p + \hbar q_1) \gamma_\nu S_E(p + \hbar q_1 + \hbar q_2) \gamma_\nu S_E(p + \hbar q_1) \gamma_\mu - \\ - \gamma_\mu S_E(p + \hbar q_1) [\bar{u}(p) \gamma_\nu S_E(p + \hbar q_2) \gamma_\nu u(p)] S_E(p + \hbar q_1) \gamma_\mu \} u(p),$$

где $u(p)$ дается формулой (7.17) и вместо $S_E(p + \hbar q)$ необходимо подставить (7.18). Простые вычисления приводят

результату

$$\delta m_4 = \text{const} \cdot \frac{e^2}{\hbar} \iint dq_1 dq_2 \frac{V_1(q_1^2 l)}{q_1^2} \cdot \frac{V(q_2^2 l)}{q_2^2} \times \\ \times \left\{ [1 + O(\hbar^2)] \frac{1}{(q_{14} + i\varepsilon)(q_{14} + q_{24} + i\varepsilon)(q_{24} + i\varepsilon)} + \right. \\ \left. + \left[1 - \frac{i\hbar}{2m} 3(q_{14} + q_{24}) + O(\hbar^2) \right] \frac{1}{(q_{14} + i\varepsilon)(q_{14} + q_{24} + i\varepsilon)(q_{14} + i\varepsilon)} + \right. \\ \left. + \left[-1 + \frac{i\hbar}{2m} 3q_{24} + O(\hbar^2) \right] \frac{1}{(q_{14} + i\varepsilon)(q_{24} + i\varepsilon)(q_{14} + i\varepsilon)} \right\} = O(\hbar).$$

Таким образом,

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \delta m_4(\hbar) = 0.$$

Аналогичные вычисления были проведены в шестом порядке теории возмущений, и был получен этот же результат.

Остановимся теперь на вопросе, связанном с определением величины параметра l — размера распределения электрического заряда электрона. Здесь мы обсудим, какие теоретические соображения могут быть использованы для определения этого параметра теории. Если мы рассматриваем только спинорную электродинамику изолированно от существования других полей и частиц, то естественно считать, что как математическая модель спинорная электродинамика должна быть внутренне математически замкнута. Тогда параметры, определяющие электромагнитные взаимодействия, e , m и l должны быть как-то связаны между собой. В таком подходе естественно предположить, что масса электрона имеет чисто электромагнитное происхождение, т. е.

$$\delta m = m. \quad (7.21)$$

Предположим, воспользовавшись (6.8), что по порядку величины

$$m \simeq \delta m_2 = m \frac{3\alpha}{4\pi} \ln \frac{1}{ml}. \quad (7.22)$$

Математически это предположение не вполне корректно, поскольку мы выходим за границу применимости теории возмущений, однако ничего другого в настоящее время мы предложить не можем. Все известные способы суммирования расходящегося ряда приводят к соотношениям такого типа. Поэтому можно считать, как следует из (7.22), что

$$l \simeq \frac{1}{m} e^{-a/\alpha} \simeq \frac{1}{m} (10^{-100} \div 10^{-300}), \quad (7.23)$$

где a — некоторая постоянная, не очень отличающаяся от единицы. Полученное число столь мало, что возникает чисто философская проблема, а могут ли вообще существовать такие числа. Поэтому к полученному значению величины l можно от-

носиться по-разному. С одной стороны, можно считать, что спинорная электродинамика как замкнутая теория является локальной теорией. С другой стороны, полученное значение l (7.23) явно указывает на то, что спинорная электродинамика не может быть физически замкнутой теорией, т. е. масса электрона должна иметь неэлектромагнитное происхождение.

§ 8. Экспериментальные ограничения на величину «элементарной длины»

В этом параграфе мы получим ограничения на величину «элементарной длины» l , или, правильнее, размер области нелокального взаимодействия. Эти ограничения следуют из экспериментов по измерению аномального магнитного момента электрона и μ -мезона, лэмбовского сдвига уровней водородоподобных атомов и $e^\pm e^-$ -рассеяния при высоких энергиях. Однако мы не будем себе ставить целью получить совершенно строгие оценки с тщательным анализом всех возможных погрешностей, как это принято в экспериментальной физике, а лишь получим те количественные оценки, которые позволят нам судить о порядке величины области нелокальности электрона или μ -мезона, следующим из современных экспериментов. Этот подход связан в основном с тем, что, как говорилось выше, в настоящее время еще не обнаружено ни одного экспериментального эффекта, который не описывался бы локальной квантовой электродинамикой. Поэтому сейчас можно лишь установить верхнюю границу на величину l , предполагая, что возможная добавка в тот или иной эффект, происходящая за счет нелокальности взаимодействия, не превышает экспериментальных ошибок.

При проверке локальности квантовой электродинамики для обнаружения каких-либо отклонений на субъядерных расстояниях необходима очень высокая точность измерений. Такая точность достигается при измерении аномальных магнитных моментов электрона и μ -мезона, а также при определении лэмбовского сдвига уровней водородоподобных атомов. Достаточно сказать, что для сравнения предсказаний теории с результатами подобных экспериментов необходим тщательный анализ электромагнитных поправок вплоть до шестого порядка теории возмущений.

Вклад в аномальный магнитный момент дает часть вершинного оператора $\Lambda_\mu(q)$ в (6.27), содержащая слагаемое с $\sigma_{\mu\nu} q_\nu$. Имеем (см. (6.29))

$$\Delta_\mu = \frac{\alpha}{2\pi} \left(1 - \frac{2}{3} v(1) m^2 l^2 \right). \quad (8.1)$$

Если электрон представляет собой заряженную сферу, то, согласно (3.23), $v(1) = 1/3$. Если же электрон является равно-

мерно заряженным шаром, то $v(1) = \frac{9 \cdot 2^6 \cdot 13}{\Gamma(9)} = \frac{13}{70} \approx \frac{1}{5,4}$. Мы видим, что полученные числа различаются между собой не очень сильно. Поскольку нас в настоящее время интересует лишь порядок величины «элементарной длины» l , который может быть извлечен из экспериментальных данных на сегодняшний день, то для оценки нам достаточно будет считать, что частицы представляют собой заряженные сферы.

В настоящее время (конец 1976 г.) экспериментальные значения аномального магнитного момента для электрона и μ -мезона даются следующими выражениями:

$$\Delta\mu_{\text{экс}}^{(e)} = \frac{\alpha}{2\pi} - 0,32846 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + (0,54 \pm 0,58) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3, \quad (8.2)$$

$$\Delta\mu_{\text{экс}}^{(\mu)} = \frac{\alpha}{2\pi} + 0,76578 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + (49 \pm 25) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3,$$

и полностью объясняются локальной квантовой электродинамикой (см., например, обзор С. Бродского и С. Дрелла (1972)). Сравнивая формулу (8.1) с экспериментальной ошибкой в (8.2), получим

$$m_e l_e \leq 2,3 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right), \quad l_e \leq 2 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad (8.3)$$

$$m_\mu l_\mu \leq 15 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right), \quad l_\mu \leq 6,4 \cdot 10^{-15} \text{ см}.$$

Отсюда видно, что, несмотря на очень высокую точность измерения аномального магнитного момента, этот эксперимент допускает существование электрона довольно больших размеров. Оценка на размер μ -мезона получается более жесткой, поскольку μ -мезон более чем в двести раз тяжелее электрона.

Рис. 34. Диаграммы Фейнмана, дающие вклад в полную вершинную функцию, определяющую лэмбовский сдвиг уровней.

кальным. Сумма вкладов от диаграмм, показанных на рис. 34, записывается, с учетом (6.27) и (6.36), в виде

$$e\bar{u}(\mathbf{p}') \left[\gamma_\mu (F_1(q^2) - V(-q^2 l^2) \tilde{\Pi}_r(q^2)) + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} q_\nu F_2(q^2) \right] u(\mathbf{p}).$$

Мы будем интересоваться лишь поправкой порядка $m^2 l^2$. Вклад в лэмбовский сдвиг от слагаемого с поляризацией вакуума не будет зависеть от величины l . Действительно, этот вклад

определяется величиной

$$\frac{d}{dq^2} \{ V(-q^2 l^2) \tilde{\Pi}_r(q^2) \} \Big|_{q^2=0} = \frac{d}{dq^2} \tilde{\Pi}_r(q^2) \Big|_{q^2=0} = \frac{\alpha}{15\pi}$$

и зависимость от l^2 выпадает, т. к. $\tilde{\Pi}_r(0) = 0$ согласно (6.15).

Лэмбовский сдвиг только за счет изменения функций F_1 и F_2 определяется следующими формулами (см., например, книгу А. И. Ахиезера и В. Б. Берестецкого (1959) или обзоры С. Бродского и С. Дрелла (1972) и Р. Н. Фаустова (1972)): в s -состояниях

$$\delta E(n, 0, \frac{1}{2}) = \frac{8Z^4 \alpha^2}{n^3} \text{Ry} \left\{ m^2 \frac{d}{dq^2} F_1(q^2) \Big|_{q^2=0} - \frac{1}{4} F_2(0) \right\}; \quad (8.4)$$

в состояниях с орбитальным моментом $L \neq 0$

$$\delta E(n, L, j) = -\frac{8Z^4 \alpha^2}{n^3} \text{Ry} \left\{ \frac{1}{4} F_2(0) \right\} \frac{C_{Lj}}{2L+1}. \quad (8.5)$$

Здесь Z — заряд ядра, n — номер орбиты (главное квантовое число), L — орбитальный момент, j — полный момент. Коэффициенты C_{Lj} задаются следующим образом:

$$C_{Lj} = \begin{cases} \frac{1}{L+1}, & j = L + \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{L}, & j = L - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Через $\text{Ry} = m\alpha^2/2$ обозначается постоянная Ридберга, причем с достаточной для нас степенью точности $\alpha^3 \cdot \text{Ry} = 1,25 \cdot 10^3 \text{ МэВ/сек}$.

Тогда разность энергий уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ для водорода будет равна

$$\Delta E_l(2s_{1/2} - 2p_{1/2}) = \alpha^2 \cdot \text{Ry} \left\{ m^2 F_1'(0) - \frac{1}{2} F_2(0) \right\}. \quad (8.6)$$

Используя формулы (6.28) и (6.29), получим следующее выражение для поправки только за счет нелокальности электрона:

$$\Delta E_l(2s_{1/2} - 2p_{1/2}) = \frac{\alpha^3}{6\pi} \text{Ry} \cdot m^2 l^2 \left[v(1) \left(\ln m^2 l^2 + 2C - \frac{3}{2} \right) + v'(1) \right]. \quad (8.7)$$

Если мы будем считать электрон заряженной сферой (поскольку другие предположения о характере распределения заряда внутри сферы радиуса l не очень сильно меняют числа $v(1)$ и $v'(1)$), то получим с достаточной для нас точностью

$$\Delta E_l(2s_{1/2} - 2p_{1/2}) = -\frac{\alpha^3}{6\pi} \text{Ry} \cdot \frac{m^2 l^2}{3} \cdot \left[2 + \ln \frac{1}{m^2 l^2} \right]. \quad (8.8)$$

Экспериментальное значение лэмбовского сдвига, согласно данным, приведенным в обзоре С. Бродского и С. Дрелла (1972), составляет

$$\Delta E_l(2s_{1/2} - 2p_{1/2}) = (1057,912 \pm 0,011) \text{ МэВ/сек} \quad (8.9)$$

и полностью объясняется локальной теорией. Поэтому $|\Delta E_l(2s_{1/2} - 2p_{1/2})| \leq 0,011 \text{ МэВ/сек}$ и, подставляя в это неравенство формулу (8.8), получим $l \leq 2,3 \cdot 10^{-13} \text{ см}$. Полученное число говорит также о том, что прецизионные измерения в атомной физике еще недостаточны, чтобы почувствовать размер электрона порядка $10^{-15} - 10^{-16} \text{ см}$.

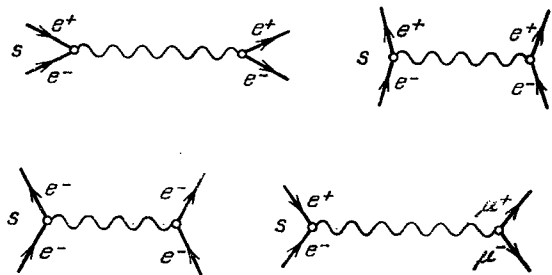


Рис. 35. Диаграммы электромагнитных лептонных процессов, дающих основной вклад в рассеяние при высоких энергиях.

Более жесткие ограничения на величину размера электрона могут быть получены из экспериментов по рассеянию электронов при больших энергиях. Поскольку электромагнитные процессы типа $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$, $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ даже при вы-

Таблица 3

Процесс	$W, \text{ МэВ}$	$l, 10^{-15} \text{ см}$
$e^-e^- \rightarrow e^-e^-$	600	$< 4,6$
$e^+e^- \rightarrow e^+e^-$	1020 2000 4000	$< 2,4$ $< 1,6$ < 1
$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$	1500	$< 2,4$

соких энергиях, достижимых в настоящее время, описываются низшими порядками теории возмущений, как показано на рис. 35, то отношение сечений, подсчитанных по локальной и нелокальной теории, будет даваться формулой

$$\frac{\sigma_{\text{нелок}}}{\sigma_{\text{лок}}} = [V(-sl^2)]^2 \simeq 1 + 2v(1)sl^2, \quad (8.10)$$

где $s = (p_1 + p_2)^2 = (2E)^2 = W^2$, $W = 2E$ — полная энергия в системе центра масс.

Поскольку оценки на основании этой формулы крайне просты, мы лишь приведем данные расчетов (см. табл. 3). Значения l получены из сечений, приведенных в обзоре С. Бродского и С. Дрелла (1972).

Подводя итоги проведенных оценок, можно сказать, что локальная электродинамика прекрасно объясняет экспериментальные данные вплоть до расстояний порядка $l \leq 10^{-14} - 10^{-15} \text{ см}$,

и наиболее перспективными, с точки зрения проверки применимости локальной теории, являются эксперименты с электронами на встречных пучках при больших энергиях.

§ 9. Уравнения для поля со спином 0 и 1

В предыдущих параграфах этой главы мы рассмотрели введение нелокального взаимодействия в квантовую электродинамику электронов и позитронов, т. е. частиц со спином $1/2$. Изложенные методы могут быть перенесены без каких-либо существенных изменений на описание электромагнитных взаимодействий частиц с произвольным спином s . Однако наибольшая трудность при формулировке электромагнитного взаимодействия квантованных полей, описывающих частицы с произвольным спином, заключается в выборе уравнения, которому подчиняется поле с заданным спином s .

Дело в том, что вывод и исследование волновых функций и волновых уравнений для частиц произвольного спина представляет собой одну из проблем современной теории поля, которая в настоящее время еще находится в стадии разработки. Если в случае частиц со спином ноль и половина соответствующие уравнения Клейна — Гордона и Дирака достаточно просты, поскольку описывают только спин 0 и только спин $1/2$, то в случае частиц высших спинов ($s \geq 1$) положение становится значительно более сложным. Причина заключается в том, что релятивистские волновые уравнения для волновой функции, описывающей достаточно большой спин, представляют собой систему дифференциальных уравнений, среди которых имеется определенное число дополнительных условий, призванных исключить ненужные компоненты волновой функции. Это затрудняет построение лагранжиана в достаточно компактной форме, и часто оказывается, что введение взаимодействия приводит к противоречию с дополнительными условиями. В нашу задачу не входит подробное изучение всех возможных подходов к описанию частиц высших спинов. Читатель может познакомиться с историей вопроса по работам И. М. Гельфанда и А. М. Яглома (1948), И. Е. Тамма и В. Л. Гинзбурга (см. сборник памяти И. Е. Тамма (1972)), а также по книгам Х. Умезавы (1958), Ю. Такаши (1969) и Ю. Швингера (1973).

Мы же будем исходить из предложения Хариш-Чандра (1946) и Х. Баба (1945) описывать частицы со спином системой уравнений первого порядка, имеющих формально такой же вид, как и уравнение Дирака:

$$(i\beta_\mu \partial_\mu - m) \Psi(x) = 0. \quad (9.1)$$

Здесь $\Psi(x)$ представляет собой столбец из N строк, а β_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) — четыре матрицы ранга N .

Остановимся на проблемах, возникающих при исследовании уравнения (9.1).

Если поле $\Psi(x)$ в (9.1) описывает частицы массы m , то оно должно удовлетворять уравнению Клейна — Гордона

$$(\square - m^2)\Psi(x) = 0. \quad (9.2)$$

Отсюда следует, что должен существовать оператор $d(i\partial)$, называемый дивизором, который удовлетворяет соотношению

$$d(i\partial)\Lambda(i\partial) = \Lambda(i\partial)d(i\partial) = (\square - m^2), \quad (9.3)$$

где $\Lambda(i\partial) = i\beta_\mu \partial_\mu - m$. Представим дивизор $d(i\partial)$ в виде ряда

$$d(i\partial) = d_0 + \sum_{l \geq 1} d_{\mu_1 \dots \mu_l} \cdot i\partial_{\mu_1} \cdot \dots \cdot i\partial_{\mu_l}, \quad (9.4)$$

где $d_0, d_{\mu_1}, \dots, d_{\mu_1 \dots \mu_l}$ — некоторые матрицы ранга N .

Предположим теперь, что ряд (9.4) содержит только конечное число членов, т. е. сумма обрывается при некотором значении $l = L + 1$. Подставляя разложение (9.4) в (9.3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $p_\mu = i\partial_\mu$, получим, что для того чтобы соотношение (9.3) имело место, матрицы β_μ должны удовлетворять соотношению

$$\sum_{(P)} \beta_{\mu_1} \cdot \dots \cdot \beta_{\mu_L} (\beta_{\mu_{L+1}} \beta_{\mu_{L+2}} - g_{\mu_{L+1}\mu_{L+2}}) = 0. \quad (9.5)$$

Здесь $\sum_{(P)}$ означает сумму по всем возможным перестановкам индексов μ_1, \dots, μ_{L+2} . Умножая соотношение (9.5) на произведение $p_{\mu_1} \cdot \dots \cdot p_{\mu_{L+2}}$, получим

$$\hat{p}^{L+2} = p^2 \cdot \hat{p}^L, \quad (9.6)$$

где $\hat{p} = \beta_\mu p_\mu = i\beta_\mu \partial_\mu$. Тогда дивизор $d(p)$ может быть представлен в виде

$$d(p) = m + \hat{p} - \frac{1}{m}(p^2 - \hat{p}^2) \left[1 + \frac{\hat{p}}{m} + \dots + \left(\frac{\hat{p}}{m}\right)^{L-1} \right], \quad (9.7)$$

где $p^2 = (i\partial_\mu)^2 = \square = -\partial_\mu \partial_\mu$, $p_\mu = i\partial_\mu$. Уравнение (9.1) описывает набор спинов $s_{\min}, s_{\min} + 1, \dots, s_{\max}$, где величина s_{\max} связана со степенью L в (9.6) соотношением

$$L = 2s_{\max} - 1. \quad (9.8)$$

Это следует, во-первых, из того, что дивизор (9.4) или (9.7) преобразуется при преобразованиях Лоренца как $\Psi \times \Psi$, где Ψ в (9.1) описывает поле с максимальным спином s_{\max} , и, во-вторых, соотношение на матрицы β_μ (9.5) или (9.6) ограничивает

максимально возможную степень этих матриц и, тем самым, максимальный неприводимый тензор спина в разложении (9.4).

В случае $L = 0$ соотношения (9.5) имеют вид $\beta_{\mu_1} \beta_{\mu_2} + \beta_{\mu_2} \beta_{\mu_1} = 2g_{\mu_1 \mu_2}$, т. е. мы получаем антикоммутирующие соотношения, определяющие уравнение Дирака.

Для случаев с $L \geq 1$ Харниш-Чандра показал, что соотношения (9.5) не образуют конечную алгебру. Для того чтобы сделать алгебру матриц β_μ конечной, необходимо наложить на них более сильные ограничения, не противоречащие соотношениям (9.5). В частности, известное уравнение, выведенное Р. Дэффинном (1938) и Н. Кеммером (1939), получается в специальном случае соотношений (9.5) при $L = 1$:

$$\beta_\mu \beta_\lambda \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\lambda \beta_\mu = g_{\mu\lambda} \beta_\nu + g_{\nu\lambda} \beta_\mu. \quad (9.9)$$

Основная задача теории состоит в том, чтобы найти такие матрицы β_μ , которые гарантировали бы, что уравнение (9.1) описывает поле $\Psi(x)$ с определенным спином s и не содержит никаких лишних компонент. В общем случае спина s эта задача еще ждет своего решения.

Нам кажется, что наиболее прозрачным и ясным подходом к построению уравнений для частиц с высшими спинами является метод проекционных операторов, предложенный А. Аурилия и Х. Умезава (1969).

В этом параграфе их методом мы получим уравнения для частиц со спином 0 и 1 на основе изучения двуспинорного основного представления. Волновые функции в этом представлении записываются через $\Psi_{\alpha\beta}$, где α и β — дираковы спинорные индексы. Матрицы γ_μ , связанные с этими индексами, обозначим через $\gamma_\mu^{(1)}$ и $\gamma_\mu^{(2)}$ соответственно. В преобразовании Лоренца

$$x'_\mu = x_\mu + \delta\varepsilon_\mu + \delta\omega_{\mu\nu} x_\nu, \quad \Psi'(x') = \left[I + \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \delta\omega_{\mu\nu} \right] \Psi(x), \quad (9.10)$$

где $\delta\varepsilon_\mu$ — сдвиг на бесконечно малый вещественный вектор, $\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu}$ — антисимметричная матрица бесконечно малых преобразований Лоренца, спиновая матрица $S_{\mu\nu}$ записывается в виде

$$S_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}^{(1)} + S_{\mu\nu}^{(2)} = [\beta_\mu, \beta_\nu]. \quad (9.11)$$

Здесь

$$S_{\mu\nu}^{(j)} = \frac{1}{4} [\gamma_\mu^{(j)}, \gamma_\nu^{(j)}] \quad (j = 1, 2), \quad \beta_\mu = \frac{1}{2} [\gamma_\mu^{(1)} + \gamma_\mu^{(2)}].$$

Легко убедиться, что матрицы β_μ удовлетворяют перестановочным соотношениям Дэффина — Кеммера (9.9). Генераторами сдвига являются эрмитовы операторы $p_\mu = i\partial_\mu$, а генераторами вращений являются матрицы

$$M_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + (x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu). \quad (9.12)$$

Скалярные операторы

$$p^2 = p_\mu p_\mu, \quad W = \omega_\mu \omega_\mu = \frac{1}{2} S_{\mu\nu} S_{\mu\nu} p^2 - S_{\mu\sigma} S_{\nu\sigma} p_\mu p_\nu, \quad (9.13)$$

где

$$\omega_\sigma = \frac{1}{2} \varepsilon_{\sigma\mu\nu\lambda} M_{\mu\nu} p_\lambda = \frac{1}{2} \varepsilon_{\sigma\mu\nu\lambda} S_{\mu\nu} p_\lambda,$$

коммутируют со всеми генераторами $M_{\mu\nu}$ и p_μ . Поэтому они являются инвариантами группы и в каждом неприводимом представлении неоднородной группы Лоренца кратны единичному оператору, а их собственные значения могут быть использованы для классификации неприводимых представлений.

Собственные значения оператора p^2 равны m^2 , где m называется массой частицы. Оператор W является инвариантом группы Лоренца, поэтому удобно рассмотреть его в системе покоя, где $p = (m, 0)$. Тогда

$$W = m^2 S^2 = m^2 (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2),$$

где $S_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} S_{jk}$ ($i, j, k = 1, 2, 3$) и $[S_i, S_j]_- = i \varepsilon_{ijk} S_k$. Операторы S_j удовлетворяют коммутационным соотношениям углового момента, так что собственные значения оператора S^2 равны $S^2 = s(s+1)$. Здесь s может принимать целые или полуцелые значения и является спином рассматриваемого поля.

Таким образом, собственные значения оператора W имеют вид $W = m^2 s(s+1)$.

Каждое неприводимое представление неоднородной группы Лоренца характеризуется двумя числами (m, s) . Волновые функции для фиксированных m и s являются собственными функциями операторов p^2 и W :

$$(p^2 - m^2) \Psi = 0, \quad W \Psi = s(s+1) p^2 \Psi. \quad (9.14)$$

Чтобы получить волновую функцию с определенным значением спина s , необходимо построить проекционный оператор, выбирающий представление спина s . Такой проекционный оператор легко построить:

$$P(s) = \prod_{s' \neq s} \frac{W - s'(s'+1) p^2}{s(s+1) p^2 - s'(s'+1) p^2}. \quad (9.15)$$

В нашем основном представлении имеется только два спиновых состояния: $s = 0$ и $s = 1$. Оба они неприводимы. Согласно определению (9.15), получим

$$P(0) = 1 - \frac{W}{2p^2}, \quad (9.16)$$

$$P(1) = \frac{W}{2p^2}. \quad (9.17)$$

Волновая функция основного представления удовлетворяет так называемому уравнению Баргмана — Вигнера:

$$(\hat{p}^{(i)} - m) \Psi = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (9.18)$$

Тогда функция

$$\Psi^{(s)} = P(s) \Psi \quad (9.19)$$

принадлежит неприводимому представлению (m, s) .

Общее решение уравнения (9.18) с учетом (9.19) записывается в следующем виде:

$$\Psi^{(s)} = \prod_{i=1}^2 \left(\frac{\hat{p}^{(i)} + m}{2m} \right) P(s) \Psi, \quad (9.20)$$

где $\left(\frac{\hat{p}^{(i)} + m}{2m} \right)^2 = \frac{\hat{p}^{(i)} + m}{2m}$ при $p^2 = m^2$.

Задача состоит теперь в том, чтобы найти уравнение вида (9.1), которому удовлетворяет полученное решение (9.20). Оператор $\Lambda(i\partial)$ (см. (9.3)) должен быть построен из операторов, инвариантных относительно преобразований неоднородной группы Лоренца, и вне массовой поверхности должен быть линейным относительно параметра массы m .

Для этого преобразуем решение (9.20). Введем проекционный оператор

$$\chi(p) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\hat{p}^{(2)} \hat{p}^{(1)}}{p^2} \right] \quad (9.21)$$

такой, что

$$[\chi(p)]^2 = \chi(p).$$

Этот оператор на массовой поверхности $p^2 = m^2$ удовлетворяет условию

$$\chi(p) (\hat{p}^{(1)} + m) = \left(\frac{\hat{p}^{(2)} + m}{2m} \right) (\hat{p}^{(1)} + m).$$

Тогда, используя эти соотношения, можно переписать (9.20) в виде

$$\Psi^{(s)} = \chi(p) \frac{\hat{p}^{(1)} + m}{2m} P(s) \Psi. \quad (9.22)$$

Соотношения (9.20) или (9.22) дают общее выражение для волновых функций из неприводимого представления (m, s) .

Уравнение Баргмана — Вигнера (9.18) эквивалентно системе следующих двух уравнений:

$$(\hat{p}^{(1)} - m) \Psi_i^{(s)} = 0, \quad [1 - \chi(p)] \Psi_i^{(s)} = 0. \quad (9.23)$$

В свою очередь, эта система эквивалентна одному уравнению

$$\lambda(a, p) \Psi_i^{(s)} = 0, \quad (9.24)$$

где

$$\lambda(a, p) = (\beta^{(1)} - m) \chi(p) + a[1 - \chi(p)] \quad (9.25)$$

и a — произвольный параметр. Выбирая $a = -m$, чтобы исключить сингулярные члены с $1/p^2$, получим

$$\lambda(m, p) = \beta_\mu p_\mu - m = \beta - m. \quad (9.26)$$

Волновые функции с определенным значением спина являются решениями следующей системы уравнений:

$$\lambda(a, p) P(s) \Psi = 0, \quad P(s') \Psi = 0 \quad (s' \neq s). \quad (9.27)$$

Эта система эквивалентна уравнению

$$\Lambda^{(s)}(p) \Psi^{(s)} = 0, \quad (9.28)$$

где

$$\Lambda^{(0)}(p) = (\beta - m) \left(1 - \frac{W}{2p^2}\right) + a_0 \frac{W}{2p^2}, \quad (9.29a)$$

$$\Lambda^{(1)}(p) = (\beta - m) \frac{W}{2p^2} + a_1 \left(1 - \frac{W}{2p^2}\right). \quad (9.29b)$$

Здесь параметры a_0 и a_1 произвольны. Сингулярные члены устраняются, если положить $a_0 = a_1 = -m$.

Для инварианта W получим, используя коммутационные соотношения (9.9),

$$W = B^2 p^2 - 3B p^2 - 2B \beta^2 + 4\beta^2, \quad B = \beta_\nu \beta_\nu.$$

После несложных преобразований имеем

$$\Lambda^{(s)}(p) = \beta_\mu^{(s)} p_\mu - m = \beta^{(s)} - m, \quad (9.30)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_\mu^{(0)} &= (1 - P) \beta_\mu, \\ \beta_\mu^{(1)} &= P \beta_\mu, \end{aligned} \quad (9.31)$$

$$P = -\frac{1}{2}(B - 4)(B - 1).$$

Используя соотношения (9.11) и (9.9), можно показать, что матрица P удовлетворяет соотношениям

$$P \beta_\mu - \beta_\mu P = 0, \quad P^2 \beta_\mu = P \beta_\mu, \quad P(1 - P) \beta_\nu = 0.$$

Поэтому матрицы $\beta_\mu^{(0)}$ и $\beta_\mu^{(1)}$ также удовлетворяют перестановочным соотношениям Дэффина — Кеммера (9.9). Кроме того, $\beta_\mu^{(0)} \beta_\mu^{(1)} = 0$.

Шпуры матриц $\beta_\mu^{(0)}$ и $\beta_\mu^{(1)}$ определяются формулами, следующими из представлений (9.11) и (9.31) и свойств шпуров γ -матриц.

Имеем для $s = 0$

$$\begin{aligned} \text{Sp} \underbrace{\{\beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda \beta_\sigma \dots \beta_\rho \beta_\tau \beta_\chi\}}_n &= \\ &= \begin{cases} g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} \dots g_{\tau\chi} + g_{\nu\lambda} g_{\sigma\dots} \dots g_{\rho\tau} g_{\chi\mu}, & \text{если } n \text{ — четное,} \\ 0, & \text{если } n \text{ — нечетное;} \end{cases} \quad (9.32) \end{aligned}$$

для $s = 1$:

$$\begin{aligned} \text{Sp} \beta_\mu \beta_\nu &= 6g_{\mu\nu}, \\ \text{Sp} \beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda \beta_\rho &= 3(g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} + g_{\nu\lambda} g_{\mu\rho}), \\ \text{Sp} \beta_\lambda \beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \beta_\sigma \beta_\tau &= g_{\lambda\mu} g_{\nu\rho} g_{\sigma\tau} + g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} g_{\tau\lambda} + \\ &+ 2\{g_{\lambda\mu} g_{\nu\tau} g_{\rho\sigma} + g_{\nu\rho} g_{\mu\sigma} g_{\lambda\tau} + g_{\sigma\tau} g_{\rho\lambda} g_{\mu\nu} - g_{\lambda\rho} g_{\sigma\mu} g_{\tau\nu}\} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (9.33)$$

Дивизор $d^{(s)}(p)$, согласно (9.7), записывается в виде

$$d^{(s)}(p) = m + \beta^{(s)} - \frac{1}{m}(p^2 - \beta^{(s)^2}) \quad (s = 0, 1). \quad (9.34)$$

Выделим теперь из шестнадцатикомпонентного поля $\Psi_{\alpha\beta}$, где α и β — спинорные индексы, принимающие значения 0, 1, 2, 3, поля, соответствующие спину 0 и 1. Для этого представим поле $\Psi_{\alpha\beta}$ в основном представлении через разложение по шестнадцати линейно независимым матрицам:

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha\beta} &= \tilde{C}_{\alpha\beta} \Psi + (\gamma_\mu \tilde{C})_{\alpha\beta} \Psi_\mu + (\gamma_\mu \gamma_5 \tilde{C})_{\alpha\beta} \Psi_{\mu 5} + \\ &+ \frac{i}{4} (\sigma_{\mu\nu} \tilde{C})_{\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Psi_{\rho\sigma} + (\gamma_5 \tilde{C})_{\alpha\beta} \Psi_5 = \sum_j (Q^j \tilde{C})_{\alpha\beta} \Psi_j, \end{aligned} \quad (9.35)$$

где определение Q^j следует из самой формулы (9.35). Здесь $\tilde{C} = \gamma_5 C$, где C — матрица зарядового сопряжения, так что \tilde{C} удовлетворяет условию $\tilde{C} \gamma_\mu \tilde{C}^{-1} = \gamma_\mu^T$.

