УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ
ИМПЕРАТОРСКАГО
МОСКОВСКАГО УНИВЕРСИТЕТА.

2112

ОТДѢЛЪ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКІЙ.

ВЫПУСКЪ ПЯТНАДЦАТЫЙ.

МОСКВА.
Университетская типографія, на Страстномъ бульварѣ.
1899.

УРАВНЕНІЯ
СЪ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
2-го ПОРЯДКА
ПО ДВУМЪ НЕЗАВИСИМЫМЪ ПЕРЕМѢННЫМЪ.

ОБЩАЯ ТЕОРІЯ ИНТЕГРАЛОВЪ; ХАРАКТЕРИСТИКИ.

Д. Ѳ. Егорова.

Ученые записки Императорск. Моск. Ун-та. 1899 вып 15

ВВЕДЕНІЕ.

Уравненія съ частными производными 2-го порядка впервые появляются въ анализѣ по поводу одной задачи физики. Задавшись цѣлью опредѣлить форму колеблющейся струны, d'Alembert *) пришелъ къ уравненію

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

которое отличается отъ обычнаго уравненія, извѣстнаго въ настоящее время подъ названіемъ уравненія звучащей струны

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

лишь отсутствіемъ множителя a^2. Интегралъ полученнаго имъ уравненія d'Alembert даетъ въ видѣ

$$y = \Psi(t + x) + \Gamma(t - x),$$

гдѣ Ψ и Γ — произвольныя функціи. Изъ начальныхъ условій задачи онъ затѣмъ получаетъ $\Gamma(t) = -\Psi(t)$ и приходитъ еще къ слѣдующимъ ограниченіямъ, касающимся вида функціи Ψ: функція эта должна быть четной и періодической съ періодомъ $2l$, если l — длина струны. Послѣднія замѣчанія d'Alembert-а вызвали возраженія со стороны Euler-a**), и такимъ образомъ, возникъ знаменитый споръ, въ которомъ принялъ участіе также D. Bernoulli ***) и который въ сущности касался вопроса

*) Sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration.—Histoire de l'Académie de Berlin, 1747, t. III.

**) Sur la vibration des cordes, l. c.

***) l. c., t. IX, année 1753.

о возможности представить произвольную функцію тригонометрическимъ рядомъ. Вопросъ этотъ впрочемъ не былъ поставленъ прямо: время для его разрѣшенія тогда еще не настало. Въ трудахъ Euler-а мы встрѣчаемъ вслѣдъ за уравненіемъ звучащей струны много другихъ уравненій съ частными производными 2-го порядка. Такъ, между прочимъ уравненіе

$$s - \frac{n}{x-y}p + \frac{n}{x-y}q = 0 \text{ *)},$$

до сихъ поръ извѣстно подъ названіемъ уравненія Euler-а. Тому же геометру принадлежитъ способъ интеграціи линейнаго уравненія

$$s = ap + bq + cz$$

подстановкой

$$u = q - az$$

въ случаѣ

$$\frac{da}{dx} = ab + c \text{ **)}.$$

Дальнѣйшіе успѣхи теоріи уравненій съ частными производными 2-го порядка до появленія знаменитаго мемуара *Ampère*'а (17-я и 18-я тетр. Journal de l'Ecole Polytechnique) состояли по преимуществу въ интеграціи новыхъ и новыхъ частныхъ видовъ уравненій: общей теоріи, можно сказать, въ это время еще не существовало. Задачи математической физики приводили къ уравненіямъ все болѣе сложнаго вида, не только съ двумя, но и съ большимъ числомъ независимыхъ перемѣнныхъ, которыя интегрировались различными частными пріемами: но уже вскорѣ собственно аналитическая теорія уравненій съ частными производными 2-го порядка отдѣлилась отъ математической физики, благодаря принципіальной разницѣ въ самой постановкѣ вопроса при изысканіи интеграла даннаго уравненія, въ зависимости отъ того разсматривается ли оно самостоятельно или же какъ уравненіе опредѣленной задачи физики. Дѣйствительно, всякая физическая задача приводитъ къ опредѣленію функціи, удовлетворяющей не только уравненію съ частными производными, но еще нѣкоторымъ *начальнымъ* или *предѣльнымъ* условіямъ, въ силу которыхъ задача является вполнѣ опредѣленной: искомая функція можетъ быть найдена тѣмъ или другимъ пріемомъ (разложеніемъ въ рядъ, при помощи опредѣленныхъ интеграловъ), при чемъ въ выраженіе ея не входитъ никакихъ произвольныхъ величинъ. Между тѣмъ, разъ зада-

*) Euler, Institutiones calculi integralis, t. III.

**) l. c.

чей нашей является опредѣленіе функціи, удовлетворяющей только данному уравненію съ частными производными, то въ выраженіе этой функціи необходимо должны входить произвольныя величины, и является желательнымъ опредѣлить какъ степень произвола самаго общаго рѣшенія, такъ по возможности и само это рѣшеніе. Успѣхи теоріи уравненій съ частными производными 1-го порядка, интегрированіе которыхъ въ случаѣ трехъ перемѣнныхъ Lagrange и Charpit привели къ интегрированію системы обыкновенныхъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій, естественно побуждали или непосредственно добиваться подобныхъ же результатовъ для уравненій съ частными производными 2-го порядка, или стремиться интегрированіе уравненій 2-го порядка привести къ интегрированію уравненій 1-го порядка. Въ этомъ именно направленіи работали Monge, Laplace, Legendre.

Изслѣдованія Monge'а *) касаются уравненій, допускающихъ такъ-называемый промежуточный интегралъ вида

$$U = \varphi(V),$$

гдѣ φ — знакъ произвольной функціи, а U и V — данныя функціи аргументовъ x, y, z, p, q. Уравненіе, которое получается исключеніемъ произвольной функціи, необходимо имѣетъ видъ

$$Lr + 2Ms + Nt + U(rt - s^2) = V,$$

т. е. это есть такъ-называемое билинейное уравненіе: въ частности, если $U = 0$, то имѣемъ уравненіе линейное относительно частныхъ производныхъ 2-го порядка; подобныя уравненія часто называютъ уравненіями Monge'а. Слѣдуетъ, впрочемъ, замѣтить, что для теоріи уравненій съ частными производными 2-го порядка не столько имѣютъ значенія непосредственные результаты изслѣдованій Monge'а въ этой области, сколько общій характеръ его работъ въ области анализа и приложенія анализа къ геометріи. Можно сказать, что въ трудахъ Monge'а мы впервые встрѣчаемся съ послѣдовательно проведенной геометрической интерпретаціей формулъ и выкладокъ анализа: благодаря этому всѣ результаты много выигрываютъ въ ясности и часто является возможность легко рѣшить такіе вопросы, которые безъ помощи геометріи представляли бы значительныя затрудненія. Въ одномъ изъ своихъ мемуаровъ **), самъ Monge говоритъ: „L'Analyse ne peut

*) Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles (Histoire de l'Acad. des Sciences, 1784).

**) Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes (Mémoires des savans étrangers, t. IX, 1775).

que retirer un très-grand avantage de son application à ce genre de Géometrie; car je donne la solution de plusieurs problèmes d'Analyse qu'on aurait peut-être beaucoup de peine à résoudre sans les considérations géométriques". Эти слова ясно показываютъ, что Monge глубоко сознавалъ ту пользу, которую извлекаютъ и геометрія и анализъ изъ болѣе тѣснаго взаимнаго единенія, и видѣлъ возможность примѣненія не только анализа къ геометріи, но и геометріи къ анализу. Въ частности для уравненій съ частными производными 2-го порядка имѣли большое значеніе изслѣдованія Monge'a о семействахъ поверхностей *), въ которыхъ впервые встрѣчается важное понятіе о характеристикахъ семейства, понятіе, которому суждено было сдѣлаться основнымъ во всей теоріи уравненій съ частными производными. Къ сожалѣнію, самъ Monge не извлекъ всей пользы изъ своихъ геометрическихъ работъ въ примѣненіи къ уравненіямъ 2-го порядка. Его результаты, какъ уже было упомянуто, касаются уравненій весьма частнаго вида: для нихъ онъ даетъ извѣстныя дифференціальныя уравненія, такъ называемыя уравненія характеристикъ и ограничивается случаемъ, когда эти уравненія допускаютъ два интегрируемыхъ сочетанія. Что касается до уравненій 1-го порядка, то Monge далъ полную геометрическую теорію ихъ; но во всякомъ случаѣ можно сказать, что идеи Monge'a вполнѣ начинаютъ приносить свои плоды только въ самое послѣднее время, такъ какъ ближайшіе его ученики работали почти исключительно въ области геометріи, а современныя ему и слѣдовавшія за нимъ свѣтила науки въ своихъ изысканіяхъ держались строго аналитическаго направленія.

Изслѣдованія Laplace-a **) касаются линейныхъ уравненій вида

$$s = ap + bq + cz.$$

Laplace даетъ для нихъ методъ преобразованія, посредствомъ котораго въ извѣстныхъ случаяхъ подобное уравненіе можно привести къ уравненію 1-го порядка. Пріемъ, которымъ онъ пользуется, состоитъ въ замѣнѣ z новой функціей

$$u = q - az \text{ или } v = p - bz.$$

Интересно отмѣтить, что линейныя уравненія вида

$$s = ap + bq + cz,$$

*) Monge, Application de l'analyse à la géometrie.

**) Recherches sur le Calcul intégral aux différences partielles (Mémoires de l'Acad. de Sciences, 1773).

интегрируемыя методомъ Laplace'a,—единственныя уравненія этого типа, интегрированіе которыхъ можетъ быть приведено къ интегрированію уравненій 1-го порядка или, что безразлично, къ интегрированію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Изслѣдованія Legendre'a касаются отчасти линейныхъ уравненій вида

$$ar + bs + ct + lp + mq + nz + u = 0,$$

отчасти нѣкоторыхъ другихъ вопросовъ болѣе частнаго характера: отмѣтимъ здѣсь преобразованіе, которымъ пользовался Legendre*) при интегрированіи уравненія минимальныхъ поверхностей

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0.$$

Преобразованіе это, извѣстное теперь подъ названіемъ преобразованія Lagendre'a, состоитъ въ замѣнѣ перемѣнныхъ x, y новыми независимыми перемѣнными p, q и функціи z новой функціей

$$v = px + qy - z.$$

гдѣ p, q, какъ обычно, означаютъ частныя производныя z по x и y. Есть основанія полагать, что Monge еще ранѣе изъ геометрическихъ соображеній приходилъ къ этому же преобразованію (см. Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, note XXX). Вопросъ о пріоритетѣ представляетъ здѣсь интересъ, такъ какъ преобразованіе Legendre'a—первое изъ преобразованій того типа, которыя въ настоящее время извѣстны подъ названіемъ преобразованій прикосновенія и общая теорія которыхъ принадлежитъ S. Lie.

Въ 1815 году въ журналѣ Политехнической школы появился мемуаръ **) Ampère'a, представляющій первую попытку создать общую теорію уравненій съ частными производными 2-го и высшихъ порядковъ.

Въ началѣ своего мемуара Ampère ставитъ опредѣленіе общаго интеграла даннаго уравненія, формулируя его слѣдующимъ образомъ: для того, чтобы какое-либо соотношеніе между z, x, y служило общимъ интеграломъ уравненія $F = 0$, необходимо, чтобы всѣ соотношенія, которыя могутъ быть получены дифференцированіемъ даннаго и исключеніемъ входящихъ въ него произвольныхъ величинъ, были слѣдствіями

*) Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux dérivées partielles (Mém. de l'Ac. des Sciences, 1787).

**) Considérations générales sur les intégrales des équations aux différentielles partielles par A. M. Ampère (Journal de l'Ecole Polytechnique, t. X, 17-e cahier, 1815).

уравненія $F=0$ и уравненій, получаемыхъ его дифференцированіемъ. Хотя изъ словъ Ampère'а прямо и не слѣдуетъ, чтобы онъ считалъ приведенное свойство достаточнымъ для опредѣленія общаго интеграла, но изъ всего дальнѣйшаго можно заключить, что таково было его убѣжденіе, и потому приходится ему сдѣлать упрекъ въ нѣкоторой неточности. Оказывается, именно, что иногда возможно установить такое соотношеніе между z, x, y, которое удовлетворяетъ условію, поставленному Ampère'омъ, но представляетъ вмѣстѣ съ тѣмъ лишь частный интегралъ даннаго уравненія. Первый примѣръ подобнаго рода былъ указанъ Lie *) (семейство поверхностей постоянной кривизны, получаемыхъ построеніемъ Bianchi изъ какой-нибудь одной данной, образуетъ такого рода частный интегралъ уравненія $s^2-rt=\frac{(1+p^2+q^2)^2}{a^2}$); въ сочиненіи **Goursat** «Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre» приведены и другіе примѣры (t. II, ch. VIII, p. p. 211—214). Далѣе Ampère задается вопросомъ о формѣ общаго интеграла и различаетъ два класса общихъ интеграловъ, при чемъ къ первому относитъ интегралы, зависящіе отъ произвольныхъ функцій, но не содержащіе частныхъ квадратуръ; подъ частными квадратурами онъ разумѣетъ такія квадратуры, въ которыхъ подъинтегральная функція есть выраженіе, зависящее отъ произвольныхъ функцій и отъ перемѣнныхъ, которыя при интеграціи играютъ роль параметровъ. Такъ, напримѣръ, выраженіе

$$z=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+2u\sqrt{y})e^{-u^2}du,$$

гдѣ φ—произвольная функція, содержитъ частную квадратуру: оно служитъ общимъ интеграломъ уравненія $r=q$. Дальнѣйшія разсужденія Ampère'а относятся почти исключительно къ интеграламъ перваго класса. Для нихъ онъ между прочимъ доказываетъ теорему, что число независимыхъ произвольныхъ функцій, входящихъ въ выраженіе интеграла, должно равняться порядку уравненія. Въ послѣдней главѣ Ampère отчасти намѣчаетъ путь, который можетъ привести къ опредѣленію интеграла 1-го класса или которымъ можно убѣдиться, что уравненіе такого интеграла не допускаетъ. Къ мемуару, помѣщенному въ 17-й тетради «Журнала Политехнической Школы», непосредственно примыкаетъ второй мемуаръ *) Ampère'а, помѣщенный въ 18-й тетради того же журнала.

*) Norwegisches Archiv, B. V.

**) Mémoire contenant l'Application de la Théorie exposée dans le XVII-e Cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique à l'Intégration des Équations aux Différentielles partielles du premier et du second ordre. (t. XI, c. 18).

Онъ посвященъ примѣненію результатовъ перваго мемуара къ уравненіямъ 1-го и 2-го порядковъ, изъ послѣднихъ, главнымъ образомъ, къ уравненіямъ билинейнымъ, для которыхъ Ampère, исходя изъ другой точки зрѣнія, выводитъ результаты Monge'а и пополняетъ ихъ новыми соображеніями. Особый интересъ представляютъ преобразованія, которыми пользуется Ampère въ послѣднихъ главахъ; въ нихъ можно видѣть зародышъ общей теоріи преобразованій прикосновенія. Оба мемуара Ampère'а совершенно справедливо считаются образцовыми по глубинѣ мысли и послѣдовательности въ примѣненіи одного основного принципа во всѣхъ частныхъ выводахъ; но вмѣстѣ съ тѣмъ они страдаютъ однимъ кореннымъ недостаткомъ. Дѣйствительно, исходнымъ пунктомъ всѣхъ разсужденій Ampère'а являются предположенія о формѣ общаго интеграла, а такой путь едва ли можно признать правильнымъ въ общей теоріи уравненій съ частными производными, и было бы пред почтительнѣе за точку отправленія избрать соображенія, относящіяс не къ интегралу уравненія, а къ самому уравненію. Благодаря отмѣчен ному коренному недостатку, Ampère вынужденъ почти исключительн говорить объ уравненіяхъ, допускающихъ интегралъ 1-го класса. Так какъ для интеграловъ съ частными квадратурами трудно построит какія-либо соображенія общаго характера. Такимъ образомъ, всѣ почт результаты Ampère'а получены въ частномъ предположеніи, хотя нѣк торые изъ нихъ справедливы и въ самомъ общемъ случаѣ. Наконец слѣдуетъ замѣтить, что вопросъ о формѣ интеграловъ, не принадл жащихъ къ 1-му классу, остается въ сущности совершенно открытым и нѣтъ никакихъ основаній полагать, что „второй“ классъ Ampère исчерпывается интегралами съ частными квадратурами.

Результаты Ampère'а, относящіеся къ билинейнымъ уравненіям были впослѣдствіи пополнены Boole'емъ *) и Bour'омъ **).

Работой, которая завершаетъ весь разсмотрѣнный періодъ раз тія теоріи уравненій съ частными производными, можно считать диссе тацію покойнаго академика В. Г. Имшенецкаго—„Изслѣдованіе спос бовъ интегрированія уравненій съ частными производными 2-го поряд Казань, 1868“. Хотя она и появилась въ сравнительно болѣе поз нее время, но написана главнымъ образомъ подъ вліяніемъ и

*) Ueber die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$Rr+Ss+Tt+U(s^2-rt)=V$$

(Crelle's Journ., B. 61) — Treatise on Differential Equations, Suppl. vol.

**) Sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier et second ordre (Journal de l'Ecole Polyt., Cahier 39).

Ampère'а и представляетъ прекрасное изложеніе теоріи уравненій 2-го порядка въ томъ ея состояніи, въ которомъ она находилась непосредственно послѣ Ampère'а. Послѣдняя глава дисертаціи посвящена удачному примѣненію метода измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, даннаго Langrange'емъ, къ билинейнымъ уравненіямъ. В. Г. Имшенецкій доказываетъ, что пользуясь частнымъ интеграломъ подобнаго уравненія, содержащимъ три произвольныхъ постоянныхъ, можно это уравненіе преобразовать въ уравненіе линейное относительно частныхъ производныхъ 2-го порядка. Интересно отмѣтить, что преобразованіе В. Г. Имшенецкаго есть въ сущности преобразованіе прикосновенія, притомъ довольно общаго типа. Благодаря высокимъ достоинствамъ изложенія и стройности плана, изслѣдованіе В. Г. Имшенецкаго *) справедливо считается однимъ изъ классическихъ трудовъ въ области теоріи уравненій съ частными производными.

Второй періодъ въ исторіи уравненій 2-го порядка по всей справедливости слѣдуетъ начинать со времени появленія изслѣдованій Cauchy **) объ интегралахъ уравненій съ частными производными. Въ примѣненіи къ уравненіямъ 2-го порядка, притомъ пользуясь обычной геометрической интерпретаціей перемѣнныхъ z, x, y Декартовыми координатами точки пространства, мы можемъ результаты, полученные Cauchy, формулировать слѣдующимъ образомъ: если имѣемъ произвольную кривую C и описанную развертывающуюся поверхность D, то существуетъ (вообще говоря) опредѣленное число интегральныхъ поверхностей даннаго уравненія 2-го порядка, проходящихъ черезъ C и касающихся вдоль ея поверхности D. Задача, состоящая въ опредѣленіи соотвѣтствующаго интеграла, получила названіе задачи Cauchy. Согласно предыдущему, общій интегралъ даннаго уравненія можно опредѣлить какъ такое соотношеніе между z, x, y и нѣкоторыми произвольными величинами, которое дастъ полное рѣшеніе задачи Cauchy для произвольныхъ кривой C и поверхности D. Такое опредѣленіе общаго интеграла впервые было explicite высказано, впрочемъ, гораздо позднѣе Darboux. Самыя теоремы Cauchy въ примѣненіи къ уравненіямъ съ част-

*) Въ переводѣ Hoüel-я: Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes. (Grunert's Archiv, 1872, B. 54).

**) Mémoire sur un théorème fondamental en calcul intégral (Comptes rendus, t. XIV).—Mémoire sur l'emploi du calcul des limites dans l'intégration des équations aux dérivées partielles (ibid. t. XV, 1812).—Mémoire sur l'application du calcul des limites à l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles (ibid.).

ными производными вполнѣ строго были доказаны тоже лишь впослѣдствіе; доказательство ихъ принадлежитъ С. В. Ковалевской *). Разсужденія, которыми приходится здѣсь пользоваться, необходимо предполагаютъ, что перемѣнныя z, x, y принимаютъ не только дѣйствительныя, но и комплексныя значенія, такъ какъ въ основѣ всего доказательства лежатъ теоремы теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго, создателемъ которой, замѣтимъ между прочимъ, тоже былъ Cauchy. Такимъ образомъ, является новая существенная особенность, которая аналитическую теорію уравненій съ частными производными отдаляетъ отъ теоріи такихъ же уравненій въ математической физикѣ, такъ какъ во всякой физической задачѣ перемѣнныя по существу дѣла должны принимать лишь дѣйствительныя значенія. Роль, аналогичную задачѣ Cauchy, въ математической физикѣ играетъ задача, которая въ случаѣ уравненія

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

(уравненія Laplace'а) носитъ названіе задачи *Dirichlet*. Она заключается въ опредѣленіи дѣйствительной функціи дѣйствительныхъ перемѣнныхъ, удовлетворяющей данному уравненію, по даннымъ значеніямъ ея на границѣ нѣкоторой области, внутри которой эта функція, равно какъ ея производныя, должны быть конечными и непрерывными. Эта задача несомнѣнно представляетъ самостоятельный математическій интересъ: рѣшеніемъ ея занимались, между прочимъ, Riemann, Gauss, Dirichlet, Schwarz, C. Neumann, Harnack. Въ самое послѣднее время изслѣдованія Picard-а, Poincaré и другихъ позволили подобную же задачу разрѣшить для уравненій гораздо болѣе общаго типа. Интересно еще отмѣтить, что Riemann, исходя изъ рѣшенія задачи Dirichlet для уравненія

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

построилъ всю теорію функцій комплекснаго перемѣннаго. Изъ работъ Cauchy упомянемъ еще о его способѣ интеграціи уравненій съ частными производными 1-го порядка **), основанномъ на преобразованіи перемѣннаго и приводящемъ задачу къ интеграціи системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій. Эта работа Cauchy оказала вліяніе

*) Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen. (Crelle's Journal, B. 80).

**) Bulletin de la Société Philomatique, 1819.—Exercices d'analyse et de physique mathématiques, t. II.

на большинство последующихъ изслѣдованій по теоріи уравненій 2-го порядка.

Главные успѣхи, достигнутые въ періодъ со времени появленія трудовъ Cauchy и почти до нашихъ дней, заключаются въ слѣдующемъ: во-первыхъ, окончательно разрѣшенъ вопросъ о приведеніи интегрированія уравненія съ частными производными 2-го порядка къ интегрированію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій (выяснена невозможность этого въ общемъ случаѣ и даны методы, приводящіе къ рѣшенію задачи въ случаѣ ея возможности), и во-вторыхъ, введено важное понятіе характеристики для уравненія произвольнаго вида.

Первый вопросъ разрѣшенъ въ трудахъ А. Ю. Давидова, Darboux, В. В. Преображенскаго, Н. Я. Сонина, К. М. Петерсона.

А. Ю. Давидовъ *) ведетъ разсужденія для уравненія произвольнаго порядка. Вводя новое независимое перемѣнное, онъ помощью остроумныхъ, но нѣсколько искусственныхъ преобразованій получаетъ систему уравненій, которыя можно разсматривать какъ обыкновенныя дифференціальныя, и замѣчаетъ, что въ томъ случаѣ, когда ихъ интеграція возможна (число уравненій на двѣ единицы меньше числа перемѣнныхъ), получается интегралъ даннаго уравненія съ частными производными.

Darboux **) тоже пользуется методомъ измѣненія перемѣннаго и, примѣняя его совершенно такъ же, какъ это дѣлаетъ Cauchy въ своемъ способѣ интеграціи уравненій 1-го порядка, весьма просто получаетъ тѣ же самыя уравненія, которыя даетъ А. Ю. Давидовъ для 2-го порядка. Затѣмъ Darboux указываетъ, какъ можно получить системы уравненій подобнаго же рода, но содержащихъ производныя z любого порядка: для каждаго порядка получается по двѣ системы. Если одна изъ такихъ системъ допускаетъ интегрируемое сочетаніе $dV=0$, то уравненіе съ частными производными $V=a$ и данное уравненіе имѣютъ семейство общихъ интеграловъ, зависящее отъ одной произвольной функціи. Если имѣемъ два интегрируемыхъ сочетанія $dV=0$, $dV_1=0$, то въ такомъ же соотношеніи съ даннымъ уравненіемъ находится уравненіе $V_1=f(V)$, гдѣ f — произвольная функція. Въ томъ случаѣ, когда имѣется по два интегрируемыхъ сочетанія для двухъ системъ, Darboux указываетъ, что общій интегралъ даннаго уравненія можетъ быть легко найденъ интегрированіемъ системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ

*) Уравненія съ частными дифференціалами какого-нибудь порядка (Математическій Сборникъ, т. I, 1866).

**) Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre (Annales de l'École Normale, t. VII, 1870). Comptes Rendus, t. LXX.

уравненій. Замѣтимъ здѣсь же, что и въ томъ случаѣ, когда только одна изъ системъ Darboux допускаетъ два интегрируемыхъ сочетанія, общій интегралъ находится интегрированіемъ системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій; на это обстоятельство впервые указалъ Maurice Lévy *). Исходя изъ своихъ результатовъ, Darboux предлагаетъ такой методъ для изысканія интеграла даннаго уравненія: составлять послѣдовательно системы вышеупомянутыхъ дифференціальныхъ уравненій все высшаго и высшаго порядковъ и искать ихъ интегрируемыя сочетанія. Методъ этотъ по всей справедливости получилъ названіе метода Darboux. Изъ предыдущаго явствуетъ, что онъ представляетъ одновременно распространеніе методовъ Cauchy и Jacobi на уравненія 2-го порядка, какъ это отмѣчаетъ и самъ Darboux.

Изслѣдованіе В. В. Преображенскаго **) посвящено упрощенію выводовъ и пополненію работы А. Ю. Давидова; въ результатахъ, касающихся уравненій 2-го порядка, оно совпадаетъ съ двумя разобранными замѣтками Darboux.

Почти то же самое можно сказать и про работу Н. Я. Сонина ***). Особенность ея составляетъ удачный и остроумный пріемъ автора, который заключается въ томъ, что величины p, q, r, s, t непосредственно вводятся какъ перемѣнныя, связанныя дифференціальными соотношеніями

$$dz-pdx-qdy=0$$
$$dp-rdx-sdy=0$$
$$dq-sdx-tdy=0.$$

Изслѣдованія К. М. Петерсона****) отличаются необыкновенной оригинальностью метода и по духу своему, пожалуй, ближе всего къ работамъ Monge'a. Основой всѣхъ разсужденій автора служитъ понятіе о такъ-называемыхъ имъ „условныхъ“ дифференціальныхъ уравненіяхъ. Терминъ этотъ слѣдуетъ понимать слѣдующимъ образомъ: если изъ нѣкоторыхъ соображеній оказывается, что при исчезновеніи дифференціальнаго выраженія A необходимо исчезаетъ и нѣкоторое другое D, то уравненіе $D=0$ называется условнымъ, а уравненіе $A=0$ — усло-

*) C. R., 1872.

**) Объ интегрированіи уравненій съ частными производными высшихъ порядковъ (Математическій Сборникъ, т. VII, 1874).

***) Объ интегрированіи уравненій съ частными производными 2-го порядка (ibidem).

****) Объ интегрированіи уравненій съ частными производными (Математич. Сборн. т.т. VIII, IX, X).

віемъ; если интегралъ второго есть $\varphi = a$, а перваго $f = b$, то b постоянно лишь при постоянномъ a, и слѣдовательно, вообще имѣемъ $b = \psi(a)$ или $f = \Psi(\varphi)$, гдѣ ψ — произвольная функція. Составляя для даннаго уравненія съ частными производными системы подобныхъ условныхъ уравненій съ перемѣнными $x, y, z, p, q, r, s, t, z'''$..... Петерсонъ получаетъ въ случаѣ уравненія 2-го порядка тѣ же системы, какъ и Darboux.

Во всѣхъ перечисленныхъ работахъ встрѣчаются однѣ и тѣ же системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, число которыхъ на двѣ единицы меньше числа входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ. Вездѣ эти уравненія разсматриваются только въ томъ случаѣ, когда они допускаютъ интегрируемыя сочетанія, вѣроятно въ силу того, что всѣ авторы задаются исключительно цѣлію опредѣлить общій интегралъ даннаго уравненія съ частными производными: въ большинствѣ перечисленныхъ работъ упомянутыя дифференціальныя уравненія являются, кромѣ того, по существу уравненіями съ частными производными, не заключающими производныхъ по одному изъ перемѣнныхъ, и потому лишь условно могутъ быть разсматриваемы какъ обыкновенныя дифференціальныя уравненія. Между тѣмъ, эти именно системы уравненій, разсматриваемыя независимо, въ самомъ общемъ случаѣ приводятъ къ понятію о такъ-называемыхъ характеристикахъ (точнѣе характеристическихъ многообразіяхъ) уравненія съ частными производными 2-го порядка.

Впервые *) встрѣчаемъ это понятіе для произвольнаго уравненія 2-го порядка въ сравнительно мало извѣстномъ сочиненіи P. du Bois-Reymond „Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln. Erstes Heft—die Theorie der Charakteristiken. Leipzig, 1864“. Опредѣленіе, которое даетъ характеристикамъ du Bois-Reymond, сводится къ тому, что для кривой C и развертывающейся поверхности D, опредѣляемыхъ уравненіями характеристики, задача Cauchy должна становиться неопредѣленной. Исходя изъ этого опредѣленія, онъ получаетъ дифференціальныя уравненія между перемѣнными x, y, z, p, q, r, s, t, совпадающія съ уравненіями Давидова и Darboux. Но изслѣдованія du Bois-Reymond-а остались совершенно незамѣченными, что объясняется, вѣроятно, неудачнымъ выборомъ геометрическаго истолкованія уравненій 2-го порядка въ его книгѣ и

*) Вопросъ о пріоритетѣ, впрочемъ, спорный. Съ нѣкоторымъ правомъ можно его разрѣшать въ пользу Mainardi (Consequenze a cui conduce il metodo di Charpit e Lagrange applicato alle equationi diff. part. di 2º ordine — Giornale di I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti, t. IX. 1856).

отсутствіемъ у него какихъ-либо результатовъ, относящихся собственно къ интеграціи уравненій.

Понятіе о характеристикѣ произвольнаго уравненія 2-го порядка встрѣчаемъ далѣе у Bäcklund-а *), у Lie **), но полную теорію ихъ далъ только Goursat ***). Согласно этой теоріи, характеристическое многообразіе n-го порядка опредѣляется той самой системой дифференціальныхъ уравненій между $x, y, z, p, q, r, \ldots z^{(n)}, z_{,}^{(n-1)}, \ldots, z_{n}$, которая получается при примѣненіи метода Darboux. Характеристики уравненія 2-го порядка обладаютъ свойствами вполнѣ аналогичными извѣстнымъ свойствамъ характеристикъ уравненія 1-го порядка, чѣмъ и объясняется появленіе дифференціальныхъ уравненій, опредѣляющихъ ихъ, при всѣхъ попыткахъ свести интегрированіе уравненія 2-го порядка къ интегрированію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Къ двумъ замѣткамъ Darboux, проанализированнымъ выше, примыкаетъ цѣлый рядъ работъ другихъ авторовъ, посвященныхъ дальнѣйшему развитію и примѣненію его метода. Изъ числа ихъ упомянемъ лишь объ изслѣдованіяхъ Goursat ****), посвященныхъ главнымъ образомъ уравненіямъ, для которыхъ двѣ системы характеристикъ сливаются въ одну, и о небольшой замѣткѣ E. von Weber-а †), въ которой онъ доказываетъ, что уравненіями, интегрируемыми методомъ Darboux, исчерпывается классъ уравненій, для которыхъ изысканіе общаго интеграла приводится къ интегрированію системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Изъ другихъ работъ разсматриваемаго періода, посвященныхъ болѣе частнымъ вопросамъ теоріи уравненій 2-го порядка, слѣдуетъ

*) Ueber partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung, die intermediäre erste Integrale besitzen (Mathematische Annalen, B. XI u. XIII).—Zur Theorie der Charakteristiken der partiellen Differenfialgleichungen zweiter Ordnung (Ibid. B. XIII).

**) Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen (Leipziger Berichte, 1895).

***) Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre et sur la théorie des intégrales intermédiaires (Acta Mathematica, t. 19).

****) Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre (C. R. 1896).—Sur les intégrales intermédiaires des équations aux dérivées partielles du second ordre (C. R., t. CXII, 1892).—Recherches sur les systèmes en involution d'équations du second ordre (Journal de l'Ecole Polytechnique, II-e série, 3-e cahier, 1897).—Sur la méthode de M. Darboux (C. R. CXX).

†) Ueber partielle Differentialgleichungen II. Ordnung, die sich durch gewöhnliche Differentialgleichungen integrieren lassen (Sitzungsberichte der bayer. Akademie der Wissensch. Bd. XXVI, 1896).

упомянуть прежде всего прекрасныя изслѣдованія Darboux о линейныхъ уравненіяхъ вида

$$s = ap + bq + cz,$$

помѣщенныя во II томѣ его курса по теоріи поверхностей *), затѣмъ изслѣдованія E. Cosserat, посвященныя доказательству результатовъ мемуара Moutard-а**) объ уравненіяхъ, допускающихъ общій интегралъ вида

$$z = f(x, y, X, X', \ldots, X^{(n)}, Y, Y', \ldots, Y^{(n)}),$$

гдѣ X и Y — произвольныя функціи x и y. Работа Cosserat помѣщена въ видѣ примѣчанія (note III) въ томъ же курсѣ Darboux по теоріи поверхностей. Интегралъ того вида, который предполагаетъ Moutard, принадлежитъ, очевидно, къ числу интеграловъ 1-го класса по терминологіи Ampère'а; по этому поводу не лишнее будетъ замѣтить, что уравненія, допускающія интегралъ 1-го класса, необходимо интегрируются методомъ Darboux.

Интересные результаты содержатъ работы Bäcklund-а ***) объ особаго рода преобразованіяхъ уравненій 2-го порядка.

Наконецъ, упомянемъ еще о двухъ замѣткахъ Borel-я ****), касающихся опредѣленія общаго интеграла линейнаго уравненія

$$Ar + 2Bs + Ct + Dp + Eq + Fz = 0$$

по извѣстному частному интегралу $\varphi(x, y, \alpha)$, содержащему одинъ произвольный параметръ α. Выраженіе

$$z = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi(x, y, \alpha) f(\alpha) d\alpha,$$

гдѣ $f(\alpha)$ — произвольная функція α, удовлетворяетъ данному уравненію: Borel рѣшаетъ вопросъ, при какомъ выборѣ частнаго интеграла $\varphi(x, y, \alpha)$ это выраженіе есть *общій* интегралъ.

*) Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. II.

**) Recherches sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes (C. R., t. LXX).

***) Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (Math. Ann., B. XVII). — Zur Theorie der Flächentransformationen (Ibid. B. XIX).

****) Sur les équations linéaires aux dérivées partielles (C. R., 1895); — Remarques sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles (Bulletin des Sciences mathématiques, 1895).

Первый періодъ исторіи уравненій 2-го порядка мы закончили диссертаціей В. Г. Имшенецкаго, которая подводитъ итоги всѣмъ изслѣдованіямъ, начиная съ Euler-а и кончая Ampère'омъ и его ближайшими послѣдователями. Равнымъ образомъ второй періодъ, который мы начали съ изслѣдованій Cauchy, съ такимъ же правомъ можемъ закончить курсомъ Goursat *) по теоріи уравненій 2-го порядка. Главное содержаніе его составляетъ изложеніе метода Darboux со всѣми его примѣненіями; но можно сказать, что нѣтъ такой болѣе или менѣе значительной работы по теоріи уравненій 2-го порядка, которая не была бы тамъ хотя вкратцѣ затронута. Книга Goursat содержитъ кромѣ того много указаній по литературѣ вопроса, что дѣлаетъ ее особенно цѣнной. Автору можно поставить лишь въ упрекъ, что онъ почти вездѣ даетъ одинъ сырой матеріалъ, благодаря чему единства мысли и плана въ его книгѣ искать нельзя.

Новый періодъ въ развитіи теоріи уравненій 2-го порядка, мнѣ кажется, слѣдуетъ начинать съ работъ S. Lie. Что касается до его собственныхъ изысканій въ этой области **), то они имѣютъ большею частью отрывочный характеръ и почти полностью вошли въ курсъ Goursat. Но, упоминая выше о работахъ Lie, я разумѣлъ главнымъ образомъ созданную имъ общую теорію преобразованій прикосновенія и новую теорію уравненій съ частными производными 1-го порядка. По поводу первой скажу, не вдаваясь въ подробности, что она представляетъ могущественное средство для преобразованія уравненій и приведенія ихъ къ простѣйшему виду. Это ясно хотя бы уже изъ той пользы, какую принесли въ свое время частные виды преобразованій прикосновенія въ рукахъ Legendre'а и Имшенецкаго. Въ курсѣ Goursat встрѣчаемъ нѣкоторыя примѣненія общей теоріи, но мнѣ думается, что будущая ея роль въ изслѣдованіи уравненій 2-го порядка несравненно болѣе значительная.

Перехожу къ работамъ Lie въ области теоріи уравненій 1-го порядка. Понятно, что онѣ имѣютъ для насъ лишь косвенное значеніе, главнымъ образомъ, по своему духу и по пріемамъ изслѣдованія; но

*) Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. T. I, 1896; t. II, 1898. Paris, Hermann.

**) Discussion der Differentialgleichung $s = f(z)$. (Archiv. for Mathem. og Nat. t. VI. Christiania. 1880). — Ueber Complexe, insbesondere Linien-und Kugel-Complexe mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen (Math. Ann., B. V). — Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung (Berichte über die Verhandl. der K. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, 1895). — Ueber Differentialinvarianten (Math. Ann., XXIV), и т. д.

именно съ этой стороны работы Lie и имѣютъ особую цѣну. Самую задачу интегрированія уравненія 1-го порядка $F(x, y, z, p, q) = 0$ *) Lie ставитъ слѣдующимъ образомъ: найти зависимость между перемѣнными x, y, z, p, q, въ силу которой имѣли бы мѣсто два соотношенія:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$
$$dz - pdx - qdy = 0.$$

Такая постановка вопроса не вполнѣ нова: можно ее, напримѣръ, встрѣтить еще у Pfaff-a **); но Lie проводитъ этотъ взглядъ послѣдовательно черезъ всю теорію, считая x, y, z, p, q самостоятельными перемѣнными, благодаря чему понятіе объ интегралѣ уравненія замѣняется болѣе общимъ понятіемъ интегральнаго многообразія и вся теорія выигрываетъ въ общности и симметріи аналитическихъ выкладокъ. Съ другой стороны является возможность геометрическую интерпретацію привести въ болѣе тѣсную связь съ аналитической теоріей, и въ этомъ отношеніи работы Lie значительно отличаются отъ большинства предыдущихъ работъ. Между тѣмъ какъ обыкновенно геометрическая интерпретація служитъ лишь для бóльшаго уясненія результатовъ, у Lie она идетъ параллельно со всѣмъ ходомъ разсужденій, благодаря чему дѣлаются излишними многія сложныя выкладки и каждый шагъ впередъ получаетъ особенно ясное и наглядное значеніе. Можно сказать, что методъ Lie есть аналитически-геометрическій; по характеру своему онъ ближе всего подходитъ къ такъ-называемому методу сокращенныхъ обозначеній въ аналитической геометріи. Вся теорія уравненій 1-го порядка въ изложеніи Lie отличается необыкновенной простотой и всѣ методы интеграціи сводятся въ сущности къ одному. Изслѣдованія Lie, посвященныя уравненіямъ 1-го порядка, а также преобразованіямъ прикосновенія, помѣщены въ «Mathematische Annalen», въ «Göttingener Nachrichten», въ «Archiv for Mathematik og Naturvidenskab» и въ «Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania», но затѣмъ вошли почти полностью во II томъ его сочиненія «Theorie der Transformationsgruppen» (Leipzig, 1890).

Ближайшей задачей, которую въ настоящее время предстоитъ рѣшить для уравненій 2-го порядка, является усовершенствованіе общей теоріи ихъ, и здѣсь, мнѣ кажется, изслѣдованія Lie объ уравненіяхъ 1-го порядка должны играть роль руководящей нити. Теорія уравненій 2-го порядка только тогда будетъ на должной высотѣ, когда въ нее будутъ внесены такая же ясность и единство руководящей идеи, какъ это мы видимъ въ теоріи уравненій 1-го порядка, а для этого, мнѣ кажется, необходимо положить въ основу такую геометрическую интерпретацію, которая бы позволяла во всемъ дальнѣйшемъ изложеніи идти такимъ же путемъ (аналитически-геометрическимъ), какимъ идетъ Lie въ своихъ изслѣдованіяхъ.

*) Разсужденія Lie собственно относятся къ случаю n перемѣнныхъ.

**) Methodus generalis, aequationes differentiarum partialium nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcumque variabiles complete integrandi (Abh. d. Berl. Akad., 1814—1815).

Что касается собственно вопроса объ интегрированіи уравненій 2-го порядка, то въ настоящее время уже выяснено, что интегрированіе уравненія 2-го порядка приводится къ интегрированію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій только въ томъ случаѣ, когда къ данному уравненію съ успѣхомъ примѣняется методъ Darboux, а потому ближайшей задачей является опредѣлить всѣ уравненія, интегрируемыя этимъ методомъ. По этому вопросу сдѣлано пока очень мало: во-первыхъ опредѣлены уравненія, интегрируемыя методомъ Laplace'a *), который совпадаетъ въ своихъ результатахъ съ методомъ Darboux въ примѣненіи къ линейнымъ уравненіямъ; во-вторыхъ, какъ уже было упомянуто, найдены уравненія, допускающія интегралъ вида

$$z = f(x, y, X, X', \ldots, X^{(i)}, Y, Y', \ldots, Y^{(k)}).$$

Настоящая моя работа посвящена почти исключительно разрѣшенію первой изъ двухъ вышеупомянутыхъ задачъ и представляетъ попытку построить геометрическую теорію уравненій 2-го порядка, подобную теоріи уравненій 1-го порядка, созданной первоначально Monge'емъ и усовершенствованной Lie. Слѣдуетъ, впрочемъ, замѣтить, что методы интеграціи естественно вытекаютъ изъ общей теоріи, почему я помѣстилъ въ V главѣ краткое изложеніе метода Darboux, равно какъ нѣкоторые изъ своихъ результатовъ, относящихся къ вопросу объ изысканіи интегрируемыхъ формъ уравненій 2-го порядка. Мною получены и другіе результаты въ этой области, изъ которыхъ нѣкоторые были сообщены въ засѣданіяхъ Московскаго Математическаго Общества; я надѣюсь изложить ихъ подробно въ особомъ изслѣдованіи, посвященномъ спеціально вопросу объ интегрируемыхъ формахъ уравненій 2-го порядка.

Перехожу къ обзору содержанія настоящей работы.

Глава I имѣетъ характеръ введенія: она посвящена краткому изложенію геометрической теоріи уравненій 1-го порядка (слѣдуя Lie) и теоріи преобразованій прикосновенія. Я былъ вынужденъ сдѣлать такое отступленіе отъ главнаго предмета своей работы въ виду того, что

*) Darboux, Théorie générale des surfaces, t. II, l. IV.

для дальнѣйшаго безусловно необходимы свѣдѣнія, заключающіяся въ этой главѣ, а между тѣмъ теоріи, которыя въ ней изложены, не пріобрѣли еще достаточной извѣстности. Въ этой главѣ содержатся нѣкоторые новые результаты, которые мнѣ удалось получить въ общей теоріи уравненій 1-го порядка; они касаются вопроса о расположеніи интегральныхъ поверхностей уравненія въ самомъ общемъ случаѣ, т. е. когда уравненіе не допускаетъ особаго интеграла.

Глава II начинается съ постановки вопроса объ интегрированіи уравненія

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

въ слѣдующей формѣ: найти зависимость между перемѣнными x, y, z, p, q, r, s, t такъ, чтобы имѣли мѣсто соотношенія

$$\begin{gathered} dz - pdx - qdy = 0 \\ dp - rdx - sdy = 0 \\ dq - sdx - tdy = 0 \\ F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \end{gathered}$$

Такая постановка вопроса шире обычной и ведетъ къ понятію объ интегральномъ многообразіи уравненія $F=0$, которое заключаетъ въ себѣ какъ частный случай понятіе объ интегралѣ. Опредѣленію всевозможныхъ типовъ интегральныхъ многообразій посвященъ 1-й параграфъ II-й главы. При этомъ система значеній x, y, z, p, q, r, s, t (которую, слѣдуя Lie, называю элементомъ 2-го порядка) истолковывается геометрически совокупностью точки, плоскости и нѣкоторой кривой 2-го порядка (или нѣкотораго параболоида), и всѣ разсужденія ведутся геометрически-аналитическимъ путемъ. Параграфы 2-й и 3-й содержатъ изысканіе интегральныхъ многообразій высшихъ порядковъ. Такъ-называемыя характеристическія многообразія оказываются однимъ изъ частныхъ видовъ интегральныхъ многообразій уравненія. Остальные параграфы посвящены примѣненію теоріи преобразованій прикосновеній къ уравненіямъ 2-го порядка: большинство результатовъ, получаемыхъ тамъ, принадлежитъ Lie.

Изъ обзора всѣхъ типовъ интегральныхъ многообразій даннаго уравненія оказывается, что только интегралы въ собственномъ смыслѣ не могутъ быть опредѣлены (вообще говоря) интегрированіемъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій. Вопросу о существованіи интеграловъ посвящена III-я глава. Первый параграфъ содержитъ рѣшеніе задачи Cauchy (слѣдуя С. В. Ковалевской); второй параграфъ трактуетъ о многообразіяхъ, аналогичныхъ интегральнымъ кривымъ уравненія

1-го порядка, къ которымъ естественно приводитъ насъ задача Cauchy. Та же задача приводитъ къ понятію объ особыхъ интегральныхъ многообразіяхъ, которымъ посвященъ третій параграфъ; на сколько мнѣ извѣстно, здѣсь впервые вводится понятіе объ особомъ элементѣ уравненія. Многообразіямъ, которыя изслѣдуются во 2-мъ параграфѣ, и особымъ элементамъ я даю простое геометрическое опредѣленіе.

Глава IV содержитъ теорію характеристическихъ многообразій 1-го, 2-го и высшихъ порядковъ; мнѣ принадлежитъ геометрическая интерпретація дифференціальныхъ уравненій, опредѣляющихъ эти многообразія (1-го и 2-го порядковъ). § 1 содержитъ кромѣ того геометрическое изслѣдованіе уравненій, допускающихъ характеристическія многообразія 1-го порядка; особенно простое геометрическое истолкованіе получаютъ при этомъ билинейныя уравненія.

Первый параграфъ главы V-й содержитъ рядъ извѣстныхъ теоремъ, выясняющихъ связь между характеристиками и интегралами уравненія; второй параграфъ посвященъ изложенію метода Darboux, къ которому приходимъ вполнѣ естественнымъ путемъ, задаваясь вопросомъ, въ какомъ случаѣ изъ всей совокупности характеристикъ уравненія (зависящей отъ произвольной функціи) можно выдѣлить семейство, которое бы зависѣло только отъ произвольныхъ параметровъ и при помощи котораго можно было бы совершенно такъ же строить интегральныя поверхности, какъ и для уравненія 1-го порядка; всѣ результаты получаются здѣсь безъ всякихъ выкладокъ на основаніи весьма простыхъ соображеній. Третій параграфъ посвященъ примѣненію общей теоріи къ нѣскольким частнымъ примѣрамъ. Отмѣчу здѣсь особенно примѣры 5-й и 6-й, которые содержатъ новые результаты по вопросу объ интегрируемыхъ формахъ уравненія 2-го порядка. По поводу примѣра 6-го замѣчу, что мнѣ удалось провести вычисленія еще дальше и придти къ рѣшенію вопроса объ изысканіи уравненій, допускающихъ общій интегралъ вида

$$\begin{aligned} z &= z(\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \ldots \varphi^{(i)}(\alpha), \beta, \psi(\beta), \psi'(\beta), \ldots \psi^{(\lambda)}(\beta)) \\ x &= x(\alpha, \varphi, \varphi', \ldots \varphi^{(i)}, \beta, \psi, \psi', \ldots \psi^{(\lambda)}) \\ y &= y(\alpha, \varphi, \varphi', \ldots \varphi^{(i)}, \beta, \psi, \psi', \ldots \psi^{(\lambda)}). \end{aligned}$$

Вопросъ этотъ между прочимъ ставитъ Goursat въ своемъ курсѣ какъ ожидающій своего рѣшенія.

Въ заключеніе замѣчу, что я не привожу особаго списка по литературѣ предмета, такъ какъ до сихъ поръ еще не существовало полной геометрической теоріи уравненій 2-го порядка, а тѣ немногія работы, въ которыхъ заключаются основанія для этой теоріи, были указаны выше.

ГЛАВА I.

§ 1.—Уравненія съ частными производными 1-го порядка. Понятіе объ элементѣ. Интегральныя многообразія.—§ 2.—Преобразованія прикосновенія.—§ 3.—Примѣненіе теоріи преобразованій прикосновенія къ теоріи уравненій 1-го порядка.— § 4.—Примѣры.

§ 1.—Задача интегрированія уравненія съ частными производными 1-го порядка

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

ставится обыкновенно слѣдующимъ образомъ: найти z въ функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y такъ, чтобы удовлетворялось уравненіе (1), при чемъ

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Послѣднія два равенства можно замѣнить равенствомъ

$$dz - pdx - qdy = 0, \tag{2}$$

такъ какъ изъ него при x и y независимыхъ перемѣнныхъ слѣдуетъ $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Будемъ, слѣдуя Lie, ставить задачу интегрированія уравненія (1) нѣсколько шире, а именно будемъ вообще опредѣлять перемѣнныя x, y, z, p, q въ функціи какихъ-либо произвольныхъ параметровъ такъ, чтобы удовлетворялись соотношенія (1) и (2), не требуя притомъ, чтобы по исключеніи этихъ параметровъ z оказывалось непремѣнно функціей независимыхъ перемѣнныхъ x и y. Систему значеній x, y, z, p, q будемъ называть ***элементомъ***, x, y, z, p, q—координатами элемента; если координаты элемента выражены въ функціи одного, двухъ...., произвольныхъ независимыхъ параметровъ, то совокупность элементовъ, получаемыхъ при измѣненіи параметровъ, будемъ, слѣдуя обычной терминологіи, называть многообразіемъ элементовъ одного, двухъ.... измѣреній.

Уравненіе (1) устанавливаетъ одно соотношеніе между пятью координатами элемента, изъ которыхъ четыре такимъ образомъ остаются произвольными, а пятая опредѣляется въ функціи этихъ четырехъ: поэтому, согласно предыдущему, скажемъ, что уравненіе (1) опредѣляетъ нѣкоторое многообразіе элементовъ четырехъ измѣреній M_4. Проинтегрировать уравненіе (1) значитъ изъ всего многообразія M_4 выбрать такія многообразія, для которыхъ имѣло бы мѣсто дифференціальное соотношеніе (2); всякое подобное многообразіе, т.-е. многообразіе элементовъ, удовлетворяющее уравненію (1) и дифференціальному соотношенію (2), будемъ называть ***интегральнымъ многообразіемъ*** уравненія (1).

Геометрической интерпретаціей элемента (x, y, z, p, q) можетъ служить совокупность точки съ Декартовыми координатами x, y, z и проходящей черезъ эту точку плоскости, уравненіе которой

$$\zeta - z = p\,(\xi - x) + q\,(\eta - y),$$

гдѣ ξ, η, ζ — текущія координаты.

Наше пространство относительно такихъ элементовъ есть многообразіе пяти измѣреній. Уравненіе

$$F\,(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

изъ всего этого многообразія пяти измѣреній выдѣляетъ, какъ уже было упомянуто, нѣкоторое многообразіе четырехъ измѣреній M_4; такъ, уравненію

$$p = 0$$

удовлетворяютъ всѣ элементы, плоскости которыхъ параллельны оси x. При данныхъ x, y, z уравненіе (1) устанавливаетъ одно соотношеніе между p и q; слѣдовательно, черезъ данную точку проходитъ система плоскостей, зависящая отъ одного параметра (напр., q) и дающая вмѣстѣ съ данной точкой многообразіе элементовъ одного измѣренія M_1, входящее въ составъ многообразія M_4. Всѣ плоскости многообразія M_1 облекаютъ, вообще говоря, нѣкоторый конусъ (T), и слѣдовательно уравненіе (1) въ каждой точкѣ (x, y, z) опредѣляетъ нѣкоторый конусъ (T), касательныя плоскости котораго вмѣстѣ съ вершиной даютъ элементы, удовлетворяющіе уравненію (1). Интересно замѣтить, что для разсматриваемаго многообразія M_1 удовлетворяется и соотношеніе

$$dz - pdx - qdy = 0, \tag{2}$$

такъ какъ x, y, z — постоянны и слѣдовательно $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$: такимъ образомъ многообразіе M_1 есть интегральное многообразіе одного измѣренія уравненія (1).

Обратимся теперь къ изысканію всѣхъ типовъ многообразій, удовлетворяющихъ дифференціальному соотношенію

$$dz - pdx - qdy = 0. \tag{2}$$

Если мы имѣемъ произвольное многообразіе элементовъ, опредѣляемое уравненіями

$$\left.\begin{aligned} x &= x\ (u, v, \ldots.) \\ y &= y\ (u, v, \ldots.) \\ z &= z\ (u, v, \ldots.) \\ p &= p\ (u, v, \ldots.) \\ q &= q\ (u, v, \ldots.) \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

гдѣ $u, v, \ldots$ произвольные параметры, то точки элементовъ (x, y, z), въ силу первыхъ трехъ изъ уравненій (3), образуютъ тоже нѣкоторое многообразіе, число измѣреній котораго, очевидно, во-первыхъ, не больше числа измѣреній всего многообразія элементовъ и во-вторыхъ во всякомъ случаѣ не больше трехъ, такъ какъ *всѣ* точки пространства образуютъ многообразіе трехъ измѣреній. Нетрудно убѣдиться, что въ случаѣ многообразія элементовъ, удовлетворяющаго дифференціальному соотношенію (2), число измѣреній многообразія точекъ не можетъ равняться тремъ. Дѣйствительно, если бы мы это допустили, то координаты x, y, z были бы у насъ произвольными параметрами многообразія точекъ, дифференціалы dx, dy, dz должны бы были, слѣдовательно, быть независимыми; между тѣмъ, соотношеніе (2) устанавливаетъ связь между dx, dy, dz, и если мы, напримѣръ, предположимъ, что x и y остаются постоянными, такъ что $dx = 0$, $dy = 0$, то изъ соотношенія (2) слѣдуетъ $dz = 0$, т.-е. при постоянныхъ x, y постоянно и z, независимо отъ измѣненія p и q; другими словами, должно существовать, по крайней мѣрѣ, одно соотношеніе

$$\varphi\,(x, y, z) = 0 \tag{4}$$

между координатами x, y, z, свободное отъ p, q. Итакъ, многообразіе точекъ будетъ или двухъ измѣреній, т.-е. поверхность, или одного измѣренія, т.-е. линія, или „нулевого“ измѣренія, т.-е. будемъ имѣть одну или нѣсколько опредѣленныхъ точекъ. Дадимъ теперь простое геометрическое толкованіе дифференціальному соотношенію

$$dz - pdx - qdy = 0. \tag{2}$$

Очевидно, оно получается обычнымъ способомъ перехода къ предѣлу изъ соотношенія

$$\Delta z - p\Delta x - q\Delta y = 0, \tag{5}$$

гдѣ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$—приращенія координатъ; соотношеніе же (5) выражаетъ, что точка $(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$ лежитъ въ плоскости элемента (x, y, z, p, q), уравненіе которой

$$\zeta - z = p\ (\xi - x) + q\ (\eta - y).$$

Такимъ образомъ, пользуясь обычными выраженіями геометріи безконечно-малыхъ, скажемъ, что въ силу соотношенія (2) плоскость элемента должна содержать точки всѣхъ безконечно-близкихъ элементовъ, другими словами плоскость всякаго элемента должна въ точкѣ этого элемента касаться многообразія, образуемаго всѣми точками элементовъ.

Если точки элементовъ образуютъ многообразіе двухъ измѣреній, т. е. поверхность, то въ каждой точкѣ поверхности получаемъ опредѣленную касательную плоскость, и слѣдовательно будемъ имѣть многообразіе элементовъ *двухъ* измѣреній, образованное точками и касательными плоскостями нѣкоторой поверхности. Если точки элементовъ образуютъ многообразіе одного измѣренія, т. е. линію, то въ каждой точкѣ этой линіи получаемъ цѣлый пучокъ касательныхъ плоскостей, и слѣдовательно, если возьмемъ всѣ эти плоскости, то получимъ многообразіе элементовъ *двухъ* измѣреній, образованное точками и касательными плоскостями нѣкоторой линіи; замѣтимъ, что каждая точка этой линіи принадлежитъ цѣлому многообразію одного измѣренія элементовъ: въ предыдущемъ случаѣ каждая точка принадлежала одному элементу. Если въ каждой точкѣ линіи возьмемъ лишь одну касательную плоскость по какому-либо опредѣленному закону, то получимъ многообразіе элементовъ *одного* измѣренія, образованное точками данной линіи и касательными плоскостями нѣкоторой развертывающейся поверхности, описанной около данной линіи. Наконецъ, если многообразіе точекъ — нулевого измѣренія, т. е. если имѣемъ одну или нѣсколько опредѣленныхъ точекъ, то соотношеніе

$$dz - pdx - qdy = 0 \tag{2}$$

удовлетворяется при произвольныхъ p и q въ силу $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$. Такимъ образомъ, можно взять любую плоскость, проходящую черезъ данную точку (x, y, z), за плоскость элемента. Если возьмемъ всѣ плоскости, проходящія черезъ (x, y, z), то будемъ имѣть многообразіе элементовъ *двухъ* измѣреній—такъ-называемую *связку* плоскостей (Bündel) *): если изъ этой связки выберемъ какую-либо систему плоскостей, зависящую отъ одного параметра, то получимъ многообразіе элементовъ

*) или нѣсколько такихъ связокъ, если было нѣсколько точекъ (x, y, z).

одного измѣренія, образованное, какъ не трудно усмотрѣть, вершиной и касательными плоскостями нѣкотораго конуса. Замѣтимъ, что если условимся понимать подъ плоскостью, касательной къ точкѣ, плоскость, проходящую черезъ эту точку, то общее геометрическое опредѣленіе многообразій, удовлетворяющихъ соотношенію (2), остается примѣнимымъ и въ двухъ послѣднихъ случаяхъ. Изъ всего предшествующаго видимъ, что многообразія элементовъ *двухъ* измѣреній, разсмотрѣнныя нами, всѣ опредѣляются вполнѣ, разъ дано многообразіе, образуемое точками элементовъ: плоскости элементовъ опредѣляются исключительно изъ основного условія, какъ касательныя плоскости многообразія точекъ. Условимся многообразіе точекъ, которое вполнѣ опредѣляетъ все многообразіе элементовъ двухъ измѣреній, называть *носителемъ* (Träger) этого послѣдняго. Тогда можемъ сказать, что многообразія двухъ измѣреній, удовлетворяющія соотношенію (2), могутъ быть трехъ типовъ: носителемъ многообразія 1-го типа служитъ поверхность, 2-го типа — линія, 3-го типа—точка.

Нетрудно вывести формулы, выражающія координаты элементовъ многообразій всѣхъ трехъ типовъ. Мы уже видѣли выше, что соотношеніе

$$dz - pdx - qdy = 0 \tag{2}$$

требуетъ существованія, по крайней мѣрѣ, одного соотношенія между координатами x, y, z, свободнаго отъ p и q. Очевидно, для многообразія 1-го типа должно существовать только *одно* подобное соотношеніе

$$\varphi(x, y, z) = 0. \tag{6}$$

которое притомъ есть уравненіе поверхности — носителя многообразія. Такимъ образомъ, соотношеніе (2) должно быть слѣдствіемъ соотношенія $d\varphi = 0$, и мы имѣемъ тождественно

$$dz - pdx - qdy = \lambda d\varphi = \lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz\right). \tag{7}$$

гдѣ λ—нѣкоторый множитель. Сравнивая коэффиціенты при дифференціалахъ, получаемъ:

$$1 = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z};\quad -p = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x};\quad -q = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

или, исключая λ:

$$p = -\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}},\quad q = -\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}. \tag{8}$$

Равенства (6) и (8) опредѣляютъ координаты элемента (x, y, z, p, q) въ функціи двухъ изъ нихъ; или иначе, мы имѣемъ три уравненія между пятью координатами элемента, которыя опредѣляютъ многообразіе двухъ измѣреній. Если бы мы взяли соотношеніе (6) въ видѣ

$$z = z(x, y), \tag{9}$$

то получили бы прямо

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}. \tag{10}$$

Легко усмотрѣть, что въ силу формулъ (8) или (10) плоскость элемента есть касательная плоскость поверхности, уравненіе которой представлено въ видѣ (6) или (9).

Выведенныя нами формулы становятся, повидимому, непригодными въ томъ случаѣ, когда уравненіе поверхности — носителя многообразія имѣетъ видъ:

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{11}$$

Тождество

$$dz - pdx - qdy = \lambda d\varphi$$

приводитъ насъ къ невозможнымъ равенствамъ

$$1 = \lambda.0; \quad -p = \lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad -q = \lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial y};$$

а формулы (8) даютъ

$$p = \infty, \quad q = \infty.$$

Но геометрическое толкованіе, которое мы дали соотношенію

$$dz - pdx - qdy = 0. \tag{2}$$

остается въ силѣ и въ данномъ случаѣ, и мы получаемъ вполнѣ опредѣленное многообразіе элементовъ двухъ измѣреній, образованное точками и касательными плоскостями цилиндра

$$\varphi(x, y) = 0, \tag{11}$$

образующія котораго параллельны оси z. Уравненіе касательной плоскости этого цилиндра имѣетъ видъ

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\eta - y);$$

между тѣмъ, мы предполагали уравненіе плоскости элемента въ видѣ

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y);$$

слѣдовательно, строго говоря, нельзя найти такихъ значеній p и q, при которыхъ плоскость элемента обращалась бы въ касательную плоскость

цилиндра; или можно сказать, что, отыскивая эти значенія, мы найдемъ $p = \infty$, $q = \infty$, при чемъ $p : q = \frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y}$. Будемъ считать, что и въ разсматриваемомъ случаѣ дифференціальное соотношеніе (2) удовлетворяется. Это будетъ по стольку же вѣрно, по скольку правильно считать, какъ это обще-принято, что безконечныя значенія неизвѣстныхъ, найденныя при рѣшеніи линейныхъ уравненій, удовлетворяютъ этимъ уравненіямъ.

Непригодность (въ строгомъ смыслѣ) формулъ въ разсматриваемомъ случаѣ указываетъ на нѣкоторое неудобство избранной системы координатъ элемента x, y, z, p, q. Lie предложилъ другую, однородную, систему координатъ x, y, z, p_0, p_1, p_2, гдѣ x, y, z по прежнему Декартовы координаты точки элемента, а p_0, p_1, p_2 — коэффиціенты въ уравненіи плоскости элемента, которое предполагаемъ въ видѣ:

$$p_0(\zeta - z) + p_1(\xi - x) + p_2(\eta - y) = 0; \tag{12}$$

при этомъ для опредѣленія элемента достаточно двухъ отношеній между координатами p_0, p_1, p_2, и слѣдовательно, по прежнему, имѣемъ *пять* существенныхъ параметровъ для опредѣленія элемента. Изъ сравненія уравненія (12) съ уравненіемъ

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

плоскости элемента въ прежней системѣ получаемъ

$$p = -\frac{p_1}{p_0}, \quad q = -\frac{p_2}{p_0}. \tag{13}$$

Дифференціальное соотношеніе (2), по умноженіи на p_0, принимаетъ видъ

$$p_0 dz + p_1 dx + p_2 dy = 0. \tag{14}$$

Для многообразія, носителемъ котораго служитъ поверхность

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

получаемъ въ новой системѣ

$$p_0 : p_1 : p_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial z} : \frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

при чемъ можно даже взять

$$p_0 = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad p_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y};$$

такъ какъ для насъ важны лишь отношенія координатъ p_0, p_1, p_2. Въ случаѣ цилиндра

$$\varphi(x, y) = 0$$

получаемъ
$$p_0 = 0,\ p_1 : p_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

или сравнивая уравненіе плоскости элемента (12) съ уравненіемъ касательной плоскости цилиндра

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\eta - y) = 0,$$

или непосредственно изъ тожества

$$p_0 dz + p_1 dx + p_2 dy = \lambda d\varphi.$$

Однородныя координаты p_0, p_1, p_2 имѣютъ простое геометрическое значеніе; именно, изъ уравненія плоскости элемента (12) непосредственно слѣдуетъ

$$p_0 : p_1 : p_2 = \cos\gamma : \cos\alpha : \cos\beta.$$

гдѣ α, β, γ — углы перпендикуляра къ плоскости элемента съ осями координатъ. Обращаясь къ выраженіямъ координатъ p, q черезъ однородныя координаты (13), получаемъ равенства

$$p = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma};\quad q = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}. \tag{15}$$

которыя выясняютъ намъ геометрическое значеніе координатъ p и q.

Переходимъ теперь ко второму случаю: предположимъ, что существуютъ два соотношенія между координатами x, y, z

$$\varphi(x, y, z) = 0,\quad \psi(x, y, z) = 0, \tag{16}$$

свободныя отъ p и q. Уравненія (16) опредѣляютъ линію — носитель многообразія. Разсуждая совершенно такъ же, какъ и въ предшествующемъ случаѣ, приходимъ къ тождеству

$$dz - pdx - qdy = \lambda d\varphi + \mu d\psi =$$
$$= \left(\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx + \left(\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dy + \left(\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)dz, \tag{17}$$

гдѣ λ и μ — нѣкоторые множители; сравнивая коэффиціенты при диференціалахъ, получаемъ:

$$1 = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial z};\quad -p = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial x};\quad -q = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial y}; \tag{18}$$

или, исключая λ и μ,

$$\begin{vmatrix} 1, & -p, & -q \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}, & \frac{\partial\varphi}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial z}, & \frac{\partial\psi}{\partial x}, & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

Между пятью координатами x, y, z, p, q имѣемъ три уравненія — два уравненія (16) и уравненіе (19): такимъ образомъ получаемъ многообразіе двухъ измѣреній. Можно бы изъ уравненій (16) двѣ изъ координатъ x, y, z выразить въ функціи третьей (напр., z и y въ функціи x), а изъ уравненія (19) одну изъ двухъ координатъ p и q выразить въ функціи другой и одной изъ трехъ координатъ x, y, z (напр., q въ функціи p и x): тогда всѣ координаты у насъ будутъ выражены въ функціи двухъ изъ нихъ (напр., p и x), которыя будутъ играть роль произвольныхъ параметровъ. Уравненіе (19) устанавливаетъ *линейную* зависимость между p и q; поэтому плоскости элементовъ при данной точкѣ элемента (x, y, z) образуютъ пучокъ, и не трудно видѣть, что всѣ онѣ будутъ касаться кривой $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

Выведенныя нами формулы становятся непригодными для того случая, когда функціи φ и ψ не зависятъ отъ z, такъ какъ тогда первое изъ равенствъ (18) даетъ

$$1 = \lambda . 0 + \mu . 0.$$

Но совершенно такъ же, какъ и въ случаѣ цилиндра, образующія котораго параллельны оси z, мы получаемъ, пользуясь геометрическимъ толкованіемъ дифференціальнаго соотношенія

$$dz - pdx - qdy = 0. \tag{2}$$

вполнѣ опредѣленное многообразіе элементовъ двухъ измѣреній. Носителемъ его будетъ служить линія

$$\varphi(x, y) = 0,\quad \psi(x, y) = 0,$$

т. е. нѣкоторая прямая параллельная оси z, такъ какъ изъ уравненій $\varphi = 0$, $\psi = 0$ получаемъ нѣкоторыя опредѣленныя значенія для x и y:

$$x = const.,\quad y = const.$$

Всѣ элементы многообразія получимъ, разсматривая совокупно любую изъ точекъ этой прямой вмѣстѣ съ любой изъ плоскостей пучка, проходящаго черезъ нее. Если введемъ однородныя координаты элемента x, y, z, p_0, p_1, p_2, то изъ тождества

$$p_0 dz + p_1 dx + p_2 dy = \lambda d\varphi + \mu d\psi$$

въ общемъ случаѣ получимъ

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial z} & \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ, въ которомъ $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial\psi}{\partial z}=0$, имѣемъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} \cdot p_0 = 0,$$

и слѣдовательно $p_0=0$ при произвольныхъ p_1 и p_2. Изъ формулъ (13) для координатъ p и q получимъ такимъ образомъ $p=\infty$, $q=\infty$, при чемъ отношеніе $p:q$ произвольно.

Съ такимъ же правомъ, какъ и въ случаѣ цилиндра съ образующими параллельными оси z, мы будемъ говорить, что найденныя значенія p и q удовлетворяютъ дифференціальному соотношенію

$$dz - pdx - qdy = 0. \qquad (2)$$

Намъ остается разсмотрѣть третій типъ многообразія — многообразіе, носителемъ котораго служитъ точка

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0. \qquad (20)$$

Но мы уже ранѣе упоминали, что въ этомъ случаѣ соотношеніе (2) удовлетворяется при произвольныхъ p и q, и мы имѣемъ многообразіе двухъ измѣреній, опредѣляемое тремя уравненіями (20), при чемъ p и q играютъ роль произвольныхъ параметровъ.

Пользуясь всѣми полученными результатами, мы можемъ приступить къ болѣе подробному изслѣдованію интегральныхъ многообразій уравненія

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \qquad (1)$$

Что касается до интегральныхъ многообразій одного измѣренія, то опредѣленіе ихъ не представляетъ никакого затрудненія. Дѣйствительно, возьмемъ произвольное многообразіе двухъ измѣреній, удовлетворяющее дифференціальному соотношенію

$$dz - pdx - qdy = 0. \qquad (2)$$

и къ уравненіямъ его присоединимъ уравненіе (1); тогда мы получимъ многообразіе одного измѣренія, которое, очевидно, будетъ интегральнымъ многообразіемъ уравненія (1). Притомъ указаннымъ пріемомъ мы найдемъ *всѣ* интегральныя многообразія одного измѣренія, такъ какъ всякое многообразіе одного измѣренія, удовлетворяющее соотношенію (2), всегда входитъ, какъ мы видѣли выше, въ составъ многообразія двухъ

измѣреній, удовлетворяющаго тому же соотношенію. Мы можемъ поэтому оставить интегральныя многообразія одного измѣренія въ сторонѣ и подъ интегрированіемъ уравненія (1) разумѣть опредѣленіе всѣхъ интегральныхъ многообразій двухъ измѣреній, т. е. многообразій, носителями которыхъ служатъ поверхности, линіи, точки, и которыя входятъ въ составъ многообразія четырехъ измѣреній M_4, опредѣляемаго уравненіемъ

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \qquad (1)$$

Если мы имѣемъ интегральное многообразіе, носителемъ котораго служитъ поверхность, то, представляя уравненіе поверхности въ видѣ

$$z = z\,(x, y),$$

получимъ (см. выше (9) и (10))

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

и слѣдовательно будемъ имѣть *интегралъ* уравненія (1) въ обычномъ смыслѣ слова. Если въ частности поверхность—носитель многообразія есть цилиндръ

$$\varphi\,(x, y) = 0$$

съ образующими параллельными оси z, то уравненіе ея не можетъ быть представлено въ видѣ $z=z\,(x, y)$, и мы не будемъ имѣть *интеграла* уравненія (1). Кромѣ того, мы видѣли выше, что для разсматриваемаго многообразія имѣемъ $p=\infty$, $q=\infty$ и что соотношеніе

$$dz - pdx - pdy = 0$$

удовлетворяется лишь въ несобственномъ смыслѣ (удовлетворяется, собственно говоря, соотношеніе $p_0\,dz + p_1\,dx + p_2\,dy = 0$ при $p_0=0$). Тѣмъ не менѣе, если уравненіе (1) допускаетъ подобное многообразіе, т.-е. если подобное многообразіе входитъ въ составъ многообразія четырехъ измѣреній M_4, опредѣляемаго уравненіемъ (1), — мы будемъ его называть интегральнымъ многообразіемъ уравненія (1). Очевидно, не всякое уравненіе $F\,(x, y, z, p, q)=0$ допускаетъ подобныя интегральныя многообразія, такъ какъ для этого прежде всего функція F должна обращаться въ нуль при безконечныхъ значеніяхъ p и q. Для бóльшаго удобства изслѣдованія введемъ однородныя координаты Lie полагая $p=-\frac{p_1}{p_0}$, $q=-\frac{p_2}{p_0}$ (см. выше (13)). Тогда уравненіе (1) приметъ видъ

$$F\,(x, y, z, -\frac{p_1}{p_0}, -\frac{p_2}{p_0}) = 0. \qquad (21)$$

Въ общемъ случаѣ, т.-е. для поверхности—носителя многообразія

имѣемъ
$$\varphi(x, y, z) = 0$$

$$p_0 : p_1 : p_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial z} : \frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

и уравненіе (21) можетъ быть написано

$$F\left(x, y, z, -\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}, -\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}\right) = 0, \tag{21'}$$

т.-е. преобразованіе Lie въ этомъ случаѣ совпадаетъ съ извѣстнымъ преобразованіемъ **Jacobi**. Для случая цилиндра

имѣемъ
$$\varphi(x, y) = 0$$

$$p_0 = 0, \; p_1 : p_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y};$$

итакъ, уравненіе (21) должно удовлетворяться при $p_0 = 0$, $p_1 : p_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y}$, при зависимости между x и y $\varphi(x, y) = 0$ и при совершенно произвольномъ z; только при соблюденіи всѣхъ этихъ условій уравненіе (1) допускаетъ интегральное многообразіе разсматриваемаго типа. Въ силу уравненія цилиндра

$$\varphi(x, y) = 0$$

y является функціей x (или обратно), при чемъ имѣемъ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx = 0,$$

откуда $\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -dy : dx$ и слѣдовательно $p_1 : p_2 = -dy : dx$. Такимъ образомъ, мы можемъ иначе сказать, что интегральныя многообразія, о которыхъ идетъ рѣчь, должны удовлетворять при произвольномъ z обыкновенному дифференціальному уравненію, которое получимъ, полагая въ уравненіи

$$F\left(x, y, z, -\frac{p_1}{p_0}, -\frac{p_2}{p_0}\right) = 0 \tag{21}$$

$p_0 = 0$ и $p_1 : p_2 = -\frac{dy}{dx}$. Благодаря произволу z имѣемъ еще уравненія

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \; \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0, \ldots \tag{22}$$

Если всѣ эти обыкновенныя дифференціальныя уравненія окажутся совмѣстными, то найдемъ интегральныя многообразія разсматриваемаго типа.

Для примѣра разсмотримъ уравненіе

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{pq} + \frac{y^2+z^2}{p} + \frac{x^2+z^2}{q} + \frac{zp}{q} + \frac{xyq}{p} + xz + y = 0. \tag{23}$$

Вставляя $p = -\frac{p_1}{p_0}$, $q = -\frac{p_2}{q_0}$ и полагая $p_0 = 0$, $\frac{p_1}{p_2} = -\frac{dy}{dx} = -y'$, получимъ

$$-zy' - \frac{xy}{y'} + xz + y = 0. \tag{24}$$

Беря производную по z, получимъ

$$-y' + x = 0. \tag{25}$$

Дальнѣйшее дифференцированіе по z приводитъ къ тождествамъ $0 = 0$. Вставляя $y' = x$ въ уравненіе (24), получаемъ тоже тождество; итакъ, имѣемъ единственное дифференціальное уравненіе (25), откуда

$$2y = x^2 + c, \tag{26}$$

гдѣ c—произвольное постоянное.

Такимъ образомъ, уравненіе (23) допускаетъ интегральныя многообразія, носителями которыхъ служатъ параболическіе цилиндры (26).

Разсмотримъ теперь интегральныя многообразія, носителями которыхъ служатъ линіи. Въ каждой точкѣ (x, y, z) такой линіи мы имѣемъ цѣлый пучокъ касательныхъ плоскостей, которыя вмѣстѣ съ точкой (x, y, z) даютъ многообразіе одного измѣренія элементовъ, принадлежащее къ многообразію четырехъ измѣреній M_4, опредѣляемому уравненіемъ $F = 0$. Между тѣмъ, какъ было выяснено выше, многообразіе одного измѣренія элементовъ, входящихъ въ составъ многообразія M_4 и имѣющихъ общую точку (x, y, z), состоитъ изъ этой точки вмѣстѣ со всѣми касательными плоскостями нѣкотораго конуса (T), опредѣляемаго для каждой точки (x, y, z), уравненіемъ $F = 0$ (1). Слѣдовательно въ составъ конуса (T) долженъ входить пучокъ касательныхъ плоскостей линіи—носителя многообразія, т.-е. другими словами конусъ (T) долженъ или весь обратиться въ одну прямую—касательную къ данной линіи, или онъ долженъ распадаться и одной изъ составныхъ частей его должна служить эта касательная. Такимъ образомъ, чтобы уравненіе $F = 0$ (1) допускало интегральныя многообразія разсматриваемаго типа, необходимо, во-первыхъ, чтобы существовали такія линіи, для всѣхъ точекъ

(x, y, z) которыхъ конусы (T) распадаются, при чемъ одна изъ составныхъ частей вытягивается въ одну прямую, и во-вторыхъ, чтобы прямыя эти каждая въ своей точкѣ (x, y, z) касались линій—геометрическихъ мѣстъ точекъ (x, y, z).

Интересно разсмотрѣть тотъ случай, когда всѣ конусы (T) обращаются въ прямыя линіи. Не трудно убѣдиться, что уравненіе $F=0$ будетъ въ этомъ случаѣ линейно относительно p и q. Въ самомъ дѣлѣ, для того, чтобы во всякой точкѣ, т.-е. при произвольныхъ x, y, z, плоскости элементовъ образовали пучокъ и слѣдовательно конусъ T обращался бы въ прямую—ребро пучка, необходимо, чтобы при всевозможныхъ значеніяхъ x, y, z связь между коэффиціентами въ уравненіи плоскости элемента

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

т.-е. между p и q, была линейная, и слѣдовательно уравненіе $F=0$ должно имѣть видъ

$$Pp + Qq = R, \tag{27}$$

гдѣ P, Q, R—функціи x, y, z. Нетрудно убѣдиться, что косинусы угловъ прямой линіи, въ которую обращается конусъ T, съ осями координатъ пропорціональны P, Q, R. Въ самомъ дѣлѣ, если мы возьмемъ прямую, проходящую черезъ точку (x, y, z) и образующую съ осями координатъ углы α, β, γ, при чемъ

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = P : Q : R,$$

то въ силу уравненія (27) эта прямая будетъ параллельна плоскости

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

а такъ какъ и прямая и плоскость проходятъ кромѣ того черезъ точку (x, y, z), то прямая слѣдовательно будетъ лежать въ этой плоскости; другими словами, прямая будетъ общимъ ребромъ пучка плоскостей, опредѣляемаго въ точкѣ (x, y, z) уравненіемъ (27). Чтобы найти интегральныя многообразія уравненія (27), носителями которыхъ служатъ линіи, намъ остается опредѣлить всѣ тѣ линіи, которыя въ каждой своей точкѣ касаются соотвѣтствующей этой точкѣ прямой T, другими словами опредѣлить кривыя, касательныя которыхъ образуютъ съ осями координатъ углы, косинусы которыхъ пропорціональны P, Q, R. Кривыя эти, очевидно, опредѣляются совокупными дифференціальными уравненіями

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{28}$$

и называются, какъ извѣстно, ***характеристиками*** линейнаго уравненія (27). Такимъ образомъ, всякое линейное уравненіе допускаетъ интегральныя многообразія, элементы которыхъ состоятъ изъ точекъ и всѣхъ касательныхъ плоскостей характеристикъ.

Интегральныя многообразія второго типа, т. е. многообразія, носителями которыхъ служатъ линіи, могутъ быть разсматриваемы какъ предѣльные случаи обыкновенныхъ интеграловъ. Если, напримѣръ, уравненіе допускаетъ интегралъ, поверхность котораго имѣетъ видъ трубки, при чемъ съ измѣненіемъ нѣкотораго параметра, входящаго въ уравненіе, толщина этой трубки безпредѣльно уменьшается, то въ предѣлѣ мы получимъ уравненіе, допускающее интегральное многообразіе разсматриваемаго типа, такъ какъ трубка въ предѣлѣ обратится въ линію, при чемъ касательныя плоскости трубчатой поверхности обратятся въ касательныя плоскости линіи.

Такъ, уравненіе

$$(px + qy)^2 (p^2 + q^2 + 1) - r^2 (p^2 + q^2)^2 = 0$$

допускаетъ интегралы

$$(z - c)^2 + \frac{(y - mx)^2}{1 + m^2} = r^2,$$

гдѣ c и m—произвольныя постоянныя. Поверхности, представляемыя уравненіемъ интеграла, будутъ, какъ легко убѣдиться, круглые цилиндры, образующія которыхъ параллельны плоскости xy, а оси пересѣкаютъ ось z. При убываніи параметра r цилиндры эти будутъ все болѣе вытягиваться, стремясь въ предѣлѣ обратиться въ свои оси. Если положимъ $r=0$, то уравненіе съ частными производными обратится въ распадающееся уравненіе

$$(px + qy)^2 (p^2 + q^2 + 1) = 0,$$

которому можно удовлетворить, положивъ или

$$px + qy = 0, \quad \text{или} \quad p^2 + q^2 + 1 = 0.$$

Первое изъ этихъ уравненій

$$px + qy = 0,$$

согласно предыдущему, допускаетъ интегральныя многообразія, носителями которыхъ служатъ характеристики

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}.$$

Интегрируя эти уравненія, получаемъ

$$z = c, \quad y = mx.$$

т. е. прямыя линіи, лежащія въ плоскостяхъ, параллельныхъ плоскости xy, и пересѣкающія ось z; другими словами, получимъ оси прежнихъ цилиндровъ, какъ этого и слѣдовало ожидать.

Чтобы покончить съ интегральными многообразіями, носителями которыхъ служатъ линіи, слѣдовало бы разсмотрѣть еще случай прямой параллельной оси z; но всѣ разсужденія, сюда относящіяся, являются въ сущности повтореніемъ того, что было сказано выше о многообразіяхъ, носителями которыхъ служатъ цилиндры съ образующими параллельными оси z, и потому мы прямо приступаемъ къ интегральнымъ многообразіямъ третьяго типа, т. е. къ многообразіямъ, носителями которыхъ служатъ точки.

Чтобы уравненіе $F=0$ (1) допускало подобное интегральное многообразіе, необходимо, чтобы имѣло мѣсто равенство

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0 \qquad (1)$$

при данныхъ значеніяхъ $x,\ y,\ z$ и при произвольныхъ p и q, откуда между прочимъ слѣдуетъ, что координаты точки—носителя многообразія должны, кромѣ уравненія (1), удовлетворять еще уравненіямъ

$$\frac{\partial F}{\partial p}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial q}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}=0\ldots.. \qquad (29)$$

Такимъ образомъ, опредѣленіе такихъ многообразій, въ случаѣ если уравненіе допускаетъ ихъ, не представляетъ никакихъ затрудненій и сводится къ рѣшенію уравненій.

Для примѣра разсмотримъ произвольное линейное уравненіе

$$Pp+Qq=R.$$

Изъ равенствъ (29) получаемъ

$$P=0,\quad Q=0,$$

что въ связи съ уравненіемъ

$$Pp+Qq=R$$

даетъ еще $R=0$.

Изъ трехъ уравненій

$$P=0,\quad Q=0,\quad R=0$$

опредѣлимъ одну или нѣсколько системъ значеній $x,\ y,\ z$. Для каждой такой системы уравненіе

$$Pp+Qq=R$$

удовлетворяется при произвольныхъ p и q, и слѣдовательно точка (x, y, z) служитъ носителемъ интегральнаго многообразія.

Интегральныя многообразія 3-го типа можно разсматривать подобно многообразіямъ 2-го типа, какъ предѣлы обыкновенныхъ интеграловъ: для этого нужно лишь предположить, что поверхность — носитель интеграла сокращается во всѣхъ направленіяхъ и [illegible]ется къ точкѣ.

Такъ, уравненіе

$$(r^2-x^2)p^2+(r^2-y^2)q^2-2xypq-(x^2+y^2)=0$$

допускаетъ интегралъ

$$(z-c)^2+x^2+y^2=r^2,$$

гдѣ c — произвольное постоянное. Интегральныя поверхности — сферы, имѣющія центры на оси z. При убываніи r всѣ эти сферы сжимаются и стремятся въ предѣлѣ къ точкамъ. Положивъ $r=0$, получаемъ уравненіе

$$x^2p^2+y^2q^2+2xypq+(x^2+y^2)=0,$$

которое дѣйствительно удовлетворяется при $x=0,\ y=0,\ z=$ [illegible] произвольныхъ p и q, т. е. допускаетъ интегральныя многообразія, носителями которыхъ служатъ точки оси z.

Мы не будемъ здѣсь касаться методовъ интегрированія уравненія съ частными производными

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0. \qquad (1)$$

Замѣтимъ лишь, что самая задача можетъ быть поставлена въ [illegible] видѣ, чѣмъ мы ее ставили до сихъ поръ: интегральныя многообразія двухъ измѣреній опредѣляются тремя уравненіями между координатами $x,\ y,\ z,\ p,\ q$; одно изъ этихъ уравненій уже дано, [illegible] уравненіе (1), которое должно удовлетворяться для интегральныхъ многообразій; слѣдовательно, остается найти два остальныхъ уравненія

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0,\quad \psi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0.$$

[illegible], окончательно задачу ставимъ въ слѣдующемъ видѣ: найти уравненія

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0,\quad \psi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0,$$

[illegible] чтобы въ силу этихъ уравненій и въ силу даннаго $F=0$ (1) имѣло мѣсто дифференціальное соотношеніе

$$dz-pdx-qdy=0.$$

Не трудно убѣдиться, что функціи $\varphi,\ \psi,\ F$ должны выполнять нѣкоторыя условія, именно такъ-называемыя скобки Poisson'а должны для нихъ равняться нулю, и мы придемъ такимъ образомъ къ методу Jacobi.

Замѣтимъ еще, что съ точки зрѣнія изложенной теоріи, въ которой координаты x, y, z, p, q являются равноправными, мы можемъ искать интегральныя многообразія всякаго уравненія между координатами x, y, z, p, q, хотя бы оно даже и не содержало p и q, т. е. не было бы собственно уравненіемъ съ частными производными. Найдемъ, напримѣръ, интегральныя многообразія уравненія

$$z = 0. \tag{30}$$

Уравненіе это опредѣляетъ многообразіе элементовъ четырехъ измѣреній; именно, ему удовлетворяютъ всѣ элементы, точки которыхъ лежатъ на плоскости xy. Интегральными многообразіями двухъ измѣреній уравненія (30) будутъ всѣ тѣ многообразія, для носителей которыхъ выполняется уравненіе (30), т. е. носители которыхъ лежатъ въ плоскости xy. Это будутъ, во-первыхъ, многообразія, носителями которыхъ служатъ точки плоскости xy, во-вторыхъ, многообразія, носителями которыхъ служатъ произвольныя кривыя на плоскости xy и въ-третьихъ, многообразіе, носителемъ котораго служитъ сама плоскость xy. Уравненія многообразій 1-го типа будутъ:

$$x = const., \quad y = const., \quad z = 0 \ (p \text{ и } q \text{ — произвольны});$$

2-го типа:

$$\varphi(x, y) = 0, \quad z = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} p - \frac{\partial\varphi}{\partial x} q = 0;$$

3-го типа:

$$z = 0, \quad p = 0, \quad q = 0.$$

Къ тѣмъ же результатамъ можно придти аналитическимъ путемъ: для интегральныхъ многообразій мы должны имѣть

$$z = 0 \ (30), \quad dz - pdx - qdy = 0 \ (2).$$

Въ силу уравненія (30) изъ условія (2) имѣемъ

$$pdx + qdy = 0. \tag{31}$$

Этому дифференціальному соотношенію мы можемъ удовлетворить, во-первыхъ, полагая

$$x = const., \quad y = const. \text{ при произвольныхъ } p \text{ и } q,$$

во-вторыхъ, предполагая зависимость между x и y:

$$\varphi(x, y) = 0, \text{ откуда въ связи съ (31) } \frac{\partial\varphi}{\partial y} p - \frac{\partial\varphi}{\partial x} q = 0;$$

въ-третьихъ, полагая

$$p = 0, \quad q = 0 \text{ при произвольныхъ } x \text{ и } y.$$

Такимъ образомъ получаемъ тѣ же три типа интегральныхъ многообразій; они вполнѣ аналогичны полному, общему и особому интеграламъ уравненія съ частными производными въ теоріи Лагранжа.

§ **2.**—Предположимъ, что между элементами пространства установлено соотвѣтствіе равенствами:

$$x_1 = x_1(x, y, z, p, q), \quad y_1 = y_1(x, y, z, p, q), \quad z_1 = z_1(x, y, z, p, q),$$
$$p_1 = p_1(x, y, z, p, q), \quad q_1 = q_1(x, y, z, p, q), \tag{32}$$

въ силу которыхъ элементу (x, y, z, p, q) соотвѣтствуетъ элементъ $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ и обратно, если предположимъ, что уравненія (32) разрѣшимы относительно x, y, z, p, q. Можно иначе сказать, что равенства (32) опредѣляютъ нѣкоторое преобразованіе элементовъ, при чемъ въ силу ихъ координаты элемента преобразованной системы x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 опредѣляются въ функціи координатъ прежней системы x, y, z, p, q; если разрѣшимъ уравненія (32) относительно x, y, z, p, q, то будемъ имѣть обратное преобразованіе. Всякое многообразіе элементовъ даннымъ преобразованіемъ, очевидно, преобразуется въ многообразіе того же числа измѣреній, но при этомъ, если для перваго многообразія удовлетворялось дифференціальное соотношеніе

$$dz - pdx - qdy = 0. \tag{2}$$

то для второго, вообще говоря, не будетъ удовлетворяться аналогичное соотношеніе

$$dz_1 - p_1dx_1 - q_1dy_1 = 0. \tag{2'}$$

Такъ, если мы имѣли многообразіе двухъ измѣреній, носителемъ котораго служила поверхность, такъ что x, y, z, p, q были у насъ выражены въ функціи двухъ произвольныхъ параметровъ u, v, при чемъ удовлетворялось соотношеніе (2), то въ силу формулъ преобразованія (32) x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 тоже выразятся въ функціи u, v, такъ что точки элементовъ будутъ, вообще говоря, образовать по прежнему нѣкоторую поверхность, а плоскости элементовъ будутъ облекать нѣкоторую поверхность, но только эта поверхность будетъ въ общемъ случаѣ отлична отъ поверхности точекъ элементовъ, и слѣдовательно, соотношеніе (2') не будетъ удовлетворяться. Если мы, пользуясь формулами (32), введемъ въ уравненіе

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

вмѣсто координатъ x, y, z, p, q координаты x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, то получимъ новое уравненіе

$$\Phi(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0, \tag{33}$$

но при этомъ интегральныя многообразія уравненія (1), какъ очевидно изъ предыдущаго, вообще говоря, не преобразуются въ интегральныя многообразія уравненія (33). Для насъ понятно, имѣютъ значеніе лишь тѣ преобразованія элементовъ, которыя, благодаря особому выбору функцій, выражающихъ координаты x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 въ зависимости отъ x, y, z, p, q, *всякое* интегральное многообразіе уравненія (1) преобразуютъ въ интегральное многообразіе уравненія (33). Если притомъ данное преобразованіе обладаетъ этимъ свойствомъ относительно *произвольнаго* уравненія, т. е. другими словами, если это преобразованіе преобразуетъ всякое многообразіе элементовъ, удовлетворяющее дифференціальному соотношенію

$$dz - pdx - qdy = 0, \tag{2}$$

въ многообразіе, удовлетворяющее аналогичному соотношенію

$$dz_1 - p_1dx_1 - q_1dy_1 = 0, \tag{2'}$$

то это преобразованіе называется *преобразованіемъ прикосновенія* (Berührungstransformation). Число измѣреній многообразія элементовъ не мѣняется преобразованіемъ прикосновенія; слѣдовательно, многообразія одного измѣренія, удовлетворяющія дифференціальному соотношенію (2), т. е. кривая съ описанной развертывающейся поверхностью и точка съ конусомъ плоскостей, преобразуются въ многообразія одного изъ этихъ же типовъ; многообразія двухъ измѣреній, удовлетворяющія соотношенію (2), т. е. многообразія, имѣющія носителемъ поверхность, линію или точку, преобразуются тоже въ многообразія одного изъ этихъ трехъ типовъ. Что касается до числа измѣреній многообразія точекъ, то оно можетъ измѣниться. Такъ, если имѣемъ многообразіе, носителемъ котораго служитъ произвольная линія, то x, y, z зависятъ отъ одного параметра u, а p и q — отъ двухъ параметровъ u и v; въ силу формулъ преобразованія, x_1, y_1, z_1 выражаются не только черезъ x, y, z, но и черезъ p и q; слѣдовательно, вообще говоря, x_1, y_1, z_1 будутъ функціями u и v, и слѣдовательно, преобразованное многообразіе будетъ имѣть носителемъ *поверхность*.

Если мы имѣемъ два многообразія, удовлетворяющихъ соотношенію (2) и имѣющихъ общій элементъ, то по преобразованіи получимъ многообразія, которыя тоже будутъ имѣть общій элементъ, такъ какъ всякій элементъ, принадлежащій двумъ любымъ многообразіямъ, очевидно, преобразуется въ элементъ, принадлежащій двумъ преобразованнымъ многообразіямъ. Разсмотримъ, въ какихъ случаяхъ многообразія, имѣющія носителемъ поверхность, линію или точку, могутъ имѣть общій элементъ. Если оба многообразія имѣютъ носителями поверхности, то, очевидно, поверхности эти должны соприкасаться, и общій элементъ составится изъ точки соприкосновенія и общей касательной плоскости;

если носителями обоихъ многообразій будутъ линіи, то эти линіи должны пересѣкаться, и общимъ элементомъ будетъ точка пересѣченія вмѣстѣ съ общею касательною плоскостью этихъ линій въ точкѣ пересѣченія; если носителемъ одного многообразія служитъ поверхность, а другого — линія, то линія должна касаться поверхности, и общимъ элементомъ будетъ точка прикосновенія вмѣстѣ съ общею касательною плоскостью; если носителемъ одного многообразія служитъ поверхность, а другого — точка, то точка должна лежать на поверхности, и общимъ элементомъ будетъ эта точка вмѣстѣ съ касательною плоскостью поверхности въ этой точкѣ. Если предположимъ, что носителями обоихъ многообразій служатъ точки и у нихъ есть общій элементъ, то точки эти не могутъ быть различны, и оба многообразія вполнѣ совпадутъ. Если предположимъ, что носителемъ одного многообразія служитъ линія, а другого точка, то для существованія общихъ элементовъ точка, очевидно, должна лежать на линіи; въ этомъ случаѣ оба многообразія будутъ имѣть цѣлое многообразіе одного измѣренія общихъ элементовъ, образуемое упомянутой точкой вмѣстѣ съ пучкомъ касательныхъ плоскостей линіи въ этой точкѣ. Если мы потребуемъ, чтобы существовало цѣлое многообразіе одного измѣренія общихъ элементовъ у двухъ многообразій, изъ которыхъ одно имѣетъ носителемъ поверхность, а другое линію, то увидимъ, что линія должна лежать на поверхности; общіе элементы составляются изъ точекъ линіи и касательныхъ плоскостей поверхности вдоль линіи. То же требованіе для двухъ многообразій, носителями которыхъ служатъ линіи, выполняется, когда эти линіи соприкасаются, при чемъ многообразіе общихъ элементовъ составляется изъ точки прикосновенія и пучка касательныхъ плоскостей въ этой точкѣ. Наконецъ, то же требованіе для двухъ многообразій, носителями которыхъ служатъ поверхности, выполняется, когда эти поверхности соприкасаются по цѣлой кривой, при чемъ многообразіе общихъ элементовъ составляется изъ точекъ этой кривой и изъ общихъ касательныхъ плоскостей вдоль кривой.

Для краткости, иногда будемъ говорить, что преобразованіе прикосновенія преобразуетъ поверхности, линіи, точки, понимая эти выраженія въ томъ смыслѣ, что преобразованіе прикосновенія преобразуетъ многообразія элементовъ, носителями которыхъ служатъ эти поверхности, линіи и точки. Сопоставляя послѣднія наши результаты съ тѣмъ, что было сказано выше о преобразованіяхъ прикосновенія, мы можемъ тогда сказать, что, если имѣемъ двѣ соприкасающіяся поверхности, или соприкасающіяся поверхность и линію, или двѣ пересѣкающіяся линіи, или поверхность и точку на поверхности, то по выполненіи произвольнаго преобразованія прикосновенія получимъ одинъ изъ тѣхъ же случаевъ взаимнаго расположенія двухъ многообразій точекъ. Равнымъ образомъ, если имѣемъ двѣ поверхности, соприкасающіяся по цѣлой кривой, или поверхность и линію, на ней лежащую, или двѣ соприкасающіяся линіи, или линію и точку на этой линіи, то послѣ выполненія преобразованія прикосновенія, получимъ одинъ изъ этихъ же случаевъ. Замѣтимъ, что если мы имѣемъ произвольную поверхность, то послѣ преобразованія прикосновенія получимъ, вообще говоря, тоже поверхность, такъ какъ x_1, y_1, z_1, зависящія отъ x, y, z, p, q, будутъ, вообще говоря, зависѣть отъ обоихъ параметровъ u и v, разъ x, y, z, p, q выражены въ функціи u и v. Поэтому двѣ соприкасающіяся поверхности преобразуются, вообще говоря, тоже въ поверхности и притомъ непремѣнно въ поверхности соприкасающіяся. Такимъ образомъ, касаніе является свойствомъ инваріантнымъ, чѣмъ и объясняется самое названіе „преобразованіе *прикосновенія*".

Приступимъ теперь къ нахожденію всевозможныхъ типовъ преобразованій прикосновенія. Въ силу формулъ преобразованія элементовъ (32), дифференціальное выраженіе

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1$$

можетъ быть выражено линейной функціей дифференціаловъ dx, dy, dz, dp, dq. Въ случаѣ преобразованія прикосновенія мы должны имѣть $dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = 0$ всякій разъ, когда $dz - pdx - qdy = 0$; слѣдовательно, линейная функція дифференціаловъ dx, dy, dz, dp, dq должна необходимо имѣть видъ $\rho(dz - pdx - qdy)$, гдѣ ρ нѣкоторая функція координатъ элемента. Обратно, если въ силу формулъ преобразованія (32) имѣемъ тождественно

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = \rho(dz - pdx - qdy), \tag{34}$$

или

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 - \rho(dz - pdx - qdy) = 0, \tag{35}$$

то преобразованіе элементовъ, опредѣляемое этими формулами, есть, очевидно, преобразованіе прикосновенія, такъ какъ при

$$dz - pdx - qdy = 0$$

изъ равенства (35) получаемъ

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = 0.$$

Обратное преобразованіе, очевидно, тоже есть преобразованіе прикосновенія, такъ какъ имѣемъ

$$dz - pdx - qdy = \frac{1}{\rho}(dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1)$$

въ силу формулъ, которыя получимъ, разрѣшая равенства (32) относительно x, y, z, p, q. Является, собственно говоря, нѣкоторое сомнѣніе относительно тѣхъ многообразій, для которыхъ при

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = 0$$

имѣемъ еще $\rho = 0$, если таковыя существуютъ; именно, мы не можемъ рѣшить вопроса, будетъ ли для преобразованнаго многообразія удовлетворяться соотношеніе

$$dz - pdx - qdy = 0.$$

Равнымъ образомъ, подобное сомнѣніе является въ случаѣ прямого преобразованія для многообразій, которыя удовлетворяютъ дифференціальному соотношенію

$$dz - pdx - qdy = 0$$

и для которыхъ $\rho = \infty$. Но очевидно, что если формулы (32) опредѣляютъ такое преобразованіе, которое является преобразованіемъ прикосновенія для всѣхъ многообразій, для которыхъ не имѣемъ $\rho = \infty$, и если обратное преобразованіе является преобразованіемъ прикосновенія для всѣхъ многообразій, для которыхъ не имѣемъ $\rho = 0$, то и въ этихъ случаяхъ ($\rho = 0$, $\rho = \infty$) основное свойство преобразованій должно сохраняться, по крайней мѣрѣ въ томъ смыслѣ, что упомянутые случаи будутъ имѣть характеръ случаевъ предѣльныхъ.

Если въ равенство (34) введемъ однородныя координаты x, y, z, p_0, p_1, p_2 и $x_1, y_1, z_1, (p_0)_1, (p_1)_1, (p_2)_1$, то можемъ придать ему видъ

$$p_0 dz + p_1 dx + p_2 dy = (p_0)_1 dz_1 + (p_1)_1 dx_1 + (p_2)_1 dy_1, \tag{36}$$

такъ какъ для каждаго даннаго элемента опредѣлены лишь отношенія координатъ $p_0 : p_1 : p_2$ и $(p_0)_1 : (p_1)_1 : (p_2)_1$. Сравнивая равенство (36) съ (34), имѣемъ

$$\rho = \frac{p_0}{(p_0)_1} \tag{37}$$

и кромѣ того, какъ извѣстно,

$$p = -\frac{p_1}{p_0}, \quad q = -\frac{p_2}{p_0}, \quad p_1 = -\frac{(p_1)_1}{(p_0)_1}, \quad q_1 = -\frac{(p_2)_1}{(p_0)_1}.$$

Для случая $dz - pdx - qdy = 0$, $\rho = \infty$ имѣемъ $p_0 dz + p_1 dx + p_2 dy = 0$, $(p_0)_1 = 0$ и изъ равенства (36) $(p_0)_1 dz_1 + (p_1)_1 dx_1 + (p_1)_1 dy_1 = 0$.

Такимъ образомъ, преобразованное многообразіе будетъ одно изъ тѣхъ многообразій, для которыхъ удовлетворяется дифференціальное соотношеніе

$$(p_0)_1 dz_1 + (p_1)_1 dx_1 + (p_2)_1 dy_1 = 0$$

при $(p_0)_1 = 0$, соотношение же

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = 0$$

удовлетворяется въ несобственномъ смыслѣ, при чемъ $p_1 = \infty$, $q_1 = \infty$. Если данное многообразіе было двухъ измѣреній, то преобразованное будетъ многообразіемъ двухъ измѣреній, носителемъ котораго служитъ или цилиндръ съ образующими, параллельными оси z_1, или прямая, параллельная оси z_1. Совершенно аналогично разберемъ случай $\rho = 0$.

Опредѣленіе всевозможныхъ преобразованій прикосновенія мы свели къ слѣдующей задачѣ: найти x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 въ функціи x, y, z, p, q такъ, чтобы тождественно имѣло мѣсто равенство

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 - \rho(dz - pdx - qdy) = 0. \tag{35}$$

Если изъ формулъ преобразованія (32), которыя выражаютъ координаты x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, черезъ x, y, z, p, q, исключимъ p_1, q_1, p, q, для чего надо исключить p и q изъ первыхъ трехъ равенствъ (32), то получимъ, вообще говоря, *одно* соотношеніе между координатами x, y, z x_1, y_1, z_1, свободное отъ p, q, p_1, q_1

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x, y, z) = 0. \tag{38}$$

Дифференцируя его, получимъ связь между дифференціалами dx_1, dy_1, dz_1, dx, dy, dz:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z_1}dz_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial z}dz + \frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy = 0. \tag{39}$$

Равенство (35) должно быть слѣдствіемъ равенства (39), такъ какъ въ противномъ случаѣ, исключая между ними одинъ изъ дифференціаловъ, напримѣръ dz_1, получимъ линейную зависимость между дифференціалами dx_1, dy_1, dx, dy, dz, изъ которой слѣдуетъ, что при $dy_1 = 0$, $dz = 0$, $dx = 0$, $dy = 0$ и $dx_1 = 0$, т. е. при постоянныхъ y_1, z, x, y постоянно и x_1 независимо отъ измѣненія z_1, p_1, q_1, p, q, другими словами существуетъ зависимость вида

$$\varphi(x_1, y_1, x, y, z) = 0.$$

По нашему предположенію существуетъ лишь одна зависимость между координатами x_1, y_1, z_1, x, y, z, именно равенство (38), а потому мы должны имѣть тожественно

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 - \rho(dz - pdx - qdy) = \lambda d\Omega =$$

$$= \lambda\left[\frac{\partial\Omega}{\partial z_1}dz_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial z}dz + \frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy\right], \tag{40}$$

гдѣ λ — нѣкоторый множитель, зависящій отъ координатъ элемента. Сравнивая коэффиціенты при дифференціалахъ, получаемъ

$$1 = \lambda\frac{\partial\Omega}{\partial z_1};\quad -p_1 = \lambda\frac{\partial\Omega}{\partial x_1};\quad -q_1 = \lambda\frac{\partial\Omega}{\partial y_1};\quad -\rho = \lambda\frac{\partial\Omega}{\partial z};\quad \rho p = \lambda\frac{\partial\Omega}{\partial x};\quad \rho q = \lambda\frac{\partial\Omega}{\partial y}, \tag{41}$$

или, исключая λ и ρ,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z_1}p_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial x_1} = 0;\quad \frac{\partial\Omega}{\partial z_1}q_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial y_1} = 0;\quad \frac{\partial\Omega}{\partial z}p + \frac{\partial\Omega}{\partial x} = 0;\quad \frac{\partial\Omega}{\partial z}q + \frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0. \tag{42}$$

Равенства (38) и (42) позволяютъ намъ опредѣлить x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 въ функціи x, y, z, p, q и обратно. Какъ видимъ, преобразованіе прикосновенія и обратное ему опредѣляются вполнѣ однимъ соотношеніемъ (38). Не трудно выяснить геометрическій смыслъ этого соотношенія. Разсмотримъ многообразіе двухъ измѣреній, имѣющее носителемъ точку (x, y, z), другими словами, предположимъ, что x, y, z имѣютъ опредѣленныя постоянныя значенія, а p и q — произвольны. Тогда между координатами x_1, y_1, z_1 существуетъ одно соотношеніе (38), которое при x, y, z — постоянныхъ представляетъ уравненіе нѣкоторой поверхности. Изъ равенствъ (42) первыя два, какъ легко видѣть, показываютъ, что плоскость элемента $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ касается поверхности $\Omega = 0$ въ точкѣ (x_1, y_1, z_1), а послѣднія два устанавливаютъ соотвѣтствіе между точками поверхности $\Omega = 0$ и произвольными параметрами p и q, т. е. между точками поверхности и плоскостями, проходящими черезъ точку (x, y, z). Итакъ, многообразіе, имѣющее носителемъ точку (x, y, z) преобразуется въ многообразіе, имѣющее носителемъ поверхность $\Omega = 0$, или, если воспользоваться обычнымъ сокращеннымъ выраженіемъ, точка (x, y, z) преобразуется въ поверхность $\Omega = 0$. Всѣмъ точкамъ (x, y, z) пространства соотвѣтствуетъ цѣлое семейство поверхностей

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x, y, z) = 0$$

съ тремя параметрами x, y, z. Обратно, точки (x_1, y_1, z_1) преобразуются въ поверхности семейства $\Omega = 0$, гдѣ уже считаемъ x, y, z за текущія координаты, а x_1, y_1, z_1 — за параметры. Если желаемъ преобразовать произвольную поверхность $\varphi(x, y, z) = 0$ (т. е. многообразіе, носителемъ котораго служитъ эта поверхность), то можемъ поступить слѣдующимъ образомъ: точки поверхности $\varphi = 0$ преобразуются въ поверхности семейства съ двумя произвольными параметрами

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0,$$

гдѣ x, y, z связаны соотношеніемъ $\varphi = 0$. Преобразованное многообразіе должно имѣть по одному общему элементу съ каждою изъ поверхностей этого семейства, подобно тому какъ поверхность $\varphi = 0$ имѣетъ общій элементъ съ каждою своею точкой; слѣдовательно, поверхность $\varphi = 0$ преобразуется, вообще говоря, въ огибающую поверхность семейства поверхностей $\Omega = 0$. Въ частности можетъ случиться, что семейство $\Omega = 0$ не имѣетъ огибающей, но всѣ поверхности семейства касаются нѣкоторой кривой: тогда поверхность $\varphi = 0$ преобразуется въ эту кривую. Можно поступить еще иначе: опредѣлимъ всѣ поверхности семейства $\Omega = 0$, гдѣ x, y, z — текущія координаты, касающіяся поверхности $\varphi = 0$; тогда у насъ получится семейство съ двумя произвольными параметрами; каждая поверхность семейства преобразуется въ точку, и поверхность, образуемая этими точками, будетъ соотвѣтствовать поверхности $\varphi = 0$. Въ частности можетъ случиться, что получимъ семейство поверхностей $\Omega = 0$, касающихся поверхности $\varphi = 0$, лишь съ однимъ параметромъ, при чемъ каждая поверхность семейства будетъ касаться поверхности $\varphi = 0$ по цѣлой кривой; тогда поверхность $\varphi = 0$ преобразуется въ линію — геометрическое мѣсто точекъ, соотвѣтствующихъ поверхностямъ семейства $\Omega = 0$. Если имѣемъ произвольную кривую $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$, то точкамъ ея соотвѣтствуютъ поверхности семейства

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x, y, z) = 0,$$

гдѣ x, y, z связаны соотношеніями $\varphi = 0$, $\psi = 0$, т. е. семейства съ однимъ параметромъ. Кривая $\varphi = 0$, $\psi = 0$, очевидно, преобразуется въ огибающую поверхность этого семейства, при чемъ всякая точка кривой вмѣстѣ съ пучкомъ касательныхъ плоскостей преобразуется въ кривую, по которой соотвѣтствующая поверхность $\Omega = 0$ касается огибающей, вмѣстѣ съ касательными плоскостями вдоль этой кривой. Можно идти инымъ путемъ: опредѣлимъ всѣ поверхности

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x, y, z) = 0,$$

гдѣ x, y, z — текущія координаты, касающіяся кривой $\varphi = 0$, $\psi = 0$: получимъ семейство съ двумя параметрами. Поверхности этого семейства преобразуются въ точки, и геометрическое мѣсто этихъ точекъ будетъ поверхность, соотвѣтствующая кривой $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Не представляетъ никакого затрудненія и преобразованіе многообразій одного измѣренія. Такъ, если имѣемъ многообразіе элементовъ, образованныхъ точками нѣкоторой кривой и касательными плоскостями нѣкоторой развертывающейся поверхности, описанной около этой кривой, то послѣ преобразованія, очевидно, получимъ въ общемъ случаѣ подобное же многообразіе; въ частности, если данная кривая лежитъ на одной изъ

поверхностей семейства $\Omega = 0$, то получимъ точку съ конусомъ плоскостей.

Для примѣра разсмотримъ преобразованіе прикосновенія, опредѣляемое равенствомъ

$$\Omega = z_1 + z - x_1 x - y_1 y = 0. \tag{43}$$

Равенства (42) въ этомъ случаѣ даютъ

$$z_1 = px + qy - z; \quad x_1 = p; \quad y_1 = q; \quad p_1 = x; \quad q_1 = y, \tag{44}$$

т. е. мы получаемъ извѣстное преобразованіе, которымъ пользовался Legendre для интегрированія уравненія минимальныхъ поверхностей. Въ силу равенства (43) точкѣ (x, y, z) соотвѣтствуетъ плоскость

$$z_1 + z = x_1 x + y_1 y,$$

которая, какъ не трудно усмотрѣть, есть полярная плоскость точки (x, y, z) относительно параболоида

$$2\zeta = \xi^2 + \eta^2. \tag{45}$$

Такимъ образомъ, преобразованіе Лежандра есть не что иное, какъ взаимно-полярное соотвѣтствіе. Каждая поверхность преобразуется во взаимно-полярную поверхность относительно параболоида (45); только развертывающіяся поверхности преобразуются въ линіи, а плоскости — въ точки.

Предположимъ теперь, что, исключая p и q изъ первыхъ трехъ равенствъ

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(x, y, z, p, q) \\ y_1 &= y_1(x, y, z, p, q) \\ z_1 &= z_1(x, y, z, p, q) \\ p_1 &= p_1(x, y, z, p, q) \\ q_1 &= q_1(x, y, z, p, q) \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

получимъ два соотношенія:

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x, y, z) = 0, \quad \Omega_1(x_1, y_1, z_1, x, y, z) = 0, \tag{46}$$

свободныхъ отъ p, q, p_1, q_1; это будетъ въ томъ случаѣ, если каждыя двѣ изъ функцій x_1, y_1, z_1 не независимы относительно перемѣнныхъ p и q.

Разсуждая такъ же, какъ разсуждали при существованіи лишь одного соотношенія $\Omega = 0$, заключимъ, что должно имѣть мѣсто при произвольныхъ дифференціалахъ равенство:

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 - \rho(dz - p\,dx - q\,dy) = \lambda d\Omega + \mu d\Omega_1, \tag{47}$$

откуда:

$$
\left.\begin{aligned}
1=\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial z_1}+\mu\frac{\partial\Omega_1}{\partial z_1};\ -p_1=\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}+\mu\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1};\ -q_1=\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial y_1}+\mu\frac{\partial\Omega_1}{\partial y_1};\\
-\rho=\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial z}+\mu\frac{\partial\Omega_1}{\partial z};\ \rho p=\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial x}+\mu\frac{\partial\Omega_1}{\partial x};\ \rho q=\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial y}+\mu\frac{\partial\Omega_1}{\partial y}.
\end{aligned}\right\}\quad(48)
$$

Равенства (46) и (48) позволяютъ намъ опредѣлить $\lambda, \mu, \rho, x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ въ функціи x, y, z, p, q. Такимъ образомъ, преобразованіе прикосновенія (и обратное ему) вполнѣ опредѣляется равенствами (46). Нетрудно усмотрѣть геометрическій смыслъ этихъ равенствъ. Разсмотримъ многообразіе, имѣющее носителемъ точку (x, y, z): другими словами, пусть x, y, z — опредѣленныя постоянныя, а p и q вполнѣ произвольны. Тогда между x_1, y_1, z_1 существуютъ два соотношенія (46), которыя при постоянныхъ x, y, z опредѣляютъ нѣкоторую кривую. Равенства (48) служатъ для опредѣленія $\rho, \lambda, \mu, p_1, q_1$ въ каждой точкѣ кривой и для установленія соотвѣтствія между элементами кривой и точки, такъ что между координатами x_1, y_1, z_1 существуютъ лишь соотношенія (46). Точка (x, y, z) преобразуется, слѣдовательно, въ кривую $\Omega=0$, $\Omega_1=0$; обратно, точкѣ (x_1, y_1, z_1) соотвѣтствуетъ кривая $\Omega=0$, $\Omega_1=0$, при чемъ за текущія координаты считаемъ x, y, z. Если имѣемъ произвольную поверхность $\varphi(x, y, z)=0$, то точкамъ ея соотвѣтствуетъ система кривыхъ

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1)=0,\quad \Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1)=0,$$

при чемъ x, y, z связаны соотношеніемъ $\varphi=0$; система эта зависитъ, слѣдовательно, отъ двухъ параметровъ, т. е. это будетъ такъ-называемая конгруэнція кривыхъ. Поверхность $\varphi=0$ должна преобразоваться въ многообразіе, имѣющее общій элементъ съ каждой изъ кривыхъ конгруэнціи, такъ какъ сама она имѣетъ по общему элементу съ каждой изъ своихъ точекъ; требованіе это выполняется для такъ-называемой фокальной поверхности конгруэнціи, которой касаются всѣ кривыя конгруэнціи: слѣдовательно, поверхность $\varphi=0$ преобразуется въ эту фокальную поверхность. Въ частности можетъ случиться, что всѣ кривыя конгруэнціи пересѣкаютъ одну кривую линію, тогда фокальной поверхности мы не получимъ, и поверхность $\varphi=0$ преобразуется въ упомянутую кривую, которая имѣетъ по одному общему элементу съ каждой изъ кривыхъ конгруэнціи. Можно идти инымъ путемъ: проведемъ всѣ кривыя $\Omega=0$, $\Omega_1=0$, гдѣ считаемъ за текущія координаты x, y, z, касающіяся поверхности $\varphi=0$; получимъ конгруэнцію кривыхъ, которыя преобразуются въ точки, и геометрическое мѣсто этихъ точекъ

будетъ поверхность, соотвѣтствующая поверхности $\varphi=0$. Въ частности можетъ случиться, что мы не получимъ ***конгруэнціи*** кривыхъ $\Omega=0$, $\Omega_1=0$, касательныхъ поверхности $\varphi=0$: это будетъ лишь тогда, когда поверхность $\varphi=0$ образована семействомъ кривыхъ $\Omega=0$, $\Omega_1=0$ съ однимъ параметромъ; съ каждой изъ этихъ кривыхъ, на ней лежащихъ, поверхность имѣетъ цѣлое многообразіе одного измѣренія общихъ элементовъ. Преобразованіемъ прикосновенія кривыя $\Omega=0$, $\Omega_1=0$ преобразуются въ точки, и геометрическое мѣсто этихъ точекъ—нѣкоторая линія—будетъ соотвѣтствовать поверхности $\varphi=0$. Если имѣемъ произвольную кривую $\varphi(x, y, z)=0$, $\psi(x, y, z)=0$, то точки ея преобразуются въ линіи семейства

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x, y, z)=0,\quad \Omega_1(x_1, y_1, z_1, x, y, z)=0,$$

при чемъ x, y, z связаны двумя соотношеніями $\varphi=0$, $\psi=0$, откуда слѣдуетъ, что это семейство есть семейство съ однимъ параметромъ. Всѣ кривыя семейства образуютъ нѣкоторую поверхность, которая, очевидно, и будетъ соотвѣтствовать кривой $\varphi=0$, $\psi=0$; при этомъ каждой точкѣ кривой вмѣстѣ съ пучкомъ касательныхъ плоскостей соотвѣтствуетъ одна изъ кривыхъ семейства $\Omega=0$, $\Omega_1=0$ на поверхности вмѣстѣ съ касательными плоскостями поверхности вдоль этой кривой семейства. Можно поступить иначе: проведемъ всѣ кривыя

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1)=0,\quad \Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1)=0,$$

(при чемъ x, y, z считаемъ за текущія координаты) пересѣкающія кривую $\varphi=0$, $\psi=0$: получимъ конгруэнцію кривыхъ: каждая изъ этихъ кривыхъ преобразуется въ точку, и геометрическое мѣсто этихъ точекъ будетъ поверхность, соотвѣтствующая кривой $\varphi=0$, $\psi=0$. Если имѣемъ многообразіе одного измѣренія, элементы котораго составляются изъ точекъ нѣкоторой кривой и изъ касательныхъ плоскостей нѣкоторой развертывающейся поверхности, описанной около кривой, то послѣ преобразованія получимъ, очевидно, въ общемъ случаѣ подобное же многообразіе: въ частности, если кривая—геометрическое мѣсто точекъ элементовъ есть одна изъ кривыхъ $\Omega=0$, $\Omega_1=0$, получимъ, по преобразованіи, точку съ конусомъ плоскостей.

Для примѣра разсмотримъ преобразованіе прикосновенія, опредѣляемое равенствами

$$\Omega=y_1-y=0,\quad \Omega_1=z_1-z+x_1x=0. \tag{49}$$

Изъ равенствъ (48) получимъ

$$z_1=z-px;\quad x_1=p;\quad y_1=y;\quad p_1=-x;\quad q_1=q, \tag{50}$$

т. е. будемъ имѣть преобразованіе, которымъ пользовался Ampère въ своемъ знаменитомъ мемуарѣ объ уравненіяхъ съ частными производными 2-го порядка [1]). Въ силу равенствъ (49) точкѣ (x, y, z) соотвѣтствуетъ прямая, параллельная плоскости z_1x_1 и обратно. Произвольная линія преобразуется въ линейчатую поверхность съ направляющею плоскостью z_1x_1; произвольная поверхность преобразуется, вообще говоря, въ поверхность: въ частности, линейчатая поверхность съ направляющею плоскостью zx преобразуется въ линію.

Намъ остается предположить, что существуетъ три соотношенія между координатами x_1, y_1, z_1, x, y, z, свободныхъ отъ p, q, p_1, q_1. Но въ этомъ случаѣ, очевидно, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(x, y, z) \\ y_1 &= y_1(x, y, z) \\ z_1 &= z_1(x, y, z) \end{aligned}\right\}. \tag{51}$$

т. е. имѣемъ преобразованіе точекъ (соотвѣтствіе между точками), а не преобразованіе элементовъ. Вставляя выраженія x_1, y_1, z_1 въ равенство

$$dz_1 - p_1dx_1 - q_1dy_1 = \rho(dz - pdx - qdy), \tag{34}$$

получимъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial z} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial z} - q_1\frac{\partial y_1}{\partial z} &= \rho \\ \frac{\partial z_1}{\partial x} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial x} - q_1\frac{\partial y_1}{\partial x} &= -\rho p \\ \frac{\partial z_1}{\partial y} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial y} - q_1\frac{\partial y_1}{\partial y} &= -\rho q \end{aligned}\right\}. \tag{52}$$

или, исключая ρ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial z}p + \frac{\partial z_1}{\partial x} &= p_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial z}p + \frac{\partial x_1}{\partial x}\right) + q_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial z}p + \frac{\partial y_1}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial z_1}{\partial z}q + \frac{\partial z_1}{\partial y} &= p_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial z}q + \frac{\partial x_1}{\partial y}\right) + q_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial z}q + \frac{\partial y_1}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\}, \tag{53}$$

откуда

$$p_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dz_1}{dx} & \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dz_1}{dy} & \frac{dy_1}{dy} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dx} & \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dx_1}{dy} & \frac{dy_1}{dy} \end{vmatrix}}; \quad q_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dx} & \frac{dz_1}{dx} \\ \frac{dx_1}{dy} & \frac{dz_1}{dy} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dx} & \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dx_1}{dy} & \frac{dy_1}{dy} \end{vmatrix}}. \tag{54}$$

[1]) Journ. de l'Ec. Polyt., cah. 18.

гдѣ условно обозначаемъ:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\partial V}{\partial z}p + \frac{\partial V}{\partial x}; \quad \frac{dV}{dy} = \frac{\partial V}{\partial z}q + \frac{\partial V}{\partial y}. \tag{55}$$

Формулы (51) вмѣстѣ съ формулами (54) даютъ намъ преобразованіе точекъ, *распространенное*, по терминологіи Lie (erweiterte Transformation), на элементы. Это преобразованіе давно извѣстно, такъ какъ оно выражаетъ между прочимъ связь между производными новой функціи по новымъ перемѣннымъ и частными производными прежней функціи по прежнимъ перемѣннымъ. Въ самомъ дѣлѣ, если предположимъ $z = \varphi(x, y)$ и $dz - pdx - qdy = 0$, то, во-первыхъ, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$; далѣе будемъ имѣть $z_1 = \psi(x_1, y_1)$ и, такъ какъ въ силу равенства (34) $dz_1 - p_1dx_1 - q_1dy_1 = 0$, то $p_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x_1}$, $q_1 = \frac{\partial z_1}{\partial y_1}$.

Итакъ, собственныя преобразованія прикосновенія принадлежатъ къ двумъ различнымъ типамъ и опредѣляются или однимъ, или двумя соотношеніями между координатами x, y, z, x_1, y_1, z_1.

