Проф. Д. Егоровъ.

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій.

Изданіе 3-е.

Студенческой Межфакультетской Издательской Коммиссіи

подъ редакціей проф. Егорова.

МОСКВА.
Т-во „Печатня С. П. Яковлева“, Петровка, Салтыковскій пер., д. Т-ва № 9.
1918 г.

ВВЕДЕНIЕ.

Опредѣленіе производной отъ данной функціи составляетъ прямую задачу исчисленія безконечно-малыхъ величинъ. Общій вопросъ обратной задачи исчисленія безконечно-малыхъ состоитъ въ томъ, чтобы опредѣлить одну или нѣсколько функцій одного или нѣсколькихъ перемѣнныхъ изъ данныхъ соотношеній между независимыми перемѣнными, функціями и ихъ производными. Пусть имѣемъ рядъ независимыхъ перемѣнныхъ:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \dots\dots\dots x_n$$

и рядъ функцій этихъ перемѣнныхъ:

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4 \dots\dots\dots y_m.$$

Соотношенія, о которыхъ идетъ рѣчь, имѣютъ видъ:

$$\mathcal{F}_i(x_1,\ x_2, \dots x_n,\ y_1,\ y_2, \dots\ y_m,\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1},\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial y_m}{\partial x_n},\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots \frac{\partial^p y_m}{\partial x_n^p}) = 0$$

и называются **дифференціальными уравненіями**; порядокъ наивысшей производной называется **порядкомъ** уравненія.

Если $n = 1$, т.е. независимое перемѣнное одно, то уравненія называются **обыкновенными**, если же $n > 1$, то – уравненіями съ частными производными.

Мы начнемъ съ того случая, когда имѣется одна функція ($m=1$) и одно независимое перемѣнное ($n=1$); тогда функція y опредѣляется однимъ дифференціальнымъ уравненіемъ:

$$\mathcal{F}\left(x,\ y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3},\ldots\ldots,\frac{d^ry}{dx^r}\right)=C;$$

если въ уравненіе входятъ производныя до порядка p, то уравненіе называется уравненіемъ p-го порядка.

Опредѣленіе функцій изъ дифф-ныхъ ур-ій или интегрированіе дифференціальныхъ ур-ій можно понимать различно. Самая узкая постановка задачи слѣдующая: выразить искомую функцію черезъ элементарныя функціи. Въ этомъ смыслѣ, вообще говоря, задача конечно не разрѣшима, такъ какъ даже для самаго простого дифф. ур-ія

$$\frac{dy}{dx}=f(x)$$

имѣемъ

$$y=\int f(x)dx+C,$$

и y не всегда выражается въ элементарныхъ функціяхъ, хотя бы это имѣло мѣсто для $f(x)$. Во 2-хъ, нахожденіе функціи, удовлетворяющей дифференціальному уравненію, можно понимать въ смыслѣ указанія пріема, которымъ по каждому значенію перемѣннаго находится значеніе функціи. Такіе пріемы могутъ быть весьма разнообразны. Напримѣръ, задача въ этомъ смыслѣ будетъ разрѣшена, коль скоро будетъ найдено разложеніе функціи въ сходящійся рядъ, болѣе или менѣе простого типа. Взявъ извѣстное число членовъ, для каждаго значенія перемѣннаго, въ предѣлахъ сходимости ряда, получимъ съ любымъ приближеніемъ значеніе функціи.

Третье толкованіе опредѣленія функціи изъ дифференціаль -

наго уравненія состоитъ въ томъ, что мы считаемъ задачу разрѣшенной, какъ только намъ удастся привести ее къ другимъ, болѣе простымъ задачамъ, а именно къ вычисленію интеграловъ данныхъ функцій, или квадратурамъ. Такимъ образомъ возникаетъ вопросъ о дифференціальныхъ уравненіяхъ, приводимыхъ къ квадратурамъ.

---

§ 1. ОБЫКНОВЕННЫЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ; ОБЩЕЕ, ЧАСТНОЕ, ОСОБОЕ РѢШЕНІЕ И ИНТЕГРАЛЪ. ИСКЛЮЧЕНІЕ ПОСТОЯННЫХЪ.

Уравненіе n -го порядка имѣетъ видъ:

$$\mathcal{F}(x, y, y', y'', y''', \ldots y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

гдѣ $y', y'' \ldots y^{(n)}$ - производныя различныхъ порядковъ. При изученіи дифференціальныхъ уравненій возникаетъ прежде всего вопросъ относительно функціи $\mathcal{F}$, входящей въ 1-ю часть. Во всемъ дальнѣйшемъ будемъ считать ее непрерывной и допускающей производныя по всѣмъ аргументамъ. Если мы поставили задачею опредѣленіе y въ элементарныхъ функціяхъ, то въ этомъ случаѣ на функцію $\mathcal{F}$ естественно придется наложить такое же ограниченіе, а именно: $\mathcal{F}(x, y, \ldots)$ должно выражаться въ элементарныхъ функціяхъ; это послѣднее ограниченіе можетъ быть замѣнено болѣе тѣснымъ предположеніемъ, что $\mathcal{F}(x, \ldots)$ функція алгебраическая отъ $x, y, y', y'', \ldots$ а слѣдовательно можно предположить, что $\mathcal{F}(x, \ldots\ldots)$ есть цѣлый раціональный многочленъ. Этого упрощенія можно достигнуть дифференцированіями и исключеніемъ. Покажемъ это на простомъ примѣрѣ. Пусть дано уравненіе:

$$e^{y'} + xy' - 2y = 0,$$

гдѣ y' - первая производная. Дифференціальное уравненіе 1-го порядка дифференцируемъ:

$$e^{y'} y'' + xy'' + y' - 2y' = 0.$$

Изъ двухъ уравненій исключаемъ $e^{y'}$; умножая 1-ое уравненіе на y'' и вычитая первое изъ второго, получимъ:

$$x(1 - y')y'' + 2yy'' - y' = 0.$$

Получили уравненіе алгебраическое относительно всѣхъ аргументовъ, но уже не 1-го порядка, а высшаго - 2-го. Такимъ образомъ уничтоженіе трансцендентностей произошло на счетъ увеличенія порядка дифференціальнаго уравненія. Обыкновенно ограничиваются требованіемъ алгебраичности только относительно y и его производныхъ; напримѣръ, разсматриваютъ уравненіе хотя бы такого вида:

$$y' - \cos x . y' + 2e^x . y = 0.$$

При болѣе общей постановкѣ задачи ограничиваются предположеніями, упомянутыми въ самомъ началѣ.

Всякая функція y, удовлетворяющая дифференціальному уравненію, называется рѣшеніемъ дифференціальнаго уравненія, процессъ нахожденія y называется интегрированіемъ дифференціальнаго уравненія. Вмѣсто того, чтобы искать $y = f(x)$, мы можемъ искать соотношеніе вида $\varphi(x, y) = 0$, т.е. опредѣлить y, какъ неявную функцію x. Такого рода соотношеніе называется интеграломъ дифференціальнаго уравненія. Равенство

$$y = f(x)$$

тоже есть интегралъ, но сама функція $f(x)$ есть рѣшеніе дифференціальнаго уравненія. Разсмотримъ простѣйшій случай дифференціальнаго уравненія:

$$y' = \varphi(x).$$

Интегрированіе этого уравненія сводится къ нахожденію квадратуры

$$y = \int \varphi(x)\,dx + C.$$

Въ этомъ случаѣ задача интегрированія есть задача неопредѣленная, вслѣдствіе присутствія въ рѣшеніи произвольнаго элемента-произвольной постоянной C. Давая C различныя значенія 1, 2, 3,......-4,....., $\sqrt{2}$,..., будемъ получать различныя рѣшенія y. Поэтому можно ожидать, что и болѣе общая задача есть тоже задача неопредѣленная и что рѣшеніе ея тоже содержитъ произвольные элементы въ видѣ произвольныхъ постоянныхъ. Возьмемъ теперь обратно соотношеніе, содержащее произвольныя постоянныя $C_1, C_2, \ldots C$

$$\phi(x, y, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0 \qquad (1)$$

Дифференцируемъ послѣдовательно n разъ по x и получаемъ, включая уравненіе (1), систему:

$$A \left\{ \begin{array}{l} B \left\{ \begin{array}{l} \phi(x, y, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0 \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y} y' = 0 \\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} y' + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} y'^2 + \dfrac{\partial\phi}{\partial y} y'' = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^{n-1}\phi}{\partial x^{n-1}} + \dfrac{n-1}{1}\dfrac{\partial^{n-1}\phi}{\partial x^{n-2}\partial y} y' + \cdots\cdots + \dfrac{\partial\phi}{\partial y} y^{(n-1)} = 0 \end{array} \right. \\ \\ \dfrac{\partial^n\phi}{\partial x^n} + \dfrac{n}{1}\dfrac{\partial^n\phi}{\partial x^{n-1}\partial y} y' + \cdots\cdots\cdots + \dfrac{\partial\phi}{\partial y} y^{(n)} = 0 \end{array} \right.$$

Эти соотношенія содержатъ x, y, y', y'',....., $y^{(n)}$ и постоянныя C, которыхъ всего n. Всего уравненій $(n+1)$. Исключая отсюда всѣ постоянныя величины C_i, получимъ одно соотношеніе такого вида:

$$\mathcal{F}(x,\ y,\ y',\ y'' \ldots\ldots,\ y^{(n)}) = 0\ , \qquad (2)$$

т.е. дифференціальное уравненіе. Если изъ равенства (1) опредѣлимъ y, какъ функцію x, т.е.

$$y = f(x,\ C_1,\ C_2,\ C_3 \ldots\ldots\ C_n) \qquad (3)$$

и вставимъ въ дифференціальное уравненіе (2), то получимъ, очевидно, тождество; слѣдовательно

$$y = f(x,\ C_1,\ C_2 \ldots\ldots\ C_n)$$

есть рѣшеніе дифференціальнаго уравненія. Оно содержитъ n произвольныхъ постоянныхъ, которымъ можемъ давать любыя значенія; рѣшеніе (3) называется общимъ рѣшеніемъ дифференціальнаго уравненія (2), а соотношеніе (1) - общимъ интеграломъ; если постояннымъ даемъ частныя значенія, то получаемъ частныя рѣшенія. Итакъ, частными рѣшеніями наз. рѣшенія, получаемыя изъ общаго при частныхъ значеніяхъ постоянныхъ. Частнымъ интеграломъ называется интегралъ, получаемый изъ общаго при частныхъ значеніяхъ произвольныхъ постоянныхъ. Интегралъ

$$\varphi(x,\ y) = 0$$

называется особымъ, если онъ не получается изъ общаго ни при какихъ частныхъ значеніяхъ постоянныхъ; аналогично рѣшеніе

$$y = \varphi(x)$$

называется особымъ, если не получается изъ общаго ни при какихъ частныхъ значеніяхъ постоянныхъ.

П Р И М Ѣ Р Ъ:

$$y = xy' + y'^2 .$$

Уравненію этому можно удовлетворить, положивъ

$$y = Cx + C^2,$$

гдѣ C - произвольное постоянное. Дѣйствительно, $y' = C$; подставляя, получаемъ:

$$Cx + C^2 = Cx + C^2,$$

т.е. тождество. Итакъ

$$\underline{y = Cx + C^2}$$

есть рѣшеніе даннаго дифференціальнаго уравненія. Оно есть общее, такъ какъ содержитъ одно ($n = 1$) произвольное постоянное. Можно было бы доказать, что оно дѣйствительно о б щ е е, т.е. изъ него получаются всѣ частныя рѣшенія. Положимъ $C = 0$; тогда получаемъ частное рѣшеніе $y = 0$. Положимъ $C = 1$, получаемъ $y = x + 1$ - тоже частное рѣшеніе. Легко видѣть, что уравненіе допускаетъ еще одно рѣшеніе

$$\underline{y = -\frac{x^2}{4}}.$$

Дѣйствительно:

$$y' = -\frac{x}{2}; \qquad -\frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}$$

Получается тожество. Легко видѣть, что это новое рѣшеніе не получится изъ общаго ни при какомъ частномъ значеніи постояннаго C, такъ какъ общее линейно относительно x, а полученное - 2-ой степени; слѣдовательно это рѣшеніе - особое -

Мы видѣли, что исключеніемъ n постоянныхъ изъ соотношенія (1) получаемъ дифференціальное уравненіе n-го порядка. Самое исключеніе можно вести такъ: возьмемъ первыя n изъ уравненій системы (А), т.е. систему (В); изъ нея опре -

дѣлимъ C_1, C_2, ... C_n въ функціи x, y, y', ... $y^{(n-1)}$ и вставимъ въ послѣднее уравненіе системы (А); тогда и придемъ къ уравненію (2). Можетъ однако случиться, что всѣ n постоянныхъ C_1, C_2, ... C_n исключаются изъ меньшаго числа уравненій, такъ что ихъ невозможно опредѣлить изъ системы (В). Если всѣ они исключаются изъ системы (В), то въ результатѣ получимъ уравненіе $(n - 1)$-го порядка; если же они исключаются изъ первыхъ $(n - 1)$, $(n - 2)$, ... уравненій системы (А), то соотвѣтственно получаемъ дифференціальное уравненіе $(n - 2)$-го, $(n - 3)$-го и т.д. порядковъ. Во всѣхъ этихъ случаяхъ говорятъ, что n постоянныхъ въ соотношеніи (1) з а в и с и м ы; они называются н е з а в и с и м ы м и, если въ результатѣ исключенія получаемъ дифференціальное уравненіе n-го порядка, т.е. если C_1, C_2, ... C_n опредѣляются изъ системы (В).

Соотвѣтственно съ этимъ интегралъ дифференціальнаго уравненія n-го порядка называется о б щ и м ъ, если онъ содержитъ n н е з а в и с и м ы х ъ произвольныхъ постоянныхъ; другими словами, соотношеніе вида (1) называется общимъ интеграломъ уравненія (2), если это послѣднее получается исключеніемъ постоянныхъ изъ системы (А).

П Р И М Ѣ Р Ы.

1) Разсмотримъ на плоскости кривыя 2-го порядка, отнесенныя къ Декартовымъ координатамъ. Въ уравненіе

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (4)$$

входитъ 5 независимыхъ произвольныхъ постоянныхъ, которыя исключимъ дифференцированіемъ. Для этого разрѣшаемъ уравненіе относительно y, получаемъ

$$y = \alpha x + \beta \pm \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$$

гдѣ α, β, A, B, C составлены изъ коэффиціентовъ даннаго уравненія - и слѣдовательно тоже произвольныя постоянныя. Дифференцируемъ:

$$y' = \alpha \pm \frac{Ax + B}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}; \quad y'' = \frac{A}{(Ax^2 + 2Bx + C)^{\frac{1}{2}}} -$$

$$- \frac{(Ax + B)^2}{(Ax^2 + 2Bx + C)^{\frac{3}{2}}} = \frac{AC - B^2}{(Ax^2 + 2Bx + C)^{\frac{3}{2}}}.$$

Возведемъ y'' въ степень $(-\frac{2}{3})$:

$$(y'')^{-\frac{2}{3}} = \frac{Ax^2 + 2Bx + C}{(AC - B^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

Продифференцировавъ 3 раза, мы получимъ въ результатѣ 0:

$$\frac{d^3}{dx^3}\left[(y'')^{-\frac{2}{3}}\right] = 0.$$

Выполняя выкладки, получаемъ дифференціальное уравненіе

$$40y'''^3 - 45y''y'''y^{IV} + 9y''^2y^{V} = 0 \qquad (5)$$

Это уравненіе 5-го порядка; общій интегралъ его есть уравненіе (1) коническаго сѣченія. Если бы изъ совокупности этихъ кривыхъ мы выдѣлили только параболы, то для нихъ оказалось бы $A = 0$, и тогда имѣли бы

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[(y'')^{-\frac{2}{3}}\right] = 0$$

и слѣдовательно дифференціальное уравненіе параболъ имѣетъ видъ:

$$5y'''^2 - 3y''y^{IV} = 0 \qquad (6)$$

Дифференціальное уравненіе это 4-го порядка. Всѣ рѣшенія, найденныя для (6) дифференціальнаго уравненія, суть также и рѣшенія (5).

2)
$$y = C_1 e^{x+C_2} \qquad (7)$$

Имѣемъ здѣсь 2 произвольныя постоянныя. Дифференцируемъ уравненіе 2 раза:

$$y' = C_1 e^{x+C_2} \qquad (8)$$

$$y'' = C_1 e^{x+C_2} \qquad (9)$$

Общій пріемъ исключенія состоитъ въ томъ, чтобы опредѣлить C_1 и C_2 изъ (7 и 8) уравненій и вставить ихъ въ уравненіе (9), но здѣсь это опредѣленіе невозможно, и C_1, C_2 исключаются изъ уравненій (7) и (8): дѣля 7-ое уравненіе на 8-е почленно, получаемъ

$$\frac{y}{y'} = 1 \quad \text{или} \quad y = y' \qquad (10)$$

Получили дифференціальное уравненіе 1-го порядка, а не 2-го, какъ мы должны были ожидать. Отсюда заключаемъ, что постоянныя C_1 и C_2 въ уравненіи (7) - зависимыя. Не трудно замѣтить, что они входятъ въ одной комбинаціи:

$$y = C_1 e^{C_2} . e^x ;$$

полагая

$$C_1 e^{C_2} = C ,$$

имѣемъ

$$y = Ce^x .$$

Слѣдовательно, мы имѣемъ только одно существенное постоянное C и общее рѣшеніе уравненія (10) $y = Ce^x$

Разберемъ болѣе сложный примѣръ:

3) $$y^2 = 2axy + bx^2 .$$

а и b – два произвольныхъ постоянныхъ и, какъ видно, они не входятъ въ какой-нибудь одной комбинаціи. Дифференцируемъ два раза:

$$yy' = axy' + ay + bx$$

$$yy'' + y'^2 = axy'' + 2ay' + b .$$

Слѣдовало бы изъ первыхъ двухъ равенствъ опредѣлить а и b и вставить въ послѣднее. Но изъ первыхъ двухъ равенствъ а и b исключаются и получается уравненіе свободное отъ а и b. Дѣйствительно, имѣемъ изъ перваго уравненія:

$$y\ (y - ax) = x\ (ay + bx),$$

изъ второго уравненія

$$y'(y - ax) = ay + bx.$$

Дѣлимъ 1-ое на второе, получаемъ:

$$\frac{y}{y'} = x \ , \qquad y = xy'.$$

Получили дифференціальное уравненіе 1-го порядка. Исключенныхъ постоянныхъ 2. Слѣдовательно, эти постоянныя зависимы. Данное уравненіе можно представить еще въ видѣ:

$$\frac{y^2}{x^2} - 2a\frac{y}{x} - b = 0.$$

Отсюда:

$$\frac{y}{x} = k_1 \text{ или } \frac{y}{x} = k_2, \text{ гдѣ } k_1 = a + \sqrt{a^2 + b}\ ,\ k_2 = a - \sqrt{a^2 + b}$$

Иначе:

$$y = k_1 x\ , \text{ или } y = k_2 x\ .$$

Дифференцируя по x, находимъ

$$y' = k_1 \text{ или } y' = k_2 .$$

Слѣдовательно, въ томъ и другомъ предположеніи $y = xy'$ будетъ искомое дифференціальное уравненіе, и мы видимъ, что a и b приходится исключать только въ одной комбинаціи k_1 или k_2.

Если намъ дано дифференціальное уравненіе:

$$\mathcal{F}(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

и мы нашли общій интегралъ

$$\varphi(x, y, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0,$$

то мы вполнѣ опредѣлимъ постоянныя, если намъ даны для какого-нибудь опредѣленнаго численнаго значенія $x = x_0$ значенія y и производныхъ до $(n - 1)$-го порядка:

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \ \ldots\ldots\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, наряду съ соотношеніемъ $\varphi(x, y, C_1, \ldots C_n) = 0$ разсмотримъ тѣ, которыя получаются дифференцированіемъ по x:

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot y' = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \ldots = 0, \ldots,$$

т.е. систему (B), и въ этой системѣ замѣнимъ x черезъ x_0, а слѣдовательно положимъ

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \ \ldots\ldots\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}.$$

Получимъ n уравненій, изъ которыхъ найдемъ $C_1, C_2, \ldots C_n$, т.е. опредѣленныя численныя значенія постоянныхъ. Замѣнивъ ихъ въ общемъ интегралѣ, мы найдемъ опредѣляемый интегралъ. Итакъ, рѣшеніе дифференціальнаго уравненія опредѣляется начальными условіями:

$$\text{при } x = x_0: \ y = y_0, \quad y' = y_0', \ \ldots\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}.$$

ПРИМѢРЪ:

$$y'' = y.$$

Этому дифференціальному уравненію удовлетворяетъ

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

Дѣйствительно, диффернцируя, имѣемъ:

$$y' = C_1 e^{x} - C_2 e^{-x}$$

$$y'' = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

т.е. $y'' = y$. Слѣдовательно,

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

есть общее рѣшеніе. Пусть теперь при $x = 0$; $y = 2$, а $y' = 0$. Это данныя начальныя условія; подставляя $x = 0$, $y = 2$, $y' = 0$, найдемъ:

$$2 = C_1 + C_2$$

$$0 = C_1 - C_2 .$$

Отсюда

$$C_1 = 1 \quad \text{и} \quad C_2 = 1 .$$

Наше частное рѣшеніе будетъ

$$y = e^{x} + e^{-x} .$$

§ 2. УРАВНЕНІЯ 1-ГО ПОРЯДКА; РАЗДѢЛЕНІЕ ПЕРЕМѢННЫХЪ.

Уравненіе 1-го порядка содержитъ независимое перемѣнное, функцію и первую ея производную и имѣетъ видъ:

$$\mathcal{F}(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

На основаніи сказаннаго раньше общій интегралъ такого дифференціальнаго уравненія будетъ содержать только одно произвольное постоянное и имѣетъ видъ

$$\varphi(x, y, C) = 0 \tag{2}$$

Изъ общаго интеграла найдутся при опредѣленныхъ значеніяхъ постояннаго С всѣ частные интегралы. Ясно, что разъ дѣло идетъ объ опредѣленіи общаго интеграла, мы имѣемъ право умножать и дѣлить данное уравненіе (1) на любую функцію x и y, такъ какъ при этомъ могутъ пріобрѣтаться или теряться только рѣшенія, не содержащія произвольной постоянной и получаемыя приравниваніемъ нулю вышеупомянутой функціи x и y. Точно также ясно, что мы имѣемъ право въ данное уравненіе ввести новыя перемѣнныя и интегрировать преобразованное уравненіе. Переходя въ полученномъ интегралѣ отъ новыхъ перемѣнныхъ къ старымъ, имѣемъ интегралъ даннаго уравненія.

Если будемъ толковать x, y какъ Декартовы координаты, то уравненіе

$$\varphi(x, y, C) = 0$$

опредѣлитъ намъ семейство кривыхъ съ однимъ произвольнымъ параметромъ. Это семейство кривыхъ мы назовемъ интегральными кривыми. Производная y' есть tg угла наклоненія къ оси x касательной въ точкѣ (x, y). Поэтому дифференціальное уравненіе представляетъ намъ соотношеніе между координатами точки и tg-сомъ угла наклоненія касательной въ данной точкѣ къ оси x. Задача интеграціи сводится къ опредѣленію кривыхъ, для которыхъ во всѣхъ точкахъ имѣетъ мѣсто это соотношеніе.

Начнемъ съ простѣйшаго случая, когда дифференціальное уравненіе алгебраическое относительно y' и притомъ 1-ой степени. Въ такомъ случаѣ его можно представить въ видѣ:

$$N\frac{dy}{dx} + M = 0 \qquad (3)$$

гдѣ M и N суть функціи только x и y. Это уравненіе можно представить еще въ такомъ видѣ, разрѣшивъ его относительно производной $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} = f(x, y) \qquad (3')$$

Подобное разрѣшеніе можно произвести и для общаго уравненія(1), которое опредѣляетъ y' какъ функцію x,y; но на практикѣ это разрѣшеніе вообще не выполнимо въ элементарныхъ функціяхъ, даже если лѣвая часть уравненія (1) выражается въ элементарныхъ функціяхъ. Умножая уравненіе (3) на dx, получимъ новый видъ :

$$Ndy + Mdx = 0 \qquad (4)$$

гдѣ M и N попрежнему функціи перемѣнныхъ x и y.

Уравненіе, въ которомъ каждый членъ содержитъ только одно перемѣнное, называется уравненіемъ съ раздѣленными перемѣнными; тогда M - функція только x, а N - функція только y, и для ясности можно принять обозначенія

$$M = X; \quad N = Y,$$

и получимъ:

$$Xdx + Ydy = 0 \qquad (5)$$

Интегрированіе такого уравненія приводится къ квадратурамъ Беремъ интегралъ отъ каждаго члена, и сумму поравниваемъ C:

$$\int_{x_0}^{x} Xdx + \int_{y_0}^{y} Ydy = C \qquad (6)$$

гдѣ C - произвольное постоянное, а x_0, y_0, - какія угодно постоянныя значенія. Соотношеніе (6) есть общій интегралъ. Дѣйствительно, дифференцируя его, исключаемъ C и пойдемъ опять къ дифференціальному уравненію (5).

ПРИМѢРЪ:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

Дифференціальное уравненіе съ раздѣленными перемѣнными. Двумя квадратурами находимъ:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = C$$

или

$$\arcsin x + \arcsin y = C.$$

Къ уравненію вида (5) приводится и уравненіе вида

$$X_1 Y_1 dx + X_2 Y_2 dy = 0,$$

гдѣ

$$M = X_1 Y_1 \quad \text{и} \quad N = X_2 Y_2.$$

Производимъ раздѣленіе перемѣнныхъ: раздѣляя все уравненіе на $X_2 Y_1$, найдемъ:

$$\frac{X_1}{X_2}dx + \frac{Y_2}{Y_1}dy = 0.$$

Получаемъ уравненіе съ раздѣленными перемѣнными. Выполняя квадратуры, получимъ общій интегралъ.

ПРИМѢРЪ:

$$e^{-\frac{1}{x}} y^3 dx + x^2 y^2 dy = 0.$$

Раздѣляя уравненіе на $x^2 y^3$, получаемъ:

$$e^{-\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{y}dy = 0.$$

Перемѣнныя раздѣлены. Интегрируя, имѣемъ: $\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx =$

$$\int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x^2} + \int_1^y \frac{dy}{y} = C; \quad +e^{-\frac{1}{x}} + \lg y = C$$

Разсмотримъ еще примѣръ, гдѣ общій интегралъ получается въ двухъ формахъ:

2) $$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0;$$

перемѣнныя раздѣлены. Интегрируемъ

$$\int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^y \frac{dy}{y} = C,$$

или

$$\lg x + \lg y = C \qquad (A)$$

Поступаемъ иначе. Умножаемъ дифференціальное уравненіе на xy, получаемъ

$$y dx + x dy = 0,$$

или

$$d(xy) = 0.$$

Слѣдовательно

$$xy = C'. \qquad (B)$$

Общіе интегралы (A) и (B) очевидно тожественны между собою. Опредѣлимъ C и C' условіемъ при $x = 1$, $y = z$ (z - постоянный параметръ). Уравненія (A) и (B) при $x = 1$ даютъ $\lg z = C$, $z = C'$.
Итакъ, имѣемъ:

$$\lg x + \lg y = \lg z,$$
$$xy = z$$

и слѣдовательно

$$\lg(xy) = \lg x + \lg y.$$

Такимъ образомъ мы доказали извѣстное свойство логариѳма произведенія.

----- o0o -----

§ 3. ОДНОРОДНЫЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ; УРАВНЕНІЯ, ПРИВОДИМЫЯ КЪ ОДНОРОДНЫМЪ.

Однороднымъ дифференціальнымъ уравненіемъ называется уравненіе вида

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (1)$$

гдѣ F есть функція отношенія перемѣнныхъ. Легко видѣть, что, если M и N - однородныя функціи (одного измѣренія) перемѣнныхъ x и y, то:

$$Ndy + Mdx = 0 \qquad (2)$$

будетъ однороднымъ дифференціальнымъ уравненіемъ. Дѣйствительно, обозначимъ черезъ n измѣреніе однородности функцій M и N, тогда ихъ можно представить въ такомъ видѣ:

$$M = x^n f_1\left(\frac{y}{x}\right); \quad N = x^n f_2\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (3)$$

Внеся эти значенія въ соотношеніе (2) и сокращая на x^n, получаемъ:

$$f_1\left(\frac{y}{x}\right) dx + f_2\left(\frac{y}{x}\right) . dy = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_1}{f_2} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Отношеніе перемѣнныхъ $\frac{y}{x}$ можно замѣнить новымъ перемѣннымъ:

$$\frac{y}{x} = u; \quad \text{отсюда} \quad y = ux;$$

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = f(u), \quad x\frac{du}{dx} = f(u) - u.$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}; \qquad \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

Перемѣнныя раздѣлены; выполняя квадратуры, находимъ общій интегралъ: $\int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$; $\int \frac{du}{f(u)-u} = \lg x + \lg C$.

Вносся въ данное уравненіе вмѣсто u его значеніе, получимъ общій интегралъ даннаго уравненія:

$$Cx = e^{\int \frac{du}{f(u)-u}} = \varphi(u) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (3)$$

Слѣдовательно, общій интегралъ имѣетъ видъ:

$$\underline{Cx = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).}$$

Давая C различныя значенія, получимъ различные частные интегралы. Не трудно видѣть, что семейство интегральныхъ кривыхъ въ данномъ случаѣ состоитъ изъ подобныхъ и подобно расположенныхъ кривыхъ. Дѣйствительно, умножая x и y на одно и то же постоянное, мы только мѣняемъ C въ общемъ интегралѣ.

П р и м ѣ р ъ:

$$(x^2 - y^2)\,dx + yx\,dy = 0.$$

Обозначая

$$\frac{y}{x} = u, \quad \text{имѣемъ:} \quad y = xu.$$

Дифференцируемъ:

$$dy = x\,du + u\,dx.$$

Вставляя значеніе dy въ данное уравненіе, имѣемъ:

$$x^2(1 - u^2)\,dx + x^2u\,(x\,du + u\,dx) = 0;$$

раздѣляя на x^2 и раскрывая скобки:

$$dx + xu\,du = 0;$$

1

въ полученномъ уравненіи перемѣнныя раздѣляются:

$$\frac{dx}{x} + u\,du = 0.$$

Интегрируемъ

$$2\lg x + u^2 = C,$$

или

$$x^2 e^{u^2} = C'.$$

Таковъ общій интегралъ преобразованнаго уравненія. Подставляя значеніе u, находимъ:

$$x^2 e^{\left(\frac{y}{x}\right)^2} = C'.$$

Таковъ общій интегралъ даннаго уравненія.

Переходимъ теперь къ новому типу дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right). \qquad (4)$$

Коэффиціенты a, b, c, a', b', c' - постоянныя числа. Если бы мы предположили

$$c = c' = 0,$$

то пришли бы къ типу однородныхъ уравненій, разсмотрѣнному выше; дѣйствительно, дробь

$$\frac{ax + by}{a'x + b'y} = \frac{a + b\left(\frac{y}{x}\right)}{a' + b'\left(\frac{y}{x}\right)}$$

есть функція отношенія $\frac{y}{x}$, слѣдовательно и лѣвая часть есть функція этого отношенія; поэтому такое уравненіе будетъ однородно.

Постараемся теперь данный общій случай свести къ частному случаю предыдущаго типа. Поступаемъ такимъ образомъ: полагаемъ:

$$y = \eta + k; \qquad x = \xi + h,$$

гдѣ h и k - постоянныя, y и x - функціи η и ξ и обратно ξ, η - функціи x, y; внесемъ вмѣсто x и y новыя перемѣнныя и получимъ новое дифференціальное уравненіе въ перемѣнныхъ η и ξ. Ясно, что

$$dy = d\eta; \qquad dx = d\xi; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}$$

Величинами h и k воспользуемся такъ, чтобы помощію ихъ привести данное уравненіе къ однородному:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi} = f\left\{\frac{a\xi + b\eta + (ah + bk + c)}{a'\xi + b'\eta + (a'h + b'k + c')}\right\}.$$

постоянные члены въ числителѣ и знаменателѣ

$$ah + bk + c \quad \text{и} \quad a'h + b'k + c'$$

приравняемъ нулю, тогда получимъ уравненіе однородное, какъ сказано выше. Изъ равенствъ

$$ah + bk + c = 0, \qquad a'h + b'k + c' = 0 \qquad (5)$$

опредѣляемъ h и k, и найденныя значенія вставимъ въ выраженія y и x черезъ η и ξ. Проинтегрировавъ полученное послѣ замѣны уравненіе какъ однородное, мы найдемъ общій интегралъ измѣненнаго уравненія. Произведя обратную замѣну, найдемъ общій интегралъ даннаго уравненія.

Однако такой методъ не всегда примѣнимъ, такъ какъ не всегда можно разрѣшить уравненія (5) относительно h и k. Можетъ именно случиться, что детерминантъ системы, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a' & b' \\ a & b \end{vmatrix}$$

равенъ 0, и тогда мы h и k не можемъ найти. Если :

$$a'b - ab' = 0,$$

то отсюда

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b};$$

обозначивъ это отношеніе черезъ ρ, имѣемъ:

$$a' = a\rho; \quad b' = b\rho$$

и подставимъ въ данное уравненіе:

$$\frac{dy}{dx} = f\left\{\frac{ax + by + c}{\rho(ax + by) + c'}\right\}$$

Полагая теперь

$$ax + by = z,$$

получимъ

$$\frac{dy}{dx} = f\left\{\frac{ax + by + c}{\rho(ax + by) + c'}\right\} = f\left\{\frac{z + c}{\rho z + c}\right\}.$$

Правая часть полученнаго уравненія есть функція только z, а само z есть функція x и y. Если въ данномъ уравненіи вмѣсто перемѣнныхъ x и y будемъ разсматривать перемѣнныя x и z, то

$$y = \frac{z - ax}{b}$$

и мы имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \cdot \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = f\left(\frac{z + c}{\rho z + c'}\right).$$

Разрѣшимъ полученное уравненіе относительно $\frac{dz}{dx}$; имѣемъ очевидно:

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(z),$$

гдѣ

$$\varphi(z) = a + bf\left(\frac{z + c}{\rho z + c'}\right).$$

Перемѣнныя раздѣляются:

$$\frac{dz}{\varphi(z)} = dx$$

и имѣемъ:

$$\int \frac{dz}{\varphi(z)} = x + C.$$

Вставляя вмѣсто z его значеніе, получаемъ общій интегралъ даннаго уравненія. Итакъ, уравненіе проинтегрировано и въ случаѣ

$$a'b - ab' = 0.$$

Однимъ изъ наиболѣе часто встрѣчающихся типовъ уравненій являются уравненія вида

$$M\,dx + N\,dy = 0,$$

гдѣ M и N суть линейные многочлены:

$$M = ax + by + c \qquad N = a'x + b'y + c',$$

т.е.

$$(ax + by + c)\,dx + (a'x + b'y + c')\,dy = 0.$$

Это уравненіе является частнымъ случаемъ предыдущаго разсмотрѣннаго типа.