Воспользовавшись формулами (9.11) и (9.31), получим для операторов P и \hat{p} следующее представление:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\alpha', \beta\beta'} &= \left[1 + \frac{1}{4} (\gamma_\rho^{(1)} \gamma_\rho^{(2)}) - \frac{1}{8} (\gamma_\rho^{(1)} \gamma_\rho^{(2)})^2\right]_{\alpha\alpha', \beta\beta'} = \\ &= g_{\alpha\alpha'} g_{\beta\beta'} + \frac{1}{4} (\gamma_\rho)_{\alpha\alpha'} (\tilde{C} \gamma_\rho \tilde{C}^{-1})_{\beta\beta'} - \frac{1}{8} (\gamma_\rho \gamma_\sigma)_{\alpha\alpha'} (\tilde{C} \gamma_\sigma \gamma_\rho \tilde{C}^{-1})_{\beta\beta'}, \end{aligned} \quad (9.36)$$

$$\begin{aligned} \hat{p}_{\alpha\alpha', \beta\beta'} &= \frac{1}{2} p_\rho [\gamma_\rho^{(1)} + \gamma_\rho^{(2)}]_{\alpha\alpha', \beta\beta'} = \\ &= \frac{1}{2} p_\rho \{(\gamma_\rho)_{\alpha\alpha'} g_{\beta\beta'} + g_{\alpha\alpha'} (\tilde{C} \gamma_\rho \tilde{C}^{-1})_{\beta\beta'}\}. \end{aligned}$$

Действие операторов P и \hat{p} на матрицу $(Q^j \tilde{C})_{\alpha\beta}$ в разложении (9.35) дает

$$\begin{aligned} P(Q^j \tilde{C}) &= \sum_{\alpha'\beta'} P_{\alpha\alpha' \beta\beta'} (Q^j \tilde{C})_{\alpha'\beta'} = \\ &= \left\{ \left[Q^j + \frac{1}{4} \gamma_\rho Q^j \gamma_\rho - \frac{1}{8} \gamma_\rho \gamma_\sigma Q^j \gamma_\sigma \gamma_\rho \right] \tilde{C} \right\}_{\alpha\beta}, \\ \hat{p}(Q^j \tilde{C}) &= \sum_{\alpha'\beta'} \hat{p}_{\alpha\alpha' \beta\beta'} (Q^j \tilde{C})_{\alpha'\beta'} = p_\rho \frac{1}{2} \{ [\gamma_\rho Q^j + Q^j \gamma_\rho] \tilde{C} \}_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (9.37)$$

После простых вычислений, использующих только свойства дираковых γ -матриц, можно свести уравнение (9.1) с оператором $\Lambda^{(0)}$ (9.30) для спина $s = 0$ к системе уравнений

$$\begin{aligned} m\Psi &= p_\mu \Psi_\mu, \\ m\Psi_\mu &= p_\mu \Psi, \end{aligned} \quad (9.38)$$

откуда следует $(p^2 - m^2)\Psi = 0$. Мы получили обычное уравнение Клейна — Гордона для бесспиновых частиц. Система уравнений (9.38) содержит пять компонент, так что для матриц $\beta_\mu^{(0)}$ можно найти представление в виде матриц 5×5 .

Для спина $s = 1$ получаем

$$\begin{aligned} p_\mu \Psi_{\nu 5} - p_\nu \Psi_{\mu 5} - m\Psi_{\mu\nu} &= 0, \\ p_\alpha \Psi_{\alpha\mu} - m\Psi_{\mu 5} &= 0, \end{aligned} \quad (9.39)$$

откуда следует

$$(p^2 - m^2)\Psi_{\mu 5} - p_\mu p_\nu \Psi_{\nu 5} = 0, \quad \Psi_{\mu\nu} = \frac{1}{m}(p_\mu \Psi_{\nu 5} - p_\nu \Psi_{\mu 5}). \quad (9.40)$$

Мы получили уравнение Прока для спина 1. Уравнения (9.39) содержат десять компонент, поэтому для матриц $\beta_\mu^{(1)}$ можно найти представление в виде матриц 10×10 .

Для функции Ψ_5 в разложении (9.35) получаем $\Psi_5 = 0$.

Таким образом, основное представление, содержащее 16 компонент, разбилось на три неприводимых представления: десятикомпонентное для спина 1, пятикомпонентное для спина 0 и однокомпонентное для тривиального случая $\Psi_5 = 0$.

Подчеркнем еще раз, что линейные уравнения для определенного спина позволяют автоматически учитывать необходимые дополнительные условия, призванные исключить ненужные спиновые компоненты.

Обратим внимание на то, что описание, основанное на уравнении Дэффина — Кеммера, обладает следующими достоинствами. Во-первых, линейные уравнения (9.1) описывают свойства свободных частиц со спином, равным как нулю (Ψ имеет пять компонент), так и единице (Ψ имеет десять компонент), причем в обоих случаях матрицы β_μ удовлетворяют одним и тем же

соотношениям (9.9). Во-вторых, поскольку матрицы β_μ удовлетворяют одним и тем же соотношениям, то общие формулы для матричных элементов, определяющих различные процессы взаимодействия частиц со спином 0 и 1, имеют одинаковый вид. Вероятности этих процессов для частиц обоих видов, конечно, отличаются, так как отличаются следы произведений пятирядных и десятирядных матриц β_μ (см. (9.32) и (9.33)).

В-третьих, исследование ряда теории возмущений для S -матрицы формально будет таким же, как и в спинорной электродинамике, и, следовательно, вычисление матричных элементов S -матрицы может производиться с помощью фейнмановских диаграмм и правил с единственным различием, что вместо пропагаторов электронов следует подставить пропагаторы заряженных бозонов. Кроме того, вершинам диаграмм соответствует теперь β_μ , а не γ_μ . Более того, в этой схеме доказательство градиентной инвариантности теории выглядит весьма просто. Построение S -матрицы тем самым будет технически проще, чем в вариантах, основанных на уравнениях второго порядка.

§ 10. Электродинамика частиц со спином 0 и 1

В этом параграфе мы подробно рассмотрим электродинамику частиц со спином 0 и 1. Далее будет видно, что построение электродинамики частиц с произвольным спином s не представляет принципиальных трудностей.

Мы будем строить S -матрицу в нелокальной теории электромагнитных взаимодействий частиц со спином 0 и 1 на основе уравнений (9.1). Исходный лагранжиан, описывающий электромагнитное взаимодействие скалярных и векторных частиц, выбирается в форме

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_I(x), \quad (10.1)$$

где

$$\mathcal{L}_0(x) = -\frac{1}{2} : \partial_\nu A_\mu(x) \partial_\nu A_\mu(x) : + : \bar{\Psi}(x) (i\beta_\mu \partial_\mu - m) \Psi(x) :,$$

$$\mathcal{L}_I(x) = e : \bar{\Psi}(x) \beta_\mu \Psi(x) : \mathcal{A}_\mu(l, x);$$

здесь $\bar{\Psi}(x) = \Psi^*(x) \eta$, $\eta = 2\beta_0^2 - 1 = \gamma_0^{(1)} \gamma_0^{(2)}$.

Нелокальность в лагранжиан взаимодействия входит через операторы поля фотонов

$$\mathcal{A}_\mu(l, x) = \int dx' K\left(\frac{x-x'}{l}\right) \mathcal{A}_\mu(x) = K(l^2 \square) \mathcal{A}_\mu(x),$$

где $K\left(\frac{x-x'}{l}\right) = K(l^2 \square) \delta(x-x')$ принадлежит подходящему пространству нелокальных обобщенных функций, а параметр l имеет смысл «элементарной длины».

Наша задача состоит в том, чтобы найти S -матрицу в виде ряда по теории возмущений. Формально S -матрица записывается в виде

$$S = T \exp \left\{ ie \int dx : \bar{\Psi}(x) \hat{\mathcal{A}}(l, x) \Psi(x) : \right\}. \quad (10.2)$$

Для получения ряда теории возмущений необходимо разложить экспоненту (10.2) в ряд по e и перейти к N -произведению операторов поля $A_\mu(x)$ и $\Psi(x)$ согласно теореме Вика.

Оставляя в стороне все вопросы, связанные с определением T -произведения в (10.2) как операции T^* , или виковского T -произведения, будем считать, по определению, что «хронологическая» свертка «размазанного» электромагнитного поля записывается в виде

$$D_{\mu\nu}(x-y) = g_{\mu\nu} D(x-y) = \overbrace{A_\mu(l, x) A_\nu(l, y)} = - \frac{g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4 i} \int dk \frac{[K(k^2 l^2)]^2}{-k^2 - ie} e^{-ik(x-y)}. \quad (10.3)$$

В соответствии с результатами, полученными выше, будем предполагать, что формфактор $V(-k^2 l^2) = [K(k^2 l^2)]^2$ удовлетворяет условиям (E) (см. стр. 97), где

$$\int_0^\infty du V(u) < \infty \quad \text{для спина } s = 0,$$

$$\int_0^\infty du u^2 \ln u V(u) < \infty \quad \text{для спина } s = 1.$$

Пропагаторы заряженных частиц со спином $s = 0$ и $s = 1$ записываются в виде

$$T_c(x-y) = \overbrace{\Psi(x) \bar{\Psi}(y)} = \langle 0 | T^*(\Psi(x) \bar{\Psi}(y)) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int dp \tilde{T}_c(p) e^{-ip(x-y)}, \quad (10.4)$$

где

$$\tilde{T}_c(p) = \frac{1}{m - \hat{p} - ie} = \frac{\hat{p}(\hat{p} + m) - p^2 + M^2}{m(m^2 - p^2 - ie)}.$$

Таким образом, мы получаем обычный ряд теории возмущений с тем единственным отличием, что причинная функция фотонного поля заменяется на функцию (10.3).

Сформулируем теперь регуляризационную процедуру, которой мы будем пользоваться при вычислении матричных элементов в теории возмущений. В квантовой электродинамике в ряду теории возмущений подлежат регуляризации, во-первых, нелокальные пропагаторы фотона и, во-вторых, замкнутые циклы, образованные пропагаторами заряженных частиц.

Для нелокального пропагатора фотона (10.3) будем использовать регуляризацию (4.1), как уже неоднократно делалось нами ранее. Опишем процедуру регуляризации заряженных циклов. Интегралы, соответствующие замкнутым циклам $\text{Sp}[\beta T_c(x_1 - x_2) \beta T_c(x_2 - x_3) \dots]$, составленным только из пропагаторов заряженных полей скалярных или векторных бозонов, будем регуляризовать с помощью частично видоизмененной циклической регуляризации Паули — Вилларса. Это означает, что причинные функции заряженных частиц регуляризуются не по отдельности, а замкнутыми циклами. Если цикл имеет n вершин, то регуляризованное выражение будет выглядеть так:

$$\sum_j c_j \Lambda_j^{sn} \text{Sp} \{ \beta T_c(M_j, x_1 - x_2) \beta T_c(M_j, x_2 - x_3) \dots \}, \quad (10.5)$$

где проведены замены $m \Rightarrow M_j = m \Lambda_j$, $e \Rightarrow e_j = e \Lambda_j^s$. Здесь s — спин заряженной частицы (в нашем случае $s = 0$ или 1), Λ_j ($j = 1, 2, \dots, 8$) — большие безразмерные параметры регуляризации, которые мы выберем в виде $\Lambda_j = \Lambda + \epsilon_j$, где $\Lambda \gg 1$, а $\epsilon_j \ll 1$. Коэффициенты $c_0 = 1$, c_j ($j = 1, \dots, 8$) удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{j=1}^8 c_j \Lambda_j^k = -1 \quad (k = 0, 1, \dots, 4), \quad (10.6)$$

$$\sum_{j=1}^8 c_j \Lambda_j^m \ln \Lambda_j = a_m \quad (m = 0, 2, 4),$$

где a_m — произвольные постоянные. В рамках этой регуляризации сходятся интегралы от любых замкнутых циклов и существует конечный предел при $\Lambda \rightarrow \infty$.

Действительно, в случае скалярных заряженных частиц ($s = 0$) при переходе к импульсному представлению наибольшая степень импульса в числителе под знаком интеграла

$$\int dp \sum_j c_j \Lambda_j^{sn} \text{Sp} \{ \beta \tilde{T}_c(M_j, p + k_1) \beta \tilde{T}_c(M_j, p + k_2) \dots \} \quad (10.7)$$

не может превосходить порядка диаграммы, т. е. числа n , так как

$$(\hat{p}^2 - p^2) \beta_{\mu_1} \dots \beta_{\mu_m} (\hat{q}^2 - q^2) \equiv 0$$

в случае пятирядных матриц для любых p и q , если m — нечетное число. Поэтому максимальная расходимость будет квадратичной.

В случае векторных заряженных бозонов ($s = 1$) наибольшая степень импульса в числителе в (10.4) равна 2, так что интегралы, соответствующие любым заряженным циклам векторных бозонов, расходятся не быстрее четвертой степени по

импульсу. Поэтому теория заряженного векторного поля во внешнем электромагнитном поле относится к классу перенормируемых.

Уравнения (10.6) обеспечивают сходимость интегралов от регуляризованной функции (10.7) и являются условиями, при которых в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ не возникает никаких бессмысленных расходящихся выражений. Этот вопрос еще будет подробно обсуждаться в гл. IX.

Перейдем теперь к вычислению матричных элементов, соответствующих следующим примитивным неприводимым диаграммам Фейнмана, показанным на рис. 27 (см. стр. 253).

Диаграмма собственной энергии. Рассмотрим диаграмму собственной энергии, представленную на рис. 27 (1). Этой диаграмме соответствует матричный элемент

$$-i : \bar{\Psi}(x) \Sigma(x-y) \Psi(y) :,$$

где $\Sigma(x-y) = -ie^2 \beta_\mu T_c(x-y) \beta_\mu D(x-y)$.

Переходя в импульсное представление и воспользовавшись нашей регуляризационной процедурой, получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(p) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} (-ie^2) \int dx e^{ipx} \beta_\mu T_c(x) \beta_\mu D^\delta(x) = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(-ie^2)}{(2\pi)^4} \int dk \frac{V^\delta(-k^2 l^2)}{-k^2 - i\epsilon} \beta_\mu \frac{m^2 - (p-k)^2 + (\hat{p}-\hat{k})(\hat{p}-\hat{k}+m)}{m(m^2 - (p-k)^2 - i\epsilon)} \beta_\mu. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Воспользуемся представлением (4.1) для пропагатора $\tilde{D}^\delta(k^2)$. После некоторых вычислений получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(p) &= \frac{\alpha}{4\pi} m \left\{ \left[B + \frac{\hat{p}}{m} + (1-B) \frac{\hat{p}^2}{m^2} \right] F_{0,0} \left(m^2 l^2, \frac{p^2}{m^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left[2(1-B) \frac{\hat{p}^2}{m^2} + \frac{\hat{p}}{m} \right] F_{1,0} \left(m^2 l^2, \frac{p^2}{m^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (1-B) B F_{1,1} \left(m^2 l^2, \frac{p^2}{m^2} \right) + (1-B) \frac{\hat{p}^2}{m^2} F_{2,0} \left(m^2 l^2, \frac{p^2}{m^2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $B = \beta_\mu \beta_\mu$,

$$F_{a,b} \left(m^2 l^2, \frac{p^2}{m^2} \right) = \frac{1}{2i} \int_{-d_{a+b}+i\infty}^{-d_{a+b}+i\infty} d\zeta \frac{v(\zeta) (m^2 l^2)^\zeta}{\sin \pi \zeta} H_{a,b} \left(\zeta, \frac{p^2}{m^2} \right),$$

где $\frac{a+b}{2} < d_{a+b} < \frac{a+b+1}{2}$,

$$H_{a,b} \left(\zeta, \frac{p^2}{m^2} \right) = \frac{\Gamma(-b-\zeta)}{\Gamma(1-\zeta)} \int_0^1 du u^{-\zeta} (1-u)^{\zeta+a} \left(1 - \frac{p^2}{m^2} u \right)^{\zeta+b}.$$

Подсчитаем электромагнитную поправку к массе частицы в двух пределах $m^2 l^2 \ll 1$ и $m^2 l^2 \gg 1$. Имеем для $m^2 l^2 \ll 1$

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(m) &= \frac{3\alpha}{8\pi} \frac{B(B-1)}{6} \frac{v'(-1)}{m^2 l^2} m [1 + O(m^2 l^2 \ln m^2 l^2)] = \\ &= \begin{cases} \frac{3\alpha}{4\pi} \cdot \frac{v'(-1)}{m^2 l^2} m, & s=0, \\ -\frac{\alpha}{4\pi} \frac{v'(-1)}{m^2 l^2} m, & s=1; \end{cases} \end{aligned} \quad (10.9)$$

для $m^2 l^2 \gg 1$, т. е. в классическом пределе,

$$\tilde{\Sigma}(m) = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{v(-1/2)}{ml} m \left(1 + O\left(\frac{1}{m^2 l^2}\right) \right).$$

Заметим, что, согласно (3.8),

$$v(-1/2) = l \iint \frac{dr_1 dr_2 b(r_1) b(r_2)}{|r_1 - r_2|}.$$

Это означает, что в классическом пределе совпадают поправки к массе частиц со спином 0, 1/2 и 1. Как будет показано ниже (см. (10.21)), поправка к массе заряженной частицы в классическом пределе вообще не зависит от спина, хотя в квантовом пределе $ml \ll 1$ с ростом спина она имеет все большую сингулярность.

Интересно подсчитать разность масс π^+ и π^0 -мезонов. Так как π^0 -мезон электрически нейтрален, разность масс $m_{\pi^+} - m_{\pi^0}$ будет определяться только собственной электромагнитной энергией π^+ -мезона. Будем грубо считать π^+ -мезон равномерно заряженным шаром, радиус которого l определяется соотношением $l^2 = \frac{5}{3} \langle r^2 \rangle_{\text{эксп}} \simeq \frac{5}{3} \cdot \frac{0,19}{m_\pi^2} = \frac{0,32}{m_\pi^2}$, где $\langle r^2 \rangle_{\text{эксп}} \simeq (0,6 \cdot 10^{-13} \text{ см})^2 = \frac{0,19}{m_\pi^2}$. Для заряженного шара $v'(-1) = 9/2$ (см. § 3 этой главы). Подставляя эти величины в (10.9), получим

$$m_{\pi^+} - m_{\pi^0} = \alpha m_\pi \frac{3}{4\pi} \frac{9}{2 \cdot 0,32} = 3,4 \text{ Мэв},$$

что находится в грубом соответствии с экспериментальным значением 4,6 Мэв. Ясно, что подбирая распределение заряда в π^+ -мезоне соответствующим образом, легко добиться полного совпадения с экспериментальным значением разности масс.

Вершинная диаграмма и статические характеристики бозонов. Рассмотрим теперь вершинную диаграмму, представленную на рис. 27 (3). Этой диаграмме соответствует матричный элемент $ie : \bar{\Psi}(x) \Gamma_\mu(x, z|y) \Psi(z) A_\mu(y) :$, где введена вершинная функция третьего порядка

$$\Gamma_\mu(x, z|y) = ie^2 \beta_\nu T_c(x-y) \beta_\mu T_c(y-z) \beta_\nu D(x-z).$$

Переходя к импульсному представлению, согласно принятой нами регуляризационной процедуре, получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_\mu(p', p) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} (ie^2) \iint dy dz e^{ipz + iqy} \beta_\nu T_c(y) \beta_\mu T_c(z-y) \beta_\nu D^\delta(z) = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int dk \beta_\nu \tilde{T}_c(k+q) \beta_\mu \tilde{T}_c(k) \beta_\nu \tilde{D}^\delta((p-k)^2) = \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ 2 \int_{-d+i\infty}^{-d-i\infty} \frac{d\xi F_{1\mu}(\xi)}{\Gamma(1-\xi)} + \int_{-d+i\infty}^{-d-i\infty} \frac{d\xi F_{2\mu}(\xi)}{\Gamma(-\xi)Z} - \right. \\ &\quad \left. - 6 \int_{-d-1+i\infty}^{-d-1-i\infty} \frac{d\xi F_{3\mu}(\xi)Z}{(1+\xi)\Gamma(1-\xi)} \right\} \rho(\xi), \quad (10.10) \end{aligned}$$

где $0 < d < 1$, $\rho(\xi) = \frac{\alpha}{4m^2} \frac{v(\xi) l^{2\xi} Z^\xi}{[\sin \pi\xi]^2 \Gamma(1+\xi)}$,

$$Z = m^2(u_2 + u_3) - u_1 u_3 p^2 - u_2 u_3 q^2 - u_1 u_2 (p+q)^2,$$

$$F_{j\mu}(\xi) = \Omega(\xi) f_{j\mu} = \int \int \int du_1 du_2 du_3 u_1^{-\xi} \delta(1-u_1-u_2-u_3) f_{j\mu} \quad (j=1, 2, 3),$$

а функции $f_{j\mu}$ определяются следующими выражениями:

$$f_{1\mu} = \beta_\nu \left\{ N \beta_\mu \left(1 - \frac{1}{4} B\right) - \frac{1}{4} J_\rho \beta_\mu H_\rho + \left(1 - \frac{1}{4} B\right) \beta_\mu Q \right\} \beta_\mu,$$

$$f_{2\mu} = \beta_\nu N \beta_\mu Q \beta_\nu,$$

$$f_{3\mu} = \beta_\nu \left(1 - \frac{1}{4} B\right) \beta_\mu \left(1 - \frac{1}{4} B\right) \beta_\nu = \frac{1}{16} \beta_\mu (\omega - 4).$$

Здесь

$$N = q^2 - [\hat{R}, \hat{q}]_+ + 2(qR) - q^2 + m^2 + m(\hat{q} - \hat{R}) + \hat{R}^2 - R^2,$$

$$J_\rho = [\hat{q}, \beta_\rho]_+ - 2q_\rho + m\beta_\rho - [\beta_\rho, \hat{R}]_+ + 2R_\rho,$$

$$H_\rho = -[\hat{R}, \beta_\rho]_+ + m\beta_\rho + 2R_\rho,$$

$$Q = m^2 - m\hat{R} + \hat{R}^2 - R^2,$$

$$R_\rho = u_2 q_\rho - u_1 p_\rho,$$

$$\omega = (5 - B)B = \begin{cases} 6 & \text{для спина 1,} \\ 4 & \text{для спина 0.} \end{cases}$$

Легко проверить, что вершинная часть удовлетворяет условию градиентной инвариантности

$$q_\mu \bar{u}(p+q) \Gamma_\mu(p, q) u(p) = 0,$$

где $u(p)$ и $\bar{u}(p+q)$ — спиноры, описывающие бозон в начальном и конечном состояниях. Это равенство основано на использовании при $q = p' - p$ тождества

$$q_\mu \left\{ \frac{1}{m-p'} \beta_\mu \frac{1}{m-p} \right\} = \frac{1}{m-p'} - \frac{1}{m-p}.$$

В нашей схеме при $q = 0$ имеет место тождество Уорда

$$\tilde{\Gamma}_\mu(p, p) = -\frac{\partial \tilde{\Sigma}(p)}{\partial p_\mu}. \quad (10.11)$$

Для доказательства этого соотношения заметим, что справедливо тождество

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} \tilde{T}_c(p) = \tilde{T}_c(p) \beta_\mu \tilde{T}_c(p).$$

Дифференцируя $\tilde{\Sigma}(p)$ по p_μ и используя это тождество, находим

$$\frac{\partial \tilde{\Sigma}(p)}{\partial p_\mu} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(-ie^2)}{(2\pi)^4} \int dk \beta_\nu \tilde{T}_c(p-k) \beta_\mu \tilde{T}_c(p-k) \beta_\nu \tilde{D}^\delta(k).$$

Выбирая другие импульсные переменные в (10.10) и полагая $q = 0$, $p' = p$, имеем

$$\tilde{\Gamma}_\mu(p, p) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int dk \beta_\nu \tilde{T}_c(p-k) \beta_\mu \tilde{T}_c(p-k) \beta_\nu \tilde{D}^\delta(k).$$

Сравнивая эти выражения, получаем тождество Уорда (10.11).

Для того чтобы получить значения параметров, характеризующих электромагнитные свойства бозонов, мы должны вычислить вершинную функцию на массовой поверхности. При переходе к массовой оболочке ($p'^2 = p^2 = m^2$; $q^2 \rightarrow 0$) возникает инфракрасная расходимость. Мы регуляризуем ее с помощью формального приема, который состоит в том, что в причинную функцию $D(k)$ вводится отличная от нуля «масса» фотона λ . При вычислении матричных элементов используем соотношения $(\hat{p} - m)\Psi = 0$, $\bar{\Psi}(\hat{p}' - m) = 0$, а также

$$p_\mu \Psi = \hat{p} \beta_\mu \Psi, \quad (-p_\mu - p_\nu s_{\mu\nu} + m\beta_\mu) \Psi = 0,$$

$$p_\mu \bar{\Psi} = p_\nu \bar{\Psi} \beta_\mu \beta_\nu, \quad \bar{\Psi}(-p'_\mu - p'_\nu s_{\mu\nu} - m\beta_\mu) = 0,$$

где $s_{\mu\nu} = \beta_\mu \beta_\nu - \beta_\nu \beta_\mu$. После элементарных, но длинных выкладок функция $e^{\bar{\Psi}(\beta_\mu + \tilde{\Gamma}_\mu(p', p))\Psi}$ приводится к следующему виду:

$$e^{\bar{\Psi}(\beta_\mu + \tilde{\Gamma}_\mu)\Psi} = \bar{\Psi} \beta_\mu \left(e + \frac{e}{2m} F_0(q^2) \right) \Psi + M_{\mu\nu} q_\nu F_1(q^2) + Q_{\mu\nu} q_\nu F_2(q^2), \quad (10.12)$$

где антисимметричные тензоры $M_{\mu\nu} = \frac{e}{2m} \bar{\Psi} s_{\mu\nu} (2B - 4) \Psi$ и

$Q_{\mu\nu} = -\frac{e}{2m} \bar{\Psi} s_{\mu\nu} (2B - 5) \Psi$ определяют, как мы увидим ниже, соответственно дипольный и квадрупольный момент бозона со спином 1, а функции $F_j(q^2)$ ($j = 0, 1, 2$) принимают вид

$$F_j(q^2) = \frac{1}{2i} \left\{ 2 \int_{-d+i\infty}^{-d-i\infty} \frac{d\zeta \Omega t_j}{\Gamma(1-\zeta)} + \int_{-d+i\infty}^{-d-i\infty} \frac{d\zeta \Omega a_j}{\Gamma(-\zeta) Z} - 6 \int_{-d-1+i\infty}^{-d-1-i\infty} \frac{d\zeta \Omega b_j Z}{(1+\zeta) \Gamma(1-\zeta)} \right\} \rho(\zeta).$$

Здесь

$$t_0 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{q^2}{4} [5u_1 - 3 + 4u_2(u_1 + u_2)] + 2m^2 [1 + u_1(4 - \omega)] \right\},$$

$$a_0 = \frac{q^4}{4} u_1 u_2 u_3 + 2m^4 \left\{ (1 - u_1^2) \left(\frac{5}{2} (u_1 - u_2) + 1 - 4u_1 \right) + u_1 + u_1^2 (2 + u_1) \right\} + q^2 m^2 \left\{ u_3 (1 - u_2) (5u_2 + 1 - u_1^2) + u_2 (u_1 + u_2) (2 + 10u_1 - u_1^2) + (1 - u_1 + u_3) [u_1 (1 - u_1 + u_2) + 2u_2] - u_1^2 (1 + u_1) - 2u_1 - 9u_1 u_2 - 4u_2 - u_1^2 u_2 \right\},$$

$$b_0 = \frac{1}{16} (\omega - 4), \quad b_1 = b_2 = 0.$$

Остальные члены, которые дают вклад в дипольный и квадрупольный момент, имеют более простой вид:

$$t_1 = \frac{m}{2} \{ (1 - u_1) \omega + 12u_1 - 4 \},$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \{ m^3 (1 - u_1^2) (7u_1 - 3) + m q^2 u_2 (3u_3 - u_1^2) \},$$

$$t_2 = \frac{m}{2} \left\{ (1 - u_1) \omega + \frac{21}{2} u_1 - \frac{9}{2} \right\},$$

$$a_2 = m^3 \left[(1 - u_1^2) (3u_1 - 1) - 2u_1 u_2 u_3 \right] + m q^2 u_2 \left(u_3 - \frac{u_1^2}{2} \right);$$

Выражение (10.12) имеет общую форму для скалярных и векторных бозонов. Рассмотрим член, пропорциональный матрице β_μ при $q^2 = 0$ и $m^2 l^2 \ll 1$:

$$\Lambda(0) = \frac{1}{2m} F_0(0) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ [\ln m^2 l^2 + v'(0)] \left[\frac{1}{2} - \frac{25}{96} (\omega - 4) \right] + 2 \ln \frac{\mu_\Phi^2}{m^2} - \frac{v'(-1)}{m^2 l^2} \frac{\omega - 4}{16} + \frac{97}{36} \cdot \frac{\omega - 4}{32} + \frac{20}{3} \right\}$$

(здесь, напоминаем, μ_Φ — «масса фотона»).

Для скалярной частицы ($s = 0$)

$$\Lambda^{(0)}(0) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2} [\ln m^2 l^2 + v'(0)] + 2 \ln \frac{\mu_\Phi^2}{m^2} + \frac{20}{3} \right\}$$

и для векторной частицы ($s = 1$)

$$\Lambda^{(1)}(0) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ -\frac{v'(-1)}{8m^2 l^2} - \frac{1}{48} (\ln m^2 l^2 + v'(0)) + 2 \ln \frac{\mu_\Phi^2}{m^2} + \frac{97}{36} \cdot \frac{1}{16} + \frac{20}{3} \right\}.$$

Эти члены определяют перенормировку заряда бозона $e_r^{(s)} = e(1 + \Lambda^{(s)}(0))$ ($s = 0, 1$).

Принимая во внимание тождество

$$e \bar{\Psi} \beta_\mu \Psi A_\mu = e \bar{\Psi} \left\{ \frac{p'_\mu + p_\mu}{2m} - \frac{1}{2m} s_{\mu\nu} q_\nu \right\} \Psi A_\mu = \left\{ \bar{\Psi} \Psi e \frac{p_\mu}{2m} - M_{\mu\nu} q_\nu - Q_{\mu\nu} q_\nu \right\} A_\mu,$$

перепишем выражение (10.12) в виде

$$e \bar{\Psi} (\beta_\mu + \tilde{\Gamma}_\mu) \Psi A_\mu = \left\{ \bar{\Psi} \Psi e_r \frac{p_\mu}{2m} - (1 - F_1(0)) M_{\mu\nu} q_\nu - (1 - F_2(0)) Q_{\mu\nu} q_\nu \right\} A_\mu. \quad (10.13)$$

Для обсуждения статических электромагнитных характеристик заряженных бозонов мы должны перейти к статическому пределу в формуле (10.13).

Рассмотрим сначала случай спина нуль. При этом, принимая во внимание соотношения (9.35) и (9.38), получим

$$N_{\mu\nu} = \bar{\Psi} s_{\mu\nu} \Psi = \bar{\Psi} s_{\mu\nu} B \Psi = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} \right),$$

где Φ — поле скалярных частиц, которое обозначено через Ψ в (9.35) и (9.38).

В статическом пределе имеем $N_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \rightarrow \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \rightarrow 0$ при $\mathbf{v} \rightarrow 0$, где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, \mathbf{v} — скорость скалярной частицы и \mathbf{E} — электрическое поле. Таким образом, магнитный момент отсутствует у скалярных бозонов.

Поле векторных частиц $\Phi_\mu(x)$, обозначенное через $\Psi_{\mu 5}$ в (9.35) и (9.39), имеет компоненты

$$\Phi_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega_k}} (a_{\mu k} e^{-i\mathbf{k}x} + b_{\mu k}^+ e^{i\mathbf{k}x}),$$

где $a_{\mu k}$ соответствует частице, а $b_{\mu k}$ — античастице. Положим $b_{\mu k} = 0$, что означает отсутствие античастиц. В статическом пределе вектор $a_{\mu k}$ имеет три компоненты:

$$a_{\mu k} = \begin{cases} a_0 = \frac{|k|}{m} a_3 \rightarrow 0, \\ \mathbf{a} = \mathbf{e}_1 a_1 + \mathbf{e}_2 a_2 + \frac{k}{|k|} \cdot \frac{\omega_k}{m} a_3; \end{cases}$$

здесь $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ — вектор поляризации покоящейся векторной частицы. Вектор спина равен $\mathbf{S} = i[\mathbf{a}^+ \times \mathbf{a}]$, а тензор квадрупольного момента

$$T_{ij} = a_i^+ a_j + a_j^+ a_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} (\mathbf{a}^+ \mathbf{a}).$$

В этом случае мы имеем

$$\bar{\Psi}_{S_{\mu\nu}} (B - 2) \Psi = -m (\Phi_\mu^* \Phi_\nu - \Phi_\nu^* \Phi_\mu),$$

а

$$\bar{\Psi}_{S_{\mu\nu}} (2B - 5) \Psi = -\frac{1}{m} (G_{\mu\rho}^* G_{\rho\nu} - G_{\nu\rho}^* G_{\rho\mu}) - m (\Phi_\mu^* \Phi_\nu - \Phi_\nu^* \Phi_\mu),$$

где $G_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu$.