§ 3. Выведемъ теперь формулы, опредѣляющія x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 въ функціи x, y, z, p, q и справедливыя для обоихъ типовъ преобразованій прикосновенія, равно какъ для распространеннаго преобразованія точекъ. Для этого въ соотношеніе

$$dz_1 - p_1dx_1 - q_1dy_1 = \rho(dz - pdx - qdy) \tag{34}$$

вставимъ выраженія x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 черезъ x, y, z, p, q и сравнимъ коэффиціенты при дифференціалахъ dz, dx, dy, dp, dq въ обѣихъ частяхъ равенства. Получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial z} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial z} - q_1\frac{\partial y_1}{\partial z} &= \rho \\ \frac{\partial z_1}{\partial x} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial x} - q_1\frac{\partial y_1}{\partial x} &= -\rho p \\ \frac{\partial z_1}{\partial y} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial y} - q_1\frac{\partial y_1}{\partial y} &= -\rho q \\ \frac{\partial z_1}{\partial p} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial p} - q_1\frac{\partial y_1}{\partial p} &= 0 \\ \frac{\partial z_1}{\partial q} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial q} - q_1\frac{\partial y_1}{\partial q} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{56}$$

или, исключая ρ и пользуясь условнымъ обозначеніемъ

$$\frac{dV}{dx}=\frac{\partial V}{\partial z}p+\frac{\partial V}{\partial x},\quad \frac{dV}{dy}=\frac{\partial V}{\partial z}q+\frac{\partial V}{\partial y};$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dz_1}{dx}-p_1\frac{dx_1}{dx}-q_1\frac{dy_1}{dx}=0\\
&\frac{dz_1}{dy}-p_1\frac{dx_1}{dy}-q_1\frac{dy_1}{dy}=0\\
&\frac{\partial z_1}{\partial p}-p_1\frac{\partial x_1}{\partial p}-q_1\frac{\partial y_1}{\partial p}=0\\
&\frac{\partial z_1}{\partial q}-p_1\frac{\partial x_1}{\partial q}-q_1\frac{\partial y_1}{\partial q}=0
\end{aligned}\right\}. \tag{57}$$

Обратно, изъ системы равенствъ (57) слѣдуетъ равенство (34), если ρ опредѣлимъ изъ условія

$$\rho=\frac{\partial z_1}{\partial z}-p_1\frac{\partial x_1}{\partial z}-q_1\frac{\partial y_1}{\partial z}, \tag{58}$$

и слѣдовательно, всякія пять функцій x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, удовлетворяющія уравненіямъ (57), опредѣляютъ преобразованіе прикосновенія (или распространенное преобразованіе точекъ, если x_1, y_1, z_1 не зависятъ отъ p и q). Такъ какъ число уравненій (четыре) на единицу меньше числа опредѣляемыхъ функцій, то одну изъ нихъ, напримѣръ z_1, можемъ выбрать произвольно; y_1 и x_1 опредѣлятся изъ двухъ уравненій, которыя получимъ, исключая p_1 и q_1 изъ четырехъ равенствъ (57); уравненія эти будутъ имѣть видъ совокупныхъ уравненій съ частными производными x_1 и y_1 по перемѣннымъ x, y, z, p, q; впослѣдствіи мы увидимъ, какими болѣе простыми уравненіями они могутъ быть замѣнены; наконецъ, p_1 и q_1 опредѣлятся рѣшеніемъ системы линейныхъ уравненій. Пользуясь произволомъ въ выборѣ функціи z_1, мы можемъ произвольное уравненіе съ частными производными

$$F(x, y, z, p, q)=0 \tag{1}$$

преобразовать въ уравненіе

$$z_1=0; \tag{59}$$

для этого стоитъ только взять

$$z_1=F(x, y, z, p, q)$$

и опредѣлить затѣмъ x_1, y_1, p_1, q_1, какъ было сказано, изъ уравненій (57). Найденнымъ преобразованіемъ прикосновенія уравненіе (1) преобразуется въ (59), и вообще всякое уравненіе

$$F(x, y, z, p, q)=const.$$

въ

$$z_1=const.$$

Если бы мы взяли $x_1=F(x, y, z, p, q)$ и опредѣлили z_1, y_1, p_1, q_1 изъ равенствъ (57), то преобразовали бы уравненіе (1) въ

$$x_1=0.$$

Интегральныя многообразія уравненія

$$z_1=0 \tag{59}$$

и даже вообще всякаго уравненія вида

$$f(x_1, y_1, z_1)=0$$

легко могутъ быть найдены. Выше (см. § 1, стр. 18) мы видѣли, что интегральныя многообразія двухъ измѣреній уравненія (59) будутъ трехъ типовъ: многообразія перваго типа имѣютъ носителями точки плоскости $x_1\ y_1$, многообразія второго типа—произвольныя кривыя этой же плоскости; наконецъ, многообразіе 3-го типа имѣетъ носителемъ плоскость x_1y_1. Въ силу нашего преобразованія прикосновенія, этимъ многообразіямъ соотвѣтствуютъ интегральныя многообразія уравненія (1). Многообразія 2-го типа преобразуются, вообще говоря, въ многообразія, имѣющія носителями поверхности (см. выше, стр. 26); формулы, которыя получимъ, оставляя кривую плоскости x_1y_1 вполнѣ произвольной, дадутъ намъ такъ-называемый *общій* интегралъ уравненія (1), зависящій отъ одной произвольной функціи, отъ вида которой зависитъ кривая плоскости x_1y_1. Многообразія 2-го типа, которыя, очевидно, можно разсматривать, какъ предѣльные случаи многообразій 1-го типа, могутъ преобразоваться и въ поверхности и въ линіи. Если наше преобразованіе прикосновенія опредѣляется однимъ равенствомъ

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x, y, z)=0,$$

то, какъ видѣли выше (см. стр. 25), по преобразованіи получимъ поверхности семейства

$$\Omega(x_1, y_1, 0, x, y, z)=0, \tag{60}$$

зависящаго отъ двухъ параметровъ x_1, y_1. Изъ равенства (60) z опредѣлится въ функціи x, y и двухъ параметровъ, и мы будемъ имѣть такъ-называемый *полный* интегралъ. Всякая кривая плоскости x_1y_1 можетъ быть разсматриваема какъ „огибающая“ своихъ точекъ въ томъ смыслѣ, что кривая эта съ каждой изъ своихъ точекъ имѣетъ цѣлое многообразіе одного измѣренія общихъ элементовъ, образуемое точкой и пучкомъ касательныхъ плоскостей. Въ силу преобразованія прикосновенія, точки кривой преобразуются въ поверхности семейства (60); если, напримѣръ, уравненіе кривой

$$y_1 = \varphi(x_1),$$

то получимъ семейство поверхностей съ однимъ параметромъ

$$\Omega(x_1, \varphi(x_1), 0, x, y, z) = 0. \qquad (61)$$

Кривая $y_1 = \varphi(x_1)$ преобразуется, очевидно, (ср. выше стр. 26) въ огибающую поверхность семейства (61). Такимъ образомъ, общій интегралъ получается изъ полнаго, если мы возьмемъ огибающую поверхность какого-либо семейства съ однимъ параметромъ, образованнаго поверхностями полнаго интеграла. Уравненіе общаго интеграла получимъ, очевидно, исключая x_1 изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} &\Omega(x_1, \varphi(x_1), 0, x, y, z) = 0 \\ &\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi}\varphi'(x_1) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (62)$$

Если наше преобразованіе прикосновенія опредѣляется двумя равенствами

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x, y, z) = 0$$
$$\Omega_1(x_1, y_1, z_1, x, y, z) = 0,$$

то точки плоскости x_1y_1 преобразуются въ линіи конгруэнціи

$$\left.\begin{aligned} &\Omega(x_1, y_1, 0, x, y, z) = 0 \\ &\Omega_1(x_1, y_1, 0, x, y, z) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

и слѣдовательно, уравненіе (1) допускаетъ цѣлую систему, зависящую отъ двухъ произвольныхъ параметровъ, интегральныхъ многообразій, имѣющихъ носителями линіи. Не трудно убѣдиться, что уравненіе (1) въ этомъ случаѣ линейно относительно p и q или распадается на подобныя уравненія.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ точку (x, y, z) и конусъ (T), опредѣляемый уравненіемъ $F = 0$ (1), т. е. многообразіе одного измѣренія, выдѣляемое уравненіемъ $F = 0$ изъ многообразія двухъ измѣреній, носителемъ котораго служитъ точка (x, y, z). Ему соотвѣтствуетъ многообразіе одного измѣренія, выдѣляемое уравненіемъ $z_1 = 0$ изъ многообразія двухъ измѣреній, носителемъ котораго служитъ кривая

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x, y, z) = 0$$
$$\Omega_1(x_1, y_1, z_1, x, y, z) = 0,$$

при чемъ x_1, y_1, z_1 — текущія координаты; это многообразіе будетъ, очевидно, состоять изъ точекъ пересѣченія кривой $\Omega = 0$, $\Omega_1 = 0$ съ плоскостью x_1y_1 — каждая вмѣстѣ съ пучкомъ касательныхъ плоскостей кривой въ этой точкѣ; такимъ образомъ, наше многообразіе распадается на нѣсколько многообразій, изъ которыхъ каждое, очевидно, входитъ въ составъ многообразія двухъ измѣреній, носителемъ котораго служитъ соотвѣтственная точка пересѣченія $(x_1, y_1, 0)$. Производя обратное преобразованіе, видимъ, что многообразіе, состоящее изъ точки (x, y, z) и конуса плоскостей (T), должно распадаться на многообразія, входящія въ составъ многообразій двухъ измѣреній, носителями которыхъ служатъ кривыя

$$\Omega(x_1, y_1, 0, x, y, z) = 0$$
$$\Omega_1(x_1, y_1, 0, x, y, z) = 0$$

(x, y, z — текущія координаты), соотвѣтствующія точкамъ пересѣченія $(x_1, y_1, 0)$. Очевидно, это возможно лишь тогда, когда конусъ (T) распадается на нѣсколько конусовъ, а эти послѣдніе вытягиваются въ прямыя линіи — касательныя въ точкѣ (x, y, z) къ соотвѣтствующимъ кривымъ $\Omega = 0$, $\Omega_1 = 0$. Въ частности, если плоскость x_1y_1 пересѣкается съ каждой изъ кривыхъ

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x, y, z) = 0$$
$$\Omega_1(x_1, y_1, z_1, x, y, z) = 0$$

(x_1, y_1, z_1 — текущія координаты) въ *одной* точкѣ, конусъ (T) вытягивается въ одну прямую, и уравненіе $F = 0$, какъ мы видѣли выше (см. § 1, стр. 14), будетъ линейно относительно p и q, при чемъ кривыя, соотвѣтствующія точкамъ плоскости x_1y_1, будутъ характеристиками этого уравненія. Въ общемъ случаѣ, уравненіе $F = 0$ равносильно нѣсколькимъ линейнымъ, при чемъ распаденіе уравненія $F = 0$, вообще говоря, не совершается раціонально (напр., уравненіе $yp^2 - xq^2 = 0$ распадается на два: $p\sqrt{y} + q\sqrt{x} = 0$ и $p\sqrt{y} - q\sqrt{x} = 0$). Разсматривая произвольную кривую плоскости x_1y_1 какъ „огибающую" своихъ точекъ и производя преобразованіе прикосновенія, убѣдимся, что всякая интегральная поверхность уравненія $F = 0$ (1) получается группировкой характеристикъ уравненія (1) въ семейство съ однимъ параметромъ. Уравненіе общаго интеграла, такимъ образомъ, получимъ, исключая произвольный параметръ x_1 изъ уравненія семейства характеристикъ

$$\left.\begin{aligned} &\Omega(x_1, \varphi(x_1), 0, x, y, z) = 0 \\ &\Omega_1(x_1, \varphi(x_1), 0, x, y, z) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

соотвѣтствующихъ точкамъ кривой

$$y_1 = \varphi(x_1)$$

на плоскости $x_1 y_1$. Уравненія (64) можно разрѣшить относительно x_1, и $\varphi(x_1)$; получимъ

$$x_1 = \alpha(x, y, z)$$
$$\varphi(x_1) = \beta(x, y, z).$$

Исключая x_1, приходимъ къ уравненію общаго интеграла

$$\beta(x, y, z) = \varphi[\alpha(x, y, z)], \qquad (65)$$

гдѣ φ — знакъ произвольной функціи. Не трудно усмотрѣть, что α и β суть интегралы дифференціальныхъ уравненій характеристикъ линейнаго уравненія (ср. § 1, стр. 14). Въ самомъ дѣлѣ, уравненія характеристикъ (63), разрѣшенныя относительно x_1 и y_1, дадутъ очевидно

$$x_1 = \alpha(x, y, z)$$
$$y_1 = \beta(x, y, z);$$

характеристикамъ соотвѣтствуютъ точки плоскости $x_1 y_1$, для которыхъ $x_1 = const.$, $y_1 = const.$, и слѣдовательно, для всякой характеристики имѣемъ

$$\alpha(x, y, z) = const.$$
$$\beta(x, y, z) = const.,$$

откуда и слѣдуетъ справедливость сдѣланнаго выше замѣчанія.

Разсмотримъ, наконецъ, многообразіе, носителемъ котораго служитъ плоскость $x_1 y_1$. Уравненія его

$$z_1 = 0, \quad p_1 = 0, \quad q_1 = 0;$$

въ силу равенствъ (57) получаемъ, вообще говоря,

$$\frac{dz_1}{dx} = 0, \quad \frac{dz_1}{dy} = 0, \quad \frac{\partial z_1}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial z_1}{\partial q} = 0.$$

Такимъ образомъ, для преобразованнаго многообразія, кромѣ уравненія

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \qquad (1)$$

будутъ удовлетворяться еще уравненія

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0. \qquad (66)$$

Подобное интегральное многообразіе будемъ называть *особымъ*.

Если плоскости $x_1 y_1$ соотвѣтствуетъ поверхность

$$z = z(x, y),$$

то мы получимъ особый интегралъ въ обычномъ смыслѣ этого слова. Такъ какъ плоскость $x_1 y_1$ съ каждой изъ своихъ точекъ имѣетъ одинъ общій элементъ, а съ каждой кривой, на ней лежащей — цѣлое многообразіе одного измѣренія общихъ элементовъ, то особый интегралъ будетъ, во-первыхъ, общей огибающей всего семейства полныхъ интеграловъ или фокальной поверхностью конгруэнціи характеристикъ, въ случаѣ уравненія, распадающагося на линейныя и получаемаго преобразованіемъ прикосновенія $\Omega = 0$, $\Omega_1 = 0$, и во-вторыхъ, всякій частный интегралъ (интегральная поверхность, получаемая при опредѣленномъ выборѣ произвольной функціи въ общемъ интегралѣ) будетъ касаться особаго интеграла по цѣлой кривой.

Если плоскости $x_1 y_1$ соотвѣтствуетъ линія, то всѣ частные интегралы проходятъ черезъ эту линію, характеристики — въ случаѣ уравненія, распадающагося на линейныя — пересѣкаютъ эту линію.

Наконецъ, если плоскости $x_1 y_1$ соотвѣтствуетъ точка, что можетъ быть лишь въ случаѣ преобразованія прикосновенія, опредѣляемаго однимъ равенствомъ $\Omega = 0$, то всѣ поверхности полнаго интеграла проходятъ черезъ эту точку, всѣ частные интегралы должны имѣть съ этой точкой цѣлое многообразіе одного измѣренія общихъ элементовъ, и слѣдовательно, для всѣхъ этихъ интегральныхъ поверхностей упомянутая точка должна быть конической точкой, или въ частности можетъ быть точкой заостренія; къ тому же результату придемъ, разсматривая поверхности общаго интеграла, какъ огибающія поверхностей полнаго интеграла.

До сихъ поръ мы предполагали, что многообразіе, имѣющее носителемъ плоскость $x_1 y_1$, преобразуется въ опредѣленное многообразіе *двухъ* измѣреній, при чемъ каждому элементу перваго многообразія соотвѣтствуетъ одинъ или нѣсколько опредѣленныхъ элементовъ второго и обратно; другими словами, мы предполагали, что въ силу формулъ преобразованія прикосновенія, которыя даютъ x, y, z, p, q въ функціи x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, при $z_1 = 0$, $p_1 = 0$, $q_1 = 0$ получаемъ x, y, z, p, q въ функціи двухъ существенныхъ, независимыхъ параметровъ x_1 и y_1. Но вполнѣ возможно, что элементы $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$ являются исключительными для нашего преобразованія прикосновенія, т. е. каждому элементу $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$ не соотвѣтствуетъ уже одинъ или нѣсколько опредѣленныхъ элементовъ (x, y, z, p, q) и обратно, а одному элементу $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$ соотвѣтствуетъ цѣлое многообразіе элементовъ (x, y, z, p, q)

или обратно цѣлому многообразію элементовъ $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$ соотвѣтствуетъ одинъ или нѣсколько отдѣльныхъ элементовъ (x, y, z, p, q). Если всѣ элементы $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$ являются такими исключительными элементами для нашего преобразованія, то, очевидно, число измѣреній многообразія, имѣющаго носителемъ плоскость x_1y_1, должно при преобразованіи измѣниться *). Такъ какъ для преобразованнаго многообразія должно удовлетворяться соотношеніе $dz - pdx - qdy = 0$, то оно не можетъ быть болѣе чѣмъ двухъ измѣреній (см. § 1, стр. 4), и слѣдовательно, число измѣреній при преобразованіи можетъ только уменьшиться, т. е. мы можемъ получить или многообразіе одного измѣренія — одну или нѣсколько кривыхъ съ описанной развертывающейся поверхностью, или многообразіе нулевого измѣренія, т. е. одинъ или нѣсколько отдѣльныхъ элементовъ. Первый случай будемъ имѣть, если изъ формулъ преобразованія при $z_1 = 0$, $p_1 = 0$, $q_1 = 0$ получимъ такія выраженія для x, y, z, p, q, въ которыхъ x_1 и y_1 не будутъ двумя существенными параметрами, такъ что любыя двѣ изъ функцій x, y, z, p, q при $z_1 = 0$, $p_1 = 0$, $q_1 = 0$ не независимы относительно x_1 и y_1. Второй случай будетъ имѣть мѣсто, если при $z_1 = 0$, $p_1 = 0$, $q_1 = 0$ x, y, z, p, q получаютъ постоянныя значенія, независимо отъ значеній x_1 и y_1. Если соотвѣтствіе, устанавливаемое нашимъ преобразованіемъ прикосновенія, есть многозначное, то оба выше указанные случая могутъ встрѣтиться въ одно время: такъ, если соотвѣтствіе двузначное относительно координатъ x, y, z, p, q, то можетъ случиться, что первыя значенія x, y, z, p, q для $z_1 = 0$, $p_1 = 0$, $q_1 = 0$ получаютъ постоянныя значенія независимо отъ x_1 и y_1, а вторыя значенія зависятъ отъ x_1 и y_1, но притомъ такъ, что любыя двѣ изъ функцій x, y, z, p, q не независимы относительно x_1 и y_1; очевидно, при такомъ предположеніи, мы получимъ одновременно и изолированный элементъ и многообразіе одного измѣренія. Условимся всѣ элементы, получаемые при преобразованіи многообразія, имѣющаго носителемъ плоскость x_1y_1, называть *особыми* элементами уравненія. Изъ предыдущаго заключаемъ, что особые элементы уравненія могутъ: во-первыхъ, образовать многообразіе двухъ измѣреній, и тогда это многообразіе будетъ особымъ интегральнымъ многообразіемъ уравненія; въ частности, если носителемъ этого многообразія служитъ поверхность, уравненіе допускаетъ особый интегралъ въ обычномъ смыслѣ слова. Во-вторыхъ, особые элементы могутъ образовать многообразіе одного измѣренія—кривую съ описан-

*) Чтобы не оставалось сомнѣнія въ возможности подобнаго измѣненія числа измѣреній при преобразованіи, достаточно вспомнить, что при инверсіи безконечно-удаленная плоскость преобразуется въ центръ инверсіи и обратно.

ной развертывающейся поверхностью (для преобразованнаго многообра-
зія должно удовлетворяться соотношеніе $dz - pdx - qdy = 0$) или нѣ-
сколько подобныхъ кривыхъ и поверхностей. Въ-третьихъ, могутъ суще-
ствовать отдѣльные особые элементы. Въ случаѣ многозначнаго преобра-
зованія, перечисленные случаи могутъ имѣть мѣсто одновременно. Н
трудно убѣдиться, что къ изолированнымъ особымъ элементамъ и много-
образіямъ одного измѣренія особыхъ элементовъ переходятъ съ соотвѣт
ственными измѣненіями изложенныя выше свойства особыхъ интеграль
ныхъ многообразій уравненій. Такъ, если уравненіе допускаетъ изолиро
ванный особый элементъ (x, y, z, p, q), то всѣ интегральныя поверхности
очевидно, должны проходить черезъ точку (x, y, z) и касаться въ не
плоскости элемента; то же мы должны сказать про характеристики. есл
уравненіе, допускающее изолированный особый элементъ,—линейное ил
распадается на линейныя. Если особые элементы образуютъ многообра
зіе одного измѣренія, состоящее изъ кривой (C) и описанной развер
тывающейся поверхности (D), то интегральныя поверхности, вообщ
говоря, очевидно, проходятъ черезъ (C) и касаются вдоль ея поверх
ности (D). Могутъ быть и такія поверхности, которыя касаются поверх
ности (D) въ отдѣльныхъ точкахъ кривой (C). Въ самомъ дѣлѣ, раз
все многообразіе двухъ измѣреній, имѣющее носителемъ плоскость x_1y
преобразуется въ многообразіе одного измѣренія, очевидно, должны с
шествовать такія многообразія одного измѣренія M_1, входящія въ с
ставъ упомянутаго многообразія двухъ измѣреній, которыя преобр
зуются въ отдѣльные элементы. Точки элементовъ этихъ многообраз
M_1 одного измѣренія образуютъ нѣкоторыя кривыя на плоскости x_1y
многообразія двухъ измѣреній, имѣющія носителями эти кривыя, пр
образуются, вообще говоря, въ многообразія, носителями которыхъ сл
жатъ нѣкоторыя поверхности (U). Всякое такое многообразіе, очевидн
имѣетъ съ многообразіемъ особыхъ элементовъ отдѣльный общій эл
ментъ (x, y, z, p, q), соотвѣтствующій многообразію M_1, и слѣдов
тельно поверхность (U) касается кривой (C) въ одной или нѣсколькихъ
отдѣльныхъ точкахъ. Интегральныя многообразія, въ которыя преобр
зуются многообразія, имѣющія носителями точки $(x_1, y_1, 0)$, т. е. п
верхности полнаго интеграла или характеристики уравненія, распада
щагося на линейныя, очевидно, имѣютъ тоже лишь отдѣльные общ
элементы съ многообразіемъ особыхъ элементовъ. Многообразіе одно
измѣренія особыхъ элементовъ можетъ въ частности состоять изъ точк
(x, y, z) съ конусомъ плоскостей. Тогда интегральныя поверхнос
имѣютъ, вообще говоря, въ точкѣ (x, y, z) коническую точку: если к
нусъ плоскостей вытягивается въ пучокъ, то интегральныя поверхнос

въ точкѣ (x, y, z) имѣетъ, вообще говоря, точку заостренія. Притомъ, въ этой конической точкѣ или въ точкѣ заостренія интегральныя поверхности имѣютъ однѣ и тѣ же касательныя плоскости.

Можетъ, наконецъ, случиться, что въ силу формулъ преобразованія каждому элементу $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$ не соотвѣтствуетъ одинъ опредѣленный элементъ многообразія одного измѣренія особыхъ элементовъ: другими словами, всему многообразію двухъ измѣреній, имѣющему носителемъ плоскость x_1y_1, соотвѣтствуетъ нѣкоторое опредѣленное многообразіе одного измѣренія особыхъ элементовъ, но между элементами этихъ двухъ многообразій формулы преобразованія не устанавливаютъ опредѣленнаго соотвѣтствія. Въ этомъ случаѣ становятся невѣрными лишь выше высказанныя заключенія о поверхностяхъ полнаго интеграла или о характеристикахъ уравненія, распадающагося на линейныя; такъ какъ элементу $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$ не соотвѣтствуетъ опредѣленнаго особаго элемента, то, слѣдовательно, многообразіе, имѣющее носителемъ точку $(x_1, y_1, 0)$, преобразуется въ многообразіе, въ составъ котораго входитъ все многообразіе особыхъ элементовъ, подобно тому какъ это имѣетъ мѣсто для всякаго другого интегральнаго многообразія.

Не трудно убѣдиться, что для координатъ особыхъ элементовъ уравненія съ частными производными

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

должны удовлетворяться тѣ же самыя уравненія

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0, \quad \frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \tag{66}$$

которыя, какъ было упомянуто выше, имѣютъ мѣсто для особаго интегральнаго многообразія двухъ измѣреній, если уравненіе допускаетъ подобное интегральное многообразіе. Въ самомъ дѣлѣ, преобразованіемъ прикосновенія, которое уравненіе $F = 0$ приводитъ къ виду $z_1 = 0$, особые элементы преобразуются въ элементы $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$, и слѣдовательно, по прежнему изъ равенствъ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial z_1}{\partial p} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial p} + q_1\frac{\partial y_1}{\partial p} \\
&\frac{\partial z_1}{\partial q} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial q} - q_1\frac{\partial y_1}{\partial q} \\
&\frac{dz_1}{dx} - p_1\frac{dx_1}{dx} - q_1\frac{dy_1}{dx} \\
&\frac{dz_1}{dy} - p_1\frac{dx_1}{dy} - q_1\frac{dy_1}{dy}
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

въ силу $p_1 = 0$, $q_1 = 0$ получимъ $\frac{\partial z_1}{\partial p} = 0$, $\frac{\partial z_1}{\partial q} = 0$, $\frac{dz_1}{dx} = 0$, $\frac{dz_1}{dy} = 0$, или, такъ какъ $z_1 = F(x, y, z, p, q)$,

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0, \quad \frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0. \tag{66}$$

Для пяти координатъ x, y, z, p, q особаго элемента должны, такимъ образомъ, удовлетворяться пять уравненій: уравненіе $F = 0$ и четыре уравненія (66). Вообще говоря, изъ этихъ пяти уравненій получимъ одну или нѣсколько опредѣленныхъ системъ значеній x, y, z, p, q, и слѣдовательно, произвольно взятое уравненіе съ частными производными $F = 0$ допускаетъ, вообще говоря, лишь отдѣльные особые элементы. Чтобы уравненіе допускало многообразіе особыхъ элементовъ одного или двухъ измѣреній, необходимо, чтобы пять выше упомянутыхъ уравненій приводились соотвѣтственно къ четыремъ или тремъ независимымъ. Слѣдуетъ, впрочемъ, замѣтить, что не всегда для координатъ особаго элемента имѣютъ мѣсто уравненія (66): въ самомъ дѣлѣ, если для особыхъ элементовъ уравненія $F = 0$ множители при p_1 и q_1 въ равенствахъ (57) обращаются въ безконечность, то заключеніе, которое сдѣлано выше $\left(\frac{\partial z_1}{\partial p} = 0, \frac{\partial z_1}{\partial q} = 0, \frac{dz_1}{dx} = 0, \frac{dz_1}{dy} = 0\right)$, можетъ оказаться невѣрнымъ. Если предположимъ, что данное уравненіе $F = 0$ — алгебраическое относительно перемѣнныхъ x, y, z, p, q и притомъ лѣвая часть есть цѣлая алгебраическая функція упомянутыхъ перемѣнныхъ (къ этому виду приведемъ всякое алгебраическое уравненіе), то исключительный случай, о которомъ идетъ рѣчь, можетъ имѣть мѣсто лишь при безконечныхъ значеніяхъ какихъ-нибудь изъ перемѣнныхъ x, y, z, p, q. Въ самомъ дѣлѣ, изъ дальнѣйшаго мы увидимъ, что для координатъ особаго элемента рядъ отношеній $\frac{\partial F}{\partial p} : \frac{\partial F}{\partial q} : \frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy}$ не можетъ быть опредѣленнымъ; по нашему предположенію, для координатъ особаго элемента не имѣютъ мѣсто одновременно уравненія

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0, \quad \frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0;$$

слѣдовательно, для неопредѣленности ряда отношеній

$$\frac{\partial F}{\partial p} : \frac{\partial F}{\partial q} : \frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy}$$

необходимо допустить безконечныя *) значенія для $\frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial F}{\partial q}, \dots$ что можетъ быть лишь при безконечныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ, такъ какъ $\frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial F}{\partial q}, \frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}$ — цѣлыя алгебраическія функціи. Безконечныя значенія координатъ x, y, z указываютъ на то, что точка элемента лежитъ въ безконечно-удаленной плоскости; безконечныя значенія p и q указываютъ на то, что плоскость элемента параллельна оси z. Такимъ образомъ, особые элементы уравненія $F=0$, лѣвая часть котораго есть цѣлая алгебраическая функція перемѣнныхъ x, y, z, p, q, найдемъ изъ уравненій

$$F=0,\quad \frac{\partial F}{\partial p}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial q}=0,\quad \frac{dF}{dx}=0,\quad \frac{dF}{dy}=0. \qquad (67)$$

за исключеніемъ лишь тѣхъ случаевъ, когда уравненіе $F=0$ допускаетъ особые элементы въ безконечности или особые элементы, плоскости которыхъ параллельны оси z. Простое преобразованіе уравненія $F=0$ позволяетъ намъ найти особые элементы и этихъ двухъ типовъ, если они существуютъ: если мы совершимъ, напримѣръ, проэктивное преобразованіе

$$x=\frac{x'}{z'},\quad y=\frac{y'}{z'},\quad z=\frac{z'+1}{z'},$$

то безконечно-удаленныя точки преобразуются въ точки плоскости $z'=0$, а плоскости параллельныя оси z — въ плоскости, проходящія черезъ начало координатъ; такимъ образомъ, намъ остается искать особые элементы преобразованнаго уравненія $F'(x', y', z', p', q')=0$ изъ условій

$$F'=0,\quad \frac{\partial F'}{\partial p'}=0,\quad \frac{\partial F'}{\partial q'}=0,\quad \frac{dF'}{dx'}=0,\quad \frac{dF'}{dy'}=0.$$

и если въ числѣ нихъ будутъ элементы, точки которыхъ лежатъ въ плоскости $x'y'$, или элементы, плоскости которыхъ проходятъ черезъ начало координатъ, то первоначальное уравненіе $F=0$ допускаетъ особые элементы выше упомянутыхъ исключительныхъ типовъ. Замѣтимъ еще, что нельзя сдѣлать заключенія обратнаго тому, которое мы съ нѣкоторыми ограниченіями высказали объ особыхъ элементахъ уравненія, т. е. что всякій элементъ, координаты котораго удовлетворяютъ уравне-

*) Неопредѣленныя значенія для $\frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial F}{\partial q}, \dots$ въ нашемъ случаѣ, очевидно, невозможны.

ніямъ (67), есть особый элементъ уравненія $F=0$. Въ самомъ дѣлѣ, изъ формулъ (57), гдѣ полагаемъ $z_1=F$, въ силу уравненій (67) слѣдуетъ

$$\begin{aligned} p_1\frac{\partial x_1}{\partial p}+q_1\frac{\partial y_1}{\partial p}&=0\\ p_1\frac{\partial x_1}{\partial q}+q_1\frac{\partial y_1}{\partial q}&=0\\ p_1\frac{dx_1}{dx}+q_1\frac{dy_1}{dx}&=0\\ p_1\frac{dx_1}{dy}+q_1\frac{dy_1}{dy}&=0,\end{aligned}$$

откуда получаемъ $p_1=0$, $q_1=0$ лишь въ томъ случаѣ, если въ числѣ детерминантовъ таблицы

$$\left\Vert \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial p} & \frac{\partial x_1}{\partial q} & \frac{dx_1}{dx} & \frac{dx_1}{dy} \\ \frac{\partial y_1}{\partial p} & \frac{\partial y_1}{\partial q} & \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_1}{dy} \end{matrix} \right\Vert$$

есть отличные отъ нуля. Въ противномъ случаѣ p_1 и q_1 могутъ имѣть значенія отличныя отъ нуля, и тогда нашъ элементъ (x, y, z, p, q) не есть особый элементъ уравненія.

Такимъ образомъ, опредѣливъ отдѣльные элементы или цѣлыя многообразія элементовъ изъ уравненій (67), мы должны всегда еще провѣрить, будутъ ли найденные элементы дѣйствительно особыми элементами уравненія $F=0$.

Изложенная нами теорія интеграловъ уравненія съ частными производными позволяетъ внести нѣкоторую поправку въ обычное опредѣленіе *полнаго* интеграла. Обыкновенно подъ этимъ терминомъ разумѣютъ всякую группу интегральныхъ поверхностей, зависящую отъ двухъ параметровъ и дающую всевозможныя интегральныя поверхности, если будемъ изъ этой группы выбирать всевозможныя семейства съ однимъ параметромъ и будемъ опредѣлять ихъ огибающія.

Въ случаѣ, когда уравненіе допускаетъ особое интегральное многообразіе двухъ измѣреній, не трудно видѣть, что существуетъ одно опредѣленное семейство интегральныхъ многообразій, зависящее отъ двухъ параметровъ и занимающее особое мѣсто среди всѣхъ прочихъ: это именно семейство интегральныхъ многообразій, соотвѣтствующихъ въ выше изложенной теоріи точкамъ плоскости $z_1=0$. Остальныя интегральныя многообразія соотвѣтствуютъ кривымъ плоскости $z_1=0$ и потому имѣютъ съ особымъ интегральнымъ многообразіемъ уравненія цѣлыя многообразія одного измѣренія общихъ элементовъ; многообразія семейства, о которомъ идетъ рѣчь, очевидно, имѣютъ съ особымъ интегральнымъ многообразіемъ уравненія лишь по отдѣльному общему элементу.

Аналогично мы можемъ разсуждать и тогда, когда особые элементы уравненія образуютъ многообразіе одного измѣренія, если только въ силу преобразованія прикосновенія устанавливается опредѣленное соотвѣтствіе между элементами плоскости $z_1 = 0$ и элементами особаго интегральнаго многообразія уравненія. Интегральныя многообразія, соотвѣтствующія точкамъ плоскости, имѣютъ съ особымъ интегральнымъ многообразіемъ, очевидно, отдѣльные общіе элементы: остальныя интегральныя многообразія содержатъ всѣ особые элементы уравненія. Исключеніе составляетъ лишь еще одно семейство интегральныхъ многообразій: мы видѣли *), что на плоскости $z_1 = 0$ существуетъ система кривыхъ, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что элементамъ, составленнымъ изъ точекъ одной такой кривой и изъ плоскости $x_1 y_1$, соотвѣтствуетъ одинъ и тотъ же особый элементъ уравненія: очевидно, что интегральное многообразіе, соотвѣтствующее многообразію, носителемъ котораго служитъ кривая, имѣетъ съ особымъ интегральнымъ многообразіемъ лишь отдѣльный общій элементъ.

Если преобразованіе прикосновенія устанавливается однимъ соотношеніемъ $\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$, то многообразія, соотвѣтствующія точкамъ плоскости $z_1 = 0$, имѣютъ носителями поверхности, и мы получаемъ, слѣдовательно, въ обоихъ случаяхъ семейство интегральныхъ поверхностей, зависящее отъ двухъ параметровъ, которому по преимуществу приличествуетъ названіе *полнаго* интеграла. Во второмъ случаѣ имѣемъ еще семейство интегральныхъ многообразій, зависящее отъ одного параметра и раздѣляющее съ полнымъ интеграломъ то его свойство, что въ составъ каждаго многообразія семейства входятъ лишь отдѣльные особые элементы.

Если преобразованіе прикосновенія опредѣляется двумя соотношеніями $\Omega = 0$, $\Omega_1 = 0$, то данное уравненіе — линейное или распадается на линейныя, и роль полнаго интеграла играютъ характеристики, которыя въ этомъ случаѣ соотвѣтствуютъ точкамъ плоскости $x_1 y_1$ и имѣютъ съ особымъ интегральнымъ многообразіемъ лишь отдѣльные общіе элементы.

Совсѣмъ къ инымъ результатамъ приходимъ въ томъ случаѣ, когда

---

*) См. стр. 39.

уравненіе допускаетъ особое интегральное многообразіе одного измѣренія, но между его элементами и элементами плоскости $z_1 = 0$ не устанавливается опредѣленнаго соотвѣтствія, а также въ томъ случаѣ, когда уравненіе допускаетъ лишь отдѣльные особые элементы. Въ первомъ случаѣ всѣ интегральныя многообразія содержатъ всѣ элементы особаго интегральнаго многообразія, во второмъ случаѣ всѣ интегральныя многообразія содержатъ отдѣльные особые элементы уравненія: и въ томъ и въ другомъ случаѣ не выдѣляется никакого семейства интегральныхъ многообразій изъ числа прочихъ, и мы можемъ сохранить обычное опредѣленіе полнаго интеграла. Впрочемъ, и здѣсь можно бы выдѣлить нѣкоторыя интегральныя многообразія изъ числа прочихъ: такъ, если уравненіе допускаетъ отдѣльный особый элементъ (x, y, z, p, q), то можно выдѣлить всѣ тѣ интегральныя поверхности, для которыхъ точка (x, y, z) будетъ *простой* точкой и плоскость

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

обыкновенною касательною плоскостью въ точкѣ (x, y, z): не трудно видѣть, что, вообще говоря, точка (x, y, z) будетъ особою точкой интегральной поверхности, а потому поверхности, которыя мы выдѣляемъ, могутъ составить семейство, зависящее отъ конечнаго числа параметровъ, можетъ быть даже отъ двухъ, и тогда это семейство можно будетъ принять за полный интегралъ.

Въ выборѣ преобразованія прикосновенія, которымъ данное уравненіе $F = 0$ преобразуется въ $z_1 = 0$, существуетъ нѣкоторый произволъ, такъ какъ при $z_1 = F$ функціи x_1 и y_1 опредѣляются изъ уравненій съ частными производными по перемѣннымъ x, y, z, p, q. При новомъ выборѣ преобразованія прикосновенія, интегральныя многообразія уравненія $F = 0$, которыя прежде соотвѣтствовали точкамъ плоскости $z_1 = 0$, могутъ оказаться соотвѣтствующими нѣкоторымъ кривымъ этой плоскости и наоборотъ точкамъ плоскости будутъ соотвѣтствовать интегральныя многообразія, которыя ранѣе не обладали этимъ свойствомъ. Такимъ образомъ, повидимому, мы приходимъ къ противорѣчію съ прежними результатами, въ силу которыхъ семейство интегральныхъ многообразій, соотвѣтствующихъ точкамъ плоскости $z_1 = 0$, по крайней мѣрѣ въ случаѣ особаго интегральнаго многообразія двухъ или одного измѣренія, выдѣляется изъ числа всѣхъ прочихъ интегральныхъ многообразій. Не трудно разрѣшить это противорѣчіе. Пусть преобразованіе прикосновенія, преобразующее уравненіе $F = 0$ въ уравненіе плоскости координатъ (xy), установлено двумя способами; новыя координаты элемента будемъ называть соотвѣтственно x_1, y_1, z_1, p_1, q_1

и x_2, y_2, z_2, p_2, q_2. Тогда имѣемъ, во-первыхъ, въ силу $z_1=F$ и $z_2=F_1$ соотношеніе

$$z_2 = z_1 \tag{68}$$

и во-вторыхъ, всѣ остальныя координаты x_2, y_2, p_2, q_2 могутъ быть выражены въ функціи x_1, y_1, z_1, p_1, q_1. Формулы, которыя получимъ, вмѣстѣ съ соотношеніемъ (68) опредѣляютъ нѣкоторое преобразованіе прикосновенія, эквивалентное совокупности преобразованія прикосновенія, преобразующаго элементъ $(x_2, y_2, z_2, p_2, q_2)$ въ (x, y, z, p, q) и преобразованія прикосновенія, преобразующаго элементъ (x, y, z, p, q) въ $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$. Преобразованіе прикосновенія, какъ извѣстно, опредѣляется или однимъ, или двумя, или тремя соотношеніями между одними координатами точекъ; въ послѣднемъ случаѣ имѣемъ несобственное преобразованіе прикосновенія, въ силу котораго точкамъ соотвѣтствуютъ точки. Въ нашемъ случаѣ мы уже имѣемъ одно соотношеніе между координатами точекъ, это именно соотношеніе

$$z_2 = z_1 \tag{68}$$

или

$$z_2 - z_1 = 0. \tag{69}$$

Если бы мы предположили, что это соотношеніе единственное, то, примѣняя общія формулы (см. § 2, форм. 42, стр. 25), пришли бы къ невозможнымъ равенствамъ

$$p_2 = 0, \quad q_2 = 0, \quad -p_1 = 0, \quad -q_1 = 0;$$

слѣдовательно, кромѣ соотношенія (69), существуютъ необходимо еще одно или два соотношенія между координатами точекъ x_2, y_2, z_2 и x_1, y_1, z_1. Въ послѣднемъ случаѣ въ силу $z_1=0$, $x_1=const.$, $y_1=const.$, имѣемъ $z_2=0$, $x_2=const.$, $y_2=const.$, т. е. точкамъ плоскости $z_1=0$ соотвѣтствуютъ точки плоскости $z_2=0$, и слѣдовательно мы не приходимъ къ тому противорѣчію, о которомъ было упомянуто выше. Остается предположить, что кромѣ соотношенія

$$z_2 - z_1 = 0 \tag{69}$$

существуетъ еще одно соотношеніе

$$\Omega(x_2, y_2, z_2, x_1, y_1, z_1) = 0. \tag{70}$$

Въ этомъ случаѣ при $z_1=0$, $x_1=const.$, $y_1=const.$ имѣемъ

$$z_2 = 0, \quad \Omega(x_2, y_2, 0, x_1, y_1, 0) = 0. \tag{71}$$

т. е. точкамъ плоскости $z_1=0$ соотвѣтствуетъ семейство кривыхъ на плоскости $z_2=0$, зависящее отъ двухъ параметровъ x_1 и y_1 и опре-

дѣляемое уравненіями (71). Обратно, точкамъ плоскости $z_2=0$, очевидно, соотвѣтствуетъ семейство кривыхъ

$$z_1 = 0, \quad \Omega(x_2, y_2, 0, x_1, y_1, 0) = 0, \tag{71'}$$

гдѣ за текущія координаты считаемъ x_1, y_1. Элементу $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$ соотвѣтствуетъ не одинъ опредѣленный элементъ, а цѣлое многообразіе элементовъ, состоящихъ изъ плоскости $z_2=0$ и точекъ кривой (71); обратно, элементу $(x_2, y_2, 0, 0, 0)$ соотвѣтствуетъ цѣлое многообразіе элементовъ, состоящихъ изъ плоскости $z_1=0$ и точекъ кривой (71'). Если предположимъ, что особые элементы уравненія $F=0$ составляютъ многообразіе двухъ или одного измѣренія и что въ силу формулъ, связывающихъ координаты x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 съ x, y, z, p, q, каждому элементу $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$ соотвѣтствуетъ опредѣленный особый элементъ (x, y, z, p, q) уравненія $F=0$, то на основаніи предыдущаго легко убѣждаемся, что элементу $(x_2, y_2, 0, 0, 0)$ соотвѣтствуетъ не отдѣльный опредѣленный особый элементъ уравненія $F=0$, а цѣлое многообразіе одного измѣренія особыхъ элементовъ, другими словами формулы, связывающія координаты x_2, y_2, z_2, p_2, q_2 съ x, y, z, p, q, не устанавливаютъ опредѣленнаго соотвѣтствія между элементами плоскости $z_2=0$ и элементами особаго интегральнаго многообразія уравненія $F=0$. Обратно, если элементу $(x_2, y_2, 0, 0, 0)$ соотвѣтствуетъ опредѣленный элементъ особаго интегральнаго многообразія уравненія $F=0$, то между элементами плоскости $z_1=0$ и элементами особаго интегральнаго многообразія формулы преобразованія не устанавливаютъ опредѣленнаго соотвѣтствія. Этимъ замѣчаніемъ вполнѣ разрѣшается упомянутое выше противорѣчіе. Въ самомъ дѣлѣ, всѣ наши выводы, относящіеся къ тому семейству интегральныхъ многообразій, которому по преимуществу приличествуетъ названіе полнаго интеграла, были сдѣланы въ предположеніи, что формулы преобразованія устанавливаютъ опредѣленное соотвѣтствіе между элементами плоскости $z_1=0$ и элементами особаго интегральнаго многообразія уравненія $F=0$. Такимъ образомъ произволъ въ выборѣ преобразованія прикосновенія значительно сокращается: если мы имѣемъ преобразованіе

$$\begin{aligned} z_1 &= F(x, y, z, p, q) \\ x_1 &= x_1(x, y, z, p, q) \\ y_1 &= y_1(x, y, z, p, q) \\ p_1 &= p_1(x, y, z, p, q) \\ q_1 &= q_1(x, y, z, p, q), \end{aligned}$$

въ силу котораго уравненіе $F=0$ преобразуется въ $z_1=0$ и притомъ элементамъ плоскости $z_1=0$, т. е. элементамъ $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$ соотвѣтствуютъ опредѣленные элементы особаго интегральнаго многообразія уравненія $F=0$, то, на основаніи предыдущаго, всякое другое преобразованіе прикосновенія

$$\begin{aligned} z_2 &= F(x, y, z, p, q)\\ x_2 &= x_2(x, y, z, p, q)\\ y_2 &= y_2(x, y, z, p, q)\\ p_2 &= p_2(x, y, z, p, q)\\ q_2 &= q_2(x, y, z, p, q), \end{aligned}$$

обладающее тѣми же свойствами, получится какъ совокупность перваго преобразованія и преобразованія прикосновенія, распространеннаго изъ нѣкотораго преобразованія точекъ

$$z_2=z_1,\quad x_2=x_2(x_1, y_1, z_1),\quad y_2=y_2(x_1, y_1, z_1).$$

Въ силу этого послѣдняго, точкамъ плоскости $z_1=0$ соотвѣтствуютъ точки плоскости $z_2=0$, и слѣдовательно семейство интегральныхъ многообразій, составляющихъ полный интегралъ, остается неизмѣннымъ при томъ или другомъ выборѣ преобразованія прикосновенія. Можетъ случиться, что невозможно выбрать такое преобразованіе прикосновенія, въ силу котораго устанавливается опредѣленное соотвѣтствіе между особыми элементами уравненія $F=0$ и элементами плоскости $z_1=0$; это будетъ всегда въ случаѣ, если уравненіе $F=0$ допускаетъ лишь отдѣльные особые элементы, и можетъ быть въ случаѣ особаго интегральнаго многообразія одного измѣренія; но въ этихъ случаяхъ мы и не выдѣляли опредѣленнаго семейства интегральныхъ многообразій въ качествѣ полнаго интеграла. Не трудно убѣдиться, что подобный случай не можетъ встрѣтиться, если уравненіе $F=0$ допускаетъ особое интегральное многообразіе двухъ измѣреній. Въ самомъ дѣлѣ, пусть преобразованіе прикосновенія

$$\begin{aligned} z_1 &= F(x, y, z, p, q)\\ x_1 &= x_1(x, y, z, p, q)\\ y_1 &= y_1(x, y, z, p, q)\\ p_1 &= p_1(x, y, z, p, q)\\ q_1 &= q_1(x, y, z, p, q) \end{aligned}$$

не устанавливаетъ опредѣленнаго соотвѣтствія между элементами плоскости $z_1=0$ и элементами особаго интегральнаго многообразія двухъ измѣреній M_2 уравненія $F=0$. Тогда интегральныя многообразія S, соотвѣтствующія точкамъ плоскости $z_1=0$, будутъ очевидно имѣть съ особымъ интегральнымъ многообразіемъ M_2 по цѣлому многообразію C_1

одного измѣренія общихъ элементовъ. Многообразія C_1 составляютъ семейство, зависящее отъ двухъ параметровъ и входящее въ составъ многообразія двухъ измѣреній M_2; каждый элементъ M_2 поэтому принадлежитъ цѣлому семейству съ однимъ параметромъ многообразій C_1. Возьмемъ семейство многообразій S, которымъ принадлежатъ эти многообразія C_1; соотвѣтствующія многообразіямъ S точки плоскости $z_1=0$ образуютъ нѣкоторую кривую ψ. Такимъ образомъ для каждаго элемента особаго интегральнаго многообразія M_2 получимъ на плоскости $z_1=0$ нѣкоторую кривую ψ; всѣ эти кривыя составятъ нѣкоторое семейство, зависящее отъ двухъ параметровъ

$$z_1=0,\quad \Omega(x_1, y_1, x_2, y_2)=0,$$

гдѣ x_2, y_2 — произвольные параметры. Преобразованіе прикосновенія, устанавливаемое соотношеніями

$$z_2=z_1,\quad \Omega(x_1, y_1, x_2, y_2)=0,$$

преобразуетъ эти кривыя въ точки плоскости $z_2=0$; слѣдовательно, преобразованіе прикосновенія, эквивалентное совокупности даннаго намъ и вновь установленнаго, преобразуетъ точки плоскости $z_2=0$ въ многообразія двухъ измѣреній Σ, получаемыя какъ огибающія семействъ съ однимъ параметромъ многообразій S, о которыхъ упоминали выше: каждое такое многообразіе Σ, очевидно, имѣетъ съ многообразіемъ M_2 лишь отдѣльный общій элементъ, соотвѣтствующій той кривой ψ на плоскости $z_1=0$, которая соотвѣтствуетъ выбранной нами точкѣ на плоскости $z_2=0$. Отсюда слѣдуетъ, что въ силу вновь полученнаго преобразованія прикосновенія каждому элементу плоскости $z_2=0$ соотвѣтствуетъ опредѣленный элементъ многообразія M_2; вмѣстѣ съ тѣмъ, мы видимъ, какимъ именно способомъ можно всегда найти преобразованіе прикосновенія, устанавливающее опредѣленное соотвѣтствіе между элементами плоскости координатъ xy и элементами особаго интегральнаго многообразія двухъ измѣреній даннаго уравненія.

Намъ остается сдѣлать еще одно добавленіе къ изложенной теоріи особыхъ элементовъ уравненія. До сихъ поръ мы разсматривали исключительно элементы (x, y, z, p, q), соотвѣтствующіе всей совокупности элементовъ $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$ многообразія, имѣющаго носителемъ плоскость x_1y_1: эти элементы (x, y, z, p, q) мы условились называть *особыми*. Въ тѣхъ случаяхъ, когда число измѣреній многообразія, имѣющаго носителемъ плоскость x_1y_1, при преобразованіи мѣняется и когда, слѣдовательно, формулы преобразованія становятся, собственно, неопредѣленными для координатъ x_1, y_1, 0, 0, 0, — можетъ случиться, что не безразлично разсматривать опредѣленный элементъ $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$ какъ элементъ плоскости x_1y_1 или же отдѣльно отъ всѣхъ элементовъ $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$ плоскости x_1y_1—какъ элементъ какого-либо иного многообразія. Можетъ именно случиться, что если мы будемъ разсматривать элементъ $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$ какъ элементъ многообразія двухъ измѣреній, имѣющаго носителемъ нѣкоторую опредѣленную кривую φ на плоскости x_1y_1, то ему уже не будетъ соотвѣтствовать особый элементъ даннаго уравненія $F=0$, а нѣкоторый иной элементъ (x, y, z, p, q) *). Такимъ образомъ можетъ оказаться, что въ составъ интегральнаго многообразія двухъ измѣреній, соотвѣтствующаго кривой φ, вовсе не войдетъ **) особыхъ элементовъ уравненія $F=0$, и мы можемъ имѣть даже цѣлую систему подобныхъ исключительныхъ интегральныхъ многообразій ***), если существуетъ цѣлое семейство кривыхъ φ, обладающихъ выше упомянутымъ свойствомъ. Не трудно убѣдиться, что подобное семейство можетъ зависѣть не болѣе какъ отъ одного параметра, и слѣдовательно, семейство исключительныхъ интегральныхъ многообразій, о которыхъ идетъ рѣчь, если оно существуетъ, тоже зависитъ отъ одного параметра.

Разсмотримъ теперь интегральныя многообразія *одного* измѣренія, соотвѣтствующія многообразіямъ одного измѣренія, элементы каждаго изъ которыхъ состоятъ изъ произвольной точки плоскости x_1y_1 вмѣстѣ съ пучкомъ плоскостей, пересѣкающихъ плоскость x_1y_1 по одной прямой; будемъ называть эти интегральныя многообразія одного измѣренія уравненія $F=0$ *характеристическими* многообразіями: семейство ихъ, очевидно, зависитъ отъ *трехъ* параметровъ (двѣ координаты точки на плоскости x_1y_1 и уголъ ребра пучка съ одной изъ осей). Возьмемъ произвольный элементъ (x, y, z, p, q), удовлетворяющій уравненію $F=0$ и не принадлежащій къ числу особыхъ: ему соотвѣтствуетъ элементъ, точка котораго лежитъ на плоскости $z_1=0$, а плоскость пересѣкаетъ плоскость $z_1=0$ по опредѣленной прямой, которую можно взять за ребро пучка плоскостей: отсюда слѣдуетъ, что всякій не особый элементъ, удовлетворяющій уравненію $F=0$, опредѣляетъ единственное характеристическое многообразіе, которому онъ принадлежитъ ****).

Что касается до особыхъ элементовъ уравненія, то, очевидно, каждый особый элементъ (x, y, z, p, q) необходимо принадлежитъ цѣлому семейству характеристическихъ многообразій. Въ самомъ дѣлѣ,

*) Въ случаѣ многозначнаго соотвѣтствія подобное обстоятельство можетъ имѣть мѣсто для одной системы значеній координатъ x, y, z, p, q, между тѣмъ какъ другія значенія будутъ давать особые элементы.

**) или, въ случаѣ многозначнаго соотвѣтствія, не войдетъ должнаго числа.

***) См. § 4, примѣры 6, 7, 8, 9.

****) Исключеніе см. ниже.

въ силу формулъ преобразованія прикосновенія, особому элементу (x, y, z, p, q) можетъ соотвѣтствовать или опредѣленный элементъ $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$ плоскости $z_1=0$, или цѣлое многообразіе одного измѣренія такихъ элементовъ, или наконецъ всѣ элементы плоскости $z_1=0$ въ случаѣ, если уравненіе $F=0$ допускаетъ лишь отдѣльные особые элементы. Даже въ первомъ случаѣ любую прямую на плоскости $z_1=0$, проходящую черезъ точку (x_1, y_1), мы можемъ принять за ребро пучка плоскостей, и слѣдовательно, элементъ (x, y, z, p, q) принадлежитъ семейству характеристическихъ многообразій, зависящему отъ одного параметра; въ остальныхъ случаяхъ произволъ, очевидно, еще больше: во второмъ случаѣ элементъ (x, y, z, p, q), какъ не трудно видѣть, принадлежитъ семейству характеристическихъ многообразій, зависящему отъ двухъ параметровъ; въ послѣднемъ случаѣ, очевидно, всѣ характеристическія многообразія уравненія содержатъ элементъ (x, y, z, p, q).

Такъ какъ многообразіе одного измѣренія, соотвѣтствующее какому-либо характеристическому многообразію уравненія, содержитъ одинъ элементъ $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$ плоскости x_1y_1, то въ составъ всякаго характеристическаго многообразія непремѣнно долженъ входить особый элементъ уравненія. Положеніе это, вообще говоря несомнѣнно справедливое, допускаетъ однако исключенія. Въ самомъ дѣлѣ, если особые элементы уравненія образуютъ многообразіе одного измѣренія или если уравненіе допускаетъ лишь отдѣльные особые элементы, то формулы преобразованія, какъ было уже упомянуто, становятся собственно неопредѣленными для элементовъ $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$ плоскости x_1y_1, и можетъ случиться, что элементу $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$, разсматриваемому въ составѣ элементовъ многообразія одного измѣренія M_1, которое состоитъ изъ точки (x_1, y_1) съ опредѣленнымъ пучкомъ плоскостей, пересѣкающихъ плоскость x_1y_1 по опредѣленной прямой l,— будетъ соотвѣтствовать нѣкоторый элементъ (x, y, z, p, q), отличный отъ особыхъ элементовъ уравненія, или это будетъ имѣть мѣсто для одной системы значеній координатъ въ случаѣ многозначнаго соотвѣтствія. Такой случай будетъ имѣть мѣсто, если ребро пучка плоскостей l въ точкѣ (x_1, y_1) касается одной изъ тѣхъ кривыхъ φ, о которыхъ у насъ была рѣчь выше и которыя служатъ носителями многообразій, соотвѣтствующихъ „исключительнымъ" интегральнымъ многообразіямъ уравненія, т. е. интегральнымъ многообразіямъ, не содержащимъ особыхъ элементовъ уравненія или содержащимъ ихъ не въ должномъ числѣ. Характеристическое многообразіе, соотвѣтствующее многообразію M_1, очевидно, тоже не будетъ содержать особыхъ элементовъ уравненія въ должномъ числѣ; мы будемъ называть подобныя характеристическія многообразія — исключительными. При существованіи цѣлаго семейства кривыхъ φ, будемъ имѣть семейство исключительныхъ характеристическихъ многообразій, зависящее отъ *двухъ* параметровъ. Такъ какъ формулы преобразованія становятся неопредѣленными для элементовъ $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$, то слѣдуетъ ожидать, что и соотвѣтствіе между элементами плоскости x_1y_1 $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$ и элементами (x, y, z, p, q), отличными отъ особыхъ, не будетъ опредѣленнымъ, а именно элементы (x, y, z, p, q), о которыхъ идетъ рѣчь, образуютъ многообразіе не двухъ измѣреній, а только одного, при чемъ всѣмъ элементамъ $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$, взятымъ вдоль одной кривой φ, соотвѣтствуетъ одинъ элементъ (x, y, z, p, q); въ такомъ случаѣ элементъ (x, y, z, p, q), хотя и не относится къ числу особыхъ, очевидно, принадлежитъ цѣлому семейству съ однимъ параметромъ характеристическихъ многообразій (исключительныхъ); подобные элементы (x, y, z, p, q) будемъ называть ***критическими***.

Кривую, образуемую точками элементовъ характеристическаго многообразія, будемъ называть ***характеристикой***. Не трудно видѣть, что въ случаѣ уравненія линейнаго или распадающагося на линейныя кривыя эти тождественны тѣмъ кривымъ, которыя намъ встрѣчались уже ранѣе подъ тѣмъ же самымъ названіемъ (ср. § 1, стр. 14). Дѣйствительно, характеристики (въ прежнемъ смыслѣ) линейнаго уравненія служатъ носителями интегральныхъ многообразій двухъ измѣреній; притомъ онѣ образуютъ семейство, зависящее отъ двухъ параметровъ, а слѣдовательно, въ силу преобразованія прикосновенія, которое преобразуетъ данное уравненіе $F=0$ въ $z_1=0$, имъ соотвѣтствуютъ или точки плоскости $z_1=0$ или семейство кривыхъ ψ на этой плоскости, зависящее отъ двухъ параметровъ. Въ послѣднемъ случаѣ вмѣсто первоначальнаго преобразованія прикосновенія выберемъ другое, эквивалентное совокупности первоначальнаго и преобразованія прикосновенія, устанавливаемаго двумя соотношеніями

$$z_2 = z_1, \quad \Omega(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0,$$

гдѣ $\Omega(x_1, y_1, x_2, y_2)=0$ есть уравненіе семейства кривыхъ ψ при постоянныхъ x_2 и y_2. Въ силу новаго преобразованія прикосновенія, характеристикамъ уравненія $F=0$ будутъ соотвѣтствовать точки плоскости $z_2=0$, и слѣдовательно, мы приходимъ къ первому случаю. Итакъ, пусть точкамъ плоскости $z_1=0$ соотвѣтствуютъ кривыя—характеристики уравненія $F=0$, т. е. другими словами пусть наше преобразованіе прикосновенія опредѣляется двумя соотношеніями $\Omega=0$, $\Omega_1=0$ между координатами x, y, z, x_1, y_1, z_1, откуда, какъ мы видѣли ранѣе, прямо слѣдуетъ, что уравненіе $F=0$ линейное или распадается на ли-

нейныя *). Многообразіе одного измѣренія, элементы котораго состав-
ляются изъ точки $(x_1, y_1, 0)$ и изъ пучка плоскостей, входитъ въ со
ставъ многообразія двухъ измѣреній, носителемъ котораго служит
точка $(x_1, y_1, 0)$; слѣдовательно, соотвѣтствующее характеристическо
многообразіе уравненія $F=0$ должно входить въ составъ интеграль
наго многообразія двухъ измѣреній, носителемъ котораго служитъ кри
вая—характеристика, соотвѣтствующая точкѣ $(x_1, y_1, 0)$; но это может
быть лишь тогда, когда кривая, образованная точками элементовъ ха
рактеристическаго многообразія, совпадаетъ съ кривой—характеристи
кой уравненія $F=0$.

Предположимъ, что на плоскости $z_1=0$ имѣемъ двѣ кривыя или
кривую и точку, и что многообразія, носителями которыхъ онѣ слу
жатъ, имѣютъ общій элементъ, плоскость котораго отлична отъ плос
кости x_1y_1; тогда, очевидно, кривыя должны соприкасаться или точк
должна лежать на кривой, и мы получаемъ цѣлое многообразіе одног
измѣренія общихъ элементовъ, образуемыхъ точкой и пучкомъ каса
тельныхъ плоскостей. Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что если дв
интегральныхъ многообразія двухъ измѣреній уравненія $F=0$ имѣют
общій элементъ, не принадлежащій къ числу особыхъ, то они имѣют
цѣлое многообразіе одного измѣренія общихъ элементовъ, именно ха
рактеристическое многообразіе, которое опредѣляется даннымъ общим
элементомъ; въ частности можно сказать, что двѣ интегральныхъ по
верхности, соприкасающихся въ одной точкѣ, соприкасаются по цѣло
характеристикѣ, если только данная точка вмѣстѣ съ общей касател
ной плоскостью не составляютъ особаго элемента уравненія.

Въ составъ многообразія двухъ измѣреній, имѣющаго носителем
любую кривую f или точку A на плоскости $z_1=0$, входитъ цѣлое се
мейство съ однимъ параметромъ многообразій одного измѣренія ра
сматриваемаго нами типа, т. е. многообразій, элементы которыхъ с
стоятъ изъ точки плоскости x_1y_1 и плоскостей пучка, имѣющаго ребр
на плоскости x_1y_1; чтобы въ этомъ убѣдиться, стоитъ лишь провест
касательныя къ кривой f или провести всевозможныя прямыя, прох
дящія черезъ точку A и лежащія на плоскости x_1y_1; обратно, семейст
многообразій одного измѣренія, полученное такимъ образомъ, исчерп
ваетъ всѣ элементы даннаго многообразія двухъ измѣреній. Отсюда сл
дуетъ, что всякое интегральное многообразіе двухъ измѣреній уравнен
$F=0$, за исключеніемъ особаго, можетъ быть образовано изъ семейст

*) Обратное заключеніе, какъ явствуетъ изъ предыдущаго, несправедлив
уравненіе можетъ быть линейнымъ, а преобразованіе прикосновенія опредѣлять
однимъ соотношеніемъ.

съ однимъ параметромъ характеристическихъ многообразій: въ частности, всякая интегральная поверхность можетъ быть образована семействомъ кривыхъ—характеристикъ уравненія $F=0$. Въ томъ случаѣ, когда уравненіе допускаетъ интегральныя многообразія того исключительнаго типа, о которомъ мы упоминали выше, т. е. многообразія, не заключающія въ своемъ составѣ особыхъ элементовъ уравненія, не трудно убѣдиться, что и эти многообразія могутъ быть образованы семействами характеристическихъ многообразій уравненія, но только всѣ эти характеристическія многообразія принадлежатъ, очевидно, тоже къ числу „исключительныхъ“ (см. выше стр. 52).

Допустимъ теперь, что имѣемъ произвольное интегральное многообразіе одного измѣренія уравненія $F=0$ (1). Ему соотвѣтствуетъ многообразіе одного измѣренія, точки элементовъ котораго лежатъ въ плоскости x_1y_1, т. е. или кривая плоскости x_1y_1 съ нѣкоторой развертывающейся поверхностью, описанной около кривой, или точка плоскости x_1y_1 съ конусомъ плоскостей. Въ томъ и другомъ случаѣ получаемъ вполнѣ опредѣленное интегральное многообразіе двухъ измѣреній уравненія $z_1=0$, которому принадлежитъ многообразіе одного измѣренія: въ первомъ случаѣ это будетъ многообразіе, имѣющее носителемъ упомянутую кривую плоскости x_1y_1, во второмъ — многообразіе, носителемъ котораго служитъ упомянутая точка плоскости x_1y_1. Отсюда слѣдуетъ, что данное интегральное многообразіе одного измѣренія уравненія (1) входитъ, вообще говоря, въ составъ вполнѣ опредѣленнаго единственнаго интегральнаго многообразія двухъ измѣреній того же уравненія. Исключеніе представляетъ тотъ случай, когда данное многообразіе есть характеристическое многообразіе уравненія (1): ему соотвѣтствуетъ точка плоскости x_1y_1 вмѣстѣ съ пучкомъ плоскостей, ребро котораго лежитъ въ плоскости x_1y_1; очевидно, это многообразіе входитъ въ составъ всякаго многообразія двухъ измѣреній, имѣющаго носителемъ любую кривую плоскости x_1y_1, которая проходитъ черезъ точку и касается въ ней ребра пучка; такимъ образомъ, данное характеристическое многообразіе уравненія (1) входитъ въ составъ безчисленнаго множества интегральныхъ многообразій двухъ измѣреній (въ формулы, выражающія всѣ эти интегральныя многообразія, входитъ, очевидно, одна произвольная функція). На основаніи изложеннаго, мы легко можемъ рѣшить такъ-называемую задачу Cauchy: провести интегральную поверхность уравненія $F=0$ черезъ данную кривую (C). Очевидно, прежде всего, что касательныя плоскости искомой поверхности вдоль кривой (C) вмѣстѣ съ точками (C) составляютъ интегральное многообразіе одного измѣренія уравненія $F=0$ (1); поэтому, предварительно

находимъ это интегральное многообразіе. Въ каждой точкѣ кривой (C) уравненіе (1) опредѣляетъ конусъ (T), и слѣдовательно, задача сводится къ опредѣленію общей касательной плоскости кривой (C) и конуса (T) въ каждой точкѣ кривой. Вообще говоря, такихъ плоскостей нѣсколько, и потому получаемъ, вообще говоря, нѣсколько интегральныхъ многообразій одного измѣренія, элементы которыхъ будутъ состоять изъ точекъ кривой (C) и касательныхъ плоскостей развертывающихся поверхностей, описанныхъ около (C). По предыдущему, каждое интегральное многообразіе одного измѣренія входитъ въ составъ опредѣленнаго интегральнаго многообразія двухъ измѣреній, и слѣдовательно, получимъ, вообще говоря, нѣсколько интегральныхъ поверхностей, проходящихъ черезъ кривую (C). Является сомнѣніе, будутъ-ли эти многообразія двухъ измѣреній *всегда* имѣть носителями поверхности; но не трудно убѣдиться, что мыслимъ только еще случай, когда интегральное многообразіе двухъ измѣреній будетъ имѣть носителемъ данную кривую (C), а это можетъ быть лишь тогда, когда конусы (T) для всѣхъ точекъ кривой вытягиваются въ прямыя линіи касательныя къ (C), какъ, напримѣръ, это будетъ въ случаѣ линейнаго уравненія для характеристики уравненія, или если конусъ (T) для каждой точки (C) распадается и одна изъ составныхъ частей его вытягивается въ касательную прямую (C). Если кривая (C)—характеристика уравненія $F=0$, то интегральное многообразіе одного измѣренія, которое опредѣляется ею, будетъ характеристическимъ многообразіемъ уравненія, и слѣдовательно, согласно предыдущему, задача Cauchy становится неопредѣленной. Если кривая (C)—не характеристика, мы можемъ самое рѣшеніе задачи Cauchy свести къ опредѣленію нѣкотораго семейства характеристикъ; въ самомъ дѣлѣ, получивъ указаннымъ выше способомъ одно или нѣсколько интегральныхъ многообразій одного измѣренія, образованныхъ точками (C) и касательными плоскостями развертывающихся поверхностей, описанныхъ около (C), мы этимъ самымъ опредѣлили одно или нѣсколько семействъ съ однимъ параметромъ характеристическихъ многообразій, такъ какъ каждый элементъ упомянутыхъ интегральныхъ многообразій принадлежитъ вполнѣ опредѣленному характеристическому многообразію: такъ какъ съ одной стороны всякое интегральное многообразіе двухъ измѣреній образуется изъ семейства характеристическихъ многообразій, а съ другой стороны опредѣленныя нами семейства — единственныя, въ составъ элементовъ которыхъ входятъ точки кривой (C), то слѣдовательно, эти семейства непремѣнно даютъ искомыя интегральныя многообразія; кривыя—характеристики каждаго семейства—будутъ образовывать нѣкоторую поверхность—одно изъ рѣшеній задачи Cauchy

Разсмотримъ въ частности такую кривую (C), которая въ каждой своей точкѣ касается образующей соотвѣтствующаго конуса (T); подобныя кривыя получили названіе *интегральныхъ* кривыхъ уравненія. Когда мы станемъ проводить въ каждой точкѣ интегральной кривой (C) общія ея касательныя плоскости съ конусомъ (T), то, очевидно, одна изъ этихъ плоскостей — касающаяся конуса (T) по образующей касательной къ (C), замѣняетъ собой двѣ плоскости общаго случая (при аналитическомъ рѣшеніи получаемъ двукратный корень), и слѣдовательно, въ задачѣ Cauchy два рѣшенія сливаются въ одно, т. е. одна изъ интегральныхъ поверхностей, проходящихъ черезъ (C), должна быть разсматриваема какъ предѣлъ *двухъ* слившихся интегральныхъ поверхностей, которыя въ общемъ случаѣ обѣ проходятъ черезъ (C), но не сливаются. Отсюда можно заключить, что кривая (C) должна быть особой кривой для разсматриваемой поверхности; не трудно убѣдиться, что она будетъ такъ-называемымъ ребромъ возврата поверхности, по которому соприкасаются двѣ полости поверхности.

Небезъинтересно разсмотрѣть, какъ можно построить изъ характеристикъ поверхности *полнаго* интеграла въ томъ случаѣ, когда уравненіе $F=0$ (1) допускаетъ подобныя поверхности; въ этомъ случаѣ, какъ извѣстно, точки плоскости x_1y_1 преобразуются въ поверхности и слѣдовательно, преобразованіе прикосновенія опредѣляется однимъ равенствомъ $\Omega=0$, притомъ каждому элементу $(x_1, y_1, 0, 0, 0)$ соотвѣтствуетъ одинъ опредѣленный особый элементъ. Многообразіе двухъ измѣреній, носителемъ котораго служитъ точка $(x_1, y_1, 0)$, очевидно, можетъ быть составлено, изъ семейства съ однимъ параметромъ многообразій одного измѣренія, изъ которыхъ каждое состоитъ изъ точки $(x_1, y_1, 0)$ и нѣкотораго пучка плоскостей, пересѣкающихъ плоскость x_1y_1 по одной прямой: всѣ эти многообразія одного измѣренія имѣютъ одинъ общій элементъ — точку $(x_1, y_1, 0)$ вмѣстѣ съ плоскостью x_1y_1. Производя преобразованіе прикосновенія, приходимъ непосредственно къ слѣдующему результату: всякая поверхность полнаго интеграла образуется характеристиками, имѣющими одинъ общій элементъ съ особымъ интегральнымъ многообразіемъ; въ случаѣ особой интегральной поверхности семейство характеристикъ должно касаться особой интегральной поверхности въ одной точкѣ.

Что касается до особаго интегральнаго многообразія, то, очевидно, оно не можетъ быть образовано семействомъ характеристикъ, но зато оно съ каждымъ изъ характеристическихъ многообразій имѣетъ общій элементъ, соотвѣтствующій точкѣ $(x_1, y_1, 0)$ и плоскости x_1y_1; и потому, разъ мы знаемъ характеристики уравненія, особое интегральное много-

образіе легко можетъ быть найдено. Семейство характеристическихъ многообразій зависитъ отъ трехъ параметровъ: слѣдовательно, характеристики въ общемъ случаѣ образуютъ такъ-называемый комплексъ кривыхъ. Кривыя комплекса или касаются всѣ нѣкоторой поверхности, или пересѣкаютъ нѣкоторую линію, или проходятъ черезъ нѣкоторую точку. Въ первомъ случаѣ уравненіе, очевидно, допускаетъ особый интегралъ—упомянутую поверхность. Во второмъ и третьемъ случаяхъ надо еще опредѣлить плоскости, дополняющія точки полученной кривой или полученную точку до элементовъ характеристическихъ многообразій, и тогда получимъ особое интегральное многообразіе двухъ или одного измѣренія или отдѣльный особый элементъ. Въ случаѣ уравненія распадающагося на линейныя, характеристики въ нашемъ новомъ смыслѣ, т. е. кривыя, образуемыя точками элементовъ характеристическихъ многообразій, тождественны съ тѣми кривыми, которыя мы разсматривали уже ранѣе подъ этимъ именемъ, т. е. съ кривыми — носителями интегральныхъ многообразій двухъ измѣреній; эти послѣднія кривыя составляютъ, какъ извѣстно, не комплексъ, а конгруэнцію, т. е. семейство съ двумя параметрами; но характеристическія многообразія, конечно, по прежнему составлнютъ семейство съ тремя параметрами, другими словами, каждая характеристика должна входить въ составъ цѣлаго семейства съ однимъ параметромъ характеристическихъ многообразій: въ справедливости этого заключенія сейчасъ-же убѣдимся, если замѣтимъ, что характеристическому многообразію соотвѣтствуетъ точка $(x_1, y_1, 0)$ вмѣстѣ съ пучкомъ плоскостей, пересѣкающихъ плоскость x_1y_1 по одной прямой, а характеристикѣ вмѣстѣ со всѣми касательными плоскостями соотвѣтствуетъ вся связка плоскостей, проходящихъ черезъ точку $(x_1, y_1, 0)$, вмѣстѣ съ этой точкой. Особое интегральное многообразіе опредѣляется конгруэнціей характеристикъ совершенно такъ же, какъ и въ общемъ случаѣ.

Изъ всего изложеннаго мы видимъ, какую важную роль въ теоріи уравненій съ частными производными играютъ характеристическія многообразія; поэтому является весьма желательнымъ опредѣлить ихъ для даннаго уравненія $F=0$ (1) независимо отъ преобразованія прикосновенія, которымъ мы пользовались до сихъ поръ. Замѣтимъ, что многія изъ выведенныхъ выше свойствъ характеристическихъ многообразій вполнѣ ихъ опредѣляютъ: такъ, можно бы опредѣлить характеристическія многообразія, какъ кривыя и развертывающіяся поверхности, по которымъ соприкасаются интегральныя поверхности; очевидно, это опредѣленіе приводитъ насъ къ такимъ многообразіямъ, которымъ въ силу преобразованія прикосновенія соотвѣтствуютъ многообразія, образуемыя точками плоскости $x_1 y_1$ вмѣстѣ съ пучками плоскостей, пересѣкающихъ плоскость $x_1 y_1$ по одной прямой, другими словами именно къ характеристическимъ многообразіямъ. Но не трудно вывести иное, чисто-геометрическое опредѣленіе, которое непосредственно приведетъ насъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ характеристическихъ многообразій.

Разсмотримъ произвольную точку (x, y, z) и соотвѣтствующій ей въ силу уравненія $F=0$ (1) конусъ (T); элементы, составляемые точкой и касательными плоскостями конуса, образуютъ интегральное многообразіе одного измѣренія уравненія $F=0$ (1). Согласно общей теоріи, это многообразіе входитъ въ составъ вполнѣ опредѣленнаго интегральнаго многообразія двухъ измѣреній, которое образуется семействомъ характеристическихъ многообразій, опредѣляемыхъ элементами даннаго многообразія одного измѣренія. Въ разсматриваемомъ случаѣ, очевидно, получимъ интегральную поверхность, образованную семействомъ характеристикъ, исходящихъ изъ точки (x, y, z). Для этой поверхности точка (x, y, z) будетъ такъ-называемой конической точкой; касательныя плоскости поверхности въ этой точкѣ образуютъ конусъ (T), и слѣдовательно характеристики, исходящія изъ точки (x, y, z), всѣ имѣютъ въ этой точкѣ направленіе образующихъ конуса (T). Такъ какъ семейство характеристикъ, которое мы разсматривали, исчерпываетъ, очевидно, всевозможныя характеристики, выходящія изъ точки (x, y, z), то изъ доказаннаго получаемъ слѣдующее свойство: всякая характеристика въ любой своей точкѣ (x, y, z) касается одной изъ образующихъ конуса (T), соотвѣтствующаго точкѣ (x, y, z).

Разсмотримъ теперь случай, соотвѣтствующій предыдущему по закону двойственности. Возьмемъ произвольную плоскость

$$\zeta = p\xi + q\eta + \tau \tag{72}$$

и опредѣлимъ всѣ характеристическія многообразія, въ составъ развертывающихся поверхностей которыхъ входитъ плоскость (72); всѣ характеристики будутъ касаться плоскости (72). Точки прикосновенія образуютъ на этой плоскости нѣкоторую кривую (S), которую можно опредѣлить непосредственно изъ уравненія $F=0$, какъ геометрическое мѣсто точекъ, дополняющихъ плоскость (72) до элементовъ, удовлетворяющихъ уравненію $F=0$ (1); совокупность этихъ элементовъ, очевидно, образуетъ интегральное многообразіе одного измѣренія уравненія (1). Согласно общей теоріи, семейство характеристикъ, которое нами опредѣлено въ началѣ, образуетъ интегральную поверхность, прикасающуюся къ плоскости (72) по цѣлой кривой (S); плоскости развертывающихся поверхностей характеристическихъ многообразій служатъ касательными плоскостями интегральной поверхности: образующія этихъ развертывающихся поверхностей, лежащія въ плоскости (72), очевидно, касаются кривой (S).

Въ результатѣ получаемъ свойство, соотвѣтствующее по закону двойственности выведенному выше: образующая развертывающейся поверхности характеристическаго многообразія, проходящая черезъ произвольную точку (x, y, z) характеристики и лежащая въ соотвѣтствующей плоскости

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y), \tag{73}$$

касается въ точкѣ (x, y, z) кривой (S), опредѣляемой въ плоскости (73) уравненіемъ $F=0$ (1).

Конусъ (T) въ точкѣ (x, y, z) можетъ быть опредѣленъ какъ огибающая поверхность семейства плоскостей, проходящихъ черезъ точку (x, y, z)

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

при чемъ p и q связаны уравненіемъ

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

Будемъ считать q функціей p; по общему правилу, уравненіе конуса (T) получимъ, исключая $q, p, \frac{dq}{dp}$ изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} &\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) \\ &0 = (\xi - x) + \frac{dq}{dp}(\eta - y) \\ &F(x, y, z, p, q) = 0 \\ &\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{dq}{dp} = 0. \end{aligned}\right| \tag{74}$$

При опредѣленномъ значеніи p эти же уравненія опредѣляютъ одну изъ образующихъ конуса (T); исключая $\frac{dq}{dp}$, приведемъ ихъ къ слѣдующему виду:

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{\zeta - z}{p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}}. \tag{75}$$

Уравненія касательной къ характеристикѣ въ точкѣ (x, y, z) имѣютъ видъ

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}. \tag{76}$$

такъ какъ обѣ эти прямыя должны быть тождественны, то для характеристики имѣемъ

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}}, \tag{77}$$

при чемъ, конечно, еще выполняется условіе $F(x, y, z, p, q)=0$.

Уравненія кривой (S) для плоскости

$$\zeta-z=p(\xi-x)+q(\eta-y),$$

очевидно, будутъ

$$\left.\begin{aligned}&\zeta-z=p(\xi-x)+q(\eta-y)\\&F(\xi, \eta, \zeta, p, q)=0,\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

такъ какъ для ея точекъ (ξ, η, ζ) должно удовлетворяться уравненіе плоскости и уравненіе $F=0$. Касательная кривой (S) въ точкѣ (x, y, z) опредѣляется уравненіями

$$\frac{\xi-x}{(d\xi)}=\frac{\eta-y}{(d\eta)}=\frac{\zeta-z}{(d\zeta)}, \tag{79}$$

при чемъ подъ $(d\xi)$, $(d\eta)$, $(d\zeta)$ понимаемъ результаты, которые получимъ, если опредѣлимъ $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, дифференцируя уравненіе (78) при x, y, z, p, q постоянныхъ, и затѣмъ положимъ $\xi=x$, $\eta=y$, $\zeta=z$. Дифференцированіе даетъ намъ

$$d\zeta=pd\xi+qd\eta$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial F}{\partial \eta}d\eta+\frac{\partial F}{\partial \zeta}d\zeta=0;$$

полагая $\xi=x$, $\eta=y$, $\zeta=z$, получаемъ

$$(d\zeta)=p(d\xi)+q(d\eta)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(d\xi)+\frac{\partial F}{\partial y}(d\eta)+\frac{\partial F}{\partial z}(d\zeta)=0,$$

откуда

$$\frac{(d\xi)}{\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{(d\eta)}{-\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)}=\frac{(d\zeta)}{p\frac{\partial F}{\partial y}-q\frac{\partial F}{\partial x}}. \tag{80}$$

Уравненія (79) такимъ образомъ принимаютъ видъ

$$\frac{\xi-x}{\frac{dF}{dy}}=\frac{\eta-y}{-\frac{dF}{dx}}=\frac{\zeta-z}{p\frac{\partial F}{\partial y}-q\frac{\partial F}{\partial x}}, \tag{81}$$

гдѣ $\frac{d}{dx}$ и $\frac{d}{dy}$ имѣютъ обычное условное значеніе.

Развертывающуюся поверхность характеристическаго многообразія можемъ разсматривать какъ огибающую семейства плоскостей

$$\zeta-z=p(\xi-x)+q(\eta-y),$$

гдѣ x, y, z, p, q — функціи одного параметра въ силу уравненій характеристическаго многообразія. Уравненіе развертывающейся поверхности получимъ по общему правилу, исключая произвольный параметръ изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned}&\zeta-z=p(\xi-x)+q(\eta-y)\\-&dz=-pdx-qdy+dp.(\xi-x)+dq.(\eta-y).\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Эти же уравненія при данномъ значеніи параметра представляютъ образующую развертывающейся поверхности.

Изъ уравненій (77), которыя имѣютъ мѣсто для характеристики и въ которыхъ, слѣдовательно, дифференціалы имѣютъ то же значеніе какъ и въ уравненіяхъ (82), имѣемъ

$$dz=pdx+qdy.$$

что впрочемъ мы могли предвидѣть; на основаніи этого, уравненія образующей принимаютъ видъ

$$\frac{\xi-x}{-dq}=\frac{\eta-y}{dp}=\frac{\zeta-z}{qdp-pdq}. \tag{83}$$

Какъ было выведено, образующая должна совпадать съ касательной къ кривой (S) въ точкѣ (x, y, z); поэтому уравненія (81) и (83) должны быть тождественны, и слѣдовательно, для характеристическаго многообразія имѣемъ:

$$\frac{-dp}{\frac{dF}{dx}}=\frac{-dq}{\frac{dF}{dy}}=\frac{qdp-pdq}{p\frac{\partial F}{\partial y}-q\frac{\partial F}{\partial x}}. \tag{84}$$

Послѣдній членъ равенствъ можемъ откинуть, такъ какъ равенства

$$\frac{-dp}{\frac{dF}{dx}}=\frac{qdp-pdq}{p\frac{\partial F}{\partial y}-q\frac{\partial F}{\partial x}} \text{ и } \frac{-dq}{\frac{dF}{dy}}=\frac{qdp-pdq}{p\frac{\partial F}{\partial y}-q\frac{\partial F}{\partial x}},$$

очевидно, слѣдуютъ изъ

$$\frac{-dp}{\frac{dF}{dx}}=\frac{-dq}{\frac{dF}{dy}}.$$

Итакъ, для характеристическаго многообразія имѣемъ уравненія

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}};\ \frac{-dp}{\frac{dF}{dx}}=\frac{-dq}{\frac{dF}{dy}};\ F=0. \tag{85}$$

Изъ уравненія $F=0$ слѣдуетъ $dF=0$; полагая общую величину первыхъ трехъ отношеній $=dt$, а вторыхъ двухъ $=du$ и вставляя полученныя выраженія dx, dy, dz, dp, dq въ $dF=0$, имѣемъ

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{dF}{dx}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{dF}{dy}\right)dt-\left(\frac{dF}{dx}\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{dF}{dy}\frac{\partial F}{\partial q}\right)du=0,$$

откуда $dt=du$, и слѣдовательно, уравненія характеристическаго многообразія могутъ быть представлены въ видѣ:

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{-dp}{\frac{dF}{dx}}=\frac{-dq}{\frac{dF}{dy}} \tag{86}$$

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0. \tag{86'}$$

или

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{Pp+Qq}=\frac{-dp}{Zp+X}=\frac{-dq}{Zq+Y} \tag{87}$$

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0. \tag{87'}$$

гдѣ для краткости положили

$$P=\frac{\partial F}{\partial p},\ \ Q=\frac{\partial F}{\partial q},\ \ Z=\frac{\partial F}{\partial z},\ \ X=\frac{\partial F}{\partial x},\ \ Y=\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Если оставить пока въ сторонѣ уравненіе (87'), то изъ дифференціальныхъ уравненій (87) опредѣлимъ x, y, z, p, q въ функціи одной изъ координатъ и четырехъ произвольныхъ постоянныхъ. Не трудно видѣть, что уравненіе $F=const.$ есть интегралъ дифференціальныхъ уравненій (87): въ самомъ дѣлѣ, полагая общую величину отношеній $=dt$, имѣемъ

$$dF=Xdx+Ydy+Zdz+Pdp+Qdq=$$
$$=[XP+YQ+ZPp+ZQq-PZp-PX-QZq-QY]dt=0,$$

откуда и слѣдуетъ, что $F=const.$ есть интегралъ. Вслѣдствіе этого, если мы проинтегрируемъ уравненія (87) и найденныя выраженія координатъ вставимъ въ функцію $F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$, то получимъ нѣкоторое постоянное, зависящее отъ четырехъ произвольныхъ постоянныхъ интеграціи; приравнявъ его нулю, выразимъ одно изъ произвольныхъ постоянныхъ интеграціи черезъ три остальныхъ, и слѣдовательно, окон-

чательно x, y, z, p, q будутъ зависѣть лишь отъ *трехъ* произвольныхъ постоянныхъ, какъ это и должно быть для характеристическаго многообразія. Интегрируя уравненія (87), мы собственно находимъ характеристическія многообразія всѣхъ уравненій

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=const.$$

Не трудно-бы изъ уравненій (87; 87') обратно вывести всѣ свойства характеристическихъ многообразій; но разъ эти уравненія даютъ семейство многообразій съ *тремя* параметрами и выражаютъ непосредственно нѣкоторыя свойства характеристическихъ многообразій, можно быть увѣреннымъ, что и остальныя свойства будутъ имѣть мѣсто, и слѣдовательно характеристическія многообразія можно опредѣлить, какъ совокупности такихъ кривыхъ линій и такихъ развертывающихся поверхностей, описанныхъ около упомянутыхъ кривыхъ, для которыхъ выполняются два условія: касательная къ кривой—характеристикѣ въ каждой точкѣ $(x,\ y,\ z)$ кривой служитъ образующей конуса (T), соотвѣтствующаго точкѣ $(x,\ y,\ z)$, а образующая описанной развертывающейся поверхности, проходящая черезъ точку $(x,\ y,\ z)$, касается въ этой точкѣ кривой (S), соотвѣтствующей той плоскости развертывающейся поверхности, которая проходитъ черезъ $(x,\ y,\ z)$.

Обращаясь снова къ дифференціальнымъ уравненіямъ (86), видимъ, что знаменателями въ 1-мъ, 2-мъ, 4-мъ и 5-мъ членахъ равенствъ служатъ тѣ самыя величины $\frac{\partial F}{\partial p}$; $\frac{\partial F}{\partial q}$, $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, которыя мы встрѣчали въ теоріи особыхъ элементовъ уравненія. Такъ какъ каждый особый элементъ принадлежитъ цѣлому семейству характеристическихъ многообразій, то для такого элемента отношенія $dx:dy:dz:-dp:-dq$, опредѣляемыя изъ уравненій (86), должны становиться неопредѣленными, для чего необходимо, чтобы становились неопредѣленными отношенія $\frac{\partial F}{\partial p}:\frac{\partial F}{\partial q}:\frac{dF}{dx}:\frac{dF}{dy}$. Если F—цѣлая алгебраическая функція перемѣнныхъ, то для неопредѣленности упомянутаго ряда отношеній при конечныхъ значеніяхъ x, y, z, p, q необходимо $\frac{\partial F}{\partial p}=0$, $\frac{\partial F}{\partial q}=0$, $\frac{dF}{dx}=0$, $\frac{dF}{dy}=0$.*)

*) Отношенія становятся неопредѣленными также при $\frac{\partial F}{\partial p}=\infty$, $\frac{\partial F}{\partial q}=\infty$, $\frac{dF}{dx}=\infty$, $\frac{dF}{dy}=\infty$; но эти равенства могутъ имѣть мѣсто лишь при безконечныхъ значеніяхъ координатъ x, y, z, p, q, т. е. для элементовъ безконечно-удаленныхъ или элементовъ, плоскости которыхъ параллельны оси z; обоихъ случаевъ избѣгаемъ преобразованіемъ координатъ.

Такимъ образомъ для особаго элемента (x, y, z, p, q) съ конечными значеніями координатъ, кромѣ уравненія $F=0$, должна необходимо имѣть мѣсто группа выше написанныхъ уравненій (ср. выше стр. 41). Обратно, если координаты элемента удовлетворяютъ уравненіямъ

$$F=0,\ \frac{\partial F}{\partial p}=0,\ \frac{\partial F}{\partial q}=0,\ \frac{dF}{dx}=0,\ \frac{dF}{dy}=0,$$

то этотъ элементъ (x, y, z, p, q) принадлежитъ, вообще говоря, цѣлому семейству характеристическихъ многообразій; но отсюда еще нельзя заключить, что разсматриваемый элементъ принадлежитъ къ числу особыхъ: онъ можетъ быть также критическимъ элементомъ даннаго уравненія.

Здѣсь будетъ у мѣста привести доказательство тому, что всякое интегральное многообразіе двухъ измѣреній уравненія $F=0$ содержитъ по крайней мѣрѣ одинъ особый или критическій элементъ. Допустимъ, что въ силу уравненій многообразія x, y, z, p, q выражены въ функціи двухъ независимыхъ параметровъ u, v: тогда при произвольныхъ u, v имѣемъ во-первыхъ $F(x, y, z, p, q)=0$, во-вторыхъ $dz-pdx-qdy=0$, или, дифференцируя уравненіе $F=0$ и замѣняя dz черезъ $pdx+qdy$,

$$\frac{\partial F}{\partial p}dp+\frac{\partial F}{\partial q}dq+\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy=0;$$

такъ какъ $dp=\frac{\partial p}{\partial u}du+\frac{\partial p}{\partial v}dv, \ldots$, то получаемъ два соотношенія

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial u}+\frac{dF}{dx}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{dF}{dy}\frac{\partial y}{\partial u}=0\\ \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial v}+\frac{dF}{dx}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{dF}{dy}\frac{\partial y}{\partial v}=0\end{aligned}\right\} \tag{88}$$

На основаніи этихъ соотношеній четыре уравненія $\frac{\partial F}{\partial p}=0$, $\frac{\partial F}{\partial q}=0$, $\frac{dF}{dx}=0$, $\frac{dF}{dy}=0$ сводятся не болѣе, какъ къ двумъ независимымъ: уравненіе $F=0$ удовлетворяется тождественно, и слѣдовательно всегда найдемъ значенія u, v, при которыхъ элементъ (x, y, z, p, q), принадлежащій данному многообразію, будетъ особымъ или критическимъ.

Мы изложили всю теорію уравненій съ частными производными 1-го порядка, исходя изъ простого замѣчанія, что всякое уравненіе $F=0$ можно преобразованіемъ прикосновенія привести къ виду $z_1=0$. Вмѣсто уравненія $z_1=0$ мы могли бы, очевидно, исходить изъ любого уравненія, свободнаго отъ p_1 и q_1

$$f(x_1, y_1, z_1)=0; \tag{89}$$

разсужденія остались бы тѣ же самыя и результаты были бы тождественны съ тѣми, которые нами получены. Не трудно, впрочемъ, обратно убѣдиться, что разъ уравненіе $F=0$ (1) нѣкоторымъ преобразованіемъ прикосновенія преобразуется въ уравненіе (89), то интегральнымъ многообразіямъ уравненія (1) соотвѣтствуютъ вообще многообразія, имѣющія носителями произвольныя кривыя на поверхности (U), уравненіе которой

$$f(x_1, y_1, z_1)=0,$$

въ частности — многообразія, имѣющія носителями точки поверхности (U), а особому интегральному многообразію соотвѣтствуетъ многообразіе, носителемъ котораго служитъ поверхность (U); что касается до характеристическихъ многообразій уравненія (1), то имъ очевидно соотвѣтствуютъ многообразія одного измѣренія, элементы которыхъ составляются изъ точки (x_1, y_1, z_1) поверхности (U) и пучка плоскостей съ ребромъ, касающимся поверхности (U) въ точкѣ (x_1, y_1, z_1).

Въ заключеніе, пользуясь полученными результатами, обратимся снова къ вопросу, который мы затрогивали въ началѣ этого параграфа, и выведемъ прежде всего важныя соотношенія, которыя имѣютъ мѣсто между функціями x_1, y_1, z_1, опредѣляющими преобразованіе прикосновенія. Уравненія $z_1=const.$, $x_1=const.$, $y_1=const.$, которыя опредѣляютъ системы плоскостей, параллельныхъ соотвѣтственно тремъ плоскостямъ координатъ x_1y_1, y_1z_1, z_1x_1, въ системѣ координатъ элемента x, y, z, p, q являются уравненіями съ частными производными 1-го порядка. Характеристическимъ многообразіямъ уравненія

$$z_1(x, y, z, p, q)=c, \tag{90}$$

гдѣ c—произвольное постоянное, соотвѣтствуютъ точки плоскости

$$z_1=c$$

вмѣстѣ съ пучками плоскостей, пересѣкающихъ плоскость $z_1=c$ по одной прямой. Для всякаго такого многообразія одного измѣренія, очевидно, имѣемъ

$$x_1=a,\quad y_1=b,$$

гдѣ a и b—постоянныя, измѣняющіяся при измѣненіи точки. Отсюда заключаемъ, что для любого характеристическаго многообразія уравненія (90) функціи $x_1(x, y, z, p, q)$ и $y_1(x, y, z, p, q)$ должны сохранять постоянныя значенія, другими словами равенства

$$x_1(x, y, z, p, q)=const.,\quad y_1(x, y, z, p, q)=const.$$

должны быть интегралами дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій уравненія (90). Если въ равенствѣ

$$\frac{\partial x_1}{\partial x}dx + \frac{\partial x_1}{\partial y}dy + \frac{\partial x_1}{\partial z}dz + \frac{\partial x_1}{\partial p}dp + \frac{\partial x_1}{\partial q}dq = 0$$

замѣнимъ дифференціалы dx, dy, dz, dp, dq пропорціональными имъ величинами изъ дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій

$$\frac{dx}{\frac{\partial z_1}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial z_1}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial z_1}{\partial p} + q\frac{\partial z_1}{\partial q}} = \frac{-dp}{\frac{dz_1}{dx}} = \frac{-dq}{\frac{dz_1}{dy}}.$$

то получимъ

$$\frac{\partial z_1}{\partial p}\frac{dx_1}{dx} - \frac{dz_1}{dx}\frac{\partial x_1}{\partial p} + \frac{\partial z_1}{\partial q}\frac{dx_1}{dy} - \frac{dz_1}{dy}\frac{\partial x_1}{\partial q} = 0. \qquad (91)$$

Лѣвая часть этого равенства обозначается символомъ $[z_1, x_1]$, при чемъ вообще

$$[U, V] = \frac{\partial U}{\partial p}\frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dx}\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial U}{\partial q}\frac{dV}{dy} - \frac{dU}{dy}\frac{\partial V}{\partial q}: \qquad (92)$$

такимъ образомъ имѣемъ соотношеніе

$$[z_1, x_1] = 0$$

и аналогичное ему

$$[z_1, y_1] = 0:$$

mutatis mutandis, получимъ еще

$$[x_1, y_1] = 0.$$

Три соотношенія

$$[y_1, x_1] = 0, \quad [z_1, y_1] = 0; \quad [x_1, y_1] = 0 \qquad (93)$$

должны имѣть мѣсто въ силу

$$z_1 = c, \quad x_1 = a, \quad y_1 = b:$$

но такъ какъ c, a, b—произвольныя постоянныя, а лѣвыя части соотношеній (93) свободны отъ этихъ постоянныхъ, то слѣдовательно соотношенія (93) имѣютъ мѣсто тождественно для всякихъ трехъ функцій z_1, x_1, y_1, опредѣляющихъ преобразованіе прикосновенія. Скобки $[U, V]$, входящія въ эти соотношенія, называются обобщенными скобками

Poisson-a; если предположить, что U и V не зависятъ отъ z, то получаемъ въ частности скобки Poisson-a:

$$(U, V) = \frac{\partial U}{\partial p}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial U}{\partial q}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial q}.$$

Не трудно убѣдиться въ слѣдующихъ свойствахъ обобщенныхъ скобокъ Poisson-a:

$$[U, U] = 0; \qquad (94)$$

$$[U, c] = 0, \text{ гдѣ } c \text{—постоянное}; \qquad (95)$$

$$[V, U] = -[U, V]; \qquad (96)$$

$$\big[[U, V], W\big] + \big[[V, W], U\big] + \big[[W, U], V\big] = \\ = \frac{\partial U}{\partial z}[W, V] + \frac{\partial V}{\partial z}[U, W] + \frac{\partial W}{\partial z}[V, U]. \qquad (97).$$

Для доказательства достаточно раскрыть символы.

Докажемъ теперь обратно, что всякія три функціи x_1, y_1, z_1, удовлетворяющія соотношеніямъ (93), опредѣляютъ преобразованіе прикосновенія. Въ началѣ § 3-го (стр. 32) мы вывели пять уравненій, которымъ должны удовлетворять функціи x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, опредѣляющія преобразованіе прикосновенія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} - p_1\frac{dx_1}{dx} - q_1\frac{dy_1}{dx} &= 0 \\ \frac{dz_1}{dy} - p_1\frac{dx_1}{dy} - q_1\frac{dy_1}{dy} &= 0 \\ \frac{\partial z_1}{\partial p} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial p} - q_1\frac{\partial y_1}{\partial p} &= 0 \\ \frac{\partial z_1}{\partial q} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial q} - q_1\frac{\partial y_1}{\partial q} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

Разъ даны x_1, y_1, z_1, мы имѣемъ пять уравненій для опредѣленія двухъ неизвѣстныхъ p_1, q_1, но не трудно доказать, что эти уравненія совмѣстны при выполненіи условій (93). Въ самомъ дѣлѣ, умножая уравненія (57) послѣдовательно на $-\frac{\partial x_1}{\partial p}$, $-\frac{\partial x_1}{\partial q}$, $\frac{dx_1}{dx}$, $\frac{dx_1}{dy}$ и складывая, получимъ

$$[z_1, x_1] + q_1[x_1, y_1] = 0; \qquad (98)$$

умножая на $-\frac{\partial y_1}{\partial p}$, $-\frac{\partial y_1}{\partial q}$, $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_1}{dy}$ и складывая, имѣемъ

$$[z_1, y_1] - p_1[x_1, y_1] = 0; \qquad (99)$$

Наконецъ, умножая на $-\frac{\partial z_1}{\partial p}, -\frac{\partial z_1}{\partial q}, \frac{dz_1}{dx}, \frac{dz_1}{dy}$ и складывая, получаемъ

$$p_1\,[z_1,\ x_1] + q_1\,[z_1,\ y_1] = 0. \tag{100}$$

При выполненіи условій (93) уравненія (98), (99), (100) обращаются въ тождества $0 = 0$, и слѣдовательно пять уравненій (57) эквивалентны лишь двумъ независимымъ, изъ которыхъ и опредѣляются p_1 и q_1.

Допустимъ теперь, что произвольное уравненіе $F(x, y, z, p, q) = 0$ (1) мы желаемъ преобразованіемъ прикосновенія привести къ виду $z_1 = 0$. Тогда можемъ взять

$$z_1 = F(x, y, z, p, q);$$

функція $x_1\,(x, y, z, p, q)$ опредѣлится изъ линейнаго уравненія съ частными производными x_1 по x, y, z, p, q

$$[z_1,\ x_1] = [F,\ x_1] = 0. \tag{101}$$

Интеграція этого уравненія, какъ извѣстно, сводится къ интеграціи обыкновенныхъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій, которыя въ данномъ случаѣ совпадаютъ съ дифференціальными уравненіями характеристическихъ многообразій уравненія $F = 0$. Функція $y_1\,(x, y, z, p, q)$ должна удовлетворять двумъ уравненіямъ

$$[z_1,\ y_1] = 0; \quad [x_1,\ y_1] = 0. \tag{102}$$

Не трудно убѣдиться, что эти уравненія образуютъ такъ-называемую *полную* систему (vollständiges System). Въ самомъ дѣлѣ, въ силу формулы (97) и равенства (101), получаемъ, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій

$$\Big[z_1, [x_1,\ y_1]\Big] - \Big[x_1, [z_1,\ y_1]\Big] = \frac{\partial z_1}{\partial z}\,[x_1,\ y_1] - \frac{\partial x_1}{\partial z}\,[z_1,\ y_1]; \tag{103}$$

другими словами, если въ 1-е изъ уравненій (102) вмѣсто искомой функціи y_1 вставимъ лѣвую часть 2-го уравненія (102) и обратно и затѣмъ изъ 1-го результата вычтемъ второй, то полученное уравненіе будетъ линейнымъ сочетаніемъ уравненій (102), а это и есть признакъ полной системы. Опредѣленіе y_1 сведется, какъ извѣстно, къ интеграціи обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія. Наконецъ, p_1 и q_1 найдемъ рѣшеніемъ обыкновенныхъ линейныхъ уравненій.

Если имѣемъ два уравненія

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \text{ и } \Phi(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0.$$

то, согласно предыдущему, оба можемъ привести къ виду

$$z_2 = 0,$$

первое нѣкоторымъ преобразованіемъ прикосновенія S, второе преоб-
разованіемъ прикосновенія Σ. Преобразованіе Σ^{-1}, обратное Σ, есть
тоже преобразованіе прикосновенія; совокупность двухъ преобразованій
прикосновенія $\Sigma^{-1}S$ есть, очевидно, тоже нѣкоторое преобразованіе
прикосновенія. Производя его надъ функціей F, имѣемъ

$$\Sigma^{-1}S(F) = \Sigma^{-1}(z_2) = \Phi,$$

и слѣдовательно произвольное уравненіе

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

нѣкоторымъ преобразованіемъ прикосновенія $\Sigma^{-1}S$ всегда можетъ быть
преобразовано въ другое произвольное уравненіе

$$\Phi(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0;$$

другими словами, уравненіе съ частными производными не обладаетъ
инваріантными свойствами относительно всей группы преобразованій
прикосновенія. Въ силу преобразованія прикосновенія $\Sigma^{-1}S$, интеграль-
нымъ многообразіямъ $F = 0$ соотвѣтствуютъ, какъ извѣстно, инте-
гральныя многообразія $\Phi = 0$; мы можемъ теперь добавить, что ха-
рактеристическимъ многообразіямъ соотвѣтствуютъ характеристическія
многообразія: это непосредственно очевидно какъ изъ самыхъ свойствъ
характеристическихъ многообразій, такъ и изъ того, что характеристи-
ческія многообразія уравненій $F = 0$ и $\Phi = 0$ соотвѣтствуютъ однимъ
и тѣмъ же многообразіямъ одного измѣренія на плоскости $z_2 = 0$ —
точкамъ вмѣстѣ съ пучками плоскостей, пересѣкающихъ плоскость
$z_2 = 0$ по одной прямой.

Допустимъ, что имѣемъ произвольное уравненіе $F(x, y, z, p, q) = 0$ (1).
Характеристическія многообразія его удовлетворяютъ дифференціаль-
нымъ уравненіемъ (86); если $\Phi(x, y, z, p, q) = const.$ есть интегралъ
этихъ уравненій, то функція Φ удовлетворяетъ линейному уравненію
съ частными производными

$$[F,\ \Phi] = 0, \tag{104}$$

такъ какъ мы должны имѣть $d\Phi = 0$ въ силу уравненій (86). Можно
даже сказать, что характеристическія многообразія опредѣляются урав-
неніемъ (104), такъ какъ обратно всякая функція Φ, удовлетворяющая

этому уравненію, дастъ интегралъ $\Phi = const.$ дифференціальныхъ уравненій (86). Уравненію

$$[F, \Phi] = 0, \tag{104}$$

очевидно, удовлетворяетъ $\Phi = F$; найдя еще три независимыхъ рѣшенія Φ_1, Φ_2, Φ_3, представимъ уравненія характеристическихъ многообразій въ видѣ

$$F = 0, \ \Phi_1 = c_1, \ \Phi_2 = c_2, \ \Phi_3 = c_3,$$

гдѣ c_1, c_2, c_3 — произвольныя постоянныя.

Произведемъ надъ уравненіемъ $F = 0$ (1) произвольное преобразованіе прикосновенія, и пусть въ новыхъ координатахъ элемента x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 уравненіе будетъ

$$F'(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0, \tag{105}$$

при чемъ тождественно

$$F(x, y, z, p, q) = F'(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1).$$

Характеристическія многообразія уравненія $F = 0$ должны преобразоваться въ характеристическія многообразія $F' = 0$; поэтому всякая функція Φ, удовлетворяющая уравненію (104), должна, по преобразованіи, удовлетворять аналогичному уравненію

$$[F', \Phi']' = 0, \tag{106}$$

гдѣ

$$\Phi'(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = \Phi(x, y, z, p, q),$$

и подъ скобками $[\ ]'$ разумѣемъ обобщенныя скобки Poisson-а по перемѣннымъ x_1, y_1, z_1, p_1, q_1. Иначе мы можемъ сказать, что линейное уравненіе съ частными производными $[F, \Phi] = 0$ (104) должно преобразоваться въ уравненіе $[F', \Phi']' = 0$ (106). При этомъ подобный результатъ мы получимъ для всякаго уравненія $F = 0$, т. е. для произвольной функціи F. Такимъ образомъ можемъ сказать, что если для какихъ-либо двухъ функцій перемѣнныхъ x, y, z, p, q — F и Φ скобки $[F, \Phi]$ равны нулю, то и послѣ преобразованія прикосновенія скобки $[F', \Phi']'$ по новымъ перемѣннымъ x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 равны нулю. Частныя производныя функцій F и Φ по старымъ перемѣннымъ выражаются линейно черезъ частныя производныя F' и Φ' по новымъ перемѣннымъ, при чемъ коэффиціенты не зависятъ отъ функцій F и Φ; слѣдовательно, необходимо имѣемъ для двухъ произвольныхъ функцій F и Φ

$$[F, \Phi] = \mu[F', \Phi']', \tag{107}$$

гдѣ μ — множитель, зависящій только отъ формулъ преобразованія. Вставляя вмѣсто F и Φ послѣдовательно всевозможныя пары функцій изъ ряда x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, получаемъ непосредственно:

$$\left.\begin{aligned}
&[z_1, x_1] = \mu[z_1, x_1]' = 0; \quad [z_1, y_1] = \mu[z_1, y_1]' = 0;\\
&[x_1, y_1] = \mu[x_1, y_1]' = 0; \quad [p_1, y_1] = \mu[p_1, y_1]' = 0;\\
&[q_1, x_1] = \mu[q_1, x_1]' = 0; \quad [p_1, x_1] = \mu[p_1, x_1]' = \mu;\\
&[q_1, y_1] = \mu[q_1, y_1]' = \mu; \quad [p_1, q_1] = \mu[p_1, q_1]' = 0;\\
&[z_1, p_1] = \mu[z_1, p_1]' = -\mu p_1; \ [z_1, q_1] = \mu[z_1, q_1]' = -\mu q_1.
\end{aligned}\right\} \tag{108}$$

Первыя три изъ равенствъ (108) были выведены уже ранѣе; остальныя получены нами впервые. Воспользуемся теперь доказаннымъ выше равенствомъ (97), полагая въ немъ $U = z_1$, $V = p_1$, $W = y_1$; принимая во вниманіе равенства (108), получаемъ

$$[-\mu p_1, y_1] = \mu p_1 \frac{\partial y_1}{\partial z}. \tag{109}$$

Не трудно доказать еще слѣдующее свойство обобщенныхъ скобокъ Poisson'a:

$$[UV, W] = U[V, W] + V[U, W]; \tag{110}$$

для доказательства стоитъ лишь раскрыть символы. Примѣняя формулу (110) къ первой части равенства (109) и замѣчая, что $[p_1, y_1] = 0$, получаемъ окончательно

$$[\mu, y_1] = -\mu \frac{\partial y_1}{\partial z}. \tag{111}$$

Аналогично, полагая въ формулѣ (97) $U = z_1$, $V = q_1$, $W = x_1$, получаемъ

$$[\mu, x_1] = -\mu \frac{\partial x_1}{\partial z}. \tag{112}$$

Наконецъ, полагая $U = z_1$, $V = p_1$, $W = x_1$, имѣемъ

$$[-\mu p_1, x_1] + [\mu, z_1] = -\mu \frac{\partial z_1}{\partial z} + \mu p_1 \frac{\partial x_1}{\partial z};$$

или, примѣняя къ первому члену лѣвой части формулу (110) и замѣняя $[p_1, x_1]$ черезъ μ на основаніи равенствъ (108), а $[\mu, x_1]$ черезъ $-\mu \frac{\partial x_1}{\partial z}$ на основаніи (112), получаемъ окончательно

$$[\mu, z_1] = \mu^2 - \mu \frac{\partial z_1}{\partial z}. \tag{113}$$

Умножая равенства (111), (112) и (113) соотвѣтственно на q_1, p_1, -1 и складывая, получаемъ

$$p_1[\mu, x_1] + q_1[\mu, y_1] - [\mu, z_1] = \mu\left(\frac{\partial z_1}{\partial z} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial z} - q_1\frac{\partial y_1}{\partial z}\right) - \mu^2. \qquad (114)$$

Если мы предположимъ, что въ силу формулъ преобразованія прикосновенія

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = \rho(dz - pdx - qdy),$$

то, очевидно, имѣемъ

$$\frac{\partial z_1}{\partial z} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial z} - q_1\frac{\partial y_1}{\partial z} = \rho$$

(ср. выше, стр. 31, рав. (56)) и слѣдовательно правая часть равенства (114) равна $\mu\rho - \mu^2$. Для вычисленія лѣвой части примѣняемъ основное свойство скобокъ, выражаемое равенствомъ (107): получаемъ

$$p_1[\mu, x_1] + q_1[\mu, y_1] - [\mu, z_1] = \mu p_1[\mu, x_1]' + \mu q_1[\mu, y_1]' - \mu[\mu, z_1]' =$$
$$= \mu p_1\frac{\partial \mu}{\partial p_1} + \mu q_1\frac{\partial \mu}{\partial q_1} - \mu\left(p_1\frac{\partial \mu}{\partial p_1} + q_1\frac{\partial \mu}{\partial q_1}\right) = 0.$$

Такимъ образомъ, равенство (114) принимаетъ видъ

$$0 = \mu\rho - \mu^2,$$

откуда $\mu = \rho$. Итакъ, если въ силу преобразованія прикосновенія

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = \rho(dz - pdx - qdy),$$

то имѣемъ во-первыхъ, для двухъ произвольныхъ функцій F и Φ

$$[F, \Phi] = \rho[F', \Phi']', \qquad (115)$$

и во-вторыхъ, для функцій x_1, y_1, z_1, p_1, q_1:

$$\left.\begin{array}{l} [z_1, x_1] = 0; \quad [z_1, y_1] = 0; \quad [x_1, y_1] = 0; \\ [p_1, y_1] = 0; \quad [q_1, x_1] = 0; \quad [p_1, q_1] = 0; \\ [p_1, x_1] = \rho; \quad [q_1, y_1] = \rho; \\ [z_1, p_1] = -\rho p_1; \quad [z_1, q_1] = -\rho q_1. \end{array}\right\} \qquad (116)$$

Формулы (115) и (116) получаемъ изъ (107) и (108) вставляя вмѣсто μ ρ.

Формулы (111), (112) и (113) даютъ:

$$[\rho, x_1] = -\rho\frac{\partial x_1}{\partial z}; \quad [\rho, y_1] = -\rho\frac{\partial y_1}{\partial z}; \quad [\rho, z_1] = \rho^2 - \rho\frac{\partial z_1}{\partial z}. \qquad (117)$$

Въ силу формулы (115), обобщенныя скобки Poisson'а двухъ произвольныхъ функцій F и Φ отличаются только опредѣленнымъ множителемъ ρ, не зависящимъ отъ F и Φ, отъ скобокъ тѣхъ же функцій по новымъ перемѣннымъ x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, при любомъ преобразованіи прикосновенія; поэтому можемъ сказать, что скобки $[F, \Phi]$ являются дифференціальнымъ инваріантомъ относительно всей группы преобразованій прикосновеній.

§ 4.—Въ заключеніе разсмотримъ нѣсколько частныхъ примѣровъ преобразованій прикосновенія, которые вмѣстѣ съ тѣмъ позволятъ намъ иллюстрировать общую теорію уравненій съ частными производными, изложенную въ предшествующемъ параграфѣ.

Примѣръ 1. $\Omega = z_1 + z - x_1 x - y_1 y = 0$. Преобразованіе, устанавливаемое соотношеніемъ $\Omega = 0$, мы уже разсматривали въ § 2; это будетъ такъ-называемое преобразованіе Лежандра, опредѣляемое формулами

$$z_1 = px + qy - z, \quad x_1 = p, \quad y_1 = q, \quad p_1 = x, \quad q_1 = y$$

(ср. § 2, рав. 44); съ геометрической точки зрѣнія оно есть взаимно-полярное соотвѣтствіе.

Разсмотримъ произвольное уравненіе $f(x_1, y_1, z_1) = 0$; ему соотвѣтствуетъ уравненіе съ частными производными $f(p, q, px + qy - z) = 0$. На основаніи общей теоріи, уравненіе $f(p, q, px + qy - z) = 0$ должно допускать особый интегралъ—поверхность U, взаимно-полярную поверхности $f(x_1, y_1, z_1) = 0$; полный интегралъ составляютъ плоскости, касательныя поверхности U, такъ какъ эти плоскости взаимно-полярны точкамъ поверхности $f(x_1, y_1, z_1) = 0$; общій интегралъ составляютъ всѣ развертывающіяся поверхности, описанныя около поверхности U, такъ какъ эти развертывающіяся поверхности взаимно-полярны кривымъ на поверхности $f(x_1, y_1, z_1) = 0$. Характеристиками уравненія $f(p, q, px + qy - z) = 0$, очевидно, служатъ всѣ прямыя, касательныя къ поверхности U; развертывающаяся характеристическая поверхность обращается въ плоскость, касательную къ U; и то и другое станетъ вполнѣ очевиднымъ, если вспомнимъ, что характеристическое многообразіе должно быть взаимно-полярно точкѣ поверхности $f(x_1, y_1, z_1) = 0$ вмѣстѣ съ пучкомъ плоскостей, ребро котораго касается поверхности $f(x_1, y_1, z_1) = 0$. Предположимъ въ частности, что поверхность $f(x_1, y_1, z_1) = 0$ совпадаетъ съ параболоидомъ, относительно котораго установлено взаимно-полярное соотвѣтствіе, т. е. другими словами возьмемъ уравненіе

$$f(x_1, y_1, z_1) = 2z_1 - x_1^2 - y_1^2 = 0.$$

Тогда поверхность U будетъ тотъ же параболоидъ, и слѣдовательно уравненіе съ частными производными

$$2(px + qy - z) - p^2 - q^2 = 0$$

допускаетъ особымъ интеграломъ параболоидъ

$$2z = x^2 + y^2.$$

Характеристики образуютъ комплексъ прямыхъ, касательныхъ къ этому параболоиду; полный интегралъ составляютъ касательныя плоскости параболоида; общій интегралъ составляютъ развертывающіяся поверхности, описанныя около параболоида.

Допустимъ теперь, что поверхность $f(x_1, y_1, z_1) = 0$ есть развертывающаяся; тогда ей взаимно-полярно соотвѣтствуетъ уже не поверхность, а нѣкоторая кривая L, и слѣдовательно, уравненіе съ частными производными $f(p, q, px+qy-z) = 0$ допускаетъ особое интегральное многообразіе, носителемъ котораго служитъ линія L. Полный интегралъ составляютъ всѣ касательныя плоскости кривой L, общій — всѣ развертывающіяся поверхности, описанныя около L; характеристики образуютъ комплексъ прямыхъ, пересѣкающихъ L. Всѣ эти результаты получаются такъ же, какъ и въ предшествующемъ случаѣ. Пусть, въ частности имѣемъ уравненіе

$$f(x_1, y_1, z_1) = x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 = 0;$$

оно представляетъ круглый конусъ съ вершиной въ началѣ координатъ и осью, совпадающей съ осью z_1. Полярно-соотвѣтственная относительно параболоида

$$2\zeta = \xi^2 + \eta^2$$

кривая L есть очевидно кругъ, лежащій въ плоскости xy и имѣющій центръ въ началѣ координатъ; не трудно убѣдиться, что радіусъ этого круга $= 1$, и слѣдовательно, его уравненія

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = 1:$$

мы могли бы получить эти уравненія иначе, производя преобразованіе Лежандра надъ многообразіемъ, носителемъ котораго служитъ конусъ

$$x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 = 0.$$

Преобразованное уравненіе

$$p^2 + q^2 - (px + qy - z)^2 = 0,$$

согласно предыдущему, допускаетъ особое интегральное многообразіе, носителемъ котораго служитъ кругъ

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Въ этомъ не трудно убѣдиться непосредственно: для упомянутаго многообразія мы должны имѣть

$$dz - pdx - qdy = 0$$

въ силу $z = 0$ и $x^2 + y^2 = 1$; послѣднее равенство дастъ

$$xdx + ydy = 0,$$

и получаемъ единственное соотношеніе между p и q

$$py - qx = 0;$$

полагая $x = cos\varphi$, изъ соотношенія $x^2 + y^2 = 1$ получаемъ $y = sin\varphi$. и окончательно уравненія многообразія представляемъ въ видѣ

$$\begin{aligned} x &= cos\varphi \\ y &= sin\varphi \\ z &= 0 \\ p &= u\, cos\varphi \\ q &= u\, sin\varphi, \end{aligned}$$

гдѣ u и φ — произвольные параметры; вставляя полученныя выраженія x, y, z, p, q въ уравненіе

$$p^2 + q^2 - (px + qy - z)^2 = 0,$$

видимъ, что оно удовлетворяется. Если возьмемъ отъ лѣвой части уравненія частныя производныя по p и q, а также произведемъ надъ не операціи $\frac{d}{dx}$ и $\frac{d}{dy}$, то увидимъ, что уравненія, полученныя отъ приравниванія нулю этихъ результатовъ

$$p - x(px + qy - z) = 0, \quad q - y(px + qy - z) = 0$$
$$0 = 0, \quad 0 = 0$$

тоже удовлетворяются для нашего многообразія (послѣднія два обращаются въ тождества). Полный интегралъ уравненія

$$p^2 + q^2 - (px + qy - z)^2 = 0$$

составляютъ плоскости, касающіяся круга

$$z=0,\quad x^2+y^2=1;$$

общій — развертывающіяся поверхности, описанныя около этого круга.

Характеристики составляютъ комплексъ прямыхъ, пересѣкающихъ этотъ же кругъ. Къ послѣднему результату придемъ непосредственно, интегрируя дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій

$$\frac{dx}{p-x(px+qy-z)}=\frac{dy}{q-y(px+qy-z)}=\frac{dz}{-z(px+qy-z)}=\frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}.$$

Допустимъ наконецъ, что поверхность $f(x_1, y_1, z_1)=0$ есть плоскость; тогда ей соотвѣтствуетъ точка, и уравненіе $f(p,\, q;\, px+qy-z)=0$ допускаетъ особое интегральное многообразіе, имѣющее носителемъ точку. Такъ, если возьмемъ плоскость $z_1=0$, то преобразованное уравненіе будетъ

$$px+qy-z=0.$$

Носителемъ особаго интегральнаго многообразія служитъ начало координатъ — полюсъ плоскости x_1y_1; въ справедливости этого не трудно убѣдиться, такъ какъ при $x=0,\ y=0,\ z=0$ и произвольныхъ p и q удовлетворяется какъ само уравненіе $f=0$, такъ и уравненія $\frac{\partial f}{\partial p}=0,\ \frac{\partial f}{\partial q}=0,\ \frac{df}{dx}=0,\ \frac{df}{dy}=0$ (послѣднія два обращаются въ тождества). Полный интегралъ уравненія составляютъ плоскости, проходящія черезъ начало координатъ, общій интегралъ — конусы, имѣющіе вершину въ началѣ. Характеристическія многообразія состоятъ изъ прямыхъ, проходящихъ черезъ начало координатъ, и пучковъ плоскостей, имѣющихъ ребрами эти прямыя; семейство характеристическихъ многообразій, очевидно, зависитъ отъ трехъ параметровъ, но семейство характеристикъ — связка прямыхъ — есть лишь конгруэнція, чего и слѣдовало ожидать, такъ какъ уравненіе $px+qy-z=0$ — линейное.

Примѣръ 2. $\Omega=(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2-R^2=0$. Для преобразованія прикосновенія, устанавливаемаго соотношеніемъ $\Omega=0$, получимъ изъ общихъ формулъ:

$$z_1=z+\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}};\quad x_1=x-\frac{Rp}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

$$y_1=y-\frac{Rq}{\sqrt{1+p^2+q^2}};\quad p_1=p;\quad q_1=q.$$

Въ силу соотношенія $\Omega=0$, точкѣ $(x,\, y,\, z)$ соотвѣтствуетъ шаръ радіуса R съ центромъ въ этой точкѣ и обратно точкѣ $(x_1,\, y_1,\, z_1)$ — шаръ радіуса R и съ центромъ $(x_1,\, y_1,\, z_1)$. Всякая поверхность преобразуется, слѣдовательно, въ параллельную поверхность, точнѣе говоря — въ пару параллельныхъ ей поверхностей, чему согласуетъ возможность двухъ знаковъ передъ корнемъ $\sqrt{1+p^2+q^2}$ въ формулахъ преобразованія. Кривой соотвѣтствуетъ общая поверхность каналовъ — огибающая шаровъ радіуса R, имѣющихъ центры на данной кривой. Обратно, если имѣемъ поверхность каналовъ, то одна изъ пары параллельныхъ поверхностей обращается въ линію.

Если возьмемъ произвольное уравненіе $f(x_1,\, y_1,\, z_1)=0$, замѣнимъ $x_1,\, y_1,\, z_1$ ихъ значеніями изъ формулъ преобразованій и освободимъ уравненіе отъ радикала, то полученное уравненіе будетъ допускать особый интегралъ, состоящій изъ двухъ полостей, параллельныхъ поверхности $f(x_1,\, y_1,\, z_1)=0$: полный интегралъ составятъ шары радіуса R, общій — поверхности каналовъ, огибающія семействъ этихъ шаровъ. Характеристики, какъ линіи прикосновенія шаровъ къ поверхностямъ каналовъ, будутъ, очевидно, круги радіуса R. И шары, составляющія полный интегралъ, и поверхности каналовъ, составляющія общій интегралъ, и круги — характеристики, касаются двухъ полостей особаго интеграла. Такъ, если возьмемъ уравненіе $z_1=0$, то по преобразованіи и освобожденіи отъ радикала, получимъ

$$z^2-\frac{R^2}{1+p^2+q^2}=0.$$

Особый интегралъ состоитъ изъ пары параллельныхъ плоскостей $z=\pm R$; полный интегралъ составляютъ шары, имѣющіе центры на плоскости xy, общій интегралъ составляютъ поверхности каналовъ, осевыя кривыя которыхъ лежатъ въ плоскости xy; характеристики образуютъ комплексъ круговъ радіуса R, центры которыхъ лежатъ на плоскости xy, а плоскости перпендикулярны этой плоскости.

Если поверхность, представляемая уравненіемъ, есть поверхность каналовъ — огибающая семейства шаровъ радіуса R, то носитель особаго интегральнаго многообразія преобразованнаго многообразія распадается на поверхность и линію.

Если поверхность $f(x_1,\, y_1,\, z_1)=0$ есть шаръ радіуса R, то носитель особаго интегральнаго многообразія преобразованнаго уравненія распадается на точку — центръ шара и концентрическій шаръ радіуса $2R$. Такъ, уравненіе

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=R^2$$

преобразуется въ уравненіе

$$x^2+y^2+z^2+\frac{2R(z-px-qy)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0$$

или, по освобожденіи отъ радикала,

$$(x^2+y^2+z^2)^2-\frac{4R^2(z-px-qy)^2}{1+p^2+q^2}=0.$$

Носителемъ особаго интегральнаго многообразія служитъ начало координатъ и шаръ

$$x^2+y^2+z^2=4R^2;$$

не трудно провѣрить, что уравненіе удовлетворяется какъ при $x=0$, $y=0$, $z=0$ и произвольныхъ p и q, такъ и при

$$x^2+y^2+z^2=4R^2;\quad x+zp=0;\quad y+zq=0.$$

Полный интегралъ составляютъ шары радіуса R, проходящіе черезъ начало координатъ и слѣдовательно касающіеся шара $x^2+y^2+z^2=4R^2$; общій — поверхности каналовъ — огибающія семействъ съ однимъ параметровъ, составленныхъ изъ упомянутыхъ шаровъ: для всѣхъ этихъ поверхностей каналовъ начало координатъ — особая точка. Характеристики образуютъ комплексъ круговъ радіуса R, проходящихъ черезъ начало координатъ.

Примѣръ 3. $\Omega=(x-x_1)x_1+(y-y_1)y_1+(z-z_1)z_1=0$. Изъ общихъ формулъ имѣемъ:

$$z_1=\frac{z-xp-yq}{p^2+q^2+1};\quad x_1=-p.\frac{z-xp-yq}{p^2+q^2+1};\quad y_1=-q.\frac{z-xp-yq}{p^2+q^2+1};$$
$$p_1=\frac{x+2pz_1}{2z_1-z};\quad q_1=\frac{y+2qz_1}{2z_1-z}.$$

Въ силу соотношенія $\Omega=0$, точкѣ (x, y, z) соотвѣтствуетъ шаръ, проходящій черезъ начало координатъ и черезъ точку (x, y, z) и имѣющій центръ на прямой, соединяющей эти двѣ точки; точкѣ (x_1, y_1, z_1) обратно соотвѣтствуетъ плоскость, проходящая черезъ эту точку перпендикулярно къ прямой, соединяющей ее съ началомъ координатъ. Если возьмемъ произвольную поверхность и проведемъ ея касательныя плоскости, то, по предъидущему, плоскостямъ этимъ будутъ соотвѣтствовать точки (x_1, y_1, z_1) — основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ на касательныя плоскости изъ начала координатъ; слѣдовательно, поверхность преобразуется въ свой *подэръ* относительно начала координатъ.

Развертывающаяся поверхность, очевидно, преобразуется въ линію; произвольная кривая преобразуется въ поверхность, огибающую семейства шаровъ, проходящихъ черезъ начало координатъ.

Примѣръ 4. $\Omega=y_1-y=0$; $\Omega_1=z_1-z+x_1x=0$. Изъ общихъ формулъ для преобразованія прикосновенія, устанавливаемаго двумя соотношеніями $\Omega=0$, $\Omega_1=0$, получаемъ:

$$z_1=z-px,\quad x_1=p,\quad y_1=y,\quad p_1=-x,\quad q_1=q.$$

Преобразованіе это мы уже разсматривали выше (см. § 2. рав. 49 и 50, стр. 29); оно извѣстно подъ названіемъ преобразованія Ампера. Въ силу соотношеній $\Omega=0$, $\Omega_1=0$, точкѣ (x, y, z) соотвѣтствуетъ прямая, параллельная плоскости z_1x_1, и обратно точкѣ (x_1, y_1, z_1) — прямая параллельная плоскости zx. Произвольная поверхность преобразуется въ фокальную поверхность конгруэнціи прямыхъ, параллельныхъ плоскости z_1x_1 и соотвѣтствующихъ точкамъ (x, y, z) данной поверхности; если, въ частности, данная поверхность есть линейчатая, образующія которой параллельны плоскости zx, то она преобразуется, очевидно, въ линію. Произвольная линія, обратно, преобразуется въ линейчатую поверхность, образующія которой параллельны плоскости z_1x_1. Если имѣемъ произвольное уравненіе $f(x_1, y_1, z_1)=0$, то соотвѣтствующее ему уравненіе

$$f(p, y, z-px)=0$$

допускаетъ особый интегралъ — поверхность U, въ которую преобразуется поверхность $f(x_1, y_1, z_1)=0$. Уравненіе

$$f(p, y, z-px)=0,$$

очевидно, распадается на линейныя (его можно рѣшить относительно p); характеристики его, согласно общей теоріи, соотвѣтствуютъ точкамъ (x_1, y_1, z_1) поверхности $f(x_1, y_1, z_1)=0$ и слѣдовательно образуютъ конгруэнцію прямыхъ, касающихся поверхности U особаго интеграла и параллельныхъ плоскости zx. Общій интегралъ составляютъ линейчатыя поверхности съ направляющей плоскостью zx, описанныя около поверхности U.

Такъ, уравненіе

$$2z_1=y_1^2-x_1^2$$

преобразуется въ уравненіе

$$2(z-px)=y^2-p^2,$$

которое допускаетъ особымъ интеграломъ поверхность, соотвѣтствующую гиперболическому параболоиду $2z_1 = y_1^2 - x_1^2$. Для многообразія, носителемъ котораго служитъ этотъ параболоидъ, имѣемъ $p_1 = -x_1$, $q_1 = y_1$; по преобразованіи получаемъ $2(z - px) = y^2 - p^2$, $x = p$. $q = y$, или, исключая p изъ 1-го и 2-го равенствъ, имѣемъ $2z = x^2 + y^2$: такимъ образомъ, особый интегралъ есть параболоидъ вращенія $2z = x^2 + y^2$. Характеристики уравненія образуютъ конгруэнцію прямыхъ, параллельныхъ плоскости zx и касательныхъ къ параболоиду $2z = x^2 + y^2$. Общій интегралъ составляютъ линейчатыя поверхности съ направляющею плоскостью zx, описанныя около параболоида $2z = x^2 + y^2$.

Если поверхность $f(x_1, y_1, z_1) = 0$ есть линейчатая съ направляющей плоскостью zx, то уравненіе $f(p, y, z - px) = 0$ допускаетъ особое интегральное многообразіе, имѣющее носителемъ нѣкоторую линію L, соотвѣтствующую поверхности $f(x_1, y_1, z_1) = 0$; характеристики образуютъ конгруэнцію прямыхъ, пересѣкающихъ эту линію (L) и параллельныхъ плоскости zx: общій интегралъ составляютъ линейчатыя поверхности съ направляющей плоскостью zx, проходящія черезъ кривую L.