П Р И М Ѣ Р Ъ 1.

$$(2y + x - 1)\,dx + (y - 2x - 1)\,dy = 0.$$

Полагаемъ:

$$y = \eta + k; \quad x = \xi + h; \quad dy = d\eta; \quad dx = d\xi;$$

$$[2\eta + \xi + (2k + h - 1)]d\xi + [\eta - 2\xi + (k - 2h - 1)]d\eta = 0;$$

$$2k + h - 1 = 0; \quad k - 2h - 1 = 0; \quad k = {}^3/5; \quad h = -{}^1/5.$$

Полагаемъ

$$\frac{\eta}{\xi} = u, \qquad \eta = \xi u,$$

$$(2u + 1)d\xi + (u - 2)(u\,d\xi + \xi\,du) = 0$$

или

$$(u^2 + 1)d\xi + \xi(u - 2)\,du = 0.$$

Перемѣнныя раздѣляются:

$$\frac{d\xi}{\xi} + \frac{(u - 2)du}{u^2 + 1} = 0; \qquad \lg\xi + {}^1/2\,\lg(u^2 + 1) - 2\,\mathrm{arctg}\,u = C.$$

Возвращаясь къ старымъ перемѣннымъ и переходя отъ логариѳмовъ къ числамъ, имѣемъ:

$$(x + {}^1/5)^2 + (y - {}^3/5)^2 = C' \cdot e^{4\,\mathrm{arc\,tg}\frac{y - \frac{3}{5}}{x + \frac{1}{5}}}$$

П Р И М Ѣ Р Ъ 2.

$$(2x + 3y + 2)dx + (4x + 6y + 3)dy = 0.$$

Полагая

$$2x + 3y = z,$$

имѣемъ:

$$(z + 2)dx + (2z + 3)\frac{dz - 2dx}{3} = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} = 2 - \frac{3(z + 2)}{2z + 3} = \frac{z}{2z + 3},$$

$$\frac{(2z + 3)dz}{z} = dx,$$

$$2z + 3\lg z = x + C,$$

или въ старыхъ перемѣнныхъ:

$$4x + 6y + 3\lg(2x + 3y) = x + C. \text{ или } x + 2y + \lg(2x+3y) = C'.$$

---

§ 4. ЛИНЕЙНЫЯ УРАВНЕНІЯ.

Линейнымъ уравненіемъ называется такое уравненіе, изъ котораго первая производная выражается линейно черезъ y. Общій видъ его

$$\frac{dy}{dx} = Py + Q, \qquad (1)$$

гдѣ P и Q суть какія угодно функціи x, или

$$P_0\frac{dy}{dx} + P_1 y + P_2 = 0,$$

гдѣ P_0, P_1, P_2 - функціи перемѣннаго x. Линейныя уравненія раздѣляются на однородныя и неоднородныя. Линейное уравненіе называется однороднымъ, когда P_2 или $Q = 0$; однородныя линейныя уравненія можно разсматривать какъ частный случай уравненій неоднородныхъ.

Линейныя уравненія сохраняютъ свою форму:

a) при любомъ преобразованіи независимаго перемѣннаго.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Введемъ вмѣсто x новое перемѣнное x', полагая:

$$x = \varphi(x'),$$

обратно

$$x' = \varphi_1(x), \qquad dx = \varphi'(x')\,dx'$$

Послѣ подстановки получимъ линейное уравненіе; дѣйствительно:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx'}\,\frac{1}{\varphi'(x')} \qquad \frac{dx'}{dx} = \frac{1}{\varphi'(x')}$$

и, слѣдовательно, имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx'} = P\varphi'.y + Q\varphi',$$

гдѣ $P\varphi'$, и $Q\varphi'$ - функціи перемѣннаго x'.

b) при линейномъ преобразованіи функціи y.

Введемъ вмѣсто y новое перемѣнное z, положивъ

$$y = \alpha z + \beta,$$

гдѣ α и β, какія угодно функціи x. Послѣ подстановки имѣемъ:

$$\alpha\frac{dz}{dx} + z\alpha' + \beta' = P\,(\alpha z + \beta) + Q$$

- уравненіе линейное.

Разсмотримъ однородное линейное уравненіе:

$$\frac{dy}{dx} = P.y.$$

Раздѣляя перемѣнныя, интегрируемъ и квадратурой найдемъ об - щій интегралъ:

$$\frac{dy}{y} = P.dx; \qquad lg\,y = \int P dx + lg\,C;$$

$$y = C.e^{\int P dx} \tag{2}$$

Таковъ ~~общій~~ интегралъ однороднаго линейнаго уравненія.

ПРИМѢРЪ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}; \qquad y = C.e^{\int \frac{dx}{x}} = Cx.$$

Предположимъ теперь, что мы нашли для однороднаго уравненія частное рѣшеніе

$$y_1 = \psi_1(x).$$

Легко видѣть, что общее рѣшеніе имѣетъ видъ:

$$y = Cy_1.$$

Въ самомъ дѣлѣ, общее рѣшеніе есть

$$y = A.e^{\int P dx} \tag{3}$$

Даемъ A нѣкоторое частное значеніе a:

$$A = a,$$

тогда получимъ частное рѣшеніе

$$y_1 = ae^{\int P dx} \tag{4}$$

Дѣля (3) на (4), найдемъ:

$$\frac{y}{y_1} = \frac{A}{a}; \qquad y = \frac{A}{a} y_1,$$

или полагая

$$\frac{A}{a} = C. \qquad y = Cy_1.$$

Предложеніе доказано. Можно этотъ результатъ доказать иначе.

Имѣемъ уравненіе

$$\frac{dy}{dx} = Py.$$

Пусть y_1 - частное рѣшеніе; тогда:

$$\frac{dy_1}{dx} = Py_1 .$$

Умножая 1-ое равенство на y_1 , а второе на y и вычитая одно изъ другого, найдемъ:

$$y_1 \frac{dy}{dx} - y\frac{dy_1}{dx} = 0 .$$

Дѣля на y_1^2 , имѣемъ:

$$\frac{y_1 \frac{dy}{dx} - y\frac{dy_1}{dx}}{y_1^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = 0.$$

Если производная равна 0, то сама дробь равна постоянному числу, слѣдовательно:

$$y = y_1 C.$$

Переходимъ теперь къ неоднороднымъ линейнымъ уравненіямъ. Неоднородныя линейныя уравненія имѣютъ видъ:

$$\frac{dy}{dx} = Py + Q ,$$

гдѣ $Q \neq 0$. Наряду съ неоднороднымъ уравненіемъ разсмотримъ и однородное, получающееся, если сдѣлаемъ $Q = 0$. Общій интегралъ однороднаго уравненія

$$y = C.e^{\int P dx} .$$

Посмотримъ, нельзя ли для общаго рѣшенія неоднороднаго уравненія сохранить такое же выраженіе по виду, какъ и для однороднаго уравненія. Этого мы достигнемъ методомъ варіаціи или измѣненія постояннаго. Методъ состоитъ въ томъ, что C считаемъ функціей x и опредѣляемъ его такъ, чтобы y удовлетворяло неоднородному уравненію:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}.e^{\int P dx} + Ce^{\int P dx}.P = P.C.e^{\int P dx} + Q;$$

получаемъ:

$$\frac{dC}{dx} = Qe^{-\int P dx} .$$

Изъ этого условія опредѣлимъ С при помощи квадратуры:

$$C = \int Q.e^{-\int P dx} dx + c.$$

Найденное значеніе С вставимъ въ формулу для у; получаемъ:

$$y = e^{\int P dx}\left[\int Q e^{-\int P dx} dx + c\right] =$$

$$= c e^{\int P dx} + e^{\int P dx}\int Q e^{-\int P dx} dx \qquad (5),$$

гдѣ с - произвольное постоянное. Давая частныя значенія с, найдемъ частныя рѣшенія неоднороднаго линейнаго уравненія. Методъ варіаціи въ сущности приводится къ преобразованію зависимаго перемѣннаго: мы вводимъ новое перемѣнное z, полагая:

$$y = z e^{\int P dx};$$

внося въ данное неоднородное уравненіе, получаемъ преобразованное уравненіе:

$$\frac{dz}{dx} = Q e^{-\int P dx},$$

общее рѣшеніе котораго есть:

$$z = \int Q e^{-\int P dx} dx + c,$$

а слѣдовательно формула (5) даетъ общее рѣшеніе первоначальнаго уравненія. Въ предыдущемъ изложеніи z было только обозначено черезъ С.

Мы пришли къ слѣдующему виду общаго рѣшенія дифференціальнаго линейнаго уравненія:

$$y = C\varphi(x) + \psi(x) \qquad (6)$$

гдѣ С - произвольное постоянное. Можно доказать обратно, что выраженіе (6) есть общее рѣшеніе линейнаго дифференціальнаго уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя равенство (6):

$$\frac{dy}{dx} = C\varphi'(x) + \psi'(x)$$

и исключая C изъ двухъ полученныхъ равенствъ, имѣемъ:

$$\varphi(x)\frac{dy}{dx} - y\varphi'(x) = \varphi\psi' - \psi\varphi'.$$

Полученное уравненіе есть линейное дифференціальное уравненіе. Предположимъ теперь, что мы нашли два частныхъ рѣшенія линейнаго уравненія y_1 и y_2 ; - докажемъ, что, зная ихъ, можемъ найти общее рѣшеніе безъ всякихъ интеграцій.

Вводимъ новую функцію z, полагая:

$$y = y_1 + z ;$$

вставляя въ уравненіе (1), получаемъ: $\frac{dy}{dx} = Py + Q$;

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} = Py_1 + Q + Pz ,$$

или

$$\frac{dz}{dx} = Pz$$

- уравненіе однородное. Для этого однороднаго уравненія мы знаемъ частное рѣшеніе

$y = y_1 + z$; $y_2 = y_1 + z$

$$z_1 = y_2 - y_1 ,$$

которое получится, если положимъ

$$y = y_2$$

Общее рѣшеніе однороднаго уравненія будетъ по предыдущему:

$$z = C(y_2 - y_1),$$

слѣдовательно

$$y = y_1 + C(y_2 - y_1).$$

Таково общее рѣшеніе неоднороднаго дифференціальнаго уравненія, когда даны два частныхъ рѣшенія. Преобразуя это равенство, имѣемъ еще:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = C \qquad (7)$$

При произвольномъ значенiи постояннаго C равенство (7) есть общiй интегралъ. Если мы y замѣнимъ какимъ-нибудь частнымъ рѣшенiемъ y_3, то C принимаетъ опредѣленное значенiе, и мы имѣемъ соотношенiе:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \text{const.} \qquad (8)$$

между тремя любыми рѣшенiями линейнаго уравненiя. Если намъ извѣстно только одно частное рѣшенiе y_1 уравненiя (1), то, полагая

$$y = y_1 + z$$

получимъ для z однородное уравненiе:

$$\frac{dz}{dx} = Pz,$$

которое интегрируется одной квадратурой, и, слѣдовательно, общее рѣшенiе даннаго уравненiя (1) найдется одной квадратурой.

П Р И М Ѣ Р Ъ: $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x.$$

Интегрируя однородное уравненiе

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

$\frac{dy}{dx} = C + \frac{dC}{dx}x$

имѣемъ: $$y = Cx \quad \text{(см. выше).}$$

Считая C функцiей x и вставляя въ данное уравненiе, имѣемъ:

$$x\frac{dC}{dx} = x; \quad \frac{dC}{dx} = 1; \quad C = x + c,$$

и слѣдовательно

$$y = x^2 + cx.$$

полагая с = 0 и с = 1, имѣемъ два частныхъ рѣшенія:

$$y_1 = x^2, \qquad y_2 = x^2 + x.$$

Если бы мы ихъ знали, то общій интегралъ нашли бы непосредственно по (7):

$$\frac{y - x^2}{x} = C.$$

§ 5. УРАВНЕНІЕ БЕРНУЛЛИ.

Разсмотримъ дифференціальное уравненіе

$$\frac{dy}{dx} = Py + Qy^n,$$

гдѣ P и Q - функціи x. Уравненія такого типа носятъ названіе уравненій Бернулли и легко приводятся къ линейнымъ уравненіямъ.

Умножимъ все уравненіе на y^{-n}; получаемъ:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} = Py^{+1-n} + Q.$$

Положимъ

$$y^{+1-n} = z$$

и замѣчая, что

$$\frac{dz}{dx} = (-n + 1)\, y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

представимъ данное уравненіе въ видѣ:

$$Pz + Q = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{1}{(-n+1)}.$$

Для перемѣннаго z имѣемъ очевидно линейное уравненіе.

ПРИМѢРЪ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^2y^2;$$

это уравненіе Бернулли; $n = 2$. Полагаемъ

$$y = z^{-1} ;$$

дѣлимъ на y^2 :

$$-\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} z + x^2 ;$$

уравненіе линейно. Интегрируя однородное уравненіе

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x} ,$$

находимъ:

$$z = Ce^{-\int \frac{dx}{x}} = \frac{C}{x} .$$

Вставляя значеніе z въ прежнее ур-іе въ предположеніи, что C - функція x, получаемъ:

$$-\frac{1}{x} \cdot \frac{dC}{dx} = x^2 ; \qquad \frac{dC}{dx} = -x^3 ;$$

слѣдовательно,

$$C = -\frac{x^4}{4} + c$$

$$z = -\frac{x^3}{4} + \frac{c}{x} ; \qquad y = \frac{1}{-\frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}} = \frac{4x}{4c - x^4} .$$

---

§ 6. УРАВНЕНІЕ RICCATI.

Ближайшимъ (за линейнымъ) по сложности типомъ уравненій являются уравненія вида:

$$\frac{dy}{dx} = Py^2 + Qy + R$$

гдѣ P, Q, R - функціи x. Уравненія такого вида называются уравненіями Riccati. Докажемъ, что уравненія Riccati, какъ и линейныя, сохраняютъ свой видъ при нѣкоторыхъ преобразованіяхъ:

1) Любое преобразованіе аргумента.

Измѣнимъ независимое перемѣнное, полагая

$$x = \varphi(x').$$

Дифференцируемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dx} = \frac{dy}{dx'} \cdot \frac{1}{\varphi'(x')}.$$

Отсюда:

$$Py^2 + Qy + \mathfrak{R} = \frac{dy}{dx'} \cdot \frac{1}{\varphi'(x')};$$

$$\frac{dy}{dx'} = Py^2\ \varphi'(x') + Qy \cdot \varphi'(x') + \mathfrak{R} \cdot \varphi'(x').$$

Это уравненіе опять имѣетъ видъ уравненія Riccati.

2) **Дробно-линейное преобразованіе перемѣннаго y. Положимъ** y равнымъ дробному выраженію $y = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ (2)

гдѣ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - какія угодно функціи x. Отсюда обратно и z выразится черезъ y линейно:

$$z = \frac{-\delta y + \beta}{\gamma y - \alpha}.$$

Дифференцируя, имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\gamma z + \delta)(\alpha \frac{dz}{dx} + \alpha' z + \beta') - (\alpha z + \beta)(\gamma \frac{dz}{dx} + \gamma' z + \delta')}{(\gamma z + \delta)^2} =$$

$$\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot \frac{dz}{dx} + a_0 z^2 + a_1 z + a_2}{(\gamma z + \delta)^2}$$

гдѣ a_0, a_1, a_2 составлены изъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$.

Приравнивая это выраженіе правой части даннаго уравненія Riccati, получимъ, по умноженію на $(\gamma z + \delta)^2$, очевидно, соотношеніе вида $\dfrac{dz}{dx} = P_1 z^2 + Q_1 z + \mathfrak{R}_1$, гдѣ P_1, Q_1, R_1 - функціи х-а. Получили для z опять уравненіе типа Riccati. Можно было бы комбинировать сразу оба преобразованія, и мы получили бы опять уравненіе вида Riccati.

Займемся теперь возможными упрощеніями уравненія Riccati.

1) Коэффиціентъ P можно сдѣлать какой угодно функціей, въ частности равнымъ какому-нибудь постоянному, между прочимъ равнымъ ± 1. Докажемъ это. Положимъ, что

$$y = z \cdot \omega(x).$$

Эта замѣна является частнымъ случаемъ преобразованія (2). Вставимъ выраженіе y въ данное уравненіе:

$$\omega(x)\frac{dz}{dx} + \omega'(x)z = P.\omega^2(x)z^2 + Q\omega(x)z + R$$

$$\frac{dz}{dx} = P.\omega(x)\cdot z^2 + \left(Q - \frac{\omega'}{\omega}\right)\cdot z + \frac{R}{\omega}.$$

Коэффиціентъ при P можно сдѣлать теперь какимъ угодно вслѣдствіе произвольности функціи $\omega(x)$. Можно въ частности положить

$$\omega(x).P = \pm 1, \text{ т.е. } \omega(x) = \frac{\pm 1}{P}.$$

Выбирая $\omega(x)$ такимъ, мы въ новомъ уравненіи получимъ коэффиціентъ при z^2 равнымъ ± 1.

2) Не мѣняя коэффиціента P, можно Q сдѣлать равнымъ 0. Положимъ

$$y = z + \omega(x)$$

и вставляемъ въ данное уравненіе:

$$\frac{dz}{dx} + \omega'(x) = Pz^2 + (2P\omega + Q)z + P\omega^2 + Q\omega + R;$$

вычтемъ изъ обѣихъ частей по $\omega'(x)$:

$$\frac{dz}{dx} = Pz^2 + (2P.\omega(x) + Q)z + P.\omega^2(x) + Q\omega(x) + R - \omega'(x).$$

Получаемъ уравненіе Riccati. Коэффиціентъ при z сдѣлаемъ равнымъ нулю, полагая

$$2P\,\omega(x) + Q = 0.$$

Отсюда

$$\omega(x) = -\frac{Q}{2P}.$$

Слѣдовательно, полагая y равнымъ

$$y = z + \omega(x) = z - \frac{Q}{2P},$$

мы достигаемъ того, что въ преобразованномъ уравненіи Q будетъ нулемъ. Въ этомъ преобразованіи мы не измѣнили величины P. Слѣдовательно, производя одновременно два преобразованія, мы уравненіе приведемъ къ такому виду:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + X \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} + y^2 = X,$$

гдѣ X - функція x.

Для всѣхъ предшествующихъ типовъ уравненій мы находили общій интегралъ квадратурами; для уравненій Riccati этого вообще сдѣлать нельзя. Докажемъ теперь такое положеніе: зная одно частное рѣшеніе уравненія Riccati, можно привести его къ линейному уравненію и слѣдовательно проинтегрировать двумя квадратурами. Пусть дано частное рѣшеніе y_1 уравненія Riccati, полагаемъ:

$$y = y_1 + z;$$

послѣ преобразованія, по предыдущему, получимъ уравненіе Riccati:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dy_1}{dx} = Pz^2 + (2Py_1 + Q)z + Py_1^2 + Qy_1 + R;$$

такъ какъ:

$$\frac{dy_1}{dx} = Py_1^2 + Qy_1 + R,$$

то можно произвести сокращеніе, и для z получимъ уравненіе Riccati:

$$\frac{dz}{dx} = Pz^2 + (2Py_1 + Q)z ;$$

здѣсь $R = 0$. Слѣдовательно, здѣсь мы имѣемъ частный случай ур-ія Бернулли: полагаемъ $z = \frac{1}{u}$ и слѣдовательно

$$y = y_1 + \frac{1}{u} .$$

Тогда согласно теоріи уравненія Бернулли, при помощи этой подстановки уравненіе Riccati обращается въ линейное. Посмотримъ, какого типа будетъ общее рѣшеніе уравненія Riccati. Согласно результатамъ теоріи линейныхъ уравненій

$$u = C\varphi(x) + \psi(x),$$

слѣдовательно

$$y = y_1 + \frac{1}{C\varphi(x) + \psi(x)} = \frac{y_1 C.\varphi(x) + y_1\psi(x) + 1}{C\varphi(x) + \psi(x)} .$$

Полученное выраженіе можно написать такъ:

$$y = \frac{f_1(x).C + f_2(x)}{f_3(x).C + f_4(x)} . \qquad (3)$$

Такого типа будетъ полученное общее рѣшеніе уравненія Riccati - оно дробно-линейное относительно произвольнаго постояннаго C. Докажемъ теперь обратное положеніе: всякое дробно-линейное относительно постояннаго выраженія есть общее рѣшеніе уравненія Riccatti. Такъ какъ y выражается линейно черезъ C, то обратно, C можно выразить линейно черезъ y, и изъ равенства (3) имѣемъ:

$$C = \frac{\varphi_1(x).y + \varphi_2(x)}{\varphi_3(x).y + \varphi_4(x)} \qquad (4),$$

гдѣ

$$\varphi_1 = -f_4, \qquad \varphi_2 = f_2, \qquad \varphi_3 = f_3, \qquad \varphi_4 = -f_1 .$$

Въ такой формѣ напишется общій интегралъ уравненія Riccati. Докажемъ теперь обратное положеніе. Для этого дифференцируемъ соотношеніе (4) и отбрасываемъ знаменатель; имѣемъ:

$$(\varphi_3 y + \varphi_4)(\varphi_1 \frac{dy}{dx} + \varphi_1' y + \varphi_2') - (\varphi_1 y + \varphi_2)(\varphi_3 \frac{dy}{dx} + \varphi_3' y + \varphi_4') = 0$$

Собирая члены съ производной, имѣемъ:

$$(\varphi_1 \varphi_4 - \varphi_2 \varphi_3) \frac{dy}{dx} + A_0 y^2 + A_1 y + A_2 = 0,$$

гдѣ A_0, A_1, A_2 - функціи x. Дѣля все уравненіе на коэфф-тъ при $\frac{dy}{dx}$, получаемъ дифференціальное уравненіе типа Riccati.

Пусть извѣстно еще одно частное рѣшеніе y_2 уравненія Riccati. мы имѣли

$$y = y_1 + z; \qquad z = \frac{1}{u}; \qquad y = y_1 + \frac{1}{u},$$

откуда

$$u = \frac{1}{y - y_1};$$

подставляя на мѣсто y 2-ое рѣшеніе y_2, находимъ:

$$u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}.$$

u_1 есть частное рѣшеніе линейнаго уравненія, а если намъ извѣстно одно частное рѣшеніе линейнаго уравненія, то общее рѣшеніе найдется одною квадратурой. Итакъ, зная два частныхъ рѣшенія уравненія Riccati, находимъ общій интегралъ одною квадратурою. Если же даны 3 частныхъ рѣшенія y_1, y_2, y_3 уравненія Riccati, то общее рѣшеніе найдется безъ помощи квадратуръ. Дѣйствительно, имѣемъ:

$$u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1} \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{1}{y_3 - y_1},$$

~~подставляя~~

а зная 2 частныхъ рѣшенія u_1 и u_2 линейнаго уравненія, найдемъ общій интегралъ безъ помощи квадратуръ. Общій интегралъ напишется, какъ извѣстно, такъ:

$$\frac{u - u_1}{u_2 - u_1} = C.$$

Замѣняя u, u_1 и u_2 ихъ выраженіями черезъ y, y_1, y_2, y_3, получаемъ соотношеніе:

$$\frac{\dfrac{1}{y - y_1} - \dfrac{1}{y_2 - y_1}}{\dfrac{1}{y_3 - y_1} - \dfrac{1}{y_2 - y_1}} = C.$$

Приводя къ общему знаменателю, найдемъ:

$$\frac{(y_2 - y)(y_3 - y_1)(y_2 - y_1)}{(y - y_1)(y_2 - y_1)(y_2 - y_3)} = C.$$

Преобразуя это соотношеніе, имѣемъ:

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = C$$

или:

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C' \qquad (5)$$

Лѣвая часть называется ангармоническимъ отношеніемъ четырехъ элементовъ y, y_1, y_2, y_3; y есть какое-либо рѣшеніе уравненія Riccati. Если C даемъ какое-нибудь частное значеніе, получаемъ различныя частныя рѣшенія. Отсюда теорема: ангармоническое отношеніе 4-хъ рѣшеній уравненія Riccati равно постоянному. Это положеніе можно выразить еще такъ, полагая $y = y_4$:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} = \text{const.} \qquad (6)$$

Частный видъ уравненія Riccati:

$$y' + ay^2 = bx^m,$$

гдѣ a и b постоянныя числа, разсматривалъ самъ Riccati.

§7. ТЕОРІЯ ИНТЕГРИРУЮЩАГО МНОЖИТЕЛЯ.

Мы можемъ всякое уравненіе 1-го порядка и 1-ой степени относительно производной представить въ слѣдующемъ видѣ.

$$M dx + N dy = 0 \qquad (1)$$

гдѣ M и N – функціи x и y. Начнемъ съ частнаго случая этихъ уравненій. Положимъ, что

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad N = \frac{\partial u}{\partial y},$$

при чемъ u есть функція x, y:

$$u = u(x, y).$$

Если для M и N выполняются вышенаписанныя равенства, то будемъ имѣть:

$$M dx + N dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = du,$$

т.е. будемъ имѣть полный дифференціалъ функціи u двухъ перемѣнныхъ и уравненіе приметъ видъ

$$du = 0,$$

откуда общій интегралъ его есть $u = C$. Дѣйствительно, первоначальное дифференціальное уравненіе должно удовлетворяться, если бы мы вставили вмѣсто y рѣшеніе уравненія. Когда мы вставимъ въ уравненіе $du = 0$ вмѣсто y его выраженіе $y = \varphi(x)$, тогда получимъ:

$$d[u\{(x, \varphi(x)\}] = 0,$$

т.е. дифференціалъ функціи $u(x, \varphi(x))$ перемѣннаго x долженъ равняться нулю, а это можетъ быть тогда, когда функція, отъ которой берется дифференціалъ, есть постоянное, т.е.

$$u\{(x, \varphi(x)\} = C.$$

Такимъ образомъ всякое рѣшеніе у уравненія должно удовлетворять соотношенію, которое было написано выше:

$$u(x, \ y) = C.$$

Если отсюда опредѣлить функцію у и вставить въ дифференціальное уравненіе, то получимъ тождество, и соотношеніе это есть общій интегралъ. Итакъ, мы указали методъ интеграціи уравненія (1) для этого частнаго случая. Возьмемъ примѣръ на его примѣненіе; пусть имѣемъ:

$$x\,dy + y\,dx = 0; \qquad M = \frac{\partial(xy)}{\partial x} \;; \quad N = \frac{\partial(xy)}{\partial y}\,,$$

слѣдовательно, $u = x.y$ и уравненіе перепишется такъ:

$$d(x.y) = 0.$$

Общій интегралъ

$$x.y = C, \quad \text{откуда } y = \frac{C}{x}\,.$$

Посмотримъ теперь, когда наше уравненіе будетъ уравненіемъ указаннаго типа (т.е. когда лѣвая часть уравненія будетъ точнымъ дифференціаломъ функціи 2-хъ перемѣнныхъ). Очевидно, что въ этомъ случаѣ должны быть равны производныя:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

(такъ какъ, если

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}\,, \quad \text{а } N = \frac{\partial u}{\partial y}\,, \quad \text{то } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x})$$

и обратно, M будетъ производной u по x и N – u по y, если существуетъ равенство (2). Такимъ образомъ, если условіе (2) выполнено, то лѣвая часть (1) точный дифференціалъ и уравненіе интегрируется квадратурами, такъ какъ функція u по дан -

ному дифференціалу du находится, какъ извѣстно, квадратурами[x)]. Въ общемъ случаѣ условіе (2) не выполняется. Посмотримъ, нельзя ли въ этомъ случаѣ замѣнить данное уравненіе другимъ, ему равносильнымъ, но для котораго бы выполнялось условіе (2). Для этого умножимъ его на нѣкоторый факторъ μ (гдѣ μ - функція x , y):

$$\mu Mdx + \mu Ndy = 0.$$

Полученное уравненіе будетъ равносильно данному, такъ какъ общій интегралъ послѣдняго уравненія будетъ удовлетворять и первоначальному, равенство же $\mu = 0$ можетъ дать только частный интегралъ. Положимъ, что μ выбранъ такъ, что для преобразованнаго уравненія выполняется условіе (2), т.е.

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

Тогда лѣвая часть преобразованнаго уравненія будетъ точнымъ дифференціаломъ, и уравненіе интегрируется квадратурами. Этотъ факторъ μ есть такъ называемый <u>интегрирующій факторъ</u>. Докажемъ, что для каждаго дифференціальнаго уравненія существуетъ этотъ факторъ. Впослѣдствіи мы докажемъ, что для каждаго дифференціальнаго уравненія существуетъ общій интегралъ. При доказательствѣ мы будемъ теперь пользоваться только что упомянутымъ положеніемъ, какъ уже доказанный теоремой. Итакъ, пусть для даннаго дифференціальнаго уравненія

---

x) $du = Mdx + Ndy;$ $\quad u = \int Mdx + \varphi(y);$ $\quad \varphi'(y) = N - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx;$

$$\varphi(y) = \int \left\{ N - \int \frac{\partial M}{\partial y} \cdot dx \right\} \partial y.$$

существуетъ общій интегралъ:

$$\varphi(x, y, C) = 0.$$

Мы можемъ разрѣшить его относительно постоянной C, т.е. взять въ видѣ

$$u(x, y) = C. \tag{3}$$

Продифференцируемъ (3):

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy = 0.$$

Откуда:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$$

Опредѣливъ производную и вставивъ ее въ данное дифференціальное уравненіе, мы должны удовлетворить послѣднему, т.е. должны имѣть:

$$-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{M}{N}$$

Въ это равенство C не входитъ, но оно должно удовлетворяться функціей $\underline{y}$ изъ (3) при всякомъ C, стало быть оно должно удовлетворяться тождественно (такъ какъ изъ 3-го уравненія оно не слѣдуетъ). Мы его напишемъ такъ:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{N}$$

Тогда также можемъ сказать, что лѣвая и правая части одна и та же функція x и y (т.е. это тождество). Назовемъ ее черезъ $\mu(x,y)$; тогда мы можемъ утверждать, что μ и есть интегрирующій факторъ. Дѣйствительно:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu M, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \mu N.$$

Замѣняя данное дифференціальное уравненіе другимъ, полученнымъ изъ него путемъ умноженія на μ, будемъ имѣть:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = 0.$$

слѣдовательно, μ - интегрирующій факторъ. Итакъ, мы доказали что для всякаго уравненія 1-го порядка существуетъ интегрирующій факторъ.

П Р И М Ѣ Р Ъ: $\qquad ydx - xdy = 0.$

Условіе (2) здѣсь не выполняется, соотвѣтствующія производныя коэффиціентовъ при дифференціалахъ не равны между собой, такъ какъ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1.$$

Мы должны найти интегрирующій факторъ, на него помножить обѣ части уравненія. Въ данномъ случаѣ этотъ факторъ есть $\mu = \frac{1}{x^2}$;

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right).$$

Найдя интегрирующій факторъ, мы нашли общій интегралъ; онъ будетъ

$$\frac{y}{x} = C.$$

Мы показали, что для всякаго уравненія 1-го порядка существуетъ интегрирующій факторъ.

Теперь докажемъ, что такихъ факторовъ для каждаго уравненія существуетъ безчисленное множество. Положимъ, что мы нашли одинъ такой факторъ; онъ есть μ. Слѣдовательно, по умноженіи на него мы будемъ имѣть такое тождество:

$$\mu M dx + \mu N dy = du.$$

Тогда интегрирующимъ факторомъ будетъ также $\mu_1 = \mu f(u)$, гдѣ $f(u)$ - какая угодно функція u. Чтобы доказать это положеніе, мы перепишемъ выраженіе новаго фактора такъ:

$$\mu_1 = \mu \varphi'(u),$$

гдѣ $\varphi'(u)$ - производная новой функціи, которую мы найдемъ, зная f, слѣдующимъ образомъ:

$$\varphi(u) = \int f(u)du \quad .$$

Докажемъ, что μ_1- интегрирующій факторъ. Умноживъ на него данное уравненіе, мы получимъ:

$$\mu_1(Mdx + Ndy) = \varphi'(u)\mu(Mdx + Ndy) = \varphi'(u).du = d[\varphi(u)];$$

слѣдовательно, μ_1- тоже интегрирующій факторъ. Положимъ, что имѣемъ уравненіе

$$ydx - xdy = 0;$$

какъ видѣли, интегрирующій факторъ $\mu = \frac{1}{x^2}$; послѣ умноженія на него

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right).$$

Вмѣсто фактора μ мы можемъ взять новый факторъ μ_1, получаемый изъ первоначальнаго умноженіемъ его на произвольную функцію u (въ данномъ случаѣ $u = \frac{y}{x}$), напримѣръ на $\frac{x}{y}$; мы беремъ тогда:

$$\mu_1 = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{y} = \frac{1}{xy}$$

По умноженіи на μ_1 мы придемъ къ желаемому результату. Дѣйствительно, мы будемъ имѣть:

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = d(lg x - lg y).$$

Измѣняя функцію f, мы получимъ безчисленное множество интегрирующихъ факторовъ. Докажемъ теперь обратно, что если μ одинъ факторъ, μ_1 - другой, то отношеніе $\frac{\mu}{\mu_1}$ равно функціи отъ u гдѣ u — та самая функція, полный дифференціалъ которой получается въ лѣвой части уравненія, послѣ умноженія его на μ.

Пусть мы имѣемъ:

$$\mu(Mdx + Ndy) = du \qquad (4)$$

$$\mu_1(Mdx + Ndy) = dv \qquad (5)$$

Отсюда слѣдуетъ тождество:

$$\frac{1}{\mu}du = \frac{1}{\mu_1}dv \text{ или } \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right).$$

Коэффиціенты при dx и dy слѣва и справа должны быть равны, т.е. мы должны имѣть:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\mu_1}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu_1}\cdot\frac{\partial v}{\partial y},$$

откуда

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial y}},$$

или въ видѣ равенства нулю детерминанта

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Детерминантъ такого состава носитъ названіе опредѣлителя Якоби. Равенство его нулю показываетъ, что между u и v есть соотношеніе, т.е. что v есть функція отъ одной u;

итакъ

$$v = \varphi(u).$$

Разъ мы доказали, что $v = \varphi(u)$, то имѣемъ:

$$dv = \varphi'(u)du$$

и, дѣля равенство (5) на (4), будемъ имѣть:

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \varphi'(u).$$

Такимъ образомъ наша теорема доказана. Выведемъ изъ нея одно слѣдствіе. Если мы напишемъ, что $\varphi'(u) = C$, то тогда и $u = \text{const}$. И обратно, если $u = \text{const.}$, то $\varphi'(u) = C$. Такимъ образомъ два этихъ равенства равносильны. Но второе изъ нихъ даетъ общій интегралъ, первое же имѣетъ видъ $\frac{\mu_1}{\mu} = C$, а потому, **приравнявъ отношеніе двухъ интегрирующихъ факторовъ произвольному постоянному, мы получимъ общій интегралъ.** Въ нашемъ примѣрѣ мы нашли $\mu = \frac{1}{x^2}$ и $\mu_1 = \frac{1}{x.y}$. Раздѣливъ 2-е на 1-е, найдемъ $\frac{x}{y} = C$.