В статическом пределе получим

$$\frac{1}{2} M_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{e}{2m} \mathbf{S} \mathbf{H}, \quad (10.14)$$

и

$$Q_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{e}{2m^2} \left\{ \frac{i}{4} T_{ij} (\partial_i E_j + \partial_j E_i) \right\},$$

здесь \mathbf{H} — магнитное поле. Таким образом, тензоры $M_{\mu\nu}$ и $Q_{\mu\nu}$ определяют дипольный и квадрупольный момент векторного бозона соответственно. При $m^2 l^2 \ll 1$ получим поправки с точностью до $(m^2 l^2)$:

$$\begin{aligned} \delta\mu_1 &= -F_1(0) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[\ln \frac{1}{m^2 l^2} - v'(0) + \frac{1}{2} \right], \\ \delta\mu_2 &= -F_2(0) = \frac{3\alpha}{8\pi} \left[\ln \frac{1}{m^2 l^2} - v'(0) + \frac{43}{54} \right], \end{aligned} \quad (10.15)$$

а при $m^2 l^2 \gg 1$ имеем

$$\delta\mu_1 = \delta\mu_2 = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{v\left(-\frac{1}{2}\right)}{ml} + O\left(\frac{1}{m^2 l^2}\right).$$

Диаграмма поляризации вакуума. Рассмотрим диаграмму поляризации вакуума, представленную на рис. 27 (2). Член матрицы рассеяния, соответствующий этой диаграмме, представим в виде

$$-i : A_\mu(x) \Pi_{\mu\nu}^{(s)}(x-y) A_\nu(y) :,$$

где

$$\Pi_{\mu\nu}^{(s)}(x-y) = ie^2 \text{Sp} [\beta_\mu T_c(x-y) \beta_\nu T_c(y-x)].$$

Используя принятый нами метод регуляризации, получим в импульсном пространстве

$$\text{reg} \Pi_{\mu\nu}^{(s)}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dq \text{reg} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(s)}(q) e^{iq(x-y)}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \text{reg} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(s)}(q) &= \\ &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int dk \sum_j c_j \Lambda_j^{2s} \text{Sp} \left\{ \beta_\mu \frac{1}{M_j - (q+k) - ie} \beta_\nu \frac{1}{M_j - k - ie} \right\} = \\ &= -\frac{e^2}{4(2\pi)^4} \int_{-1}^1 dv \int dk_E \sum_j \frac{c_j \Lambda_j^{2s}}{\left[M_j^2 - \frac{q^2}{4} (1-v^2) + k_E^2 \right]^2} \times \\ &\quad \times \left\{ (q_\nu q_\mu - g_{\mu\nu} q^2) \left[\sigma_s v^2 + \left(\frac{1}{2} \sigma_s - 1 \right) \frac{k_E^2}{M_j^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + g_{\mu\nu} \sigma_s \left(k_E^2 + 2M_j^2 - \frac{q^2}{2} (1-v^2) \right) \right\}, \end{aligned}$$

где $\sigma_s = 2$ для $s=0$ и $\sigma_s = 6$ для $s=1$. Выполнив интегрирование по k_E , получим

$$\begin{aligned} \text{reg} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(0)}(q) &= \\ &= \frac{\alpha}{8\pi} (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \int_{-1}^1 dv v^2 \left[-\ln(1-R) - \sum_{j=1}^8 c_j \ln(\Lambda_j - R) \right] \end{aligned}$$

для скалярной частицы и

$$\begin{aligned} \text{reg} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(1)}(q) &= \\ &= \frac{\alpha}{16\pi} (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \int_{-1}^1 dv \left\{ 6v^2 \left[-R - \ln(1-R) - \sum_{j=1}^8 c_j \Lambda_j^2 \ln \Lambda_j^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + 4 \left[(1-R) \ln(1-R) + R + \sum_{j=1}^8 c_j (\Lambda_j^2 - R) \ln \Lambda_j^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

для векторной частицы, где $R = \frac{q^2}{4m^2} (1-v^2)$. Согласно нашим условиям (10.6), в пределе $\Lambda_j \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty$ суммы по j в квадратных скобках равны a_0 и a_2 , либо исчезают, если $a_0 = a_2 = 0$, и

мы получим (полагая $a_0 = a_2 = 0$)

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(s)}(q) = \lim_{\Delta_f \rightarrow \Delta \rightarrow \infty} \text{reg } \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(s)}(q) = (g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu) \tilde{\Pi}^{(s)}(q^2),$$

$$\tilde{\Pi}^{(0)}(q^2) = \frac{\alpha}{24\pi} \frac{q^2}{m^2} \int_0^1 \frac{dv v^4}{1 - \frac{q^2}{4m^2} (1 - v^2)},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^{(1)}(q^2) = & \\ = & \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dv \left\{ \left[2 - \frac{q^2}{2m^2} (1 - v^2) - 3v^2 \right] \ln \left[1 - \frac{q^2}{4m^2} (1 - v^2) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{3}{4} \frac{q^2}{m^2} v^2 (1 - v^2) + \frac{q^2}{2m^2} (1 - v^2) \right\}. \end{aligned}$$

Окончательно после несложных преобразований получим

$$\tilde{\Pi}^{(0)}(q^2) = \frac{\alpha}{12\pi} q^2 \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dx^2 \left(1 - \frac{4m^2}{x^2}\right)^{3/2}}{x^2 (x^2 - q^2 - i\epsilon)}, \quad (10.16)$$

$$\tilde{\Pi}^{(1)}(q^2) = \frac{\alpha}{12\pi} \frac{q^4}{m^2} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dx^2 \sqrt{1 - \frac{4m^2}{x^2}}}{x^2 (x^2 - q^2 - i\epsilon)} \left[1 - \frac{m^2}{x^2} - 12 \left(\frac{m^2}{x^2} \right)^2 \right].$$

Итак, в рамках принятой нами регуляризации поляризаационные операторы конечны при снятии регуляризации и совпадают с перенормированными выражениями в обычной локальной теории. Они нормированы условием $\tilde{\Pi}^{(0)}(0) = 0$. Это означает, что, по крайней мере, во втором порядке теории возмущений не происходит перенормировки заряда, т. е. физический заряд скалярной и векторной заряженных частиц совпадает с затравочным.

Проведенное построение квантовой электродинамики частиц со спином 0 и 1 показывает, что использованные методы без каких-либо изменений могут быть использованы для построения квантовой электродинамики частиц с произвольным спином s . Для этого необходимо знать явный вид матриц β_μ в уравнении (9.1), что, вообще говоря, представляет собой еще не решенную задачу для произвольного спина s . Изложенный в предыдущем параграфе рекуррентный метод А. Аурилии и Х. Умезавы (1969) позволяет строить уравнение вида (9.1), описывающее неприводимое представление для произвольного спина s . Можно считать, что принципиально вопрос решен, хотя в техническом отношении (вывод достаточно простых формул и т. д.) еще предстоит многое сделать. Если матрицы β_μ для заданного спина s известны, тогда они удовлетворяют условию $p^{2s+1} = p^2 \hat{p}^{2s-1}$

($s \geq 1/2$). Причинная функция частицы со спином s записывается тогда в виде

$$\tilde{T}_c^{(s)}(p) = \frac{1}{m - \hat{p} - i\epsilon} = \frac{d_s(p)}{m^2 - p^2 - i\epsilon}, \quad (10.17)$$

где

$$d_s(p) = m + \hat{p} - \frac{1}{m} (p^2 - \hat{p}^2) \left[1 + \frac{\hat{p}}{m} + \dots + \left(\frac{\hat{p}}{m} \right)^{2s-2} \right],$$

откуда следует, что для $s \geq 1$

$$\tilde{T}_c^{(s)}(p) = O((p^2)^{s-1}) \quad (p^2 \rightarrow \infty).$$

Подавить этот достаточно быстрый рост причинной функции можно, если выбрать формфактор $V(-k^2 l^2)$ таким образом, чтобы он удовлетворял условиям (E) (стр. 97), с дополнительным условием

$$\int_0^\infty du u^N V(u) < \infty$$

для любых $N > 0$. Такие формфакторы существуют, как говорилось в гл. V.

Кроме того, условие регуляризации замкнутых циклов (10.5) требует, чтобы в (10.6) число уравнений росло с ростом порядка теории возмущений. Такая регуляризационная процедура будет регулярной в том смысле, что если она регуляризует цикл n -го порядка теории возмущений, то она же регуляризует любой цикл меньшего порядка, причем неопределенные числа a_m остаются теми же и не зависят от порядка теории возмущений.

В качестве иллюстрации действия изложенных методов нелокальной теории поля в случае электродинамики частиц произвольного спина покажем, что в классическом пределе ($ml \gg 1$) поправка к массе частицы не зависит от спина. Действительно, рассмотрим выражение для массового оператора второго порядка для частицы с произвольным спином s :

$$\tilde{\Sigma}(p) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{i\epsilon^2}{(2\pi)^4} \int \frac{dk V^\delta(-k^2 l^2) \beta_\mu d_s(p-k) \beta_\mu}{(-k^2 - i\epsilon)(m^2 - (p-k)^2 - i\epsilon)}, \quad (10.18)$$

где $d_s(p)$ удовлетворяет соотношению

$$d_s(p)(\hat{p} - m) = (\hat{p} - m)d_s(p) = p^2 - m^2. \quad (10.19)$$

Фактор $\beta_\mu d_s(p-k) \beta_\mu$ в подынтегральном выражении представляет собой полином степени $2s$ по импульсу интегрирования k .

Для поправки к массе получим выражение, аналогичное (7.7):

$$\delta m = \bar{\Psi}(p) \tilde{\Sigma}(p) \Psi(p) = \frac{e^2}{(2\pi)^4 \hbar} \int \frac{d^4 k_E V\left(\frac{k_E^2 l^2}{\hbar^2}\right) \cdot \bar{\Psi}(p) \beta_\mu d_s(p - k_E) \beta_\mu \Psi(p)}{k_E^2 (k_E^2 - 2imk_4)}, \quad (10.20)$$

где волновая функция $\Psi(p)$ удовлетворяет уравнению $(\hat{p} - m) \times \Psi(p) = 0$ и условию нормировки $\bar{\Psi}(p) \Psi(p) = 1$.

При $l \ll \lambda$ в интеграле (10.20) играют роль большие k_E , поэтому в этом пределе

$$\bar{\Psi}(p) \beta_\mu d_s(p - \hbar k_E) \beta_\mu \Psi(p) = O(|k_E|^{2[s]})$$

и, следовательно,

$$\delta m = m \frac{e^2}{\hbar c} O\left(\left(\frac{\lambda}{l}\right)^{2[s]}\right). \quad (10.21)$$

При $\lambda \ll l$ в интеграле (10.20) играют роль малые k_E , поэтому

$$\bar{\Psi}(p) \beta_\mu d_s(p - \hbar k_E) \beta_\mu \Psi(p) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \bar{\Psi}(p) \beta_\mu d_s(p) \beta_\mu \Psi(p) = 2m.$$

Действительно, дифференцируя (10.19), получим тождество

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial p_\mu} d_s(p) \right\} (\hat{p} - m) + d_s(p) \beta_\mu = 2p_\mu,$$

откуда следует, что

$$\bar{\Psi}(p) \beta_\mu d_s(p) \beta_\mu \Psi(p) = \bar{\Psi}(p) 2\hat{p} \Psi(p) = 2m \bar{\Psi}(p) \Psi(p).$$

Тогда имеем

$$\delta m = \frac{e^2}{(2\pi)^4 \hbar} \int \frac{d^4 k_E V\left(\frac{k_E^2 l^2}{\hbar^2}\right) 2m}{k_E^2 (k_E^2 - 2imk_4)}.$$

Это выражение, как легко видеть, совпадает с (7.7) в пределе $\hbar \rightarrow 0$. Поэтому при $\lambda \ll l$

$$\delta m = \frac{e^2 v (-1/2)}{2c^2 l} \left[1 + O\left(\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2\right) \right]. \quad (10.22)$$

Таким образом, электромагнитная поправка к массе частицы с произвольным спином в классическом пределе не зависит от спина s .

В заключение можно сказать, что изложенные методы нелокальной квантовой теории поля позволяют построить непро-

тиворечивую теорию электромагнитных взаимодействий частиц произвольного спина. Предстоит еще большая работа, чтобы выяснить, какие физические следствия могут быть получены на этом пути.

§ 11. Нелокальность как результат частичного выхода за рамки теории возмущений

В предыдущих параграфах с помощью нелокального обобщения группы градиентных преобразований была построена нелокальная квантовая электродинамика электронов. Было показано, что S -матрица в каждом порядке теории возмущений конечна и удовлетворяет всем принципам квантовой теории поля. При этом оказалось, что в теории имеется произвол в выборе конкретных функций — формфакторов $V(-k^2 l^2)$. Относительно этой неоднозначности теории в настоящее время трудно что-либо сказать. Так как предположение о нелокальном характере взаимодействия входит в систему аксиом, то пока остается открытым вопрос, за счет каких дополнительных условий можно ограничить произвол в выборе нелокального формфактора.

С другой стороны, в квантовой теории поля до настоящего времени не удалось построить вне рамок теории возмущений ни одной замкнутой модели взаимодействующих частиц, которая удовлетворяла бы всем требованиям аксиоматической квантовой теории поля в смысле Вайтмана или всем аксиомам S -матрицы в смысле Боголюбова. Знание первых членов ряда теории возмущений и определенных классов диаграмм Фейнмана еще не дает достаточных оснований для определенных суждений о свойствах суммы всего ряда. Имеющиеся попытки просуммировать отдельные классы диаграмм Фейнмана для того или иного варианта взаимодействия, по нашему убеждению, далеки от ответа на вопрос о свойствах полной S -матрицы, поскольку обычно нет никаких идей, как провести оценку остающихся элементов ряда теории возмущений.

Показательным результатом, основанным на частичном суммировании, является вывод Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчука (1955) о внутренней противоречивости квантовой электродинамики, полученный в результате суммирования «главных членов», определяющих перенормированную полную фотонную функцию Грина. Как показано Н. Н. Боголюбовым (см. книгу Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова (1973)), учет «неглавных членов» может изменить ситуацию, а общий вывод таков, что вопрос об истинном поведении функции Грина фотона не может быть решен только на основе тех или иных выборок из ряда теории возмущений.

Имеются веские аргументы, высказанные Ф. Дайсоном (1952), что ряд теории возмущений в квантовой электродинамике должен расходиться, а матричные элементы полной

S -матрицы должны иметь особенность в точке $e^2 = 0$, поскольку физика взаимодействия электронов и позитронов кардинально меняется при переходе от мира с $e^2 > 0$ к миру с $e^2 < 0$. Поэтому ряд теории возмущений должен рассматриваться лишь как асимптотический, а для суммирования асимптотического ряда необходимо привлекать дополнительные математические и физические идеи. Можно даже представить ситуацию, в которой существует несколько различных полных S -матриц, для которых известен перенормированный ряд квантовой электродинамики является асимптотическим.

В качестве примера можно привести способы асимптотического суммирования, использованные Р. Редмондом (1958), Н. Н. Боголюбовым, А. А. Логуновым, Д. В. Ширковым (1959) и Б. А. Арбузовым (1959). Эти авторы рассматривали возможность получения функции Грина фотона с правильными аналитическими свойствами при суммировании вкладов, возникающих при учете только произвольного числа электронно-позитронных петель второго порядка теории возмущений. Полученные ими функции Грина, обладая правильными аналитическими свойствами, различались на функции вида $O\left(\exp\left\{-\frac{1}{e^2}\right\}\right)$, т. е.

на функции, имеющие в точке $e^2 = 0$ существенную особенность, которая не дает никакого вклада в ряд теории возмущений при разложении по e^2 .

Основной недостаток подобных частичных суммирований состоит в том, что даже в случае успеха при суммировании отдельно выбранного класса диаграмм Фейнмана совершенно не ясно, что делать с остальными членами ряда теории возмущений. Заметим, что в рамках локальной теории использование такой частично просуммированной функции Грина в качестве нового «суперпропагатора» ничего не дает, поскольку все диаграммы собственной массы и вершинные функции будут расходиться.

Наша идея состоит в том, чтобы получить функцию Грина за счет суммирования того же класса диаграмм, что и в упомянутых выше работах, однако добиться при этом, чтобы при использовании ее в качестве суперпропагатора сходились все остальные диаграммы Фейнмана в ряду теории возмущений. Существенно заметить, что эта идея может быть осуществлена только в рамках нелокальной теории поля.

В чем отличие предлагаемой схемы от рассмотренного в предыдущих параграфах варианта нелокальной электродинамики? Нелокальный формфактор появлялся в лагранжиане взаимодействия как следствие изменения градиентной группы преобразований (1.17) и тем самым определял распределение заряда электрона, которое должно быть нам известно из каких-то других соображений. Поэтому параметр l и вид формфактора $V(-k^2)^2$ были свободными параметрами теории, что и состав-

ляет имеющийся в теории функциональный произвол, правда, имеющий ясный физический смысл.

В предлагаемой ниже схеме постулируется, что нелокальность возникает в результате асимптотического суммирования бесконечной цепочки диаграмм, показанных на рис. 36, так что

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) \propto \frac{g_{\mu\nu}}{-k^2} + \frac{g_{\mu\lambda}}{-k^2} \tilde{\Pi}_{\lambda\rho}(k) \frac{g_{\rho\nu}}{-k^2} + \dots, \quad (11.1)$$

где $\tilde{\Pi}_{\lambda\rho}(k)$ — перенормированный оператор поляризации вакуума во втором порядке теории возмущений (6.13).



Рис. 36. Цепочка диаграмм поляризации вакуума, дающих вклад в фотонную функцию Грина.

Ряд теории возмущений для любых матричных элементов S -матрицы может быть перегруппирован таким образом, что он будет составлен из всех обычных диаграмм Фейнмана, кроме диаграмм с вкладами от поляризации вакуума второго порядка, а под пропагатором фотона следует понимать функцию Грина (11.1), которую можно назвать суперпропагатором.

Если теперь окажется, что функция $\mathcal{D}_{\mu\nu}(k)$ в (11.1) обладает правильными аналитическими свойствами в комплексной k^2 -плоскости и при $k^2 \rightarrow -\infty$ она будет убывать, по крайней мере, как

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = O\left(\frac{1}{k^2 (\ln k^2)^2}\right) \quad (k^2 \rightarrow -\infty),$$

то все остальные диаграммы теории возмущений, включая диаграммы собственной энергии и вершинные части (см. рис. 27, 29, 30), будут сходиться.

Рассмотрим подробнее ряд (11.1). Пусть

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} \mathcal{D}(k^2) + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} d(k^2)$$

и

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(k) = (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2) \Pi(k^2),$$

где функция $\Pi(k^2)$ предполагается конечной и может быть представлена в виде спектрального интеграла

$$\Pi(k^2) = \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dx^2 \sigma(x^2)}{x^2 - k^2 - i\epsilon}.$$

Непосредственное суммирование ряда (11.1) как геометрической прогрессии приводит к ответу

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{1}{(-k^2)(1 - \Pi(k^2))}. \quad (11.2)$$

Это выражение имеет дополнительную особенность при отрицательных k^2 , поскольку $\Pi(k^2)$ растет в локальной теории при $k^2 \rightarrow -\infty$ для частиц с любым спином и уравнение

$$1 - \Pi(k^2) = 0 \quad (11.3)$$

имеет решение в некоторой точке $k_0^2 < \infty$. Этот «духовой» полюс, отвечает некоторому фиктивному состоянию с отрицательным квадратом массы и отрицательной нормой. Такие состояния не должны быть в теории, поэтому решение (11.2) не является удовлетворительным с точки зрения общих аксиом квантовой теории поля.

В локальной электродинамике исходят из предположения, что функция $\mathcal{D}(k^2)$ должна быть аналитической всюду в комплексной k^2 -плоскости, кроме следующих особых точек: полюс в точке $k^2 = 0$ и разрез, начинающийся в точке $k^2 = 4m^2$.

Методы, предложенные в упомянутых в начале параграфа работах, позволяют избавиться от нефизической особенности, определяемой уравнением (11.3). В частности, Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, Д. В. Ширков, предполагая, что справедлива гипотеза о суммировании внутри спектрального представления, получили следующее выражение для функции Грина $\mathcal{D}(k^2)$ в спинорной электродинамике:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(k^2) &= \\ &= \frac{1}{-k^2 - i\epsilon} + \frac{\alpha}{3\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2}{\kappa^2(\kappa^2 - k^2 - i\epsilon) \left\{ \left[1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{\kappa^2}{4m^2} - 1 \right) \right]^2 + \frac{\alpha^2}{9} \right\}} = \\ &= \frac{1}{(-k^2 - i\epsilon) \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{4m^2 - k^2}{4m^2} \right)} - \\ &= \frac{\alpha}{3\pi(1 - e^{-3\pi/\alpha}) [4m^2(e^{3\pi/\alpha} - 1) + k^2]}. \quad (11.4) \end{aligned}$$

Б. А. Арбузов предположил, что уравнение Дайсона справедливо лишь для мнимой части функции Грина. В результате решения соответствующей краевой задачи им было найдено, что

$$\mathcal{D}(k^2) = - \left(\frac{1}{k^2 - 4m^2} + \frac{e^{-3\pi/\alpha}}{4m^2} \right) \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{4m^2 - k^2}{4m^2} \right)}. \quad (11.5)$$

Эти функции обладают правильными аналитическими свойствами, но отличаются друг от друга на величину порядка $O\left(\exp\left\{-\frac{3\pi}{\alpha}\right\}\right)$. Иначе говоря, предложенные методы являются различными способами асимптотического суммирования ряда (11.1). Кроме того, функции (11.4) и (11.5) при стремле-

нии $|k^2| \rightarrow \infty$ убывают не быстрее, чем функция Грина свободного фотона, т. е.

$$\mathcal{D}(k^2) = O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (k^2 \rightarrow -\infty),$$

что находится в полном согласии с требованиями, диктуемыми представлением Челлена — Лемана для функции Грина в локальной теории поля. Поэтому использование этих функций вместо фотонного пропагатора $\frac{1}{-k^2 - i\epsilon}$ в оставшихся диаграммах (перегруппированного) ряда теории возмущений не приводит к сходимости соответствующих интегралов.

Мы ставим задачу: указать способ поставить в соответствие ряду (11.1) в духе методов суммирования асимптотических рядов такую функцию $\mathcal{D}(k^2)$, которая, обладая правильными аналитическими свойствами в комплексной k^2 -плоскости, убывала бы при $\text{Re } k^2 \rightarrow -\infty$ таким образом, чтобы обеспечить сходимость диаграмм, содержащих $\mathcal{D}(k^2)$.

Мы предполагаем, что «истинная» функция Грина, получающаяся в результате некоторого метода суммирования ряда (11.1), обладает следующими свойствами:

(1) $\mathcal{D}(k^2)$ нелокальна. Это означает, что при $|k^2| \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$|\mathcal{D}(k^2)| \leq C \cdot e^{l |k^2|^\rho} \quad \left(\rho \geq \frac{1}{2}\right),$$

где l — элементарная длина.

(2) В комплексной k^2 -плоскости $\mathcal{D}(k^2)$ имеет полюс в точке $k^2 = 0$ и разрез, начинающийся в точке $k^2 = 4m^2$. Других особенностей в любой ограниченной области k^2 -плоскости функция $\mathcal{D}(k^2)$ не имеет.

(3) Скачок на разрезе тот же, что и в локальной теории:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_+(k^2) - \mathcal{D}_-(k^2) &= 2\pi i \sigma(k^2) = \\ &= \frac{1}{-k^2} \frac{2i \text{Im } \Pi(k^2)}{(1 - \text{Re } \Pi(k^2))^2 + (\text{Im } \Pi(k^2))^2}. \quad (11.6) \end{aligned}$$

(4) $\mathcal{D}(k^2)$ убывает достаточно быстро в евклидовой области переменной k^2 .

Функция Грина $\mathcal{D}(k^2)$ может быть представлена в форме

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{V_1(k^2 l^2)}{-k^2 - i\epsilon} + V_2(k^2 l^2) \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \sigma(\kappa^2)}{(\kappa^2 - k^2 - i\epsilon) V_2(\kappa^2 l^2)}, \quad (11.7)$$

где функции $V_1(z)$ и $V_2(z)$ удовлетворяют условиям (E) стр. 97 при некотором порядке роста $\rho \geq 1/2$.

Поскольку мы считаем, что функция $\mathcal{D}(k^2)$ появилась в результате некоторого метода суммирования ряда (11.1), пара-

метр l , имеющий смысл элементарной длины, должен иметь вид

$$l = \frac{1}{m} f(\alpha), \quad (11.8)$$

где $f(\alpha)$ имеет особенность в точке $\alpha = 0$ такую, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \alpha^{-N} f(\alpha) = 0 \quad \forall N > 0.$$

Примерами таких функций могут быть функции $e^{-1/\alpha}$, $e^{-(\ln \alpha)^2}$ и т. д. Действительно, представление (11.8) должно быть именно таким, поскольку в электродинамике единственным параметром, имеющим размерность длины, является $1/m$, а наличие функции $f(\alpha)$ необходимо, чтобы в пределе $\alpha \rightarrow +0$ мы получили исходный ряд (11.1).

Представление (11.7) решает проблему существования искомой нелокальной функции Грина. Однако сформулированных выше условий недостаточно, чтобы устранить функциональный произвол, связанный с выбором функций $V_1(z)$ и $V_2(z)$. Наша задача состоит в том, чтобы устранить этот произвол за счет некоторых дополнительных условий. С этой целью перепишем (11.7) в форме

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{1}{-k^2 - i\epsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \sigma(\kappa^2)}{\kappa^2 - k^2 - i\epsilon} + W_1(k^2 l^2), \quad (11.9)$$

где

$$W_1(k^2 l^2) = \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \sigma(\kappa^2)}{\kappa^2 - k^2 - i\epsilon} \left[\frac{V_2(k^2 l^2)}{V_2(\kappa^2 l^2)} - 1 \right] + \frac{V_1(k^2 l^2) - 1}{-k^2} \quad (11.10)$$

есть целая функция порядка роста ρ . Учитывая формулу (11.6), можно получить окончательно

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{1}{-k^2 - i\epsilon} \cdot \frac{1}{1 - \Pi(k^2)} - \frac{W(k^2 l^2)}{k^2 - k_0^2}. \quad (11.11)$$

Здесь

$$W(k^2 l^2) = \frac{1}{k_0^2 \Pi'(k_0^2)} - (k^2 - k_0^2) W_1(k^2 l^2) \quad (11.12)$$

и k_0^2 есть решение уравнения

$$1 - \Pi(k^2) = 0. \quad (11.13)$$

В дальнейшем мы будем исследовать выражение (11.11).

Если функции $V_1(z)$ и $V_2(z)$ удовлетворяют условиям (E), то тогда функция $W(k^2 l^2)$ обладает следующими свойствами:

(1) $W(z)$ — целая функция в комплексной k^2 -плоскости порядка роста ρ .

(2) $[W(z)]^* = W(z^*)$.

(3) $W(k_0^2 l^2) = [k_0^2 \Pi'(k_0^2)]^{-1}$. Это условие эквивалентно отсутствию духовых состояний в теории.

(4) При больших $|k^2|$ справедливы оценки

$$W(k^2 l^2) = \begin{cases} \frac{1}{\Pi(k^2 l^2)} + O\left(\frac{1}{\Pi^2(k^2 l^2)}\right), & \text{Re } k^2 \rightarrow -\infty, \\ O(\exp\{(k^2 l^2)^\rho\}), & \text{Re } k^2 \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Условие (4) означает, что

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{1}{(-k^2) \Pi(k^2)} \left[O\left(\frac{1}{\Pi(k^2)}\right) + \frac{k_0^2}{k^2} \right] \quad (11.14)$$

при $k^2 \rightarrow -\infty$.

Рассмотрим теперь подробнее, что означают выписанные условия на функцию $W(k^2 l^2)$ в случае спинорной и векторной электродинамики.

Спинорная электродинамика. В спинорной электродинамике перенормированный оператор поляризации вакуума во втором порядке теории возмущений имеет вид (6.14)

$$\Pi(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} k^2 \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\kappa^2}}}{\kappa^2 (\kappa^2 - k^2 - i\epsilon)} \left(1 + \frac{2m^2}{\kappa^2}\right).$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$\begin{aligned} \Pi(k^2) &= \\ &= -\frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \frac{5}{9} + \frac{4m^2}{3k^2} + \frac{2}{3} \left(1 + \frac{2m^2}{k^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \text{Arth} \left(1 - \frac{4m^2}{k^2}\right)^{-1/2} \right\}. \end{aligned}$$

При больших k^2 ($|k^2| \gg m^2$) $\Pi(k^2)$ ведет себя следующим образом:

$$\Pi(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{4m^2 - k^2}{4m^2}. \quad (11.15)$$

Запишем выражение для нелокальной функции Грина фотона:

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{1}{(-k^2 - i\epsilon)(1 - \Pi(k^2))} - \frac{W(k^2 l^2)}{k^2 - k_0^2}, \quad (11.16)$$

где k_0^2 есть решение уравнения (11.13) и имеет вид

$$k_0^2 = -4m^2 e^{3\pi/\alpha} \left(\left| \frac{k_0^2}{m^2} \right| \gg 1 \right). \quad (11.17)$$

Для сходимости произвольной диаграммы Фейнмана достаточно иметь функцию $\mathcal{D}(k^2)$, убывающую при $k^2 \rightarrow -\infty$ не медленнее, чем $O\left(\frac{1}{k^2 (\ln k^2 l^2)^2}\right)$. Это условие выполняется согласно условию (11.14).

Найдем явное выражение для элементарной длины l из условия (3) на функцию $W(k^2 l^2)$. Так как $|k_0^2| \gg m^2$, мы можем воспользоваться асимптотическим выражением для $W(k^2 l^2)$. В результате получаем уравнение для определения l :

$$|k_0^2 \Pi'(k_0^2)| = \Pi(k_0^2 l^2),$$

откуда $\ln(-k_0^2 l^2) = 1$, и для элементарной длины l имеем следующее выражение:

$$l = \frac{1}{2m} e^{-\frac{3\pi}{2\alpha} + 1} \simeq 10^{-268} \text{ см.} \quad (11.18)$$

Выражение (11.18) содержит неаналитичность по константе связи α в полном соответствии с формулой (11.8).

Если провести подсчет электромагнитной поправки к массе электрона с помощью полученной функции Грина, то окажется $\delta m \sim m$, т. е. в рамках предлагаемой схемы масса электрона в основном электромагнитного происхождения.

Столь малая величина l позволяет говорить о том, что дополнительный вклад в физические наблюдаемые по сравнению с тем, что дает локальная спинорная электродинамика, пренебрежимо мал. Поэтому, если реальное взаимодействие действительно нелокально, то в случае перенормируемых теорий (по крайней мере, в спинорной электродинамике) локальное приближение является безусловно превосходным (см. конец § 7).

В связи с этим интересно рассмотреть в рамках предложенной схемы какую-либо модель неперенормируемого взаимодействия и выяснить, с какими физическими параметрами связана элементарная длина и каково ее численное значение. В качестве такой модели рассмотрим векторную электродинамику.

Векторная электродинамика. В векторной электродинамике оператор $\Pi(k^2)$ имеет вид (см. (VIII.10.16))

$$\Pi(k^2) = \frac{\alpha}{12\pi} \left\{ 2 + \frac{11}{30} \frac{k^2}{m^2} - \left(k^3 - \frac{k^4}{m^2} + 12m^2 \right) \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dx^2 \sqrt{1 - \frac{4m^2}{x^2}}}{x^2 (x^2 - k^2 - i\epsilon)} \right\}.$$

Вычислив интеграл, получим

$$\Pi(k^2) = \frac{\alpha}{12\pi} \left\{ 2 + \frac{11}{30} \frac{k^2}{m^2} - \left(k^2 - \frac{k^4}{m^2} + 12m^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \left[2 - 2 \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \text{Arth} \left(1 - \frac{4m^2}{k^2} \right)^{1/2} \right] \right\}.$$

При $|k^2| \gg m^2$ оператор $\Pi(k^2)$ имеет следующий вид:

$$\Pi(k^2) = -\frac{\alpha}{12\pi} \frac{k^2}{m^2} \ln \frac{4m^2 - k^2}{4m^2}. \quad (11.19)$$

В векторной электродинамике условие сходимости произвольной диаграммы Фейнмана имеет вид

$$\int_0^{\infty} du \ln u \mathcal{D}(u) < \infty.$$

Это условие удовлетворяется для $\mathcal{D}(k^2)$ согласно (11.16) и (11.19).