Такъ, уравненіе

$$z_1 = 0$$

преобразуется въ уравненіе

$$z - px = 0,$$

которое допускаетъ особое интегральное многообразіе, носителемъ котораго служитъ линія, соотвѣтствующая плоскоски x_1y_1; для многообразія, носителемъ котораго служитъ плоскость x_1y_1, имѣемъ $z_1 = 0$, $p_1 = 0$, $q_1 = 0$, откуда по преобразованіи $z - px = 0$, $x = 0$. $q = 0$; изъ первыхъ двухъ равенствъ имѣемъ $z = 0$, $x = 0$, и слѣдовательно, носителемъ особаго интегральнаго многообразія служитъ ось y. Характеристики уравненія $z - px = 0$ образуютъ конгруэнцію прямыхъ, пересѣкающихъ ось y и параллельныхъ плоскости zx. Общій интегралъ составляютъ всевозможные коноиды съ направляющей плоскостью zx и осью y. Уравненіе подобнаго коноида, какъ извѣстно, есть $z = x\varphi(y)$, гдѣ φ — произвольная функція; не трудно убѣдиться, что для $z = x\varphi(y)$ уравненіе $z - px = 0$ удовлетворяется.

Примѣръ 5. $\Omega = x_1 + iy_1 + z + xz_1 = 0$

$$\Omega_1 = x(x_1 - iy_1) + y - z_1 = 0.$$

Изъ общихъ формулъ для преобразованія прикосновенія, опредѣляемаго соотношеніями $\Omega = 0$, $\Omega_1 = 0$, получаемъ:

$$x_1 + iy_1 = -z - x\cdot\frac{px + qy}{q - x};\quad x_1 - iy_1 = \frac{y + p}{q - x};$$

$$z_1 = \frac{px + qy}{q - x};\quad p_1 = \frac{qx - 1}{q + x};\quad q_1 = -i.\frac{1 + qx}{q + x}.$$

Въ силу соотношеній $\Omega = 0$, $\Omega_1 = 0$ точкѣ (x, y, z) соотвѣтствуетъ прямая линія, принадлежащая къ нѣкоторому комплексу лучей. Опредѣлимъ видъ конуса, образуемаго лучами комплекса, проходящими черезъ точку $x_1 = \alpha$, $y_1 = \beta$, $z_1 = \gamma$: уравненіе этого конуса получимъ, исключая x, y, z изъ уравненій

$$\begin{gathered} x_1 + iy_1 + z + xz_1 = 0 \\ x.(x_1 - iy_1) + y - z_1 = 0 \\ \alpha + i\beta + z + x\gamma = 0 \\ x(\alpha - i\beta) + y - \gamma = 0, \end{gathered}$$

изъ которыхъ первыя два — уравненія луча комплекса, а послѣднія два выражаютъ условіе, что лучъ проходитъ черезъ точку (α, β, γ). Вычитая изъ 1-го уравненія 3-е и изъ 2-го 4-е, получаемъ

$$\begin{gathered} (x_1 - \alpha) + i(y_1 - \beta) + x(z_1 - \gamma) = 0 \\ x.[(x_1 - \alpha) - i(y_1 - \beta)] - (z_1 - \gamma) = 0; \end{gathered}$$

исключая отсюда x, окончательно получаемъ уравненіе конуса комплекса

$$(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 + (z_1 - \gamma)^2 = 0.$$

Такимъ образомъ, конусы комплекса суть конусы абсолютныхъ направленій, и слѣдовательно, точкамъ (x, y, z) соотвѣтствуетъ комплексъ лучей, пересѣкающихъ абсолютный (мнимый безконечно-удаленный) кругъ пространства. Обратно, точкѣ (x_1, y_1, z_1) соотвѣтствуетъ прямая линія, принадлежащая къ нѣкоторому линейному комплексу K, т. е. комплексу, обладающему слѣдующими свойствами: всѣ лучи комплекса, проходящіе черезъ данную точку, лежатъ въ одной плоскости; всѣ лучи, лежащіе въ данной плоскости, проходятъ черезъ одну точку. Въ справедливости перваго заключенія убѣдимся тѣмъ же методомъ, какой употребляли выше; доказательство второго заключенія тоже не представляетъ никакихъ затрудненій. Произвольная поверхность $\varphi(x, y, z) = 0$ преобразуется въ фокальную поверхность нѣкоторой конгруэнціи лучей, принадлежащей къ комплексу лучей абсолютнаго направленія; въ частности, если поверхность $\varphi = 0$ есть линейчатая поверхность комплекса K, то она преобразуется въ линію. Произвольная линія пространства (x, y, z) преобразуется въ линейчатую поверхность комплекса абсолютныхъ направленій, т. е. въ линейчатую поверхность, образующія которой пересѣкаютъ абсолютный кругъ, другими словами въ линейчатую поверхность, проходящую черезъ абсолютный кругъ пространства (x_1, y_1, z_1). Предположимъ въ частности, что преобразуемая линія есть прямая

$$x = \alpha + mz$$
$$y = \beta + nz;$$

точкамъ ея соотвѣтствуетъ система лучей

$$x_1 + iy_1 + \alpha z_1 + (1 + mz_1).z = 0$$
$$\alpha(x_1 - iy_1) + \beta - z_1 + [m(x_1 - iy_1) + n].z = 0,$$

гдѣ z — произвольный параметръ; исключая его, получаемъ

$$m(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (n - \alpha)x_1 + i(n + \alpha)y_1 + (1 + \alpha n - \beta m)z_1 - \beta = 0.$$

Такимъ образомъ, прямыя пространства (x, y, z) преобразуются въ сферы пространства (x_1, y_1, z_1); въ частности прямыя комплекса K преобразуются въ точки, которыя можно разсматривать какъ сферы нулевого радіуса; пересѣкающіяся прямыя, очевидно, преобразуются въ соприкасающіяся сферы. Преобразованіе прикосновенія, которое мы разсматриваемъ, впервые найдено Lie *): оно обладаетъ многими интересными свойствами; между прочимъ, въ силу этого преобразованія, асимптотическимъ линіямъ произвольной поверхности соотвѣтствуютъ линіи кривизны преобразованной поверхности. Для доказательства замѣтимъ, что касательная прямая асимптотической линіи данной поверхности (φ) служитъ вмѣстѣ съ тѣмъ образующей развертывающейся поверхности, описанной около данной поверхности (φ) по асимптотической линіи; такимъ образомъ, можемъ сказать, что упомянутая касательная не только проходитъ черезъ двѣ безконечно-близкія точки поверхности (φ), но и лежитъ въ двухъ безконечно-близкихъ касательныхъ плоскостяхъ, или иначе въ составъ многообразія элементовъ, носителемъ котораго служитъ касательная прямая, входятъ два безконечно-близкихъ элемента поверхности (φ) по направленію асимптотической линіи. Производя преобразованіе прикосновенія, видимъ, что асимптотической линіи и описанной по ней около данной поверхности развертывающейся поверхности соотвѣтствуютъ нѣкоторая линія (C) преобразованной поверхности (φ_1) и описанная по этой линіи около (φ_1) развертывающаяся

*) Math. Ann., B. V.

поверхность; касательная прямая асимптотической линіи преобразуетс въ сферу, прикасающуюся къ (φ_1) въ точкѣ линіи (C); притомъ, въ с ставъ многообразія элементовъ, носителемъ котораго служитъ эта сфер должны входить *два* безконечно-близкихъ элемента поверхности $(\varphi_1$ взятыхъ по направленію (C), т. е. другими словами наша сфера долж ***оскулировать*** поверхность (φ_1) по направленію линіи (C). Извѣстно, ч сфера можетъ оскулировать поверхность лишь по направленію лин кривизны; такимъ образомъ (C) есть линія кривизны поверхности $(\varphi_1$ и слѣдовательно, преобразованіе *Lie* асимптотическія линіи преобр зуетъ въ линіи кривизны.

Приведемъ еще нѣсколько примѣровъ, спеціально иллюстриру щихъ изложенную нами теорію уравненій съ частными производны 1-го порядка, особенно теорію особыхъ элементовъ.

Примѣръ 6. $F = qy - 2z = 0$.

Возьмемъ $z_1 = F = qy - 2z$. Опредѣляемъ x_1 и y_1 изъ услові $[z_1, x_1] = 0$, $[z_1, y_1] = 0$, $[x_1, y_1] = 0$. Легко видѣть, что этимъ усл віямъ удовлетворяютъ

$$x_1 = x, \ y_1 = \frac{q}{y};$$

p_1 и q_1 опредѣляемъ изъ равенствъ

$$\frac{\partial z_1}{\partial q} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial q} + q_1 \frac{\partial y_1}{\partial q}$$
$$\frac{dz_1}{dx} = p_1 \frac{dx_1}{dx} + q_1 \frac{dy_1}{dx},$$

откуда

$$p_1 = -2p, \ \ q_1 = y^2.$$

Равенства

$$z_1 = qy - 2z; \ \ x_1 = x; \ \ y_1 = \frac{q}{y}; \ \ p_1 = -2p; \ q_1 = y^2$$

устанавливаютъ преобразованіе прикосновенія, преобразующее данно уравненіе $F = 0$ въ уравненіе $z_1 = 0$. Исключая p, q, p_1, q_1 изъ фор мулъ преобразованія, получаемъ два соотношенія

$$x_1 = x; \ \ z_1 = y_1 y^2 - 2z,$$

заключающія только координаты точекъ. Точкамъ (x_1, y_1) плоскост $z_1 = 0$ соотвѣтствуютъ параболы

$$x = x_1, \ \ y^2 = \frac{2}{y_1} z$$

— характеристики линейнаго уравненія $F=0$; всѣ эти параболы лежатъ въ плоскостяхъ параллельныхъ плоскости yz; діаметры ихъ параллельны оси z, а вершины лежатъ на оси x. Поверхности общаго интеграла образуются семействами упомянутыхъ параболъ и потому, очевидно, имѣютъ прямолинейной образующей ось x, при чемъ касательною плоскостью вдоль всей оси x служитъ плоскость xy. Многообразіе двухъ измѣреній

$$z_1=0,\ \ p_1=0,\ \ q_1=0,$$

носителемъ котораго служитъ плоскость x_1y_1, соотвѣтствуетъ многообразіе, опредѣляемое уравненіями $0=-2p$. $0=y^2$, $0=qy-2z$; при чемъ еще $y_1=\frac{q}{y}$ должно оставаться неопредѣленнымъ; изъ первыхъ трехъ уравненій имѣемъ

$$p=0,\ \ y=0.\ \ z=0;$$

для того, чтобы y_1 оставалось неопредѣленнымъ, необходимо еще $q=0$. Итакъ, получаемъ особое интегральное многообразіе одного измѣренія

$$y=0,\ \ z=0,\ \ p=0,\ \ q=0,$$

элементы котораго состоятъ изъ точекъ оси x вмѣстѣ съ плоскостью xy (послѣднее слѣдуетъ изъ равенствъ $p=0$, $q=0$). Особое интегральное многообразіе, о которомъ идетъ рѣчь, очевидно, входитъ въ составъ каждаго изъ интегральныхъ многообразій, имѣющихъ носителемъ какую-либо поверхность общаго интеграла. Возникаетъ однако вопросъ о семействѣ поверхностей, которыя тоже могутъ быть образованы изъ характеристикъ даннаго уравненія, — это именно о плоскостяхъ, параллельныхъ плоскости zy: очевидно, многообразія, имѣющія носителями эти плоскости, не содержатъ особыхъ элементовъ уравненія: между тѣмъ, ихъ слѣдуетъ считать интегральными многообразіями, такъ какъ они образованы характеристиками. Уравненія подобнаго интегральнаго многообразія въ однородныхъ координатахъ, предложенныхъ Lie, очевидно, будутъ

$$x=const.,\ \ p_0=0.\ \ p_2=0.$$

Если данное уравненіе напишемъ въ однородныхъ координатахъ

$$p_2y-2p_0z=0,$$

то увидимъ, что оно удовлетворяется при $p_0=0$, $p_2=0$. Отсюда мы уже можемъ заключить, что плоскости, параллельныя плоскости yz, дадутъ намъ систему исключительныхъ интегральныхъ многообразій, и можемъ предвидѣть, что элементы $(x, 0, 0, 0, p_1, 0)$, состоящіе изъ точекъ оси x и плоскостей, параллельныхъ плоскости yz, будутъ критическими элементами уравненія. Однако изслѣдованіе представляетъ затрудненіе, такъ какъ при нашей системѣ координатъ x, y, z, p, q мы будемъ имѣть дѣло съ безконечными значеніями p. Кромѣ того, возникаетъ еще вопросъ о безконечно-удаленныхъ элементахъ пространства: такъ какъ всѣ характеристики уравненія, какъ параболы, лежащія въ плоскостяхъ параллельныхъ плоскости yz и имѣющія діаметры параллельные оси z, должны быть разсматриваемы, какъ коническія сѣченія касающіяся одной безконечно-удаленной прямой въ одной точкѣ, то возникаетъ предположеніе, не имѣетъ ли уравненіе еще особые элементы въ безконечности, пропущенные нами вслѣдствіе употребленія Декартовыхъ координатъ. Чтобы разрѣшить всѣ эти сомнѣнія, подвергнемъ наше уравненіе проэктивному преобразованію

$$z=\frac{z'+1}{z'};\ \ x=\frac{x'}{z'};\ \ y=\frac{y'}{z'},$$

которое безконечно-удаленную плоскость преобразуетъ въ плоскость $z'=0$, а плоскости, параллельныя оси z, — въ плоскости, проходящія черезъ начало координатъ. Послѣ преобразованія и освобожденія отъ знаменателя $z'(p'x'+q'y'-z')$ получимъ уравненіе

$$2(z'+1)x'p'+(2z'+1)y'q'-2z'(z'+1)=0,$$

которое изслѣдуемъ, не прибѣгая уже къ преобразованію прикосновенія, а непосредственно.

Примѣръ 7. $F=2(z+1)xp+(2z+1)yq-2z(z+1)=0$.

$$\frac{\partial F}{\partial p}=2(z+1)x;\ \ \frac{\partial F}{\partial q}=(2z+1)y;$$

$$\frac{dF}{dx}=2p(px+qy-z);\ \ \frac{dF}{dy}=2q(px+qy-z)-q.$$

Уравненіямъ $F=0$, $\frac{\partial F}{\partial p}=0$, $\frac{\partial F}{\partial q}=0$, $\frac{dF}{dx}=0$, $\frac{dF}{dy}=0$ можно удовлетворить, или полагая $x=0$, $y=0$, $z=0$, $q=0$, или полагая $z=-1$, $y=0$, $p=0$, $q=0$, или, наконецъ, полагая $z=-1$, $y=0$, $q=0$, $px+1=0$, откуда $p=-\frac{1}{x}$.

Дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій, по интеграціи, даютъ

$$x=az,\quad y^2=b^2z(z+1),\quad p=\frac{2(z+1)}{2a(z+1)+bc(2z+1)},$$
$$q=\frac{2c\sqrt{z(z+1)}}{2a(z+1)+bc(2z+1)},$$

гдѣ a, b, c — произвольныя постоянныя. Характеристиками служатъ кривыя 2-го порядка, лежащія въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ ось y; въ началѣ координатъ, которое служитъ вершиной всѣхъ этихъ кривыхъ, онѣ касаются оси y; другія вершины лежатъ на прямой

$$y=0,\quad z=-1,$$

параллельной оси x.

При $z=0$ изъ уравненій характеристическихъ многообразій получаемъ $x=0$, $y=0$, $p=\dfrac{2}{2a+bc}$, $q=0$; слѣдовательно, каждое характеристическое многообразіе имѣетъ по одному общему элементу съ многообразіемъ одного измѣренія $x=0$, $y=0$, $z=0$, $q=0$, состоящимъ изъ начала координатъ вмѣстѣ съ пучкомъ плоскостей, которыя проходятъ черезъ ось y (въ силу $q=0$). При $z=-1$ изъ тѣхъ же уравненій получаемъ $x=-a$, $y=0$, $p=0$, $q=0$; слѣдовательно, многообразіе одного измѣренія $z=-1$, $y=0$, $p=0$, $q=0$, элементы котораго состоятъ изъ точекъ прямой $z=-1$, $y=0$ вмѣстѣ съ плоскостью, проходящей черезъ эту прямую параллельно плоскости xy (въ силу $p=0$, $q=0$), имѣетъ тоже по одному общему элементу съ каждымъ изъ характеристическихъ многообразій. Такимъ образомъ, особое интегральное многообразіе уравненія $F=0$ состоитъ изъ двухъ многообразій одного измѣренія

$$x=0,\ y=0,\ z=0,\ q=0\quad\text{и}\quad z=-1,\ y=0,\ p=0,\ q=0;$$

многообразія эти мы получили выше, рѣшая уравненія

$$F=0,\quad \frac{\partial F}{\partial p}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial q}=0,\quad \frac{dF}{dx}=0,\quad \frac{dF}{dy}=0.$$

Послѣднее рѣшеніе тѣхъ же уравненій $z=-1$, $y=0$, $q=0$, $p=-\dfrac{1}{x}$, очевидно, не даетъ элементовъ, принадлежащихъ нашимъ характеристическимъ многообразіямъ.

Замѣтимъ далѣе, что дифференціальнымъ уравненіямъ характеристическихъ многообразій

$$\frac{dx}{2(z+1)x}=\frac{dy}{(2z+1)y}=\frac{dz}{2z(z+1)}=\frac{-dp}{2p(px+qy-z)}=\frac{-dq}{2q(px+qy-z)-q}$$

и уравненію $F=0$ можно еще удовлетворить, полагая

$$x=az,\quad y^2=b^2z(z+1),\quad q=0,\quad p=\frac{1}{a}.$$

Уравненія эти опредѣляютъ многообразіе одного измѣренія, элементы котораго состоятъ изъ точекъ кривой 2-го порядка

$$x=az,\quad y^2=b^2z(z+1),$$

лежащей въ плоскости

$$x=az,$$

вмѣстѣ съ этою плоскостью (координаты плоскости $\xi=a\zeta$, или $\zeta=\dfrac{1}{a}\xi$ очевидно, $p=\dfrac{1}{a}$, $q=0$).

Полученныя нами характеристическія многообразія, очевидно, не содержатъ элементовъ многообразія

$$z=-1,\quad y=0,\quad p=0,\quad q=0,$$

которое входитъ въ составъ особаго интегральнаго многообразія уравненія $F=0$, между тѣмъ какъ всѣ остальныя характеристическія многообразія, какъ мы видѣли выше, заключаютъ по два особыхъ элемента, изъ числа которыхъ одинъ входитъ въ составъ многообразія $x=0$, $y=0$, $z=0$, $q=0$, а другой — въ составъ многообразія $z=-1$, $y=0$, $p=0$, $q=0$. Для вновь полученныхъ характеристическихъ многообразій получаемъ лишь особые элементы первой категоріи; на этомъ основаніи характеристическія многообразія

$$x=az,\quad y^2=b^2z(z+1),\quad q=0,\quad p=\frac{1}{a}$$

должны быть отнесены къ числу *исключительныхъ* (ср. § 3, стр. 52); семейство ихъ зависитъ отъ двухъ параметровъ a и b. Полагая a постояннымъ, получаемъ семейство съ однимъ параметромъ b, состоящее изъ пучка кривыхъ 2-го порядка, находящихся въ двойномъ соприкосновеніи, въ плоскости

$$x=az,$$

при чемъ плоскости всѣхъ элементовъ совпадаютъ съ плоскостью

$$x = az.$$

Упомянутое семейство образуетъ интегральное многообразіе двухъ измѣреній, имѣющее носителемъ плоскость $x = az$ и принадлежащее къ числу *исключительныхъ* (ср. § 3, стр. 50); семейство исключительныхъ интегральныхъ многообразій зависитъ отъ одного параметра a. Не трудно непосредственно убѣдиться, что

$$z = \frac{1}{a} x$$

служитъ интеграломъ даннаго уравненія.

Обращаемся теперь къ элементамъ, удовлетворяющимъ условіямъ $z = -1$, $y = 0$, $q = 0$, $p = -\frac{1}{x}$, которые мы получили въ началѣ, рѣшая уравненія $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial q} = 0$, $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{dF}{dy} = 0$. Не трудно убѣдиться, что каждый такой элементъ $(x_0, 0, -1, -\frac{1}{x_0}, 0)$ принадлежитъ цѣлому семейству съ однимъ параметромъ нашихъ исключительныхъ характеристическихъ многообразій. Дѣйствительно, при $z = -1$ изъ уравненій этихъ многообразій имѣемъ

$$x = -a, \quad y = 0, \quad q = 0, \quad p = \frac{1}{a};$$

такимъ образомъ, въ составъ всѣхъ многообразій, для которыхъ $a = -x_0$, а b вполнѣ произвольно, входитъ элементъ $(x_0, 0, -1, -\frac{1}{x_0}, 0)$. Согласно общей теоріи, элементы $(x_0, 0, -1, -\frac{1}{x_0}, 0)$ будутъ критическими элементами даннаго уравненія (ср. § 3, стр. 52): каждый такой элементъ состоитъ изъ точки на прямой

$$y = 0, \quad z = -1$$

и плоскости, соединяющей эту точку съ осью y; совокупность всѣхъ критическихъ элементовъ, очевидно, не составляетъ многообразія, удовлетворяющаго дифференціальному соотношенію $dz - pdx - qdy = 0$, какъ это имѣетъ мѣсто для особаго интегральнаго многообразія.

Покончивъ съ уравненіемъ $F = 0$, мы можемъ возвратиться къ уравненію предшествующаго примѣра и, совершая обратное проэктивное

преобразованіе, убѣждаемся непосредственно, что всѣ поставленны тамъ вопросы рѣшаются въ утвердительномъ смыслѣ.

Примѣръ 8. $F = xp + yq - 2z = 0$.

Преобразованіе прикосновенія

$$z_1 = xp + yq - 2z, \quad x_1 = \frac{x}{y}, \quad y_1 = \frac{xp + yq}{y^2}, \quad p_1 = -2py, \quad q_1 = y^2$$

преобразуетъ данное уравненіе въ уравненіе $z_1 = 0$; точки плоскост $x_1 y_1$ преобразуются, очевидно, въ параболы

$$x = x_1 y, \quad 2z = y_1 y^2,$$

лежащія въ плоскостяхъ, которыя проходятъ черезъ ось z; общею вершиной всѣхъ этихъ параболъ служитъ начало координатъ, а осью — ось z. Упомянутыя параболы служатъ характеристиками даннаго уравненія $F = 0$. Интегральныя поверхности получаются группировкой этихъ параболъ въ семейства, зависящія отъ одного параметра.

Многообразію $z_1 = 0$, $p_1 = 0$, $q_1 = 0$, носителемъ котораго служитъ плоскость $x_1 y_1$, соотвѣтствуетъ отдѣльный элементъ $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $p = 0$, $q = 0$ ($q_1 = 0$ даетъ $y = 0$; для того, чтобы x_1 оставалось произвольнымъ, необходимо при $y = 0$ и $x = 0$; $z_1 = 0$ при $x = 0$, $y = 0$ даетъ $z = 0$; $y_1 = \frac{x}{y} \cdot \frac{p}{y} + \frac{q}{y}$ должно оставаться неопредѣленнымъ и слѣдовательно изъ $y = 0$ слѣдуетъ еще $p = 0$, $q = 0$); слѣдовательно уравненіе $F = 0$ допускаетъ отдѣльный особый элементъ $(0, 0, 0, 0, 0)$. Интегральныя поверхности, образованныя семействами параболъ — характеристикъ уравненія, очевидно, всѣ проходятъ черезъ начало координатъ и касаются въ немъ плоскости xy, т. е. содержатъ особый элементъ $(0, 0, 0, 0, 0)$.

Исключеніе представляетъ одно семейство поверхностей, образованныхъ тѣми же параболами, это именно пучокъ плоскостей, проходящихъ черезъ ось z. Такимъ образомъ, мы приходимъ къ семейству исключительныхъ интегральныхъ многообразій даннаго уравненія. Легко заранѣе предвидѣть, что элементы $(0, 0, 0, \infty, \infty)$, т. е. элементы, состоящіе изъ начала координатъ и плоскостей, проходящихъ черезъ ось z, окажутся критическими элементами уравненія: для окончательнаго рѣшенія вопроса, а также для изслѣдованія безконечно-удаленныхъ элементовъ пространства намъ слѣдуетъ подвергнуть данное уравненіе проэктивному преобразованію, которое бы безконечно-удаленную плоскость преобразовало въ какую-нибудь плоскость на конечномъ разстояніи.

а ось z въ какую-либо прямую, непараллельную новой оси z. Мы не станемъ однако выполнять этого преобразованія, такъ какъ на предыдущемъ примѣрѣ достаточно былъ выясненъ методъ, о которомъ идетъ рѣчь.

Примѣръ 9. $F=(p^2+q^2)y-2zq=0$.

Легко убѣдиться, что уравненіе $F=0$ удовлетворяется для

$$z=a[(x-\alpha)^2+y^2],$$

гдѣ a и α — произвольныя постоянныя; такимъ образомъ, мы имѣемъ семейство интегральныхъ поверхностей, зависящее отъ двухъ параметровъ, т. е. по терминологіи Лагранжа—полный интегралъ. Поверхности семейства — параболоиды вращенія съ осями параллельными оси z и вершинами на оси x. Поверхности общаго интеграла получимъ обычнымъ пріемомъ, какъ облекающія семействъ съ однимъ параметромъ, составленныхъ изъ выше упомянутыхъ параболоидовъ. Очевидно, всѣ эти поверхности будутъ содержать ось x, и касательною плоскостью вдоль всей оси будетъ служить плоскость xy; другими словами, многообразіе одного измѣренія $z=0$, $y=0$, $p=0$, $q=0$ будетъ входить въ составъ всѣхъ интегральныхъ многообразій, имѣющихъ носителями поверхности общаго интеграла. Что касается поверхностей полнаго интеграла, то каждая изъ нихъ касается оси x въ одной точкѣ, и многообразіе элементовъ, носителемъ котораго она служитъ, имѣетъ съ многообразіемъ $y=0$, $z=0$, $p=0$, $q=0$ одинъ общій элементъ. Отсюда заключаемъ, во-первыхъ, что многообразіе одного измѣренія $y=0$, $z=0$, $p=0$, $q=0$ есть особое интегральное многообразіе уравненія, и, во-вторыхъ, что семейство параболоидовъ

$$z=a[(x-\alpha)^2+y^2]$$

образуетъ *полный* интегралъ уравненія $F=0$ и въ томъ спеціальномъ смыслѣ, который мы придали этому термину выше (см. § 3, стр. 44). Уравненіе $F=0$ удовлетворяется, какъ легко видѣть, при

$$z=c,\quad p=0,\quad q=0,$$

гдѣ c — произвольное постоянное; мы имѣемъ, такимъ образомъ, семейство интегральныхъ поверхностей, зависящее отъ одного параметра, именно систему плоскостей параллельныхъ плоскости xy; въ составъ многообразій, имѣющихъ носителями эти плоскости, очевидно, не входитъ особыхъ элементовъ уравненія; слѣдовательно, мы имѣемъ въ данномъ случаѣ семейство *исключительныхъ* интегральныхъ многообразій (ср. § 3, стр. 50).

Составляя для даннаго уравненія выраженія $\frac{\partial F}{\partial p}$, $\frac{\partial F}{\partial q}$, $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, получаемъ $2py$, $2(qy-z)$, $-2pq$, p^2-q^2. Очевидно, всѣ эти выраженія обращаются въ нуль для $y=0$, $z=0$, $p=0$, $q=0$, какъ этого и слѣдовало ожидать; но если обратно разсмотримъ равенства $F=0$, $\frac{\partial F}{\partial p}=0$, $\frac{\partial F}{\partial q}=0$, $\frac{dF}{dx}=0$, $\frac{dF}{dy}=0$, то получимъ лишь $z=0$, $p=0$, $q=0$, т. е. многообразіе двухъ измѣреній, носителемъ котораго служитъ плоскость xy; изъ предшествующаго однако ясно, что особымъ интегральнымъ многообразіемъ уравненія служитъ лишь многообразіе одного измѣренія $y=0$, $z=0$, $p=0$, $q=0$, а всѣ остальные элементы плоскости xy, хотя и удовлетворяютъ уравненіямъ $F=0$, $\frac{\partial F}{\partial p}=0$, $\frac{\partial F}{\partial q}=0$, $\frac{dF}{dx}=0$, $\frac{dF}{dy}=0$, не принадлежатъ къ числу особыхъ.

Дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій даннаго уравненія имѣютъ слѣдующій видъ:

$$\frac{dx}{2py}=\frac{dy}{2(qy-z)}=\frac{dz}{2zq}=\frac{dp}{2pq}=\frac{dq}{q^2-p^2}.$$

Интегрируя ихъ и принимая во вниманіе еще данное уравненіе $F=0$, получаемъ уравненія характеристическихъ многообразій:

$$p=mz,\quad q^2=cz-m^2z^2,\quad c^2y^2=4cz-4m^2z^2,\quad cx-2mz=n.$$

гдѣ m, n, c — произвольныя постоянныя. Характеристики, очевидно,— кривыя 2-го порядка, находящіяся въ плоскостяхъ параллельныхъ оси y. При $z=0$ изъ полученныхъ уравненій имѣемъ $p=0$, $q=0$, $y=0$, $x=\frac{n}{c}$; слѣдовательно, въ составъ каждаго характеристическаго многообразія входитъ одинъ особый элементъ. Дифференціальнымъ уравненіямъ характеристическихъ многообразій и данному уравненію $F=0$ можно еще удовлетворить, полагая $z=const.$, $x=const.$, $p=0$, $q=0$; такимъ образомъ, получаемъ семейство съ двумя параметрами характеристическихъ многообразій, элементы которыхъ состоятъ изъ точекъ прямыхъ, параллельныхъ оси y, и изъ плоскостей, параллельныхъ плоскости xy. Въ составъ каждаго изъ этихъ многообразій не входитъ вовсе особыхъ элементовъ; слѣдовательно, мы имѣемъ въ данномъ случаѣ семейство *исключительныхъ* характеристическихъ многообразій (ср. § 3, стр. 52); исключительныя интегральныя многообразія, о которыхъ была рѣчь выше, т. е. плоскости, параллельныя плоскости xy, очевидно, могутъ быть образованы изъ семействъ исключительныхъ характеристическихъ многообразій, нами полученныхъ.

Примѣръ 10. $F = pq - z + ax + by = 0$.

Уравненіе это приводитъ Goursat какъ примѣръ уравненія, не допускающаго особаго интеграла *). Равенства $\dfrac{\partial F}{\partial p} = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial q} = 0$, $\dfrac{dF}{dx} = 0$, $\dfrac{dF}{dy} = 0$, $F = 0$ даютъ $q = 0$, $p = 0$, $-p + a = 0$, $-q + b = 0$, $pq - z + ax + by = 0$. Изъ первыхъ четырехъ приходимъ къ противорѣчивымъ заключеніямъ $p = 0$ и $p = a$, $q = 0$ и $q = b$, такъ что, повидимому, уравненіе вовсе не допускаетъ особыхъ элементовъ; но, согласно замѣчанію, сдѣланному на своемъ мѣстѣ (см. § 3, стр. 42), уравненіе можетъ еще допускать особые элементы въ безконечности или съ плоскостями параллельными оси z, координаты которыхъ имѣютъ безконечныя значенія. Дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій даннаго уравненія имѣютъ слѣдующій видъ:

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{p-a} = \frac{dq}{q-b}.$$

Интегрируя ихъ и принимая во вниманіе данное уравненіе, получаемъ уравненія характеристическаго многообразія въ слѣдующемъ видѣ:

$$x = \alpha + q + b\ lq(q-b),\quad y = \beta + \sigma q + a\ lq(q-b),\quad p - a = \sigma(q-b),$$
$$z = a\alpha + b\beta + 2aq + \sigma q^2 + 2ab\ lq(q-b),$$

гдѣ α, β, σ — произвольныя постоянныя. Изъ полученныхъ уравненій получаемъ при произвольныхъ α, β, σ и при $q = b$, $p = a$, $x = \infty$, $y = \infty$, $z = \infty$, но притомъ такъ, что $x : y : z = b : a : 2ab$. Отсюда слѣдуетъ прежде всего, что всѣ характеристики имѣютъ параллельныя асимптоты, другими словами проходятъ черезъ одну безконечно-удаленную точку, лежащую по направленію прямой

$$\frac{\xi}{b} = \frac{\eta}{a} = \frac{\zeta}{2ab}.$$

Уравненіе плоскости развертывающейся характеристической поверхности въ этой безконечно-удаленной точкѣ имѣетъ видъ

$$\zeta - z = a(\xi - x) + b(\eta - y):$$

*) Goursat—Leçons sur l'intégration des équations partielles du premier ordre, chap. IX, § 82, Exemple II. (p. 207).

такъ какъ на основаніи даннаго уравненія имѣемъ

$$z - ax - by = pq = ab,$$

то окончательно уравненіе упомянутой плоскости будетъ

$$\zeta = a\xi + b\eta + ab.$$

Въ это уравненіе не входитъ произвольныхъ постоянныхъ α, β, σ, слѣдовательно въ составъ всѣхъ характеристическихъ многообразій входитъ одинъ опредѣленный элементъ, состоящій изъ безконечно-удаленной точки прямой

$$\frac{\xi}{b} = \frac{\eta}{a} = \frac{\zeta}{2ab}$$

и плоскости

$$\zeta = a\xi + b\eta + ab,$$

которая, очевидно, параллельна прямой

$$\frac{\xi}{b} = \frac{\eta}{a} = \frac{\zeta}{2ab}$$

и слѣдовательно содержитъ ея безконечно-удаленную точку. Элементъ, о которомъ идетъ рѣчь, очевидно, будетъ особымъ элементомъ уравненія. Къ тѣмъ же результатамъ придемъ, если подвергнемъ наше уравненіе проэктивному преобразованію

$$z = \frac{z'+1}{z'},\quad x = \frac{x'}{z'},\quad y = \frac{y'}{z'}.$$

Преобразованное уравненіе

$$F' = z'p'q' + (p'x' + q'y' - z')^2 \cdot (ax' + by' - z' - 1) = 0,$$

какъ легко убѣдиться, допускаетъ особый элементъ $\left(\dfrac{1}{2a}, \dfrac{1}{2b}, 0, \dfrac{a}{ab+1}, \dfrac{b}{ab+1}\right)$, координаты котораго удовлетворяютъ уравненіямъ $F' = 0$, $\dfrac{\partial F'}{\partial p'} = 0$, $\dfrac{\partial F'}{\partial q'} = 0$, $\dfrac{dF'}{dx'} = 0$, $\dfrac{dF'}{dy'} = 0$; въ силу употребленнаго нами проэктивнаго преобразованія, этому элементу соотвѣтствуетъ тотъ самый безконечно-удаленный элементъ, о которомъ мы упоминали выше, и слѣдовательно первоначальное уравненіе $F = 0$ допускаетъ этотъ безконечно-удаленный элементъ особымъ элементомъ.

Разберемъ еще, какія изъ уравненій примѣровъ 6—10 допускаютъ полный интегралъ въ томъ спеціальномъ смыслѣ, какой мы установили въ § 3 (стр. 44).

Такъ какъ уравненія примѣровъ 6-го и 7-го связаны проэктивнымъ преобразованіемъ, то изъ нихъ достаточно разобрать одно, напримѣръ, уравненіе примѣра 7-го. Особое интегральное многообразіе этого уравненія состоитъ изъ двухъ многообразій одного измѣренія: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $q=0$ и $z=-1$, $y=0$, $p=0$, $q=0$. Полнымъ интеграломъ мы должны назвать семейство интегральныхъ многообразій, имѣющихъ съ каждымъ изъ вышеупомянутыхъ многообразій одного измѣренія по одному общему элементу; легко усмотрѣть, что такого семейства не существуетъ: для того, чтобы интегральное многообразіе имѣло одинъ общій элементъ съ многообразіемъ $z=-1$, $y=0$, $p=0$, $q=0$: необходимо, чтобы характеристики, образующія это интегральное многообразіе, лежали въ одной плоскости, проходящей черезъ ось y; это требованіе выполняется, во-первыхъ, для семейства исключительныхъ характеристическихъ многообразій, которыя образуютъ интегральное многообразіе, имѣющее носителемъ плоскость $x=az$, но полученное интегральное многообразіе вовсе не имѣетъ общихъ элементовъ съ многообразіемъ $z=-1$, $y=0$, $p=0$, $q=0$ и принадлежитъ потому къ числу исключительныхъ; во-вторыхъ, можно взять всѣ характеристическія многообразія, соотвѣтствующія одной и той же характеристикѣ, другими словами въ уравненіяхъ характеристическаго многообразія

$$x=az,\quad y^2=b^2z(z+1),\quad p=\frac{2(z+1)}{2a(z+1)+bc(2z+1)},$$

$$q=\frac{2c\sqrt{z(z+1)}}{2a(z+1)+bc(2z+1)}$$

дать a и b — опредѣленныя значенія, а c оставить произвольнымъ: тогда получимъ интегральное многообразіе двухъ измѣреній, имѣющее носителемъ характеристику

$$x=az,\quad y^2=b^2z(z+1),$$

но въ это многообразіе входятъ, очевидно, всѣ элементы многообразія одного измѣренія $x=0$, $y=0$, $z=0$, $q=0$, такъ какъ при $z=0$ получаемъ изъ уравненій семейства характеристическихъ многообразій $x=0$, $y=0$, $q=0$, $p=\frac{2}{2a+bc}$, гдѣ c — произвольно.

Уравненіе примѣра 8-го допускаетъ отдѣльный особый элементъ (0, 0, 0, 0, 0); проэктивнымъ преобразованіемъ можно-бы убѣдиться, что безконечно-удаленная плоскость пространства вмѣстѣ съ безко-

нечно-удаленною точкой оси z тоже образуютъ отдѣльный особый э- ментъ; такъ какъ имѣемъ только отдѣльные особые элементы, то в- просъ о полномъ интегралѣ отпадаетъ.

Уравненіе примѣра 9-го, какъ мы уже видѣли, допускаетъ пол- интегралъ $z=a[(x-\alpha)^2+y^2]$.

Наконецъ, уравненіе примѣра 10-го допускаетъ лишь отдѣльн- особый элементъ, и слѣдовательно не имѣетъ полнаго интеграла въ ус- новленномъ смыслѣ.

ГЛАВА II.

§ 1.—Уравненія съ частными производными 2-го порядка. Понятіе объ элементѣ 2-го порядка. Интегральныя многообразія. — § 2. Элементъ 3-го порядка. Интегральныя многообразія 3-го порядка. — § 3. Элементы высшихъ порядковъ. Интегральныя многообразія высшихъ порядковъ. — § 4. Распространеніе преобразованій прикосновенія на элементы 2-го порядка. Уравненіе съ частными производными 2-го порядка, связанное съ даннымъ преобразованіемъ прикосновенія. Примѣненіе преобразованій прикосновенія къ уравненіямъ съ частными производными 2-го порядка; уравненія билинейныя; теорема В. Г. Имшенецкаго. — § 5.—Распространеніе преобразованій прикосновенія на элементы высшихъ порядковъ.

§ 1.—Задача интегрированія уравненія съ частными производными 2-го порядка

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \qquad (1)$$

ставится обыкновенно слѣдующимъ образомъ: найти z въ функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y такъ, чтобы удовлетворялось уравненіе (1), при чемъ

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\quad q = \frac{\partial z}{\partial y},\quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Послѣднія пять равенствъ можно замѣнить слѣдующими тремя:

$$\begin{aligned} dz - p\,dx - q\,dy &= 0 \\ dp - r\,dx - s\,dy &= 0 \\ dq - s\,dx - t\,dy &= 0, \end{aligned}$$

такъ какъ изъ нихъ при x и y независимыхъ перемѣнныхъ слѣдуетъ

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\quad q = \frac{\partial z}{\partial y},\quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Интегралъ уравненія (1) $z = z(x, y)$ интерпретируется геометрически поверхностью, уравненіе которой въ Декартовыхъ координатахъ

$$z = z(x, y). \qquad (2)$$

При этомъ p и q — коэффиціенты въ уравненіи касательной плоскости къ поверхности (2) въ точкѣ (x, y, z)

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

гдѣ ξ, η, ζ — текущія координаты; для интерпретаціи r, s, t приходится обратиться къ такъ-называемому ***оскулирующему параболоиду*** поверхности (2), т. е. къ параболоиду, который имѣетъ съ поверхностью (2) въ точкѣ (x, y, z) соприкосновеніе 2-го порядка, при чемъ сказанная точка (x, y, z) служитъ вершиной для параболоида, вслѣдствіе чего нормаль поверхности въ точкѣ (x, y, z) служитъ діаметромъ параболоида.

Если мы перенесемъ начало координатъ въ точку (x, y, z) и за новую плоскость xy примемъ касательную плоскость поверхности (2), то уравненіе оскулирующаго параболоида будетъ

$$2\zeta = r_0\xi^2 + 2s_0\xi\eta + t_0\eta^2, \qquad (3)$$

гдѣ ξ, η, ζ — текущія координаты, а r_0, s_0, t_0 — значенія вторыхъ частныхъ производныхъ функціи z, опредѣленной изъ уравненія поверхности (2) въ новой системѣ координатъ, для начала координатъ (т. е. для прежней точки (x, y, z)). Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (3), во-первыхъ, представляетъ параболоидъ съ вершиной въ началѣ координатъ и діаметромъ, направленнымъ по оси z; опредѣляя затѣмъ для начала (при $\xi = 0$, $\eta = 0$) первыя и вторыя частныя производныя ζ, получаемъ $\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)_0 = 0$, $\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)_0 = 0$, $\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}\right)_0 = r_0$, $\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\partial\eta}\right)_0 = s_0$, $\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2}\right)_0 = t_0$; но для начала имѣемъ и $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = 0$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = 0$, гдѣ подъ z разумѣемъ функцію, полученную изъ уравненія поверхности, такъ какъ за плоскость xy принята касательная плоскость въ началѣ координатъ; слѣдовательно, первыя и вторыя производныя координаты z имѣютъ одинаковыя значенія въ началѣ координатъ для нашей поверхности и для параболоида (3), а это и есть аналитическое выраженіе условій соприкосновенія 2-го порядка.

При произвольной системѣ координатъ уравненіе оскулирующаго параболоида не имѣетъ такого простого вида, но коэффиціенты его, по прежнему, зависятъ только отъ x, y, z, p, q, r, s, t.

Вмѣсто оскулирующаго параболоида часто разсматриваютъ сѣченіе его плоскостью, параллельной касательной плоскости въ данной точкѣ. Предполагая плоскость безконечно-близкой къ касательной, получаемъ въ сѣченіи кривую 2-го порядка, называемую ***индикатрисой*** Dupin-а; уравненіе ея въ той же системѣ координатъ, которой мы пользовались, будетъ

$$r_0\xi^2+2s_0\xi\eta+t_0\eta^2=k, \tag{4}$$

гдѣ k — постоянное (не зависитъ отъ ξ, η), притомъ безконечно-малое для индикатрисы Dupin-а. Если обратимся къ уравненію оскулирующаго параболоида (3), то легко усмотримъ, что значеніе ζ, получаемое изъ этого уравненія, представляетъ члены до 3-го порядка въ разложеніи по ряду Taylor-а координаты z, опредѣляемой изъ уравненія данной поверхности. Въ самомъ дѣлѣ, начало координатъ принадлежитъ, по условію, поверхности, слѣдовательно $(z)_0=0$; ранѣе мы имѣли еще $\left(\frac{dz}{dx}\right)_0=0$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)_0=0$, а значенія вторыхъ производныхъ въ началѣ координатъ мы обозначали r_0, s_0, t_0; слѣдовательно разложеніе по ряду Taylor-а будетъ имѣть видъ

$$z=\frac{1}{2}(r_0x^2+2s_0xy+t_0y^2)+\ldots\ldots$$

Отсюда заключаемъ, что индикатриса Dupin-а представляетъ съ точностью до безконечно-малыхъ 3-го порядка сѣченіе данной поверхности плоскостью, проходящей параллельно касательной плоскости на безконечно-маломъ разстояніи отъ нея.

Послѣднее замѣчаніе позволяетъ намъ легко найти уравненія индикатрисы при произвольной системѣ координатъ. Въ самомъ дѣлѣ, обозначая текущія координаты ξ, η, ζ, координаты данной точки на поверхности x, y, z и предполагая, что ζ опредѣлено изъ уравненія данной поверхности, получаемъ такое разложеніе:

$$\zeta-z=p(\xi-x)+q(\eta-y)+\frac{1}{2}[r(\xi-x)^2+2s(\xi-x)(\eta-y)+t(\eta-y)^2]+\ldots,$$

гдѣ p, q, r, s, t — значенія производныхъ въ точкѣ (x, y, z); уравненіе плоскости, параллельной касательной, очевидно имѣетъ видъ:

$$\zeta-z-p(\xi-x)-q(\eta-y)=\frac{1}{2}k.\sqrt{1+p^2+q^2},$$

гдѣ k — двойное разстояніе этой плоскости отъ касательной. Индикатриса, по предыдущему, будетъ представлена двумя уравненіями — послѣднимъ изъ приведенныхъ и уравненіемъ

$$k.\sqrt{1+p^2+q^2}=r(\xi-x)^2+2s(\xi-x)(\eta-y)+t(\eta-y)^2,$$

которое получается, если въ разложеніи $\zeta-z$ отбросимъ члены съ 3-го порядка и замѣнимъ $\zeta-z-p(\xi-x)-q(\eta-y)$ черезъ $\frac{1}{2}k.\sqrt{1+p^2+q^2}$ на основаніи уравненія плоскости параллельной касательной плоскости. Для большаго удобства мы будемъ разсматривать индикатрису перенесенной въ касательную плоскость: тогда ея уравненія будутъ:

$$\left.\begin{aligned}&\zeta-z=p(\xi-x)+q(\eta-y)\\&r(\xi-x)^2+2s(\xi-x)(\eta-y)+t(\eta-y)^2=k.\sqrt{1+p^2+q^2}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Послѣднее уравненіе есть вмѣстѣ съ тѣмъ уравненіе проэкціи индикатрисы на плоскость xy.

Поставимъ теперь задачу интегрированія уравненія съ частными производными 2-го порядка нѣсколько шире, совершенно подобно тому, какъ была поставлена задача интегрированія уравненія 1-го порядка.

Будемъ, именно, уравненіе

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0 \tag{1}$$

разсматривать какъ уравненіе между 8-ю перемѣнными x, y, z, p, q, r, s, t и станемъ опредѣлять эти перемѣнныя въ функціи какихъ-либо произвольныхъ параметровъ такъ, чтобы удовлетворялось уравненіе (1) и дифференціальныя соотношенія:

$$\left.\begin{aligned}dz-pdx-qdy&=0\\dp-rdx-sdy&=0\\dq-sdx-tdy&=0.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Совокупность значеній x, y, z, p, q, r, s, t будемъ называть ***элементомъ 2-го порядка***, въ отличіе отъ элемента (x, y, z, p, q), который будемъ называть элементомъ 1-го порядка: x, y, z, p, q, r, s, t — будемъ называть координатами элемента. Если координаты элемента 2-го порядка выражены въ функціи одного, двухъ,... произвольныхъ независимыхъ параметровъ, то совокупность элементовъ 2-го порядка, получаемыхъ при измѣненіи параметровъ, будемъ называть многообразіемъ элементовъ 2-го порядка одного, двухъ,... измѣреній. Уравненіе (1) устанавливаетъ одно соотношеніе между 8-ю координатами элемента 2-го порядка, изъ которыхъ семь такимъ образомъ остаются произвольными, а восьмая опредѣляется въ функціи этихъ семи; поэтому, согласно предыдущему, скажемъ, что уравненіе (1) опредѣляетъ нѣкоторое многообразіе элементовъ 2-го порядка семи измѣреній M_7. Проинтегрировать уравненіе (1) значитъ изъ всего многообразія M_7 выбрать такія многообразія, для которыхъ имѣютъ мѣсто дифференціальныя соотношенія (6); всякое подобное многообразіе, т. е. многообразіе элементовъ 2-го порядка, удовлетворяющее уравненію (1) и дифференціальнымъ соотношеніямъ (6), будемъ называть *интегральнымъ многообразіемъ* уравненія (1).

Элементъ 2-го порядка геометрически интерпретируется точкой (x, y, z), плоскостью

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

проходящей черезъ эту точку, и кривой 2-го порядка на этой плоскости

$$\left.\begin{aligned} &\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) \\ &r(\xi - x)^2 + 2s(\xi - x)(\eta - y) + t(\eta - y)^2 = k.\sqrt{1 + p^2 + q^2}, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

имѣющей центръ въ точкѣ (x, y, z).

Вмѣсто кривой 2-го порядка можно разсматривать параболоидъ, имѣющій точку (x, y, z) своей вершиной, ось z — діаметромъ и пересѣкающій плоскость

$$\zeta - z - p(\xi - x) - q(\eta - y) = \frac{1}{2}k.\sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

по кривой, уравненія которой

$$\zeta - z - p(\xi - x) - q(\eta - y) = \frac{1}{2}k.\sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

$$r(\xi - x)^2 + 2s(\xi - x)(\eta - y) + t(\eta - y)^2 = k.\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Мы будемъ преимущественно пользоваться первой интерпретаціей, и кривую 2-го порядка, въ уравненіяхъ которой k будемъ считать за нѣкоторое постоянное, хотя бы и не безконечно-малое, будемъ называть *индикатрисой*, иногда индикатрисой 2-го порядка или квадратичной индикатрисой, въ отличіе отъ индикатрисъ высшихъ порядковъ.

Наше пространство относительно элементовъ 2-го порядка есть многообразіе 8-ми измѣреній. Уравненіе

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \quad (1)$$

изъ всего этого многообразія 8-ми измѣреній выдѣляетъ, какъ уже было упомянуто, нѣкоторое многообразіе M_7 семи измѣреній; такъ, уравненію

$$rt - s^2 = 0$$

удовлетворяютъ, какъ не трудно убѣдиться, всѣ элементы, индикатрисами которыхъ служатъ пары параллельныхъ прямыхъ, опредѣляемыхъ въ плоскости

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

уравненіями

$$\sqrt{r}.(\xi - x) + \sqrt{t}.(\eta - y) = \pm\sqrt{k}.\sqrt[4]{1 + p^2 + q^2}.$$

При данныхъ x, y, z, p, q, уравненіе

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \quad (1)$$

даетъ одно соотношеніе между r, s, t; слѣдовательно, при данной точкѣ и плоскости элемента, мы имѣемъ систему индикатрисъ съ двумя произвольными параметрами (напр. s и t), дополняющихъ точку и плоскость до элементовъ 2-го порядка, принадлежащихъ къ многообразію M_7.

Напримѣръ, въ силу уравненія

$$Rr + Ss + Tt = U, \quad (7)$$

гдѣ R, S, T, U — функціи x, y, z, p, q,—при данной точкѣ и плоскости (т. е. при данныхъ x, y, z, p, q), опредѣляется *сѣть* концентрическихъ кривыхъ 2-го порядка.

Обратимся теперь къ изысканію всѣхъ типовъ многообразій элементовъ 2-го порядка, удовлетворяющихъ дифференціальнымъ соотношеніямъ

$$\left.\begin{aligned} dz - pdx - qdy &= 0 \\ dp - rdx - sdy &= 0 \\ dq - sdx - tdy &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Если мы имѣемъ подобное многообразіе, то координаты x, y, z, p, q зависятъ отъ нѣкотораго числа произвольныхъ параметровъ, и слѣдовательно элементы (x, y, z, p, q) 1-го порядка тоже образуютъ нѣкоторое многообразіе, число измѣреній котораго, очевидно, не болѣе числа измѣреній даннаго. Для полученнаго многообразія элементовъ 1-го порядка удовлетворяется первое изъ трехъ дифференціальныхъ соотношеній (6), и слѣдовательно, мы будемъ имѣть одно изъ тѣхъ многообразій, которыя мы изслѣдовали въ предшествующей главѣ (гл. I, § 1), а именно: или многообразіе двухъ измѣреній, имѣющее носителемъ поверхность, линію или точку, — или многообразіе одного измѣренія, состоящее изъ линіи и описанной развертывающейся поверхности или въ частности изъ точки съ конусомъ плоскостей,—или, наконецъ, много образіе нулевого измѣренія, т. е. отдѣльный элементъ 1-го порядка, такъ какъ и для отдѣльнаго элемента, т. е. при x, y, z, p, q — постоянныхъ, соотношеніе $dz - pdx - qdy = 0$ удовлетворяется. Намъ предстоитъ теперь во всѣхъ перечисленныхъ случаяхъ отъ многообразія элементовъ 1-го порядка перейти къ многообразію элементовъ 2-го порядка, т. е. имѣя выраженія x, y, z, p, q въ функціи параметровъ (двухъ или одного или же при постоянныхъ x, y, z, p, q), удовлетворяющія соотношенію

$$dz - pdx - qdy = 0,$$

опредѣлить r, s, t такъ, чтобы удовлетворялись соотношенія

$$dp - rdx - sdy = 0$$
$$dq - sdx - tdy = 0.$$

Если многообразіе элементовъ 2-го порядка вполнѣ опредѣляется изъ этихъ соотношеній по данному многообразію элементовъ 1-го порядка, то это послѣднее будемъ называть *носителемъ* перваго. Многообразіе элементовъ 1-го порядка само можетъ опредѣляться многообразіемъ, образуемымъ точками элементовъ; это имѣетъ мѣсто для многообразія элементовъ 1-го порядка двухъ измѣреній, которое, какъ мы видѣли въ предыдущей главѣ, можетъ быть трехъ типовъ, смотря по тому, образуютъ ли точки элементовъ поверхность, линію, или, наконецъ, имѣется лишь отдѣльная точка; поверхность, линія или точка служитъ, такимъ образомъ, носителемъ для многообразія элементовъ 1-го порядка, и если окажется, что это послѣднее служитъ носителемъ многообразія элементовъ 2-го порядка, то мы будемъ поверхность, линію или точку называть также носителемъ всего многообразія элементовъ 2-го порядка.

Разсмотримъ прежде всего многообразія элементовъ 2-го порядка, получаемыя изъ многообразій элементовъ 1-го порядка *двухъ* измѣреній, и пусть, во-первыхъ, имѣемъ многообразіе элементовъ 1-го порядка, имѣющее носителемъ поверхность

$$\varphi(x, y, z) = 0. \tag{8}$$

Для опредѣленія p и q имѣемъ, какъ было выведено въ гл. I, соотношенія

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}p + \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}q + \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Дифференцируя ихъ, имѣемъ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}dp + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}pdz + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}pdx + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}pdy + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}dz + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}dy =$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}dq + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}qdz + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}qdx + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}qdy + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}dz + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}dx + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}dy =$$

или, такъ какъ $dz = pdx + qdy$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}dp + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}p^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}p + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)dx + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}pq + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}p + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}q + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)dy =$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}dq + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}pq + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}p + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}q + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)dx + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}q^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}q + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)dy =$$

Умножая послѣднія два изъ соотношеній (6) на $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ и вычитая соо вѣтственно изъ двухъ полученныхъ, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}r + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}p^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}p + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)dx + \\
&+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}s + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}pq + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}p + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}q + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)dy = 0 \\
&\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}s + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}pq + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}p + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}q + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)dx + \\
&+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}t + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}q^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}q + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)dy = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (
$$

Эти соотношенія содержатъ лишь дифференціалы dx и dy; если они обращаются въ тождества, то изъ нихъ получимъ или $dx = 0$, $dy =$ т. е. $x = const.$, $y = const.$, если эти соотношенія различны, или $dy =$ при $dx = 0$, т. е. y постоянно при постоянномъ x, если одно изъ с отношеній тождественно другому. Во всякомъ случаѣ будемъ имѣть крайней мѣрѣ одно соотношеніе между одними координатами x, y ви $\psi(x, y) = 0$; между тѣмъ, по предположенію, существуетъ единствен соотношеніе свободное отъ p и q, именно уравненіе нашей поверхнос $\varphi(x, y, z) = 0$; слѣдовательно, коэффиціенты при dx и dy въ равс ствахъ (9) должны исчезать, и мы имѣемъ три уравненія для опред ленія r, s, t:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial z}r + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}p^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}p + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0 \\
&\frac{\partial\varphi}{\partial z}s + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}pq + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}p + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}q + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial\varphi}{\partial z}t + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}q^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}q + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (1
$$

Обратно, изъ равенствъ (10) и равенствъ, получаемыхъ дифференцированіемъ соотношеній $\frac{\partial\varphi}{\partial z}p+\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}q+\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$, получаемъ

$$\begin{aligned} dp-rdx-sdy&=0\\ dq-sdx-tdy&=0,\end{aligned}$$

и слѣдовательно задача, которую мы себѣ поставили, разрѣшена. Координаты r, s, t изъ равенствъ (10) вполнѣ опредѣляются по x, y, z, p, q, такъ что мы имѣемъ многообразіе элементовъ 2-го порядка *двухъ* измѣреній, носителемъ котораго служитъ поверхность $\varphi(x, y, z)=0$. Элементы многообразія составляются изъ точекъ, касательныхъ плоскостей и индикатрисъ упомянутой поверхности. Если бы мы взяли уравненіе поверхности-носителя многообразія въ видѣ

$$z=z(x, y),$$

то получили бы прямо

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \tag{10'}$$

Выведенныя нами формулы (10) становятся непримѣнимыми въ томъ случаѣ, когда функція φ не зависитъ отъ z, т. е. когда носителемъ многообразія элементовъ 1-го порядка служитъ цилиндрическая поверхность

$$\varphi(x, y)=0, \tag{11}$$

образующія которой параллельны оси z. Въ этомъ случаѣ получаемъ $p=\infty$, $q=\infty$, а формулы (10) обращаются въ тождества, такъ что r, s, t, повидимому, остаются произвольными. Но не трудно усмотрѣть, что и въ этомъ случаѣ съ точки зрѣнія геометрической интерпретаціи мы имѣемъ совершенно опредѣленное многобразіе элементовъ 2-го порядка двухъ измѣреній, имѣющее носителемъ цилиндръ

$$\varphi(x, y)=0. \tag{11}$$

Что касается до плоскости элемента, то, какъ мы видѣли въ предшествующей главѣ (гл. I, § 1), она опредѣляется уравненіемъ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi-x)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\eta-y)=0, \tag{12}$$

гдѣ ξ, η — текущія координаты, откуда между прочимъ слѣдуетъ, что $p=\infty$, $q=\infty$, $p:q=\frac{\partial\varphi}{\partial x}:\frac{\partial\varphi}{\partial y}$. Для нахожденія индикатрисы воспользуемся геометрическимъ опредѣленіемъ ея, какъ кривой, представляю-

щей съ точностью до безконечно-малыхъ 3-го порядка сѣченіе данно поверхности плоскостью, проходящей на безконечно-маломъ разстоянi отъ касательной плоскости параллельно этой послѣдней. Касательна плоскость въ точкѣ (x, y, z) представляется уравненіемъ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi-x)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\eta-y)=0, \tag{1:}$$

плоскость, параллельная ей и отстоящая отъ нея на разстояніи $=\frac{1}{2}$ опредѣляется уравненіемъ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi-x)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\eta-y)=\frac{1}{2}k.\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}.$$

Уравненіе цилиндра въ текущихъ координатахъ ξ, η $\varphi(\xi, \eta)=0$ представимъ въ видѣ

$$\varphi(x, y)+(\xi-x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(\eta-y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(\xi-x)^2+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(\xi-x)(\eta-y)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(\eta-y)^2\right]+\dots=0,$$

разлагая $\varphi(\xi, \eta)$ въ рядъ Taylor-а, или, отбрасывая члены съ 3-го порядка и замѣчая, что $\varphi(x, y)=0$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi-x)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\eta-y)+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(\xi-x)^2+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(\xi-x)(\eta-y)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(\eta-y)^2\right]=0.$$

Въ силу уравненія плоскости

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi-x)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\eta-y)=\frac{1}{2}k.\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2},$$

и слѣдовательно, индикатриса опредѣляется двумя уравненіями:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi-x)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\eta-y)=\frac{1}{2}k.\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\\ &\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(\xi-x)^2+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(\xi-x)(\eta-y)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(\eta-y)^2=k.\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}.\end{aligned}\right\} \tag{1:}$$

Первое изъ этихъ уравненій опредѣляетъ плоскость параллельную оси второе на плоскости xy опредѣляетъ кривую 2-го порядка, или въ пр странствѣ — цилиндръ 2-го порядка съ образующими параллельными оси z; въ сѣченіи получимъ пару прямыхъ параллельныхъ оси z, которыя можемъ затѣмъ, какъ дѣлали ранѣе, перенести въ касательную плоскость

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\eta - y) = 0. \qquad (12)$$

Такимъ образомъ, индикатриса у насъ вполнѣ опредѣлена; но если мы обратимся къ ея уравненіямъ (13), то увидимъ, что ихъ нельзя привести къ тому виду, который мы предполагали въ общемъ случаѣ, такъ какъ въ нихъ вовсе не входитъ координата ζ. Величины r, s, t въ общемъ случаѣ служатъ коэффиціентами въ уравненіи проэкціи индикатрисы на плоскость xy (ср. выше стр. 100 рав. (5)); между тѣмъ въ данномъ случаѣ индикатриса проэктируется на плоскость xy парой точекъ, которыя въ Декартовыхъ координатахъ не могутъ быть представлены однимъ уравненіемъ. Такимъ образомъ r, s, t не могутъ быть найдены, и мы видимъ, что непримѣнимость формулъ (10) въ случаѣ цилиндра съ образующими параллельными оси z зависитъ исключительно отъ нѣкотораго неудобства выбранной нами системы координатъ элемента 2-го порядка x, y, z, p, q, r, s, t. Впрочемъ, простымъ преобразованіемъ Декартовыхъ координатъ x, y, z всегда можно избѣжать случая цилиндра, образующія котораго параллельны оси z, такъ что указанный недостатокъ системы координатъ x, y, z, p, q, r, s, t не можетъ считаться существенно-важнымъ. Примемъ, напримѣръ, ось z за новую ось y и наоборотъ; тогда въ новой системѣ уравненіе прежняго цилиндра будетъ

$$\varphi(x, z) = 0,$$

и мы получимъ изъ общихъ формулъ (10):

$$p = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}, \quad q = 0, \quad r = -\frac{\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^3},$$

$$s = 0, \quad t = 0. \qquad (14)$$

Равенства (14) вмѣстѣ съ тѣмъ оправдываютъ всѣ результаты, полученные нами выше изъ геометрическихъ соображеній, такъ какъ, въ силу ихъ, уравненія индикатрисы элемента полученнаго многообразія имѣютъ видъ

$$\left.\begin{aligned} \zeta - z &= -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}(\xi - x) \\ r(\xi - x)^2 &= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}. \end{aligned}\right\} \qquad (1$$

гдѣ r имѣетъ указанное выше значеніе. Въ силу перваго изъ уравн ній (15), плоскость элемента параллельна новой оси y, т. е. прежнс оси z; въ силу второго, индикатриса распадается на пару прямыхъ п раллельныхъ новой оси y, т. е. прежней оси z. Впослѣдствіи мы уви димъ *), что координаты p, q, r, s, t при прежней системѣ осей x, y, могутъ быть выражены черезъ найденныя значенія p, q, r, s, t при н вой системѣ осей (при чемъ для p и q получимъ безконечныя значені для r, s, t — неопредѣленныя), и при этомъ можно съ извѣстнымъ пр вомъ сказать, что для координатъ многообразія, имѣющаго носителем цилиндръ

$$\varphi(x, y) = 0,$$

удовлетворяются соотношенія

$$\left.\begin{aligned} dz - pdx - qdy &= 0 \\ dp - rdx - sdy &= 0 \\ dq - sdx - tdy &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad ($$

Допустимъ, во-вторыхъ, что имѣемъ многообразіе элементовъ 1-г порядка двухъ измѣреній, носителемъ котораго служитъ линія

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0. \qquad (1$$

Тогда между p и q имѣемъ единственное соотношеніе, выведенное в предыдущей главѣ (см. гл. I, § 1, стр. 8, рав. (19)):

$$\begin{vmatrix} 1, & -p, & -q \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}, & \frac{\partial\varphi}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial z}, & \frac{\partial\psi}{\partial x}, & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} = 0; \qquad (17$$

*) См. ниже § 4, рав. 146 и 147.

такимъ образомъ, одну изъ величинъ p, q, напримѣръ p, можно считать произвольнымъ параметромъ; тогда q выразится черезъ p и черезъ одну изъ трехъ координатъ x, y, z, связанныхъ двумя равенствами (16). Соотношение

$$dp - rdx - sdy = 0$$

при $dx = 0$, $dy = 0$ даетъ $dp = 0$ и, слѣдовательно, требуетъ зависимости между p, x, y; между тѣмъ, по предположенію p — произвольный параметръ, dp — независимъ отъ прочихъ дифференціаловъ; слѣдовательно, коэффиціентъ при dp въ этомъ соотношеніи долженъ исчезать, что даетъ намъ невозможное равенство $1 = 0$. Такимъ образомъ, никакими конечными значеніями r, s, t нельзя удовлетворить соотношеніямъ

$$dp - rdx - sdy = 0$$
$$dq - sdx - tdy = 0;$$

но самый характеръ полученнаго невозможнаго равенства $1 = 0$ наводить на мысль, что r, s, t должны имѣть безконечныя значенія. Дальнѣйшія разсужденія становятся неудобными въ системѣ координатъ x, y, z, p, q, r, s, t, которою мы до сихъ поръ исключительно пользовались; потому введемъ иную, однородную, систему координатъ элемента x, y, z, p, q, ρ, σ, τ, ω, полагая

$$r = \frac{\rho}{\omega}, \quad s = \frac{\sigma}{\omega}, \quad t = \frac{\tau}{\omega}; \tag{18}$$

элементъ $(x, y, z, p, q, \rho, \sigma, \tau, \omega)$ опредѣляется значеніями пяти координатъ x, y, z, p, q и тремя отношеніями между однородными координатами ρ, σ, τ, ω.

Послѣднія два изъ соотношеній (6) въ новой системѣ принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned} \omega dp &= \rho dx + \sigma dy \\ \omega dq &= \sigma dx + \tau dy \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Примѣняя къ первому изъ равенствъ (19) всѣ предшествующія разсужденія, получаемъ $\omega = 0$, и слѣдовательно остаются соотношенія

$$\left.\begin{aligned} \rho dx + \sigma dy &= 0 \\ \sigma dx + \tau dy &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

между одними дифференціалами dx, dy. Такъ какъ между координатами x, y, z, по предположенію, существуютъ лишь два соотношенія, выра-

жаемыя равенствами (16), между x и y, слѣдовательно, лишь одно соотношеніе, получаемое исключеніемъ z изъ уравненій (16), то соотношенія (20) должны имѣть мѣсто въ силу $\varphi = 0$, $\psi = 0$ (16), и слѣдовательно, повторяя разсужденія, которыми намъ приходилось пользоваться нѣсколько разъ, получаемъ тождественно

$$\rho dx + \sigma dy = \lambda d\varphi + \mu d\psi$$
$$\sigma dx + \tau dy = \lambda_1 d\varphi + \mu_1 d\psi,$$

гдѣ λ, μ, λ_1, μ_1 — неопредѣленные множители. Сравнивая коэффиціенты при дифференціалахъ dx, dy, dz, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial x}; \quad \sigma = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad 0 = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial z}; \\ \sigma &= \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mu_1\frac{\partial\psi}{\partial x}; \quad \tau = \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mu_1\frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad 0 = \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \mu_1\frac{\partial\psi}{\partial z}; \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

наконецъ, исключая λ, μ, λ_1, μ_1, получаемъ два соотношенія:

$$\begin{vmatrix} \rho, & \sigma, & 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi}{\partial y}, & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x}, & \frac{\partial\psi}{\partial y}, & \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} \sigma, & \tau, & 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi}{\partial y}, & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x}, & \frac{\partial\psi}{\partial y}, & \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0. \tag{22}$$

Такимъ образомъ, для опредѣленія отношеній между однородными координатами имѣемъ потребное число равенствъ: $\omega = 0$ и два равенства (22); не трудно усмотрѣть, что изъ послѣднихъ равенствъ слѣдуетъ $\frac{\rho}{\sigma} = \frac{\sigma}{\tau}$, или $\rho\sigma - \tau^2 = 0$. Въ системѣ координатъ x, y, z, p, q, ρ, σ, τ, ω мы получили вполнѣ опредѣленное многообразіе элементовъ 2-го порядка двухъ измѣреній, которое, можемъ сказать, имѣетъ носителемъ кривую

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0, \tag{16}$$

такъ какъ отношенія между ρ, σ, τ, ω опредѣлены исключительно изъ соотношеній

$$\left.\begin{aligned} \omega dp &= \rho dx + \sigma dy \\ \omega dq &= \sigma dx + \tau dy \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

по многообразію элементовъ 1-го порядка, имѣющаго носителемъ кривую $\varphi = 0$, $\psi = 0$ (16). Наши прежнія координаты r, s, t, въ силу

$\omega = 0$, всѣ обращаются въ безконечность, но отношенія между ними сохраняютъ вполнѣ опредѣленныя значенія: именно

$$\frac{r}{s} = \frac{s}{t} = \frac{\rho}{\sigma} = \frac{\sigma}{\tau},$$

и мы можемъ съ извѣстнымъ правомъ сказать, что для этихъ значеній r, s, t удовлетворяются дифференціальныя соотношенія

$$dp - r dx - s dy = 0$$
$$dq - s dx - t dy = 0.$$

Намъ остается интерпретировать геометрически полученные результаты. Что касается плоскостей элементовъ, то мы уже знаемъ, что въ данной точкѣ (x, y, z) онѣ образуютъ пучокъ, ребро котораго есть касательная къ кривой $\varphi=0$, $\psi=0$ въ точкѣ (x, y, z). Не трудно найти и индикатрису каждаго элемента. Для однородныхъ координатъ $\rho, \sigma, \tau, \omega$ уравненія индикатрисы могутъ быть написаны:

$$\left.\begin{aligned} \zeta - z &= p(\xi - x) + q(\eta - y) \\ \rho(\xi - x)^2 + 2\sigma(\xi - x)(\eta - y) + \tau(\eta - y)^2 &= \omega k\sqrt{1 + p^2 + q^2}, \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

а такъ какъ въ данномъ случаѣ $\omega = 0$ и $\rho\tau - \sigma^2 = 0$, то послѣднее уравненіе принимаетъ видъ

$$[\rho(\xi - x) + \sigma(\eta - y)]^2 = 0;$$

слѣдовательно, индикатриса обращается въ двукратно-взятую прямую

$$\left.\begin{aligned} \rho(\xi - x) + \sigma(\eta - y) &= 0 \\ \zeta - z &= p(\xi - x) + q(\eta - y). \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Уравненія этой прямой могутъ быть представлены въ иномъ видѣ: ранѣе мы имѣли соотношеніе

$$\rho dx + \sigma dy = 0, \qquad (20)$$

гдѣ dx и dy опредѣляются изъ равенствъ $d\varphi = 0$, $d\psi = 0$; слѣдовательно $\rho : \sigma = -dy : dx$, и первое изъ уравненій (24) можетъ быть написано

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy}:$$

или, называя общую величину отношеній m, имѣемъ

$$\xi - x = m . dx, \quad \eta - y = m . dy$$

и, въ силу второго изъ уравненій (24),

$$\zeta - z = m(p dx + q dy).$$

или, такъ какъ $dz = p dx + q dy$,

$$\zeta - z = m dz.$$

Окончательно, уравненія нашей прямой принимаютъ видъ:

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}, \qquad (25)$$

гдѣ dx, dy, dz опредѣляются изъ равенствъ $d\varphi = 0$, $d\psi = 0$; слѣдовательно, индикатриса въ данномъ случаѣ обращается въ двукратно-взятую касательную прямую къ кривой $\varphi = 0$, $\psi = 0$ въ точкѣ (x, y, z). Если бы мы воспользовались для опредѣленія отношенія $\rho : \sigma$ первымъ изъ равенствъ (22), то, принимая во вниманіе еще соотношеніе (17) между p и q, получили бы уравненія той же прямой въ слѣдующемъ видѣ

$$\frac{\xi - x}{A} = \frac{\eta - y}{B} = \frac{\zeta - z}{C}. \qquad (25')$$

гдѣ A, B, C — детерминанты 2-го порядка, составленные соотвѣтственно изъ 2-го и 3-го, изъ 3-го и 1-го и изъ 1-го и 2-го столбцовъ таблицы

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial y}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \end{matrix} \right\|;$$

какъ извѣстно, A, B, C пропорціональны косинусамъ угловъ касательной къ кривой $\varphi = 0$ $\psi = 0$ съ осями координатъ: слѣдовательно, мы пришли бы къ тому же результату.

Итакъ, элементы 2-го порядка многообразія двухъ измѣреній, имѣющаго носителемъ линію, составляются изъ точекъ этой линіи, всѣхъ ея касательныхъ плоскостей и двукратно-взятыхъ касательныхъ прямыхъ.

Формулы, выведенныя нами, становятся непримѣнимыми въ случаѣ прямой, параллельной оси z (получаемъ $p = \infty$, $q = \infty$); но все, что было сказано выше для случая цилиндра, образующія котораго параллельны оси z, можетъ быть повторено и здѣсь, такъ что мы можемъ на тѣхъ же основаніяхъ, какъ выше, считать, что для многообразія двухъ измѣреній, элементы котораго состоятъ изъ точекъ данной прямой, плоскостей, проходящихъ черезъ эту прямую и двукратно-взятой данной прямой (индикатриса всѣхъ элементовъ), по крайней мѣрѣ въ извѣстномъ условномъ смыслѣ удовлетворяются соотношенія

$$\left.\begin{aligned} dz - pdx - qdy &= 0 \\ dp - rdx - sdy &= 0 \\ dq - sdx - tdy &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Замѣтимъ еще, что случая прямой, параллельной оси z, всегда можно избѣжать простымъ преобразованіемъ Декартовыхъ координатъ x, y, z, полагая, напримѣръ $z = y_1$, $y = z_1$, $x = x_1$, какъ въ случаѣ цилиндра съ образующими, параллельными оси z.

Допустимъ, въ-третьихъ, что носителемъ многообразія элементовъ 1-го порядка двухъ измѣреній служитъ точка (x, y, z). Тогда имѣемъ $dx = dy = dz = 0$, а p и q остаются совершенно произвольными. Въ однородныхъ координатахъ $\rho, \sigma, \tau, \omega$ имѣемъ еще два соотношенія

$$\left.\begin{aligned} \omega dp &= \rho dx + \sigma dy \\ \omega dq &= \sigma dx + \tau dy, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

откуда, въ силу $dx = 0$, $dy = 0$, получаемъ $\omega = 0$, такъ какъ dp и dq— произвольны. Величины ρ, σ, τ остаются совершенно произвольными, такъ что мы имѣемъ всего четыре произвольныхъ параметра p, q, $\rho : \sigma$, $\sigma : \tau$, и слѣдовательно, получаемъ многообразіе элементовъ 2-го порядка *четырехъ* измѣреній. Уравненія индикатрисы принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned} \zeta - z &= p(\xi - x) + q(\eta - y) \\ \rho(\xi - x)^2 + 2\sigma(\xi - x)(\eta - y) &+ \tau(\eta - y)^2 = 0; \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

слѣдовательно, индикатриса обращается въ произвольную пару прямыхъ, проходящихъ черезъ точку (x, y, z) и лежащихъ въ плоскости элемента. Для системы координатъ x, y, z, p, q, r, s, t наше многообразіе опредѣляется равенствами

$$x = const., \ y = const., \ z = const., \ r = \infty, \ s = \infty, \ t = \infty,$$

при чемъ p и q — произвольны, равно какъ отношенія $r : s$, $s : t$. Съ тѣмъ же правомъ, какъ и въ предшествующихъ случаяхъ, можемъ сказать, что для этихъ значеній x, y, z, p, q, r, s, t удовлетворяются соотношенія

$$\begin{aligned} dp - rdx - sdy &= 0 \\ dq - sdx - tdy &= 0, \end{aligned}$$

и слѣдовательно мы имѣемъ многообразіе элементовъ 2-го порядка имѣющее носителемъ точку. Число измѣреній этого многообразія при употребленіи однородныхъ координатъ оказалось равнымъ четыремъ для системы координатъ x, y, z, p, q, r, s, t вопросъ о числѣ измѣреній, собственно, можетъ быть рѣшенъ различно: мы можемъ считать съ одной стороны, 4 произвольныхъ параметра $p, q, r : s, s : t$, но съ другой стороны, можно многообразіе представить *шестью* уравненіями

$$x = const., \ y = const., \ z = const., \ \frac{1}{r} = 0, \ \frac{1}{s} = 0, \ \frac{1}{t} = 0,$$

и съ этой точки зрѣнія число измѣреній его равно двумъ. Такое противорѣчіе не должно насъ смущать, такъ какъ оно встрѣчается и въ другихъ вопросахъ при безконечныхъ значеніяхъ координатъ (напримѣръ, безконечно-удаленныя точки плоскости образуютъ съ проэктивной точки зрѣнія цѣлую прямую, а съ точки зрѣнія теоріи мнимаго перемѣннаго плоскость имѣетъ одну безконечно-удаленную точку).

Разсмотримъ далѣе многообразія элементовъ 2-го порядка, для которыхъ элементы 1-го порядка образуютъ многообразіе *одного* измѣренія.

Въ общемъ случаѣ точки элементовъ этого многообразія образуютъ нѣкоторую кривую, уравненія которой пусть будутъ

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u) \\ y &= y(u) \\ z &= z(u), \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

гдѣ u — произвольный параметръ, а плоскости — нѣкоторую развертывающуюся поверхность, описанную около кривой (27). Черезъ каждую точку кривой проходитъ опредѣленная плоскость, такъ что p и q — нѣкоторыя функціи параметра u:

$$\begin{aligned} p &= p(u) \\ q &= q(u). \end{aligned} \tag{28}$$

Первое изъ соотношеній (6)

$$dz - pdx - qdy = 0$$

даетъ намъ соотношеніе между функціями $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$, $p(u)$, $q(u)$

$$z'(u) - p(u) . x'(u) - q(u) . y'(u) = 0, \tag{29}$$

которое, очевидно, выражаетъ условіе, что плоскость элемента

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) \tag{30}$$

касается кривой (27). Развертывающаяся поверхность, образуемая плоскостями элементовъ, очевидно, есть огибающая семейства плоскостей (30), гдѣ x, y, z, p, q — функціи одного параметра u, опредѣляемыя равенствами (27) и (28).

Два послѣднихъ изъ соотношеній (6)

$$dp - rdx - sdy = 0$$
$$dq - sdx - tdy = 0$$

даютъ намъ два уравненія

$$\left.\begin{aligned} p'(u) - r.x'(u) - s.y'(u) = 0 \\ q'(u) - s.x'(u) - t.y'(u) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

для опредѣленія трехъ координатъ r, s, t; слѣдовательно, одна изъ этихъ координатъ остается произвольной, а остальныя двѣ выражаются въ функціи этой одной и параметра u, или иначе координаты r, s, t могутъ быть выражены въ функціи двухъ независимыхъ параметровъ u и v (за параметръ v въ частности можно взять одну изъ координатъ r, s, t)

$$\left.\begin{aligned} r &= r(u, v) \\ s &= s(u, v) \\ t &= t(u, v), \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

и мы получаемъ многообразіе элементовъ 2-го порядка *двухъ* измѣреній, имѣющее носителемъ многообразіе элементовъ 1-го порядка одного измѣренія, которое опредѣляется уравненіями (27) и (28). Уравненія многообразія двухъ измѣреній, къ которому мы пришли, получимъ, присоединяя къ уравненіямъ (27) и (28) еще уравненія (32) или иначе уравненія (31).

Индикатрисы элементовъ полученнаго нами многообразія, какъ видно изъ ихъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} \zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) \\ r(\xi - x)^2 + 2s(\xi - x)(\eta - y) + t(\eta - y)^2 = k.\sqrt{1 + p^2 + q^2}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

для данной точки (x, y, z) и плоскости

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

элемента образуютъ пучокъ концентрическихъ кривыхъ 2-го порядка, такъ какъ r, s, t связаны двумя линейными уравненіями (31). Выражая изъ этихъ уравненій, напримѣръ, r и t черезъ s и вставляя въ уравненія индикатрисы, получаемъ второе уравненіе въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{p'(u)}{x'(u)}(\xi - x)^2 + \frac{q'(u)}{y'(u)}(\eta - y)^2 -$$
$$- s.\left[\frac{y'(u)}{x'(u)}(\xi - x)^2 - 2(\xi - x)(\eta - y) + \frac{x'(u)}{y'(u)}(\eta - y)^2\right] = k.\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

или, по преобразованіи:

$$\frac{p'(u)}{x'(u)}(\xi - x)^2 + \frac{q'(u)}{y'(u)}(\eta - y)^2 - s.x'(u).y'(u).\left[\frac{\xi - x}{x'(u)} - \frac{\eta - y}{y'(u)}\right]^2 =$$
$$= k.\sqrt{1 + p^2 + q^2}. \tag{33}$$

Отсюда мы видимъ, что пучокъ индикатрисъ представляетъ въ частности систему концентрическихъ кривыхъ 2-го порядка, находящихся въ двойномъ соприкосновеніи въ концахъ одного діаметра. Уравненія этого діаметра, очевидно, слѣдующія:

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$
$$\frac{\xi - x}{x'(u)} = \frac{\eta - y}{y'(u)};$$

называя общую величину двухъ послѣднихъ отношеній черезъ m, можемъ написать

$$\xi - x = m.x'(u); \quad \eta - y = m.y'(u); \quad \zeta - z = m.[p.x'(u) + q.y'(u)];$$

но изъ соотношенія (29) слѣдуетъ

$$p.x'(u) + q.y'(u) = z'(u),$$

а потому окончательно уравненія діаметра двойного прикосновенія представимъ въ видѣ

$$\frac{\xi - x}{x'(u)} = \frac{\eta - y}{y'(u)} = \frac{\zeta - z}{z'(u)}. \tag{34}$$

Уравненія эти совпадаютъ съ уравненіями касательной къ кривой (27) въ точкѣ (x, y, z); слѣдовательно, касательная эта и служитъ діаметромъ двойного соприкосновенія для пучка индикатрисъ.

Не трудно найти направленіе общихъ касательныхъ пучка индикатрисъ или, что то же, направленіе діаметра, сопряженнаго діаметру двойного соприкосновенія. Пучокъ индикатрисъ проектируется на плоскость xy пучкомъ

$$\frac{p'(u)}{x'(u)}(\xi - x)^2 + \frac{q'(u)}{y'(u)}(\eta - y)^2 - s.x'(u).y'(u).\left[\frac{\xi - x}{x'(u)} - \frac{\eta - y}{y'(u)}\right]^2 = $$
$$= k.\sqrt{1 + p^2 + q^2}, \tag{33}$$

діаметръ двойного прикосновенія — тоже діаметромъ двойного прикосновенія

$$\frac{\xi - x}{x'(u)} = \frac{\eta - y}{y'(u)}. \tag{35}$$

Сопряженные діаметры, какъ извѣстно, проектируются сопряженными діаметрами. Итакъ, ищемъ діаметръ, сопряженный діаметру (35) относительно пучка (33). Какъ извѣстно, эти діаметры будутъ сопряжены относительно любой кривой пучка, а потому возьмемъ кривую

$$\frac{p'(u)}{x'(u)}(\xi - x)^2 + \frac{q'(u)}{y'(u)}(\eta - y)^2 = k.\sqrt{1 + p^2 + q^2}, \tag{36}$$

которая получается при $s = 0$. Уравненіе сопряженнаго діаметра получимъ по извѣстному правилу, беря производныя лѣвой части уравненія (36) по ξ и η, умножая ихъ соотвѣтственно на $x'(u)$, $y'(u)$ — величины пропорціональныя косинусамъ угловъ діаметра (35) съ осями, складывая полученныя произведенія и приравнивая сумму нулю. Въ результатѣ получимъ

$$p'(u).(\xi - x) + q'(u).(\eta - y) = 0. \tag{37}$$

Уравненія діаметра, сопряженнаго діаметру двойного прикосновенія относительно пучка индикатрисъ, получимъ, присоединяя къ уравненію (37) уравненіе плоскости элемента

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y). \tag{38}$$

Разсмотримъ теперь развертывающуюся поверхность, образуемую всѣми плоскостями элементовъ многообразія. Уравненіе этой поверхности получимъ, исключая параметръ u между уравненіемъ плоскости элемента и производной этого уравненія по параметру, т. е. между уравненіями

$$\left.\begin{aligned} &\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) \\ &-z'(u) = -p.x'(u) - q.y'(u) + p'(u).(\xi - x) + q'(u).(\eta - y). \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Выше мы вывели соотношеніе

$$z'(u) = p.x'(u) + q.y'(u);$$

слѣдовательно, окончательно уравненія (39) представимъ въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} &\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) \\ &p'(u).(\xi - x) + q'(u).(\eta - y) = 0. \end{aligned}\right\}$$

При нѣкоторомъ опредѣленномъ значеніи параметра u эти два ура
нія, какъ извѣстно, представляютъ образующую развертывающейся
верхности; а такъ какъ уравненія (40) совпадаютъ съ уравнен
(37) и (38), то, слѣдовательно, діаметромъ, сопряженнымъ относите
пучка индикатрисъ діаметру двойного прикосновенія, т. е. касател
къ кривой (27), служитъ образующая развертывающейся поверхн
образуемой плоскостями элементовъ.

Небезъинтересно разсмотрѣть тотъ частный случай, когда кр
(27) — плоская, а развертывающаяся поверхность обращается въ
кость этой кривой. Въ этомъ случаѣ уравненія кривой можно пре
вить въ видѣ

$$z = ax + by + c$$
$$\varphi(x, y) = 0,$$

при чемъ второе уравненіе есть вмѣстѣ съ тѣмъ уравненіе про
кривой на плоскость xy. По предположенію p и q у насъ постоя
и легко видѣть, что

$$p = a, \quad q = b.$$

Соотношеніе

$$dz = pdx + qdy$$

удовлетворяется при этихъ значеніяхъ p и q въ силу уравненія

$$z = ax + by + c.$$

Для r, s, t получаемъ два уравненія

$$\left.\begin{aligned} 0 &= rdx + sdy \\ 0 &= sdx + tdy, \end{aligned}\right\}$$

при чемъ dx и dy связаны соотношеніемъ

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0.$$

Изъ уравненій (42)

$$\left.\begin{aligned} r &= -s\cdot\frac{dy}{dx}\\ t &= -s\cdot\frac{dx}{dy}\end{aligned}\right\}\qquad (44)$$

Уравненія пучка индикатрисъ принимаютъ видъ

$$\zeta - z = a(\xi - x) + b(\eta - y)$$

$$-s\cdot\left[\frac{dy}{dx}(\xi - x)^2 - 2(\xi - x)(\eta - y) + \frac{dx}{dy}(\eta - y)^2\right] = k\cdot\sqrt{1+a^2+b^2},$$

или, такъ какъ $z = ax + by + c$,

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= a\xi + b\eta + c\\ \left[\frac{\xi - x}{dx} - \frac{\eta - y}{dy}\right]^2 &= -\frac{k\sqrt{1+a^2+b^2}}{s\ dx\ dy}.\end{aligned}\right\}\qquad (45)$$

Второе уравненіе распадается на два

$$\frac{\xi - x}{dx} - \frac{\eta - y}{dy} = \pm\sqrt{\frac{k\sqrt{1+a^2+b^2}}{-s\ dx\ dy}},$$

и не трудно усмотрѣть, что пучокъ индикатрисъ обращается въ систему паръ прямыхъ, лежащихъ въ плоскости кривой (41) и проходящихъ параллельно касательной къ этой кривой въ точкѣ (x, y, z) на равныхъ отъ нея разстояніяхъ.

Многообразіе элементовъ 1-го порядка одного измѣренія, удовлетворяющее соотношенію

$$dz - pdx - qdy = 0,$$

можетъ также состоять изъ одной опредѣленной точки (x, y, z), черезъ которую проходитъ система плоскостей, зависящая отъ одного параметра; плоскости эти облекаютъ, вообще говоря, нѣкоторый конусъ.

Въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$x = const.,\ y = const.,\ z = const.,\ p = p(u),\ q = q(u), \qquad (46)$$

гдѣ u — произвольный параметръ. Соотношеніе

$$dz - pdx - qdy = 0$$

удовлетворяется, такъ какъ $dz = 0$, $dx = 0$, $dy = 0$. Соотношенія

$$\begin{aligned} dp &= rdx + sdy\\ dq &= sdx + tdy,\end{aligned}$$

въ силу $dx = 0$, $dy = 0$, требуютъ безконечныхъ значеній для r, s,
Вводя однородныя координаты ρ, σ, τ, ω, получаемъ

$$\left.\begin{aligned} \omega dp &= \rho dx + \sigma dy\\ \omega dq &= \sigma dx + \tau dy,\end{aligned}\right\}\qquad (4$$

откуда, въ силу $dx = 0$, $dy = 0$, необходимо $\omega = 0$. Повидимому, ρ, σ остаются вполнѣ произвольными; но это не совсѣмъ такъ: если перв изъ соотношеній (47) раздѣлимъ на второе, то получимъ

$$\frac{dp}{dq} = \frac{\rho + \sigma\frac{dy}{dx}}{\sigma + \tau\frac{dy}{dx}} = \frac{\sigma}{\tau} + \frac{\rho\tau - \sigma^2}{\tau\left(\sigma + \tau\frac{dy}{dx}\right)}. \qquad ($$

Въ данномъ случаѣ $\frac{dp}{dq} = \frac{p'(u)}{q'(u)}$, а $\frac{dy}{dx}$ остается вполнѣ неопредѣленны въ силу $dx = 0$, $dy = 0$; поэтому, для существованія равенства (необходимо $\rho\tau - \sigma^2 = 0$ и $\frac{\sigma}{\tau} = \frac{p'(u)}{q'(u)}$, или

$$\frac{\rho}{\sigma} = \frac{\sigma}{\tau} = \frac{dp}{dq} = \frac{p'(u)}{q'(u)}. \qquad ($$

Въ однородныхъ координатахъ мы получили многообразіе *одного* из ренія; координаты r, s, t, въ силу $\omega = 0$, имѣютъ безконечно-боль значенія, при чемъ $r : s = s : t = p'(u) : q'(u)$. Уравненія индикатр элемента принимаютъ видъ

$$\begin{aligned} \zeta - z &= p(\xi - x) + q(\eta - y)\\ [p'(u).(\xi - x) &+ q'(u)(\eta - y)]^2 = 0,\end{aligned}$$

слѣдовательно, индикатриса обращается въ двукратно-взятую пряму

$$\left.\begin{aligned} \zeta - z &= p(\xi - x) + q(\eta - y)\\ p'(u)(\xi - x) &+ q'(u)(\eta - y) = 0.\end{aligned}\right\}\qquad ($$

Уравненія (50) совпадаютъ съ уравненіями (40), полученными н выше для образующей развертывающейся поверхности, образуемой п костями элементовъ. Въ данномъ случаѣ плоскости элементовъ о кают конусъ; слѣдовательно, индикатриса элемента обращается въ двукратно-взятую образующую конуса плоскостей элементовъ, по которой этого конуса касается плоскость даннаго элемента.

Слѣдуетъ замѣтить, что всѣ формулы, полученныя нами для обоихъ случаевъ многообразій элементовъ 2-го порядка, носителями которыхъ служатъ многообразія элементовъ 1-го порядка *одного* измѣренія, становятся непримѣнимыми, когда плоскости элементовъ оказываются параллельными оси z, такъ какъ тогда имѣемъ $p=\infty$, $q=\infty$; но геометрическое опредѣленіе многообразій остается примѣнимымъ и къ этому случаю. Вообще, все, что было сказано нами по поводу многообразія, имѣющаго носителемъ цилиндръ, образующія котораго параллельны оси z, можетъ быть повторено и здѣсь. Преобразованіемъ координатъ $z_1=y$, $y_1=z$, $x_1=x$ можно, кромѣ того, всегда избѣжать того случая, о которомъ идетъ рѣчь.

Мы разсмотрѣли многообразія элементовъ 2-го порядка, ***носителями*** которыхъ служатъ многообразія элементовъ 1-го порядка одного измѣренія. Въ общемъ случаѣ мы получили многообразіе двухъ измѣреній, опредѣляемое равенствами (27), (28), (31). Такъ какъ между тремя координатами r, s, t имѣемъ лишь два соотношенія (31), то мы можемъ присоединить къ нимъ произвольное третье

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0. \qquad (51)$$

Тогда всѣ координаты x, y, z, p, q, r, s, t выразятся въ функціи одного параметра u, и мы будемъ имѣть многообразіе элементовъ 2-го порядка ***одного*** измѣренія, элементы 1-го порядка котораго тоже составляютъ многообразіе одного измѣренія.

Намъ остается изслѣдовать многообразія элементовъ 2-го порядка, для которыхъ элементы 1-го порядка составляютъ многообразіе нулевого измѣренія, т. е. имѣется одинъ (или нѣсколько) опредѣленный элементъ 1-го порядка. Въ этомъ случаѣ x, y, z, p, q имѣютъ постоянныя значенія, и соотношеніе

$$dz-pdx-qdy=0$$

удовлетворяется въ силу $dx=0$, $dy=0$, $dz=0$. Остальныя два изъ соотношеній (6)

$$dp-rdx-sdy=0$$
$$dq-sdx-tdy=0$$

удовлетворяются при произвольныхъ r, s, t, въ силу $dp=0$, $dq=0$, $dx=0$, $dy=0$. Такимъ образомъ, мы получаемъ многообразіе элементовъ 2-го порядка ***трехъ*** измѣреній, имѣющее носителемъ элементъ 1-го порядка (x, y, z, p, q). Индикатрисы элементовъ 2-го порядка, благодаря произволу r, s, t, образуютъ систему всевозможныхъ кривыхъ 2-го порядка, лежащихъ въ плоскости элемента

$$\zeta-z=p(\xi-x)+q(\eta-y)$$

и имѣющихъ общій центръ въ точкѣ (x, y, z) элемента. Если на произвольныя величины r, s, t наложимъ какое-либо условіе, выражаемое, напримѣръ, уравненіемъ

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0.$$

то изъ всего многообразія ***трехъ*** измѣреній выдѣлимъ многообразіе ***двухъ*** измѣреній, удовлетворяющее дифференціальнымъ соотношеніямъ (6); если потребуемъ, чтобы r, s, t удовлетворяли двумъ уравненіямъ

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0, \quad \Phi(x, y, z, p, q, r, s, t)=0,$$

то получимъ многообразіе одного измѣренія, для котораго тоже будутъ выполняться дифференціальныя соотношенія (6). Индикатрисы элементовъ этого многообразія образуютъ систему кривыхъ 2-го порядка, лежащихъ въ плоскости элемента (x, y, z, p, q) и имѣющихъ центръ въ точкѣ (x, y, z) элемента, но только эта система зависитъ не отъ трехъ параметровъ, какъ въ случаѣ произвольныхъ r, s, t, а лишь отъ одного. Если, напримѣръ, уравненія $F=0$, $\Phi=0$ — линейныя относительно r, s, t, то получаемъ пучокъ концентрическихъ кривыхъ 2-го порядка.

Пользуясь всѣми полученными результатами, мы можемъ приступить къ изслѣдованію интегральныхъ многообразій даннаго уравненія

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0. \qquad (1)$$

Прежде всего слѣдуетъ замѣтить, что изъ числа всѣхъ полученныхъ нами типовъ многообразій элементовъ 2-го порядка тѣ типы, которые соотвѣтствуютъ безконечнымъ значеніямъ координатъ элемента, могутъ считаться интегральными многообразіями даннаго уравненія (1) лишь съ особой, отчасти условной, точки зрѣнія, такъ какъ для нихъ дифференціальныя соотношенія (6) выполняются лишь въ несобственномъ смыслѣ.

Что касается до многообразій, для которыхъ координаты p и q сохраняютъ конечное значеніе, а r, s, t принимаютъ безконечныя значенія, то степень условности здѣсь значительно меньше: если ввести однородныя координаты $\omega, \rho, \sigma, \tau$ вмѣсто r, s, t, полагая $r = \frac{\rho}{\omega}$, $s = \frac{\sigma}{\omega}$, $t = \frac{\tau}{\omega}$, то уравненіе (1) приметъ видъ

$$F\left(x, y, z, p, q, \frac{\rho}{\omega}, \frac{\sigma}{\omega}, \frac{\tau}{\omega}\right) = 0, \tag{52}$$

и интегральныя многообразія, о которыхъ идетъ рѣчь, могутъ быть опредѣлены какъ многообразія, удовлетворяющія уравненію (52) и дифференціальнымъ соотношеніямъ

$$\left.\begin{aligned} dz - pdx - qdy &= 0 \\ \omega dp - \rho dx - \sigma dy &= 0 \\ \omega dq - \sigma dx - \tau dy &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

при $\omega = 0$. Различныхъ типовъ подобныхъ многообразій, согласно предыдущему, три: многообразіе, имѣющее носителемъ линію, многообразіе, имѣющее носителемъ точку, и наконецъ многообразіе, имѣющее носителемъ точку съ конусомъ плоскостей.

Разберемъ сначала, въ какихъ случаяхъ уравненіе допускаетъ интегральныя многообразія перваго типа и какъ можно опредѣлить эти многообразія, если они существуютъ. Для многообразія разсматриваемаго типа имѣемъ *)

$$\left.\begin{aligned} dz &= pdx + qdy \\ 0 &= \rho dx + \sigma dy \\ 0 &= \sigma dx + \tau dy \\ \omega &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

при чемъ z, x, y предполагаются функціями одного параметра, напримѣръ z и y — функціями x, а p и q связаны только соотношеніемъ

$$dz = pdx + qdy.$$

Изъ равенствъ (54) имѣемъ

$$p = \frac{dz}{dx} - q\frac{dy}{dx}$$

$$\sigma = -\tau\frac{dy}{dx}$$

$$\rho = -\sigma\frac{dy}{dx} = \tau\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

*) См. выше стр. 108.

гдѣ $\frac{d}{dx}$ есть знакъ обыкновенной производной. Если наше многообра есть интегральное многообразіе даннаго уравненія, то для него, слѣ вательно, должно удовлетворяться равенство, которое получимъ, встав. въ уравненіе (52) вмѣсто p, σ, ρ полученныя выраженія и пола $\omega = 0$, т. е. равенство

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx} - q\frac{dy}{dx}, q, \frac{\tau}{\omega}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2, -\frac{\tau}{\omega}\left(\frac{dy}{dx}\right), \frac{\tau}{\omega}\right) = 0 \qquad ($$

должно имѣть мѣсто при $\omega = 0$ и при *произвольныхъ* τ и q. Отс слѣдуетъ, что произвольно-выбранное уравненіе $F = 0$ (1), вооб говоря, не допускаетъ подобныхъ интегральныхъ многообразій, а е допускаетъ, то равенство (55) должно быть равносильно не болѣе, к двумъ уравненіямъ, свободнымъ отъ произвольныхъ величинъ; изъ эт уравненій, которыя могутъ вовсе не содержать производныхъ или будутъ обыкновенными дифференціальными уравненіями, опредѣлим и z въ функціи x; въ частности можетъ получиться и одно уравне Допустимъ, напримѣръ, что данное уравненіе (1) имѣетъ видъ

$$f\left(x, y, z, p - q\frac{r}{s}, p - q\frac{s}{t}, \frac{r}{s}, \frac{s}{t}\right) = 0. \qquad ($$

Тогда для опредѣленія интегральныхъ многообразій разсматриваем типа получаемъ уравненіе

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{-dy}{dx}, \frac{-dy}{dx}\right) = 0, \qquad ($$

въ которое не входитъ произвольныхъ величинъ, и слѣдовательно, опредѣленія кривой — носителя многообразія имѣемъ единственное д ференціальное уравненіе (57); примемъ $y = \psi(x)$, гдѣ ψ — знакъ п извольной функціи; проинтегрировавъ уравненіе

$$f\left(x, \psi(x), z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dx}, -\psi'(x), -\psi'(x)\right) = 0, \qquad ($$

получимъ z въ функціи x и будемъ имѣть систему кривыхъ, а слѣ вательно и систему интегральныхъ многообразій разсматриваемаго т зависящую отъ одной произвольной функціи.

Такъ, уравненіе

$$1 + p^2 + (q^2 + 1)\frac{r}{t} - pq\left(\frac{r}{s} + \frac{s}{t}\right) = 0$$

допускаетъ интегральныя многообразія, имѣющія носителями всевозможныя кривыя, удовлетворяющія дифференціальному уравненію

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0,$$

или

$$dx^2+dy^2+dz^2=0,$$

т. е. ***минимальныя*** кривыя пространства.

Переходимъ къ изысканію интегральныхъ многообразій второго типа. Для подобнаго многообразія имѣемъ *) $x=const.$, $y=const.$, $z=const.$, $\omega=0$ при произвольныхъ p, q, ρ, σ, τ; слѣдовательно, уравненіе

$$F\left(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ \frac{\rho}{\omega},\ \frac{\sigma}{\omega},\ \frac{\tau}{\omega}\right)=0 \tag{52}$$

должно удовлетворяться при $\omega=0$, при постоянныхъ x, y, z и при произвольныхъ p, q, ρ, σ, τ. Очевидно, для произвольно взятаго уравненія $F=0$ этого, вообще говоря, не будетъ; если же для даннаго уравненія окажется возможнымъ найти такія значенія x, y, z, при которыхъ равенство (52) имѣло бы мѣсто при $\omega=0$ и произвольныхъ p, q, ρ, σ, τ, то точка (x, y, z) будетъ служить для даннаго уравненія носителемъ интегральнаго многообразія разсматриваемаго типа. Самое опредѣленіе координатъ точки — носителя многообразія не представляетъ затрудненія. Въ самомъ дѣлѣ, благодаря произволу p, q, ρ, σ, τ, кромѣ уравненія (52), должны еще при тѣхъ же условіяхъ имѣть мѣсто равенства:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial F}{\partial p}=0,\ \dfrac{\partial F}{\partial q}=0,\ \dfrac{\partial F}{\partial \rho}=\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\partial F}{\partial r}=0,\ \dfrac{\partial F}{\partial \sigma}=\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\partial F}{\partial s}=0,\ \dfrac{\partial F}{\partial \tau}=\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\partial F}{\partial t}=0;\\ \qquad\dfrac{\partial^2 F}{\partial p^2}=0,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}=0,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial q^2}=0,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}=0,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial p\partial \rho}=0,\ldots;\end{array}\right\} \tag{58}$$

въ случаѣ существованія интегральнаго многообразія разсматриваемаго типа, всѣ эти равенства и уравненіе (52) должны быть эквивалентны не болѣе какъ тремъ уравненіямъ, не содержащимъ произвольныхъ величинъ p, q, ρ, σ, τ, изъ которыхъ и опредѣлимъ x, y, z. Важно замѣтить, что равенства (58) и (52) — не только необходимыя, но и достаточныя условія для того, чтобы точка (x, y, z), координаты которой при $\omega=0$ удовлетворяютъ этимъ равенствамъ, была носителемъ интегральнаго многообразія уравненія $F=0$. Изъ 3-го, 4-го и 5-го равенствъ (58) между прочимъ слѣдуетъ $\dfrac{\partial F}{\partial r}=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial s}=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial t}=0$.

*) Ср. выше стр. 112.

Въ видѣ примѣра уравненія, допускающаго интегральныя многообразія, носителями которыхъ служатъ точки, можно привести уравненіе

$$\frac{p^2}{r}+\frac{2pq}{s}+\frac{q^2}{t}+xp+yq=0,$$

или въ однородныхъ координатахъ

$$\omega\left(\frac{p^2}{\rho}+\frac{2pq}{\sigma}+\frac{q^2}{\tau}\right)+xp+yq=0.$$

Всѣ производныя 1-го порядка лѣвой части этого уравненія по ρ, σ, будутъ имѣть общимъ множителемъ ω; то же самое можемъ сказать про всѣ производныя второго и высшихъ порядковъ по какимъ угодно перемѣннымъ p, q, ρ, σ, τ. Слѣдовательно, всѣ эти производныя при $\omega=0$ исчезаютъ, и всѣ уравненія (58), кромѣ двухъ первыхъ, обращаются въ тождества. Остаются данное уравненіе и два первыхъ изъ (58); при $\omega=0$ эти три уравненія даютъ намъ

$$\begin{aligned} xp+yq&=0\\ x&=0\\ y&=0;\end{aligned}$$

первое, очевидно, слѣдуетъ изъ двухъ послѣднихъ; итакъ, всѣ точки оси служатъ носителями интегральныхъ многообразій даннаго уравненія.

Намъ остается разсмотрѣть интегральныя многообразія 3-го типа. Для подобнаго многообразія имѣемъ *) $x=const.$, $y=const.$, $z=const.$ p и q связаны однимъ соотношеніемъ, такъ что, напримѣръ, p есть функція q; $\omega=0$, наконецъ

$$\frac{\rho}{\sigma}=\frac{\sigma}{\tau}=\frac{dp}{dq};$$

слѣдовательно, уравненіе

$$F\left(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ \frac{\tau}{\omega}\left(\frac{dp}{dq}\right)^2,\ \frac{\tau}{\omega}\,\frac{dp}{dq},\ \frac{\tau}{\omega}\right)=0 \tag{59}$$

*) См. выше стр. 119.

должно удовлетворяться при постоянныхъ x, y, z, при $\omega = 0$ и при произвольномъ т. Очевидно, при произвольно-взятомъ уравненіи $F = 0$ (1) нельзя подобрать x, y, z такъ, чтобы равенство (59) имѣло мѣсто при $\omega = 0$ и произвольномъ т. Если же уравненіе (1) въ частности допускаетъ интегральныя многообразія разсматриваемаго типа, то при постоянныхъ опредѣленныхъ x, y, z, между p и q должно имѣть мѣсто единственное уравненіе. Въ силу произвола т, кромѣ равенства (59), должны имѣть мѣсто еще равенства, получаемыя дифференцированіемъ по т:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial F}{\partial r}\cdot\dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{dp}{dq}\right)^2+\dfrac{\partial F}{\partial s}\cdot\dfrac{1}{\omega}\,\dfrac{dp}{dq}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\cdot\dfrac{1}{\omega}=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\} \qquad (60)$$

Равенство (59) и всѣ равенства (60), при $\omega = 0$ и при постоянныхъ значеніяхъ x, y, z, должны сводиться къ одному соотношенію между q и p, которое можетъ содержать или не содержать $\dfrac{dp}{dq}$, такъ что p опредѣлимъ въ функціи q или рѣшеніемъ простого уравненія, или интегрированіемъ обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія. Для примѣра разсмотримъ уравненіе вида

$$f\left(x, y, z, p, q, \frac{r}{s}, \frac{s}{t}\right) = 0. \qquad (61)$$

Уравненіе (59) даетъ намъ

$$f\left(x, y, z, p, q, \frac{dp}{dq}, \frac{dp}{dq}\right) = 0. \qquad (62)$$

Такимъ образомъ, для любыхъ значеній x, y, z, p опредѣляется въ функціи q изъ одного уравненія, вообще говоря — дифференціальнаго 1-го порядка, и слѣдовательно, въ любой точкѣ пространства опредѣляется или одинъ опредѣленный конусъ плоскостей, или, вообще говоря, цѣлая система такихъ конусовъ, зависящая отъ одного произвольнаго параметра, при чемъ каждый конусъ со своей точкой образуетъ многообразіе элементовъ 1-го порядка одного измѣренія, служащее носителемъ интегральнаго многообразія даннаго уравненія.

Такъ, для уравненія

$$(p + x)\frac{r}{s} - x\frac{s}{t} + q = 0$$

изъ (62) получаемъ

$$p\frac{dp}{dq} + q = 0,$$

откуда

$$p^2 + q^2 = const.$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = const.,$$

т. е. плоскости элементовъ каждаго изъ многообразій одного измѣрені составляютъ съ осью z постоянный уголъ. Отсюда заключаемъ, чт всякая точка (x, y, z) дополняется до многообразія одного измѣрені служащаго носителемъ интегральнаго многообразія даннаго уравнені произвольнымъ круглымъ конусомъ съ осью параллельной оси z.

Для уравненія

$$p + q\left(\frac{r}{s} - \frac{s}{t}\right) = 0$$

изъ (62) получаемъ

$$p = 0;$$

слѣдовательно, произвольная точка (x, y, z) дополняется до многообр зія одного измѣренія, служащаго носителемъ интегральнаго многообр зія даннаго уравненія, пучкомъ плоскостей съ ребромъ паралле нымъ оси x.

Переходимъ теперь къ изслѣдованію интегральныхъ многообраз второй категоріи, для которыхъ координаты p и q принимаютъ безк нечныя значенія, и слѣдовательно плоскости элементовъ паралле оси z.

Съ геометрической точки зрѣнія эта особенность не предста ляетъ ничего существеннаго; но значительную трудность представляе здѣсь самое рѣшеніе вопроса, что слѣдуетъ разумѣть подъ *интеграл нымъ* многообразіемъ этой категоріи. Дѣйствительно, такъ какъ $p = \infty$, $q = \infty$, то изъ соотношеній

$$\begin{aligned} dp &= r dx + s dy \\ dq &= s dx + t dy \end{aligned}$$

r, s, t не могутъ быть опредѣлены, такъ что остается открытымъ в просъ, удовлетворяется ли для даннаго многообразія, опредѣленнаго основаніи геометрическихъ соображеній, уравненіе

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \qquad ($$

Если мы обратимся къ геометрической интерпретаціи элемента, то увидимъ, что въ данномъ случаѣ индикатрисы всѣхъ элементовъ лежатъ въ плоскостяхъ параллельныхъ оси z, и слѣдовательно проэкція индикатрисы на плоскость xy будетъ, вообще говоря, одна и та же, какъ бы ни измѣнялась сама индикатриса, именно это будетъ прямая, по которой плоскость элемента пересѣкаетъ плоскость xy. Между тѣмъ, для интерпретаціи координатъ r, s, t, мы пользовались именно проэкціей индикатрисы на плоскость xy, такъ какъ представляли индикатрису двумя уравненіями вида

$$\left.\begin{aligned} \zeta - z &= p(\xi - x) + q(\eta - y) \\ r(\xi - x)^2 + 2s(\xi - x)(\eta - y) + t(\eta - y)^2 &= k\sqrt{1 + p^2 + q^2}; \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

въ данномъ случаѣ уравненія индикатрисы нельзя привести къ такому виду *), и слѣдовательно, другимъ путемъ мы пришли къ невозможности опредѣлить r, s, t. Въ частности можетъ случиться, что индикатриса проектируется на плоскость xy парой точекъ или одной двукратно-взятой точкой; это будетъ въ томъ случаѣ, когда индикатриса обращается въ пару прямыхъ, параллельныхъ оси z, какъ напримѣръ для элементовъ многообразія, имѣющаго носителемъ цилиндръ $\varphi(x, y) = 0$, или въ одну двукратно-взятую прямую, параллельную оси z. Проэкція индикатрисы на плоскость xy въ этомъ случаѣ опредѣляетъ индикатрису, но зато въ Декартовыхъ координатахъ пара точекъ или одна точка не могутъ быть представлены однимъ уравненіемъ; мы опять встрѣчаемся съ невозможностью привести уравненія индикатрисы къ виду (5) и слѣдовательно найти r, s, t. Такимъ образомъ, представляется необходимымъ измѣнить систему координатъ x, y, z, p, q, r, s, t. Введемъ новую систему координатъ x, y, z, P, Q, R, S, T, гдѣ координаты x, y, z сохранены безъ измѣненія, P, Q опредѣляются какъ коэффиціенты въ уравненіи плоскости элемента, взятаго въ слѣдующемъ видѣ

$$\eta - y = P(\xi - x) + Q(\zeta - z), \quad (63)$$

а R, S, T — какъ коэффиціенты въ уравненіи проэкціи индикатрисы элемента на плоскость zx

$$R(\xi - x)^2 + 2S(\xi - x)(\zeta - z) + T(\zeta - z)^2 = k.\sqrt{1 + P^2 + Q^2}, \quad (64)$$

гдѣ k имѣетъ то же значеніе, какъ и во второмъ изъ уравненій (5). Едва ли слѣдуетъ добавлять, что уравненіе проэкціи индикатрисы на плоскость zx необходимо будетъ имѣть такой видъ, какой указанъ, т. е. не будетъ содержать первыхъ степеней $(\xi - x)$ и $(\zeta - z)$: это

*) И первое и второе уравненіе замѣняются уравненіемъ $p_1(\xi - x) + p_2(\eta - y) = 0$.

прямо слѣдуетъ изъ того, что индикатриса имѣетъ центръ въ точкѣ (x, y, z) и слѣдовательно, проэкція ея на плоскость zx имѣетъ центръ въ точкѣ (x, z). Чтобы найти связь между координатами p, q, r, s, t и P, Q, R, S, T, надо уравненія (63) и (64) привести къ виду уравненій (5). Изъ уравненія (63) непосредственно имѣемъ

$$\zeta - z = -\frac{P}{Q}(\xi - x) + \frac{1}{Q}(\eta - y). \quad (63')$$

Сравнивая съ первымъ изъ уравненій (5), получаемъ

$$p = -\frac{P}{Q}, \quad q = \frac{1}{Q} \quad (65)$$

и обратно

$$P = -\frac{p}{q}, \quad Q = \frac{1}{q}. \quad (65')$$

Вставляя въ уравненіе (64) значеніе $\zeta - z$ изъ уравненія (63′), получаемъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{RQ^2 - 2SPQ + TP^2}{Q^2}(\xi - x)^2 + 2\frac{SQ - TP}{Q^2}(\xi - x)(\eta - y) + \\ + \frac{T}{Q^2}(\eta - y)^2 = k.\sqrt{1 + P^2 + Q^2}. \end{aligned}\right\} \quad (64')$$

Чтобы сравнить это уравненіе со вторымъ изъ уравненій (5), надо предварительно установить связь между $\sqrt{1 + P^2 + Q^2}$ и $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$, такъ какъ является сомнѣніе относительно знака, который слѣдуетъ выбрать въ соотношеніи

$$\sqrt{1 + P^2 + Q^2} = \pm \frac{1}{q}\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \pm Q.\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

имѣющемъ мѣсто въ силу равенствъ (65). Чтобы разрѣшить это недоумѣніе, обратимся къ уравненію плоскости, отстоящей отъ плоскости элемента на разстояніе $\frac{1}{2}k$, въ которой мы первоначально разсматривали индикатрису.

Въ системѣ координатъ x, y, z, p, q, r, s, t уравненіе этой плоскости

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) + \frac{1}{2}\cdot k\sqrt{1 + p^2 + q^2}; \quad (66)$$

въ новой системѣ эта же плоскость, очевидно, представляется уравненіемъ

$$\eta - y = P(\xi - x) + Q(\zeta - z) + \frac{1}{2}\,k\sqrt{1 + P^2 + Q^2}, \qquad (67)$$

при чемъ знакъ корня условимся брать одинъ и тотъ же въ двухъ уравненіяхъ (64) и (67). Сравнивая уравненія (66) и (67), получаемъ

$$\sqrt{1 + P^2 + Q^2} = -\frac{1}{q}\sqrt{1 + p^2 + q^2} = -Q\sqrt{1 + p^2 + q^2}, \qquad (68)$$

и такимъ образомъ связь между $\sqrt{1 + P^2 + Q^2}$ и $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$ установлена. Сравнивая теперь уравненіе (64′) и второе изъ уравненій (5), получаемъ

$$r = \frac{-RQ^2 + 2SPQ - TP^2}{Q^3}; \quad s = \frac{PT - QS}{Q^3}; \quad t = -\frac{T}{Q^3}. \qquad (69)$$

Обратно, опредѣляя R, S, T, получаемъ

$$R = \frac{-rq^2 + 2spq - tp^2}{q^3}; \quad S = \frac{pt - qs}{q^3}; \quad T = -\frac{t}{q^3}. \qquad (69')$$

Формулы (65) и (69) или (65′) и (69′) устанавливаютъ связь между координатами старой и новой системы. Дифференціальныя соотношенія (6) въ новыхъ координатахъ принимаютъ видъ

$$\left.\begin{array}{c} dz + \dfrac{P}{Q}\,dx - \dfrac{1}{Q}\,dy = 0, \\ \dfrac{-dP}{Q} + \dfrac{PdQ}{Q^2} + \dfrac{RQ^2 - 2SPQ + TP^2}{Q^3}\,dx + \dfrac{QS - PT}{Q^3}\,dy = 0, \\ \dfrac{-dQ}{Q^2} + \dfrac{QS - PT}{Q^3}\,dx + \dfrac{T}{Q^3}\,dy = 0. \end{array}\right\} \qquad (70)$$

Первое соотношеніе, по освобожденіи отъ знаменателя и перемѣнѣ знака, даетъ намъ

$$dy - Pdx - Qdz = 0.$$

Если значеніе dy, полученное изъ этого равенства вставимъ въ третье изъ соотношеній (70) и умножимъ его на $-Q^2$, то получимъ

$$dQ - Sdx - Tdz = 0.$$

Наконецъ, если во второе изъ соотношеній (70) вставимъ ранѣе полученное значеніе dy и значеніе dQ изъ послѣдняго равенства и умножимъ все соотношеніе на $-Q$, то получимъ

$$dP - Rdx - Sdz = 0.$$

Итакъ, окончательно имѣемъ дифференціальныя соотношенія

$$\left.\begin{array}{l} dy - Pdx - Qdz = 0 \\ dP - Rdx - Sdz = 0 \\ dQ - Sdx - Tdz = 0. \end{array}\right\} \qquad (71)$$

Можно бы еще ввести однородныя координаты ω_1, ρ_1, σ_1, τ_1, полагая

$$R = \frac{\rho_1}{\omega_1}, \quad S = \frac{\sigma_1}{\omega_1}, \quad T = \frac{\tau_1}{\omega_1};$$

тогда дифференціальныя соотношенія (71) примутъ видъ

$$\left.\begin{array}{l} dy - Pdx - Qdz = 0 \\ \omega_1 dP - \rho_1 dx - \sigma_1 dz = 0 \\ \omega_1 dQ - \sigma_1 dx - \tau_1 dz = 0. \end{array}\right\} \qquad (71')$$

Если въ данное уравненіе $F = 0$ (1) вмѣсто координатъ p, q, r, s, t ввести координаты P, Q, R, S, T, пользуясь формулами (65) и (69), то получится новое уравненіе

$$\Phi(x, y, z, P, Q, R, S, T) = 0, \qquad (72)$$

при чемъ тождественно

$$\Phi(x, y, z, P, Q, R, S, T) = F(x, y, z, p, q, r, s, t).$$

Въ однородныхъ координатахъ уравненіе (72) принимаетъ видъ

$$\Phi\left(x, y, z, P, Q, \frac{\rho_1}{\omega_1}, \frac{\sigma_1}{\omega_1}, \frac{\tau_1}{\omega_1}\right) = 0. \qquad (72')$$

Для многообразій разсматриваемой категоріи плоскости элементовъ параллельны оси z; слѣдовательно, въ уравненіи

$$\eta - y = P(\xi - x) + Q(\zeta - z) \qquad (63)$$

членъ, содержащій координату ζ, долженъ исчезать, для чего необходимо $Q = 0$. Итакъ, интегральныя многообразія разсматриваемой категоріи могутъ быть опредѣлены какъ многообразія, для которыхъ при

$Q=0$ удовлетворяются уравненіе (72) и дифференціальныя соотношенія (71) или иначе уравненіе (72′) и дифференціальныя соотношенія (71′).

Различныхъ типовъ многообразій разсматриваемой категоріи, согласно предыдущему, всего три: многообразіе, имѣющее носителемъ цилиндръ, образующія котораго параллельны оси z, многообразіе, имѣющее носителемъ прямую, параллельную оси z, и наконецъ многообразіе, имѣющее носителемъ многообразіе элементовъ 1-го порядка одного измѣренія, для котораго развертывающаяся поверхность плоскостей элементовъ обращается въ цилиндръ съ образующими параллельными оси z.

Для интегральнаго многообразія 1-го типа имѣемъ

$$y = y(x) \tag{73}$$

въ силу уравненія цилиндра (или обратно x есть функція y; разсужденія въ этомъ предположеніи остаются тѣ же); первое изъ соотношеній (71) даетъ во-первыхъ $Q=0$, какъ и слѣдовало ожидать, и во-вторыхъ

$$P = \frac{dy}{dx}; \tag{74}$$

третье изъ соотношеній (71) даетъ

$$S=0, \quad T=0, \tag{75}$$

и наконецъ, второе даетъ

$$R = \frac{d^2y}{dx^2}. \tag{76}$$

Такимъ образомъ, для интегральнаго многообразія 1-го типа должно удовлетворяться уравненіе (72) при $Q=0$, при произвольномъ z и при значеніяхъ y, P, Q, R, S, T, опредѣляемыхъ равенствами (73), (74), (75) и (76), т. е. должно удовлетворяться обыкновенное дифференціальное уравненіе

$$\Phi\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx},\ 0,\ \frac{d^2y}{dx^2},\ 0,\ 0\right) = 0 \tag{77}$$

при произвольномъ z. Отсюда слѣдуетъ, во-первыхъ, что произвольно-выбранное уравненіе

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t) = 0, \tag{1}$$

вообще говоря, вовсе не допускаетъ подобныхъ интегральныхъ многообразій, и во-вторыхъ, что въ случаѣ существованія интегральныхъ

многообразій разсматриваемаго типа, для опредѣленія ихъ приходится интегрировать обыкновенное дифференціальное уравненіе не выше 2-го порядка или даже произвести простое исключеніе. Въ самомъ дѣлѣ благодаря произволу z, кромѣ уравненія (77), должны имѣть мѣсто еще всѣ уравненія

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \ldots\ldots; \tag{78}$$

въ общемъ случаѣ уравненія (77) и (78), очевидно, несовмѣстны; въ частности, въ данномъ случаѣ они совмѣстны при произвольномъ z, и должны приводиться не болѣе какъ къ одному уравненію, не содержащему z, въ которое могутъ входить или не входить производныя $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Такъ, уравненіе

$$\frac{(rq^2-2spq+tp^2)^2}{q^6} + \frac{(z^2+1)(pt-qs)^2}{p^6} - \frac{(1+p^2+q^2)^3}{q^6} = 0$$

въ системѣ координатъ x, y, z, P, Q, R, S, T принимаетъ видъ

$$R^2 + \frac{z^2+1}{P^6}\cdot S^2 - (P^2+Q^2+1)^3 = 0;$$

слѣдовательно, уравненіе (77) въ данномъ случаѣ будетъ

$$y''^2 - (y'^2+1)^3 = 0,$$

гдѣ $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$; уравненія (78) всѣ обращаются въ тождества $0=0$, такъ какъ z не вошло въ окончательное уравненіе. По интеграціи получаемъ

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = 1,$$

гдѣ α, β — произвольныя постоянныя; слѣдовательно, данное уравненіе допускаетъ интегральныя многообразія, имѣющія носителями всевозможные круглые цилиндры радіуса $= 1$ съ образующими параллельными оси z.

Уравненіе

$$-\frac{x}{q^3}(rq^2-2spq+tp^2) - \frac{y}{p^3}(pt-qs) + \frac{z}{q}(px+qy) = 0$$

въ системѣ координатъ x, y, z, P, Q, R, S, T принимаетъ видъ

$$xR + \frac{y}{P^3}\cdot S - zxP + zy = 0;$$

уравненіе (77) въ данномъ случаѣ будетъ

$$xy'' - z(xy' - y) = 0,$$

гдѣ y' и y'' имѣютъ вышеуказанныя обычныя значенія; первое изъ уравненій (78) даетъ

$$xy' - y = 0;$$

остальныя обращаются въ тождества. Изъ уравненія $xy'-y=0$ слѣдуетъ $y''=0$, слѣдовательно первое изъ полученныхъ уравненіе удовлетворяется въ силу второго; интегрируя это послѣднее, имѣемъ

$$y = \alpha x,$$

гдѣ α — произвольное постоянное; слѣдовательно, данное уравненіе допускаетъ интегральныя многообразія, носителями которыхъ служатъ всевозможныя плоскости, проходящія черезъ ось z.

Уравненіе

$$\frac{pt-qs}{p^3} - 2\frac{p}{q} + \frac{z^2}{q} + 2zy - x^2z - 2x = 0$$

въ системѣ координатъ x, y, z, P, Q, R, S, T принимаетъ видъ

$$-\frac{S}{P^3} + 2P + z^2Q + 2zy - x^2z - 2x = 0;$$

уравненіе (77) даетъ

$$2y' + z(2y - x^2) - 2x = 0,$$

первое изъ уравненій (78)—

$$2y - x^2 = 0,$$

остальныя обращаются въ тождества. Изъ уравненія $2y-x^2=0$ имѣемъ $2y'-2x=0$, слѣдовательно первое изъ полученныхъ равенствъ удовлетворяется въ силу второго; такимъ образомъ, данное уравненіе допускаетъ интегральное многообразіе, имѣющее носителемъ параболическій цилиндръ

$$2y = x^2.$$

Для интегральнаго многообразія 2-го типа имѣемъ

$$x = const., \quad y = const. \tag{79}$$

при произвольномъ z. Дифференціальныя соотношенія беремъ въ формѣ (71'); первое изъ нихъ даетъ намъ $Q=0$ при произвольномъ P, какъ и слѣдовало ожидать, такъ какъ уравненіе плоскости элемента должно имѣть видъ

$$\eta - y = P(\xi - x),$$

гдѣ P — произвольный параметръ. Второе изъ соотношеній (71') въ силу независимости дифференціаловъ dP и dz даетъ

$$\omega_1 = 0, \quad \sigma_1 = 0; \tag{80}$$

наконецъ, третье даетъ

$$\tau_1 = 0. \tag{81}$$

Такимъ образомъ, для интегральнаго многообразія 2-го типа должно имѣть мѣсто уравненіе (72') при $Q=0$, при произвольныхъ z, P, ρ_1 и при $\omega_1=0$, $\sigma_1=0$, $\tau_1=0$. Благодаря произволу z, P, ρ_1, кромѣ уравненія (72'), очевидно, имѣютъ мѣсто еще уравненія

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial P} = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\rho_1} = 0, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0, \ \ldots\ldots; \tag{82}$$

слѣдовательно, произвольно заданное уравненіе $F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$ (1), вообще говоря, не допускаетъ интегральныхъ многообразій 2-го типа, а если допускаетъ, то опредѣленіе ихъ (т. е. опредѣленіе значеній x и y) сводится къ исключенію неизвѣстныхъ изъ уравненій (72') и (82). Можно поступить иначе: уравненіе въ неоднородныхъ координатахъ

$$\Phi(x, y, z, P, Q, R, S, T) = 0 \tag{72}$$

можно привести къ виду

$$G\left(x, y, z, P, Q, \frac{1}{R}, \frac{S}{R}, \frac{T}{R}\right) = 0; \tag{83}$$

въ силу формулъ, связывающихъ координаты R, S, T съ $\omega_1, \rho_1, \sigma_1, \tau_1$,

$$R = \frac{\rho_1}{\omega_1}, \quad S = \frac{\sigma_1}{\omega_1}, \quad T = \frac{\tau_1}{\omega_1},$$

имѣемъ въ данномъ случаѣ

$$\frac{1}{R} = 0, \quad \frac{S}{R} = 0, \quad \frac{T}{R} = 0.$$

и слѣдовательно, для интегральнаго многообразія разсматриваемаго типа должно имѣть мѣсто уравненіе

$$G(x,\ y,\ z,\ P,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) = 0 \tag{84}$$

при произвольныхъ z и P, а слѣдовательно и всѣ уравненія

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial G}{\partial P} = 0,\ \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = 0, \ldots\ldots \tag{85}$$

Такъ, уравненіе

$$xy + yz + zx + \frac{z^2 + x^2 + y^2}{q} + \frac{p^3 + t}{rq^2 - 2spq + tp^2} = 0$$

въ координатахъ $x,\ y,\ z,\ P,\ Q,\ R,\ S,\ T$ принимаетъ видъ

$$xy + yz + zx + (z^2 + x^2 + y^2).\,Q + P^3.\frac{1}{R} + \frac{T}{R} = 0;$$

уравненіе (84) даетъ

$$xy + z(x+y) = 0,$$

уравненія (85) даютъ

$$x + y = 0;$$

въ силу послѣдняго равенства, изъ предыдущаго имѣемъ $xy = 0$ и окончательно $x = 0$, $y = 0$; слѣдовательно, данное уравненіе допускаетъ интегральное многообразіе, носителемъ котораго служитъ ось z.