Приступаемъ теперь къ изложенію способа, которымъ можно найти интегрирующій множитель для даннаго дифференціальнаго уравненія. Предположимъ, что намъ дано дифференціальное уравненіе, для котораго μ интегрирующій факторъ, тогда:

$$\mu M = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \mu N = \frac{\partial u}{\partial y};$$

или, если продифференцировать эти соотношенія, первое по y, второе по x, получимъ слѣдующее равенство:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Это условіе необходимое и достаточное для того, чтобы μ было интегрирующимъ факторомъ. Напишемъ его въ раскрытой формѣ;

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$

или въ другой формѣ, если перенесемъ члены съ μ въ одну сторону:

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu \quad (I)$$

Это и есть уравненіе, которому долженъ удовлетворять интегрирующій факторъ. Здѣсь M и N - данныя функціи x, y, а μ - неизвѣстная функція. Итакъ, для опредѣленія интегрирующаго фактора мы получили дифференціальное уравненіе съ частными производными. Такимъ образомъ, изысканіе его приводитъ къ задачѣ болѣе сложной, чѣмъ задача интегрированія даннаго дифференціальнаго уравненія, такъ какъ въ уравненіе (I) входятъ частныя производныя. Чтобы найти μ, надо найти рѣшеніе такого уравненія. Это (I) уравненіе можно написать въ болѣе удобномъ видѣ. Раздѣлимъ его на μ, тогда получимъ:

$$N \frac{\partial \lg \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \lg \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad (I')$$

Здѣсь за неизвѣстную функцію можно считать $\lg \mu$, при чемъ въ уравненіе (I') также входятъ частныя производныя этой функціи и съ этой стороны дѣло не упростилось. Но уравненіе (I') проще чѣмъ (I) тѣмъ, что въ него не входитъ сама неизвѣстная функція, а входятъ только ея производныя. Для нашей цѣли достаточно найти какое-либо частное рѣшеніе μ уравненія (I) или (I'). Дѣйствительно, если мы найдемъ такое μ, то умножая данное дифференціальное уравненіе (1) на него, мы квадратурами находимъ функцію u, а затѣмъ найдемъ и общій интегралъ $u = C$ (приравнявъ найденную функцію постоянному C). Такимъ образомъ, если мы нашли какое-нибудь рѣшеніе уравненія (I'), то общій интегралъ даннаго дифференціальнаго уравненія найдется квадратурами. Для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ (когда M и N суть функціи опредѣленнаго частнаго вида) можно найти рѣшеніе уравненія (I'), а слѣдовательно довести до конца и данную задачу. Возможно обратно дать функцію μ, а затѣмъ смотрѣть, какимъ условіямъ должны удовлетворять M и N, чтобы уравненіе (1) допускало μ интегрирующимъ факторомъ. При этомъ мы будемъ слѣдовательно искать тѣ уравненія, которыя имѣютъ интегрирующій множитель даннаго вида. Посмотримъ, какъ это можно сдѣлать. Очевидно, мы должны данное намъ μ вставить въ уравненіе (I'), а затѣмъ найти такія M и N, для которыхъ это уравненіе бы удовлетворялось. Пусть, напримѣръ, факторъ μ зависитъ только отъ x-а, а отъ y-ка не зависитъ, т.е.

$$\mu = f(x).$$

Если μ - функція x, то

$$\frac{\partial \lg \mu}{\partial y} = 0;$$

частная же производная

$$\frac{\partial \lg \mu}{\partial x} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \varphi(x)$$

будетъ функціей только x-а. Вставляя въ уравненіе (I'), получимъ:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \varphi(x) \qquad (6)$$

Для того, чтобы дифференціальное уравненіе допускало интегрирующій множитель μ, зависящій отъ x, необходимо и достаточно, чтобы лѣвая часть (6) была функціей только x. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$\varphi(x) = \frac{d\lg\mu}{dx}; \qquad \lg\mu = \int\varphi(x)dx .$$

откуда

$$\mu = e^{\int\varphi(x)dx}$$

т.е. функція только x-а. Между M и N, получилось только одно соотношеніе (6), слѣдовательно одно изъ нихъ, M или N, можетъ быть взято произвольно. Мы имѣемъ:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = N\varphi(x) + \frac{\partial N}{\partial x} .$$

Дадимъ N какое-нибудь значеніе, тогда

$$M = \int\left\{N\varphi(x) + \frac{\partial N}{\partial x}\right\}dy .$$

Измѣняя видъ N, мы будемъ получать различныя функціи M и слѣдовательно различныя уравненія (1). Ограничимся частнымъ случаемъ, предположивъ, что коэффиціентъ при дифференціалѣ dy, т.е. N = 1; къ такому виду всегда можно привести каждое уравненіе, раздѣляя его N. Полагая N = 1, получимъ:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \varphi(x).$$

Отсюда

$$M = \varphi(x).y + \psi(x).$$

Для уравненія съ такимъ M и N существуетъ интегрирующій факторъ, зависящій только отъ x. Посмотримъ, какое получится тогда дифференціальное уравненіе. Легко видѣть, что оно будетъ линейное; на самомъ дѣлѣ:

$$\frac{dy}{dx} + \varphi(x)y + \psi(x) = 0.$$

Или, измѣняя обозначенія:

$$\frac{dy}{dx} + P.y + Q = 0.$$

Соотвѣтствующій интегрирующій факторъ $\mu = e^{\int Pdx}$.

Мы получили новый методъ интеграціи линейнаго уравненія. Примѣнимъ его къ уравненію;

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} + 2x^2 = 0.$$

Такъ какъ въ этомъ уравненіи коэффиціентъ P равенъ $\frac{1}{x}$, то интегрирующій факторъ

$$\mu = e^{\int\frac{dx}{x}} \quad ;$$

постоянное интеграціи можно взять какое угодно, а потому возьмемъ просто

$$\int\frac{dx}{x} = lg\,x.$$

Тогда $\mu = x$. Умножаемъ на этотъ факторъ данное уравненіе; получаемъ

$$x dy + (y + 2x^3)\cdot dx = 0 .$$

Лѣвая часть, какъ слѣдуетъ изъ общей теоріи, есть полный диффе - ренціалъ нѣкоторой функціи. Ее найдемъ двумя квадратурами. Интегрируя коэффиціентъ при dy по y, найдемъ функцію

$$u = xy + \mathcal{F}(x).$$

($\mathcal{F}(x)$ - постоянная интеграціи). $\mathcal{F}(x)$ надо выбрать такъ, чтобы производная u по x равнялась коэффиціенту при dx. Дифференцируемъ и приравниваемъ, тогда:

$$y + \mathcal{F}'(x) = y + 2x^3.$$

функцію $\mathcal{F}(x)$ найдемъ квадратурой. Такимъ образомъ мы найдемъ u. Приравнявъ его С, получимъ общій интегралъ даннаго уравненія:

$$xy + \frac{x^4}{4} = C.$$

Разсмотримъ теперь однородное уравненіе, т.е. предположимъ, что N и M однородны, измѣренія m. Тогда функціи M и N можно представить въ видѣ произведенія x^m на нѣкоторую функцію отношенія $\frac{y}{x}$. Сдѣлаемъ N = 1, для чего уравненіе раздѣлимъ на N или иначе разрѣшимъ его относительно $\frac{dy}{dx}$; тогда будемъ имѣть:

$$\frac{dy}{dx} = -\varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

x^m сократится. Итакъ, вмѣсто начальнаго будемъ имѣть ур-іе:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) dx + dy = 0.$$

Для уравненія въ этой формѣ будемъ подыскивать интегрирующій факторъ. Чтобы получить его, мы должны вставить соотвѣтствующіе коэффиціенты M и N въ (I'):

$$\frac{\partial lg\mu}{\partial x} - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial lg\mu}{\partial y} = \frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Можно утверждать, что этому уравненію удовлетворяетъ μ - однородная функція, т.е. удовлетворяетъ:

$$\mu = x^{\sigma}\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

гдѣ σ - измѣреніе функціи μ. Прологариѳмировавъ, имѣемъ:

$$lg\mu = \sigma\, lg x + lg\psi.$$

Обозначимъ для краткости $lg\psi$ черезъ $\omega\left(\frac{y}{x}\right)$.

Взявъ частныя производныя отъ $lg\mu$ по x и y, вставимъ ихъ въ уравненіе (I'):

$$\frac{\sigma}{x} - \omega'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2} - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\omega'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Умножимъ послѣднее равенство на x и соберемъ члены 2-й и 3-ій вмѣстѣ:

$$\sigma - \omega'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left\{\frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right\} = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Опредѣляя ω', получимъ:

$$\omega'\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sigma - \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)}{\frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Задача наша разрѣшена. Дѣйствительно, справа стоитъ нѣкоторая функція отношенія $\frac{y}{x}$. Если мы для краткости назовемъ его черезъ u, т.е. положимъ $\frac{y}{x} = u$, то будемъ имѣть

$$\omega'(u) = \frac{\sigma - \varphi'(u)}{u + \varphi(u)}.$$

и квадратурой найдемъ функцію ω. При чемъ, такъ какъ σ произвольное число, то мы можемъ его выбрать такъ, чтобы удобнѣе было взять квадратуру. Возьмемъ $\sigma = -1$, тогда числитель будетъ производною знаменателя, только взятый съ обратнымъ знакомъ, и слѣдовательно:

$$\omega(u) = lg\psi = -lg\left[u + \varphi(u)\right] \quad ;$$

(постоянное интеграціи беремъ = 0, такъ какъ достаточно знать только какое-нибудь значеніе ω). Отсюда:

$$\psi = \frac{1}{u + \varphi(u)}.$$

Итакъ,

$$\mu = \frac{1}{x\left[\frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right]} = \frac{1}{y + x\cdot\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Вотъ одинъ изъ интегрирующихъ факторовъ нашего уравненія. Въ данномъ случаѣ μ однородная функція (-1) измѣренія. Это μ

является интегрирующимъ факторомъ для уравненія, въ которомъ $N = 1$. Посмотримъ, каковъ этотъ факторъ будетъ для первоначальнаго уравненія. Очевидно, что для того, чтобы привести уравненіе къ разсмотрѣнному виду, надо его раздѣлить на N, или умножить на $\frac{1}{N}$; а затѣмъ его придется умножить на μ. Короче, интегрирующимъ факторомъ для первоначальнаго уравненія будетъ:

$$\mu_1 = \frac{1}{N}\mu = \frac{1}{\dfrac{xM + yN}{}} \qquad (B)$$

такъ какъ

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{M}{N};$$

такимъ образомъ мы получили новый методъ интеграціи однороднаго уравненія.

П Р И М Ѣ Р Ъ. Дано дифференціальное уравненіе:

$$(x^2 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0.$$

Уравненіе однородно, 2-го измѣренія. Его интегрирующій факторъ будетъ:

$$\frac{1}{(x^2 + y^2)\,x - xy^2} = \frac{1}{x^3}.$$

Итакъ, данное уравненіе надо умножить на $\frac{1}{x^3}$, и тогда лѣвая часть будетъ полнымъ дифференціаломъ. Умножаемъ:

$$\frac{x^2 + y^2}{x^3}\,dx - \frac{y}{x^2}\,dy = 0.$$

Квадратурами находимъ u. Проинтегрировавъ 2-ой коэффиціентъ по y, будемъ имѣть:

$$U = -\frac{y^2}{2x^2} + \mathcal{F}(x).$$

Надо найти $\mathcal{F}(x)$; для этого предыдущее выраженіе продифференцируемъ по x, приравняемъ 1-му коэффиціенту, получаемъ:

$$\frac{y^2}{x^3} + \mathcal{F}'(x) = \frac{x^2 + y^2}{x^3}$$

или по сокращеніи $\mathcal{F}'(x) = \frac{1}{x}$. Отсюда

$$\mathcal{F}(x) = lg\, x.$$

Итакъ, общій интегралъ даннаго уравненія есть

$$-\frac{y^2}{2x^2} + lg\, x = C.$$

§ 8. ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ ПЕРВАГО ПОРЯДКА СТЕПЕНИ ВЫШЕ 1-ОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ.

До сихъ поръ мы разсматривали дифференціальныя уравненія, которыя были разрѣшены относительно производной; теперь же разсмотримъ такія дифференціальныя уравненія, которыя даны въ общемъ видѣ:

$$\mathcal{F}(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}) = 0. \qquad (1)$$

Разрѣшая уравненіе (1) относительно производной, приходимъ къ одному или нѣсколькимъ уравненіямъ разсмотрѣннаго выше вида :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Предположимъ въ частности, что уравненіе (1) алгебраическое относительно y' -n-й степени и, слѣдовательно, имѣетъ видъ:

$$y'^n + A_1 y'^{n-1} + A_2 y'^{n-2} + \ldots + A_n = 0, \qquad (2)$$

гдѣ A_1, $A_2 \ldots A_n$ - функціи x и y; мы можемъ предположить еще, что эти коэффиціенты - раціональныя функціи x и y. Разрѣшая уравненіе (2), получаемъ n значеній для производной y' и слѣ -

довательно n различныхъ уравненій:

$$\frac{dy}{dx} = f_i\,(x,y), \qquad (i = 1,2,\dots,n) \qquad (3)$$

Для каждаго изъ этихъ уравненій существуетъ свой общій интеграль:

$$\varphi_i(x,\ y,\ C) = 0 \qquad (4)$$

и возникаетъ вопросъ, какъ зная ихъ, получить общій интегралъ даннаго уравненія (2); т.е. такое соотношеніе между x, y, C, для котораго бы удовлетворялись всѣ уравненія (3). Для разрѣшенія этого вопроса надо предварительно установить понятіе о неприводимости уравненія вида (2). Уравненіе (2) называется неприводимымъ, если лѣвую часть его нельзя разложить на факторы того же вида, какъ и сама лѣвая часть этого уравненія, т.е. безъ введенія ирраціональности относительно x и y. Въ противномъ случаѣ уравненіе называется приводимымъ, и его можно замѣнить рядомъ неприводимыхъ уравненій, разбивая лѣвую часть на неприводимые факторы. Такъ, уравненіе:

$$y'^2 - \frac{y}{x} = 0 \qquad (5)$$

неприводимо, ибо лѣвую часть, правда, можно представить въ видѣ произведенія линейныхъ, относительно y', факторовъ, какъ это и всегда имѣетъ мѣсто:

$$\left(y' - \sqrt{\frac{y}{x}}\right) \cdot \left(y' + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) = 0,$$

но факторы эти ирраціональны относительно x и y. Наоборотъ, уравненіе

$$y'^2 - (x + y^2).y' + xy^2 = 0 \qquad (6)$$

приводимо, ибо представляется въ видѣ:

$$(y' - x)\ (y' - y^2) = 0$$

и распадается на два неприводимыхъ уравненія

$$y' = x \quad \text{и} \quad y' = y^2. \qquad (7)$$

Если уравненіе (2) неприводимо, то правыя части уравненій (3) всѣ зависятъ отъ одной ирраціональности, и слѣдовательно отъ одного уравненія (3) къ другому переходимъ простымъ измѣненіемъ значенія ирраціональности. Такъ, для уравненія (5) уравненія (3) будутъ:

$$y' = +\sqrt{\frac{y}{x}} \quad \text{и} \quad y' = -\sqrt{\frac{y}{x}} \qquad (8)$$

и отъ одного переходимъ къ другому, мѣняя знакъ передъ квадратнымъ радикаломъ. Очевидно, что и отъ одного общаго интеграла (4) къ другому можемъ переходить сходнымъ образомъ, такъ какъ видъ каждаго долженъ зависѣть отъ значенія ирраціональности, и общій интегралъ

$$\varphi(x,\ y,\ C) = 0 \qquad (9)$$

уравненія (2) получимъ, исключая ирраціональность (радикалы или высшія ирраціональности, если $n > 4$) изъ уравненія:

$$\varphi_i(x,\ y,\ C) = 0. \qquad (4)$$

Такъ, для 1-го изъ уравненій (8) общій интегралъ имѣетъ видъ:

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} + C;$$

исключаемъ ирраціональность: возводя въ квадратъ, имѣемъ:

$$y = x + C^2 + 2C\sqrt{x},$$

откуда, по перенесеніи членовъ и возведеніи въ квадратъ, получаемъ общій интегралъ

$$(y - x - C^2)^2 = 4C^2 x \qquad (10)$$

уравненія (5), такъ какъ соотношеніе (10), очевидно имѣетъ мѣсто для обоихъ значеній квадратнаго корня въ уравненіяхъ (8). Наоборотъ, если уравненіе (2) приводимо, то нельзя отъ одного изъ уравненій (3) перейти ко всѣмъ остальнымъ, измѣняя только ирраціональности. Такъ уравненія (7), полученныя для уравненія (6), совершенно независимы другъ отъ друга, и ихъ общіе интегралы

$$y = \frac{x^2}{2} + C \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{C - x} \qquad (11)$$

тоже не имѣютъ никакой связи между собою. - Въ случаѣ приводимости уравненія (2) разбиваемъ его лѣвую часть на неприводимые факторы и для каждаго неприводимаго уравненія, получаемаго приравниваніемъ нулю одного изъ этихъ факторовъ, находимъ общій интегралъ по предыдущему. Получаемъ рядъ такихъ интеграловъ:

$$\Phi_1(x,y,C) = 0, \quad \Phi_2(x,y,C) = 0, \ldots \Phi_s(x,y,C) = 0 \qquad (12)$$

Общій интегралъ уравненія (2) получимъ, перемножая равенства (12):

$$\Phi_1(x,y,C) \cdot \Phi_2(x,y,C) \ldots \Phi_s(x,y,C) = 0 \qquad (13)$$

Дѣйствительно, соотношеніе (13) имѣетъ мѣсто для любого изъ значеній производной y', получаемыхъ изъ уравненія (2). Для уравненія (6), имѣя въ виду равенства (11), получаемъ общій интегралъ въ видѣ:

$$\left(y - \frac{x^2}{2} - C\right)\left(y - \frac{1}{C - x}\right) = 0,$$

или, послѣ упрощеній:

$$(C - x)\, y^2 - y\left[1 + (C-x)\left(\frac{x^2}{2} + C\right)\right] + \frac{x^2}{2} + C = 0 \qquad (14)$$

Приведемъ еще одинъ примѣръ.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - (x + y)\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy = 0 ,$$

или

$$\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\right]\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\right] = 0 .$$

Уравненіе распадается на два

$$1)\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x = 0 \qquad 2)\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y = 0.$$

Оба уравненія раціональны и независимы другъ отъ друга. Каждое изъ нихъ въ свою очередь распадается на два, а именно:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{y}.$$

Уравненія 1) и 2) неприводимы. Интегрируемъ уравненія:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{y}.$$

1) $y = {}^2/_3\, x^{\frac{3}{2}} + C;$

2) $2\sqrt{y} = x + C.$

Общіе интегралы уравненій 1) и 2) найдемъ, исключая ирраціональность изъ 2-хъ найденныхъ интеграловъ:

$$1)\quad (y - C)^2 = {}^4/_9\, x^3 \qquad 2)\ 4y = (x + C)^2;$$

общій интегралъ даннаго уравненія будетъ:

$$\left[(y - C)^2 - {}^4/_9\, x^3\right]\left[4y - (x + C)^2\right] = 0.$$

Обращаясь къ непосредственному разсмотрѣнію уравненія

$$\mathcal{F}(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

независимо отъ привиденія его къ ряду уравненій вида (3), начнемъ съ частныхъ случаевъ, когда отсутствуетъ одинъ изъ трехъ аргументовъ, т.е. когда уравненіе имѣетъ видъ:

I) $\mathcal{F}(y, y') = 0$, II) $\mathcal{F}(x, y') = 0$.

Если бы уравненіе

$$\mathcal{F}(y, y') = 0 \qquad (I)$$

разрѣшить относительно производной, то перемѣнныя раздѣлились бы, и мы могли бы уравненіе проинтегрировать квадратурою. Если оно не разрѣшено относительно y', то оно можетъ быть 1-ой степени относительно y или вообще допускать удобное разрѣшеніе относительно y.

Пусть уравненіе разрѣшено относительно y и имѣетъ видъ:

$$y = f(y');$$

введемъ новое перемѣнное p, обозначивъ производную черезъ p, т.е. полагая $y' = p$; тогда послѣднее уравненіе перепишется такъ:

$$y = f(p) \qquad (15)$$

Наша цѣль - найти общій интегралъ, т.е. мы хотимъ найти соотношеніе между x, y, C. Можно также выразить x и y черезъ одинъ какой-нибудь параметръ, а затѣмъ исключить его. Если p примемъ за такой параметръ, то y уже выражено въ функціи его; остается выразить x; мы имѣемъ:

$$y' = p = \frac{dy}{dx}, \quad dy = p.\,dx, \quad dx = \frac{dy}{p}.$$

Съ другой стороны: $y = f(p), \quad dy = f'(p)\,dp.$

Итакъ,

$$dx = \frac{f'(p)\,dp}{p}$$

и квадратурой находимъ:

$$x = \int \frac{f'(p)\,dp}{p} + C \qquad (16)$$

Такимъ образомъ x и y выражены въ функціи вспомогательнаго параметра р. Если мы исключимъ р, т.е. y', то получимъ уравненіе вида:

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

т.е. общій интегралъ. Если исключеніе не выполнять, то равенства (15) и (16) замѣняютъ общій интегралъ. Методъ, примѣненный нами здѣсь, есть въ сущности методъ преобразованія перемѣнныхъ. Мы получили дифференціальное уравненіе:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{f'(p)}$$

а къ такому уравненію мы придемъ отъ нашего, если введемъ новое перемѣнное, полагая $y' = p$. Разсмотримъ болѣе общій случай уравненія (I), предполагая, что уравненіе

$$\mathcal{F}(y, y') = 0$$

не разрѣшено ни относительно y, ни относительно y', но y и y' выражены въ функціи нѣкотораго параметра t, т.е. замѣнимъ его двумя уравненіями:

$$y = \varphi(t), \qquad y' = \psi(t) \tag{17}$$

(Исключая изъ нихъ t, придемъ опять къ данному уравненію). Выразимъ y и x въ функціи параметра t.

$$y' = \frac{dy}{dx}; \quad dx = \frac{dy}{y'}; \quad dy = \varphi'(t)dt; \quad dx = \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)};$$

x найдется квадратурой:

$$x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + C \tag{18}$$

присоединяя $y = \varphi(t)$ $(17')$, исключивъ t, получимъ общій интегралъ. Можно оставить безъ исключенія общій интегралъ въ видѣ 2-хъ уравненій $(17')$ и (18).

П Р И М Ѣ Р Ы:

1.) $$y = y'^2 e^{y'}$$

Относительно y' уравненіе неразрѣшимо въ элементарныхъ функціяхъ. Обозначимъ:

$$y' = p, \qquad y = p^2 e^p$$

$$dx = \frac{dy}{p}; \qquad dy = (2pe^p + p^2 e^p)\,dp; \quad dx = \frac{2pe^p + p^2 e^p}{p}\,dp$$

$$dx = (2e^p + pe^p)\,dp;$$

выполняемъ квадратуру:

$$x = 2e^p + pe^p - e^p + C \quad \text{и} \quad y = p^2 e^p.$$

2) $$y^2(y' - 1) = (2 - y')^2.$$

Уравненіе легко разрѣшимо относительно y и y'; но рѣшеніе получится ирраціональное. Для избѣжанія ирраціональности вводимъ параметръ t, полагая

$$2 - y' = yt;$$

уравненіе даетъ намъ:

$$y^2(y' - 1) = y^2 t^2; \qquad y' = t^2 + 1;$$

$$y = \frac{1 - t^2}{t}; \quad dx = \frac{dy}{y'} = \frac{-\frac{1}{t^2} \; 1}{1 + t^2}\,dt, \quad \text{или} \quad dx = -\frac{dt}{t^2}; \qquad ?$$

$$x = \frac{1}{t} + C, \qquad y = \frac{1}{t} - t.$$

Исключая t, имѣемъ общій интегралъ:

$$y = x - C - \frac{1}{x - C}.$$

Переходимъ къ уравненію (II):

$$\mathcal{F}(x, y') = 0.$$

Относительно уравненій этого вида мы могли бы повторить всѣ наши разсужденія для предшествующаго случая. Если бы уравненіе было разрѣшено относительно y', то оно интегрировалось бы квадратурой. То же самое было бы, если бы мы могли разрѣшить уравненіе относительно x.

Мы положимъ вообще, что оба аргумента x и y' можно выразить въ видѣ 2-хъ функцій вспомогательнаго параметра t; полагая въ частности $y' = t$ или $x = t$, будемъ имѣть два вышеупомянутыхъ случая разрѣшимости. Итакъ, пусть

$$x = \varphi(t), \qquad y' = \psi(t).$$

Выразимъ и $\underline{y}$ въ функціи параметра t.

$$dy = y'dx = \psi(t).\varphi'(t)dt; \qquad y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C.$$

Присоединяя равенство $x = \varphi(t)$, имѣемъ общій интегралъ. Въ данномъ случаѣ мы также въ сущности дѣлали преобразованіе перемѣнныхъ. Дѣйствительно, мы получили дифференціальное уравненіе

$$\frac{dy}{dt} = \psi(t).\varphi'(t),$$

т.е. мы вмѣсто x ввели новое перемѣнное t и опредѣлили производную искомой функціи y по t, а не по x.

П Р И М Ѣ Р Ъ. Пусть въ частности t совпадаетъ съ y':

$$x = y' + \cos y', \quad y' = p, \quad x = p + \cos p, \quad dy = pdx;$$

$$dy = p(1 - \sin p)dp, \quad y = \frac{p^2}{2} + p\cos p - \sin p + C;$$

изъ выраженій x и y въ функціи p не трудно исключить p и получить общій интегралъ.

До сихъ поръ мы предполагали, что уравненіе содержитъ два аргумента. Перейдемъ къ общему случаю, когда въ уравненіе входятъ три аргумента x, y и y'. Положимъ, мы имѣемъ такое уравненіе съ 3-мя аргументами. Покажемъ, какимъ образомъ можемъ замѣнить его новымъ дифференціальнымъ уравненіемъ 1-ой степени относительно производной. Пусть имѣемъ уравненіе:

$$\mathcal{F}(x, y, y') = 0,$$

разрѣшенное относительно у;

$$y = f(x, y'). \qquad (III)$$

Введемъ новое перемѣнное, полагая

$$y' = p, \text{ тогда } y = f(x, p).$$

Дифференцируя по х, имѣемъ:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}.$$

Мы получили дифференціальное уравненіе, въ которое входитъ р, х и $\frac{dp}{dx}$. Относительно $\frac{dp}{dx}$ полученное уравненіе 1-ой степени, слѣдовательно цѣль наша достигнута. Точно также дифференціальное уравненіе можно замѣнить новымъ, 1-ой степени относительно производной, если только оно разрѣшено относительно х. Дѣйствительно, если

$$x = f(y, y') \qquad (IУ),$$

то, полагая $y' = p$, будемъ имѣть:

$$x = f(y, p)$$

и дифференцируя по х:

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y} p + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx};$$

Но намъ нужно теперь получить уравненіе съ у, р, $\frac{dp}{dy}$; поэтому, замѣтивъ, что

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

перепишемъ наше равенство такимъ образомъ:

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y} p + \frac{\partial f}{\partial p} p \cdot \frac{dp}{dy}.$$

Мы получили дифференціальное уравненіе относительно перемѣнныхъ p и y, при чемъ оно 1-ой степени относительно производной $\frac{dp}{dy}$. Посмотримъ теперь, какимъ образомъ можно найти общій интегралъ даннаго дифференціальнаго уравненія. Очевидно для этого придется исключить p изъ общаго интеграла преобразованнаго уравненія и изъ даннаго дифференціальнаго уравненія. Напримѣръ, во второмъ случаѣ, если мы опредѣлимъ общій интегралъ новаго уравненія

$$\Phi\,(p,y,C) = 0,$$

то, присоединивъ къ нему уравненіе $x = f(y,p)$ и исключая p, найдемъ общій интегралъ даннаго уравненія. Въ обоихъ предшествующихъ случаяхъ мы предполагали, что уравненіе разрѣшено относительно одного изъ аргументовъ. Естественно теперь обратиться къ болѣе общему случаю, когда уравненіе не разрѣшено относительно ни одного изъ аргументовъ x, y, y'. Разсмотримъ способъ приведенія уравненія къ ур-ію 1-ой степени относительно производной въ этомъ случаѣ. Будемъ данное уравненіе толковать, какъ уравненіе поверхности, замѣнивъ временно аргументы x, y, y' координатами ξ, η, ζ :

$$\mathcal{F}(\xi,\eta,\zeta) = 0.$$

Предположимъ, что координаты ξ, η, ζ поверхности выражаются въ функціи 2-хъ вспомогательныхъ параметровъ (криволинейныя Гауссовы координаты). Тогда дифференціальное уравненіе замѣнится тремя уравненіями вида:

$$x = \varphi(u,v); \quad y = \psi(u,v); \quad y' = \chi(u,v).$$

Если бы изъ этихъ трехъ уравненій исключили u и v, то получили бы данное дифференціальное уравненіе. Въ томъ случаѣ, когда данное дифференціальное уравненіе можно представить въ такомъ видѣ, то его можно привести къ новому дифференціальному уравненію 1-ой степени относительно производной. Дѣйствительно, дифференцируя первыя 2 уравненія, имѣемъ:

$$dx = \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv; \qquad dy = \frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv .$$

Чтобы получить производную $\frac{dy}{dx}$, раздѣлимъ 2-ое равенство на 1-ое; тогда

$$\chi(u,v) = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\cdot\frac{dv}{du}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{dv}{du}}$$

Освобождая послѣднее уравненіе отъ знаменателя, получимъ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\cdot\frac{dv}{du} = \chi(u,v)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{dv}{du}\right].$$

Это дифференціальное ур-іе 1-ой степени относительно производной (въ этомъ уравненіи аргументы $u, v, \frac{dv}{du}$). Если мы проинтегрируемъ его, то получимъ соотношеніе вида:

$$\Phi(u, v\ C) = 0.$$

Присоединяя къ нему 2 первыхъ равенства:

$$x = \varphi(u,v); \qquad y = \psi(u,v),$$

получимъ по исключеніи u и v общій интегралъ первоначальнаго уравненія. Обратимся къ разсмотрѣнію частныхъ случаевъ, въ которыхъ задача интеграціи доводится до конца въ квадратурахъ.

---

§ 9. УРАВНЕНІЯ ЛАГРАНЖА И КЛЕРО.

Разсмотримъ уравненіе первой степени относительно x и y, коэффиціентами при которыхъ служатъ функціи только одной производной y'. Это будетъ такъ называемое уравненіе Лагранжа. Послѣ разрѣшенія относительно у, оно приметъ видъ

$$y = x\cdot\varphi(y') + \psi(y') . \qquad (1)$$

Введя $y' = p$, мы будемъ поступать такъ, какъ поступали и раньше въ случаѣ разрѣшенныхъ относительно у уравненій. Дифференцируя по х, имѣемъ:

$$p = \varphi(p) + \left[\varphi'(p)\,x + \psi'(p)\right]\frac{dp}{dx} .$$

Вотъ то уравненіе, которое мы получили въ результатѣ нашихъ преобразованій. Это ур-іе 1-ой степени относительно производной. Оно замѣчательно тѣмъ, что его можно проинтегрировать квадратурами. Мы можемъ считать р за независимое перемѣнное, а х-за зависимое. Помноживъ все уравненіе на $\frac{dx}{dp}$ и перенеся всѣ члены съ этой производной, мы наше ур-іе представимъ такъ:

$$\left[p - \varphi(p)\right]\frac{dx}{dp} = \varphi'(p)\,x + \psi'(p),$$

или

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)} + \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)} .$$

Мы, очевидно, получили линейное уравненіе. Оно, какъ извѣстно, интегрируется двумя квадратурами. Слѣдовательно, двумя квадратурами мы получимъ общій интегралъ:

$$F(x,p,C) = 0.$$

Присоединяя къ нему уравненіе

$$y = \varphi(p)\,x + \psi(p),$$

и исключая изъ этихъ 2-хъ уравненій р, получимъ:

$$\Phi(x,y,C) = 0$$

- общій интегралъ даннаго уравненія

Разсмотримъ примѣръ на уравненіе Лагранжа:

$$y = 2xy' + y'^3 .$$

Вводя обозначеніе p вмѣсто y',

$$y = 2px + p^3 ;$$

дифференцируя по x, получимъ:

$$p = 2p + (2x + 3p^2)\frac{dp}{dx} \quad \text{или} \quad p\frac{dx}{dp} + 2x + 3p^2 = 0,$$

или раздѣливъ его на p:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x + 3p = 0.$$

Общій интегралъ этого уравненія есть:

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{3}{4}p^2 .$$

Присоединяя сюда $y = 2px + p$ и исключая изъ нихъ p, получаемъ общій интегралъ даннаго уравненія. Можно сохранить эти 2 равенства и сказать, что они опредѣляютъ общій интегралъ даннаго уравненія.

Обращаемся къ частному случаю ур-ія Лагранжа. Предположимъ, что

$$\varphi(y') = y' .$$

Уравненія такого типа носятъ названіе уравненій К л е р о.