Определим элементарную длину l из уравнения (11.13). Используя явное выражение для $\Pi(k^2)$, легко убедиться, что $|k_0^2| \gg m^2$. Поэтому мы можем воспользоваться соотношением (11.19) и записать уравнение (11.13) в виде

$$\frac{\alpha}{12\pi} \frac{(-k_0^2)}{m^2} \ln \frac{4m^2 + (-k_0^2)}{4m^2} = 1. \quad (11.20)$$

Приближенное решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{-k_0^2}{4m^2} \simeq \frac{3\pi}{\alpha} \cdot \frac{1}{\ln \frac{3\pi}{\alpha}} \simeq 317.$$

Воспользуемся теперь условием (3) на стр. 305

$$W(k_0^2 l^2) = \frac{12\pi m^2}{\alpha (-k_0^2) \ln(-k_0^2 l^2)} = \frac{1}{k_0^2 \Pi'(k_0^2)} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha k_0^2}{12\pi m^2}} = \frac{\ln \frac{3\pi}{\alpha}}{\ln \frac{3\pi}{\alpha} + 1}.$$

Решая это уравнение, получим

$$l^2 \simeq \frac{1}{m^2} \left(\frac{e}{4} \right) \ln \frac{3\pi}{\alpha} \simeq \frac{5}{m^2}, \quad (11.21)$$

где $e = 2,71828\dots$ — основание натуральных логарифмов. Если оценивать нижнюю границу для массы W -бозона как $m \geq 10 \text{ Гэв} = 6 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-1}$, то для элементарной длины получим оценку сверху

$$l \lesssim 4 \cdot 10^{-15} \text{ см.} \quad (11.22)$$

Таким образом, элементарная длина, характеризующая область нелокальности, близка по величине к комптоновской длине волны W -бозона. Оценка сверху имеет вполне разумное значение.

Сравнивая выражения (11.18) и (11.21), видим, что зависимость элементарной длины от физических параметров теории в спинорной и векторной электродинамике имеет принципиально различный характер, что, естественно, является следствием различного поведения функций $\Pi(k^2)$ при $k^2 \rightarrow -\infty$.

В рамках предложенного метода произвол в выборе фактора $W(z)$ сводится к целым функциям с заданным асимптотическим поведением. Мы можем теперь использовать методы

построения целых функций по асимптотическому поведению и исследовать условия единственности решения.

Не теряя общности, можно представить функцию, удовлетворяющую условиям (1)–(4) на стр. 305, в виде

$$W(z) = A \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda(n)}\right) \left(1 - \frac{z}{\lambda^*(n)}\right), \quad (11.23)$$

где A — некоторая постоянная, $\lambda(n)$ — функция, задающая нули целой функции $W(z)$.

В теории целых функций построение целой функции по ее асимптотическому поведению, как в нашем случае (условие

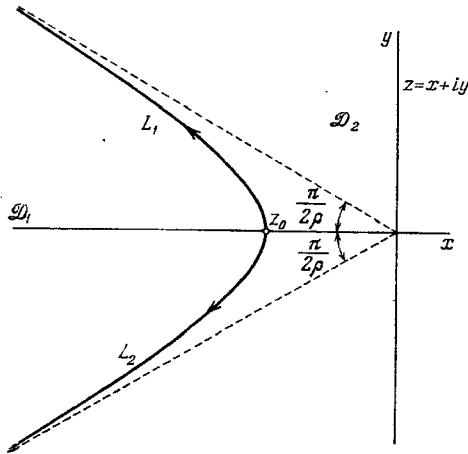


Рис. 37. Траектория нулей целой функции $W(z)$ в (11.23) в z -плоскости.

Будем строить функцию $W(z)$, используемую при построении функции Грина в спинорной электродинамике. Дополнительно к сформулированным на стр. 305 условиям будем предполагать, что

(5) траектория нулей есть кривая L , задаваемая уравнением

$$\ln \left| \frac{1}{\beta \ln(-z)} \right| = \ln |\exp \{z^\rho e^{i\pi(1-\rho)}\}|, \quad (11.24)$$

где β — некоторое число, подлежащее определению.

Комплексная z -плоскость задается следующим образом: $0 \leq |z| < \infty$, $0 \leq \arg z \leq 2\pi$. Кривая L показана на рис. 37. Точка z_0 является пересечением кривой L с вещественной осью. Величина $|z_0| = r_0$ определяется из уравнения

$$\beta \ln r_0 = e^{r_0^\rho}.$$

Условие (5) выбрано из следующих соображений. Поскольку $W(z)$ вещественна на вещественной оси, траектория нулей должна быть симметрична относительно действительной оси (при замене $\arg z \Rightarrow 2\pi - \arg z$). О функции $W(z)$ мы ничего не знаем, кроме ее асимптотического поведения, поэтому естественно траекторию нулей задавать уравнением, связывающим известные асимптотические функции. В области роста мы принимаем простейший вариант: порядок роста функции $W(z)$ равен $\rho < 1$, а тип — 1 (см. стр. 53). В этом смысле условие (5) единственно.

Перепишем уравнение для траектории нулей в виде

$$r^\rho \cos \rho (\varphi - \pi) = \ln \beta + \ln \sqrt{(\ln r)^\rho + (\varphi - \pi)^2}, \quad (11.25)$$

где, как обычно, $z = re^{i\varphi}$. Уравнение (11.25) симметрично относительно замены $\varphi \Rightarrow 2\pi - \varphi$. При больших r решение этого уравнения может быть выписано в явном виде:

$$\Phi(r) = \begin{cases} \pi \left(\frac{2\rho - 1}{2\rho} \right) + \frac{\ln \ln r^\rho}{\rho r^\rho} - \text{верхняя ветвь } L = L_1, \\ \pi \left(\frac{2\rho + 1}{2\rho} \right) - \frac{\ln \ln r^\rho}{\rho r^\rho} - \text{нижняя ветвь } L = L_2. \end{cases} \quad (11.26)$$

Идея М. А. Евграфова состоит в том, что если нам известна некоторая субгармоническая функция $\Phi(z)$, то мы можем решить задачу о построении целой функции $W(z)$, удовлетворяющей условию $\ln |W(z)| \leq \Phi(z)$. В нашем случае функция $\Phi(z)$ устроена следующим образом. Плоскость z разделена кривой $L = L_1 \cup L_2$ на две области \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 (см. рис. 37) и

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi_1(z) = \operatorname{Re} \ln \frac{1}{\beta \ln(-z)}, & z \in \mathcal{D}_1, \\ \Phi_2(z) = \operatorname{Re} (z^\rho e^{\pi(1-\rho)}), & z \in \mathcal{D}_2. \end{cases} \quad (11.27)$$

В каждой области \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 субгармоническая функция $\Phi(z)$ равна гармонической функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$. На кривой L должно выполняться равенство

$$\Phi_1(z) = \Phi_2(z) \quad (z \in L),$$

что и происходит в нашем случае согласно условию (5) (11.24). При помощи теоремы Коши для гармонических функций можно показать, что

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int ds \sigma_j(s) \ln \left| 1 - \frac{z}{z_j(s)} \right|, \quad (11.28)$$

где $z_j(s) \in L_j$, $\sigma_j(s)$ — скачок нормальной производной при переходе через кривую L_j ($j = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \sigma_1(s) &= \left\{ \frac{\partial \Phi_1(z)}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_2(z)}{\partial n} \right\}_{z=z_1(s)}, \\ \sigma_2(s) &= \left\{ \frac{\partial \Phi_2(z)}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_1(z)}{\partial n} \right\}_{z=z_2(s)}. \end{aligned} \quad (11.29)$$

Обозначая

$$\mu_j(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^s \sigma_j(t) dt, \quad (11.30)$$

запишем $\Phi(z)$ в виде

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^2 \int d\mu_j(s) \ln \left| 1 - \frac{z}{z_j(s)} \right|.$$

Теперь построим целую функцию

$$W(z) = AW_1(z)W_2(z), \quad (11.31)$$

где

$$W_j(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j(n)} \right) \quad (j = 1, 2).$$

Здесь нули $\lambda_j(n)$ являются решениями уравнения $\mu_j(\lambda) = n$.
Можно показать, что

$$\ln |W_j(z)| = \int_{L_j} d[\mu_j(s)] \ln \left| 1 - \frac{z}{z_j(s)} \right|$$

и

$$R_j(s) = \int_{L_j} \ln \left| 1 - \frac{z}{z_j(s)} \right| \{d\mu_j(s) - d[\mu_j(s)]\} \ll 1.$$

Здесь, как обычно, $[\mu(s)]$ — целая часть $\mu(s)$.

Таким образом, представление (11.31) является решением поставленной задачи.

Условие (5) гарантирует нам единственность $W(z)$ лишь в классе целых функций с фиксированными A , ρ и β . Однако условия (3) и (4), связанные с физическими требованиями задачи, позволяют устранить произвол в выборе этих параметров.

Определим теперь параметры A , ρ и β . Для этого запишем уравнение (11.25) в точке z_0 . Поскольку она является единственной точкой кривой L , лежащей на действительной оси, легко получить систему

$$\begin{aligned} r_0^0 &= \ln \beta + \ln \ln r_0, \\ r_0^0 &= \frac{1}{\rho \ln r_0}. \end{aligned}$$

Решая систему, найдем

$$r_0^0 \simeq 1,76, \quad \beta = \rho r_0^0 e^{r_0^0} \simeq 10\rho.$$

Используя условие (4), получим

$$A \simeq \frac{30\pi\rho}{\alpha}. \quad (11.32)$$

Из условия (3) и (11.32) следует, что $\rho \simeq 0,58$ и согласно (11.18)

$$l^2 \approx \frac{1}{4m^2} e^{-3\pi/\alpha}.$$

Подведем некоторые итоги. Итак, совокупность условий (1) — (5) позволила нам единственным образом задать функцию $W(k^2 l^2)$, несущую всю «нелокальную нагрузку» теории. Относительно этой функции известно следующее. Она представима в виде

$$W(z) = \frac{30\pi\rho}{\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda(n)} \right) \left(1 - \frac{z}{\lambda^*(n)} \right),$$

поскольку $\lambda(n) = \lambda_1(n) = [\lambda_2(n)]^*$. Порядок целой функции $W(z)$ равен $\rho \simeq 0,58$. На действительной оси $W(x)$ ведет себя следующим образом:

$$W(x) = \frac{30\pi\rho}{\alpha} e^{\Phi(x)},$$

где

$$\Phi(x) = \begin{cases} \ln \frac{1}{10\rho \ln(-x)}, & x \rightarrow -\infty, \\ x^\rho \cos \pi(1-\rho), & x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Обсудим полученные результаты. Мы рассмотрели модель, в которой нелокальность вводится в теорию на основе частичного выхода за рамки теории возмущений. Оказалось возможным построить нелокальную функцию Грина фотона $\mathcal{D}(k^2)$, убывающую достаточно быстро при $k^2 \rightarrow -\infty$. При этом произвол в выборе нелокальных формфакторов сужается до функций с заданным асимптотическим поведением, и с привлечением некоторых дополнительных условий формфактор может быть выбран однозначно.

Характерная черта предложенной модели состоит в том, что элементарная длина l выражается через физические параметры теории — массу и константу связи — и с необходимостью содержит неаналитичность по α .

Рассмотрение, проведенное в векторной электродинамике, показывает, что величина l оказывается близкой к комптоновской длине волны векторной части (W -бозона) $l \sim 1/m$. В случае

спинорной электродинамики величина l определяется выражением $l = \frac{1}{2m} e^{-3\pi/2\alpha+1}$, т. е. связь между элементарной длиной и физическими параметрами теории носит принципиально иной характер. Зависимость l от массы электрона практически подавлена. Это обстоятельство служит проявлением качественного различия в поведении перенормируемых и неперенормируемых взаимодействий на малых расстояниях, выражающегося в различном поведении функций $\Pi(k^2)$ при $k^2 \rightarrow -\infty$.

С точки зрения экспериментальной проверки предложенной схемы только в векторной электродинамике у нас есть надежда — не столь уж отдаленная — достигнуть тех энергий, при которых можно будет «почувствовать» размер векторной частицы порядка 10^{-15} см. Если перейти к наблюдаемым значениям физических величин, то вклад в амплитуды физических процессов из-за эффекта нелокальности будет порядка $O(p^2 l^2)$, $O(m^2 l^2)$, где m — характеристическая масса теории. В случае спинорной электродинамики даже при очень больших p^2 нелокальные поправки будут пренебрежимо малы. В случае процессов с участием W -мезона эффекты нелокальности уже не спрятаны столь глубоко, особенно при высоких энергиях, и их можно попытаться измерить на опыте.

Просвещение внедрять с умеренностью,
по возможности избегая кровопролития.

М. Е. Салтыков-Щедрин. История одного города.

§ 1. Выбор лагранжианов взаимодействия

Как уже неоднократно говорилось, одной из основных проблем, возникающих при построении теории возмущений для S -матрицы в квантовой теории взаимодействующих полей, является проблема ультрафиолетовых расходимостей. Эта проблема была успешно решена в так называемых перенормируемых теориях с помощью программы перенормировок физических величин. Однако процедура перенормировок оказалась безуспешной для целого класса физически интересных моделей, в основном касающихся теории слабых взаимодействий, получивших, вследствие этого, название неперенормируемых. Это обстоятельство, с одной стороны, породило скептическое отношение к такого сорта моделям, с другой стороны, стимулировало многочисленные попытки, направленные на изучение их математической структуры. Поэтому в дальнейшем развитии теории выдвинулось два направления:

- 1) построение перенормируемых моделей для описания физических взаимодействий;
- 2) разработка методов, позволяющих корректно обращаться с неперенормируемыми моделями.

К настоящему времени в обоих направлениях достигнут определенный прогресс.

Успех, достигнутый в развитии первого направления, связан с развитием теории калибровочных полей. Объединение слабых и электромагнитных взаимодействий на основе триплета полей Янга — Миллса со спонтанным нарушением калибровочной инвариантности позволило построить перенормируемую модель этих взаимодействий, получившую название модели Вайнберга — Салама (см., например, обзор С. Аберса и Б. В. Ли (1973)). Однако наличие дополнительных пока неизвестных полей, естественно возникающих в этой модели, отодвигает вопрос о

спинорной электродинамики величина l определяется выражением $l = \frac{1}{2m} e^{-3\pi/2\alpha+1}$, т. е. связь между элементарной длиной и физическими параметрами теории носит принципиально иной характер. Зависимость l от массы электрона практически подавлена. Это обстоятельство служит проявлением качественного различия в поведении перенормируемых и неперенормируемых взаимодействий на малых расстояниях, выражающегося в различном поведении функций $\Pi(k^2)$ при $k^2 \rightarrow -\infty$.

С точки зрения экспериментальной проверки предложенной схемы только в векторной электродинамике у нас есть надежда — не столь уж отдаленная — достигнуть тех энергий, при которых можно будет «почувствовать» размер векторной частицы порядка 10^{-15} см. Если перейти к наблюдаемым значениям физических величин, то вклад в амплитуды физических процессов из-за эффекта нелокальности будет порядка $O(p^2 l^2)$, $O(m^2 l^2)$, где m — характеристическая масса теории. В случае спинорной электродинамики даже при очень больших p^2 нелокальные поправки будут пренебрежимо малы. В случае процессов с участием W -мезона эффекты нелокальности уже не спрятаны столь глубоко, особенно при высоких энергиях, и их можно попытаться измерить на опыте.

Просвещение внедрять с умеренностью,
по возможности избегая кровопролития.

М. Е. Салтыков-Щедрин. История одного города.

§ 1. Выбор лагранжианов взаимодействия

Как уже неоднократно говорилось, одной из основных проблем, возникающих при построении теории возмущений для S -матрицы в квантовой теории взаимодействующих полей, является проблема ультрафиолетовых расходимостей. Эта проблема была успешно решена в так называемых перенормируемых теориях с помощью программы перенормировок физических величин. Однако процедура перенормировок оказалась безуспешной для целого класса физически интересных моделей, в основном касающихся теории слабых взаимодействий, получивших, вследствие этого, название неперенормируемых. Это обстоятельство, с одной стороны, породило скептическое отношение к такого сорта моделям, с другой стороны, стимулировало многочисленные попытки, направленные на изучение их математической структуры. Поэтому в дальнейшем развитии теории выделилось два направления:

- 1) построение перенормируемых моделей для описания физических взаимодействий;
- 2) разработка методов, позволяющих корректно обращаться с неперенормируемыми моделями.

К настоящему времени в обоих направлениях достигнут определенный прогресс.

Успех, достигнутый в развитии первого направления, связан с развитием теории калибровочных полей. Объединение слабых и электромагнитных взаимодействий на основе триплета полей Янга — Миллса со спонтанным нарушением калибровочной инвариантности позволило построить перенормируемую модель этих взаимодействий, получившую название модели Вайнберга — Салама (см., например, обзор С. Аберса и Б. В. Ли (1973)). Однако наличие дополнительных пока неизвестных полей, естественно возникающих в этой модели, отодвигает вопрос о

самосогласованности этой теории на будущее, когда эксперимент сможет дать ответ, существуют ли эти поля в действительности или нет.

Успех, достигнутый к настоящему времени в развитии второго направления, связан в основном с развитием нелокальных и нелинейных моделей в квантовой теории поля. Исследование математической структуры неперенормированных моделей, проведенное в предыдущих главах, показывает, что с аксиоматической точки зрения эти модели равноправны с перенормируемыми. Разработанные в этих моделях методы уже сейчас начинают использоваться для анализа физических процессов.

Общее положение в физике элементарных частиц таково, что наличие широкого класса физически приемлемых теорий с неперенормируемым взаимодействием требует развития методов, в рамках которых можно было бы построить S -матрицу, удовлетворяющую всем общим аксиомам квантовой теории поля. Методы нелокальной теории поля должны сыграть не последнюю роль при решении этой проблемы. С точки зрения физики основное преимущество нелокальной теории по сравнению с локальной при рассмотрении неперенормируемых взаимодействий состоит в том, что неконтролируемый произвол, возникающий при построении S -матрицы с помощью вычитательного формализма, фиксируется в нелокальной теории выбором формфактора, который имеет прозрачный физический смысл, так как характеризует область нелокального взаимодействия.

Следует еще отметить, что рассматриваемая нами теория нелокальных взаимодействий в определенном смысле является феноменологической. Поэтому одно из основных ее достоинств состоит в том, что она допускает достаточный произвол в выборе механизма нелокальности и в ней возможно выяснение всех черт, присущих любым конкретным локальным и нелокальным моделям теории поля.

В настоящей главе мы будем заниматься построением градиентно-инвариантной нелокальной теории лептонов с универсальным ферми-взаимодействием и нелокальной теории электромагнитных и слабых взаимодействий с W -мезоном. Нет необходимости говорить о значении этих моделей для описания процессов со слабым взаимодействием и радиационных поправок к ним. Достаточно сказать, что вся история исследования и объяснения механизма слабых взаимодействий неразрывно связана с изучением этих моделей.

Изложение этой главы опирается на работы В. А. Алебастрова, Г. В. Ефимова и Ш. З. Сельцера (1973а и б) и Г. В. Ефимова и Ш. З. Сельцера (1971).

Каковы же физические предположения о характере нелокальности взаимодействующих полей? Мы принимаем следующий постулат: *все нейтральные поля взаимодействуют с заряженными нелокальным образом.*

Введение таким способом нелокальности в теорию приводит к тому, что при построении коэффициентных функций S -матрицы в ряду теории возмущений изменяются пропагаторы лишь нейтральных полей фотона и нейтрино. Этого оказывается достаточно, чтобы построить конечную S -матрицу, удовлетворяющую всем аксиомам теории поля, перечисленным в гл. III. Плотности лагранжианов, описывающих электромагнитные и слабые взаимодействия лептонов и W -мезона, запишем в виде

$$\mathcal{L}^{(1)}(x) = \mathcal{L}_0^{(1)}(x) + \mathcal{L}_I^{(1)}(x), \quad (1.1)$$

$$\mathcal{L}^{(2)}(x) = \mathcal{L}_0^{(2)}(x) + \mathcal{L}_I^{(2)}(x). \quad (1.2)$$

Здесь $\mathcal{L}_I^{(1)}(x)$ — плотность лагранжиана, описывающего электромагнитное и универсальное слабое взаимодействия лептонов, а $\mathcal{L}_I^{(2)}(x)$ — плотность лагранжиана, описывающего электромагнитное и слабое взаимодействия лептонов и заряженных векторных бозонов;

$$\mathcal{L}_0^{(1)}(x) = -\frac{1}{2} : \partial_\beta A_\alpha(x) \partial_\beta A_\alpha(x) : + \sum_j : \bar{\psi}_j(x) (i\hat{\partial} - m_j) \psi_j(x) :, \quad (1.3)$$

$A_\alpha(x)$ — электромагнитное поле. Суммирование в (1.3) проводится по всем рассматриваемым фермионным полям ($j = e, \mu, \nu_e, \nu_\mu$), $\mathcal{L}_0^{(2)}(x)$ отличается от $\mathcal{L}_0^{(1)}(x)$ добавлением свободного лагранжиана для заряженного векторного поля $W_\alpha(x)$ с массой M :

$$\mathcal{L}_{W0}(x) = -\frac{1}{2} : G_{\mu\nu}(x) G_{\mu\nu}^+(x) : + M^2 : W_\mu(x) W_\mu^+(x) :, \quad (1.4)$$

где

$$G_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu W_\nu(x) - \partial_\nu W_\mu(x).$$

Выбор свободного лагранжиана заряженного поля в форме (1.4) автоматически обеспечивает выполнение условия

$$\partial_\mu W_\mu^{(-)}(x) | \dots \rangle = 0, \quad (1.5)$$

которое исключает из теории свободного поля кванты со спином 0; здесь $| \dots \rangle$ — произвольное физическое состояние системы.

Уравнения векторного поля имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_\mu G_{\mu\nu}(x) - M^2 W_\nu(x) &= 0, \\ \partial_\mu G_{\mu\nu}^+(x) - M^2 W_\nu^+(x) &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Причинная функция Грина подчиняется уравнению

$$(g_{\mu\lambda} \square + \partial_\mu \partial_\lambda - g_{\mu\lambda} M^2) \overline{W_\lambda(x) W_\nu^+(y)} = -ig_{\mu\nu} \delta(x-y). \quad (1.7)$$

Для удобства введем обозначения лептонных полей в двухкомпонентной форме:

$$l(x) = \begin{pmatrix} \psi_e(x) \\ \psi_\mu(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e(x) \\ \mu(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l^{(1)}(x) \\ l^{(2)}(x) \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

$$\nu(x) = \begin{pmatrix} \psi_{\nu_e}(x) \\ \psi_{\nu_\mu}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ \nu_\mu(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu^{(1)}(x) \\ \nu^{(2)}(x) \end{pmatrix}.$$

Плотность лагранжианов, описывающих слабые взаимодействия, запишется в этих обозначениях так:

$$\mathcal{L}_w^{(1)}(x) = \frac{G}{\sqrt{2}} : (\bar{l}(x) O_\alpha \nu(x)) (\bar{\nu}(x) O_\alpha l(x)) :, \quad (1.9)$$

$$\mathcal{L}_w^{(2)}(x) = f \{ (\bar{l}(x) O_\alpha \nu(x)) W_\alpha(x) + (\bar{\nu}(x) O_\alpha l(x)) W_\alpha^+(x) \}. \quad (1.10)$$

Здесь $f^2 = GM^2/\sqrt{2}$ — универсальная константа слабого взаимодействия ($G = 10^{-5} m_p^{-2}$, m_p — масса протона).

Как и в случае квантовой электродинамики, рассмотренной нами в предыдущей главе, будем предполагать, что группа локальных градиентных преобразований изменяется следующим образом:

$$A_\mu(x) \Rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x), \quad \nu(x) \Rightarrow \nu(x),$$

$$l(x) \Rightarrow l(x) \exp \{ -ieK_A (l_A^2 \square) f(x) \}, \quad (1.11)$$

$$W_\mu(x) \Rightarrow W_\mu(x) \exp \{ -ieK_A (l_A^2 \square) f(x) \},$$

где K_A — формфактор, одинаковый для лептона и W -мезона. Поля нейтрино вообще не изменяются при этом. Поэтому фазы преобразований полей лептонов и векторного W -мезона должны быть одинаковыми, чтобы плотности лагранжиана слабого взаимодействия (1.9) и (1.10) были инвариантны относительно группы (1.11). Это означает с физической точки зрения, что распределения зарядов в электроны и W -мезоне одинаковы. Если же считать, что формфакторы K_A электрона $K_e (l_e^2 \square)$ и W -мезона $K_W (l_W^2 \square)$ различны, то это будет означать, что нейтрино не является истинно нейтральной частицей. При градиентных преобразованиях поле нейтрино должно тогда преобразовываться так:

$$\nu(x) \Rightarrow \nu(x) \exp \{ -ie [K_e (l_e^2 \square) - K_W (l_W^2 \square)] f(x) \}.$$

Смысл этого преобразования заключается в том, что нейтрино, обладая нулевым зарядом, тем не менее имеет отличное от нуля зарядовое распределение. В рамках такого предположения построение конечной теории становится крайне сложным.

Таким образом, наше первое предположение состоит в том, что мы исходим из группы градиентных преобразований (1.11),

считая, что нейтрино в лагранжиане взаимодействия является истинно нейтральной частицей.

Второе предположение состоит в том, что в плотность лагранжиана слабого взаимодействия поля нейтрино должны входить «размазанными», т. е. необходимо произвести замену

$$\nu(x) \Rightarrow N(l, x) = K_\nu (l_\nu^2 \square) \nu(x) = \int dx' K_\nu(x-x') \nu(x'). \quad (1.12)$$

Введение формфактора в оператор поля нейтрино означает изменение «слабого» потенциала взаимодействия между заряженными лептонами, точно так же, как введение формфактора в пропагатор фотона приводит к изменению закона Кулона на малых расстояниях.

Такое введение нелокальности в теорию приводит к тому, что все нейтральные поля (фотонов и нейтрино) взаимодействуют с заряженными полями (электрона, μ -мезона и векторного W -мезона) нелокальным образом.

Заметим далее, что формфакторы $K_A (l_A^2 p^2)$ и $K_\nu (l_\nu^2 p^2)$, а также параметры l_A и l_ν , имеющие смысл размера областей электромагнитного и слабого взаимодействия, вообще говоря, различны. В нашем подходе они являются феноменологическими параметрами теории, для определения которых должны быть привлечены дополнительные соображения теоретического характера, или они должны просто определяться из опыта.

Плотность лагранжианов взаимодействия с учетом введения нелокальных формфакторов запишется в виде

$$\mathcal{L}_l^{(1)}(x) = \mathcal{L}_{e,A}(x) + \mathcal{L}_w^{(1)}(x), \quad (1.13)$$

$$\mathcal{L}_l^{(2)}(x) = \mathcal{L}_{e,A}(x) + \mathcal{L}_{W,A}(x) + \mathcal{L}_w^{(2)}(x), \quad (1.14)$$

где

$$\mathcal{L}_{e,A}(x) = e : \bar{l}(x) \hat{\mathcal{A}}(l, x) l(x) :, \quad (1.15)$$

$$\mathcal{L}_{W,A}(x) = ie \{ W_\mu(x) G_{\mu\nu}^+(x) - W_\mu^+(x) G_{\mu\nu}(x) \} A_\nu(l, x) +$$

$$+ e^2 : \{ W_\mu(x) W_\nu^+(x) - g_{\mu\nu} W_\sigma(x) W_\sigma^+(x) \} : A_\mu(l, x) A_\nu(l, x), \quad (1.16)$$

$$\mathcal{L}_w^{(1)}(x) = \frac{G}{\sqrt{2}} : (\bar{l}(x) O_\alpha N(l, x)) (\bar{N}(l, x) O_\alpha l(x)) :, \quad (1.17)$$

$$\mathcal{L}_w^{(2)}(x) = f : \{ (\bar{l}(x) O_\alpha N(l, x)) W_\alpha(x) + (\bar{N}(l, x) O_\alpha l(x)) W_\alpha^+(x) \} :. \quad (1.18)$$

Здесь

$$\hat{\mathcal{A}}_\mu(l, x) = K_A (l_A^2 \square) A_\mu(x),$$

а $N(l, x)$ определяется формулой (1.12).

Обратим внимание на расстановку операторов поля W -мезонов в четырехлинейном члене (1.16), описывающем взаимо-

действие W -мезонов с электромагнитным полем. Произведение электромагнитных полей должно быть выбрано в форме обычного произведения, чтобы физические величины теории не зависели от калибровки пропагатора фотона. Выбор произведения операторов поля W -мезонов в нормальной форме может привести к нарушению градиентной инвариантности теории, однако, как будет показано ниже, выбор регуляризационной процедуры снимает эту трудность.

Дальнейшее построение теории происходит уже известным нам способом, применявшимся нами как в теории скалярного поля, так и в теории электромагнитных взаимодействий.

Формально S -матрица записывается в виде

$$S = T \exp \left\{ i \int dx \mathcal{L}_I(x) \right\}. \quad (1.19)$$

Для получения теории возмущений необходимо разложить экспоненту в (1.19) в ряд по степеням $\mathcal{L}_I(x)$ и перейти к нормальному произведению операторов поля согласно теореме Вика. При этом возникают пропагаторы заряженных полей лептонов и W -мезонов, которые в локальной теории определяются как

$$\begin{aligned} S_I^{(ij)}(x-y) &= \langle 0 | T (l^{(i)}(x) \bar{l}^{(j)}(y)) | 0 \rangle = \\ &= \frac{\delta_{ij}}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dp (m_j + \beta) e^{-ip(x-y)}}{m_j^2 - p^2 - i\epsilon}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}(x-y) &= \langle 0 | T (W_\alpha(x) W_\beta^\dagger(y)) | 0 \rangle = \\ &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{dp e^{-ip(x-y)}}{M^2 - p^2 + i\epsilon} \left[g_{\alpha\beta} - \frac{p_\alpha p_\beta}{M^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta}^{(2)}(x-y) &= \langle 0 | T (G_{\alpha\beta}(x) W_\nu^\dagger(y)) | 0 \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dp e^{-ip(x-y)}}{M^2 - p^2 - i\epsilon} [p_\alpha g_{\beta\nu} - p_\beta g_{\alpha\nu}], \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\nu, \alpha\beta}^{(2)+}(x-y) &= \langle 0 | T (W_\nu(x) G_{\alpha\beta}(y)) | 0 \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dp e^{-ip(x-y)}}{M^2 - p^2 - i\epsilon} [-p_\alpha g_{\beta\nu} + p_\beta g_{\alpha\nu}], \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu, \alpha\beta}^{(3)}(x-y) &= \langle 0 | T (G_{\mu\nu}(x) G_{\alpha\beta}^\dagger(y)) | 0 \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dp e^{-ip(x-y)}}{M^2 - p^2 - i\epsilon} [-p_\mu p_\alpha g_{\nu\beta} + p_\mu p_\beta g_{\alpha\nu} - p_\nu p_\beta g_{\mu\alpha} + p_\nu p_\alpha g_{\mu\beta}]. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Масса m_j заряженных лептонов определена следующим образом: $m_1 = m_e$, $m_2 = m_\mu$. Пропагаторы нейтральных частиц фотона и

нейтрино имеют вид

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(x-y) &= \overline{\mathcal{A}_\mu(l, x) \mathcal{A}_\nu(l, y)} = \\ &= -\frac{g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dk e^{-ik(x-y)}}{-k^2 - i\epsilon} [K_A(k^2 l_A^2)]^2, \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} S_V^{(ij)}(x-y) &= \overline{N^{(i)}(l, x) \bar{N}^{(j)}(l, y)} = \\ &= \frac{\delta_{ij}}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dk \hat{k} e^{-ik(x-y)}}{-k^2 - i\epsilon} [K_V(k^2 l_V^2)]^2. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Такой выбор свертки операторов поля соответствует T -произведению в форме Вика, как говорилось выше. Это приводит к тому, что в импульсном пространстве формфакторы K_A и K_V изменяют только пропагаторы фотона и нейтрино:

$$\frac{1}{-k^2 - i\epsilon} \Rightarrow \frac{[K_A(k^2 l_A^2)]^2}{-k^2 - i\epsilon}, \quad \frac{\hat{k}}{-k^2 - i\epsilon} \Rightarrow \frac{\hat{k} [K_V(k^2 l_V^2)]^2}{-k^2 - i\epsilon}, \quad (1.27)$$

а пропагаторы заряженных лептонных полей не изменяются.

Как говорилось в гл. V, существует другой возможный способ введения нелокальности в теорию, основанный на том, что пропагатор, например, свободного нейтрино

$$S_V(x-y) = \langle 0 | T (\nu(x) \bar{\nu}(y)) | 0 \rangle \quad (1.28)$$

не определен при совпадающих аргументах x и y . Постулат нелокальности здесь состоит в том, что правая часть (1.28) не определена не только в точке $x = y$, но и в некоторой малой пространственно-временной области в окрестности этой точки. Математически это означает, что в правую часть (1.28) можно добавить нелокальную обобщенную функцию из подходящего пространства нелокальных обобщенных функций (см. гл. II). Такая модификация свободного пропагатора нейтрино должна означать изменение природы фотона и нейтрино. Эффективно в этом случае изменяются свободные пропагаторы фотона и нейтрино:

$$\frac{1}{-k^2 - i\epsilon} \Rightarrow \frac{V_A(-k^2 l_A^2)}{-k^2 - i\epsilon}, \quad \frac{\hat{k}}{-k^2 - i\epsilon} \Rightarrow \frac{\hat{k} V_V(-k^2 l_V^2)}{-k^2 - i\epsilon}. \quad (1.29)$$

Различие между (1.27) и (1.29) состоит в том, что при вещественных k^2 формфактор $[K(k^2 l^2)]^2$ (1.27) положителен, а в (1.29) формфактор $V(-k^2 l^2)$ может быть знакопеременным, что может существенно уменьшить число расходящихся диаграмм в теории возмущений.