Для интегральнаго многообразія 3-го типа имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} y &= y(x), & z &= z(x)\ ^{*)} \\ P &= P(x), & Q &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Первыя два уравненія опредѣляютъ кривую, образуемую точками элементовъ; въ силу $Q = 0$, плоскости элементовъ параллельны оси z. Первое изъ дифференціальныхъ соотношеній (71) опредѣляетъ функцію $P(x)$; изъ него именно получаемъ

$$P = \frac{dy}{dx}. \tag{87}$$

---

*) Можно бы за независимое перемѣнное принять y; разсужденія останутся тѣ же.

Второе и третье изъ тѣхъ же дифференціальныхъ соотношеній даютъ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = R + S\frac{dz}{dx}$$

$$0 = S + T\frac{dz}{dx},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} S &= -T\frac{dz}{dx} \\ R &= \frac{d^2y}{dx^2} + T\left(\frac{dz}{dx}\right)^2, \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

при чемъ T остается произвольнымъ. Такимъ образомъ, для интегральнаго многообразія 3-го типа должно имѣть мѣсто уравненіе

$$\Phi\left(x.\ y.\ z.\ \frac{dy}{dx},\ 0,\ \frac{d^2y}{dx^2} + T\left(\frac{dz}{dx}\right)^2,\ -T\frac{dz}{dx}.\ T\right) = 0 \tag{89}$$

при произвольномъ T. Благодаря произволу T, должны имѣть мѣсто и всѣ уравненія

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} = 0,\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} = 0. \ldots\ldots \tag{90}$$

гдѣ подъ Φ разумѣемъ лѣвую часть уравненія (89). Очевидно, для произвольно выбраннаго уравненія $F(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r.\ s.\ t) = 0$, уравненія (89) и (90). вообще говоря, не совмѣстны; въ случаѣ существованія интегральныхъ многообразій разсматриваемаго типа, уравненія (89) и (90) сводятся не болѣе, какъ къ двумъ уравненіямъ, не содержащимъ T. притомъ или не заключающимъ вовсе производныхъ y и z, или обыкновеннымъ дифференціальнымъ совокупнымъ—порядка не выше двухъ относительно y и единицы относительно z; изъ этихъ уравненій найдемъ кривую точекъ элементовъ многообразія.

Такъ, уравненіе

$$\frac{-rq^2 + 2spq - tp^2}{q^3} + \frac{(pt - qs)^2}{q^6} - \frac{zxyp}{q^2} = 0$$

въ системѣ координатъ $x,\ y,\ z,\ P,\ Q,\ R,\ S,\ T$ принимаетъ видъ

$$R + S^2 + zxyPQ = 0;$$

слѣдовательно, уравненіе (89) въ данномъ случаѣ будетъ

$$y'' + Tz'^2 + T^2z'^2 = 0,$$

гдѣ $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$. $z' = \dfrac{dz}{dx}$. Уравненія (90) даютъ

$$z'^2 + 2Tz'^2 = 0$$
$$2z'^2 = 0.$$

Въ концѣ концовъ получаемъ

$$z' = 0, \quad y'' = 0,$$

откуда

$$y = \alpha x + \beta, \quad z = \gamma,$$

гдѣ α, β, γ — произвольныя постоянныя; слѣдовательно, данное уравненіе допускаетъ интегральныя многообразія, имѣющія носителями многообразія элементовъ 1-го порядка одного измѣренія, для которыхъ точки элементовъ располагаются на прямыхъ параллельныхъ плоскости xy, а развертывающіяся поверхности плоскостей элементовъ обращаются въ плоскости параллельныя оси z.

Разсмотримъ еще уравненіе

$$\frac{-zp}{q} + \frac{y}{t}(qs - pt) + \frac{rt - s^2}{q^2 t} = 0.$$

Въ системѣ координатъ x, y, z P, Q, R, S, T оно принимаетъ видъ

$$zP + y \cdot \frac{S}{T} - Q\frac{RT - S^2}{T} = 0,$$

и слѣдовательно уравненіе (89) въ данномъ случаѣ будетъ

$$zy' - yz' = 0.$$

Для опредѣленія z и y въ функціи x мы получили единственное уравненіе, свободное отъ T; полагая

$$y = \psi(x),$$

гдѣ ψ — знакъ произвольной функціи, получаемъ

$$\frac{z'}{z} = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)},$$

откуда

$$z = \alpha\psi(x),$$

гдѣ α — произвольное постоянное.

Изъ уравненій

$$y = \psi(x), \quad z = \alpha\psi(x)$$

получаемъ еще

$$z = \alpha y;$$

такимъ образомъ, многообразія элементовъ 1-го порядка одного изм рснія, служащія носителями интегральныхъ многообразій 3-го типа, д даннаго уравненія образуютъ систему, зависящую отъ произволь функціи: за кривую точекъ элементовъ можно взять любую плоск кривую въ любой изъ плоскостей, проходящихъ черезъ ось x.

Изслѣдованіе всѣхъ интегральныхъ многообразій 2-й катего (соотвѣтствующихъ безконечнымъ значеніямъ p, q) можно вести ины путемъ, который впрочемъ приводитъ къ тѣмъ же выкладкамъ. Во въ чемъ онъ заключается: измѣнимъ систему Декартовыхъ координа x, y, z, принявъ за новую ось z прежнюю ось y и наоборотъ, други словами совершимъ „преобразованіе точекъ", опредѣляемое равенства

$$z_1 = y, \quad y_1 = z, \quad x_1 = x. \qquad (9$$

Въ главѣ I мы видѣли, что всякое преобразованіе точекъ можно „р пространить" на элементы 1-го порядка, и тогда получается (нес ственное) преобразованіе прикосновенія; далѣе (§ 4) мы увидимъ, всякое преобразованіе прикосновенія можно „распространить" на э менты 2-го порядка, т. е. опредѣлить r_1, s_1, t_1 въ функціи x, y, z, p, r, s, t такъ, чтобы при существованіи дифференціальныхъ соотноше

$$dz - pdx - qdy = 0$$
$$dp - rdx - sdy = 0$$
$$dq - sdx - tdy = 0$$

имѣли бы мѣсто и соотношенія

$$dp_1 - r_1 dx_1 - s_1 dy_1 = 0$$
$$dq_1 - s_1 dx_1 - t_1 dy_1 = 0$$

(соотношеніе $dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = 0$ тоже имѣетъ мѣсто, такъ ка мы распространяли преобразованіе *прикосновенія*). Итакъ, преобразо ніе точекъ, опредѣляемое равенствами (91), можно распространить слѣдовательно на элементы 1-го и 2-го порядка; формулы преобра ванія будутъ

$$p_1 = -\frac{p}{q}, \quad q_1 = \frac{1}{q}, \quad r_1 = \frac{-rq^2 + 2spq - tp^2}{q^3}, \quad s_1 = \frac{pt - qs}{q^3}, \quad t_1 = -\frac{t}{q^3}. \quad ($$

Въ силу равенствъ (91) и (92) данное уравненіе $F(x, y, z, p, q, r, s, t) =$ (1) преобразуется въ новое

$$F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1) = 0, \qquad ($$

интегральныя многообразія перваго — вообще въ интегральныя многообразія второго, многообразія, плоскости элементовъ которыхъ параллельны оси z, — въ многообразія, плоскости элементовъ которыхъ параллельны оси y_1. Такимъ образомъ, все дѣло сводится къ изысканію интегральныхъ многообразій уравненія (93), для которыхъ $q_1 = 0$. Если мы сравнимъ формулы (92) съ прежде выведенными формулами (65′) и (69′), то увидимъ, что

$$p_1 = P,\quad q_1 = Q,\quad r_1 = R,\quad s_1 = S.\quad t_1 = T,$$

и слѣдовательно, новый методъ въ примѣненіи своемъ совпадаетъ съ нашимъ прежнимъ; вся разница въ опредѣленіи, которое мы implicite дали интегральнымъ многообразіямъ разсматриваемой категоріи: именно, на основаніи предыдущаго, ихъ слѣдуетъ опредѣлить, какъ многообразія, которыя преобразованіемъ, распространеннымъ изъ преобразованія точекъ (91), преобразуются въ такія *интегральныя* многообразія преобразованнаго уравненія (93), для которыхъ $q_1 = 0$, т. е. плоскости элементовъ параллельны оси y_1.

Аналогично можно поступать и для опредѣленія интегральныхъ многообразій 1-й категоріи: распространимъ на элементы 2-го порядка преобразованіе Лежандра (см. гл. I, § 2, стр. 27, рав. 44); тогда дѣло сведется къ опредѣленію, для преобразованнаго уравненія, интегральныхъ многообразій, имѣющихъ носителями или нѣкоторую развертывающуюся поверхность, или плоскость, или, наконецъ, многообразіе элементовъ 1-го порядка одного измѣренія, образуемое точками плоской кривой и плоскостью, въ которой она лежитъ.

Резюмируя всѣ наши результаты, можемъ сказать, что произвольно взятое уравненіе

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \qquad (1)$$

вообще говоря, вовсе не допускаетъ тѣхъ особенныхъ интегральныхъ многообразій, для которыхъ координаты элементовъ получаютъ безконечныя значенія; а если допускаетъ, то опредѣленіе этихъ интегральныхъ многообразій требуетъ не болѣе, какъ интеграціи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій и, какъ сейчасъ было указано, можетъ быть приведено къ опредѣленію такихъ интегральныхъ многообразій, для которыхъ всѣ координаты сохраняютъ конечныя значенія. На этомъ основаніи мы можемъ исключительно ограничиться въ дальнѣйшемъ инте-

гральными многообразіями съ конечными значеніями координатъ, д которыхъ дифференціальныя соотношенія

$$\left.\begin{aligned} dz - pdx - qdy &= 0 \\ dp - rdx - sdy &= 0 \\ dq - sdx - tdy &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad ($$

выполняются въ собственномъ, безусловномъ смыслѣ.

Всякое многообразіе элементовъ второго порядка, удовлетворя щее дифференціальнымъ соотношеніямъ (6), условимся обозначать си воломъ $M^{(i)}_{j,k}$, при чемъ верхній индексъ указываетъ число измѣре всего многообразія элементовъ 2-го порядка, первый изъ нижнихъ число измѣреній многообразія, образуемаго элементами 1-го поряд входящими въ составъ элементовъ 2-го порядка, а второй изъ ни нихъ—число измѣреній многообразія, образуемаго точками элементо Тогда типы интегральныхъ многообразій, которые намъ осталось р смотрѣть, могутъ быть обозначены слѣдующими символами:

$$M^{(3)}_{0,0};\ M^{(2)}_{0,0};\ M^{(1)}_{0,0};\ M^{(2)}_{1,1};\ M^{(1)}_{1,1};\ M^{(2)}_{2,2}. \qquad ($$

Символы $M^{(3)}_{0,0}$, $M^{(2)}_{1,1}$, $M^{(2)}_{2,2}$ обозначаютъ многообразія, имѣющія сителями первое — элементъ 1-го порядка, второе — многообразіе э ментовъ 1-го порядка одного измѣренія, для котораго точки элементо образуютъ нѣкоторую линію, и наконецъ, третье—поверхность.

Всѣ интегральныя многообразія даннаго уравненія

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

для которыхъ, при данныхъ нижнихъ индексахъ символа, верхній имѣе значеніе меньшее наибольшаго изъ возможныхъ, легко могутъ б найдены. Въ самомъ дѣлѣ, пусть символъ многообразія—$M^{(i)}_{j,k}$, а на большее изъ возможныхъ значеній верхняго индекса при данныхъ ни нихъ j, k есть m; тогда многообразіе, символъ котораго $M^{(m)}_{j,k}$, е многообразіе, имѣющее *носителемъ* многообразіе элементовъ 1-го рядка j измѣреній, для котораго точки элементовъ образуютъ мно образіе k измѣреній. Число измѣреній многообразія элементовъ 2 порядка, очевидно, не можетъ быть меньше числа измѣреній мно образія, образуемаго элементами 1-го порядка (а число измѣреній слѣдняго, очевидно, не меньше числа измѣреній многообразія, об зуемаго точками элементовъ); слѣдовательно $i \geqq j$, а такъ какъ по условію $m > i$, то слѣдовательно необходимо

$$m > j,$$

т. е. число измѣреній многообразія $M^{(m)}_{j,\,k}$ болѣе числа измѣреній его носителя. Это показываетъ намъ, что, при опредѣленіи r, s, t изъ дифференціальныхъ соотношеній (6) по даннымъ выраженіямъ x, y, z, p, q въ функціи j параметровъ (въ силу уравненій многообразія—носителя многообразія $M^{(m)}_{j,\,k}$), по крайней мѣрѣ одна изъ величинъ r, s, t, а именно $m - j$ изъ нихъ, должны остаться вполнѣ произвольными, для того, чтобы полное число произвольныхъ параметровъ для многообразія $M^{(m)}_{j,\,k}$ равнялось m. Для опредѣленія всѣхъ интегральныхъ многообразій даннаго уравненія (1) типа $M^{(i)}_{j,\,k}$ можно, слѣдовательно, поступать такъ: возьмемъ *произвольное* многообразіе элементовъ 1-го порядка j измѣреній, для котораго точки элементовъ образуютъ многообразіе k измѣреній и которое удовлетворяетъ соотношенію

$$dz - pdx - qdy = 0,$$

опредѣлимъ многообразіе элементовъ 2-го порядка $M^{(m)}_{j,\,k}$, для котораго выбранное нами служитъ носителемъ, и присоединимъ къ его уравненіямъ данное уравненіе

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{1}$$

и еще $m - i - 1$ произвольныхъ уравненій того же вида:

$$\varphi l(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, m-i-1). \tag{95}$$

Мы получимъ многообразіе элементовъ 2-го порядка i измѣреній, для котораго дифференціальныя соотношенія (6), очевидно, удовлетворяются, такъ какъ эти самыя соотношенія удовлетворялись при $m - j$ произвольныхъ изъ числа трехъ величинъ r, s, t, а мы наложили на нихъ $m - i < m - j$ новыхъ условій, выражаемыхъ уравненіями (1) и (95); такъ какъ въ число уравненій многообразія $M^{(i)}_{j,\,k}$ входитъ данное уравненіе (1), то полученное многообразіе, очевидно, есть *интегральное* многообразіе типа $M^{(i)}_{j,\,k}$. Понятно, что подобнымъ пріемомъ опредѣлимъ всевозможныя интегральныя многообразія даннаго типа, такъ какъ многообразіе элементовъ 1-го порядка j измѣреній мы выбрали *произвольно*, уравненія многообразія $M^{(m)}_{j,\,k}$ получаются исключительно изъ

дифференціальныхъ соотношеній (6), которыя должны имѣть мѣсто для *всѣхъ* интегральныхъ многообразій, уравненіе (1) тоже должно имѣть мѣсто для *всѣхъ* интегральныхъ многообразій и наконецъ, уравненія (95) мы опять таки взяли вполнѣ *произвольно*. Въ главѣ I-й (§ 1) мы видѣли, что всевозможныя многообразія элементовъ 1-го порядка, удовлетворяющія соотношенію

$$dz - pdx - qdy = 0,$$

опредѣляются безъ всякой интеграціи; въ настоящей главѣ (стр. 102—121) равнымъ образомъ убѣдились, что по данному многообразію элементовъ 1-го порядка, удовлетворяющему соотношенію

$$dz - pdx - qdy = 0,$$

многообразіе элементовъ 2-го порядка, для котораго данное многообразіе служитъ носителемъ, опредѣляется тоже безъ всякой интеграціи: слѣдовательно, опредѣленіе всевозможныхъ интегральныхъ многообразій даннаго уравненія типа $M^{(i)}_{j,\,k}$, гдѣ i при данныхъ j, k имѣетъ значеніе меньшее наибольшаго изъ возможныхъ, совершается безъ всякой интеграціи. Обращаясь къ таблицѣ (94) типовъ интегральныхъ многообразій уравненія, мы на основаніи предыдущаго заключаемъ, что безъ всякой интеграціи могутъ быть опредѣлены интегральныя многообразія типовъ $M^{(2)}_{0,\,0}$, $M^{(1)}_{0,\,0}$, $M^{(1)}_{1,\,1}$.

Въ первомъ случаѣ, согласно общей теоріи, мы должны прежде всего взять произвольный элементъ 1-го порядка (x, y, z, p, q) и опредѣлить многообразіе $M^{(3)}_{0,\,0}$, для котораго (x, y, z, p, q) служитъ носителемъ. Уравненія этого многообразія (см. выше стр. 120):

$$x = const., \; y = const., \; z = const., \; p = const., \; q = const.,$$

при произвольныхъ r, s, t. Присоединяя еще данное уравненіе $F=0$ (1), получаемъ всего шесть уравненій

$$\left.\begin{array}{c} x = const., \; y = const., \; z = const., \; p = const., \; q = const., \\ F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \end{array}\right\} \tag{96}$$

опредѣляющихъ интегральное многообразіе типа $M^{(2)}_{0,\,0}$; мы видимъ, что всевозможныя интегральныя многообразія этого типа составляютъ семейство, зависящее отъ *пяти* произвольныхъ постоянныхъ — значеній координатъ x, y, z, p, q. Собственно говоря, намъ уже приходилось имѣть дѣло (см. стр. 101) съ этимъ семействомъ: именно, мы упоминали о системѣ кривыхъ 2-го порядка опредѣляемыхъ даннымъ уравненіемъ (1) для каждаго элемента 1-го порядка (x, y, z, p, q); очевидно, индикатрисы элементовъ многообразія $M^{(2)}_{0,0}$ и образуютъ какъ разъ такую систему кривыхъ. Такимъ образомъ, интегральныя многообразія типа $M^{(2)}_{0,0}$ играютъ такую же роль по отношенію къ уравненію 2-го порядка, какую интегральныя многообразія, образуемыя точкой и конусомъ плоскостей (T), — по отношенію къ уравненію 1-го порядка (ср. гл. I, § 1, стр. 2). Систему кривыхъ 2-го порядка, опредѣляемыхъ даннымъ уравненіемъ $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ (1) для даннаго элемента (x, y, z, p, q), или, что то же, систему индикатрисъ элементовъ интегральнаго многообразія $M^{(2)}_{0,0}$ условимся называть системой Σ.

Для опредѣленія интегральныхъ многообразій типа $M^{(1)}_{0,0}$, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, мы должны взять произвольный элементъ (x, y, z, p, q), но уравненія многообразія $M^{(3)}_{0,0}$, имѣющаго носителемъ (x, y, z, p, q) должны дополнить уже *двумя* уравненіями — даннымъ уравненіемъ (1) и произвольнымъ уравненіемъ $\varphi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$. Такимъ образомъ, произвольное интегральное многообразіе уравненія (1) типа $M^{(1)}_{0,0}$ опредѣляется уравненіями

$$\left.\begin{array}{c} x = const.,\ y = const.,\ z = const.,\ p = const.,\ q = const. \\ F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,\quad \varphi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \end{array}\right\} \qquad (97)$$

Семейство всевозможныхъ интегральныхъ многообразій этого типа, очевидно, зависитъ отъ пяти произвольныхъ постоянныхъ и произвольной функціи. Индикатрисы элементовъ многообразія $M^{(1)}_{0,0}$ составляютъ систему кривыхъ 2-го порядка съ однимъ параметромъ, принадлежащую, очевидно, къ системѣ Σ для даннаго элемента (x, y, z, p, q) и выдѣляемую изъ этой системы добавочнымъ условіемъ $\varphi = 0$.

Наибольшій интересъ представляютъ тѣ изъ многообразій типа $M^{(1)}_{0,0}$, для которыхъ системы индикатрисъ состоятъ изъ паръ параллельныхъ прямыхъ. Условіе распаденія кривой 2-го порядка

$$r(\xi - x)^2 + 2s(\xi - x)(\eta - y) + t(\eta - y)^2 = k\sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

на пару параллельныхъ прямыхъ (равно отстоящихъ отъ точки (x, y, z)) есть

$$rt - s^2 = 0;$$

слѣдовательно, за добавочное условіе $\varphi = 0$ для этого случая надо принять именно $rt - s^2 = 0$, и уравненія интегральнаго многообразія будутъ

$$\left.\begin{array}{c} x = const.,\ y = const.,\ z = const.,\ p = const.,\ q = const., \\ F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,\ rt - s^2 = 0. \end{array}\right\} \qquad (97')$$

Пары прямыхъ, которыя служатъ индикатрисами элементовъ этого многообразія, облекаютъ нѣкоторую кривую K, для которой точка (x, y, z), очевидно, служитъ центромъ симметріи и которая обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что касательныя въ концахъ діаметровъ, проходящихъ черезъ (x, y, z), параллельны между собою. Уравненіе проэкціи кривой K на плоскость xy, очевидно, получимъ, исключая $r, s, t, \frac{ds}{dr}, \frac{dt}{dr}$ изъ уравненій

$$\left.\begin{array}{c} r(\xi - x)^2 + 2s(\xi - x)(\eta - y) + t(\eta - y)^2 = k.\sqrt{1 + p^2 + q^2} \\ F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \\ rt - s^2 = 0 \\ (\xi - x)^2 + 2\frac{ds}{dr}(\xi - x)(\eta - y) + \frac{dt}{dr}(\eta - y)^2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial s}\frac{ds}{dr} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{dt}{dr} = 0 \\ t - 2s\frac{ds}{dr} + r\frac{dt}{dr} = 0. \end{array}\right\} \qquad (98)$$

Первое изъ этихъ уравненій, въ силу второго и третьяго, представляетъ систему паръ параллельныхъ прямыхъ — проэкцій индикатрисъ элементовъ многообразія $M^{(1)}_{0,0}$; система эта зависитъ отъ одного параметра r, при чемъ s и t предполагаемъ функціями r, опредѣляемыми изъ 2-го и 3-го уравненій; 4-е уравненіе получено дифференцированіемъ 1-го по параметру r, 5-е и 6-е опредѣляютъ производныя $\frac{ds}{dr}$ и $\frac{dt}{dr}$. Чтобы получить уравненія кривой K, остается къ системѣ (98) присоединить уравненіе плоскости элемента

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y). \qquad (98')$$

Кривая K всецѣло опредѣляется даннымъ уравненіемъ

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0;$$

это есть одна изъ коваріантныхъ кривыхъ системы коническихъ сѣченій Σ.

Для опредѣленія интегральныхъ многообразій типа $M^{(1)}_{1,1}$ мы должны, согласно общей теоріи, взять произвольное многообразіе элементовъ 1-го порядка одного измѣренія, образуемое точками нѣкоторой кривой и плоскостями нѣкоторой описанной развертывающейся поверхности, и опредѣлить многообразіе элементовъ 2-го порядка $M^{(2)}_{1,1}$, для котораго упомянутое многообразіе одного измѣренія служитъ носителемъ. Уравненія кривой, образуемой точками элементовъ 1-го многообразія, предположимъ въ видѣ

$$y = y(x), \quad z = z(x);$$

координаты p и q — тоже нѣкоторыя функціи x

$$p = p(x), \quad q = q(x),$$

но связанныя условіемъ

$$z'(x) = p + q \cdot y'(x)$$

(ср. выше стр. 113, рав. 29), такъ что уравненія 1-го многообразія — слѣдующія:

$$y = y(x), \quad z = z(x), \quad q = q(x), \quad p = z'(x) - q \cdot y'(x).$$

Уравненія многообразія $M^{(2)}_{1,1}$ будутъ

$$\left.\begin{array}{c} y = y(x),\ z = z(x),\ q = q(x),\ p = z'(x) - q \cdot y'(x), \\ r + s \cdot y'(x) = z''(x) - q \cdot y''(x) - q'(x) \cdot y'(x), \\ s + t \cdot y'(x) = q'(x); \end{array}\right\} \qquad (99)$$

они получаются изъ выведенныхъ выше уравненій (29) и (31) (стр. 114), если за произвольный параметръ u выбрать координату x. Присоединяя къ уравненіямъ (99) данное уравненіе

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \qquad (1)$$

получаемъ уравненія произвольнаго интегральнаго многообразія $M^{(1)}_{1,1}$. Семейство всевозможныхъ интегральныхъ многообразій этого типа зависитъ отъ трехъ произвольныхъ функцій одного аргумента

$$y(x), \quad z(x), \quad q(x).$$

Интегральныя многообразія типа $M^{(1)}_{1,1}$ можно опредѣлить еще иначе. Возьмемъ произвольное многообразіе типа $M^{(2)}_{2,2}$, т. е. многообразіе,

имѣющее носителемъ произвольную поверхность. Если уравненіе эт
поверхности предположимъ въ видѣ

$$z = z(x, y),$$

то уравненія многообразія $M^{(2)}_{2,2}$ будутъ (ср. выше стр. 104, рав. (10'

$$z = z(x, y),\ p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Присоединяемъ къ этимъ уравненіямъ данное уравненіе $F = 0$ (1), к
торое принимаетъ видъ

$$F\left(z, x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0;$$

въ силу этого уравненія, между x и y устанавливается связь, такъ ч
напримѣръ, получаемъ

$$y = y(x),$$

и слѣдовательно, всѣ прочія координаты z, p, q, r, s, t тоже выра
ются черезъ x, и мы получаемъ, очевидно, интегральное многообра
типа $M^{(1)}_{1,1}$. Не трудно доказать, что и такимъ путемъ получимъ
возможныя интегральныя многообразія даннаго типа; интересно за
тить, что семейство ихъ зависитъ отъ *одной* произвольной функ
$z(x, y)$, между тѣмъ какъ ранѣе мы видѣли, что это же семейство
виситъ отъ трехъ произвольныхъ функцій $y(x), z(x), q(x)$; но проти
рѣчія здѣсь нѣтъ, такъ какъ функція $z(x, y)$ есть произвольная функ
двухъ аргументовъ, а функціи $y(x), z(x), q(x)$ — произвольныя функ
одного аргумента.

Намъ осталось разсмотрѣть интегральныя многообразія тип
$M^{(3)}_{0,0}$, $M^{(2)}_{1,1}$ и $M^{(2)}_{2,2}$.

Для того, чтобы уравненіе

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

допускало интегральныя многообразія 1-го типа, необходимо, чтобы удовлетворялось при нѣкоторыхъ постоянныхъ значеніяхъ $x, y, z,$
и при вполнѣ произвольныхъ r, s, t, такъ какъ для всякаго многоо
зія типа $M^{(3)}_{0,0}$ имѣемъ

$$x = const., \quad y = const., \quad z = const., \quad p = const., \quad q = const.$$

1(

при произвольныхъ r, s, t (см. выше стр. 120). Отсюда ясно, что произвольно-взятое уравненіе $F=0$, вообще говоря, не допускаетъ подобныхъ интегральныхъ многообразій, а если допускаетъ, то координаты x, y, z, p, q элемента — носителя многообразія опредѣляются изъ уравненія (1) и уравненій

$$\frac{\partial F}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial s}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}=0,\ldots, \tag{100}$$

которыя вмѣстѣ съ уравненіемъ (1) въ этомъ случаѣ должны сводиться не болѣе какъ къ пяти уравненіямъ, не содержащимъ r, s, t.

Такъ, для уравненія

$$Rr+Ss+Tt+U(rt-s^2)=V,$$

гдѣ R, S, T, U, V—функціи перемѣнныхъ x, y, z, p, q, уравненія (100) даютъ:

$$R+Ut=0,\quad S-2Us=0,\quad T+Ur=0,\quad -2U=0,\quad U=0.$$

Эти уравненія, вмѣстѣ съ первоначальнымъ, даютъ пять уравненій

$$R=0,\quad S=0,\quad T=0,\quad U=0,\quad V=0,$$

свободныхъ отъ r, s, t, изъ которыхъ, вообще говоря, найдемъ одну или нѣсколько системъ значеній x, y, z, p, q — координатъ элементовъ 1-го порядка — носителей интегральныхъ многообразій типа $M^{(3)}_{0,0}$.

Изслѣдуемъ далѣе интегральныя многообразія типа $M^{(2)}_{1,1}$. Уравненія произвольнаго многообразія $M^{(2)}_{1,1}$ мы уже вывели выше (см. стр. 113 и 114, рав. 29, 31); принимая за параметръ u одну изъ координатъ, напримѣръ x, напишемъ ихъ такъ:

$$\begin{gathered} y=y(x),\quad z=z(x),\quad q=q(x),\\ p=z'(x)-q\,.\,y'(x),\quad s=q'(x)-t\,.\,y'(x),\\ r=z''(x)-q\,.\,y''(x)-2q'(x)\,.\,y'(x)+t\,.\,y'^2(x), \end{gathered}$$

гдѣ t остается произвольнымъ (ср. выше рав. 99).

Такимъ образомъ, для интегральнаго многообразія разсматриваемаго типа должно удовлетворяться уравненіе

$$F(x,y,z,z'(x)-q.y'(x),q,z''(x)-q.y''(x)-2q'(x).y'(x)+ty'^2(x),q'(x)-ty'(x),t)=0 \tag{101}$$

при произвольномъ t. а слѣдовательно и всѣ уравненія

$$\frac{\partial F}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=0,\ldots.. \tag{102}$$

гдѣ подъ F разумѣемъ лѣвую часть уравненія (101). Очевидно, произвольно-взятое уравненіе $F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$ (1) не допускаетъ интегральныхъ многообразій разсматриваемаго типа, а если допускаетъ то уравненія (101) и (102) сводятся не болѣе, какъ къ тремъ уравне ніямъ, свободнымъ отъ t, изъ которыхъ опредѣляемъ y, z, q въ функ ціи x; уравненія эти могутъ содержать производныя $z'(x)$, $z''(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, $q'(x)$, и слѣдовательно, опредѣленіе интегральныхъ многообразі типа $M^{(2)}_{1,1}$ въ томъ случаѣ, когда они существуютъ, требуетъ не бо лѣе, какъ интеграціи обыкновенныхъ дифференціальныхъ совокупных уравненій.

Вмѣсто того, чтобы выражать координату p черезъ q изъ уравнені многообразія $M^{(2)}_{1,1}$, мы можемъ сохранить ее, прибавляя лишь диффе ренціальное соотношеніе

$$dz-pdx-qdy=0.$$

и тогда можемъ сказать, что для интегральнаго многообразія тип $M^{(2)}_{1,1}$ должны имѣть мѣсто дифференціальныя уравненія

$$\left.\begin{aligned} &dz-pdx-qdy=0\\ &F\left(x,y,z,p,q,\frac{dp}{dx}-\frac{dq}{dx}\,\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,\ \frac{dq}{dx}-t\frac{dy}{dx},\ t\right)=0. \end{aligned}\right\}(101$$

при произвольномъ t и при x, y, z, p, q—функціяхъ одного парамет[ра] u или въ частности — при y, z, p, q — функціяхъ x.

Ниже (гл. IV) намъ придется подробно говорить объ интеграл[ь]ныхъ многообразіяхъ типа $M^{(2)}_{1,1}$; замѣтимъ заранѣе, что многообра[з]... элементовъ 1-го порядка одного измѣренія, которое служитъ носит[е]лемъ интегральнаго многообразія $M^{(2)}_{1,1}$, называется *характеристи[че]скимъ* многообразіемъ 1-го порядка даннаго уравненія.

Намъ остается разсмотрѣть интегральныя многообразія типа $M^{(2}_{2,}$ т. е. интегральныя многообразія, имѣющія носителями поверхнос[ти]. Такъ какъ случай цилиндра съ образующими параллельными ос[и] заранѣе исключенъ, то уравненіе поверхности—носителя многообразія можемъ всегда привести къ виду

$$z = z(x, y),$$

и тогда для многообразія $M_{2,2}^{(2)}$ будемъ имѣть

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

(см. выше стр. 104, рав. 10′). Такимъ образомъ, для интегральнаго многообразія разсматриваемаго типа должно удовлетворяться уравненіе

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (103)$$

при x, y — независимыхъ перемѣнныхъ и z — функціи x и y; другими словами, уравненіе $F = 0$ (1) въ этомъ случаѣ дѣйствительно является уравненіемъ съ *частными* производными 2-го порядка, и если мы найдемъ функцію $z(x, y)$, удовлетворяющую уравненію (103), то будемъ имѣть *интегралъ* даннаго уравненія въ обычномъ смыслѣ слова. Интегральное многообразіе $M_{2,2}^{(2)}$ будемъ въ этомъ случаѣ называть тоже интеграломъ, поверхность, опредѣляемую уравненіемъ $z = z(x, y)$,—интегральной поверхностью.

Въ результатѣ всего обзора различныхъ типовъ интегральныхъ многообразій даннаго уравненія получается, что всѣ интегральныя многообразія, кромѣ интеграловъ въ собственномъ смыслѣ, могутъ быть найдены или безъ интеграціи или интегрированіемъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій. Что касается интеграловъ даннаго уравненія, то вопросъ объ изысканіи ихъ и даже вопросъ объ ихъ существованіи остаются для насъ пока открытыми.

§ **2.**—Введемъ теперь понятіе объ элементахъ высшаго порядка и сначала объ элементѣ *третьяго* порядка.

Элементомъ 3-го порядка будемъ называть систему значеній перемѣнныхъ $x, y, z, p, q, r, s, t, z''', z_{,}'', z_{,,}', z_{,,,}$, которыя будемъ называть координатами элемента; въ составъ каждаго элемента 3-го порядка, очевидно, входитъ опредѣленный элементъ 2-го порядка (x, y, z, p, q, r, s, t). *Многообразіемъ* элементовъ 3-го порядка будемъ называть совокупность элементовъ, получаемыхъ при измѣненіи произвольныхъ параметровъ $u, v, \ldots$, въ функціи которыхъ предполагаемъ выраженными координаты

$x, y, z, p, q, r, s, t, z''', z_{,}'', z_{,,}', z_{,,,}$. Разсмотримъ многообразія элементовъ 3-го порядка, удовлетворяющія дифференціальнымъ соотношеніямъ

$$\left.\begin{aligned} dz - pdx - qdy &= 0 \\ dp - rdx - sdy &= 0 \\ dq - sdx - tdy &= 0 \\ dr - z'''dx - z_{,}''dy &= 0 \\ ds - z_{,}''dx - z_{,,}'dy &= 0 \\ dt - z_{,,}'dx - z_{,,,}dy &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (104)$$

Элементы 2-го порядка (x, y, z, p, q, r, s, t), входящіе въ составъ элементовъ подобнаго многообразія, образуютъ, очевидно, нѣкоторое многообразіе, для котораго имѣютъ мѣсто первыя три изъ соотношеній (104) т. е. одно изъ тѣхъ многообразій, которыя мы изслѣдовали въ § 1. Такимъ образомъ, чтобы найти всевозможныя многообразія элементовъ 3-го порядка, удовлетворяющія дифференціальнымъ соотношеніямъ (104), надо брать всевозможныя многообразія элементовъ 2-го порядка, удовлетворяющія дифференціальнымъ соотношеніямъ

$$\left.\begin{aligned} dz - pdx - qdy &= 0 \\ dp - rdx - sdy &= 0 \\ dq - sdx - tdy &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6$$

и затѣмъ опредѣлять координаты $z''', z_{,}'', z_{,,}', z_{,,,}$ такъ, чтобы удовлетво рялись соотношенія

$$\left.\begin{aligned} dr - z'''dx - z_{,}''dy &= 0 \\ ds - z_{,}''dx - z_{,,}'dy &= 0 \\ dt - z_{,,}'dx - z_{,,,}dy &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (105$$

Если многообразіе элементовъ 3-го порядка вполнѣ опредѣляется п взятому многообразію элементовъ 2-го порядка, т. е. если координат $z''', z_{,}'', z_{,,}', z_{,,,}$ опредѣляются исключительно изъ соотношеній (105 безъ всякихъ добавочныхъ условій, то многообразіе элементовъ 2-г порядка будемъ называть *носителемъ* многообразія элементовъ 3-го п рядка. Допустимъ, что для взятаго нами многообразія элементовъ 2-г порядка, кромѣ соотношеній (6), удовлетворяется уравненіе

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \qquad (1$$

т. е. другими словами допустимъ, что мы имѣемъ интегральное много образіе уравненія (1). Для многообразія элементовъ 3-го порядк удовлетворяющаго дифференціальнымъ соотношеніямъ (104), въ составъ элементовъ котораго входятъ элементы взятаго нами интегральнаго многообразія, очевидно, выполняется уравненіе

$$dF = \frac{\partial F}{\partial r}dr + \frac{\partial F}{\partial s}ds + \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial p}dp + \frac{\partial F}{\partial q}dq + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \\ + \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0;$$

вставляя вмѣсто dr, ds, dt, dp, dq, dz значенія, получаемыя изъ соотношеній (104), имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial F}{\partial r}z''' + \frac{\partial F}{\partial s}z_{,}'' + \frac{\partial F}{\partial t}z_{,,}' + \frac{\partial F}{\partial p}r + \frac{\partial F}{\partial q}s + \frac{\partial F}{\partial z}p + \frac{\partial F}{\partial x}\right)dx + \\ &+\left(\frac{\partial F}{\partial r}z_{,}'' + \frac{\partial F}{\partial s}z_{,,}' + \frac{\partial F}{\partial t}z_{,,,} + \frac{\partial F}{\partial p}s + \frac{\partial F}{\partial q}t + \frac{\partial F}{\partial z}q + \frac{\partial F}{\partial y}\right)dy = 0. \end{aligned}\right\} \quad (106)$$

Соотношеніе (106) имѣетъ мѣсто для всякаго многообразія элементовъ 3-го порядка, полученнаго указаннымъ пріемомъ; тѣ многообразія, для которыхъ отдѣльно обращаются въ нуль множители при dx и dy въ лѣвой части соотношенія (106), мы будемъ называть *интегральными многообразіями 3-го порядка* даннаго уравненія (1); при этомъ интегральныя многообразія, составленныя изъ элементовъ 2-го порядка, которыя мы разсматривали въ § 1-мъ, будемъ или по прежнему называть интегральными многообразіями, безъ всякаго добавленія, или иногда—интегральными многообразіями 2-го порядка. Интегральное многообразіе 3-го порядка, на основаніи предыдущаго, можно опредѣлить какъ многообразіе элементовъ 3-го порядка, для котораго удовлетворяются дифференціальныя соотношенія (104), данное уравненіе

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \qquad (1)$$

и два уравненія:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial r}z''' + \frac{\partial F}{\partial s}z_{,}'' + \frac{\partial F}{\partial t}z_{,,}' + \frac{\partial F}{\partial p}r + \frac{\partial F}{\partial q}s + \frac{\partial F}{\partial z}p + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial F}{\partial r}z_{,}'' + \frac{\partial F}{\partial s}z_{,,}' + \frac{\partial F}{\partial t}z_{,,,} + \frac{\partial F}{\partial p}s + \frac{\partial F}{\partial q}t + \frac{\partial F}{\partial z}q + \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (107)$$

Слѣдуетъ замѣтить, что эти послѣднія уравненія не независимы: если умножимъ 1-е на dx, 2-е на dy и сложимъ, то получимъ уравненіе (106), которое есть слѣдствіе соотношеній (104) и даннаго уравненія $F=0$ (1).

Частныя производныя лѣвой части уравненія $F = 0$ (1) по x, y, z, p, q, r, s, t для краткости будемъ впослѣдствіи иногда обозначать соотвѣтственно черезъ X, Y, Z, P, Q, R, S, T: при этихъ обозначеніяхъ уравненія (107) принимаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} &Rz''' + Sz_{,}'' + Tz_{,,}' + Pr + Qs + Zp + X = 0 \\ &Rz_{,}'' + Sz_{,,}' + Tz_{,,,} + Ps + Qt + Zq + Y = 0. \end{aligned}\right\} \quad (107')$$

Если для даннаго уравненія $F = 0$ (1) опредѣлены всѣ интегральныя многообразія 2-го порядка, то опредѣленіе интегральныхъ многообразій 3-го порядка не требуетъ никакихъ интеграцій, такъ какъ, согласно предыдущему, все дѣло сводится къ опредѣленію z''', $z_{,}''$, $z_{,,}'$, $z_{,,,}$ изъ уравненій (105) и (107) и, можетъ быть, нѣкоторыхъ добавочныхъ произвольно-выбранныхъ условій

$$\varphi_i(x, y, z, p, q, r, s, t, z''', z_{,}'', z_{,,}', z_{,,,}) = 0 \qquad (108)$$

по даннымъ выраженіямъ координатъ x, y, z, p, q, r, s, t въ функціи нѣсколькихъ произвольныхъ параметровъ, опредѣляющимъ произвольное интегральное многообразіе 2-го порядка даннаго уравненія $F=0$ (1).

Возьмемъ, напримѣръ, интегральное многообразіе 2-го порядка типа $M^{(2)}_{2,2}$, имѣющее носителемъ поверхность

$$z = z(x, y). \qquad (109)$$

т. е. другими словами возьмемъ *интегралъ* уравненія (1). Тогда имѣемъ (ср. § 1 стр. 96 и стр. 104, рав. 10'):

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \qquad (110)$$

при чемъ x и y — независимыя перемѣнныя. Соотношенія (105) принимаютъ видъ

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dy = z'''dx + z_{,}''dy \\ &\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dy = z_{,}''dx + z_{,,}'dy \\ &\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dx + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy = z_{,,}'dx + z_{,,,}dy. \end{aligned}$$

откуда, вслѣдствіе независимости dx и dy,

$$z''' = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad z_{,}'' = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad z_{,,}' = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y^2}, \quad z_{,,,} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2}. \qquad (111)$$

Уравненія (107) для значеній $z, p, q, r, s, t, z''', z_{,}'', z_{,,}', z_{,,,}$ опредѣляемыхъ равенствами (109), (110), (111), удовлетворяются тождественно, такъ какъ обращаются въ равенства

$$\frac{dF}{dx}=0, \quad \frac{dF}{dy}=0, \tag{112}$$

гдѣ $\frac{d}{dx}$ и $\frac{d}{dy}$ — символы полныхъ производныхъ по x и по y, а равенства (112) получаются дифференцированіемъ по x и по y даннаго уравненія $F=0$ (1), которое по условію удовлетворяется для значеній z, p, q, r, s, t, опредѣляемыхъ равенствами (109) и (110). Мы получили всѣ координаты элемента 3-го порядка въ функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y и, слѣдовательно, получили интегральное многообразіе 3-го порядка *двухъ* измѣреній. При этомъ, значенія координатъ $z''', z_{,}'', z_{,,}', z_{,,,}$ опредѣлены исключительно изъ дифференціальныхъ соотношеній (105); слѣдовательно, полученное интегральное многообразіе 3-го порядка имѣетъ *носителемъ* интегральное многообразіе $M^{(2)}_{2,2}$, которое въ свою очередь имѣетъ носителемъ поверхность

$$z=z(x, y); \tag{109}$$

эту поверхность будемъ потому называть также носителемъ полученнаго нами интегральнаго многообразія 3-го порядка.

Разсмотримъ еще тотъ случай, когда интегральное многообразіе 2-го порядка есть многообразіе типа $M^{(1)}_{1,1}$. Уравненія его предположимъ въ видѣ

$$x=x(u),\ y=y(u),\ z=z(u),\ p=p(u),\ q=q(u),\ r=r(u),\ s=s(u),\ t=t(u), \tag{113}$$

гдѣ u — произвольный параметръ. При этомъ, очевидно, тождественно имѣютъ мѣсто соотношенія

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0 \tag{1}$$

и

$$\left.\begin{aligned} z'(u)&=p.x'(u)+q.y'(u)\\ p'(u)&=r.x'(u)+s.y'(u)\\ q'(u)&=s.x'(u)+t.y'(u). \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

Послѣднія три слѣдуютъ изъ дифференціальныхъ соотношеній (6). Обращаясь къ соотношеніямъ (105), получаемъ изъ нихъ три линейныхъ относительно $z''', z_{,}'', z_{,,}', z_{,,,}$ уравненія:

$$\left.\begin{aligned} r'(u)&=z'''.x'(u)+z_{,}''.y'(u)\\ s'(u)&=z_{,}''.x'(u)+z_{,,}'.y'(u)\\ t'(u)&=z_{,,}'.x'(u)+z_{,,,}.y'(u); \end{aligned}\right\} \tag{115}$$

остальныя два уравненія (107), которыя должны имѣть мѣсто для интегральнаго многообразія 3-го порядка, какъ было выше упомянуто, не независимы при существованіи уравненій (115) и равенствъ (114) и (1); въ данномъ случаѣ то линейное сочетаніе (106) уравненій (107), которое есть слѣдствіе равенствъ (115), (114) и (1), принимаетъ видъ

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}z'''+\frac{\partial F}{\partial s}z_{,}''+\frac{\partial F}{\partial t}z_{,,}'+\frac{\partial F}{\partial p}r+\frac{\partial F}{\partial q}s+\frac{\partial F}{\partial z}p+\frac{\partial F}{\partial x}\right).x'(u)+$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial r}z_{,}''+\frac{\partial F}{\partial s}z_{,,}'+\frac{\partial F}{\partial t}z_{,,,}+\frac{\partial F}{\partial p}s+\frac{\partial F}{\partial q}t+\frac{\partial F}{\partial z}q+\frac{\partial F}{\partial y}\right).y'(u)=0.$$

Для опредѣленія четырехъ координатъ $z''', z_{,}'', z_{,,}', z_{,,,}$ мы получаемъ такимъ образомъ, вообще говоря, четыре независимыхъ линейныхъ уравненія, изъ которыхъ опредѣлимъ эти координаты въ функціи u и получимъ интегральное многообразіе 3-го порядка *одного* измѣренія.

Въ частности можетъ случиться, что для выбраннаго интегральнаго многообразія $M^{(1)}_{1,1}$ не только линейное сочетаніе (106) уравненій (107), но и каждое изъ этихъ уравненій въ отдѣльности окажутся слѣдствіями уравненій (115) и равенствъ (114) и (1). Тогда для опредѣленія четырехъ координатъ $z''', z_{,}'', z_{,,}', z_{,,,}$ получимъ только *три* уравненія (115), которыя, какъ легко видѣть, всегда независимы, и слѣдовательно, три изъ координатъ $z''', z_{,}'', z_{,,}', z_{,,,}$ выразятся въ функціи параметра u и четвертой координаты, которая остается произвольной. Мы получимъ, такимъ образомъ, интегральное многообразіе 3-го порядка двухъ измѣреній; такъ какъ координаты $z''', z_{,}'', z_{,,}', z_{,,,}$ опредѣлены нами исключительно изъ дифференціальныхъ соотношеній (105), которыя въ данномъ случаѣ принимаютъ видъ уравненій (115), то можемъ сказать, что полученное нами интегральное многообразіе 3-го порядка имѣетъ *носителемъ* интегральное многообразіе $M^{(1)}_{1,1}$.

Интегральныя многообразія $M^{(1)}_{1,1}$, служащія носителями интегральныхъ многообразій 3-го порядка двухъ измѣреній, имѣютъ особое значеніе въ теоріи уравненій съ частными производными 2-го порядка и носятъ названіе *характеристическихъ многообразій 2-го порядка* даннаго уравненія; въ главѣ IV мы займемся ихъ опредѣленіемъ и увидимъ, что задача эта сводится къ интеграціи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Въ началѣ настоящаго § мы упомянули, что всѣ многообразія элементовъ 3-го порядка, удовлетворяющія дифференціальнымъ соотношеніямъ (104), получаются изъ многообразій элементовъ 2-го порядка, удовлетворяющихъ дифференціальнымъ соотношеніямъ (6). При этомъ мы, собственно, опустили одно очевидное рѣшеніе уравненій (104): именно, легко видѣть, что всѣ эти уравненія удовлетворяются при

$$x = const.,\ y = const.,\ z = const.,\ p = const.,\ q = const.,\ r = const.,$$
$$s = const.,\ t = const.$$

и произвольныхъ z''', $z_{,}''$, $z_{,,}'$, $z_{,,,}$, т. е. для многообразія четырехъ измѣреній, имѣющаго носителемъ элементъ 2-го порядка (x, y, z, p, q, r, s, t). Точно такъ же уравненіямъ (1), (104), (107), которыя должны выполняться для всякаго интегральнаго многообразія 3-го порядка, можно удовлетворить иначе, чѣмъ мы предполагали въ общей теоріи: возьмемъ опять

$$x = const.,\ y = const.,\ z = const.,\ p = const.,\ q = const.,\ r = const.,$$
$$s = const.,\ t = const.,$$

при чемъ постоянныя значенія x, y, z, p, q, r, s, t выберемъ такъ, чтобы удовлетворялось данное уравненіе $F = 0$ (1); соотношенія (104) удовлетворяются при произвольныхъ z''', $z_{,}''$, $z_{,,}'$, $z_{,,,}$, и такимъ образомъ остаются два уравненія (107), которыя въ данномъ случаѣ независимы, такъ какъ уравненіе (106), которое въ общемъ случаѣ получалось линейнымъ сочетаніемъ уравненій (107), здѣсь исчезаетъ благодаря $dx = 0$, $dy = 0$. Мы получаемъ, слѣдовательно, интегральное многообразіе 3-го порядка *двухъ* измѣреній, выдѣляемое уравненіями (107) изъ многообразія четырехъ измѣреній, носителемъ котораго служитъ элементъ (x, y, z, p, q, r, s, t), удовлетворяющій данному уравненію $F = 0$ (1). Подобныя интегральныя многообразія, понятно, не представляютъ существеннаго интереса: всякое уравненіе допускаетъ систему подобныхъ интегральныхъ многообразій, зависящую отъ *семи* произвольныхъ постоянныхъ, такъ какъ изъ 8-ми координатъ элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) семь можно выбрать произвольно, а восьмая опредѣляется изъ уравненія $F = 0$ (1).

Элементъ третьяго порядка $(x, y, z, p, q, r, s, t, z''', z_{,}'', z_{,,}', z_{,,,})$ можетъ быть интерпретированъ геометрически при помощи нѣкоторой кривой 3-го порядка.

Разсмотримъ сначала элементъ 3-го порядка, принадлежащій многообразію, носителемъ котораго служитъ поверхность

$$z = z(x, y). \tag{116}$$

Для упомянутаго многообразія имѣемъ (ср. выше стр. 153 рав. 110 и 111).

$$\left.\begin{aligned} &p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\\ &z''' = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ z_{,}'' = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y},\ z_{,,}' = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},\ z_{,,,} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3},\end{aligned}\right\} \tag{117}$$

и при даныхъ значеніяхъ x и y получимъ опредѣленный элементъ 3-го порядка. Разсмотримъ сѣченіе поверхности (116) съ плоскостью безконечно-близкой къ касательной плоскости въ точкѣ (x, y, z) и параллельной ей; въ силу первыхъ трехъ изъ равенствъ (117), уравненіе этой плоскости можетъ быть написано такъ:

$$\zeta - z - p(\xi - x) - q(\eta - y) = \frac{1}{2} k . \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \tag{118}$$

гдѣ k — безконечно-малое постоянное, а ξ, η, ζ — текущія координаты. Координаты точекъ линіи пересѣченія этой плоскости съ поверхностью — носителемъ многообразія удовлетворяютъ уравненію (118) и уравненію

$$\zeta = z(\xi, \eta). \tag{116$'$}$$

Разлагая ζ въ рядъ Taylor-а въ смежности значеній $\xi = x$, $\eta = y$ и принимая во вниманіе равенства (116) и (117), замѣняемъ уравненіе (116′) слѣдующимъ:

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) + \frac{1}{2}[r(\xi - x)^2 + 2s(\xi - x)(\eta - y) + t(\eta - y)^2] +$$
$$+ \frac{1}{2.3}[z'''(\xi - x)^3 + 3z_{,}''(\xi - x)^2(\eta - y) + 3z_{,,}'(\xi - x)(\eta - y)^2 + z_{,,,}(\eta - y)^3] + \ldots \tag{119}$$

Уравненія (118) и (119) опредѣляютъ кривую пересѣченія плоскости и поверхности. Если въ разложеніи по ряду Taylor-а ограничимся членами до третьяго порядка включительно и сдѣлаемъ еще упрощеніе на основаніи уравненія (118), то получимъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} &\zeta - z - p(\xi - x) - q(\eta - y) = \frac{1}{2} k . \sqrt{1 + p^2 + q^2}\\ &z'''(\xi - x)^3 + 3z_{,}''(\xi - x)^2(\eta - y) + 3z_{,,}'(\xi - x)(\eta - y)^2 + z_{,,,}(\eta - y)^3 +\\ &+ 3r(\xi - x)^2 + 6s(\xi - x)(\eta - y) + 3t(\eta - y)^2 = 3k . \sqrt{1 + p^2 + q^2},\end{aligned}\right\} \tag{120}$$

опредѣляющія нѣкоторую кривую 3-го порядка—такъ называемую индикатрису 3-го порядка или кубическую индикатрису; кривая эта съ точностью до безконечно-малыхъ четвертаго порядка представляетъ сѣченіе поверхности (116) съ плоскостью (118). Для бо́льшаго удобства перенесемъ кубическую индикатрису въ касательную плоскость; тогда ея уравненія будутъ:

$$\left.\begin{array}{c} \zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) \\ z'''(\xi-x)^3+3z_{,}''(\xi-x)^2(\eta-y)+3z_{,,}'(\xi-x)(\eta-y)^2+z_{,,,}(\eta-y)^3+ \\ +3r(\xi-x)^2+6s(\xi-x)(\eta-y)+3t(\eta-y)^2=3k.\sqrt{1+p^2+q^2}. \end{array}\right\} \quad (121)$$

Уравненія эти зависятъ только отъ координатъ элемента 3-го порядка $(x, y, z, p, q, r, s, t, z''', z_{,}'', z_{,,}', z_{,,,})$; поэтому произвольный элементъ $(x, y, z, p, q, r, s, t, z''', z_{,}'', z_{,,}', z_{,,,})$ можемъ интерпретировать кривой 3-го порядка, опредѣляемой уравненіями (121), гдѣ k нѣкоторое постоянное (хотя бы и не безконечно-малое). Кривую эту и въ общемъ случаѣ будемъ называть *кубической индикатрисой*; второе изъ уравненій (121) есть вмѣстѣ съ тѣмъ уравненіе проэкціи кубической индикатрисы на плоскость xy; сама индикатриса лежитъ въ плоскости

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y).$$

Если мы на ряду съ кубической индикатрисой разсмотримъ квадратичную индикатрису

$$\left.\begin{array}{c} \zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) \\ r(\xi - x)^2 + 2s(\xi - x)(\eta - y) + t(\eta - y)^2 = k.\sqrt{1 + p^2 + q^2}. \end{array}\right\} \quad (122)$$

которой пользуемся для интерпретаціи элемента 2-го порядка (x, y, z, p, q, r, s, t), входящаго въ составъ даннаго элемента 3-го порядка, то увидимъ, что 6 точекъ пересѣченія обѣихъ индикатрисъ опредѣлятся изъ уравненій (122) и уравненія

$$z'''(\xi-x)^3+3z_{,}''(\xi-x)^2(\eta-y)+3z_{,,}'(\xi-x)(\eta-y)^2+z_{,,,}(\eta-y)^3=0. \quad (123)$$

Первое изъ уравненій (122) и уравненіе (123) представляютъ три прямыхъ, проходящихъ черезъ точку (x, y, z) на плоскости

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

и имѣющихъ направленіе асимптотъ кубической индикатрисы. Такимъ образомъ, кубическая индикатриса пересѣкаетъ квадратичную въ трехъ парахъ діаметрально-противоположныхъ точекъ, при чемъ три опредѣ-

ляемыхъ ими діаметра квадратичной индикатрисы параллельны асимпт[о]тамъ кубической индикатрисы.

Второе изъ уравненій (121) не содержитъ членовъ 1-го измѣрені[я] относительно $(\xi - x)$, $(\eta - y)$; отсюда слѣдуетъ, что когда мы будем[ъ] искать точки пересѣченія кубической индикатрисы съ произвольно[й] прямой, проходящей черезъ точку (x, y, z) и опредѣляемой уравненіям[и]

$$\left.\begin{array}{c} \xi - x = \rho.\cos\alpha \\ \eta - y = \rho.\cos\beta \\ \zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y). \end{array}\right| \quad (124)$$

гдѣ ρ разстояніе точки (ξ, η, ζ) отъ (x, y, z), а α и β — углы прямо[й] съ осями x и y,—то для опредѣленія ρ получимъ уравненіе, не соде[р]жащее 1-й степени неизвѣстнаго. Называя три корня этого уравнен[ія] черезъ ρ_1, ρ_2, ρ_3, будемъ поэтому имѣть

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} = 0. \quad (125)$$

т. е. сумма обратныхъ величинъ отрѣзковъ отъ точки (x, y, z) до т[о]чекъ пересѣченія произвольной прямой (124) съ кубической индикатр[и]сой равна нулю. Съ другой стороны, какъ извѣстно, геометрическ[ое] мѣсто точекъ R, опредѣляемыхъ изъ условія

$$\frac{3}{OR} = \frac{1}{OR_1} + \frac{1}{OR_2} + \frac{1}{OR_3}, \quad (126)$$

гдѣ O — точка (x, y, z), а R_1, R_2, R_3 — точки пересѣченія прям[ой] OR съ кубической индикатрисой, есть нѣкоторая прямая — такъ-н[а]зываемая полярная прямая *) точки (x, y, z) относительно кубическ[ой] индикатрисы.

Сопоставляя равенства (125) и (126) и замѣчая, что $OR = \rho_1$, $OR_2 = \rho_2$, $OR_3 = \rho_3$, получаемъ $OR = \infty$. Такимъ образомъ, полярн[ая] прямая точки (x, y, z) относительно кубической индикатрисы (121) ес[ть] безконечно-удаленная прямая. Предполагая, что прямая (124) про[ве]дена параллельно одной изъ асимптотъ индикатрисы, имѣемъ нап[р.] $\rho_3 = \infty$ и слѣдовательно изъ равенства (125) $\rho_1 = -\rho_2$, т. е. прям[ая] проведенная черезъ точку (x, y, z) параллельно асимптотѣ кубическ[ой] индикатрисы, пересѣкаетъ эту послѣднюю въ двухъ точкахъ, рав[но] отстоящихъ отъ (x, y, z); этотъ результатъ мы уже получили выш[е]

*) См. Salmon, Géometrie analytique, courbes planes, p. 167, n° 132 (chap. I

Въ заключеніе замѣтимъ еще, что полярная кривая 2-го порядка *) точки (x, y, z) относительно кубической индикатрисы, какъ легко провѣрить, опредѣляется уравненіями

$$\left.\begin{array}{c} \zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) \\ r(\xi - x)^2 + 2s(\xi - x)(\eta - y) + t(\eta - y)^2 = 3k\sqrt{1 + p^2 + q^2}, \end{array}\right\} \quad (127)$$

т. е. это есть кривая концентрическая, подобная и подобно-расположенная квадратичной индикатрисѣ (122) при отношеніи подобія $= \sqrt{3}$.

§ 3.—Элементомъ n-го порядка будемъ называть систему значеній перемѣнныхъ $x, y, z, p, q, r, s, t, z''', z_{,}'', z_{,,}', z_{,,,}, z^{IV}, \ldots\ldots, z_k^{(i)}, \ldots\ldots z^{(n)}, z_{,}^{(n-1)}, z_{,,}^{(n-2)}, \ldots\ldots z_n$. Интегральнымъ многообразіемъ n-го порядка уравненія

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \qquad (1)$$

будемъ называть многообразіе элементовъ n-го порядка, для которыхъ имѣютъ мѣсто соотношенія

$$\left.\begin{array}{c} dz - pdx - qdy = 0 \\ dp - rdx - sdy = 0 \\ dq - sdx - tdy = 0 \\ dr - z'''dx - z_{,}''dy = 0 \\ ds - z_{,}''dx - z_{,,}'dy = 0 \\ dt - z_{,,}'dx - z_{,,,}dy = 0 \\ dz_k^{(i)} - z_k^{(i+1)}dx - z^{(i)}_{k+1}dy = 0; \quad (i + k = 3, 4, \ldots, n-1) \\ F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \\ \dfrac{dF}{dx} = 0, \quad \dfrac{dF}{dy} = 0, \\ \dfrac{d^2F}{dx^2} = 0, \quad \dfrac{d^2F}{dxdy} = 0, \quad \dfrac{d^2F}{dy^2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^{n-2}F}{dx^{n-2}} = 0, \quad \dfrac{d^{n-2}F}{dx^{n-3}dy} = 0, \ldots\ldots, \quad \dfrac{d^{n-2}F}{dy^{n-2}} = 0, \end{array}\right\} \quad (128)$$

гдѣ черезъ $\dfrac{d^{i+k}F}{dx^i dy^k}$ сокращенно обозначаемъ выраженіе, которое получимъ, замѣняя въ F p, q, r, s, t соотвѣтственно черезъ $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},$

*) l. c. p. p. 70. 74, p. 204.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, беря затѣмъ полную производную отъ F i разъ по x и k разъ по y и замѣняя, наконецъ, въ полученномъ результатѣ $\dfrac{\partial^{g+h}z}{\partial x^g \partial y^h}$ черезъ $z_h^{(g)}$.

Изъ всѣхъ интегральныхъ многообразій n-го порядка разсмотримъ тѣ, которыя получаются, если возьмемъ интегральное многообразіе $(n-1)$-го порядка одного измѣренія и опредѣлимъ изъ остающихся уравненій (128), т. е. изъ тѣхъ, которыя не удовлетворены въ силу уравненій многообразія $(n-1)$-го порядка, координаты $z^{(n)}, z_{,}^{(n-1)}, \ldots\ldots, z_n$. Замѣтимъ предварительно, что, дифференцируя уравненіе $F=0$, мы получаемъ $dF = 0$, или, въ силу первой группы уравненій (128),

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = 0,$$

гдѣ $\dfrac{dF}{dx}$ и $\dfrac{dF}{dy}$ имѣютъ упомянутое выше условное значеніе; отсюда слѣдуетъ, что уравненія

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0$$

сводятся къ одному; далѣе имѣемъ $d\left(\dfrac{dF}{dx}\right) = 0$, $d\left(\dfrac{dF}{dy}\right) = 0$, или, въ силу первой группы уравненій (128),

$$\frac{d^2F}{dx^2}dx + \frac{d^2F}{dxdy}dy = 0, \quad \frac{d^2F}{dxdy}dx + \frac{d^2F}{dy^2}dy = 0.$$

слѣдовательно уравненія

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2F}{dxdy} = 0, \quad \frac{d^2F}{dy^2} = 0$$

приводятся къ одному, и такъ далѣе; вообще, въ послѣдней группѣ уравненій (128) уравненія каждой строки приводятся къ одному независимому. Для опредѣленія $(n+1)$ координатъ $z^{(n)}, z_{,}^{(n-1)}, \ldots\ldots, z_n$ мы получаемъ, такимъ образомъ, n уравненій изъ первой группы уравненій (128) $(i + k = n - 1)$ и одно уравненіе, которому равносильны всѣ уравненія послѣдней строки второй группы уравненій (128). Въ общемъ случаѣ эти $n + 1$ уравненій независимы, и мы получимъ всѣ $n + 1$ координатъ въ функціи одного произвольнаго параметра u, черезъ который предполагаемъ выраженными координаты элемента $(n-1)$-го порядка въ данномъ многообразіи одного измѣренія. Итакъ, въ общемъ случаѣ получимъ интегральное многообразіе n-го порядка *одного* измѣренія.

Въ частности можетъ случиться, что послѣднее изъ тѣхъ $n+1$ уравненій, о которыхъ упоминали выше, будетъ слѣдовать изъ первыхъ n, которыя, какъ легко видѣть, всегда независимы; иначе сказать, можетъ случиться, что всѣ уравненія послѣдней строки уравненій (128) слѣдуютъ изъ предшествующихъ. Тогда для опредѣленія $n+1$ координатъ $z^{(n)}, z_{,}^{(n-1)}, \ldots, z_n$ получаемъ n независимыхъ уравненій и будемъ, слѣдовательно, имѣть интегральное многообразіе n-го порядка *двухъ* измѣреній, имѣющее *носителемъ* данное интегральное многообразіе $(n-1)$-го порядка одного измѣренія; терминъ *носитель* мы здѣсь примѣняемъ въ смыслѣ вполнѣ аналогичномъ тому, въ которомъ употребляли его выше (ср. § 1 стр. 102, гл. I § 1 стр. 5), такъ какъ координаты $z^{(n)}, z_{,}^{(n-1)}, \ldots z_n$ въ данномъ случаѣ опредѣляются исключительно изъ дифференціальныхъ соотношеній, составляющихъ первую группу уравненій (128).

Интегральныя многообразія разсмотрѣннаго нами типа мы подробнѣе изслѣдуемъ впослѣдствіе (гл. IV); тогда между прочимъ убѣдимся, что носители ихъ опредѣляются интегрированіемъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Замѣтимъ еще, что если имѣемъ *интегралъ* уравненія (1)

$$z = z(x, y),$$

то, опредѣляя интегральное многообразіе n-го порядка, точки котораго лежатъ на поверхности $z=z(x, y)$, изъ первой группы уравненій (128) получимъ, благодаря независимости x и y

$$z_k^{(i)} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k},$$

а уравненія второй группы удовлетворятся сами собой, такъ какъ при $z_k^{(i)} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}$ они обратятся въ полныя производныя уравненія $F=0$. Такимъ образомъ, получаемъ вполнѣ опредѣленное интегральное многообразіе n-го порядка двухъ измѣреній, носителемъ котораго служитъ поверхность $z=z(x, y)$.

§ **4.**—Въ главѣ I (§ 2) мы разсматривали преобразованіе элементовъ 1-го порядка, которое всякое интегральное многообразіе любого

уравненія съ частными производными 1-го порядка преобразуетъ в интегральное многообразіе преобразованнаго уравненія. Если коорд иаты элементовъ 1-го порядка даннаго и преобразованнаго назовем соотвѣтственно x, y, z, p, q и x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, то x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 — такія функціи x, y, z, p, q, что для нихъ тождественно имѣетъ мѣст равенство

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = \rho(dz - p dx - q dy). \qquad (129$$

Распространимъ теперь подобное преобразованіе, называемое, как было упомянуто, преобразованіемъ прикосновенія, на элементы 2-г порядка, т. е. опредѣлимъ координаты r_1, s_1, t_1 въ функціи x, y, z, p, q, r, s, t такъ, чтобы, кромѣ равенства (129), тождественно имѣл мѣсто равенства:

$$\left.\begin{aligned} &dp_1 - r_1 dx_1 - s_1 dy_1 = \\ &= \alpha(dz - p dx - q dy) + \beta(dp - r dx - s dy) + \gamma(dq - s dx - t dy), \\ &dq_1 - s_1 dx_1 - t_1 dy_1 = \\ &= \lambda(dz - p dx - q dy) + \mu(dp - r dx - s dy) + \nu(dq - s dx - t dy). \end{aligned}\right\} (130)$$

гдѣ $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ — нѣкоторыя функціи перемѣнныхъ x, y, z, p, q, r, s, t. Равенства (129) и (130) выражаютъ требованіе, чтобы всякое интегральное многообразіе любого уравненія съ частными производными 1-го или 2-го порядка преобразовывалось въ интегральное же многообразіе преобразованнаго уравненія.

Такъ какъ x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 — опредѣленныя функціи перемѣнныхъ x, y, z, p, q, то изъ равенствъ (130) получаемъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial z} - r_1 \frac{\partial x_1}{\partial z} - s_1 \frac{\partial y_1}{\partial z} = \alpha; \quad \frac{\partial p_1}{\partial p} - r_1 \frac{\partial x_1}{\partial p} - s_1 \frac{\partial y_1}{\partial p} = \beta; \\ \frac{\partial p_1}{\partial q} - r_1 \frac{\partial x_1}{\partial q} - s_1 \frac{\partial y_1}{\partial q} = \gamma; \end{aligned}\right\} (131)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial x} - r_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} - s_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} = -\alpha p - \beta r - \gamma s; \\ \frac{\partial p_1}{\partial y} - r_1 \frac{\partial x_1}{\partial y} - s_1 \frac{\partial y_1}{\partial y} = -\alpha q - \beta s - \gamma t; \end{aligned}\right\} (132)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial z} - s_1 \frac{\partial x_1}{\partial z} - t_1 \frac{\partial y_1}{\partial z} = \lambda; \quad \frac{\partial q_1}{\partial p} - s_1 \frac{\partial x_1}{\partial p} - t_1 \frac{\partial y_1}{\partial p} = \mu; \\ \frac{\partial q_1}{\partial q} - s_1 \frac{\partial x_1}{\partial q} - t_1 \frac{\partial y_1}{\partial q} = \nu; \end{aligned}\right\} (133)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial x} - s_1\frac{\partial x_1}{\partial x} - t_1\frac{\partial y_1}{\partial x} &= -\lambda p - \mu r - \nu s;\\ \frac{\partial q_1}{\partial y} - s_1\frac{\partial x_1}{\partial y} - t_1\frac{\partial y_1}{\partial y} &= -\lambda q - \mu s - \nu t.\end{aligned}\right\}\qquad (134)$$

Исключая множителей α, β, γ, λ, μ, ν и обозначая, согласно общему правилу, установленному въ § 3-мъ,

$$\frac{\partial V}{\partial p}r + \frac{\partial V}{\partial q}s + \frac{\partial V}{\partial z}p + \frac{\partial V}{\partial x} \text{ черезъ } \frac{dV}{dx}, \text{ а}$$
$$\frac{\partial V}{\partial p}s + \frac{\partial V}{\partial q}t + \frac{\partial V}{\partial z}q + \frac{\partial V}{\partial y} \text{ черезъ } \frac{dV}{dy}, \text{ имѣемъ:}$$

$$\frac{dp_1}{dx} - r_1\frac{dx_1}{dx} - s_1\frac{dy_1}{dx} = 0;\quad \frac{dp_1}{dy} - r_1\frac{dx_1}{dy} - s_1\frac{dy_1}{dy} = 0;\qquad (135)$$
$$\frac{dq_1}{dx} - s_1\frac{dx_1}{dx} - t_1\frac{dy_1}{dx} = 0;\quad \frac{dq_1}{dy} - s_1\frac{dx_1}{dy} - t_1\frac{dy_1}{dy} = 0.\qquad (136)$$

Равенства (135) и (136) вполнѣ равносильны равенствамъ (130), если α, β, γ, λ, μ, ν опредѣлимъ изъ равенствъ (131) и (133). Изъ равенствъ (135) находимъ r_1 и s_1, изъ (136) s_1 и t_1. Чтобы не было противорѣчія, необходимо, чтобы оба значенія s_1 были равны. Такимъ образомъ, получаемъ условіе совмѣстности равенствъ (135) и (136):

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dx}, & \frac{dp_1}{dx} \\ \frac{dx_1}{dy}, & \frac{dp_1}{dy}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dq_1}{dx}, & \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dq_1}{dy}, & \frac{dy_1}{dy}\end{vmatrix},$$

или иначе:

$$\frac{dp_1}{dx}\,\frac{dx_1}{dy} + \frac{dq_1}{dx}\,\frac{dy_1}{dy} = \frac{dp_1}{dy}\,\frac{dx_1}{dx} + \frac{dq_1}{dy}\,\frac{dy_1}{dx}.\qquad (137)$$

Легко убѣдиться, что условіе это выполняется въ силу равенства (129). Въ самомъ дѣлѣ, упомянутое равенство даетъ намъ (ср. гл. I, § 2, стр. 32, рав. 57):

$$\frac{\partial z_1}{\partial p} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial p} - q_1\frac{\partial y_1}{\partial p} = 0;\quad \frac{\partial z_1}{\partial q} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial q} - q_1\frac{\partial y_1}{\partial q} = 0;$$
$$\frac{\partial z_1}{\partial z}p + \frac{\partial z_1}{\partial x} - p_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial z}p + \frac{\partial x_1}{\partial x}\right) - q_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial z}p + \frac{\partial y_1}{\partial x}\right) = 0;$$
$$\frac{\partial z_1}{\partial z}q + \frac{\partial z_1}{\partial y} - p_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial z}q + \frac{\partial x_1}{\partial y}\right) - q_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial z}q + \frac{\partial y_1}{\partial y}\right) = 0;$$

умножая 1-е равенство на r, 2-е на s и складывая съ 3-мъ, получ

$$\frac{dz_1}{dx} - p_1\frac{dx_1}{dx} - q_1\frac{dy_1}{dx} = 0;\qquad ($$

умножая 1-е равенство на s, 2-е на t и складывая съ 4-мъ, получ

$$\frac{dz_1}{dy} - p_1\frac{dx_1}{dy} - q_1\frac{dy_1}{dy} = 0.\qquad ($$

Производя, наконецъ, надъ равенствомъ (138) операцію $\frac{d}{dy}$, а надъ венствомъ (139) операцію $\frac{d}{dx}$ и вычитая изъ одного результата дру придемъ какъ разъ къ равенству (137), такъ какъ операціи $\frac{d}{dx}$ и очевидно, перемѣстительны, такъ что $\frac{d}{dy}\left(\frac{dz_1}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz_1}{dy}\right) = \frac{d^2z}{dxd}$ аналогично для функцій x_1 и y_1.

Итакъ, уравненія (135) и (136) для опредѣленія r_1, s_1, t_1 вмѣстны; изъ нихъ мы найдемъ эти три координаты въ функціи x, p, q, r, s, t и преобразованіе прикосновенія распространимъ на менты 2-го порядка.

Для примѣра распространимъ преобразованіе Legendre'а (см. г § 2, стр. 27, рав. 44):

$$z_1 = px + qy - z;\quad x_1 = p;\quad y_1 = q;\quad p_1 = x;\quad q_1 = y.\qquad ($$

Уравненія (135) и (136) въ этомъ случаѣ принимаютъ видъ:

$$1 - rr_1 - ss_1 = 0,\quad 0 - sr_1 - ts_1 = 0.$$
$$0 - rs_1 - st_1 = 0.\quad 1 - ss_1 - tt_1 = 0,$$

откуда

$$r_1 = \frac{t}{rt - s^2},\quad s_1 = \frac{-s}{rt - s^2},\quad t_1 = \frac{r}{rt - s^2}.\qquad (1$$

Изъ равенствъ (141) между прочимъ слѣдуетъ

$$r_1t_1 - s_1^2 = \frac{1}{rt - s^2}.\qquad (1$$

Распространяя преобразованіе Ampère'а (см. гл. I, § 2, стр. 29, рав.

$$z_1 = z - px;\quad x_1 = p;\quad y_1 = y;\quad p_1 = -x;\quad q_1 = q.\qquad (1$$

получимъ

$$-1 = rr_1,\quad 0 = sr_1 + s_1,$$
$$s = rs_1,\quad t = ss_1 + t_1,$$

откуда

$$r_1 = -\frac{1}{r};\quad s_1 = \frac{s}{r};\quad t_1 = \frac{rt - s^2}{r}. \tag{144}$$

Разсмотримъ еще преобразованіе прикосновенія, которое само получается распространеніемъ на элементы 1-го порядка преобразованія точекъ:

$$z_1 = y;\quad y_1 = z;\quad x_1 = x. \tag{145}$$

Для опредѣленія p_1 и q_1 имѣемъ равенства

$$\frac{\partial z_1}{\partial z}p + \frac{\partial z_1}{\partial x} = p_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial z}p + \frac{\partial x_1}{\partial x}\right) + q_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial z}p + \frac{\partial y_1}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial z_1}{\partial z}q + \frac{\partial z_1}{\partial y} = p_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial z}q + \frac{\partial x_1}{\partial y}\right) + q_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial z}q + \frac{\partial y_1}{\partial y}\right)$$

(см. гл. I, § 2, стр. 30, рав. 53), или въ данномъ случаѣ:

$$0 = p_1 + pq_1;\quad 1 = qq_1,$$

откуда

$$q_1 = \frac{1}{q};\quad p_1 = -\frac{p}{q}. \tag{146}$$

Распространяя преобразованіе на элементы 2-го порядка, получаемъ:

$$\frac{ps - qr}{q^2} = r_1 + ps_1;\quad \frac{pt - qs}{q^2} = qs_1;$$
$$\frac{-s}{q^2} = s_1 + pt_1;\quad \frac{-t}{q^2} = qt_1,$$

откуда

$$r_1 = \frac{-q^2r + 2pqs - p^2t}{q^3};\quad s_1 = \frac{pt - qs}{q^3};\quad t_1 = -\frac{t}{q^3}. \tag{147}$$

Формулы (145), (146) и (147) опредѣляютъ преобразованіе, которымъ мы въ сущности уже пользовались, когда разсматривали интегральныя многообразія, плоскости элементовъ которыхъ параллельны оси z (см. выше § 1, стр. 139).

Если мы имѣемъ какое-либо интегральное многообразіе уравненія съ частными производными 2-го порядка

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{1}$$

т. е. многообразіе элементовъ (x, y, z, p, q, r, s, t), удовлетворяю уравненію (1) и дифференціальнымъ соотношеніямъ

$$\left.\begin{aligned} dz - pdx - qdy &= 0\\ dp - rdx - sdy &= 0\\ dq - sdx - tdy &= 0,\end{aligned}\right\}$$ (

и примѣнимъ къ нему нѣкоторое преобразованіе прикосновенія, то лучимъ многообразіе элементовъ $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1)$, удовле ряющихъ, во-первыхъ, преобразованному уравненію

$$\Phi(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1) = 0$$

и во-вторыхъ, въ силу равенствъ (129) и (130), дифференціалы соотношеніямъ

$$\left.\begin{aligned} dz_1 - p_1dx_1 - q_1dy_1 &= 0\\ dp_1 - r_1dx_1 - s_1dy_1 &= 0\\ dq_1 - s_1dx_1 - t_1dy_1 &= 0;\end{aligned}\right\}$$ (

другими словами, мы получимъ интегральное многообразіе преоб ваннаго уравненія (1'), какъ впрочемъ уже было упомянуто въ на этого §. Является, однако, сомнѣніе въ томъ случаѣ, когда для в элементовъ даннаго многообразія нѣкоторые изъ множителей ρ, γ, λ, μ, ν, входящихъ въ равенства (129) и (130) обращаются въ конечность. Въ главѣ I (§ 2, стр. 23, 24) мы видѣли, что множит обращается въ безконечность лишь при безконечныхъ значеніяхъ ординатъ p_1, q_1; изъ равенствъ (131) и (133) мы равнымъ обра можемъ убѣдиться, что множители α, β, γ, λ, μ, ν при конечныхъ ченіяхъ всѣхъ координатъ p_1, q_1, r_1, s_1, t_1 не могутъ обращаться въ конечность. Такимъ образомъ, случай, о которомъ идетъ рѣчь, им мѣсто лишь тогда, когда уравненія (135), (136) и уравненія

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial p} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial p} - q_1\frac{\partial y_1}{\partial p} &= 0\\ \frac{\partial z_1}{\partial q} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial q} - q_1\frac{\partial y_1}{\partial q} &= 0\\ \left(\frac{\partial z_1}{\partial z}p + \frac{\partial z_1}{\partial x}\right) - p_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial z}p + \frac{\partial x_1}{\partial x}\right) - q_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial z}p + \frac{\partial y_1}{\partial x}\right) &= 0\\ \left(\frac{\partial z_1}{\partial z}q + \frac{\partial z_1}{\partial y}\right) - p_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial z}q + \frac{\partial x_1}{\partial y}\right) - q_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial z}q + \frac{\partial y_1}{\partial y}\right) &= 0,\end{aligned}\right\}$$ (

выведенныя въ гл. I-й, даютъ безконечныя значенія для нѣкото изъ координатъ p_1, q_1, r_1, s_1, t_1. Уравненія (135) и (136), какъ мы дѣли выше, приводятся къ тремъ независимымъ, уравненія (149) при данныхъ выраженіяхъ z_1, x_1, y_1 въ функціи x, y, z, p, q приводятся къ двумъ независимымъ (см. гл. I, § 3, стр. 68); такимъ образомъ, для опредѣленія p_1, q_1, r_1, s_1, t_1 мы имѣемъ 5 линейныхъ уравненій, которыя для даннаго многообразія элементовъ (x, y, z, p, q, r, s, t) даютъ безконечныя значенія для нѣкоторыхъ изъ координатъ p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, но въ общемъ случаѣ совмѣстны, ибо изъ нихъ мы и получаемъ формулы нашего преобразованія прикосновенія. Такъ какъ принято говорить, что безконечныя значенія неизвѣстныхъ „удовлетворяютъ" тѣмъ линейнымъ уравненіямъ, изъ которыхъ они получены, то съ тѣмъ же правомъ мы можемъ сказать, что для преобразованнаго многообразія удовлетворяются дифференціальныя соотношенія (148'), если только докажемъ, что они являются прямыми слѣдствіями уравненій (135), (136) и (149). Для доказательства умножаемъ первое изъ равенствъ (135) на dx, второе на dy и складываемъ; получаемъ:

$$\frac{\partial p_1}{\partial p}(rdx+sdy)+\frac{\partial p_1}{\partial q}(sdx+tdy)+\frac{\partial p_1}{\partial z}(pdx+qdy)+\frac{\partial p_1}{\partial x}dx+\frac{\partial p_1}{\partial y}dy-$$
$$-r_1\left[\frac{\partial x_1}{\partial p}(rdx+sdy)+\frac{\partial x_1}{\partial q}(sdx+tdy)+\frac{\partial x_1}{\partial z}(pdy+qdy)+\frac{\partial x_1}{\partial x}dx+\frac{\partial x_1}{\partial y}dy\right]-$$
$$-s_1\left[\frac{\partial y_1}{\partial p}(rdx+sdy)+\frac{\partial y_1}{\partial q}(sdx+tdy)+\frac{\partial y_1}{\partial z}(pdx+qdy)+\frac{\partial y_1}{\partial x}dx+\frac{\partial y_1}{\partial y}dy\right]=0.$$

Для даннаго интегральнаго многообразія уравненія (1) имѣемъ

$$rdx+sdy=dp,\quad sdx+tdy=dq,\quad pdx+qdy=dz;$$

слѣдовательно, предшествующее равенство принимаетъ видъ

$$\frac{\partial p_1}{\partial p}dp+\frac{\partial p_1}{\partial q}dq+\frac{\partial p_1}{\partial z}dz+\frac{\partial p_1}{\partial x}dx+\frac{\partial p_1}{\partial y}dy-$$
$$-r_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial p}dp+\frac{\partial x_1}{\partial q}dq+\frac{\partial x_1}{\partial z}dz+\frac{\partial x_1}{\partial x}dx+\frac{\partial x_1}{\partial y}dy\right)-$$
$$-s_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial p}dp+\frac{\partial y_1}{\partial q}dq+\frac{\partial y_1}{\partial z}dz+\frac{\partial y_1}{\partial x}dx+\frac{\partial y_1}{\partial y}dy\right)=0,$$

или

$$dp_1-r_1dx_1-s_1dy_1=0.$$

Умножая первое изъ равенствъ (136) на dx, второе на dy и складывая, совершенно аналогично получимъ

$$dq_1-s_1dx_1-t_1dy_1=0.$$

Наконецъ, умножая первое изъ равенствъ (149) на dp, 2-е на dq, 3-е на dx, 4-е на dy и складывая, получимъ равенство, которое по замѣнѣ $pdx+qdy$ черезъ dz (въ силу дифференціальныхъ соотношеній (148)) дастъ

$$dz_1-p_1dx_1-q_1dy_1=0.$$

Во всемъ доказательствѣ мы прибѣгали лишь къ умноженію равенствъ (135), (136), (149) на dx, dy, dp, dq — величины завѣдомо конечныя — и сложенію получаемыхъ результатовъ: слѣдовательно, дифференціальныя соотношенія (148') имѣютъ мѣсто для преобразованнаго многообразія въ томъ же смыслѣ, въ какомъ уравненія (135), (136), (149) удовлетворяются при безконечныхъ значеніяхъ нѣкоторыхъ изъ координатъ p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, и слѣдовательно, преобразованное многообразіе будетъ однимъ изъ тѣхъ особенныхъ интегральныхъ многообразій преобразованнаго уравненія (1'), которыя мы подробно разсматривали въ § 1-мъ этой главы (стр. 121—140). Преобразованіе прикосновенія, обратное данному, очевидно, обратно преобразуетъ полученное интегральное многообразіе спеціальнаго типа въ интегральное многообразіе съ конечными значеніями координатъ, и не трудно убѣдиться, что, вообще говоря, это и всегда будетъ такъ, т. е. произвольное преобразованіе прикосновенія преобразуетъ интегральное многообразіе, для котораго нѣкоторыя изъ координатъ p, q, r, s, t имѣютъ безконечныя значенія, въ интегральное многообразіе преобразованнаго уравненія, для котораго всѣ координаты сохраняютъ конечное значеніе.

Интересно здѣсь обратить вниманіе на тотъ фактъ, что интегральное многообразіе двухъ измѣреній относительно элементовъ 1-го порядка, носителемъ котораго служитъ точка, является, собственно говоря, многообразіемъ *четырехъ* измѣреній относительно элементовъ 2-го порядка, такъ какъ опредѣляется въ однородныхъ координатахъ четырьмя уравненіями:

$$x=const.,\quad y=const.,\quad z=const.,\quad \omega=0,$$

при чемъ p, q, $\rho:\sigma$, $\sigma:\tau$ остаются произвольными (см. § 1, стр. 112); между тѣмъ, по преобразованіи, получимъ многообразіе, носителемъ котораго служитъ поверхность и которое, какъ было показано въ § 1, будетъ относительно элементовъ 2-го порядка только двухъ измѣреній. Такъ, преобразованіемъ Лежандра многообразіе четырехъ измѣреній (точка)

$$x=a,\quad y=b,\quad z=c,\quad \omega=0$$

преобразуется въ многообразіе

$$p_1 = a.\ \ q_1 = b,\ \ p_1x_1 + q_1y_1 - z_1 = c.\ \ r_1 = \frac{t}{rt - s^2} = \frac{\omega\tau}{\rho\tau - \sigma^2} = 0,$$

$$s_1 = \frac{-s}{rt - s^2} = \frac{-\omega\sigma}{\rho\tau - \sigma^2} = 0.\ \ t_1 = \frac{r}{rt - s^2} = \frac{\omega\rho}{\rho\tau - \sigma^2} = 0.$$

или

$$z_1 = ax_1 + by_1 - c,\ \ p_1 = a.\ \ q_1 = b,\ \ r_1 = 0,\ \ s_1 = 0,\ \ t_1 = 0$$

—многообразіе двухъ измѣреній, носителемъ котораго служитъ плоскость

$$z_1 = ax_1 + by_1 - c.$$

Подобное измѣненіе числа измѣреній мы встрѣчаемъ въ геометріи на плоскости, примѣняя преобразованіе взаимныхъ радіусовъ векторовъ (инверсію) къ безконечно-удаленнымъ точкамъ плоскости; всѣ онѣ, какъ извѣстно, преобразуются въ центръ инверсіи, и слѣдовательно, многообразіе одного измѣренія — безконечно-удаленная прямая — преобразуется въ многообразіе нулевого измѣренія — одну точку.

Предположимъ, что мы имѣемъ интегральное многообразіе уравненія (1), носителемъ котораго служитъ поверхность

$$z = z(x,\ y), \tag{150}$$

т. е. имѣемъ интегралъ въ обычномъ смыслѣ слова. Уравненія многообразія будутъ

$$z = z(x,\ y),\ \ p = \frac{\partial z}{\partial x},\ \ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ \ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ \ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \tag{151}$$

Выполнимъ надъ этимъ многообразіемъ преобразованіе прикосновенія

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= z_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q) \\ x_1 &= x_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q) \\ y_1 &= y_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q) \\ p_1 &= p_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q) \\ q_1 &= q_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q) \\ r_1 &= r_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t) \\ s_1 &= s_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t) \\ t_1 &= t_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t). \end{aligned}\right| \tag{152}$$

Уравненія преобразованнаго многообразія получимъ, замѣняя въ формулахъ (152) z, p, q, r, s, t ихъ значеніями изъ уравненій (151). Исключая затѣмъ x и y изъ первыхъ трехъ равенствъ (152), получимъ, вообще говоря, единственное соотношеніе между z_1, x_1, y_1, которое можно будетъ представить въ видѣ

$$z_1 = z_1(x_1,\ y_1). \tag{153}$$

Такимъ образомъ, *интегралъ* уравненія (1) преобразуется, вообще говоря, въ *интегралъ* преобразованнаго уравненія. Мы не получимъ соотношенія вида (153) лишь въ томъ случаѣ, если x и y исключатся между вторымъ и третьимъ изъ равенствъ (152). Тогда мы получимъ соотношеніе вида

$$\varphi(x_1,\ y_1) = 0; \tag{154}$$

если кромѣ того x и y исключаются, напр., между первымъ и третьимъ изъ равенствъ (152), то получимъ еще соотношеніе

$$\psi(z_1,\ x_1) = 0, \tag{155}$$

и будемъ имѣть интегральное многообразіе, носителемъ котораго служитъ линія; если соотношеніе (154) — единственное между координатами z_1, x_1, y_1, то носителемъ преобразованнаго многообразія служитъ цилиндрическая поверхность, образующія которой параллельны оси z_1. Мыслимъ еще случай, когда z_1, x_1, y_1 окажутся вовсе не зависящими отъ x и y; тогда носителемъ преобразованнаго многообразія будетъ служить точка. Во всѣхъ этихъ случаяхъ мы не получимъ *интеграла* преобразованнаго уравненія въ обычномъ смыслѣ слова. Общимъ критеріемъ этихъ случаевъ служитъ условіе, чтобы функціи x_1 и y_1 не были независимы относительно x и y, т. е. чтобы Якобіевъ опредѣлитель x_1 и y_1 по x и y равнялся нулю. Составляя для примѣра производную x_1 по x, имѣемъ

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\right) = \frac{\partial x_1}{\partial p}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial x_1}{\partial q}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial x_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial x_1}{\partial x};$$

но для даннаго многообразія

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r,\ \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s,\ \ \frac{\partial z}{\partial x} = p.$$

и слѣдовательно имѣемъ $\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\right) = \frac{dx_1}{dx}$, пользуясь обычнымъ нашимъ обозначеніемъ. Аналогично опредѣлимъ остальныя производныя и найдомъ, что Якобіевъ опредѣлитель можетъ быть представленъ для даннаго многообразія въ видѣ

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dx} & \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dx_1}{dy} & \frac{dy_1}{dy} \end{vmatrix};$$

слѣдовательно, мы приходимъ къ слѣдующему результату:

интегралъ уравненія

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{1}$$

преобразованіемъ прикосновенія преобразуется, вообще говоря, въ интегралъ преобразованнаго уравненія; исключеніе имѣемъ тогда, когда для всѣхъ элементовъ интеграла выполняется условіе

$$D = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dx} & \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dx_1}{dy} & \frac{dy_1}{dy} \end{vmatrix} = 0, \tag{156}$$

или иначе, если данный интегралъ есть вмѣстѣ съ тѣмъ интегралъ уравненія $D = 0$.

Уравненіе $D=0$, какъ не трудно видѣть, есть уравненіе съ частными производными 2-го порядка; слѣдовательно, исключеніе имѣемъ лишь для общихъ интеграловъ двухъ уравненій съ частными производными 2-го порядка — даннаго и уравненія $D = 0$.

Обращаясь къ формуламъ (135) и (136), изъ которыхъ мы опредѣляли r_1, s_1, t_1, а также къ формуламъ (131) и (133), дающимъ α, β, γ, λ, μ, ν, видимъ, что детерминантъ D входитъ знаменателемъ въ выраженія всѣхъ этихъ величинъ, такъ что при $D=0$ всѣ онѣ или обращаются въ безконечность или становятся неопредѣленными; такимъ образомъ, и съ другой точки зрѣнія видимъ, что уравненіе $D = 0$ должно играть особую роль для преобразованія прикосновенія.

Если за уравненіе (1) возьмемъ какъ разъ уравненіе $D = 0$, то изъ предыдущаго явствуетъ, что *всѣ* интегралы этого уравненія по преобразованіи уже не будутъ интегралами въ собственномъ смыслѣ слова.

Возьмемъ, напримѣръ, преобразованіе Лежандра:

$$z_1 = xp + yq - z;\quad x_1 = p;\quad y_1 = q;\quad p_1 = x;\quad q_1 = y;\quad r_1 = \frac{t}{rt - s^2};$$

$$s_1 = \frac{-s}{rt - s^2};\quad t_1 = \frac{r}{rt - s^2}.$$

Уравненіе $D=0$ здѣсь имѣемъ видъ:

$$D = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = rt - s^2 = 0.$$

Итакъ, интегралы уравненія $rt - s^2 = 0$ преобразованіемъ Лежандра должны обращаться въ интегральныя многообразія, носителями которыхъ служатъ или линіи, или точки, или, наконецъ, цилиндрическія поверхности съ образующими, параллельными оси z.

Какъ извѣстно, преобразованіе Лежандра есть взаимно-полярное преобразованіе; слѣдовательно, интегральными поверхностями уравненія

$$rt - s^2 = 0 \tag{157}$$

могутъ быть лишь поверхности взаимно-полярныя или линіи, или точкѣ, или цилиндрической поверхности, образующія которой параллельны оси z. Цилиндрическая поверхность при взаимно-полярномъ преобразованіи не даетъ поверхности; слѣдовательно, остается разсмотрѣть первые два случая, которые даютъ намъ плоскость и развертывающуюся поверхность. Итакъ, ***интеграломъ*** уравненія

$$rt - s^2 = 0 \tag{157}$$

можетъ служить лишь плоскость или развертывающаяся поверхность.

Въ случаѣ плоскости имѣемъ

$$z = ax + by + c,\quad p = a,\quad q = b,\quad r = 0,\quad s = 0,\quad t = 0,$$

и уравненіе (157) удовлетворяется.

Развертывающаяся поверхность получается взаимно-полярнымъ преобразованіемъ кривой, которой уравненія возьмемъ, напр., въ видѣ

$$z_1 = \varphi(x_1),\quad y_1 = \psi(x_1);$$

по преобразованіи получимъ

$$xp + yq - z = \varphi(p),\quad q = \psi(p),$$

при чемъ $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$; изъ равенства $q = \psi(p)$ получимъ $dq = \psi'(p)dp$, или

$$sdx + tdy = \psi'(p)rdx + \psi'(p)sdy.$$

откуда $s = \psi'(p)r$, $t = \psi'(p)s$, такъ какъ $x = p_1$ и $y = q_1$—произвольны. Вставляя $s = \psi'(p).r$, $t = \psi'(p)s = [\psi'(p)]^2.r$ въ уравненіе (157), видимъ, что оно удовлетворяется. Итакъ, любая плоскость и любая развертывающаяся поверхность суть интегралы уравненія (157).

Къ этимъ результатамъ можно придти иначе. Уравненіе

$$rt - s^2 = 0 \tag{157}$$

преобразуется преобразованіемъ Лежандра въ уравненіе

$$\frac{1}{r_1 t_1 - s_1^2} = 0, \tag{158}$$

или въ однородныхъ координатахъ

$$\frac{\omega_1^2}{\rho_1 \tau_1 - \sigma_1^2} = 0. \tag{158'}$$

Послѣднее уравненіе удовлетворяется при $\omega_1 = 0$ независимо отъ значеній остальныхъ координатъ; слѣдовательно, интегральнымъ многообразіемъ его будетъ служить *всякое* многообразіе, для котораго $\omega_1 = 0$ и кромѣ того

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = 0$$
$$\omega_1 dp_1 - \rho_1 dx_1 - \sigma_1 dy_1 = 0$$
$$\omega_1 dq_1 - \sigma_1 dx_1 - \tau_1 dy_1 = 0.$$

Для насъ важны при томъ тѣ изъ этихъ многообразій, которыя относительно элементовъ 1-го порядка двухъ измѣреній. Но такія многообразія мы разсматривали въ § 1; это будутъ многообразія, носителями которыхъ служатъ любая точка или любая кривая. Преобразуя ихъ, получимъ произвольную плоскость и произвольную развертывающуюся поверхность, которыя, слѣдовательно, будутъ интегралами уравненія (157).

Уравненіе $D = 0$ (156) въ самомъ общемъ случаѣ будетъ, какъ легко усмотрѣть, линейно относительно r, s, t, $rt - s^2$, т. е. это будетъ такъ-называемое билинейное уравненіе. Его интегралы преобразуются даннымъ преобразованіемъ прикосновенія, какъ уже было упомянуто, въ многообразія, носителями которыхъ служатъ или точки, или линіи, или цилиндрическія поверхности съ образующими параллельными оси z_1. Не трудно усмотрѣть, что послѣдній случай, а также случай прямой, параллельной оси z_1, которую можно разсматривать какъ предѣлъ цилиндра, можетъ имѣть мѣсто лишь тогда, когда интегралъ уравненія

$D = 0$ есть вмѣстѣ съ тѣмъ интегралъ нѣкотораго уравненія съ час ными производными 1-го порядка. Въ самомъ дѣлѣ, если по преобр зованіи интегральной поверхности мы получимъ цилиндръ $\varphi(x_1, y_1) =$ или прямую $x_1 = const.$, $y_1 = const.$, то, какъ было показано въ § 1. гл. для элементовъ даннаго интеграла должны получить $p_1 = \infty$, $q_1 = \infty$ Для опредѣленія p_1 и q_1 черезъ x, y, z, p, q имѣемъ уравнен (см. выше (149)).

$$\frac{\partial z_1}{\partial z} p + \frac{\partial z_1}{\partial x} = p_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial z} p + \frac{\partial x_1}{\partial x}\right) + q_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial z} p + \frac{\partial y_1}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial z_1}{\partial z} q + \frac{\partial z_1}{\partial y} = p_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial z} q + \frac{\partial x_1}{\partial y}\right) + q_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial z} q + \frac{\partial y_1}{\partial y}\right).$$

Чтобы $p_1 = \infty$, $q_1 = \infty$, необходимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z} p + \frac{\partial x_1}{\partial x}, & \frac{\partial y_1}{\partial z} p + \frac{\partial y_1}{\partial x} \\ \frac{\partial x_1}{\partial z} q + \frac{\partial x_1}{\partial y}, & \frac{\partial y_1}{\partial z} q + \frac{\partial y_1}{\partial y} \end{vmatrix} = 0. \qquad (15$$

Такимъ образомъ, интегралъ нашъ есть въ одно и то же время инт гралъ уравненій $D = 0$ и $\Delta = 0$. Всякій интегралъ уравненія 2-го п рядка $D = 0$, который не удовлетворяетъ уравненію 1-го порядка $\Delta =$ преобразуется въ линію или въ точку.

Предположимъ теперь обратно, что имѣемъ произвольное много образіе, носителемъ котораго служитъ точка или линія или, наконец цилиндръ съ образующими, параллельными оси z, и примѣнимъ къ не преобразованіе обратное данному преобразованію прикосновенія, кот рое въ свою очередь будетъ преобразованіемъ прикосновенія. Для всѣх перечисленныхъ многообразій координаты x_1 и y_1 не будутъ независимы другими словами всегда будетъ существовать по крайней мѣрѣ одн равенство вида

$$\varphi(x_1, y_1) = 0;$$

поэтому, если преобразованное многообразіе будетъ имѣть носителем поверхность

$$z = z(x, y),$$

то x_1 и y_1, которыя въ силу формулъ преобразованія выразятся через x и y (такъ какъ z, p, q, r, s, t — функціи x и y), должны обращат въ нуль Якобіевъ опредѣлитель по x и y, т. е. другими словами для элементовъ многообразія, носителемъ котораго служитъ поверхность

$$z = z(x,\ y),$$

должно имѣть мѣсто равенство

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{dx_1}{dx} & \dfrac{dy_1}{dx} \\ \dfrac{dx_1}{dy} & \dfrac{dy_1}{dy} \end{vmatrix} = 0. \tag{156}$$

Такимъ образомъ, чтобы найти всѣ интегралы уравненія (156), достаточно брать всевозможныя точки, линіи и цилиндрическія поверхности, параллельныя оси z_1, и преобразовывать ихъ обратнымъ преобразованіемъ прикосновенія; всякая поверхность

$$z = z(x,\ y),$$

которая получится при этомъ, будетъ интеграломъ уравненія (156). Если мы желаемъ ограничиться тѣми интегралами уравненія $D = 0$ (156), которые не удовлетворяютъ уравненію 1-го порядка, $\Delta = 0$ (159), то достаточно преобразовывать точки и линіи.

Что касается до уравненія $\Delta = 0$ (159), то не трудно убѣдиться, что *всякій* интегралъ этого уравненія удовлетворяетъ и уравненію $D=0$ (156). Дѣйствительно, въ силу $\Delta=0$, для преобразованнаго многообразія будемъ имѣть $p_1 = \infty$, $q_1 = \infty$; слѣдовательно, преобразованное многообразіе будетъ имѣть носителемъ цилиндръ съ образующими параллельными оси z_1, который въ частности можетъ обратиться въ прямую параллельную оси z_1; во всякомъ случаѣ, будемъ имѣть по крайней мѣрѣ одно соотношеніе вида $\varphi(x_1, y_1) = 0$ и слѣдовательно для интеграла уравненія $\Delta = 0$ (159) будемъ имѣть и $D = 0$ (156). Уравненіе $\Delta = 0$ (159) представляетъ, такимъ образомъ, такъ-называемый первый интегралъ уравненія $D = 0$.

Если данное (и обратное) преобразованіе прикосновенія опредѣляется однимъ соотношеніемъ

$$\Omega(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x,\ y,\ z) = 0, \tag{160}$$

то точки $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ преобразуются въ поверхности семейства $\Omega = 0$ съ тремя параметрами x_1, y_1, z_1. Произвольная линія *)

*) Оставляемъ въ сторонѣ лишь прямыя параллельныя оси z_1, такъ какъ для нихъ $\Delta = 0$.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(u) \\ y_1 &= y_1(u) \\ z_1 &= z_1(u) \end{aligned}\right\} \qquad (1$$

преобразуется въ огибающую поверхность семейства поверхностей одним параметромъ u

$$\Omega(x_1(u),\ y_1(u),\ z_1(u),\ x,\ y,\ z) = 0, \qquad (1$$

при чемъ точкамъ кривой (161), разсматриваемымъ вмѣстѣ съ пр дящимъ черезъ каждую пучкомъ касательныхъ плоскостей, соот ствуютъ такъ-называемыя характеристики семейства (162), т. е. ли по которымъ поверхности семейства прикасаются къ огибающей (вмѣ съ касательными плоскостями вдоль каждой характеристики). Въ ч ности можетъ случиться, что семейство (162) не имѣетъ огибаю поверхности, но это будетъ лишь въ исключительныхъ случаяхъ (т линія (161) преобразуется въ линію).

Такимъ образомъ, интегралами уравненія $D = 0$, не удовле ряющими уравненію 1-го порядка $\Delta = 0$, будутъ, во-первыхъ, пов ности семейства съ тремя параметрами $(x_1,\ y_1,\ z_1)$

$$\Omega(x_1,\ y_1,\ z_1,\ \ x,\ y,\ z) = 0 \qquad (1$$

и во-вторыхъ, огибающія поверхности всѣхъ семействъ съ однимъ раметромъ u

$$\Omega(x_1(u),\ y_1(u),\ z_1(u),\ x,\ y,\ z) = 0, \qquad ($$

получаемыхъ произвольной группировкой поверхностей семейства (1 Остальные интегралы найдутся интегрированіемъ уравненія 1-го пор $\Delta=0$. Ихъ можно также найти, преобразуя обратнымъ преобразовані прикосновенія всевозможные цилиндры съ образующими параллельн оси z_1 и прямыя параллельныя оси z_1. Можетъ случиться, что этомъ не получимъ поверхностей

$$z = z(x,\ y);$$

тогда уравненіе $\Delta = 0$ или есть тождество, или оно невозможно (на $1 = 0$), или, наконецъ, это не есть собственно уравненіе съ части производными 1-го порядка (не содержитъ p и q). Во всѣхъ этихъ чаяхъ, слѣдовательно, интегралы уравненія $D = 0$ исчерпываются верхностями $\Omega = 0$ и огибающими семействъ съ однимъ параметр составленныхъ изъ этихъ поверхностей.

Уравненіе огибающей получимъ, исключая u изъ двухъ уравненій

$$\left.\begin{aligned}\Omega(x_1(u),\ y_1(u),\ z_1(u),\ x,\ y,\ z) = 0\\ \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}x_1'(u)+\frac{\partial\Omega}{\partial y_1}y_1'(u)+\frac{\partial\Omega}{\partial z_1}z_1'(u)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(163)$$

Если предположить въ частности, что x_1, y_1, z_1 — постоянныя, то 2-е уравненіе обращается въ тождество, а первое дастъ намъ поверхность $\Omega = 0$; слѣдовательно, уравненія (163) представляютъ *всѣ* интегралы уравненія $D = 0$, за исключеніемъ лишь интеграловъ уравненія $\Delta = 0$ въ тѣхъ случаяхъ, когда это уравненіе не отпадаетъ по одной изъ выше указанныхъ причинъ. Въ равенства (163) входятъ три произвольныя функціи одного аргумента $x_1(u)$, $y_1(u)$, $z_1(u)$; но существенныхъ изъ нихъ *двѣ*, такъ какъ въ нашемъ произволѣ выборъ параметра, и, принимая, напримѣръ, $u=z_1$, получимъ уравненія (163) въ частномъ видѣ

$$\left.\begin{aligned}\Omega(x_1(z_1),\ y_1(z_1),\ z_1,\ x,\ y,\ z) = 0\\ \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}x_1'(z_1)+\frac{\partial\Omega}{\partial y_1}y_1'(z_1)+\frac{\partial\Omega}{\partial z_1}=0,\end{aligned}\right\}\qquad(163')$$

гдѣ уже только *двѣ* произвольныя функціи $x_1(z_1)$ и $y_1(z_1)$.

Предположимъ теперь, что преобразованіе прикосновенія опредѣляется двумя соотношеніями

$$\begin{aligned}\Omega\,(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x,\ y,\ z)=0\\ \Omega_1(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x,\ y,\ z)=0.\end{aligned}\qquad(164)$$

Точки (x_1, y_1, z_1) преобразуются обратнымъ преобразованіемъ прикосновенія въ кривыя семейства $\Omega = 0$, $\Omega_1 = 0$, содержащаго три произвольныхъ параметра x_1, y_1, z_1 и называемаго ***комплексомъ*** кривыхъ. Произвольная кривая

$$\left.\begin{aligned}x_1 &= x_1(u)\\ y_1 &= y_1(u)\\ z_1 &= z_1(u)\end{aligned}\right\}\qquad(165)$$

преобразуется въ поверхность, образованную системой кривыхъ

$$\left.\begin{aligned}\Omega\,(x_1(u),\ y_1(u),\ z_1(u),\ x,\ y,\ z)=0\\ \Omega_1(x_1(u),\ y_1(u),\ z_1(u),\ x,\ y,\ z)=0\end{aligned}\right\}\qquad(166)$$

съ однимъ произвольнымъ параметромъ u, т. е. въ одну изъ такъ-называемыхъ поверхностей комплекса

$$\begin{aligned}\Omega\,(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x,\ y,\ z)=0\\ \Omega_1(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x,\ y,\ z)=0.\end{aligned}$$

Такимъ образомъ, интегралами уравненія $D = 0$, — за исключеніем интеграловъ уравненія $\Delta = 0$ въ тѣхъ случаяхъ, когда оно не отп даетъ, — служатъ всѣ поверхности комплекса

$$\Omega = 0,\quad \Omega_1 = 0,$$

т. е. поверхности, образованныя кривыми этого комплекса.

Для опредѣленія интеграловъ уравненія $\Delta = 0$ въ тѣхъ случаях когда оно не исчезаетъ и представляетъ дѣйствительно уравненіе с частными производными 1-го порядка, можно поступать, какъ и въ пе вомъ случаѣ.

Уравненіе поверхности комплекса получимъ. исключая u изъ ура неній (166); въ эти уравненія входятъ три произвольныя функціи одно аргумента; выборомъ параметра u можно одну изъ функцій устранит такъ, принявъ $u = z_1$, имѣемъ уравненія (166) въ формѣ

$$\left.\begin{aligned}\Omega\,(x_1(z_1),\ y_1(z_1),\ z_1,\ x,\ y,\ z)=0\\ \Omega_1(x_1(z_1),\ y_1(z_1),\ z_1,\ x,\ y,\ z)=0,\end{aligned}\right\}\qquad(166$$

гдѣ уже только *двѣ* произвольныя функціи $x_1(z_1)$ и $y_1(z_1)$.

Уравненіе $D = 0$ въ разсматриваемомъ случаѣ не будетъ содер жать члена $rt - s^2$. Въ самомъ дѣлѣ, разлагая детерминантъ

$$D = \begin{vmatrix}\dfrac{dx_1}{dx} & \dfrac{dy_1}{dx}\\[2mm] \dfrac{dx_1}{dy} & \dfrac{dy_1}{dy}\end{vmatrix},$$

легко найдемъ, что коэффиціентомъ при $rt - s^2$ будетъ опредѣлитель

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial p} & \dfrac{\partial y_1}{\partial p}\\[2mm] \dfrac{\partial x_1}{\partial q} & \dfrac{\partial y_1}{\partial q}\end{vmatrix},$$

т. е. Якобіевъ опредѣлитель функцій x_1 и y_1 по перемѣннымъ p и q между тѣмъ, исключая z_1 изъ равенствъ (164), получимъ соотношені между x_1 и y_1, свободное отъ p и q; слѣдовательно, Якобіевъ опредѣ литель x_1 и y_1 по p и q равенъ нулю, и членъ $rt - s^2$ исчезаетъ из уравненія $D = 0$, которое въ этомъ случаѣ будетъ линейнымъ.

Для уравненій $D=0$ легко можетъ быть рѣшена задача, извѣстна под именемъ задачи *Cauchy*: найти интегральную поверхность, прохо дящую черезъ данную кривую и касающуюся по этой кривой данной развертывающейся поверхности, описанной около кривой. Въ самомъ дѣлѣ, данное преобразованіе прикосновенія преобразуетъ многообразіе элементовъ 1-го порядка одного измѣренія, образуемое точками кривой вмѣстѣ съ проходящими черезъ нихъ плоскостями развертывающейся поверхности, вообще говоря, въ подобное же многообразіе, т. е. въ кривую съ описанной развертывающейся поверхностью. Искомый интегралъ долженъ преобразоваться въ многообразіе двухъ измѣреній, носителемъ котораго служитъ линія или точка (мы оставляемъ въ сторонѣ интегралы уравненія $\Delta = 0$) и которое содержитъ въ себѣ преобразованное многообразіе одного измѣренія. Этимъ условіямъ удовлетворяетъ лишь многообразіе двухъ измѣреній, носителемъ котораго служитъ преобразованная кривая; производя обратное преобразованіе, получимъ вполнѣ опредѣленную поверхность—искомый интегралъ уравненія $D=0$. Можетъ случиться, что преобразованное многообразіе одного измѣренія будетъ состоять изъ точки и проходящей черезъ нее системы плоскостей, облекающихъ нѣкоторый конусъ; тогда многообразіе двухъ измѣреній, въ который преобразуется искомый интегралъ, будетъ, очевидно, эта же точка со всѣми проходящими плоскостями. Если преобразованіе прикосновенія опредѣляется однимъ соотношеніемъ $\Omega = 0$, то, производя обратное преобразованіе, получимъ поверхность $\Omega = 0$ — интегралъ уравненія $D = 0$; если же преобразованіе прикосновенія опредѣляется двумя соотношеніями $\Omega = 0$, $\Omega_1 = 0$, то, производя обратное преобразованіе, получимъ кривую $\Omega=0$, $\Omega_1=0$, и, слѣдовательно, не будемъ имѣть *интеграла*. Не трудно усмотрѣть, для какого многообразія одного измѣренія задача оказывается невозможной во 2-мъ случаѣ: многообразіе это будетъ, очевидно, входить въ составъ полученнаго нами многообразія двухъ измѣреній, носителемъ котораго служитъ кривая $\Omega = 0$, $\Omega_1 = 0$; слѣдовательно, точки этого многообразія могутъ лишь быть точками кривой $\Omega = 0$, $\Omega_1 = 0$, и такимъ образомъ задача становится невозможной для кривой комплекса $\Omega = 0$, $\Omega_1 = 0$ и описанной около нея произвольной развертывающейся поверхности. Допустимъ теперь, что многообразіе одного измѣренія дало, по преобразованіи, въ частности точку съ проходящимъ *пучкомъ* плоскостей. Проводя произвольныя кривыя черезъ эту точку касательно къ прямой — общему ребру пучка плоскостей, замѣтимъ, что преобразованное многообразіе одного измѣренія входитъ въ составъ всѣхъ многообразій двухъ измѣреній, носителями которыхъ служатъ проведенныя нами кривыя. Производя обратное преобразованіе надъ этими многообразіями двухъ измѣреній, получимъ безконечное множество интеграловъ уравненія $D=0$—

рѣшеній поставленной выше задачи. Опредѣлимъ, для какихъ же м образій одного измѣренія задача становится неопредѣленной.

Въ томъ случаѣ, когда преобразованіе прикосновенія оп ляется однимъ соотношеніемъ $\Omega = 0$, мы уже упоминали, что вмѣстѣ съ проходящимъ пучкомъ плоскостей соотвѣтствуетъ так зываемая характеристика семейства поверхностей $\Omega = 0$ съ о параметромъ, т. е. кривая и развертывающаяся поверхность, по рымъ поверхность семейства касается своей огибающей; слѣдоват для этихъ характеристикъ задача становится неопредѣленной. Въ случаѣ, когда преобразованіе прикосновенія опредѣляется двум отношеніями $\Omega = 0$, $\Omega_1 = 0$, точкѣ съ проходящимъ пучкомъ костей соотвѣтствуетъ кривая комплекса $\Omega = 0$, $\Omega_1 = 0$ съ о ной около нея нѣкоторой *опредѣленной* развертывающейся поверхн Такимъ образомъ, задача становится неопредѣленной для кривой плекса и нѣкоторой опредѣленной развертывающейся поверхности санной около кривой. Если мы возьмемъ описанную развертываю поверхность совершенно произвольно, то, какъ видѣли выше, з будетъ, вообще говоря, невозможна; чтобы задача стала неопред ной, надо развертывающуюся поверхность при данной кривой подо такъ, чтобы по преобразованіи получить пучокъ плоскостей, про щихъ черезъ точку, соотвѣтствующую данной кривой; такъ такт данной точкѣ за ребро пучка можно взять любой изъ лучей, вы щихъ изъ этой точки, то, слѣдовательно, при данной кривой разв вающаяся поверхность опредѣляется съ двумя произвольными стоянными.

Для примѣра разсмотримъ, во-первыхъ, преобразованіе прик венія, опредѣляемое соотношеніемъ

$$\Omega = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 - R^2 = 0,$$

т. е. преобразованіе, преобразующее всякую поверхность въ парал ную (см. гл. I, § 4, прим. 2). Здѣсь имѣемъ

$$x_1 = x - \frac{Rp}{\sqrt{1+p^2+q^2}}; \quad y_1 = y - \frac{Rq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Уравненіе $D = 0$ будетъ имѣть видъ:

$$\frac{R}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot [-(q^2+1)r + 2pqs - (p^2+1)t] + \frac{R^2}{(1+p^2+q^2)^2}(rt - s^2) + 1 = 0.$$

Опредѣлитель Δ, какъ легко усмотрѣть, есть членъ свободный отъ r, s, t въ разложеніи опредѣлителя D; слѣдовательно, въ этомъ случаѣ имѣемъ $\Delta = 1$, и уравненіе $\Delta = 0$ отпадаетъ.

По предыдущему, интегралами уравненія (167) будутъ всѣ шары радіуса R (уравненіе $\Omega = 0$ представляетъ шаръ радіуса R съ центромъ (x, y, z)) и всѣ огибающія семействъ такихъ шаровъ съ однимъ параметромъ, т. е. поверхности каналовъ.

Задача Cauchy становится неопредѣленной для характеристикъ семействъ; очевидно, что въ данномъ случаѣ характеристиками будутъ круги радіуса R вмѣстѣ съ прямыми круглыми цилиндрами, построенными на этихъ кругахъ.

Разсмотримъ, во-вторыхъ, преобразованіе Ампера, опредѣляемое соотношеніями

$$\Omega = y_1 - y = 0, \quad \Omega_1 = z_1 - z + x_1 x = 0.$$

Въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$x_1 = p, \quad y_1 = y,$$

слѣдовательно, уравненіе $D = 0$ принимаетъ видъ

$$r = 0; \tag{168}$$

уравненіе $\Delta = 0$ обращается въ тождество $0 = 0$.

Интегралами уравненія (168) служатъ, по предыдущему, поверхности, образованныя линіями комплекса $\Omega = 0$, $\Omega_1 = 0$, т. е. прямыми параллельными плоскости xz; итакъ, уравненіе (168) допускаетъ интегралами всѣ линейчатыя поверхности, образующія которыхъ параллельны плоскости xz. Уравненіе интеграла получимъ, по предыдущему, предполагая, напр., $x_1 = \varphi(y_1)$, $z_1 = \psi(y_1)$ и исключая y_1 между уравненіями

$$\Omega = y_1 - y = 0$$
$$\Omega_1 = \psi(y_1) - z + \varphi(y_1) . x = 0.$$

Получимъ $\psi(y) - z + \varphi(y) . x = 0$, откуда

$$z = \varphi(y) . x + \psi(y),$$

гдѣ φ и ψ — произвольныя функціи.

Задача Cauchy становится неопредѣленной для прямой, параллельной плоскости xz и пучка плоскостей, проходящихъ черезъ эту прямую, при чемъ каждой точкѣ прямой соотвѣтствуетъ опредѣленная плоскость пучка, опредѣляемая изъ условія, чтобы по преобразованіи получить точку и пучокъ плоскостей.

Разсмотримъ еще преобразованіе прикосновенія, опредѣляем соотношеніями

$$\Omega = z_1 - z = 0; \quad \Omega_1 = y_1 - y + \psi(x_1 - x) = 0. \qquad (16$$

Изъ общихъ формулъ получимъ

$$p_1 = p, \quad q_1 = q, \quad p = q . \psi'(x_1 - x). \qquad (17$$

Чтобы получить $\frac{dx_1}{dx}$ и $\frac{dx_1}{dy}$, производимъ операціи $\frac{d}{dx}$ и $\frac{d}{dy}$ надъ і слѣднимъ изъ равенствъ (170); получимъ:

$$r = s . \psi' + q . \psi'' . \left(\frac{dx_1}{dx} - 1\right); \quad s = t . \psi' + q . \psi'' . \frac{dx_1}{dy}.$$

Производя тѣ же операціи надъ равенствомъ $\Omega_1 = 0$, получимъ:

$$\frac{dy_1}{dx} + \psi' . \left(\frac{dx_1}{dx} - 1\right) = 0; \quad \frac{dy_1}{dy} - 1 + \psi' . \frac{dx_1}{dy} = 0;$$

опредѣляя $\frac{dx_1}{dx}$, $\frac{dx_1}{dy}$, $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_1}{dy}$ и вставляя въ опредѣлитель D, г лучимъ уравненіе $D = 0$ въ видѣ:

$$1 + \frac{r - 2s . \psi' + t . \psi'^2}{q\psi''} = 0.$$

Изъ послѣдняго равенства (170) $\psi' = \frac{p}{q}$; ψ'', какъ функція того аргумента, какъ и ψ', можетъ быть выражена черезъ $\psi' = \frac{p}{q}$, т. $\psi'' = \varphi\left(\frac{p}{q}\right)$, и уравненіе $D = 0$ окончательно принимаетъ видъ

$$\frac{q^2 r - 2pqs + p^2 t}{q^2 \varphi\left(\frac{p}{q}\right)} + 1 = 0. \qquad (17$$

Детерминантъ $\Delta = 1$, а потому уравненіе $\Delta = 0$ отпадаетъ. Уравнен $\Omega = 0$, $\Omega_1 = 0$ представляютъ комплексъ кривыхъ, получаемый г раллельнымъ передвиженіемъ плоской кривой, лежащей въ плоскос xy и имѣющей уравненіемъ $\eta = \psi(\xi)$. Такимъ образомъ, интеграло уравненія (171) будетъ служить любая поверхность, образованная г раллельнымъ передвиженіемъ упомянутой кривой, другими словами ин гралами уравненія (171) будутъ служить такъ-называемыя поверхности переноса.

Предположимъ теперь, что имѣемъ нѣкоторое уравненіе

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{172}$$

отличное отъ уравненія $D = 0$ для даннаго преобразованія прикосновенія, и что лѣвая часть этого уравненія F есть цѣлая алгебраическая функція r, s, t — случай, который обыкновенно имѣемъ во всѣхъ частныхъ задачахъ. Въ силу даннаго преобразованія прикосновенія, r_1, s_1, t_1 опредѣляются изъ равенствъ (135) и (136) какъ частныя двухъ детерминантовъ, напримѣръ

$$r_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dp_1}{dx}, & \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dp_1}{dy}, & \frac{dy_1}{dy} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dx}, & \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dx_1}{dy}, & \frac{dy_1}{dy} \end{vmatrix}},$$

при чемъ дѣлителемъ вездѣ служитъ детерминантъ

$$D = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dx}, & \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dx_1}{dy}, & \frac{dy_1}{dy} \end{vmatrix}.$$

Разлагая всѣ эти детерминанты, получимъ, какъ легко усмотрѣть, выраженія линейныя относительно $r, s, t, rt - s^2$, такъ что общій видъ выраженій r_1, s_1, t_1 будетъ

$$\frac{ar + bs + ct + \partial(rt - s^2) + f}{D},$$

гдѣ a, b, c, ∂, f — функціи x, y, z, p, q, а D — опредѣлитель, который мы разсматривали выше и который самъ по разложеніи даетъ выраженіе того же вида, какъ и выраженіе, находящееся въ числителѣ. Обратно, выражая r, s, t черезъ $r_1, s_1, t_1, p_1, q_1, x_1, y_1, z_1$ на основаніи обратнаго преобразованія прикосновенія, получимъ для нихъ выраженія вида

$$\frac{a_1 r_1 + b_1 s_1 + c_1 t_1 + \partial_1(r_1 t_1 - s_1^2) + f_1}{D_1},$$

гдѣ

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dx_1}, & \frac{dy}{dx_1} \\ \frac{dx}{dy_1}, & \frac{dy}{dy_1} \end{vmatrix}, \quad (1$$

при чемъ уравненіе $D_1 = 0$ играетъ ту же роль для обратнаго г образованія, какую $D = 0$ — для прямого. Вставляя въ лѣвую ча уравненія $F = 0$ вмѣсто x, y, z, p, q, r, s, t ихъ выраженія чер $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1$ на основаніи формулъ обратнаго преоб зованія, получимъ, какъ видно изъ предыдущаго, выраженіе вида

$$\frac{\Phi}{D_1^m},$$

гдѣ Φ — цѣлая алгебраическая функція r_1, s_1, t_1 съ коэффиціент зависящими отъ x_1, y_1, z_1, p_1, q_1. Такимъ образомъ, уравненіе F преобразуется въ уравненіе

$$\frac{\Phi}{D_1^m} = 0. \quad ($$

Разсмотримъ произведеніе двухъ опредѣлителей $D_1 D$; по изв ному правилу умноженія опредѣлителей имѣемъ (въ первомъ бе столбцы, во второмъ строки):

$$D_1 D = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dx_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{dx}{dy_1}\frac{dy_1}{dx}, & \frac{dx}{dx_1}\frac{dx_1}{dy} + \frac{dx}{dy_1}\frac{dy_1}{dy} \\ \frac{dy}{dx_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{dy}{dy_1}\frac{dy_1}{dx}, & \frac{dy}{dx_1}\frac{dx_1}{dy} + \frac{dy}{dy_1}\frac{dy_1}{dy} \end{vmatrix}.$$

Первый членъ первой строки полученнаго опредѣлителя, по раскр символовъ операцій $\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dy_1}$, принимаетъ видъ:

$$\frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial x}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial x}{\partial z_1}\left(p_1\frac{dx_1}{dx} + q_1\frac{dy_1}{dx}\right) + \frac{\partial x}{\partial p_1}\left(r_1\frac{dx_1}{dx} + s_1\frac{dy_1}{dx}\right) + \frac{\partial x}{\partial q_1}\left(s_1\frac{dx_1}{dx} + t_1\frac{dy_1}{dx}\right),$$

или, на основаніи равенствъ (135), (136), (138), (139),

$$\frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial x}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial x}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx} + \frac{\partial x}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dx} + \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dx} = \frac{dx}{dx} =$$

Аналогично получимъ, что второй членъ 1-й строки равенъ $\frac{dx}{dy}=0$, первый членъ 2-й строки равенъ $\frac{dy}{dx}=0$ и второй членъ второй строки $=\frac{dy}{dy}=1$. Такимъ образомъ

$$D_1 D = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \tag{175}$$

и мы имѣемъ:

$$F=\frac{\Phi}{D_1^{\,m}}=D^m\Phi,$$

откуда обратно

$$\Phi=\frac{F}{D^m}=D_1^{\,m}F.$$

Уравненіе $F=0$, по преобразованіи, можетъ быть, слѣдовательно, представлено въ видѣ

$$D^m\Phi=0. \tag{176}$$

Всякій интегралъ уравненія $F=0$ преобразуется въ интегральное многообразіе уравненія (176), для котораго, слѣдовательно, или $\Phi=0$, или $D=0$; въ послѣднемъ случаѣ преобразуемый нами интегралъ есть общій интегралъ уравненій $F=0$ и $D=0$, и мы знаемъ, что по преобразованіи мы получимъ всегда многообразіе, носителемъ котораго служитъ или точка, или линія, или, наконецъ, цилиндръ съ образующими параллельными оси z_1; однимъ словомъ мы не получимъ интеграла въ собственномъ смыслѣ. Такимъ образомъ, всякій интегралъ уравненія $F=0$, который по преобразованіи остается интеграломъ, будетъ необходимо удовлетворять уравненію

$$\Phi=0. \tag{177}$$

Обратно, всякій интегралъ уравненія (177), который по преобразованіи остается интеграломъ и для котораго, слѣдовательно, D_1 отлично отъ нуля, будетъ удовлетворять уравненію $F=0$. Такимъ образомъ, если мы будемъ ограничиваться изысканіемъ *интеграловъ* (въ собственномъ смыслѣ) уравненій, то можемъ сказать, что уравненія

$$F=0 \quad \text{и} \quad \Phi=0$$

эквивалентны, или иначе, что уравненіе $F=0$ „преобразуется" въ уравненіе $\Phi=0$.