Итакъ, пусть

$$y = xy' + \psi(y') \qquad (2)$$

Пробуемъ примѣнить къ нему предшествующій методъ. Обозначая y' черезъ p, имѣемъ:

$$y = px + \psi(p).$$

Дифференцируя по x, получаемъ:

$$p = p + \left[x + \psi'(p)\right]\frac{dp}{dx} .$$

Полученный результатъ отличается отъ предшествующихъ тѣмъ, что членъ свободный отъ $\frac{dp}{dx}$ уничтожается и все уравненіе принимаетъ видъ:

$$\left[x + \psi'(p)\right] \quad \frac{dp}{dx} = 0 .$$

Уравненію этому мы удовлетворимъ, если обратимъ одинъ изъ факторовъ въ 0. Итакъ, намъ надо разсматривать 2 предположенія. Во 1-хъ, когда $\frac{dp}{dx} = 0$, и во 2-хъ, когда:

$$x + \psi'(p) = 0. \qquad (3)$$

Первое изъ нихъ даетъ $p = C$. Это есть общій интегралъ преобразованнаго уравненія. Чтобы получить общій интегралъ даннаго уравненія, надо къ нему присоединить:

$$y = px + \psi(p)$$

и исключить p. Тогда получаемъ

$$y = Cx + \psi(C).$$

Это общій интегралъ даннаго уравненія. Итакъ: если намъ дано уравненіе Клеро, то для того, чтобы найти общій интегралъ его, надо y' замѣнить въ уравненіи произвольнымъ постояннымъ C. Обращаемся ко 2-му предположенію. Здѣсь p получаетъ значеніе функціи x, свободное отъ C. Но p - новое перемѣнное, которое надо исключить. Присоединимъ къ выраженію, найденному для p изъ (3), уравненіе:

$$y = px + \psi(p)$$

и исключимъ изъ нихъ p. Послѣ этого получимъ соотношеніе между x и y, но свободное отъ C. Это соотношеніе будетъ также интеграломъ даннаго уравненія, но не общимъ. Онъ будетъ:

$$y = p(x) \cdot x + \psi\left[p(x)\right] ,$$

при чемъ $p(x)$ - то значеніе p, которое получается изъ уравненія **(3)**. Не трудно убѣдиться въ томъ, что это соотношеніе не можетъ получиться изъ общаго интеграла ни при какомъ постоянномъ значеніи C. Мы знаемъ, что общій интегралъ даетъ частные интегралы, если мы C даемъ частныя постоянныя значенія. Такимъ образомъ послѣднее соотношеніе, къ которому мы пришли изъ 2-го предположенія (приравнявъ 1-й факторъ 0), не есть частный интегралъ. Онъ изъ общаго не получается. Такимъ образомъ второй интегралъ будетъ интегралъ о с о б ы й, не получаемый изъ общаго ни при какомъ частномъ постоянномъ значеніи постояннаго C. Посмотримъ, какъ его получить. Для полученія его мы исключали p изъ 2-хъ уравненій. Если мы p обозначимъ черезъ C, то эти уравненія будутъ:

$$y = Cx + \psi(C); \qquad 0 = x + \psi'(C).$$

Первое изъ нихъ совпадаетъ съ общимъ интеграломъ, второе же получится изъ перваго, если мы въ немъ будемъ x и y разсматривать какъ параметры и продифференцируемъ по C. Итакъ, для того, чтобы получить особый интегралъ уравненія Клеро, надо продифференцировать общій интегралъ по C и изъ 2-хъ уравненій исключить C. Пріемъ, который сказался пригоднымъ для нахожденія особаго интеграла уравненія Клеро, какъ увидимъ дальше, есть общій пріемъ нахожденія особаго интеграла, есть только уравненіе, вообще, допускаетъ особый интегралъ. Возьмемъ примѣръ:

$$y = xy' + \frac{1}{2y'} \quad ;$$

по предыдущему общій интегралъ будетъ:

$$y = Cx + \frac{1}{2C} \quad ;$$

чтобы найти особый интегралъ, надо взять уравненія:

$$y = Cx + \frac{1}{2C} \quad \text{и} \quad 0 = x - \frac{1}{2C^2}$$

и исключить изъ нихъ C. Опредѣливъ изъ 2-го C и вставивъ его значеніе въ 1-ое, имѣемъ:

$$y = \frac{x}{\sqrt{2x}} + \frac{\sqrt{2x}}{2} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$$

откуда $y = \sqrt{2x}$ или $y^2 = 2x$. Это и есть особый интегралъ. Онъ не получается изъ общаго ни при какомъ численномъ значенiи С.

Результаты, полученные при рѣшенiи уравненiя Клеро, получаютъ простое геометрическое толкованiе. Если перемѣнныя х и у мы будемъ разсматривать, какъ Декартовы координаты, то общiй интегралъ

$$y = Cx + \psi(C)$$

будетъ уравненiемъ с е м е й с т в а различныхъ прямыхъ линiй. Посмотримъ, что будетъ представлять изъ себя уравненiе особаго интеграла. Для полученiя послѣдняго мы писали уравненiя

$$y = Cx + \psi(C) \quad \text{и} \quad 0 = x + \psi'(C)$$

и затѣмъ исключали С. Точно такимъ путемъ мы находимъ уравненiе огибающей семейства съ однимъ параметромъ. Такимъ образомъ мы будемъ имѣть огибающую кривую и ея касательная, которыя и образуютъ данное семейство прямыхъ. Уравненiе каждой касательной въ отдѣльности даетъ частный интегралъ, а ур-iе огибающей даетъ особый интегралъ. Въ томъ частномъ случаѣ, который мы имѣли въ примѣрѣ, огибающей будетъ парабола. Примѣняя сказанное выше сюда, скажемъ, что ур-iе параболы - особый интегралъ, а совокупность ея касательныхъ даетъ общiй.

Этимъ мы заканчиваемъ разсмотрѣнiе частныхъ случаевъ уравненiй 1-го порядка и переходимъ далѣе къ ихъ общей теорiи. Ближайшая наша задача будетъ состоять въ томъ, чтобы показать, что ур-iе 1-го порядка допускаетъ общiй интегралъ. Положенiе это было впервые доказано Cauchy.

Мы докажемъ эту теорему для болѣе общаго случая, а именно мы разсмотримъ не одно уравненіе, а цѣлую систему уравненій 1-го порядка, и докажемъ существованіе рѣшеній этой системы.

---

§ 10. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПИКАРА СУЩЕСТВОВАНІЯ ИНТЕГРАЛА ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО УРАВНЕНІЯ (ТЕОРЕМА КОШИ).

Разсмотримъ систему уравненій:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x,y,z,\ldots u);\ \frac{dz}{dx} = f_2(x,y,z,\ldots u);\ \ldots \frac{du}{dx} = f_n(x,y,z,\ldots u) \quad (1)$$

Въ этой системѣ одно независимое перемѣнное x, а $y, z, \ldots u$ — n функцій этого перемѣннаго. Пусть для нѣкотораго численнаго значенія $x = x_0$ даны всѣ численныя значенія нашихъ функцій

$$y = y_0,\quad z = z_0,\quad \ldots\quad u = u_0. \qquad (A)$$

Требуется опредѣлить функціи $y, z, \ldots u$, удовлетворяющія системѣ (1) и принимающія при $x = x_0$ заданныя значенія. Докажемъ существованіе такого рѣшенія $y, z \ldots u$ нашей системы и притомъ единственнаго. При этомъ намъ нужно оговорить, какого рода наши уравненія (1), т.е. какія функціи стоятъ въ правой части. Предположимъ, что намъ дана область измѣненій перемѣннаго. Пусть эта область дана около x_0, т.е. мы разсматриваемъ всѣ значенія x отъ $x_0 - a$ до $x_0 + a$. Точно такъ же ограничимъ область измѣненій функцій $y, z, \ldots u$. Будемъ разсматривать измѣненія функцій:

y-а отъ $y_0 - b$ до $y_0 + b$

z-а отъ $z_0 - c$ до $z_0 + c$ и т.д.

....

u отъ $u_0 - k$ до $u_0 + k$

Такимъ образомъ нами выдѣлена нѣкоторая область $\mathcal{D}$ измѣненій перемѣнныхъ $x, y, z \ldots u$. Для каждаго перемѣннаго даны предѣлы. Разсматривая эту область $\mathcal{D}$, скажемъ, что въ ней функціи f_1, f_2, $\ldots f_n$ должны быть конечными непрерывными функціями $(n+1)$ аргументовъ $x, y, z, \ldots u$. Добавимъ еще второе требованіе. Если допустимъ, что функціи f_i дифференцируемы по любому изъ аргументовъ $y, z, \ldots u$, т.е. что существуютъ частныя производныя функціи f_i по аргументамъ $y, z, \ldots u$ и что эти производныя конечны и непрерывны въ области $\mathcal{D}$, то для каждой изъ производныхъ

$$\frac{\partial f_i}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f_i}{\partial z}, \quad \ldots\ldots \frac{\partial f_i}{\partial u}$$

можно установить въ области $\mathcal{D}$ высшій предѣлъ ея абсолютной величины, т.е. можемъ указать такія положительныя числа $A, B, \ldots K$, что въ области $\mathcal{D}$ все время

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y}\right| < A; \quad \left|\frac{\partial f_i}{\partial z}\right| < B \ldots\ldots \left|\frac{\partial f_i}{\partial u}\right| < K,$$

и затѣмъ, примѣняя къ функціямъ f_i теорему о конечномъ приращеніи, возьмемъ разность значеній какой-нибудь функціи f_i для одного и того же x-а и различныхъ $y, z \ldots u$, т.е. возьмемъ разность

$$f_i(x, y', z', \ldots u') - f_i(x, y, z, \ldots u),$$

если x, $y', z', \ldots u'$ и $y, z, \ldots u$ лежатъ въ упомянутой области $\mathcal{D}$, то эта разность по теоремѣ о конечномъ приращеніи представится такъ:

$$(y'-y)\left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right) + (z'-z)\left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\right) + \ldots + (u'-u)\left(\frac{\partial f_i}{\partial u}\right), \qquad (2)$$

гдѣ производныя $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\right), \ldots \left(\frac{\partial f_i}{\partial u}\right)$ взяты для значеній $y=\eta$, $z=\xi, \ldots u=\omega$ и $\eta, \xi, \ldots \omega$ заключаются между y и y', z и z', $\ldots$, u и u'. Абсолютная величина разности

$$\left|f_i(x, y', z' \ldots u') - f_i(x, y, z, \ldots u)\right|$$

будетъ равна абсолютной величинѣ суммы (2). Далѣе, такъ какъ абсолютная величина суммы меньше суммы абсолютныхъ величинъ слагаемыхъ, то мы будемъ имѣть:

$$\left|f_i(x, y', z' \ldots u') - f_i(x, y, z \ldots u)\right| < A\left|y' - y\right| + B\left|z' - z\right| + \ldots + K\left|u' - u\right| \quad (3)$$

Итакъ, мы будемъ имѣть такое неравенство (3), разъ только существуютъ конечныя, непрерывныя производныя въ области $\mathcal{D}$. Но если извѣстно только, что существуетъ неравенство (3), то функціи f_i могутъ и не быть дифференцируемыми. Поэтому требованіе о существованіи частныхъ производныхъ мы замѣнимъ требованіемъ о существованіи неравенства (3) въ области $\mathcal{D}$. Итакъ, второе требованіе формулируется такъ: существуетъ рядъ такихъ положительныхъ чиселъ A, B, C..., что въ области $\mathcal{D}$ существуетъ неравенство:

$$\left|f_i(x, y', z', \ldots u') - f_i(x, y, z, \ldots u)\right| < A\left|y' - y\right| + B\left|z' - z\right| + \ldots + K\left|u' - u\right|.$$

Мы будемъ предполагать, что для всѣхъ значеній аргументовъ вышеуказанной области всѣ наши функціи f_i удовлетворяютъ этому требованію. Это условіе называется условіемъ Липшица (Lipschitz). При наличности такихъ условій мы можемъ доказать такую т е о р е м у: для всѣхъ значеній x-а отъ $x_0 - h$ до $x_0 + h$, гдѣ h наименьшее изъ чиселъ ряда:

$$a, \quad \frac{b}{M}, \quad \frac{c}{M}, \quad \ldots \frac{k}{M}$$

существуетъ единственная система функцій $y, z, \ldots u$, удовлетворяющихъ системѣ (1) и при $x = x_0$ принимающихъ данныя значенія y_0, $z_0, \ldots u_0$. Притомъ M превосходитъ наибольшій изъ максимумовъ абсолютныхъ величинъ функцій f_i въ данной области $\mathcal{D}$, т.е. M такое положительное число, что для каждой функціи f_i

$$\left|f_i(x, y, \ldots u)\right| < M$$

для всѣхъ значеній аргументовъ въ этой области. Доказательство этой теоремы изложимъ слѣдуя П и к а р у. Искомыя рѣшенія мы будемъ находить методомъ послѣдовательныхъ приближеній. За начальное приближеніе къ функціямъ $y, z, u \ldots$ можно считать $y_0, z_0, u_0 \ldots$ ... (постоянныя). Назовемъ это приближеніе нулевымъ или нулевого порядка. - Ищемъ теперь первое приближеніе $y_1, z_1, u_1 \ldots$. Мы ихъ такъ опредѣлимъ:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_0, \ldots u_0); \quad \frac{dz_1}{dx} = f_2(x, y_0, \ldots u_0) \ldots\ldots$$

$$\frac{du_1}{dx} = f_n(x, y_0, \ldots u_0) \qquad (4)$$

Правыя части суть данныя функціи x-а. Функціи $y_1, z_1, \ldots$ опредѣлятся изъ этихъ дифференціальныхъ уравненій и условій, что

$$\text{при } x = x_0, \quad y_1 = y_0, \quad z_1 = z_0, \ldots u_1 = u_0$$

Ихъ не трудно найти квадратурами. Имѣемъ, очевидно,

$$y_1 - y_0 = \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_0, z_0, \ldots u_0)\, dx,$$

такъ какъ при $x = x_0$ предѣлы интеграла равны и интегралъ равенъ нулю. Аналогично:

$$z_1 - z_0 = \int_{x_0}^{x} f_2(x, y_0, z_0, \ldots u_0)\, dx \quad \text{и т.д.}$$

Такимъ образомъ мы нашли функціи x-а, $y_1, z_1, \ldots u_1$. Это будетъ первое приближеніе. Помощью ихъ найдемъ также второе приближеніе, которое назовемъ $y_2, z_2, \ldots u_2$. Это будетъ рядъ функцій x-а, которыя принимаютъ данныя значенія $y_0, z_0, \ldots u_0$ при $x = x_0$ и удовлетворяютъ системѣ уравненій:

$$\frac{dy_2}{dx} = f_1(x, y_1, z_1, \ldots u_1); \quad \frac{dz_2}{dx} = f_2(x, y_1, z_1, \ldots u_1) \ldots\ldots$$

$$\frac{du_2}{dx} = f_n(x, y_1, z_1, \ldots u_1) \qquad (5)$$

Правыя части опять данныя функціи x-а; слѣдовательно $y_2, z_2, \ldots u_2$ найдутся квадратурами:

$$y_2 - y_0 = \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_1, z_1, \ldots u_1)dx; \quad z_2 - z_0 \int_{x_0}^{x} f_2(x, y_1, z_1, \ldots u_1)\,dx$$
и т.д.

Такимъ образомъ мы нашли функціи х-а $y_2, z_2 \ldots u_2$, которыя удовлетворяютъ начальному условію (А). Мы можемъ продолжать такъ далѣе и по каждому приближенію находить слѣдующее указаннымъ путемъ. Пусть мы уже нашли приближенія $y_{m-1}, z_{m-1}, \ldots u_{m-1}$.

Съ помощью ихъ найдемъ новыя приближенія: $y_m, z_m \ldots$. Для этого имѣемъ рядъ слѣдующихъ равенствъ:

$$\frac{dy_m}{dx} = f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1} \ldots u_{m-1}); \frac{dz_m}{dx} = f_2(x, y_{m-1} \ldots u_{m-1}),$$
$$\frac{du_m}{dx} = f_n(x, y_{m-1}, z_{m-1} \ldots u_{m-1}). \qquad (6)$$

Точно также присоединяя сюда условія (А), мы найдемъ $y_m, z_m \ldots$ $\ldots u_m$ квадратурами:

$$y_m - y_0 = \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1} \ldots u_{m-1})dx \quad \text{и т.д.}$$

Процессъ этотъ можно продолжать неограниченно, и мы будемъ получать приближенія все большаго и большаго индекса m. Намъ теперь надо доказать, что при всѣхъ значеніяхъ х-а отъ $x_0 - h$ до $x_0 + h$ значенія всѣхъ функцій: $y_m, z_m \ldots u_m$ не будутъ выходить изъ области $\mathcal{D}$. Во 2-хъ докажемъ, что всѣ эти функціи заслуживаютъ названія приближеній, т.е. что, увеличивая m, мы будемъ приближаться къ нѣкоторымъ опредѣленнымъ предѣламъ, т.е. мы будемъ имѣть, что $\lim_{m=\infty} y_m(x) = \mathcal{Y}(x)$; $\lim_{m=\infty} z_m(x) = \mathcal{Z}(x)$ и т.д., при чемъ функціи $\mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \ldots \mathcal{U}$ будутъ искомыми рѣшеніями, т.е. онѣ будутъ удовлетворять системѣ (1) и условіямъ (А). Докажемъ прежде всего, что значенія функцій не выходятъ изъ области $\mathcal{D}$; $y_0, z_0 \ldots u_0$ лежатъ въ этой области; обращаемся къ равенствамъ:

$$y_1 - y_0 = \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_0, z_0, \ldots u_0)dx \qquad \text{и т.д.}$$

Абсолютная величина интеграла будетъ меньше, чѣмъ произведенiе абсолютной величины подъинтегральной функцiи f_1 на абсолютную величину разности предѣловъ интеграла, и неравенство усилится, если мы абсолютную величину подъинтегральной функцiи замѣнимъ вышеупомянутымъ числомъ М; т.е.

$$|y_1 - y_0| < M|x-x_0| < Mh,$$

такъ какъ x далѣе, чѣмъ на h отъ x_0 не уходитъ. Точно такъ же

$$|z_1 - z_0| < M|x-x_0| < Mh \quad \text{и т.д.}$$

Но h - наименьшее изъ чиселъ ряда а, $\frac{b}{M}$, $\frac{c}{M}$, ... $\frac{k}{M}$ и, слѣдовательно,

$$Mh \leqq b, \qquad Mh \leqq c, \quad ...... \quad Mh \leqq k,$$

слѣдовательно $|y_1 - y_0| < b$; $|z_1 - z_0| < c$ и т.д.

Такимъ образомъ мы доказали, что y_1, z_1, ... u_1 не выходятъ изъ установленной области. Далѣе докажемъ, что въ этой области находятся также y_2, z_2, ... u_2. Для этого мы разсмотримъ равенства:

$$y_2 - y_0 = \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_1, z_1, ...u_1)dx; \qquad z_2 - z_0 = \int_{x_0}^{x} f_2(x, y_1, z_1, ...u_1)dx$$

и т.д.; x не выходитъ по предположенiю изъ области $\mathcal{D}$; относительно y_1, z_1, ...u_1 мы доказали принадлежность ихъ къ области, а потому, какъ и раньше, имѣемъ:

$$|y_2 - y_0| < M|x-x_0| < Mh; \quad |z_2 - z_0| < M|x-x_0| < Mh$$

и т.д. Вспоминая теперь, какъ выбирали h, мы придемъ къ тому же результату, что и раньше, а именно:

$$|y_2 - y_0| < b; \quad |z_2 - z_0| < c \quad \text{и т.д.},$$

т.е. y_2, z_2 ....u_2 не выходятъ изъ области $\mathcal{D}$. Продолжая такiя разсужденiя далѣе, мы увидимъ, что разъ будетъ доказано для y_{m-1} z_{m-1}, ... u_{m-1}, что онѣ не выходятъ изъ области, то можно будетъ показать, что $y_m, z_m, \dots u_m$ также не выходятъ изъ области. Дѣйствительно, по ихъ выраженіямъ мы найдемъ:

$$|y_m - y_0| < M|x-x_0| < Mh; \qquad |z_m - z_0| < M|x-x_0| < Mh \quad \text{и т.д.}$$

$$\text{или } |y_m - y_0| < b; \qquad |z_m - z_0| < c \qquad \text{и т.д.,}$$

ибо Mh меньше любого изъ этихъ чиселъ. Итакъ мы доказали, что всѣ функціи, которыя мы брали, для всѣхъ значеній х-а отъ $x_0 - h$ до $x_0 + h$ не выходятъ изъ установленной области. Далѣе, намъ надо доказать, что эти приближенія стремятся къ опредѣленнымъ предѣламъ. Для доказательства разсмотримъ разности последовательныхъ приближеній, а именно разности каждаго приближенія со своимъ предыдущимъ. Одну изъ такихъ разностей мы уже разсматривали и доказали, что

$$|y_1 - y_0| < M|x-x_0|;$$

точно такъ же и

$$|z_1 - z_0| < M|x-x_0| \qquad \text{и т.д.}$$

Переходимъ къ слѣдующимъ разностямъ этого типа. Разсмотримъ $y_2 - y_1$. Мы имѣли выраженіе для $y_2 - y_0$ и для $y_1 - y_0$; вычитая изъ первой разности вторую, мы получимъ въ правой части разность двухъ интеграловъ, а такъ какъ предѣлы ихъ общіе, то будемъ имѣть, что:

$$y_2 - y_1 = \int_{x_0}^{x} \{ f_1(x, y_1, z_1, \dots u_1) - f_1(x, y_0, z_0, \dots u_0) \} dx;$$

аналогично найдемъ выраженіе для $z_2 - z_1$ и др. Замѣтимъ, что подъинтегральная функція есть разность значеній функціи f_1 для одного и того же значенія х, но различныхъ $y, z \dots u$. Всѣ аргументы находятся въ области $\mathcal{D}$ и для абсолютной величины разности можно воспользоваться неравенствомъ Липшица. Замѣняя подъинтегральную разность ея абсолютной величиной, мы абсолютную величину интеграла увеличимъ. Она еще болѣе увеличится , если абсолютную величину подъинтегральной разности мы замѣнимъ количествомъ большимъ, пользуясь условіемъ Липшица; итакъ:

$$|y_2 - y_1| < \left| \int_{x_0}^{x} \{A|y_1 - y_0| + B|z_1 - z_0| + \ldots + K|u_1 - u_0|\} dx \right|.$$

Мы видѣли, что абсолютныя величины разностей $|y_1 - y_0|$, $|z_1 - z_0|$ и т.д. менѣе $M|x-x_0|$, а потому неравенство усилится, если мы замѣнимъ въ немъ эти разности черезъ $M|x-x_0|$. При этомъ можно будетъ взять за знакъ интеграла $M\theta$, гдѣ черезъ θ мы обозначимъ слѣдующую сумму:

$$\theta = A + B + C + \ldots + K.$$

Тогда будемъ имѣть:

$$(y_2 - y_1) < M\theta \left| \int_{x_0}^{x} (x-x_0) dx \right|;$$

интеграцію нетрудно выполнить, и тогда получимъ:

$$M\theta \frac{|x-x_0|^2}{1.2}.$$

Вотъ окончательный предѣлъ для $|y_2 - y_1|$; тотъ же самый предѣлъ будетъ для абсолютныхъ величинъ разностей:

$$|z_2 - z_1| \ldots\ldots |u_2 - u_1|.$$

Итакъ, мы имѣемъ:

$$|y_2 - y_1| < M\theta \cdot \frac{|x-x_0|^2}{1.2}; \qquad |z_2 - z_1| < M\theta \cdot \frac{|x-x_0|^2}{1.2}$$

и такъ далѣе. Переходимъ далѣе къ вычисленію выраженія разности $y_3 - y_2$, она будетъ также выражаться интеграломъ и будетъ:

$$y_3 - y_2 = \int_{x_0}^{x} \{ f_1(x, y_2, z_2, \ldots u_2) - f_1(x, y_1, z_1, \ldots u_1) \} dx.$$

Опредѣляя абсолютную величину $|y_3 - y_2|$, замѣнимъ подъинтегральную разность ея абсолютнымъ значеніемъ, и примѣняя неравенство Липшица, по предыдущему, получимъ:

$$|y_3 - y_2| < \left| \int_{x_0}^{x} \{A|y_2 - y_1| + B|z_2 - z_1| + \ldots + K|u_2 - u_1|\} dx \right|.$$

Мы усилимъ неравенство, если произведемъ слѣдующую замѣну: вве -

демъ въ послѣдній интегралъ вмѣсто предыдущихъ разностей

$$|y_2 - y_1|, \quad |z_2 - z_1| \ldots \quad \text{выраженіе } M\theta \ \frac{|x-x_0|^2}{1\ 2}$$

тогда будемъ имѣть:

$$|y_3 - y_2| < M\theta^2 \left| \int_{x_0}^{x} \frac{(x-x_0)^2}{1.2}\, dx \right| = M\theta^2 \cdot \frac{|x-x_0|^3}{1.2.3}$$

То же самое получимъ для $|z_3 - z_2|$ и др. Слѣдовательно, мы будемъ имѣть группу неравенствъ такого типа:

$$|y_3 - y_2| < M\theta^2 \cdot \frac{|x-x_0|^3}{1.2.3}$$

Эти вычисленія можемъ продолжать и далѣе. По аналогіи видно, каковы будутъ результаты. Таким образомъ, мы придемъ къ группѣ такихъ неравенствъ:

$$|y_m - y_{m-1}| < M\theta^{m-1} \ \frac{|x-x_0|^m}{m!}$$

Не трудно доказать, что эта формула общая. Предполагая, что предыдущія неравенства:

$$|y_{m-1} - y_{m-2}| < M\theta^{m-2} \ \frac{|x-x_0|^{m-1}}{(m-1)!}$$

существуютъ, имѣемъ:

$$|y_m - y_{m-1}| = \int_{x_0}^{x} \left\{ f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \ldots u_{m-1}) - f_1(x, y_{m-2}, z_{m-2}, \ldots u_{m-2}) \right\} dx$$

Примѣняя условіе Липшица, найдемъ:

$$|y_m - y_{m-1}| < \left| \int_{x_0}^{x} \left\{ A|y_{m-1} - y_{m-2}| + B|z_{m-1} - z_{m-2}| + \ldots + K|u_{m-1} - u_{m-2}| \right\} dx \right| ;$$

такъ какъ для разностей типа $|y_{m-1} - y_{m-2}|$ формулы уже выведены, то

$$|y_m - y_{m-1}| < M\theta^{m-1} \left| \int_{x_0}^{x} \frac{|x-x_0|^{m-1}}{(m-1)!} \, dx \right| = M\theta^{m-1} \cdot \frac{|x-x_0|^m}{m!}$$

Итакъ мы имѣемъ:

$$|y_m - y_{m-1}| < M\theta^{m-1} \cdot \frac{|x-x_0|^m}{m!} \ ; \quad |z_m - z_{m-1}| < M\theta^{m-1} \frac{|x-x_0|^m}{m!} \ \text{и т.}$$

что́ и требовалось доказать. Разсмотримъ далѣе такой рядъ:

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \ldots\ldots + (y_m - y_{m-1}) + \ldots \qquad (7$$

Всѣ члены этого ряда функціи х-а. Разсмотримъ сумму (m+1) чле -

новъ этого ряда. Называя ее черезъ S_m, будемъ имѣть:

$$S_m = y_0 + y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + y_3 - y_2 + \ldots\ldots + y_m - y_{m-1} = y_m$$

Сумма конечнаго числа членовъ равна y_m. Предположимъ, что мы доказали сходимость ряда (7). Онъ будетъ сходящійся, если существуетъ:

$$\lim_{m=\infty} S_m = S$$

Такимъ образомъ, если мы докажемъ сходимость ряда, то мы докажемъ, что существуетъ предѣлъ: $\lim\limits_{m=\infty} y_m = \mathcal{Y}(x)$

Точно такъ же мы будемъ поступать для доказательства существованія предѣла $\lim\limits_{m=\infty} z_m = \mathcal{Z}(x)$ и т.д.

Чтобы доказать сходимость нашего ряда, сравнимъ его съ другимъ. Возьмемъ рядъ:

$$M\frac{|x-x_0|}{1} + M\theta\frac{|x-x_0|^2}{1.2} + M\theta^2\frac{|x-x_0|^3}{1.2.3.} + \ldots + M\theta^{m-1}\frac{|x-x_0|^m}{m!} + \ldots \quad (8)$$

Если теперь къ этой суммѣ прибавимъ $\frac{M}{\theta}$ и весь рядъ умножимъ на θ и раздѣлимъ на M, то будемъ имѣть разложеніе показательной функціи $e^{\theta|x-x_0|}$. Слѣдовательно, до нашихъ преобразованій рядъ (8) равенъ:

$$M\frac{e^{\theta|x-x_0|}-1}{\theta} = \frac{M}{\theta}e^{\theta|x-x_0|} - \frac{M}{\theta}.$$

Рядъ (8), который мы получаемъ изъ разложенія показательной функціи, завѣдомо сходящійся. Всѣ члены его положительны, и онъ будетъ равномѣрно сходящимся. Сравнимъ теперь этотъ рядъ съ нашимъ. Если мы имѣемъ сходящійся рядъ съ положительными членами и затѣмъ другой рядъ, абсолютныя величины членовъ котораго меньше соотвѣтствующихъ членовъ предыдущаго ряда, то этотъ рядъ будетъ также сходиться; въ силу этого будетъ сходиться и нашъ рядъ (7), а также очевидно и рядъ:

$$y_0 + |y_1 - y_0| + |y_2 - y_1| + \ldots\ldots + |y_m - y_{m-1}| + \ldots,$$

т.е. рядъ (7) будетъ сходиться"абсолютно". Кромѣ того, онъ будетъ сходиться и равномѣрно, т.к. члены его по абсолютной величинѣ меньше членовъ ряда (8), который - равномѣрно-сходящійся. Такимъ образомъ рядъ нашъ сходится равномѣрно и абсолютно. Разъ такъ, то по предыдущему существуетъ предѣлъ для y_m:

$$\lim y_m = \mathcal{Y}(x),$$

и функція эта будетъ непрерывна, т.к. если мы имѣемъ равномѣрно сходящійся рядъ, при чемъ всѣ члены - функціи непрерывныя, то и сумма его будетъ непрерывная функція, а всѣ члены нашего ряда были непрерывныя функціи, такъ какъ они выражались интегралами, у которыхъ подъинтегральныя функціи f_i непрерывныя функціи своихъ аргументовъ и аргументы сами по себѣ тоже непрерывныя функціи x. Въ послѣднемъ можно убѣдиться изъ разсмотрѣнія постепеннаго ихъ полученія. Дѣйствительно: $y_1, z_1, \ldots\ldots u_1$ - непрерывныя функціи; слѣдовательно $y_2, z_2, \ldots\ldots u_2$ тоже непрерывны, т.к. они получаются квадратурой непрерывныхъ функцій и т.д. Итакъ, мы доказали существованіе предѣла для y_m; точно такъ же докажемъ

$$\lim_{m=\infty} z_m = \mathcal{Z}(x)$$

гдѣ $\mathcal{Z}(x)$ - непрерывная функція и т.д. Теперь остается посмотрѣть, удовлетворяютъ ли эти функціи начальнымъ условіямъ (A) и дифференціальнымъ уравненіемъ (1). Первому условію всѣ найденныя функціи удовлетворяютъ, т.к. для $x=x_0$ любая функція

$$y_m(x_0) = y_0.$$

Слѣдовательно и въ предѣлѣ

$$\lim_{m=\infty} y_m(x_0) = y_0, \qquad \lim_{m=\infty} z_m(x_0) = z_0 \qquad \text{и т.д.}$$

Остается провѣрить, удовлетворяютъ ли онѣ нашимъ дифференціальнымъ уравненіямъ. Напишемъ тѣ уравненія, которымъ удовлетворяютъ наши приближенія.

$$\frac{dy_m}{dx} = f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \dots u_{m-1}); \frac{dz_m}{dx} = f_2(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \dots u_{m-1})$$

и т.д., или послѣ интеграціи:

$$y_m - y_0 = \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \dots, u_{m-1})dx.$$

и перейдемъ къ предѣлу; $y_{m-1}, z_{m-1}, \dots, y_m, z_m, \dots$ стремятся каждая къ опредѣленному предѣлу, т.е. взявъ m достаточно большимъ, можно сказать, что для любого значенія x-а

$$|Y(x) - y_{m-1}(x)| < \varepsilon \quad |Z(x) - z_{m-1}(x)| < \varepsilon$$

$$|Y(x) - y_m(x)| < \varepsilon \quad |Z(x) - z_m(x)| < \varepsilon \quad \text{и т.д.}$$

гдѣ ε - произвольно мало. Принимая это во вниманіе, мы можемъ предыдущее равенство переписать такъ:

$$(y_m - Y) + (Y - y_0) = \int_{x_0}^{x} \{f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1} \dots) - f_1(x, Y, Z, \dots U)\}dx + \int_{x_0}^{x} f_1(x, Y, Z, \dots\dots U)dx.$$

Первая разность въ скобкахъ слѣва и разность интеграловъ справа обращаются въ предѣлѣ въ 0. Дѣйствительно, въ силу условій Липшица (которыя здѣсь можно примѣнить)

$$\left|\int_{x_0}^{x} \{f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \dots) - f_1(x, Y, Z, \dots U)\}dx\right| < \left|\int_{x_0}^{x} \{A|y_{m-1} - Y| + B|z_{m-1} - Z| + \dots\}dx\right|.$$

Множители при A, B... меньше ε; замѣняя ихъ черезъ ε, мы усилимъ неравенство, которое по выполненіи интеграцій даетъ намъ, что лѣвая часть $< \theta\varepsilon|x - x_0|$. Понятно, что благодаря произволу выбора ε, правую часть можно сдѣлать какъ угодно малой и слѣдовательно въ предѣлѣ для $m = \infty$

$$\lim \int_{x_0}^{x} \{f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \dots u_{m-1}) - f_1(x, Y, Z, \dots U)\}dx = 0.$$

Слѣдовательно въ предѣлѣ обратятся въ нуль: слѣва первая разность, справа разность интеграловъ, и мы получимъ:

$$Y - y_0 = \int_{x_0}^{x} f_1(x, Y, Z, \ldots U)\, dx .$$

Дифференцируя это равенство, имѣемъ

$$\frac{dY}{dx} = f_1(x, Y, Z \ldots),$$

т.е. мы видимъ, что найденная функція Y удовлетворяетъ первому изъ нашихъ дифференціальныхъ уравненій. Точно такъ же докажемъ, что эти функціи удовлетворяютъ и остальнымъ ур-іямъ. Такимъ образомъ мы доказали, что функціи $Y, Z, \ldots U$ непрерывны, принимаютъ заданныя начальныя значенія и что онѣ удовлетворяютъ даннымъ дифференціальнымъ ур-іямъ (1). Теперь надо показать, что эта система единственная, что другихъ рѣшеній, которыя удовлетворяли бы тѣмъ же условіямъ (А) - нѣтъ. Замѣтимъ, что $y, z \ldots u$, необходимо непрерывныя функціи, имѣющія непрерывныя производныя (послѣднее вытекаетъ изъ того, что эти производныя выражаются написанной выше системой дифференціальныхъ ур-ій). Положимъ, мы нашли одну такую систему рѣшеній:

$$y(x), \quad z(x), \ldots\ldots\ldots u(x) \qquad \text{(I)}$$

и пусть существуетъ другая система рѣшеній:

$$Y(x), \quad Z(x), \ldots\ldots\ldots U(x) \qquad \text{(II)}$$

при чемъ для $x = x_0$ системы (I) и (II) совпадаютъ, для другихъ же значеній x-а онѣ вообще различны. Выдѣлимъ промежутокъ для измѣненія x-а отъ $x_0 - h$ до $x_0 + h$. Геометрически это значитъ, что мы разсматриваемъ значенія x-а на отрѣзкѣ АВ. При этомъ h не