будем предполагать, что формфактор в обоих случаях удовлетворяет условиям (E) (см. гл. IV и V), причем

$$\int_0^{\infty} du u^2 \ln u V(u) < \infty \quad (1.30)$$

для обоих формфакторов V_A и V_V .

Поставим задачу: как ввести промежуточную регуляризацию теории и какие перенормировки необходимо провести, чтобы получить конечную унитарную, градиентно-инвариантную, причинную S -матрицу, описывающую электромагнитное и слабое взаимодействия лептонных и бозонных полей?

§ 2. Регуляризация ряда теории возмущений

Сформулируем регуляризационную процедуру, которой мы будем пользоваться при вычислении матричных элементов в теории возмущений.

Нелокальные пропагаторы нейтрино и фотона регуляризуются способом, изложенным в гл. V:

$$\begin{aligned} S_V^\delta(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dk \hat{k} e^{-ikx}}{-k^2 - i\epsilon} V_V^\delta(-k^2 l_V^2), \\ D_{\alpha\beta}^\delta(x) &= \frac{-g_{\alpha\beta}}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dk e^{-ikx}}{-k^2 - i\epsilon} V_A^\delta(-k^2 l_A^2). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Интегралы, соответствующие циклическим диаграммам Фейнмана, составленные только из пропагаторов заряженных полей, будем регуляризовать с помощью градиентно-инвариантной регуляризации Паули—Вилларса, которая состоит в следующем.

В модели с универсальным слабым взаимодействием произведения причинных функций заряженных лептонов, которые соответствуют замкнутым циклам

$$\text{Sp} [\Gamma S_I(m_1, x_1 - x_2) \Gamma S_I(m_2, x_2 - x_3) \dots \Gamma S_I(m_n, x_n - x_1)], \quad (2.2)$$

где Γ — матрица, описывающая соответствующую вершину (в этом случае Γ равно γ_α или $O_\alpha = \gamma_\alpha(1 + \gamma_5)$), заменяются выражениями

$$\sum_j c_j \text{Sp} [\Gamma S_I(m_1 \Lambda_j, x_1 - x_2) \Gamma S_I(m_2 \Lambda_j, x_2 - x_3) \dots \Gamma S_I(m_n \Lambda_j, x_n - x_1)]. \quad (2.3)$$

Здесь

$$S(m \Lambda_j, x) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{m \Lambda_j + \hat{k}}{m^2 \Lambda_j^2 - k^2 - i\epsilon} e^{-ikx} dk. \quad (2.4)$$

В случае модели с векторным бозоном будем использовать частично модифицированную циклическую регуляризацию Паули—Вилларса. Пусть функция

$$e^{af^b} \Pi(m_e, m_\mu, M; x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_n - x_1) \quad (2.5)$$

описывает цикл, составленный из пропагаторов заряженных лептонов и векторных бозонов. Целые числа a и b описывают порядок теории возмущений рассматриваемого цикла по константам e и f соответственно. Введем теперь число θ_W , которое равно 1 или 0 в зависимости от того, имеется или нет в цикле хоть один пропагатор векторного бозона. Определим число

$$d = a(1 - \theta_W) + \lambda(a) \theta_W, \quad (2.6)$$

где

$$\lambda(a) = \begin{cases} 0, & a - \text{четное}, \\ 1, & a - \text{нечетное}. \end{cases}$$

Параметр d равен числу внешних фотонных линий, если цикл представляет собой чисто спинорное электродинамическое взаимодействие, и $d = \lambda(a)$ во всех остальных случаях. Тогда вместо выражения (2.5) будем рассматривать функцию

$$\text{reg } \Pi = \sum_j c_j e^{af^b} \Lambda_j^{a+b-d} \Pi(m_e \Lambda_j, m_\mu \Lambda_j; M \Lambda_j; x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots). \quad (2.7)$$

Здесь берется сумма циклов, полученных из исходного цикла (2.5) согласно следующим заменам:

$$\begin{aligned} m_e &\Rightarrow m_e \Lambda_j, & m_\mu &\Rightarrow m_\mu \Lambda_j, & M &\Rightarrow M \Lambda_j, \\ f &\Rightarrow f \Lambda_j, & e &\Rightarrow e \Lambda_j. \end{aligned}$$

Кроме того, в (2.7) имеется дополнительный множитель Λ_j^{-d} . Параметр $\Lambda_0 = 1$, а Λ_j ($j = 1, 2, 3, \dots$) — большие безразмерные параметры регуляризации, которые мы выберем в виде

$$\Lambda_j = \Lambda + \epsilon_j, \quad (2.8)$$

где $\epsilon_j \ll 1$, $\Lambda \gg 1$.

На коэффициенты c_j , причем $c_0 = 1$, накладываются следующие условия:

$$\sum_{j=0}^n c_j \Lambda_j^k = 0, \quad \sum_{j=1}^n c_j \Lambda_j^m \ln \Lambda_j = a_m, \quad (2.9)$$

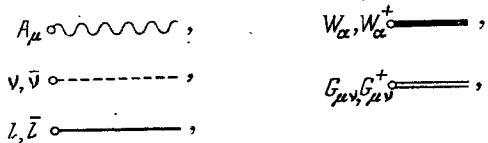
где для электромагнитных и слабых взаимодействий с W -бозоном $n = 8$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, $m = 0, 2, 4$. Первая группа уравнений в (2.9) обеспечивает сходимость интегралов от регуляризованной функции (2.7). Вторая группа уравнений является условиями, при которых в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ в S -матрице не возникает никаких бессмысленных расходящихся выражений. Смысл произвольных констант a_m , появляющихся в (2.9), мы обсудим ниже.

В следующих параграфах мы покажем, что в рамках этой регуляризации интегралы от любых замкнутых циклов сходятся и существует конечный предел при снятии регуляризации.

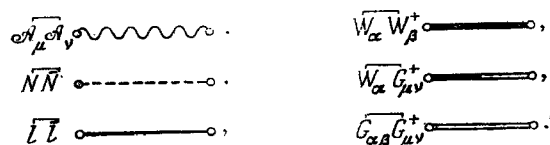
§ 3. Электромагнитные и слабые взаимодействия с W -мезоном

Электромагнитные и слабые взаимодействия с W -мезоном описываются лагранжианами (1.14). В предыдущем параграфе была сформулирована регуляризационная процедура, которую необходимо использовать при построении ряда теории возмущений. В этом параграфе мы покажем, что в рассматриваемом варианте слабых и электромагнитных взаимодействий она приводит к конечной S -матрице.

Прежде чем приступить к исследованию сходимости фейнмановских интегралов, проведем удобную для дальнейшего рассмотрения классификацию графов в нашем случае. Введем условные обозначения для графического описания членов матрицы рассеяния. Операторам свободных полей сопоставим линии:



хронологическим сверткам, или причинным функциям рассматриваемых полей, — линии:



Тогда описываемые лагранжианами (1.16) и (1.18) вершины изображаются, как показано на рис. 38. Здесь 1 — слабая

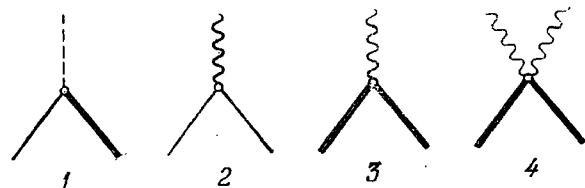


Рис. 38. Вершины в теории электромагнитных и слабых взаимодействий с W -мезоном.

вершина ω_1 , 2 — электромагнитная спинорная вершина ω_2 , 3 — электромагнитная векторная ω_3 , 4 — электромагнитная векторная ω_4 .

Любой связный граф теории возмущений представляется совокупностью разомкнутых линий и циклов, образованных спариваниями заряженных полей, соединяющимися между собой

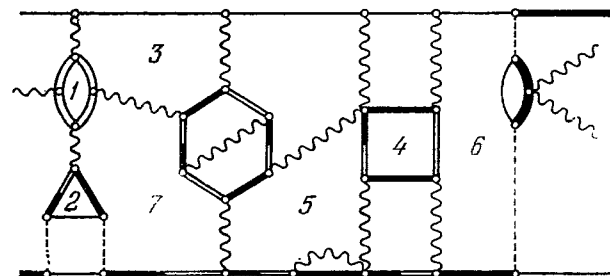


Рис. 39. Один из возможных графов в теории с W -мезоном.

линиями нейтральных полей. Пример одного из возможных графов приведен на рис. 39. Ясно, что при достаточно быстром убывании формфакторов в евклидовой области все интегралы, связанные с циклами, включающими хотя бы одну нейтральную (фотона или нейтрино) линию, сходятся (циклы 3, 5, 6 и т. д. на рис. 39). Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением заряженных циклов (циклы 1, 2, 4 и т. д.).

Произвольный заряженный цикл можно характеризовать следующими числами: N_1 — число внешних фотонных линий, $2N_2$ — число внешних нейтринных линий, n_j — число вершин ω_j ($j = 1, 2, 3, 4$), s_i — число пропагаторов $\Delta^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$), t — число пропагаторов S . Между этими числами существуют соотношения:

$$\begin{aligned} N_1 &= n_2 + n_3 + 2n_4, & 2s_1 + s_2 &= n_1 + n_3 + 2n_4, \\ 2N_2 &= n_1, & 2t &= n_1 + 2n_2, \\ & & s_2 + 2s_3 &= n_3. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Пример одного из возможных циклов изображен на рис. 40.

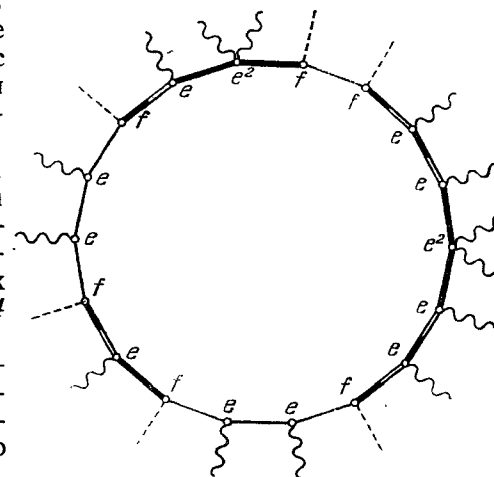


Рис. 40. Пример одного из возможных циклов, образованных пропагаторами заряженных частиц.

Индекс заряженного цикла ω , т. е. максимальная степень импульса в представлении цикла в виде интеграла по импульсному пространству, равен

$$\omega(n_1, n_2, n_3, n_4) = 4 - n_1/2 - n_2 - s_2 = 4 - N_2 - n_2 - s_2 = 4 - t - s_2 \leq 4, \quad (3.2)$$

т. е. интегралы, соответствующие любым заряженным циклам, расходятся не быстрее четвертой степени по импульсу. Поэтому теория заряженного векторного поля, взаимодействующего с внешним электромагнитным полем, относится к классу перенормируемых, как уже говорилось в гл. VIII.

Покажем теперь, что выбранная нами регуляризация обеспечивает существование конечного предела при $\Lambda \rightarrow \infty$ для произвольного заряженного цикла. Опуская векторные индексы, несущественные для изучения сходимости, амплитуду, соответствующую циклу, можно записать в форме

$$\begin{aligned} \text{рег } \tilde{\Pi}(n_1, n_2, n_3, n_4; p_1, p_2, \dots, p_l) = \\ = e^{n_2+n_3+2n_4} f^{n_1} \int dk \sum_j c_j \Lambda_j^{n_1+n_2+n_3+2n_4-d} \prod_{i=1}^{s_1} \tilde{\Delta}^{(1)}(M_j, k - p_{i_1}) \times \\ \times \prod_{i_2=1}^{s_2} \tilde{\Delta}^{(2)}(M_j, k - p_{i_2}) \prod_{i_3=1}^{s_3} \tilde{\Delta}^{(3)}(M_j, k - p_{i_3}) \prod_{i_4=1}^t \tilde{\Sigma}_l(m_j, k - p_{i_4}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Объединяя Λ_j^{2s} с $\prod_{i=1}^{s_1} \tilde{\Delta}^{(1)}(M_j, k - p_{i_1})$, получим

$$\begin{aligned} \text{рег } \tilde{\Pi}(n_1, n_2, n_3, n_4; p_1, \dots, p_l) = \\ = e^{N_1} f^{2N_2} \int dk \sum_j c_j \Lambda_j^{s_2+t-N_2-d} \prod_{i=1}^{s_1} \frac{\Lambda_j^2 - (k - p_{i_1})(k - p_{i_1}) M^{-2}}{M^2 \Lambda_j^2 - (k - p_{i_1})^2} \times \\ \times \prod_{i_2=1}^{s_2} \frac{k - p_{i_2}}{M^2 \Lambda_j^2 - (k - p_{i_2})^2} \cdot \prod_{i_3=1}^{s_3} \frac{(k - p_{i_3})(k - p_{i_3})}{M^2 \Lambda_j^2 - (k - p_{i_3})^2} \cdot \prod_{i_4=1}^t \frac{m \Lambda_j + k - p_{i_4}}{m^2 \Lambda_j^2 - (k - p_{i_4})^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

При больших k подынтегральное выражение в (3.4) представимо в виде

$$\sum_j c_j \Lambda_j^{s_2+t-N_2-d} \left\{ \frac{A_1}{k_E^{s_2+t}} + \frac{\Lambda_j A_2}{k_E^{s_2+t+1}} + \dots \right\}, \quad (3.5)$$

где k_E — длина евклидова 4-вектора, A_1, A_2 — некоторые коэффициенты. Из (3.5) следует, что интеграл (3.4) расходится при

больших k , если $s_2 + t = 0, 1, 2, 3, 4$. Однако коэффициенты при этих членах тождественно равны нулю в силу (2.9). Действительно, в случае циклов, состоящих только из заряженных лептонов, имеем $t = N_1, N_2 = 0$ и, следовательно, $s_2 + t - d = 0$. Значит, наша регуляризация совпадает с обычной циклической регуляризацией Паули — Вилларса. Для сходимости интеграла достаточно выполнение условий в (2.9) при $m = 0.2$, так как (3.5) принимает вид

$$\sum_j c_j \left\{ \frac{A_1}{k_E^{N_1}} + \frac{\Lambda_j A_2}{k_E^{N_1+1}} + \dots \right\}.$$

В этом случае мы имеем уже рассмотренный в гл. VIII вариант нелокальной квантовой электродинамики. Во всех остальных случаях $d = \lambda(N_1)$ и для сходимости интеграла (3.5) необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\sum_j c_j \Lambda_j^{s_2+t-N_2-\lambda(N_1)} = 0 \quad (3.6)$$

для всех $s_2 + t = 0, 1, 2, 3, 4$. Но (3.6) эквивалентно (2.9), поскольку всегда $t \geq N_2 + \lambda(N_1)$.

Из (3.2) следует, что добавление к заряженному циклу внешних нейтринных линий понижает степень расходимости.

Определим степень роста по внешним импульсам интеграла (3.4). Для этого перейдем в нем к α -представлению Фейнмана и, как обычно, избавимся в знаменателе от членов, линейно зависящих от импульса интегрирования. Заметим, что пропагаторы фермионного поля входят к цикл только в комбинациях

$$\tilde{\Sigma}_t(p_1, \dots, p_t) = O_\alpha \prod_{j=0}^{t-1} \frac{m + \hat{p}_j}{m^2 - p_j^2} \gamma_{\mu_j} \frac{m + \hat{p}_t}{m^2 - p_t^2} O_\beta, \quad (3.7)$$

что соответствует диаграмме, показанной на рис. 41. Поскольку $O_\alpha \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_n} O_\beta \equiv 0$ при четном n , справедливо равенство

$$\tilde{\Sigma}_t(-p_1, \dots, -p_t) = (-1)^t \tilde{\Sigma}_t(p_1, \dots, p_t). \quad (3.8)$$

С учетом этого общий числитель в (3.4) представляется в виде

$$\sum_{i=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \sum_{n=0}^{s_1} \sum_{u=0}^{|R|} B_{inu} m^{2i} M^{2n} (p_k p_m)^{u + \frac{1}{2} \lambda(s_2+t)} \Lambda_j^{2(n+i)} (k^2)^{R-u}, \quad (3.9)$$

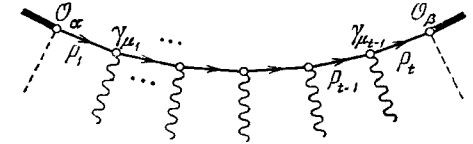


Рис. 41. Диаграмма, составленная из пропагаторов фермионного поля, которая входит в заряженный цикл.

где $R = \frac{t}{2} + \frac{s_2}{2} + s_1 + s_3 - i - n - \frac{1}{2} \lambda (s_2 + t)$, $[x]$ — целая часть числа x , B_{inu} — коэффициенты, зависящие от параметров α_j . Как следует из (3.1), четность числа $s_2 + t$ совпадает с четностью $N_1 + N_2$. Исследуемый нами интеграл (3.4) разбивается на сумму интегралов вида

$$I = \int dk \sum_j c_j \Lambda_j^{R_1} \frac{(k^2)^{R_2}}{[\mathcal{M} \Lambda_j^2 + Q(p_k p_m) - k^2]^{s_1 + s_2 + s_3 + t}}, \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= s_2 + t - N_2 + 2(i + n) - \lambda(N_1), \\ R_2 &= \frac{1}{2}(s_2 + t) + s_1 + s_3 - i - n - u - \frac{1}{2} \lambda(N_1 + N_2), \\ \mathcal{M} &= \sum_i \alpha_i M^2 + \sum_j \alpha_j m^2, \end{aligned}$$

$Q(p_k p_m)$ — квадратичная форма по внешним импульсам. В свою очередь, (3.10) интегрированием по частям сводится к сумме интегралов

$$I_{uv_1} = \int dk \sum_j c_j \frac{\Lambda_j^{2(s_1 + s_2 + s_3 + t) - 4 - L - 2v_1}}{[\mathcal{M} \Lambda_j^2 + Q(p_k p_m) - k^2]^{s_1 + s_2 + s_3 + t}}, \quad (3.11)$$

если $s_2 + t + 2(i + n + u) + \lambda(N_1 + N_2) > 4$, $0 \leq v_1 \leq \frac{1}{2}[s_2 + t - \lambda(N_1 + N_2)] + s_1 + s_3 - i - n - u$;

$$I_{uv_2} = \int dk \sum_j c_j \frac{\Lambda_j^{L - 2v_2}}{[\mathcal{M} \Lambda_j^2 + Q(p_k p_m) - k^2]^2}, \quad (3.11a)$$

если $s_2 + t + 2(i + n + u) + \lambda(N_1 + N_2) \leq 4$, $0 \leq v_2 \leq 2 - \frac{1}{2}[s_2 + t + \lambda(N_1 + N_2)] - i - n - u$. В (3.11) и (3.11a) $L = 4 - N_2 - \lambda(N_1 + N_2) - \lambda(N_1) - 2u$. Выполняя интегрирование в (3.11), (3.11a), получим

$$I_{uv_1} = \text{const} \cdot \sum_j c_j \frac{\Lambda_j^{L - 2v_1}}{[\mathcal{M} + Q(p_k p_m) \Lambda_j^{-2}]^{s_1 + s_2 + s_3 + t - 2}} \quad (3.12)$$

при $s_2 + t + 2(i + n + u) + \lambda(N_1 + N_2) > 4$,

$$I_{uv_2} = \text{const} \cdot \left\{ \sum_j c_j \Lambda_j^{L - 2v_2} \ln \Lambda_j^2 + \sum_j c_j \Lambda_j^{L - 2v_2} \ln \left[1 + \frac{Q(p_k p_m)}{\mathcal{M} \Lambda_j^2} \right] \right\} \quad (3.12a)$$

при $s_2 + t + 2(i + n + u) + \lambda(N_1 + N_2) \leq 4$. Легко видеть, что всегда выполняется условие

$$0 \leq 4 - N_2 - 2u - \frac{1}{2} \lambda(N_1 + N_2) - \lambda(N_1) \leq 4. \quad (3.13)$$

Таким образом, результат зависит от чисел

$$a_m = \sum_j c_j \Lambda_j^m \ln \Lambda_j \quad (m = 0, 2, 4),$$

которые растут как Λ^m при $\Lambda \rightarrow \infty$, если использовать обычную регуляризацию Паули — Вилларса.

Устремляя к пределу $\Lambda \rightarrow \infty$ в (3.12) и (3.12a), получим

$$\begin{aligned} I_{uv_1} &= \text{const} \cdot \{ [M + Q(p_k p_m)]^{-(s_1 + s_2 + s_3 + t - 2)} + \\ &+ \mathcal{M}^{-(s_1 + s_2 + s_3 + t - 2)} \cdot \sum_{k=0}^{[L/2 - v_1]} \frac{(-1)^{k+1} (s_1 + s_2 + s_3 + t + k - 3)!}{k! (s_1 + s_2 + s_3 + t - 3)!} \left[\frac{Q(p_m p_l)}{\mathcal{M}} \right]^k \} \end{aligned} \quad (3.14)$$

при $s_2 + t + 2(i + n + u) + \lambda(N_1 + N_2) > 4$;

$$I_{uv_2} = \text{const} \cdot \left\{ \ln \left(1 + \frac{Q(p_l p_m)}{\mathcal{M}} \right) + \sum_{k=1}^{[L/2 - v_2]} \frac{(-1)^k}{k!} \left[\frac{Q(p_m p_l)}{\mathcal{M}} \right]^k \right\} \quad (3.15)$$

при $s_2 + t + 2(i + n + u) + \lambda(N_1 + N_2) \leq 4$.

Из последних выражений видно, что максимальная степень роста функции, определяющей цикл, по внешним импульсам зависит от N_2 (числа внешних нейтринных линий) и определяется следующим образом:

$$\tilde{\Pi}(p_1, \dots, p_l) \sim \{Q(p_k p_m)\}^{\left[\frac{4 - N_2 - \lambda(N_1)}{2} \right]} \quad (3.16)$$

при $N_2 + \lambda(N_1) = 0, 1, 2, 3, 4$. Во всех остальных случаях интеграл (3.4) определяет убывающую с ростом внешних импульсов функцию, т. е. в случае векторной электродинамики ($N_2 + \lambda(N_1) = 0$) интеграл (3.4) растет как четвертая степень любого внешнего импульса. Наличие внешних линий снижает степень роста. Принимая во внимание (3.16), легко убедиться, что условие (1.30) на формфактор обеспечивает сходимость любых диаграмм теории возмущений.

§ 4. Второй порядок теории возмущений

Здесь мы рассмотрим амплитуды второго порядка, соответствующие графам Фейнмана на рис. 42, и покажем, что из условия нормировки поляризации вакуума в векторной электродинамике следует

$$a_m = 0 \quad (m = 2, 4). \quad (4.1)$$

Равенство нулю константы a_0 вытекает из нормировки поляризационного оператора в спинорной электродинамике (см. § 6 гл. VIII).

Поляризация вакуума в векторной электродинамике. В гл. VIII поляризация вакуума была вычислена в представлении Дэффина — Кеммера. Здесь же мы вычислим этот же

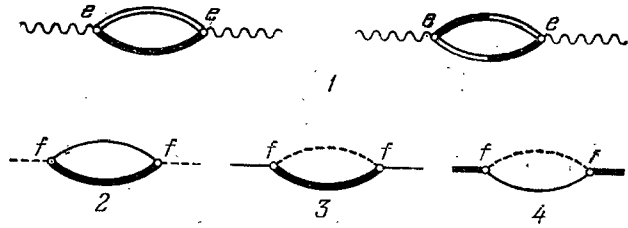


Рис. 42. Диаграммы второго порядка в теории слабых взаимодействий с W -мезоном.

оператор, исходя из представления лагранжиана (1.16). Член S -матрицы, соответствующий диаграммам 1 на рис. 42, может быть записан в виде

$$-i : A_\mu(x) \Pi_{\mu\nu}(x-y) A_\nu(y) :, \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(x-y) = \\ = ie^2 \{ \Delta_{\sigma\mu, \lambda}^{(2)}(x-y) \Delta_{\lambda\nu, \sigma}^{(2)}(y-x) - \Delta_{\sigma\mu, \lambda\nu}^{(3)}(x-y) \Delta_{\lambda\sigma}^{(1)}(y-x) \}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Используя принятую нами регуляризацию и переходя к импульсному представлению, получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) = \lim_{\Lambda_j \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty} \frac{e^2}{(2\pi)^4 i} \int dk \sum_j c_j \Lambda_j^2 \times \\ \times \{ \tilde{\Delta}_{\sigma\mu, \lambda}^{(2)}(k) \tilde{\Delta}_{\lambda\nu, \sigma}^{(2)}(p-k) - \tilde{\Delta}_{\sigma\mu, \lambda\nu}^{(3)}(k) \tilde{\Delta}_{\lambda\sigma}^{(1)}(p-k) \} = \\ = \lim_{\Lambda_j \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty} \{ (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \tilde{\Pi}_1(\Lambda_j, p^2) + g_{\mu\nu} \tilde{\Pi}_2(\Lambda_j, p^2) \}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_1(p^2) = \lim_{\Lambda_j \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty} \tilde{\Pi}_1(\Lambda_j, p^2) = \\ = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \int_0^1 du \left[\left[P_1(u) + P_2(u) \frac{p^2}{M^2} \right] \ln \left[1 - u(1-u) \frac{p^2}{M^2} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + u(1-u) P_1(u) \frac{p^2}{M^2} \right\} + a_2 - \frac{1}{3} \frac{p^2}{M^2} a_0 \right\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\tilde{\Pi}_2(p^2) = \lim_{\Lambda_j \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty} \tilde{\Pi}_2(\Lambda_j, p^2) = \frac{9\alpha}{8\pi} M^2 a_4. \quad (4.6)$$

Здесь $P_1(u) = -1 + 9u(1-u)$, $P_2(u) = -5u^2(1-u)^2$.

Из (4.4) видно, что при $a_4 \neq 0$ во втором порядке по e S -матрица не удовлетворяет требованию градиентной инвариантности. Это связано с тем, что в лагранжиане взаимодействия (1.16) все векторные заряженные поля стоят под знаком нормального произведения. Если $a_4 = 0$, то градиентно-неинвариантные добавки исчезают. Из условия

$$\tilde{\Pi}_1(0) = 0, \quad (4.7)$$

которое означает, что, по крайней мере, во втором порядке теории возмущений не происходит перенормировок заряда, следует

$$a_2 = 0. \quad (4.8)$$

Равенство нулю константы a_0 , как упоминалось выше, вытекает из условия нормировки поляризационного оператора в спинорной электродинамике.

Окончательно после несложных преобразований (4.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) = - (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \frac{\alpha}{8\pi} p^2 \int_{4M^2}^{\infty} \frac{dx^2 \sqrt{1 - \frac{4M^2}{x^2}}}{x^4 (x^2 - p^2 - i\epsilon)} \times \\ \times \int_{-1}^1 dv \left\{ P_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{v}{2} \sqrt{1 - \frac{4M^2}{x^2}} \right) + \frac{x^2}{M^2} P_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{v}{2} \sqrt{1 - \frac{4M^2}{x^2}} \right) \right\} = \\ = (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2) \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{11}{180} \frac{p^2}{M^2} - \frac{1}{6} \left(p^2 - \frac{p^4}{M^2} + 12M^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \int_{4M^2}^{\infty} \frac{dx^2 \sqrt{1 - \frac{4M^2}{x^2}}}{x^2 (x^2 - p^2 - i\epsilon)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Полученное выражение совпадает с (VIII. 10.16), в чем можно убедиться непосредственным вычислением.

Собственная энергия нейтрино. Член S -матрицы, соответствующий диаграмме собственной энергии нейтрино (рис. 42, диаграмма 2), представляется в виде

$$-i : \bar{\nu}_a(x) \Sigma_\nu(x-y) \nu_a(y) :$$

($a = e, \mu$). Здесь

$$\Sigma_\nu(x) = -i f^2 O_a S_{l_a}(x) O_\beta \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}(-x). \quad (4.10)$$

Аналогично тому, как это было сделано выше, можно получить

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}_{\nu a}(p) &= \lim_{\Lambda_j \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty} \frac{f^2}{(2\pi)^4 i} \int dk \sum_j c_j \Lambda_j^2 O_a \frac{m_a \Lambda_j + \hat{k}}{m_a^2 \Lambda_j^2 - k^2 - i\epsilon} O_\beta \times \\ &\quad \times \frac{\{g_{\alpha\beta} - (p-k)_\alpha (p-k)_\beta M^{-2} \Lambda_j^{-2}\}}{M^2 \Lambda_j^2 - (p-k)^2 - i\epsilon} = \\ &= \hat{p} (1 + \gamma_5) \frac{f^2}{8\pi^2} \left[3 \frac{m_a^2}{M^2} a_2 - \frac{p^2}{M^2} a_0 + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 du \left\{ \left(u(2-3u) + \frac{m_a^2}{M^2} (4-7u+3u^2) - \frac{p^2}{M^2} (5u-9u^2+4u^3) \right) \times \right. \right. \\ &\quad \times \ln \left(\frac{uM^2 + (1-u)m_a^2 - u(1-u)p^2}{uM^2 + (1-u)m_a^2} \right) + \\ &\quad \left. \left. + u(1-u) \frac{p^2}{M^2} \frac{u(2-3u)M^2 + (4-7u+3u^2)m_a^2}{uM^2 + (1-u)m_a^2} \right\} \right]. \quad (4.11)\end{aligned}$$

С учетом того, что $a_0 = 0$ и $a_2 = 0$ (4.11) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}_{\nu a}(p) &= -\hat{p} (1 + \gamma_5) \frac{f^2}{8\pi^2} p^4 \int_{(M+m_a)^2}^{\infty} \frac{dx^2 \sqrt{\lambda(M^2, m_a^2, x^2)}}{x^6 (x^2 - p^2 - i\epsilon)} \times \\ &\quad \times \int_{-1}^1 dv P \left(\frac{M^2 - m_a^2 + x^2}{2x^2} + \frac{v}{2x^2} \sqrt{\lambda(M^2, m_a^2, x^2)} \right), \quad (4.12)\end{aligned}$$

где

$$\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca,$$

$$P(u) = u(2-3u) + \frac{m_a^2}{M^2} (4-7u+3u^2) - \frac{x^2}{M^2} (5u-9u^2+4u^3).$$

Из (4.12) видно, что поправка к собственной массе нейтрино равна нулю. Это является следствием γ_5 -инвариантности лагранжиана слабых взаимодействий.

Собственная энергия заряженного лептона и W -мезона. Матричные элементы, соответствующие графам собственной энергии электрона (мюона) (рис. 42, диаграмма 3) и собственной энергии бозона (диаграмма 4) со слабыми вершинами, вычисляются аналогично тому, как это было сделано в предыдущем пункте, поэтому мы приведем только результаты. Оператор

собственной энергии электрона (мюона) равен

$$\tilde{\Sigma}_l(p) = -\hat{p} (1 + \gamma_5) \frac{f^2}{8\pi} \cdot \frac{1}{2i} \int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} \frac{d\xi v(\xi)}{[\sin \pi\xi]^2 \Gamma(1+\xi)} (M^2 l_\nu^2)^\xi F(\xi, p), \quad (4.13)$$

где

$$\begin{aligned}F(\xi, p) &= \frac{1}{\Gamma(1-\xi)} \int_0^1 du \left(\frac{u}{1-u} \right)^\xi \left[1 - (1-u) \frac{p^2}{m^2} \right]^\xi \left\{ 2u + \right. \\ &\quad \left. + (u-2u^2+u^3) \frac{p^2}{M^2} + \frac{u-4}{1+\xi} \cdot \left[u - u(1-u) \frac{p^2}{M^2} \right] \right\}.\end{aligned}$$

Функция $F(\xi, p)$ регулярна в полуплоскости $\text{Re } \xi > -2$, кроме точки $\xi = -1$, где $F(\xi, p)$ имеет полюс первого порядка; $1 < \beta < 2$.

Поправка к собственной массе электрона (мюона) имеет вид

$$\begin{aligned}\delta m_a &= -\frac{11}{12} \frac{f^2 m_a}{\pi^2} \frac{C_\nu}{M^2 l_\nu^2} + O(\ln M^2 l_\nu^2) = \\ &= -\frac{11 m_a}{12 \sqrt{2}} \frac{GM^2}{\pi^2} \frac{C_\nu}{M^2 l_\nu^2} + O(\ln M^2 l_\nu^2). \quad (4.14)\end{aligned}$$

Здесь $a = e, \mu$ и $C_\nu = \frac{1}{4} \int_0^\infty du V_\nu(u)$.