Если уравненіе $F=0$ взято произвольно, то оно не допускает общихъ интеграловъ съ уравненіемъ $D=0$, и слѣдовательно, въ о щемъ случаѣ всѣ интегралы уравненія $F=0$ преобразуются въ инт гралы $\Phi=0$, равнымъ образомъ и обратно. Въ частныхъ случаях если $F=0$ имѣетъ общіе интегралы съ $D=0$, то эти общіе инт гралы утрачиваются при переходѣ къ $\Phi=0$; но они всегда легко могут быть найдены: въ самомъ дѣлѣ, выше (стр. 176—179) мы видѣли, чт можно безъ затрудненія найти *всѣ* интегралы $D=0$, и слѣдовательн легко можемъ выбрать тѣ изъ нихъ, для которыхъ $F=0$. Съ друго стороны, уравненіе $\Phi=0$ можетъ имѣть лишніе интегралы сравн тельно съ $F=0$; въ самомъ дѣлѣ, мы имѣли

$$\Phi=D_1^{\,m}F,$$

и слѣдовательно, если уравненіе $\Phi=0$ имѣетъ общіе интегралы с $D_1=0$, то для нихъ F можетъ быть отлично отъ нуля; но эти лишні интегралы при преобразованіи обращаются въ многообразія, имѣющі носителемъ или точку, или линію, или цилиндръ съ образующими па раллельными оси z, и потому они сами собой отпадаютъ.

Въ послѣдующихъ примѣрахъ мы будемъ, согласно вышеизлс женному, говорить, что уравненіе $F=0$ „преобразуется" въ $\Phi=0$, н не будемъ забывать, что при этомъ ограничиваемся интегралами, кс торые преобразуются въ интегралы.

Примѣнимъ прежде всего преобразованіе Ампера къ уравненію

$$rt-s^2=0.$$

Въ силу формулъ (144) легко получимъ

$$rt-s^2=t_1 r=-\frac{t_1}{r_1}\cdot$$

такъ что уравненіе $rt-s^2=0$ „преобразуется" въ уравненіе

$$t_1=0.$$

Интегралъ послѣдняго будетъ

$$z_1=\varphi(x_1)y_1+\psi(x_1), \qquad (178$$

гдѣ φ и ψ — произвольныя функціи (мы имѣли ранѣе интегралъ урав ненія $r=0$, изъ котораго нашъ интегралъ получается, очевидно, за мѣной x черезъ y_1, и y черезъ x_1). Изъ равенства (178) имѣемъ

$$p_1=\frac{dz_1}{dx_1}=\varphi'(x_1)y_1+\psi'(x_1);\quad q_1=\frac{dz_1}{dy_1}=\varphi(x_1). \qquad (179$$

Въ силу преобразованія Ампера, изъ (178) и (179) получаемъ

$$\left.\begin{aligned} z-px&=\varphi(p).y+\psi(p)\\ -x&=\varphi'(p).y+\psi'(p)\\ q&=\varphi(p). \end{aligned}\right\} \qquad (180)$$

Равенства (180), какъ легко усмотрѣть, опредѣляютъ развертывающуюся поверхность, которая и будетъ, слѣдовательно, интеграломъ уравненія $rt-s^2=0$.

Примѣняя то же преобразованіе къ уравненію

$$rt-s^2+a^2=0, \qquad (181)$$

встрѣчающемуся въ механической теоріи тепла, получимъ уравненіе

$$t_1-a^2r_1=0. \qquad (182)$$

Если бы мы къ послѣднему уравненію примѣнили преобразованіе, распространенное изъ преобразованія точекъ

$$z_2=z_1,\quad x_2=x_1+ay_1,\quad y_2=x_1-ay_1,$$

то получили бы уравненіе

$$s_2=0,$$

интегралъ котораго:

$$z_2=\varphi(x_2)+\psi(y_2);$$

а слѣдовательно, интегралъ уравненія (182)

$$z_1=\varphi(x_1+ay_1)+\psi(x_1-ay_1),$$

гдѣ φ и ψ—произвольныя функціи.

Для p_1 и q_1 получаемъ:

$$\begin{aligned} p_1&=\varphi'(x_1+ay_1)+\psi'(x_1-ay_1)\\ q_1&=a.\varphi'(x_1+ay_1)-a.\psi'(x_1-ay_1). \end{aligned}$$

Въ силу формулъ преобразованія Ампера, отсюда имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} z-px&=\varphi(p+ay)+\psi(p-ay)\\ -x&=\varphi'(p+ay)+\psi'(p-ay)\\ q&=a\varphi'(p+ay)-a\psi'(p-ay). \end{aligned}\right\} \qquad (183)$$

Исключая p изъ первыхъ двухъ равенствъ, получимъ интегралъ уравненія (181).

Разсмотримъ теперь примѣръ болѣе общаго характера, а именн произвольное билинейное уравненіе

$$Rr+Ss+Tt+U(rt-s^2)=V, \qquad (184$$

гдѣ R, S, T, U, V — функціи x, y, z, p, q.

Докажемъ, что всякое подобное уравненіе произвольнымъ пре образованіемъ прикосновенія преобразуется въ уравненія того же типа Мы уже видѣли, что r, s, t выражаются черезъ $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t$ формулами вида

$$\frac{a_1r_1+b_1s_1+c_1t_1+d_1(r_1t_1-s_1^2)+f_1}{D_1}.$$

Чтобы удобнѣе составить выраженіе $rt-s^2$, обратимся къ равенствам

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dx_1}&=r\frac{dx}{dx_1}+s\frac{dy}{dx_1};\quad \frac{dq}{dx_1}=s\frac{dx}{dx_1}+t\frac{dy}{dx_1},\\ \frac{dp}{dy_1}&=r\frac{dx}{dy_1}+s\frac{dy}{dy_1};\quad \frac{dq}{dy_1}=s\frac{dx}{dy_1}+t\frac{dy}{dy_1}, \end{aligned}\right\} \qquad (185$$

опредѣляющимъ r, s, t въ обратномъ преобразованіи. Составимъ опре дѣлитель

$$\begin{vmatrix} \frac{dp}{dx_1} & \frac{dq}{dx_1}\\ \frac{dp}{dy_1} & \frac{dq}{dy_1} \end{vmatrix}:$$

на основаніи равенствъ (185), каждый элементъ его есть сумма двух произведеній, и мы легко убѣдимся, что

$$\begin{vmatrix} \frac{dp}{dx_1} & \frac{dq}{dx_1}\\ \frac{dp}{dy_1} & \frac{dq}{dy_1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} r & s\\ s & t \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} \frac{dx}{dx_1} & \frac{dy}{dx_1}\\ \frac{dx}{dy_1} & \frac{dy}{dy_1} \end{vmatrix}=(rt-s^2).D_1,$$

откуда

$$rt-s^2=\frac{\begin{vmatrix} \frac{dp}{dx_1} & \frac{dq}{dx_1}\\ \frac{dp}{dy_1} & \frac{dq}{dy_1} \end{vmatrix}}{D_1}. \qquad (18$$

Числитель, очевидно есть выраженіе линейное относительно r_1, t_1, s_1, $(r_1 t_1 - s_1^2)$, и слѣдовательно, $rt - s^2$ выражается формулой того же вида, какъ и r, s, t. Вставляя полученныя выраженія въ уравненіе (184) и отбрасывая знаменателя D_1, или иначе множителя D, получимъ уравненіе вида

$$R_1 r_1 + S_1 s_1 + T_1 t_1 + U_1(r_1 t_1 - s_1^2) = V_1. \tag{187}$$

Не трудно теперь вывести для билинейныхъ уравненій теорему, впервые полученную академикомъ В. Г. Имшенецкимъ *): если мы знаемъ интегралъ уравненія (184), содержащій *три* произвольныхъ постоянныхъ

$$z = f(x, y, a, b, c),$$

то можемъ преобразовать уравненіе (184) въ линейное, т. е. свободное отъ члена $rt - s^2$.

Для большей общности предположимъ уравненіе интеграла въ неразрѣшенномъ видѣ

$$\Omega(x, y, z, a, b, c) = 0 \tag{188}$$

и произведемъ надъ уравненіемъ (184) преобразованіе прикосновенія, опредѣляемое соотношеніемъ

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0. \tag{189}$$

Тогда, какъ мы знаемъ, поверхности семейства (188) преобразуются во всевозможныя точки

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad z_1 = c.$$

Совершимъ затѣмъ еще преобразованіе Лежандра, которое точки преобразуетъ во всевозможныя плоскости. Преобразованіе, опредѣляемое равенствомъ (189), и преобразованіе Лежандра въ совокупности эквивалентны нѣкоторому новому преобразованію прикосновенія, которымъ поверхности семейства (188) преобразуются въ плоскости

$$z_2 = a x_2 + b y_2 - c, \tag{190}$$

а уравненіе (184) въ нѣкоторое уравненіе

$$R_2 r_2 + S_2 s_2 + T_2 t_2 + U_2(r_2 t_2 - s_2^2) = V_2, \tag{191}$$

---

*) Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes.

которое, слѣдовательно, должно допускать интегралами всевозможныя плоскости. Изъ (190) получаемъ

$$p_2 = a, \quad q_2 = b, \quad r_2 = 0, \quad s_2 = 0, \quad t_2 = 0;$$

такимъ образомъ, уравненіе (191) должно удовлетворяться при $r_2 = s_2 = t_2 = 0$, при произвольныхъ x_2 и y_2 (независимыя перемѣнныя), при произвольныхъ p_2 и q_2, такъ какъ a и b — произвольныя постоянныя, и при произвольномъ z_2, такъ какъ z_2 содержитъ еще одно произвольное постоянное c. Отсюда заключаемъ, что необходимо

$$V_2 = 0,$$

и уравненіе будетъ вида

$$R_2 r_2 + S_2 s_2 + T_2 t_2 + U_2(r_2 t_2 - s_2^2) = 0. \tag{191'}$$

Но это уравненіе получается преобразованіемъ Лежандра изъ уравненія въ перемѣнныхъ $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1$; производя обратное преобразованіе, которое тоже будетъ преобразованіемъ Лежандра, и отбрасывая какъ всегда знаменатель, получимъ

$$T_2 r_1 - S_2 s_1 + R_2 t_1 + U_2 = 0; \tag{192}$$

это и будетъ уравненіе, въ которое данное — (184) — преобразуется преобразованіемъ прикосновенія, опредѣляемымъ равенствомъ (189). Такимъ образомъ, интересная и важная теорема, данная В. Г. Имшенецкимъ, доказана безъ всякихъ выкладокъ; приведенный выводъ принадлежитъ Lie.

Возьмемъ для примѣра уравненіе поверхностей постоянной кривизны

$$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{1}{R^2}. \tag{193}$$

Извѣстно, что всѣ шары радіуса R — поверхности кривизны $= \frac{1}{R^2}$, такъ что уравненіе

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2,$$

гдѣ a, b, c произвольныя постоянныя, представляетъ интегралъ уравненія (193); въ этомъ впрочемъ не трудно убѣдиться и непосредственно

Если мы надъ уравненіемъ (193) совершимъ преобразованіе прикосновенія, опредѣляемое равенствомъ

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=R^2, \tag{194}$$

т. е. „параллельное" преобразованіе, которое мы разсматривали ранѣе (гл. I, § 4, стр. 76), то, согласно вышеизложенному, получимъ линейное уравненіе. Мы не выводили формулъ, распространяющихъ параллельное преобразованіе на элементы 2-го порядка, но въ данномъ случаѣ намъ ихъ и не потребуется. Въ самомъдѣлѣ, выше было доказано, что

$$rt-s^2=\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{dp}{dx_1} & \dfrac{dq}{dx_1} \\ \dfrac{dp}{dy_1} & \dfrac{dq}{dy_1} \end{vmatrix}}{D_1}; \tag{186}$$

кромѣ того, для параллельнаго преобразованія $p=p_1$, $q=q_1$ (см. гл. I, § 4. стр. 76), и слѣдовательно

$$rt-s^2=\frac{r_1t_1-s_1^2}{D_1}.$$

Уравненіе (193) преобразуется въ уравненіе

$$\frac{r_1t_1-s_1^2}{(1+p_1^2+q_1^2)^2}=\frac{D_1}{R^2}. \tag{195}$$

Для параллельнаго преобразованія мы вычисляли детерминантъ D (см. стр. 181); D_1 такъ же выражается черезъ $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1$, какъ D черезъ x, y, z, p, q, r, s, t, и окончательно получимъ:

$$\frac{(q_1^2+1)r_1-2p_1q_1s_1+(p_1^2+1)t_1}{(1+p_1^2+q_1^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{R}. \tag{196}$$

Въ новыхъ координатахъ это есть уравненіе поверхностей постоянной средней кривизны; такимъ образомъ, параллельнымъ преобразованіемъ, въ которомъ касательныя плоскости передвигаются на разстояніе R, всѣ поверхности постоянной Гауссовой кривизны $=\frac{1}{R^2}$ преобразуются въ поверхности постоянной средней кривизны $=\frac{1}{R}$, и обратно. Мы получили извѣстную теорему Bonnet.

§ 5. — Совершенно подобно тому, какъ мы распространяли преобразованіе прикосновенія на элементы 2-го порядка, можно распространить его и на элементы n-го порядка.

Предположимъ, что преобразованіе уже распространено на элементы $(n-1)$-го порядка; тогда для опредѣленія координатъ $(z^{(n)})_1$, $(z^{(n-1)}_1)_1, \ldots (z_{(n)})_1$ новой системы получаемъ равенства вида:

$$\left.\begin{aligned} d\left(z^{(i)}_{(n-1-i)}\right)_1-\left(z^{(i+1)}_{(n-1-i)}\right)_1 dx_1-\left(z^{(i)}_{(n-i)}\right)_1 dy_1 &= \\ =\sum_{j,k}\rho^{(i)}_{j,k}\left[dz^{(k)}_{(j)}-z^{(k+1)}_{(j)}dx-z^{(k)}_{(j+1)}dy\right]. \end{aligned}\right\} \tag{197}$$

гдѣ суммованіе распространяется на всѣ цѣлыя положительныя значенія j и k, для которыхъ $j+k\gtreqless n-1$; при этомъ

$$z^{(0)}_{(0)}=z,\quad z^{(1)}_{(0)}=p,\quad z^{(0)}_{(1)}=q,\quad z^{(2)}_{(0)}=r,\quad z^{(1)}_{(1)}=s,\quad z^{(0)}_{(2)}=t.$$

Мы предположили, что координаты элемента $(n-1)$-го порядка новой системы уже выражены въ функціи координатъ старой системы; слѣдовательно, дифференціалы, входящіе въ лѣвыя части равенствъ (197), выражаются черезъ дифференціалы, стоящіе въ правыхъ частяхъ, и мы получаемъ рядъ равенствъ, которыя, по исключеніи множителей $\rho^{(i)}_{j,k}$, даютъ намъ окончательно:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(z^{(i)}_{(n-1-i)}\right)_1-\left(z^{(i+1)}_{(n-1-i)}\right)_1\cdot\frac{dx_1}{dx}-\left(z^{(i)}_{(n-i)}\right)_1\cdot\frac{dy_1}{dx}&=0 \\ \frac{d}{dy}\left(z^{(i)}_{(n-1-i)}\right)_1-\left(z^{(i+1)}_{(n-1-i)}\right)_1\cdot\frac{dx_1}{dy}-\left(z^{(i)}_{(n-i)}\right)_1\cdot\frac{dy_1}{dy}&=0, \end{aligned}\right\} \tag{198}$$

гдѣ, согласно § 3-му,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV}{dx}&=\sum_{j,k}\frac{\partial V}{\partial z^{(k)}_{(j)}}\cdot z^{(k+1)}_{(j)}+\frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{dV}{dy}&=\sum_{j,k}\frac{\partial V}{\partial z^{(k)}_{(j)}}\cdot z^{(k)}_{(j+1)}+\frac{\partial V}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{199}$$

Такъ какъ i можетъ принимать значенія $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$, то мы имѣемъ $2n$ линейныхъ уравненій для опредѣленія $n+1$ координатъ $\left(z^{(\alpha)}_{(n-\alpha)}\right)_1$.

Легко доказать, что эти уравненія совмѣстны. Въ самомъ дѣлѣ, всякая координата $\left(z^{(m)}_{(n-m)}\right)_1$, кромѣ $\left(z^{(n)}_{(0)}\right)_1$ и $\left(z^{(0)}_{(n)}\right)_1$, входитъ въ двѣ ары уравненій изъ уравненій (198) — въ пару уравненій, соотвѣтствующихъ $i=m$, и въ пару, для которой $i=m-1$; такимъ образомъ, для $\left(z^{(m)}_{(n-m)}\right)_1$ получаемъ два значенія, которыя должны быть равны, и слѣдовательно для совмѣстности уравненій мы должны имѣть:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dx_1}{dx}, & \dfrac{d}{dx}\left(z^{(m)}_{(n-1-m)}\right)_1 \\ \dfrac{dx_1}{dy}, & \dfrac{d}{dy}\left(z^{(m)}_{(n-1-m)}\right)_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{d}{dx}\left(z^{(m-1)}_{(n-m)}\right)_1; & \dfrac{dy_1}{dx} \\ \dfrac{d}{dy}\left(z^{(m-1)}_{(n-m)}\right)_1; & \dfrac{dy_1}{dy} \end{vmatrix},$$

или

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dy}\left(z^{(m)}_{(n-1-m)}\right)_1\cdot\frac{dx_1}{dx}+\frac{d}{dy}\left(z^{(m-1)}_{(n-m)}\right)_1\cdot\frac{dy_1}{dx}= \\ &=\frac{d}{dx}\left(z^{(m)}_{(n-1-m)}\right)_1\cdot\frac{dx_1}{dy}+\frac{d}{dx}\left(z^{(m-1)}_{(n-m)}\right)_1\cdot\frac{dy_1}{dy}; \end{aligned}\right\} \tag{200}$$

гдѣ $m=1, 2, 3, \ldots, n-1$. Но, по предположенію, для координатъ элемента $(n-1)$-го порядка имѣютъ мѣсто равенства, аналогичныя (198). Взявъ два равенства:

$$\frac{d}{dx}\left(z^{(m-1)}_{(n-1-m)}\right)_1-\left(z^{(m)}_{(n-1-m)}\right)_1\cdot\frac{dx_1}{dx}-\left(z^{(m-1)}_{(n-m)}\right)_1\cdot\frac{dy_1}{dx}=0$$
$$\frac{d}{dy}\left(z^{(m-1)}_{(n-1-m)}\right)_1-\left(z^{(m)}_{(n-1-m)}\right)_1\cdot\frac{dx_1}{dy}-\left(z^{(m-1)}_{(n-m)}\right)_1\cdot\frac{dy_1}{dy}=0,$$

производя надъ первымъ операцію $\frac{d}{dy}$, а надъ вторымъ $\frac{d}{dx}$ *) и вычитая одинъ результатъ изъ другого, получимъ какъ разъ соотношеніе (200), такъ какъ операціи $\frac{d}{dx}$ и $\frac{d}{dy}$ перемѣстительны, такъ что $\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy}\right)=$ $=\frac{d}{dy}\left(\frac{dV}{dx}\right)$. Такимъ образомъ, уравненія (198) совмѣстны, и мы найдемъ всѣ координаты $\left(z^{(i)}_{(n-i)}\right)_1$ въ функціи координатъ прежней системы. Въ § 4 мы уже распространили преобразованіе прикосновенія на элементы 2-го порядка, при чемъ для опредѣленія r_1, s_1, t_1 имѣли равенства, аналогичныя (198). Согласно вышеизложенному, отсюда слѣ-

*) Замѣтимъ, что эти равенства имѣютъ мѣсто тождественно.

дуетъ, что мы можемъ распространить преобразованіе на элементы 3-порядка, а затѣмъ послѣдовательно на элементы 4-го, 5-го порядко и такъ далѣе до элементовъ произвольнаго порядка.

Изъ уравненій (198) видимъ, что знаменателемъ въ выраже всѣхъ координатъ служитъ опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dx_1}{dx} & \dfrac{dy_1}{dx} \\ \dfrac{dx_1}{dy} & \dfrac{dy_1}{dy} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Въ силу преобразованія прикосновенія, x_1 и y_1 зависятъ лишь x, y, z, p, q, такъ что, не смотря на общее опредѣленіе опера $\frac{d}{dx}$ и $\frac{d}{dy}$ согласно § 3-му, имѣемъ

$$\frac{dx_1}{dx}=\frac{\partial x_1}{\partial p}r+\frac{\partial x_1}{\partial q}s+\frac{\partial x_1}{\partial z}p+\frac{\partial x_1}{\partial x}$$
$$\frac{dx_1}{dy}=\frac{\partial x_1}{\partial p}s+\frac{\partial x_1}{\partial q}t+\frac{\partial x_1}{\partial z}q+\frac{\partial x_1}{\partial y}$$

и аналогично для y_1; поэтому опредѣлитель (201) есть тотъ самый оп дѣлитель D, который входитъ знаменателемъ въ выраженія r_1, s_1,

Предположимъ теперь, что мы имѣемъ произвольное интегралы многообразіе n-го порядка какого-либо уравненія

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0,$$

т. е. многообразіе элементовъ n-го порядка, удовлетворяющее урав ніямъ (128) § 3-го. Произведемъ надъ нимъ преобразованіе прикос венія. Тогда, въ силу равенствъ, опредѣляющихъ преобразованіе п косновенія, первая группа уравненій (128) (дифференціальныя соот шенія) дастъ аналогичныя уравненія для новой системы координ уравненіе $F=0$ преобразуется въ нѣкоторое новое $G=0$, при ч тождественно

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=G(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1);$$

остается послѣдняя группа уравненій (128). Выведемъ предварите нѣкоторую вспомогательную лемму. Разсмотримъ произвольную ф цію V координатъ элемента и произведемъ надъ ней операціи $\frac{d}{dx_1}$ и $\frac{d}{dy_1}$; тогда, какъ не трудно видѣть изъ опредѣленія операцій,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV}{dx_1}&=\frac{\partial V}{\partial x}\,\frac{dx}{dx_1}+\frac{\partial V}{\partial y}\,\frac{dy}{dx_1}+\sum_{i,\,k}\frac{\partial V}{\partial z_{(k)}^{(i)}}\,\frac{dz_{(k)}^{(i)}}{dx_1}\\ \frac{dV}{dy_1}&=\frac{\partial V}{\partial x}\,\frac{dx}{dy_1}+\frac{\partial V}{\partial y}\,\frac{dy}{dy_1}+\sum_{i,\,k}\frac{\partial V}{\partial z_{(k)}^{(i)}}\,\frac{dz_{(k)}^{(i)}}{dy_1}\,. \end{aligned}\right\}\tag{202}$$

Но въ силу обратнаго преобразованія, которое тоже есть преобразованіе прикосновенія, имѣемъ

$$\begin{aligned} \frac{dz_{(k)}^{(i)}}{dx_1}&=z_{(k)}^{(i+1)}\,\frac{dx}{dx_1}+z_{(k+1)}^{(i)}\,\frac{dy}{dx_1}\\ \frac{dz_{(k)}^{(i)}}{dy_1}&=z_{(k)}^{(i+1)}\,\frac{dx}{dy_1}+z_{(k+1)}^{(i)}\,\frac{dy}{dy_1}\,, \end{aligned}$$

и равенства (202) обращаются, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій, въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV}{dx_1}&=\frac{dV}{dx}\,\frac{dx}{dx_1}+\frac{dV}{dy}\,\frac{dy}{dx_1}\\ \frac{dV}{dy_1}&=\frac{dV}{dx}\,\frac{dx}{dy_1}+\frac{dV}{dy}\,\frac{dy}{dy_1}\,. \end{aligned}\right\}\tag{203}$$

Производя надъ обѣими частями полученныхъ тождествъ (203) операціи $\frac{d}{dx_1}$ и $\frac{d}{dy_1}$, при чемъ $\frac{d}{dx_1}\left(\frac{dV}{dx}\right)$, $\frac{d}{dx_1}\left(\frac{dV}{dy}\right)$; $\frac{d}{dy_1}\left(\frac{dV}{dx}\right)$, $\frac{d}{dy_1}\left(\frac{dV}{dy}\right)$ вычисляемъ на основаніи тождествъ (203), замѣняя въ нихъ V черезъ $\frac{dV}{dx}$ и $\frac{dV}{dy}$, получимъ

$$\frac{d^2V}{dx_1^2}=\frac{dV}{dx}\,\frac{d^2x}{dx_1^2}+\frac{dV}{dy}\,\frac{d^2y}{dx_1^2}+\frac{d^2V}{dx^2}\left(\frac{dx}{dx_1}\right)^2+2\,\frac{d^2V}{dxdy}\,\frac{dx}{dx_1}\,\frac{dy}{dx_1}+\frac{d^2V}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx_1}\right)^2,$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2V}{dx_1dy_1}=\frac{dV}{dx}\,\frac{d^2x}{dx_1dy_1}+\frac{dV}{dy}\,\frac{d^2y}{dx_1dy_1}+\frac{d^2V}{dx^2}\,\frac{dx}{dx_1}\,\frac{dx}{dy_1}+\frac{d^2V}{dxdy}\left(\frac{dx}{dx_1}\,\frac{dy}{dy_1}+\frac{dx}{dy_1}\,\frac{dy}{dx_1}\right)+\\ +\frac{d^2V}{dy^2}\,\frac{dy}{dx_1}\,\frac{dy}{dy_1}\,,\end{aligned}$$

$$\frac{d^2V}{dy_1^2}=\frac{dV}{dx}\,\frac{d^2x}{dy_1^2}+\frac{dV}{dy}\,\frac{d^2y}{dy_1^2}+\frac{d^2V}{dx^2}\left(\frac{dx}{dy_1}\right)^2+2\frac{d^2V}{dxdy}\,\frac{dx}{dy_1}\,\frac{dy}{dy_1}+\frac{d^2V}{dy^2}\left(\frac{dy}{dy_1}\right)^2,$$

гдѣ вообще $\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$, $\frac{d^2f}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{df}{dy}\right)$, $\frac{d^2f}{dxdy}=\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{df}{dx}\right)$ и аналогично для операцій $\frac{d}{dx_1}$ и $\frac{d}{dy_1}$. Производя надъ полученными равенствами еще операціи $\frac{d}{dx_1}$ и $\frac{d}{dy_1}$, убѣдимся, что вообще между $\frac{d^{i+k}V}{dx_1^i\,dy_1^k}$ и $\frac{d^{m+p}V}{dx^m\,dy^p}$ существуетъ такая же связь, какая между производными, обозначаемыми тѣми же символами. Полагая теперь $V=F=G$, получимъ изъ выведенныхъ формулъ, въ силу послѣдней группы уравненій (128), $\frac{d^{i+k}G}{dx_1^k\,dy_1^k}=0$ $(i+k=1,\ 2,\dots,\ n-2)$. Такимъ образомъ, всякое интегральное многообразіе преобразуется преобразованіемъ прикосновенія, распространеннымъ на элементы высшихъ порядковъ, тоже въ интегральное многообразіе.

ГЛАВА III.

§ 1. — Задача Cauchy; общій интегралъ. — § 2. — Многообразія, удовлетворяющія уравненію $Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0$. — § 3. — Особые интегралы; особые элементы.

§ 1. — Въ предшествующей главѣ мы разобрали всевозможные типы интегральныхъ многообразій уравненія съ частными производными 2-го порядка

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0; \tag{1}$$

при этомъ выяснилось, что, за исключеніемъ интеграловъ въ собственномъ смыслѣ слова, всѣ остальныя интегральныя многообразія могутъ быть опредѣлены интеграціей обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій или даже простымъ исключеніемъ. Намъ предстоитъ теперь обратиться къ интеграламъ въ собственномъ смыслѣ, т. е. къ интегральнымъ многообразіямъ типа $M^{(2)}_{2,2}$, имѣющимъ носителями поверхности, при чемъ уравненіе поверхности — носителя многообразія, или иначе интегральной поверхности, должно быть всегда приводимо къ виду

$$z = z(x, y), \tag{2}$$

т. е. случай цилиндра съ образующими параллельными оси z устраняется. Вопросы, которые прежде всего необходимо рѣшить, — слѣдующіе: во-первыхъ, допускаетъ ли произвольно-взятое уравненіе (1) интегралъ, другими словами возможно ли найти z въ функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y такъ, чтобы удовлетворялось уравненіе

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0; \tag{1'}$$

во-вторыхъ, если первый вопросъ разрѣшается утвердительно, то съ ка-кой степенью произвола опредѣляется z, другими словами какая сте-пень произвола въ выборѣ интегральной поверхности даннаго уравне-нія (1). Оба эти вопроса разрѣшаются сами собой, если мы рѣшим такъ-называемую задачу Cauchy: найти интегральную поверхность уравне-нія (1), проходящую черезъ данную кривую C и касающуюся вдоль это кривой данной развертывающейся поверхности D. Именно, изъ дал-нѣйшаго увидимъ, что задача Cauchy есть, вообще говоря, задача во-можная и опредѣленная: слѣдовательно, первый вопросъ непосре-ственно разрѣшается въ утвердительномъ смыслѣ; рѣшеніе второго представляетъ также никакихъ трудностей: мы имъ займемся ниже.

Итакъ, приступаемъ къ рѣшенію задачи Cauchy. Пусть уравнен кривой C

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u) \\ y &= y(u) \\ z &= z(u), \end{aligned}\right\} \qquad ($$

гдѣ u — произвольный параметръ, а плоскости развертывающейся п верхности D опредѣляются изъ равенствъ

$$\left.\begin{aligned} p &= p(u) \\ q &= q(u), \end{aligned}\right\} \qquad ($$

при чемъ между функціями $x(u), y(u), z(u), p(u), q(u)$ имѣетъ мѣсто с отношеніе

$$z'(u) = p \cdot x'(u) + q \cdot y'(u), \qquad ($$

или

$$dz = pdx + qdy. \qquad ($$

такъ какъ поверхность D описана около кривой C. Въ силу услов задачи, намъ требуется опредѣлить z въ функціи независимыхъ пер мѣнныхъ x, y такъ, чтобы при $x = x(u)$, $y = y(u)$ эта функція обр щалась въ $z(u)$, а частныя производныя ея по x и y въ $p(u)$ и $q($ Значенія частныхъ производныхъ 2-го порядка при $x = x(u)$ и $y = y($ т. е. вдоль кривой C, легко могутъ быть найдены на основаніи то замѣчанія, что элементы 2-го порядка интегральнаго многообразі имѣющаго носителемъ искомую поверхность

$$z = z(x, y). \qquad ($$

взятые вдоль кривой C, очевидно, составляютъ интегральное многообразіе одного измѣренія даннаго уравненія (1). Такимъ образомъ, значенія частныхъ производныхъ

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

на кривой C опредѣляются изъ уравненія (1) и дифференціальныхъ соотношеній

$$\left.\begin{aligned} dp &= rdx + sdy \\ dq &= sdx + tdy, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

при чемъ вездѣ x, y, z, p, q слѣдуетъ замѣнить ихъ значеніями на кривой C, т. е. $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$, $p(u)$, $q(u)$. Для опредѣленія трехъ неизвѣстныхъ имѣемъ три уравненія, и слѣдовательно, вообще говоря, найдемъ одно или нѣсколько вполнѣ опредѣленныхъ интегральныхъ многообразій одного измѣренія $M^{(1)}_{1,1}$, опредѣляемыхъ *) для данныхъ кривой C и развертывающейся поверхности D даннымъ уравненіемъ $F = 0$ (1); каждое изъ этихъ многообразій $M^{(1)}_{1,1}$ даетъ намъ систему значеній вторыхъ производныхъ r, s, t на кривой C. Выбравъ одно изъ многообразій $M^{(1)}_{1,1}$, легко найдемъ послѣдовательно интегральное многообразіе одного измѣренія 3-го порядка, затѣмъ 4-го порядка, 5-го порядка и т. д., какъ было указано въ гл. II (§ 2, стр. 154, § 3, стр. 161). Значенія координатъ z''', $z_{,}''$, $z_{,,}'$, $z_{,,,}$, z^{IV},.... элементовъ этихъ многообразій, очевидно, дадутъ намъ значенія частныхъ производныхъ 3-го, 4-го, 5-го и т. д. порядковъ функціи $z(x, y)$ при $x = x(u)$, $y = y(u)$, т. е. вдоль кривой C, если выбранное многообразіе $M^{(1)}_{1,1}$ соотвѣтствуетъ значеніямъ вторыхъ производныхъ функціи $z(x, y)$ при тѣхъ же условіяхъ. Уравненія, изъ которыхъ опредѣляются z''', $z_{,}''$, $z_{,,}'$, $z_{,,,}$ (см. гл. II, § 2, рав. 105, 107', стр. 151—153), слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= Rz''' + Sz_{,}'' + Tz_{,,}' + Pr + Qs + Zp + X = 0 \\ \frac{dF}{dy} &= Rz_{,}'' + Sz_{,,}' + Tz_{,,,} + Ps + Qt + Zq + Y = 0 \\ z'''dx &+ z_{,}''dy - dr = 0 \\ z_{,}''dx &+ z_{,,}'dy - ds = 0 \\ z_{,,}'dx &+ z_{,,,}dy - dt = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

*) Ср. гл. II, § 1, стр. 145.

гдѣ R, S, T, P, Q, Z, X, Y — частныя производныя лѣвой части F уравненія (1) соотвѣтственно по r, s, t, p, q, z, x, y; уравненія эти, какъ мы видѣли въ гл. II, вообще сводятся къ четыремъ независимымъ. Для опредѣленія z''', $z_{,}''$, $z_{,,}'$, $z_{,,,}$ мы можемъ пользоваться 1-мъ, 3-мъ, 4-мъ, 5-мъ или 2-мъ, 3-мъ, 4-мъ, 5-мъ, такъ какъ 3-е, 4-е и 5-е всегда независимы и совмѣстны. Детерминантъ коэффиціентовъ первой системы равенъ

$$\begin{vmatrix} R, & S. & T. & 0 \\ dx, & dy. & 0. & 0 \\ 0, & dx. & dy. & 0 \\ 0, & 0. & dx. & dy \end{vmatrix} = (Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2).dy;$$

детерминантъ 2-й системы равенъ

$$\begin{vmatrix} 0, & R. & S. & T \\ dx, & dy. & 0. & 0 \\ 0, & dx. & dy. & 0 \\ 0, & 0. & dx. & dy \end{vmatrix} = -(Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2).dx.$$

Если $Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2$ отлично отъ нуля, то одинъ изъ этихъ детерминантовъ, по крайней мѣрѣ, отличенъ отъ нуля, и слѣдовательно, мы найдемъ конечныя опредѣленныя значенія для z''', $z_{,}''$, $z_{,,}'$, $z_{,,,}$. Наоборотъ, если

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0 \tag{8}$$

и только въ этомъ случаѣ, система (7) для опредѣленія z''', $z_{,}''$, $z_{,,}'$, $z_{,,,}$ становится, вообще говоря, несовмѣстной или въ частности неопредѣленной. Уравненія, опредѣляющія интегральное многообразіе одного измѣренія n-го порядка по найденному многообразію $(n-1)$-го порядка были даны въ гл. II (§ 3, стр. 161); если условимся результатъ операціи $\frac{d^{i+k}}{dx^i dy^k}$ надъ функціей F, за вычетомъ членовъ, содержащихъ кординаты $z^{(p)}_{q}$, для которыхъ сумма индексовъ $p + q$ имѣетъ наибольшее значеніе, т. е. $= i + k + 2$, обозначать черезъ $\left[\frac{d^{i+k}F}{dx^i dy^k}\right]$, т. е. если положимъ

$$\frac{d^{i+k}F}{dx^i dy^k} = Rz^{(i+2)}_{k} + Sz^{(i+1)}_{k+1} + Tz^{(i)}_{k+2} + \left[\frac{d^{i+k}F}{dx^i dy^k}\right], \tag{9}$$

то упомянутыя уравненія, изъ которыхъ мы опредѣляемъ $z^{(n)}, z_{\prime}^{(n-1)},\dots z_n$, принимаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}
&Rz^{(n)} + Sz_{\prime}^{(n-1)} + Tz_{\prime\prime}^{(n-2)} + \left[\frac{d^{n-2}F}{dx^{n-2}}\right] = 0\\
&Rz_{\prime}^{(n-1)} + Sz_{\prime\prime}^{(n-2)} + Tz_{\prime\prime\prime}^{(n-3)} + \left[\frac{d^{n-2}F}{dx^{n-3}dy}\right] = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&Rz''_{n-2} + Sz'_{n-1} + Tz_n + \left[\frac{d^{n-2}F}{dy^{n-2}}\right] = 0\\
&\quad z^{(n)}dx + z_{\prime}^{(n-1)}dy - dz^{(n-1)} = 0\\
&\quad z_{\prime}^{(n-1)}dx + z_{\prime\prime}^{(n-2)}dy - dz_{\prime}^{(n-2)} = 0\\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\quad z'_{n-1}dx + z_n dy - dz_{n-1} = 0.
\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Уравненія второй группы, очевидно, всегда независимы и совмѣстны; уравненія первой группы, какъ было указано въ гл. II (§ 3, стр. 161), эквивалентны одному уравненію, вообще говоря, независимому отъ уравненій 2-й группы. Для опредѣленія $z^{(n)}, z_{\prime}^{(n-1)},\dots z_n$ мы можемъ поэтому брать одно изъ уравненій 1-й группы и всѣ уравненія 2-й группы. Детерминаты всѣхъ этихъ системъ получимъ, если будемъ таблицу

$$\left\|\begin{matrix}
dx, & dy, & 0, & 0,\dots, & 0, & 0, & 0\\
0, & dx, & dy, & 0,\dots, & 0, & 0, & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0, & 0, & 0, & 0,\dots, & 0, & dx, & dy
\end{matrix}\right\|,\qquad(11)$$

состоящую изъ $(n+1)$ столбцовъ и n строкъ, дополнять одной строкой, въ числѣ элементовъ которой три послѣдовательно рядомъ стоящихъ равны R, S, T, а остальные — нули. Детерминанты n-го порядка, получаемые изъ таблицы (11) выбрасываніемъ послѣдовательно 1-го, 2-го, 3-го,.... $(n+1)$-го столбцовъ, какъ не трудно видѣть, равны соотвѣтственно $dy^n, dy^{n-1}dx, dy^{n-2}dx^2,\dots dx^n$; слѣдовательно, детерминанты системъ, о которыхъ мы упоминали выше, равны

$$\left.\begin{aligned}
&(Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2).dy^{n-2},\\
-&(Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2).dy^{n-3}dx,\\
&(Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2).dy^{n-4}dx^2,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
(-1)^{n-2}.&(Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2).dx^{n-2}.
\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

Отсюда заключаемъ, что если $Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2$ отлично отъ нуля для выбраннаго многообразія $M^{(1)}_{1,1}$, то всѣ координаты $z^{(n)}, z^{(n-1)},\dots z_n$ для интегральнаго многообразія n-го порядка одного измѣренія, или иначе значенія всѣхъ послѣдовательныхъ частныхъ производныхъ $z(x, y)$ для кривой C, получаютъ конечныя опредѣленныя значенія. Если

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0. \qquad (8)$$

и только въ этомъ случаѣ, система (10) становится несовмѣстной или неопредѣленной. Обратимся, наконецъ, къ уравненіямъ (1) и (6), изъ которыхъ мы опредѣляли многообразіе $M^{(1)}_{1,1}$; ихъ можно представить въ видѣ

$$\left.\begin{aligned}
&F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0\\
&rdx + sdy - dp = 0\\
&sdx + tdy - dq = 0.
\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

Якобіевъ опредѣлитель лѣвыхъ частей по перемѣннымъ r, s, t равенъ

$$\begin{vmatrix}
R, & S, & T\\
dx, & dy, & 0\\
0, & dx, & dy
\end{vmatrix} = Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2.$$

Въ случаѣ несовмѣстности или неопредѣленности системы (13) опредѣлитель этотъ, какъ извѣстно, равенъ нулю, и слѣдовательно, должно имѣть мѣсто равенство (8). Можно дать иное доказательство: изъ 2-го и 3-го уравненій (13) опредѣляемъ r и s черезъ t и вставляемъ въ первое; получаемъ

$$F\left(x, y, z, p, q, \frac{dp}{dx} - \frac{dq}{dx}\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \frac{dq}{dx} - t\frac{dy}{dx}, t\right) = 0;$$

для того, чтобы система (13) была несовмѣстна или неопредѣленна, необходимо, чтобы t исчезло изъ полученнаго уравненія, откуда слѣдуетъ, что и производная лѣвой части по t должна равняться нулю, т. е.

$$R\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - S\frac{dy}{dx} + T = 0,$$

или

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0. \qquad (8)$$

Въ концѣ концовъ мы видимъ, что для всѣхъ кривыхъ C и описанныхъ развертывающихся поверхностей D, для которыхъ не выполняется условіе (8), (при чемъ r, s, t предполагаются опредѣляемыми изъ уравненій (13)), могутъ быть найдены конечныя опредѣленныя значенія для всѣхъ производныхъ искомой интегральной функціи $z(x, y)$ вдоль кривой C, если эта функція существуетъ. Для выясненія послѣдняго вопроса, совершимъ сначала надъ даннымъ уравненіемъ и надъ данными кривой C и развертывающейся поверхностью D преобразованіе, которое бы эти послѣднія преобразовало въ ось x и плоскость xy, точнѣе въ многообразіе элементовъ перваго порядка

$$z=0,\ \ y=0,\ \ p=0,\ \ q=0.$$

Можно даже выбрать преобразованіе такъ, чтобы интегральное многообразіе одного измѣренія $M_{1,1}^{(1)}$ преобразовалось въ многообразіе

$$z=0,\ \ y=0,\ \ p=0,\ \ q=0,\ \ r=0,\ \ s=0,\ \ t=0.$$

Если предположимъ уравненія кривой C въ видѣ

$$\begin{aligned} z &= \varphi(x) \\ y &= \psi(x), \end{aligned}$$

а уравненіе, опредѣляющее въ каждой точкѣ C плоскость развертывающейся поверхности D, въ видѣ

$$q = \chi(x),$$

то для многообразія $M_{1,1}^{(1)}$ мы имѣемъ кромѣ того p, r, s, t въ функціи x, при чемъ p опредѣляется изъ дифференціальнаго соотношенія

$$dz - pdx - qdy = 0,$$

а r, s, t изъ дифференціальныхъ соотношеній

$$\left.\begin{aligned} dp - rdx - sdy &= 0 \\ dq - sdx - tdy &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

и даннаго удавненія $F=0$ (1). Если назовемъ одно изъ значеній t, получаемыхъ изъ уравненій (6) и (1), черезъ $\omega(x)$, то за преобразованіе, которымъ многообразіе $M_{1,1}^{(1)}$, соотвѣтствующее выбранному значенію t, преобразуется въ многообразіе

$$y=0,\ \ z=0,\ \ p=0,\ \ q=0,\ \ r=0,\ \ s=0,\ \ t=0,$$

можно взять преобразованіе, распространенное изъ преобразованія точекъ:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= z - \varphi(x) - [y-\psi(x)]\,.\,\chi(x) - \frac{[y-\psi(x)]^2}{2}\,\omega(x) \\ y_1 &= y - \psi(x) \\ x_1 &= x. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Не трудно непосредственно убѣдиться, что, распространяя это преобразованіе, получаемъ между прочимъ

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= q - \chi(x) - [y-\psi(x)]\,.\,\omega(x) \\ t_1 &= t - \omega(x). \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Для многообразія $M_{1,1}^{(1)}$ имѣемъ

$$z=\varphi(x),\ \ y=\psi(x),\ \ q=\chi(x),\ \ t=\omega(x),$$

а слѣдовательно, для преобразованнаго многообразія изъ соотношеній (14) и (15) имѣемъ

$$z_1=0,\ \ y_1=0,\ \ q_1=0,\ \ t_1=0. \qquad (16)$$

Кромѣ того, дифференціальныя соотношенія

$$\begin{aligned} dz_1 - p_1dx_1 - q_1dy_1 &= 0 \\ dp_1 - r_1dx_1 - s_1dy_1 &= 0 \\ dq_1 - s_1dx_1 - t_1dy_1 &= 0\,, \end{aligned}$$

въ силу равенствъ (16), даютъ намъ

$$p_1=0,\ \ r_1=0,\ \ s_1=0. \qquad (17)$$

Итакъ, преобразованное многообразіе опредѣляется равенствами

$$y_1=0,\ \ z_1=0,\ \ p_1=0,\ \ q_1=0,\ \ r_1=0,\ \ s_1=0,\ \ t_1=0. \qquad (18)$$

Уравненіе $F=0$ (1) преобразуется въ нѣкоторое иное $F_1=0$ (1_1), для котораго многообразіе (18) должно служить интегральнымъ многообразіемъ одного измѣренія: другими словами, уравненіе $F_1=0$ (1_1) должно удовлетворяться при

$$y_1=0,\ \ z_1=0,\ \ p_1=0,\ \ q_1=0,\ \ r_1=0,\ \ s_1=0,\ \ t_1=0$$

и произвольномъ x_1. Мы предполагали, что по даннымъ намъ кривой C и развертывающейся поверхности D опредѣлялось многообразіе $M^{(1)}_{1,1}$, а затѣмъ по $M^{(1)}_{1,1}$ вполнѣ опредѣленное интегральное многообразіе 3-го порядка одного измѣренія, по этому послѣднему вполнѣ опредѣленное интегральное многообразіе 4-го порядка одного измѣренія и т. д.; по преобразованіи мы имѣемъ вмѣсто кривой C и развертывающейся поверхности D ось x_1 вмѣстѣ съ плоскостью x_1y_1

$$y_1 = 0,\ \ z_1 = 0,\ \ p_1 = 0,\ \ q_1 = 0,$$

и очевидно, дифференціальныя соотношенія

$$\begin{aligned} dz_1 - p_1dx_1 - q_1dy_1 &= 0 \\ dp_1 - r_1dx_1 - s_1dy_1 &= 0 \\ dq_1 - s_1dx_1 - t_1dy_1 &= 0 \end{aligned}$$

вмѣстѣ съ уравненіемъ $F_1 = 0$ (1_1) даютъ намъ опредѣленное интегральное многообразіе одного измѣренія, опредѣляемое уравненіями (18). Изъ вида формулъ, связывающихъ новыя координаты $(z''')_1$, $(z_{\prime}'')_1$, $(z_{\prime\prime}')_1$ $(z_{\prime\prime\prime})_1$, $(z^{\text{IV}})_1$..... съ прежними, очевидно, что и послѣ преобразованія интегральное многообразіе (18) должно приводить къ опредѣленному интегральному многообразію 3-го порядка одного измѣренія и т. д.; слѣдовательно, согласно предыдущему, выраженіе

$$R_1dy_1^2 - S_1dx_1dy_1 + T_1dx_1^2,$$

гдѣ R_1, S_1, T_1 — частныя производныя F_1 по r_1, s_1, t_1, должно быть отлично отъ нуля для многооообразія (18). Въ силу уравненій (18) имѣемъ

$$R_1dy_1^2 - S_1dx_1dy_1 + T_1dx^2 = T_1dx_1^2;$$

слѣдовательно,

$$T_1 = \frac{\partial F_1}{\partial t_1}$$

необходимо отлично отъ нуля при

$$y_1 = 0,\ \ z_1 = 0,\ \ p_1 = 0,\ \ q_1 = 0,\ \ r_1 = 0,\ \ s_1 = 0,\ \ t_1 = 0.$$

Отсюда заключаемъ, что уравненіе $F_1 = 0$ (1_1) разрѣшимо относительно t_1 въ смежности значеній

$$y_1 = 0,\ \ z_1 = 0,\ \ p_1 = 0,\ \ q_1 = 0,\ \ r_1 = 0,\ \ s_1 = 0,\ \ t_1 = 0;$$

въ числѣ рѣшеній, необходимо, есть одно, которое при

$$y_1 = 0,\ \ z_1 = 0,\ \ p_1 = 0,\ \ q_1 = 0,\ \ r_1 = 0,\ \ s_1 = 0$$

и произвольномъ x_1 обращается въ нуль; пусть оно будетъ

$$t_1 = f(x_1,\ y_1,\ z_1,\ p_1,\ q_1,\ r_1,\ s_1). \tag{19}$$

Такъ какъ именно рѣшеніе (19) соотвѣтствуетъ выбранному въ началѣ многообразію $M^{(1)}_{1,1}$, то слѣдовательно, преобразованіемъ, распространеннымъ изъ преобразованія точекъ (14), мы привели нашу задачу къ аналогичной задачѣ для уравненія (19) и для интегральнаго многообразія одного измѣренія (18). Для удобства отбросимъ значки у координатъ и станемъ такимъ образомъ рѣшать задачу Cauchy для уравненія

$$t = f(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s), \tag{20}$$

при чемъ кривая C обращается въ ось x, а развертывающаяся поверхность D — въ плоскость xy. Замѣтимъ еще, что имѣемъ

$$f(x,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) = 0$$

при произвольномъ x. Интегральное многообразіе $M^{(1)}_{1,1}$, какъ уже было упомянуто, въ данномъ случаѣ опредѣляется уравненіями

$$y = 0,\ \ z = 0,\ \ p = 0,\ \ q = 0,\ \ r = 0,\ \ s = 0,\ \ t = 0. \tag{21}$$

Для опредѣленія интегральнаго многообразія 3-го порядка пользуемся дифференціальными соотношеніями

$$\begin{aligned} dr &= z'''dx + z_{\prime}''dy \\ ds &= z_{\prime}''dx + z_{\prime\prime}'dy \\ dt &= z_{\prime\prime}'dx + z_{\prime\prime\prime}dy, \end{aligned}$$

которыя даютъ намъ

$$z''' = 0,\ \ z_{\prime}'' = 0,\ \ z_{\prime\prime}' = 0, \tag{22}$$

и уравненіемъ, которое получается какъ результатъ операціи $\dfrac{d}{dy}$ надъ даннымъ уравненіемъ (20),

$$z_{\prime\prime\prime} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}q + \frac{\partial f}{\partial p}s + \frac{\partial f}{\partial q}t + \frac{\partial f}{\partial r}z_{\prime}'' + \frac{\partial f}{\partial s}z_{\prime\prime}';$$

отсюда, въ силу равенствъ (21) и (22),

$$z_{\prime\prime\prime} = \frac{\partial f}{\partial y}, \tag{23}$$

при чемъ конечно въ $\frac{\partial f}{\partial y}$ вмѣсто y, z, p, q, r, s вставляются ихъ значенія, т. е. $y=z=p=q=r=s=0$.

Для опредѣленія интегральнаго многообразія n-го порядка воспользуемся уравненіями (10) (стр. 202). Мы видѣли, что для многообразія 2-го порядка всѣ три координаты r, s, t равны нулю; для многообразія 3-го порядка первыя три изъ координатъ z''', $z_{,}''$, $z_{,,}'$, $z_{,,,}$ равны нулю. Предполагая, что это справедливо и для многообразія $(n-1)$-го порядка, т. е. что координаты $z^{(n-1)}$, $z_{,}^{(n-2)}$, $z_{,,}^{(n-3)}$ равны нулю, обращаемся къ первымъ тремъ изъ второй группы равенствъ (10), которыя принимаютъ видъ

$$\begin{aligned} z^{(n)}\quad dx &= 0 \\ z_{,}^{(n-1)}\, dx &= 0 \\ z_{,,}^{(n-2)} dx &= 0\,; \end{aligned}$$

отсюда

$$z^{(n)}=0,\quad z_{,}^{(n-1)}=0,\quad z_{,,}^{(n-2)}=0, \tag{24}$$

а слѣдовательно, доказано вообще, что первыя три изъ координатъ, для которыхъ сумма индексовъ одна и та же, всегда исчезаютъ. Для опредѣленія остальныхъ координатъ обращаемся къ первой группѣ уравненій (10), оставляя въ сторонѣ первое изъ нихъ, которое обращается въ тождество при найденныхъ значеніяхъ $z^{(n)}$, $z_{,}^{(n-1)}$, $z_{,,}^{(n-2)}$, $z^{(n-1)}$, $z_{,}^{(n-2)}$,...., r, s, t, p, q, z, y. Остальныя даютъ въ данномъ случаѣ

$$\left.\begin{aligned} z_{,,,}^{(n-3)} &= \left[\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-3}dy}\right] \\ z_{\text{IV}}^{(n-4)} &= \frac{\partial f}{\partial s} z_{,,,}^{(n-3)} + \left[\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-4}dy^2}\right] \\ z_{\text{V}}^{(n-5)} &= \frac{\partial f}{\partial r} z_{,,,}^{(n-3)} + \frac{\partial f}{\partial s} z_{\text{IV}}^{(n-4)} + \left[\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-5}dy^3}\right] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n &= \frac{\partial f}{\partial r} z''_{n-2} + \frac{\partial f}{\partial s} z'_{n-1} + \left[\frac{d^{n-2}f}{dy^{n-2}}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Если мы предположимъ, что существуетъ функція $z(x, y)$ — рѣшеніе задачи Cauchy въ нашемъ случаѣ, то уравненія (21), (22), (23), (24), (25) опредѣляютъ, какъ мы уже знаемъ, значенія этой функціи и ея производныхъ при $y=0$. Возьмемъ произвольную точку $(x_0, 0, 0)$ на оси x, ограничивая выборъ x_0 лишь тѣмъ, чтобы въ смежности значеній $x=x_0$, $y=0$, $z=0$, $p=0$, $q=0$, $r=0$, $s=0$ функція f — правая часть

уравненія (20) — разлагалась въ рядъ Taylor-а. Для удобства можемъ предположить $x_0=0$, такъ какъ этого всегда можемъ достигнуть простымъ преобразованіемъ точекъ

$$x_1 = x - x_0,\quad y_1 = y,\quad z_1 = z,$$

распространяя которое, очевидно, имѣемъ

$$p_1 = p,\quad q_1 = q,\quad r_1 = r,\quad s_1 = s,\quad t_1 = t,\quad (z''')_1 = z''',\ldots$$

Итакъ возьмемъ начало координатъ (0, 0, 0) и напишемъ всѣ уравненія (21), (22), (23), (24), (25) при $x=0$; тогда мы будемъ имѣть значенія функціи $z(x, y)$ и всѣхъ ея производныхъ при $x=0$, $y=0$. Но въ смежности значеній $x=0$, $y=0$ эта функція, какъ извѣстно, представляется рядомъ Mac-Laurin-а, коэффиціентами котораго служатъ именно значенія функціи и ея производныхъ при $x=0$, $y=0$. Такимъ образомъ, если задача Cauchy въ данномъ случаѣ возможна, то она допускаетъ единственное рѣшеніе, и искомая функція въ области $x=0$, $y=0$ представляется рядомъ

$$z = (z_{,,,})_0 \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}[4(z'_{,,,})_0 xy^3 + (z_{\text{IV}})_0 y^4] + \ldots, \tag{26}$$

гдѣ $(z_k^{(i)})_0$ — значеніе $z_k^{(i)}$, полученное изъ уравненій (25) при $n=i+k$ для $x=0$. Если мы докажемъ сходимость ряда (26), то возможность задачи будетъ доказана. Въ самомъ дѣлѣ, во-первыхъ, изъ вида разложенія (26) непосредственно очевидно, что при $y=0$ и произвольномъ x имѣемъ $z=0$, $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$, такъ какъ всѣ члены разложенія имѣютъ множителемъ y^3; слѣдовательно, поверхность

$$z = z(x, y)$$

проходитъ черезъ ось x и касается вдоль ея плоскости xy. Во-вторыхъ, коэффиціенты ряда мы опредѣлили изъ уравненій, которыя получаются изъ уравненій (1), (6), (7), (10) общаго случая, если положимъ въ нихъ

$$F = t - f(x, y, z, p, q, r, s)$$

$$y=0,\ z=0,\ p=0,\ q=0,\ r=0,\ s=0,\ t=0$$

и затѣмъ сдѣлаемъ $x=0$.

Ограничиваясь уравненіемъ (1) и первыми группами уравненій (7) и (10) видимъ, что при

$$x=0,\ y=0,\ z=0,\ p=0,\ q=0,\ r=0,\ s=0,\ t=0$$

и при замѣнѣ $z_k^{(i)}$ черезъ $(z_k^{(i)})_0$, т. е. черезъ коэффиціенты ряда (26), исчезаютъ F, $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$,.... $\frac{d^{i+k}F}{dx^i dy^k}$,.... При сходимости ряда (26), $z=0$ есть значеніе функціи $z(x, y)$ при $x=0$, $y=0$, далѣе $p=0$, $q=0$, $r=0$, $s=0$, $t=0$ — соотвѣтственно значенія частныхъ производныхъ 1-го и 2-го порядка той же функціи при $x=0$, $y=0$ и, наконецъ, вообще $(z_k^{(i)})_0$—значеніе производной $\frac{\partial^{i+k}z}{\partial x^i \partial y^k}$ при $x=0$, $y=0$. Если въ результатахъ операцій $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$ замѣнимъ всѣ координаты p, q, r, s, t,.... $z_k^{(i)}$.... соотвѣтственно частными производными $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.... $\frac{\partial^{i+k}z}{\partial x^i \partial y^k}$,...., то $\frac{dF}{dx}$ обращается въ полную производную функціи $F\left(z, x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$ по x, $\frac{dF}{dy}$ — въ производную той же функціи по y, вообще операціи $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$ обращаются въ операціи дифференцированія по x и по y. Такимъ образомъ, мы можемъ сказать, что при сходимости ряда (26) исчезаютъ для $x=0$, $y=0$ функція двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y $F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$, гдѣ $z=z(x, y)$, и всѣ производныя этой функціи F; отсюда заключаемъ, что функція F равна нулю при произвольныхъ x, y, и слѣдовательно $z=z(x, y)$ есть интегралъ уравненія

$$t=f(x, y, z, p, q, r, s). \qquad (20)$$

Для того, чтобы доказать сходимость ряда (26), замѣнимъ предварительно уравненіе 2-го порядка (20) тремя уравненіями 1-го порядка. Такъ какъ мы ищемъ *интегралъ* уравненія (20), то p, q, r, s, t имѣютъ значеніе частныхъ производныхъ функціи z по перемѣннымъ x и y, и не трудно убѣдиться, что уравненіе (20) при данныхъ начальныхъ условіяхъ вполнѣ эквивалентно слѣдующимъ тремъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= q \\ \frac{\partial q}{\partial y} &= f\left(x, y, z, p, q, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial q}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

гдѣ z, q, p — три искомыя функціи перемѣнныхъ x, y; начальныя условія для уравненій (27) принимаютъ слѣдующій видъ: при $y=0$ и произвольномъ x имѣемъ

$$z=0,\ p=0,\ q=0,\ \frac{\partial z}{\partial x}=0,\ \frac{\partial p}{\partial x}=0,\ \frac{\partial q}{\partial x}=0. \qquad (28)$$

Послѣднее изъ уравненій (27), въ силу перваго, можетъ быть написано

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

откуда имѣемъ

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}+X,$$

гдѣ X — произвольная функція x; но полагая въ этомъ равенствѣ $y=0$ и принимая во вниманіе начальныя условія (28), получаемъ тождественно

$$X=0,$$

и слѣдовательно $p=\frac{\partial z}{\partial x}$. Второе изъ уравненій (27), такимъ образомъ, обращается въ уравненіе (20), а условія (28) даютъ намъ

$$z=0,\ \frac{\partial z}{\partial x}=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=0$$

при $y=0$ и произвольномъ x.

Итакъ, мы можемъ вмѣсто интеграла уравненія (20) искать три функціи z, q, p, удовлетворяющія уравненіямъ (27) и начальнымъ условіямъ (28); изъ этихъ начальныхъ условій послѣднія три, очевидно, слѣдуютъ изъ первыхъ трехъ. Если бы мы пожелали найти разложенія z, p, q по степенямъ x и y въ области $x=0$, $y=0$, то коэффиціенты этихъ разложеній, т. е. значенія производныхъ $\frac{\partial^{i+k}z}{\partial x^i \partial y^k}$, $\frac{\partial^{i+k}p}{\partial x^i \partial y^k}$ и $\frac{\partial^{i+k}q}{\partial x^i \partial y^k}$ при $x=0$, $y=0$, нашли бы изъ уравненій (27) и результатовъ дифференцированія этихъ уравненій, полагая вездѣ $x=0$, $y=0$. Всѣ частныя производныя z, p, q по одному x, въ силу начальныхъ условій, исчезаютъ при $x=0$, $y=0$; дифференцируя уравненія (27) нѣсколько разъ по x, выразимъ всѣ производныя типа $\frac{\partial^{i+1}}{\partial x^i \partial y}$ черезъ производныя по одному x. и легко видѣть между прочимъ, что, благодаря виду уравненій (27) и свойству функціи f

$$f(x,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) = 0,$$

всѣ производныя этого типа при $y=0$ тоже исчезаютъ; дифференцируя уравненія (27) одинъ разъ по y и нѣсколько разъ по x, всѣ производныя типа $\frac{\partial^{i+2}}{\partial x^i \partial y^2}$ выразимъ черезъ производныя предыдущихъ типовъ и т. д. Очевидно, всякая производная новаго типа получается исключительно дѣйствіями умноженія и сложенія изъ производныхъ прежнихъ типовъ (порядка равнаго или ниже ея порядка) и частныхъ производныхъ правыхъ частей уравненій (27) по ихъ аргументамъ, т. е. по $x, y, z, p, q, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial x}$, или иначе при $x=0$, $y=0$ — изъ производныхъ прежнихъ типовъ и коэффиціентовъ разложеній правыхъ частей уравненій (27) въ ряды Mac-Laurin-а по степенямъ $x, y, z, p, q, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial x}$. Рядъ, который мы получимъ для функціи z, очевидно совпадетъ съ рядомъ (26). Изъ закона составленія его коэффиціентовъ, изложеннаго нами, слѣдуетъ, что если мы лѣвыя части уравненій (27) замѣнимъ такими функціями, разложенія которыхъ по степенямъ $x, y, z, p, q, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial x}$ имѣютъ всѣ коэффиціенты положительные и превосходящіе модули соотвѣтственныхъ коэффиціентовъ въ разложеніяхъ правыхъ частей уравненій (27), то рядъ, который мы получимъ для новой функціи z, будетъ имѣть коэффиціенты всѣ положительные и превосходящіе модули коэффиціентовъ ряда (26); слѣдовательно, если мы докажемъ сходимость этого новаго ряда, то рядъ (26) и подавно будетъ сходящійся. Функція, которой можно замѣнить правыя части всѣхъ трехъ уравненій (27), какъ извѣстно изъ теоріи мнимаго перемѣннаго, есть слѣдующая

$$V = \frac{M}{1 - \dfrac{x+y+z+p+q+\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{\partial q}{\partial x}}{R}}. \tag{29}$$

гдѣ R—наименьшій изъ радіусовъ круговъ сходимости разложенія функціи f въ области $x=0$, $y=0$, $z=0$, $p=0$, $q=0$, $\frac{\partial p}{\partial x}=0$, $\frac{\partial q}{\partial x}=0$,

а M — положительное количество, превосходящее наибольшее изъ возможныхъ значеній модулей правыхъ частей уравненій (27) при значеніяхъ $x, y, z, p, q, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial x}$, модули которыхъ не превосходятъ R. Такимъ образомъ мы получаемъ три уравненія

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial y} = V \tag{30}$$

и начальныя условія:

$$z=0,\ p=0,\ q=0 \tag{31}$$

при $y=0$ и произвольномъ x.

Изъ уравненій (30) слѣдуетъ

$$p = z + X,\quad q = z + X_1,$$

гдѣ X, X_1 — нѣкоторыя функціи x; но полагая здѣсь $y=0$, въ силу (31) получаемъ тождественно $X=0$, $X_1=0$, и слѣдовательно

$$p = q = z. \tag{32}$$

Три уравненія (30), такимъ образомъ, сводятся къ одному:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{M}{1 - \dfrac{x+y+3z+2\dfrac{\partial z}{\partial x}}{R}} \tag{33}$$

при начальномъ условіи:

$$z = 0 \tag{34}$$

при $y=0$ и произвольномъ x.

Уравненіе (33) есть уравненіе съ частными производными 1-го порядка; оно, какъ мы уже знаемъ, допускаетъ интегралъ, удовлетворяющій условію (34), т. е. интегральную поверхность, проходящую черезъ ось x. Притомъ ось x, очевидно, не принадлежитъ къ числу такъ-называемыхъ интегральныхъ кривыхъ уравненія (33); слѣдовательно, функція z, опредѣляемая уравненіемъ (33) и начальнымъ условіемъ (34), разлагается въ рядъ Mac-Laurin-а въ области $x=0$, $y=0$; этотъ рядъ, необходимо, совпадетъ съ рядомъ, получаемымъ непосредственно изъ уравненій (30) послѣдовательнымъ вычисленіемъ коэффиціентовъ, и слѣдовательно, мы убѣдились косвеннымъ путемъ въ сходимости *) этого послѣдняго. Согласно предыдущему, отсюда слѣдуетъ сходимость **) ряда (26) и, слѣдовательно, существованіе опредѣленнаго рѣшенія задачи Cauchy для уравненія (20) и многообразія

$$y = 0, \quad z = 0, \quad p = 0, \quad q = 0.$$

Совершая преобразованіе, обратное преобразованію точекъ (14), убѣждаемся, что интегральнымъ многообразіемъ одного измѣренія $M^{(1)}_{1,1}$ опредѣляется единственный, вполнѣ опредѣленный интегралъ даннаго уравненія $F = 0$ (1).

Уравненія

$$\left.\begin{aligned} &F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \\ &rdx + sdy - dp = 0 \\ &sdx + tdy - dq = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

которыя при данныхъ выраженіяхъ x, y, z, p, q въ функціи произвольнаго параметра u, т. е. при данныхъ кривой C и описанной развертывающейся поверхности D, опредѣляютъ интегральное многообразіе $M^{(1)}_{1,1}$, даютъ, вообще говоря, нѣсколько системъ значеній r, s, t, слѣдовательно нѣсколько многообразій $M^{(1)}_{1,1}$, а потому задача Cauchy для данной кривой C и развертывающейся поверхности D допускаетъ, вообще говоря, нѣсколько рѣшеній — столько, сколько рѣшеній допускаетъ система уравненій (13), конечно, въ предположеніи, что для всѣхъ полученныхъ многообразій не имѣетъ мѣста равенство

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0. \qquad (8)$$

Мы можемъ теперь отвѣтить на второй изъ тѣхъ вопросовъ, которые были поставлены въ началѣ этой главы: какъ великъ произволъ въ выборѣ интегральной поверхности даннаго уравненія

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0\,? \qquad (1)$$

Всякая интегральная поверхность уравненія (1) пересѣкаетъ плоскость $y = 0$ по нѣкоторой кривой

$$z = \varphi(x); \qquad (35)$$

*) притомъ *равномѣрной*.

**) равномѣрная.

обратно, черезъ кривую (35) проходитъ цѣлое семейство интегральныхъ поверхностей уравненія (1), такъ какъ, согласно выше изложенному, интегральная поверхность опредѣляется кривой и описанной развертывающей поверхностью. Если кромѣ кривой (35) возьмемъ описанную развертывающуюся поверхность, опредѣляемую равенствомъ

$$q = \psi(x), \qquad (36)$$

(p опредѣляется изъ дифференціальнаго соотношенія $dz - pdx - qdy = 0$, которое даетъ $p = \varphi'(x)$), то будемъ имѣть одну или нѣсколько вполнѣ опредѣленныхъ интегральныхъ поверхностей уравненія (1), проходящихъ черезъ кривую (35) и касающихся вдоль этой кривой данной развертывающейся поверхности. Измѣняя функціи $\varphi(x)$, $\psi(x)$, получаемъ, очевидно, всегда *различныя* интегральныя поверхности, и слѣдовательно, произволъ въ выборѣ интегральной поверхности даннаго уравненія — такого же объема, какъ произволъ въ выборѣ двухъ функцій одного аргумента, или иначе, какъ произволъ въ выборѣ плоской кривой и описанной около нея развертывающейся поверхности.

Возникаетъ еще вопросъ, всѣ ли интегралы даннаго уравненія $F = 0$ (1) могутъ быть получены, какъ опредѣленныя рѣшенія задачи Cauchy. Если мы имѣемъ нѣкоторый интегралъ

$$z = z(x, y), \qquad (37)$$

то, вообще говоря, очевидно, возможно безконечно-разнообразно выбрать на поверхности, опредѣляемой уравненіемъ (37), такую кривую C, чтобы для многообразія одного измѣренія, образуемаго точками этой кривой и касательными плоскостями и индикатрисами поверхности (37) вдоль кривой C, не удовлетворялось равенство

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0. \qquad (8)$$

Въ самомъ дѣлѣ, если предположимъ, что кривая C опредѣляется уравненіемъ (37) и уравненіемъ

$$y = \varphi(x), \qquad (38)$$

то выраженіе

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2$$

принимаетъ видъ

$$[R\varphi'^2(x) - S\varphi'(x) + T]\, dx^2, \qquad (39)$$

гдѣ R, S, T, въ силу уравненій интеграла и уравненій кривой C, являются функціями x. При произвольномъ выборѣ функціи $\varphi(x)$, выраженіе (39), очевидно, отлично отъ нуля; отсюда мы заключаемъ, что всякій интегралъ даннаго уравненія, вообще говоря, получается какъ опредѣленное рѣшеніе задачи Cauchy, притомъ для безчисленнаго множества кривыхъ C и развертывающихся поверхностей D; именно, можно взять произвольную кривую C на интегральной поверхности, для которой только выраженіе (39) отлично отъ нуля, и развертывающуюся поверхность D, образованную касательными плоскостями интегральной поверхности вдоль кривой C. Исключеніе представляютъ лишь тѣ интегралы, если они существуютъ, для которыхъ тождественно исчезаютъ величины R, S, T, т. е. частныя производныя лѣвой части уравненія F по r, s, t. Такіе интегралы, т. е. интегралы удовлетворяющіе четыремъ уравненіямъ 2-го порядка

$$F=0,\quad R=0,\quad S=0,\quad T=0. \tag{40}$$

будемъ называть *особыми*. Для особаго интеграла равенство (8) удовлетворяется тождественно, и слѣдовательно, подобный интегралъ не можетъ быть полученъ какъ опредѣленное рѣшеніе задачи Cauchy.

Семейство всѣхъ интеграловъ уравненія, не считая особыхъ интеграловъ, если они существуютъ, называютъ *общимъ* интеграломъ. На основаніи предыдущаго, заключаемъ, что формулы, выражающія общій интегралъ, должны заключать такія произвольныя величины, соотвѣтственнымъ выборомъ значеній которыхъ можно получить рѣшеніе задачи Cauchy для каждой данной кривой C и описанной развертывающейся поверхности D, для которыхъ не имѣетъ мѣсто равенство (8). Мы можемъ также сказать, согласно выше изложенному, что произволъ въ формулахъ общаго интеграла долженъ быть такого же объема, какъ произволъ въ выборѣ двухъ функцій одного аргумента; но отсюда не слѣдуетъ заключать, что въ формулы общаго интеграла непремѣнно должны входить двѣ произвольныя функціи одного аргумента; такъ, напримѣръ, для уравненія

$$r=q \tag{41}$$

давно извѣстно выраженіе общаго интеграла

$$z=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,\varphi(x+2u\sqrt{y})\,du, \tag{42}$$

содержащее лишь одну произвольную функцію φ.

§ **2.**—Разсмотримъ нѣсколько подробнѣе тѣ многообразія элементовъ 1-го порядка $K_{1,1}$, состоящія каждое изъ кривой C и описанной развертывающейся поверхности D, которыя приводятъ къ многообразіямъ $M^{(1)}_{1,1}$, удовлетворяющимъ уравненію

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0. \tag{8}$$

Уравненіе это можетъ имѣть мѣсто, во-первыхъ, при произвольныхъ r, s, t, удовлетворяющихъ послѣднимъ двумъ изъ уравненій (13): тогда мы можемъ сказать, что исчезаетъ Якобіанъ трехъ функцій

$$F,\quad rdx+sdy-dp,\quad sdx+tdy-dq$$

по перемѣннымъ r, s, t (ср. выше § 1, стр. 203); а слѣдовательно, если изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} rdx+sdy-dp&=0\\ sdx+tdy-dq&=0,\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

гдѣ x, y, z, p, q предполагаются функціями одного параметра въ силу уравненій кривой C и развертывающейся поверхности D, опредѣлимъ r и s черезъ t и вставимъ въ данное уравненіе $F=0$ (1), то t должно само собою исключиться. Если при этомъ уравненіе (1) будетъ удовлетворено для тѣхъ выраженій x, y, z, p, q въ функціи одного параметра, которыя намъ даны, то все многообразіе двухъ измѣреній $M^{(2)}_{1,1}$, имѣющее носителемъ данное намъ многообразіе элементовъ 1-го порядка $K_{1,1}$, будетъ, очевидно, интегральнымъ многообразіемъ даннаго уравненія, и слѣдовательно, многообразіе $K_{1,1}$ будетъ такъ-называемымъ характеристическимъ многообразіемъ 1-го порядка (ср. гл. II, § 1, стр. 149). Если уравненіе (1) при упомянутой подстановкѣ приведетъ къ противорѣчію, т. е. если получимъ въ лѣвой части нѣкоторую опредѣленную функцію параметра u, то уравненія (43) и (1) несовмѣстны, или иначе имъ можно удовлетворить безконечными значеніями r, s, t. Въ первомъ случаѣ при рѣшеніи задачи Cauchy мы встрѣчаемся, очевидно, съ неопредѣленностью, во второмъ съ несовмѣстностью въ опредѣленіи интегральнаго многообразія $M^{(1)}_{1,1}$. Очевидно, и въ томъ и въ другомъ случаѣ для многообразія $K_{1,1}$, кромѣ уравненія (8), удовлетворяется еще цѣлый рядъ уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, какъ было упомянуто, при подстановкѣ въ функцію F вмѣсто r и s ихъ выраженій черезъ t изъ уравненій (43), t должно само собою исключиться, слѣдовательно должны имѣть мѣсто всѣ уравненія

$$\frac{dF}{dt}=0,\quad \frac{d^2F}{dt^2}=0,\quad \frac{d^3F}{dt^3}=0\,....,\tag{44}$$

гдѣ подъ F разумѣемъ результатъ упомянутой подстановки, т. е.

$$F=F\left(x,y,z,p,q,\frac{dp}{dx}-\frac{dq}{dx}\,\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,\ \frac{dq}{dx}-t\frac{dy}{dx},\ t\right).$$

Изъ уравненій (44) первое, какъ мы видѣли выше (§ 1, стр. 203), совпадаетъ съ уравненіемъ (8), остальныя, вообще говоря, отличны отъ него; отсюда между прочимъ заключаемъ, что произвольно выбранное уравненіе $F=0$ (1) вообще не допускаетъ многообазій $K_{1,1}$ разсматриваемаго типа. Замѣтимъ еще, что въ первомъ изъ разобранныхъ случаевъ, т. е. для характеристическаго многообразія 1-го порядка, кромѣ уравненій (44), должно имѣть мѣсто еще одно, такъ какъ изъ уравненій (44) слѣдуетъ лишь, что

$$F\left(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ \frac{dp}{dx}-\frac{dq}{dx}\,\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,\ \frac{dq}{dx}-t\frac{dy}{dx},\ t\right)$$

не зависитъ отъ t, а въ данномъ случаѣ это выраженіе должно кромѣ того обращаться въ нуль.

Уравненіе

$$Rdy^2-Sdxdy+Tdx^2=0\tag{8}$$

можетъ во-вторыхъ имѣть мѣсто при опредѣленныхъ значеніяхъ $r,\ s,\ t$ (функціяхъ параметра u), получаемыхъ изъ уравненій (1) и (43), т. е. для интегральнаго многообразія $M^{(1)}_{1,1}$, опредѣляемаго даннымъ уравненіемъ (1) для многообразія $K_{1,1}$. Въ этомъ случаѣ, который, вообще говоря, обыкновенно и имѣетъ мѣсто, уравненія (1) и (43), конечно, совмѣстны; но, въ силу равенства (8), уравненія (7) предшествующаго параграфа (стр. 200) могутъ быть или несовмѣстны, или неопредѣленны. При второмъ предположеніи интегральное многообразіе $M^{(1)}_{1,1}$, опредѣляемое даннымъ уравненіемъ для многообразія $K_{1,1}$, служитъ, очевидно, носителемъ интегральнаго многообразія 3-го порядка *двухъ* измѣреній (ср. гл. II, § 2, стр. 155), и для многообразія $M^{(1)}_{1,1}$, кромѣ уравненія (8) необходимо должно выполняться еще нѣкоторое уравненіе,

такъ какъ при неопредѣленности системы (7) не только детерминантъ изъ коэффиціентовъ равенъ нулю (что даетъ $Rdy^2-Sdxdy+Tdx^2=0$), но и всѣ детерминанты, получаемые изъ упомянутаго детерминанта замѣной элементовъ какого-либо столбца извѣстными членами, тоже должны исчезать. При первомъ предположеніи изъ уравненій (7) получаемъ безконечныя значенія для z''', $z_{\prime}''$, $z_{\prime\prime}'$, $z_{\prime\prime\prime}$, т. е. встрѣчаемся съ несовмѣстностью при опредѣленіи интегральнаго многообразія 3-го порядка.

Естественно ожидать, что для многообразій $K_{1,1}$, для которыхъ встрѣчаемся съ неопредѣленностью при опредѣленіи интегральнаго многообразія 2-го или 3-го порядка одного измѣренія, задача Cauchy становится неопредѣленной; но мы здѣсь не станемъ рѣшать этого вопроса, такъ какъ многообразія $K_{1,1}$ подобнаго рода подробно будемъ изслѣдовать въ IV и V главахъ.

Что касается до многообразій $K_{1,1}$, для которыхъ опредѣленіе интегральнаго многообразія 2-го или 3-го порядка ведетъ къ несовмѣстной системѣ, то здѣсь мы встрѣчаемся, очевидно, съ невозможностью опредѣлить такую интегральную функцію $z(x,y)$—соотвѣтственное рѣшеніе задачи Cauchy, которая бы въ области значеній $x,\ y$, соотвѣтствующихъ точкамъ элементовъ многообразія, т. е. точкамъ кривой C, разлагалась въ рядъ Taylor-а. Но понятно, что отсюда вовсе не слѣдуетъ полная невозможность задачи Cauchy въ ея *геометрической* формѣ: вполнѣ возможно, что существуетъ интегральная поверхность, проходящая черезъ кривую C и касающаяся вдоль ея развертывающейся поверхности D; но только для этой поверхности линія C служить особой линіей, а потому въ области точекъ на линіи C z не разлагается въ рядъ Taylor-а. Обратно, если на какой-либо интегральной поверхности $z=z(x,\ y)$ существуетъ особая линія, то точки этой линіи вмѣстѣ съ касательными плоскостями поверхности $z=z(x,\ y)$ вдоль ея образуютъ, вообще говоря, многообразіе $K_{1,1}$ разсматриваемаго типа. Дѣйствительно, для особой линіи поверхности всѣ производныя z по x и y не могутъ сохранять конечныхъ значеній, а слѣдовательно, для этой линіи необходимо должно имѣть мѣсто равенство

$$Rdy^2-Sdxdy+Tdx^2=0;\tag{8}$$

притомъ, въ общемъ случаѣ, конечно, не имѣетъ мѣсто добавочное условіе, при которомъ система (7) § 1-го становится неопредѣленной, и слѣдовательно, уже производныя 3-го порядка z''', $z_{\prime}''$, $z_{\prime\prime}'$, $z_{\prime\prime\prime}$ вдоль особой линіи получаютъ, вообще говоря, безконечныя значенія. Слѣдуетъ еще замѣтить, что если задача Cauchy для каждой данной кривой C и описанной развертывающейся поверхности D допускаетъ нѣсколько рѣшеній, т. е. если уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} &F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0 \\ &dp-rdx-sdy=0 \\ &dq-sdx-tdy=0 \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

удовлетворяетъ *нѣсколько* системъ значеній r, s, t, то для многообразій $K_{1,1}$ разсматриваемаго типа могутъ также существовать рѣшенія задачи Cauchy въ ея тѣсномъ аналитическомъ смыслѣ, т. е. интегральныя функціи $z(x, y)$, опредѣляемыя въ области точекъ кривой многообразія $K_{1,1}$ разложеніемъ въ рядъ Taylor-а. Допустимъ, напримѣръ, что уравненіе $F=0$ — алгебраическое относительно r, s, t, степени $n>2$. Система (45) въ этомъ случаѣ даетъ намъ, вообще говоря, n различныхъ рѣшеній, и слѣдовательно, задача Cauchy, вообще говоря, допускаетъ n рѣшеній. Для многообразія $K_{1,1}$, какъ не трудно видѣть, два изъ этихъ рѣшеній сливаются въ одно. Въ самомъ дѣлѣ, по условію, для одного изъ интегральныхъ многообразій $M^{(1)}_{1,1}$, опредѣляемыхъ уравненіемъ $F=0$ и многообразіемъ $K_{1,1}$, имѣетъ мѣсто равенство

$$Rdy^2-Sdxdy+Tdx^2=0, \tag{8}$$

которое, какъ мы видѣли выше, можетъ быть написано иначе

$$\frac{dF}{dt}=0, \tag{46}$$

гдѣ подъ F разумѣемъ результатъ исключенія r и s изъ уравненій (45). Такимъ образомъ, значеніе t, которое соотвѣтствуетъ упомянутому многообразію $M^{(1)}_{1,1}$, удовлетворяетъ уравненію

$$F\left(x, y, z, p, q, \frac{dp}{dx}-\frac{dq}{dx}\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \frac{dq}{dx}-t\frac{dy}{dx}; t\right)=0 \tag{47}$$

и его производной (по t); слѣдовательно, вообще говоря, это значеніе есть двукратный корень уравненія (47), которое допускаетъ еще $n-2$ корня $t_3, t_4, \ldots t_n$, отличныхъ отъ двукратнаго. Корнямъ $t_3, t_4, \ldots, t_n$ соотвѣтствуютъ $n-2$ интегральныхъ многообразія $M^{(1)}_{1,1}$, для которыхъ равенство (8) уже не имѣетъ мѣсто и, слѣдовательно, задача Cauchy

возможна въ тѣсномъ смыслѣ. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы видимъ, что если существуетъ то рѣшеніе задачи Cauchy въ ея геометрической постановкѣ, которое соотвѣтствуетъ двукратному корню t и для котораго кривая C многообразія $K_{1,1}$ служитъ особой кривой, то это рѣшеніе замѣняетъ собой *два* рѣшенія общаго случая, и слѣдовательно, можно ожидать, что кривая C будетъ служить кривой соприкосновенія двухъ полостей интегральной поверхности. Такимъ образомъ, многообразія $K_{1,1}$ въ общемъ случаѣ играютъ по отношенію къ уравненію 2-го порядка ту же роль, какую такъ-называемыя интегральныя кривыя по отношенію къ уравненію 1-го порядка (см. гл. I, § 3, стр. 56).

При данномъ уравненіи

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0 \tag{1}$$

всѣ многообразія $K_{1,1}$, которыя мы разсматривали въ этомъ параграфѣ, могутъ быть найдены изъ дифференціальныхъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} &Rdy^2-Sdxdy+Tdx^2=0 \\ &F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0 \\ &dp-rdx-sdy=0 \\ &dq-sdx-tdy=0 \\ &dz-pdx-qdy=0\,, \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

которыя собственно опредѣляютъ интегральное многообразіе $M^{(1)}_{1,1}$ для каждаго многообразія $K_{1,1}$. Исключая r, s, t изъ первыхъ четырехъ уравненій, получаемъ два дифференціальныхъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} H(x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq)=0 \\ dz-pdx-qdy=0, \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

которыя непосредственно опредѣляютъ многообразія $K_{1,1}$. Первое изъ этихъ уравненій $H=0$, очевидно, однородно относительно дифференціаловъ dx, dy, dp, dq, такъ какъ изъ 2-го, 3-го и 4-го уравненій (48) для r, s, t получаются однородныя выраженія нулевого измѣренія относительно тѣхъ же дифференціаловъ. Всѣ пять координатъ x, y, z, p, q должны быть для многообразія $K_{1,1}$ функціями одного параметра или въ частности четыре изъ нихъ должны быть функціями пятой; между тѣмъ, мы имѣемъ для опредѣленія ихъ только два уравненія (49); поэтому двѣ изъ четырехъ координатъ мы можемъ взять совершенно *произвольными* функціями пятой, а остальныя двѣ опредѣлятся изъ уравненій (49). Такимъ образомъ, семейство всѣхъ многообразій $K_{1,1}$ зависить отъ двухъ произвольныхъ функцій одного аргумента. Если въ частности возьмемъ $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$, гдѣ φ и ψ—произвольныя функціи, то, вообще говоря, получимъ для опредѣленія p и q два совокупныхъ уравненія

$$\left.\begin{array}{c} H(x,\ \varphi(x),\ \psi(x),\ p,\ q,\ dx,\ \varphi'(x)dx,\ dp,\ dq)=0 \\ \psi'(x)-p-q\varphi'(x)=0, \end{array}\right\} \qquad (49')$$

изъ которыхъ второе не содержитъ дифференціаловъ; исключая напримѣръ p, получимъ для q дифференціальное уравненіе 1-го порядка. Отсюда слѣдуетъ, что кривую C, образуемую точками элементовъ многообразія $K_{1,1}$, можно, вообще говоря, выбирать произвольно; развертывающаяся описанная поверхность D при этомъ опредѣляется интеграціей дифференціальнаго уравненія 1-го порядка.

Если окажется, что 1-е изъ уравненій (49) $H=0$ не содержитъ дифференціаловъ dp, dq, то развертывающаяся поверхность опредѣляется по кривой C безъ всякой интеграціи. Очевидно, подобный случай можетъ имѣть мѣсто тогда, когда r, s, t исключаются изъ 1-го и 2-го уравненій (48) независимо отъ 3-го и 4-го, т. е. когда R, S, T при $F=0$ пропорціональны величинамъ, не зависящимъ отъ r, s, t. Не трудно убѣдиться, что уравненіе $F=0$ въ этомъ случаѣ имѣетъ видъ

$$Lr+2Ms+Nt+V=0, \qquad (50)$$

гдѣ L, M, N, V — функціи x, y, z, p, q; уравненіе $H=0$ здѣсь принимаетъ видъ

$$Ldy^2-2Mdxdy+Ndx^2=0. \qquad (51)$$

Если предположимъ кромѣ того, что уравненіе $H=0$ (49) содержитъ p и q лишь въ комбинаціи

$$pdx+qdy,$$

то мы будемъ имѣть случай, когда не возможно произвольно выбирать кривую C многообразія $K_{1,1}$. Въ самомъ дѣлѣ, изъ двухъ уравненій (49) здѣсь получаемъ одно уравненіе вида

$$G(x,\ y,\ z,\ dx,\ dy,\ dz)=0, \qquad (52)$$

которое налагаетъ ограниченіе на видъ кривыхъ C. Очевидно, что если мы обратно будемъ искать всевозможныя уравненія $F=0$, для которыхъ кривыя C многообразій $K_{1,1}$ не могутъ быть выбираемы про-

извольно, то придемъ именно къ уравненіямъ вида (50), для которыхъ притомъ уравненіе (51) содержитъ p и q лишь въ комбинаціи

$$pdx+qdy.$$

Для того, чтобы послѣднее условіе было выполнено, необходимо, чтобы частныя производныя лѣвой части уравненія (51) по p и по q были пропорціональны dx и dy. Отсюда получаемъ слѣдующія значенія для L, M, N:

$$\left.\begin{array}{l} L=l+2fq+hq^2 \\ M=-m-gq-fp-hpq \\ N=n+2gp+hp^2, \end{array}\right| \qquad (53)$$

гдѣ l, m, n, f, g, h — функціи x, y, z; при этомъ, конечно, мы предполагаемъ, что уравненіе $F=0$ приведено къ простѣйшему виду, т. е. коэффиціенты трехъ первыхъ его членовъ не имѣютъ общихъ множителей. Для примѣра разсмотримъ уравненіе

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t+V=0, \qquad (54)$$

для котораго

$$l=n=h=1;\quad f=g=m=0.$$

Уравненіе (52) принимаетъ видъ

$$dx^2+dy^2+dz^2=0, \qquad (55)$$

и слѣдовательно, кривыми C въ данномъ случаѣ служатъ минимальныя кривыя пространства. Уравненіе (54) можетъ быть написано иначе

$$\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{V}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (54')$$

и въ этомъ видѣ оно имѣетъ простой геометрическій смыслъ: лѣвая часть есть выраженіе средней кривизны для поверхности

$$z=z(x,\ y),$$

правая часть есть нѣкоторая функція x, y, z, p, q; слѣдовательно, для всѣхъ интегральныхъ поверхностей уравненія (54) средняя кривизна есть функція координатъ элемента 1-го порядка, и если двѣ интегральныхъ поверхности соприкасаются въ какой-либо точкѣ, то въ этой точкѣ онѣ должны имѣть одинаковую среднюю кривизну.

Многообразія $K_{1,1}$, опредѣляемыя изъ уравненій (49), въ общемъ случаѣ принадлежатъ, какъ мы знаемъ, къ числу такихъ, для которыхъ при опредѣленіи интегральнаго многообразія 3-го порядка получаемъ несовмѣстную систему; что касается до r, s, t, то изъ уравненій (48) получаемъ, вообще говоря, для нихъ опредѣленныя конечныя значенія. Опредѣлимъ теперь всѣ уравненія $F=0$, для которыхъ многообразія $K_{1,1}$ въ общемъ случаѣ, т. е. при двухъ вполнѣ произвольныхъ функціяхъ, входящихъ въ конечныя уравненія многообразія, принадлежатъ наоборотъ къ числу многообразій, приводящихъ къ несовмѣстной системѣ при опредѣленіи интегральнаго многообразія $M^{(1)}_{1,1}$ 2-го порядка; другими словами опредѣлимъ всѣ уравненія $F=0$, для которыхъ система (48), вообще говоря, несовмѣстна относительно r, s, t. Очевидно, случай, о которомъ идетъ рѣчь, имѣетъ мѣсто лишь тогда, когда r, s, t исключаются изъ трехъ уравненій системы (48), а именно изъ 1-го, 3-го, 4-го, независимо отъ 2-го; при этомъ предположеніи первое уравненіе, лѣвая часть котораго есть Якобіанъ лѣвыхъ частей 2-го, 3-го и 4-го по r, s, t, имѣетъ мѣсто при всякихъ значеніяхъ r, s, t, удовлетворяющихъ 3-му и 4-му изъ уравненій (48), и слѣдовательно, какъ мы видѣли выше, система (48) становится вообще несовмѣстной. Для того, чтобы r, s, t исключались изъ 1-го, 3-го и 4-го уравненій системы, необходимо, чтобы 1-е содержало r, s, t лишь въ комбинаціяхъ

$$rdx+sdy,\quad sdx+tdy.$$

Такъ какъ, кромѣ того, лѣвая часть 1-го уравненія есть квадратичная функція дифференціаловъ dx, dy, то, очевидно, мы должны имѣть тождественно

$$\begin{aligned}&Rdy^2-Sdxdy+Tdx^2=\\&=A(rdx+sdy)^2+B(sdx+tdy)^2+C(rdx+sdy)(sdx+tdy)+\\&+Udx(rdx+sdy)+Ddy(rdx+sdy)+Edx(sdx+tdy)+\\&+Wdy(sdx+tdy)+Ndx^2-2Mdxdy+Ldy^2,\end{aligned}$$

гдѣ A, B, C, D, E, U, W, L, M, N — функціи x, y, z, p, q. Сравнивая коэффиціенты при dy^2, $dxdy$, dx^2, получаемъ

$$\left.\begin{aligned}R&=\frac{\partial F}{\partial r}=As^2+Bt^2+Cst+Ds+Wt+L\\S&=\frac{\partial F}{\partial s}=-2Ars-2Bst-C(rt+s^2)-Us-Dr-Et-Ws+2M\\T&=\frac{\partial F}{\partial t}=Ar^2+Bs^2+Crs+Ur+Es+N.\end{aligned}\right\}\quad(56)$$

Опредѣляя производныя $\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial s}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial s\partial t}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial r}$, получаемъ равенства

$$\left.\begin{aligned}2As+Ct+D&=-2As-Ct-D\\-2Bs-Cr-E&=2Bs+Cr+E\\2Ar+Cs+U&=2Bt+Cs+W,\end{aligned}\right\}\quad(57)$$

откуда

$$A=B=C=D=E=0$$
$$W=U.$$

Функція F опредѣляется квадратурой, и мы имѣемъ въ концѣ концовъ искомый видъ уравненій $F=0$:

$$Lr+2Ms+Nt+U(rt-s^2)+V=0,\quad(58)$$

т. е. произвольное билинейное уравненіе. Уравненія (49) для билинейнаго уравненія (58) принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned}Ldy^2-2Mdxdy+Ndx^2+U(dpdx+dqdy)&=0.\\dz-pdx-qdy&=0.\end{aligned}\right\}\quad(59)$$

Дифференцируя 2-е уравненіе, имѣемъ

$$dpdx+dqdy=d^2z-pd^2x-qd^2y,$$

и слѣдовательно, систему (59) можно написать иначе:

$$\left.\begin{aligned}Ldy^2-2Mdxdy+Ndx^2+U(d^2z-pd^2x-qd^2y)&=0\\dz-pdx-qdy&=0.\end{aligned}\right\}\quad(59')$$

Изъ этой формы уравненій явствуетъ, что по данной кривой C многообразія $K_{1,1}$ развертывающаяся поверхность D опредѣляется для билинейнаго уравненія безъ интеграціи. Уравненія вида (50), т. е. линейныя, которыя, какъ мы видѣли выше, тоже обладаютъ упомянутымъ свойствомъ, очевидно, составляютъ частный случай билинейныхъ уравненій, и не трудно доказать, что эти послѣднія представляютъ самый общій типъ уравненій, обладающихъ сказаннымъ свойствомъ.

Въ заключеніе постараемся дать геометрическую интерпретацію уравненіямъ (48), изъ которыхъ получаемъ дифференціальныя уравненія (49) многообразій $K_{1,1}$. Второе и пятое уравненія системы (48) уже были интерпретированы: первое изъ нихъ выражаетъ, что индикатриса 2-го порядка каждаго элемента многообразій, удовлетворяющихъ системѣ (48), должна принадлежать къ системѣ Σ (см. гл. II, § 1, стр. 144) концентрическихъ кривыхъ 2-го порядка

$$\left.\begin{aligned} \zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) \\ r(\xi - x)^2 + 2s(\xi - x)(\eta - y) + t(\eta - y)^2 = k\sqrt{1 + p^2 + q^2}, \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

опредѣляемыхъ для данной точки (x, y, z) и плоскости

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y).$$

или иначе для даннаго элемента 1-го порядка (x, y, z, p, q), уравненіемъ

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0;$$

второе выражаетъ, что плоскости элементовъ многообразія $K_{1,1}$ образуютъ развертывающуюся поверхость D, описанную около кривой C, образуемой точками (x, y, z) элементовъ. Обратимся къ 3-му и 4-му уравненіямъ системы (48). Въ главѣ II (§ 1, стр. 113) мы видѣли, что по данному многообразію элементовъ 1-го порядка, въ нашемъ случаѣ, слѣдовательно, по многообразію $K_{1,1}$, изъ уравненій

$$\begin{aligned} dp - rdx - sdy = 0 \\ dq - sdx - tdy = 0 \end{aligned}$$

опредѣляется многообразіе элементовъ 2-го порядка $M^{(2)}_{1,1}$ двухъ измѣреній, такъ что для каждаго элемента (x, y, z, p, q) многообразія $K_{1,1}$ получается цѣлый пучокъ индикатрисъ, находящихся въ двойномъ соприкосновеніи; діаметромъ двойного соприкосновенія при этомъ служитъ касательная къ кривой C въ точкѣ (x, y, z), а общими касательными — прямыя параллельныя той образующей развертывающейся поверхности D, которая лежитъ въ плоскости

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

и проходитъ черезъ точку (x, y, z). Не трудно найти и тѣ точки, въ которыхъ соприкасаются кривыя пучка, или, другими словами, длину діаметра двойного соприкосновенія. Разсмотримъ для этого развертывающуюся поверхность D со всѣми ея точками, т. е. какъ многообразіе двухъ измѣреній. Индикатриса всякой развертывающейся поверхности въ любой точкѣ, очевидно, распадается на пару прямыхъ, параллельныхъ образующей; въ самомъ дѣлѣ, всякая развертывающаяся поверхность

$$z = z(x, y),$$

какъ извѣстно (ср. гл. II, § 4. стр. 173), удовлетворяетъ уравненію

$$rt - s^2 = 0,$$

а это равенство и есть условіе распаденія индикатрисы

$$\begin{aligned} \zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) \\ r(\xi - x)^2 + 2s(\xi - x)(\eta - y) + t(\eta - y)^2 = k\sqrt{1 + p^2 + q^2} \end{aligned}$$

на пару параллельныхъ прямыхъ; что эти прямыя параллельны именно образующей, не трудно вывести изъ самыхъ уравненій, но кромѣ того это вполнѣ ясно изъ геометрическаго опредѣленія индикатрисы. Если мы изъ всего многообразія двухъ измѣреній, носителемъ котораго служитъ поверхность D, выдѣлимъ многообразіе одного измѣренія, образуемое точками, касательными плоскостями и индикатрисами поверхности, взятыми вдоль кривой C, то полученное многообразіе, очевидно, должно входить въ составъ многообразія $M^{(2)}_{1,1}$, имѣющаго носителемъ многообразіе $K_{1,1}$, такъ какъ для него удовлетворяются дифференціальныя соотношенія

$$\begin{aligned} dp - rdx - sdy = 0 \\ dq - sdx - tdy = 0. \end{aligned}$$

Отсюда заключаемъ, что индикатриса развертывающейся поверхности D въ точкѣ (x, y, z) должна необходимо входить въ составъ пучка индикатрисъ, опредѣляемыхъ многообразіемъ $M^{(2)}_{1,1}$ для элемента (x, y, z, p, q); единственная пара параллельныхъ прямыхъ, входящая въ составъ этого пучка, есть пара его общихъ касательныхъ, слѣдовательно пара общихъ касательныхъ и должна совпадать съ индикатрисой развертывающейся поверхности D въ точкѣ (x, y, z). Изъ теоріи поверхностей извѣстно, что квадратъ полудіаметра индикатрисы поверхности равенъ $k\rho$, гдѣ ρ — радіусъ кривизны нормальнаго сѣченія поверхности, соотвѣтствующаго этому діаметру, а k — двойное разстояніе плоскости сѣченія отъ касательной плоскости, т. е. k имѣетъ то же значеніе, какъ въ уравненіяхъ (60); отсюда заключаемъ, что длина діаметра двойного соприкосновенія пучка индикатрисъ, опредѣляемаго многообразіемъ $M^{(2)}_{1,1}$, равна

$$2\sqrt{k\rho},$$

гдѣ ρ — радіусъ кривизны нормальнаго сѣченія поверхности D, проходящаго черезъ касательную къ кривой C. Многообразіе одного измѣренія $M^{(1)}_{1,1}$, опредѣляемое системой (48), очевидно, входитъ въ составъ многообразія $M^{(1)}_{1,1}$; слѣдовательно индикатриса каждаго элемента $M^{(1)}_{1,1}$ должна обладать слѣдующими свойствами: 1) касательная къ кривой C и образующая развертывающейся поверхности D въ точкѣ (x, y, z) служатъ для нея парой сопряженныхъ діаметровъ, 2) длина перваго изъ этихъ діаметровъ (отрѣзокъ внутри индикатрисы) равна

$$2\sqrt{k\rho},$$

гдѣ ρ имѣетъ указанное выше значеніе.

Намъ остается интерпретировать первое изъ уравненій системы (48)

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0. \tag{61}$$

Разсмотримъ систему Σ индикатрисъ, опредѣляемыхъ для даннаго элемента (x, y, z, p, q) уравненіемъ $F=0$. Индикатрисы, безконечно-близкія къ индикатрисѣ элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) и принадлежащія къ системѣ Σ, опредѣляются уравненіями

$$\left.\begin{aligned} &\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y), \\ &(r+\delta r)(\xi-x)^2+2(s+\delta s)(\xi-x)(\eta-y)+(t+\delta t)(\eta-y)^2=k\sqrt{1+p^2+q^2}, \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

при чемъ δr, δs, δt связаны соотношеніемъ

$$R\delta r + S\delta s + T\delta t = 0, \tag{63}$$

которое получается дифференцированіемъ уравненія $F=0$ въ предположеніи, что x, y, z, p, q — постоянны. Вычитая изъ второго уравненія (62) второе уравненіе (60), получаемъ уравненіе

$$\delta r(\xi - x)^2 + 2\delta s(\xi - x)(\eta - y) + \delta t(\eta - y)^2 = 0. \tag{64}$$

которое вмѣстѣ съ уравненіемъ

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

опредѣляетъ пару прямыхъ — общихъ хордъ (въ данномъ случаѣ діаметровъ) индикатрисы элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) и безконечно-близкой индикатрисы системы Σ. Для того, чтобы эти двѣ индикатрисы находились въ двойномъ соприкосновеніи, необходимо и достаточно,

чтобы прямыя, опредѣляемыя уравненіемъ (64), сливались въ одну, т. е. чтобы имѣло мѣсто равенство

$$\delta r . \delta t = \delta s^2 \tag{65}$$

или

$$\frac{\delta r}{\delta s} = \frac{\delta s}{\delta t}. \tag{65'}$$

Равенства (63) и (65') позволяютъ намъ опредѣлить отношенія $\delta r : \delta s : \delta t$, при чемъ получаемъ, очевидно, 2 рѣшенія, и слѣдовательно, имѣемъ двѣ безконечно-близкихъ индикатрисы системы Σ, которыя находятся въ двойномъ соприкосновеніи съ индикатрисой элемента (x, y, z, p, q, r, s, t). Уравненіе (64) въ данномъ случаѣ можетъ быть написано

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = -\frac{\delta r}{\delta s} = -\frac{\delta s}{\delta t}; \tag{66}$$

дѣля уравненіе (63) на δs, замѣняя $\frac{\delta r}{\delta s}$ и $\frac{\delta t}{\delta s}$ ихъ значеніями изъ уравненій (66) и освобождая результатъ отъ знаменателя, получаемъ уравненіе

$$R(\eta - y)^2 - S(\eta - y)(\xi - x) + T(\xi - x)^2 = 0, \tag{67}$$

которое вмѣстѣ съ уравненіемъ

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) \tag{68}$$

опредѣляетъ два діаметра, служащіе діаметрами двойного соприкосновенія индикатрисы элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) съ безконечно-близкими индикатрисами системы Σ. Можно также сказать, что прямыя, опредѣляемыя уравненіями (67) и (68), пересѣкаютъ индикатрису элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) въ точкахъ соприкосновенія съ безконечно-близкими индикатрисами системы Σ. Сравнивая уравненія (61) и (67) и принимая во вниманіе еще соотношеніе

$$dz - pdx - qdy = 0,$$

непосредственно убѣждаемся, что касательная къ кривой C многообразія $K_{1,1}$ въ точкѣ (x, y, z) совпадаетъ съ однимъ изъ діаметровъ двойного соприкосновенія индикатрисы элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) съ безконечно-близкими индикатрисами системы Σ; обратно, выражая аналитически это свойство, мы, очевидно, придемъ къ уравненію (61).

Геометрическая интерпретація системы (48) теперь вполнѣ закончена и мы можемъ сказать, что многообразія $K_{1,1}$ обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ: если въ каждой точкѣ (x, y, z) кривой C многообразія $K_{1,1}$ отложимъ на касательной t въ обѣ стороны по отрѣзку $=\sqrt{k\rho}$, гдѣ ρ — радіусъ кривизны проходящаго черезъ t нормальнаго сѣченія развертывающейся поверхности D многообразія $K_{1,1}$, а k — параметръ, входящій въ уравненія (60) индикатрисъ, то та индикатриса системы Σ, соотвѣтствующей точкѣ (x, y, z) и касательной плоскости развертывающейся поверхности D, которая имѣетъ діаметромъ полученный отрѣзокъ $2\sqrt{k\rho}$ касательной t, а сопряженнымъ діаметромъ — линію, совпадающую съ образующей поверхности D, соприкасается въ концахъ перваго діаметра съ безконечно-близкой индикатрисой системы Σ. Для полной ясности предыдущаго надо еще доказать, что даными направленіемъ и длиною одного діаметра и направленіемъ сопряженнаго діаметра опредѣляется, вообще говоря, одна или нѣсколько индикатрисъ системы Σ. Данныя, которыя мы здѣсь имѣемъ, очевидно, эквивалентны двумъ діаметрально-противоположнымъ точкамъ—концамъ 1-го діаметра и двумъ касательнымъ въ этихъ точкахъ, параллельнымъ сопряженному діаметру; такъ какъ далѣе всѣ кривыя системы Σ имѣютъ центры въ (x, y, z), то можемъ, очевидно, ограничиться одной изъ упомянутыхъ точекъ и касательной въ этой точкѣ, или иначе двумя безконечно-близкими точками. Система Σ есть система съ двумя произвольными параметрами; слѣдовательно, черезъ двѣ данныя точки проходитъ, вообще говоря, одна или нѣсколько опредѣленныхъ кривыхъ системы, а слѣдовательно, справедливо и то положеніе, которое мы имѣли въ виду доказать.

Въ силу геометрической интерпретаціи, данной нами соотношеніямъ

$$dp - rdx - sdy = 0$$
$$dq - sdx - tdy = 0,$$

опредѣленіе интегральнаго многообразія одного измѣренія $M^{(1)}_{1,1}$ по данному многообразію элементовъ 1-го порядка, образуемаго точками *произвольной* кривой C и плоскостями *произвольной* описанной развертывающейся поверхности D, т. е. та самая задача, которую мы рѣшали въ § 1 при рѣшеніи задачи Cauchy, заключается, съ геометрической точки зрѣнія, въ опредѣленіи для каждаго элемента (x, y, z, p, q) индикатрисы системы Σ по такимъ же даннымъ, какія мы имѣли выше, т. е. по направленію и длинѣ одного діаметра и направленію сопряженнаго діаметра (первый діаметръ—касательная къ C, и длина его $=2\sqrt{k\rho}$, гдѣ k и ρ имѣютъ тѣ же значенія, какъ и выше; второй діаметръ — образующая поверхности D). Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что задача эта, вообще говоря, опредѣленная, и не трудно видѣть, что если уравненіе $F=0$ — алгебраическое относительно r, s, t, то число рѣшеній равно степени уравненія. Всѣ эти результаты мы уже получили въ § 1 аналитическимъ путемъ. Для многообразія $K_{1,1}$, удовлетворяющаго уравненіямъ (49), получаемъ одно многообразіе $M^{(1)}_{1,1}$, удовлетворяющее уравненіямъ (48); каждая индикатриса этого многообразія, согласно предыдущему, въ концахъ діаметра, имѣющаго направленіе касательной къ кривой C многообразія $K_{1,1}$, касается безконечно-близкой индикатрисы Σ, совокупность которыхъ, такимъ образомъ, можно также разсматривать какъ рѣшеніе поставленной выше задачи для многообразія $K_{1,1}$. Отсюда заключаемъ, что многообразіе $M^{(1)}_{1,1}$, удовлетворяющее уравненіямъ (48) служитъ *двукратнымъ* рѣшеніемъ поставленной задачи, что вполнѣ согласно съ прежними результатами (см. стр. 221).

§ 3.—Въ параграфѣ 1-мъ этой главы мы упоминали объ интегралахъ уравненія $F=0$, для которыхъ имѣютъ мѣсто равенства

$$R=0, \quad S=0, \quad T=0,$$

и назвали ихъ *особыми* интегралами (см. стр. 216). Не трудно вывести еще два равенства, имѣющія мѣсто для всякаго особаго интеграла: для произвольнаго интеграла мы имѣемъ, какъ извѣстно,

$$\frac{dF}{dx}=0, \quad \frac{dF}{dy}=0,$$

гдѣ

$$\frac{dF}{dx}=Rz''' + Sz_{,}'' + Tz_{,,}' + Pr + Qs + Zp + X$$

$$\frac{dF}{dy}=Rz_{,}'' + Sz_{,,}' + Tz_{,,,} + Ps + Qt + Zq + Y,$$

а слѣдовательно, для особаго интеграла, въ силу $R=S=T=0$, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} Pr + Qs + Zp + X &= 0 \\ Ps + Qt + Zq + Y &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

или, согласно ранѣе введенному обозначенію (см. § 1, стр. 201, рав. 9)

$$\left[\frac{dF}{dx}\right]=0, \quad \left[\frac{dF}{dy}\right]=0.$$

Такимъ образомъ, для особаго интеграла имѣютъ мѣсто 6 равенствъ:

$$\left.\begin{array}{c} F=0, \quad R=0, \quad S=0, \quad T=0, \\ \left[\frac{dF}{dx}\right]=0, \quad \left[\frac{dF}{dy}\right]=0. \end{array}\right\} \tag{70}$$

Вообще говоря, эти равенства для даннаго уравненія $F=0$ опредѣляютъ нѣкоторое многообразіе M_2 элементовъ 2-го порядка *двухъ* измѣреній; въ частности можетъ случиться, что нѣкоторыя изъ равенствъ (70) являются слѣдствіями другихъ, и тогда мы будемъ имѣть многообразіе элементовъ 2-го порядка M_n числа измѣреній $n>2$. Отмѣтимъ здѣсь существенную разницу, которая существуетъ между многообразіемъ, опредѣляемымъ уравненіями (70), и многообразіемъ, опредѣляемымъ аналогичными уравненіями для уравненія $\Phi(x, y, z, p, q)=0$ 1-го порядка. Для особаго интеграла уравненія 1-го порядка, если онъ существуетъ, должны, какъ мы знаемъ, имѣть мѣсто уравненія

$$\Phi=0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial p}=0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial q}=0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}p+\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}q+\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0, \tag{71}$$

изъ которыхъ два послѣднихъ можемъ написать, согласно введеннымъ обозначеніямъ:

$$\left[\frac{d\Phi}{dx}\right]=0, \quad \left[\frac{d\Phi}{dy}\right]=0.$$

Для произвольнаго уравненія $\Phi=0$ изъ системы (71) получаемъ, вообще говоря, одинъ или нѣсколько опредѣленныхъ элементовъ 1-го порядка; въ частности можетъ получиться многообразіе элементовъ одного или двухъ измѣреній. Если имѣемъ отдѣльные элементы, то соотношеніе

$$dz-pdx-qdy=0,$$

очевидно, удовлетворяется для нихъ; докажемъ, что и въ случаѣ многообразія одного или двухъ измѣреній это дифференціальное соотношеніе **тоже**, вообще говоря, удовлетворяется. Для многообразія, опредѣляемаго уравненіями (71) мы, очевидно, имѣемъ

$$d\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial p}dp+\frac{\partial\Phi}{\partial q}dq+\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz+\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy=0$$

или, такъ какъ изъ уравненій (71) слѣдуетъ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p}=0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial q}=0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x}=-p\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=-q\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$

то имѣемъ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(dz-pdx-qdy)=0, \tag{72}$$

откуда, вообще говоря, слѣдуетъ

$$dz-pdx-qdy=0.$$

Совсѣмъ къ другимъ результатамъ придемъ въ случаѣ уравненія $F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$ 2-го порядка. Для многообразія M, опредѣляемаго уравненіями (70), имѣемъ

$$dF=Rdr+Sds+Tdt+Pdp+Qdq+Zdz+Xdx+Ydy=0,$$

или, такъ какъ изъ уравненій (70)

$$R=S=T=0, \quad X=-Pr-Qs-Zp, \quad Y=-Ps-Qt-Zq,$$

то имѣемъ

$$P(dp-rdx-sdy)+Q(dq-sdx-tdy)+Z(dz-pdx-qdy)=0; \tag{73}$$

въ силу этого соотношенія, изъ равенствъ

$$\left.\begin{array}{l} dp-rdx-sdy=0 \\ dq-sdx-tdy=0 \\ dz-pdx-qdy=0 \end{array}\right\} \tag{74}$$

одно является слѣдствіемъ двухъ другихъ, но въ общемъ случаѣ и только: каждое въ отдѣльности, вообще говоря, не слѣдуетъ изъ уравненій (70). Такимъ образомъ, многообразіе M, опредѣляемое уравненіями (70), для произвольно взятаго уравненія $F=0$, вообще говоря, не удовлетворяетъ дифференціальнымъ соотношеніямъ (74).

Въ теоріи уравненій 1-го порядка было **показано** (гл. I, § 3, стр. 64), что всякое интегральное многообразіе двухъ измѣреній заключаетъ по крайней мѣрѣ одинъ элементъ, удовлетворяющій уравненіямъ (71). Докажемъ, что для уравненія 2-го порядка аналогичное свойство, вообще говоря, не имѣетъ мѣста, при чемъ изъ интегральныхъ многообразій двухъ измѣреній разсмотримъ исключительно интегралы. Для произвольнаго интеграла $z = z(x, y)$ уравненія $F = 0$ имѣемъ

$$\frac{dF}{dx} = Rz''' + Sz_{,}'' + Tz_{,,}' + \left[\frac{dF}{dx}\right] = 0$$
$$\frac{dF}{dy} = Rz_{,}'' + Sz_{,,}' + Tz_{,,,} + \left[\frac{dF}{dy}\right] = 0,$$

такъ что уравненія (70) сводятся къ тремъ независимымъ, напримѣръ къ уравненіямъ

$$R = 0, \quad S = 0, \quad T = 0,$$

въ которыхъ, конечно, z, p, q, r, s, t слѣдуетъ замѣнить соотвѣтственно черезъ

$$z(x, y), \ \frac{\partial z}{\partial x}, \ \frac{\partial z}{\partial y}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Между *двумя* перемѣнными x, y мы имѣемъ *три* уравненія, и слѣдовательно, вообще говоря, невозможно найти такихъ значеній x, y, для которыхъ бы имѣли мѣсто уравненія (70), т. е. въ составъ интегральнаго многообразія, имѣющаго носителемъ поверхность $z = z(x, y)$, вообще говоря, не входитъ элементовъ, удовлетворяющихъ уравненіямъ (70). Не смотря на указанныя различія, мы будемъ и въ случаѣ уравненія 2-го порядка элементы, удовлетворяющіе уравненіямъ (70), называть *особыми*, по аналогіи съ уравненіями 1-го порядка; правильнѣе было бы ихъ правда называть *критическими* элементами, такъ какъ по своимъ свойствамъ (въ общемъ случаѣ) они ближе подходятъ именно къ критическимъ *) элементамъ уравненій 1-го порядка; но тогда бы слѣдовало измѣнить и общепринятый терминъ „особый интегралъ уравненія 2-го порядка", а потому предпочтительнѣе оставить за упомянутыми элементами названіе „особыхъ".

Слѣдуетъ замѣтить, что то опредѣленіе, которое мы дали особымъ элементамъ, предполагаетъ implicite неприводимость уравненія $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ (въ алгебраическомъ смыслѣ). Такъ, если бы мы взяли уравненіе

$$F = f^m = 0,$$

*) Ср. гл. I, § 3, стр. 52.

гдѣ m—цѣлое положительное число, большее единицы, а f—нѣкоторая функція x, y, z, p, q, r, s, t, то уравненія (70) дали бы намъ

$$f^m = 0, \ mf^{m-1}\frac{\partial f}{\partial r} = 0, \ mf^{m-1}\frac{\partial f}{\partial s} = 0, \ mf^{m-1}\frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$
$$mf^{m-1}\left[\frac{df}{dx}\right] = 0, \quad mf^{m-1}\left[\frac{df}{dy}\right] = 0,$$

и слѣдовательно, всякій элементъ, для котораго $f = 0$, т. е. всякій элементъ, удовлетворяющій данному уравненію, съ точки зрѣнія поставленнаго опредѣленія былъ бы особымъ; между тѣмъ понятно, что по существу дѣла особыми элементами являются только тѣ, для которыхъ

$$f = 0, \ \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial s} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \ \left[\frac{df}{dx}\right] = 0, \ \left[\frac{df}{dy}\right] = 0.$$

Желательно поэтому видоизмѣнить опредѣленіе такъ, чтобы не встрѣчалось подобнаго противорѣчія. Для этой цѣли разсмотримъ систему индикатрисъ 3-го порядка (см. гл. II, § 2) (Δ), которая для всякаго элемента 2-го порядка (x, y, z, p, q, r, s, t), удовлетворяющаго данному уравненію $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, опредѣляется уравненіями

$$\frac{dF}{dx} = 0, \ \frac{dF}{dy} = 0, \tag{75}$$

гдѣ, какъ всегда,

$$\frac{dF}{dx} = Rz''' + Sz_{,}'' + Tz_{,,}' + \left[\frac{dF}{dx}\right]$$
$$\frac{dF}{dy} = Rz_{,}'' + Sz_{,,}' + Tz_{,,,} + \left[\frac{dF}{dy}\right].$$

Систему элементовъ 3-го порядка, получаемыхъ изъ уравненій (75), мы уже разсматривали въ § 2-мъ II-й главы (стр. 156): элементы эти образуютъ интегральное многообразіе 3-го порядка двухъ измѣреній. Кубическія индикатрисы

$$\left.\begin{aligned} &\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) \\ &z'''(\xi - x)^3 + 3z_{,}''(\xi - x)^2(\eta - y) + 3z_{,,}'(\xi - x)(\eta - y)^2 + z_{,,,}(\eta - y)^3 + \\ &+ 3r(\xi - x)^2 + 6s(\xi - x)(\eta - y) + 3t(\eta - y)^2 = 3k\sqrt{1 + p^2 + q^2}, \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

интерпретирующія эти элементы, въ силу соотношеній (75), очевидно, образуютъ нѣкоторую *сѣть* кривыхъ 3-го порядка, которая и есть искомая система (Δ) для элемента (x, y, z, p, q, r, s, t). Допустимъ теперь, что для разсматриваемаго элемента удовлетворяются всѣ уравненія (70). Въ такомъ случаѣ и, очевидно, только въ такомъ случаѣ *) соотношенія (75) обращаются, вообще говоря, въ тождества $0 = 0$, и система (Δ) становится неопредѣленной. Можетъ однако случиться, что неопредѣленность эта только видимая; такъ, для уравненія

$$F = f^m = 0$$

соотношенія (75) принимаютъ видъ

$$mf^{m-1}\left\{\frac{\partial f}{\partial r}z''' + \frac{\partial f}{\partial s}z_{\prime}'' + \frac{\partial f}{\partial t}z_{\prime\prime}' + \left[\frac{df}{dx}\right]\right\} = 0$$
$$mf^{m-1}\left\{\frac{\partial f}{\partial r}z_{\prime}'' + \frac{\partial f}{\partial s}z_{\prime\prime}' + \frac{\partial f}{\partial t}z_{\prime\prime\prime} + \left[\frac{df}{dy}\right]\right\} = 0$$

и въ этой формѣ удовлетворяются тождественно для всякаго элемента, для котораго $f = 0$; но, очевидно, для произвольнаго элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) эти соотношенія эквивалентны нижеслѣдующимъ

$$\frac{\partial f}{\partial r}z''' + \frac{\partial f}{\partial s}z_{\prime}'' + \frac{\partial f}{\partial t}z_{\prime\prime}' + \left[\frac{df}{dx}\right] = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial r}z_{\prime}'' + \frac{\partial f}{\partial s}z_{\prime\prime}' + \frac{\partial f}{\partial t}z_{\prime\prime\prime} + \left[\frac{df}{dy}\right] = 0,$$

которыя получаются отбрасываніемъ множителя mf^{m-1}, а эти послѣднія и для элемента, удовлетворяющаго уравненію $f = 0$, даютъ, вообще говоря, вполнѣ опредѣленную систему (Δ). Если будемъ всегда систему (Δ) опредѣлять сначала для произвольнаго элемента (x, y, z, p, q, r, s, t), то не представляетъ никакой трудности рѣшеніе вопроса, для какихъ элементовъ система (Δ) становится дѣйствительно неопредѣленной; такіе элементы и будемъ называть *особыми*. Не трудно убѣ-

*) Мы оставляемъ собственно въ сторонѣ случай, когда соотношенія (75) не устанавливаютъ опредѣленной зависимости между z''', $z_{\prime}''$, $z_{\prime\prime}'$, $z_{\prime\prime\prime}$ благодаря неопредѣленнымъ или безконечнымъ значеніямъ R, S, T, $\left[\frac{dF}{dx}\right]$, $\left[\frac{dF}{dy}\right]$; но если F— цѣлая алгебраическая функція аргументовъ, что обыкновенно и имѣемъ въ приложеніяхъ, то 1-й случай вовсе не можетъ имѣть мѣста, а 2-й — можетъ имѣть мѣсто лишь для элементовъ съ безконечными значеніями координатъ; если уравненіе и допускаетъ подобные особые элементы, то опредѣленіе ихъ всегда можно свести къ опредѣленію элементовъ съ конечными значеніями координатъ посредствомъ подходящаго преобразованія уравненія.

диться, что для *неприводимаго* уравненія $F = 0$ не можетъ встрѣтиться случая видимой неопредѣленности системы (Δ), и слѣдовательно, наше новое опредѣленіе совпадаетъ съ прежнимъ.

Въ заключеніе разсмотримъ нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ 1. $F = xr + zs + yt - pq + z + x + y + 1 = 0$. Уравненіе—неприводимое. Многообразіе особыхъ элементовъ опредѣляется изъ уравненій (70), которыя даютъ

$$x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0,\ \ pq = 1,\ \ (1-q)r + p + 1 = 0,\ \ (1-p)t + q + 1 = 0.$$

Очевидно, получаемъ многообразіе M_2 двухъ измѣреній, для котораго не удовлетворяются дифференціальныя соотношенія

$$dp - rdx - sdy = 0$$
$$dq - sdx - tdy = 0.$$

Всѣ элементы многообразія M_2 имѣютъ общую точку—начало координатъ; плоскости элементовъ образуютъ конусъ, уравненіе котораго получимъ исключая произвольный параметръ p между уравненіемъ плоскости

$$\zeta = p\xi + \frac{1}{p}\eta$$

и его производной по p

$$0 = \xi - \frac{1}{p^2}\eta.$$

По исключеніи имѣемъ

$$\zeta^2 = 4\xi\eta;$$

слѣдовательно, искомый конусъ есть конусъ 2-го порядка. Въ каждой касательной плоскости этого конуса лежитъ цѣлая система индикатрисъ 2-го порядка, зависящая отъ одного параметра s.

Примѣръ 2. $F = rs + st + tr + p + q + z = 0$. Уравненіе—неприводимое. Многообразіе особыхъ элементовъ опредѣляется изъ уравненій

$$s + t = 0,\ \ r + t = 0,\ \ s + r = 0,\ \ r + s + p = 0,\ \ s + t + q = 0,\ \ F = 0,$$

откуда

$$z = 0,\ \ p = 0,\ \ q = 0,\ \ r = 0,\ \ s = 0,\ \ t = 0;$$

очевидно, получаемъ многообразіе, имѣющее носителемъ плоскость xy, т. е. особый интегралъ

$$z = 0.$$

Примѣръ 3. $F = rt - s^2 = 0$. Уравненіе — неприводимое. Многообразіе особыхъ элементовъ опредѣляется уравненіями

$$t = 0, \quad s = 0, \quad r = 0$$

при произвольныхъ p, q, z, x, y. Очевидно, получаемъ многообразіе M_5 пяти измѣреній. Постараемся опредѣлить, если возможно, многообразія, входящія въ составъ многообразія M_5, для которыхъ имѣютъ мѣсто дифференціальныя соотношенія

$$\begin{aligned} dz - pdx - qdy &= 0 \\ dp - rdx - sdy &= 0 \\ dq - sdx - tdy &= 0. \end{aligned}$$

Въ силу $r = s = t = 0$, получаемъ

$$dp = 0, \quad dq = 0,$$

откуда

$$p = const. = a, \quad q = const. = b,$$

и затѣмъ изъ 1-го соотношенія

$$z = ax + by + c,$$

при чемъ a, b, c, — произвольныя постоянныя. Такимъ образомъ, получаемъ цѣлую систему, зависящую отъ трехъ параметровъ, подобныхъ многообразій; носителями ихъ служатъ произвольныя плоскости. Другими словами, уравненіе $F = 0$ допускаетъ семейство особыхъ интеграловъ

$$z = ax + bp + c,$$

зависящее отъ трехъ параметровъ.

ГЛАВА IV.

§ 1.—Характеристическія многообразія 1-го порядка; геометрическая интерпретація ихъ уравненій; кривыя K и J системы Σ. Уравненія, допускающія систему характеристическихъ многообразій 1-го порядка, зависящую отъ одной произвольной функціи; билинейныя уравненія. — § 2.—Характеристическія многообразія 2-го порядка; геометрическая интерпретація ихъ уравненій; случай, когда интерпретація становится недостаточной; примѣры.— § 3.—Характеристическія многообразія высшихъ порядковъ.

§ 1. — Характеристическимъ многообразіемъ 1-го порядка называется, какъ было упомянуто въ главѣ II-й (§ 1, стр. 149), многообразіе одного измѣренія элементовъ 1-го порядка, служащее носителемъ интегральнаго многообразія $M^{(2)}_{1,1}$ *двухъ* измѣреній. Намъ уже приходилось нѣсколько разъ упоминать, что произвольное уравненіе 2-го порядка

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{1}$$

вообще говоря, не допускаетъ характеристическихъ многообразій 1-го порядка. Если же уравненіе (1) принадлежитъ къ числу такихъ, для которыхъ характеристическія многообразія 1-го порядка существуютъ, то, согласно опредѣленію (ср. гл. II, § 1, стр. 114 и 148), всѣ значенія r, s, t, опредѣляемыя изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} dp - rdx - sdy &= 0 \\ dq - sdx - tdy &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

гдѣ p, q, x, y выражены въ функціи одного параметра въ силу уравненій характеристическаго многообразія,—должны удовлетворять уравненію (1); другими словами, для характеристическаго многообразія 1-го порядка, уравненіе (1) должно быть слѣдствіемъ системы (2), или иначе система

$$\left.\begin{aligned} dp - rdx - sdy &= 0 \\ dq - sdx - tdy &= 0 \\ F(x, y, z, p, q, r, s, t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

должна становиться неопредѣленной относительно r, s, t. Условія, при которыхъ это требованіе выполняется, будутъ имѣть видъ уравненій, содержащихъ x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq и однородныхъ относительно дифференціаловъ. Такъ какъ для характеристическаго многообразія должно сверхъ того выполняться уравненіе

$$dz - pdx - qdy = 0, \quad (4)$$

то число упомянутыхъ выше уравненій должно быть не больше трехъ, если только данное уравненіе $F=0$ (1) допускаетъ характеристическія многообразія 1-го порядка; число это съ другой стороны, очевидно, не можетъ быть меньше двухъ, такъ какъ система (3) при произвольныхъ x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq опредѣленна и совмѣстна, а условія неопредѣленности системы слагаются изъ условій ея несовмѣстности и еще добавочнаго условія. Такимъ образомъ, для опредѣленія характеристическихъ многообразій 1-го порядка, въ случаѣ если уравненіе $F=0$ (1) допускаетъ ихъ, имѣемъ или четыре уравненія вида

$$\left.\begin{aligned} H_1(x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq) &= 0 \\ H_2(x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq) &= 0 \\ H_3(x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq) &= 0 \\ dz - pdx - qdy &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

или только три уравненія

$$\left.\begin{aligned} H_1(x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq) &= 0 \\ H_2(x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq) &= 0 \\ dz - pdx - qdy &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Въ первомъ случаѣ получимъ систему характеристическихъ многообразій, зависящую отъ четырехъ *) произвольныхъ параметровъ или отъ меньшаго числа, если изъ уравненій (5) можно получить одно или нѣсколько уравненій, не содержащихъ дифференціаловъ. Во второмъ случаѣ получимъ систему характеристическихъ многообразій, зависящую

*) Четыре постоянныхъ интеграціи.