должно превышать того значенія h, которымъ мы выше ограничили область для измѣненій x-а. Разсмотримъ слѣдующія абсолютныя величины разностей:

$$\left|\mathcal{Y}(x) - y(x)\right|;\quad \left|\mathcal{Z}(x) - z(x)\right| \ldots, \left|\mathcal{U}(x) - u(x)\right| \qquad (III)$$

Всѣ эти абсолютныя величины разностей будутъ непрерывныя функціи х-а. Такимъ образомъ мы имѣемъ рядъ положительныхъ (такъ какъ берутся абсолютныя величины) непрерывныхъ функцій; при $x = x_0$ всѣ онѣ равны 0. Въ такомъ случаѣ при измѣненіи х въ данной области можно найти maximum для каждой изъ нихъ. Укажемъ эти maximum'ы для 1-ой, 2-ой и т.д. разностей. Пусть они будутъ соотвѣтственно $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$. При этомъ всѣ эти ε_i maximum'ы, которыхъ достигаютъ наши функціи. Выберемъ изъ нихъ наибольшій. Пусть наибольшій изъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ будетъ ε, тогда для всякаго ε_i

$$\varepsilon_i \leqq \varepsilon .$$

Изъ функцій ряда (III), по крайней мѣрѣ, одна достигаетъ этого значенія ε при нѣкоторомъ х; ε - положительное число, или нуль, если всѣ функціи (I), (II) совпадаютъ. Далѣе, разсмотримъ производныя тѣхъ разностей, абсолютныя величины которыхъ мы ранѣе выписали:

$$\frac{d(\mathcal{Y} - y)}{dx} = f_1(x, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \ldots \mathcal{U}) - f_1(x, y, z \ldots u)$$

$$\frac{d(\mathcal{Z} - z)}{dx} = f_2(x, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \ldots \mathcal{U}) - f_2(x, y, z, \ldots u) \qquad \text{и т.д.}$$

Если теперь проинтегрируемъ эти равенства, то получимъ упомянутыя разности. Интегрируемъ ихъ въ предѣлѣ х и x_0 (при $x = x_0$ получимъ 0 ибо для $x = x_0$ функціи совпадаютъ). Будемъ имѣть:

$$\mathcal{Y} - y = \int_{x_0}^{x} \left\{ f_1(x, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \ldots \mathcal{U}) - f_1(x, y, z, \ldots u) \right\} dx.$$

Имѣя эти выраженія, можно найти наивысшій предѣлъ абсолютныхъ величинъ разностей $\left|\mathcal{Y} - y\right|$ и др. Можно написать, что $\left|\mathcal{Y}(x) - y(x)\right|$

меньше правой части послѣдняго равенства, въ которой подъинтегральную величину замѣнимъ ея абсолютнымъ значеніемъ, а это послѣднее еще большимъ, пользуясь условіемъ Липшица:

$$\left| Y(x) - y(x) \right| < \left| \int_{x_0}^{x} \left\{ A\left|Y - y\right| + B\left|Z - z\right| + \ldots + K\left|U - u\right| \right\} dx \right|.$$

Между прочимъ сейчасъ же являются ограниченія для h. Его надо выбрать такъ, чтобы въ промежуткѣ (характеризуемомъ h) функціи $Y, Z \ldots U$ тоже не выходили изъ указанной области $\mathcal{D}$ (иначе нельзя было бы примѣнить условіе Липшица). Но при $x = x_0$ эти функціи совпадаютъ съ $y, z, \ldots u$, слѣдовательно всегда h можно подобрать столь малымъ, чтобы функціи не выходили изъ области. Замѣнимъ каждую изъ абсолютныхъ величинъ $|Y - y|$, $|Z - z|$ черезъ ε, которая есть наибольшій изъ maximum'овъ этихъ разностей; ε - нѣкоторое положительное число; его вынесемъ за скобки, тогда, обозначивъ черезъ θ сумму:

$$A + B + \ldots + K,$$

будемъ имѣть:

$$\left| Y(x) - y(x) \right| < \theta . \varepsilon . \quad \left| x - x_0 \right| .$$

Совершенно такъ же найдемъ аналогичныя неравенства для остальныхъ разностей. Итакъ, всѣ абсолютныя величины разностей:

$$\left| Y(x) - y(x) \right| ; \quad \left| Z(x) - z(x) \right| \ldots \left| U(x) - u(x) \right|$$

меньше слѣдующаго выраженія:

$$\left| x - x_0 \right| \cdot \theta . \varepsilon < h . \theta . \varepsilon .$$

h пока еще произвольно. Оно только не могло быть больше нѣкоторыхъ чиселъ. Наложимъ еще ограниченія на h. Потребуемъ, чтобы $h\theta$ было меньше или равно $^1/2$, т.е. $h\theta \leqq {}^1/2$. А для этого нужно, чтобы h было $\leqq \frac{1}{2\theta}$; тогда всѣ функціи (III) будутъ меньше $^1/2\,\varepsilon$. Итакъ, мы имѣемъ въ области измѣненія x

отъ $x_0 - h$ до $x_0 + h$:

$$|Y - y| < {}^{1}/{}_{2}\varepsilon; \; |Z - z| < {}^{1}/{}_{2}\varepsilon \ldots\ldots |U - u| < {}^{1}/{}_{2}\varepsilon .$$

Мы пришли къ противорѣчію, такъ какъ черезъ ε мы обозначили наибольшій изъ maximum'овъ въ томъ же самомъ промежуткѣ, который мы выбрали. Выходитъ, что для функцій ряда (III) наибольшій изъ maximum овъ больше всѣхъ ихъ. Противорѣчія не будетъ, если только мы положимъ $\varepsilon = 0$, слѣдовательно функціи совпадаютъ. Итакъ, мы доказали, что для x въ промежуткѣ $x_0 - h$ и $x_0 + h$ наши функціи непремѣнно совпадутъ. Теперь, какимъ же будетъ h? Если оно прежнее, то положеніе наше будетъ доказано. Это будетъ тогда, когда новыя условія для h не будутъ стѣснять ранѣе наложенныхъ условій. Если же новыя требованія не заключаются въ прежнихъ, то еще мы не доказали совпаденія функцій (I) и (II) во всемъ прежнемъ промежуткѣ. Тогда мы можемъ итти далѣе такъ: мы можемъ повторить процессъ, принимая $x_0 + h$ за новое, начальное x_0 и повторять наши разсужденія, пока не исчерпаемъ весь промежутокъ. Такимъ образомъ мы убѣдились, что начальными данными (А) вполнѣ опредѣляется система рѣшеній. При этомъ мы доказали существованіе рѣшенія въ нѣкоторой области. Возникаетъ вопросъ, нельзя ли эти функціи, какъ говорятъ, продолжить. Нельзя ли вычислять эти рѣшенія дальше? Положимъ, что у насъ онѣ вычислены для промежутка $x_0 - h$, $x_0 + h$. Тогда $x_0 + h$ принимаемъ за начальное значеніе перемѣннаго $x_0 + h = x_0'$ тогда у насъ получится новый промежутокъ: отъ $x_0' - h$ до $x_0' + h$, въ которомъ можетъ опять примѣняться методъ Picard'а. Новый промежутокъ будетъ захватывать прежній, но вообще выходитъ изъ него вправо;

такимъ образомъ можемъ "продолжать" наши функціи.

Пусть теперь $n = 1$, т.е. разсмотримъ одно уравненіе перваго порядка, вида:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Примѣняя къ этому уравненію общіе результаты и при выполненіи основныхъ требованій относительно функціи $f(x, y)$, т.е., если функція f непрерывна, конечна и удовлетворяетъ условію Lipschitz'а въ области отъ $x_0 - a$ до $x_0 + a$ и отъ $y_0 - b$ до $y_0 + b$, и если для этихъ значеній $|f(x, y)| < M$, мы получимъ, называя черезъ h меньшее изъ двухъ чиселъ a, $\frac{b}{M}$, для значенія x въ предѣлахъ отъ $x_0 - h$ до $x_0 + h$ (напримѣръ методомъ Picard'а) единственное рѣшеніе y, которое для $x = x_0$ обращается въ y_0. Будемъ измѣнять теперь начальное значеніе y_0; тогда будемъ получать различныя функціи y. Вообще, мы можемъ положить:

$$y = \psi(x, y_0),$$

гдѣ y_0 произвольный параметръ. Наше рѣшеніе есть функція x и одного произвольнаго постояннаго. Мы приходимъ къ тому же результату, съ котораго начали изложеніе теоріи дифференціальныхъ уравненій. Всѣ рѣшенія, вообще говоря, исчерпываются уравненіемъ

$$y = \psi(x, y_0).$$

Можетъ получиться рѣшеніе и въ другой формѣ:

$$y = \varphi(x, C),$$

гдѣ C - произвольное постоянное. Будетъ ли это общее рѣшеніе? Вообще да, и мы можемъ дать критерій для разрѣшенія этого вопроса. Общее рѣшеніе то, которое можетъ получаться по теоремѣ Коши. Итакъ, вопросъ въ томъ, можемъ ли мы опредѣлить C такъ, чтобы при $x = x_0$, было $y = y_0$. Условіе

$$y_0 = \varphi(x_0, C)$$

вообще позволяетъ найти значеніе C для любого y_0; итакъ, наше рѣшеніе

$$y = \varphi(x, C)$$

есть также общее рѣшеніе, совпадающее съ тѣмъ, существованіе котораго мы доказали.

---

§ 11. ОСОБЫЯ РѢШЕНІЯ.

Переходимъ къ изслѣдованію особыхъ рѣшеній дифференціальнаго уравненія, т.е. такихъ рѣшеній, которыя не получаются изъ общаго ни при какихъ частныхъ значеніяхъ произвольнаго постояннаго. Пусть дифференціальное уравненіе дано въ видѣ:

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

и пусть

$$y = \varphi(x)$$

есть рѣшеніе уравненія (1). Даемъ x какое-нибудь значеніе x_0 и вычисляемъ

$$y_0 = \varphi(x_0).$$

По теоремѣ Коши существуетъ единственное рѣшеніе уравненія(1), которое при $x = x_0$ принимаетъ значеніе y_0, если только въ области значеній x_0, y_0 функція $f(x,y)$ удовлетворяетъ извѣстнымъ ограниченіямъ (непрерывность, условіе Липшица). Такимъ образомъ рѣшеніе

$$y = \varphi(x),$$

вообще говоря, получается по теоремѣ Коши и слѣдовательно оно есть частное, получаемое изъ общаго при частномъ значеніи произвольнаго постояннаго. Если бы для выбраннаго значенія x_0 и соотвѣтствующаго y_0 функція $f(x,y)$ не удовлетворяла условіямъ теоремы Коши, то мы могли бы измѣнить x_0 и такимъ образомъ въ концѣ концовъ все же получили бы:

$$y = \varphi(x)$$

какъ частное рѣшеніе по теоремѣ Коши. Отсюда ясно, что рѣшеніе

$$y = \varphi(x)$$

не получается по теоремѣ Коши и слѣдовательно можетъ быть особымъ только тогда, если для л ю б о г о x и для соотвѣтствующаго

$$y = \varphi(x)$$

функція $f(x, y)$ не удовлетворяетъ условіямъ теоремы Коши. Такъ напримѣръ, если предположить, что функція $f(x, y)$ для всѣхъ конечныхъ значеній аргументовъ непрерывна и что существуетъ непрерывная частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$, то, принимая во вниманіе изложенное въ предыдущемъ параграфѣ, легко убѣдимся, что если

$$y = \varphi(x)$$

есть особое рѣшеніе, то для любого x и $y = \varphi(x)$ частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ должна обращаться въ безконечность. Въ самомъ дѣлѣ, въ противномъ случаѣ для какого-либо x_0 и

$$y_0 = \varphi(x_0)$$

функція $f(x, y)$ удовлетворяла бы условію Липшица и рѣшеніе

$$y = \varphi(x)$$

было бы частнымъ.

П Р И М Ѣ Р Ъ 1. $$y' = \sqrt{y - x} + 1.$$

Здѣсь $$f(x, y) = \sqrt{y - x} + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y - x}}.$$

По предыдущему особое рѣшеніе можетъ получиться только изъ требованія, чтобы $\frac{\partial f}{\partial y}$ обращалось въ безконечность, что даетъ намъ

$$y = x.$$

При этомъ значеніи y имѣемъ:

$$y' = 1,$$

и дифференціальное уравненіе удовлетворяется; слѣдовательно, мы получили рѣшеніе уравненія. Общее рѣшеніе легко получимъ, освобождая уравненіе отъ радикала и замѣчая, что оно принадлежитъ къ типу уравненій Лагранжа. Имѣемъ:

$$y = x + \frac{(x - C)^2}{4}.$$

Ни при какомъ постоянномъ значеніи C отсюда не получимъ $y = x$, слѣдовательно, это послѣднее рѣшеніе есть особое.

Предположимъ теперь дифференціальное уравненіе въ общемъ видѣ:

$$\mathcal{F}(x, y, y') = 0 \qquad (2)$$

Разрѣшая его, имѣемъ вообще нѣсколько значеній y':

$$y' = f_i(x, y) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (3)$$

Пара значеній x_0, y_0, слѣдовательно, опредѣляетъ здѣсь не одно рѣшеніе, а нѣсколько въ силу той же теоремы Коши, такъ какъ мы можемъ эту теорему примѣнить къ любому изъ уравненій (3). Ограничимся такими уравненіями (2), для которыхъ функція $\mathcal{F}(x, y, y')$ конечна и непрерывна для всѣхъ конечныхъ значеній аргументовъ и допускаетъ таковыя же производныя по аргументамъ. Въ этомъ предположеніи опредѣлимъ условія, при которыхъ рѣшеніе

$$y = \varphi(x)$$

уравненія (2) можетъ быть особымъ рѣшеніемъ. По извѣстной теоремѣ теоріи функцій ур-іе (2) опредѣляетъ y' какъ функцію x и y, и эта функція $f(x, y)$ конечна и непрерывна и допускаетъ таковыя же производныя, если только для разсматриваемыхъ значеній аргументовъ частная производная $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'}$ не равна нулю. (Въ частности производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ опредѣляется изъ равенства:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = 0).$$

Такимъ образомъ, если для какого-либо x_0 и соотвѣтствующихъ

$$y_0 = \varphi(x_0) \quad \text{и} \quad y' = \varphi'(x_0)$$

частная производная

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} \neq 0,$$

то рѣшеніе

$$y = \varphi(x)$$

получается по теоремѣ Коши, такъ какъ функція

$$y' = f(x, y)$$

удовлетворяетъ для x_0, y_0 условіямъ теоремы. Отсюда заключаемъ, что если рѣшеніе

$$y = \varphi(x)$$

есть особое, то для любого x, для

$$y = \varphi(x) \quad \text{и} \quad y' = \varphi'(x)$$

должно удовлетворяться уравненіе

$$\frac{\partial \mathcal{F}(x, y, y')}{\partial y'} = 0 \tag{4}$$

Соотношеніе это имѣетъ видъ:

$$\Psi(x, y, y') = 0 \tag{4}$$

и слѣдовательно особое рѣшеніе

$$y = \varphi(x)$$

должно удовлетворять одновременно д в у м ъ дифференціальнымъ уравненіямъ (2) и (4), откуда ясно, что, вообще говоря, уравненіе (2) не допускаетъ особыхъ рѣшеній.

Исключивъ y' изъ уравненій (2) и (4), придемъ къ одному уравненію

$$\mathcal{R}(x, y) = 0, \tag{5}$$

которое должно удовлетворяться для $y = \varphi(x)$ въ случаѣ существованія особаго рѣшенія; такимъ образомъ равенство (5) въ этомъ случаѣ есть особый интегралъ. Но, вообще говоря, соотношеніе (5) не есть вовсе интегралъ ур-ія (2) и у, опредѣленное изъ ур-ія (5), не удовлетворяетъ данному дифференціальному ур-ію. Истолковывая х,у какъ Декартовы координаты на плоскости, скажемъ, что ур-іе (5) опредѣляетъ такъ называемую "дискриминантную кривую". Уравненіе этой кривой даетъ особый интегралъ, если онъ сушестуетъ. Для рѣшенія этого вопроса изъ ур-ія (5) опредѣляемъ у и вставляемъ въ ур-іе (2); если оно удовлетворяется, то найденное у можетъ быть особымъ рѣшеніемъ. Вообще говоря, дискриминантная кривая не есть интегральная кривая, и можно бы показать, что она есть геометрическое мѣсто точекъ возврата интегральныхъ кривыхъ, опредѣляемыхъ уравненіемъ общаго интеграла.

Для особаго рѣшенія, если оно существуетъ, не трудно кромѣ ур-ій (2) и (4) получить еше третье ур-іе, которому оно должно удовлетворять. Въ самомъ дѣлѣ, продифференцируемъ по х ур-іе (2) въ предположеніи, что у замѣнено его значеніемъ

$$y = \varphi(x);$$

получаемъ: $$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot y'' = 0$$

или принимая во вниманіе уравненіе (4):

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0 \qquad (6)$$

Такимъ образомъ особое рѣшеніе должно удовлетворять одновременно тремъ уравненіямъ (2), (4) и (6). Для произвольно за -

даннаго ур-ія (2) три уравненія (2), (4), (6), вообще говоря, удовлетворяются только для отдѣльныхъ системъ численныхъ значеній трехъ аргументовъ x, y, y' и слѣдовательно, мы не получаемъ особаго рѣшенія. Условимся называть систему значеній x, y, y' э л е м е н т о м ъ; тогда скажемъ, что ур-ія (2), (4), (6) опредѣляютъ одинъ или нѣсколько элементовъ, которые назовемъ особыми элементами. Особое рѣшеніе можетъ получиться только тогда, когда изъ трехъ ур-ій (2) (4), (6) одно есть слѣдствіе двухъ другихъ, такъ что они опредѣляютъ многообразіе элементовъ одного измѣренія, ибо для особаго рѣшенія имѣемъ :

$$y = \varphi(x), \qquad y' = \varphi'(x)$$

и x остается произвольнымъ.

Резюмируя предыдущее, получаемъ такіе 2 метода изысканія особыхъ рѣшеній:

1) Изъ ур-ій (2) и (4) исключаемъ y'; полученное ур-іе (5) есть вообще говоря, особый интегралъ, если y, опредѣляемое имъ, удовлетворяетъ данному уравненію (2).

2) Беремъ ур-ія (2), (4), (6); если они эквивалентны двумъ ур-іямъ, такъ что при исключеніи y' получаемъ только одно ур-іе между x и y, то это послѣднее есть, вообще говоря, особый интегралъ.

Получивъ тѣмъ или другимъ пріемомъ рѣшеніе

$$y = \varphi(x),$$

мы должны еще провѣрить, будетъ ли оно дѣйствительно особымъ, а не частнымъ рѣшеніемъ, т.е. не получится ли оно изъ общаго при какомъ-нибудь частномъ значеніи произвольнаго постояннаго.

П Р И М Ѣ Р Ъ 2.

$$y^2(1+y'^2) - \mathfrak{R}^2 = 0.$$

Дифференцируя по y', имѣемъ:

$$2\,y^2 y' = 0.$$

Исключая y', получаемъ (такъ какъ изъ 2-го $y' = 0$)

$$y^2 - \mathfrak{R}^2 = 0$$

или

$$y = \pm\mathfrak{R}.$$

Дифференцируя по x, имѣемъ:

$$y' = 0$$

и, слѣдовательно, данное уравненіе удовлетворяется.

$$y = \pm\mathfrak{R}$$

есть рѣшеніе, притомъ особое, какъ нетрудно провѣрить, т.к. общій интегралъ легко получается раздѣленіемъ перемѣнныхъ въ видѣ:

$$(x - C)^2 + y^2 = \mathfrak{R}^2,$$

откуда ни при какомъ значеніи постояннаго C не получимъ

$$y = \pm\mathfrak{R}.$$

Истолковывая x, y какъ Декартовы координаты на плоскости, видимъ, что общій интегралъ опредѣляетъ семейство круговъ радіуса $\mathfrak{R}$ съ центрами на оси x, а особый интегралъ опредѣляетъ пару прямыхъ, параллельныхъ оси x и проходящихъ отъ нея на разстояніи $\pm\mathfrak{R}$. Очевидно, всѣ круги касаются этихъ прямыхъ.

П Р И М Ѣ Р Ъ 3. Разсмотримъ произвольное линейное ур-іе:

$$P_0 y' + P_1 y + P_2 = 0,$$

гдѣ P_0, P_1, P_2 - функціи x. Дифференцируя по y', получаемъ:

$$P_0 = 0,$$

откуда для x получаемъ опредѣленныя численныя значенія; та -

кимъ образомъ линейное уравненіе не допускаетъ особаго рѣше - нія.

Разсмотримъ какое-либо частное рѣшеніе $y = \varphi(x)$ ур-ія (2). Докажемъ, что въ числѣ его элементовъ

$$x, \quad y = \varphi(x), \qquad y' = \varphi'(x)$$

необходимо находятся особые элементы. Въ самомъ дѣлѣ имѣемъ тождество:

$$\mathcal{F}[x, \ \varphi(x), \ \varphi'(x)] = 0.$$

дифференцируя по x, получаемъ:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\varphi'(x) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'}\varphi''(x) = 0 \qquad (7)$$

Присоединимъ равенство (4), которое по подстановкѣ

$$y = \varphi(x), \qquad y' = \varphi'(x)$$

обращается въ уравненіе, содержащее только x, изъ котораго найдемъ одно или нѣсколько численныхъ значеній $x=a$ и затѣмъ соотвѣтствующихъ значеній $y = \varphi(a), \qquad y' = \varphi'(a)$

Для этихъ же значеній равенство (7) обращается, въ силу ур-ія (4), въ ур-іе (6), и такимъ образомъ элементъ

$$x = a, \quad y = \varphi(a), \qquad y' = \varphi'(a)$$

есть особый.

Предположимъ теперь, что ур-іе (2) допускаетъ особое рѣшеніе; всѣ элементы x, y, y' этого рѣшенія суть особые элементы. Прибѣгая къ обычному геометрическому истолкованію, можемъ въ этомъ случаѣ сказать, что всѣ интегральныя кривыя касаются интегральной кривой, опредѣляемой ур-іемъ особаго интеграла. Въ самомъ дѣлѣ, согласно предыдущему, всякое рѣшеніе имѣетъ общій элементъ съ особымъ рѣшеніемъ, а это и значитъ, что определяемый этими рѣшеніями кривыя соприкасаются и, слѣдовательно, "особая" интегральная кривая есть огибающая всѣхъ прочихъ. На основаніи изложеннаго приходимъ къ новому методу определенія особаго рѣшенія.

Пусть мы имѣемъ общій интегралъ

$$\Phi\ (x,\ y,\ C) = 0 \tag{8}$$

дифференціальнаго ур-ія (2). Равенство (8) опредѣляетъ семейство интегральныхъ кривыхъ, зависящее отъ одного параметра C. Находимъ огибающую этого семейства, исключая C изъ двухъ уравненій (8) и

$$\frac{\partial \Phi\ (x,\ y,\ C)}{\partial C} = 0 \tag{9}$$

Такъ какъ въ точкахъ огибающей касательныя ея совпадаютъ съ касательными кривыхъ семейства, то элементы x, y, y' для огибающей суть въ то же время элементы различныхъ частныхъ рѣшеній, получаемыхъ изъ ур-ія (8), и слѣдовательно непосредственно ясно, что ур-іе огибающей есть интегралъ дифференціальнаго ур-ія (2); притомъ этотъ интегралъ - вообще особый, какъ это явствуетъ изъ предыдущаго.

Можетъ однако случиться, что огибающая есть въ то же время одна изъ кривыхъ семейства (8), тогда мы этимъ методомъ получимъ не особое рѣшеніе, а частное.x)

Наконецъ, возможно, что при исключеніи C изъ ур-ій (8) и (9) мы не получимъ огибающей, а геометрическое мѣсто особыхъ точекъ интегральныхъ кривыхъ; тогда дифференціальное ур-іе (2) не допускаетъ особаго рѣшенія.

x) Иногда, впрочемъ, называютъ рѣшеніе такого рода одновременно особымъ и частнымъ.

Дадимъ независимое обоснованіе 2-му методу изысканія особаго рѣшенія. Изъ общаго интеграла (8) получаемъ общее рѣшеніе:

$$y = \psi(x,\ C) \tag{10}$$

Подставляя въ дифференціальное ур-іе, которое предположимъ въ разрѣшенномъ видѣ (1), получимъ

$$\frac{\partial \psi(x,C)}{\partial x} = f\left\{x,\ \psi(x,C)\right\} \tag{11}$$

Равенство(11) выполняется для любого значенія постояннаго C, а слѣдовательно оно есть тождество. Введемъ вмѣсто y новое переменное z, полагая

$$y = \psi(x,\ z) \tag{12}$$

Уравненіе (1) принимаетъ видъ:

$$\frac{\partial \psi(x,\ z)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(x,\ z)}{\partial z} \cdot z' = f\left\{x,\ \psi(x,z)\right\} \tag{13}$$

но въ силу тождества (11)

$$\frac{\partial \psi(x,\ z)}{\partial x} = f\left\{x,\ \psi(x,\ z)\right\}$$

и слѣдовательно имѣемъ окончательно:

$$\frac{\partial \psi(x,\ z)}{\partial z} z' = 0 \tag{14}$$

Отсюда или $z' = 0$, или

$$\frac{\partial \psi(x,z)}{\partial z} = 0 \tag{15}$$

Первое предположеніе даетъ намъ $z = C$ и слѣдовательно приводитъ къ общему рѣшенію (10). Второе предположеніе даетъ рѣшеніе, которое получимъ, исключая z изъ двухъ равенствъ (12) и (15). Вмѣсто этого можемъ, конечно, исключить постоянное C изъ двухъ равенствъ (10) и

$$\frac{\partial \psi(x,C)}{\partial C} = 0 \tag{16}$$

Рѣшеніе, которое получимъ, есть , вообще говоря, особое, т.к.

не получается изъ общаго при постоянномъ значенiи C. Въ самомъ дѣлѣ/, мы получимъ его, подставляя въ (10) значенiе C, полученное изъ уравненiя (16),откуда C выражается въ функцiи x .

Если сохранимъ общiй интегралъ въ видѣ (8),то производная $\frac{\partial \psi}{\partial C}$ опредѣлится, если продифференцируемъ ур-iе (8) по C , считая y функцiей ψ(x,C) отъ x и C; получаемъ:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial C} = 0,$$

и условiе (16) приводитъ насъ къ требованiю:

$$\frac{\partial \Phi \quad (x,\ y,\ C)}{\partial C} = 0 \qquad (9)$$

Такимъ образомъ особый интегралъ получается исключенiемъ C изъ двухъ ур-iй (8) и (9), изъ которыхъ 2-ое получается дифференцированiемъ 1-го по C.

Истолковывая геометрически послѣднiй результатъ, придемъ къ прежнимъ геометрическимъ соотношенiямъ.

Сопоставляя первый и второй методы, мы,повидимиму, приходимъ къ противорѣчiю: съ точки зрѣнiя 1-го метода дифференцiальное ур-iе (1), вообще говоря, не допускаетъ особаго интеграла; съ точки зрѣнiя 2-го метода особый интегралъ вообще существуетъ, т.к. семейство (8) интегральныхъ кривыхъ , вообще говоря, допускаетъ огибающую. Парадоксъ этотъ разрѣшается, если замѣтимъ, что терминъ "вообще говоря" употребляется здѣсь въ двухъ разныхъ смыслахъ: въ 1-мъ случаѣ, "вообще говоря"значитъ - для произвольно взятаго дифференцiальнаго ур-iя(2): во 2-мъ случаѣ - для произвольно взятаго общаго интеграла (8).

Опредѣляя особый интегралъ тѣмъ или другимъ методомъ,мы должны всегда въ заключеніе провѣрить, будетъ ли полученный интегралъ дѣйствительно особымъ, а не частнымъ.

П Р И М Ѣ Р Ъ. 4. Пусть дано соотношеніе

$$(y - C)^2 = (x - C)^3,$$

которое есть общій интегралъ дифференціальнаго уравненія:

$$x - y = \frac{4}{9} y'^2 - \frac{8}{27} y'^3 .$$

Дифференцируя по C, имѣемъ:

$$2 (y - C) = 3 (x - C)^2.$$

Изъ двухъ уравненій или

$$y - C = 0, \quad x - C = 0,$$

или

$$x - C = \frac{4}{9}, \qquad y - C = \frac{8}{27} .$$

исключая C, получаемъ:

$$x - y = 0 \qquad \text{или} \quad x - y = \frac{4}{27},$$

въ первомъ предположеніи

$$y = x, \qquad y' = 1,$$

и дифференціальное ур-іе не удовлетворяется. Во 2-мъ предположеніи

$$y = x - \frac{4}{27}, \qquad y' = 1,$$

и дифференціальное ур-іе удовлетворяется. Такимъ образомъ

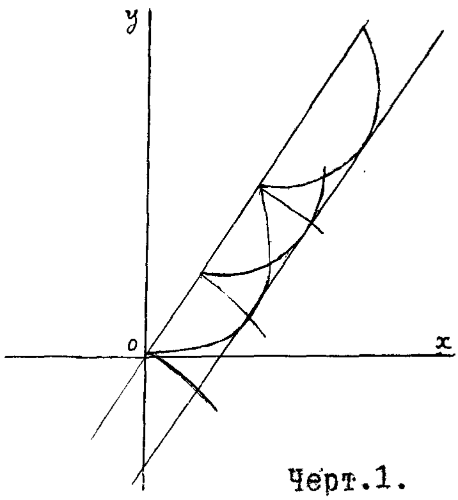
$$y = x - \frac{4}{27}$$

есть рѣшеніе, притомъ особое, такъ какъ не получается изъ общаго интеграла ни при какомъ постоянномъ значеніи C.

Геометрическое истолкованіе нашихъ результатовъ слѣдующее: общій интегралъ опредѣляетъ семейство полукубическихъ параболъ, имѣющихъ точки заостренія на равнодѣлящей y=x координатнаго угла. Въ самомъ дѣлѣ, при C = 0 получаемъ полукубическую параболу.

$$y^2 = x^3 ;$$

всѣ остальныя получаются изъ нея передвиженіемъ по направленію вышеупомянутой равнодѣлящей, т.к. точка заостренія при любомъ C имѣетъ координаты $x = C$, $y = C$.



Черт.1.

Прямая $y = x$, полученная при изысканіи огибающей, не есть огибающая, а геометрическое мѣсто точекъ заостренія интегральныхъ кривыхъ. Прямая

$$x - y = \frac{4}{27} ,$$

параллельная равнодѣлящей есть огибающая семейства (ср.черт.1).

П Р И М Ѣ Р Ъ 5. Дифференціальное уравненіе

$$9yy'^2 = 4$$

допускаетъ общій интегралъ

$$y^3 = (x-C)^2 ,$$

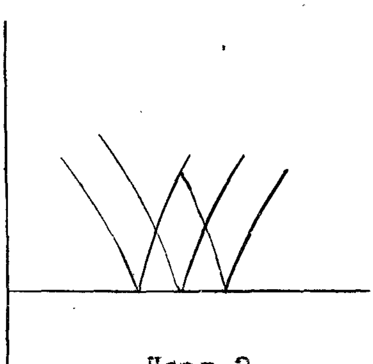
опредѣляющій семейство полукубическихъ параболъ, имѣющихъ точку заостренія (C, 0) на оси x (черт.2). Дифференцируя по C, имѣемъ:

$$- 2(x-C) = 0;$$

исключая C, получаемъ

$$y = 0$$

- уравненіе оси x. Очевидно, эта прямая - не огибающая, а геометрическое мѣсто точекъ заостренія



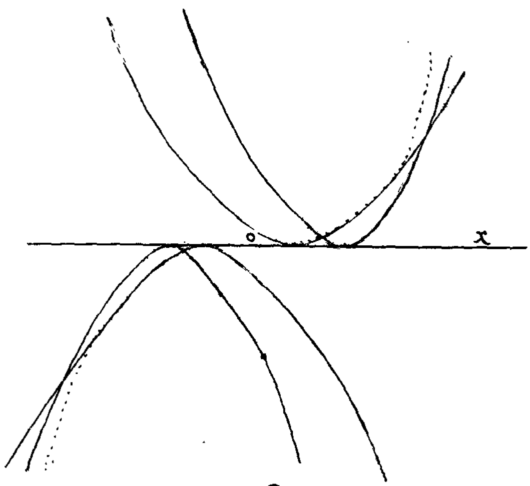
Черт.2.

интегральныхъ кривыхъ. Дифференцируя $y = 0$, получаемъ $y' = 0$.

и дифференціальное ур-іе не удовлетворяется; такимъ образомъ особаго рѣшенія нѣтъ.

П Р И М Ѣ Р Ъ 6. Дифференціальное уравненіе

$$y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$$



Черт.3.

допускаетъ общій интегралъ

$$y = C\,(x-C)^2,$$

который опредѣляетъ семейство параболъ съ діаметрами, параллельными оси y и съ вершинами на оси x. Параметръ параболы приближается къ нулю по мѣрѣ приближенія вершины къ началу координатъ, и при C = 0 получаемъ ур-іе y = 0 оси x, - параболы раскрываются въ прямую (черт.3).

Дифференцируя по C, имѣемъ

$$0 = (x-C)^2 - 2C\,(x - C),$$

или

$$(x-C\quad(x - 3C) = 0.$$

Отсюда, или

$$x - C = 0, \quad \text{или} \quad x - 3C = 0.$$

Исключая C въ первомъ предположеніи, получаемъ

$$y = 0,$$

а во второмъ

$$y = \frac{4}{27}\,x^3$$

Дифференцируя по x, имѣемъ въ томъ и другомъ случай соотвѣтственно

$$y' = 0 \quad \text{и} \quad y' = \frac{4}{9}\,x^2.$$

Данное дифференціальное ур-іе удовлетворяется и, слѣдовательно, мы получили два рѣшенія. Но первое есть частное, т.к. получается изъ общаго при C = 0, а второе особое, такъ какъ ни при какомъ постоянномъ значеніи C не получается изъ общаго Уравненіе y = 0 опредѣляетъ ось x, которая, правда, есть огибающая семейства параболъ, опредѣляемаго общимъ интеграломъ но въ то же время есть одна изъ параболъ семейства (при C = 0); уравненіе

$$y = \frac{4}{27}x^3$$

опредѣляетъ кубическую параболу, которая есть огибающая семейства.

---

§ 12. ЗАДАЧА О ТРАЭКТОРІЯХЪ.

Къ дифференціальнымъ ур-іямъ 1-го порядка приводится рѣшеніе многихъ задачъ дифференціальной геометріи. Разсмотримъ одну изъ нихъ, именно задачу о траэкторіяхъ.

Положимъ, что имѣемъ семейство кривыхъ съ однимъ параметромъ α:

$$\mathcal{F}(x, y, \alpha) = 0 \qquad (1)$$

Будемъ искать такую кривую, которая пересѣкала бы каждую изъ данныхъ кривыхъ подъ постояннымъ угломъ θ, и пусть $tg\,\theta = m$.