Поправка к собственной энергии векторного мезона в слабых взаимодействиях вычисляется аналогичным образом. В этом случае оператор собственной энергии имеет вид

$$\tilde{\Sigma}_{\mu\nu}^W(p) = \tilde{\Sigma}_{\mu\nu}^W(p, m_e) + \tilde{\Sigma}_{\mu\nu}^W(p, m_\mu), \quad (4.15)$$

где

$$\tilde{\Sigma}_{\mu\nu}^W(p, m_a) = \frac{f^2}{16\pi} \cdot \frac{1}{2i} \int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} \frac{d\xi v(\xi) (m_a^2 l^2)^\xi}{(\sin \pi\xi)^2 \Gamma(1+\xi)} F_{\mu\nu}(\xi, p, m_a).$$

Здесь $1 < \beta < 2$ и

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}(\xi, p, m_a) &= \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\xi)} \int_0^1 du u^\xi (1-u)^{-\xi} \left\{ 8g_{\mu\nu} \left[u(1-u)p^2 - \frac{um_a^2 - u(1-u)p^2}{1+\xi} \right] - \right. \\ &\quad \left. - 16u(1-u) p_\mu p_\nu \right\} \left(\frac{m_a^2 - (1-u)p^2}{m_a^2} \right)^\xi.\end{aligned}$$

Функция $F_{\mu\nu}(\xi, p, m_a)$ аналитична в полуплоскости $\text{Re } \xi > -2$, за исключением полюса первого порядка в точке $\xi = -1$.

Поправка к собственной массе W -бозона за счет слабых взаимодействий равна

$$\begin{aligned} \delta M^2 &= \\ &= -2 \frac{f^2}{\pi^2} \frac{C_V}{M^2 l_V^2} M^2 + O(\ln m_e^2 l_V^2) = -\sqrt{2} \frac{G}{\pi^2} \frac{C_V}{M^2 l_V^2} M^4 + O(\ln m_e^2 l_V^2). \end{aligned}$$

§ 5. Градиентная инвариантность S -матрицы в теории слабых взаимодействий

Требование градиентной инвариантности S -матрицы, т. е. инвариантности относительно группы преобразований (1.11), может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{\mu_n}} \left(\frac{\delta^n S}{\delta A_{\mu_1}(x_1) \dots \delta A_{\mu_n}(x_n)} \right) = 0 \quad (5.1)$$

при условии, что все остальные операторы рассматриваемых полей подчиняются уравнениям движения. Для доказательства (5.1) достаточно ограничиться случаем с $n = 1$, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} \right) = 0. \quad (5.2)$$

Прежде всего проведем формальное доказательство, как и в § 5 гл. VIII, основываясь только на представлении

$$S = \exp T \left\{ i \int dx \mathcal{L}_I(x) \right\}. \quad (5.3)$$

Мы будем предполагать, что представление (5.3) обеспечивает построение ряда теории возмущений с причинными функциями (1.20)–(1.24) и S -матрица разлагается в ряд по нормальным произведениям полевых операторов, подчиняющимся свободным уравнениям движения. Мы не будем учитывать введенную нами регуляризацию, но потом покажем, что изложенное доказательство справедливо в рамках наших построений.

Воспользовавшись представлением (5.3), получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \mathcal{A}_\mu(l, x)} &= iT \left\{ \left(\frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_\mu(l, x)} \int dy \mathcal{L}_I(y) \right) S \right\} = \\ &= iT \left\{ [ie(W_\nu(x) G_{\nu\mu}^+(x) - W_\nu^+(x) G_{\nu\mu}(x)) + e(\bar{l}(x) \gamma_\mu l(x)) + \right. \\ &\left. + e^2(W_\mu(x) W_\nu^+(x) + W_\nu(x) W_\mu^+(x) - 2g_{\mu\nu} W_\sigma(x) W_\sigma^+(x)) \mathcal{A}_\nu(l, x)] S \right\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Воспользуемся далее формулами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} T \{ G_{\nu\mu}(x) S \} &= \\ &= T \left\{ \left[M^2 W_\nu(x) - i \frac{\delta}{\delta W_\nu^+(x)} + i \left(g_{\nu\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - g_{\nu\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) \frac{\delta}{\delta G_{\alpha\beta}^+(x)} \right] S \right\}, \\ \frac{\partial}{\partial x_\mu} T \{ G_{\nu\mu}^+(x) S \} &= \\ &= T \left\{ \left[M^2 W_\nu^+(x) - i \frac{\delta}{\delta W_\nu(x)} + i \left(g_{\nu\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - g_{\nu\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) \frac{\delta}{\delta G_{\alpha\beta}(x)} \right] S \right\}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \gamma_\mu T \{ l(x) S \} = T \left\{ [ml(x) + i \frac{\delta}{\delta \bar{l}(x)}] S \right\},$$

$$i \frac{\partial}{\partial x_\mu} T \{ \bar{l}(x) \gamma_\mu S \} = T \left\{ [-m\bar{l}(x) - i \frac{\delta}{\delta l(x)}] S \right\}.$$

Соотношения (5.5) справедливы, если теория возмущений строится, согласно теореме Вика, с хронологическими свертками операторов поля (1.20)–(1.24), а S -матрица зависит от операторов поля, удовлетворяющих свободным уравнениям.

С помощью этих формул получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\delta S}{\delta \mathcal{A}_\mu(l, x)} &= T \left\{ \left[-e(\partial_\mu W_\nu(x) G_{\nu\mu}^+(x) - \partial_\mu W_\nu^+(x) G_{\mu\nu}(x)) - \right. \right. \\ &\left. - eW_\mu(x) \left(M^2 W_\mu^+(x) - i \frac{\delta}{\delta W_\mu^+(x)} + i [g_{\mu\beta} \partial_\alpha - g_{\mu\alpha} \partial_\beta] \frac{\delta}{\delta G_{\alpha\beta}^+(x)} \right) + \right. \\ &\left. + eW_\mu^+(x) \left(M^2 W_\mu(x) - i \frac{\delta}{\delta W_\mu(x)} + i [g_{\mu\beta} \partial_\alpha - g_{\mu\alpha} \partial_\beta] \frac{\delta}{\delta G_{\alpha\beta}(x)} \right) + \right. \\ &\left. + ie^2 \partial_\mu [W_\rho(x) W_\mu^+(x) \mathcal{A}_\rho(l, x) + W_\rho^+(x) W_\mu(x) \mathcal{A}_\rho(l, x) - \right. \\ &\left. - 2W_\rho(x) W_\rho^+(x) \mathcal{A}_\mu(l, x)] + \right. \\ &\left. + ie \left(m\bar{l}(x) l(x) + i\bar{l}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{l}(x)} - m\bar{l}(x) l(x) - il(x) \frac{\delta}{\delta l(x)} \right) \right] S \right\}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

После несложных преобразований имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\delta S}{\delta \mathcal{A}_\mu(l, x)} &= T \left\{ \left[-ie^2 (W_\rho(x) G_{\rho\nu}^+(x) + W_\rho^+(x) G_{\rho\nu}(x)) \mathcal{A}_\nu(l, x) + \right. \right. \\ &\left. + ie^2 W_\rho(x) (\partial_\nu W_\nu^+(x) - \partial_\nu W_\rho^+(x)) \mathcal{A}_\nu(l, x) + \right. \\ &\left. + ie^2 W_\rho^+(x) (\partial_\rho W_\nu(x) - \partial_\nu W_\rho(x)) \mathcal{A}_\nu(l, x) \right] S \right\}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Поскольку $G_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$, то соотношение (5.2) выполнено. Итак S -матрица градиентно-инвариантна в рамках проведенного формального рассмотрения.

Покажем теперь, что проведенные формальные преобразования справедливы в рамках нашей процедуры регуляризации. Ряд теории возмущений для S -матрицы представляет собой набор диаграмм Фейнмана типа диаграммы, представленной на

рис. 39. Оператор электромагнитного поля $A_\mu(x)$ всегда связан с линией, описывающей заряженные частицы. Возможны два случая: или эта линия не замкнута, или эта линия образует замкнутый цикл. Доказательство градиентной инвариантности математически сводится к изучению действия на S -матрицу оператора $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}$ или $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\delta}{\delta A_\mu(l, x)}$. Поскольку в этот оператор входит только первая вариационная производная по электромагнитному полю $A_\mu(x)$, можно рассматривать преобразования типа проведенных выше для каждой незамкнутой линии и каждого замкнутого цикла совершенно независимо.

Так как массы частиц и их заряды e и f , а также число d являются инвариантами при градиентном преобразовании, а преобразования в (5.6), (5.7) затрагивают только операторы и пропагаторы заряженных полей, проведенные выкладки справедливы независимо для каждой отдельной незамкнутой линии и для каждого отдельного цикла, входящего в некоторую произвольную диаграмму Фейнмана.

Поэтому S -матрица градиентно-инвариантна в каждом порядке теории возмущений в рамках сформулированных правил регуляризации.

В заключение остановимся теперь на тех следствиях, к которым приводит выбор регуляризации (2.7) и (2.9) в высших порядках теории возмущений. Будем рассматривать заряженные циклы с произвольным числом внешних нейтринных и фотонных линий. Условие градиентной инвариантности приводит к тому, что наличие одной внешней фотонной линии уменьшает расходимость всего матричного элемента, являющегося суммой всевозможных диаграмм Фейнмана, на единицу. Поэтому матричный элемент с достаточно большим числом внешних фотонных линий будет сходиться. С точки зрения нашей регуляризации это означает, что числа a_m , соответствующие главным расходимостям диаграмм Фейнмана, будут отсутствовать в матричных элементах с достаточно большим числом внешних фотонных линий. Следовательно, число матричных элементов, реально зависящих от чисел a_m , конечно. Таким образом, введение нелокальности только в пропагаторы нейтральных частиц приводит к перенормируемости теории с обычной точки зрения.

§ 6. Четырехфермионные слабые взаимодействия

В этом параграфе мы построим градиентно-инвариантную нелокальную теорию слабых взаимодействий на основе следующего физического постулата: *нелокальность входит в теорию только через нейтральные поля нейтрино, а поля заряженных лептонов и электромагнитное поле остаются локальными*. Введение в теорию такого избирательного постулата нелокальности, связывающего появление нелокальности с нейтральным по-

лем нейтрино, математически означает возможность выбора знакопеременного формфактора в пропагаторе нейтрино. Формфактор выбирается таким образом, чтобы пропагатор нейтрино в евклидовой метрике удовлетворял следующему условию:

$$S_\nu(x_E) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int dk_E \frac{\hat{k}_E V(k_E^2, l_\nu^2)}{k_E^2} e^{-ik_E x_E} = \hat{x}_E O((x_E^2)^\gamma) \quad (6.1)$$

при $x_E^2 \rightarrow 0$, где $\gamma \geq 2$ — некоторое положительное число.

Хотя это не устраняет всех ультрафиолетовых расходимостей из ряда теории возмущений, однако теория становится перенормируемой с обычной точки зрения. Оказывается, что расходится только конечное число типов неприводимых диаграмм Фейнмана, состоящих из замкнутых циклов, образованных пропагаторами заряженных лептонов. При устранении расходимостей методами локальной квантовой теории поля необходимо ввести несколько контрчленов, описывающих чистое нейтрин-нейтринное взаимодействие. В рамках используемой нами циклической регуляризации с дополнительными условиями никаких контрчленов вводить не надо, однако структурные элементы матрицы рассеяния при параметрах регуляризации a_0 , a_2 и a_4 в (2.9) имеют вид локальных лагранжианов нейтрин-нейтринных взаимодействий.

Таким образом, полный лагранжиан, описывающий электромагнитное и слабое взаимодействия лептонов, будет содержать дополнительные члены, описывающие чисто $\nu\nu$ -взаимодействия с новыми константами связи, о величине которых в рамках предлагаемой схемы сказать ничего нельзя.

В дальнейшем, в отличие от (1.17), будет более удобным использовать несколько иную запись лагранжиана слабого взаимодействия. Воспользовавшись тождествами Фирца, получим

$$\mathcal{L}_w^{(1)}(x) = \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{l}(x) O_\alpha J_\alpha(x) l(x)). \quad (6.2)$$

Здесь $J_\alpha(x)$ является 2×2 -матрицей:

$$J_\alpha(x) = \begin{pmatrix} J_\alpha^{(11)}(x) & J_\alpha^{(12)}(x) \\ J_\alpha^{(21)}(x) & J_\alpha^{(22)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{1\alpha}(x) & J_{3\alpha}(x) \\ J_{3\alpha}^+(x) & J_{2\alpha}(x) \end{pmatrix} = R_\alpha(x) + (B_\alpha(x) \tau), \quad (6.3)$$

$$J_{1\alpha}(x) = (\bar{N}_e(x) O_\alpha N_e(x)), \quad J_{2\alpha}(x) = (\bar{N}_\mu O_\alpha N_\mu), \quad J_{3\alpha}(x) = (\bar{N}_\mu O_\alpha N_e), \quad (6.4)$$

$$R_\alpha(x) = \frac{1}{2} (\bar{N} O_\alpha N) = \frac{1}{2} (J_{1\alpha} + J_{2\alpha}),$$

$$B_\alpha(x) = \frac{1}{2} (\bar{N} O_\alpha \tau N) = \left(\frac{1}{2} [J_{3\alpha} + J_{3\alpha}^+], \frac{1}{2i} [J_{3\alpha} - J_{3\alpha}^+], \frac{1}{2} [J_{1\alpha} - J_{2\alpha}] \right); \quad (6.5)$$

τ — матрицы Паули.

Достоинство представления (6.2) состоит в том, что оно отражает инвариантность слабого взаимодействия относительно замен $e \leftrightarrow \mu$ и $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$, т. е. универсальность слабого взаимодействия лептонов, и позволяет учесть единым образом все многообразие расходящихся диаграмм в ряду теории возмущений.

Приступим к классификации диаграмм Фейнмана. В ряду теории возмущений будут присутствовать три типа диаграмм: диаграммы с чисто слабыми вершинами, со слабыми и электромагнитными и чисто электромагнитными. Последние диаграммы здесь рассматривать не будем, поскольку они представляют уже рассмотренную нами перенормируемую электродинамику. Проведем классификацию всех диаграмм с точки зрения их сходимости. Предположим, что переход к евклидовой метрике осуществлен и о сходимости некоторой диаграммы D можно судить по так называемому индексу диаграммы $\omega(D)$. Имеем, согласно определению Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова (1973),

$$\omega(D) = \sum_i \omega_i + 4 - \sum_{\text{вн}} (r_{\text{вн}} + 2). \quad (6.6)$$

В первом члене суммирование проводится по всем вершинам рассматриваемой диаграммы D , в последнем члене — по всем внешним линиям этой диаграммы.

Величина ω_i называется индексом суммирования i -й вершины и определяется равенством

$$\omega_i = \frac{1}{2} \sum_j (r_j + 2) - 4, \quad (6.7)$$

причем суммирование проводится по всем линиям, входящим в i -ю вершину. Величина r_j связана со степенью роста пропагатора данной частицы при $p^2 \rightarrow -\infty$ и определяется из равенства

$$(-p^2)^{\frac{r+2}{2}} G(p^2) = O(1) \quad \text{при} \quad p^2 \rightarrow -\infty,$$

где $G(p^2)$ — некоторый пропагатор.

В исследуемом нами случае имеются три типа пропагаторов: пропагаторы заряженных лептонов (e и μ), пропагаторы нейтрино (ν_e и ν_μ) и пропагатор фотонного поля \mathcal{A}_μ . Величины r_j для этих пропагаторов равны соответственно

$$\begin{aligned} r_e = r_\mu &= 1, \\ r_\nu &= -\sigma \quad (\sigma > 5), \\ r_A &= -a \quad (a > 1). \end{aligned} \quad (6.8)$$

В рассматриваемой теории присутствуют два типа вершин, соответствующих электромагнитному и слабому взаимодей-

ствиям. Графически они представлены на рис. 43. Индексы вершин легко подсчитать:

$$\omega_A = -a/2, \quad \omega_w = 1 - \sigma. \quad (6.9)$$

Простой анализ показывает, что все примитивные диаграммы, по крайней мере, с одной внутренней фотонной или нейтринной линией сходятся. Все расходящиеся примитивные диаграммы приведены на рис. 44. Все остальные примитивные и неприводимые диаграммы сходятся. Следует заметить, что в рассматриваемой теории интегралы, соответствующие любой неприводимой диаграмме D , сходятся, если индекс этой диаграммы $\omega(D)$ меньше нуля. Это является следствием условий (1.30) и (6.1).

Таким образом, имеется конечное число типов расходящихся диаграмм. Следовательно, рассматриваемая теория перенормируема с обычной точки зрения.

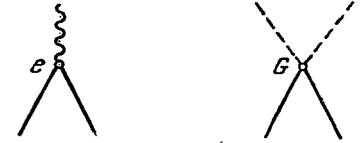


Рис. 43. Вершины в случае электромагнитного и четырехфермионного слабого взаимодействия

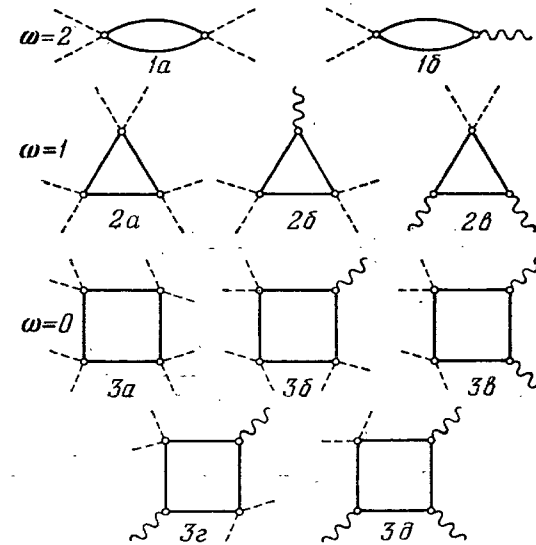


Рис. 44. Расходящиеся примитивные диаграммы.

Рассмотрим последовательно все диаграммы, приведенные на рис. 44, которые вычислим с помощью описанной выше градиентно-инвариантной регуляризации. Квадратично расходящаяся диаграмма $1a$ на рис. 44 на самом деле состоит из трех

диаграмм, показанных на рис. 45. С помощью представления лагранжиана взаимодействия в форме (6.2) возможно учесть

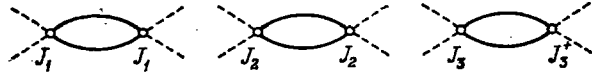


Рис. 45. Диаграммы второго порядка, описывающие $\nu\nu$ -взаимодействие.

их единым образом. Элемент S -матрицы, соответствующий диаграмме $1a$, записывается в виде

$$\text{reg } D_{(1a)} = -i \left(\frac{G}{\sqrt{2}} \right)^2 \iint dx_1 dx_2 J_\alpha^{(i)}(x_1) J_\beta^{(j)}(x_2) \times \\ \times \text{reg Sp } [O_\alpha S_{(j)}(x_1 - x_2) O_\beta S_{(i)}(x_2 - x_1)]. \quad (6.10)$$

Определим функцию

$$\text{reg } \Pi_{\alpha\beta}^{(ij)}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk e^{ik(x-y)} \text{reg } \tilde{\Pi}_{\alpha\beta}^{(ij)}(k), \quad (6.11)$$

где

$$\text{reg } \tilde{\Pi}_{\alpha\beta}^{(ij)}(k) = -i \int dx e^{-ikx} \text{reg Sp } [O_\alpha S_{(j)}(x) O_\beta S_{(i)}(-x)].$$

Последний интеграл соответствует петле с двумя различными массами m_i и m_j . Вычисление дает

$$\tilde{\Pi}_{\alpha\beta}^{(ij)}(k) = \tilde{\Pi}_{1\alpha\beta}^{(ij)}(k) + \tilde{\Pi}_{r\alpha\beta}^{(ij)}(k), \quad (6.12)$$

где

$$\tilde{\Pi}_{1\alpha\beta}^{(ij)}(k) = -\frac{g_{\alpha\beta}}{4\pi^2} (m_i^2 + m_j^2) a_2 - \frac{1}{6\pi^2} (k_\alpha k_\beta - g_{\alpha\beta} k^2) a_0, \quad (6.13)$$

$$\tilde{\Pi}_{r\alpha\beta}^{(ij)}(k) =$$

$$= \frac{g_{\alpha\beta}}{2\pi^2} \left\{ \frac{k^2}{6} + \int_0^1 du [um_i^2 + (1-u)m_j^2] \ln \frac{um_i^2 + (1-u)m_j^2}{um_i^2 + (1-u)m_j^2 - u(1-u)k^2} \right\} + \\ + \frac{1}{\pi^2} (k_\alpha k_\beta - g_{\alpha\beta} k^2) \int_0^1 du u(1-u) \ln \frac{um_i^2 + (1-u)m_j^2}{um_i^2 + (1-u)m_j^2 - u(1-u)k^2}. \quad (6.14)$$

В x -представлении для $\Pi_{1\alpha\beta}^{(ij)}(x)$ получаем

$$\Pi_{1\alpha\beta}^{(ij)}(x) = -\frac{g_{\alpha\beta}}{4\pi^2} (m_i^2 + m_j^2) a_2 \delta(x) - \frac{a_0}{6\pi^2} (\partial_\alpha \partial_\beta - g_{\alpha\beta} \square) \delta(x). \quad (6.15)$$

Подставив это выражение в (6.10), легко заметить, что постоянные a_2 и a_0 индуцируют контактное нейтрин-нейтринное четы-

рехфермионное взаимодействие с новыми константами связи

$$h_1 = -\frac{G^2 a_2}{8\pi^2}, \quad h_2 = -\frac{G^2 a_0}{6\pi^2}. \quad (6.16)$$

Это означает, что в лагранжиане взаимодействий возникают дополнительные члены вида

$$\mathcal{L}_w^1(x) = J_\alpha^{(i)}(x) [h_1 g_{\alpha\beta} (m_i^2 + m_j^2) + h_2 (\partial_\alpha \partial_\beta - g_{\alpha\beta} \square)] J_\beta^{(j)}(x) = \\ = h_1 \text{Sp } \{M J_\alpha(x) J_\alpha(x)\} + h_2 \text{Sp } \{J_\alpha(x) (\partial_\alpha \partial_\beta - g_{\alpha\beta} \square) J_\beta(x)\}, \quad (6.17)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} m_e^2 & 0 \\ 0 & m_\mu^2 \end{pmatrix}.$$

Если перейти к обычным обозначениям, получим

$$\mathcal{L}_w^1(x) = h_1 \{m_e^2 J_{1\alpha} J_{1\alpha} + m_\mu^2 J_{2\alpha} J_{2\alpha} + (m_e^2 + m_\mu^2) J_{3\alpha} J_{3\alpha}^+\} + \\ + h_2 \{J_{1\alpha} (\partial_\alpha \partial_\beta - g_{\alpha\beta} \square) J_{1\beta} + J_{2\alpha} (\partial_\alpha \partial_\beta - g_{\alpha\beta} \square) J_{2\beta} + \\ + 2J_{3\alpha} (\partial_\alpha \partial_\beta - g_{\alpha\beta} \square) J_{3\beta}^+\}. \quad (6.17a)$$

Таким образом, в лагранжиане взаимодействия появляются дополнительные члены, описывающие чисто нейтрин-нейтринное взаимодействие. О величине новых констант взаимодействия h_1 и h_2 в рамках нашей процедуры ничего сказать нельзя.

Появление в теории чисто $\nu\nu$ -взаимодействия не вносит в высшие порядки теории возмущений новых расходимостей, поскольку пропагатор нейтринно быстро убывает, так что сходятся любые замкнутые петли, образованные пропагаторами нейтринно.

Рассмотрим теперь диаграмму $1b$ на рис. 44. Таких диаграмм две, так как в промежуточном состоянии может быть или электрон или μ -мезон. Элемент S -матрицы, соответствующий этим диаграммам, записывается в виде

$$\text{reg } D_{(1b)} = -ie \frac{G}{\sqrt{2}} \iint dx_1 dx_2 J_\alpha^{(i)}(x_1) A_\beta(x_2) \times \\ \times \text{reg Sp } \{O_\alpha S_{(j)}(x_1 - x_2) \gamma_\beta S_{(i)}(x_2 - x_1)\}. \quad (6.18)$$

Определим функцию

$$\text{reg } P_{(j)\alpha\beta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk e^{ikx} \text{reg } \tilde{P}_{(j)\alpha\beta}(k), \quad (6.19)$$

где

$$\text{reg } \tilde{P}_{(j)\alpha\beta}(k) = -i \int dx e^{-ikx} \text{reg Sp } \{O_\alpha S_{(j)}(x) \gamma_\beta S_{(j)}(-x)\}.$$

Вычисление дает

$$\tilde{P}_{(j)\alpha\beta}(k) = (k_\alpha k_\beta - g_{\alpha\beta} k^2) \left[\frac{a_0}{6\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 du u(1-u) \ln \frac{m_j^2 - u(1-u)k^2}{m_j^2} \right]. \quad (6.20)$$

Легко видеть, что $\hat{P}_{(j)\alpha\beta}(k)$ удовлетворяет условию градиентной инвариантности: $k_\alpha \hat{P}_{(j)\alpha\beta}(k) = 0$. Член с a_0 в (6.20) также означает, что в лагранжиане взаимодействия появляется дополнительный член вида

$$\mathcal{L}_w^{II}(x) = g \text{Sp} \{J_\alpha(x)\} (\partial_\alpha \partial_\beta - g_{\alpha\beta} \square) A_\beta(x) = \\ = g (J_{1\alpha}(x) + J_{2\alpha}(x)) (\partial_\alpha \partial_\beta - g_{\alpha\beta} \square) A_\beta(x), \quad (6.21)$$

где $g = \frac{eG}{\sqrt{2}} \frac{a_0}{6\pi^2}$ — новая константа связи, которая, согласно (6.16), связана с h_2 соотношением $g \frac{G}{\sqrt{2}} = eh_2$.

Так как второй порядок теории возмущений разобран нами достаточно подробно, высшие порядки мы рассмотрим лишь вкратце.

В третьем порядке теории возмущений по лагранжиану взаимодействия имеются диаграммы с замкнутыми спинорными циклами (диаграммы $2a-2\theta$ на рис. 44). У всех этих диаграмм имеется, по крайней мере, одна слабая вершина. Оказывается, что только диаграммы $2a$ содержат член с a_0 , так как в диаграммах 2θ и 2θ благодаря градиентной инвариантности член с a_0 выпадает. Член с a_0 также индуцирует в лагранжиане взаимодействия дополнительное слагаемое вида

$$\mathcal{L}_w^{III}(x) = ih_3 \text{Sp} \{J_\alpha(x) J_\beta(x) R_{\alpha\beta}(x)\}, \quad (6.22)$$

где $R_{\alpha\beta}(x) = \partial_\alpha J_\beta(x) - \partial_\beta J_\alpha(x)$, $h_3 = -\frac{G}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a_0}{\pi^2}$. Переходя к обычным обозначениям, получим

$$\mathcal{L}_w^{III}(x) = ih_3 \{J_{3\alpha}^+ [J_{1\beta} - J_{2\beta}] R_{\alpha\beta}^{(3)} + \\ + [J_{1\alpha} - J_{2\alpha}] J_{3\beta} R_{\alpha\beta}^{(3)+} + J_{3\alpha} J_{3\beta}^+ [R_{\alpha\beta}^{(1)} - R_{\alpha\beta}^{(2)}]\}. \quad (6.22a)$$

Этот член описывает контактное шестифермионное нейтрин-нейтринное взаимодействие. Как говорилось выше, это взаимодействие не приводит к возникновению расходимостей благодаря быстрому убыванию пропагатора нейтрино.

Из неприводимых диаграмм четвертого порядка теории возмущений, приведенных на рис. 44, параметр a_0 содержат только диаграммы типа $3a$. Диаграммы $3\theta-3\theta$ не содержат этого параметра, поскольку он соответствует логарифмической расходимости, а в силу градиентной инвариантности все эти диаграммы сходятся. Вычисления, которые мы здесь опускаем, приводят к следующему восьмифермионному лагранжиану нейтрин-нейтринного взаимодействия:

$$\mathcal{L}_w^{IV}(x) = \frac{h_4}{2} \text{Sp} [J_\alpha(x) J_\beta(x) J_\alpha(x) J_\beta(x) - J_\alpha(x) J_\alpha(x) J_\beta(x) J_\beta(x)], \quad (6.23)$$

где $h_4 = -\frac{4G^4}{\pi^2} a_0$. Переходя к обычным обозначениям, получим окончательно

$$\mathcal{L}_w^{IV}(x) = h_4 \{ (J_{1\alpha} J_{3\alpha}) (J_{3\beta}^+ J_{1\beta}) + (J_{2\alpha} J_{3\alpha}) (J_{3\beta}^+ J_{2\beta}) + (J_{3\alpha} J_{3\alpha}) (J_{3\beta}^+ J_{3\beta}) + \\ + 2 (J_{1\alpha} J_{2\alpha}) (J_{3\beta} J_{3\beta}^+) - (J_{1\alpha} J_{1\alpha}) (J_{3\beta} J_{3\beta}^+) - (J_{2\alpha} J_{2\alpha}) (J_{3\beta} J_{3\beta}^+) - \\ - (J_{3\alpha} J_{3\alpha}^+) (J_{3\beta} J_{3\beta}^+) - (J_{1\alpha} J_{3\alpha}) (J_{2\beta} J_{3\beta}^+) - (J_{1\alpha} J_{3\alpha}^+) (J_{2\beta} J_{3\beta}) \}. \quad (6.24)$$

Так как нейтрино подчиняются статистике Ферми, второе, пятое и шестое слагаемые в (6.24) равны нулю. Выписанный контрчлен описывает контактное восьмифермионное $\nu\nu$ -взаимодействие. Еще раз отметим, что это взаимодействие не может привести дополнительные расходимости в высшие порядки теории возмущений. Выпишем полный лагранжиан взаимодействующих полей (обозначения введены выше)

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_I(x),$$

где

$$\mathcal{L}_I(x) = e (\bar{l}(x) \hat{\mathcal{A}}(l, x) l(x)) + \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{l}(x) O_\alpha J_\alpha(x) l(x)) + \\ + h_1 \text{Sp} \{M J_\alpha(x) J_\alpha(x)\} + h_2 \text{Sp} \{J_\alpha(x) (\partial_\alpha \partial_\beta - g_{\alpha\beta} \square) J_\beta(x)\} + \\ + ih_3 \text{Sp} \{J_\alpha(x) J_\beta(x) R_{\alpha\beta}(x)\} + \frac{h_4}{2} \text{Sp} \{J_\alpha(x) [J_\beta(x), J_\alpha(x)]_- J_\beta(x)\} + \\ + g \text{Sp} \{J_\alpha(x)\} (\partial_\alpha \partial_\beta - g_{\alpha\beta} \square) \mathcal{A}_\beta(l, x). \quad (6.25)$$

Итак, нами показано, что введенная регуляризационная процедура индуцирует появление дополнительных членов в лагранжиане взаимодействия, описывающих чистое $\nu\nu$ -взаимодействие, о существовании и величине которого мы в настоящее время ничего не знаем. Существующие экспериментальные данные не противоречат существованию таких взаимодействий с довольно большими константами связи.

Если принять в нелокальной спинорной электродинамике требование, что, по крайней мере, во втором порядке теории возмущений перенормировка заряда e отсутствует, то из него следует, что $a_0 = 0$. Очевидно, что тогда во всех диаграммах, показанных на рис. 44, кроме единственной диаграммы $1a$, члены с параметром a_0 будут отсутствовать и контактные нейтрин-нейтринные шести- и восьмифермионные взаимодействия не возникнут в теории. Итак, в предположении $a_0 = 0$ лагранжиан электромагнитного и слабого взаимодействия запишется в виде

$$\mathcal{L}_I(x) = e (\bar{l}(x) \hat{\mathcal{A}}(l, x) l(x)) + \\ + \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{l}(x) O_\alpha J_\alpha(x) l(x)) + h \text{Sp} (M J_\alpha(x) J_\alpha(x)). \quad (6.26)$$

Этот лагранжиан все же содержит слагаемое, описывающее чистое четырехфермионное нейтрин-нейтринное взаимодействие. Следует отметить, что новое $\nu\nu$ -взаимодействие в (6.26) из-за присутствия матрицы

$$M = \begin{pmatrix} m_e^2 & 0 \\ 0 & m_\mu^2 \end{pmatrix}$$

инвариантно относительно замены $\nu_e \rightleftharpoons \nu_\mu$. Фактически это приводит к различию взаимодействия электрона и μ -мезона. Естественно поставить обратную задачу, а не является ли появление этого взаимодействия причиной различия в массах электрона и μ -мезона? На этот и другие вопросы о физических следствиях рассматриваемой теории мы попытаемся ответить в следующих параграфах.