отъ одной произвольной функціи: такъ, если возьмемъ $y=\varphi(x)$, гдѣ φ — знакъ произвольной функціи, то уравненія (6) дадутъ остальныя три координаты z, p, q въ функціи x. Если между уравненіями (5) или (6) нельзя исключить всѣхъ дифференціаловъ, то въ первомъ случаѣ *каждый* элементъ 1-го порядка (x, y, z, p, q) принадлежитъ одному или нѣсколькимъ опредѣленнымъ характеристическимъ многообразіямъ 1-го порядка, а во 2-мъ случаѣ—цѣлой системѣ, зависящей отъ произвольной функціи. Исключая между уравненіями (5) или (6) p и q, получимъ въ первомъ случаѣ два, а во второмъ одно уравненіе, вообще говоря, съ дифференціалами 3-го порядка между одними перемѣнными x, y, z; эти два или одно уравненіе опредѣляютъ видъ кривыхъ C, образуемыхъ точками элементовъ характеристическихъ многообразій 1-го порядка. Замѣняя въ двухъ первыхъ уравненіяхъ (6) dp и dq соотвѣтственно черезъ $rdx+sdy$ и $sdx+tdy$ и исключая затѣмъ изъ двухъ полученныхъ, однородныхъ относительно dx и dy, уравненій эти дифференціалы, получаемъ одно соотношеніе между x, y, z, p, q, r, s, t, которое, очевидно, имѣетъ мѣсто для всѣхъ интегральныхъ многообразій $M^{(2)}_{1,1}$, имѣющихъ носителями характеристическія многообразія 1-го порядка; отсюда заключаемъ, что полученное соотношеніе должно совпадать съ даннымъ уравненіемъ $F=0$ (1), и слѣдовательно, если уравненіе допускаетъ систему характеристическихъ многообразій 1-го порядка такого рода, что каждый элементъ 1-го порядка (x, y, z, p, q) пространства принадлежитъ цѣлому семейству характеристическихъ многообразій, зависящему отъ одной произвольной функціи, то уравненіе это вполнѣ опредѣляется по данной системѣ своихъ характеристическихъ многообразій. Поступая съ системой (5) совершенно такъ же, какъ мы поступали съ системой (6), получимъ *два* уравненія между x, y, z, p, q, r, s, t; слѣдовательно, семейство характеристическихъ многообразій 1-го порядка, опредѣляемое *четырьмя* дифференціальными уравненіями, принадлежитъ всегда, кромѣ даннаго уравненія $F=0$ (1), еще нѣкоторому иному уравненію

$$\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

и, очевидно, также всякому уравненію вида

$$f(F, \Phi) = 0,$$

гдѣ f—произвольная функція, обращающаяся въ нуль при $F=0$, $\Phi=0$.

Постараемся теперь дать геометрическое истолкованіе дифференціальнымъ уравненіямъ (5) или (6) характеристическихъ многообразій

1-го порядка. Для этой цѣли предпочтительнѣе всю теорію провести геометрически. Мы знаемъ изъ главы II-й (§ 1, стр. 114) и главы III-й (§ 2, стр. 228), что многообразіе $M^{(2)}_{1,1}$ двухъ измѣреній, имѣющее носителемъ данное многообразіе элементовъ 1-го порядка $K_{1,1}$ одного измѣренія, состоитъ изъ элементовъ, индикатрисы которыхъ для каждаго элемента (x, y, z, p, q) многообразія $K_{1,1}$ составляютъ пучокъ кривыхъ 2-го порядка, находящихся въ двойномъ соприкосновеніи; при этомъ діаметръ двойного соприкосновенія имѣетъ направленіе касательной въ точкѣ (x, y, z) къ кривой C, образуемой точками элементовъ многообразія $K_{1,1}$, и длину равную $2\sqrt{k\rho}$, гдѣ k—постоянное въ уравненіяхъ индикатрисы

$$\left.\begin{aligned}\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)\\ r(\xi - x)^2 + 2s(\xi - x)(\eta - y) + t(\eta - y)^2 = k\sqrt{1 + p^2 + q^2},\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

а ρ — радіусъ кривизны въ точкѣ (x, y, z) нормальнаго сѣченія развертывающейся поверхности D, образуемой плоскостями элементовъ многообразія $K_{1,1}$, по направленію касательной къ C; что касается до общихъ касательныхъ пучка индикатрисъ, то онѣ параллельны той образующей развертывающейся поверхности D, которая лежитъ въ плоскости элемента (x, y, z, p, q) и проходитъ черезъ его точку (x, y, z); послѣднее свойство можно замѣнить другимъ, которое формулируется такъ: діаметръ, сопряженный діаметру двойного соприкосновенія относительно всѣхъ индикатрисъ пучка, совпадаетъ съ образующей поверхности D. Если многообразіе $K_{1,1}$ есть характеристическое многообразіе 1-го порядка, то многообразіе двухъ измѣреній $M^{(2)}_{1,1}$ должно быть, согласно опредѣленію, интегральнымъ многообразіемъ даннаго уравненія $F = 0$ (1), а слѣдовательно, пучокъ индикатрисъ, дополняющихъ каждый элементъ (x, y, z, p, q) многообразія $K_{1,1}$ до элементовъ многообразія $M^{(2)}_{1,1}$, долженъ входить въ составъ системы Σ (ср. гл. II, § 1, стр. 144 и гл. III, § 2, стр. 226), опредѣляемой для элемента (x, y, z, p, q) даннымъ уравненіемъ $F = 0$ (1). Отсюда, во-первыхъ, заключаемъ, что характеристическія многообразія 1-го порядка могутъ допускать только такія уравненія, для которыхъ системы Σ заключаютъ въ своемъ составѣ пучки σ кривыхъ 2-го порядка, находящихся въ двойномъ соприкосновеніи; во-вторыхъ, отсюда же непосредственно находимъ слѣдующія необходимыя и достаточныя условія для того, чтобы многообразіе $K_{1,1}$ было характеристическимъ многообразіемъ 1-го порядка даннаго уравненія: для каждаго элемента (x, y, z, p, q) многообразія $K_{1,1}$ ка-

сательная къ кривой C, образуемой точками элементовъ многообразія, должна имѣть направленіе діаметра двойного соприкосновенія пучка индикатрисъ σ, входящаго въ составъ соотвѣтствующей элементу (x, y, z, p, q) системы Σ; образующая развертывающейся поверхности D, образуемой плоскостями элементовъ многообразія $K_{1,1}$, должна имѣть направленіе общихъ касательныхъ пучка σ; радіусъ кривизны ρ нормальнаго сѣченія поверхности D по направленію касательной къ кривой C въ точкѣ (x, y, z) долженъ имѣть такую величину, чтобы длина діаметра двойного соприкосновенія пучка σ равнялась $2\sqrt{k\rho}$, гдѣ k—постоянное, входящее въ уравненія (7) индикатрисы, другими словами радіусъ кривизны ρ долженъ равняться $\frac{a'^2}{k}$, гдѣ a'—половина діаметра двойного соприкосновенія пучка σ. Выражая эти геометрическія свойства аналитически, мы необходимо придемъ къ уравненіямъ (5) или (6); обратно, интерпретируя геометрически уравненія (5) или (6), очевидно, получимъ тѣ самыя свойства характеристическихъ многообразій, которыя только-что выведены. Слѣдуетъ при этомъ замѣтить, что уравненіе

$$dz - pdx - qdy = 0$$

удовлетворяется для всякаго многообразія $K_{1,1}$, элементы котораго составляются изъ точекъ нѣкоторой кривой C и плоскостей *описанной* развертывающейся поверхности D, а разъ это уравненіе удовлетворяется, то условія, чтобы касательная къ кривой C и образующая развертывающейся поверхности D имѣли направленіе опредѣленныхъ линій въ плоскости элемента (x, y, z, p, q), выражаются каждое однимъ уравненіемъ. Отсюда заключаемъ, что если система Σ для каждаго элемента (x, y, z, p, q) заключаетъ лишь отдѣльные (одинъ или нѣсколько или даже и безчисленное множество въ случаѣ уравненія $F = 0$ трансцендентнаго относительно r, s, t) пучки σ индикатрисъ, находящихся въ двойномъ соприкосновеніи, то данное уравненіе $F = 0$ (1) допускаетъ систему характеристическихъ многообразій 1-го порядка, опредѣляемыхъ *четырьмя* дифференціальными уравненіями (5), при чемъ между этими уравненіями невозможно исключить всѣхъ дифференціаловъ; если же система Σ для каждаго элемента (x, y, z, p, q) заключаетъ безчисленное множество непрерывно измѣняющихся пучковъ σ, такъ что всю систему Σ можно составить изъ пучковъ σ и каждая индикатриса системы Σ необходимо принадлежитъ къ какому-нибудь пучку σ, то, очевидно, одно изъ данныхъ, опредѣляющихъ пучокъ, можно всегда выбрать произвольно: напримѣръ, можно произвольно выбрать направленіе діаметра двойного соприкосновенія, а слѣдовательно, и направленіе касательной къ кривой C, лишь бы она лежала въ плоскости развертывающейся поверхности D, или можно взять произвольно длину діаметра двойного соприкосновенія, а слѣдовательно, оставить произвольнымъ радіусъ кривизны ρ нормальнаго сѣченія поверхности D по направленію касательной къ C; вслѣдствіе такого произвола число уравненій, опредѣляющихъ характеристическія многообразія 1-го порядка, очевидно, уменьшается на единицу, и слѣдовательно, мы будемъ въ этомъ случаѣ имѣть *три* уравненія (6), изъ которыхъ опять-таки дифференціалы не могутъ быть всѣ исключены.

Имѣя въ виду выяснить, какими свойствами должна обладать система Σ для того, чтобы въ нее входили пучки σ индикатрисъ, находящихся въ двойномъ соприкосновеніи, сдѣлаемъ небольшое отступленіе. Въ главѣ II-й (§ 1, стр. 145) намъ уже приходилось упоминать о кривой K, которая есть облекающая всѣхъ паръ параллельныхъ прямыхъ, входящихъ въ составъ системы Σ; уравненіе проэкціи этой кривой на плоскость xy, очевидно, получается исключеніемъ r, s, t, dr, ds, dt изъ уравненій *)

$$\left.\begin{array}{c} r(\xi-x)^2+2s(\xi-x)(\eta-y)+t(\eta-y)^2=k\sqrt{1+p^2+q^2} \\ F(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t)=0 \\ rt-s^2=0 \\ dr(\xi-x)^2+2ds(\xi-x)(\eta-y)+dt(\eta-y)^2=0 \\ Rdr+Sds+Tdt=0 \\ tdr-2sds+rdt=0. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Опредѣлимъ еще одну кривую, связанную съ системой Σ. Для этой цѣли замѣтимъ, что произвольная индикатриса системы Σ, какъ было указано въ главѣ III-й (§ 2, стр. 229), находится въ двойномъ соприкосновеніи съ двумя безконечно-близкими индикатрисами той же системы, при чемъ діаметры двойного соприкосновенія опредѣляются уравненіемъ

$$R(\eta-y)^2-S(\xi-x)(\eta-y)+T(\xi-x)^2=0. \quad (9)$$

Каждая пара параллельныхъ прямыхъ, принадлежащая къ системѣ Σ, точно также соприкасается, вообще говоря, въ двухъ парахъ діаметрально-противоположныхъ точекъ съ двумя безконечно-близкими индикатрисами; геометрическое мѣсто этихъ точекъ для системы Σ есть нѣкоторая кривая J, которую мы и имѣли въ виду опредѣлить. Уравненіе проэкціи кривой J на плоскость xy, очевидно, получается исключеніемъ r, s, t изъ уравненій

*) Ср. гл. II, § 1, стр. 145, рав. (98).

$$\left.\begin{array}{c} r(\xi-x)^2+2s(\xi-x)(\eta-y)+t(\eta-y)^2=k\sqrt{1+p^2+q^2}, \\ F(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t)=0 \\ rt-s^2=0 \\ R(\eta-y)^2-S(\xi-x)(\eta-y)+T(\xi-x)^2=0. \end{array}\right\} \quad (10)$$

Для того, чтобы имѣть уравненія самой кривой J, достаточно прибавить еще уравненіе плоскости элемента $(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$

$$\zeta-z=p(\xi-x)+q(\eta-y); \quad (11)$$

точно такъ же получимъ уравненія кривой K, присоединяя уравненіе (11) къ системѣ (8). Такъ какъ кривая K есть облекающая паръ параллельныхъ и равно удаленныхъ отъ $(x,\ y,\ z)$ прямыхъ, а кривая J— геометрическое мѣсто паръ діаметрально-противоположныхъ относительно $(x,\ y,\ z)$ точекъ, то, очевидно, и для той и для другой кривой точка $(x,\ y,\ z)$ служитъ центромъ симметріи. Каждая касательная къ кривой K пересѣкаетъ кривую J въ нѣсколькихъ точкахъ, но изъ этихъ точекъ, вообще, только двѣ служатъ точками соприкосновенія съ безконечно-близкими индикатрисами.

Допустимъ теперь, что въ составъ системы Σ входитъ пучокъ σ индикатрисъ, находящихся въ двойномъ соприкосновеніи. Пара общихъ касательныхъ пучка, очевидно, принадлежитъ къ системѣ Σ, и слѣдовательно, эти двѣ параллельныя и симметричныя относительно точки $(x,\ y,\ z)$ прямыя должны касаться кривой K системы Σ. Далѣе, очевидно, общія точки прикосновенія индикатрисъ пучка σ къ общимъ касательнымъ могутъ быть разсматриваемы для этихъ послѣднихъ какъ точки двойного соприкосновенія съ безконечно-близкой индикатрисой системы Σ, и слѣдовательно, эта пара діаметрально-противоположныхъ точекъ должна лежать на кривой J системы Σ. Такимъ образомъ, чтобы узнать, входитъ ли въ составъ системы пучокъ индикатрисъ, находящихся въ двойномъ соприкосновеніи, достаточно разсмотрѣть всевозможные пучки кривыхъ 2-го порядка, прикасающихся къ парѣ параллельныхъ касательныхъ кривой K въ точкахъ пересѣченія ихъ съ кривой J. Каждая индикатриса пучка σ, очевидно, находится въ двойномъ соприкосновеніи съ безконечно-близкой индикатрисой системы Σ; діаметромъ двойного соприкосновенія при этомъ служитъ діаметръ двойного соприкосновенія всего пучка; отсюда слѣдуетъ, что характеристическое многообразіе 1-го порядка принадлежитъ къ числу тѣхъ многообразій $K_{1,1}$, о которыхъ мы говорили въ § 2 главы III-й; при этомъ соотношеніе

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0, \tag{12}$$

очевидно, справедливо для всего многообразія $M^{(2)}_{1,1}$, имѣющаго носителемъ характеристическое многообразіе.

Изслѣдуемъ въ частности тѣ уравненія, для которыхъ система Σ при произвольномъ элементѣ (x, y, z, p, q) вся состоитъ изъ пучковъ σ индикатрисъ, находящихся въ двойномъ соприкосновеніи, такъ что каждая индикатриса системы Σ непремѣнно входитъ въ составъ какого-либо пучка σ. Въ этомъ случаѣ всякая пара параллельныхъ прямыхъ, принадлежащая къ системѣ Σ, очевидно, служитъ парой общихъ касательныхъ какого-либо пучка σ, и слѣдовательно кривая K можетъ быть опредѣлена какъ облекающая общихъ касательныхъ пучковъ σ; кривая J, очевидно, можетъ быть опредѣлена какъ геометрическое мѣсто точекъ двойного соприкосновенія индикатрисъ пучковъ σ. Если возьмемъ произвольную индикатрису системы Σ, то она необходимо должна принадлежать какому-нибудь пучку σ; сопоставляя это съ предыдущимъ, заключаемъ, что въ числѣ точекъ пересѣченія произвольной индикатрисы системы Σ съ кривой J необходимо должна быть пара діаметрально-противоположныхъ точекъ, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что касательныя, проведенныя въ этихъ точкахъ къ индикатрисѣ, касаются вмѣстѣ съ тѣмъ кривой K. Такимъ образомъ, систему Σ можно вполнѣ опредѣлить по кривымъ J и K, а именно, какъ совокупность кривыхъ 2-го порядка, имѣющихъ центры въ точкѣ (x, y, z) и пересѣкающихъ каждая кривую J (между прочимъ) въ двухъ діаметрально-противоположныхъ точкахъ прикосновенія къ двумъ параллельнымъ общимъ касательнымъ кривой K и разсматриваемой кривой 2-го порядка. Если уравненіе проэкціи кривой J на плоскость xy есть

$$\varphi(\xi - x, \eta - y) = 0,$$

а уравненіе проэкціи кривой K на ту же плоскость въ линейныхъ координатахъ u, v есть

$$\psi(u, v) = 0,$$

то для того, чтобы индикатриса элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) пересѣкала кривую J въ точкѣ, касательная въ которой есть въ то же время касательная къ кривой K, должны, очевидно, при нѣкоторыхъ значеніяхъ ξ, η удовлетворяться уравненія:

$$\left.\begin{array}{c} r(\xi - x)^2 + 2s(\xi - x)(\eta - y) + t(\eta - y)^2 = k\sqrt{1 + p^2 + q^2}, \\ \varphi(\xi - x, \ \eta - y) = 0 \\ \psi\left(\dfrac{r(\xi - x) + s(\eta - y)}{k\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \ \dfrac{s(\xi - x) + t(\eta - y)}{k\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right) = 0. \end{array}\right\} \tag{13}$$

Первыя два изъ этихъ уравненій выражаютъ, что точка (ξ, η) есть точка пересѣченія проэкцій индикатрисы и кривой J; третье выражаетъ, что касательная въ точкѣ (ξ, η) къ проэкціи индикатрисы касается проэкціи кривой K; при этомъ слѣдуетъ замѣтить, что за координаты u, v прямой линіи мы принимаемъ коэффиціенты въ уравненіи ея, предполагаемомъ въ слѣдующемъ видѣ

$$u(\xi - x) + v(\eta - y) = 1,$$

гдѣ ξ, η — текущія координаты.

Очевидно, что свойства, выражаемыя уравненіями (13), не измѣняются при проэктированіи и, слѣдовательно, принадлежатъ и самой индикатрисѣ элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) относительно кривыхъ J и K. Исключая изъ уравненій (13) ξ и η, получаемъ одно соотношеніе между x, y, z, p, q, r, s, t, которое имѣетъ мѣсто для всѣхъ индикатрисъ, обладающихъ упомянутыми свойствами относительно кривыхъ J и K, т. е. получаемъ соотношеніе, опредѣляющее систему Σ, или при произвольныхъ x, y, z, p, q получаемъ искомое уравненіе съ частными производными

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \tag{1}$$

Мы упоминали выше, что кривыя J и K имѣютъ центры симметріи въ точкѣ (x, y, z), ихъ проэкціи, слѣдовательно, въ точкѣ (x, y); поэтому уравненія $\varphi(\xi - x, \eta - y) = 0$ и $\psi(u, v) = 0$ должны обладать тѣмъ свойствомъ, что если имъ удовлетворяетъ какая-либо пара значеній $\xi - x$, $\eta - y$ или u, v, то удовлетворяетъ и пара $-(\xi - x)$, $-(\eta - y)$ или $-u$, $-v$. Отсюда заключаемъ, что если уравненіямъ (13) удовлетворяетъ система значеній $\xi - x$, $\eta - y$, то удовлетворяетъ и система $-(\xi - x)$, $-(\eta - y)$, т. е. индикатриса системы Σ необходимо пересѣкаетъ кривую J въ *двухъ* діаметрально-противоположныхъ точкахъ, касательныя въ которыхъ къ индикатрисѣ касаются также и кривой K. Если мы предположимъ, что уравненія $\varphi=0$ и $\psi=0$ вполнѣ произвольны, то уравненія (13) выражаютъ лишь, что индикатриса пересѣкаетъ кривую, уравненіе проэкціи которой есть $\varphi=0$, въ *одной* точкѣ, касательная въ которой къ индикатрисѣ касается также кривой, проэктирующейся на плоскость xy кривой $\psi=0$. Исключая по прежнему изъ уравненій (13) ξ и η, получимъ одно сооотношеніе

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$$

и, слѣдовательно, опредѣленную систему Σ индикатрисъ для каждаго элемента (x, y, z, p, q); но только кривыя J и K этой системы не совпадаютъ съ кривыми, которыя были намъ даны и которыя для краткости будемъ называть кривыми φ и ψ: непосредственно очевидно, что кривая J состоитъ изъ кривой φ и кривой, симметричной ей относительно точки (x, y, z), а кривая K — изъ кривой ψ и кривой, симметричной ей относительно точки (x, y, z). Измѣняя произвольно видъ функцій φ и ψ въ уравненіяхъ (13), получимъ всевозможныя уравненія $F=0$, для которыхъ система Σ при произвольномъ элементѣ (x, y, z, p, q) состоитъ изъ пучковъ σ индикатрисъ, находящихся въ двойномъ соприкосновеніи, или иначе получимъ всевозможныя уравненія, допускающія систему характеристическихъ многообразій 1-го порядка, опредѣляемую *тремя* дифференціальными уравненіями (ср. выше стр. 243). Можно также сказать, что подобное уравненіе $F=0$ вполнѣ опредѣляется парой кривыхъ J и K, данныхъ для каждаго элемента (x, y, z, p, q) и имѣющихъ въ точкѣ (x, y, z) центры симметріи (каждая изъ этихъ кривыхъ можетъ, понятно, распадаться на двѣ кривыхъ, симметричныхъ относительно точки (x, y, z); для двухъ такихъ кривыхъ, разсматриваемыхъ совокупно, точка (x, y, z), очевидно, служитъ центромъ симметріи). Геометрическое опредѣленіе характеристическихъ многообразій 1-го порядка для уравненій разсматриваемаго типа, на основаніи всего предшествующаго, можетъ быть формулировано такъ: касательная къ кривой C, образуемой точками элементовъ характеристическаго многообразія $K_{1,1}$, для каждаго элемента (x, y, z, p, q) пересѣкаетъ кривую J въ парѣ діаметрально-противоположныхъ точекъ, въ которыхъ ее пересѣкаютъ двѣ касательныя къ кривой K, параллельныя образующей развертывающейся поверхности D, образуемой плоскостями элементовъ многообразія $K_{1,1}$; радіусъ кривизны ρ нормальнаго сѣченія поверхности D по направленію касательной къ C въ точкѣ (x, y, z) равенъ $\dfrac{a'^2}{k}$, гдѣ a' — половина отрѣзка касательной къ кривой C между парой касательныхъ къ кривой K, параллельныхъ образующей поверхности D, или иначе половина отрѣзка, отсѣкаемаго кривой J на касательной къ C, а k — постоянное, входящее въ уравненія (7) индикатрисы.

Возвращаясь къ общему опредѣленію кривой J, легко замѣтимъ, что, въ примѣненіи къ уравненіямъ разсматриваемаго нами типа, оно приводитъ, повидимому, къ парадоксу. Въ самомъ дѣлѣ, выше мы упоминали, что всякая пара прямыхъ системы Σ соприкасается, вообще говоря, съ двумя безконечно-близкими индикатрисами системы въ двухъ парахъ діаметрально-противоположныхъ точекъ, опредѣляемыхъ діаметрами

$$R(\eta-y)^2-S(\xi-x)(\eta-y)+T(\xi-x)^2=0, \qquad (9)$$

и слѣдовательно, въ силу даннаго уравненія $F=0$, изъ числа точекъ пересѣченія пары параллельныхъ касательныхъ къ кривой K съ кривой J, вообще говоря, выдѣляются всегда *двѣ* пары діаметрально-противоположныхъ точекъ, для которыхъ удовлетворяется уравненіе (9) и которыя служатъ точками двойного соприкосновенія съ безконечно-близкими индикатрисами системы. Между тѣмъ, для уравненія $F=0$ разсматриваемаго нами типа, очевидно, нѣтъ никакой разницы между всѣми точками пересѣченія касательной къ кривой K съ кривой J: если одна изъ такихъ касательныхъ t пересѣкаетъ кривую J въ точкахъ $A_1, A_2, \ldots A_n$, а симметричная ей касательная t'—въ діаметрально-противоположныхъ точкахъ $B_1, B_2, \ldots B_n$, то всякій пучокъ σ_i кривыхъ 2-го порядка, касающихся въ концахъ любого діаметра A_iB_i прямыхъ t и t', очевидно, принадлежитъ къ системѣ Σ, и уравненія (13) удовлетворяются для любой изъ кривыхъ пучка σ_i и координатъ точекъ A_i и B_i; пара прямыхъ t и t', принадлежащая къ системѣ Σ, очевидно, въ любой изъ паръ точекъ A_i, B_i находится въ двойномъ соприкосновеніи съ безконечно-близкой индикатрисой системы Σ (съ индикатрисой пучка σ_i, безконечно-близкой къ парѣ прямыхъ t и t'). Такимъ образомъ, если порядокъ кривой J больше двухъ, то мы приходимъ, повидимому, къ противорѣчію, о которомъ мы и упоминали выше. Противорѣчіе это легко разрѣшается, если замѣтимъ, что индикатриса системы Σ только въ *общемъ* случаѣ находится въ двойномъ соприкосновеніи съ *двумя* безконечно-близкими индикатрисами и что могутъ существовать и такія индикатрисы, которыя находится въ двойномъ соприкосновеніи съ бо̀льшимъ числомъ безконечно-близкихъ индикатрисъ системы Σ. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что для элемента 2-го порядка (x, y, z, p, q, r, s, t), кромѣ уравненія $F=0$ (1), имѣютъ мѣсто еще равенства

$$R=0, \quad S=0, \quad T=0; \qquad (14)$$

тогда для координатъ этого элемента равенство (9) обращается въ тождество, и слѣдовательно, мы уже не имѣемъ въ этомъ случаѣ одной пары опредѣленныхъ прямыхъ, которыя бы пересѣченіемъ своимъ съ индикатрисой элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) опредѣляли точки двойного соприкосновенія съ безконечно-близкими индикатрисами системы Σ. Всѣ безконечно-близкія индикатрисы этой системы, соотвѣтствующія приращеніямъ δr, δs, δt, при существованіи равенствъ (14) опредѣляются, какъ не трудно усмотрѣть, соотношеніемъ (ср. гл. III, § 2, стр. 228).

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\delta r^2+\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\delta s^2+\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\delta t^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial s}\delta r\delta s+2\frac{\partial^2 F}{\partial s\partial t}\delta s\delta t+2\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial r}\delta t\delta r=0. \tag{15}$$

если только частныя производныя 2-го порядка F по r, s, t не обращаются всѣ въ нуль для элемента (x, y, z, p, q, r, s, t). Для индикатрисъ, находящихся въ двойномъ соприкосновеніи съ индикатрисой даннаго элемента, имѣемъ

$$\delta r\delta t-\delta s^2=0$$

(ср. гл. III, § 2, стр. 229), а слѣдовательно отношеніе

$$\frac{\delta r}{\delta s}=\frac{\delta s}{\delta t}=\mu$$

опредѣляется для этихъ индикатрисъ изъ равенства

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\mu^4+2\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial s}\mu^3+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial t}\right)\mu^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial s\partial t}\mu+\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=0. \tag{16}$$

Уравненіе проэкціи на плоскость xy діаметра двойного соприкосновенія индикатрисы даннаго элемента и индикатрисы элемента $(x, y, z, p, q, r+\delta r, s+\delta s, t+\delta t)$ можетъ быть написано

$$\frac{\eta-y}{\xi-x}=-\frac{\delta r}{\delta s}=-\frac{\delta s}{\delta t}=-\mu \tag{17}$$

(ср. гл. III, § 2, стр. 229, рав. 66), а слѣдовательно, діаметры двойного соприкосновенія индикатрисы элемента (x, y, z, p, q, r, s, t), удовлетворяющаго данному уравненію (1) и уравненіямъ (14), опредѣляются уравненіемъ

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\eta-y)^4-2\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial s}(\eta-y)^3(\xi-x)+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial r}\right)(\eta-y)^2(\xi-x)^2-$$
$$-2\frac{\partial^2 F}{\partial s\partial t}(\eta-y)(\xi-x)^3+\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(\xi-x)^4=0, \tag{18}$$

если только оно не обращается для даннаго элемента въ тождество, подобно уравненію (9); въ этомъ послѣднемъ случаѣ разложеніе въ рядъ Taylor-а функціи

$$F(x, y, z, p, q, r+\delta r, s+\delta s, t+\delta t),$$

которое дало намъ уравненія (9) и (18), слѣдуетъ вести дальше—до членовъ 3-го порядка включительно, и т. д. Если уравненіе (18) не обращается въ тождество, то индикатриса элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) соприкасается, очевидно, вообще говоря, съ *четырьмя* безконечно-близкими индикатрисами системы Σ въ четырехъ парахъ діаметрально-противоположныхъ точекъ; если уравненіе (16) имѣетъ 1 двукратный корень, то получимъ *три* различныхъ безконечно-близкихъ индикатрисы, находящихся въ двойномъ соприкосновеніи съ индикатрисой даннаго элемента, и слѣдовательно *три* пары діаметрально-противоположныхъ точекъ на индикатрисѣ элемента (x, y, z, p, q, r, s, t), въ которыхъ она соприкасается съ безконечно-близкими индикатрисами системы Σ. Если уравненіе (18), подобно уравненію (9), обращается въ тождество для элемента (x, y, z, p, q, r, s, t), то можемъ получить и бо́льшее число паръ діаметрально-противоположныхъ точекъ соприкосновенія индикатрисы элемента съ безконечно-близкими индикатрисами системы Σ. Парадоксъ, къ которому мы пришли, разрѣшается, на основаніи выше изложеннаго, слѣдующимъ образомъ: если порядокъ кривой J, опредѣляющей вмѣстѣ съ кривой K уравненіе $F=0$ разсматриваемаго нами типа, выше двухъ, то элементы 2-го порядка, индикатрисами которыхъ служатъ пары прямыхъ системы Σ, необходимо принадлежать къ числу тѣхъ исключительныхъ элементовъ, для которыхъ кромѣ уравненія $F=0$ удовлетворяются уравненія

$$R=0,\quad S=0,\quad T=0. \tag{14}$$

Кривая J въ этомъ случаѣ уже не можетъ опредѣляться уравненіями (10), такъ какъ послѣднее изъ нихъ обращается въ тождество $0=0$, но геометрическое опредѣленіе кривой J, очевидно, остается въ силѣ. Уравненіе проэкціи этой кривой на плоскость xy можемъ найти, исключая r, s, t изъ трехъ первыхъ уравненій (10) и уравненія (18) или уравненія, замѣняющаго это послѣднее, когда и оно обращается въ тождество. Особенно просто можно найти уравненія кривой J для уравненія $F=0$ разсматриваемаго нами типа, пользуясь другимъ ея опредѣленіемъ, какъ геометрическаго мѣста концовъ діаметровъ двойного соприкосновенія пучковъ σ, входящихъ въ систему Σ.

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ уравненій, допускающихъ систему характеристическихъ многообразій 1-го порядка, опредѣляемыхъ тремя дифференціальными уравненіями. При этомъ будемъ, согласно предыдущему, опредѣлять каждое такое уравненіе $F=0$ по даннымъ кривымъ J и K.

Примѣръ 1. Пусть кривыя J и K—коническія сѣченія имѣющія центры въ точкѣ (x, y, z). Проэкціи J и K на плоскость xy будутъ тогда коническія сѣченія съ центрами въ точкѣ (x, y). Уравненіе проэкціи кривой J предполагаемъ въ видѣ

$$A(\xi-x)^2+2B(\xi-x)(\eta-y)+C(\eta-y)^2=Uk\sqrt{1+p^2+q^2}. \tag{19}$$

уравненіе проэкціи K въ линейныхъ координахъ u, v — въ видѣ

$$Lu^2+2Muv+Nv^2=\frac{V}{k\sqrt{1+p^2+q^2}}; \tag{20}$$

члены 1-го измѣренія относительно $(\xi-x)$, $(\eta-y)$, u, v, очевидно, должны отсутствовать въ томъ и другомъ уравненіи: величины A, B, C, U, L, M, N, V — нѣкоторыя функціи x, y, z, p, q. Для удобства, разности $\xi-x$, $\eta-y$ будемъ обозначать вездѣ въ дальнѣйшемъ соотвѣтственно черезъ α и β. Тогда уравненія (13), изъ которыхъ получается искомое уравненіе $F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$ исключеніемъ ξ, η или, что безразлично, исключеніемъ α, β, принимаютъ въ данномъ случаѣ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2&=k\sqrt{1+p^2+q^2}\\ A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2&=Uk\sqrt{1+p^2+q^2}\\ L(r\alpha+s\beta)^2+2M(r\alpha+s\beta)(s\alpha+t\beta)+N(s\alpha+t\beta)^2&=Vk\sqrt{1+p^2+q^2}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Вычитая изъ 2-го и 3-го уравненій 1-е, по умноженіи его соотвѣтственно на U и V, получимъ систему двухъ однородныхъ уравненій 2-й степени, которую можно написать

$$\left.\begin{aligned} f_1-Uf_3&=0\\ f_2-Vf_3&=0, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

полагая

$$\left.\begin{aligned} f_1&=A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2;\\ f_2&=L(r\alpha+s\beta)^2+2M(r\alpha+s\beta)(s\alpha+t\beta)+N(s\alpha+t\beta)^2=\\ &=[Lr^2+2Mrs+Ns^2]\alpha^2+2[Lrs+M(rt+s^2)+Nst]\alpha\beta+[Ls^2+2Mst+Nt^2]\beta^2;\\ f_3&=r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Лѣвая часть искомаго уравненія съ частными производными $F=0$ будетъ результантомъ R лѣвыхъ частей системы (22), т. е. результантомъ бинарныхъ квадратичныхъ формъ f_1-Uf_3, f_2-Vf_3. Какъ извѣстно, результантъ этотъ опредѣляется изъ равенства

$$R=\Theta^2-4\Delta\Delta', \tag{24}$$

гдѣ Δ и Δ' — дискриминанты формъ f_1-Uf_3, f_2-Vf_3, а Θ — ихъ общій гармоническій инваріантъ, который черезъ коэффиціенты a_{ik} и b_{ik} двухъ формъ выражается слѣдующимъ образомъ:

$$\Theta=a_{11}b_{22}-a_{22}b_{11}-2a_{12}b_{12}; \tag{25}$$

при этомъ двѣ формы предполагаемъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{aligned} &a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2,\\ &b_{11}\alpha^2+2b_{12}\alpha\beta+b_{22}\beta^2. \end{aligned}$$

Каждая изъ данныхъ формъ имѣетъ видъ разности двухъ формъ, и не трудно убѣдиться, что инваріантъ Θ можетъ быть выраженъ черезъ общіе инваріанты формъ f_1, f_2, f_3, а именно:

$$\Theta=\Theta_{12}-U\Theta_{23}-V\Theta_{31}+2UV\Delta_3, \tag{26}$$

гдѣ Θ_{12}, Θ_{23}, Θ_{31} — гармоническіе инваріанты формъ f_1 и f_2, f_2 и f_3, f_3 и f_1, а Δ_3 — дискриминантъ формы f_3. Равнымъ образомъ найдемъ слѣдующія выраженія для Δ и Δ':

$$\left.\begin{aligned} \Delta&=\Delta_1-U\Theta_{31}+U^2\Delta_3\\ \Delta'&=\Delta_2-V\Theta_{23}+V^2\Delta_3. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

гдѣ Δ_1, Δ_2 — дискриминанты формъ f_1 и f_2, а Δ_3, Θ_{31}, Θ_{23} имѣютъ прежнее значеніе. Инваріанты Θ_{31}, Δ_1, Δ_3 находимъ непосредственно, примѣняя формулу (25) и извѣстную формулу, выражающую дискриминантъ квадратичной формы черезъ ея коэффиціенты. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_{31}&=Cr-2Bs+At\\ \Delta_1&=AC-B^2\\ \Delta_3&=rt-s^2. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Для вычисленія Δ_2 замѣчаемъ, что форма f_2 можетъ быть разсматриваема какъ результатъ линейной подстановки $\begin{pmatrix} r, & s\\ s, & t \end{pmatrix}$, произведенной надъ формой $L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2$; на основаніи извѣстнаго свойства дискриминанта отсюда слѣдуетъ, что

$$\Delta_2 = (LN - M^2)(rt - s^2)^2. \tag{29}$$

Для вычисленія Θ_{12} и Θ_{22} замѣчаемъ, что форму f_2 можно представить въ видѣ разности:

$$f_2 = (Lr + 2Ms + Nt)(r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2) - (rt - s^2)(N\alpha^2 - 2M\alpha\beta + L\beta^2);$$

полагая

$$N\alpha^2 - 2M\alpha\beta + L\beta^2 = f_0, \tag{30}$$

можемъ иначе написать

$$f_2 = \Theta_{30}f_3 - \Delta_3 f_0, \tag{31}$$

гдѣ Θ_{30} — гармоническій инваріантъ формъ f_3 и f_0. Инваріанты Θ_{12} и Θ_{22} выражаются черезъ инваріанты формъ f_1, f_3, f_0, а именно, какъ не трудно убѣдиться:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_{12} &= \Theta_{30}\Theta_{31} - \Delta_3\Theta_{01} \\ \Theta_{22} &= 2\Theta_{30}\Delta_3 - \Delta_3\Theta_{30} = \Theta_{30}\Delta_3. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Наконецъ, непосредственно имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} \Theta_{30} &= Lr + 2Ms + Nt \\ \Theta_{01} &= LA + 2MB + NC. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Окончательно, получимъ для Θ, Δ, Δ' слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= \Theta_{30}\Theta_{31} - U(rt-s^2)\Theta_{30} - V\Theta_{31} + 2G(rt - s^2) \\ \Delta &= -U\Theta_{31} + U^2(rt - s^2) + (AC - B^2) \\ \Delta' &= (rt - s^2)[-V\Theta_{30} + (LN - M^2)(rt - s^2) + V^2], \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

гдѣ для краткости сохранены обозначенія Θ_{30} и Θ_{31}, опредѣляемыя первыми изъ равенствъ (33) и (28), и кромѣ того введено обозначеніе

$$2G = 2UV - LA - 2MB - NC. \tag{35}$$

Искомое уравненіе имѣетъ видъ

$$\Theta^2 - 4\Delta\Delta' = 0, \tag{36}$$

гдѣ Θ, Δ, Δ' опредѣляются изъ равенствъ (34).

Дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій 1-го порядка уравненія (36) найдемъ, выражая аналитически извѣстныя геометрическія соотношенія, существующія между касательной къ кривой C характеристическаго многообразія, образующей развертывающейся поверхности D этого многообразія и радіусомъ кривизны нормальнаго сѣченія поверхности D съ одной стороны и кривыми J и K — съ другой. Такъ какъ намъ даны уравненія *проэкцій* кривыхъ J и K на плоскость xy, то удобнѣе выразить эти соотношенія въ такой формѣ: проэкція касательной къ C на плоскость xy пересѣкаетъ проэкцію кривой J въ точкѣ, черезъ которую проходитъ касательная къ проэкціи кривой K, параллельная проэкціи образующей поверхности D; радіусъ кривизны нормальнаго сѣченія поверхности D по направленію касательной къ C равенъ $\frac{a'^2}{k\cos^2\psi}$, гдѣ a'—длина полудіаметра проэкціи кривой J, имѣющаго направленіе проэкціи касательной къ C, а ψ — уголъ касательной къ C съ плоскостью xy. Уравненія касательной къ C, очевидно, слѣдующія:

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz};$$

проэкція на плоскость xy опредѣляется уравненіемъ

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy}. \tag{37}$$

Уравненія образующей поверхности D были выведены нами въ главѣ I-й (§ 3, стр. 61, рав. 83); они имѣютъ слѣдующій видъ:

$$\frac{\xi - x}{-dq} = \frac{\eta - y}{dp} = \frac{\zeta - z}{qdp - pdq};$$

проэкція образующей на плоскость xy опредѣляется, очевидно, уравненіемъ

$$\frac{\xi - x}{-dq} = \frac{\eta - y}{dp} \tag{38}$$

или

$$dp(\xi - x) + dq(\eta - y) = 0. \tag{38'}$$

Дифференціалы dx, dy, dz, dp, dq вездѣ взяты въ предположеніи, что x, y, z, p, q выражены въ функціи одного параметра въ силу уравненій характеристическаго многообразія.

Радіусъ кривизны ρ нормальнаго сѣченія произвольной поверхности

$$\zeta = \zeta(\xi,\ \eta)$$

имѣетъ, какъ извѣстно, слѣдующее выраженіе *)

$$\rho = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2}\cdot(d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2)}{\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}d\xi^2+2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\partial\eta}d\xi d\eta+\frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2}d\eta^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2}\cdot(d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2)}{d\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right).d\xi+d\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right).d\eta}.$$

Для нашей развертывающейся поверхности D имѣемъ, очевидно, $\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}=p$, $\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}=q$, такъ какъ касательными плоскостями ея служатъ плоскости элементовъ характеристическаго многообразія; далѣе для нормальнаго сѣченія по направленію касательной къ кривой C слѣдуетъ взять, очевидно, $d\xi=dx$, $d\eta=dy$, $d\zeta=dz$, и слѣдовательно, окончательно имѣемъ для радіуса кривизны ρ нормальнаго сѣченія поверхности D по направленію касательной къ C слѣдующее выраженіе:

$$\rho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}.(dx^2+dy^2+dz^2)}{dpdx+dqdy}, \tag{39}$$

гдѣ dx, dy, dz, dp, dq имѣютъ указанное выше значеніе.

Если черезъ a' обозначимъ полудіаметръ проэкціи кривой J, имѣющій направленіе проэкціи (37) касательной къ C, то для координатъ ξ_0, η_0 конца этого полудіаметра имѣемъ, очевидно:

$$\xi_0 - x = a'\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}};\quad \eta_0 - y = a'\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

*) См. напр. Knoblauch, Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen, Abschn. I, § 16.

Подставляя эти значенія $\xi_0 - x$, $\eta_0 - y$ въ уравненіе (19) проэкціи J, получаемъ выраженіе квадрата полудіаметра a'

$$a'^2 = \frac{Uk\sqrt{1+p^2+q^2}.(dx^2+dy^2)}{Adx^2+2Bdxdy+Cdy^2} \tag{40}$$

и слѣдовательно для координатъ ξ_0, η_0 конца этого полудіаметра выраженія

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= x + dx.\frac{\sqrt{Uk}.\sqrt[4]{1+p^2+q^2}}{\sqrt{Adx^2+2Bdxdy+Cdy^2}} \\ \eta_0 &= y + dy.\frac{\sqrt{Uk}.\sqrt[4]{1+p^2+q^2}}{\sqrt{Adx^2+2Bdxdy+Cdy^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Уравненіе прямой, проходящей черезъ точку $(\xi_0,\ \eta_0)$ параллельно проэкціи (38') образующей поверхности D, очевидно, слѣдующее:

$$dp(\xi-\xi_0)+dq(\eta-\eta_0)=0,$$

или, по подстановкѣ значеній (41) ξ_0 и η_0,

$$dp(\xi - x)+dq(\eta - y) = (dpdx+dqdy).\frac{\sqrt{Uk}.\sqrt[4]{1+p^2+q^2}}{\sqrt{Adx^2+2Bdxdy+Cdy^2}}; \tag{42}$$

координаты u, v этой прямой, какъ коэффиціенты ея уравненія, предполагаемаго въ видѣ

$$u(\xi - x)+v(\eta - y) = 1,$$

имѣютъ слѣдующія значенія:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{dp.\sqrt{Adx^2+2Bdxdy+Cdy^2}}{(dpdx+dqdy)\sqrt{Uk}.\sqrt[4]{1+p^2+q^2}} \\ v &= \frac{dq.\sqrt{Adx^2+2Bdxdy+Cdy^2}}{(dpdx+dqdy)\sqrt{Uk}.\sqrt[4]{1+p^2+q^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Наконецъ, послѣдняя величина, которая намъ потребуется, есть $cos^2\psi$, гдѣ ψ — уголъ касательной къ кривой C съ плоскостью xy. Очевидно

$$cos\psi = sin\gamma,$$

гдѣ γ — уголъ той же касательной съ осью z; слѣдовательно,

$$cos^2\psi = sin^2\gamma = 1 - cos^2\gamma;$$

но изъ уравненій касательной слѣдуетъ

$$\cos\gamma = \frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}};$$

такимъ образомъ

$$\cos^2\psi = 1 - \frac{dz^2}{dx^2+dy^2+dz^2} = \frac{dx^2+dy^2}{dx^2+dy^2+dz^2}. \qquad (44)$$

Дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій 1-го порядка уравненія (36) получимъ, по предыдущему, выражая, что прямая, координаты которой опредѣляются равенствами (43), касается кривой (20) и что радіусъ кривизны ρ, опредѣляемый равенствомъ (39), равняется $\frac{a'^2}{k\cos^2\psi}$, гдѣ a'^2 опредѣляется равенствомъ (40), а $\cos^2\psi$ — равенствомъ (44). Такимъ образомъ, получимъ два искомыхъ дифференціальныхъ уравненія

$$(Ldp^2+2Mdpdq+Ndq^2)(Adx^2+2Bdxdy+Cdy^2) = UV(dpdx+dqdy)^2$$
$$Adx^2+2Bdxdy+Cdy^2 = U(dpdx+dqdy).$$

или въ болѣе простомъ видѣ

$$\left.\begin{aligned} Ldp^2+2Mdpdq+Ndq^2 &= V(dpdx+dqdy) \\ Adx^2+2Bdxdy+Cdy^2 &= U(dpdx+dqdy). \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

Къ этимъ уравненіямъ, понятно, надо еще присоединить уравненіе

$$dz - pdx - qdy = 0, \qquad (45')$$

выражающее, что поверхность D описана около кривой C.

Примѣръ 2. Разсмотримъ частный случай предыдущаго уравненія, а именно: пусть коническое сѣченіе J распадается на пару параллельныхъ прямыхъ, равно отстоящихъ отъ точки (x, y, z), а коническое сѣченіе K—на пару точекъ, симметричныхъ относительно (x, y, z). Согласно замѣчанію, сдѣланному выше (стр. 248), мы можемъ вмѣсто уравненій проэкцій кривыхъ J и K взять уравненіе проэкціи одной изъ прямыхъ, входящихъ въ составъ J, и уравненіе проэкціи одной изъ точекъ, входящихъ въ составъ K; составляя систему (13) для этихъ уравненій и исключая $\xi - x$ и $\eta - y$, получимъ искомое уравненіе съ частными производными. При этомъ однако возможно или взять 1-ю точку и 1-ю прямую, или 1-ю точку и 2-ю прямую, или 2-ю точку и 2-ю прямую, или, наконецъ, 2-ю точку и 1-ю прямую: первое и третье а также второе и четвертое сочетанія, очевидно, приведутъ къ одинаковымъ уравненіямъ, такъ какъ они взаимно симметричны относительно (x, y, z); слѣдовательно, получимъ всего два различныхъ уравненія $F_1(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ и $F_2(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$. Если бы мы прямо стали рѣшать задачу для пары прямыхъ J и пары точекъ K, другими словами, если бы въ уравненіе (36) предшествующаго примѣра подставили значенія L, M, N, U, A, B, C, V, соотвѣтствующія разсматриваемому случаю, то получили бы распадающееся уравненіе $F=0$, которое дало бы намъ тѣ же два уравненія $F_1 = 0$, $F_2 = 0$.

Пусть въ частности уравненіе проэкціи одной изъ прямыхъ пары J

$$\eta - y = \gamma\sqrt{k}\,.\sqrt[4]{1+p^2+q^2}, \qquad (46)$$

или, согласно введенному обозначенію,

$$\beta = \gamma\sqrt{k}\,.\sqrt[4]{1+p^2+q^2},$$

а уравненіе проэкціи одной изъ точекъ пары K

$$v = \frac{c}{\sqrt{k}\,.\sqrt[4]{1+p^2+q^2}}. \qquad (47)$$

Уравненія симметричныхъ имъ прямой и точки получаются замѣной γ черезъ $-\gamma$ и c черезъ $-c$. Система (13) принимаетъ видъ

$$r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = k\sqrt{1+p^2+q^2}$$
$$\beta = \gamma\sqrt{k}\,.\sqrt[4]{1+p^2+q^2}$$
$$s\alpha + t\beta = c\sqrt{k}\,.\sqrt[4]{1+p^2+q^2}.$$

Исключая α и β, получаемъ уравненіе

$$F_1 = c^2r - s^2 + (\gamma^2t - 2\gamma c)(rt - s^2) = 0. \qquad (48)$$

Если замѣнимъ здѣсь c черезъ $-c$ и γ черезъ $-\gamma$, то, какъ и слѣдовало ожидать, уравненіе не измѣнится; замѣняя c черезъ $-c$ и сохраняя γ или поступая наоборотъ, получимъ уравненіе

$$F_2 = c^2r - s^2 + (\gamma^2t + 2\gamma c)(rt - s^2) = 0. \qquad (48')$$

Уравненіе $F=0$, распадающееся на $F_1=0$ и $F_2=0$, очевидно, имѣетъ слѣдующій видъ:

$$F = [c^2r - s^2 + \gamma^2t(rt - s^2)]^2 - 4\gamma^2c^2(rt - s^2)^2 = 0; \qquad (49)$$

c и γ здѣсь нѣкоторыя функціи x, y, z, p, q. Уравненія проэкціи пары прямыхъ J и пары точекъ K, очевидно, имѣють видъ

$$(\eta - y)^2 = \gamma^2 k\sqrt{1+p^2+q^2}$$

$$v^2 = \frac{c^2}{k\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

сравнивая ихъ съ уравненіями (19) и (20) предшествующаго примѣра имѣемъ

$$A=0,\ B=0,\ C=1,\ U=\gamma^2,\ L=0,\ M=0,\ N=1,\ V=c^2;$$

слѣдовательно, изъ уравненій (45) получаемъ дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій 1-го порядка въ данномъ случаѣ:

$$\left.\begin{aligned} dq^2 &= c^2(dpdx+dqdy) \\ dy^2 &= \gamma^2(dpdx+dqdy). \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Примѣръ 3. Пусть кривая J есть прямая, проходящая черезъ точку (x, y, z) и пусть уравненіе ея проэкціи на плоскость xy есть

$$\eta - y = \mu(\xi - x) \tag{51}$$

или

$$\beta = \mu\alpha, \tag{51'}$$

если по прежнему полагаемъ $\xi - x = \alpha$, $\eta - y = \beta$; μ есть нѣкоторая функція x, y, z, p, q. Система Σ индикатрисъ въ данномъ случаѣ состоитъ изъ пучковъ σ, имѣющихъ діаметромъ двойного соприкосновенія прямую J, а общими касательными—касательныя кривой K. Если предположимъ, что кривая K есть коническое сѣченіе и уравненіе проэкціи K на плоскость xy въ линейныхъ координатахъ есть

$$Lu^2 + 2Muv + Nv^2 = \frac{V}{k\sqrt{1+p^2+q^2}}, \tag{52}$$

то искомое уравненіе съ частными производными получимъ, исключая α и β изъ системы

$$r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = k\sqrt{1+p^2+q^2}$$

$$\beta = \mu\alpha$$

$$L(r\alpha + s\beta)^2 + 2M(r\alpha+s\beta)(s\alpha+t\beta) + N(s\alpha+t\beta)^2 = Vk\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Оно имѣетъ слѣдующій видъ

$$L(r+\mu s)^2 + 2M(r+\mu s)(s+\mu t) + N(s+\mu t)^2 = V(r+2\mu s+\mu^2 t). \tag{53}$$

или иначе:

$$\begin{aligned} Lr^2 + (L\mu^2 + 2M\mu + N)s^2 + N\mu^2 t^2 + 2(L\mu + M)rs + 2(M\mu^2 + N\mu)st + \\ + 2M\mu rt = Vr + 2V\mu s + V\mu^2 t. \end{aligned} \tag{53'}$$

Такъ какъ всѣ пучки σ системы Σ имѣютъ діаметромъ двойного соприкосновенія прямую J, то одно изъ дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій 1-го порядка получимъ, выражая, что проэкція на плоскость xy касательной къ кривой C характеристическаго многообразія совпадаетъ съ прямой (51); уравненіе это, очевидно, слѣдующее

$$dy = \mu dx. \tag{54}$$

Второе дифференціальное уравненіе получимъ, выражая, что прямая, параллельная проэкціи образующей развертывающейся поверхности D характеристическаго многообразія и отсѣкающая на прямой (51) отъ точки (x, y, z) отрѣзокъ, квадратъ котораго равенъ $k\rho\cos^2\psi$, гдѣ ρ и ψ имѣютъ обычное *) значеніе, касается проэкціи (52) кривой K. Пользуясь общими выраженіями ρ, $\cos^2\psi$, а также уравненіемъ проэкціи образующей поверхности D, данными выше (см. примѣръ 1-й, рав. 38', 39, 44), напишемъ уравненіе искомой прямой

$$dp(\xi - x) + dq(\eta - y) = \sqrt{k}\,.\sqrt[4]{1+p^2+q^2}\,.\sqrt{(dp+\mu dq)dx},$$

найдемъ ея координаты u и v и наконецъ, выражая, что эта прямая касается кривой (52), получимъ дифференціальное уравненіе

$$Ldp^2 + 2Mdpdq + Ndq^2 = V(dp+\mu dq)dx, \tag{55}$$

которое, въ силу уравненія (54) можно иначе представить въ видѣ

$$Ldp^2 + 2Mdpdq + Ndq^2 = V(dpdx + dqdy). \tag{55'}$$

Третье дифференціальное уравненіе характеристическихъ многообразій есть, какъ всегда, уравненіе

$$dz - pdx - qdy = 0.$$

*) ρ — радіусъ кривизны нормальнаго сѣченія поверхности D по направленію касательной къ C; ψ — уголъ касательной съ плоскостью xy.

Не трудно видѣть, что уравненія (54) и (55′) получаются изъ уравненій (45) примѣра 1-го, если положимъ въ нихъ $U=0$, $A=\mu^2$, $B=-\mu$, $C=1$; при этомъ именно предположеніи кривая J обращается въ двукратно взятую прямую, проэкція которой на плоскость xy представляется уравненіемъ

$$\eta - y = \mu(\xi - x),$$

и, слѣдовательно, приходимъ дѣйствительно къ уравненію примѣра 3-го.

Полагая въ частности $L=0$, $M=0$, $\mu=0$, получаемъ изъ (53) очень простое уравненіе

$$Ns^2 = Vr. \tag{56}$$

для котораго дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій (54) и (55) принимаютъ видъ

$$\left.\begin{array}{l} dy = 0 \\ Ndq^2 = Vdpdx. \end{array}\right\} \tag{57}$$

Кривая K для уравненія (56) распадается, очевидно, на пару точекъ, и его можно, слѣдовательно, разсматривать какъ частный случай уравненій, съ которыми мы имѣли дѣло въ примѣрѣ 2-мъ.

Если $N=V=1$, то уравненіе (56) принимаетъ видъ:

$$r = s^2, \tag{58}$$

дифференціальныя уравненія его характеристическихъ многообразій 1-го порядка:

$$\left.\begin{array}{l} dy = 0 \\ dq^2 = dpdx. \end{array}\right\} \tag{59}$$

Изъ 1-го слѣдуетъ $y = const.$; слѣдовательно, кривыя C характеристическихъ многообразій — плоскія, лежащія въ плоскостяхъ параллельныхъ плоскости zx. Видъ такой плоской кривой можно взять произвольно: полагая, напримѣръ $z=\varphi(x)$, гдѣ φ — произвольная функція, изъ уравненія

$$dz - pdx - qdy = 0$$

получимъ $p=\varphi'(x)$ и затѣмъ изъ 2-го уравненія (59) $\left(\frac{dq}{dx}\right)^2 = \frac{dp}{dx} = \varphi''(x)$, откуда

$$q = \int\sqrt{\varphi''(x)}.dx.$$

Примѣръ 4. Пусть кривая K обращается въ одну точку. Такъ какъ кривая K должна быть симметрична относительно точки (x, y, z), то она можетъ, очевидно, обратиться лишь въ одну или нѣсколько паръ точекъ на конечномъ разстояніи, симметричныхъ относительно (x, y, z); если же она обращается въ *одну* точку, то эта точка необходимо должна находиться въ безконечности. Уравненіе проэкціи этой безконечно-удаленной точки на плоскость xy, въ линейныхъ координатахъ u, v имѣетъ видъ

$$au + bv = 0: \tag{60}$$

дѣйствительно, сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ произвольной точки (ξ, η)

$$(\xi - x)u + (\eta - y)v = 1,$$

получаемъ въ данномъ случаѣ $\xi - x = \infty$, $\eta - y = \infty$, при чемъ $(\xi - x) : (\eta - y) = a : b$, т. е. точка, опредѣляемая уравненіемъ (60) есть безконечно-удаленная точка прямой

$$\frac{\xi - x}{a} = \frac{\eta - y}{b}, \tag{61}$$

или

$$b(\xi - x) - a(\eta - y) = 0. \tag{61′}$$

Общія касательныя пучковъ σ, входящихъ въ составъ системы Σ, въ данномъ случаѣ должны проходить черезъ безконечно-удаленную точку K, т. е. должны быть параллельны прямой, проэкція которой опредѣляется уравненіемъ (61′): на этомъ основаніи, проэкція образующей развертывающейся поверхности D характеристическаго многообразія должна быть параллельна прямой (61′), откуда непосредственно получаемъ одно изъ дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій 1-го порядка, сравнивая уравненіе (61′) съ уравненіемъ (38′), даннымъ въ 1-мъ примѣрѣ; дифференціальное уравненіе это имѣетъ, очевидно, слѣдующій видъ:

$$dp : dq = b : -a, \tag{62}$$

или

$$adp + bdq = 0. \tag{62′}$$

Второе изъ дифференціальныхъ уравненій получимъ, выражая, что квадратъ полудіаметра проэкціи кривой J, параллельнаго проэкціи касательной къ кривой C характеристическаго многообразія, равенъ $k\rho\cos^2\psi$, гдѣ ρ, какъ всегда, радіусъ кривизны нормальнаго сѣченія поверхности D по направленію касательной къ C, а ψ — уголъ этой касательной съ плоскостью xy. На основаніи формулъ (39) и (44), данныхъ въ примѣрѣ 1-мъ,

$$k\rho \cos^2\psi = \frac{k\sqrt{1+p^2+q^2}.(dx^2+dy^2)}{dpdx+dqdy}. \qquad (63)$$

Если предположимъ, что кривая J—коническое сѣченіе, уравненіе проэкціи котораго

$$A(\xi-x)^2+2B(\xi-x)(\eta-y)+C(\eta-y)^2=Uk\sqrt{1+p^2+q^2}, \qquad (64)$$

то, на основаніи формулы (40) примѣра 1-го, квадратъ полудіаметра, о которомъ упоминали,

$$a'^2 = \frac{Uk\sqrt{1+p^2+q^2}.(dx^2+dy^2)}{Adx^2+2Bdxdy+Cdy^2},$$

и слѣдовательно, второе дифференціальное уравненіе

$$Adx^2+2Bdxdy+Cdy^2 = U(dpdx+dqdy) \qquad (65)$$

совпадаетъ со 2-мъ изъ дифференціальныхъ уравненій (45) 1-го примѣра. Дифференціальное уравненіе (62′) получается, очевидно, изъ 1-го уравненія (45), если положимъ $V=0$, $L=a^2$, $M=ab$, $N=b^2$, т. е. если предположимъ, что коническое сѣченіе K обращается въ двукратно-взятую безконечно-удаленную точку, уравненіе проэкціи которой на плоскость xy есть

$$au+bv=0. \qquad (60)$$

Само уравненіе съ частными производными $F=0$ получимъ, исключая $\alpha=\xi-x$ и $\beta=\eta-y$ изъ системы:

$$\begin{gathered} r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2=k\sqrt{1+p^2+q^2} \\ A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2=Uk\sqrt{1+p^2+q^2} \\ a(r\alpha+s\beta)+b(s\alpha+t\beta)=0. \end{gathered}$$

По исключеніи, имѣемъ

$$\begin{aligned} F=(A-Ur)(as+bt)^2-2(B-Us)(as+bt)(ar+bs)+ \\ +(C-Ut)(ar+bs)^2=0. \end{aligned} \qquad (66)$$

Полагая въ частности $a=0$, $b=1$, $A=0$, $B=0$, $C=1$, получаемъ уравненіе

$$s^2=Ut(rt-s^2); \qquad (67)$$

система Σ для этого уравненія проэктируется на плоскость xy системой, состоящей изъ пучковъ, діаметры двойного соприкосновенія которыхъ имѣютъ концы на двухъ прямыхъ, параллельныхъ оси ξ, и общія касательныя которыхъ параллельны оси η. Дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій имѣютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} dq&=0 \\ dy^2&=Udpdx \\ dz-pdx-qdy&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (68)$$

Если предположимъ, что кривая K есть кубическая парабола, проэкція которой на плоскость xy есть тоже кубическая парабола, опредѣляемая уравненіемъ

$$\eta-y=\frac{\mu}{k\sqrt{1+p^2+q^2}}(\xi-x)^3, \qquad (69)$$

гдѣ μ—нѣкоторая функція x, y, z, p, q, то уравненіе съ частными производными $F=0$ получается исключеніемъ α и β изъ системы

$$\begin{gathered} r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2=k\sqrt{1+p^2+q^2} \\ \beta=\frac{\mu}{k\sqrt{1+p^2+q^2}}\alpha^3 \\ a(r\alpha+s\beta)+b(s\alpha+t\beta)=0 \end{gathered}$$

и, слѣдовательно, имѣетъ видъ:

$$F=r(ar+bs)(as+bt)^2-2s(ar+bs)^2(as-bt)+t(ar+bs)^3+\mu(as+bt)^3=0. \qquad (70)$$

Квадратъ полудіаметра a'^2 опредѣлимъ, вставляя въ уравненіе (69) вмѣсто $\xi-x$ и $\eta-y$ соотвѣтственно $a'\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ и $a'\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$; получаемъ

$$a'^2=\frac{k\sqrt{1+p^2+q^2}.(dx^2+dy^2)dy}{\mu dx^3}.$$

и слѣдовательно, дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій 1-го порядка уравненія (70) имѣютъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} adp+bdq&=0 \\ \mu dx^2&=dy(dpdx+dqdy) \\ dz-pdx-qdy&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

Полагая въ частности $b=0$, $a=1$, получаемъ уравненіе

$$r^2(rt-s^2)+\mu s^3=0 \tag{72}$$

и дифференціальныя уравненія его характеристическихъ многообразій 1-го порядка

$$\left.\begin{aligned} dp &= 0 \\ \mu dx^2 &= dq dy^2 \\ dz - p dx - q dy &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

До сихъ поръ мы разсматривали уравненія съ частными производными, для которыхъ каждая индикатриса системы Σ принадлежитъ, вообще говоря, *одному* пучку σ индикатрисъ, находящихся въ двойномъ соприкосновеніи и принадлежащихъ тоже къ системѣ Σ. Возможны однако и такія уравненія, для которыхъ каждая индикатриса принадлежитъ *нѣсколькимъ* подобнымъ пучкамъ σ, а именно *двумъ*, такъ какъ мы видѣли выше, что для произвольнаго уравненія всякая индикатриса системы Σ находится, вообще говоря, въ двойномъ соприкосновеніи съ *двумя* безконечно-близкими индикатрисами той же системы. Если мы имѣемъ подобное уравненіе $F=0$, то изъ числа точекъ пересѣченія произвольной индикатрисы системы Σ съ соотвѣтствующей кривой J выдѣляются *двѣ* пары діаметрально-противоположныхъ, касательныя въ которыхъ къ индикатрисѣ касаются вмѣстѣ съ тѣмъ соотвѣтствующей кривой K; діаметры, опредѣляемые этими точками, служатъ діаметрами двойного соприкосновенія двухъ пучковъ σ и σ', въ составъ которыхъ входитъ разсматриваемая индикатриса. Система (13) для подобнаго уравненія должна, на основаніи изложеннаго, допускать *двѣ* пары общихъ рѣшеній; слѣдовательно, видъ функцій φ и ψ не можетъ быть произволенъ, а слѣдовательно и видъ кривыхъ J и K. Разсмотримъ произвольную индикатрису j, входящую въ составъ системы Σ и соотвѣтствующую элементу 2-го порядка (x, y, z, p, q, r, s, t): индикатриса эта входитъ въ составъ двухъ пучковъ σ и σ', имѣющихъ діаметрами двойного соприкосновенія соотвѣтственно линіи AA' и BB', если A и A', B и B'—пары діаметрально-противоположныхъ точекъ пересѣченія индикатрисы j съ кривой J. Изъ числа точекъ пересѣченія произвольной индикатрисы j_1 пучка σ съ кривой J, на основаніи изложеннаго, выдѣляются двѣ пары точекъ, а именно, точки A и A' и еще пара діаметрально-противоположныхъ точекъ C, C', служащихъ концами діаметра двойного соприкосновенія второго пучка σ'', въ составъ котораго входитъ индикатриса j_1. Черезъ точки C, C' проходитъ единственная индикатриса j_2 пучка σ', и такимъ образомъ—между пучками

σ и σ' устанавливается опредѣленное соотвѣтствіе: причемъ точки C, C' служатъ для j_2 концами діаметра двойного соприкосновенія съ индикатрисами второго пучка σ''', въ составъ котораго входитъ j_2. Чтобы въ этомъ убѣдиться, стоитъ взять индикатрису j_1 безконечно-близкой къ j: тогда точки C, C' будутъ, очевидно, безконечно-близки къ B, B', и индикатриса j_2 будетъ безконечно-мало отличаться отъ двукратно-взятой прямой BB'; для этой послѣдней оба діаметра двойного соприкосновенія съ безконечно-близкими индикатрисами системы Σ, очевидно, совпадаютъ съ діаметромъ BB': слѣдовательно, для индикатрисы j_2 второй діаметръ двойного соприкосновенія долженъ быть безконечно-близкимъ къ BB', а слѣдовательно онъ не можетъ отличаться отъ діаметра CC', такъ какъ діаметры, опредѣляемые остальными точками пересѣченія (если онѣ есть) индикатрисы j_2 съ кривой J, очевидно, не совпадаютъ въ предѣлѣ съ отрѣзкомъ BB', когда j_2 обращается въ двукратно-взятую прямую BB'. Такимъ образомъ, соотвѣтствіе, которое мы выше установили между индикатрисами пучковъ σ и σ', можно установить совершенно такъ же, исходя изъ 2-го пучка, и слѣдовательно, это соотвѣтствіе есть *взаимно*-однозначное, а слѣдовательно—проэктивное, такъ какъ пучки суть многообразія одного измѣренія. Геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія соотвѣтственныхъ кривыхъ 2-го порядка двухъ проэктивно-соотвѣтствующихъ пучковъ есть, вообще говоря, нѣкоторая кривая 4-го порядка U_4. Въ данномъ случаѣ легко убѣждаемся, что точки A, A', B, B' должны служить двойными точками этой кривой, а слѣдовательно она распадается на 2 кривыхъ 2-го порядка. Въ самомъ дѣлѣ, выше мы видѣли, что въ силу установленнаго соотвѣтствія индикатрисѣ j, какъ кривой пучка σ, соотвѣтствуетъ *двукратно*-взятая прямая BB'; точки B и B', такимъ образомъ, замѣняютъ каждая *двѣ* изъ четырехъ точекъ пересѣченія двухъ произвольныхъ соотвѣтственныхъ индикатрисъ пучковъ σ и σ' и, слѣдовательно, служатъ двойными точками упомянутаго геометрическаго мѣста U_4; равнымъ образомъ индикатрисѣ j, какъ кривой пучка σ', соотвѣтствуетъ двукратная прямая AA', откуда заключаемъ, что A и A' — тоже двойныя точки U_4. Въ составъ всего геометрическаго мѣста U_4 необходимо входитъ кривая J, которая есть геометрическое мѣсто концовъ діаметровъ двойного соприкосновенія всѣхъ пучковъ системы Σ: когда мы вмѣсто первоначально выбранной индикатрисы j возьмемъ какую-либо иную j', то точки A, A', B, B', въ которыхъ пересѣкаются двѣ кривыхъ 2-го порядка, составляющихъ геометрическое мѣсто U_4, измѣнятся, а слѣдовательно, по крайней мѣрѣ одна изъ этихъ кривыхъ 2-го порядка — составныхъ частей геометрическаго мѣста U_4 — необходимо должна измѣниться: съ другой стороны. такъ какъ въ составъ U_4 должна входить неизмѣнная кривая J. то вторая кривая 2-го порядка. составляющая вмѣстѣ съ первой кривую U_4. должна. очевидно. оставаться неизмѣнной, и эта неизмѣнная кривая 2-го порядка и есть кривая J системы Σ. Что касается до кривой K. то не трудно замѣтить. что роль ея по отношенію къ пучкамъ σ и σ' вполнѣ соотвѣтствуетъ по закону двойственности роли кривой J по отношенію къ тѣмъ же пучкамъ, которые. очевидно. по закону двойственности сами себѣ соотвѣтствуютъ (пучокъ σ есть вмѣстѣ съ тѣмъ система коническихъ сѣченій, имѣющихъ двѣ слившіяся пары общихъ касательныхъ): отсюда заключаемъ, что кривая K есть кривая 2-го класса. Такимъ образомъ. для уравненій разсматриваемаго типа кривыя J и K обѣ должны быть коническими сѣченіями. и слѣдовательно, уравненія эти должны принадлежать къ числу уравненій. разсмотрѣнныхъ въ примѣрѣ 1-мъ. Не трудно далѣе убѣдиться. что въ данномъ случаѣ коническія сѣченія J и K должны быть подобны и подобно расположены: въ самомъ дѣлѣ, асимптота кривой J, какъ одинъ изъ діаметровъ J. должна служить діаметромъ двойного соприкосновенія для нѣкотораго пучка σ, при чемъ концами этого діаметра должны служить точки пересѣченія асимптоты съ кривой J, т. е. безконечно-удаленная точка асимптоты: отсюда заключаемъ, что асимптота кривой J служитъ общей асимптотой всѣхъ индикатрисъ пучка σ. а слѣдовательно, въ качествѣ общей касательной пучка, она должна касаться кривой K: такъ какъ кривая K имѣетъ центръ въ точкѣ (x, y, z), черезъ которую проходитъ асимптота J. то, очевидно, эта послѣдняя служитъ вмѣстѣ съ тѣмъ асимптотой K. Итакъ. коническія сѣченія J и K имѣютъ общія асимптоты, а слѣдовательно, они подобны и подобно расположены. Обратно. если мы возьмемъ произвольное уравненіе. принадлежащее къ числу уравненій. разсмотрѣнныхъ въ 1-мъ примѣрѣ. для котораго коническія сѣченія J и K подобны и подобно расположены, то не трудно убѣдиться, что уравненіе это непремѣнно будетъ того типа, который мы въ настоящее время изслѣдуемъ. Другими словами, для произвольной индикатрисы системы Σ касательныя во всѣхъ *четырехъ* точкахъ пересѣченія ея съ коническимъ сѣченіемъ J касаются коническаго сѣченія K. если это послѣднее подобно J и подобно расположено (при произвольныхъ коническихъ сѣченіяхъ J и K, какъ мы знаемъ. изъ числа четырехъ точекъ пересѣченія произвольной индикатрисы съ J выдѣляется лишь *одна* пара діаметрально противоположныхъ точекъ. касательныя въ которыхъ къ индикатрисѣ касаются коническаго сѣченія K). Для доказательства возьмемъ произвольную индикатрису j системы Σ; въ числѣ четырехъ

точекъ ея пересѣченія A, A', B, B' съ кривой J необходимо есть одна пара точекъ, напр. A и A', касательныя въ которыхъ t и t' касаются кривой K, и въ составъ системы Σ входитъ весь пучокъ σ индикатрисъ. касающихся въ A и A' прямыхъ t и t'. Каждая изъ индикатрисъ пучка σ пересѣкаетъ кривую J въ точкахъ A и A' и еще въ парѣ точекъ B. B' (индикатриса j), B_1, B_1', B_2, B_2',.... и т. д.: въ этихъ точкахъ проведемъ къ индикатрисамъ касательныя u, u'. u_1, u_1'. u_2, u_2',...., которыя пересѣкаютъ касательныя t и t', очевидно, въ двухъ проэктивныхъ рядахъ точекъ и, слѣдовательно, облекаютъ нѣкоторое коническое сѣченіе G, касающееся t и t'. Любая изъ асимптотъ G. какъ касательная одной изъ индикатрисъ j' пучка σ, совмѣщающая въ себѣ двѣ параллельныхъ касательныхъ, служитъ для этой индикатрисы асимптотой. слѣдовательно проходитъ черезъ ея центръ $(x. y, z)$. а слѣдовательно есть вмѣстѣ съ тѣмъ асимптота кривой J, такъ какъ проходитъ черезъ ея центръ $(x, y. z)$ и пересѣкаетъ ее въ тѣхъ же двухъ точкахъ, какъ и индикатрису j', т. е. касается ея въ безконечно-удаленной точкѣ. Такимъ образомъ, коническое сѣченіе G подобно коническому сѣченію J и подобно расположено; такъ какъ кромѣ того G касается t и t'. которыхъ касается и K, то, очевидно, въ разсматриваемомъ нами случаѣ. когда K — подобно J и подобно расположено, коническое сѣченіе G совпадаетъ съ K, и слѣдовательно, касательныя u и u' къ произвольной индикатрисѣ j въ двухъ точкахъ пересѣченія B, B' ея съ коническимъ сѣченіемъ J точно также касаются коническаго сѣченія K. котораго касаются касательныя t и t' въ первой парѣ точекъ пересѣченія A и A'. Проэкціи коническихъ сѣченій J и K на плоскость xy. очевидно,—коническія сѣченія, тоже подобныя и подобно расположенныя; уравненіе проэкціи K въ линейныхъ координатахъ u, v мы предполагали въ видѣ (прим. 1, рав. 20):

$$Lu^2 + 2Muv + Nv^2 = \frac{V}{k\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

уравненіе этой же кривой въ точечныхъ координатахъ ξ. η, по извѣстному правилу, будетъ

$$N(\xi-x)^2 - 2M(\xi-x)(\eta-y) + L(\eta-y)^2 = \frac{(LN-M^2)k\sqrt{1+p^2+q^2}}{V}. \quad (74)$$

и слѣдовательно, въ томъ случаѣ, когда эта кривая подобна и подобно расположена съ проэкціей кривой J. опредѣляемой уравненіемъ (прим. 1. рав. 19)

$$A(\xi-x)^2 + 2B(\xi-x)(\eta-y) + C(\eta-y)^2 = Uk\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

мы должны имѣть

$$A : B : C = N : -M : L,$$

или, такъ какъ для насъ важны лишь отношенія $A : B : C : U$, то можемъ прямо взять

$$A = -N,\quad B = M,\quad C = -L. \tag{75}$$

Намъ остается въ уравненіи (36) примѣра 1-го замѣнить A, B, C ихъ значеніями (75); но не трудно замѣтить, что въ этомъ частномъ предположеніи лѣвая часть уравненія (36) содержитъ посторонній факторъ. Въ самомъ дѣлѣ, лѣвая часть

$$\Theta^2 - 4\Delta\Delta'$$

есть результантъ системы (22) (примѣръ 1); при равенствѣ нулю этого результанта возможно найти значеніе отношенія $(\xi - x) : (\eta - y)$, удовлетворяющее системѣ (22); если это отношеніе есть $m : n$, то, полагая

$$\xi - x = \lambda m,\quad \eta - y = \lambda n$$

и вставляя въ систему (21), увидимъ, что она приведется къ единственному уравненію

$$(rm^2 + 2smn + tn^2)\lambda^2 = k\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

изъ котораго, вообще говоря, найдемъ λ, а слѣдовательно $(\xi - x)$ и $(\eta - y)$; опредѣленіе λ становится невозможнымъ, если имѣемъ

$$rm^2 + 2smn + tn^2 = 0,$$

а слѣдовательно и

$$f_1 = 0,\quad f_2 = 0$$

(примѣръ 1, стр. 252) для $\alpha : \beta = (\xi - x) : (\eta - y) = m : n$. Такимъ образомъ, система (22) имѣетъ рѣшенія, которыя не даютъ рѣшеній системы (21), въ томъ случаѣ, когда система

$$f_1 = 0,\quad f_2 = 0,\quad f_3 = 0 \tag{76}$$

(см. примѣръ 1) совмѣстна. Выше мы имѣли выраженіе для f_2:

$$f_2 = \Theta_{30} f_3 - \Delta_3 f_0$$

(см. прим. 1, рав. 31); слѣдовательно, система (76) эквивалентна системѣ

$$f_1 = 0,\quad f_0 = 0,\quad f_3 = 0. \tag{77}$$

Въ нашемъ случаѣ

$$f_1 = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = -N\alpha^2 + 2M\alpha\beta - L\beta^2 = -f_0,$$

слѣдовательно, система (77) приводится къ двумъ уравненіямъ

$$f_0 = N\alpha^2 - 2M\alpha\beta + L\beta^2 = 0$$
$$f_3 = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = 0,$$

и результантъ этихъ двухъ формъ

$$R_{30} = \Theta^2_{30} - 4\Delta_3\Delta_0,$$

очевидно, долженъ входить факторомъ въ результантъ R системы (22); притомъ факторъ этотъ въ нашей задачѣ посторонній, такъ какъ рѣшенія системы (22), удовлетворяющія системѣ (77), не даютъ, какъ было упомянуто, рѣшеній системы (21). Въ силу условій (75), мы получили выше $f_1 = -f_0$; отсюда между прочимъ слѣдуетъ

$$\Theta_{31} = -\Theta_{30},\quad \Delta_1 = AC - B^2 = \Delta_0 = LN - M^2,$$
$$\Theta_{01} = -\Theta_{00} = -2\Delta_0 = -2(LN - M^2),$$

и слѣдовательно

$$2G = 2UV + 2\Delta_0 = 2[UV + (LN - M^2)].$$

Выраженія (34) для Θ, Δ, Δ' принимаютъ видъ:

$$\Theta = -\Theta^2_{30} - U\Delta_3\Theta_{30} + V\Theta_{30} + 2(UV + \Delta_0)\Delta_3$$
$$\Delta = U\Theta_{30} + U^2\Delta_3 + \Delta_0$$
$$\Delta' = \Delta_3\{-V\Theta_{30} + \Delta_0\Delta_3 + V^2\};$$

дѣлая подстановку, получаемъ

$$R = \Theta^2 - 4\Delta\Delta' = (\Theta^2_{30} - 4\Delta_3\Delta_0)(\Theta_{30} + U\Delta_3 - V)^2 = R_{30}(\Theta_{30} + U\Delta_3 - V)^2,$$

откуда, отбросивъ посторонній факторъ R_{30}, находимъ искомое уравненіе

$$F = \Theta_{30} + U\Delta_3 - V = 0,$$

или въ окончательномъ видѣ (см. примѣръ 1, рав. 28, 33)

$$F = Lr + 2Ms + Nt + U(rt - s^2) - V = 0. \tag{78}$$

Не трудно непосредственно убѣдиться, что для уравненія (78) кривыя J и K — подобныя и подобно-расположенныя коническія сѣченія: для этого стоитъ лишь составить для уравненія (78) системы (8) и (10) (см. выше стр. 244 и 245) и исключить изъ нихъ r, s, t; тогда получимъ уравненія проэкцій кривыхъ K и J соотвѣтственно въ видѣ

$$N(\xi-x)^2-2M(\xi-x)(\eta-y)+L(\eta-y)^2=\frac{(LN-M^2)k\sqrt{1+p^2+q^2}}{V} \tag{79}$$

и

$$-N(\xi-x)^2+2M(\xi-x)(\eta-y)-L(\eta-y)^2=Uk\sqrt{1+p^2+q^2}. \tag{80}$$

Итакъ, резюмируя все предшествующее, скажемъ, что для произвольнаго билинейнаго уравненія (78) и только для него, система Σ можетъ быть составлена *двоякимъ* образомъ изъ пучковъ индикатрисъ, находящихся въ двойномъ соприкосновеніи; геометрическое мѣсто концовъ діаметровъ двойного соприкосновенія есть коническое сѣченіе J: общія касательныя пучковъ облекаютъ коническое сѣченіе K подобное J и подобно расположенное: всякая индикатриса системы Σ пересѣкаетъ коническое сѣченіе J въ четырехъ точкахъ, касательныя въ которыхъ къ индикатрисѣ касаются коническаго сѣченія K; всякая индикатриса принадлежитъ двумъ пучкамъ σ и σ' системы Σ. Изъ каждой точки A кривой J можно провести двѣ касательныя къ кривой K; такимъ образомъ существуетъ два пучка σ и σ', имѣющихъ въ A конецъ діаметра двойного соприкосновенія (другимъ концомъ служитъ симметричная точка A'); если изъ точекъ кривой J будемъ проводить касательныя къ кривой K всегда въ одну сторону, то получимъ одну систему пучковъ; проводя касательныя въ другую сторону, получимъ другую систему пучковъ. Отсюда заключаемъ, что билинейное уравненіе должно допускать *двѣ* различныя системы характеристическихъ многообразій 1-го порядка; индикатрисы элементовъ интегральнаго многообразія, имѣющаго носителемъ характеристическое многообразіе той или другой системы, образуютъ пучки σ, принадлежащіе соотвѣтственно къ первой или второй системѣ пучковъ для каждаго элемента (x, y, z, p, q) характеристическаго многообразія. Дифференціальныя уравненія (45) характеристическихъ многообразій 1-го порядка въ данномъ случаѣ принимаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} Ldp^2+2Mdpdq+Ndq^2&=V(dpdx+dqdy)\\ -Ndx^2+2Mdxdy-Ldy^2&=U(dpdx+dqdy).\end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Разрѣшая ихъ относительно dp и dq, получаемъ или

$$\left.\begin{aligned} Udp+Ndx+\lambda_1 dy&=0\\ Udq+\lambda_2 dx-Ldy&=0.\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

или

$$\left.\begin{aligned} Udp+Ndx+\lambda_2 dy&=0\\ Udq+\lambda_1 dx+Ldy&=0,\end{aligned}\right\} \tag{83}$$

гдѣ λ_1 и λ_2 — корни квадратнаго уравненія

$$\lambda^2+2M\lambda+LN+UV=0. \tag{84}$$

Дифференціальныя уравненія (82) опредѣляютъ 1-ю систему характеристическихъ многообразій 1-го порядка, дифференціальныя уравненія (83) — вторую.

Если въ частности кривыя J и K совпадаютъ для каждаго элемента (x, y, z, p, q), то двѣ системы пучковъ σ сливаются въ одну, и система Σ обращается въ систему коническихъ сѣченій, находящихся въ двойномъ соприкосновеніи съ тѣмъ коническимъ сѣченіемъ, которое служитъ въ одно и то же время кривой J и K для системы Σ. Обратно, если мы потребуемъ, чтобы два пучка σ и σ', къ которымъ принадлежитъ всякая индикатриса въ случаѣ общаго билинейнаго уравненія, сливались въ одинъ, т. е. чтобы всякая индикатриса пересѣкала кривую J въ двухъ парахъ *слившихся* точекъ, то, очевидно, придемъ къ тому результату, что кривая K должна совпадать съ J. Условіе, при которомъ это имѣетъ мѣсто, получаемъ, сравнивая уравненія (79) и (80) проэкцій J и K; очевидно, оно слѣдующее:

$$UV+LN-M^2=G=0. \tag{85}$$

Уравненіе (84) въ этомъ случаѣ имѣетъ равные корни $\lambda_1=\lambda_2=-M$, и слѣдовательно, дифференціальныя уравненія (82) или (83) безразлично, опредѣляющія характеристическія многообразія, принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned} Udp+Ndx-Mdy&=0\\ Udq-Mdx+Ldy&=0.\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Разсмотримъ частный видъ билинейнаго уравненія, получающійся при $U=0$, т. е. произвольное линейное уравненіе

$$Lr+2Ms+Nt=V. \tag{87}$$

Коническое сѣченіе J въ данномъ случаѣ распадается на пару прямыхъ, проходящихъ черезъ точку (x, y, z), проэкціи которыхъ опредѣляются уравненіемъ

$$-N(\xi - x)^2 + 2M(\xi - x)(\eta - y) - L(\eta - y)^2 = 0: \tag{88}$$

коническое сѣченіе K имѣетъ, очевидно, асимптотами эти прямыя. Система Σ въ данномъ случаѣ есть *сѣть* концентрическихъ кривыхъ 2-го порядка; не трудно убѣдиться, что Якобіева кривая этой сѣти распадается на пару прямыхъ J и безконечно-удаленную прямую; что касается до коническаго сѣченія K, то оно вмѣстѣ съ точкой (x, y, z) образуетъ кривую *Hermite*'а для данной сѣти. Дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій 1-го порядка въ данномъ случаѣ не могутъ быть представлены въ видѣ (82) и (83), въ силу $U=0$: изъ первоначальной формы ихъ (81) при $U=0$ получаемъ

$$\left.\begin{aligned} -Ndx^2 + 2Mdxdy - Ldy^2 &= 0 \\ Ldp^2 + 2Mdpdq + Ndq^2 &= V(dpdx + dqdy); \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

первое уравненіе даетъ два значенія для отношенія $dy:dx$ и слѣдовательно двѣ системы характеристическихъ многообразій 1-го порядка.

Если въ уравненіи (87) положимъ еще $V=0$, то коническое сѣченіе K распадается на пару точекъ, притомъ какъ не трудно видѣть изъ уравненія проэкціи K въ линейныхъ координатахъ

$$Lu^2 + 2Muv + Nv^2 = 0. \tag{90}$$

—безконечно-удаленныхъ, а именно, на пару безконечно-удаленныхъ точекъ прямыхъ J, что впрочемъ можно было легко предвидѣть на основаніи геометрическихъ соображеній. Система Σ для уравненія

$$Lr + 2Ms + Nt = 0 \tag{91}$$

состоитъ изъ коническихъ сѣченій, для которыхъ прямыя J служатъ парой сопряженныхъ діаметровъ.

Въ заключеніе замѣтимъ, что всякое интегральное многообразіе типа $M^{(2)}_{1,1}$ произвольнымъ преобразованіемъ прикосновенія преобразуется въ интегральное многообразіе того же типа, а слѣдовательно, всякое характеристическое многообразіе 1-го порядка, какъ носитель интегральнаго многообразія типа $M^{(2)}_{1,1}$, преобразуется любымъ преобразованіемъ прикосновенія въ характеристическое многообразіе 1-го порядка преобразованнаго уравненія. Отсюда заключаемъ, что различные типы уравненій, которые мы разсмотрѣли въ этомъ параграфѣ, никогда не переходятъ одинъ въ другой при любомъ преобразованіи прикосновенія. Въ частности, уравненіе, допускающее систему характеристическихъ многообразій 1-го порядка, опредѣляемую тремя дифференціальными уравненіями, преобразуется въ подобное же уравненіе; уравненіе, допускающее двѣ различныхъ системы такого рода, т. е. билинейное уравненіе, преобразуется въ билинейное же, билинейное уравненіе, для котораго обѣ системы характеристическихъ многообразій сливаются въ одну, т. е. для котораго выполнится условіе (85), преобразуется въ подобное же уравненіе.

§ **2.**—Характеристическимъ многообразіемъ 2-го порядка даннаго уравненія

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{92}$$

называется, какъ было упомянуто своевременно (гл. II. § 2, стр. 155), многообразіе элементовъ 2-го порядка одного измѣренія, служащее носителемъ интегральнаго многообразія 3-го порядка *двухъ* измѣреній. Если предположимъ уравненія характеристическаго многообразія 2-го порядка въ видѣ

$$x=x(u),\ y=y(u),\ z=z(u),\ p=p(u),\ q=q(u),\ r=r(u),\ s=s(u),\ t=t(u), \tag{93}$$

гдѣ u—произвольный параметръ, то согласно поставленному опредѣленію, а также опредѣленію интегральнаго многообразія 3-го порядка (см. гл. II. § 2. стр. 152), во-первыхъ мы должны для значеній x, y, z, p, q, r, s, t, опредѣляемыхъ уравненіями (93), имѣть

$$\left.\begin{aligned} dz - pdx - qdy &= 0 \\ dp - rdx - sdy &= 0 \\ dq - sdx - tdy &= 0\,, \\ F(x, y, z, p, q, r, s, t) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

и во-вторыхъ, для *всѣхъ* значеній $z''', z_{,}'', z_{,,}', z_{,,,}$, опредѣляемыхъ изъ соотношеній

$$\left.\begin{aligned} dr &= z'''dx + z_{,}''dy \\ ds &= z_{,}''dx + z_{,,}'dy \\ dt &= z_{,,}'dx + z_{,,,}dy, \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

гдѣ r, s, t, x, y имѣютъ прежнія значенія, должны удовлетворяться уравненія *)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= Rz''' + Sz_{,}'' + Tz_{,,}' + \left[\frac{dF}{dx}\right] = 0 \\ \frac{dF}{dy} &= Rz_{,}'' + Sz_{,,}' + Tz_{,,,} + \left[\frac{dF}{dy}\right] = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (96)$$

или, другими словами, система двухъ линейныхъ относительно z''', $z_{,}''$, $z_{,,}'$, $z_{,,,}$ уравненій (96) должна быть слѣдствіемъ системы (95). Въ силу уравненій (94), характеристическое многообразіе 2-го порядка должно принадлежать къ числу интегральныхъ многообразій одного измѣренія даннаго уравненія, что впрочемъ было указано и ранѣе (гл. II, § 2, стр. 155). Для того, чтобы каждое изъ уравненій системы (96) было слѣдствіемъ системы (95) необходимо и достаточно, чтобы исчезали всѣ детерминанты, образованные изъ столбцовъ таблицъ

$$\left\|\begin{matrix} R, & S, & T, & 0, & \left[\dfrac{dF}{dx}\right] \\ dx, & dy, & 0, & 0, & -dr \\ 0, & dx & dy, & 0, & -ds \\ 0, & 0, & dx, & dy, & -dt \end{matrix}\right\| \text{ и } \left\|\begin{matrix} 0, & R, & S, & T, & \left[\dfrac{dF}{dy}\right] \\ dx, & dy, & 0, & 0, & -dr \\ 0, & dx, & dy, & 0, & -ds \\ 0, & 0, & dx, & dy, & -dt \end{matrix}\right\|. \qquad (97)$$

Детерминанты, получаемые отбрасываніемъ послѣднихъ столбцовъ той и другой таблицы, соотвѣтственно равны

$$dy(Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2) \text{ и } -dx(Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2);$$

для того чтобы они оба исчезали, необходимо и достаточно, чтобы

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0. \qquad (98)$$

Принимая во вниманіе равенство (98) ,остальные детерминанты 1-й таблицы представимъ слѣдующимъ образомъ:

$$dx\left\{\left[\frac{dF}{dx}\right]dx^2 + Rdxdr - (Rdy - Sdx)ds\right\}$$
$$dy\left\{\left[\frac{dF}{dx}\right]dx^2 + Rdxdr - (Rdy - Sdx)ds\right\}$$
$$dy\left\{\left[\frac{dF}{dx}\right]dxdy + Rdydr + Tdxds\right\}$$
$$dy\left\{\left[\frac{dF}{dx}\right]dy^2 + (Sdy - Tdx)dr + Tdyds\right\}.$$

*) См. гл. II, § 2, стр. 152, рав. 107'; гл. III, § 1, стр. 201, рав. 9.

Предположимъ во-первыхъ, что величины R и T отличны отъ нуля: тогда для разсматриваемаго характеристическаго многообразія dx и dy необходимо отличны отъ нуля, такъ какъ должны удовлетворять уравненію (98). Для того, чтобы всѣ выше выписанные детерминанты исчезали, необходимо между прочимъ, чтобы имѣло мѣсто равенство

$$\left[\frac{dF}{dx}\right]dxdy + Rdydr + Tdxds = 0;$$

не трудно видѣть, что въ данномъ случаѣ этого и достаточно: въ самомъ дѣлѣ, умножая равенство (99) соотвѣтственно на dx и dy и принимая во вниманіе равенство (98), получаемъ

$$dy\left\{\left[\frac{dF}{dx}\right]dx^2 + Rdxdr - (Rdy - Sdx)ds\right\} = 0$$
$$dx\left\{\left[\frac{dF}{dx}\right]dy^2 + (Sdy - Tdx)dr + Tdyds\right\} = 0,$$

откуда, благодаря тому, что dx, dy отличны отъ нуля, непосредственно слѣдуетъ равенство нулю всѣхъ детерминантовъ 1-й таблицы. Предположимъ далѣе, что для даннаго уравненія $R = \frac{dF}{dr} = 0$. Изъ уравненія (98) въ этомъ случаѣ получаемъ, во-первыхъ, нѣкоторое опредѣленное конечное значеніе для отношенія $dy : dx$ и во-вторыхъ $dx = 0$; для перваго рѣшенія предыдущія разсужденія сохраняютъ силу, для втораго, очевидно, нѣтъ. Полагая $dx = 0$, видимъ, что изъ детерминантовъ 1-й таблицы не исчезаетъ тождественно только послѣдній: приравнивая его нулю, получаемъ

$$\left[\frac{dF}{dx}\right]dy + Sdr + Tds = 0. \qquad (100)$$

Аналогично, предполагая, что для даннаго уравненія $T = 0$, получаемъ два рѣшенія уравненія (98), изъ которыхъ для одного разсужденія общаго случая имѣютъ мѣсто, а для другого, именно для $dy = 0$, вмѣсто уравненія (99) надо взять

$$\left[\frac{dF}{dx}\right]dx + Rdr + Sds = 0. \qquad (101)$$

Наконецъ, если для даннаго уравненія одновременно $R=0$, $T=0$, т. е. если лѣвая часть его F не зависитъ ни отъ r, ни отъ t, то уравненіе (98) дастъ намъ два рѣшенія $dx=0$, $dy=0$. Полагая $dx=0$, мы должны вмѣсто уравненія (99) взять

$$\left[\frac{dF}{dx}\right]dy+Sdr=0; \tag{102}$$

полагая $dy=0$, вмѣсто уравненія (99), мы должны взять

$$\left[\frac{dF}{dx}\right]dr+Sds=0. \tag{103}$$

Обращаясь ко второй таблицѣ (97), замѣчаемъ, что она можетъ быть получена изъ 1-й, если замѣнимъ dx черезъ dy и обратно, $\left[\frac{dF}{dx}\right]$ черезъ $\left[\frac{dF}{dy}\right]$, dr черезъ dt и обратно, R черезъ T и обратно и затѣмъ только переставимъ надлежащимъ образомъ строки и столбцы. На основаніи этого, безъ всякихъ выкладокъ можемъ сказать, что въ томъ случаѣ, когда R и T отличны отъ нуля, къ уравненію (98) надо присоединить уравненіе

$$\left[\frac{dF}{dy}\right]dxdy+Rdyds+Tdxdt=0. \tag{104}$$

для того чтобы всѣ детерминанты 2-й таблицы исчезали; въ томъ случаѣ когда $R=0$ и когда беремъ рѣшеніе уравненія (98) $dx=0$, уравненіе (104) слѣдуетъ замѣнить уравненіемъ

$$\left[\frac{dF}{dy}\right]dy+Sds+Tdt=0; \tag{105}$$

когда $T=0$ и беремъ $dy=0$, вмѣсто уравненія (104) слѣдуетъ взять

$$\left[\frac{dF}{dy}\right]dx+Rds+Sdt=0; \tag{106}$$

наконецъ, если одновременно $R=0$ и $T=0$, то, полагая $dx=0$, мы должны взять

$$\left[\frac{dF}{dy}\right]dy+Sds=0, \tag{107}$$

а полагая $dy=0$,

$$\left[\frac{dF}{dy}\right]dx+Sdt=0. \tag{108}$$

Итакъ, для характеристическаго многообразія 2-го порядка даннаго уравненія $F=0$ (92) должны удовлетворяться въ общемъ случаѣ, когда R и T отличны отъ нуля, слѣдующія дифференціальныя уравненія:

$$\left.\begin{aligned}
&dz-pdx-qdy=0\\
&dp-rdx-sdy=0\\
&dq-sdx-tdy=0\\
&F(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t)=0\\
&Rdy^2-Sdxdy+Tdx^2=0\\
&\left[\frac{dF}{dx}\right]dxdy+Rdydr+Tdxds=0\\
&\left[\frac{dF}{dy}\right]dxdy+Rdyds+Tdxdt=0.
\end{aligned}\right\} \tag{109}$$

Обратно, всякое многообразіе одного измѣренія элементовъ 2-го порядка, удовлетворяющее этимъ уравненіямъ, есть, очевидно, характеристическое многообразіе 2-го порядка даннаго уравненія $F=0$. Изъ пятаго уравненія системы (109) получаемъ два значенія m_1 и m_2 для отношенія $dy:dx$; полагая послѣдовательно $dy=m_1dx$ и $dy=m_2dx$ и сокращая первыя три и послѣднія два изъ уравненій (109) на dx, получимъ двѣ различныхъ системы линейныхъ уравненій съ полными дифференціалами: слѣдовательно, данное уравненіе съ частными производными 2-го порядка $F=0$ допускаетъ, вообще говоря, *двѣ* различныхъ системы характеристическихъ многообразій 2-го порядка. Въ случаѣ $R=0$, одна изъ упомянутыхъ системъ дифференціальныхъ уравненій, а именно та, которая соотвѣтствуетъ безконечному значенію $dy:dx$, согласно предыдущему, должна быть замѣнена слѣдующей:

$$\left.\begin{aligned}
&dx=0,\ dz=qdy,\ dp=sdy,\ dq=tdy,\ F=0,\\
&\left[\frac{dF}{dx}\right]dy+Sdr+Tds=0,\\
&\left[\frac{dF}{dy}\right]dy+Sds+Tdt=0.
\end{aligned}\right\} \tag{110}$$

Въ случаѣ $T=0$, та система дифференціальныхъ уравненій, которая соотвѣтствуетъ нулевому значенію $dy:dx$, замѣняется слѣдующей:

$$\left.\begin{aligned}
&dy=0,\ dz=pdx,\ dp=rdx,\ dq=sdx,\ F=0,\\
&\left[\frac{dF}{dx}\right]dx+Rdr+Sds=0,\\
&\left[\frac{dF}{dy}\right]dx+Rds+Sdt=0.
\end{aligned}\right\} \tag{111}$$

Наконецъ, въ случаѣ $R=0$, $T=0$, т. е. для уравненія вида

$$F(x, y, z, p, q, s)=0,$$

дифференціальныя уравненія двухъ системъ характеристическихъ многообразій 2-го порядка принимаютъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{array}{l} dx=0,\ dz=q dy,\ dp=s dy,\ dq=t dy,\ F=0, \\ \left[\frac{dF}{dx}\right] dy+S dr=0, \quad \left[\frac{dF}{dy}\right] dy+S ds=0; \end{array}\right\} \tag{112}$$

$$\left.\begin{array}{l} dy=0,\ dz=p dx,\ dp=r dx,\ dq=s dx,\ F=0, \\ \left[\frac{dF}{dx}\right] dx+S ds=0, \quad \left[\frac{dF}{dy}\right] dx+S dt=0. \end{array}\right\} \tag{112'}$$

Для опредѣленія характеристическихъ многообразій 2-го порядка мы во всѣхъ случаяхъ имѣемъ, повидимому, семь уравненій между восемью перемѣнными x, y, z, p, q, r, s, t, но не трудно убѣдиться, что въ числѣ ихъ только *шесть* независимыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненія $F=0$ слѣдуетъ $dF=0$, что въ силу первыхъ трехъ изъ уравненій (94), имѣющихъ мѣсто для всякаго интегральнаго многообразія 2-го порядка, и въ силу уравненій (95) можетъ быть представлено въ видѣ

$$\frac{dF}{dx} dx+\frac{dF}{dy} dy=0. \tag{113}$$

Такимъ образомъ, для всякаго интегральнаго многообразія 2-го порядка одного измѣренія, для всѣхъ значеній z''', $z_{,}''$, $z_{,,}'$, $z_{,,,}$, опредѣляемыхъ изъ уравненій (95), удовлетворяется соотношеніе (113). Въ случаѣ характеристическаго многообразія 2-го порядка по условію должны имѣть мѣсто отдѣльно два равенства

$$\frac{dF}{dx}=0, \quad \frac{dF}{dy}=0 \tag{96}$$

для значеній z''', $z_{,}''$, $z_{,,}'$, $z_{,,,}$, опредѣляемыхъ какъ упомянуто выше; но равенства эти, въ силу соотношенія (113), сводятся *къ одному* независимому $\left(\text{напр. къ } \frac{dF}{dx}=0\right)$, и слѣдовательно, дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій 2-го порядка получимъ, присоединяя къ уравненіямъ (94) условія, выражающія, что какое-либо линейное сочетаніе уравненій (96), отличное отъ лѣвой части соотно-

шенія (113), напримѣръ прямо одно изъ этихъ уравненій $\frac{dF}{dx}=0$, есть слѣдствіе системы (95). Какъ извѣстно, условія эти сводятся къ *двумъ* независимымъ (условія неопредѣленности системы четырехъ линейныхъ уравненій съ четырьмя неизвѣстными), и слѣдовательно, получимъ всего *шесть* независимыхъ дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій 2-го порядка. Если въ уравненіяхъ (109) общаго случая умножимъ лѣвую часть предпослѣдняго на dx, послѣдняго на dy и сложимъ, то получимъ

$$dxdy\left\{\left[\frac{dF}{dx}\right] dx+\left[\frac{dF}{dy}\right] dy+R dr+T dt\right\}+(R dy^2+T dx^2) ds.$$

Вычитая отсюда произведеніе лѣвой части 5-го на ds, получаемъ

$$dxdy\left\{R dr+S ds+T dt+\left[\frac{dF}{dx}\right] dx+\left[\frac{dF}{dy}\right] dy\right\}.$$

Умножая, наконецъ, лѣвыя части первыхъ трехъ уравненій (109) соотвѣтственно на $Zdxdy$, $Pdxdy$, $Qdxdy$, гдѣ Z, P, Q — частныя производныя F по z, p, q, и складывая съ полученнымъ результатомъ, имѣемъ

$$dxdy\{R dr+S ds+T dt+P dp+Q dq+Z dz+X dx+Y dy\}=dxdy \,.\, dF.$$

Итакъ, мы доказали слѣдующее тождество

$$\begin{aligned} dxdy \,.\, dF = {} & dx \,.\, U_6+dy \,.\, U_7-ds \,.\, U_5+ \\ & +Zdxdy \,.\, U_1+Pdxdy \,.\, U_2+Qdxdy \,.\, U_3, \end{aligned} \tag{114}$$

гдѣ черезъ U_1, U_2, U_3, U_5, U_6, U_7 сокращенно обозначаемъ лѣвыя части соотвѣтственно 1-го, 2-го, 3-го, 5-го, 6-го и 7-го уравненій (109). Тождество это подтверждаетъ, что въ числѣ семи уравненій системы (109) только шесть независимыхъ. Если мы отбросимъ 4-е уравненіе $F=0$, то для всякой системы значеній x, y, z, p, q, r, s, t, удовлетворяющихъ оставшимся шести уравненіямъ $U_1=0$, $U_2=0$, $U_3=0$, $U_5=0$, $U_6=0$, $U_7=0$, будемъ имѣть, въ силу тождества (114), $dF=0$ и слѣдовательно $F=const$. Такимъ образомъ $F=const$. служитъ *интеграломъ* системы шести уравненій $U_1=0$, $U_2=0$, $U_3=0$, $U_5=0$, $U_6=0$, $U_7=0$; для того, чтобы имѣло мѣсто и уравненіе $F=0$, достаточно наложить одно ограниченіе на постоянныя, получаемыя при интеграціи этихъ шести уравненій. Если мы поступимъ иначе, а именно заранѣе воспользуемся уравненіемъ $F=0$ для исключенія какого-либо изъ перемѣнныхъ изъ уравненій $U_1=0$, $U_2=0$, $U_3=0$, $U_5=0$, $U_6=0$, $U_7=0$, то между лѣвыми частями полученныхъ уравненій, въ силу тождества (114), будетъ существовать тождественное соотношеніе, которое получаемъ изъ (114), полагая $dF=0$, и слѣдовательно, между остающимися семью перемѣнными мы будемъ имѣть лишь *пять* независимыхъ дифференціальныхъ уравненій. Если бы вмѣсто общей формы (109) дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій 2-го порядка той и другой системы мы взяли дифференціальныя уравненія одной изъ системъ (ср. выше, стр. 279), то понятно пришли бы къ тѣмъ же результатамъ. Называя черезъ m_1 и m_2 корни уравненія

$$Rm^2 - Sm + T = 0, \tag{115}$$

можемъ представить дифференціальныя уравненія 1-й системы въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= dz - pdx - qdy = 0 \\ V_2 &= dp - rdx - sdy = 0 \\ V_3 &= dq - sdx - tdy = 0 \\ V_4 &= \left[\frac{dF}{dx}\right] dx + Rdr + Rm_2 ds = 0 \\ V_5 &= \left[\frac{dF}{dy}\right] dy + Rm_1 ds + Tdt = 0 \\ V_6 &= dy - m_1 dx = 0 \\ V_7 &= F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

Четвертое и пятое уравненія получаются изъ 6-го и 7-го уравненій (109) дѣленіемъ соотвѣтственно на dy и dx, замѣной $dy : dx$ черезъ m_1 и $\frac{T}{m_1}$ черезъ Rm_2, въ силу равенства $m_1 m_2 = \frac{T}{R}$. Не трудно доказать тождество

$$ZV_1 + PV_2 + QV_3 + V_4 + V_5 = dF, \tag{117}$$

которое по отношенію къ системѣ (116) играетъ ту же роль, какую тождество (114) — по отношенію къ системѣ (109). Въ силу этого тождества, $F = const.$ служитъ интеграломъ системы $V_1=0$, $V_2=0$, $V_3=0$, $V_4=0$, $V_5=0$, $V_6=0$; если проинтегрируемъ ее, то остается только наложить ограниченіе на постоянныя интеграціи, чтобы удовлетворялось уравненіе $F=0$. Если исключимъ одно изъ перемѣнныхъ изъ первыхъ шести уравненій (116), пользуясь уравненіемъ $F=0$, то тождество (117)

для новыхъ уравненій будетъ въ правой части содержать нуль, и слѣдовательно, между семью перемѣнными будемъ имѣть пять независимыхъ уравненій. Итакъ, различными способами мы убѣдились, что во всякомъ случаѣ число независимыхъ дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій 2-го порядка на *двѣ* единицы меньше числа перемѣнныхъ. Принимая одну изъ перемѣнныхъ, напр. x, за параметръ и предполагая напримѣръ $y=\varphi(x)$, гдѣ φ — знакъ произвольной функціи, получимъ для опредѣленія остальныхъ шести перемѣнныхъ r, s, t, p, q, z въ функціи x шесть независимыхъ дифференціальныхъ уравненій. Такимъ образомъ, каждая система характеристическихъ многообразій 2-го порядка для произвольнаго уравненія съ частными производными 2-го порядка зависитъ отъ одной произвольной функціи. Если мы пожелаемъ опредѣлить всевозможныя характеристическія многообразія 2-го порядка уравненія $F=0$, содержащія данный элементъ $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0)$, удовлетворяющій данному уравненію $F=0$, то намъ придется интегрировать тѣ же дифференціальныя уравненія (109) или иначе отдѣльно для 1-й системы уравненія (116), а для 2-й аналогичныя уравненія, получаемыя замѣной m_1 черезъ m_2 и обратно, при добавочномъ условіи, состоящемъ въ томъ, чтобы при $x=x_0$

$$y=y_0,\ z=z_0,\ p=p_0,\ q=q_0,\ r=r_0,\ s=s_0,\ t=t_0.$$

Произвольная функція $\varphi(x)$, которой мы приравниваемъ y, въ данномъ случаѣ подчиняется ограниченію

$$\varphi(x_0) = y_0,$$

и можно взять

$$y = \varphi(x) = y_0 - \psi(x_0) + \psi(x),$$

гдѣ $\psi(x)$ — вполнѣ произвольная функція. Далѣе намъ придется интегрировать шесть независимыхъ дифференціальныхъ уравненій при данныхъ начальныхъ значеніяхъ шести зависимыхъ перемѣнныхъ z, p, q, r, s, t: слѣдовательно, получимъ вполнѣ опредѣленныя выраженія для z, p, q, r, s, t, зависящія отъ произвольной функціи $\psi(x)$. Итакъ, каждый элементъ, удовлетворяющій данному уравненію, принадлежитъ семействамъ характеристическихъ многообразій 2-го порядка 1-й и 2-й системы, зависящимъ отъ одной произвольной функціи. Вмѣсто того, чтобы устанавливать произвольную зависимость между *двумя* координатами при интеграціи дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій 2-го порядка, можемъ установить вообще произвольную зависимость вида

$$\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \tag{118}$$

Присоединяя равенство (118) къ дифференціальнымъ уравненіямъ характеристическихъ многообразій, найдемъ выраженія всѣхъ координатъ въ функціи одной изъ нихъ съ пятью произвольными постоянными (такъ какъ независимыхъ *дифференціальныхъ* уравненій мы имѣемъ пять). Это семейство характеристическихъ многообразій 2-го порядка, очевидно, служитъ вмѣстѣ съ тѣмъ семействомъ интегральныхъ многообразій одного измѣренія для уравненія (118), такъ какъ для него удовлетворяются какъ уравненіе (118), такъ и дифференціальныя соотношенія

$$\begin{aligned} dz - pdx - qdy &= 0 \\ dp - rdx - sdy &= 0 \\ dq - sdx - tdy &= 0. \end{aligned}$$

которыя входятъ въ число дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій.

Точки элементовъ характеристическаго многообразія 2-го порядка образуютъ нѣкоторую кривую C, которую мы будемъ называть *характеристикой*. Если между шестью независимыми уравненіями характеристическихъ многообразій 2-го порядка исключимъ r, s, t, p, q, то получимъ одно уравненіе между x, y, z, вообще говоря—дифференціальное 5-го порядка, которое опредѣляетъ видъ характеристикъ даннаго уравненія съ частными производными $F=0$.

Для того, чтобы дать геометрическое истолкованіе дифференціальнымъ уравненіямъ характеристическихъ многообразій 2-го порядка, поступимъ совершенно такъ же, какъ поступали въ предшествующемъ §-ѣ для характеристическихъ многообразій 1-го порядка, т. е. всю теорію изложимъ съ геометрической точки зрѣнія. Такъ какъ характеристическое многообразіе 2-го порядка $M_{1,1}^{(1)}$ есть интегральное многообразіе одного измѣренія даннаго уравненія $F=0$, то характеристика C, образуемая точками элементовъ $M_{1,1}^{(1)}$, развертывающаяся поверхность D, образуемая плоскостями элементовъ, которую будемъ называть характеристической развертывающейся поверхностью, и индикатрисы элементовъ прежде всего, конечно, обладаютъ слѣдующими свойствами: поверхность D описана около характеристики C; индикатриса каждаго элемента имѣетъ парой сопряженныхъ діаметровъ касательную къ характеристикѣ C и образующую поверхности D въ точкѣ элемента;

длина діаметра, касающагося характеристики C, равна $2\sqrt{k\rho}$, гдѣ k — постоянное въ уравненіяхъ индикатрисы

$$\left.\begin{aligned} \zeta - z &= p(\xi - x) + q(\eta - y) \\ r(\xi-x)^2+2s(\xi-x)(\eta-y)+t(\eta-y)^2 &= k\sqrt{1+p^2+q^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (119)$$

а ρ — радіусъ кривизны нормальнаго сѣченія поверхности D по направленію касательной къ C; для каждаго элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) многообразія $M_{1,1}^{(1)}$ индикатриса (119) принадлежитъ къ соотвѣтствующей системѣ Σ, опредѣляемой даннымъ уравненіемъ $F=0$. Перечисленныя свойства, какъ извѣстно, служатъ геометрической интерпретаціей первыхъ четырехъ уравненій характеристическихъ многообразій 2-го порядка (гл. III, § 2, стр. 225—228):

$$\left.\begin{aligned} dz - pdx - qdy &= 0 \\ dp - rdx - sdy &= 0 \\ dq - sdx - tdy &= 0 \\ F(x, y, z, p, q, r, s, t) &= 0. \end{aligned}\right| \qquad (94)$$

Разсмотримъ теперь многообразіе элементовъ 3-го порядка двухъ измѣреній $\mathfrak{M}$, имѣющее носителемъ многообразіе $M_{1,1}^{(1)}$. Каждый элементъ (x, y, z, p, q, r, s, t) многообразія $M_{1,1}^{(1)}$, какъ извѣстно, входитъ въ цѣлую систему элементовъ 3-го порядка $(x, y, z, p, q, r, s, t, z''', z_{,}'', z_{,,}', z_{,,,})$ многообразія $\mathfrak{M}$, для которыхъ z''', $z_{,}''$, $z_{,,}'$, $z_{,,,}$ опредѣляются изъ соотношеній

$$\left.\begin{aligned} dr &= z'''dx + z_{,}''dy \\ ds &= z_{,}''dx + z_{,,}'dy \\ dt &= z_{,,}'dx + z_{,,,}dy. \end{aligned}\right| \qquad (120)$$

Кубическія индикатрисы

$$\left.\begin{aligned} \zeta - z &= p(\xi - x) + q(\eta - y) \\ z'''(\xi-x)^3+3z_{,}''(\xi-x)^2(\eta-y)&+3z_{,,}'(\xi-x)(\eta-y)^2+z_{,,,}(\eta-y)^3+ \\ +3r(\xi-x)^2+6s(\xi-x)(\eta-y)&+3t(\eta-y)^2 = 3k\sqrt{1+p^2+q^2} \end{aligned}\right\} \qquad (121)$$

элементовъ многообразія $\mathfrak{M}$ при данныхъ x, y, z, p, q, r, s, t, т. е. при данной квадратичной индикатрисѣ (119), лежащей въ данной плоскости характеристической поверхности D и имѣющей центръ въ соотвѣтствующей точкѣ характеристики C, образуютъ, очевидно, семейство съ *однимъ* параметромъ, такъ какъ четыре коэффиціента z''', $z_{,}''$,

$z_{\prime\prime}'$, $z_{\prime\prime\prime}$ 2-го уравненія (121) связаны тремя уравненіями (120), въ которыхъ отношенія дифференціаловъ $dx : dy : dr : ds : dt$ имѣютъ опредѣленныя значенія въ силу уравненій многообразія $M_{1,1}^{(1)}$. Если систему какихъ-либо значеній z''', $z_{\prime}''$, $z_{\prime\prime}'$, $z_{\prime\prime\prime}$, удовлетворяющихъ уравненіямъ (120), назовемъ $\mathfrak{z}'''$, $\mathfrak{z}_{\prime}''$, $\mathfrak{z}_{\prime\prime}'$, $\mathfrak{z}_{\prime\prime\prime}$, то общее рѣшеніе уравненій (120) можетъ быть представлено въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} z''' &= \mathfrak{z}''' + \lambda dy^3 \\ z_{\prime}'' &= \mathfrak{z}_{\prime}'' - \lambda dy^2 dx \\ z_{\prime\prime}' &= \mathfrak{z}_{\prime\prime}' + \lambda dy dx^2 \\ z_{\prime\prime\prime} &= \mathfrak{z}_{\prime\prime\prime} - \lambda dx^3. \end{aligned}\right\} \tag{122}$$

гдѣ λ—произвольный параметръ. Для $\mathfrak{z}'''$, $\mathfrak{z}_{\prime}''$, $\mathfrak{z}_{\prime\prime}'$, $\mathfrak{z}_{\prime\prime\prime}$, очевидно, удовлетворяются уравненія

$$\left.\begin{aligned} dr &= \mathfrak{z}'''dx + \mathfrak{z}_{\prime}''dy \\ ds &= \mathfrak{z}_{\prime}''dx + \mathfrak{z}_{\prime\prime}'dy \\ dt &= \mathfrak{z}_{\prime\prime}'dx + \mathfrak{z}_{\prime\prime\prime}dy. \end{aligned}\right\} \tag{123}$$

Вставляя значенія (122) z''', $z_{\prime}''$, $z_{\prime\prime}'$, $z_{\prime\prime\prime}$ въ уравненія (121), придадимъ имъ такой видъ

$$\left.\begin{gathered} \zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) \\ \mathfrak{z}'''(\xi-x)^3 + 3\mathfrak{z}_{\prime}''(\xi-x)^2(\eta-y) + 3\mathfrak{z}_{\prime\prime}'(\xi-x)(\eta-y)^2 + \mathfrak{z}_{\prime\prime\prime}(\eta-y)^3 + \\ + 3r(\xi-x)^2 + 6s(\xi-x)(\eta-y) + 3t(\eta-y)^2 - 3k\sqrt{1+p^2+q^2} \\ + \lambda[dy(\xi-x) - dx(\eta-y)]^3 = 0. \end{gathered}\right\} \tag{124}$$

Отсюда заключаемъ, что семейство съ однимъ параметромъ кубическихъ индикатрисъ, о которомъ мы выше упоминали, есть пучокъ кривыхъ 3-го порядка, находящихся въ соприкосновеніи 2-го порядка въ трехъ общихъ точкахъ пересѣченія ихъ съ прямой

$$\begin{gathered} \zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) \\ dy(\xi - x) - dx(\eta - y) = 0. \end{gathered}$$

Уравненія этой прямой могутъ быть представлены въ видѣ

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{pdx + qdy},$$

или, такъ какъ $pdx + qdy = dz$,

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz};$$

слѣдовательно, прямая эта есть касательная къ характеристикѣ C въ точкѣ (x, y, z). Пучокъ кубическихъ индикатрисъ (124) будемъ называть для краткости пучкомъ $\mathfrak{d}$. Второе изъ уравненій (121) представляетъ, какъ извѣстно, проэкцію кубической индикатрисы на плоскость xy; поэтому второе изъ уравненій (124) опредѣляетъ пучокъ $\mathfrak{d}_z$ проэкцій кривыхъ пучка $\mathfrak{d}$; всѣ кривыя пучка $\mathfrak{d}_z$, очевидно, находятся въ соприкосновеніи 2-го порядка въ общихъ точкахъ пересѣченія ихъ съ прямой

$$dy(\xi - x) - dx(\eta - y) = 0,$$

или

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy},$$

которая есть проэкція на плоскость xy касательной къ C въ точкѣ (x, y, z). Если многообразіе $M_{1,1}^{(1)}$ есть характеристическое многообразіе 2-го порядка, то многообразіе двухъ измѣреній $\mathfrak{M}$ должно быть интегральнымъ многообразіемъ 3-го порядка даннаго уравненія $F = 0$, и слѣдовательно, элементы его, кромѣ уравненій (94) и (120), должны еще удовлетворять уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= Rz''' + Sz_{\prime}'' + Tz_{\prime\prime}' + \left[\frac{dF}{dx}\right] = 0 \\ \frac{dF}{dy} &= Rz_{\prime}'' + Sz_{\prime\prime}' + Tz_{\prime\prime\prime} + \left[\frac{dF}{dy}\right] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

Для каждаго даннаго элемента 2-го порядка (x, y, z, p, q, r, s, t) уравненія (96) опредѣляютъ нѣкоторую *сѣть* (Δ) кубическихъ индикатрисъ, съ которой намъ уже приходилось встрѣчаться выше (см. гл. III, § 3, стр. 235; гл. II, § 2, стр. 156). Такимъ образомъ если $M_{1,1}^{(1)}$ есть характеристическое многообразіе 2-го порядка, то пучокъ $\mathfrak{d}$ для каждаго элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) многообразія $M_{1,1}^{(1)}$ долженъ входить въ составъ сѣти Δ, опредѣляемой уравненіями (96) для того же элемента; обратно, если это условіе выполнено, то многообразіе $M_{1,1}^{(1)}$, очевидно, есть характеристическое многообразіе 2-го порядка даннаго уравненія $F = 0$. Вмѣсто пучка $\mathfrak{d}$ и сѣти Δ можно, понятно, разсматривать пучокъ $\mathfrak{d}_z$ и сѣть Δ_z, образованную проэкціями на плоскость xy кривыхъ сѣти Δ; произвольная кривая сѣти Δ_z представляется вторымъ изъ уравненій (121), гдѣ z''', $z_{\prime}''$, $z_{\prime\prime}'$, $z_{\prime\prime\prime}$ связаны двумя соотношеніями (96).

Сдѣлаемъ небольшое отступленіе въ область теоріи кривыхъ 3-го порядка. Пусть имѣемъ въ однородныхъ координатахъ ξ_1, ξ_2, ξ_3 уравненіе пучка кривыхъ 3-го порядка

$$G + \lambda L^3 = 0, \qquad (125)$$

гдѣ G — форма 3-й степени, а L — линейная форма перемѣнныхъ ξ_1, ξ_2, ξ_3. Всѣ кривыя пучка (125) пересѣкаются съ прямой $L = 0$ въ однѣхъ и тѣхъ же точкахъ — въ точкахъ пересѣченія съ этой прямой кривой пучка $G = 0$, притомъ всѣ онѣ въ этихъ точкахъ находятся въ соприкосновеніи 2-го порядка, такъ что каждая изъ упомянутыхъ трехъ точекъ пересѣченія совмѣщаетъ въ себѣ три слившихся центра пучка (125). Полярное коническое сѣченіе любой точки (ξ_1', ξ_2', ξ_3') относительно произвольной кривой пучка (125) опредѣляется уравненіемъ

$$G_1\xi_1' + G_2\xi_2' + G_3\xi_3' + \lambda L^2 L' = 0,$$

гдѣ G_1, G_2, G_3 — трети производныхъ G по ξ_1, ξ_2, ξ_3, L' — результатъ подстановки ξ_1', ξ_2', ξ_3' вмѣсто ξ_1, ξ_2, ξ_3 въ L. Вообще говоря, полярныя коническія сѣченія точки (ξ_1', ξ_2', ξ_3') относительно всѣхъ кривыхъ пучка (125) составляютъ, очевидно, пучокъ кривыхъ 2-го порядка; но если имѣемъ $L' = 0$, т. е. если точка (ξ_1', ξ_2', ξ_3') лежитъ на прямой $L = 0$, то полярное коническое сѣченіе ея относительно всѣхъ кривыхъ пучка (125) — одно и то же, а именно

$$G_1\xi_1' + G_2\xi_2' + G_3\xi_3' = 0, \qquad (126)$$

и это имѣетъ мѣсто для *всякой* точки прямой $L = 0$. Полярныя коническія сѣченія всѣхъ точекъ прямой $L = 0$ относительно какой-нибудь одной, а слѣдовательно и всѣхъ кривыхъ (125) образуютъ, какъ извѣстно, нѣкоторый пучокъ, уравненіе котораго получимъ, предполагая въ уравненіи (126) ξ_1', ξ_2', ξ_3' произвольными параметрами, связанными соотношеніемъ $L' = 0$; пучокъ этотъ находится въ проэктивномъ соотвѣтствіи съ точками прямой $L = 0$. Обратно, чтобы пучокъ кривыхъ 3-го порядка (125) былъ вполнѣ опредѣленъ, достаточно знать прямую $L = 0$ и два полярныхъ коническихъ сѣченія K_A, K_B, соотвѣтствующихъ двумъ какимъ-нибудь точкамъ A и B прямой $L = 0$. Въ самомъ дѣлѣ, поляра одной изъ этихъ точекъ, напримѣръ A, относительно соотвѣтствующаго коническаго сѣченія K_A, какъ извѣстно, есть полярная прямая A относительно всякой кривой 3-го порядка, для которой K_A есть полярное коническое сѣченіе точки A; поэтому точкѣ пересѣче-

нія E этой поляры съ прямой $L = 0$, по извѣстному свойству полярныхъ кривыхъ, должно соотвѣтствовать полярное коническое сѣченіе, проходящее черезъ точку A; такъ какъ съ другой стороны это коническое сѣченіе K_E должно принадлежать къ пучку, опредѣляемому коническими сѣченіями K_A и K_B, то оно вполнѣ опредѣляется по нашимъ даннымъ, и слѣдовательно, мы имѣемъ три коническихъ сѣченія K_A, K_B, K_E, соотвѣтствующихъ тремъ точкамъ A, B, E прямой $L = 0$, а этимъ вполнѣ устанавливается проэктивное соотвѣтствіе между точками прямой $L = 0$ и пучкомъ коническихъ сѣченій. Не трудно убѣдиться, что всѣ кривыя 3-го порядка, для которыхъ этотъ пучокъ есть пучокъ полярныхъ коническихъ сѣченій точекъ прямой $L = 0$, составляютъ пучокъ вида (125). Въ самомъ дѣлѣ, точки пересѣченія ихъ съ $L = 0$ опредѣляются какъ точки прямой $L = 0$, лежащія на соотвѣтствующихъ коническихъ сѣченіяхъ, и слѣдовательно, эти точки — однѣ и тѣ же для всѣхъ кривыхъ 3-го порядка (число ихъ равно тремъ, потому что ихъ можно иначе опредѣлить какъ двойныя точки одно-двухзначнаго соотвѣтствія между точками A, B, E.... и точками пересѣченія коническихъ сѣченій K_A, K_B, K_E,... съ прямой $L = 0$); далѣе, всѣ кривыя 3-го порядка въ этихъ точкахъ пересѣченія имѣютъ однѣ и тѣ же полярныя коническія сѣченія, а слѣдовательно, находятся въ соприкосновеніи 2-го порядка. Замѣтимъ еще, что коническія сѣченія K_A и K_B нельзя выбирать вполнѣ произвольно: въ силу полярныхъ свойствъ, поляра точки A относительно K_B должна совпадать съ полярой B относительно K_A.

Въ примѣненіи къ пучку δ (124) можемъ сказать, что онъ вполнѣ опредѣлится, если дадимъ полярныя коническія сѣченія двухъ какихъ-либо точекъ прямой

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz},$$

т. е. касательной къ характеристикѣ, которая въ данномъ случаѣ играетъ роль прямой $L = 0$. За первую точку A возьмемъ точку (x, y, z); полярнымъ коническимъ сѣченіемъ ея K_A не только относительно кривыхъ пучка δ, но даже относительно *всевозможныхъ* индикатрисъ 3-го порядка, соотвѣтствующихъ данному элементу 2-го порядка (x, y, z, p, q, r, s, t), служитъ, какъ мы знаемъ (см. гл. II, § 2, стр. 160), вполнѣ опредѣленное коническое сѣченіе, получаемое увеличеніемъ квадратичной индикатрисы элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) въ отношеніи $\sqrt{3}$. За вторую точку B возьмемъ безконечно-удаленную точку касательной къ характеристикѣ; полярное коническое сѣченіе ея K_B

будетъ такъ называемымъ „діаметромъ 2-го порядка" или діаметральнымъ коническимъ сѣченіемъ кривыхъ пучка δ, сопряженнымъ направленію касательной къ характеристикѣ C. Уравненія K_B можемъ легко найти, если опредѣлимъ полярное коническое сѣченіе безконечно-удаленной точки прямой

$$dy(\xi - x) - dx(\eta - y) = 0,$$

т. е. проэкціи касательной къ характеристикѣ C, относительно пучка δ_z. Вводя однородныя координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3, при чемъ

$$\xi - x = \frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad \eta - y = \frac{\xi_2}{\xi_3}, \tag{127}$$

представимъ уравненіе одной изъ кривыхъ пучка δ_z, для которой $\lambda = 0$, въ слѣдующемъ видѣ:

$$z'''\xi_1^3 + 3z_{,}''\xi_1^2\xi_2 + 3z_{,,}'\xi_1\xi_2^2 + z_{,,,}\xi_2^3 + 3r\xi_1^2\xi_3 + 6s\xi_1\xi_2\xi_3 + \\ + 3t\xi_2^2\xi_3 - 3k\sqrt{1+p^2+q^2}\,.\,\xi_3^3 = 0. \tag{128}$$

Безконечно-удаленная точка прямой

$$dy(\xi - x) - dx(\eta - y) = 0,$$

очевидно, имѣетъ координаты

$$\xi_3' = 0, \quad \xi_1' : \xi_2' = dx : dy;$$

слѣдовательно, полярное коническое сѣченіе этой точки получимъ, вставляя въ уравненіе (126) указанныя значенія ξ_1', ξ_2', ξ_3' и замѣняя G лѣвой частью уравненія (128).