Искомая линія называется траэкторіей; если этотъ уголъ прямой, траэкторія называется ортогональной, въ общемъ случаѣ — изогональной. Пусть τ и τ' – углы касательныхъ къ кривой семейства и къ траэкторіи съ осью x, тогда

$$\tau - \tau' = \theta, \quad \text{а} \quad tg\,\theta = m = tg\,(\tau - \tau') = \frac{tg\,\tau - tg\,\tau'}{1 + tg\,\tau \cdot tg\,\tau'} \qquad (A)$$

Опредѣлимъ $tg\,\tau$ и $tg\,\tau'$. Дифференцируемъ уравненіе (1):

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\cdot y' = 0, \qquad y' = tg\,\tau .$$

Откуда

$$tg\tau = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad ; \qquad tg\tau' = \frac{dy}{dx} ,$$

при чемъ y взято изъ уравненія искомой траэкторіи; подставляемъ въ предыдущее равенство:

$$m = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dy}{dx}} \tag{2}$$

Пусть (x, y) - координаты точки пересѣченія траэкторіи съ одной изъ нашихъ кривыхъ семейства. Для этихъ координатъ, для производной $\frac{dy}{dx}$ и для параметра α удовлетворяются ур-ія (1) и (2). При этомъ α мѣняется съ переходомъ отъ одной кривой семейства къ другой. Наша цѣль получить уравненіе между координатами точекъ траэкторіи и производной $\frac{dy}{dx}$, т.е. дифференціальное уравненіе траэкторіей. Для этого параметръ α исключаемъ изъ ур-ій (1) и (2) и получаемъ уравненіе вида:

$$\psi\left(x, \quad y, \quad \frac{dy}{dx} \right) = 0, \tag{3}$$

которое будетъ дифференціальнымъ ур-іемъ траэкторій. Найдя общій интегралъ ур-ія (3) получимъ семейство траэкторій, т.к. въ общій интегралъ войдетъ постоянное C. Въ частности полагая $\theta = \frac{\pi}{2}$ и слѣд. $tg\,\theta = \infty$, получимъ, что знаменатель въ (2) равенъ нулю, т.е. получимъ:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \tag{2'}$$

Такимъ образомъ для полученія дифференціальнаго ур-ія ортогональныхъ траэкторій, нужно будетъ исключить α изъ ур-ій (1) и (2'). Если θ не равно $\frac{\pi}{2}$, то въ самой постановкѣ задачи за -

ключается двойственность, ибо мы могли положить по произволу $\theta = \tau - \tau'$ или $\theta = \tau' - \tau$, что соотвѣтствовало бы измѣненію знака у m. Замѣняя m черезъ $-m$, получимъ другое семейство изогональныхъ траекторій, которыя пересѣкаютъ данное семейство кривыхъ подъ такимъ же угломъ, только отсчитываемымъ въ другую сторону. Замѣтимъ, что рѣшеніе задачи упрощается, если семейство данныхъ кривыхъ опредѣляется не уравненіемъ вида (1), а дифференціальнымъ ур-іемъ 1-го порядка, которое мы могли бы получить, продифференцировавъ ур-іе (1) и исключивъ α; тогда получили бы ур-іе вида

$$\Phi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{4}$$

Предположимъ, что намъ непосредственно дано это ур-іе (4). Ур-іе (4) устанавливаетъ связь между координатами точки (x, y) и tg-сомъ угла касательной къ кривымъ семейства съ осью x. Въ той же точкѣ (x, y) имѣемъ другую касательную - касательную къ нашей траекторіи. Между этими двумя tg-сами существуетъ соотношеніе (A), которое было дано выше. Одинъ изъ этихъ tg-совъ можно опредѣлить черезъ другой:

$$tg\,\tau = \frac{m + tg\,\tau'}{1 - m\,tg\,\tau'};$$

замѣнимъ въ ур-іи (4) $\frac{dy}{dx}$ этимъ выраженіемъ, при чемъ $tg\,\tau'$ есть производная y по x, взятая изъ ур-ія траекторіи; назвавъ ее черезъ y', имѣемъ

$$\Phi\left(x, y,\ \frac{m + y'}{1 - my'}\right) = 0 \tag{5}$$

Это ур-іе имѣетъ мѣсто въ каждой точкѣ x, y траекторіи и есть ихъ дифференціальное ур-іе. Особенно простой результатъ получается, когда траекторіи ортогональны. Въ этомъ случаѣ

$$tg\,\tau = -\frac{1}{tg\,\tau'}$$

и мы получаемъ
$$\Phi\left(x,\ y,\ -\frac{1}{y'}\right) = 0. \qquad (5')$$

Это дифференціальное ур-іе ортогональныхъ траэкторій для случая, когда данное семейство опредѣляется ур-іемъ (4).

П Р И М Ѣ Р Ъ 1 . Будемъ искать изогональныя траэкторіи пучка прямыхъ, уравненіе котораго
$$y = \alpha x;$$
напишемъ равенство (2):
$$m = \frac{\alpha - \dfrac{dy}{dx}}{1 + \alpha\dfrac{dy}{dx}} \quad ; \qquad \text{исключая } \alpha \text{ имѣемъ: } m = \frac{\dfrac{y}{x} - \dfrac{dy}{dx}}{1 + \dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{dy}{dx}}$$

Это и есть дифференціальное ур-іе траэкторій. Освободившись отъ знаменателя, будемъ имѣть:
$$m + m\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{dy}{dx};\ \frac{dy}{dx}\left(1 + m\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} - m,$$

Интегрируется это ур-іе легко при помощи общихъ методовъ интеграціи. Но можно поступить и иначе. Преобразуемъ это ур-іе въ полярныя координаты:
$$\frac{y}{x} = tg\varphi,\ \frac{dy}{dx} = \frac{dr\sin\varphi + r\cos\varphi\,d\varphi}{dr\cos\varphi - r\sin\varphi\,d\varphi},$$
$$(m\sin\varphi - \cos\varphi)\cdot(dr\sin\varphi + r\cos\varphi\,d\varphi) =$$
$$= (\sin\varphi - m\cos\varphi)\cdot(dr\cos\varphi - r\sin\varphi\,d\varphi);$$
выполняя перемноженіе, произведя сокращенія, находимъ:
$$m\,dr = -r\,d\varphi; \quad \frac{dr}{r} = -\frac{d\varphi}{m}; \quad lg\,r = lg\,K - \frac{1}{m}\varphi,$$
или
$$r = Ke^{-\frac{\varphi}{m}},$$
гдѣ K - постоянное. Получили семейство логариѳмическихъ спиралей.

П Р И М Ѣ Р Ъ 2. Найдемъ ортогональныя траэкторіи семейства параболъ, которыя касаются оси x въ одной точкѣ, а именно въ началѣ координатъ. Въ такомъ случаѣ ур-іе параболъ будетъ

$$y = \alpha x^2,$$

или

$$y - \alpha x^2 = 0.$$

Равенство (2') даетъ намъ:

$$1 + 2\alpha x \frac{dy}{dx} = 0;$$

Исключаемъ α:

$$\alpha = \frac{y}{x^2};$$

имѣемъ:

$$1 + 2 \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

или

$$x dx + 2y dy = 0.$$

Перемѣнныя раздѣлены. Интегрируемъ и находимъ:

$$x^2 + 2y^2 - C = 0.$$

Траэкторіи суть эллипсы съ центрами въ началѣ координатъ. Приводя это ур-іе въ надлежащій видъ, найдемъ:

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{\frac{C}{2}} = 1;$$

слѣдовательно $\sqrt{C}$ - большая полуось; а $\sqrt{\frac{C}{2}}$ - малая полуось.

----- oOo -----

УРАВНЕНІЯ ВЫСШИХЪ ПОРЯДКОВЪ

§ 13. ИНТЕГРАЛЫ УР-IЙ ВЫСШАГО ПОРЯДКА.

Дифференціальное ур-iе n-го порядка есть соотношеніе вида:

$$\mathcal{F}(x, y, y', y'', \ldots\ldots y^{(n)}) = 0, \qquad (1)$$

гдѣ $y', y'', \ldots y^{(n)}$ суть производныя отъ y. Докажемъ, что дифференціальное ур-iе n-го порядка эквивалентно системѣ ур-iй 1-го порядка. Введемъ новыя функціи $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ и разсмотримъ систему:

$$\mathcal{F}(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, \frac{dy_{n-1}}{dx}) = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = y_1 ; \frac{dy_1}{dx} = y_2 ; \frac{dy_2}{dx} = y_3 ; \ldots \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1} \qquad (3)$$

Всего мы имѣемъ n уравненій, и всѣ они 1-го порядка. Изъ уравненій (3) имѣемъ:

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = y',$$

затѣмъ

$$y_2 = \frac{dy_1}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \quad y_3 = \frac{dy_2}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$$

и такъ далѣе;

$$y_{n-2} = \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = y^{(n-2)},$$

и, наконецъ,

$$y_{n-1} = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = y^{(n-1)}$$

откуда еще

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)},$$

и уравненіе (2) обращается въ слѣдующее:

$$\mathcal{F}(x,\ y,\ y' \ \ldots\ldots\ y^{(n)}) = 0,$$

т.е. совпадаетъ съ даннымъ уравненіемъ (1).

Примѣняя къ системѣ ур-ій 1-го порядка (2), (3) теорему Коши и замѣчая, что неизвѣстными функціями этой системы являются y и послѣдовательныя производныя y', y'',...., приходимъ къ слѣдующему результату для уравненія (1):

Дифференціальное ур-іе n-го порядка (1) допускаетъ рѣшеніе y, опредѣляемое начальными условіями:

$$\text{при } x = x_0; \quad y = y_0\ , \quad y' = y_0', \ldots\ldots\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

гдѣ y_0, y_0', ... $y_0^{(n-1)}$ - данныя численныя значенія y и первыхъ $(n-1)$ его производныхъ. При этомъ условія теоремы Коши, очевидно, всегда выполняются для правыхъ частей ур-ій (3) системы 1-го порядка, и остается примѣнить ихъ къ правой части ур-ія (2), по разрѣшеніи его относительно производной:

$$\frac{d\,y_{n-1}}{d\,x}$$

или, всеравно, къ правой части ур-ія (1) по разрѣшеніи относительно n-ой производной $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y' \ldots\ y^{(n-1)}) \tag{4}$$

Такимъ образомъ функція f въ правой части ур-ія (4) должна быть конечной, непрерывной и должна удовлетворять условію Липшица въ области измѣненія аргументовъ $x, y, y', \ldots\ y^{(n-1)}$, къ которой принадлежитъ система значеній x_0, y_0, y_0', ... $y_0^{(n-1)}$. Опредѣляемое начальными данными рѣшеніе y - единственное, если ур-іе (1) даетъ единственное значеніе (4) для $y^{(n)}$; если же изъ ур-ія (1) имѣемъ различныя значенія:

$$y^{(n)} = f_i(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}), \quad (i = 1,2,3,\ldots), \tag{5}$$

то каждому ур-iю (5) или, иначе говоря, каждому значенiю

$$y_0^{(n)} = f_i(x_0,\ y_0,\ y_0', \ldots\ldots y_0^{(n-1)})$$

соотвѣтствуетъ свое рѣшенiе y.

Предполагая, что начальныя значенiя y_0, $y_0', \ldots y_0^{(n-1)}$ (при данномъ численномъ значенiи $x=x_0$) - произвольные параметры, мы видимъ, что соотвѣтствующее рѣшенiе

$$y = \psi(x,\ y_0,\ y_0', \ldots\ldots y_0^{(n-1)})$$

зависитъ отъ выбора этихъ параметровъ и, являясь такимъ образомъ функцiей x и n произвольныхъ параметровъ, есть такъ называемое общее рѣшенiе, изъ котораго получаются рѣшенiя, отвѣчающiя теоремѣ Коши, при различныхъ значенiяхъ этихъ параметровъ. Отсюда ясно, что какой-либо интегралъ

$$\Phi\ (x,\ y, C_1, C_2, \ldots\ldots C_n) = 0 \tag{6}$$

уравненiя (1), содержащiй n произвольныхъ постоянныхъ, есть общiй, если эти постоянныя можно опредѣлить такъ, чтобы при $x = x_0$ имѣть

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \ldots\ldots y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

для любыхъ y_0, $y_0' \ldots y_0^{(n-1)}$. Дифференцируя ур-iе (6) $(n-1)$ разъ и замѣняя x черезъ x_0, приходимъ къ системѣ:

$$\Phi\ (x_0,\ y_0,\ C_1,\ C_2, \ldots\ldots C_n) = 0$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_0 y_0' = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{\partial^{n-1}\Phi}{\partial x^{n-1}}\right)_0 + \ldots\ldots - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_0 y_0^{(n-1)} = 0,$$

которая, согласно предыдущему, должна быть разрѣшима относительно C_1, C_2,....C_n. Такимъ образомъ получаемъ критерій "независимости" постоянныхъ въ интегралѣ (6), который уже былъ данъ въ началѣ курса.

Если общій интегралъ (6) продифференцируемъ k разъ ($k<n$) и изъ полученной системы $k+1$ уравненій исключимъ k постоянныхъ C_1, C_2,... C_k, то получимъ соотношеніе:

$$\psi(x, y, y', \ldots y^{(k)}, \quad C_{k+1}, \ldots C_n) = 0, \tag{7}$$

содержащее производныя y до k-го порядка и $n-k$ произвольныхъ постоянныхъ C_{k+1}, C_{k+2} ..... C_n. Соотношеніе (7) выполняется для общаго рѣшенія y уравненія (1), получаемаго изъ общаго интеграла (6), и называется п р о м е ж у т о ч н ы м ъ и н т е г р а л о м ъ к-го порядка.

Если бы для ур-ія (1) мы нашли промежуточный интегралъ n-1 порядка или, такъ называемый, первый интегралъ

$$\psi(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}, \quad C_1 \quad) = 0, \tag{8}$$

для этого интеграла, разсматривая его какъ дифференціальное ур-іе n-1-го порядка, его первый интегралъ

$$\psi_1(x, y, y', \ldots y^{(n-2)} \quad , \quad C_1, C_2) = 0 \tag{9}$$

и т.д., то мы пришли бы наконецъ къ общему интегралу

$$\Phi(x, y, C_1, \quad C_2, \ldots C_n) = 0$$

даннаго уравненія (1).

---

§ 14. РАЗЛОЖЕНІЕ РѢШЕНІЯ УРАВНЕНІЯ n-ГО ПОРЯДКА ВЪ БЕЗКОНЕЧНЫЙ РЯДЪ.

Пусть дифференціальное ур-іе дано въ видѣ:

$$y^{(n)} = f(x, \; y, \; y', \ldots y^{(n-1)}) \tag{1}$$

и ищется рѣшеніе, опредѣляемое начальными данными:

$$\text{при } x = x_0 \qquad y = y_0, \quad y' = y_0', \ldots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}.$$

Дифференцируя уравненіе послѣдовательно по x, имѣемъ:

$$y^{(n+1)} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \cdot f =$$

$$= f_1 (x, y, y', \ldots\ldots y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

$$y^{(n+2)} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-2)}} \cdot y^{(n-1)} + \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}} f =$$

$$= f_2 (x, y, y', \ldots\ldots y^{(n-1)}) \qquad (3)$$

. . . .

т.е. всѣ производныя, начиная съ n-го порядка, выражаются черезъ x, y, y', ... $y^{(n-1)}$. Вставляя въ равенства (1), (2), (3),...вмѣсто x его значеніе x_0 и принимая во вниманіе начальныя данныя, мы послѣдовательно вычислимъ начальныя значенія всѣхъ производныхъ въ функціи данныхъ y_0, y_0', ...$y_0^{(n-1)}$:

$$y_0^{(n)} = f(x_0, y_0, y_0', \ldots\ldots y_0^{(n-1)})$$

$$y_0^{(n+1)} = f_1(x_0, y_0, y_0', \ldots\ldots y_0^{(n-1)})$$

$$y_0^{(n+2)} = f_2(x_0, y_0, y_0', \ldots\ldots y_0^{(n-1)})$$

. . . .

. . . .

А зная начальныя значенія всѣхъ производныхъ, мы можемъ опредѣлить искомое рѣшеніе y его разложеніемъ въ рядъ Тэйлора:

$$y = y_0 + \frac{y_0'}{1}(x-x_0) + \frac{y_0''}{1.2}(x-x_0)^2 + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{y_0^{(n-1)}}{1,2\ldots(n-1)}(x-x_0)^{n-1} + \frac{y_0^{(n)}}{1.2\ldots n}(x-x_0)^n + \ldots \qquad (4)$$

Предыдущія разсужденія могли бы служить доказательствомъ сушествованія рѣшенія, опредѣляемаго данными начальными условіями, если бы была доказана сходимость ряда (4) и было доказано, что этотъ рядъ удовлетворяетъ данному дифференціальному уравненію (1).

---

§ 15. ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ ВИДА:

$y^{(n)}=f(x)$, $\mathcal{F}(x,y^{(n)})=0$, $\mathcal{F}(y^{(n-1)},y^{(n)})=0$, $\mathcal{F}(y^{(n-2)},\ y^{(n)})=0$.

Примѣнимъ послѣдовательное нахожденіе промежуточныхъ интеграловъ къ уравненію вида:

$$\frac{d^n y}{dx^n}=f(x).$$

Выполняя квадратуру, найдемъ:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\int_{x_0}^{x} f(x)dx+C_1.$$

Полученный интегралъ есть промежуточный; повторяя квадратуру, найдемъ промежуточный интегралъ:

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x} f(x)dx+\frac{C_1}{1}x+C_2$$

и такъ далѣе и, наконецъ, найдемъ:

$$y=\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}dx\ldots\ldots\int_{x_0}^{x}dx\quad\int_{x_0}^{x} f(x)dx\ +$$

$$+\ \frac{C_1\,x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{C_2\,x^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots\ldots+C_n.$$

Итакъ мы нашли общій интегралъ даннаго дифференціальнаго ур-ія n-го порядка. Покажемъ, что n-кратную квадратуру можно замѣнить простой квадратурой. Назовемъ эту квадратуру черезъ $\mathcal{Y}$, т.е. положимъ:

$$\mathcal{Y}=\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}\quad dx\ldots\ldots\int_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

Это выраженіе есть ничто иное, какъ частное рѣшеніе, когда всѣ C_i равны 0. Это частное рѣшеніе очевидно при $x = x_0$ обращается въ нуль; легко видѣть, что и производныя $y', y'', \ldots$ $\ldots y^{(n-1)}$ при $x = x_0$ равны нулю, такъ какъ всѣ онѣ выражаются квадратурами съ предѣлами x_0 и x. Такимъ образомъ, по теоремѣ Коши, y вполнѣ опредѣляется во 1-хъ тѣмъ, что оно удовлетворяетъ данному ур-iю и во 2-хъ начальными условіями:

$$\text{при } x = x_0, \qquad y = y' = \ldots\ldots = y^{(n-1)} = 0.$$

Съ другой стороны разсмотримъ выраженіе

$$z = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f(t)\ (x-t)^{n-1} dt .$$

Дифференцируя по x, имѣемъ:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{n-1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f(t)\ (x-t)^{n-2} dt +$$

$$+\left[\frac{1}{(n-1)!} f(t)\ (x-t)^{n-1}\right]_{t=x} = \frac{1}{(n-2)!} \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-2} dt$$

Аналогично

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{(n-3)!} \int_{x_0}^{x} f(t)\ (x-t)^{n-3} dt$$

и такъ далѣе; наконецъ

$$\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} f(t) dt \quad \text{и} \quad \frac{d^n z}{dx^n} = f(x).$$

Такимъ образомъ z есть рѣшеніе даннаго ур-iя; кромѣ того изъ предидущаго явствуетъ, что при $x = x_0$ имѣемъ:

$$z = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 0, \ldots\ldots \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} = 0.$$

Слѣдовательно, по теоремѣ Коши z совпадаетъ съ y, и мы имѣемъ общее рѣшеніе даннаго уравненія въ видѣ:

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f(t)\ (x-t)^{n-1} dt + \frac{C_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + \frac{C_{n-1} x}{1} + C_n$$

Разсмотримъ теперь уравненіе болѣе общее сравнительно съ разсмотрѣннымъ ранѣе:

$$\mathcal{F}(x, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

Если его разрѣшить относительно $y^{(n)}$, то получимъ ур-іе прежняго вида. Но можетъ случиться, что оно не разрѣшается удобно относительно производной, но легко разрѣшимо относительно x, или же вообще x и $y^{(n)}$ выражаются въ функціи одного параметра t:

$$x = \varphi(t), \qquad y^{(n)} = \psi(t); \qquad (2)$$

тогда эти 2 ур-ія будутъ равносильны одному ур-ію (1). Эти ур-ія мы можемъ проинтегрировать рядомъ квадратуръ. Постараемся выразить и $\underline{y}$ въ функціи этого параметра.

Мы имѣемъ

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \psi(t)\,\varphi'(t)dt, \quad y^{(n-1)} = \int\psi(t)\,\varphi'(t)dt.$$

Произвольную постоянную подразумѣваемъ подъ знакомъ квадратуры. Далѣе, мы можемъ найти слѣдующую $(n-2)$-ую производную:

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \left[\int\psi(t)\;\varphi(t)dt\right]\varphi'(t)dt \;,$$

откуда

$$y^{(n-2)} = \int\left\{\int\psi(t)\;\varphi'(t)dt\right\}\varphi'(t)dt$$

и т.д. Вообще

$$dy^{(k-1)} = y^{(k)}\,dx.$$

Квадратурой находимъ $y^{(k-1)}$. Продолжая такъ, мы наконецъ дойдемъ до $\underline{y}$ и такимъ образомъ x и y выразимъ функціями параметра t, т.е.

$$x = \varphi(t), \qquad y = \Phi(t, C_1, C_2, C_3, \dots C_n);$$

всего произвольныхъ постоянныхъ n, такъ какъ при каждой квадратурѣ мы будемъ получать по одному постоянному. Исключивъ параметръ t изъ двухъ уравненій, мы получимъ соотношеніе между x и y, которое и будетъ общимъ интеграломъ.

Переходимъ теперь къ слѣдующему виду уравненія:

$$\mathcal{F}(y^{(n)},\quad y^{(n-1)}) = 0, \tag{3}$$

въ которомъ порядокъ одной производной на единицу отличается отъ порядка другой. Предположимъ, что обѣ производныя выражаются въ функціи вспомогательнаго параметра t:

$$y^{(n)} = \varphi(t), \qquad y^{(n-1)} = \psi(t), \tag{4}$$

при чемъ въ частности параметръ t можетъ совпадать съ одной изъ производныхъ, напримѣръ съ $(n-1)$-ой производной, если ур-іе (3) разрѣшимо относительно $y^{(n)}$. Мы разсмотримъ общій случай. Наша задача - представить x и y въ функціи параметра t. Поступаемъ по предыдущему:

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx. \qquad \psi'(t)\,dt = \varphi(t)\,dx,$$

откуда
$$dx = \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)}\,dt;$$

x найдемъ квадратурой:
$$x = \int \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)}\,dt;$$

произвольное постоянное заключается въ знакѣ квадратуры. Находимъ $(n-2)$-ую производную:

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \psi(t)\quad \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)}\,dt,$$

откуда квадратурой находимъ:

$$y^{(n-2)} = \int \psi(t)\quad \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)}\,dt.$$

Вообще, если какая-нибудь производная k-го порядка выражается черезъ t, то производная $(k-1)$ найдется выраженной черезъ t изъ условія
$$dy^{(k-1)} = y^{(k)}\,dx$$

квадратурой. Продолжая далѣе, дойдемъ наконецъ до y, которое будетъ выражено черезъ t. Слѣдовательно, x и y будутъ выражены черезъ t Исключая t, мы получимъ общій интегралъ. Произвольныхъ постоянныхъ всего войдетъ n.

Переходимъ теперь къ третьему виду ур-ій съ двумя аргументами, гдѣ порядокъ производныхъ разнится на двѣ единицы:

$$\mathcal{F}(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0 \tag{5}$$

при чемъ предполагаемъ, что оба аргумента выражаются черезъ параметръ t, т.е.

$$y^{(n)} = \varphi(t), \qquad y^{(n-2)} = \psi(t). \tag{6}$$

И въ этомъ случаѣ представимъ x и y въ функціи параметра t. Какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, мы пишемъ рядъ соотношеній:

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx; \qquad dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx.$$

Здѣсь мы пишемъ оба равенства одновременно, такъ какъ одного было бы недостаточно. Взявъ оба, мы дѣленіемъ исключаемъ dx:

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dy^{(n-2)}} = \frac{y^{(n)}}{y^{(n-1)}}, \qquad y^{(n-1)}\, dy^{(n-1)} = y^{(n)}dy^{(n-2)}.$$

Правая часть выражается черезъ t, и мы имѣемъ:

$$y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = \varphi(t)\ \psi'(t)dt.$$

Послѣднее ур-іе есть дифференціальное, гдѣ перемѣнныя раздѣлены. Выполняя квадратуру, находимъ: $\frac{1}{2}\,(y^{(n-1)})^2 = \int\varphi(t)\cdot\psi'(t)dt;$ произвольное постоянное подразумѣваемъ въ знакѣ интеграла.

$$y^{(n-1)} = \sqrt{2\int \varphi(t)\cdot\psi'(t)dt}$$

Выразивъ $(n-1)$ производную черезъ t, не трудно затѣмъ выразить и x черезъ t. Изъ равенства $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$

находимъ:

$$dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}};$$

подставляя сюда значеніе $dy^{(n-1)}$, получимъ:

$$dx = \frac{\varphi(t)\cdot\psi'(t)dt}{\sqrt{2\int\varphi(t)\;\psi'(t)dt}\cdot\varphi(t)}$$

Выполняя квадратуру, найдемъ x:

$$x = \int\frac{\psi'(t)dt}{\sqrt{2\int\varphi(t)\psi'(t)dt}}.$$

Произвольное постоянное заключается въ знакѣ интеграла. Теперь остается выразить y черезъ параметръ t. Производныя $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$ выражены черезъ t; нужно выразить дальнѣйшія $y^{(n-3)}$ и т.д.; поступаемъ обычнымъ путемъ:

$$dy^{(n-3)} = y^{(n-2)}\,dx = \frac{\psi(t)\psi'(t)dt}{\sqrt{2\int\varphi(t)\,\psi'(t)dt}},$$

откуда квадратурой находимъ $y^{(n-3)}$:

$$y^{(n-3)} = \int\frac{\psi(t)\;\psi'(t)dt}{\sqrt{2\int\varphi(t)\psi'(t)dt}}$$

Вообще, если имѣемъ $y^{(k)}$, то

$$dy^{(k-1)} = y^{(k)}\;dx,$$

и квадратурой найдемъ $y^{(k-1)}$. Поступая такимъ образомъ далѣе наконецъ дойдемъ до y, которое будетъ выражено въ функціи параметра t. Слѣдовательно x и y будутъ выражены въ функ - ціи параметра t. Исключая t, найдемъ соотношеніе между x и y, которое и будетъ общимъ интеграломъ. Войдетъ всего n произвольн. постоянныхъ.

Иллюстрируемъ разобранные выше случаи ур-ій слѣдующими видами уравненій 2-го порядка:

I. $\mathcal{F}(x, y'') = 0$ II. $\mathcal{F}(y'', y') = 0$ III. $\mathcal{F}(y'', y) = 0$.

Къ этимъ уравненіямъ примѣнимы всѣ вышеуказанные пріемы. Кромѣ того, къ этимъ ур-іямъ могутъ быть примѣнимы и частные пріемы. Такъ I и II мы можемъ сейчасъ же привести къ ур-іямъ перваго порядка. Обращаемся къ уравненію первому:

$$\mathcal{F}(y'', x) = 0.$$

Положимъ

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx};$$

ур-іе принимаетъ видъ

$$\mathcal{F}\left(\frac{dp}{dx}, x\right) = 0;$$

получили уравненіе 1-го порядка одного изъ разсмотрѣнныхъ типовъ. Интегрируя его, найдемъ общій интегралъ:

$$\Phi(p, x, C) = 0 \quad \text{или } \Phi\left(\frac{dy}{dx}, x, C\right) = 0.$$

Это будетъ то, что мы выше называли промежуточнымъ интеграломъ. Въ данномъ случаѣ это ур-іе 1-го порядка того же типа.

Обращаемся къ уравненію II :

$$\mathcal{F}(y'', y') = 0;$$

положимъ

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx};$$

ур-іе принимаетъ видъ:

$$\mathcal{F}\left(\frac{dp}{dx}, p\right) = 0;$$

опять получили уравненіе 1-го порядка одного изъ разсмотрѣнныхъ типовъ. Проинтегрировавъ его, получимъ интегралъ промежуточный:

$$\Phi(p, x, C) = 0, \quad \text{гдѣ } p = \frac{dy}{dx}.$$

Интегрируя этотъ послѣдній, получимъ общій интегралъ.

Обращаемся, наконецъ, къ послѣднему типу:

$$\text{III)} \ \mathcal{F}(y'', y) = 0;$$

непосредственно мы не можемъ привести его къ ур-ію 1-го порядка. Въ этомъ случаѣ поступимъ такъ: будемъ считать y независимымъ перемѣннымъ, а p функціей y; при такомъ разсмотрѣніи мы сейчасъ же приведемъ данное ур-іе къ ур-ію 1-го порядка:

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy} \quad .$$

Уравненіе принимаетъ видъ:

$$\mathcal{F}(p \cdot \frac{dp}{dy}, \ y) = 0.$$

Это ур-іе уже 1-го порядка, хотя, повидимому, болѣе сложнаго типа, такъ какъ содержитъ p, $\frac{dp}{dy}$, y. Не трудно однако его замѣнить ур-іемъ болѣе простого вида, слѣдуетъ только ввести новое перемѣнное, положивъ:

$$\frac{1}{2} p^2 = u.$$

Тогда

$$p \cdot \frac{dp}{dy} = \frac{du}{dy} .$$

и уравненіе принимаетъ видъ:

$$\mathcal{F}(\frac{du}{dy}, \ y) = 0.$$

Оно 1-го порядка, содержитъ производную и независимую перемѣнную. Промежуточный интегралъ будетъ:

$$\Phi \ (u, y, C) = 0 \quad \text{или} \quad \Phi \left[\frac{1}{2} \ (\frac{dy}{dx})^2 \ , \quad y, \quad C\right] = 0.$$

Это ур-іе 1-го порядка, не содержащее независимаго перемѣннаго. Замѣтимъ, что ур-іе III типа 2-го порядка допускаетъ еще одинъ непосредственный методъ интеграціи, если ур-іе разрѣшено относительно второй производной. Если ур-іе III-ье можно представить такъ:

$$y'' = f(y),$$

то помимо общаго пріема поступаемъ еще такъ: умножаемъ обѣ части разрѣшеннаго уравненія на $y'dx$:

$$y'' y'dx = y' f(y)dx \quad \text{или} \quad y'dy' = f(y)dy.$$

Перемѣнныя раздѣлены; интеграціей находимъ:

$$\frac{1}{2} y'^2 = \int f(y)dy; \quad y' = \sqrt{2\int f(y)dy}; \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{2 \int f(y)dy}; \quad dx = \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy}} .$$

Интегрируя, находимъ x: $$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy}}$$

Это равенство и представляетъ общій интегралъ. Замѣтимъ кстати, что методомъ, указаннымъ для ур-ій 2-го порядка, мы можемъ воспользоваться и для уравненій съ производными высшихъ порядковъ I, II и III видовъ. Такъ, мы могли бы въ случаѣ III замѣнить уравненіе $$\mathcal{F}(y^{(n)},\ y^{(n-2)}) = 0,$$

положивъ $$y^{(n-2)} = p \quad ,$$

уравненіемъ 2-го порядка $$\mathcal{F}\left(\frac{d^2p}{dx^2}\ ,\ \ p\right) = 0.$$

Проинтегрировавъ его, получимъ:

$$\Phi\ (p, x, C_1,\ C_2) = 0,$$

т.е. мы привели уравненіе къ 1-му виду, понизивъ его порядокъ при этомъ на 2 единицы.

П Р И М Ѣ Р Ъ I. $$x = e^{y''} + y'' ,$$

гдѣ y'' - 2-ая производная. Ур-іе 1-го изъ разсмотрѣнныхъ типовъ, и притомъ въ разрѣшенномъ видѣ относительно x. Обозначимъ $y'' = t$, тогда

$$x = e^t + t;\ dx = (e^t + 1)dt,\quad dy' = y''dx,\quad dy' = (te^t + t)dt;$$

$$y' = \int (te^t + t)dt,\quad y' = \int te^t dt + \int t dt = te^t - e^t + \frac{1}{2}t^2 + C_1 \ .$$

Опредѣляемъ теперь y:

$$dy = y'dx = (te^t - e^t + \frac{1}{2}t^2 + C_1)\,(e^t + 1)dt = \Big[te^{2t} - e^{2t} + \frac{1}{2}t^2 e^t +$$

$$+ te^t + (C_1 - 1)\ e^t + \frac{1}{2}t^2 + C_1\Big]dt \ .$$

Выполняя квадратуру, находимъ y:

$$y = \frac{te^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4} - \frac{1}{2}t^2 e^t + (C_1 - 1) e^t + \frac{1}{6}t^3 + C_1 t + C_2 .$$

Такимъ образомъ x и y мы выразимъ въ функціи вспомогательнаго параметра t. Исключивъ t, мы получимъ соотношеніе между x и y и двумя постоянными C_1 и C_2.

ПРИМѢРЪ II.

$$y'' = k^2 y,$$

гдѣ k - постоянно. Умножимъ обѣ части на y' :

$$2y' y'' = 2k^2 yy' ,$$

или по умноженіи двухъ частей на dx:

$$2y'dy' = 2k^2 ydy;$$

перемѣнныя раздѣлены; интегрируя, имѣемъ:

$$y'^2 = k^2 y^2 - C^2 ,$$

откуда находимъ:

$$y' = \sqrt{k^2y^2 - C^2} \qquad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{k^2y^2 - C^2},$$

откуда $$dx = \frac{dy}{\sqrt{k^2y^2 - C^2}};$$

x находится квадратурой:

$$x + C' = \int \frac{dy}{\sqrt{k^2y^2 - C^2}} .$$

Квадратура выполняется въ гиперболическихъ функціяхъ:

$$ky = C\cos hyp\varphi \quad ; \quad dy = \frac{C\sin hyp\, d\varphi}{k} \quad ;$$

$$x + C' = \int \frac{1}{k} d\varphi = \frac{\varphi}{k}$$

вмѣсто φ остается вставить его значеніе: $\varphi = \arg\cos hyp \frac{ky}{C}$

$$\cos hyp \left\{ k(x+C') \right\} = \cos hyp\varphi = \frac{ky}{C}$$

Отсюда находимъ y:

$$y = \frac{C}{k} \cdot \frac{e^{k(x+C')} + e^{-k(x+C')}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{C}{k} \cdot e^{kC'} \cdot e^{kx} + \frac{1}{2} \cdot \frac{C}{k} \cdot e^{-kC'} \cdot e^{-kx} =$$

$$= Ae^{kx} + Be^{-kx},$$

гдѣ A и B - два новыхъ постоянныхъ.