§ 7. Некоторые эффекты в нелокальной модели электромагнитных и слабых взаимодействий лептонов

В предыдущих параграфах этой главы мы рассмотрели нелокальную модель электромагнитных и слабых взаимодействий. Введение нелокальности позволило получить S -матрицу, удовлетворяющую всем основным аксиомам квантовой теории поля. Возникает вопрос: какие следствия можно получить, используя построенную модель при анализе экспериментальных данных? Для ответа на поставленный вопрос необходимо изучить тот произвол, который содержится в рассматриваемой модели. Напомним, что произвол модели сводится к выбору формфакторов $K_j(z)$ ($j = A, \nu$) и констант контактных взаимодействий нейтральных частиц h_i .

Произвол в выборе формфакторов в общих чертах был рассмотрен нами в предыдущих главах. Было показано, что введение этих функций в теорию приводит в статическом пределе к изменению электрического, а в случае слабых взаимодействий — «слабого» потенциалов на расстояниях порядка элементарных длин l_A и l_ν . Это соответствует наличию некоторых пространственных распределений зарядов, зависящих от конкретного выбора формфакторов. Следовательно, функции $K_j(z)$ можно интерпретировать как некие затравочные формфакторы голых частиц нединамического происхождения. При изучении физических процессов ниже унитарного предела нет необходимости знать функции $K_j(z)$ полностью. Любая наблюдаемая величина, зависящая от $K_j(z)$, в рассматриваемой модели представляется в виде разложения типа

$$Q = \sum_{n=-n_0}^{\infty} v(n) [f(LE)]^n \left\{ b_n \left[\ln f(LE) + \frac{v'(n)}{v(n)} \right] + d_n \right\}.$$

Здесь b_n, d_n — известные числовые коэффициенты, $f(LE)$ — известная квадратичная форма импульсных переменных и масс, числа $v(n)$ зависят от формы используемых в модели формфакторов.

Предполагая величину элементарной длины для слабых взаимодействий порядка 10^{-16} см, можно установить, что унитарный предел в рассматриваемой модели достигается при энергиях 100—200 Гэв в зависимости от выбора формфактора.

Как можно видеть, при изучении процессов при энергиях порядка ~ 10 Гэв в разложении Q можно ограничиться лишь первыми членами. Это означает, что величина Q зависит от конечного числа параметров $l, v(-n_0), \dots, v(0) = 1$. Число n_0 , с которого начинается разложение, известным образом связано с порядком теории возмущений и может быть легко установлено на основе подсчета индекса расходимости каждого конкретного графа Фейнмана, дающего вклад в Q . Так, например, при расчетах с точностью до второго порядка по электромагнитному и слабому взаимодействиям все наблюдаемые зависят лишь от параметров $v(-1), v(0)$ и l , причем из условия нормировки формфактора следует, что $v(0) = 1$.

Таким образом, произвол, связанный с выбором формфакторов в расчетах процессов при энергиях ниже унитарного предела, сводится к определению конечного числа констант, единых для всех процессов, что позволяет оценить эти константы из анализа известных экспериментов по электромагнитным и слабым процессам. Такие оценки были получены из анализа экспериментальных данных по измерению аномальных магнитных моментов лептонов и лэмбовского сдвига уровней водородоподобных атомов, а также из анализа экспериментальных данных по $\nu_\mu e$ - и $\bar{\nu}_\mu e$ -рассеянию.

Г. В. Ефимов, В. Г. Малышкин, О. А. Могилевский, Х. Намсрай и А. Ю. Юматов (1973) рассчитали вклад диаграмм

низшего порядка по теории возмущений ($\sim eG^2$ и e^3), показанных на рис. 46, в аномальный магнитный момент лептонов. Они же рассчитали вклад диаграмм, показанных на рис. 47, в лэмбовский сдвиг уровней водородоподобных атомов.

К. Зибольд и В. Г. Малышкин (1974) вычислили сечение $\nu_\mu e$ - и $\bar{\nu}_\mu e$ -рассеяния при учете диаграмм Фейнмана, изображенных на рис. 48. Они получили следующее ограничение на сечение рассеяния:

$$\sigma(\bar{\nu}_\mu e) \leq 0,25 \cdot 10^{-41} E_\nu \text{ см}^2/\text{электрон},$$

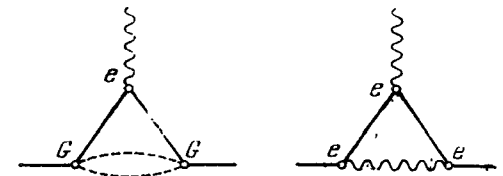


Рис. 46. Диаграммы порядка eG^2 и e^3 , дающие вклад в аномальный магнитный момент электрона и μ -мезона.

которое не противоречит экспериментальному значению

$$\sigma(\bar{\nu}_\mu e) \leq 0,88 \cdot 10^{-41} E_\nu \text{ см}^2/\text{электрон}.$$

Приведем для иллюстрации границы сечения этого процесса в модели Вайнберга — Салама:

$$0,11 \cdot 10^{-41} E_\nu \text{ см}^2/\text{электрон} \leq \sigma(\bar{\nu}_\mu e) \leq 0,17 \cdot 10^{-41} E_\nu \text{ см}^2/\text{электрон}.$$

Из сравнения результатов вычислений с экспериментальными данными были получены ограничения на параметры,

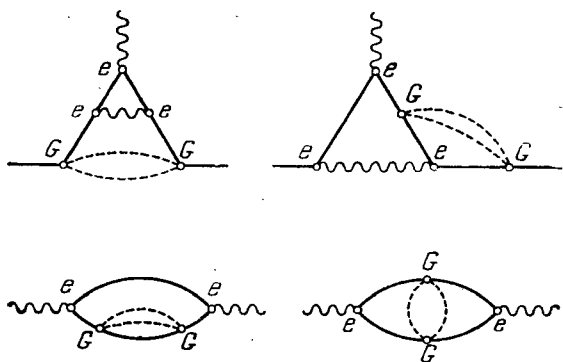


Рис 47. Диаграммы, дающие вклад в лэмбовский сдвиг.

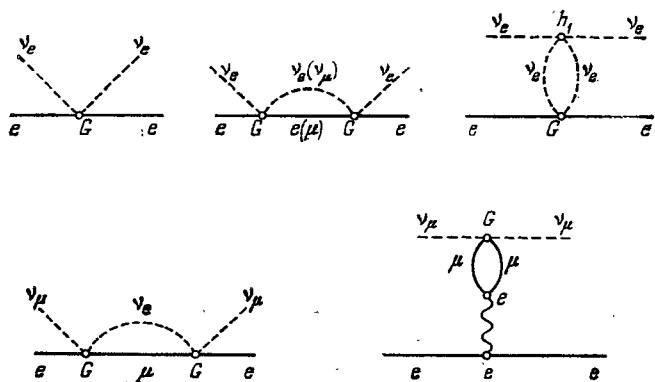


Рис 48. Диаграммы Фейнмана, дающие вклад в $\bar{\nu}_e e$ - и $\nu_\mu e$ -рассеяния.

связанные с формфакторами. Результаты этих вычислений приведены в табл. 4, где введено обозначение $l_{\nu\text{эфф}} = \frac{l_\nu}{\sqrt{\sigma(-1)}}$.

Следует заметить, что в силу неперенормируемости лагранжиана слабых взаимодействий ограничения на величину параметра l_ν получаются снизу, а не сверху, как это было в

Таблица 4

Процесс	Оценка на $l_{\nu\text{эфф}}$
Аномальный магнитный момент лептонов (e, μ)	$\geq 10^{-19}$ см для электрона $\geq 10^{-17}$ см для μ -мезона
Лэмбовский сдвиг	$\geq 10^{-16}$ см
$\nu_\mu e, \bar{\nu}_e e$ -процессы	$\geq 8,2 \cdot 10^{-17}$ см

случае спинорной электродинамики, которая является перенормируемой.

Перейдем к обсуждению произвола, связанного с константами контактных взаимодействий g, h_1, h_2, h_3 и h_4 в (6.25), которые, в свою очередь, связаны с параметрами регуляризации a_0 и a_2 .

Как говорилось выше, постоянные a_0 и a_2 появляются при рассмотрении взаимодействия нейтральных частиц (фотонов с нейтрино и нейтрино с нейтрино). В табл. 5 приведены все

Таблица 5

M_{N_A, N_ν}	Число фотонных линий N_A			
	0	1	2	4
Число внешних нейтринных линий N_ν	0		a_0 $a_2, a_0(W)$	$a_0(W)$
	2	a_2, a_0	a_0	$a_0(W)$
	4	a_2, a_0	$a_0(W)$	$a_0(W)$
	6	a_0		
	8	a_0		

графы, условно обозначающие матричные элементы, зависящие в низших порядках от a_0 и a_2 . Графы, отличные по структуре внешних линий от представленных в таблице, могут зависеть от этих констант только в высших порядках теории возмущений. Зависимость матричных элементов от a_0 и a_2 определяется используемой моделью слабых взаимодействий: 4-фермионной или с промежуточным W -мезоном. В табл. 5 графы, зависящие от a_0 и a_2 только в модели с W -мезоном, помечены индексом (W). Далее матричные элементы будем обозначать через M_{N_A, N_ν} , где N_A и N_ν — число фотонных и нейтринных внешних линий соответственно.

Таким образом, одни и те же постоянные a_0 и a_2 определяют электромагнитные процессы, слабые и слабые плюс электромагнитные. Это означает, что между вероятностями таких процессов существуют вполне определенные соотношения, которые могут быть проверены на опыте.

Константа a_2 и $\nu\nu$ -взаимодействие. Постоянная a_2 входит, как видно из табл. 5, только в матричные элементы M_{02} , M_{04} и M_{20} . Эта постоянная связана с главной расходимостью указанных матричных элементов, и поэтому в случае M_{02} она входит в перенормировку волновой функции нейтрино $Z_{2\nu}$ (поправка к массе нейтрино тождественно равна нулю в силу γ_5 -инвариантности теории), а в случае M_{20} — в перенормировку заряда электрона.

Единственным физическим эффектом, который определяется константой a_2 , является $\nu\nu$ -взаимодействие. На рис. 49 приведены диаграммы низшего порядка теории возмущений,

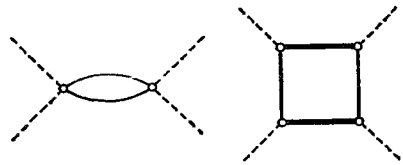


Рис. 49. Диаграммы $\nu\nu$ -рассеяния.

определяющие $\nu\nu$ -рассеяние для двух моделей слабого взаимодействия. С использованием техники, описанной выше, легко вычислить матричные элементы M_{04} , соответствующие диаграммам Фейнмана, представленным на рис. 49

(для первой диаграммы такое вычисление проделано во второй главе). Части матричных элементов M_{04} , зависящее от a_2 , как мы видели ранее, описывают контактное $\nu\nu$ -взаимодействие, которое можно записать в виде добавочных слагаемых к исходному лагранжиану: в случае 4-фермионного взаимодействия

$$\mathcal{L}_{(a)}(x) = h_1 m_e m_\mu \left\{ \frac{m_e}{m_\mu} J_{1\alpha}(x) J_{1\alpha}(x) + \frac{m_\mu}{m_e} J_{2\alpha}(x) J_{2\alpha}(x) + \left(\frac{m_e}{m_\mu} + \frac{m_\mu}{m_e} \right) J_{3\alpha}(x) J_{3\alpha}(x) \right\}; \quad (7.1)$$

в случае взаимодействия с W -бозоном

$$\mathcal{L}_{(b)}(x) = \frac{3}{2} h_1 M^2 \left\{ \left(1 - \frac{m_e^2}{3M^2} \right) J_{1\alpha}(x) J_{1\alpha}(x) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{3M^2} \right) J_{2\alpha}(x) J_{2\alpha}(x) + 2 \left(1 - \frac{m_e^2 + m_\mu^2}{6M^2} \right) J_{3\alpha}(x) J_{3\alpha}(x) \right\}. \quad (7.2)$$

Что существенного следует из формул (7.1) и (7.2)? Оба лагранжиана неинвариантны относительно преобразования $\nu_e \rightleftharpoons \nu_\mu$. Таким образом, универсальность слабых взаимодействий нарушается в $\nu\nu$ -взаимодействиях. Если обозначить константы, характеризующие $\nu_e \nu_e$ -, $\nu_\mu \nu_\mu$ - и $\nu_e \nu_\mu$ -взаимодействия, через $G_{\nu_e \nu_e}$, $G_{\nu_\mu \nu_\mu}$ и $G_{\nu_e \nu_\mu}$ соответственно, то в случае (7.1) отношение $G_{\nu_e \nu_e} : G_{\nu_\mu \nu_\mu}$ равно

$$\frac{G_{\nu_e \nu_e}}{G_{\nu_\mu \nu_\mu}} = \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right)^2 \approx 10^{-4}, \quad (7.3)$$

а в случае (7.2)

$$\frac{G_{\nu_e \nu_e}}{G_{\nu_\mu \nu_\mu}} = \frac{1 - \frac{m_e^2}{3M^2}}{1 - \frac{m_\mu^2}{3M^2}} \approx 1 + \frac{m_\mu^2 - m_e^2}{3M^2} \approx 1. \quad (7.4)$$

Мы видим, что отношения (7.3) и (7.4) значительно различаются между собой. В то время как в случае 4-фермионного

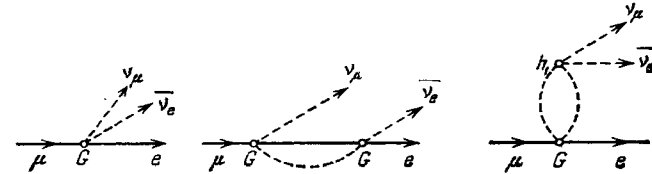


Рис. 50. Диаграммы, дающие вклад в μ -распад.

слабого взаимодействия следует ожидать довольно сильное нарушение универсальности в $\nu\nu$ -взаимодействии, в модели с промежуточным W -мезоном нарушение универсальности в $\nu\nu$ -взаимодействии ничтожно мало.

Таким образом, путем измерения отношения констант $\nu_e \nu_e$ - и $\nu_\mu \nu_\mu$ -взаимодействий можно ответить на вопрос, какая из двух рассматриваемых моделей ближе соответствует природе слабого взаимодействия.

Оказалось, что наиболее жесткие оценки на величину константы h_1 можно получить из анализа спектра распада μ -мезона. К. Зибольд и В. Г. Малышкин (1973) учитывали при проведении расчетов вклад диаграмм, изображенных на рис. 50.

Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными дает следующее ограничение:

$$G_{\nu_e \nu_\mu} = h_1 (m_e^2 + m_\mu^2) \leq 1,2 \cdot 10^5 G. \quad (7.5)$$

Это ограничение на порядок улучшает оценку, полученную Д. Ю. Бардиным, С. М. Биленьким и Б. М. Понтекорво (1970), и не противоречит результатам экспериментов Р. Хильдебранда (1972)

$$G_{\nu_e \nu_\mu} \leq 1,8 \cdot 10^5 G. \quad (7.6)$$

Обратимся теперь к эффектам, связанным с постоянной a_0 . Как видно из табл. 5, эта постоянная определяет довольно много матричных элементов. Мы рассмотрим только матричные элементы M_{20} и M_{12} в случае четырехфермионного слабого взаимодействия и слабого взаимодействия с W -мезоном.

Четырехфермионное взаимодействие. Электромагнитные формфакторы электрона и нейтрино определяются матричными элементами рассеяния электрона и нейтрино во внешнем электромагнитном поле обычным образом:

$$M_e = ie (\bar{l}(p_2) [\gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} q_\nu F_2(q^2)] l(p_1)) A_\mu(q), \quad (7.7)$$

$$M_\nu = ie (\bar{\nu}(p_2) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu(p_1)) A_\mu(q) R(q^2).$$

Здесь $q = p_2 - p_1$, p_1 и p_2 — начальный и конечный импульсы лептона. Расчет с использованием техники, описанный выше,

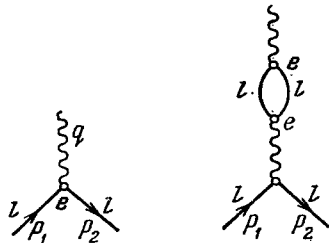


Рис. 51. Диаграммы, определяющие перенормировку заряда электрона и μ -мезона.

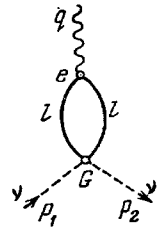


Рис. 52. Диаграмма, дающая вклад в электромагнитный формфактор нейтрино.

дает для вкладов в электромагнитные формфакторы электрона и нейтрино $F_1(q^2)$ и $R(q^2)$ за счет диаграмм, представленных на рис. 51 и 52, следующие выражения:

$$F_1(q^2) = 1 + \frac{e^2}{2\pi^2} \left[\frac{a_0}{3} + H(q^2, m_e^2) + H(q^2, m_\mu^2) \right], \quad (7.8)$$

$$R(q^2) = \frac{G}{\sqrt{2}} \frac{q^2}{2\pi^2} \left[\frac{a_0}{6} + H(q^2, m_e^2) \right],$$

где функция $H(q^2, m^2)$ одина для обоих формфакторов. Приведем ее асимптотическое поведение при малых q^2 :

$$H(q^2, m^2) = -\frac{1}{30} \frac{q^2}{m^2} + O\left(\frac{q^4}{m^4}\right) \quad (q^2 \ll m^2). \quad (7.9)$$

В квантовой электродинамике процесс рассеяния электрона во внешнем электромагнитном поле служит для определения перенормированной константы связи:

$$e_r = e_0 F_1(0) = e_0 \left(1 + \frac{e_0^2}{6\pi^2} a_0 + O(e_0^4) \right). \quad (7.10)$$

Таким образом, постоянная a_0 в данном приближении определяет эффект экранировки «голого» заряда e_0 парами e^+e^- и $\mu^+\mu^-$. Поскольку наблюдаемой является величина e_r , то в рамках квантовой электродинамики не существует эксперимента, позволяющего определить e_0 и a_0 .

Обратимся теперь к электромагнитному формфактору нейтрино $R(q^2)$ в (7.8). Заряд нейтрино равен нулю, и это согласуется с (7.8), поскольку $R(0) = 0$. Однако среднеквадратичный радиус нейтрино отличен от нуля и определяется величиной a_0 :

$$\langle r_\nu^2 \rangle = 6 \frac{d}{dq^2} R(q^2) \Big|_{q^2=0} = \frac{G}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a_0}{2\pi^2}. \quad (7.11)$$

Эта величина является наблюдаемой и, следовательно, может быть определена экспериментально. Возможные опыты по измерению среднеквадратичного радиуса нейтрино были указаны В. И. Андрушиным, С. М. Биленьким и С. С. Герштейном (1971). Любопытно отметить, что измерение величины a_0 позволяет определить величину «голого» заряда e_0 по формулам (7.10) и (7.11).

Слабые взаимодействия с W -мезоном. Аналогичная связь между a_0 , e_r и $\langle r_\nu^2 \rangle$ имеет место и в теории слабых взаимодействий с W -бозоном. В этом случае вклад в рассматриваемые

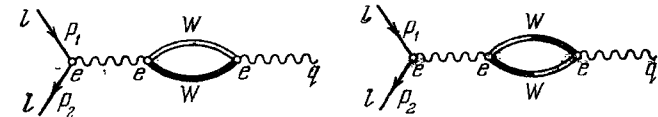


Рис. 53. Диаграммы векторной электродинамики, дающие вклад в перенормировку заряда электрона и μ -мезона.

соотношения в низшем порядке теории возмущений вносят диаграммы, представленные на рис. 53 и 54. Расчет дает

$$F_1(q^2) = 1 + \frac{e^2}{16\pi^2} \left[-\frac{a_0}{2} + \frac{q^2}{M^2} \cdot \frac{a_0}{6} - \frac{1}{210} \frac{q^4}{M^4} \right] \quad (q^2 \ll M^2), \quad (7.12)$$

$$R(q^2) = \frac{G}{\sqrt{2}} \frac{q^2}{8\pi^2} \left[-\frac{a_0}{3} - \frac{q^2}{5m^2} - \frac{7}{15} \frac{q^2}{M^2} \ln \frac{M^2}{m^2} \right].$$

Перенормированный заряд электрона равен

$$e_r = e_0 \left[1 - \frac{e_0^2}{\pi^2} \cdot \frac{a_0}{32} + O(e_0^4) \right]. \quad (7.13)$$

Среднеквадратичный радиус нейтрино связан с a_0 формулой

$$\langle r_\nu^2 \rangle = - \frac{G}{\sqrt{2}} \frac{a_0}{(2\pi)^2}. \quad (7.14)$$

Таким образом, экранировка «голового» заряда e_0 определяется величиной $\langle r_\nu^2 \rangle$, согласно (7.14), и силой $\nu\nu$ -взаимодействия, определяемой постоянной a_2 , согласно (7.2).

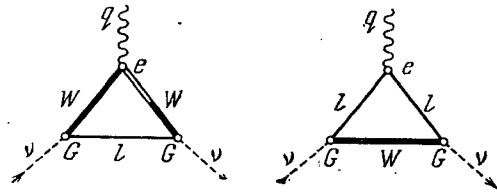


Рис. 54. Диаграммы, дающие вклад в электромагнитный формфактор нейтрино.

Анализ экспериментальных данных по $\nu_\mu e$ - и $\bar{\nu}_e e$ -рассеяниям, проведенный К. Зибольдом и В. Г. Малышкиным (1974) на основе обсуждаемой модели, позволил получить следующие ограничения на величину среднеквадратичного радиуса:

$$\langle r_\nu^2 \rangle \ll \begin{cases} 1,4 \cdot 10^{-31} \text{ см}^2 & \text{при } G > 0, \\ 1,1 \cdot 10^{-31} \text{ см}^2 & \text{при } G < 0. \end{cases}$$

Примерно такие же ограничения для зарядового радиуса нейтрино были получены Д. Ю. Бардиным и О. А. Могилевским (1974) при анализе реакции упругого $\bar{\nu}_e e$ -рассеяния и процесса глубокоупругого рассеяния на нуклоне.

В заключение можно сказать, что предлагаемый вариант нелокальной теории слабых взаимодействий дает определенные предсказания об отношении вероятностей различных процессов между нейтральными частицами (фотоном и нейтрино) и позволяет сделать выбор между двумя популярными моделями теории слабых взаимодействий — четырехфермионным и с W -мезоном — на основании изучения чистого $\nu\nu$ -взаимодействия.

§ 8. К разности масс электрона и μ -мезона

Как уже говорилось, контактное взаимодействие, описываемое лагранжианом

$$\mathcal{L}_{\nu\nu}(x) = G_{\nu_e \nu_e} J_{1a}(x) J_{1a}(x) + G_{\nu_\mu \nu_\mu} J_{2a}(x) J_{2a}(x) + G_{\nu_e \nu_\mu} J_{3a}(x) J_{3a}^+(x), \quad (8.1)$$

нарушает универсальность слабых взаимодействий. Степень нарушения существенно зависит от выбранной модели слабых

взаимодействий и в рассматриваемых нами моделях определяется формулами (7.3) и (7.4). Как видно из этих формул, нарушение универсальности в (8.1) обусловлено различными значениями экспериментально наблюдаемых масс электрона и W -мезона.

Попытаемся решить обратную задачу, т. е. из предположения о существовании нарушающего универсальность контактного $\nu\nu$ -взаимодействия объяснить разность масс электрона и μ -мезона.

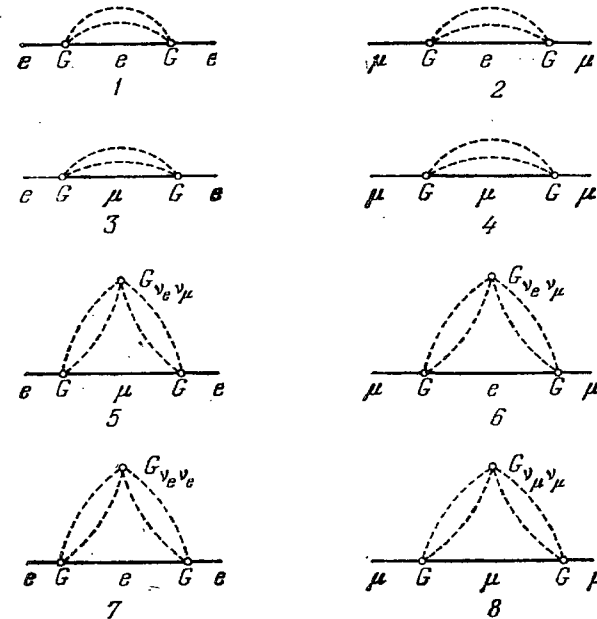


Рис. 55. Диаграммы, дающие вклад в собственную энергию электрона и μ -мезона.

Пусть электрон и μ -мезон имеют одинаковую затравочную массу и существует $\nu\nu$ -взаимодействие в форме (8.1) с отношением констант

$$\frac{G_{\nu_e \nu_e}}{G_{\nu_\mu \nu_\mu}} \sim 10^{-4}. \quad (8.2)$$

Как известно, физическая масса частицы определяется полюсом ее функции Грина

$$G(p) = \frac{1}{m_0 - \hat{p} - \Sigma(p) - i\epsilon}. \quad (8.3)$$

Диаграммы, дающие вклад в поправку к массам заряженных лептонов в низших порядках, приведены на рис. 55.

Массовый оператор $\Sigma(p)$ имеет структуру вида

$$\Sigma_j(p) = \rho(1 + \gamma_5) \sigma_j(p^2) \quad (j = e, \mu), \quad (8.4)$$

поскольку теория γ_5 -инвариантна. Легко видеть из (8.3), (8.4), что физические массы электрона и μ -мезона определяются как

$$\begin{aligned} m_e^2 &= m_0^2 + 2m_0^2 \sigma_e(m_0^2), \\ m_\mu^2 &= m_0^2 + 2m_0^2 \sigma_\mu(m_0^2), \end{aligned} \quad (8.5)$$

откуда

$$m_\mu^2 - m_e^2 = 2m_0^2 \{ \sigma_\mu(m_0^2) - \sigma_e(m_0^2) \}. \quad (8.6)$$

Очевидно, что вклад в (8.6) дают только диаграммы 7 и 8 на рис. 55. Оценивая вклад этих диаграмм, получим

$$m_\mu^2 - m_e^2 = \frac{G}{\sqrt{2}} \frac{m_0^2 C}{l_v^6} \{ G_{\nu_\mu \nu_\mu} - G_{\nu_e \nu_e} \}. \quad (8.7)$$

Здесь l_v — элементарная длина, определяющая область, где слабые взаимодействия становятся нелокальными,

$$C = \frac{4i}{\pi^7} \int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} \frac{d\xi v(1-\xi) v(\xi) [\xi^2 + \xi - 3]}{(\xi-2)^2 (1+\xi)^2 \xi (\xi-1)} \quad (0 < \beta < 1), \quad (8.8)$$

$$v(\xi) = - \int_0^\infty du u^{\xi-2} \cdot \frac{d}{du} V^2(u). \quad (8.9)$$

Функция $V(u)$ однозначно связана с $K_\nu(z)$ в (1.27) (см. подробнее § 8 гл. V). Общие ее свойства таковы, что

$$V(u) = \begin{cases} 1 & \text{при } u \geq 1, \\ O(u^2) & \text{при } u \ll 1. \end{cases}$$

В качестве примера выберем $V(u)$ в виде

$$V(u) = A\theta(u-a) + (1-A)\theta(u-1), \quad (8.10)$$

где $A > 1$, $0 < a < 1$. Для этой функции

$$C = \frac{20}{3\pi^6} \frac{A^4}{a^3} \left[1 + 2a^2 \left(\frac{1}{A^2} - 1 \right) + a^3 \left(\frac{1}{A^2} - 1 \right)^2 \right].$$

Используя соотношение (8.2), перепишем (8.7) в виде

$$m_\mu^2 - m_e^2 = \left(\frac{G}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{m_0^2 C}{l_v^6} G_{\nu_e \nu_e} \cdot 10^4. \quad (8.11)$$

Для того чтобы получить наблюдаемую разность масс, должно

выполняться соотношение

$$m_e^2 \simeq \left(\frac{G}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{m_0^2 C}{l_v^6} G_{\nu_e \nu_e}. \quad (8.12)$$

При этом поправки к массам за счет диаграмм 7 и 8 рис. 55 по порядку величины будут

$$\delta m_e^2 \simeq m_e^2, \quad \delta m_\mu^2 \simeq 10^4 m_e^2. \quad (8.13)$$

Естественно предположить $m_0 \simeq m_e$, $\left(\frac{G}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{l_v^6} \simeq 1$, откуда

$$G_{\nu_e \nu_e} \simeq \frac{G}{\sqrt{2}} \frac{1}{C}, \quad G_{\nu_\mu \nu_\mu} \simeq 10^4 \frac{G}{\sqrt{2}} \frac{1}{C}.$$

Если считать, что $G_{\nu_e \nu_e} \simeq G$, $G_{\nu_\mu \nu_\mu} \simeq 10^4 G$, то необходимо, чтобы $C \simeq 1$. Этого можно легко добиться соответствующим выбором функции $V(u)$. В случае (8.10), например, достаточно положить $a = 0,5$, $A \simeq 2,2$. Как неоднократно говорилось выше, введение нелокальности в теорию приводит к изменению кулоновского потенциала и «слабого потенциала» на малых расстояниях. С этой точки зрения фиксирование величины C означает фиксирование нескольких параметров (a и A в примере (8.10)), характеризующих это изменение.

Таким образом, в нелокальной теории нетрудно добиться желаемого результата при разумных предположениях относительно констант, входящих в (8.11).

Производя точно такие же рассуждения для случая, когда степень нарушения универсальности мала и описывается отношением констант (7.4), т. е. в случае модели слабых взаимодействий с W -мезоном, можно получить правильную разницу в массах μ -мезона и электрона, если выбрать $C \simeq 10^{15}$. Но при этом оказывается, что поправки к массам лептонов за счет диаграмм 7 и 8 (рис. 55) очень велики:

$$\delta m_e^2 \simeq \delta m_\mu^2 \simeq 10^{15} m_e^2.$$

Если предположить, что разница в массах электрона и мюона действительно имеет предполагаемое происхождение, то проведенное рассмотрение свидетельствует о том, что модель слабых взаимодействий с W -мезоном не соответствует действительности.

В заключение к этому разделу заметим, что при вычислении вкладов диаграмм 7 и 8 на рис. 55, когда в качестве регуляризации фейнмановских интегралов используется обрезание Λ на верхнем пределе, при Λ таких, что $G\Lambda^2 \simeq 1$, постоянная C

в (8.7) оказывается равной $C \simeq 10^{-6}$. Это означает, что для получения наблюдаемой разности масс m_e и m_μ необходимо предположить необыкновенно сильное $\nu\nu$ -взаимодействие ($G_{\nu_\mu\nu_\mu} \simeq G \cdot 10^{10}$), что противоречит современным экспериментальным данным:

$$G_{\nu_\mu\nu_\mu} < 1,8 \cdot 10^5 G.$$

Итак, в рамках нелокальной теории слабых взаимодействий возможно объяснить разность масс между электроном и μ -мезоном, если предполагать нарушение универсальности в чистом $\nu\nu$ -взаимодействии согласно (8.1) и (8.2).

§ 9. Аномальные тождества Уорда и регуляризационная процедура

Как уже неоднократно отмечалось нами, при построении S -матрицы в рамках лагранжева формализма для того, чтобы определить расходящиеся интегралы в ряду теории возмущений, приходится вводить определенный математический аппарат с целью параметризации и последующего устранения ультрафиолетовых расходимостей. Произвол в выборе той или иной регуляризационной процедуры должен ограничиваться накладываемыми на S -матрицу общими требованиями и имеющимися группами симметрий полного лагранжиана (эрмитовость, ковариантность относительно группы Пуанкаре и других групп: градиентной, изотопической и т. д.). Забывая об этом, можно получать различные противоречия в схеме лагранжева формализма и абсурдные с физической точки зрения результаты.

Наиболее ярким примером такого рода противоречий является нарушение частично сохраняющегося аксиального тока (сокращенно, в общепринятой английской транскрипции PCAC — partial conservation of axial-vector current) в рамках квантовой электродинамики. Суть дела, наиболее четко сформулированная С. Адлером (1969), сводится к следующему. Из уравнений Гайзенберга, выведенных из обычного лагранжиана квантовой электродинамики

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hat{d} - m)\psi - \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu + e\bar{\psi}\hat{A}\psi, \quad (9.1)$$

следует соотношение

$$\partial_\mu (\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi) = 2im(\bar{\psi}\gamma_5\psi). \quad (9.2)$$

Проверяя это соотношение по теории возмущений в квантовой электродинамике в рамках обычных процедур регуляризаций, С. Адлер получил соотношение

$$\partial_\mu (\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi) = 2im(\bar{\psi}\gamma_5\psi) + \frac{e^2}{16\pi^2} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (9.3)$$

где $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$. Очевидно, это соотношение противоречит (9.2). Затем возникло много работ, где условие (9.3) объявлялось истинно правильным и использовалось для получения различных физических следствий, которые, безусловно, отличаются от следствий, полученных на основе соотношения (9.2).