Въ результатѣ имѣемъ

$$(z'''dx + z_{,}''dy)\xi_1^2 + 2(z_{,}''dx + z_{,,}'dy)\xi_1\xi_2 + (z_{,,}'dx + z_{,,,}dy)\xi_2^2 + \\ + 2(rdx + sdy)\xi_1\xi_3 + 2(sdx + tdy)\xi_2\xi_3 = 0.$$

или, принимая во вниманіе соотношенія (123) и (94) и переходя къ прежнимъ координатамъ ξ, η на основаніи формулъ (127):

$$dr(\xi - x)^2 + 2ds(\xi - x)(\eta - y) + dt(\eta - y)^2 + 2dp(\xi - x) + 2dq(\eta - y) = 0. \tag{129}$$

Коническое сѣченіе (129), очевидно, служитъ проэкціей коническаго сѣченія K_B на плоскость xy; чтобы получить уравненія этого послѣдняго, надо къ уравненію (129) присоединить уравненіе плоскости элемента

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y). \tag{130}$$

Выше было упомянуто, что поляра точки A относительно коническаго сѣченія K_B должна совпадать съ полярой B относительно K_A; въ данномъ случаѣ эта прямая есть діаметръ кривой K_A, т. е. квадратичной индикатрисы, увеличенной въ отношеніи $\sqrt{3}$, сопряженный касательной къ характеристикѣ C, или, все равно, діаметръ самой квадратичной индикатрисы, сопряженный тому же направленію; а этотъ діаметръ, какъ извѣстно, совпадаетъ съ образующей характеристической развертывающейся поверхности D: такъ какъ точка A, т. е. точка (x, y, z), лежитъ на этой образующей, то слѣдовательно, коническое сѣченіе K_B проходитъ черезъ точку (x, y, z) и касается въ ней образующей развертывающейся поверхности D; и то, и другое легко слѣдуетъ непосредственно изъ уравненія (129).

Разсмотримъ теперь подробнѣе сѣть кубическихъ индикатрисъ Δ. Вводя однородныя координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 на основаніи формулъ (127) во второе изъ уравненій (121), представимъ его въ видѣ

$$z'''\xi_1^3 + 3z_{,}''\xi_1^2\xi_2 + 3z_{,,}'\xi_1\xi_2^2 + z_{,,,}\xi_2^3 + \\ + 3r\xi_1^2\xi_3 + 6s\xi_1\xi_2\xi_3 + 3t\xi_2^2\xi_3 - 3k\sqrt{1+p^2+q^2}\,.\,\xi_3^3 = 0. \tag{131}$$

Общія рѣшенія уравненій (96), очевидно, могутъ быть представлены такъ:

$$\left.\begin{aligned} z''' &= c''' + \lambda\alpha''' + \mu\beta''' \\ z_{,}'' &= c_{,}'' + \lambda\alpha_{,}'' + \mu\beta_{,}'' \\ z_{,,}' &= c_{,,}' + \lambda\alpha_{,,}' + \mu\beta_{,,}' \\ z_{,,,} &= c_{,,,} + \lambda\alpha_{,,,} + \mu\beta_{,,,}, \end{aligned}\right\} \tag{132}$$

гдѣ c''', $c_{,}''$, $c_{,,}'$, $c_{,,,}$ — какое-либо частное рѣшеніе уравненій (96), λ и μ — произвольные параметры, а α''', $\alpha_{,}''$, $\alpha_{,,}'$, $\alpha_{,,,}$ и β''', $\beta_{,}''$, $\beta_{,,}'$, $\beta_{,,,}$ — двѣ различныхъ системы величинъ, удовлетворяющихъ уравненіямъ, которыя получаются изъ уравненій (96) отбрасываніемъ извѣстныхъ членовъ; другими словами, величины $\alpha_i^{(k)}$ и $\beta_i^{(k)}$ удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} R\alpha''' + S\alpha_{,}'' + T\alpha_{,,}' &= 0 \\ R\alpha_{,}'' + S\alpha_{,,}' + T\alpha_{,,,} &= 0 \\ R\beta''' + S\beta_{,}'' + T\beta_{,,}' &= 0 \\ R\beta_{,}'' + S\beta_{,,}' + T\beta_{,,,} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{133}$$

Вставляя значенія (132) z''', $z_{,}''$, $z_{,,}'$, $z_{,,,}$ въ уравненіе (131), получаемъ

$$U + \lambda V + \mu W = 0. \tag{134}$$

гдѣ U — лѣвая часть уравненія (131) съ замѣной $z_k^{(i)}$ черезъ $c_k^{(i)}$ и слѣдовательно $U = 0$ — одна изъ кривыхъ сѣти Δ_z, далѣе

$$V = \alpha'''\xi_1^3 + 3\alpha_{,}''\xi_1^2\xi_2 + 3\alpha_{,,}'\xi_1\xi_2^2 + \alpha_{,,,}\xi_2^3 \tag{135}$$

и наконецъ

$$W = \beta'''\xi_1^3 + 3\beta_,''\xi_1^2\xi_2 + 3\beta_{,,}'\xi_1\xi_2^2 + \beta_{,,,}\xi_2^3. \tag{136}$$

Уравненіе (134) есть, очевидно, уравненіе сѣти Δ_3, состоящей изъ проэкцій на плоскость xy сѣти Δ. Якобіева кривая сѣти Δ_3 (134) представляется, какъ извѣстно, уравненіемъ

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{vmatrix} = 0,$$

гдѣ, согласно предыдущему, $U_1 = \frac{1}{3}\frac{\partial U}{\partial \xi_1}$, $U_2 = \frac{1}{3}\frac{\partial U}{\partial \xi_2}$, $U_3 = \frac{1}{3}\frac{\partial U}{\partial \xi_3}$ и аналогично для V и W. Такъ какъ производныя V_3 и W_3 тождественно равны нулю, то уравненіе Якобіевой кривой принимаетъ видъ

$$U_3 \cdot \begin{vmatrix} V_1 & V_2 \\ W_1 & W_2 \end{vmatrix} = 0,$$

и слѣдовательно, въ составъ этой кривой входитъ коническое сѣченіе $U_3 = 0$, которое есть полярное коническое сѣченіе точки $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, т. е. точки (x, y, z), относительно кривой $U = 0$; мы уже знаемъ, что это коническое сѣченіе не зависитъ отъ выбора кривой $U = 0$ сѣти Δ_3: оно служитъ проэкціей коническаго сѣченія K_A (см. выше стр. 289). Вторая составная часть Якобіевой кривой представляется уравненіемъ

$$\begin{vmatrix} V_1 & V_2 \\ W_1 & W_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha'''\xi_1^2 + 2\alpha_,''\xi_1\xi_2 + \alpha_{,,}'\xi_2^2. & \alpha_,''\xi_1^2 + 2\alpha_{,,}'\xi_1\xi_2 + \alpha_{,,,}\xi_2^2 \\ \beta'''\xi_1^2 + 2\beta_,''\xi_1\xi_2 + \beta_{,,}'\xi_2^2. & \beta_,''\xi_1^2 + 2\beta_{,,}'\xi_1\xi_2 + \beta_{,,,}\xi_2^2 \end{vmatrix} = 0,$$

на основаніи значеній V и W, опредѣляемыхъ равенствами (135) и (136). Детерминантъ, стоящій въ лѣвой части, очевидно, равенъ произведенію двухъ детерминантовъ

$$\begin{vmatrix} \alpha''', & \alpha_,''. & \alpha_{,,}', & \alpha_{,,,} \\ \beta''', & \beta_,'', & \beta_{,,}'. & \beta_{,,,} \\ a. & b, & c. & \partial \\ a', & b', & c', & \partial' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1^2. & 2\xi_1\xi_2. & \xi_2^2. & 0 \\ 0. & \xi_1^2. & 2\xi_1\xi_2, & \xi_2^2 \\ R. & S. & T, & 0 \\ 0, & R, & S, & T \end{vmatrix}.$$

гдѣ $a, b, c. \partial, a', b', c'. \partial'$ — нѣкоторыя постоянныя (относительно $\xi_1. \xi_2$), удовлетворяющія уравненіямъ

$$Ra + Sb + Tc = 1$$
$$Rb + Sc + T\partial = 0$$
$$Rb' + Sc' + T\partial' = 1.$$

Первый изъ множителей не зависитъ отъ $\xi_1. \xi_2. \xi_3$. слѣдовательно его можемъ отбросить; второй, по раскрытіи, даетъ $(R\xi_2^2 - S\xi_1\xi_2 + T\xi_1^2)^2$. Итакъ, вторая составная часть Якобіевой кривой сѣти Δ_3 есть двукратно-взятая пара прямыхъ

$$R\xi_2^2 - S\xi_1\xi_2 + T\xi_1^2 = 0, \tag{137}$$

или въ координатахъ $\xi. \eta$.

$$R(\eta - y)^2 - S(\xi - x)(\eta - y) + T(\xi - x)^2 = 0. \tag{138}$$

Мы уже встрѣчали нѣсколько разъ (см. гл. III, § 2, стр. 229) пару прямыхъ, представляемую такимъ уравненіемъ: она служитъ проэкціей на плоскость xy двухъ діаметровъ $l. l'$ двойного соприкосновенія квадратичной индикатрисы элемента $(x, y, z, p, q. r. s. t)$ съ двумя безконечно-близкими индикатрисами системы Σ, соотвѣтствующей элементу $(x. y. z. p. q)$. Якобіева кривая сѣти Δ. на основаніи предыдущаго, очевидно. распадается на коническое сѣченіе K_A (полярное коническое сѣченіе точки (x, y, z) относительно кубической индикатрисы любого элемента 3-го порядка, въ составъ котораго входитъ разсматриваемый элементъ 2-го порядка) и на двукратно-взятую пару діаметровъ $l. l'$ двойного соприкосновенія индикатрисы элемента $(x. y. z. p. q, r. s. t)$ съ двумя безконечно-близкими индикатрисами системы Σ.

Полярныя коническія сѣченія любой точки относительно сѣти кривыхъ 3-го порядка образуютъ тоже нѣкоторую сѣть: такъ. полярныя коническія сѣченія точки (ξ_1', ξ_2', ξ_3') относительно сѣти Δ_3 (134) опредѣляются уравненіемъ

$$\xi_1'U_1 + \xi_2'U_2 + \xi_3'U_3 + \lambda(\xi_1'V_1 + \xi_2'V_2 + \xi_3'V_3) +$$
$$+ \mu(\xi_1'W_1 + \xi_2'W_2 + \xi_3'W_3) = 0. \tag{139}$$

которое содержитъ линейно два произвольныхъ параметра $\lambda. \mu$ и слѣдовательно опредѣляетъ сѣть коническихъ сѣченій: при различныхъ значеніяхъ λ и μ получаемъ различныя коническія сѣченія сѣти. такъ что точкѣ $(\xi_1', \xi_2'. \xi_3')$ относительно различныхъ кривыхъ 3-го порядка сѣти (134) соотвѣтствуютъ *различныя* полярныя коническія сѣченія. Исключеніе составляютъ, какъ извѣстно. точки Якобіевой кривой сѣти кривыхъ 3-го порядка: подобной точкѣ соотвѣтствуетъ лишь *пучокъ* полярныхъ коническихъ сѣченій. такъ что каждое коническое сѣченіе этого пучка служитъ полярнымъ коническимъ сѣченіемъ разсматриваемой точки относительно цѣлаго семейства кривыхъ 3-го порядка, входящаго въ составъ данной сѣти. Такъ. если возьмемъ точку $(\xi_1', \xi_2'. \xi_3')$

на одной изъ прямыхъ (137), такъ что для координатъ ея удовлетворяется равенство

$$R\xi_2'^2 - S\xi_1'\xi_2' + T\xi_1'^2 = 0, \tag{140}$$

то уравненіе (139) будетъ зависѣть *существенно* только отъ *одного* параметра, такъ что вмѣсто сѣти коническихъ сѣченій получимъ лишь пучокъ. Чтобы убѣдиться въ этомъ, опредѣлимъ относительно системы (139) поляры произвольной точки (ξ_1''. ξ_2''. ξ_3''), лежащей на другой изъ прямыхъ (137) (не на той, на которой находится точка (ξ_1', ξ_2'. ξ_3')). Обозначая черезъ U_{ik} $\frac{1}{6}$ второй производной U по ξ_i и ξ_k и аналогично для V и W и замѣчая, что тождественно $V_3 = 0$, $W_3 = 0$, получаемъ уравненіе искомой поляры:

$$\begin{aligned} &\xi_1'\xi_1''U_{11} + \xi_2'\xi_2''U_{22} + \xi_3'\xi_3''U_{33} + (\xi_2'\xi_3'' + \xi_2''\xi_3')U_{23} + \\ &+ (\xi_3'\xi_1'' + \xi_3''\xi_1')U_{31} + (\xi_1'\xi_2'' + \xi_1''\xi_2')U_{12} + \\ &+ \lambda[\xi_1'\xi_1''V_{11} + (\xi_1'\xi_2'' + \xi_1''\xi_2')V_{12} + \xi_2'\xi_2''V_{22}] + \\ &+ \mu[\xi_1'\xi_1''W_{11} + (\xi_1'\xi_2'' + \xi_1''\xi_2')W_{12} + \xi_2'\xi_2''W_{22}] = 0. \end{aligned} \tag{141}$$

Такъ какъ точка (ξ_1''. ξ_2''. ξ_3'') лежитъ на второй изъ прямыхъ (137), а точка (ξ_1', ξ_2', ξ_3') — на первой, то прямыя эти можно опредѣлить, какъ прямыя, соединяющія упомянутыя двѣ точки съ точкой (x, y, z), т. е. точкой $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, и слѣдовательно, уравненіе (137) должно совпадать съ уравненіемъ

$$(\xi_2'\xi_1 - \xi_1'\xi_2)(\xi_2''\xi_1 - \xi_1''\xi_2) = \xi_1'\xi_1''\xi_2^2 - (\xi_1'\xi_2'' + \xi_1''\xi_2')\xi_1\xi_2 + \xi_2'\xi_2''\xi_1^2 = 0,$$

откуда слѣдуетъ

$$\xi_1'\xi_1'' : (\xi_1'\xi_2'' + \xi_1''\xi_2') : \xi_2'\xi_2'' = R : S : T. \tag{142}$$

Множители при λ и μ въ лѣвой части уравненія (141) на этомъ основаніи, по включеніи произвольнаго фактора въ λ и μ, принимаютъ соотвѣтственно видъ

$$RV_{11} + SV_{12} + TV_{22}$$

и

$$RW_{11} + SW_{12} + TW_{22}.$$

или на основаніи значеній (135) и (136) V и W,

$$(R\alpha''' + S\alpha_{,}'' + T\alpha_{,,}')\xi_1 + (R\alpha_{,}'' + S\alpha_{,,}' + T\alpha_{,,,})\xi_2$$

и

$$(R\beta''' + S\beta_{,}'' + T\beta_{,,}')\xi_1 + (R\beta_{,}'' + S\beta_{,,}' + T\beta_{,,,})\xi_2.$$

Въ силу равенствъ (133), и тотъ и другой результатъ тождественно исчезаютъ, и слѣдовательно, окончательно получаемъ уравненіе искомой поляры въ такой формѣ:

$$\begin{aligned} &RU_{11} + SU_{12} + TU_{22} + \\ &+ (\xi_1'\xi_3'' + \xi_1''\xi_3')U_{13} + (\xi_2'\xi_3'' + \xi_2''\xi_3')U_{23} + \xi_3'\xi_3''U_{33} = 0; \end{aligned} \tag{143}$$

при этомъ, пользуясь тѣмъ, что точка опредѣляется лишь двумя *отношеніями* между однородными координатами, мы выбрали ξ_1', ξ_2', ξ_3'. ξ_1'', ξ_2''. ξ_3'' такъ, чтобы прямо имѣть

$$\xi_1'\xi_1'' = R, \quad \xi_1'\xi_2'' + \xi_1''\xi_2' = S, \quad \xi_2'\xi_2'' = T.$$

Уравненіе (143) вовсе не содержитъ произвольныхъ параметровъ λ и μ: слѣдовательно, поляры всѣхъ точекъ второй изъ прямыхъ (137) относительно системы полярныхъ коническихъ сѣченій (139) любой точки первой изъ прямыхъ (137) — однѣ и тѣ же для всѣхъ коническихъ сѣченій системы. Отсюда, какъ извѣстно, слѣдуетъ, что система (139) есть пучокъ коническихъ сѣченій, находящихся въ двойномъ соприкосновеніи, при чемъ хордой двойного соприкосновенія служитъ вторая изъ прямыхъ (137). Переходя къ сѣти Δ, получаемъ такой результатъ: полярныя коническія сѣченія любой точки одного изъ діаметровъ l, l' двойного соприкосновенія индикатрисы элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) съ безконечно-близкими индикатрисами системы Σ относительно кривыхъ сѣти Δ составляютъ пучокъ коническихъ сѣченій, находящихся въ двойномъ соприкосновеніи въ двухъ точкахъ, лежащихъ на второмъ изъ діаметровъ двойного соприкосновенія индикатрисы элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) съ безконечно-близкими индикатрисами системы Σ.

Теперь не трудно вывести тѣ условія, при которыхъ пучокъ δ (124) входитъ въ составъ сѣти Δ. Мы видѣли, что любая точка касательной къ характеристикѣ C имѣетъ одно и то же полярное коническое сѣченіе по отношенію ко всѣмъ кривымъ пучка δ; отсюда, на основаніи предыдущаго, заключаемъ, что касательная къ C должна необходимо входить въ составъ Якобіевой кривой сѣти Δ, а это можетъ быть лишь тогда, когда упомянутая касательная совпадаетъ съ однимъ изъ двухъ діаметровъ l, l' (напр. съ діаметромъ l) двойного соприкосновенія индикатрисы элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) съ безконечно-близкими индикатрисами системы Σ. Такимъ образомъ подтверждается, что характеристическое многообразіе 2-го порядка принадлежитъ къ числу тѣхъ многообразій, о которыхъ мы говорили въ § 2 главы III: аналитически полученное нами свойство, очевидно, выражается дифференціальнымъ уравненіемъ

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0.$$

Пучокъ δ, при данной касательной къ C, вполнѣ опредѣляется, какъ было указано выше, двумя коническими сѣченіями K_A и K_B, изъ которыхъ первое есть полярное коническое сѣченіе точки $A(x, y, z)$, а второе — безконечно-удаленной точки B касательной прямой къ кривой C по отношенію ко всѣмъ кривымъ пучка δ. Для того, чтобы пучокъ δ входилъ въ составъ сѣти Δ, необходимо, чтобы коническія сѣченія K_A и K_B входили въ составъ системъ полярныхъ коническихъ сѣченій тѣхъ же точекъ A и B по отношенію къ кривымъ сѣти Δ. Что касается до точки A (x, y, z), то мы знаемъ, что ей соотвѣтствуетъ одно и то же полярное коническое сѣченіе K_A по отношенію ко всевозможнымъ кубическимъ индикатрисамъ, для которыхъ x, y, z, p, q, r, s, t имѣютъ данныя значенія; остается, слѣдовательно, условіе, чтобы коническое сѣченіе K_B входило въ составъ пучка тѣхъ полярныхъ коническихъ сѣченій, которыя соотвѣтствуютъ безконечно-удаленной точкѣ B по отношенію къ кривымъ сѣти Δ. Условіе это — не только необходимое, но и достаточное. Въ самомъ дѣлѣ, всякая кривая сѣти Δ, очевидно, принадлежитъ къ какому-либо пучку, опредѣляемому однимъ изъ діаметровъ двойного соприкосновенія l, коническимъ сѣченіемъ K_A и однимъ изъ коническихъ сѣченій пучка, соотвѣтствующаго безконечно-удаленной точкѣ B діаметра l; всѣхъ пучковъ кубическихъ индикатрисъ подобнаго рода — семейство съ однимъ параметромъ, а такъ какъ сѣть Δ есть семейство кривыхъ съ двумя параметрами, то, очевидно, каждый изъ этихъ пучковъ полностію входитъ въ составъ сѣти Δ. Пучокъ полярныхъ коническихъ сѣченій безконечно-удаленной точки B діаметра l, съ которымъ совпадаетъ касательная къ кривой C, по отношенію къ сѣти Δ состоитъ, какъ было доказано, изъ коническихъ сѣченій, находящихся въ двойномъ соприкосновеніи въ тѣхъ точкахъ діаметра l'; притомъ, на основаніи общихъ полярныхъ свойствъ, всѣ эти коническія сѣченія проходятъ, подобно коническому сѣченію K_B, черезъ точку $A(x, y, z)$ и касаются въ ней образующей развертывающейся характеристической поверхности D *); слѣдовательно, для того, чтобы K_B входило въ составъ этого пучка, необходимо и достаточно, чтобы поляра какой-нибудь точки B' діаметра l' по отношенію къ коническому сѣченію K_B совпадала съ полярой B' по отношенію къ пучку.

*) См. выше, стр. 291.

За точку B' удобно выбрать безконечно-удаленную точку діаметра l'. Для удобства вычисленій, мы можемъ разсматривать пучокъ δ_z и сѣть Δ_z вмѣсто пучка δ и сѣти Δ. Тогда уравненіе поляры безконечно-удаленной точки проэкціи діаметра l' относительно пучка полярныхъ коническихъ сѣченій, соотвѣтствующихъ безконечно-удаленной точкѣ проэкціи l, получимъ, полагая въ уравненіи (143) $\xi_3' = 0$, $\xi_3'' = 0$; оно имѣетъ видъ

$$RU_{11} - SU_{12} - TU_{22} = 0,$$

или, въ силу значенія U,

$$(Rc''' - Sc_,'' - Tc_{,,}')\xi_1 - (Rc_,'' + Sc_{,,}' - Tc_{,,,})\xi_2 + (Rr + Ss - Tt)\xi_3 = 0.$$

Такъ какъ c''', $c_,''$, $c_{,,}'$, $c_{,,,}$ — система рѣшеній уравненій (96) (см. стр. 291), то окончательно представимъ уравненіе поляры въ видѣ

$$-\left|\frac{dF}{dx}\right|\xi_1 - \left|\frac{dF}{dy}\right|\xi_2 - (Rr - Ss - Tt)\xi_3 = 0, \qquad (144)$$

или въ координатахъ ξ, η

$$\left[\frac{dF}{dx}\right](\xi - x) - \left[\frac{dF}{dy}\right](\eta - y) = Rr - Ss - Tt. \qquad (145)$$

Чтобы получить уравненія поляры безконечно-удаленной точки B' діаметра l' относительно пучка полярныхъ коническихъ сѣченій, соотвѣтствующихъ безконечно-удаленной точки B діаметра l относительно кривыхъ сѣти Δ, надо къ уравненію (145) присоединить уравненіе плоскости элемента

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y). \qquad (146)$$

Прямая, опредѣляемая уравненіями (145) и (146), на основаніи общихъ полярныхъ свойствъ (см. стр. 289), служитъ вмѣстѣ съ тѣмъ полярой точки B относительно полярныхъ коническихъ сѣченій, соотвѣтствующихъ точкѣ B' по отношенію къ кривымъ сѣти Δ: мы будемъ ее называть *смѣшанной полярой* точекъ B и B' относительно кривыхъ 3-го порядка сѣти Δ.

Далѣе намъ слѣдовало бы составить уравненіе поляры безконечно-удаленной точки проэкціи діаметра l' относительно проэкціи (129) коническаго сѣченія K_B, другими словами уравненіе проэкціи смѣшанной поляры точекъ B и B' относительно пучка δ, и сравнить его съ уравненіемъ (145): мы бы получили два дифференціальныхъ соотношенія, эквивалентныхъ двумъ послѣднимъ дифференціальнымъ уравненіямъ характеристическаго многообразія 2-го порядка, которыя съ этой точки зрѣнія выражаютъ условія совпаденія упомянутыхъ нами двухъ прямыхъ — проэкцій смѣшанныхъ поляръ точекъ B и B' относительно сѣти Δ и пучка δ или, все равно, смѣшанныхъ поляръ безконечно-удаленныхъ точекъ проэкцій діаметровъ l и l' относительно сѣти Δ_2 и пучка δ_2. Но не трудно показать, что для совпаденія прямыхъ, о которыхъ идетъ рѣчь, достаточно *одного* условія, такъ какъ прямыя эти необходимо проходятъ черезъ одну точку. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе смѣшанной поляры точекъ (ξ_1', ξ_2', ξ_3') и $(\xi_1'', \xi_2'', \xi_3'')$ относительно произвольной кривой 3-го порядка $H=0$, очевидно, имѣетъ видъ

$$\xi_1'\xi_1''H_{11} + \xi_2'\xi_2''H_{22} + \xi_3'\xi_3''H_{33} + (\xi_2'\xi_3'' + \xi_2''\xi_3')H_{23} +$$
$$+ (\xi_3'\xi_1'' + \xi_3''\xi_1')H_{31} + (\xi_1'\xi_2'' + \xi_1''\xi_2')H_{12} = 0.$$

гдѣ H_{il} имѣютъ обычное значеніе. Для безконечно-удаленныхъ точекъ проэкцій діаметровъ l и l' мы должны положить (см. стр. 294)

$$\xi_3' = 0, \quad \xi_3'' = 0, \quad \xi_1'\xi_1'' : (\xi_1'\xi_2'' + \xi_1''\xi_2') : \xi_2'\xi_2'' = R : S : T;$$

слѣдовательно, предыдущее уравненіе обращается въ уравненіе такого вида:

$$RH_{11} + SH_{12} + TH_{22} = 0. \qquad (147)$$

Если кривая $H=0$ есть проэкція (131) произвольной кубической индикатрисы, соотвѣтствующей даннымъ значеніямъ x, y, z, p, q, r, s, t, то уравненіе смѣшанной поляры (147) напишется такъ:

$$(Rz''' + Sz_,'' + Tz_{,,}')\xi_1 + (Rz_,'' + Sz_{,,}' + Tz_{,,,})\xi_2 + (Rr + Ss + Tt)\xi_3 = 0. \qquad (148)$$

Замѣтимъ теперь, что сѣть Δ_2 и пучокъ δ_2 входятъ въ составъ одной и той же системы Γ кривыхъ 3-го порядка 3-й ступени (съ тремя произвольными параметрами), образуемой проэкціями на плоскость xy кубическихъ индикатрисъ (131), для которыхъ $z''', z_,'', z_{,,}', z_{,,,}$ связаны уравненіемъ

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = (Rz''' + Sz_,'' + Tz_{,,}')dx +$$
$$+ (Rz_,'' + Sz_{,,}' + Tz_{,,,})dy + \left[\frac{dF}{dx}\right]dx + \left[\frac{dF}{dy}\right]dy = 0. \qquad (149)$$

Что касается до сѣти Δ_2, то это вполнѣ очевидно, такъ какъ для нея отдѣльно $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{dF}{dy} = 0$; для $z''', z_,'', z_{,,}', z_{,,,}$, входящихъ въ урав-

ненія кривыхъ пучка δ_2, имѣемъ соотношенія

$$\left.\begin{aligned} dr &= z'''dx + z_,''dy \\ ds &= z_,''dx + z_{,,}'dy \\ dt &= z_{,,}'dx + z_{,,,}dy. \end{aligned}\right\} \qquad (120)$$

но кромѣ того, по условію, для многообразія $M_{1,1}^{(1)}$ имѣетъ мѣсто равенство $F=0$, а слѣдовательно и

$$dF = Rdr + Sds + Tdt + Pdp + Qdq + Zdz + Xdx + Ydy = 0,$$

откуда, въ силу соотношеній (120), получаемъ также и для пучка δ_2

$$(Rz''' + Sz_,'' + Tz_{,,}')dx + (Rz_,'' + Sz_{,,}' + Tz_{,,,})dy +$$
$$+ \left[\frac{dF}{dx}\right]dx + \left[\frac{dF}{dy}\right]dy = \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = 0. \qquad (149)$$

Уравненіе смѣшанной поляры (148) для всѣхъ кривыхъ системы Γ, для которыхъ имѣетъ мѣсто соотношеніе (149), линейно зависитъ отъ одного параметра, такъ какъ два выраженія, содержащія произвольныя величины, $Rz''' + Sz_,'' + Tz_{,,}'$ и $Rz_,'' + Sz_{,,}' + Tz_{,,,}$ связаны однимъ линейнымъ соотношеніемъ (149); слѣдовательно, смѣшанныя поляры для всѣхъ кривыхъ системы Γ проходятъ черезъ одну и ту же точку. Не трудно убѣдиться, что точка эта лежитъ на проэкціи касательной къ кривой C (въ нашемъ случаѣ, слѣдовательно, на проэкціи діаметра l). Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе проэкціи касательной есть

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy}.$$

или

$$\xi_1 : \xi_2 = dx : dy;$$

полагая въ уравненіи (148) $\xi_1 = \epsilon dx$, $\xi_2 = \epsilon dy$, гдѣ ϵ — произвольный множитель, получаемъ

$$\xi_3 = \epsilon \frac{\left[\frac{dF}{dx}\right]dx + \left[\frac{dF}{dy}\right]dy}{Rr + Ss + Tt}.$$

и слѣдовательно, всѣ смѣшанныя поляры, о которыхъ идетъ рѣчь, проходятъ черезъ одну и ту же точку съ однородными координатами

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = (Rr+Ss+Tt)dx : (Rr+Ss+Tt)dy : \left\{ \left[\frac{dF}{dx}\right]dx + \left[\frac{dF}{dy}\right]dy \right\} :$$

координаты ξ, η этой точки опредѣляются равенствами

$$\xi - x = -\frac{(Rr + Ss + Tt)}{\left[\frac{dF}{dx}\right]dx + \left[\frac{dF}{dy}\right]dy}dx; \quad \eta - y = \frac{(Rr + Ss + Tt)}{\left[\frac{dF}{dx}\right]dx + \left[\frac{dF}{dy}\right]dy}dy. \qquad (150)$$

Черезъ эту точку, на основаніи предыдущаго, проходятъ, между прочимъ, смѣшанныя поляры безконечно-удаленныхъ точекъ проэкцій діаметровъ l и l' относительно кривыхъ сѣти Δ_2 и пучка δ_2; слѣдовательно, для того, чтобы эти прямыя совпадали, достаточно, чтобы онѣ имѣли одно направленіе.

Переходя отъ проэкцій на плоскость xy къ плоскости элемента, можемъ равнымъ образомъ сказать, что смѣшанныя поляры точекъ B и B' относительно сѣти Δ и пучка δ проходятъ черезъ одну точку на касательной къ C, координаты ξ, η которой опредѣляются изъ равенствъ (150), а координата ζ — изъ уравненія плоскости элемента (146), откуда, очевидно,

$$\zeta - z = \frac{(Rr + Ss + Tt)}{\left[\frac{dF}{dx}\right]dx + \left[\frac{dF}{dy}\right]dy}dz. \qquad (151)$$

Для совпаденія смѣшанныхъ поляръ достаточно поэтому, чтобы онѣ имѣли одно направленіе. Мы можемъ для удобства провести черезъ точку (x, y, z) прямыя, параллельныя соотвѣтственно той и другой смѣшанной полярѣ; тогда эти прямыя, очевидно, должны совпадать, при чемъ условіе это выражается, понятно, однимъ равенствомъ. Уравненія смѣшанной поляры по отношенію къ сѣти Δ даны выше (ур. (145) и (146)); прямая, проходящая черезъ точку (x, y, z) и параллельная ей, опредѣляется уравненіями

$$\left.\begin{aligned} &\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y), \\ &\left[\frac{dF}{dx}\right](\xi - x) + \left[\frac{dF}{dy}\right](\eta - y) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (152)$$

или иначе уравненіями

$$\frac{\xi - x}{\left[\frac{dF}{dy}\right]} = \frac{\eta - y}{-\left[\frac{dF}{dx}\right]} = \frac{\zeta - z}{p\left[\frac{dF}{dy}\right] - q\left[\frac{dF}{dx}\right]}. \qquad (152')$$

Второе изъ уравненій (152) опредѣляетъ прямую, играющую аналогичную роль по отношенію къ сѣти Δ_2. Смѣшанная поляра точекъ B и B'

по отношенію къ пучку δ есть, очевидно, діаметръ коническаго сѣченія K_B, сопряженный направленію l'; направленіе этой поляры и направленіе l' поэтому гармонически сопряжены относительно направленій асимптотъ коническаго сѣченія K_B. Прямая, параллельная смѣшанной полярѣ точекъ B и B' относительно пучка δ и проходящая черезъ точку (x, y, z), можетъ быть, на основаніи предыдущаго, опредѣлена какъ прямая, гармонически сопряженная діаметру двойного соприкосновенія l' относительно пары прямыхъ, проходящихъ черезъ точку (x, y, z) параллельно асимптотамъ коническаго сѣченія K_B. Принимая во вниманіе уравненія (129) и (130) K_B, непосредственно находимъ уравненія упомянутой пары прямыхъ

$$\left.\begin{aligned} &\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) \\ &dr(\xi - x)^2 + 2ds(\xi - x)(\eta - y) + dt(\eta - y)^2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (153)$$

Второе изъ этихъ уравненій опредѣляетъ на плоскости xy пару прямыхъ, играющихъ аналогичную роль по отношенію къ пучку δ_2.

Замѣтимъ, что мы могли бы придти къ тѣмъ же результатамъ нѣсколько инымъ путемъ. Пучокъ δ и сѣть Δ, какъ мы видѣли, входятъ въ составъ линейной системы 3-й ступени Γ, опредѣляемой равенствомъ (149). Для того, чтобы пучокъ δ входилъ въ составъ сѣти Δ, достаточно поэтому, чтобы онъ входилъ еще въ составъ нѣкоторой иной линейной системы, отличной отъ Γ и заключающей сѣть Δ; за такую систему удобно взять систему Λ, опредѣляемую однороднымъ линейнымъ соотношеніемъ между z''', $z_{\prime}''$, $z_{\prime\prime}'$, $z_{\prime\prime\prime}$

$$\left[\frac{dF}{dy}\right]\cdot\frac{dF}{dx} - \left[\frac{dF}{dx}\right]\cdot\frac{dF}{dy} =$$

$$= \left[\frac{dF}{dy}\right]\cdot(Rz''' + Sz_{\prime}'' + Tz_{\prime\prime}') - \left[\frac{dF}{dx}\right]\cdot(Rz_{\prime}'' + Sz_{\prime\prime}' + Tz_{\prime\prime\prime}) = 0. \qquad (154)$$

Смѣшанныя поляры точекъ B и B' относительно кривыхъ системы Λ образуютъ систему прямыхъ, параллельныхъ прямой (152); чтобы въ этомъ убѣдиться, достаточно разсмотрѣть уравненіе (148) проэкціи упомянутой смѣшанной поляры для кривыхъ системы Λ. Обратно, всѣ кубическія индикатрисы, по отношенію къ которымъ смѣшанныя поляры точекъ B и B' параллельны прямой (152), принадлежатъ къ системѣ Λ. Въ самомъ дѣлѣ, въ уравненіи (148) проэкціи смѣшанной поляры точекъ B и B' относительно любой изъ этихъ индикатрисъ, коэффиціенты при ξ_1 и ξ_2 должны быть, очевидно, пропорціональны таковымъ же коэффиціентамъ во второмъ изъ уравненій

(152), а это и приводитъ насъ къ соотношенію (154), характеризующему систему Λ. Такимъ образомъ, для того, чтобы пучокъ δ, для котораго касательная къ C имѣетъ направленіе одного изъ діаметровъ l, l', входилъ въ составъ системы Λ, а слѣдовательно и сѣти Δ, необходимо и достаточно, чтобы общая смѣшанная поляра точекъ B и B' относительно всѣхъ кривыхъ пучка δ, или, все равно, параллельная ей прямая — гармонически сопряженная діаметру l' относительно пары прямыхъ (153)—была параллельна прямой (152).

Для того, чтобы дать болѣе простое геометрическое опредѣленіе прямой (152) и парѣ прямыхъ (153), удобнѣе воспользоваться геометрической интерпретаціей элемента 2-го порядка (x, y, z, p, q, r, s, t), отличной отъ той, которой мы до сихъ поръ преимущественно пользовались. Въ самомъ началѣ главы II-й мы уже упоминали о параболоидѣ, сѣченіе котораго съ плоскостью, параллельной плоскости элемента и отстоящей отъ нея на разстояніе $\frac{1}{2}k$, есть индикатриса элемента (x, y, z, p, q, r, s, t), не перенесенная еще только въ плоскость элемента. При этомъ, собственно, для даннаго элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) направленіе діаметровъ (оси) параболоида мы можемъ выбрать вполнѣ произвольно: если помѣстимъ индикатрису элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) въ плоскость, параллельную плоскости элемента и отстоящую отъ нея на разстояніе $= \frac{1}{2}k$, притомъ такъ, чтобы оси индикатрисы имѣли должное направленіе, а центръ лежалъ бы въ произвольной точкѣ плоскости, и затѣмъ станемъ перемѣщать индикатрису поступательно такъ, чтобы центръ описывалъ прямую, проходящую черезъ точку (x, y, z), измѣняя въ то же самое время размѣры индикатрисы такъ, чтобы новыя значенія параметра k всегда давали двойное разстояніе ея плоскости отъ плоскости элемента,—то геометрическимъ мѣстомъ получаемыхъ кривыхъ будетъ, очевидно, одинъ изъ выше упомянутыхъ параболоидовъ; діаметры (ось) этого параболоида всѣ параллельны прямой, которую описывалъ центръ индикатрисы.

Въ началѣ главы II-й (стр. 97) мы предполагали, что діаметры параболоида перпендикулярны плоскости элемента, такъ что точка (x, y, z) служитъ его вершиной: въ томъ случаѣ, когда элементъ (x, y, z, p, q, r, s, t) принадлежитъ нѣкоторой поверхности, параболоидъ, о которомъ идетъ рѣчь, есть такъ-называемый *оскулирующій* параболоидъ въ точкѣ (x, y, z): это же названіе сохранимъ за нимъ и для произвольнаго элемента (x, y, z, p, q, r, s, t). Нѣсколько далѣе (стр. 100) въ той же главѣ мы упоминали о параболоидѣ, діаметры

котораго параллельны оси z и который, очевидно, можетъ быть опредѣленъ какъ геометрическое мѣсто кривыхъ

$$\left.\begin{aligned} \zeta - z - p(\xi - x) - q(\eta - y) &= \frac{1}{2}k \cdot \sqrt{1 + p^2 - q^2} \\ r(\xi - x)^2 + 2s(\xi - x)(\eta - y) + t(\eta - y)^2 &= k \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}. \end{aligned}\right\} \quad (155)$$

получаемыхъ при измѣненіи k; исключая изъ уравненій (155) параметръ k, получаемъ уравненіе

$$2(\zeta - z) = 2p(\xi - x) + 2q(\eta - y) + r(\xi - x)^2 + 2s(\xi - x)(\eta - y) + t(\eta - y)^2 \quad (156)$$

упомянутаго параболоида. Мы будемъ называть его *индицирующимъ* параболоидомъ даннаго элемента; коэффиціенты его уравненія непосредственно даютъ координаты элемента (x, y, z, p, q, r, s, t). Оскулирующій и индицирующій параболоиды даннаго элемента въ точкѣ (x, y, z) имѣютъ соприкосновеніе 2-го порядка. Если опредѣлимъ многообразіе элементовъ 2-го порядка типа $M^{(2)}_{2,2}$, носителемъ котораго служитъ индицирующій параболоидъ элемента (x, y, z, p, q, r, s, t), то, очевидно, для всѣхъ элементовъ многообразія $M^{(2)}_{2,2}$ упомянутый параболоидъ будетъ служить индицирующимъ параболоидомъ. Присоединяя къ уравненіямъ многообразія $M^{(2)}_{2,2}$ данное уравненіе $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, выдѣлимъ интегральное многообразіе одного измѣренія $H^{(1)}_{1,1}$ уравненія $F = 0$: если координаты элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) удовлетворяютъ уравненію $F = 0$, то элементъ этотъ войдетъ въ составъ многообразія $H^{(1)}_{1,1}$. Точки элементовъ $H^{(1)}_{1,1}$ образуютъ нѣкоторую кривую (H), проходящую черезъ точку (x, y, z) и вполнѣ опредѣляемую для даннаго элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) уравненіемъ $F = 0$. Согласно опредѣленію индицирующаго параболоида, многообразіе $H^{(1)}_{1,1}$ сохраняетъ свое значеніе для всѣхъ своихъ элементовъ; то же самое скажемъ и про кривую (H). Въ силу уравненія индицирующаго параболоида (156), всѣ элементы многообразія $M^{(2)}_{2,2}$ соотвѣтствуютъ однимъ и тѣмъ же значеніямъ кооординатъ r, s, t, такъ какъ изъ этого уравненія имѣемъ

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} = r, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} = s, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} = t.$$

Многообразіе $M^{(1)}_{1,1}$ можетъ быть даже опредѣлено какъ интегральное многообразіе одного измѣренія, для котораго имѣемъ $r = const.$, $s = const.$

$t=const$. Называя черезъ $\delta x, \delta y, \delta z, \delta p, \delta q$ дифференціалы соотвѣтственныхъ координатъ, взятые въ предположеніи, что x, y, z, p, q выражены въ функціи одного параметра въ силу уравненій многообразія $H^{(1)}_{1,1}$, имѣемъ, на основаніи предшествующаго замѣчанія,

$$\delta F = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + P\delta p + Q\delta q = 0,$$

или, такъ какъ для $H^{(1)}_{1,1}$

$$\begin{aligned} \delta z &= p\delta x + q\delta y \\ \delta p &= r\delta x + s\delta y \\ \delta q &= s\delta x + t\delta y, \end{aligned}$$

то иначе

$$\delta F = \left[\frac{dF}{dx}\right]\delta x + \left[\frac{dF}{dy}\right]\delta y = 0. \tag{157}$$

Если подъ (x, y, z, p, q, r, s, t) будемъ разумѣть опредѣленный элементъ, удовлетворяющій уравненію $F=0$ и входящій въ составъ многообразія $H^{(1)}_{1,1}$, то касательная къ кривой (H) въ точкѣ (x, y, z), очевидно, опредѣляется уравненіями

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$
$$\frac{\xi - x}{\delta x} = \frac{\eta - y}{\delta y}.$$

Изъ соотношенія (157) $\delta y : \delta x = \left[\frac{dF}{dx}\right] : -\left[\frac{dF}{dy}\right]$; слѣдовательно, иначе эти уравненія могутъ быть написаны

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$
$$\left[\frac{dF}{dx}\right](\xi - x) + \left[\frac{dF}{dy}\right](\eta - y) = 0,$$

и въ этой формѣ они, какъ видимъ, совпадаютъ съ уравненіями (152). Такимъ образомъ, прямая, которая у насъ опредѣлялась выше уравненіями (152), можетъ быть иначе опредѣлена какъ касательная въ точкѣ элемента къ соотвѣтствующей этому элементу кривой (H). Замѣтимъ, что многообразіе $H^{(1)}_{1,1}$, точки элементовъ котораго образуютъ кривую (H), по отношенію къ данному уравненію 2-го порядка, играетъ такую же роль, какую по отношенію къ уравненію 1-го порядка играетъ интегральное многообразіе одного измѣренія, элементы котораго со-

стоятъ изъ одной плоскости и точекъ плоской кривой (S), опредѣляемой для этой плоскости даннымъ уравненіемъ 1-го порядка (см. гл. I, § 3, стр. 58, 60).

Разсмотримъ теперь индицирующіе параболоиды элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) характеристическаго многообразія $M^{(1)}_{1,1}$ и безконечно-близкаго элемента того же многообразія. Кривая пересѣченія этихъ параболоидовъ опредѣляется, очевидно, уравненіемъ (156) перваго параболоида и дифференціаломъ этого уравненія, взятымъ въ предположеніи, что x, y, z, p, q, r, s, t — функціи одного параметра въ силу уравненій многообразія $M^{(1)}_{1,1}$: послѣднее уравненіе имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\begin{aligned} -2dz = &-2pdx - 2qdy + 2dp.(\xi - x) + 2dq.(\eta - y) - 2r(\xi - x)dx - 2s(\xi - x)dy - \\ &-2s(\eta - y)dx - 2t(\eta - y)dy + dr.(\xi - x)^2 + 2ds.(\xi - x)(\eta - y) + dt.(\eta - y)^2, \end{aligned}$$

или, такъ какъ для многообразія $M^{(1)}_{1,1}$

$$\begin{aligned} dz &= pdx + qdy \\ dp &= rdx + sdy \\ dq &= sdx + tdy, \end{aligned}$$

то иначе:

$$dr.(\xi - x)^2 + 2ds.(\xi - x)(\eta - y) + dt.(\eta - y)^2 = 0. \tag{158}$$

Послѣднее уравненіе есть уравненіе пары плоскостей, проходящихъ черезъ точку (x, y, z) и параллельныхъ оси z; слѣдовательно, кривая пересѣченія двухъ индицирующихъ параболоидовъ распадается на двѣ параболы, проходящія черезъ точку (x, y, z) и имѣющія діаметры параллельные оси z: результатъ этотъ мы могли предвидѣть, такъ какъ два безконечно-близкихъ индицирующихъ параболоида, какъ не трудно убѣдиться, соприкасаются въ двухъ точкахъ — въ безконечно-удаленной точкѣ оси z и въ точкѣ элемента многообразія $M^{(1)}_{1,1}$ безконечно-близкаго элементу (x, y, z, p, q, r, s, t). Уравненіе (158) на плоскости xy представляетъ пару прямыхъ, которыя, очевидно, служатъ проэкціями касательныхъ t, t' къ двумъ параболамъ, на которыя распадается кривая пересѣченія безконечно-близкихъ индицирующихъ параболоидовъ: такъ какъ t и t' лежатъ кромѣ того въ касательной плоскости 1-го параболоида, т. е. въ плоскости элемента (x, y, z, p, q, r, s, t), то уравненія ихъ получимъ, присоединяя къ уравненію (158) уравненіе плоскости элемента

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y). \tag{146}$$

Сравнивая уравненія (158) и (146) съ двумя уравненіями (153), видимъ, что они тождественны; слѣдовательно, пара прямыхъ, опредѣляемая уравненіями (153), можетъ быть иначе опредѣлена какъ пара касательныхъ t, t' въ точкѣ (x, y, z) къ двумъ параболамъ—составнымъ частямъ кривой пересѣченія индицирующихъ параболоидовъ элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) и безконечно-близкаго элемента многообразія $M^{(1)}_{1,1}$. Можно то же самое опредѣленіе высказать нѣсколько иначе: индицирующіе параболоиды элементовъ многообразія $M^{(1)}_{1,1}$ образуютъ нѣкоторое семейство, зависящее отъ одного параметра; огибающая поверхность (E) этого семейства, какъ извѣстно, можетъ быть разсматриваема какъ геометрическое мѣсто кривыхъ пересѣченія двухъ безконечно-близкихъ параболоидовъ семейства; слѣдовательно, поверхность (E) содержитъ два семейства параболъ, и прямыя t, t' могутъ быть опредѣлены какъ касательныя къ двумъ параболамъ (разныхъ семействъ) поверхности (E), проходящимъ черезъ точку (x, y, z).

Сопоставляя послѣдніе наши результаты съ предыдущими, можемъ послѣднее изъ условій, необходимыхъ и достаточныхъ для того, чтобы многообразіе $M^{(1)}_{1,1}$ было характеристическимъ многообразіемъ 2-го порядка, выразить такъ: для каждаго элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) прямая, сопряженная діаметру l' (отличному отъ касательной къ кривой C точекъ элементовъ многоообразія) относительно пары касательныхъ t, t' къ двумъ параболамъ — составнымъ частямъ кривой пересѣченія индицирующаго параболоида элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) съ безконечно-близкимъ параболоидомъ,—должна касаться кривой (H), опредѣляемой для элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) даннымъ уравненіемъ. Если воспользоваться поверхностью (E), о которой мы говорили выше, то условіе формулируется нѣсколько иначе: именно, прямыя t, t' опредѣляются какъ касательныя въ точкѣ (x, y, z) къ двумъ параболамъ, проходящимъ черезъ эту точку по поверхности (E), или какъ касательныя въ точкѣ (x, y, z) къ кривой прикосновенія индицирующаго параболоида къ поверхности (E) (кривая прикосновенія состоитъ изъ тѣхъ же двухъ параболъ).

Не трудно и всѣ прочія условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы многообразіе $M^{(1)}_{1,1}$ было характеристическимъ многообразіемъ 2-го порядка, или, все равно, основныя свойства, опредѣляющія характеристическое многообразіе 2-го порядка, выразить въ иной формѣ, согласно новой интерпретаціи элементовъ 2-го порядка. Достаточно для этого помнить, что сѣченіе индицирующаго параболоида плоскостью,

отстоящей отъ плоскости элемента на $\frac{1}{2}k$, есть индикатриса элемента. Уравненіе $F=0$ для каждаго элемента 1-го порядка (x, y, z, p, q) опредѣляетъ семейство индицирующихъ параболоидовъ, зависящее отъ двухъ параметровъ; въ сѣченіи плоскостью, отстоящей отъ плоскости элемента (x, y, z, p, q) на разстояніи $\frac{1}{2}k$, получимъ систему кривыхъ 2-го порядка, которая, по перенесеніи въ плоскость элемента, совпадаетъ, очевидно, съ системой индикатрисъ Σ; на этомъ основаніи и семейство индицирующихъ параболоидовъ будемъ называть семействомъ Σ. Два произвольныхъ параболоида семейства Σ въ двухъ точкахъ имѣютъ общія касательныя плоскости: въ точкѣ (x, y, z)—плоскость элемента (x, y, z, p, q) и въ безконечно-удаленной точкѣ оси z—безконечно-удаленную плоскость пространства; слѣдовательно, кривая пересѣченія ихъ распадается на двѣ параболы, проходящія черезъ точку (x, y, z) и имѣющія діаметры параллельные оси z; касательныя въ точкѣ (x, y, z) этихъ параболъ даютъ намъ, очевидно, два діаметра, на которыхъ лежать четыре точки пересѣченія двухъ соотвѣтствующихъ индикатрисъ. Разсматривая параболоиды семейства Σ, безконечно-близкіе къ индицирующему параболоиду элемента (x, y, z, p, q, r, s, t), мы на основаніи сдѣланнаго замѣчанія и на основаніи того, что намъ извѣстно объ индикатрисахъ системы Σ, непосредственно заключаемъ, что существуетъ два параболоида семейства Σ, безконечно-близкихъ къ индицирующему параболоиду элемента (x, y, z, p, q, r, s, t), изъ которыхъ каждый прикасается къ первому во всѣхъ точкахъ нѣкоторой параболы, проходящей черезъ точку (x, y, z) и имѣющей діаметръ параллельный оси z; касательныя прямыя въ точкѣ (x, y, z) къ этимъ двумъ параболамъ, очевидно, совпадаютъ съ діаметрами двойного соприкосновенія l, l' индикатрисы элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) съ двумя безконечно-близкими индикатрисами системы Σ. Наконецъ, слѣдуетъ замѣтить, что индикатриса элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) служитъ для поверхности соотвѣтствующаго параболоида индикатрисой въ точкѣ (x, y, z), въ частности при безконечно-маломъ k—индикатрисой Dupin-а; поэтому, на основаніи общихъ свойствъ индикатрисы поверхности, во-первыхъ, произвольный діаметръ индикатрисы $=2\sqrt{k\rho}$, гдѣ ρ — радіусъ кривизны въ точкѣ (x, y, z) того нормальнаго сѣченія индицирующаго параболоида, которое проходитъ черезъ діаметръ индикатрисы, и во-вторыхъ два произвольныхъ сопряженныхъ діаметра индикатрисы служатъ касательными къ такъ-называемымъ сопряженнымъ кривымъ на поверхности индицирующаго параболоида въ точкѣ (x, y, z), или иначе—

направленія этихъ діаметровъ совпадаютъ съ двумя сопряженными направленіями въ точкѣ (x, y, z) на поверхности параболоида.

На основаніи всего изложеннаго, мы можемъ окончательно формулировать основныя свойства, опредѣляющія характеристическое многообразіе $M^{(1)}_{1,1}$ 2-го порядка даннаго уравненія $F=0$, слѣдующимъ образомъ:

„развертывающаяся (характеристическая) поверхность D, образуемая плоскостями элементовъ характеристическаго многообразія $M^{(1)}_{1,1}$, описана около кривой C, образуемой точками элементовъ (характеристики);

для каждаго элемента касательная къ C и образующая поверхности D представляютъ два сопряженныхъ направленія въ точкѣ элемента относительно соотвѣтствующаго индицирующаго параболоида;

нормальныя сѣченія развертывающейся поверхности D и индицирующаго параболоида, проходящія черезъ касательную къ C, имѣютъ въ точкѣ элемента одинаковый радіусъ кривизны;

касательная къ C для каждаго элемента совпадаетъ съ одной изъ прямыхъ l, l' (напр. съ l), касательныхъ къ параболамъ, по которымъ индицирующій параболоидъ элемента прикасается къ двумъ безконечно-близкимъ параболоидамъ соотвѣтствующаго семейства Σ, заключающаго упомянутый индицирующій параболоидъ;

прямая, гармонически сопряженная прямой l' (отличной отъ касательной къ C) относительно пары прямыхъ t, t', касательныхъ въ точкѣ элемента къ двумъ параболамъ, составляющимъ кривую прикосновенія индицирующаго параболоида элемента къ поверхности (E) — облекающей всего семейства индицирующихъ параболоидовъ многообразія $M^{(1)}_{1,1}$, касается кривой (H), опредѣляемой даннымъ уравненіемъ для разсматриваемаго элемента (т. е. кривой, вдоль которой по индицирующему параболоиду разсматриваемаго элемента располагаются элементы, удовлетворяющіе данному уравненію)".

Третье свойство можно иначе выразить такъ:

„для каждаго элемента индицирующій параболоидъ оскулируетъ развертывающуюся поверхность D по направленію касательной къ C".

Небезъинтересно еще замѣтить, что поверхность (E) въ точкѣ (x, y, z) каждаго элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) характеристическаго многообразія $M^{(1)}_{1,1}$ имѣетъ соприкосновеніе 2-го порядка съ соотвѣтствующимъ индицирующимъ параболоидомъ, почему второе и третье свойства могутъ быть иначе формулированы слѣдующимъ образомъ:

„направленія касательной къ характеристикѣ C и образующей поверхности D въ точкѣ (x, y, z) сопряжены относительно поверхности (E);

поверхность (E) оскулируетъ развертывающуюся поверхность D по направленію касательной къ C въ точкѣ (x, y, z)".

Не трудно убѣдиться, что основныя свойства, опредѣляющія характеристическое многообразіе 2-го порядка, формулируются точно такъ же, если элементы 2-го порядка станемъ интерпретировать ихъ *оскулирующими* параболоидами. Въ самомъ дѣлѣ, если бы оси координатъ x, y, z мы выбрали такъ, чтобы ось z была перпендикулярна плоскости никакого-либо элемента характеристическаго многообразія $M^{(1)}_{1,1}$, то индицирующій параболоидъ этого элемента (и даже всѣхъ элементовъ, плоскости которыхъ параллельны плоскости выбраннаго) совпалъ бы съ оскулирующимъ, и слѣдовательно, какъ непосредственно очевидно, второе, третье и четвертое свойство сохраняются и для оскулирующихъ параболоидовъ; то же самое скажемъ и про первое свойство, которое вовсе не касается элементовъ 2-го порядка; при этомъ вмѣсто семейства Σ индицирующихъ параболоидовъ слѣдуетъ конечно разсматривать семейство Σ' оскулирующихъ параболоидовъ, опредѣляемыхъ для даннаго элемента (x, y, z, p, q) даннымъ уравненіемъ. Остается пятое свойство, которое представляетъ нѣкоторыя затрудненія, такъ какъ здѣсь приходится разсматривать кривую прикосновенія индицирующаго параболоида къ облекающей поверхности (E), или иначе кривую пересѣченія параболоида съ индицирующимъ параболоидомъ безконечно-близкаго элемента. Если оси x, y, z выберемъ, какъ было указано, то индицирующій параболоидъ элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) совпадетъ съ оскулирующимъ, но для безконечно-близкаго элемента этого уже не будетъ: оскулирующій и индицирующій параболоиды будутъ для него безконечно-мало отличаться въ направленіи діаметровъ. Такъ какъ однако индицирующій и оскулирующій параболоиды всякаго элемента находятся въ точкѣ элемента въ соприкосновеніи *второго* порядка, то естественно ожидать, что въ данномъ случаѣ кривая пересѣченія двухъ оскулирующихъ параболоидовъ въ точкѣ (x, y, z) будетъ имѣть тѣ же двѣ касательныхъ (слѣдовательно, эта точка для нея — двойная), какъ и кривая пересѣченія двухъ индицирующихъ параболоидовъ. Чтобы окончательно въ этомъ убѣдиться, предположимъ, что уравненіе оскулирующаго параболоида для произвольнаго элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) имѣетъ видъ

$$\begin{aligned} A_{11}(\xi - x)^2 + A_{22}(\eta - y)^2 + A_{33}(\zeta - z)^2 + 2A_{12}(\xi - x)(\eta - y) + \\ + 2A_{23}(\eta - y)(\zeta - z) + 2A_{31}(\zeta - z)(\xi - x) + 2B_1(\xi - x) + \\ + 2B_2(\eta - y) - 2(\zeta - z) = 0. \end{aligned} \qquad (159)$$

При произвольныхъ коэффиціентахъ это уравненіе представляетъ нѣкоторую поверхность 2-го порядка, проходящую черезъ точку (x, y, z). Для того, чтобы эта поверхность была оскулирующимъ параболоидомъ элемента, необходимо, во-первыхъ, чтобы полярной плоскостью безконечно-удаленной точки прямой

$$\frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = \frac{\zeta - z}{-1}, \tag{160}$$

перпендикулярной къ плоскости элемента, относительно поверхности служила безконечно-удаленная плоскость пространства, во-вторыхъ, чтобы въ точкѣ (x, y, z) поверхность касалась плоскости элемента, т. е. чтобы значенія частныхъ производныхъ $\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}$ и $\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}$, получаемыхъ изъ уравненія (159), при $\xi = x$, $\eta = y$ и слѣдовательно $\zeta = z$, равнялись соотвѣтственно p и q, и въ-третьихъ, чтобы значенія частныхъ производныхъ 2-го порядка $\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}$, $\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\partial\eta}$, $\frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2}$ при тѣхъ же значеніяхъ ξ, η, ζ равнялись соотвѣтственно r, s, t. Условія эти приводятъ, какъ не трудно провѣрить, къ слѣдующимъ равенствамъ

$$\left.\begin{array}{c} A_{11}p + A_{12}q = A_{13};\quad A_{12}p + A_{22}q = A_{23};\quad A_{13}p + A_{23}q = A_{33};\\ B_1 - p = 0;\quad B_2 - q = 0;\\ A_{11} + 2A_{13}p + A_{33}p^2 - r = 0;\quad A_{12} + A_{23}p + A_{13}q + A_{33}pq - s = 0;\\ A_{22} + 2A_{23}q + A_{33}q^2 - t = 0. \end{array}\right\} \tag{161}$$

Первыя три изъ этихъ равенствъ выражаютъ, что уравненіе полярной плоскости безконечно-удаленной точки прямой (160) относительно поверхности (159) имѣетъ видъ *const.* $= 0$, т. е. опредѣляетъ безконечно-удаленную плоскость пространства; 4-е и 5-е выражаютъ 2-е условіе, 6-е, 7-е и 8-е — третье условіе. Допустимъ теперь, что оси координатъ x, y, z выбраны такъ, какъ было упомянуто выше, т. е. ось z взята перпендикулярною къ плоскости разсматриваемаго элемента характеристическаго многообразія $M_{1,1}^{(1)}$, такъ что для этого элемента $p = 0$, $q = 0$. Тогда для разсматриваемаго элемента оскулирующій параболоидъ, какъ мы знаемъ, совпадетъ съ индицирующимъ, и дѣйствительно равенства (161) даютъ намъ при $p = 0$, $q = 0$, если подъ x, y, z, r, s, t разумѣемъ координаты упомянутаго элемента,

$$A_{13} = 0,\ A_{23} = 0,\ A_{33} = 0,\ B_1 = 0,\ B_2 = 0,$$
$$A_{11} = r,\ A_{12} = s,\ A_{22} = t,$$

такъ что уравненіе (159) принимаетъ видъ

$$2(\zeta - z) = r(\xi - x)^2 + 2s(\xi - x)(\eta - y) + t(\eta - y)^2. \tag{162}$$

Уравненія кривой пересѣченія оскулирующихъ параболоидовъ разсматриваемаго элемента и безконечно-близкаго ему элемента характеристическаго многообразія $M_{1,1}^{(1)}$ получимъ, присоединяя къ уравненію (162) дифференціалъ уравненія (159), взятый въ предположеніи, что x, y, z, p, q, r, s, t — функціи одного параметра въ силу уравненій многообразія $M_{1,1}^{(1)}$, при чемъ послѣ дифференцированія слѣдуетъ вставить значенія координатъ разсматриваемаго нами элемента и слѣдовательно положить $p = 0$, $q = 0$. Принимая во вниманіе, что для многообразія $M_{1,1}^{(1)}$ удовлетворяются соотношенія

$$dz - pdx - qdy = 0$$
$$dp - rdx - sdy = 0$$
$$dq - sdx - tdy = 0.$$

и дифференцируя равенства (161) для опредѣленія дифференціаловъ коэффиціентовъ dA_{11}, dA_{12},.... получаемъ окончательно второе уравненіе кривой пересѣченія въ такомъ видѣ:

$$dr(\xi - x)^2 + 2ds(\xi - x)(\eta - y) + dt(\eta - y)^2 +$$
$$+ 2(rdp + sdq)(\zeta - z)(\xi - x) + 2(sdp + tdq)(\zeta - z)(\eta - y) = 0. \tag{163}$$

Подставляя значеніе $2(\zeta - z)$ изъ уравненія (162) въ (163), получимъ уравненіе, содержащее только координаты ξ, η, которое на плоскости xy опредѣляетъ проэкцію кривой пересѣченія. Уравненіе это имѣетъ видъ

$$dr(\xi - x)^2 + 2ds(\xi - x)(\eta - y) + dt(\eta - y)^2 + U_3 = 0, \tag{164}$$

гдѣ U_3 — однородный многочленъ третьяго измѣренія относительно $(\xi - x)$ и $(\eta - y)$; отсюда заключаемъ *), что точка (x, y) есть двойная точка кривой (164) и что пара касательныхъ въ этой точкѣ опредѣляется уравненіемъ

$$dr(\xi - x)^2 + 2ds(\xi - x)(\eta - y) + dt(\eta - y)^2 = 0. \tag{165}$$

Кривая пересѣченія двухъ безконечно-близкихъ оскулирующихъ параболоидовъ, какъ слѣдуетъ изъ предыдущаго, имѣетъ двойную точку

*) См. напр. Salmon, Courbes planes, ch. II, n°n° 37, 51.

въ точкѣ (x, y, z) (*видимой* двойной точки, очевидно, здѣсь не можетъ быть), и касательныя въ этой точкѣ опредѣляются уравненіемъ (165) и уравненіемъ плоскости элемента, которое въ данномъ случаѣ имѣетъ видъ

$$\zeta - z = 0. \tag{166}$$

Сравнивая уравненія (165) и (166) съ уравненіями (158) и (146) (стр. 305) или съ уравненіями (153), видимъ, что при $p=0$, $q=0$ они тождественны; слѣдовательно, касательныя въ точкѣ (x, y, z) къ кривой пересѣченія оскулирующаго параболоида элемента многообразія $M^{(1)}_{1,1}$ съ оскулирующимъ параболоидомъ безконечно-близкаго элемента того же многообразія при упомянутомъ выборѣ осей x, y, z совпадаютъ съ касательными t, t' къ кривой пересѣченія индицирующихъ параболоидовъ тѣхъ же элементовъ *). Итакъ, пятое основное свойство характеристическаго многообразія 2-го порядка сохраняется и при интерпретаціи элементовъ 2-го порядка ихъ оскулирующими параболоидами: при этомъ только прямыя t, t' опредѣляются какъ касательныя въ точкѣ (x, y, z) къ кривой пересѣченія оскулирующаго параболоида элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) съ оскулирующимъ параболоидомъ безконечно-близкаго элемента многообразія $M^{(1)}_{1,1}$, или иначе — какъ касательныя въ точкѣ (x, y, z) къ кривой прикосновенія оскулирующаго параболоида къ поверхности (E') — облекающей всего семейства оскулирующихъ параболоидовъ многообразія $M^{(1)}_{1,1}$; кромѣ того, вмѣсто кривой (H) слѣдуетъ разсматривать кривую (H')—геометрическое мѣсто точекъ элементовъ интегральнаго многообразія одного измѣренія $H'^{(1)}_{1,1}$, выдѣляемаго даннымъ уравненіемъ $F=0$ изъ многообразія, носителемъ котораго служитъ оскулирующій параболоидъ элемента (x, y, z, p, q, r, s, t). Поверхность (E'), о которой мы упоминали, очевидно, содержитъ семейство пространственныхъ кривыхъ 4-го порядка съ двойными точками, геометрическимъ мѣстомъ которыхъ служитъ кривая C (характеристика).

Слѣдуетъ замѣтить, что первая данная нами геометрическая интерпретація дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій (при помощи индицирующихъ параболоидовъ) въ одномъ частномъ случаѣ становится недостаточной. Дѣйствительно, пятое свойство характеристическихъ многообразій формулировано нами такъ, что оно непосредственно выражаетъ лишь условіе, чтобы пучокъ кубическихъ

*) Слѣдуетъ замѣтить, что это совпаденіе при *произвольныхъ* осяхъ координатъ не имѣетъ мѣста.

индикатрисъ δ входилъ въ составъ линейной системы Λ (см. выше стр. 301). Такъ какъ кромѣ того пучокъ δ входитъ въ составъ системы Γ (стр. 298), то онъ въ общемъ случаѣ необходимо принадлежитъ сѣти Δ; но если въ частности системы Γ и Λ совпадаютъ, то выведенныя нами условія недостаточны для того, чтобы пучокъ δ входилъ въ составъ сѣти Δ. Обращаясь къ равенствамъ (149) и (154), опредѣляющимъ системы Γ и Λ, видимъ, что для совпаденія этихъ системъ необходимо и достаточно условіе

$$\left[\frac{dF}{dx}\right] dx + \left[\frac{dF}{dy}\right] dy = 0, \tag{167}$$

которое, какъ очевидно изъ уравненій *) касательной къ кривой (H), опредѣляемой для элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) уравненіемъ $F=0$, выражаетъ требованіе, чтобы упомянутая касательная совпадала съ касательной въ точкѣ (x, y, z) къ кривой C, образуемой точками элементовъ многообразія $M^{(1)}_{1,1}$; такъ какъ касательная къ C должна имѣть направленіе одной изъ прямыхъ l, l' (стр. 293), то слѣдовательно иначе можемъ сказать, что въ силу условія (167) кривая (H) должна въ точкѣ (x, y, z) касаться одной изъ прямыхъ l, l'. Прямыя t, t' (стр. 306), которыя въ общемъ случаѣ гармонически взаимно-сопряжены относительно касательной къ (H) и той изъ прямыхъ l, l', которая отлична отъ касательной къ C, въ данномъ частномъ случаѣ гармонически сопряжены относительно прямыхъ l, l'. Не трудно притомъ убѣдиться, что сопряженность паръ прямыхъ t, t' и l, l' при наличности условія (167) является прямымъ слѣдствіемъ остальныхъ свойствъ многообразія $M^{(1)}_{1,1}$. Въ самомъ дѣлѣ, пятое свойство характеристическихъ многообразій, съ которымъ мы въ данномъ случаѣ имѣемъ дѣло, выражаетъ условіе параллельности смѣшанныхъ поляръ точекъ B, B' (безконечно-удаленныхъ точекъ прямыхъ l, l') относительно пучка δ и сѣти Δ (см. стр. 300); но въ данномъ случаѣ, въ силу условія (167), смѣшанныя поляры B и B' относительно *всѣхъ* кривыхъ системы Γ проходятъ черезъ *безконечно-удаленную* точку

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = dx : dy : 0$$

(см. стр. 299), т. е. всѣ параллельны касательной къ C, и слѣдовательно, пятое свойство должно выполняться само собою. Такимъ образомъ, всякое многообразіе $M^{(1)}_{1,1}$, опредѣляемое тѣми условіями, которыя за-

*) Стр. 304.

ключаются въ первыхъ четырехъ свойствахъ характеристическихъ многообразій, и добавочнымъ условіемъ (167), въ силу котораго кривая C въ каждой точкѣ (x, y, z) касается соотвѣтственной кривой (H), — удовлетворяетъ и тому условію, которое заключается въ пятомъ свойствѣ характеристическихъ многообразій; между тѣмъ, какъ очевидно изъ предыдущаго, подобное многообразіе $M^{(1)}_{1,1}$, не будетъ, вообще говоря, характеристическимъ многообразіемъ даннаго уравненія. Выражая аналитически всѣ геометрическія свойства $M^{(1)}_{1,1}$, приходимъ къ слѣдующимъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned} &dz - pdx - qdy = 0\\ &dp - rdx - sdy = 0\\ &dq - sdx - tdy = 0\\ &F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0\\ &Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0\\ &\left[\frac{dF}{dx}\right]dx + \left[\frac{dF}{dy}\right]dy = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (168)$$

Всевозможныя многообразія разсматриваемаго типа образуютъ, очевидно, семейство (Φ), зависящее отъ одной произвольной функціи и входящее въ составъ семейства многообразій, изслѣдованныхъ нами въ гл. III, § 2. Пятое изъ уравненій (168), въ силу 6-го, можетъ быть замѣнено слѣдующимъ

$$R\left[\frac{dF}{dx}\right]^2 + S\left[\frac{dF}{dx}\right]\left[\frac{dF}{dy}\right] + T\left[\frac{dF}{dy}\right]^2 = 0, \qquad (169)$$

которое, какъ не трудно видѣть, есть условіе совпаденія касательной къ кривой (H) съ одной изъ прямыхъ l, l'. Четвертое изъ уравненій (168) даетъ намъ $dF = 0$, откуда, въ силу первыхъ трехъ и послѣдняго, слѣдуетъ

$$Rdr + Sds + Tdt = 0; \qquad (170)$$

сопоставляя это соотношеніе съ уравненіемъ (158) (стр. 305), легко заключаемъ, что оно есть условіе гармонической сопряженности паръ прямыхъ t, t' и l, l'.

Если къ уравненіямъ (168) присоединимъ еще слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{dF}{dx}\right]dxdy + Rdydr + Tdxds = 0\\ &\left[\frac{dF}{dy}\right]dxdy + Rdyds + Tdxdt = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (171)$$

которыя въ силу $dF = 0$ эквивалентны одному независимому, то изъ всего семейства (Φ) многообразій, удовлетворяющихъ уравненіямъ (168), выдѣлимъ нѣкоторое семейство (φ), состоящее изъ характеристическихъ многообразій 2-го порядка, такъ какъ уравненія (171) вмѣстѣ съ первыми пятью изъ уравненій (168) даютъ систему (109) дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій даннаго уравненія $F = 0$ (см. стр. 279). Въ общемъ случаѣ семейство (φ) зависитъ отъ 5-ти существенныхъ произвольныхъ параметровъ. Въ частности можетъ оказаться, что для даннаго уравненія $F = 0$ соотношеніе (169), которымъ можно замѣнить пятое изъ уравненій (168), является слѣдствіемъ самаго уравненія $F = 0$; въ такомъ случаѣ уравненія (168) приводятся къ пяти независимымъ, и слѣдовательно, семейство (Φ) зависитъ отъ *двухъ* произвольныхъ функцій, а семейство (φ)—отъ одной; очевидно, что это послѣднее семейство вполнѣ исчерпываетъ тогда одну изъ двухъ системъ характеристическихъ многообразій даннаго уравненія. Для характеристическихъ многообразій семейства (φ) общая геометрическая интерпретація при помощи индицирующихъ параболоидовъ становится, согласно предыдущему, недостаточной, такъ какъ всѣ пять свойствъ, данныхъ нами выше (стр. 308), принадлежатъ всему семейству (Φ). Для опредѣленія семейства (φ) мы можемъ прибѣгнуть ко второй интерпретаціи — при помощи оскулирующихъ параболоидовъ, которая, вообще говоря, будетъ достаточна для этого семейства. Дѣйствительно, характеристика C, касающаяся кривой (H), не будетъ вообще касаться кривой (H'), которая для произвольнаго элемента отлична отъ кривой (H); въ этомъ предположеніи пять основныхъ свойствъ (стр. 308), при выборѣ оси z перпендикулярной плоскости элемента, приводятъ для этого элемента къ дифференціальнымъ уравненіямъ (109), а эти дифференціальныя уравненія, очевидно, сохраняютъ свой видъ при преобразованіи координатъ, такъ какъ въ общемъ случаѣ при любой системѣ координатъ выражаютъ свойства характеристическихъ многообразій.

Если мы будемъ и въ общемъ случаѣ исключительно пользоваться *второй* интерпретаціей дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій (стр. 309), то точно также встрѣтимъ частный случай, когда эта интерпретація становится недостаточной. Изъ предыдущаго очевидно, что обстоятельство это имѣетъ мѣсто тогда, когда кривая C многообразія $M^{(1)}_{1,1}$ касается въ каждой точкѣ соотвѣтствующей кривой (H'), или иначе когда для каждаго элемента $M^{(1)}_{1,1}$ прямыя l, l' гармонически сопряжены относительно пары касательныхъ

l. l' къ кривой соприкосновенія оскулирующаго параболоида этого элемента и поверхности (E'). Многообразія $M_{1,1}^{(1)}$, обладающія первыми четырьмя свойствами изъ данныхъ выше для характеристическихъ многообразій (при второй интерпретаціи), а также удовлетворяющія условію, которое нами только-что формулировано и которое выражается аналитически нѣкоторымъ уравненіемъ

$$G = 0, \tag{172}$$

очевидно, обладаютъ и пятымъ изъ общихъ свойствъ характеристическихъ многообразій, хотя вообще не принадлежатъ къ числу этихъ многообразій, такъ какъ для нихъ имѣютъ мѣсто лишь дифференціальныя уравненія

$$\left.\begin{aligned} &dz - pdx - qdy = 0 \\ &dp - rdx - sdy = 0 \\ &dq - sdx - tdy = 0 \\ &F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \\ &Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{173}$$

которыя слѣдуютъ изъ первыхъ четырехъ свойствъ, и уравненіе $G=0$ (172). Мы получаемъ, такимъ образомъ, семейство многообразій (Φ'), про которое, mutatis mutandis, можемъ повторить все, что было сказано выше про семейство (Φ). Уравненіе $G=0$ (172) не имѣетъ такого простого вида, какъ аналогичное уравненіе для семейства (Φ): если мы выберемъ ось z перпендикулярно къ плоскости нѣкотораго элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) многообразія, принадлежащаго къ семейству (Φ'), то для *этого* элемента уравненіе $G=0$ должно давать прежнее уравненіе

$$\left[\frac{dF}{dx}\right]dx + \left[\frac{dF}{dy}\right]dy = 0.$$

Присоединяя къ уравненіямъ (173) и (172) два уравненія

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{dF}{dx}\right]dxdy + Rdydr + Tdxds = 0 \\ &\left[\frac{dF}{dy}\right]dxdy + Rdyds + Tdxdt = 0, \end{aligned}\right\} \tag{171}$$

опредѣлимъ семейство (φ') характеристическихъ многообразій уравненія $F=0$, входящихъ въ составъ семейства (Φ'). Все, что было выше

сказано о семействѣ (φ), можетъ быть повторено и о семействѣ (φ'). Такъ напр. очевидно, что если семейство (Φ') зависитъ отъ двухъ произвольныхъ функцій, что имѣетъ мѣсто, когда уравненія (172) и (173) приводятся къ пяти независимымъ, то семейство (φ') вполнѣ исчерпываетъ одну изъ двухъ системъ характеристическихъ многообразій даннаго уравненія $F=0$. Для характеристическихъ многообразій семейства (φ') общая геометрическая интерпретація дифференціальныхъ уравненій становится, согласно предыдущему, недостаточной, такъ какъ всѣ пять свойствъ, составляющихъ ее, принадлежатъ всему семейству (Φ'). Возможно, однако, пополнить эту интерпретацію, присоединивъ еще одно геометрическое свойство, которое бы интерпретировало уравненія (171). Съ этой цѣлью разсмотримъ для каждаго элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) характеристическаго многообразія $M_{1,1}^{(1)}$, принадлежащаго къ семейству (φ'), одно изъ тѣхъ характеристическихъ многообразій второй системы, въ составъ которыхъ входитъ упомянутый элементъ (x, y, z, p, q, r, s, t). Касательная къ кривой C многообразія $M_{1,1}^{(1)}$ совпадаетъ, какъ извѣстно, съ одной изъ прямыхъ l, l', напримѣръ съ l, которая въ данномъ случаѣ кромѣ того совпадаетъ съ касательной къ кривой (H'), соотвѣтствующей элементу (x, y, z, p, q, r, s, t). Касательная къ характеристикѣ второй системы для элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) совпадаетъ съ прямой l' и, слѣдовательно, отлична отъ касательной къ кривой (H'); такимъ образомъ, характеристическія многообразія 2-й системы, которыя мы разсматриваемъ, не принадлежатъ къ числу исключительныхъ, и общая геометрическая интерпретація, предложенная выше, для нихъ достаточна. Обозначая черезъ δx, δy, δz, δp, δq, δr, δs, δt дифференціалы координатъ, взятые для характеристическаго многообразія 2-й системы, имѣемъ, во-первыхъ,

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{dF}{dx}\right]\delta x\delta y + R\delta y\delta r + T\delta x\delta s = 0 \\ &\left[\frac{dF}{dy}\right]\delta x\delta y - R\delta y\delta s + T\delta x\delta t = 0, \end{aligned}\right\} \tag{174}$$

и затѣмъ одновременно

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0$$

и

$$R\delta y^2 - S\delta x\delta y + T\delta x^2 = 0,$$

на основаніи дифференціальныхъ уравненій (109) характеристическихъ многообразій. Изъ послѣднихъ двухъ соотношеній имѣемъ

$$R : S : T = dx\delta x : (dx\delta y + dy\delta x) : dy\delta y, \tag{175}$$

и слѣдовательно, уравненія (171) и (174) могутъ быть представлены соотвѣтственно въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} R(dr\delta x + ds\delta y) + \left[\frac{dF}{dx}\right] dx\delta x = 0 \\ R(ds\delta x + dt\delta y) + \left[\frac{dF}{dy}\right] dx\delta x = 0 \end{aligned}\right\} \tag{171'}$$

и

$$\left.\begin{aligned} R(\delta r dx + \delta s dy) + \left[\frac{dF}{dx}\right] dx\delta x = 0 \\ R(\delta s dx + \delta t dy) + \left[\frac{dF}{dy}\right] dx\delta x = 0. \end{aligned}\right\} \tag{174'}$$

Исключая $\left[\frac{dF}{dx}\right]$ и $\left[\frac{dF}{dy}\right]$, получаемъ окончательно два соотношенія

$$\left.\begin{aligned} dr\delta x + ds\delta y = \delta r dx + \delta s dy \\ ds\delta x + dt\delta y = \delta s dx + \delta t dy. \end{aligned}\right\} \tag{176}$$

которыя эквивалентны соотношеніямъ (171). Допустимъ, что оси координатъ выбраны такъ, что ось z перпендикулярна плоскости разсматриваемаго элемента и слѣдовательно имѣемъ для него $p = 0$, $q = 0$. На оскулирующемъ параболоидѣ элемента имѣемъ двѣ пространственныхъ кривыхъ 4-го порядка — кривыя пересѣченія этого параболоида съ оскулирующими параболоидами безконечно-близкихъ элементовъ двухъ характеристическихъ многообразій различныхъ системъ, которыя мы разсматриваемъ, или иначе — кривыя прикосновенія параболоида къ поверхностямъ (E') того и другого характеристическаго многообразія (см. стр. 312). Изъ точки (x, y, z) элемента эти пространственныя кривыя проэктируются двумя конусами 2-го порядка, уравненія которыхъ можемъ непосредственно написать, пользуясь результатами, полученными выше (см. стр. 311). Именно, не трудно видѣть, что второе (163) изъ уравненій, опредѣляющихъ первую изъ тѣхъ пространственныхъ кривыхъ 4-го порядка, о которыхъ идетъ рѣчь, представляетъ конусъ съ вершиной (x, y, z), проходящій черезъ

эту кривую, т. е. тотъ именно конусъ, который принадлежитъ къ числу двухъ выше упомянутыхъ: уравненіе 2-го конуса, очевидно, имѣетъ аналогичный видъ съ замѣной $dx, dy, dz, dp, dq, dr, ds, dt$ черезъ $\delta x, \delta y, \delta z, \delta p, \delta q, \delta r, \delta s, \delta t$, и слѣдовательно, окончательно получаемъ уравненія нашихъ конусовъ въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned} dr(\xi - x)^2 + 2ds(\xi - x)(\eta - y) + dt(\eta - y)^2 + \\ + 2(\zeta - z)[(rdp + sdq)(\xi - x) + (sdp + tdq)(\eta - y)] = 0 \end{aligned} \tag{177}$$

и

$$\begin{aligned} \delta r(\xi - x)^2 + 2\delta s(\xi - x)(\eta - y) + \delta t(\eta - y)^2 + \\ + 2(\zeta - z)[(r\delta p + s\delta q)(\xi - x) + (s\delta p + t\delta q)(\eta - y)] = 0. \end{aligned} \tag{178}$$

Плоскость, сопряженная по отношенію къ 1-му конусу касательной къ характеристикѣ 2-й системы

$$\zeta - z = 0, \quad \frac{\xi - x}{\delta x} = \frac{\eta - y}{\delta y},$$

опредѣляется уравненіемъ

$$\begin{aligned} (dr\delta x + ds\delta y)(\xi - x) + (ds\delta x + dt\delta y)(\eta - y) + \\ + (\zeta - z)[(rdp + sdq)\delta x + (sdp + tdq)\delta y] = 0. \end{aligned}$$

или иначе, на основаніи соотношеній

$$r\delta x + s\delta y = \delta p, \quad s\delta x + t\delta y = \delta q,$$

уравненіемъ

$$(dr\delta x + ds\delta y)(\xi - x) + (ds\delta x + dt\delta y)(\eta - y) + (dp\delta p + dq\delta q)(\zeta - z) = 0. \tag{179}$$

Аналогично, плоскость, сопряженная касательной къ данной характеристикѣ 1-й системы по отношенію ко 2-му конусу (178), опредѣляется уравненіемъ

$$(\delta r dx + \delta s dy)(\xi - x) + (\delta s dx + \delta t dy)(\eta - y) + (dp\delta p + dq\delta q)(\zeta - z) = 0. \tag{180}$$

Въ силу соотношеній (176), эти два уравненія тождественны, и слѣдовательно, плоскости, представляемыя этими уравненіями, совпадаютъ. Такимъ образомъ, полная геометрическая интерпретація дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій семейства (φ') получается, если къ свойствамъ интерпретирующимъ уравненія (172) и (173), присоединимъ еще слѣдующее:

„если въ произвольной точкѣ (x, y, z) характеристики C проведемъ какую-либо характеристику C' 2-й системы, т. е. характеристику, касающуюся той прямой l' изъ пары прямыхъ l, l', которой не касается C, притомъ если характеристическое многообразіе, соотвѣтствующее C', имѣетъ общій элементъ съ даннымъ, и если построимъ конусы 2-го порядка, проэктирующіе изъ точки (x, y, z) кривыя прикосновенія общаго оскулирующаго параболоида къ поверхностямъ (E'), соотвѣтствующимъ той и другой характеристикѣ, — то плоскости, сопряженныя по отношенію къ этимъ конусамъ соотвѣтственно прямымъ l' и l, совпадаютъ“.

Не трудно видѣть, что изъ этого свойства для той системы осей x, y, z, которой мы пользовались выше, слѣдуютъ обратно соотношенія (176), а слѣдовательно и соотношенія (171), которыя вмѣстѣ съ уравненіями (173) даютъ систему, видъ которой, очевидно, уже не зависитъ отъ выбора осей. Характеристики 2-й системы, которыми мы пользуемся въ предложенной интерпретаціи дифференціальныхъ уравненій (171), опредѣляются, какъ уже было упомянуто, исключительно общими пятью свойствами характеристическихъ многообразій 2-го порядка, такъ какъ не принадлежатъ къ семейству (φ').

Предшествующія разсужденія становятся непримѣнимыми въ томъ случаѣ, если для всѣхъ элементовъ характеристическаго многообразія семейства (φ') прямыя l, l' сливаются въ одну. Характеристическія многообразія подобнаго рода должны, очевидно, удовлетворять, кромѣ уравненій (172), (173) и (171), еще уравненію

$$4RT - S^2 = 0. \tag{181}$$

которое и есть условіе совпаденія прямыхъ l, l' опредѣляемыхъ уравненіемъ

$$R(\eta - y)^2 - S(\xi - x)(\eta - y) + T(\xi - x)^2 = 0$$

(см. выше стр. 293). Для произвольно-взятаго уравненія съ частными производными $F = 0$ уравненія (172), (173), (171) и (181), вообще говоря, не совмѣстны, и слѣдовательно, вовсе не существуетъ характеристическихъ многообразій изслѣдуемаго типа; но въ частности могутъ быть отдѣльныя характеристическія многообразія этого типа или даже цѣлое семейство (ψ); послѣдній случай можетъ, напримѣръ, имѣть мѣсто, когда уравненіе (181) слѣдуетъ изъ уравненія $F=0$; тогда семейство (ψ) зависитъ отъ пяти параметровъ. Для интерпретаціи дифференціальныхъ уравненій (171) въ случаѣ характеристическаго многообразія $M^{(1)}_{1,1}$ того

типа, о которомъ идетъ рѣчь, разсмотримъ для каждаго элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) многообразія $M^{(1)}_{1,1}$ произвольное интегральное многообразіе $J^{(1)}_{1,1}$ одного измѣренія *), въ составъ котораго входитъ элементъ (x, y, z, p, q, r, s, t). Обозначая дифференціалы координатъ, взятые для многообразія $J^{(1)}_{1,1}$ черезъ $\delta x, \delta y, \delta z, \delta p, \delta q, \delta r, \delta s, \delta t$, имѣемъ во-первыхъ

$$\begin{aligned} \delta z - p\delta x - q\delta y &= 0 \\ \delta p - r\delta x - s\delta y &= 0 \\ \delta q - s\delta x - t\delta y &= 0 \end{aligned}$$

и во-вторыхъ

$$\delta F = R\delta r + S\delta s + T\delta t + P\delta p + Q\delta q + Z\delta z + X\delta x + Y\delta y = 0,$$

или, въ силу предыдущихъ соотношеній,

$$R\delta r + S\delta s + T\delta t + \left[\frac{dF}{dx}\right]\delta x + \left[\frac{dF}{dy}\right]\delta y = 0. \tag{182}$$

Для характеристическаго многообразія $M^{(1)}_{1,1}$ мы имѣемъ между прочимъ

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0 \tag{183}$$

и

$$4RT - S^2 = 0, \tag{181}$$

откуда

$$R : S : T = dx^2 : 2dxdy : dy^2. \tag{184}$$

Дифференціальныя уравненія (171) могутъ быть, въ силу (184), представлены въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} R(drdx + dsdy) + \left[\frac{dF}{dx}\right]dx^2 &= 0 \\ R(dsdx + dtdy) + \left[\frac{dF}{dy}\right]dx^2 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{185}$$

---

*) Мы можемъ, напримѣръ, взять произвольную поверхность, проходящую черезъ точку (x, y, z) и находящуюся въ этой точкѣ въ соприкосновеніи 2-го порядка съ оскулирующимъ параболоидомъ элемента (x, y, z, p, q, r, s, t). Уравненіе $F = 0$ опредѣляетъ на этой поверхности кривую, которая вмѣстѣ съ касательными плоскостями и оскулирующими параболоидами поверхности образуетъ многообразіе $J^{(1)}_{1,1}$.

а соотношеніе (182) — въ видѣ

$$R(\delta r dx^2 + 2\delta s dx dy + \delta t dy^2) + \left[\frac{dF}{dx}\right] dx^2 \delta x + \left[\frac{dF}{dy}\right] dx^2 \delta y = 0. \qquad (186)$$

Дифференціальныя уравненія (171), а слѣдовательно и (185), какъ извѣстно, эквивалентны одному независимому, за которое можемъ принять уравненіе

$$R[dr dx \delta x + ds(dx \delta y + dy \delta x) + dt dy \delta y] + \left[\frac{dF}{dx}\right] dx^2 \delta x + \left[\frac{dF}{dy}\right] dx^2 \delta y = 0. \quad (187)$$

получаемое умноженіемъ уравненій (185) соотвѣтственно на δx и δy и сложеніемъ полученныхъ уравненій. Вычитая изъ уравненія (187) уравненіе (186), получаемъ соотношеніе

$$dr dx \delta x + ds(dx \delta y + dy \delta x) + dt dy \delta y = \delta r dx^2 + 2\delta s dx dy + \delta t dy^2, \quad (188)$$

которое вполнѣ замѣняетъ уравненія (171). Предполагая по прежнему ось z перпендикулярной къ плоскости элемента (x, y, z, p, q, r, s, t), получаемъ на оскулирующемъ параболоидѣ элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) двѣ кривыя 4-го порядка—кривыя пересѣченія съ оскулирующими параболоидами безконечно-близкихъ элементовъ многообразій $M^{(1)}_{1,1}$ и $J^{(1)}_{1,1}$, при чемъ изъ точки (x, y, z) элемента эти кривыя проектируются соотвѣтственно двумя конусами 2-го порядка:

$$\begin{aligned} &dr(\xi - x)^2 + 2ds(\xi - x)(\eta - y) + dt(\eta - y)^2 + \\ &+ 2(\zeta - z)[(rdp + sdq)(\xi - x) + (sdp + tdq)(\eta - y)] = 0 \end{aligned} \qquad (189)$$

и

$$\begin{aligned} &\delta r(\xi - x)^2 + 2\delta s(\xi - x)(\eta - y) + \delta t(\eta - y)^2 + \\ &+ 2(\zeta - z)[(r\delta p + s\delta q)(\xi - x) + (s\delta p + t\delta q)(\eta - y)] = 0. \end{aligned} \qquad (190)$$

Плоскость, сопряженная касательной къ кривой C' многообразія $J^{(1)}_{1,1}$ по отношенію къ первому конусу, опредѣляется уравненіемъ:

$$(dr\delta x + ds\delta y)(\xi - x) + (ds\delta x + dt\delta y)(\eta - y) + (dp\delta p + dq\delta q)(\zeta - z) = 0. \quad (191)$$

Плоскость, сопряженная касательной l къ кривой C многообразія $M^{(1)}_{1,1}$ по отношенію ко второму конусу, опредѣляется уравненіемъ

$$(\delta r dx + \delta s dy)(\xi - x) + (\delta s dx + \delta t dy)(\eta - y) + (dp\delta p + dq\delta q)(\zeta - z) = 0. \quad (192)$$

Вычитая изъ уравненія (191) уравненіе (192), получаемъ уравненіе

$$\begin{aligned} &(dr\delta x + ds\delta y - \delta r dx - \delta s dy)(\xi - x) + \\ &+ (ds\delta x + dt\delta y - \delta s dx - \delta t dy)(\eta - y) = 0 \end{aligned} \qquad (193)$$

плоскости, проэктирующей линію пересѣченія плоскостей (191) и (192) на плоскость элемента. Въ силу соотношенія (188), имѣемъ

$$(dr\delta x + ds\delta y - \delta r dx - \delta s dy) : (ds\delta x + dt\delta y - \delta s dx - \delta t dy) = dy : -dx,$$

и слѣдовательно, уравненіе (193) можетъ быть иначе представлено въ видѣ

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy}. \qquad (194)$$

Такимъ образомъ, плоскости (191) и (192) пересѣкаются по прямой, которая на плоскость элемента проектируется прямой l, т. е. касательной къ кривой C многообразія $M^{(1)}_{1,1}$. Не трудно убѣдиться, что полученное нами свойство обратно ведетъ къ соотношенію (188), а слѣдовательно, оно можетъ служить тѣмъ дополненіемъ къ общимъ свойствамъ характеристическихъ многообразій, которое необходимо для опредѣленія характеристическаго многообразія $M^{(1)}_{1,1}$ изслѣдуемаго типа. Свойство это формулируется слѣдующимъ образомъ:

если для любого элемента многообразія $M^{(1)}_{1,1}$ возьмемъ произвольное интегральное многообразіе одного измѣренія $J^{(1)}_{1,1}$, въ составъ котораго входитъ этотъ элементъ, и если построимъ конусы, проектирующіе изъ точки (x, y, z) элемента двѣ пространственныхъ кривыхъ 4-го порядка, по которымъ оскулирующій параболоидъ элемента пересѣкается съ оскулирующими параболоидами безконечно-близкихъ элементовъ многообразій $M^{(1)}_{1,1}$ и $J^{(1)}_{1,1}$, —то плоскость, сопряженная по отношенію къ 1-му конусу касательной къ кривой C' многообразія $J^{(1)}_{1,1}$, пересѣкаетъ плоскость, сопряженную по отношенію ко 2-му конусу касательной къ кривой C многообразія $M^{(1)}_{1,1}$, по прямой, которая проектируется на плоскость элемента касательной къ C.

Въ заключеніе отмѣтимъ еще разъ, что для произвольно-взятаго уравненія $F = 0$ характеристическія многообразія 2-го порядка вполнѣ опредѣляются исключительно пятью основными свойствами (стр. 308), если только присоединимъ ограниченіе (которое вообще и выполняется).

чтобы касательная къ характеристикѣ не совпадала съ касательной къ кривой (H'). При этомъ мы опускаемъ семейство (φ') характеристическихъ многообразій, зависящее, вообще говоря, отъ пяти параметровъ; для опредѣленія характеристическихъ многообразій этого семейства приходится прибѣгать къ дополнительнымъ свойствамъ, даннымъ на стр. 320 и 323.

Замѣтимъ, что и для уравненій съ частными производными 1-го порядка обычная геометрическая интерпретація дифференціальныхъ уравненій характеристикъ (см. гл. I, § 3, стр. 58 и 59) можетъ въ частномъ случаѣ становиться недостаточной. Въ самомъ дѣлѣ, въ силу этой интерпретаціи, касательная къ характеристикѣ C должна служить образующей конуса (T), а образующая развертывающейся характеристической поверхности D должна касаться соотвѣтствующей кривой (S) (см. стр. 58); выражая эти свойства аналитически, получаемъ дифференціальныя уравненія

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{Pp+Qq}$$

и

$$\frac{-dp}{\left[\frac{dF}{dx}\right]}=\frac{-dq}{\left[\frac{dF}{dy}\right]}$$

и, кромѣ того, данное уравненіе $F=0$ (ср. стр. 59—62); между тѣмъ характеристическія многообразія опредѣляются уравненіями

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{Pp+Qq}=\frac{-dp}{\left[\frac{dF}{dx}\right]}=\frac{-dq}{\left[\frac{dF}{dy}\right]},\quad F=0,$$

которыя, какъ сейчасъ увидимъ, не всегда слѣдуютъ изъ предшествующихъ. Дѣйствительно, полагая

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{Pp+Qq}=dt$$

и

$$\frac{-dp}{\left[\frac{dF}{dx}\right]}=\frac{-dq}{\left[\frac{dF}{dy}\right]}=du$$

и вставляя получаемыя отсюда выраженія dx, dy, dz, dp, dq въ равенство $dF=0$, получаемъ

$$\left\{P\left[\frac{dF}{dx}\right]+Q\left[\frac{dF}{dy}\right]\right\}(dt-du)=0$$

(ср. стр. 62), откуда, вообще говоря, получаемъ $dt=du$ и слѣдовательно имѣемъ

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{Pp+Qq}=\frac{-dp}{\left[\frac{dF}{dx}\right]}=\frac{-dq}{\left[\frac{dF}{dy}\right]},\quad F=0;$$

но въ частномъ случаѣ, когда для разсматриваемаго интегральнаго многообразія одного измѣренія выполняется соотношеніе

$$P\left[\frac{dF}{dx}\right]+Q\left[\frac{dF}{dy}\right]=0,$$

или иначе

$$P(X+Zp)-Q(Y+Zq)=0,$$

заключеніе наше становится вообще несправедливымъ. Такимъ образомъ, мы получили семейство интегральныхъ многообразій (χ), удовлетворяющихъ уравненіямъ

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{Pp+Qq},\quad \frac{-dp}{\left[\frac{dF}{dx}\right]}=\frac{-dq}{\left[\frac{dF}{dy}\right]},$$

$$F=0,\quad P\left[\frac{dF}{dx}\right]+Q\left[\frac{dF}{dy}\right]=0$$

и отличныхъ отъ характеристическихъ многообразій, не смотря на то, что кривая C всякаго многообразія семейства (χ) касается въ каждой точкѣ образующей соотвѣтствующаго конуса (T), а образующая развертывающейся поверхности D касается соотвѣтствующей кривой (S). Послѣднее уравненіе

$$P\left[\frac{dF}{dx}\right]+Q\left[\frac{dF}{dy}\right]=0,$$

очевидно, выражаетъ требованіе, чтобы для всего многообразія касательная къ кривой (S) и образующая конуса (T), проходящія черезъ одну точку кривой C, совпадали между собою. Въ связи съ предшествующимъ отсюда заключаемъ, что для всѣхъ многообразій семейства (χ) касательная къ кривой C въ каждой точкѣ совпадаетъ съ образующей поверхности D, т. е. другими словами элементы подобнаго многообразія составляются изъ точекъ и соприкасающихся плоскостей кривой C. Аналитически это свойство выражается уравненіемъ

$$dp\,dx+dq\,dy=0,$$

которое легко слѣдуетъ изъ уравненій многообразій семейства (χ). Для произвольно-взятаго уравненія $F=0$ семейство (χ), очевидно, зависитъ отъ двухъ параметровъ, такъ какъ изъ самаго опредѣленія этого семейства слѣдуетъ, что черезъ каждую точку пространства проходитъ одно (или нѣсколько) опредѣленное многообразіе семейства (по даннымъ начальнымъ значеніямъ x, y, z начальныя

значенія p и q опредѣляются изъ уравненій $F=0$ и $P\left[\frac{dF}{dx}\right]+Q\left[\frac{dF}{dy}\right]=0$).
Въ частности, если соотношеніе

$$P\left[\frac{dF}{dx}\right]+Q\left[\frac{dF}{dy}\right]=0$$

слѣдуетъ изъ даннаго уравненія $F=0$, семейство (χ), очевидно, зависитъ отъ одной произвольной функціи, такъ какъ для опредѣленія четырехъ изъ координатъ x, y, z, p, q въ функціи пятой имѣемъ въ этомъ случаѣ три дифференціальныхъ уравненія и уравненіе $F=0$, при чемъ въ силу дифференціальныхъ уравненій имѣемъ $dF=0$. Можно также сказать, что дифференціальное уравненіе

$$\frac{-dp}{\left[\frac{dF}{dx}\right]}=\frac{-dq}{\left[\frac{dF}{dy}\right]}$$

является въ этомъ случаѣ слѣдствіемъ первыхъ двухъ и уравненія $F=0$, откуда заключаемъ, что семейство (χ) совпадаетъ съ семействомъ интегральныхъ кривыхъ уравненія; справедливость послѣдняго замѣчанія, впрочемъ, очевидно и непосредственно. Если мы пожелаемъ изъ семейства (χ) выдѣлить характеристическія многообразія уравненія $F=0$, то должны будемъ присоединить еще одно дифференціальное уравненіе, напримѣръ

$$\frac{dx}{P}=\frac{-dp}{\left[\frac{dF}{dx}\right]}.$$

Для произвольно-взятаго уравненія $F=0$ мы получимъ, вообще говоря, несовмѣстную систему; но въ частности можемъ получить отдѣльныя характеристическія многообразія или даже цѣлое семейство характеристическихъ многообразій, входящихъ въ составъ семейства (χ); такъ, для уравненій, для которыхъ семейство (χ) совпадаетъ съ семействомъ интегральныхъ кривыхъ, мы получимъ, очевидно, семейство, обнимающее *всевозможныя* характеристическія многообразія этихъ уравненій. Общая геометрическая интерпретація уравненій характеристическихъ многообразій становится, согласно предыдущему, недостаточной для характеристическихъ многообразій, входящихъ въ составъ семейства (χ), и ее надо дополнить такъ, чтобы свойство, которое присоединимъ, приводило къ уравненію

$$\frac{dx}{P}=\frac{-dp}{\left[\frac{dF}{dx}\right]}.$$

Приведемъ нѣсколько примѣровъ уравненій съ частными производными 2-го порядка, для которыхъ характеристическія многообразія отличаются какими-либо особыми свойствами.

Примѣръ 1. Опредѣлить видъ уравненія $F=0$, для котораго прямыя t, t' (при интерпретаціи индицирующими параболоидами) сливаются въ одну для всякаго характеристическаго многообразія.

Въ данномъ случаѣ изъ дифференціальныхъ уравненій (109) характеристическихъ многообразій должно слѣдовать

$$drdt-ds^2=0.$$

Это имѣетъ мѣсто лишь тогда, когда въ силу $F=0$ имѣемъ $\left[\frac{dF}{dx}\right]=0$, $\left[\frac{dF}{dy}\right]=0$. Послѣднія два изъ дифференціальныхъ уравненій принимаютъ здѣсь видъ:

$$Rdydr+Tdxds=0$$
$$Rdyds+Tdxdt=0;$$

не трудно видѣть, что они выражаютъ условіе совпаденія прямой l' съ той прямой, въ которую сливаются t и t'; этотъ результатъ можно было предвидѣть, такъ какъ прямая, гармонически сопряженная l' относительно t, t', т. е. касательная къ кривой (H), въ данномъ случаѣ, въ силу $\left[\frac{dF}{dx}\right]=0$, $\left[\frac{dF}{dy}\right]=0$, должна становиться неопредѣленной. Очевидно, для уравненія $F=0$ *обѣ* системы характеристическихъ многообразій обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что прямыя t, t' для нихъ сливаются въ одну. Кривыя (H) для уравненія $F=0$ становятся неопредѣленными: въ самомъ дѣлѣ, индицирующій параболоидъ, какъ извѣстно (см. стр. 303) служитъ индицирующимъ параболоидомъ для *всѣхъ* своихъ элементовъ; слѣдовательно, и кривая (H) для всѣхъ элементовъ вдоль ея служитъ кривой (H), а такъ какъ для произвольнаго элемента, удовлетворяющаго уравненію $F=0$, касательная къ кривой (H) должна становиться неопредѣленной, то, очевидно, *вся* кривая (H) должна становиться неопредѣленной, другими словами—уравненіе $F=0$ должно имѣть мѣсто для всѣхъ элементовъ произвольнаго индицирующаго параболоида. Такимъ образомъ, уравненіе $F=0$ должно допускать семейство интеграловъ, состоящее изъ индицирующихъ параболоидовъ всѣхъ элементовъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію $F=0$. Видъ уравненія $F=0$, какъ уже было упомянуто, опредѣляется изъ слѣдующихъ условій: мы должны имѣть $\left[\frac{dF}{dx}\right]=0$, $\left[\frac{dF}{dy}\right]=0$ въ силу $F=0$. Не трудно видѣть, что достаточно опредѣлить всѣ уравненія, для которыхъ имѣемъ *тождественно* $\left[\frac{dF}{dx}\right]=0$, $\left[\frac{dF}{dy}\right]=0$, такъ какъ уравненія, для которыхъ предыдущія равенства имѣютъ мѣсто лишь въ силу $F=0$, могутъ быть приведены къ уравненіямъ 1-го типа. Равенства

$$\left[\frac{dF}{dx}\right]=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p+\frac{\partial F}{\partial p}r+\frac{\partial F}{\partial q}s=0$$
$$\left[\frac{dF}{dy}\right]=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q+\frac{\partial F}{\partial p}s+\frac{\partial F}{\partial q}t=0$$

представляютъ два линейныхъ уравненія съ частными производными функціи F по аргументамъ x, y, z, p, q; интегрируя ихъ, получаемъ функцію F и, слѣдовательно, видъ искомыхъ уравненій:

$$F\left(p-rx-sy,\ q-sx-ty,\ z-px-qy+\frac{rx^2}{2}+sxy+\frac{ty^2}{2},\ r,\ s,\ t\right)=0.$$

Уравненіе $F=0$ допускаетъ семейство интегральныхъ поверхностей — параболоидовъ

$$z=ax+by+\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2+c,$$

гдѣ $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ — произвольныя постоянныя, связанныя соотношеніемъ

$$F(a, b, c, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma)=0.$$

Параболоиды эти служатъ индицирующими параболоидами элементовъ, удовлетворяющихъ уравненію $F=0$, что вполнѣ согласно съ результатомъ, полученнымъ выше.

Примѣръ 2. Опредѣлить видъ уравненій, для которыхъ прямыя l, l' совпадаютъ съ образующими соотвѣтствующихъ индицирующихъ параболоидовъ, т. е. другими словами, для которыхъ характеристики обѣихъ системъ въ каждой точкѣ касаются образующихъ соотвѣтствующаго индицирующаго параболоида.

Образующія индицирующаго параболоида

$$2(\zeta-z)=2p(\xi-x)+2q(\eta-y)+r(\xi-x)^2+2s(\xi-x)(\eta-y)+t(\eta-y)^2$$

опредѣляются уравненіями

$$\zeta-z=p(\xi-x)+q(\eta-y)$$
$$r(\xi-x)^2+2s(\xi-x)(\eta-y)+t(\eta-y)^2=0,$$

изъ которыхъ второе можетъ быть разсматриваемо какъ уравненіе проэкціи образующихъ на плоскость xy. Прямыя l, l', какъ извѣстно, опредѣляются уравненіями

$$\zeta-z=p(\xi-x)+q(\eta-y)$$
$$R(\eta-y)^2-S(\xi-x)(\eta-y)+T(\xi-x)^2=0.$$

и слѣдовательно, для уравненій $F=0$ разсматриваемаго типа должны имѣть мѣсто равенства

$$R:S:T=t:-2s:r,$$

или

$$2sR+tS=0,\quad 2sT+rS=0,$$

притомъ или тождественно, или въ силу $F=0$. Достаточно опредѣлить тѣ уравненія, для которыхъ полученныя равенства имѣютъ мѣсто тождественно, такъ какъ всегда можно лѣвую часть уравненія $F=0$ привести къ такому виду, чтобы упомянутыя равенства не могли имѣть мѣста въ силу $F=0$. Такимъ образомъ имѣемъ два совокупныхъ уравненія съ частными производными по r, s, t для опредѣленія функціи F. Интегрируя ихъ, получаемъ искомый видъ уравненій $F=0$:

$$F=rt-s^2-f(x, y, z, p, q)=0.$$

или иначе

$$\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}=\varphi(x, y, z, p, q).$$

Изъ послѣдней формы уравненія явствуетъ, что для всѣхъ интегральныхъ поверхностей подобныхъ уравненій Гауссова кривизна есть функція координатъ элемента 1-го порядка, такъ что двѣ соприкасающіяся интегральныя поверхности въ точкѣ соприкосновенія необходимо имѣютъ одинаковую Гауссову кривизну.

Примѣръ 3. Опредѣлить видъ уравненій, для которыхъ прямыя l, l' для каждаго элемента взаимно-перпендикулярны, или, другими словами, для которыхъ характеристики различныхъ системъ, заключающія одинъ общій элементъ, пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

Условіе взаимно-перпендикулярности касательныхъ къ характеристикамъ различныхъ системъ, имѣетъ видъ

$$dz\delta z+dx\delta x+dy\delta y=0,$$

или

$$(1+p^2)dx\delta x+pq(dx\delta y+dy\delta x)+(1+q^2)dy\delta y=0.$$

при чемъ dx. dy и δx. δy удовлетворяютъ уравненіямъ

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0$$

и

$$R\delta y^2 - S\delta x\delta y + T\delta x^2 = 0.$$

Въ силу послѣднихъ уравненій

$$R : S : T = dx\delta x : (dx\delta y + dy\delta x) : dy\delta y.$$

и слѣдовательно. для уравненій разсматриваемаго типа мы должны имѣть

$$(1+p^2)R + pqS + (1+q^2)T = 0$$

тождественно или въ силу $F=0$. Послѣдній случай приводится къ первому, и мы получаемъ искомый видъ уравненій $F=0$, интегрируя выше написанное линейное уравненіе съ частными производными функціи F по r. s. t:

$$F\left(\frac{r}{1+p^2} - \frac{s}{pq}\,;\ \frac{s}{pq} - \frac{t}{1+q^2},\ p,\ q,\ z,\ x,\ y\right) = 0.$$

§ 3.—Совершенно аналогично съ характеристическими многообразіями 2-го порядка мы можемъ ввести понятіе о характеристическихъ многообразіяхъ высшихъ порядковъ, опредѣляя вообще характеристическое многообразіе n-го порядка какъ интегральное многообразіе одного измѣренія n-го порядка. служащее носителемъ интегральнаго многообразія $(n+1)$-го порядка *двухъ* измѣреній. Разсмотримъ сначала характеристическія многообразія 3-го порядка. Элементы 2-го порядка, входящіе въ составъ элементовъ подобнаго многообразія. очевидно. образуютъ нѣкоторое интегральное многообразіе 2-го порядка одного измѣренія $M_{1,1}^{(1)}$. Такъ какъ для характеристическаго многообразія 3-го порядка мы. очевидно. встрѣчаемся съ случаемъ неопредѣленности при рѣшеніи задачи Cauchy, а именно система уравненій, получаемыхъ изъ уравненій (10) § 1-го главы III-й (стр. 202) замѣной n черезъ $(n+1)$, становится неопредѣленной.—то для значеній x, y. z. p. q. r. s, t. опредѣляемыхъ уравненіями характеристическаго многообразія, или иначе для многообразія $M_{1,1}^{(1)}$ должно имѣть мѣсто равенство

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0$$

(см. стр. 203). Отсюда заключаемъ, что многообразіе $M_{1,1}^{(1)}$ должно принадлежать къ числу такихъ. для которыхъ задача Cauchy становится невозможной или неопредѣленной. Первое предположеніе. очевидно, отпадаетъ, такъ какъ, по самому опредѣленію, элементы характеристическаго многообразія 3-го порядка даютъ намъ систему значеній z'''. $z_{,}''$. $z_{,,}'$, $z_{,,,}$, удовлетворяющихъ уравненіямъ

$$\begin{aligned} dr - z'''dx - z_{,}''dy &= 0 \\ ds - z_{,}''dx - z_{,,}'dy &= 0 \\ dt - z_{,,}'dx - z_{,,,}dy &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= Rz''' + Sz_{,}'' + Tz_{,,}' + \left[\frac{dF}{dx}\right] = 0 \\ \frac{dF}{dy} &= Rz_{,}'' + Sz_{,,}' + Tz_{,,,} + \left[\frac{dF}{dy}\right] = 0; \end{aligned}$$

слѣдовательно для многообразія $M_{1,1}^{(1)}$ должна имѣть мѣсто неопредѣленность при рѣшеніи задачи Cauchy. т. е. другими словами $M_{1,1}^{(1)}$ есть характеристическое многообразіе 2-го порядка. и дифференціальныя уравненія (109) (стр. 279). которыя опредѣляютъ характеристическое многообразіе 2-го порядка. имѣютъ мѣсто и для характеристическаго многообразія 3-го порядка. Присоединяя къ уравненіямъ (109) еще слѣдующія

$$\left.\begin{aligned} dr - z'''dx - z_{,}''dy &= 0 \\ ds - z_{,}''dx - z_{,,}'dy &= 0 \\ dt - z_{,,}'dx - z_{,,,}dy &= 0. \end{aligned}\right| \qquad (195)$$

мы опредѣлимъ. какъ извѣстно (см. гл. II, § 2. стр. 155. гл. IV, § 2, стр. 275), интегральное многообразіе 3-го порядка *двухъ* измѣреній. имѣющее носителемъ многообразіе $M_{1,1}^{(1)}$. Въ составъ упомянутаго многообразія двухъ измѣреній. очевидно, входитъ и разсматриваемое характеристическое многообразіе 3-го порядка. и намъ остается найти уравненія. которыя слѣдуетъ присоединить къ уравненіямъ (109) (стр. 279) и (195) для того, чтобы выдѣлить изъ всего упомянутаго многообразія двухъ измѣреній многообразіе одного измѣренія — характеристическое многообразіе 3-го порядка. Согласно опредѣленію, эти добавочныя уравненія должны выражать условія неопредѣленности системы

$$
\left.\begin{aligned}
&dz''' - z^{IV}\,dx - z_{,}'''dy = 0\\
&dz_{,}'' - z_{,}'''dx - z_{,,}''dy = 0\\
&dz_{,,}' - z_{,,}''dx - z_{,,,}'dy = 0\\
&dz_{,,,} - z_{,,,}'dx - z_{IV}\,dy = 0\\
&\frac{d^2F}{dx^2} = Rz^{IV} + Sz_{,}''' + Tz_{,,}'' + \left[\frac{d^2F}{dx^2}\right] = 0\\
&\frac{d^2F}{dxdy} = Rz_{,}''' + Sz_{,,}'' + Tz_{,,,}' + \left[\frac{d^2F}{dxdy}\right] = 0\\
&\frac{d^2F}{dy^2} = Rz_{,,}'' + Sz_{,,,}' + Tz_{IV} + \left[\frac{d^2F}{dy^2}\right] = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (196)
$$

(ср. гл. II. § 3, стр. 160 и 161. гл. III, § 1, стр. 202) служащей для опредѣленія интегральнаго многообразія 4-го порядка по данному характеристическому многообразію 3-го порядка. Намъ уже приходилось упоминать (см. гл. II, § 3, стр. 161), что уравненія системы (196) эквивалентны пяти независимымъ и что детерминанты, составленные изъ коэффиціентовъ этихъ уравненій, всѣ исчезаютъ, если

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0$$

(см. гл. III, § 1. стр. 202, 203). Такъ какъ это условіе выполнено въ силу уравненій (109), то намъ остается добавить условія, выражаемыя исчезновеніемъ детерминантовъ, которые получаются замѣной въ вышеупомянутыхъ детерминантахъ элементовъ послѣдовательно каждаго изъ столбцовъ извѣстными членами системы (196). Производя выкладки, вполнѣ аналогичныя тѣмъ, которыя были нами выполнены выше для характеристическихъ многообразій 2-го порядка (§ 2, стр. 276), получаемъ окончательно слѣдующія три уравненія

$$
\left.\begin{aligned}
&Rdydz''' + Tdxdz_{,}'' + \left[\frac{d^2F}{dx^2}\right]dxdy = 0\\
&Rdydz_{,}'' + Tdxdz_{,,}' + \left[\frac{d^2F}{dxdy}\right]dxdy = 0\\
&Rdydz_{,,}' + Tdxdz_{,,,} + \left[\frac{d^2F}{dy^2}\right]dxdy = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (197)
$$

которыя вмѣстѣ съ уравненіями (109) и (195) опредѣляютъ характеристическія многообразія 3-го порядка. Выше мы видѣли (§ 2. стр. 281), что уравненія (109) эквивалентны *шести* независимымъ: не трудно доказать, что уравненія (195) и (197) эквивалентны четыремъ независимымъ. Дѣйствительно, по опредѣленію характеристическаго многообра-

зія 2-го порядка, для *всѣхъ* значеній z''', $z_{,}''$, $z_{,,}'$, $z_{,,,}$, удовлетворяющихъ уравненіямъ (195), имѣютъ мѣсто равенства $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{dF}{dy} = 0$, другими словами эти равенства являются прямыми слѣдствіями уравненій (109) и (195); умножая далѣе первое изъ уравненій (197) на dx второе на dy и складывая ихъ, получаемъ

$$
\begin{gathered}
Rdxdydz''' + (Rdy^2 + Tdx^2)dz_{,}'' - Tdxdydz_{,,}' +\\
+ \left\{\left[\frac{d^2F}{dx^2}\right]dx - \left[\frac{d^2F}{dxdy}\right]dy\right\}dxdy = 0.
\end{gathered}
$$

или, въ силу уравненія

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0,$$

$$Rdz''' + Sdz_{,}'' + Tdz_{,,}' + \left[\frac{d^2F}{dx^2}\right]dx + \left[\frac{d^2F}{dxdy}\right]dy = 0,$$

а это уравненіе, какъ непосредственно очевидно, есть полный дифференціалъ уравненія

$$\frac{dF}{dx} = Rz''' + Sz_{,}'' + Tz_{,,}' + \left[\frac{dF}{dx}\right] = 0;$$

аналогично, умножая 2-е изъ уравненій (197) на dx, 3-е на dy и складывая ихъ, придемъ къ уравненію $d\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0$, которое слѣдуетъ изъ уравненій (195) и (109). Такимъ образомъ, въ силу уравненій (109) и (195), уравненія (197) сводятся къ одному независимому, и мы имѣемъ въ результатѣ всего *десять* независимыхъ уравненій между двѣнадцатью перемѣнными x, y, z, p, q, r, s, t, z''', $z_{,}''$, $z_{,,}'$, $z_{,,,}$ для опредѣленія характеристическихъ многообразій 3-го порядка; отсюда слѣдуетъ, что многообразія эти образуютъ семейство, зависящее отъ произвольной функціи. Вмѣстѣ съ тѣмъ изъ предыдущаго заключаемъ, что всѣ характеристическія многообразія 3-го порядка могутъ быть найдены, если мы для каждаго характеристическаго многообразія 2-го порядка $M^{(1)}_{1,1}$ выдѣлимъ изъ всего интегральнаго многообразія 3-го порядка двухъ измѣреній, имѣющаго носителемъ $M^{(1)}_{1,1}$, многообразіе одного измѣренія помощью добавочныхъ условій (197), которыя, какъ мы знаемъ, эквивалентны одному.

Совершенно подобно предыдущему можно показать, что всевозможныя характеристическія многообразія n-го порядка могутъ быть получены, если мы изъ интегральнаго многообразія n-го порядка двухъ измѣреній, имѣющаго носителемъ произвольное характеристическое многообразіе $(n-1)$-го порядка, выдѣлимъ многообразіе одного измѣренія помощью добавочныхъ условій

$$\left.\begin{array}{l} Rdydz^{(n)} + Tdxdz_{,}^{(n-1)} + \left[\dfrac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}}\right] dxdy = 0 \\ Rdydz_{,}^{(n-1)} + Tdxdz_{,,}^{(n-2)} + \left[\dfrac{d^{n-1}F}{dx^{n-2}dy}\right] dxdy = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Rdydz_{n-1}' + Tdxdz_{n} + \left[\dfrac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}\right] dxdy = 0, \end{array}\right\} \tag{198}$$

которыя, въ силу уравненій упомянутаго многообразія двухъ измѣреній, эквивалентны одному независимому. Другими словами, дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій n-го порядка получаются, если мы къ дифференціальнымъ уравненіямъ характеристическихъ многообразій $(n-1)$-го порядка присоединимъ уравненія

$$\left.\begin{array}{l} dz^{(n-1)} - z^{(n)}dx - z_{,}^{(n-1)}dy = 0 \\ dz_{,}^{(n-2)} - z_{,}^{(n-1)}dx - z_{,,}^{(n-2)}dy = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ dz_{n-1} - z_{n-1}'dx - z_{n}dy = 0 \end{array}\right\} \tag{199}$$

и уравненія (198).

Сопоставляя всѣ наши результаты, убѣждаемся, что характеристическія многообразія высшихъ порядковъ образуютъ двѣ системы, зависящихъ каждая отъ произвольной функціи и вполнѣ опредѣляемыхъ по двумъ системамъ характеристическихъ многообразій 2-го порядка. Кривыя образуемыя точками элементовъ характеристическихъ многообразій высшихъ порядковъ, совпадаютъ съ кривыми, образуемыми точками элементовъ характеристическихъ многообразій 2-го порядка, т. е. съ *характеристиками* даннаго уравненія $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$.

Въ заключеніе замѣтимъ, что въ тѣхъ случаяхъ, когда для уравненія $F=0$ имѣемъ $R=0$ или $T=0$ или одновременно $R=0$, $T=0$, уравненія (197) и вообще уравненія (198) приходится замѣнять другими, совершенно подобно тому, какъ это имѣетъ мѣсто для диффе-

ренціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій 2-го порядка (см. § 2, стр. 277—280). Новыя уравненія легко получимъ изъ уравненій (197) и (198), если въ нихъ величины Rdy и Sdx замѣнимъ тѣми же величинами, которыми ихъ приходится замѣнять въ двухъ послѣднихъ уравненіяхъ (109) для того, чтобы получить уравненія характеристическихъ многообразій 2-го порядка для соотвѣтствующаго частнаго случая. Такъ, если имѣемъ $R = 0$, $T = 0$, то для системы характеристическихъ многообразій n-го порядка, соотвѣтствующей рѣшенію $dx = 0$ уравненія

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = Sdxdy = 0.$$

уравненія (198) замѣняются слѣдующими:

$$\left.\begin{array}{l} Sdz^{(n)} + \left[\dfrac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}}\right] dy = 0, \quad Sdz_{,}^{(n-1)} + \left[\dfrac{d^{n-1}F}{dx^{n-2}dy}\right] dy = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \quad Sdz_{n-1}' + \left[\dfrac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}\right] dy = 0. \end{array}\right\} \tag{200}$$

а для 2-й системы, соотвѣтствующей рѣшенію $dy = 0$, — слѣдующими:

$$\left.\begin{array}{l} Sdz_{,}^{(n-1)} + \left[\dfrac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}}\right] dx = 0, \quad Sdz_{,,}^{(n-2)} + \left[\dfrac{d^{n-1}F}{dx^{n-2}dy}\right] dx = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \quad Sdz_{n} + \left[\dfrac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}\right] dx = 0. \end{array}\right\} \tag{201}$$

ГЛАВА V.

§ 1. — Связь между характеристическими многообразіями различныхъ порядковъ. Связь между характеристиками и интегралами. Задача Cauchy для характеристики. — § 2. — Интегрируемыя сочетанія дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій. — § 3. — Примѣры.

§ 1. — Въ предшествующей главѣ мы изслѣдовали отдѣльно характеристическія многообразія различныхъ порядковъ. Намъ предстоитъ теперь разсмотрѣть эти многообразія въ ихъ взаимной связи, а также опредѣлить ихъ роль по отношенію къ интеграламъ даннаго уравненія

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t) = 0. \tag{1}$$

Въ § 3-мъ гл. IV намъ уже приходилось указывать, что характеристическія многообразія высшихъ порядковъ необходимо заключаютъ въ своемъ составѣ характеристическія многообразія 2-го порядка, такъ что кривыя, образуемыя точками ихъ элементовъ, совпадаютъ съ характеристиками уравненія. Не трудно убѣдиться, что послѣднее свойство имѣетъ мѣсто и для характеристическихъ многообразій 1-го порядка въ томъ случаѣ, когда уравненіе $F = 0$ (1) допускаетъ подобныя многообразія. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ характеристическое многообразіе 1-го порядка есть носитель интегральнаго многообразія *двухъ* измѣреній, то для всѣхъ значеній $r,\ s,\ t$, опредѣляемыхъ изъ соотношеній

$$\left.\begin{aligned} dp - rdx - sdy &= 0 \\ dq - sdx - tdy &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

($p,\ q,\ z,\ x,\ y$ — функціи одного параметра въ силу уравненій характеристическаго многообразія 1-го порядка), имѣетъ мѣсто уравненіе $F = 0$ (1); для тѣхъ же значеній $r,\ s,\ t$ имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0. \tag{3}$$

какъ это было доказано въ главѣ IV-й (§ 1, стр. 245 и 246); присоединяя еще два уравненія

$$\left.\begin{aligned} Rdydr + Tdxds + \left[\frac{dF}{dx}\right]dxdy &= 0 \\ Rdyds + Tdxdt + \left[\frac{dF}{dy}\right]dxdy &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

которыя въ силу $F = 0$, въ силу (3), (2) и уравненія

$$dz - pdy - qdy = 0$$

эквивалентны одному, мы выдѣлимъ изъ интегральнаго многообразія двухъ измѣреній, имѣющаго носителемъ данное характеристическое многообразіе 1-го порядка, многообразіе одного измѣренія, которое, очевидно, есть характеристическое многообразіе 2-го порядка. Такимъ образомъ, мы можемъ окончательно высказать слѣдующую теорему:

Теорема 1. Кривыя, образуемыя точками элементовъ характеристическихъ многообразій любыхъ порядковъ, совпадаютъ съ характеристиками уравненія (т. е. съ кривыми, образуемыми точками элементовъ характеристическихъ многообразій *2-го* порядка).