---

§ 16. ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ, НЕ СОДЕРЖАЩІЯ ФУНКЦІИ; ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ, НЕ СОДЕРЖАЩІЯ НЕЗАВИСИМАГО ПЕРЕМѢННАГО; ОДНОРОДНЫЯ УРАВНЕНІЯ.

Разсмотримъ уравненіе n-го порядка, въ которое не входитъ непосредственно искомая функція y, т.е. уравненіе вида:

$$\mathcal{F}(y^{(n)},\ y^{(n-1)},\ \ y^{(n-2)}, \ldots\ldots y',\ x) = 0 \qquad (I)$$

Порядокъ такого уравненія можно понизить на единицу.

Положивъ $y' = p$, будемъ имѣть:

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}},\ \frac{d^{n-2}p}{dx^{n-2}}, \ldots\ldots, \frac{dp}{dx},\ p,\ x\right) = 0.$$

Это уравненіе $(n-1)$-го порядка. Если бы проинтегрировали его, то нашли бы промежуточный интегралъ:

$$\Phi\ (p,\ x,\ C_1,\ C_2, \ldots\ C_{n-1}\ ) = 0$$

первоначальнаго ур-ія. Остается проинтегрировать этотъ интегралъ:

$$\Phi\ \left(\frac{dy}{dx},\ \ x,\ \ C_1,\ C_2, \ldots\ C_{n-1}\right) = 0.$$

Тогда найдемъ общій интегралъ, куда войдетъ n произвольныхъ постоянныхъ.

Пусть далѣе въ ур-іе не входятъ производныя ниже k-го порядка, т.е. уравненіе будетъ вида:

$$\mathcal{F}(y^{(n)},\ \ y^{(n-1)},\ \ y^{(n-2)}, \ldots\ y^{k},\ x) = 0 \qquad (II)$$

Тогда, полагая $y^{(k)} = p$, мы уравненіе представимъ такъ:

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^{n-k}p}{dx^{n-k}},\ \ \frac{d^{n-k-1}p}{dx^{n-k-1}}\ \ \ldots\ldots\ \frac{dp}{dx},\ p,\ x\right) = 0.$$

Это уравненіе $(n-k)$ -го порядка. Его порядокъ ниже порядка даннаго ур-ія на k единицъ. Если бы мы нашли общій интегралъ, то онъ былъ бы промежуточнымъ интеграломъ k-го порядка:

$$\Phi\ (p,\ x,\ C_1,\ C_2, \ldots\ldots C_{n-k})$$

куда входило бы $(n-k)$ произвольныхъ постоянныхъ. Проинтегрировавъ его, мы найдемъ общій интегралъ даннаго ур-ія. Всего постоянныхъ будетъ $n-k$ отъ первой интеграціи и k отъ второй, т.е. $n-k+k=n$ произвольныхъ постоянныхъ.

Переходимъ къ новому типу дифференціальнаго ур-ія, въ которое входитъ n производныхъ и сама функція, но не входитъ независимое перемѣнное:

$$\mathcal{F}(y^{(n)},\ y^{(n-1)},\ y^{(n-2)}, \ldots\ldots y',\ y) = 0 \qquad \text{(III)}$$

Полагаемъ $y' = p$, а y считаемъ за независимое перемѣнное ; тогда

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}, \quad y''' = \frac{dy''}{dx} = p\frac{dy''}{dy} = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 .$$

Поступаемъ такъ и дальше. Легко видѣть, что каждая производная у-ка по x выразится черезъ производныя p по y:

$$y^{(k)} = \Phi\left(p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2p}{dy^2}, \ldots\ldots \frac{d^{k-1}p}{dy^{k-1}}\right),$$

и данное уравненіе представится такъ:

$$\Psi\left(\frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}},\ \frac{d^{n-2}p}{dy^{n-2}}, \ldots\ldots \frac{dp}{dy}, p,\ y\right) = 0.$$

Получили уравненіе $(n-1)$ -го порядка. Если бы его проинтегрировали, то получили бы промежуточный интегралъ вида:

$$\Phi\ (p,\ y,\ C_1,\ C_2,\ C_3, \ldots\ldots C_{n-1}) = 0.$$

Интегрируя его, введемъ еще одно постоянное и получимъ общій интегралъ даннаго ур-ія. Разберемъ для примѣра ур-іе 2-го порядка вида:

$$\mathcal{F}(y'', y', y) = 0 .$$

Примѣнимъ къ нему указанныя преобразованія. Положимъ:

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx} = p\frac{dp}{dy} ,$$

Уравненіе принимаетъ видъ:

$$\mathcal{F}(p\frac{dp}{dy}, p, y) = 0.$$

Проинтегрировавъ его, найдемъ:

$$\Phi(p, y, C_1) = 0,$$

гдѣ $p = y'$. Это - промежуточный интегралъ. Дальнѣйшей интеграціей введемъ еще одно постоянное C_2 и получимъ общій интегралъ даннаго уравненія.

Обращаемся къ разсмотрѣнію типа уравненія:

$$\mathcal{F}(x, y, y', y'', \ldots\ldots y^{(n)}) = 0 ,$$

гдѣ функція $\mathcal{F}$ однородная относительно y и производныхъ, при чемъ x разсматривается, какъ параметръ. Напримѣръ:

$$yy'' - xy'^2 = 0.$$

Это ур-іе однородно относительно y, y', y''. Мы можемъ показать, что порядокъ уравненія такого типа можетъ быть пониженъ на единицу, введеніемъ новаго перемѣннаго. Полагаемъ

$$y = e^{\int z dx}, \text{ тогда } y' = yz = e^{\int z dx}\cdot z,$$

или

$$z = \frac{y'}{y} .$$

Далѣе $$y'' = e^{\int z dx}(z^2 + z'); \quad y''' = e^{\int z dx}(z^3 + 3zz' + z'')$$

и такъ далѣе; въ каждой производной, послѣ преобразованія, $e^{\int z dx}$ войдетъ общимъ множителемъ. Пусть вообще

$$y^{(k)} = e^{\int z dx}\,\Phi_{k-1}(z)$$

гдѣ $\Phi(z)$ есть дифференціальное выраженіе, составленное изъ z и производныхъ до $(k-1)$ -го порядка. Дифференцируя, имѣемъ:

$$y^{(k+1)} = e^{\int z dx}\left\{z\Phi_{k-1}(z) + \frac{d}{dx}\Phi_{k-1}(z)\right\} = e^{\int z dx}\,\Phi_k(z)$$

слѣдовательно этотъ законъ составленія - общій. Вставляемъ значенія найденныхъ производныхъ въ данное ур-іе. Всѣ они имѣютъ общій факторъ $e^{\int z dx}$, который въ нѣкоторой степени выйдетъ общимъ множителемъ изъ функціи $\mathcal{F}$, вслѣдствіе ея однородности; т.е. будемъ имѣть:

$$e^{m\int z dx}\,\mathcal{F}(x,\ 1,\ z,\ z^2+z', \dots\dots \Phi_{n-1}(z)\qquad) = 0.$$

Сокращая на $e^{m\int z dx}$, мы будемъ имѣть уравненіе вида:

$$\Psi(x, z, z', z'', \dots\dots z^{(n-1)}) = 0.$$

Порядокъ преобразованнаго ур-ія на единицу ниже порядка даннаго ур-ія. Проинтегрировавъ его, получимъ выраженіе z; y найдется квадратурой. Всѣхъ постоянныхъ будетъ n.

Примѣнимъ изложенный методъ къ примѣру:

$$yy'' - xy'^2 = 0;$$

вводимъ новое перемѣнное:

$$y = e^{\int z dx}.\quad y' = e^{\int z dx}.z,\quad y'' = e^{\int z dx}(z^2 + z');$$

подставляя въ данное, имѣемъ

$$z^2+z' - xz^2 = 0;$$

уравненіе перваго порядка

$$z' = z^2(x-1) \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dx} = z^2(x-1);\ \frac{dz}{z^2} = dx(x-1).$$

Перемѣнныя раздѣлены; имѣемъ:

$$-\frac{dz}{z^2} + dx\ (x-1) = 0,\ \frac{1}{z} + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{C}{2} = 0;$$

находимъ:

$$z = \frac{2}{C-(x-1)^2};\quad y = e^{\int\frac{2}{C-(x-1)^2}dx};$$

Полагая
$$C = a^2, \qquad x - 1 = t,$$
имѣемъ:
$$\int \frac{2}{C-(x-1)^2}\,dx = \int \frac{2dt}{a^2-t^2} = \frac{1}{a}\lg\frac{a+t}{a-t} + Const.; \qquad a = \sqrt{C};$$
подставляя, имѣемъ:
$$y = e^{\frac{1}{\sqrt{C}}\lg\frac{\sqrt{C}+(x-1)}{\sqrt{C}-(x-1)} + \lg C'} = C'\left[\frac{\sqrt{C}+(x-1)}{\sqrt{C}-(x-1)}\right]^{\frac{1}{\sqrt{C}}}.$$

Сдѣлаемъ одно замѣчаніе по поводу этого типа однороднаго ур-ія; покажемъ, что если этому уравненію удовлетворяетъ какое-нибудь частное рѣшеніе
$$y = \varphi(x),$$
то ему будетъ удовлетворять и рѣшеніе:
$$y = C\varphi(x),$$
гдѣ C - произвольное постоянное. Если мы замѣнимъ y черезъ Cy, тогда y' замѣнится черезъ Cy', $y^{(n)}$ черезъ $Cy^{(n)}$ и т.д. Всѣ производныя множатся на одинъ и тотъ же факторъ C; но по предположенію уравненіе однородно, слѣдовательно, отъ умноженія y, y', y'' .... на C все уравненіе умножится на C^m, т.е. $F(x, Cy, Cy', Cy'', \ldots Cy^{(n)}) = C^m F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$.
Отсюда видно, что если ур-іе удовлетворяется y, то ему удовлетворитъ и Cy и что одно изъ произвольныхъ постоянныхъ должно входить въ общее рѣшеніе въ видѣ множителя.

Разсмотримъ еще уравненіе однородное относительно x, y и ихъ дифференціаловъ. Замѣтимъ, что $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$; поэтому всякое уравненіе
$$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$$

можно разсматривать, какъ уравненіе вида:

$$\Phi\ (x,\ y,\ dx,\ dy,\ d^2y, d^3y, \ldots\ldots d^ny) = 0$$

въ дифференціалахъ; напримѣръ, если бы намъ было дано ур-іе:

$$x^2y'' + yy' + 2y = 0,$$

то, умноживъ его на квадратъ дифференціала dx, т.е. dx^2, найдемъ:

$$x^2 d^2y + ydx.dy + 2ydx^2 = 0.$$

Это соотношеніе представлено въ дифференціальной формѣ. Займемся теперь разсмотрѣніемъ ур-ія однороднаго относительно x, $y, dx, dy, d^2y, \ldots\ d^ny$, при чемъ каждый аргументъ 1-го измѣренія. Можно показать, что порядокъ такого ур-ія можетъ быть пониженъ на единицу. Замѣтимъ, что если въ ур-іи x, y замѣнимъ черезъ Cx, Cy, то оно удовлетворится по прежнему. Дѣйствительно при умноженіи x и y на C, и всѣ дифференціалы получатъ общій факторъ C: dx обратится въ Cdx и т.д.; но, т.к. ур-іе однородно относительно всѣхъ аргументовъ, то въ ур-іи появится общій факторъ C^m, гдѣ m- показатель однородности, и на C^m мы можемъ сократить уравненіе. Слѣдовательно ур-іе удовлетворится по прежнему. Принимая во вниманіе это замѣчаніе, введемъ новое перемѣнное u, положивъ: $\frac{y}{x} = u$. Перемѣнное u не измѣнится, если мы совершимъ предшествующую замѣну, т.к. $\frac{Cy}{Cx} = \frac{y}{x} = u$.

Если мы введемъ u вмѣсто x, то новое уравненіе будетъ обладать такимъ свойствомъ: оно допускаетъ замѣну y черезъ Cy, при чемъ u сохраняемъ безъ измѣненія. Такимъ свойствомъ обладаютъ, какъ мы видѣли, однородныя ур-ія, и это свойство типическое для однородныхъ ур-ій. Слѣдовательно преобразованное уравненіе однородное и его порядокъ можно понизить на единицу. Мы можемъ дать и ту подстановку, которая прямо приведетъ насъ къ цѣли. Именно, полагаемъ $x = e^z$, $y = e^z u$; тогда

$dx = e^z dz$, $dy = e^z (u dz + du)$; $d^2 y = e^z (u dz^2 + du dz + du dz + d^2 u)$...и т.д.

Всюду e^z будетъ общимъ множителемъ. Вставимъ эти значенія въ данное ур-іе; e^{mz} выйдетъ общимъ факторомъ и на него сократимъ ур-іе. Получимъ дифференціальное ур-іе между u и z, не содержащее перемѣннаго z. Мы приходимъ такимъ образомъ къ виду ур-ія уже разобраннаго, а такое ур-іе, какъ извѣстно, допускаетъ пониженіе порядка. Обращаемся къ примѣру, который раньше имѣли:

$$x^2 y'' + yy' + 2y = 0;$$

полагаемъ:

$$x = e^z;\ dx = e^z dz;\quad y = ue^z;\ dy = e^z(u dz + du);$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \left(u + \frac{du}{dz}\right);\qquad y'' = \left(\frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) e^{-z}.$$

Вставляемъ въ данное ур-іе эти значенія:

$$e^z (u' + u'') + e^z u (u + u') + 2e^z u = 0.$$

Сокращаемъ все уравненіе на e^z:

$$u'' + u' + uu' + u^2 + 2u = 0.$$

Получили ур-іе 2-го порядка, куда не входитъ независимое перемѣнное. Порядокъ такого ур-ія, какъ мы знаемъ, можетъ быть пониженъ на единицу. Для этого полагаемъ

$$u' = p;\quad u'' = \frac{dp}{dz} = p\frac{dp}{du}$$

и ур-іе приметъ видъ:

$$p\frac{dp}{du} + p + up + u^2 + 2u = 0.$$

Это уравненіе 1-го порядка относительно p. Иногда приводитъ къ цѣли и такая подстановка болѣе общаго характера:

$$x = e^z,\quad y = e^{mz} \cdot u;$$

тогда $y' = e^{(m-1)} \cdot (mu + \frac{du}{dz}),\ldots\ldots$

Если ур-iе однородно, когда мы считаемъ x 1-го измѣренія, у m-го, у' - $(m-1)$-го измѣренія и т.д., то при подстановкѣ e^z сокращается, и мы получаемъ ур-iе, не содержащее независимаго перемѣннаго z.

§ 17. ЛИНЕЙНЫЯ ДИФФЕРЕНЦIАЛЬНЫЯ УРАВНЕНIЯ.

Линейнымъ дифференцiальнымъ уравненiемъ называется уравненiе, линейное относительно неизвѣстной функцiи и ея производныхъ. Его общiй видъ таковъ:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} y' + a_n y = A \qquad (I)$$

гдѣ всѣ a_i и A суть функцiи только одного x, т.е.

$$a_k = \varphi_k(x); \quad A = A(x).$$

Такое ур-iе называется полнымъ линейнымъ дифференцiальнымъ ур-iемъ n-го порядка. Если въ этомъ ур-iи A = 0, то имѣемъ неполное линейное дифференцiальное ур-iе или ур-iе безъ послѣдняго члена. Оно называется также однороднымъ, т.к. оно однородно относительно функцiи и ея производныхъ.

Его видъ таковъ:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (II)$$

Ур-iе (I) можемъ упростить, сдѣлавъ коэфф-тъ при старшей производной равнымъ единицѣ, раздѣливъ на него все ур-iе. Тогда получимъ:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots + p_n y = V \qquad (III)$$

гдѣ всѣ p_i и V суть функцiи только одного x.

Если $V = 0$, то имѣемъ однородное линейное ур-iе:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots + p_n y = 0 \quad (IV)$$

Линейное дифф-ное ур-іе сохраняетъ свой видъ при нѣкоторыхъ преобразованіяхъ перемѣннаго.

а) При всякомъ преобразованіи независимаго перемѣннаго линейное уравненіе остается линейнымъ.

Положимъ, что $x = \varphi(x')$ и обратно $x' = \psi(x)$. Тогда коэфф-ты $p_k = p_k(x)$ преобразуются: $p_k = p_k\left[\varphi(x')\right]$.

Далѣе имѣемъ:

$$y = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dx} = \frac{dy}{dx'} \cdot \psi'\left[\varphi(x')\right],$$

$$y'' = \frac{d}{dx'}(y') \cdot \frac{dx'}{dx} = \left[\frac{d^2y}{dx'^2} \cdot \psi'\{\varphi(x')\} + \frac{dy}{dx'} \psi''\{\varphi(x')\} \varphi'(x')\right] \psi'\{\varphi(x')\},$$

. . . .

Очевидно, что каждая производная выражается линейно черезъ производныя по новому перемѣнному, и послѣ подстановки новое ур-іе будетъ линейнымъ.

в) Линейное уравненіе остается линейнымъ при линейномъ преобразованіи зависимаго перемѣннаго.

Выразимъ y черезъ новую функцію η такъ, чтобы связь между ними была линейная, т.е. положимъ: $y = u\eta + v$, гдѣ u и v суть функціи x. Дифференцируя, имѣемъ:

$$y' = u\eta' + u'\eta + v' \quad ;$$

$$y'' = u\eta'' + 2u'\eta' + u''\eta + v'';$$

. . . .

Всѣ производныя y выразятся черезъ η и производныя η линейно. Внося всѣ значенія преобразованныхъ производныхъ въ данное ур-іе, получимъ новое ур-іе тоже линейное.

Два преобразованія а) и в) можно очевидно комбинировать вмѣстѣ.

Обращаемся теперь къ разсмотрѣнію свойствъ линейныхъ однородныхъ уравненій, т.е. гдѣ А или $V = 0$.

Порядокъ однороднаго линейнаго ур-ія можно понизить на единицу при помощи слѣдующей подстановки: $y = e^{\int z\,dx}$

Мы уже видѣли выше, что такая подстановка понижаетъ порядокъ всякаго однороднаго ур-ія. Выполнимъ ее для линейнаго ур-ія второго порядка:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0;$$

$$y = e^{\int z\,dx}\ ; \quad y' = e^{\int z\,dx}\cdot z\ ; \qquad y'' = e^{\int z\,dx}(z' + z^2).$$

Вставляя это въ данное уравненіе и сокращая на $e^{\int z\,dx}$, получимъ:

$$z' + z^2 + p_1 z + p_2 = 0.$$

Это - ур-іе перваго порядка. Проинтегрировавъ его, найдемъ z, а затѣмъ квадратурою - y. Полученное ур-іе перваго порядка есть ур-іе типа Riccati.

---

§ 18. ОБЩАЯ ТЕОРІЯ ОДНОРОДНЫХЪ ЛИНЕЙНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

Частныхъ рѣшеній у всякаго дифф-наго ур-ія безчисленное множество. Для линейнаго однороднаго ур-ія среди этихъ рѣшеній есть одно рѣшеніе, которое мы можемъ указать a priori. Это $y = 0$. Это рѣшеніе мы навсегда устраняемъ изъ разсмотрѣнія.

Т Е О Р Е М А. Если мы имѣемъ нѣсколько частныхъ рѣшеній линейнаго однороднаго ур-ія, то ему удовлетворитъ и рѣшеніе, составленное изъ линейной комбинаціи частныхъ рѣшеній съ постоянными коэффиціентами.

Пусть имѣемъ однородное линейное ур-іе:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \qquad (I)$$

и знаемъ нѣсколько частныхъ рѣшеній его:

$$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\ \ldots\ldots,\ y_k(x);$$

тогда данному уравненію удовлетворитъ и такое:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_k y_k = \sum_{i=1}^{i=k} C_i y_i \qquad (II)$$

гдѣ C_i - какія угодно постоянныя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Какая-нибудь производная $y^{(s)}$ представится такъ: $y^{(s)} = \sum\limits_{i=1}^{i=k} C_i y_i^{(s)}$. Вставимъ въ (I) и распредѣливъ члены съ одинаковыми C, получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=k} C_i \left(y_i^{(n)} + y_i^{(n-1)} p_1 + y_i^{(n-2)} p_2 + \ldots + y_i p_n\right) = 0.$$

Выраженіе, стоящее въ скобкахъ - нуль для каждаго i въ отдѣльности, такъ какъ y со значкомъ i есть частное рѣшеніе. Слѣдовательно, выраженіе (II) есть рѣшеніе ур-ія (I).

СЛѢДСТВІЯ ИЗЪ ТЕОРЕМЫ.

1) Полагая к = 1, получаемъ: если однородное ур-іе допускаетъ рѣшеніе y, то оно допускаетъ и рѣшеніе $C_1 y_1$.

2) Полагая к = 2, $C_1 = C_2 = 1$, получаемъ: если однородное ур-іе имѣетъ два частныхъ рѣшенія, то и сумма этихъ частныхъ рѣшеній $y_1 + y_2$ есть частное рѣшеніе.

Отсюда же мы можемъ вывести и общее положеніе, только что доказанное, т.е. если мы имѣемъ k рѣшеній, то $C_1 y_1$, $C_2 y_2$, $C_3 y_3$, ... $C_k y_k$ суть тоже рѣшенія, а отсюда и сумма ихъ $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_k y_k$ есть тоже рѣшеніе.

Установимъ теперь понятіе о линейной зависимости функцій одного перемѣннаго.

Пусть даны намъ функціи перемѣннаго x:

$$y_1\,,\ y_2\,,\ y_3\,,\ y_4\,,\ \ldots\ldots,\ y_n;$$

назовемъ эти функціи линейно независимыми, если нельзя подобрать такой системы постоянныхъ чиселъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$, чтобы тождественно для любого x существовало равенство:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \ldots + \alpha_{n-1} y_{n-1} + \alpha_n y_n = 0.$$

конечно исключая случая, когда всѣ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Наоборотъ, n функцій будутъ линейно зависимы, если для нѣкоторой системы постоянныхъ коэфф-товъ α_s существуетъ равенство типа:

$$\sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s y_s = 0.$$

П Р И М Ѣ Р Ъ: $\quad y_1 = e^x\,; \qquad y_2 = 2e^x$.

Нетрудно видѣть, что эти функціи линейно зависимы, ибо, помножая первую на 2, а вторую на -1 и складывая, мы получимъ:

$2y_1 - y_2 = 0$ тождественно для любого x.

Двѣ функціи $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$ будутъ линейно-независимы, т.к. мы не найдемъ постоянныхъ α, чтобы они удовлетворяли равенству:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0.$$

За исключеніемъ $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, это равенство невозможно. Дѣйствительно:

$$\alpha_1 y_1 = -\alpha_2 y_2 \quad \text{или} \quad \frac{y_1}{y_2} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\,, \quad \text{или} \quad e^{2x} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1};$$

получаемъ, что функція равна постоянному, что невозможно.

Выведемъ теперь критерій для рѣшенія вопроса о линейной зависимости и линейной независимости. Для этого разсмотримъ детерминантъ, называемый д е т е р м и н а н т о м ъ В р о н с к а г о:

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3, \ldots\ldots\ldots, & y_n \\ y_1', & y_2', & y_3', \ldots\ldots\ldots, & y_n' \\ y_1'', & y_2'', & y_3'', \ldots\ldots\ldots, & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & y_3^{(n-1)} \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(y_1, y_2, \ldots y_n)$$

Порядокъ высшей производной единицей ниже числа функцій, т.е. функці й n, а порядокъ производной $n - 1$.

Детерминантъ Вронскаго для функцій $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$ будетъ:

$$\begin{vmatrix} e^x, & e^{-x} \\ e^x, & -e^{-x} \end{vmatrix} = W(e^x, e^{-x}) = -2$$

Детерминантъ Вронскаго обладаетъ нѣкоторыми замѣчательными свойствами, изъ которыхъ укажемъ на два.

Если функціи линейно зависимы, то детерминантъ Вронскаго равенъ 0.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Имѣемъ, что

$$\sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s y_s = 0.$$

Дифференцируя это равенство нѣсколько разъ, получимъ:

$$\sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s y_s' = 0; \quad \sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s y_s'' = 0; \ldots\ldots; \quad \sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s y_s^{(n-1)} = 0.$$

Возьмемъ теперь детерминантъ Вронскаго:

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3, \ldots\ldots\ldots, & y_n \\ y_1', & y_2', & y_3', \ldots\ldots\ldots, & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & y_3^{(n-1)}, \ldots\ldots, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(y_1, y_2, \ldots y_n).$$

Нетрудно видѣть, что между элементами каждой строки существу -

етъ линейная зависимость. Помножимъ первый столбецъ на α_1, второй на α_2, ..., послѣднiй - на α_n и къ элементамъ послѣдняго столбца прибавимъ элементы остальныхъ столбцовъ. Получимъ:

$$\sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s y_s\,, \qquad \sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s y_s'\,, \ldots\ldots\ldots, \qquad \sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s y_s^{(n-1)}\,.$$

Такiя выраженiя по условiю равны 0.

Слѣдовательно детерминантъ Вронскаго будетъ = 0:

$$W(y_1\,,\ y_2\,,\ \ldots\ldots,\ y_n) = 0.$$

О Б Р А Т Н А Я Т Е О Р Е М А. Если детерминантъ Вронскаго равенъ 0, то функцiи, составляющiя элементы детерминанта, линейно зависимы.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Дано, что детерминантъ Вронскаго $W(y_1\,,\ y_2\,,\ y_3\,,\ldots\ y_n) = 0$ для всякаго значенiя x. При этомъ допустимъ, что миноръ, соотвѣтствующiй послѣднему элементу послѣдняго столбца, не равенъ 0, т.е.

$$\begin{vmatrix} y_1\,, & y_2\,, & y_3\,, \ldots\ldots & y_{n-1} \\ y_1'\,, & y_2'\,, & y_3'\,, \ldots\ldots & y_{n-1}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)}\,, & y_2^{(n-2)}\,, & y_3^{(n-2)} \ldots & y_{n-1}^{(n-2)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Легко видѣть, что этотъ миноръ есть детерминантъ Вронскаго для функцiй $y_1\,,\ y_2\,,\ldots\ldots,\ y_{n-1}$, т.е. $W(y_1\,,\ y_2\,,\ y_3 \ldots\ y_{n-1})$.

Наше допущенiе нисколько не стѣсняетъ общности доказательства, такъ какъ мы хотимъ доказать положенiе для какого-нибудь числа n функцiй и, если бы взятый нами миноръ оказался нулемъ, то дѣло свелось бы къ доказательству того же положенiя для меньшаго числа $n-1$, $n-2$, ..., такъ какъ если $n-1$ функцiй изъ общаго числа n линейно зависимы, то n функцiй тоже, ибо если:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \ldots\ldots + \alpha_{n-2} y_{n-2} + \alpha_{n-1} y_{n-1} = 0, \quad \text{то и}$$

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \ldots\ldots + \alpha_{n-2} y_{n-2} + \alpha_{n-1} y_{n-1} + \alpha_n y_n = 0,$$

гдѣ $\alpha_n = 0$.

Итакъ, намъ дано, что $W(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \cancel{\neq 0} = 0$ и мы предположили, что

$$W(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}) \neq 0.$$

Разложимъ данный детерминантъ по элементамъ послѣдней строки:

$$A_1 y_1^{(n-1)} + A_2 y_2^{(n-1)} + A_3 y_3^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)} + A_n y_n^{(n)} = 0,$$

гдѣ $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ суть миноры, соотвѣтствующіе элементамъ послѣдней строки. Одинъ изъ нихъ, извѣстно намъ, отличенъ отъ 0, т.е.

$$A_n = W(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}) \neq 0.$$

Мы можемъ все равенство раздѣлить на A_n и всѣ члены перенести въ другую часть, кромѣ члена $y_n^{(n-1)}$:

$$y_n^{(n-1)} = u_1 y_1^{(n-1)} + u_2 y_2^{(n-1)} + u_3 y_3^{(n-1)} + \ldots + u_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}, \qquad \text{(III)}$$

при чемъ $u_k = -\dfrac{A_k}{A_n}$ и $A_n \neq 0$.

Докажемъ теперь, что всѣ u постоянны, и тогда теорема наша будетъ доказана. Для доказательства поступаемъ такъ: въ $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ элементы послѣдней строки замѣняемъ элементами первой, второй,... строкъ, тогда полученный детерминантъ, имѣя по двѣ равныя строки, равенъ нулю. Разлагая такой детерминантъ по элементамъ послѣдней строки, получимъ:

$$A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + \ldots\ldots + A_n y_n = 0$$

$$A_1 y_1' + A_2 y_2' + A_3 y_3' + \ldots\ldots + A_n y_n' = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_1 y_1^{(n-2)} + A_2 y_2^{(n-2)} + A_3 y_3^{(n-2)} + \ldots + A_n y_n^{(n-2)} = 0.$$

гдѣ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ суть тѣ же минары, какъ и въ равенствѣ(III).

Съ каждымъ изъ этихъ равенствъ поступаемъ такъ же, какъ съ первымъ, т.е. дѣлимъ каждое изъ нихъ на $A_n \neq 0$ и переносимъ всѣ члены, кромѣ послѣдняго, въ правую часть:

$$y_n^{(n-1)} = u_1 y_1^{(n-1)} + u_2 y_2^{(n-1)} + \ldots\ldots + u_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}$$
$$y_n^{(n-2)} = u_1 y_1^{(n-2)} + u_2 y_2^{(n-2)} + \ldots\ldots + u_{n-1} y_{n-1}^{(n-2)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n'' = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1} y_{n-1}''$$
$$y_n' = u_1 y_1' + u_2 y_2' + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1} y_{n-1}'$$
$$y_n = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1} y_{n-1}$$

гдѣ $u_k = -\frac{A_k}{A_n}$. Продифференцируемъ послѣднее равенство и принимаемъ во вниманіе предпослѣднее,-получимъ:

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' + y_3 u_3' + \ldots\ldots\ldots\ldots + y_{n-1} u_{n-1}' = 0. \quad (1)$$

Дифференцируя предпослѣднее и принимая во вниманіе третье отъ конца и такъ продолжая до послѣдняго, получаемъ:

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_3' y_3' + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1}' y_{n-1}' = 0 \quad (2)$$
$$u_1' y_1'' + u_2' y_2'' + u_3' y_3'' + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1}' y_{n-1}'' = 0 \quad (3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_1' y_1^{(n-2)} + u_2' y_2^{(n-2)} + u_3' y_3^{(n-2)} + \ldots\ldots + u_{n-1}' y_{n-1}^{(n-2)} = 0 \quad (n-1)$$

Всего равенствъ $n-1$; ихъ разсматриваемъ, какъ систему линейныхъ однородныхъ ур-ій относительно неизвѣстныхъ $u_1', u_2', \ldots, u_{n-1}'$; при этомъ нетрудно видѣть, что детерминантъ этой системы есть ничто иное, какъ миноръ $W(y_1, y_2, \ldots y_{n-1}) \neq 0$, который мы предположили не равнымъ 0. А если для системы однородныхъ линейныхъ ур-ій детерминантъ системы не равенъ 0, то всѣ неизвѣстныя -нули, т.е. $u_1' = u_2' = u_3' = \ldots = u_{n-1}' = 0$, откуда всѣ u постоянны.

и въ формулѣ (III) мы имѣемъ линейную зависимость между y_1, y_2, y_3, ..., y_n вида :
$$\sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s y_s = 0,$$
гдѣ α_n отлично отъ 0 и равно - 1.

Положеніе доказано вполнѣ, и его можно формулировать такъ: Если детерминантъ Вронскаго равенъ 0 и если миноръ, соотвѣтствующій послѣднему элементу $\neq 0$, то функціи линейно зависимы и линейное соотношеніе можетъ быть разрѣшено относительно y_n.

Такимъ образомъ, вопросъ о линейной зависимости и независимости функцій сводится къ разсмотрѣнію величины детерминанта Вронскаго для данныхъ функцій. Если этотъ детерминантъ не равенъ нулю, то всѣ функціи линейно независимы; если же онъ - нуль, то функціи линейно зависимы.

Найденныя свойства детерминанта Вронскаго примѣнимы къ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Пусть мы имѣемъ однородное линейное ур-іе:
$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0.$$
Для этого ур-ія можно найти любое число частныхъ рѣшеній и, если для n изъ нихъ детерминантъ Вронскаго $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ равенъ 0, то эти n рѣшеній линейно зависимы; если же онъ не равенъ 0, то они линейно независимы. Если частныя рѣшенія линейно независимы, то они образуютъ такъ называемую "фундаментальную систему". Для нихъ не можетъ имѣть мѣста равенство:
$$\sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s y_s = 0.$$
Возникаетъ вопросъ: существуетъ ли для всякаго дифф-наго ур-ія

такая фундаментальная система? Нетрудно доказать, что для всякаго дифф-наго ур-ія существуетъ фундаментальная система.

Въ силу основной теоремы (доказанной въ первой части)какое-либо частное рѣшеніе y_i опредѣляется начальными значеніями

$$y_i = y_{io}, \; y_i' = y_{io}', \; y_i'' = y_{io}'', \; \ldots\ldots, \; y_i^{(n-1)} = y_{io}^{(n-1)}$$

для какого-либо значенія перемѣннаго $x = x_o$.

Составимъ детерминантъ $\mathcal{D}$:

$$\begin{vmatrix} y_{1o}, & y_{2o} \ldots\ldots\ldots & y_{no} \\ y_{1o}', & y_{2o}' \ldots\ldots\ldots & y_{no}' \\ y_{1o}'', & y_{2o}'' \ldots\ldots\ldots & y_{no}'' \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_{1o}^{(n-1)}, & y_{2o}^{(n-1)}, \ldots\ldots, & y_{no}^{(n-1)} \end{vmatrix} = \mathcal{D} \neq 0.$$

Величины,стоящія въ каждимъ столбцѣ,принимаемъ за начальныя значенія, опредѣляющія какія-нибудь рѣшенія. Эти величины - числа вполнѣ произвольныя. Онѣ опредѣляютъ рѣшенія:

$$y_1(x), \quad y_2(x), \quad y_3(x), \quad \ldots\ldots, \quad y_n(x).$$

Такія рѣшенія будутъ линейно независимы, т.е. образуютъ фундаментальную систему, если детерминантъ, составленный изъ этихъ чиселъ, не равенъ нулю. Докажемъ это. Составимъ детерминантъ Вронскаго $W(y_1, \; y_2, \ldots, y_n)$, гдѣ $y_1, \; y_2, \; y_3, \ldots\ldots, y_n$ -функціи x. Въ этомъ детерминантѣ дадимъ x значеніе x_oи получимъ какъ разъ вышенаписанный детерминантъ, который не равенъ нулю, т.е.

$$\Big/^{x=x_o} W(y_1 . \; y_2, \ldots\ldots, y_n) = \mathcal{D}.$$

Итакъ детерминантъ Вронскаго, будучи для $x = x_o$ отличенъ отъ 0, не можетъ тождественно равняться 0, и мы имѣемъ фундаментальную систему. Итакъ всякое линейное дифференціальное ур-іе имѣ - етъ фундаментальную систему.