В дальнейшем появились работы (см., например, обзоры С. Адлера (1970) и Р. Джакива (1970)), в которых авторы, не уделяя должного внимания выбору регуляризационной процедуры, делали утверждение, что согласовать (9.2) и (9.3) можно, подобрав соответствующим образом контрчлены в лагранжиане взаимодействия. Однако при этом структура лагранжиана становится такой, что полностью искажает первоначальный физический смысл теории.

На наш взгляд, в настоящее время большинство физиков, придавая, с одной стороны, большое значение используемой ими регуляризации, с другой стороны, не достаточно осознают ее роль при построении S -матрицы.

Исходной точкой зрения должно быть убеждение, что лагранжиан, а вместе с ним и следствия, которые из него вытекают, полностью определяют мир, описываемый выбранным лагранжианом. Кроме того, известно, что в современной математике дифференциальные, интегральные, функциональные и другие уравнения имеют смысл и решаются в рамках определенного математического аппарата (определенный класс функций и т. д.). Уравнение поля, S -матрица и соотношение типа (9.2) как раз и являются такими уравнениями. Поэтому наша задача состоит в том, чтобы отыскать соответствующий математический аппарат, составной частью которого является регуляризационная процедура и в рамках которого мы могли бы получать решения, соответствующие исходным уравнениям. Всякое использование неадекватного математического аппарата, безусловно, приведет к тем или иным противоречиям.

Рассмотрим подробнее механизм нарушения тождества (9.2) в рамках квантовой электродинамики. Как известно, при построении ряда теории возмущений в квантовой электродинамике используется так называемая градиентно-инвариантная регуляризация Паули — Вилларса. Это означает, что спинорные причинные функции электрона регуляризуются не по отдельности, а замкнутыми спинорными циклами, как уже много раз говорилось выше:

$$\sum_j c_j \text{Sp} \{GS(M_j, x_1 - x_2)GS(M_j, x_2 - x_3) \dots\}, \quad (9.4)$$

где $M_j = m\Lambda_j$, Λ_j — большой безразмерный параметр, а коэффициенты c_j удовлетворяют нужному числу уравнений типа (2.9). Здесь Γ обозначает возможную вершину ($\gamma_\mu, \gamma_\mu\gamma_5, \gamma_5$ и т. д.). Мы видим, таким образом, что процедура регуляризации связана с массой фермиона. Сумма (9.4) представляет

собой как бы аддитивное сложение одинаковых по структуре циклов некоторого числа фермионов с различными массами M_j . Поскольку масса фермиона не меняется при градиентном преобразовании, т. е. является инвариантом этих преобразований, теория градиентно-инвариантна даже до снятия регуляризации.

Если же теперь мы введем в электродинамику новую вершину $\bar{\psi}\gamma_5\psi$, то, как легко видеть, с точки зрения используемой регуляризации вершины $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ и $\bar{\psi}t\gamma_5\psi$ представляют собой «разные» вершины. Действительно, если в цикл (9.4) входят некоторое число вершин γ_5 , то различие в суммах (9.4) и

$$\sum_j c_j M_j^s \text{Sp} \{ \Gamma S(M_j, x_1 - x_2) \times \Gamma S(M_j, x_2 - x_3) \dots \}, \quad (9.5)$$

где s — число вершин γ_5 , очевидно. Но в тождество (9.2) входит именно вершина $\bar{\psi}t\gamma_5\psi$, но не $\bar{\psi}\gamma_5\psi$. Отсюда ясно, что в рамках обычной регуляризации Паули — Вилларса (9.4) тождество (9.2), конечно, будет нарушаться.

Рассмотрим подробнее механизм этого нарушения. Для этого вычислим интегралы, соответствующие диаграммам, показанным на рис. 56, а. Вклад этих диаграмм определяется, вообще говоря, расходящимся интегралом, под знаком которого происходят сокращения

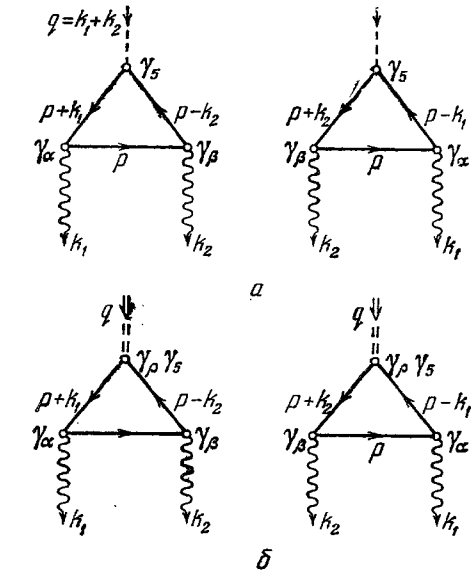


Рис. 56. Диаграммы квантовой электродинамики с псевдоскалярной γ_5 (а) и псевдовекторной $\gamma_0\gamma_5$ (б) вершинами.

в силу градиентной инвариантности по внешним фотонным линиям. Для регуляризации введем градиентно-инвариантную процедуру (9.5). Таким образом, этим двум диаграммам соответствует интеграл

$$\Gamma_{\alpha\beta}^s(s) = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int dp \sum_j c_j \Lambda_j^s \text{Sp} \{ \gamma_5 S(M_j, p - k_2) \gamma_\beta S(M_j, p) \gamma_\alpha S(M_j, p + k_1) + \gamma_5 S(M_j, p - k_1) \gamma_\alpha S(M_j, p) \gamma_\beta S(M_j, p + k_2) \}, \quad (9.6)$$

где

$$S(M_j, p) = \frac{1}{m\Lambda_j - \not{p}}.$$

Коэффициенты c_j удовлетворяют известным нам условиям (2.9). Наша задача состоит в том, чтобы посмотреть, как зависит результат вычисления от числа s в (9.6). Проводя стандартные вычисления, можно получить для случая, когда $k_1^2 = k_2^2 = 0$:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^s(s) = -\frac{ie^2 m}{2\pi^2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} k_{1\mu} k_{2\nu} F_s(q^2, \Lambda), \quad (9.7)$$

где

$$F_s(q^2, \Lambda) = \int_{0 \leq u_1 + u_2 \leq 1} du_1 du_2 \sum_j c_j \frac{\Lambda_j^s}{m^2 \Lambda_j^2 - u_1 u_2 q^2}.$$

Переходя к пределам $\varepsilon_j \rightarrow 0$ и $\Lambda \rightarrow \infty$ и используя условия (2.9), получим в пределе снятия регуляризации

$$F_s(q^2) = \int_{0 \leq u_1 + u_2 \leq 1} du_1 du_2 \frac{(u_1 u_2 q^2)^s}{m^2 - u_1 u_2 q^2 - i\varepsilon} = \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dx^2}{x^2 (x^2 - q^2 - i\varepsilon)} \left(\frac{q^2}{x^2}\right)^s \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - 4m^2}}{x - \sqrt{x^2 - 4m^2}}. \quad (9.8)$$

Мы видим, что результат явно зависит от числа s . Получим выражение для разности двух вершинных частей $\Gamma_{\alpha\beta}^5$ при $s = 0$ и $s = 1$.

Имеем

$$\Delta \Gamma_{\alpha\beta}^5 = \Gamma_{\alpha\beta}^5(1) - \Gamma_{\alpha\beta}^5(0) = \frac{ie^2}{4\pi^2 m} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} k_{1\mu} k_{2\nu}. \quad (9.9)$$

Выражение (9.7) градиентно-инвариантно при любых s :

$$k_{1\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^5 = k_{2\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^5 = 0.$$

В этом можно убедиться еще на уровне представления (9.6), поскольку справедливо тождество

$$\frac{1}{m - \not{p}_1} \not{q} \frac{1}{m - \not{p}_2} = \frac{1}{m - \not{p}_1} - \frac{1}{m - \not{p}_2} \quad (9.10)$$

при $q = p_1 - p_2$, и вклад от правой части (9.10) в (9.6) тождественно обращается в нуль.

Выпишем теперь интеграл, соответствующий псевдовекторной вершине, для диаграмм, показанных на рис. 5б, б:

$$\Gamma_{\rho, \alpha\beta}^5 = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int dp \sum_j c_j \text{Sp} \{ \gamma_\rho \gamma_5 S(M_j, p-k_2) \gamma_\beta S(M_j, p) \gamma_\alpha S(M_j, p+k_1) + \gamma_\rho \gamma_5 S(M_j, p-k_1) \gamma_\alpha S(M_j, p) \gamma_\beta S(M_j, p+k_2) \}. \quad (9.11)$$

Здесь мы используем обычную градиентно-инвариантную регуляризацию Паули — Вилларса. Мы не будем до конца проводить вычисление для $\Gamma_{\rho, \alpha\beta}^5$. Оно достаточно громоздкое, а знание явного вида этой функции для нашей цели не является существенным. Рассмотрим выражение $q_\rho \Gamma_{\rho, \alpha\beta}^5$. Воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{m-\hat{p}_1} \hat{q} \gamma_5 \frac{1}{m-\hat{p}_2} = \frac{1}{m-\hat{p}_1} 2m \gamma_5 \frac{1}{m-\hat{p}_2} - \frac{1}{m-\hat{p}_1} \gamma_5 - \gamma_5 \frac{1}{m-\hat{p}_2} \quad (9.12)$$

и замечая, что вклад от второго и третьего слагаемых в (9.12) равен нулю, получим

$$q_\rho \Gamma_{\rho, \alpha\beta}^5 = 2m \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int dp \sum_j c_j \Lambda_j \text{Sp} \{ \gamma_5 S(M_j, p-k_2) \gamma_\beta S(M_j, p) \gamma_\alpha S(M_j, p+k_1) + \gamma_5 S(M_j, p-k_1) \gamma_\alpha S(M_j, p) \gamma_\beta S(p+k_2) \} = 2m \Gamma_{\alpha\beta}^5(1) = 2m \Gamma_{\alpha\beta}^5(0) + \frac{ie^2}{2\pi^2} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} k_{1\mu} k_{2\nu}. \quad (9.13)$$

Таким образом, мы видим, что результат зависит от того, как мы определяем вершинную часть $\Gamma_{\alpha\beta}^5$. Если мы, по определению, будем считать, что вершинная часть $\Gamma_{\alpha\beta}^5$ определяется (9.8) при $s=0$, то получим аномальное тождество Адлера (9.3):

$$q_\rho \Gamma_{\rho, \alpha\beta}^5 = 2m \Gamma_{\alpha\beta}^5 + \frac{ie^2}{2\pi^2} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} k_{1\mu} k_{2\nu}. \quad (9.14)$$

Если же определить вершинную часть выражением (9.8) при $s=1$, то никаких противоречий с требованиями PCAC мы не получаем:

$$q_\rho \Gamma_{\rho, \alpha\beta}^5 = 2m \Gamma_{\alpha\beta}^5. \quad (9.15)$$

Особенность математической структуры полученного аномального тождества состоит в следующем. Во-первых, обычно регуляризация вводится, чтобы параметризовать расходящийся

интеграл, в то время как в рассматриваемом случае расходимость в (9.6) не меняется от наличия или отсутствия дополнительного множителя Λ_j^5 . Во-вторых, регуляризация связана с массой частиц, поэтому она очевидным образом сохраняет градиентную инвариантность, так как масса является инвариантом при градиентных преобразованиях, в то время как наличие вершин γ_5 и $\gamma_\rho \gamma_5$ и требование сохранения PCAC связывает вершину $\gamma_\rho \gamma_5$ с $2m \gamma_5$, но не с γ_5 (!). Поэтому используемая регуляризация процедура приводит к нарушению PCAC и появлению аномальных тождеств.

Следует добавить, что аномальные соотношения будут возникать не только в случае треугольной диаграммы, рассмотренной выше, но и в более сложных диаграммах с большим числом аксиально-векторных частиц. Количество аномальных членов тем самым будет неограниченно расти от порядка к порядку теории возмущений.

Таким образом, оказывается, что в рамках обычной градиентно-инвариантной регуляризации нельзя удовлетворить всем требованиям, накладываемым на теорию. Если же вводить в теорию дополнительные члены, компенсирующие аномалии в соотношениях типа (9.2), то, во-первых, таких членов должно быть бесконечное множество, во-вторых, неясно, как их учесть в лагранжевом формализме, в-третьих, если придавать им физический смысл, то неясно, какие дополнительные расходимости повлекут они за собой в ряду теории возмущений. В этом плане задача совершенно меняется. Но суть, тем не менее, состоит в том, что трудности, связанные с появлением аномальных соотношений, возникают только благодаря использованию неадекватного математического аппарата.

Из всего вышесказанного следует, что если мы хотим остаться в рамках требований, налагаемых условиями градиентной инвариантности и PCAC, то циклическая регуляризация должна быть изменена таким образом, что вместо вершины с γ_5 мы должны рассматривать $m \gamma_5$ и в циклах типа (9.4) необходимо производить замену $m \gamma_5 \rightarrow m \Lambda_j \gamma_5$. Таким образом, вершина $\bar{\psi} \gamma_5 \psi$ несет дополнительный параметр регуляризации. Это означает, что в этой вершине как бы присутствует дополнительный импульс, что делает теорию с такими вершинами неперенормируемой.

Однако если мы проверяем выполнение тождеств (9.2) в рамках квантовой электродинамики, то вершины $\bar{\psi} \gamma_\rho \gamma_5 \psi$ и $\bar{\psi} \gamma_5 \psi$ могут быть только внешними, что не приводит к появлению дополнительных расходимостей в ряду теории возмущений. Если же рассматривать полную теорию с лагранжианом взаимодействия вида

$$\mathcal{L}_I(x) = e \bar{\psi} \hat{A} \psi + g \bar{\psi} \hat{B} \gamma_5 \psi + f \bar{\psi} \gamma_5 \psi \varphi, \quad (9.16)$$

где φ — псевдоскалярное и B_μ — аксиально-векторное квантованное поле, то такую теорию мы должны регуляризовать в рамках измененной циклической регуляризации. Тогда окажется, что рассматриваемая теория является неперенормируемой, причем к неперенормируемым расходимостям, связанным с векторными полями B_μ , добавятся расходимости, связанные с регуляризацией вершин $\psi\psi\psi$.

Заметим, что в рамках нелокальной теории, когда введение нелокальности связано с бозонными нейтральными полями A_μ , B_μ и φ , что означает появление формфактора определенного типа в их пропагаторах, никаких трудностей не будет. S -матрица будет конечна, унитарна, макропричинна и будет удовлетворять всем тождествам типа (9.2), вытекающим из уравнений Гайзенберга.

ЛИТЕРАТУРА

- Аберс С., Ли Б. В. (Abers S., Lee B. W.)
(1973) Physics Reports, Vol. 9C, NH Publ Comp.
- Адлер С. (Adler S. L.)
(1969) Phys. Rev. 177, 2426;
(1970) Lectures on elementary particles and quantum field theory. Eds Deser et al. (MIT Press, Cambridge).
- Алебастров В. А., Ефимов Г. В.
(1973) Commun. Math. Phys. 31, 1;
(1974) Commun. Math. Phys. 38, 11.
- Алебастров В. А., Ефимов Г. В., Сельцер Ш. З.
(1973a) Annals of Phys. 76, 251;
(1973b) ЯФ 18, 210.
- Андерсон Дж. (Anderson J. L.)
(1954) Phys. Rev. 94, 703.
- Андрюшин В. И., Биленький С. М., Герштейн С. С.
(1971) Письма ЖЭТФ 13, 573.
- Арбузов Б. А.
(1959) ДАН СССР 128, 1149.
- Арбузов Б. А., Филиппов А. Т.
(1965) ЖЭТФ 49, 990; Nuovo Cimento 38, 796.
- Арновитт Р., Дезер С. (Arnowitt R., Deser S.)
(1955) Phys. Rev. 100, 349.
- Аурилия А., Умегава Х. (Aurilia A., Umezawa H.)
(1969) Phys. Rev. 182, 1682.
- Ахнезер А. И., Берестецкий В. Б.,
(1959) Квантовая электродинамика, Физматгиз, Москва.
- Баба Х. (Bhabha H. J.)
(1945) Rev. Mod. Phys. 17, 200; 21, 451.
- Бардин Д. Ю., Биленький С. М., Понтекорво Б. М.
(1970) Phys. Lett. 32B, 121.
- Бардин Д. Ю., Могилевский О. А.
(1974) Lett. Nuovo Cimento 9, 549.
- Басуев А. Г.
(1973) ТМ 16, 281.
- Блох К. (Bloch C.)
(1952) Mat. Fys. Medd. 27, 8.
- Блохинцев Д. И.
(1947) ЖЭТФ 17, 116;
(1948) Вестник МГУ 1, 83;
(1957) УФН 61, 137.
(1970) Пространство и время в микромире, «Наука», Москва.
- Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Ширков Д. В.
(1959) ЖЭТФ 37, 805.
- Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К.
(1958) Вопросы теории дисперсионных соотношений, Физматгиз, Москва.

где φ — псевдоскалярное и B_μ — аксиально-векторное квантованное поле, то такую теорию мы должны регуляризовать в рамках измененной циклической регуляризации. Тогда окажется, что рассматриваемая теория является неперенормируемой, причем к неперенормируемым расходимостям, связанным с векторными полями B_μ , добавятся расходимости, связанные с регуляризацией вершин $\psi\psi\psi$.

Заметим, что в рамках нелокальной теории, когда введение нелокальности связано с бозонными нейтральными полями A_μ , B_μ и φ , что означает появление формфактора определенного типа в их пропагаторах, никаких трудностей не будет. S -матрица будет конечна, унитарна, макропричинна и будет удовлетворять всем тождествам типа (9.2), вытекающим из уравнений Гайзенберга.

ЛИТЕРАТУРА

- Аберс С., Ли Б. В. (Abers S., Lee B. W.)
(1973) *Physics Reports*, Vol. 9C, NH Publ Comp.
- Адлер С. (Adler S. L.)
(1969) *Phys. Rev.* 177, 2426;
(1970) *Lectures on elementary particles and quantum field theory*. Eds Deser et al. (MIT Press, Cambridge).
- Алебастров В. А., Ефимов Г. В.
(1973) *Commun. Math. Phys.* 31, 1;
(1974) *Commun. Math. Phys.* 38, 11.
- Алебастров В. А., Ефимов Г. В., Сельцер Ш. З.
(1973a) *Annals of Phys.* 76, 251;
(1973b) *ЯФ* 13, 210.
- Андерсон Дж. (Anderson J. L.)
(1954) *Phys. Rev.* 94, 703.
- Андрюшин В. И., Биленький С. М., Герштейн С. С.
(1971) *Письма ЖЭТФ* 13, 573.
- Арбузов Б. А.
(1959) *ДАН СССР* 128, 1149.
- Арбузов Б. А., Филиппов А. Т.
(1965) *ЖЭТФ* 49, 990; *Nuovo Cimento* 38, 796.
- Арновитт Р., Дезер С. (Arnowitt R., Deser S.)
(1955) *Phys. Rev.* 100, 349.
- Аурилия А., Умегава Х. (Aurilia A., Umezawa H.)
(1969) *Phys. Rev.* 182, 1682.
- Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.,
(1959) *Квантовая электродинамика*, Физматгиз, Москва.
- Баба Х. (Bhabha H. J.)
(1945) *Rev. Mod. Phys.* 17, 200; 21, 451.
- Бардин Д. Ю., Биленький С. М., Поитекорво Б. М.
(1970) *Phys. Lett.* 32B, 121.
- Бардин Д. Ю., Могилевский О. А.
(1974) *Lett. Nuovo Cimento* 9, 549.
- Басуев А. Г.
(1973) *ТМ* 16, 281.
- Блох К. (Bloch C.)
(1952) *Mat. Fys. Medd.* 27, 8.
- Блохинцев Д. И.
(1947) *ЖЭТФ* 17, 116;
(1948) *Вестник МГУ* 1, 83;
(1957) *УФН* 61, 137.
(1970) *Пространство и время в микромире*, «Наука», Москва.
- Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Ширков Д. В.
(1959) *ЖЭТФ* 37, 805.
- Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К.
(1958) *Вопросы теории дисперсионных соотношений*, Физматгиз, Москва.

- Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.
(1969) Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, «Наука», Москва.
- Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.
(1973) Введение в теорию квантовых полей, «Наука», Москва.
- Бродский С., Дрелл С.
(1972) УФН 107, вып. 1, 57.
- Вайтман А.
(1968) Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей, «Наука», Москва.
- Ван-Хов Л. (Van Hove L.)
(1952) Physica 18, 145.
- Ватагин Г. (Wataghin G.)
(1934) Zs. Phys. 88, 92.
- Велтман М. (Veltman M.)
(1963) Physica 29, 186.
- Винер Н., Пэли Р.
(1964) Преобразование Фурье в комплексной плоскости, «Наука», Москва.
- Владимиров В. С.
(1964) Методы теории функций многих комплексных переменных, «Наука», Москва.
- Волков М. К.
(1968) Annals of Phys. 49, 202;
(1971) ЭЧАЯ, т. 2, вып. 1, 33.
- Вяльцев А. И.
(1965) Дискретное пространство — время, «Наука», Москва.
- Гельфанд И. М., Шнилов Г. Е.
(1958) Пространство основных и обобщенных функций, Физматгиз, Москва;
(1959) Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, Москва.
- Гельфанд И. М., Яглом А. М.
(1948) ЖЭТФ 18, 703, 1096.
- Дайсон Ф. (Dyson E. J.)
(1949) Phys. Rev. 75, 486; 75, 1736;
(1952) Phys. Rev. 85, 631;
(1958) Phys. Rev. 110, 1460.
- Джаккив Р. (Jackiw R.)
(1970) Lectures on current algebra and its applications (Princeton University Press, Princeton).
- Джаффе А. (Jaffe A. M.)
(1966) Phys. Rev. Lett. 17, 661.
- Дэффи Р. (Deffin R.)
(1938) Phys. Rev. 54, 1114.
- Евграфов М. А.
(1962) Асимптотические оценки и целые функции, Физматгиз, Москва.
- Ефимов Г. В.
(1963) ЖЭТФ 44, 2107;
(1967) Труды I Международного совещания по нелокальной квантовой теории поля, Дубна, ОИЯИ P2-3590;
(1968a) Commun. Math. Phys. 7, 138;
(1968b) Препринт ИТФ, Киев, №№ 52, 54, 55;
(1969) Preprint CERN — Geneva TH-1087;
(1970a) ЭЧАЯ 1, вып. 1, 256;
(1970b) ДАН СССР 195, 536;
(1970в) Труды II Международного совещания по нелокальной квантовой теории поля, Азау, ОИЯИ 2-5400, Дубна;
(1972) Annals of Phys. 71, 466;
(1973) Труды III Международного совещания по нелокальной квантовой теории поля, Алушта, ОИЯИ D2-7161, Дубна;
(1974a) Int. J. of Theor. Phys. 10, 19;
(1974б) Труды X зимней школы по теоретической физике, Карпач, Acta Universitatis Wratislaviensis, No. 207, Wroclaw;
(1974в) ЭЧАЯ 5, вып. 1, 223.
- Ефимов Г. В., Малышкин В. Г., Могилевский О. А., Намсрай Х., Юматов А. Ю.
(1973) Nucl. Phys. B59, 1.
- Ефимов Г. В., Могилевский О. А.
(1972) Nucl. Phys. B44, 541.
- Ефимов Г. В., Намсрай Х.
(1975) ТМФ 22, 186.
- Ефимов Г. В., Сельцер Ш. З.
(1971) Annals of Phys. 67, 125.
- Зибольд К., Малышкин В. Г.
(1973) ОИЯИ, Дубна, P2-7240;
(1974) ОИЯИ, Дубна, P2-8207.
- Зыков А. А.
(1969) Теория конечных графов, «Наука», Сибирское отделение, Новосибирск.
- Ибрагимов И. И.
(1962) Экстремальные свойства целых функций конечной степени, Изд. АН АзССР, Баку.
- Иофа М. З., Файнберг В. Я.
(1969) ЖЭТФ 56, 1644; ТМФ 1, 187.
- Йост Р., Леман Х. (Jost R., Lehman H.)
(1957) Nuovo Cimento 5, 1598.
- Качмаж С., Штейнгауз Г.
(1958) Теория ортогональных рядов, Физматгиз, Москва.
- Кеммер Н. (Kemmer N.)
(1939) Proc. Roy. Soc. 173, 91.
- Киржниц Д. А.
(1966) УФН 90, 129.
- Копылов Г. И.
(1970) Основы кинематики резонансов, «Наука», Москва.
- Кретьеи М., Пайерлс Р. (Chretien M., Peierls R.)
(1953) Nuovo Cimento 10, 669.
- Куткоски Р. (Cutkosky R. E.)
(1960) J. Math. Phys. 1, 429.
- Ландау Л. Д.
(1959) ЖЭТФ 37, 62.
- Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников И. М.
(1954) ДАН СССР 95, 1177.
- Ландау Л. Д., Померанчук И. Я.
(1955) ДАН СССР 102, 489.
- Леман Х., Полмейер К. (Lehmann H., Pohlmeier K.)
(1971) Commun. Math. Phys. 20, 101.
- Ли Т. Д., Вика Г. (Lee T. D., Wick G. C.)
(1969) Nucl. Phys. B9, 209.
- МакМанус Х. (McManus H.)
(1948) Proc. Roy. Soc. (A) 195, 323.
- Марков М. А.
(1940) ЖЭТФ 10, 1311;
(1958) Гипероны и К-мезоны, Физматгиз, Москва.
- Мейман Н. Н.
(1964) ЖЭТФ 47, 1966.
- Могилевский О. А.
(1975) Диссертация, ОИЯИ, Дубна.
- Надь К.
(1969) Пространства состояний с индефинитной метрикой в квантовой теории поля, Библиотека сборника «Математика», «Мир», Москва.

- Окубо С. (Okubo S.)
(1954) *Progr. Theor. Phys.* 11, 80.
- Пайс А., Уленбек Г. (Pais A., Uhlenbeck G. E.)
(1950) *Phys. Rev.* 79, 145.
- Паули В. (Pauli W.)
(1953) *Nuovo Cimento* 10, 648.
- Петрина Д. Я.
(1961) *УМЖ* 13, 109.
- Петрина Д. Я., Скрипник В. И.
(1971) *ТМФ* 8, 368.
- Редмонд Р. (Redmond R. J.)
(1958) *Phys. Rev.* 112, 1404.
- Рихтер Б. (Richter B.)
(1974) *Proceedings of the XVII International Conference on High Energy Physics, London, 1974.* Ed. by J. R. Smith, Chilton, 1974.
- Салам А., Дельбурго Р., Стразди Дж. (Salam A., Delbourgo R., Strathdee J.)
(1969) *ICTP, Trieste preprint C/69/17; Phys. Rev.* D1, 3296.
- Славнов Д. А.
(1974) *Обобщенная регуляризация Паули — Вилларса, Докторская диссертация, МГУ.*
- Соловьев М. А.
(1971) *ТМФ* 7, 183.
- Соловьев М. А., Файнберг В. Я.
(1976) *Преприят ФИАН, № 157.*
- Стриттер Р., Вайтман А.
(1966) *РСТ, спии и статистика и все такое..., «Наука», Москва.*
- Такахаша Ю. (Takahashi Y.)
(1969) *An introduction to field quantization, Pergamon Press.*
- Тамм И. Е.
(1972) *Проблемы теоретической физики, Памяти Игоря Евгеньевича Тамма, Сборник, «Наука», Москва.*
- Титчмарш Е.
(1951) *Теория функций, Гостехиздат, Москва.*
- Томонага С. (Tomonaga S.)
(1946) *Progr. Theor. Phys.* 1, 27.
- Умегава Х.
(1958) *Квантовая теория поля, ИЛ, Москва.*
- Файнберг В. Я.
(1967) *Преприят ФИАН, № 137.*
- Фаустов Р. Н.
(1972) *ЭЧАЯ* 3, вып. 1, 238.
- Фейнберг Г., Пайс А. (Feinberg G., Pais A.)
(1963) *Phys. Rev.* 131, 2724; 133B, 477.
- Фейнман Р. (Feynman R. P.)
(1949) *Phys. Rev.* 76, 749; 76, 769;
(1968) *Характер физических законов, «Мир», Москва.*
- Фрадкин Е. С.
(1960) *Докторская диссертация, ИТЭФ, Москва;*
(1963) *Nucl. Phys.* 49, 624.
- Харари Ф.
(1973) *Теория графов, «Мир», Москва.*
- Харди Г.
(1951) *Расходящиеся ряды, ИЛ, Москва.*
- Харিশ-Чандра (Harish-Chandra)
(1946) *Proc. Roy. Soc.* 186, 502.
- Хильдебранд Р. (Hildebrand R. H. et al.)
(1972) *Phys. Lett.* 40B, 699.
- Хори С. (Hori S.)
(1952) *Progr. Theor. Phys.* 7, 578.

- Шапиро П.
(1972) *Теория гиперфункций, «Мир», Москва.*
- Швебер С.
(1963) *Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, Москва.*
- Швингер Ю. (Schwinger J.)
(1948) *Phys. Rev.* 74, 1439;
(1959) *Phys. Rev.* 115, 721;
(1973) *Частицы, источники, поля, «Мир», Москва.*
- Штюкельберг Е., Вандерс Г. (Stueckelberg E., Vanders G.)
(1954) *Helv. Physica Acta* 27, 667.
- Юкава Х. (Yukawa H.)
(1950) *Phys. Rev.* 77, 219; 80, 1047.
- Янг К., Фельдман Д. (Yang C. N., Feldman D. F.)
(1950) *Phys. Rev.* 79, 972.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адлера тождество 354, 358
- Баргмана — Вигнера уравнение 281
- Вайберга — Салама модель 313, 344
 Вайтмана функции 100
 Вакуумные петли 177, 186
 — состояния 25, 87, 106
 Вика представление 40
 — теорема 36, 44, 133, 333
 — T -произведение 40, 109, 319
 Волновой пакет 78 и д.
- Гайзенберга оператор 27, 117
 — представление 15, 30
 — уравнение 21, 354
 Гамильтониан, нормальная форма 24
 Гильбертово пространство 25, 87, 107
 — — сепарабельное 25
 Грина функции 37, 95 и д.
- Дайсона времени упорядочение 35, 109
 — уравнение 302
 Дивизор 278
 Дирака спинор 270
 — уравнение 277
 «Духи» 106, 305
 Дэффина — Кеммера перестановочные соотношения 279, 282
- Иоста — Лемана — Дайсона представление 195
- Калибровочная инвариантность 239
 Каоноические перестановочные соотношения 15, 21
 Каоноическое квантование 21, 23
 Карлемана теорема 57
- Клейна — Гордона уравнение 16, 79, 284
 Коши задача 15, 21, 103
 Кутковского правило 154, 164
- Локальные обобщенные функции 56 и д.
 Лоренца преобразования 19, 62, 278
 — условие 97, 243
- Матрица рассеяния 17 и д.
 — —, градиентная инвариантность 255, 332
 — —, интегрируемость 89
 — —, полнота и спектральность 87
 — —, представление в форме Вика 40
 — —, принцип соответствия 90
 — —, причинность 91, 191
 — —, расширение за массовую поверхность 89
 — —, релятивистская ковариантность 87
 — —, стабильность 89
 — —, существование вакуума 87
 — —, унитарность 89, 175, 186
 Меллина представление 137, 248
 Минковского пространство 151
- Нелокальные обобщенные функции 62, 75
- Обобщенные функции умеренного роста 57
- Парсевала равенство 249
 Паули — Вилларса регуляризация 239, 286, 320, 355
 — — формфактор 17, 82
 Поляризация вакуума 253, 294
 Порядок целой функции 53, 80, 132

- Представление взаимодействия 26, 30
 Принцип «минимальности» электромагнитного взаимодействия 240
 Проектирующая последовательность функций 67, 70, 194
 — — —, носитель 68
 Прока уравнение 284
 Пропагатор 133 и д.
 Пэли — Виенера теорема 249
- Уорда тождество 261, 270, 291
 Условие асимптотической полноты 16
 — интегрируемости 14, 89, 212
- Фейнмана диаграммы 44, 125 и д.
 Фирца тождество 335
 Фока представление 22, 29
 — пространство 25, 26, 35
 Формфактор 14, 15 и д.

Радиус обрезания 264
 Регуляризация 100, 136 и д.

Суперпропагатор 126, 139, 173, 301

Тип целой функции 53
 Томонага — Швингера уравнение 14, 17

Ультрафиолетовое обрезание 31, 35
 Ультрафиолетовые расходимости 11, 28, 212, 313

Хаага теорема 28, 32, 205

Челлена — Лемана представление 303

Шварца пространство 130
 Шредингера уравнение 22, 24 и д.

Эйлера уравнение 21

Янга — Миллса поля 313
 Янга — Фельдмана уравнения 16