Допустимъ обратно, что намъ дано характеристическое многообразіе $(n-1)$-го порядка, и опредѣлимъ всѣ характеристическія многообразія n-го порядка, въ составъ которыхъ входитъ данное. Координаты $x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ z''',\ z_{,}'',\ z_{,,}',\ z_{,,,},\ z^{IV} \ldots\ldots,\ z^{(n-1)},\ z_{,}^{(n-2)} \ldots\ldots\ z_{n-1}$ по предположенію — опредѣленныя функціи нѣкотораго параметра u (въ силу уравненій характеристическаго многообразія $(n-1)$-го порядка); координаты $z^{(n)},\ z_{,}^{(n-1)}, \ldots\ z_n$, какъ было упомянуто въ главѣ IV (§ 3, стр. 334), опредѣляются изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} dz^{(n-1)} - z^{(n)}dx - z_{,}^{(n-1)}dy &= 0 \\ dz_{,}^{(n-2)} - z_{,}^{(n-1)}dx - z_{,,}^{(n-2)}dy &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dz_{n-1} - z_{n-1}'dx - z_n dy &= 0 \\ Rdydz^{(n)} + Tdxdz_{,}^{(n-1)} + \left[\frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}}\right]dxdy &= 0 \\ Rdydz_{,}^{(n-1)} + Tdxdz_{,,}^{(n-2)} + \left[\frac{d^{n-1}F}{dx^{n-2}dy}\right]dxdy &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Rdydz_{n-1}' + Tdxdz_n + \left[\frac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}\right]dxdy &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

которыя эквивалентны $n+1$ независимымъ. Мы можемъ, напримѣръ, взять всѣ уравненія 1-й группы и послѣднее уравненіе 2-й группы. Тогда изъ первыхъ n уравненій координаты $z^{(n)}, z_1^{(n-1)}, \ldots, z_{n-1}'$ выразимъ линейно черезъ z_n, а послѣднее уравненіе дастъ намъ, вообще говоря, линейное дифференціальное уравненіе для опредѣленія z_n, откуда получимъ выраженіе для z_n, зависящее отъ одного произвольнаго постояннаго; такимъ образомъ, данное характеристическое многообразіе $(n-1)$-го порядка, вообще говоря, входитъ въ составъ цѣлаго семейства характеристическихъ многообразій n-го порядка, зависящаго отъ одного параметра, и опредѣленіе этого семейства сводится къ квадратурамъ (линейное уравненіе 1-го порядка интегрируется въ квадратурахъ). Разсмотримъ нѣсколько подробнѣе, какъ получается уравненіе, изъ котораго мы находимъ z_n. Такъ какъ послѣднее изъ уравненій (5) содержитъ лишь дифференціалы dz_{n-1} и dz_n, то для исключенія dz_{n-1}' достаточно уравненія, получаемаго дифференцированіемъ послѣдняго изъ первой группы уравненій (5), т. е. уравненія

$$dx.dz_{n-1}' + dydz_n + z_{n-1}'d^2x + z_nd^2y - d^2z_{n-1} = 0. \qquad (6)$$

Уравненіе, получаемое по исключеніи dz_{n-1}', очевидно, вообще говоря, содержитъ dz_n; оба дифференціала исключаются только въ томъ случаѣ, если коэффиціенты при нихъ въ уравненіи (6) и въ послѣднемъ изъ уравненій (5) пропорціональны, т. е. если для характеристическаго многообразія $(n-1)$-го порядка имѣемъ

$$Rdy : Tdx = dx : dy. \qquad (7)$$

Условіе (7) можетъ быть представлено въ иной формѣ: если дифференціалы, соотвѣтствующіе характеристикамъ второй системы, обозначимъ черезъ δx, $\delta y, \ldots$, то имѣемъ

$$Rdy : Tdx = \delta x : \delta y,$$

такъ какъ $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{\delta y}{\delta x}$ — два корня уравненія

$$Rm^2 - Sm + T = 0,$$

и слѣдовательно, условіе (7) даетъ намъ

$$\delta x : \delta y = dx : dy, \qquad (7')$$

т. е. оно есть условіе совпаденія касательныхъ къ характеристикамъ второй системы съ касательными къ данной характеристикѣ, или иначе

условіе совпаденія прямыхъ l, l' (см. гл. IV, § 2. стр. 293) вдоль данной характеристики; такимъ образомъ, уравненіе, опредѣляющее направленія этихъ прямыхъ, должно имѣть равные корни, и слѣдовательно, для элементовъ даннаго многообразія должно имѣть мѣсто равенство

$$4RT - S^2 = 0, \qquad (8)$$

откуда обратно слѣдуетъ равенство (7). Если условіе (8) или (7) выполняется, то для z_n мы получаемъ уравненіе, не содержащее dz_n, и притомъ, какъ не трудно видѣть, для $n > 3$ — линейное относительно z_n; слѣдовательно, характеристическое многообразіе $(n-1)$-го порядка входитъ въ этомъ случаѣ въ составъ *одного* опредѣленнаго характеристическаго многообразія n-го порядка. Для $n = 3$ мы получаемъ уравненіе квадратное относительно $z_{,,,}$, и слѣдовательно характеристическое многообразіе 2-го порядка, для котораго имѣетъ мѣсто равенство (8), входитъ въ составъ *двухъ* характеристическихъ многообразій 3-го порядка. Если условіе (8) выполняется, то можетъ еще въ частности случиться, что уравненіе, получаемое по исключеніи обоихъ дифференціаловъ изъ уравненія (6) и послѣдняго изъ уравненій (5), образуетъ вмѣстѣ съ первой группой уравненій (5) неопредѣленную или несовмѣстную систему (относительно $z^{(n)}, z_{n-1}', \ldots z_n$); въ первомъ случаѣ любое многообразіе одного измѣренія, входящее въ составъ многообразія двухъ измѣреній, носителемъ котораго служитъ данное характеристическое многообразіе $(n-1)$-го порядка, есть характеристическое многообразіе n-го порядка, и слѣдовательно, мы имѣемъ цѣлую систему, зависящую отъ произвольной функціи, характеристическихъ многообразій n-го порядка, въ составъ которыхъ входитъ данное характеристическое многообразіе $(n-1)$-го порядка; во второмъ случаѣ опредѣленіе подобныхъ характеристическихъ многообразій n-го порядка становится вовсе невозможнымъ. Въ томъ случаѣ, когда данное уравненіе $F = 0$ (1) допускаетъ характеристическія многообразія 1-го порядка, возникаетъ вопросъ о характеристическихъ многообразіяхъ 2-го порядка, въ составъ которыхъ входитъ данное характеристическое многообразіе 1-го порядка. Опредѣленіе этихъ многообразій, какъ было собственно уже упомянуто, приводится къ опредѣленію r, s, t изъ уравненій (2) и (4) по даннымъ выраженіямъ x, y, z, p, q въ функціи одного параметра. Такъ какъ уравненія (2) и (4) представляютъ частный случай системы (5), получающійся при $n = 2$, то результаты, которые мы имѣли выше, въ общихъ чертахъ сохраняются; вся особенность состоитъ въ томъ, что дифференціальное уравненіе, которое получается для опредѣленія t, вообще говоря,—не линейное, а равнымъ образомъ и то уравненіе, которое получается для опредѣленія t, когда ds и dt исключаются одновременно между вторыми уравненіями системы (2) и системы (4), вообще говоря,—тоже не линейное, и степень его зависитъ отъ вида уравненія $F=0$. Изъ сопоставленія всего изложеннаго получаемъ слѣдующія теоремы:

Теорема 2. Данное характеристическое многообразіе входитъ въ составъ цѣлаго семейства, зависящаго отъ одного параметра, характеристическихъ многообразій порядка высшаго на единицу, если только для даннаго многообразія выраженіе $4RT-S^2$ отлично отъ нуля.

Теорема 3. Если для даннаго характеристическаго многообразія $4RT-S^2=0$, то оно входитъ, вообще говоря, въ составъ *единственнаго* характеристическаго многообразія порядка высшаго на единицу; характеристическое многообразіе 2-го порядка, для котораго $4RT-S^2=0$, входитъ въ составъ *двухъ* характеристическихъ многообразій 3-го порядка; характеристическое многообразіе 1-го порядка при $4RT-S^2=0$ входитъ въ составъ нѣсколькихъ опредѣленныхъ характеристическихъ многообразій 2-го порядка. Въ частности, характеристическое многообразіе, для котораго $4RT-S^2=0$, можетъ входить въ составъ цѣлаго семейства, зависящаго отъ произвольной функціи, характеристическихъ многообразій порядка высшаго на единицу или же можетъ не входить въ составъ ни одного характеристическаго многообразія высшаго порядка.

Для примѣра разсмотримъ уравненіе

$$rt-s^2=0. \tag{9}$$

Условіе $4RT-S^2=0$ (8) здѣсь выполняется въ силу даннаго уравненія, и слѣдовательно, двѣ системы характеристикъ сливаются въ одну. Такимъ образомъ, для *произвольнаго* характеристическаго многообразія уравненія (9) мы будемъ необходимо имѣть одинъ изъ случаевъ, разсмотрѣнныхъ въ теоремѣ 3-й. Характеристическія многообразія 1-го порядка уравненія (9) опредѣляются дифференціальными уравненіями

$$dp=0,\quad dq=0, \tag{10}$$

которыя получаются изъ уравненій (86) § 1-го гл. IV, если положить въ нихъ $L=M=N=V=0$, $U=1$. Изъ уравненій (10) имѣемъ $p=a$, $q=b$, гдѣ a и b — произвольныя постоянныя; уравненіе

$$dz-pdx-qdy=0$$

дастъ кромѣ того

$$z=ax+by+c,$$

гдѣ c — произвольное постоянное; полагая $y=\varphi(x)$, гдѣ φ—произвольная функція, получаемъ произвольное характеристическое многообразіе 1-го порядка. Какъ видимъ, характеристическія многообразія 1-го порядка уравненія (9) образуются точками произвольныхъ плоскихъ кривыхъ вмѣстѣ съ плоскостями этихъ кривыхъ. Характеристическія многообразія 2-го порядка, въ составъ которыхъ входитъ данное характеристическое многообразіе 1-го порядка, опредѣляются изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} rdx+sdy&=0\\ sdx+tdy&=0\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и

$$\left.\begin{aligned} tdydr+rdxds&=0\\ tdyds+rdxdt&=0,\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

которыя получаются изъ уравненій (2) и (4), если въ нихъ положимъ $dp=0$, $dq=0$, $F=rt-s^2$. Изъ уравненій (11) $tdy=-sdx$, $rdx=-sdy$, а слѣдовательно уравненія (12) принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned} -s(dxdr+dyds)&=0\\ -s(dxds+dydt)&=0.\end{aligned}\right\} \tag{12'}$$

Наконецъ, дифференцируя уравненія (11) и исключая дифференціалы dr, ds, dt, получаемъ изъ (12')

$$\left.\begin{aligned} s(rd^2x+sd^2y)&=0\\ s(sd^2x+td^2y)&=0.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Уравненія (13) вмѣстѣ съ уравненіями (11) даютъ, вообще говоря, $r=0$, $s=0$, $t=0$, и, слѣдовательно, произвольное характеристическое многообразіе 1-го порядка уравненія (9) входитъ, вообще говоря, въ составъ единственнаго характеристическаго многообразія 2-го порядка. Исключеніе представляютъ тѣ характеристическія многообразія, для которыхъ

$$dx:dy=d^2x:d^2y, \tag{14}$$

такъ какъ для нихъ система (13) тождественна системѣ (11) и, слѣдовательно, каждое подобное характеристическое многообразіе 1-го порядка входитъ въ составъ цѣлаго семейства, зависящаго отъ произвольной функціи, характеристическихъ многообразій 2-го порядка. Интегрируя уравненіе (14), получаемъ

$$y=mx+n; \tag{15}$$

слѣдовательно, исключительныя характеристическія многообразія 1-го порядка, о которыхъ идетъ рѣчь, получаются, если мы за плоскую кривую, по которой должны располагаться точки элементовъ, возьмемъ въ частности произвольную прямую линію.

Разсмотримъ уравненіе $F=0$, принадлежащее къ числу уравненій, изслѣдованныхъ нами въ § 1 главы IV, т. е. уравненіе, которое допускаетъ систему характеристическихъ многообразій 1-го порядка, опредѣляемую тремя дифференціальными уравненіями. Для произвольнаго характеристическаго многообразія 2-го порядка уравненія $F=0$ выполняются между прочимъ слѣдующія свойства (см. гл. IV, § 2, стр. 284, 295): касательная къ характеристикѣ C совпадаетъ съ однимъ изъ діаметровъ l, l' двойного соприкосновенія индикатрисы разсматриваемаго элемента съ безконечно-близкими индикатрисами системы Σ; образующая характеристической развертывающейся поверхности D сопряжена касательной къ C относительно индикатрисы; радіусъ кривизны ρ нормальнаго сѣченія поверхности D по направленію касательной къ C равенъ $\frac{a'^2}{k}$, гдѣ a' — полудіаметръ индикатрисы, имѣющій направленіе касательной къ C, а k—постоянное входящее въ уравненія индикатрисы. Для уравненія $F=0$ одинъ изъ діаметровъ l, l' двойного соприкосновенія необходимо совпадаетъ съ діаметромъ, проходящимъ черезъ двѣ точки пересѣченія A, A' индикатрисы съ кривой J системы Σ; слѣдовательно, для всѣхъ характеристическихъ многооообразій 2-го порядка одной изъ двухъ системъ касательная къ характеристикѣ C совпадаетъ съ діаметромъ AA', который служитъ діаметромъ двойного соприкосновенія пучка σ (см. гл. IV, § 1, стр. 246), заключающаго разсматриваемую индикатрису. Образующая развертывающейся поверхности D, какъ прямая сопряженная касательной къ C, параллельна касательнымъ къ индикатрисѣ въ точкахъ A, A', а эти касательныя, какъ извѣстно (стр. 246), касаются кривой K системы Σ. Соображая всѣ полученные результаты съ выше выведенными свойствами характеристическихъ многообразій 1-го порядка уравненій того типа, который мы разсматриваемъ (стр. 248), убѣждаемся, что кривая C и поверхность D образуютъ характеристическое многообразіе 1-го порядка. Такимъ образомъ, получается

Теорема 4. Для уравненій, которыя допускаютъ систему характеристическихъ многообразій 1-го порядка, опредѣляемую тремя дифференціальными уравненіями, *всякое* характеристическое многообразіе 2-го порядка одной изъ двухъ системъ заключаетъ въ своемъ составѣ характеристическое многообразіе 1-го порядка.

Понятно, что для *билинейнаго* уравненія (ср. стр. 272) это свойство принадлежитъ *обѣимъ* системамъ характеристическихъ многообразій.

Если мы имѣемъ многообразіе элементовъ двухъ измѣреній, удовлетворяющее дифференціальнымъ соотношеніямъ

$$\left.\begin{aligned} dz - pdx - qdy &= 0 \\ dp - rdx - sdy &= 0 \\ dq - sdx - tdy &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

и состоящее изъ семейства характеристическихъ многообразій 2-го порядка, то, очевидно, это многообразіе двухъ измѣреній есть интегральное многообразіе даннаго уравненія, такъ какъ для всѣхъ элементовъ характеристическихъ многообразій имѣемъ $F=0$ (1). Характеристики семейства образуютъ, вообще говоря, нѣкоторую поверхность, которая, согласно предыдущему, есть интегральная поверхность уравненія. Если уравненіе этой поверхности

$$z = z(x, y), \tag{17}$$

то соотношенія (16) даютъ намъ

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

другими словами, эти соотношенія выражаютъ, что плоскости и оскулирующіе параболоиды элементовъ характеристическихъ многообразій семейства должны служить касательными плоскостями и оскулирующими параболоидами для поверхности (17), образованной характеристиками. Понятно, что вмѣсто семейства характеристическихъ многообразій 2-го порядка мы можемъ разсматривать семейство характеристическихъ многообразій высшаго порядка, такъ какъ въ составъ каждаго изъ этихъ многообразій необходимо входитъ характеристическое многообразіе 2-го порядка. Наконецъ, если мы разсмотримъ многообразіе элементовъ 1-го порядка двухъ измѣреній, удовлетворяющее соотношенію

$$dz - pdx - qdy = 0 \tag{18}$$

и состоящее изъ семейства характеристическихъ многообразій 1-го порядка уравненія $F=0$ (которое, какъ предполагаемъ, допускаетъ характеристическія многообразія 1-го порядка), то многообразіе элементовъ 2-го порядка, для котораго упомянутое многообразіе двухъ измѣреній служитъ носителемъ, очевидно, есть интегральное многообразіе даннаго уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, элементы полученнаго нами многообразія 2-го порядка, взятые вдоль любой характеристики, образуютъ многообразіе одного измѣренія, входящее въ составъ многообразія двухъ измѣреній, для котораго носителемъ служитъ выбранное характеристическое многообразіе 1-го порядка: слѣдовательно, по самому опредѣленію характеристическихъ многообразій 1-го порядка, для всѣхъ этихъ элементовъ имѣемъ $F=0$ (1).

Такимъ образомъ, получается слѣдующая теорема:

Теорема 5. Поверхность, образованная семействомъ характеристикъ, есть интегральная поверхность уравненія, если плоскости и оскулирующіе параболоиды элементовъ характеристическихъ многообразій 2-го порядка, въ составъ которыхъ входятъ характеристики семейства, служатъ касательными плоскостями и оскулирующими параболоидами поверхности. Въ случаѣ, если характеристики семейства входятъ въ составъ характеристическихъ многообразій 1-го порядка, достаточно, чтобы плоскости развертывающихся характеристическихъ поверхностей касались поверхности, образуемой характеристиками.

Обратно разсмотримъ произвольную интегральную поверхность даннаго уравненія $F=0$ (1). Въ каждой точкѣ ея опредѣлимъ двѣ прямыя l, l'—діаметры двойного соприкосновенія индикатрисы поверхности съ двумя безконечно-близкими индикатрисами системы Σ или иначе—касательныя къ двумъ параболамъ, по которымъ оскулирующій параболоидъ поверхности соприкасается съ двумя безконечно-близкими параболоидами системы Σ' (гл. IV, § 2, стр. 309). На интегральной поверхности, такимъ образомъ, опредѣляются двѣ системы линій, изъ которыхъ каждая въ любой точкѣ касается соотвѣтственной прямой l или l'. Очевидно, системы эти опредѣляются уравненіемъ

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0 \tag{19}$$

(ср. гл. III, § 2, стр. 228, гл. IV. § 2, стр. 296), гдѣ вмѣсто r, s, t, p, q, z слѣдуетъ вставить $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $z(x, y)$, если

$$z = z(x, y)$$

есть уравненіе интегральной поверхности. Элементы 2-го порядка интеграла, взятые вдоль любой изъ этихъ кривыхъ, образуютъ интегральное многообразіе одного измѣренія $M^{(1)}_{1,1}$, удовлетворяющее уравненію (19). На основаніи результатовъ главы III (§ 1, стр. 201), подобное многообразіе или вовсе не входитъ въ составъ ни одного интегральнаго многообразія 3-го порядка, или же опредѣленіе интегральныхъ многообразій 3-го порядка, въ составъ которыхъ входитъ $M^{(1)}_{1,1}$,—есть задача неопредѣленная, т. е. другими словами $M^{(1)}_{1,1}$—есть характеристическое многообразіе 2-го порядка. Первый случай здѣсь, вообще говоря, не имѣетъ мѣста, такъ какъ элементы 3-го порядка интеграла, взятые вдоль изслѣдуемой кривой, образуютъ интегральное многообразіе 3-го порядка, въ составъ котораго входитъ $M^{(1)}_{1,1}$; исключеніе встрѣтимъ лишь тогда, когда вся изслѣдуемая кривая окажется для интегральной поверхности *особой* кривой, вдоль которой частныя производныя z 3-го порядка получаютъ безконечныя значенія. Такимъ образомъ, уравненіе (19) опредѣляетъ на интегральной поверхности двѣ системы характеристикъ: черезъ каждую точку поверхности проходятъ двѣ характеристики двухъ различныхъ системъ (по направленію прямыхъ l и l'). Касательныя плоскости и оскулирующіе параболоиды интегральной поверхности вдоль характеристики, очевидно, служатъ плоскостями и оскулирующими параболоидами соотвѣтствующаго характеристическаго многообразія 2-го порядка. Разсужденія наши становятся непримѣнимыми въ случаѣ *особаго* интеграла. Такъ какъ для элементовъ его имѣемъ $R=0$, $S=0$, $T=0$ (см. гл. III, § 3, стр. 231), то прямыя l, l' становятся неопредѣленными въ каждой точкѣ интегральной поверхности и уравненіе (19) обращается въ тождество. Это наводитъ на мысль, что *всякая* кривая на поверхности особаго интеграла есть характеристика: и дѣйствительно, для элементовъ особаго интеграла мы имѣемъ

$$F=0, \quad R=0, \quad S=0, \quad T=0, \quad \left[\frac{dF}{dx}\right]=0, \quad \left[\frac{dF}{dy}\right]=0$$

(см. гл. III, § 3, стр. 232), а въ силу этихъ равенствъ тождественно удовлетворяются всѣ дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій 2-го порядка, кромѣ уравненій

$$\begin{aligned} dz - pdx - qdy &= 0 \\ dp - rdx - sdy &= 0 \\ dq - sdx - tdy &= 0, \end{aligned}$$

которыя въ свою очередь тоже удовлетворяются, такъ какъ мы беремъ элементы *интегральнаго* многообразія, для котораго имѣютъ мѣсто эти дифференціальныя соотношенія.

Такимъ образомъ, получается

Теорема 6. Всякая интегральная поверхность можетъ быть образована изъ семейства характеристикъ, притомъ, вообще говоря, двумя способами, такъ что на интегральной поверхности имѣемъ *двѣ* системы характеристикъ. Поверхность особаго интеграла можетъ быть образована изъ характеристикъ безконечно-разнообразно: всякая кривая на этой поверхности есть характеристика.

Разсмотримъ произвольную интегральную поверхность

$$z = z(x, y) \tag{17}$$

и одну изъ характеристикъ C, лежащихъ на этой поверхности. Значенія $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}$ вдоль C образуютъ, очевидно, интегральное многообразіе n-го порядка одного измѣренія $\mathfrak{M}$, входящее въ составъ многообразія двухъ измѣреній, носителемъ котораго служитъ интегральная поверхность. Для упомянутаго многообразія одного измѣренія $\mathfrak{M}$ притомъ удовлетворяется, по предыдущему, уравненіе (19), а слѣдовательно, при опредѣленіи интегральнаго многообразія $(n+1)$-го порядка, въ составъ котораго входитъ многообразіе $\mathfrak{M}$, мы должны встрѣтиться съ невозможностью или неопредѣленностью. Первый случай, очевидно, не имѣетъ здѣсь мѣста, такъ какъ значенія частныхъ производныхъ $(n+1)$-го порядка функціи $z(x, y)$ вдоль C даютъ намъ подобное многообразіе $(n+1)$-го порядка; слѣдовательно, имѣемъ необходимо второй случай, и многообразіе $\mathfrak{M}$ есть характеристическое многообразіе n-го порядка. Такимъ образомъ, получается

Теорема 7. Значенія частныхъ производныхъ интеграла $z(x, y)$ до n-го порядка включительно вдоль характеристики, лежащей на интегральной поверхности, образуютъ характеристическое многообразіе n-го порядка.

Предположимъ, что мы желаемъ рѣшить задачу Cauchy (см. гл. III, § 1, стр. 199) для характеристики, точнѣе говоря, желаемъ опредѣлить интегралы, въ составъ которыхъ входитъ данное характеристическое многообразіе 2-го порядка. Для того, чтобы получить разложеніе въ рядъ Taylor-а интегральной функціи $z(x, y)$ въ области какой-либо точки данной характеристики C, необходимо опредѣлить значенія послѣдовательныхъ частныхъ производныхъ $z(x, y)$ на кривой C. Согласно теоремѣ 7-й, задача эта сводится къ опредѣленію характеристическихъ многообразій высшихъ порядковъ, въ составъ которыхъ входитъ данное характеристическое многообразіе 2-го порядка. Такимъ образомъ, если для даннаго характеристическаго многообразія выраженіе $4RT - S^2$ отлично отъ нуля, то, согласно теоремѣ 2-й, въ выраженія частныхъ производныхъ третьяго, четвертаго и т. д. порядковъ войдетъ по

одному произвольному постоянному, и слѣдовательно, коэффиціенты ряда Taylor-а, полученнаго для $z(x, y)$, будутъ содержать безчисленное множество произвольныхъ постоянныхъ. Методомъ, аналогичнымъ тому, который мы употребляли въ гл. III (§ 1), можно доказать равномѣрную сходимость *) этого ряда, и слѣдовательно, окончательно получается

Теорема 8. Данное характеристическое многообразіе 2-го порядка, для котораго $4RT - S^2$ отлично отъ нуля, входитъ въ составъ семейства интеграловъ, зависящаго отъ безчисленаго множества произвольныхъ постоянныхъ. Всѣ интегральныя поверхности семейства имѣютъ соприкосновеніе 2-го порядка вдоль данной характеристики.

Послѣднее замѣчаніе слѣдуетъ изъ того, что оскулирующіе параболоиды элементовъ характеристическаго многообразія служатъ оскулирующими параболоидами интегральныхъ поверхностей.

Если бы мы пожелали опредѣлить интегралы, въ составъ которыхъ входитъ данное характеристическое многообразіе n-го порядка $(n > 2)$, то все дѣло свелось бы въ сущности лишь къ тому, чтобы выдѣлить изъ семейства интеграловъ, которое мы имѣли выше, такое семейство, для котораго постоянныя, входящія въ составъ выраженій производныхъ до n-го порядка включительно, имѣютъ опредѣленныя значенія. Такимъ образомъ, получается

Теорема 9. Данное характеристическое многообразіе n-го порядка, для котораго $4RT - S^2$ отлично отъ нуля, входитъ въ составъ семейства интеграловъ, зависящаго отъ безчисленнаго множества произвольныхъ постоянныхъ. Всѣ интегральныя поверхности семейства имѣютъ соприкосновеніе n-го порядка вдоль данной характеристики.

Если данное уравненіе $F = 0$ (1) допускаетъ характеристическія многообразія 1-го порядка, то мы можемъ поставить задачу Cauchy, притомъ въ ея обычной формѣ, для характеристическаго многообразія 1-го порядка, т. е. опредѣлять интегральныя поверхности, проходящія черезъ характеристику C и касающіяся характеристической развертывающейся поверхности D. Въ общемъ случаѣ, когда для многообразія, имѣющаго носителемъ данное характеристическое многообразіе 1-го порядка, выраженіе $4RT - S^2$ отлично отъ нуля, мы получаемъ, на основаніи теоремъ 7-й и 2-й, выраженія для r, s, t вдоль характеристики C, зависящія отъ *одного* произвольнаго постояннаго. Дальнѣйшее рѣшеніе сводится къ рѣшенію задачи Cauchy для полученныхъ нами характеристическихъ многообразій 2-го порядка. Всѣ интегральныя по-

---

*) См. напр. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, t. I, ch. IV, n°n° 82, 83.

верхности, которыя найдемъ, имѣютъ соприкосновеніе *перваго* порядка вдоль характеристики C. Такимъ образомъ, теорема 9-я справедлива и для $n=1$.

Въ томъ случаѣ, когда для даннаго характеристическаго многообразія $4RT-S^2=0$, теорема 2-я, которой мы пользовались выше, не примѣняется, и на основаніи теоремы 3-й можетъ быть высказана

Теорема 10. Данное характеристическое многообразіе, для котораго $4RT-S^2=0$, входитъ, вообще говоря, въ составъ опредѣленнаго числа интеграловъ, такъ что задача Cauchy въ данномъ случаѣ — опредѣленная.

Въ частности можетъ оказаться, что для даннаго характеристическаго многообразія имѣетъ мѣсто одинъ изъ тѣхъ исключительныхъ случаевъ, о которыхъ было упомянуто въ теоремѣ 3-й. Тогда задача Cauchy для даннаго характеристическаго многообразія становится неопредѣленной или невозможной.

Такъ, если мы разсмотримъ уравненіе

$$rt-s^2=0,$$

интегралами котораго служатъ произвольныя развертывающіяся поверхности (см. гл. II, § 4, стр. 173), а характеристическими многообразіями 1-го порядка — произвольныя плоскія кривыя, каждая со своей плоскостью (см. выше стр. 341), и если будемъ рѣшать задачу Cauchy въ ея обычной формѣ для характеристическихъ многообразій 1-го порядка, т. е. станемъ опредѣлять развертывающіяся поверхности, проходящія черезъ данную плоскую кривую C и касающіяся вдоль ея плоскости этой кривой, то, очевидно, придемъ къ слѣдующему результату: задача Cauchy допускаетъ единственное рѣшеніе для произвольной кривой C (плоскость этой кривой) и становится неопредѣленной въ томъ случаѣ, когда кривая C въ частности есть прямая линія (семейство всевозможныхъ развертывающихся поверхностей, для которыхъ прямая C служитъ образующей, а данная плоскость — касательной плоскостью).

Предположимъ обратно, что имѣемъ семейство интегральныхъ поверхностей, проходящихъ черезъ одну кривую C и имѣющихъ вдоль ея соприкосновеніе n-го порядка. Значенія $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots \frac{\partial^n z}{\partial y^n}$ для всѣхъ этихъ поверхностей вдоль C образуютъ интегральное многообразіе n-го порядка одного измѣренія $\mathfrak{M}$. Опредѣляя далѣе для каждой изъ поверхностей значенія производныхъ $(n+1)$-го порядка вдоль C, мы найдемъ для каждой поверхности интегральное многообразіе одного измѣренія $(n+1)$-го порядка, въ составъ котораго входитъ ранѣе упомянутое интегральное многообразіе n-го порядка $\mathfrak{M}$. Совокупность всѣхъ этихъ многообразій $(n+1)$-го порядка образуетъ, очевидно, интегральное многообразіе *двухъ* измѣреній, носителемъ котораго служитъ многообразіе $\mathfrak{M}$, а слѣдовательно $\mathfrak{M}$ есть характеристическое многообразіе n-го порядка. Такимъ образомъ получается

Теорема 11. Кривая C, вдоль которой цѣлое семейство интегральныхъ поверхностей имѣетъ соприкосновеніе какого-либо порядка, есть необходимо характеристика уравненія. Если поверхности семейства имѣютъ вдоль C соприкосновеніе 1-го порядка, то C входитъ въ составъ характеристическаго многообразія *перваго* порядка.

Изъ послѣднихъ теоремъ можно вывести, что характеристическія многообразія даннаго уравненія произвольнымъ преобразованіемъ прикосновенія преобразуются въ характеристическія многообразованія преобразованнаго уравненія, такъ какъ соприкосновеніе есть свойство инваріантное при всѣхъ подобныхъ преобразованіяхъ. То же самое впрочемъ непосредственно явствуетъ изъ самаго опредѣленія характеристическаго многообразія n-го порядка, какъ носителя интегральнаго многообразія $(n+1)$-го порядка двухъ измѣреній (ср. гл. IV, § 1, стр. 274).

§ **2.**—Въ предшествующемъ параграфѣ мы доказали, что всякій интегралъ уравненія съ частными производными 2-го порядка,

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0 \tag{26}$$

можетъ быть образованъ изъ семейства характеристическихъ многообразій 2-го порядка, другими словами — всякая интегральная поверхность можетъ быть построена изъ характеристикъ (см. § 1, теор. 6). Такимъ образомъ, рѣшеніе задачи Cauchy сводится къ опредѣленію семейства характеристическихъ многообразій, изъ которыхъ каждое заключаетъ по одному элементу интегральнаго многообразія одного измѣренія $M_{1,1}^{(1)}$, опредѣляемаго даннымъ уравненіемъ $F=0$ (20) для данныхъ кривой C и описанной развертывающейся поверхности D (см. гл. III, § 1, стр. 200). При этомъ однако мы встрѣчаемъ здѣсь затрудненія, которыя не имѣли мѣста при рѣшеніи задачи Cauchy для уравненія 1-го порядка. Въ самомъ дѣлѣ, между тѣмъ какъ черезъ данный элементъ $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ проходитъ единственное характеристическое многообразіе уравненія съ частными производными 1-го порядка, въ случаѣ уравненія 2-го порядка мы имѣемъ цѣлое семейство, зависящее отъ произвольной функціи, характеристическихъ многообразій, въ составъ которыхъ входитъ данный элементъ $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0)$ (см. гл. IV, § 2, стр. 283). Поэтому, для уравненія 1-го порядка мы непосредственно получаемъ семейство характеристическихъ многообразій, образующихъ интегралъ — соотвѣтственное рѣшеніе задачи Cauchy; для уравненія же 2-го порядка намъ еще предстоитъ выдѣлить это семейство изъ состава гораздо болѣе обширнаго, зависящаго отъ произвольной функціи. Искомое семейство опредѣляется изъ условія, чтобы для всего многообразія двухъ измѣреній, состоящаго изъ элементовъ этого семейства, имѣли мѣсто дифференціальныя соотношенія

$$\left.\begin{aligned} dz - pdx - qdy = 0 \\ dp - rdx - sdy = 0 \\ dq - sdx - tdy = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Въ случаѣ уравненія 1-го порядка дифференціальное соотношеніе

$$dz - pdx - qdy = 0,$$

которое должно имѣть мѣсто для всего многообразія двухъ измѣреній, образуемаго семействомъ характеристическихъ многообразій, выполняется, какъ извѣстно, само собой. Возникаетъ вопросъ, нельзя ли въ случаѣ уравненія 2-го порядка изъ состава всѣхъ характеристическихъ многообразій одной изъ двухъ системъ выдѣлить семейство (ω), вполнѣ аналогичное семейству всевозможныхъ характеристическихъ многообразій уравненія съ частными производными 1-го порядка. Семейство (ω), очевидно, должно во-первыхъ обладать тѣмъ свойствомъ, что каждый элементъ $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0)$, координаты котораго удовлетворяютъ данному уравненію $F=0$ (20), входитъ въ составъ одного опредѣленнаго характеристическаго многообразія семейства (ω). Другими словами, многообразія этого семейства должны опредѣляться уравненіемъ $F=0$ и еще *шестью* независимыми дифференціальными уравненіями 1-го порядка, такъ что для выдѣленія семейства (ω) изъ состава всей системы характеристическихъ многообразій даннаго уравненія надо присоединить къ уравненіямъ этой системы еще одно независимое дифференціальное уравненіе. Можно также сказать, что семейство (ω) должно опредѣляться уравненіемъ $F=0$ (20) и еще шестью уравненіями

$$\Phi_i\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t) = const. \quad (i=1,2,\dots 6), \qquad (22)$$

при чемъ въ силу этихъ уравненій должны удовлетворяться дифференціальныя уравненія одной изъ системъ характеристическихъ многообразій даннаго уравненія. Во-вторыхъ, характеристическія многообразія семейства (ω) должны давать рѣшенія задачи Cauchy, но понятно не для всѣхъ возможныхъ интегральныхъ многообразій одного измѣренія $M^{(1)}_{1,1}$, такъ какъ въ противномъ случаѣ характеристическія многообразія 1-й системы, не принадлежащія къ семейству (ω), вовсе не входили бы въ составъ ни одного интеграла. Если мы потребуемъ, чтобы семейство (ω) давало намъ семейство (S) интеграловъ возможно болѣе обширное, то, очевидно, мы должны будемъ предположить, что семейство (ω) даетъ рѣшеніе задачи Cauchy для всѣхъ интегральныхъ многообразій одного измѣренія $M^{(1)}_{1,1}$, для которыхъ имѣетъ мѣсто лишь *одно* добавочное условіе. Не трудно опредѣлить видъ этого условія. Въ самомъ дѣлѣ, если мы имѣемъ какой-либо интегралъ семейства (S), то элементы этого интеграла, взятые вдоль *произвольной* кривой на интегральной поверхности, должны давать интегральное многообразіе одного измѣренія $M^{(1)}_{1,1}$, для котораго нашъ интегралъ служитъ соотвѣтственнымъ рѣшеніемъ задачи Cauchy; слѣдовательно, для $M^{(1)}_{1,1}$, а слѣдовательно (въ силу произвола выбора кривой на интегральной поверхности) и для всѣхъ элементовъ интеграла должно имѣть мѣсто то добавочное условіе, о которомъ идетъ рѣчь. Между прочимъ, это условіе имѣетъ мѣсто для всѣхъ элементовъ характеристическихъ многообразій семейства (ω), образующихъ разсматриваемый интегралъ семейства (S); а такъ какъ разсужденія наши сохраняютъ силу для всякаго интеграла семейства (S), то слѣдовательно добавочное условіе должно имѣть мѣсто для всѣхъ характеристическихъ многообразій семейства (ω), откуда непосредственно заключаемъ, что видъ этого условія слѣдующій

$$\Phi\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t) = const., \qquad (23)$$

при чемъ равенство (23) служитъ интеграломъ дифференціальныхъ уравненій семейства (ω). Лѣвая часть этого равенства должна быть слѣдовательно функціей аргументовъ $F,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\dots,\Phi_6$, если

$$\Phi_i\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t) = const., \qquad (22)$$

суть уравненія, опредѣляющія семейство (ω); само собою понятно, что одну изъ функцій Φ_i мы имѣемъ право замѣнить функціей Φ, такъ что равенство (23) есть одно изъ уравненій, опредѣляющихъ семейство (ω). Интегральныя многообразія $M^{(1)}_{1,1}$, для которыхъ имѣетъ мѣсто условіе (23), образуютъ семейство, зависящее отъ двухъ произвольныхъ функцій, такъ какъ опредѣляются пятью уравненіями между восемью перемѣнными x, y, z, p, q, r, s, t:

$$\left.\begin{aligned} &dz - pdx - qdy = 0\\ &dp - rdx - sdy = 0\\ &dq - sdx - tdy = 0\\ &F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,\\ &\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = const. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Исключая r, s, t, получаемъ два дифференціальныхъ соотношенія между x, y, z, p, q, въ силу которыхъ возможно, напримѣръ, произвольно выбравъ кривую C многообразія $M^{(1)}_{1,1}$, развертывающуюся поверхность D опредѣлить по кривой C. Семейство (S) интеграловъ — рѣшеній задачи Cauchy для этихъ кривыхъ C и развертывающихся поверхностей D — зависитъ лишь отъ *одной* произвольной функціи, такъ какъ соотвѣтствующія интегральныя поверхности могутъ быть, очевидно, всѣ исчерпаны, если за кривыя C будемъ брать напримѣръ однѣ лишь кривыя, лежащія на плоскости zx. Если бы мы предположили, что семейство (ω) даетъ рѣшенія задачи Cauchy для многообразій $M^{(1)}_{1,1}$, опредѣляемыхъ *двумя* добавочными условіями, то, очевидно, получили бы семейство (S) интеграловъ, зависящее только отъ произвольныхъ постоянныхъ. Итакъ, пусть для многообразій $M^{(1)}_{1,1}$ имѣетъ мѣсто лишь одно условіе $\Phi = const.$ (23). Это же условіе, какъ мы видѣли, выполняется для элементовъ каждаго интеграла семейства (S), а слѣдовательно и для всѣхъ характеристическихъ многообразій 2-й системы, входящихъ въ составъ интеграловъ семейства (S). Не трудно видѣть, что всѣ эти характеристическія многообразія образуютъ семейство, которое не можетъ зависѣть отъ конечнаго числа произвольныхъ постоянныхъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ семейство (S) не могло бы зависѣть отъ произвольной функціи. Отсюда непосредственно явствуетъ, что равенство

$$\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = const. \qquad (23)$$

должно имѣть мѣсто въ силу дифференціальныхъ уравненій 2-й системы характеристическихъ многообразій даннаго уравненія (см. гл. IV, § 2, стр. 282), т. е. другими словами выраженіе $d\Phi$ должно быть линейнымъ сочетаніемъ лѣвыхъ частей упомянутыхъ дифференціальныхъ уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, въ противномъ случаѣ, присоединяя $\Phi = const.$ къ

дифференціальнымъ уравненіямъ 2-й системы, мы бы опредѣлили семейство характеристическихъ многообразій, зависящее лишь отъ семи произвольныхъ постоянныхъ. Итакъ, равенство $\Phi = const.$ (23) необходимо должно имѣть мѣсто въ силу дифференціальныхъ уравненій 2-й системы, или, какъ иногда говорятъ, уравненія эти должны допускать *интегрируемое* сочетаніе $d\Phi = 0$, откуда $\Phi = const.$ Интегралы семейства (S), получаемые при опредѣленномъ выборѣ постояннаго въ условіи $\Phi = const.$ (23), напримѣръ при $const. = \alpha$, служатъ вмѣстѣ съ тѣмъ интегралами уравненія съ частными производными

$$\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = \alpha, \qquad (25)$$

такъ какъ, согласно предыдущему, для всѣхъ элементовъ этихъ интеграловъ имѣемъ $\Phi = \alpha$. Не трудно убѣдиться далѣе, что характеристики семейства (ω), лежащія на этихъ интегралахъ, служатъ вмѣстѣ съ тѣмъ характеристиками уравненія (25). Въ самомъ дѣлѣ, черезъ каждую такую характеристику C проходитъ безчисленное множество интеграловъ семейства (S), для которыхъ $\Phi = \alpha$; это слѣдуетъ, во-первыхъ, изъ того, что семейство (S) зависитъ отъ произвольной функціи, между тѣмъ какъ все семейство характеристикъ (ω) — лишь отъ опредѣленнаго числа произвольныхъ постоянныхъ; во-вторыхъ, къ тому же результату придемъ, если станемъ рѣшать задачу Cauchy для всевозможныхъ многообразій $M^{(1)}_{1,1}$, для которыхъ $\Phi = \alpha$ и которыя всѣ содержатъ одинъ опредѣленный элементъ, принадлежащій разсматриваемому характеристическому многообразію. Всѣ интегральныя поверхности, полученныя нами такимъ образомъ, имѣютъ соприкосновеніе, вообще говоря, 2-го порядка вдоль характеристики C, а такъ какъ соотвѣтствующіе интегралы служатъ вмѣстѣ съ тѣмъ интегралами уравненія $\Phi = \alpha$ (25), то, согласно теоремѣ 11-й предшествующаго параграфа, C есть вмѣстѣ съ тѣмъ характеристика уравненія (25), и всѣ характеристическія многообразія семейства (ω), для которыхъ $\Phi = \alpha$, служатъ общими характеристическими многообразіями даннаго уравненія $F = 0$ (20) и уравненія $\Phi = \alpha$ (25). Можно также сказать, что все семейство (ω) состоитъ изъ общихъ характеристическихъ многообразій даннаго уравненія и уравненій $\Phi = const.$

Обратно, если дифференціальныя уравненія одной изъ системъ (которую будемъ называть *второю*) характеристическихъ многообразій даннаго уравненія $F = 0$ (20) допускаютъ интегрируемое сочетаніе $\Phi = const.$, то въ составъ характеристическихъ многообразій 1-й системы необходимо входитъ семейство (ω) того типа, который мы разсмотрѣли. Въ самомъ дѣлѣ, если мы станемъ рѣшать задачу Cauchy для какого-либо интегральнаго многообразія одного измѣренія $M_{1,1}^{(1)}$, для котораго $\Phi=\alpha$, то характеристическія многообразія 2-й системы, лежащія на соотвѣтственной интегральной поверхности, очевидно всѣ будутъ соотвѣтствовать одному и тому же значенію постояннаго въ соотношеніи $\Phi=const.$, которое по условію имѣетъ мѣсто для всевозможныхъ характеристическихъ многообразій 2-й системы; а именно, для всѣхъ этихъ многообразій будемъ имѣть $\Phi=\alpha$, такъ какъ каждое изъ нихъ заключаетъ по одному элементу многообразія $M_{1,1}^{(1)}$, для котораго $\Phi=\alpha$. Отсюда заключаемъ, что для всѣхъ элементовъ интеграла — рѣшенія задачи Cauchy для многообразія $M_{1,1}^{(1)}$ — имѣемъ $\Phi=\alpha$, а слѣдовательно это же условіе должно имѣть мѣсто для характеристическихъ многообразій 1-й системы, входящихъ въ составъ разсматриваемаго интеграла. Если будемъ брать всевозможныя интегральныя многообразія $M_{1,1}^{(1)}$—для которыхъ $\Phi=const.$, то получимъ семейство (S) интеграловъ даннаго уравненія, зависящее отъ одной произвольной функціи. Характеристическія многообразія 1-й системы, входящія въ составъ этихъ интеграловъ, образуютъ нѣкоторое семейство (ω), при чемъ для всѣхъ многообразій этого семейства имѣетъ мѣсто соотношеніе $\Phi=const.$; Присоединяя къ дифференціальнымъ уравненіямъ 1-й системы характеристическихъ многообразій даннаго уравненія соотношеніе $\Phi=const.$, мы опредѣлимъ всевозможныя характеристическія многообразія 1-й системы, для которыхъ $\Phi=const.$; они образуютъ, очевидно, семейство, изъ состава котораго черезъ каждый данный элементъ (x, y, z, p, q, r, s, t), удовлетворяющій уравненію $F=0$ (20), проходитъ *единственное* многообразіе. Такъ какъ съ другой стороны семейство (ω) необходимо должно давать по крайней мѣрѣ одно многообразіе для каждаго элемента, удовлетворяющаго уравненію $F=0$ (20), то опредѣленное нами семейство и есть искомое семейство (ω), которое такимъ образомъ зависитъ лишь отъ опредѣленнаго числа (шести) произвольныхъ постоянныхъ; изъ послѣдняго замѣчанія на основаніи соображеній, приведенныхъ выше, непосредственно слѣдуетъ, что всякое многообразіе семейства (ω), для котораго $\Phi=\alpha$, служитъ вмѣстѣ съ тѣмъ характеристическимъ многообразіемъ уравненія $\Phi=\alpha$*). Всѣ разсужденія наши, очевидно, сохраняютъ силу и тогда, когда дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій 2-й системы не допускаютъ интегрируемаго сочетанія

*) Не трудно это провѣрить непосредственнымъ вычисленіемъ.

$d\Phi=0$, откуда $\Phi=const.$, но когда въ силу этихъ уравненій имѣемъ $d\Phi=0$ лишь при опредѣленномъ значеніи Φ, напримѣръ при $\Phi=\alpha$. Вся разница лишь въ томъ, что получаемъ здѣсь семейство (S') интеграловъ и семейство характеристическихъ многообразій 1-й системы (ω') нѣсколько болѣе тѣсныя, чѣмъ въ разсмотрѣнномъ выше случаѣ. Семейство (ω') получается, если къ дифференціальнымъ уравненіямъ характеристическихъ многообразій 1-й системы присоединимъ соотношеніе $\Phi=\alpha$: многообразія этого семейства служатъ общими характеристическими многообразіями даннаго уравненія и уравненія $\Phi=\alpha$. Интегралы семейства (S'), очевидно, служатъ общими интегралами даннаго уравненія и уравненія $\Phi=\alpha$.

Особаго разсмотрѣнія требуетъ тотъ случай, когда двѣ системы характеристическихъ многообразій даннаго уравненія $F=0$ (20) сливаются въ одну. Предположимъ по прежнему, что имѣемъ семейство (ω) характеристическихъ многообразій, опредѣляемыхъ уравненіемъ $F=0$ и шестью независимыми дифференціальными уравненіями и дающихъ рѣшеніе задачи Cauchy для всякаго интегральнаго многообразія $M_{1,1}^{(1)}$, для котораго имѣемъ $\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t)=const.$ Совершенно такъ же, какъ и въ случаѣ уравненія съ двумя различными системами характеристикъ, убѣждаемся что для всѣхъ интеграловъ семейства (S), образуемыхъ характеристическими многообразіями семейства (ω), имѣемъ $\Phi=const.$; равнымъ образомъ для каждаго характеристическаго многообразія семейства (ω) имѣетъ мѣсто то же соотношеніе: наконецъ, многообразія семейства (ω) служатъ общими характеристическими многообразіями даннаго уравненія и уравненій $\Phi=const.$ Очевидно, функція Φ, въ силу послѣдняго свойства семейства (ω), должна удовлетворять нѣсколькимъ условіямъ, въ числѣ которыхъ одно выражаетъ требованіе, чтобы прямая, въ которую сливаются прямыя l и l' (ср. гл. III, § 2, стр. 229) для каждаго элемента уравненія $F=0$, совпадала съ одной изъ прямыхъ l, l' для того изъ уравненій $\Phi=const.$, которое имѣетъ мѣсто для соотвѣтствующаго элемента. Разсматривая дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій уравненія $F=0$, легко убѣдимся, что $\Phi=const.$ должно быть интегрируемымъ сочетаніемъ этихъ уравненій. Обратно, если дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій уравненія $F=0$ допускаютъ интегрируемое сочетаніе $d\Phi=0$, откуда $\Phi=const.$, то для всѣхъ характеристическихъ многообразій имѣемъ $\Phi=const.$; отсюда заключаемъ, что это же соотношеніе имѣетъ мѣсто для всего семейства (S) интеграловъ — рѣшеній задачи Cauchy для интегральныхъ многообразій $M_{1,1}^{(1)}$, удовлетворяющихъ условію $\Phi = const.$; наконецъ, такъ же, какъ въ случаѣ уравненія съ двумя различными системами характеристикъ, докажемъ, что всѣ характеристическія многообразія, образующія вышеупомянутое семейство интеграловъ, служатъ характеристическими многообразіями уравненій $\Phi = const.$; семейство этихъ многообразій назовемъ семействомъ (ω). Изъ числа дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій уравненія $\Phi = const.$ только три нижеслѣдующихъ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial r}\,dy^2 - \frac{\partial\Phi}{\partial s}\,dxdy + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\,dx^2 = 0 \\ &\frac{\partial\Phi}{\partial r}\,dydr + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\,dxds + \left[\frac{d\Phi}{dx}\right]dxdy = 0 \\ &\frac{\partial\Phi}{\partial r}\,dyds + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\,dxdt + \left[\frac{d\Phi}{dy}\right]dxdy = 0 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

отличны отъ дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій уравненія $F = 0$. Притомъ, какъ мы знаемъ, одно изъ двухъ послѣднихъ уравненій можно замѣнить уравненіемъ $\Phi = const.$, которое удовлетворяется въ силу дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій уравненія $F = 0$; остаются, слѣдовательно, два уравненія, напримѣръ 1-е и 2-е изъ уравненій (26). Присоединяя 2-е изъ нихъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ характеристическихъ многообразій уравненія $F = 0$, мы выдѣлимъ семейство, изъ состава котораго черезъ каждый данный элементъ (x, y, z, p, q, r, s, t), удовлетворяющій уравненію $F = 0$, проходитъ единственное многообразіе. Такъ какъ съ другой стороны семейство (ω) необходимо должно давать по крайней мѣрѣ одно многообразіе для каждаго элемента, удовлетворяющаго данному уравненію $F = 0$, то опредѣленное нами семейство и есть искомое семейство (ω), и для него выполняется также первое изъ уравненій (26), въ чемъ не трудно убѣдиться и непосредственнымъ вычисленіемъ. Разсужденія наши сохраняютъ силу и тогда, когда въ силу дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій даннаго уравненія имѣемъ $d\Phi = 0$ лишь при опредѣленномъ значеніи Φ, напримѣръ при $\Phi = \alpha$. Семейство (ω') характеристическихъ многообразій въ этомъ случаѣ опредѣляется какъ семейство общихъ характеристическихъ многообразій даннаго уравненія и уравненія $\Phi = \alpha$.

Итакъ, семейство характеристическихъ многообразій (ω) или (ω') во всѣхъ случаяхъ опредѣляется интегрированіемъ системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, изъ которыхъ получаемъ выраженія x, y, z, p, q, r, s, t въ функціи произвольнаго параметра u и начальныхъ значеній $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0$, получаемыхъ при $u = 0$. Для этихъ начальныхъ значеній необходимо имѣетъ мѣсто уравненіе

$$F\,(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0) = 0, \tag{27}$$

а въ случаѣ семейства (ω') кромѣ того уравненіе

$$\Phi\,(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0) = \alpha; \tag{28}$$

никакимъ другимъ ограниченіямъ они не подлежатъ. Если мы желаемъ рѣшить задачу Cauchy для какого-либо интегральнаго многообразія $M_{1,1}^{(1)}$, для котораго имѣетъ мѣсто добавочное условіе $\Phi = const.$ въ случаѣ семейства (ω) или $\Phi = \alpha$ въ случаѣ семейства (ω'), то намъ остается сгруппировать многообразія семейства (ω) или (ω'), проходящія черезъ элементы $M_{1,1}^{(1)}$: для этого, очевидно, достаточно въ полученныхъ нами выраженіяхъ x, y, z, p, q, r, s, t вставить вмѣсто $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0$ тѣ функціи одного параметра v, которыми выражаются соотвѣтственныя координаты для многообразія $M_{1,1}^{(1)}$. Такимъ образомъ мы получаемъ выраженія x, y, z, p, q, r, s, t въ функціи двухъ параметровъ u, v, т. е. получаемъ искомое рѣшеніе задачи Cauchy уже безъ всякой интеграціи. Если мы пожелаемъ найти все семейство (S) или (S') интеграловъ, образуемыхъ характеристиками семейства (ω) или (ω'), то можемъ, напримѣръ, взять произвольную кривую

$$y = 0, \quad z = \varphi(x)$$

плоскости zx и опредѣлить p, q, r, s, t въ функціи x изъ равенствъ

$$\begin{aligned} &dz - pdx - qdy = 0 \\ &dp - rdx - sdy = 0 \\ &dq - sdx - tdy = 0 \\ &F\,(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \end{aligned}$$

и

$$\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = const. \text{ или } \Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = \alpha.$$

Первыя три даютъ намъ $p = \varphi'(x)$, $r = \varphi''(x)$, $s = \dfrac{dq}{dx}$; остальныя два даютъ q, а слѣдовательно s, и t, при чемъ q опредѣляется, вообще говоря, изъ дифференціальнаго уравненія 1-го порядка. Полученныя выраженія y, z, p, q, r, s, t въ функціи x опредѣляютъ многообразіе

$M^{(1)}_{1,1}$, зависящее отъ произвольной функціи $\varphi(x)$; рѣшая для него задачу Cauchy, получаемъ формулы, выражающія все семейство (S) или (S').

Допустимъ теперь, что дифференціальныя уравненія одной (которую будемъ называть второй) системы характеристическихъ многообразій уравненія $F=0$ допускаютъ *два* интегрируемыхъ сочетанія $d\Phi_1=0$, $d\Phi_2=0$, такъ что для всѣхъ многообразій этой системы имѣемъ $\Phi_1=const.$, $\Phi_2=const.$ Не трудно убѣдиться, что любая функція аргументовъ Φ_1 и Φ_2 даетъ интегрируемое сочетаніе тѣхъ же дифференціальныхъ уравненій: въ самомъ дѣлѣ, если $d\Phi_1$ и $d\Phi_2$ представляютъ линейныя сочетанія лѣвыхъ частей упомянутыхъ дифференціальныхъ уравненій, то тѣмъ же свойствомъ обладаетъ и $d\psi(\Phi_1, \Phi_2) = \frac{\partial\psi}{\partial\Phi_1}d\Phi_1 + \frac{\partial\psi}{\partial\Phi_2}d\Phi_2$. Въ данномъ случаѣ мы можемъ рѣшить задачу Cauchy для *произвольнаго* интегральнаго многообразія одного измѣренія $M^{(1)}_{1,1}$, такъ какъ всегда можно подобрать функцію ψ двухъ аргументовъ Φ_1 и Φ_2 такъ, чтобы она сохраняла постоянное значеніе для элементовъ многообразія $M^{(1)}_{1,1}$, а затѣмъ остается произвести выкладки, о которыхъ мы уже говорили, съ замѣной лишь Φ черезъ $\psi(\Phi_1, \Phi_2)$. Можно то же самое выразить въ нѣсколько иной формѣ: для многообразія $M^{(1)}_{1,1}$ Φ_1 и Φ_2 зависятъ отъ одного произвольнаго параметра и потому, по исключеніи этого параметра, имѣемъ

$$\Phi_1 = f(\Phi_2); \tag{29}$$

въ силу дифференціальныхъ уравненій второй системы характеристическихъ многообразій мы, очевидно, имѣемъ $d\{\Phi_1 - f(\Phi_2)\}=0$, а потому соотношеніе (29) и есть то соотношеніе, которое играетъ роль соотношенія $\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t)=\alpha$ въ данномъ случаѣ. Для дальнѣйшаго рѣшенія приходится опредѣлять семейство (ω') общихъ характеристическихъ многообразій даннаго уравненія и уравненія (29). Искомый интегралъ есть общій интегралъ тѣхъ же двухъ уравненій. Вся совокупность интеграловъ, образуемыхъ семействомъ (ω') характеристическихъ многообразій, составляетъ, какъ мы знаемъ, семейство (S'), зависящее отъ одной произвольной функціи. Измѣняя произвольно видъ функціи f въ соотношеніи (29), исчерпаемъ всевозможные интегралы даннаго уравненія. Такимъ образомъ, опредѣленіе *всѣхъ**) интеграловъ приводится къ интегрированію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, и общій

*) Исключеніе представляютъ *особые* интегралы, которые не могутъ быть получены какъ опредѣленныя рѣшенія задачи Cauchy.

интегралъ (ср. гл. III, § 1, стр. 216) зависитъ отъ двухъ произвольныхъ функцій одного аргумента.

Разсмотримъ въ частности уравненіе $F=0$, для котораго двѣ системы характеристикъ сливаются въ одну, и допустимъ, что дифференціальныя уравненія этой системы допускаютъ два интегрируемыхъ сочетанія $\Phi_1=const.$ и $\Phi_2=const.$ Согласно предыдущему, для рѣшенія задачи Cauchy, намъ предстоитъ прежде всего проинтегрировать систему, которая получается присоединеніемъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ характеристическихъ многообразій даннаго уравненія дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій уравненія $\Phi_1=f(\Phi_2)$ (ср. выше стр. 356). Какъ было своевременно показано, всѣ присоединяемыя уравненія эквивалентны одному независимому, за которое можно принять одно изъ двухъ послѣднихъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}dydr + \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}dxds + \left[\frac{d\Phi_1}{dx}\right]dxdy + \\
&\quad + f'(\Phi_2)\cdot\left\{\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}dydr + \frac{\partial\Phi_2}{\partial t}dxds + \left[\frac{d\Phi_2}{dx}\right]dxdy\right\} = 0. \\
&\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}dyds + \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}dxdt + \left[\frac{d\Phi_1}{dy}\right]dxdy + \\
&\quad + f'(\Phi_2)\cdot\left\{\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}dyds + \frac{\partial\Phi_2}{\partial t}dxdt + \left[\frac{d\Phi_2}{dy}\right]dxdy\right\} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Такъ какъ для характеристическихъ многообразій даннаго уравненія $\Phi_1=const.$, $\Phi_2=const.$, то $f'(\Phi_2)$ тоже сохраняетъ для нихъ постоянное значеніе, и слѣдовательно уравненія (30) могутъ быть представлены въ слѣдующемъ видѣ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}dydr + \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}dxds + \left[\frac{d\Phi_1}{dx}\right]dxdy + \\
&\quad + C.\left\{\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}dydr + \frac{\partial\Phi_2}{\partial t}dxds + \left[\frac{d\Phi_2}{dx}\right]dxdy\right\} = 0, \\
&\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}dyds + \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}dxdt + \left[\frac{d\Phi_1}{dy}\right]dxdy + \\
&\quad + C.\left\{\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}dyds + \frac{\partial\Phi_2}{\partial t}dxdt + \left[\frac{d\Phi_2}{dy}\right]dxdy\right\} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

гдѣ C — нѣкоторое постоянное. Измѣняя произвольно видъ функціи f, мы исчерпываемъ, какъ было упомянуто, всевозможныя семейства (ω') характеристическихъ многообразій, группировкой которыхъ получаются всѣ интегралы уравненія $F=0$. Въ данномъ случаѣ измѣненіе вида f влечетъ за собой лишь измѣненіе постояннаго C въ уравненіяхъ (31), и слѣдовательно, всевозможные интегралы разсматриваемаго уравненія образуются характеристическими многообразіями семейства (Ω), зависящаго отъ семи произвольныхъ постоянныхъ и опредѣляемаго совокупностью общихъ дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій и одного изъ уравненій (31). Такое выдѣленіе изъ состава всей системы характеристическихъ многообразій, зависящей отъ произвольной функціи, семейства (Ω), зависящаго отъ произвольныхъ постоянныхъ и образующаго *всѣ* интегралы уравненія, вполнѣ согласуется съ тѣми результатами, которые мы получили выше, рѣшая задачу Cauchy для характеристическихъ многообразій уравненія разсматриваемаго нами типа (ср. § 1, стр. 340, теор. 3). Именно, мы видѣли, что въ случаѣ $4RT-S^2=0$ (который мы здѣсь имѣемъ) произвольное характеристическое многообразіе входитъ, вообще говоря, въ составъ лишь двухъ интеграловъ, и только для исключительныхъ характеристическихъ многообразій задача Cauchy становится неопредѣленной; эти исключительныя многообразія въ данномъ случаѣ и образуютъ семейство (Ω); очевидно, каждое многообразіе этого семейства входитъ въ составъ семейства интеграловъ, зависящаго отъ двухъ произвольныхъ функцій. Въ томъ случаѣ, когда уравненіе $F=0$ допускаетъ двѣ *различныя* системы характеристическихъ многообразій, видъ уравненій, опредѣляющихъ семейство (ω'), существенно зависитъ отъ вида функціи f въ соотношеніи (29), такъ какъ само это соотношеніе служитъ однимъ изъ упомянутыхъ уравненій, и измѣняя функцію f, мы получаемъ все новыя и новыя семейства (ω'), которыя исчерпываютъ *всю* соотвѣтственную систему характеристическихъ многообразій. Возвращаясь къ уравненіямъ съ одной системой характеристикъ, покажемъ, какъ можно найти для нихъ уравненія общаго интеграла. Проинтегрировавъ дифференціальныя уравненія семейства (Ω), получаемъ

$$\left.\begin{aligned}
y&=y\,(x,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0,\ r_0,\ s_0,\ t_0,\ C)\\
z&=z\,(x,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0,\ r_0,\ s_0,\ t_0,\ C)\\
p&=p\,(x,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0,\ r_0,\ s_0,\ t_0,\ C)\\
q&=q\,(x,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0,\ r_0,\ s_0,\ t_0,\ C)\\
r&=r\,(x,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0,\ r_0,\ s_0,\ t_0,\ C)\\
s&=s\,(x,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0,\ r_0,\ s_0,\ t_0,\ C)\\
t&=t\,(x,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0,\ r_0,\ s_0,\ t_0,\ C),
\end{aligned}\right\}\quad(32)$$

гдѣ $y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0$ — значенія y, z, p, q, r, s, t при $x=x_0$, C —

постоянное, входящее въ дифференціальныя уравненія (31); $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0$ — произвольныя постоянныя, связанныя условіемъ

$$F\,(x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0,\ r_0,\ s_0,\ t_0)=0.$$

Для того, чтобы найти общій интегралъ уравненія $F=0$, достаточно рѣшить задачу Cauchy для всевозможныхъ интегральныхъ многообразій $M_{1,\,1}^{(1)}$ для которыхъ кривыя, образуемыя точками элементовъ, лежатъ въ плоскости yz. Для подобнаго многообразія имѣемъ, во-первыхъ,

$$x=0,\ y=u,\ z=\varphi(u),$$

гдѣ u — произвольный параметръ. Далѣе изъ дифференціальныхъ соотношеній

$$\begin{aligned}
dz-pdx-qdy&=0\\
dq-sdx-tdy&=0
\end{aligned}$$

получаемъ

$$q=\varphi'(u),\ t=\varphi''(u);$$

полагая затѣмъ

$$p=\psi(u).$$

изъ дифференціальнаго соотношенія

$$dp-rdx-sdy=0.$$

получаемъ

$$s=\psi'(u).$$

Наконецъ, уравненіе $F=0$ даетъ намъ выраженіе для r, зависящее отъ u, $\varphi(u)$, $\varphi'(u)$, $\varphi''(u)$, $\psi(u)$, $\psi'(u)$. Задача Cauchy приводится къ опредѣленію характеристическихъ многообразій семейства (Ω), проходящихъ черезъ элементы многообразія $M_{1,\,1}^{(1)}$. Для этихъ характеристическихъ многообразій слѣдуетъ въ уравненіяхъ (32) положить

$x_0=0$, $y_0=u$, $z_0=\varphi(u)$, $p_0=\psi(u)$, $q_0=\varphi'(u)$, $s_0=\psi'(u)$, $t_0=\varphi''(u)$

и r_0 замѣнить полученнымъ выше выраженіемъ r для многообразія $M_{1,\,1}^{(1)}$. Постоянное C тоже опредѣляется въ функціи параметра u на основаніи слѣдующихъ соображеній: для всѣхъ характеристическихъ многообразій $\Phi_1=const.$ и $\Phi_2=const.$; слѣдовательно, для y, z, p, q, r, s, t, опредѣляемыхъ формулами (32), имѣемъ

$$\begin{aligned}
\Phi_1\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t)&=\Phi_1\,(x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0,\ r_0,\ s_0,\ t_0)\\
\Phi_2\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t)&=\Phi_2\,(x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0,\ r_0,\ s_0,\ t_0),
\end{aligned}$$

и слѣдовательно для того семейства, которое образуетъ искомый интегралъ,

$$\Phi_1 = \Phi_1(u),\ \Phi_2 = \Phi_2(u);$$

исключая u, получаемъ зависимость

$$\Phi_1 = f(\Phi_2),$$

т. е. опредѣляемъ видъ функціи f въ соотношеніи (29). Дифференцируя по u, имѣемъ далѣе

$$d\Phi_1 = f'(\Phi_2).d\Phi_2,$$

а такъ какъ $C = f'(\Phi_2)$, то окончательно

$$C = \frac{d\Phi_1(u)}{d\Phi_2(u)}. \tag{33}$$

Вставляя полученное выраженіе въ формулы (32), въ которыхъ уже подставлены вмѣсто $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0$ соотвѣтственныя выраженія въ функціи параметра u, получаемъ окончательно уравненія общаго интеграла. Зависимость между z, x, y устанавливается собственно лишь двумя первыми изъ полученныхъ уравненій. Какъ видимъ, z опредѣляется въ функціи x, y двумя уравненіями, содержащими произвольный параметръ u и двѣ произвольныхъ функціи φ и ψ этого параметра съ ихъ послѣдовательными производными, очевидно не выше 3-го порядка (производныя 3-го порядка могутъ войти въ выраженіе C).

Въ заключеніе замѣтимъ, что дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій произвольнаго уравненія, вообще говоря, не допускаютъ интегрируемыхъ сочетаній. Въ самомъ дѣлѣ, для того чтобы, напримѣръ, уравненія 1-й системы

$$\left.\begin{array}{l} dz - pdx - qdy = 0 \\ dp - rdx - sdy = 0 \\ dq - sdx - tdy = 0 \\ dy - m_1\, dx = 0 \\ F(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t) = 0 \\ R\ (dr + m_2\, ds) + \left[\dfrac{dF}{dx}\right] dx = 0 \\ R\ (ds + m_2\, dt) + \left[\dfrac{dF}{dy}\right] dx = 0 \end{array}\right\} \tag{34}$$

(гдѣ m_1 и m_2 — корни уравненія $Rm^2 - Sm + T = 0$) допускали интегрируемое сочетаніе $\Phi = const.$, необходимо, чтобы слѣдствіемъ шести *дифференціальныхъ* уравненій (34), т. е. первыхъ четырехъ и послѣднихъ двухъ, являлось уравненіе

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz + \frac{\partial\Phi}{\partial p}dp + \frac{\partial\Phi}{\partial q}dq + \\ + \frac{\partial\Phi}{\partial r}dr + \frac{\partial\Phi}{\partial s}ds + \frac{\partial\Phi}{\partial t}dt = 0, \tag{35}$$

т. е. другими словами необходимо, чтобы система семи линейныхъ однородныхъ уравненій съ неизвѣстными $dx, dy, dz, dp, dq, dr, ds, dt$, образуемая уравненіемъ (35) и шестью дифференціальными уравненіями (34), была неопредѣленной. Число условій неопредѣленности этой системы равно двумъ; самыя условія (исчезновеніе двухъ детерминатовъ) имѣютъ видъ двухъ линейныхъ уравненій съ частными производными функціи Φ по перемѣннымъ x, y, z, p, q, r, s, t. Эти два уравненія, вообще говоря, не допускаютъ общихъ интеграловъ, и слѣдовательно система (34) не допускаетъ интегрируемыхъ сочетаній. Въ частности два упомянутыхъ уравненія могутъ допускать общіе интегралы, которые, какъ извѣстно, легко могутъ быть найдены интегрированіемъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, и тогда система (34) допускаетъ интегрируемыя сочетанія.

Всѣ наши разсужденія до сихъ поръ относились къ характеристическимъ многообразіямъ 2-го порядка; но не трудно видѣть, что съ соотвѣтственными измѣненіями они примѣняются и къ характеристическимъ многообразіямъ высшихъ порядковъ. Такъ, если уравненіе $F=0$ допускаетъ двѣ различныхъ системы характеристикъ и если мы поставимъ себѣ задачей выдѣлить семейство (ω) характеристическихъ многообразій n-го порядка, зависящее отъ произвольныхъ постоянныхъ и позволяющее рѣшить задачу Cauchy для всѣхъ интегральныхъ многообразій n-го порядка одного измѣренія, для которыхъ имѣетъ мѣсто одно добавочное условіе, то совершенно подобно тому, какъ для характеристическихъ многообразій 2-го порядка, убѣдимся прежде всего, что добавочное условіе должно имѣть видъ

$$\Phi(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ z''',\ z_1'' \dots\dots z^{(n)},\ \ z_1^{(n-1)} \dots\dots z_n) = const. \tag{36}$$

и что оно должно имѣть мѣсто для всѣхъ многообразій семейства (ω); далѣе докажемъ, что дифференціальныя уравненія 2-й системы характеристическихъ многообразій даннаго уравненія должны допускать интегрируемое сочетаніе $d\Phi = 0$, откуда $\Phi = const.$ Семейство (ω) опредѣляется интегрированіемъ системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, получаемыхъ присоединеніемъ къ уравненіямъ 1-й системы соотношенія (36); интегралы уравненія $F = 0$, образуемые многообразіями семейства (ω), составляютъ семейство (S'), зависящее отъ одной произвольной функціи; для каждаго изъ этихъ интеграловъ имѣетъ мѣсто соотношеніе вида

$$\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t, z''', z_1'', \ldots, z^{(n)}, z_1^{(n-1)}, \ldots z_n) = a, \tag{37}$$

получаемое изъ соотношенія (36) соотвѣтственнымъ выборомъ постояннаго. Соотношеніе (37) можемъ разсматривать для этого интеграла какъ уравненіе съ частными производными n-го порядка, полагая $z_k^{(i)} = \dfrac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}$; съ этой точки зрѣнія семейство (S) состоитъ изъ общихъ интеграловъ даннаго уравненія и уравненій $\Phi = const.$ Предполагая, что дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій n-го порядка допускаютъ два интегрируемыхъ сочетанія $\Phi_1 = const.$, $\Phi_2 = const.$, легко убѣждаемся, что всѣ интегралы уравненія $F = 0$ опредѣляются въ такомъ случаѣ интегрированіемъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій; каждый интегралъ служитъ вмѣстѣ съ тѣмъ интеграломъ одного изъ уравненій n-го порядка $\Phi_1 = f(\Phi_2)$. Нѣкоторое затрудненіе представляетъ тотъ случай, когда двѣ системы характеристикъ даннаго уравненія сливаются въ одну; но если мы введемъ понятіе о характеристическомъ многообразіи уравненія съ частными производными n-го порядка, какъ о носителѣ интегральнаго многообразія $(n+1)$-го порядка двухъ измѣреній, то всѣ результаты, полученные для характеристическихъ многообразій 2-го порядка, mutatis mutandis, примѣняются и для характеристическихъ многообразій n-го порядка.

Разсмотримъ еще уравненіе $F = 0$, которое допускаетъ систему характеристическихъ многообразій 1-го порядка, опредѣляемую тремя дифференціальными уравненіями. Предположимъ, что эти дифференціальныя уравненія допускаютъ интегрируемое сочетаніе

$$d\Phi(x, y, z, p, q) = 0, \tag{38}$$

откуда $\Phi = const.$ Такъ какъ, согласно теоремѣ 4-й § 1-го (стр. 342), для даннаго уравненія всякое характеристическое многообразіе 2-го порядка одной изъ системъ заключаетъ въ своемъ составѣ характеристическое многообразіе 1-го порядка, то соотношеніе $\Phi = const.$ должно имѣть мѣсто для всѣхъ характеристическихъ многообразій 2-го порядка упо-

мянутой системы, т. е. дифференціальныя уравненія этой системы должны допускать интегрируемое сочетаніе (38). На основаніи прежнихъ результатовъ (стр. 353) отсюда заключаемъ, что данное уравненіе допускаетъ семейство (S) интеграловъ, зависящее отъ произвольной функціи и опредѣляемое интегрированіемъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій. Притомъ семейство (S) даетъ рѣшеніе задачи Cauchy для всѣхъ интегральныхъ многообразій $M_{1,1}^{(1)}$, для которыхъ $\Phi = const.$, и для всѣхъ интеграловъ семейства имѣетъ мѣсто то же соотношеніе, т. е. каждый интегралъ служитъ вмѣстѣ съ тѣмъ интеграломъ нѣкотораго уравненія съ частными производными 1-го порядка

$$\Phi(x, y, z, p, q) = a. \tag{39}$$

Съ другой стороны, при опредѣленіи интегральныхъ многообразій $M_{1,1}^{(1)}$, для которыхъ $\Phi = a$, можно произвольно выбирать кривую C, образуемую точками элементовъ (ср. выше стр. 352); p, q затѣмъ опредѣляются изъ соотношеній

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$
$$\Phi(x, y, z, p, q) = 0,$$

а r, s, t изъ соотношеній

$$dp - r\,dx - s\,dy = 0$$
$$dq - s\,dx - t\,dy = 0$$
$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Такимъ образомъ интегральныя поверхности семейства (S), соотвѣтствующія данному значенію α постояннаго въ соотношеніи $\Phi = const.$, образуютъ семейство, изъ состава котораго черезъ *произвольную* кривую C проходитъ одна или нѣсколько опредѣленныхъ поверхностей, т. е. онѣ исчерпываютъ всѣ интегральныя поверхности уравненія съ частными производными 1-го порядка, и мы приходимъ къ слѣдующему заключенію: если три дифференціальныхъ уравненія характеристическихъ многообразій 1-го порядка даннаго уравненія допускаютъ интегрируемое сочетаніе

$$\Phi(x, y, z, p, q) = const.,$$

то всѣ интегралы уравненій съ частными производными 1-го порядка $\Phi = const.$ служатъ интегралами даннаго уравненія. Исключеніе представляютъ лишь особые интегралы уравненій $\Phi = const.$, такъ какъ они не могутъ быть получены какъ опредѣленныя рѣшенія задачи

Cauchy. Понятно, что если изъ дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій 1-го порядка слѣдуетъ $d\Phi=0$ лишь при опредѣленномъ значеніи Φ, напримѣръ при $\Phi=0$, то только интегралы уравненія $\Phi=0$ служатъ интегралами даннаго уравненія. Уравненіе $\Phi=0$ или $\Phi=const.$ — въ томъ случаѣ когда дифференціальныя уравненія допускаютъ интегрируемое сочетаніе $d\Phi=0$,—называется *промежуточнымъ* интеграломъ даннаго уравненія. Если дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій допускаютъ два интегрируемыхъ сочетанія $\Phi_1=const.$ и $\Phi_2=const.$, то мы имѣемъ, согласно предыдущему (стр. 358), промежуточный интегралъ съ произвольной функціей

$$\Phi_1=f(\Phi_2), \tag{40}$$

и всѣ интегралы (за исключеніемъ особыхъ) даннаго уравненія $F=0$ 2-го порядка опредѣляются интегрированіемъ уравненія 1-го порядка (40), гдѣ f — произвольная функція. Дифференціальныя уравненія системы характеристическихъ многообразій 1-го порядка даннаго уравненія, очевидно, могутъ быть представлены въ видѣ

$$\left.\begin{aligned}
d\Phi_1=\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}dr+\frac{\partial\Phi_1}{\partial s}ds+\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}dt+\frac{\partial\Phi_1}{\partial p}dp+\frac{\partial\Phi_1}{\partial q}dq+\\
+\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}dz+\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}dy=0,\\
d\Phi_2=\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}dr+\frac{\partial\Phi_2}{\partial s}ds+\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}dt+\frac{\partial\Phi_2}{\partial p}dp+\frac{\partial\Phi_2}{\partial q}dq+\\
+\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}dz+\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}dy=0,\\
dz-pdx-qdy=0,
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

такъ какъ число ихъ равно тремъ, въ составъ ихъ должно входить уравненіе $dz-pdx-qdy=0$ и они должны допускать интегрируемыя сочетанія $d\Phi_1=0$, $d\Phi_2=0$. Въ главѣ IV (§ 1, стр. 241) было упомянуто, что по даннымъ характеристическимъ многообразіямъ 1-го порядка уравненіе $F=0$ разсматриваемаго типа можетъ быть найдено: для опредѣленія его слѣдуетъ замѣнить въ уравненіяхъ характеристическихъ многообразій dp и dq соотвѣтственно черезъ $rdx+sdy$ и $sdx+tdy$ и исключить dz, dx, dy. Поступая такъ съ уравненіями (41), получаемъ, какъ не трудно усмотрѣть, билинейное уравненіе. Итакъ, если уравненіе 2-го порядка допускаетъ промежуточный интегралъ (40) съ произвольной функціей, то оно необходимо есть билинейное уравненіе и, слѣдо-

вательно, оно имѣетъ *двѣ* системы характеристическихъ многообразій 1-го порядка.

Въ заключеніе замѣтимъ, что произвольное преобразованіе прикосновенія, примѣненное къ уравненію $F=0$, для котораго дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій какого-либо порядка допускаютъ интегрируемое сочетаніе, преобразуетъ его въ уравненіе того же типа. Это непосредственно явствуетъ изъ того, что преобразованіе прикосновенія преобразуетъ характеристическія многообразія любого порядка въ характеристическія же многообразія и того же порядка (см. § 1, стр. 349).

§ 3.—Предшествующимъ параграфомъ закончено изложеніе общей теоріи уравненій съ частными производными 2-го порядка. Настоящій, послѣдній, параграфъ посвятимъ примѣненію общей теоріи къ нѣсколькимъ частнымъ примѣрамъ.

Примѣръ 1. Опредѣлить уравненія съ частными производными 2-го порядка, характеристики которыхъ служатъ асимптотическими линіями интегральныхъ поверхностей.

Предположимъ, во-первыхъ, что имѣемъ двѣ различныхъ системы характеристикъ. Такъ какъ оскулирующіе параболоиды интегральныхъ поверхностей служатъ оскулирующими параболоидами и для характеристическихъ многообразій, то задача сводится къ слѣдующей: опредѣлить уравненія, для которыхъ характеристики обѣихъ системъ къ каждой точкѣ касаются образующихъ соотвѣтствующаго оскулирующаго параболоида, или иначе—прямыя l, l' (см. стр. 229) совпадаютъ съ упомянутыми образующими; понятно, что тѣ же прямыя служатъ образующими индицирующаго параболоида, а также—асимптотами индикатрисы. Задача эта уже была разрѣшена въ главѣ IV (§ 2, примѣръ 2, стр. 328); всѣ уравненія, обладающія изложенными свойствами, имѣютъ слѣдующій видъ:

$$rt-s^2=f(x,\ y,\ z,\ p,\ q).$$

Въ 5-мъ томѣ Mathematische Annalen S. Lie опредѣлилъ всѣ уравненія этого типа, которыя допускаютъ промежуточный интегралъ съ произвольной функціей.

Предположимъ, во-вторыхъ, что двѣ системы характеристикъ уравненія сливаются въ одну. Въ этомъ случаѣ мы должны имѣть для даннаго уравненія $4RT-S^2=0$, или

$$\frac{S}{2R}=\frac{2T}{S}=\lambda$$

Направленіе характеристики для элемента (x, y, z, p, q, r, s, t) опредѣляется уравненіемъ

$$dy = \lambda dx;$$

для того, чтобы это направленіе совпадало съ направленіемъ одной изъ асимптотъ индикатрисы элемента, должно имѣть мѣсто условіе

$$r + 2\lambda s + \lambda^2 t = 0.$$

Предположимъ, что уравненіе съ частными производными дано въ видѣ

$$r + f(s,\ t,\ p,\ q,\ z,\ x,\ y) = 0;$$

тогда полученное нами условіе, очевидно, должно совпадать съ этимъ уравненіемъ, такъ какъ имѣемъ

$$R = 1,\quad S = \frac{\partial f}{\partial s},\quad T = \frac{\partial f}{\partial t}$$

и слѣдовательно λ не зависитъ отъ r. Всего получаемъ три равенства

$$2\lambda = \frac{\partial f}{\partial s};\quad \frac{\partial f}{\partial t} = \lambda^2$$
$$2\lambda s + \lambda^2 t = f.$$

Изъ послѣдняго имѣемъ

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 2\lambda + 2(s + \lambda t)\frac{\partial \lambda}{\partial s}$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \lambda^2 + 2(s + \lambda t)\frac{\partial \lambda}{\partial t},$$

или, въ силу двухъ первыхъ,

$$(s + \lambda t)\frac{\partial \lambda}{\partial s} = 0,\quad (s + \lambda t)\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0,$$

откуда или $\frac{\partial \lambda}{\partial s} = 0$, $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0$, или $s + \lambda t = 0$. Второе предположеніе даетъ намъ

$$\lambda = -\frac{s}{t},\quad f = -\frac{s^2}{t}$$

и, слѣдовательно, уравненіе

$$r - \frac{s^2}{t} = 0,$$

или

$$rt - s^2 = 0;$$

интегралами его служатъ произвольныя развертывающіяся поверхности, для которыхъ асимптотическія линіи обращаются въ прямолинейныя образующія — характеристики уравненія; кромѣ того, уравненіе допускаетъ особые интегралы — всевозможныя плоскости, для которыхъ асимптотическія линіи становятся неопредѣленными, что опять-таки согласуется съ тѣмъ фактомъ, что любая плоская кривая служитъ характеристикой уравненія $rt - s^2 = 0$ (ср. стр. 341). Первое предположеніе $\frac{\partial \lambda}{\partial s} = 0$, $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0$ даетъ намъ

$$\lambda = \lambda(x,\ y,\ z,\ p,\ q).\quad f = 2\lambda s + \lambda^2 t$$

и, слѣдовательно, уравненіе

$$r + 2\lambda s + \lambda^2 t = 0.$$

Такъ какъ λ не зависитъ отъ r, s, t, то направленіе характеристики, а слѣдовательно, одной изъ асимптотическихъ линій—одно и то же для всѣхъ интегральныхъ поверхностей, соприкасающихся въ одной точкѣ. Уравненіе

$$r + 2\lambda s + \lambda^2 t = 0$$

принадлежитъ къ числу изслѣдованныхъ нами въ § 1 гл. IV; система Σ для него обращается въ систему коническихъ сѣченій, для которыхъ прямая

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$
$$\eta - y = \lambda(\xi - x)$$

служитъ одной изъ асимптотъ.

Примѣръ 2. Опредѣлить видъ уравненій, для которыхъ характеристики служатъ линіями кривизны интегральныхъ поверхностей.

Задачу эту можно рѣшать независимо, но можно ее привести къ задачѣ предыдущаго примѣра помощью преобразованія прикосновенія Lie (см. гл. I, § 4, стр. 80), которое линіи кривизны преобразуетъ въ асимптотическія линіи. Такимъ образомъ, распространяя преобразованіе Lie на элементы 2-го порядка и примѣняя его къ уравненіямъ предшествующаго примѣра, получаемъ два типа уравненій, характеристики которыхъ служатъ линіями кривизны интегральныхъ поверхностей:

$$\lambda^2[pqr-(1+p^2)s]+\lambda[(1+p^2)t-(1+q^2)r]+[(1+q^2)s-pqt]=0.$$

и

$$\lambda^2(1+p^2+q^2)-\lambda[(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs]+rt-s^2=0.$$

Для уравненія 2-го типа двѣ системы характеристикъ сливаются въ одну.

Примѣръ 3. Изслѣдовать интегрируемыя сочетанія дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій 1-го порядка уравненій вида

$$s=f(x,\ y,\ z,\ p,\ q).$$

Дифференціальныя уравненія первой и второй системы характеристическихъ многообразій въ данномъ случаѣ имѣютъ видъ:

$$dx=0,\quad dz=qdy,\quad dp=fdy$$

и

$$dy=0,\quad dz=pdx,\quad dq=fdx\ ^{*)}.$$

Первая система допускаетъ интегрируемое сочетаніе $dx=0$, откуда $x=const.$, вторая — интегрируемое сочетаніе $dy=0$, откуда $y=const.$ Характеристики 1-й системы — плоскія кривыя, плоскости которыхъ параллельны плоскости yz, характеристики 2-й системы—плоскія кривыя, плоскости которыхъ параллельны плоскости zx. Производя надъ даннымъ уравненіемъ произвольное преобразованіе прикосновенія, получимъ нѣкоторое билинейное уравненіе (см. напр. гл. II. § 4. стр. 189), для котораго дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій 1-го порядка той и другой системы допускаютъ по интегрируемому сочетанію

$$dU(x_1,\ y_1,\ z_1,\ p_1,\ q_1)=0,\quad dV(x_1,\ y_1,\ z_1,\ p_1,\ q_1)=0,$$

если преобразованіе прикосновенія было установлено формулами, въ числѣ которыхъ имѣемъ

$$x=U(x_1,\ y_1,\ z_1,\ p_1,\ q_1),\quad y=V(x_1,\ y_1,\ z_1,\ p_1,\ q_1).$$

Согласно общей теоріи (§ 3, стр. 365), преобразованное уравненіе допускаетъ всѣ интегралы уравненій съ частными производными 1-го порядка

$$U=const.\quad \text{и}\quad V=const.$$

*) Уравненія эти получаются изъ уравненій (89) гл. IV § 1, если положимъ $L=N=0$, $2M=1$, $V=f$.

Производя обратное преобразованіе прикосновенія, убѣждаемся, что уравненіе, которое получается, должно допускать всѣ интегральныя многообразія уравненій $x=const.$, $y=const.$, т. е. многообразія, имѣющія носителями всевозможныя плоскія кривыя, плоскости которыхъ параллельны соотвѣтственно плоскостямъ yz и zx, и въ частности—всевозможныя точки пространства *). Замѣтимъ, что эти многообразія не служатъ собственно интегральными многообразіями даннаго уравненія: дѣйствительно, уравненіе, получаемое послѣ обратнаго преобразованія вышеупомянутаго билинейнаго уравненія, имѣетъ видъ

$$\frac{s-f(x,\ y,\ z,\ p,\ q)}{D}=0,$$

гдѣ D извѣстный опредѣлитель, связанный съ преобразованіемъ прикосновенія (см. гл. II. § 4. стр. 176, стр. 184—192), и въ данномъ случаѣ мы не имѣемъ права отбрасывать дѣлитель D, такъ какъ имѣемъ дѣло съ интегралами, которые преобразуются въ многообразія, имѣющія носителями кривыя и точки. Такимъ образомъ, интегрируемыя сочетанія $dx=0$ и $dy=0$ не даютъ намъ интегральныхъ многообразій уравненія $s=f$. Не трудно усмотрѣть и причину такого видимаго несогласія съ общей теоріей: интегральныя многообразія одного измѣренія $M^{(1)}_{1,1}$, для которыхъ наши интегрируемыя сочетанія должны бы давать рѣшенія задачи Cauchy, въ данномъ случаѣ опредѣляются соотвѣтственно добавочными условіями $y=const.$ или $x=const.$, а слѣдовательно, они принадлежатъ къ числу тѣхъ многообразій, для которыхъ выполняется соотношеніе

$$Rdy^2-Sdxdy+Tdx^2=0$$

и для которыхъ задача Cauchy можетъ становиться невозможной.

Допустимъ, что дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій 1-й системы допускаютъ еще одно интегрируемое сочетаніе $d\Phi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0$. Тогда мы должны имѣть $d\Phi=0$ въ силу $dx=0$, $dz=qdy$, $dp=fdy$, откуда получаемъ два уравненія

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q}=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}q+\frac{\partial\Phi}{\partial p}\cdot f=0.$$

*) Ср. гл. I. § 1, стр. 18.

Изъ перваго слѣдуетъ, что Φ не зависитъ отъ q; изъ второго находимъ, что f должно быть линейно относительно q, притомъ вида

$$f = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}{\frac{\partial \Phi}{\partial p}}\, q - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial p}}.$$

Если положимъ

$$f = Aq + B,$$

гдѣ A, B — функціи x, y, z, p, то изъ предъидущаго явствуетъ, что функціи A и B не могутъ быть вполнѣ произвольны: дѣйствительно, уравненія

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + A\frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} + B\frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0$$

должны быть совмѣстны, а это ведетъ къ условію

$$\frac{\partial B}{\partial z} + A\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial y} - B\frac{\partial A}{\partial p} = 0.$$

Уравненіе $s = f$ въ этомъ предположеніи, согласно общей теоріи, допускаетъ промежуточный интегралъ съ произвольной функціей

$$\Phi(x, y, z, p) = \psi(x),$$

такъ какъ, при любомъ выборѣ функціи ψ, $d(\Phi - \psi) = 0$ служитъ интегрируемымъ сочетаніемъ дифференціальныхъ уравненій

$$dx = 0, \quad dz = q\,dy, \quad dp = f\,dy.$$

Если дифференціальныя уравненія 2-й системы характеристическихъ многообразій тоже допускаютъ интегрируемое сочетаніе $d\Psi = 0$, отличное отъ $dy = 0$, то, согласно предыдущему, функція f должна быть линейна не только относительно q, но и относительно p, такъ что

$$f = \rho pq + ap + bq + c,$$

гдѣ ρ, a, b, c — функціи x, y, z. Въ данномъ случаѣ

$$A = \rho p + b, \quad B = ap + c$$

и, слѣдовательно, условіе, которому удовлетворяютъ A и B, принимаетъ видъ

$$\frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial y} + p\left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + ba - c\rho = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial y} + ba - c\rho = 0.$$

Съ другой стороны, повторяя для функціи Ψ тѣ же разсужденія, которыя были произведены для функціи Φ, имѣемъ

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} + A_1\frac{\partial \Psi}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} + B_1\frac{\partial \Psi}{\partial q} = 0,$$

гдѣ

$$A_1 = \rho q + a, \quad B_1 = bq + c;$$

изъ двухъ уравненій, которымъ должно удовлетворять Ψ, слѣдуетъ

$$\frac{\partial B_1}{\partial z} + A_1\frac{\partial B_1}{\partial q} - \frac{\partial A_1}{\partial x} - B_1\frac{\partial A_1}{\partial q} = 0$$

и, наконецъ, послѣ подстановки значеній A_1 и B_1:

$$\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c\rho = 0.$$

Полагая $\rho = -\frac{\partial}{\partial z}\left(lg\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$, получаемъ изъ выведенныхъ соотношеній

$$a = -\frac{\partial}{\partial y}\left(lg\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right), \quad b = -\frac{\partial}{\partial x}\left(lg\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

$$c = -\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}.$$

Уравненіе $s = f$ принимаетъ видъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}s + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}pq + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}p + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}q + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0;$$

полагая $z_1 = \varphi(z, x, y)$, $x_1 = x$, $y_1 = y$, приведемъ его къ простѣйшему виду

$$s_1 = 0.$$

Итакъ, всѣ уравненія типа $s = f$, допускающія два промежуточныхъ интеграла съ произвольными функціями, приводятся къ виду $s=0$ преобразованіемъ, распространеннымъ изъ преобразованія точекъ $z_1 = \varphi(x, y, z)$, $x_1 = x$, $y_1 = y$.

Примѣръ 4. Опредѣлить всѣ уравненія, допускающія два различныхъ промежуточныхъ интеграла вида $\Phi_1 = f(\Phi_2)$ съ произвольными функціями.

Если уравненіе допускаетъ промежуточный интегралъ съ произвольной функціей

$$U_1 = \varphi(U),$$

гдѣ U и U_1 зависятъ отъ x, y, z, p, q, то, какъ не трудно убѣдиться, $dU_1 - d\varphi(U) = 0$ должно быть интегрируемымъ сочетаніемъ одной изъ системъ характеристическихъ многообразій 1-го порядка, а слѣдовательно, благодаря произволу φ, эта система должна допускать два интегрируемыхъ сочетанія $dU_1 = 0$ и $dU = 0$. Если данное уравненіе допускаетъ еще промежуточный интегралъ съ произвольной функціей, то мыслимы два случая: или этотъ промежуточный интегралъ имѣетъ видъ

$$V_1 = \psi(V),$$

гдѣ V и V_1 существенно отличны отъ U и U_1, и тогда необходимо $dV = 0$ и $dV_1 = 0$ служатъ интегрируемыми сочетаніями *второй* системы характеристическихъ многообразій, такъ какъ одна система, очевидно, не можетъ допускать четырехъ интегрируемыхъ сочетаній, или промежуточный интегралъ имѣетъ видъ

$$U_2 = \psi(U),$$

и тогда одна система допускаетъ три интегрируемыхъ сочетанія

$$dU = 0,\quad dU_1 = 0,\quad dU_2 = 0.$$

Разберемъ сначала первый случай. Согласно общей теоріи, всѣ интегралы уравненія съ частными производными 1-го порядка $U=\alpha$ образуются тѣмъ семействомъ (ω) характеристикъ даннаго уравненія 2-го порядка, которое выдѣляется изъ *второй* системы добавочнымъ усло-

віемъ $U = \alpha$; поэтому дифференціальныя уравненія этого семейства должны допускать интегралъ $V = const.$ Но съ другой стороны семейство (ω), очевидно, совпадаетъ съ семействомъ характеристикъ уравненія $U=\alpha$, точнѣе говоря, соотвѣтствующія характеристическія многообразія 1-го порядка служатъ характеристическими многообразіями уравненія $U = \alpha$, такъ какъ каждое подобное многообразіе входитъ въ составъ цѣлаго семейства интеграловъ уравненія $U = \alpha$. Такимъ образомъ, $V = const.$ служитъ интеграломъ дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій уравненія $U = \alpha$ и слѣдовательно (см. гл. I, § 3, стр. 66) обобщенныя скобки Poisson-а $[U, V]$ должны исчезать въ силу $U = \alpha$; а такъ какъ α вполнѣ произвольно, то имѣемъ *тождественно*

$$[U, V] = 0;$$

результатъ этотъ не трудно было бы получить непосредственно, исходя изъ уравненій, которымъ должны удовлетворять U и V. Разъ для функцій U и V удовлетворяется соотношеніе $[U, V] = 0$, мы можемъ опредѣлить преобразованіе прикосновенія, въ силу котораго между прочимъ

$$x_1 = U(x, y, z, p, q),\quad y_1 = V(x, y, z, p, q)$$

(см. гл. I, § 3, стр. 67). Примѣняя это преобразованіе къ данному уравненію, которое, очевидно, есть билинейное уравненіе *), получимъ билинейное же уравненіе, для котораго дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій той и другой системы должны допускать интегрируемыя сочетанія

$$dx_1 = 0,\quad dy_1 = 0.$$

Такъ какъ характеристическія многообразія 1-го порядка входятъ въ составъ характеристическихъ многообразій 2-го порядка, а для этихъ послѣднихъ должно имѣть мѣсто равенство

$$R_1 dy_1^2 - S_1 dy_1 dy_1 + T_1 dx_1^2 = 0,$$

то, сопоставляя съ предыдущимъ, заключаемъ отсюда, что въ данномъ случаѣ мы должны тождественно имѣть $R_1 = 0$, $T_1 = 0$, т. е. преобразованное уравненіе должно быть вида

$$s_1 = f(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1).$$

*) См. стр. 366.

Интегрируемыя сочетанія $dU_1=0$ и $dV_1=0$ нашимъ преобразованіемъ прикосновенія преобразуются въ интегрируемыя сочетанія дифференціальныхъ уравненій характеристическихъ многообразій 1-го порядка уравненія $s_1=f$, а слѣдовательно, согласно результатамъ примѣра 3-го, уравненіе это въ свою очередь простымъ преобразованіемъ точекъ можетъ быть приве[illegible]но къ виду $s_2=0$. Итакъ, первый типъ уравненій, допускающихъ два промежуточныхъ интеграла съ произвольными функціями, образуютъ уравненія, которыя преобразованіемъ прикосновенія могутъ быть приве[illegible]ены къ виду $s=0$.

Разсмотримъ теперь второй случай: пусть дифференціальныя уравненія одной систе[illegible] характеристическихъ многообразій 1-го порядка допускаютъ три [illegible]тегрируемыхъ сочетанія

$$dU=0,\ dU_1=0,\ dU_2=0.$$

Такъ какъ, харак[illegible]стическія многообразія 1-го порядка опредѣляются *тремя* дифферен[illegible]ьными уравненіями, въ число которыхъ входитъ уравненіе

$$dz-pdx-qdy=0,$$

то, слѣдовательно [illegible] послѣднее [illegible]жно быть слѣдствіемъ трехъ уравненій $dU=0$, [illegible] $=0$, [illegible] $=0$, или иначе уравненій $U=const.$, $U_1=const.$, $U_2=$ [illegible]. [illegible]угими словами, три уравненія съ частными производными 1-г[illegible] [illegible]рядка $U=const.$, $U_1=const.$, $U_2=const.$, при любыхъ значеніяхъ [illegible] имѣютъ общее интегральное многообразіе двухъ измѣре[illegible] [illegible] слѣдовательно, какіе-либо два изъ нихъ, напр. $U=const.$, $U_1=c$[illegible] имѣютъ цѣлое семейство съ однимъ параметромъ общихъ интеграл[illegible] многообразій двухъ измѣреній: отсюда въ свою очередь слѣдуетъ, [illegible] [illegible]жны имѣть тождественно

$$[U, U_1]=0,\ [U_1, U_2]=0,\ [U_2, U]=0,$$

такъ какъ необ[illegible] $U=const.$ должно быть интеграломъ дифференціальныхъ ура[illegible] [illegible]ческихъ многообразій уравненія $U=const.$, и ана[illegible] U_2 и U_1, U_2 и U. Такъ какъ для любыхъ двухъ изъ [illegible] U, U_1, U_2 обобщенныя скобки Poisson-а тождественно исчеза[illegible] можемъ установить преобразованіе прикосновенія, въ си[illegible] (см. гл. I, § 3, стр. 67)

$$z_1=U(x, y, z, [illegible]),\ x_1=U_1(x, y, z, p, q),\ y_1=U_2(x, y, z, p, q).$$

Выполняя затѣмъ [illegible] преобразованіе Legendre'а, мы преобразуемъ данное намъ урав[illegible] [illegible]тораго билинейное уравненіе, для кото-

раго дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій 1-го порядка допускаютъ три интегрируемыхъ сочетанія

$$dU=d(p_2x_2+q_2y_2-z_2)=0,\quad dU_1=dp_2=0,\quad dU_2=dq_2=0.$$

Первое, въ силу двухъ послѣднихъ, даетъ

$$dz_2-p_2dx_2-q_2dy_2=0;$$

замѣняя въ послѣдн[illegible] dp_2 и dq_2 соотвѣтственно черезъ $r_2dx_2+s_2dy_2$ и $s_2dx_2+t_2dy_2$ и исключая dx_2 и dy_2, получаемъ (ср. гл. IV, § 1, стр. 241) преобразов[illegible]ное уравненіе 2-го порядка

$$r_2t_2-s_2^2=0.$$

Примѣняя къ нему еще преобразованіе Ampère'а, можемъ его привести къ виду $t_3=0$ (см. [illegible] II, § 4, стр. 187). Итакъ, всѣ уравненія изслѣдуемаго нами типа могутъ быть преобразованіемъ прикосновенія приведены къ виду $rt-s^2=0$ или $t=0$. Такъ какъ для этихъ двухъ уравненій двѣ системы характеристическихъ многообразій сливаются въ одну, то и для всѣхъ уравненій изслѣдуемаго типа это обстоятельство имѣетъ мѣсто *).

Примѣръ 5. Опредѣлить уравненія вида

$$s=N(z)\lambda(p)\nu(q),$$

для которыхъ дифференціальныя уравненія обѣихъ системъ характеристическихъ многообразій 2-го порядка допускаютъ интегрируемыя сочетанія.

Дифференціальныя уравненія одной изъ системъ характеристическихъ многообразій уравненія

$$s=f(p, q, z, x, y)$$

имѣютъ видъ (ср. гл. IV, § 2, стр. 280):

$$dx=0,\ dz=qdy,\ dp=fdy,\ dq=tdy,\ s=f,$$
$$dr=\left[\frac{df}{dx}\right]dy,\quad ds=\left[\frac{df}{dy}\right]dy.$$

---

*) Уравненія 2-го порядка, допускающія два промежуточныхъ интеграла съ произвольными функціями, опредѣлены Lie (Archiv for Math. og Nat. t. I) и Darboux (Mémoire sur les solutions singul. des éq. aux dér. part. du 1-r o.).

Если эти уравненія допускаютъ интегрируемое сочетаніе $d\alpha = 0$, то дифференціалъ $d\alpha$. по замѣнѣ dx, dz, dp, dq, dr, ds ихъ выраженіями изъ приведенныхъ уравненій, долженъ тождественно исчезать. Отсюда получаемъ два условія

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}q + \frac{\partial\alpha}{\partial p}f + \frac{\partial\alpha}{\partial q}t + \frac{\partial\alpha}{\partial r}\left[\frac{df}{dx}\right] + \frac{\partial\alpha}{\partial s}\left[\frac{df}{dy}\right] = 0.$$

Замѣтимъ, что въ силу даннаго уравненія $s = f$, мы можемъ считать α не зависящимъ отъ s (можемъ исключить s), и тогда полученныя нами условія принимаютъ видъ

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}q + \frac{\partial\alpha}{\partial p}f + \frac{\partial\alpha}{\partial q}t + \frac{\partial\alpha}{\partial r}\left[\frac{df}{dx}\right] = 0,$$

гдѣ

$$\left[\frac{df}{dx}\right] = \frac{\partial f}{\partial p}r + \frac{\partial f}{\partial q}f + \frac{\partial f}{\partial z}p - \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Такъ какъ, въ силу $\frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0$, α не зависитъ отъ t, то изъ второго уравненія слѣдуетъ $\frac{\partial\alpha}{\partial q} = 0$, такъ что α есть функція однихъ только аргументовъ r, p, z, x, y. Второе уравненіе окончательно принимаетъ видъ

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}q + \frac{\partial\alpha}{\partial p}f + \frac{\partial\alpha}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial p}r + \frac{\partial f}{\partial q}f + \frac{\partial f}{\partial z}p + \frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0$$

или, при данномъ значеніи f,

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}q + \frac{\partial\alpha}{\partial p}N\lambda\mu + \frac{\partial\alpha}{\partial r}(N\lambda'\mu r - N^2\lambda^2\mu\mu' + N'\lambda\mu p) = 0,$$

гдѣ N', λ', μ' обозначаютъ производныя функцій $N(z)$, $\lambda(p)$, $\mu(q)$ соотвѣтственно по ихъ аргументамъ. Оставляя въ сторонѣ случай, когда λ или μ линейны относительно p или q, и замѣчая, что α не зависитъ отъ q, легко убѣждаемся изъ предъидущаго, что необходимо должно существовать соотношеніе вида

$$\mu\mu' = g\mu - hq - j,$$

гдѣ g, h, j — нѣкоторыя постоянныя. Уравненіе, опредѣляющее α, распадается на три:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial r}N^2\lambda^2 j = 0$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z} + \frac{\partial\alpha}{\partial r}N^2\lambda^2 h = 0$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial p} - \frac{\partial\alpha}{\partial r}\left(\frac{\lambda'}{\lambda}r + \frac{N'}{N}p + N\lambda g\right) = 0.$$

Для совмѣстности этихъ уравненій должны исчезать скобки Poisson-а для любыхъ двухъ изъ нихъ. Отсюда получаемъ, во-первыхъ, $j = 0$ и слѣдовательно $\frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0$ и во-вторыхъ,

$$N'\lambda g + \left(\frac{N'}{N}\right)'p = N^2\lambda\lambda' h.$$

Такъ какъ λ зависитъ лишь отъ p, а N отъ z, то необходимо имѣемъ

$$\lambda\lambda' = g_1\lambda + h_1 p,$$

гдѣ g_1, h_1 — нѣкоторыя постоянныя, и соотношеніе, полученное нами, распадается на два

$$N'g = N^2 h g_1$$
$$\left(\frac{N'}{N}\right)' = N^2 h h_1.$$

Съ другой стороны, предполагая, что и вторая система характеристическихъ многообразій даннаго уравненія допускаетъ интегрируемое сочетаніе $d\beta = 0$, убѣждаемся, что должны существовать соотношенія

$$N'g_1 = N^2 h_1 g$$
$$\left(\frac{N'}{N}\right)' = N^2 h_1 h,$$

изъ которыхъ второе совпадаетъ съ однимъ изъ полученныхъ выше, а первое независимо отъ нихъ. Тремъ соотношеніямъ

$$N'g = N^2 h g_1$$
$$N'g_1 = N^2 h_1 g$$
$$\left(\frac{N'}{N}\right)' = N^2 h_1 h$$

можемъ, во-первыхъ, удовлетворить, полагая $g = 0$, $g_1 = 0$, $\left(\frac{N'}{N}\right)' = N^2 h h_1$.

Уравненія

$$\lambda\lambda' = h_1 p, \quad \mu\mu' = hq$$

дають намъ

$$\lambda = \sqrt{C + h_1 p^2}, \quad \mu = \sqrt{C' + hq^2};$$

измѣняя перемѣнныя x и y (постоянными множителями), можемъ привести данное уравненіе къ виду

$$s = N\sqrt{1-p^2}.\sqrt{1-q^2},$$

т. е. другими словами можемъ сдѣлать $h = h_1 = -1$, $\lambda = \sqrt{1-p^2}$, $\mu = \sqrt{1-q^2}$. Функція N опредѣляется изъ уравненія

$$\left(\frac{N'}{N}\right)' = N^2,$$

которому можно удовлетворить полагая $N = \frac{1}{z}$ или $N = \frac{1}{\sin z}$: что касается до общаго интеграла, то значеніе, получаемое для N, при помощи замѣны z новой функціей вида $az + b$, гдѣ a и b — постоянныя, можетъ быть приведено къ $\frac{1}{\sin z}$. Итакъ, получаемъ два уравненія вида

$$s = \frac{1}{z}\sqrt{1-p^2}.\sqrt{1-q^2}$$

и

$$s = \frac{1}{\sin z}\sqrt{1-p^2}.\sqrt{1-q^2}.$$

Второе изъ этихъ уравненій проинтегрировано Darboux *); интегралъ его имѣетъ видъ

$$z = arc \cos\,(X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3),$$

гдѣ X_1, X_2, X_3 — функціи x и Y_1, Y_2, Y_3 — функціи y, удовлетворяющія условіямъ

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1, \quad X_1'^2 + X_2'^2 + X_3'^2 = 1$$
$$Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 = 1, \quad Y_1'^2 + Y_2'^2 + Y_3'^2 = 1.$$

*) Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, 3-e partie, l. VII ch. IX, n°n° 767, 768.

Обращаясь къ соотношеніямъ, опредѣляющимъ α, легко убѣждаемся, что для перваго уравненія

$$\alpha = \frac{r}{\sqrt{1-p^2}} - \frac{\sqrt{1-p^2}}{z}$$

и аналогично

$$\beta = \frac{t}{\sqrt{1-q^2}} - \frac{\sqrt{1-q^2}}{z}$$

Для второго уравненія

$$\alpha = \frac{r}{\sqrt{1-p^2}} - ctg\,z.\sqrt{1-p^2}, \quad \beta = \frac{t}{\sqrt{1-q^2}} - ctg\,z.\sqrt{1-q^2}.$$

Такъ какъ дифференціальныя уравненія характеристическихъ многообразій всякаго уравненія вида $s = f$ допускаютъ интегрируемыя сочетанія $dx = 0$, $dy = 0$ (см. прим. 3), то, согласно общей теоріи, интегралы 1-го уравненія удовлетворяютъ вмѣстѣ съ тѣмъ двумъ уравненіямъ

$$\frac{r}{\sqrt{1-p^2}} - \frac{\sqrt{1-p^2}}{z} = X, \quad \frac{t}{\sqrt{1-q^2}} - \frac{\sqrt{1-q^2}}{z} = Y,$$

гдѣ X, Y — произвольныя функціи x и y; равнымъ образомъ интегралы 2-го уравненія удовлетворяютъ двумъ уравненіямъ

$$\frac{r}{\sqrt{1-p^2}} - ctg\,z.\sqrt{1-p^2} = X, \quad \frac{t}{\sqrt{1-q^2}} - ctg\,z.\sqrt{1-q^2} = Y.$$

Каждое изъ этихъ четырехъ уравненій можетъ быть разсматриваемо какъ обыкновенное дифференціальное уравненіе 2-го порядка, и такимъ образомъ подтверждается, что интеграція уравненій

$$s = \frac{1}{z}\cdot\sqrt{1-p^2}\,.\sqrt{1-q^2} \quad \text{и} \quad s = \frac{1}{\sin z}\cdot\sqrt{1-p^2}\,.\sqrt{1-q^2}$$

приводится къ интеграціи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, какъ этого слѣдовало ожидать согласно общей теоріи.

Предполагая, во-вторыхъ, g и g_1 отличными отъ нуля, получаемъ изъ соотношеній

$$N'g = N^2 h g_1$$
$$N'g_1 = N^2 h_1 g$$

$hg_1^2 = h_1 g^2$. Измѣняя перемѣнныя x, y въ ax, by, можемъ всегда h и h_1, входящія въ соотношенія

$$\mu\mu' = g\mu + hq, \quad \lambda\lambda' = g_1\lambda + h_1 p.$$

сдѣлать, напримѣръ, равными -1, и тогда имѣемъ

$$N'g = -N^2 g_1$$
$$N'g_1 = -N^2 g$$
$$\left(\frac{N'}{N}\right)' = N^2$$

и, кромѣ того, $g_1^2 = g^2$, откуда

$$\frac{g_1}{g} = \frac{g}{g_1} = \pm 1.$$

Въ первомъ предположеніи имѣемъ $N = \frac{1}{z+c}$, во второмъ $N = -\frac{1}{z+c}$; но очевидно, что второй случай приводится къ первому, если знакъ минусъ отнесемъ къ одной изъ функцій λ или μ. Вводя еще новое перемѣнное $z+c$, окончательно имѣемъ

$$h = h_1 = -1, \quad N = \frac{1}{z}; \quad g_1 = g.$$

Функціи λ и μ опредѣляются изъ уравненій

$$\lambda\lambda' = g\lambda - p, \quad \mu\mu' = g\mu - q.$$

И то и другое есть уравненіе Jacobi; по интеграціи имѣемъ

$$(\lambda - \sigma_1 p)^{\sigma_1}(\lambda - \sigma_2 p)^{-\sigma_2} = const.$$
$$(\mu - \sigma_1 q)^{\sigma_1}(\mu - \sigma_2 q)^{-\sigma_2} = const.,$$

гдѣ σ_1 и σ_2 корни квадратнаго уравненія

$$\sigma^2 - g\sigma + 1 = 0$$

и слѣдовательно

$$\sigma_1 + \sigma_2 = g, \quad \sigma_1\sigma_2 = 1.$$

Въ случаѣ $g = \pm 2$ корни квадратнаго уравненія становятся равными, и функціи λ и μ опредѣляются изъ равенствъ

$$(\lambda \mp p)e^{\mp\frac{p}{\lambda \mp p}} = const.$$
$$(\mu \mp q)e^{\mp\frac{q}{\mu \mp q}} = const.$$

Обращаясь къ уравненіямъ, опредѣляющимъ α, получаемъ

$$\alpha = \frac{r}{\lambda} - \frac{\lambda}{z};$$

слѣдовательно, согласно общей теоріи, интегралы уравненія

$$s = \frac{\lambda\mu}{z}$$

служатъ вмѣстѣ съ тѣмъ интегралами уравненія

$$\frac{r}{\lambda} - \frac{\lambda}{z} = X$$

и аналогичнаго ему уравненія

$$\frac{t}{\mu} - \frac{\mu}{z} = Y.$$

получаемаго изъ интегрируемаго сочетанія $d\beta = 0$ второй системы характеристическихъ многообразій; X и Y здѣсь произвольныя функціи аргументовъ x и y. Каждое изъ двухъ послѣднихъ уравненій можетъ быть разсматриваемо какъ обыкновенное дифференціальное уравненіе 2-го порядка, такъ какъ λ зависитъ лишь отъ p, а μ — отъ q. Не трудно найти уравненіе съ частными производными 1-го порядка, которому удовлетворяютъ всѣ интегралы даннаго уравненія. Дѣйствительно, такъ какъ $\frac{\lambda}{z} = \frac{s}{\mu}$, то имѣемъ

$$\frac{r}{\lambda} - \frac{s}{\mu} = X$$

или, замѣняя для удобства X черезъ X' и интегрируя по x,

$$\int\frac{dp}{\lambda(p)} - \int\frac{dq}{\mu(q)} = X - Y.$$

гдѣ X, Y—произвольныя функціи x и y.

Доведемъ вычисленія до конца для уравненія

$$s = \frac{\sqrt{1-p^2}\cdot\sqrt{1-q^2}}{z}.$$

которое мы изслѣдовали собственно выше, но къ которому, очевидно, послѣднія наши разсужденія вполнѣ примѣняются, если положимъ

$$\lambda = \sqrt{1-p^2}, \quad \mu = \sqrt{1-q^2}.$$

Уравненіе съ частными производными 1-го порядка въ данномъ случаѣ принимаетъ видъ

$$arc\,sin\;p - arc\,sin\;q = X - Y;$$

мы можемъ ему удовлетворить, полагая

$$p = sin\;(X+\rho),\quad q = sin\;(Y+\rho),$$

гдѣ ρ — произвольное постоянное; z опредѣляется квадратурой, и мы имѣемъ полный интегралъ

$$z = cos\,\rho\Big[\int sin X dx + \int sin Y dy\Big] + sin\,\rho\Big[\int cos X dx + \int cos Y dy\Big] + a,$$

гдѣ a — второе произвольное постоянное. Общій интегралъ, какъ извѣстно, опредѣляется двумя равенствами

$$z = cos\,\rho\Big[\int sin X dx + \int sin Y dy\Big] + sin\,\rho\Big[\int cos X dx + \int cos Y dy\Big] + a(\rho)$$
$$0 = -sin\,\rho\Big[\int sin X dx + \int sin Y dy\Big] + cos\,\rho\Big[\int cos X dx + \int cos Y dy\Big] + a'(\rho),$$

гдѣ $a(\rho)$ — произвольная функція ρ. Вставляя значенія s, p, q, z, получаемыя отсюда, въ данное уравненіе, приходимъ къ соотношенію

$$a''(\rho) = -a(\rho),$$

откуда

$$a(\rho) = M\,cos\,\rho + N\,sin\,\rho.$$

Вставляя это выраженіе $a(\rho)$ и включая произвольныя постоянныя M, N въ интегралы $\int sin X dx$, $\int cos Y dy$, получаемъ общій интегралъ даннаго уравненія, представленный двумя равенствами:

$$z = cos\,\rho\Big[\int sin X dx + \int sin Y dy\Big] + sin\,\rho\Big[\int cos X dx + \int cos Y dy\Big]$$
$$0 = -sin\rho\Big[\int sin X dx + \int sin Y dy\Big] + cos\,\rho\Big[\int cos X dx + \int cos Y dy\Big].$$

Исключая ρ, получаемъ окончательно

$$z = \sqrt{\Big[\int sin X dx + \int sin Y dy\Big]^2 + \Big[\int cos X dx + \int cos Y dy\Big]^2}.$$

Можно также представить этотъ интегралъ въ видѣ

$$z = \sqrt{(X_1 + Y_1)^2 + (X_2 + Y_2)^2},$$

гдѣ X_1, X_2, Y_1, Y_2 — произвол[illegible]ункціи, с[illegible]занныя двумя соотношеніями

$$X_1'^2 + X_2'^2 = [illegible] + Y_2'^2 = 1;$$

эта новая форма интеграла по[illegible]я изъ пр[illegible]шествующей, если положимъ

$$\int sin X dx = X_1,\quad \int cos X dx = X_{[illegible]},\quad \int sin Y dy = Y_1,\quad \int cos Y dy = Y_2.$$

Примѣръ 6. Опредѣли[illegible]зненія, до[illegible]ускающія общій интегралъ вида

$$x = x(\alpha,\ \varphi(\alpha),\ \varphi'(\alpha),\ldots [illegible]\ \psi(\beta),\ \psi'(\beta),\ldots\psi^{(k)}(\beta))$$
$$y = y(\alpha,\ \varphi(\alpha),\ \varphi'(\alpha),\ldots [illegible]\ \psi(\beta),\ \psi'(\beta),\ldots\psi^{(k)}(\beta))$$
$$z = z(\alpha,\ \varphi(\alpha),\ \varphi'(\alpha),\ldots [illegible]\ \psi(\beta),\ \psi'(\beta),\ldots\psi^{(k)}(\beta)),$$

гдѣ φ и ψ — произвольныя фун[illegible]параметро[illegible] α и β.

Разрѣшая уравненія общаго [illegible]нтеграла относительно $\varphi^{(i)}$ и $\psi^{(k)}$, представимъ ихъ въ видѣ:

$$z = f(x,\ y,\ \alpha,\ \varphi,\ \varphi',\ldots [illegible]\ \beta,\ \psi,\ \psi' \ldots\psi^{(k-1)})$$
$$\varphi^{(i)} = F(x,\ y,\ \alpha,\ \varphi,\ \varphi' [illegible]^{(i-1)},\ \beta,\ \psi,\ \psi',\ldots\psi^{(k-1)})$$
$$\psi^{(k)} = \Phi(x,\ y,\ \alpha,\ \varphi,\ \varphi' [illegible]^{(i-1)},\ \beta,\ \psi,\ \psi',\ldots\psi^{(k-1)}).$$

Если бы данныя уравненія непосредственно не допускали такого преобразованія (напримѣръ, если бы $\varphi^{(i)}$ и $\psi^{(k)}$ входили лишь въ выраженіе z), то мы всегда могли бы привести ихъ к[illegible] уравненіямъ, которыя разрѣшимы относительно высшихъ производны[illegible] φ и ψ, помощью нѣкотораго преобразованія прикосновенія. Итак[illegible] всегда можемъ предположить уравненія общаго интеграла въ в[illegible]ше указанной формѣ. Дифференцируя 1-е по x и y, имѣемъ

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + |f\alpha|\frac{\partial\alpha}{\partial x} + |f\beta|\frac{\partial\beta}{\partial x}$$
$$q = \frac{\partial f}{\partial y} + |f\alpha|\frac{\partial\alpha}{\partial y} + |f\beta|\frac{\partial\beta}{\partial y},$$

гдѣ

$$|f\alpha| = \frac{\partial f}{\partial\alpha} + \frac{\partial f}{\partial\varphi}\varphi' + \frac{\partial f}{\partial\varphi'}\varphi'' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial\varphi^{(i-1)}}F$$
$$|f\beta| = \frac{\partial f}{\partial\beta} + \frac{\partial f}{\partial\psi}\psi' + \frac{\partial f}{\partial\psi'}\psi'' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial\psi^{(k-1)}}\Phi.$$

Производныя $\frac{\partial\alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial y}$, $\frac{\partial\beta}{\partial x}$, $\frac{\partial\beta}{\partial y}$ опредѣляются дифференцированіемъ уравненій $\varphi^{(i)}=F$, $\psi^{(k)}=\Phi$ и, какъ не трудно убѣдиться, необходимо зависятъ отъ $\varphi^{(i+1)}$ и $\psi^{(k+1)}$. Отсюда заключаемъ, что p и q, вообще говоря, тоже зависятъ отъ $\varphi^{(i+1)}$ и $\psi^{(k+1)}$, а слѣдовательно r, s, t, какъ производныя p и q по x и y,—зависятъ отъ $\varphi^{(i+2)}$ и $\psi^{(k+2)}$. Возможенъ однако случай, когда p и q свободны отъ $\varphi^{(i+1)}$ и $\psi^{(k+1)}$; это именно, когда имѣемъ

$$|f\alpha|=0,\quad |f\beta|=0$$

и слѣдовательно

$$p=\frac{\partial f}{\partial x},\quad q=\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Не трудно убѣдиться, что въ этомъ предположеніи $\varphi^{(i+1)}$ и $\psi^{(k+1)}$ необходимо войдутъ въ выраженія r, s, t. Дѣйствительно, въ противномъ случаѣ мы необходимо имѣли бы

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\alpha\right|=0,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\beta\right|=0,$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\alpha\right|=0,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\beta\right|=0,$$

такъ какъ

$$r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\left|\frac{\partial f}{\partial x}\alpha\right|\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\left|\frac{\partial f}{\partial x}\beta\right|\cdot\frac{\partial\beta}{\partial x}$$

и аналогично для s и t. Беря частную производную по x равенства $|f\alpha|=0$, получаемъ

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\alpha\right|+\frac{\partial f}{\partial\varphi^{i-1}}\,\frac{\partial F}{\partial x}=0,$$

откуда, въ силу $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\alpha\right|=0$, имѣемъ $\frac{\partial f}{\partial\varphi^{(i-1)}}=0$ или $\frac{\partial F}{\partial x}=0$. Беря частную производную того же равенства по y и поступая аналогично съ равенствомъ $|f\beta|=0$, приходимъ окончательно къ одной изъ четырехъ системъ соотношеній:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=0,$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial\psi^{(k-1)}}=0,$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi^{(i-1)}}=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=0,$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi^{(i-1)}}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial\psi^{(k-1)}}=0.$$

Соотношенія $\frac{\partial F}{\partial x}=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ указываютъ, что F не зависитъ отъ x и y, а слѣдовательно имѣетъ мѣсто равенство

$$\varphi^{(i)}=F(\alpha,\ \varphi,\ldots\varphi^{(i-1)},\ \beta,\ \psi,\ldots\psi^{(k-1)}),$$

которое при произвольныхъ функціяхъ φ и ψ, очевидно, невозможно. Такимъ образомъ, первыя три системы соотношеній отпадаютъ, и остается разсмотрѣть систему

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi^{(i-1)}}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial\psi^{(k-1)}}=0.$$

Сопоставляя эти равенства съ равенствами $|f\alpha|=0$, $|f\beta|=0$, непосредственно убѣждаемся, что мы должны имѣть также

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi^{(i-2)}}=0,\ldots,\quad \frac{\partial f}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial\alpha}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial\psi^{(k-2)}}=0,\ldots,\quad \frac{\partial f}{\partial\psi}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial\beta}=0,$$

т. е. f должна быть опредѣленной функціей x и y; но въ такомъ случаѣ $z=f(x, y)$ не можетъ быть *общимъ* интеграломъ, и слѣдовательно, послѣднее предположеніе приводитъ точно также къ невозможному заключенію. Итакъ, r, s, t во всякомъ случаѣ содержатъ производныя функцій φ и ψ порядка на единицу высшаго, чѣмъ p и q. Если мы дадимъ функціи ψ опредѣленное значеніе, а на функцію φ наложимъ лишь ограниченіе, чтобы сама функція и тѣ ея производныя, которыя входятъ въ выраженія x, y, z, p, q, принимали опредѣленныя значенія при $\alpha=\alpha_0$, то уравненія общаго интеграла дадутъ намъ семейство интегральныхъ поверхностей, проходящихъ черезъ кривую $\alpha=\alpha_0$ и имѣющихъ вдоль ея соприкосновеніе *перваго* порядка (r, s, t, согласно предыдущему, получаютъ различныя значенія вдоль кривой $\alpha=\alpha_0$, такъ какъ содержатъ производную φ высшаго порядка). На основаніи теоремы 11 § 1-го, отсюда заключаемъ, что уравненія общаго интеграла при $\alpha = const.$ опредѣляютъ семейство характеристическихъ многообразій 1-го порядка даннаго уравненія; равнымъ образомъ при $\beta = const.$ получаемъ вторую систему характеристическихъ многообразій 1-го порядка; каждая система зависитъ отъ произвольной функціи, и не трудно видѣть, что всякій интегралъ уравненія можетъ быть образованъ двоякимъ образомъ изъ семейства характеристическихъ многообразій 1-го порядка. Сопоставляя всѣ эти результаты, легко убѣждаемся, что данное уравненіе необходимо есть *билинейное*; преобразованіемъ прикосновенія всегда можемъ его сдѣлать линейнымъ.

Примѣръ 7. Опредѣлить уравненія, для которыхъ двѣ системы характеристикъ сливаются въ одну.

Для всѣхъ уравненій $F=0$ этого типа мы должны имѣть $4RT-S^2=0$ въ силу $F=0$. Условіе $4RT-S^2=0$ есть уравненіе съ частными производными 1-го порядка функціи F по перемѣннымъ r, s, t; но можно его также разсматривать какъ уравненіе съ частными производными одного изъ перемѣнныхъ r, s, t по двумъ другимъ: такъ, предполагая s выраженнымъ въ функціи r и t изъ равенства $F=0$, имѣемъ

$$R+S\frac{\partial s}{\partial r}=0, \quad T+S\frac{\partial s}{\partial t}=0,$$

и слѣдовательно, условіе $4RT-S^2=0$ принимаетъ видъ

$$4\frac{\partial s}{\partial r}\frac{\partial s}{\partial t}-1=0.$$

Полный интегралъ полученнаго уравненія можно взять, какъ не трудно убѣдиться, въ слѣдующемъ видѣ

$$r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2=k\sqrt{1+p^2+q^2},$$

гдѣ α, β — произвольныя постоянныя. Общій интегралъ получимъ, предполагая произвольную зависимость

$$\varphi(\alpha, \beta, x, y, z, p, q)=0$$

между α и β и исключая эти параметры между равенствомъ

$$r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2=k\sqrt{1+p^2+q^2}$$

и его производной по α (или по β)

$$r\alpha+s\beta+(s\alpha+t\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}=0,$$

при чемъ $\frac{d\beta}{d\alpha}$ опредѣляется изъ равенства

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\frac{d\beta}{d\alpha}=0.$$

Итакъ, окончательно получимъ всѣ уравненія искомаго типа, исключая α и β изъ системы

$$r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2=k\sqrt{1+p^2+q^2}$$
$$\varphi(\alpha, \beta, x, y, z, p, q)=0$$
$$(r\alpha+s\beta)\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}-(s\alpha+t\beta)\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=0.$$

Замѣняя здѣсь α и β соотвѣственно черезъ $\xi-x$ и $\eta-y$, гдѣ ξ, η — текущія координаты, замѣчаемъ, что для данныхъ x, y, z, p, q наша система опредѣляетъ семейство индикатрисъ 2-го порядка, изъ которыхъ каждая касается нѣкоторой кривой, опредѣляемой для данныхъ x, y, z, p, q уравненіемъ $\varphi=0$. Такимъ образомъ, всѣ уравненія искомаго типа принадлежатъ къ числу уравненій, изслѣдованныхъ нами въ § 1-мъ гл. IV, т. е. къ числу уравненій, которыя допускаютъ систему характеристическихъ многообразій 1-го порядка съ одной произвольной функціей. Притомъ, кривыя J и K системы Σ индикатрисъ (см. гл. IV, § 1, стр. 244) въ данномъ случаѣ, очевидно, сливаются въ одну, которая въ одно и то же время есть геометрическое мѣсто концовъ діаметровъ двойного соприкосновенія и облекающая общихъ касательныхъ пучковъ σ; этой кривой, какъ уже было упомянуто, касаются всѣ индикатрисы системы Σ. Обратно, всякое уравненіе, которое допускаетъ систему характеристическихъ многообразій 1-го порядка съ одной произвольной функціей и для котораго кривыя J и K всякаго элемента (x, y, z, p, q) сливаются въ одну, — есть, очевидно, уравненіе разсматриваемаго типа.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ОПЕЧАТКИ.

Стран.	Строка.	Напечатано.	Должно быть.
5	6 сн.	$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\partial z$	$\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$
30	4 св.	z_1x_1 и	z_1x_1, и
32	14 св.	иихъ	нихъ
40	4 сн.	$\frac{\partial z_1}{\partial p} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial p} + q_1\frac{\partial y_1}{\partial p}$	$\frac{\partial z_1}{\partial p} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial p} - q_1\frac{\partial y_1}{\partial p} = 0$
40	3, 2, 1 сн.	. . . .	Въ концѣ каждой строки слѣдуетъ добавить „$= 0$“.
42	17 св.	$\frac{x'}{z}$	$\frac{x'}{z'}$
77	18 св.	составляющія	составляющіе
94	4 сн.	с	c
100	8 сн.	инди	инди-
115	2 св.	травненіями	уравненіями
126	10 сн.	x, y, z, p	x, y, z, величина p
161	1 св.	Fi	$F\ i$
194	3 сн.	ары	пары
224	11 сн.	Функція	Форма
227	12 сн.	касательныхъ, слѣдовательно	касательныхъ; слѣдовательно,
290	10 сн.	$\xi_{,,}'dy$	$\xi_{''}'dy$
293	1 сн.	$\xi_3,$	ξ_3'
303	3 сн.	$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi}$	$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}$
337	6 св.	$dz - pdy - qdy = 0$	$dz - pdx - qdy = 0$
349	14 св.	многообразованія	многообразія
368	11 сн.	$\frac{\partial\lambda}{}$	$\frac{\partial\lambda}{\partial s}$