Докажемъ затѣмъ такую теорему. Пусть

$$y_1\ ,\ y_2\ ,\ y_3\ ,\ \ldots\ldots,\ y_n$$

частныя рѣшенія, составляющія фундаментальную систему; тогда общій интегралъ опредѣляется формулой $y = \sum\limits_{s=1}^{s=n} C_s y_s$ (I),

гдѣ C_s - произвольныя постоянныя. То обстоятельство, что y есть рѣшеніе, нами уже было доказано и намъ важно теперь доказать, что y есть рѣшеніе общее при произвольныхъ значеніяхъ постоянныхъ C_s. Мы будемъ доказывать, что всякое рѣшеніе получается изъ этой формулы $y = \sum C_s y_s$. Оставляя обозначеніе $y(x)$ для любого рѣшенія, получимъ рядъ такихъ равенствъ:

$$\begin{array}{l}
y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + p_2 y_1^{(n-2)} + \ldots\ldots + p_n y_1 = 0 \\
y_2^{(n)} + p_1 y_2^{(n-1)} + p_2 y_2^{(n-2)} + \ldots\ldots + p_n y_2 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n^{(n)} + p_1 y_n^{(n-1)} + p_2 y_n^{(n-2)} + \ldots\ldots + p_n y_n = 0 \\
y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots + p_n y = 0
\end{array}$$

Разсматриваемъ полученныя ур-ія, какъ линейныя съ неизвѣстными $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$. Всѣхъ ур-ій $n+1$, а неизвѣстныхъ n, слѣд., детерминантъ изъ коэфф-въ долженъ быть равнымъ нулю. А этотъ детерминантъ есть детерминантъ Вронскаго

$$W(y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_n, y) = 0$$

для функцій $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_n, y$. Это показываетъ, что эти функціи линейно зависимы. Но детерминантъ Вронскаго, составленный изъ $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$, не равенъ нулю, т.е.

$$W(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) \neq 0.$$

А это есть миноръ отъ детерминанта съ $n+1$ элементами. По предыдущему мы знаемъ, что въ этомъ случаѣ линейное соотношеніе разрѣшимо относительно у, т.е.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots\ldots + C_n y_n.$$

гдѣ C_i - $const$. Слѣд. теорема доказана, т.е. всякое рѣшеніе у линейно выражается чрезъ фундаментальную систему и слѣдовательно формула (I) есть общее рѣшеніе. Изъ предыдущаго видно еще больше, а именно: эта формула не только даетъ общее рѣшеніе, но и изъ нея получаются всѣ рѣшенія линейнаго дифф-наго ур-ія, т.е. линейное ур-іе не имѣетъ особаго рѣшенія. Такимъ образомъ линейныя дифф-ныя ур-ія не допускаютъ особаго рѣшенія.

П Р И М Ѣ Р Ъ 1. Имѣемъ ур-іе $y'' + y = 0$. Ему удовлетворяютъ $y_1 = \cos x$ и $y_2 = \sin x$. Дифференцируя два раза значенія y_1 и y_2, получимъ $y_1' = -\sin x$; $y_1'' = \cos x$; $y_2'' = -\sin x$; $y_2' = \cos x$. Получаемъ: $-\cos x + \cos x = 0$ и $-\sin x + \sin x = 0$. Эти y_1 и y_2 линейно независимы, т.е. нельзя подобрать α_1 и α_2 такъ, чтобы $\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x = 0$, и детерминантъ Вронскаго, составленный изъ y_1, y_2, y_1', y_2' $\neq 0$

$$\begin{vmatrix} \cos x, & \sin x \\ -\sin x, & \cos x \end{vmatrix} = W(\cos x, \ \sin x) = 1.$$

Слѣд., рѣшенія образуютъ фундаментальную систему и можно написать общее рѣшеніе:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

П Р И М Ѣ Р Ъ 2. Даны частныя рѣшенія $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$. Составить ур-іе 2-го порядка, для котораго y_1 и y_2 служатъ рѣшеніями. Пишемъ:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0; \; y_1 = x; \; y_1' = 1; \; y_1'' = 0; \; p_1 + p_2 x = 0 \qquad (1)$$

$y_2 = x^2;\ y_2' = 2x;\ y_2'' = 2;\ 2+2p_1 x+p_2 x^2 = 0;\ 2p_1 x+x^2 p_2 = -2$ (2)

Отсюда найдемъ p_1 и p_2; $p_1 = -xp_2$; $p_2 = \frac{2}{x^2}$; $p_1 = -\frac{2}{x}$.

Искомое ур-іе будетъ: $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$.

Общее рѣшеніе этого ур-ія будетъ: $y = C_1 x + C_2 x^2$, ибо дифф-ное ур-іе допускаетъ фундаментальную систему $y_1 = x$, $y_2 = x^2$. Этотъ примѣръ интересенъ въ томъ отношеніи, что, зная два рѣшенія, мы построили дифф-ное ур-іе. Такимъ образомъ фундаментальной системой у насъ опредѣлилось дифф-ное ур-іе.

Докажемъ общую теорему:

Т Е О Р Е М А. Фундаментальная система вполнѣ опредѣляетъ линейное дифференціальное уравненіе.

Пусть мы имѣемъ n функцій, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ отъ перемѣннаго x, для которыхъ детерминантъ Вронскаго не равенъ 0. Составимъ ур-іе n-го порядка, для котораго эта система была бы фундаментальной. Называя коэфф-ты ур-ія чрезъ p (они неизвѣстны), напишемъ ур-іе такъ:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = 0.$$

Вставляя въ искомое ур-іе значенія $y_1, y_2, \ldots, y_n$, мы получимъ n равенствъ, которыя и опредѣлятъ намъ неизвѣстные коэффиціенты p.

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots + p_n y = 0 \qquad (I)$$

$$y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + p_2 y_1^{(n-2)} + \ldots\ldots + p_n y_1 = 0 \qquad (1)$$

$$y_2^{(n)} + p_1 y_2^{(n-1)} + p_2 y_2^{(n-2)} + \ldots\ldots + p_n y_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n^{(n)} + p_1 y_n^{(n-1)} + p_2 y_n^{(n-2)} + \ldots\ldots + p_n y_n = 0 \qquad (n)$$

Послѣднія n равенствъ опредѣляютъ всѣ p, найдя которые мы вставимъ ихъ значеніе въ (I) и найдемъ искомое ур-іе. Но можно построить искомое уравненіе и проще. Мы исключимъ p_i изъ (n +1) равенствъ; детерминантъ изъ коэфф-товъ при p_i долженъ быть равенъ нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} y^{(n)}, & y^{(n-1)}, & \dots\dots & y \\ y_1^{(n)}, & y_1^{(n-1)}, & \dots\dots & y_1 \\ y_2^{(n)}, & y_2^{(n-1)}, & \dots\dots & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(n)}, & y_n^{(n-1)}, & \dots\dots & y_n \end{vmatrix} = 0$$

Это равенство имѣетъ видъ:

$$W(y_1, y_2, \dots\dots, y_n, y) = 0,$$

гдѣ y - неизвѣстная функція. Раскрывая этотъ детерминантъ по элементамъ 1-ой строки, мы получимъ искомое ур-іе въ видѣ

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0,$$

гдѣ всѣ <u>a</u> суть миноры для 1-ой строки детерминанта. Они суть функціи x. Раздѣливъ на a_0, мы получимъ уравненіе вида (I).

Опредѣлимъ теперь въ отдѣльности коэффиціенты p_i изъ n уравненій; p_1 опредѣлится дробью. Знаменателемъ этой дроби будетъ детерминантъ, составленный изъ коэфф-товъ при p. Не трудно видѣть, что детерминантъ этотъ есть детерминантъ Вронскаго

$$W(y_1, y_2, \dots\dots y_n),$$

составленный изъ частныхъ рѣшеній. Числитель же получится, если въ детерминантѣ Вронскаго коэфф-ты при p_1 замѣнимъ извѣстными членами. Итакъ p_1 будетъ равенъ:

$$p_1 = \frac{-\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \dots\dots & y_n \\ y_1', & y_2', & \dots\dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}, & y_2^{(n-2)}, & \dots\dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, & \dots\dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2 \dots y_n)}$$

Припомнимъ теперь правило дифференцированія детерминантовъ. Производная детерминанта есть сумма детерм-въ, въ которыхъ мы дифференцируемъ элементы одной строки. Если продифференцируемъ первую строку детерминанта Вронскаго, то получимъ нуль и т.д. Только продифференцировавъ послѣднюю строку, получимъ детерминантъ отличный отъ нуля и, именно, тотъ детерминантъ, который стоитъ у насъ въ числителѣ p_1, и слѣдовательно, для p_1 получаемъ слѣдующее выраженіе:

$$p_1 = -\frac{\frac{d}{dx}(W)}{W} = -\frac{d\lg W}{dx}$$

Итакъ, зная детерминантъ W, мы найдемъ p_1 и обратно: интегрируя выраженіе для p_1, найдемъ W:

$$W = Ce^{-\int p_1 dx}$$

Положеніе, выражаемое этой формулой, носитъ названіе теоремы Ліувилля.

Послѣдней формулѣ можно дать удобный видъ, выразивъ C чрезъ начальное значеніе W_0. Для этого возьмемъ интегралъ съ опредѣленнымъ нижнимъ предѣломъ x_0 и для опредѣленія C положимъ $x = x_0$. Тогда

$$W_0 = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p_1 dx} = C,$$

и формула Ліувиля напишется такъ:

$$W = W_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p_1 dx},$$

гдѣ W_0 есть детерминантъ Вронскаго для начальнаго значенія $x=x_0$. Отсюда видно, что съ исчезновеніемъ W_0 исчезаетъ и W. Подобравъ начальное значеніе такъ, чтобы W_0 не исчезало, видимъ, что и W тоже не исчезнетъ.

Выведемъ теперь слѣдствіе изъ теоремы Ліувилля для линейнаго уравненія второго порядка. Зная одно частное рѣшеніе, мы найдемъ общій интегралъ квадратурою. Пусть для ур-ія

$$y''+p_1 y'+p y = 0$$

извѣстно частное рѣшеніе y_1. Назовемъ какое-нибудь частное рѣшеніе, отличное отъ даннаго, чрезъ $\underline{y}$ и составимъ детерминантъ Вронскаго:

$$W = \begin{vmatrix} y , & y_1 \\ y' , & y_1' \end{vmatrix} = C e^{-\int p_1 dx}$$

Мы получимъ соотношеніе для опредѣленія $\underline{y}$. Раскрывая детерминантъ, находимъ:

$$y y_1' - y_1 y' = C e^{-\int p_1 dx} ,$$

гдѣ C имѣетъ различныя постоянныя значенія въ зависимости отъ выбора второго рѣшенія $\underline{y}$. Полученное выраженіе есть дифф-ное ур-іе перваго порядка, изъ котораго квадратурою находится $\underline{y}$:

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2} C e^{-\int p_1 dx}$$

Отсюда опредѣлимъ у:

$$y = y_1 \left\{ \int \frac{C e^{-\int p_1 dx}}{y_1^2} dx + C' \right\}$$

Такимъ образомъ, зная одно частное рѣшеніе, находимъ общій интегралъ съ двумя постоянными. Слѣдовательно, всякое однородное линейное дифференціальное ур-іе второго порядка интегрируется квадратурою, коль скоро мы имѣемъ одно частное рѣшеніе.

П Р И М Ѣ Р Ъ: $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 , \quad y_1 = x$

Примѣняя формулу Ліувилля, получимъ:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^2} C e^{2\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x^2} C x^2 = C ;$$

отсюда: $\frac{y}{x} = Cx + C' ; \quad y = Cx^2 + C'x$

Общее рѣшеніе опредѣлится этимъ выраженіемъ.

Послѣдній результатъ наводитъ на вопросъ: что дастъ намъ знаніе для ур-ія n-го порядка одного частнаго рѣшенія? Не трудно показать, что, зная одно частное рѣшеніе линейнаго уравненія

n -го порядка, можно понизить порядокъ ур-iя на одну единицу.

Пусть дано уравненiе

$$y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+p_2 y^{(n-2)}+\dots\dots\dots+p_n y=0$$

и извѣстно одно частное рѣшенiе. Введемъ новую функцiю z, полагая $y=y_1 . z$. Для z получимъ опять линейное ур-iе. Дифференцируемъ $y = z y_1$ до n-го порядка:

$$y=y_1 z$$

$$y'=y_1' z+y_1 z'$$

$$y''=y_1'' z+2y_1' z'+y_1 z''$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)}=y_1^{(n)} z+\frac{n}{1} y_1^{(n-1)} z'+\frac{n(n-1)}{1.2} y_1^{(n-2)} z''+\dots\dots+y_1 z^{(n)}$$

Умножая первое равенство на p_n, второе - на p_{n-1} ,....,послѣднее на 1, сложимъ. Получимъ новое ур-iе:

$$z(p_n y_1+p_{n-1} y_1'+\dots\dots y_1^{(n)})+z'(p_{n-1} y_1+2p_{n-2} y_1'+\dots\dots+n y_1^{(n-1)})+\dots\dots+z^{(n)} y_1=0$$

или, вводя сокращенныя обозначенiя q:

$$y_1 z^{(n)}+q_1 z^{(n-1)}+q_2 z^{(n-2)}+\dots\dots\dots\dots+q_n z=0,$$

гдѣ

$$q_n=y^{(n)}+p_1 y_1^{(n-1)}+p_2 y_1^{(n-2)}+\dots\dots+p_n y_1,$$

т.е. величина q_n есть результатъ подстановки въ ур-iе вмѣсто у величины y_1; слѣдовательно: $q_n = 0$, и порядокъ ур-iя понизимъ на единицу, полагая $z'=u$:

$$y_1 u^{(n-1)}+q_1 u^{(n-2)}+\dots\dots\dots+q_{n-1} u=0$$

Для u получили линейное ур-iе n-1 порядка, и предложенiе наше доказано.

Найдемъ теперь связь между перемѣнными у и z. Мы положили $z'=u$ и $y = y_1 z$; $z=\frac{y}{y_1}$; $z'=\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right)=u$. Опредѣливъ u, мы одною квадратурою найдемъ z; чрезъ квадратуру мы вве -

демъ одно произвольное постоянное.

Мы можемъ дальше вести наши разсужденія и положить, что намъ дано не одно частное рѣшеніе, а нѣсколько, напр. m; въ этомъ случаѣ можемъ понизить порядокъ ур-ія на m единицъ. При этомъ пониженіе будемъ вести послѣдовательно, и всѣ наши рѣшенія должны быть линейно независимы.

Пусть мы имѣемъ сначала два рѣшенія y_1 и y_2. Воспользуемся сначала только y_1: получимъ, по предыдущему,

$$u = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) ;$$

для u мы имѣемъ ур-іе уже $(n-1)$ порядка. Для него мы знаемъ еще одно частное рѣшеніе, получаемое изъ рѣшенія $y = y_2$. Вставимъ его въ выраженіе для u вмѣсто y, получимъ:

$$u_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) .$$

Такимъ образомъ для ур-ія съ u намъ извѣстно одно рѣшеніе u_1, т.е. для ур-ія $(n-1)$ порядка мы знаемъ одно частное рѣшеніе u_1 и можемъ опять понизить порядокъ ур-ія на единицу. Обозначая новое перемѣнное, подобное u, черезъ v, мы имѣемъ: $v = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{u_1}\right)$; для v имѣемъ ур-іе $n-2$ порядка.

Въ числѣ частныхъ рѣшеній мы, по условію, не считаемъ тривіальнаго рѣшенія $y = 0$, поэтому u_1 - не нуль: $u_1 \neq 0$. Если бы u_1 оказалось нулемъ, то $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = 0$, и $\frac{y_2}{y_1}$ было бы постоянно, и мы получили бы $\frac{y_2}{y_1} = k$; $y_2 - ky_1 = 0$ т.е. наши рѣшенія y_1, y_2 оказались бы линейно зависимыми, тогда какъ мы считаемъ ихъ линейно независимыми. Итакъ $u_1 \neq 0$. Точно такъ же можно вести разсужденія, когда даны три рѣшенія y_1, y_2, y_3.

Для ур-ія $(n-2)$ порядка мы нашли бы $v = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{u_1}\right)$. Для этого ур-ія тоже мы можемъ найти рѣшеніе, пользуясь y_3 ; вставляя y_3 вмѣсто $\underline{y}$ въ выраженіе u, имѣемъ: $u_2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_3}{y_1}\right)$, т.е. для ур-ія съ u мы уже знаемъ два частныхъ рѣшенія u_1 и u_2. Нужно только показать, что u_1 и u_2 линейно независимы. Предположимъ, что они линейно зависимы, т.е. существуетъ равенство $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0$

или, вставляя вмѣсто u_1 и u_2 ихъ выраженіе чрезъ y_1, y_2 и y_3, находимъ:

$$\alpha_1 \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) + \alpha_2 \frac{d}{dx}\left(\frac{y_3}{y_1}\right) = 0$$

Интегрируя это равенство, будемъ имѣть:

$$\alpha_1 \frac{y_2}{y_1} + \alpha_2 \frac{y_3}{y_1} = C \quad , \qquad \text{или}$$

$$\alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_3 - C y_1 = 0$$

Это равенство представляетъ линейную зависимость между данными рѣшеніями y_1, y_2 и y_3, которыя мы предположили линейно независимыми. Слѣдовательно, подобное равенство существовать не можетъ, а, слѣд., и u_1 и u_2 линейно независимы, и, взявъ $v_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{u_2}{u_1}\right)$, можемъ поступать по прежнему.

Итакъ, указаннымъ пріемомъ помощью послѣдовательнаго понижения мы можемъ понизить порядокъ ур-ія на m единицъ, когда дано m частныхъ рѣшеній.

Дадимъ теперь общее доказательство для нашего предложенія - доказательство отъ $m-1$ къ m, т.е. полагая, что теорема доказана для $m-1$ рѣшеній, докажемъ, что она справедлива и для m рѣшеній.

Пусть дано m рѣшеній $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_m$, гдѣ $m < n$. Докажемъ, что порядокъ ур-ія можно понизить на m единицъ. Дѣлаемъ въ данномъ ур-іи подстановку, полагая $y = y_1 z$; затѣмъ обозначая $z' = u$ получаемъ ур-іе для u на единицу низ -

шаго порядка. Для него мы будемъ имѣть $m-1$ рѣшеній:

$$u_1=\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right);\ u_2=\frac{d}{dx}\left(\frac{y_3}{y_1}\right);\ \ldots\ldots\ldots\ u_{m-1}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y_m}{y_1}\right)$$

Мы предположили, что для $m-1$ порядка наше предложеніе доказано, и порядокъ понижается на $m-1$ единицъ. Переходя отъ y къ u, мы порядокъ понизили на 1; слѣдовательно всего порядокъ даннаго ур-ія понизился на $m-1+1$ единицъ, т.е. на m единицъ. При этомъ замѣтимъ, что всѣ u будутъ линейно независимы въ силу нашего предположенія, что y_1, y_2, ..., y_m линейно независимы. Въ самомъ дѣлѣ, если всѣ u линейно зависимы, то между ними должно существовать линейное соотношеніе вида:

$$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3+\ldots\ldots\ldots+\alpha_{m-1}u_{m-1}=0.$$

Замѣняя здѣсь u чрезъ ихъ выраженія и интегрируя, мы будемъ имѣть такое соотношеніе:

$$\alpha_1 y_2+\alpha_2 y_3+\ldots\ldots\ldots+\alpha_{m-1}y_m-Cy_1=0$$

а такая линейная зависимость между y невозможна, слѣдовательно, всѣ u линейно независимы.

Послѣдними разсужденіями мы воспользуемся для доказательства существованія фундаментальной системы для всякаго линейнаго дифференціальнаго ур-ія n-го порядка. Одно доказательство нами уже было дано; -это - доказательство, вытекающее изъ разсмотрѣнія детерминанта Вронскаго. Теперь мы воспользуемся методомъ перехода отъ $n-1$ къ n.

Предполагаемъ, что существованіе фундаментальной системы доказано для ур-ія $n-1$ порядка; докажемъ, что она существуетъ и для ур-ія n-го порядка.

Пусть мы имѣемъ одно частное рѣшеніе y_1, которое мы всегда можемъ найти, задавъ начальныя данныя. Вводимъ новое перемѣнное, полагая $y = y_1 . z$. Затѣмъ, какъ дѣлали прежде, введемъ перемѣнное u. Тогда порядокъ ур-ія понизится на единицу, и получимъ ур-іе въ u, $(n-1)$ порядка. По предположенію для ур-ія $(n-1)$ порядка существуетъ фундаментальная система; и тогда общее рѣшеніе напишется такъ:

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots \ldots + C_{n-1} u_{n-1}.$$

Отъ перемѣннаго u мы должны возвратиться къ y; $u = z'$, слѣдовательно: $z = C_1 \int u_1 dx + C_2 \int u_2 dx + \ldots + C_{n-1} \int u_{n-1} dx + C_n$.
Умножая послѣднее выраженіе на y_1, получимъ:

$$y = C_1 y_1 \int u_1 dx + C_2 y_1 \int u_2 dx + \ldots \ldots + C_{n-1} y_1 \int u_{n-1} dx + C_n y_1,$$

или мѣняя обозначенія C на γ, получимъ: $(C_n = \gamma_1, C_1 = \gamma_2, C_2 = \gamma_3, \ldots)$

$$y = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 \int u_1 dx + \ldots \ldots + \gamma_n y_1 \int u_{n-1} dx$$

Легко видѣть, что всѣ факторы при γ суть частныя рѣшенія даннаго уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, при любыхъ значеніяхъ γ, $\underline{y}$ есть рѣшеніе. Положимъ всѣ γ равными 0, кромѣ одного $= 1$; тогда наша формула приметъ видъ: $y = y_1$ или $y = y_2$ или $y = y_3$ и т.д., гдѣ

$$y_k = y_1 \int u_{k-1} dx \quad \text{и} \quad k = 2, 3, 4, \ldots, n;$$

очевидно, y_k есть частное рѣшеніе.

Остается доказать, что всѣ найденныя частныя рѣшенія линейно независимы, т.е. образуютъ фундаментальную систему. Предположимъ, что они линейно зависимы, т.е.

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots \ldots + \alpha_n y_n = 0$$

вставимъ вмѣсто y ихъ значенія: $y_2 = y_1 \int u_1 dx, \ldots \ldots$ и, сокративъ на y_1, продифференцируемъ по x; получимъ:

$$\alpha_2 u_1 + \alpha_3 u_2 + \ldots \ldots + \alpha_n u_{n-1} = 0 ,$$

гдѣ всѣ α постоянны. Получили линейную зависимость между всѣми u. Мы ихъ предположили линейно независимыми, слѣдовательно написанное равенство существовать не можетъ, и всѣ y линейно независимы.

Итакъ, если фундаментальныя система существуетъ для ур-ія n-1 порядка, то она будетъ существовать и для ур-ія n-го порядка.

Остается показать, будетъ ли справедлива теорема для линейнаго однороднаго ур-ія перваго порядка. Возьмемъ линейное однородное ур-іе перваго порядка: $y' + py = 0$. Для него общее рѣшеніе выразится чрезъ одно частное, т.е. $y = C_1 y_1$, гдѣ C_1 - произвольное постоянное. Слѣдовательно, одно рѣшеніе образуетъ фундаментальную систему. Отсюда, по доказанному, существуетъ фундаментальная система и для ур-ія 2-го порядка, а слѣдовательно, и для ур-ія 3-го порядка и т.д.

§ 19. ТЕОРІЯ НЕОДНОРОДНЫХЪ ЛИНЕЙНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

Неоднородныя линейныя дифф-ныя ур-ія или ур-ія со второй частью имѣютъ видъ:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots \ldots + p_n y = V , \qquad (1)$$

гдѣ всѣ p и V суть функціи x. Интеграція такихъ ур-ій приводится къ интеграціи ур-ій безъ второй части или однородныхъ, если только извѣстно одно частное рѣшеніе неоднороднаго уравненія.

Однородное ур-іе, имѣющее тѣ же коэффиціенты, какъ и неоднородное, называется соотвѣтствующимъ ему однороднымъ ур-іемъ: $$y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+p_2 y^{(n-2)}+\ldots\ldots+p_n y=0 \qquad (2)$$
Ясно, что общихъ рѣшеній у (1) и (2) нѣтъ.

Пусть намъ извѣстно частное рѣшеніе неоднороднаго ур-ія $\mathcal{Y}(x)$; введемъ новое перемѣнное, полагая:
$$y=\mathcal{Y}+z \quad ; \qquad (3)$$
вставимъ выраженіе (3) въ ур-іе (1); мы увидимъ, что каждый членъ распадается на два: съ $\mathcal{Y}$ и z; сгруппируемъ ихъ въ отдѣльности и мы получимъ въ лѣвой части, во-первыхъ, лѣвую часть ур-ія (1) съ замѣной y черезъ рѣшеніе $\mathcal{Y}$, а во-вторыхъ лѣвую часть ур-ія (2) съ замѣною y черезъ z. Первая группа членовъ уничтожится со второй частью, и останется 2-ая группа, и мы получимъ линейное однородное ур-іе n-го порядка относительно z. Намъ остается теперь проинтегрировать это ур-іе, и мы найдемъ помощью подстановки (3) интегралъ неоднороднаго ур-ія.

Если же мы имѣемъ фундаментальную систему соотвѣтствующаго неполнаго ур-ія y_1, y_2, y_3, ..., y_n, то
$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots\ldots+C_ny_n$$
будетъ общее рѣшеніе ур-ія (2). Если же мы сюда прибавимъ $\mathcal{Y}$ (т.е. частное рѣшеніе неоднороднаго), то
$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots\ldots+C_ny_n+\mathcal{Y} \qquad (3)$$
опредѣлитъ намъ общее рѣшеніе ур-ія (1). Выраженіе для y линейно относительно постоянныхъ. Обратно: если мы имѣемъ линейное выраженіе относительно n произвольныхъ постоянныхъ, то оно можетъ служить общимъ рѣшеніемъ линейнаго ур-ія (1) n-го по -

рядка. Пусть мы имѣемъ

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots\dots + C_n y_n + Y \quad , \qquad (3')$$

гдѣ С - произвольныя постоянныя, а y_i и Y суть нѣкоторыя функціи x. Утверждаемъ, что выраженіе (3') удовлетворяетъ нѣкоторому линейному ур-ію. Для доказательства положенія нужно исключить произвольныя постоянныя С изъ соотношенія (3'), продифференцировавъ его n разъ. Пишемъ:

$$y = \sum_{s=1}^{s=n} C_s y_s + Y$$

$$y' = \sum_{s=1}^{s=n} C_s y_s' + Y'$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)} = \sum_{s=1}^{s=n} C_s y_s^{(n)} + Y^{(n)}$$

имѣемъ (n+1) ур-ій, гдѣ n неизвѣстныхъ С, которыя нужно исключить. Детерминантъ системы долженъ быть равенъ 0, т.е.

$$\begin{vmatrix} y - Y, & y_1, & \dots\dots\dots & y_n \\ y' - Y', & y_1', & \dots\dots\dots & y_n' \\ y'' - Y'', & y_1'', & \dots\dots\dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n)} - Y^{(n)}, & y_1^{(n)} & \dots\dots\dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая детерминантъ по элементамъ перваго столбца, получимъ линейное дифф-ное ур-іе n-го порядка. Итакъ положеніе доказано.

Мы видимъ такимъ образомъ, что если намъ извѣстно n независимыхъ рѣшеній (2)-го ур-ія и одно частное рѣшеніе ур-ія (1), то общее рѣшеніе неоднороднаго ур-ія находится безъ интеграціи.

Возникаетъ вопросъ, получимъ ли какое-нибудь упроще -

ніе, если намъ извѣстно только одно частное рѣшеніе однороднаго ур-ія - y_1. Для разрѣшенія его прибѣгаемъ къ подстановкѣ, полагая $y = y_1 z$ и вставляя это выраженіе въ ур-іе (1), предварительно продифференцировавъ:

$$\begin{array}{l|l} p_n & y = y_1 z \\ p_{n-1} & y' = y_1' z + y_1 z' \\ p_{n-2} & y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'' \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1 & y^{(n)} = y_1^{(n)} z + \frac{n}{1} y_1^{(n-1)} z' + \dots\dots\dots + y_1 z^{(n)} \end{array}$$

Умножая y на p_n, y' на p_{n-1} и т.д., послѣднее на 1, складывая, мы въ лѣвой части получимъ въ силу даннаго ур-ія V, и слѣдовательно имѣемъ:

$$V = y_1 z^{(n)} + q_1 z^{(n-1)} + q_2 z^{(n-2)} + \dots\dots + q_{n-1} z' + q_n z,$$

гдѣ

$$q_n = y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + p_2 y_1^{(n-2)} + \dots\dots + p_n y_1$$

Легко видѣть, что q_n равно нулю, какъ результатъ замѣны y рѣшеніемъ y_1 въ лѣвой части ур-ія (2), и для z мы имѣемъ линейное ур-іе со второй частью, куда входятъ только производныя отъ z, само же z не входитъ, т.е.

$$V = y_1 z^{(n)} + q_1 z^{(n-1)} + \dots\dots\dots + q_{n-1} z'$$

Полагая $z' = u$, получаемъ ур-іе $(n-1)$-го порядка. Отсюда результатъ такой: зная одно частное рѣшеніе y_1 соотвѣтствующаго однороднаго линейнаго ур-ія, мы съ помощью подстановки $y = y_1 z$ можемъ понизить порядокъ даннаго неоднороднаго ур-ія на единицу; зная два частныхъ рѣшенія, мы понизимъ порядокъ ур-ія на 2 единицы и т.д. Доказательство, какъ видно, аналогично доказательству въ случаѣ однороднаго ур-ія.

Предположимъ теперь обратно: пусть намъ извѣстно нѣ -

сколько частныхъ рѣшеній даннаго неоднороднаго ур-ія (1) и не даны рѣшенія ур-ія (2). Пусть имѣемъ нѣсколько такихъ рѣшеній $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_m$ - это частныя рѣшенія ур-ія (1). Какое упрощеніе интеграціи получится въ этомъ случаѣ? Выбираемъ одно изъ рѣшеній y_1 и дѣлаемъ такую подстановку: $y = y_1 + z$; получаемъ для z однородное ур-іе вида (2). Замѣняя теперь въ формулѣ подстановки y частными рѣшеніями y, мы для z будемъ имѣть:

$z = 0$

$z = y_2 - y_1$

$z = y_3 - y_1$

....

$z = y_m - y_1$

и всѣ значенія z суть не что иное, какъ рѣшенія однороднаго ур-ія (2). Такимъ образомъ для (2) ур-ія мы будемъ знать $(m-1)$ рѣшеній, кромѣ тривіальнаго $z = 0$, а черезъ это, какъ видѣли выше, мы можемъ понизить порядокъ на $(m-1)$. Отсюда такъ формулируемъ сказанное: зная m частныхъ рѣшеній неоднороднаго линейнаго ур-ія, мы можемъ привести его къ однородному и понизить порядокъ ур-ія на $m-1$ единицъ.

Иллюстрируемъ все сказанное примѣромъ:

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^3 \qquad (1)$$

Раздѣляя это ур-іе на коэфф-тъ при старшей производной, приведемъ ур-іе къ обычному виду. Этому ур-ію удовлетворяетъ частное рѣшеніе $y = x^3$, что провѣряется подстановкой: $6x^3 - 6x^3 + 2x^3 = 2x^3$. Полагая $y = x^3 - z$, мы для z найдемъ однородное ур-іе:

$$x^2 z'' - 2xz' + 2z = 0 \qquad (2)$$

Если теперь для однороднаго ур-ія (2) извѣстны два частныхъ рѣшенія, то мы можемъ найти общее рѣшеніе даннаго ур-ія; легко видѣть, что $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$ удовлетворяютъ ур-ію (2).

Слѣдовательно общее рѣшеніе даннаго неоднороднаго ур-ія есть

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + x^3 \qquad (3)$$

Отсюда, давая С частныя значенія, получимъ частныя рѣшенія ; полагая $C_1 = C_2 = 0$, получимъ $y = x^3$. Если $C_2 = 0$, $C_1 = 1$, то $y = x + x^3$. Пусть теперь намъ заранѣе были даны два частныхъ рѣшенія $y_1 = x + x^3$ и $y_2 = x^3$, неоднороднаго ур-ія, тогда для его интегрированія мы сначала придемъ къ однородному (2) и порядокъ его понизимъ на единицу. Имѣемъ частное рѣшеніе однороднаго ур-ія (2): $z_1 = x^3 + x - x^3 = x$ и полагаемъ $z = xt$;

$$x^2(2t' + xt'') - 2x(t + xt') + 2xt = 0\ ; \quad x^3 t'' = 0$$

или $t'' = 0$, полагая $t' = u$; имѣемъ $u' = 0$, слѣдовательно $u = A$ и

$$t = Ax + B, \quad z = Ax^2 + Bx; \qquad y = x^3 + Ax^2 + Bx.$$

Если бы намъ было дано только одно частное рѣшеніе $y_1 = x$ соотвѣтственнаго однороднаго ур-ія, тогда порядокъ даннаго неоднороднаго ур-ія мы могли бы понизить на единицу. Пусть $y_1 = x$, полагая $y = x.z$ и подставляя это въ ур-іе, имѣемъ:

$$x^2(2z' + xz'') - 2x(z + xz') + 2xz = 2x^3$$

Раскрывая скобки и произведя сокращенія, имѣемъ: $z'' = 2$ ур-іе со второю частью, которое подстановкой $z' = u$ приводится къ ур-ію $u' = 2$; по интеграціи имѣемъ $z = x^2 + C_1 x + C_2$.

Отсюда $y = x^3 + C_1 x^2 + C_2 x$.

Итакъ мы видѣли, что, зная n частныхъ линейно-независимыхъ рѣшеній для однороднаго ур-ія и одно частное рѣшеніе неоднороднаго, мы находимъ общій интегралъ неоднороднаго ур-ія безъ интеграціи. Такимъ образомъ знать фундаментальную систему для соотвѣтствующаго однороднаго ур-ія еще не достаточно для того, чтобы проинтегрировать неоднородное ур-іе, -мы должны еще знать одно частное рѣшеніе. Но посредствомъ метода, указаннаго Лагранжемъ и названнаго методомъ варіаціи постоянныхъ, мы можемъ найти общій интегралъ неоднороднаго ур-ія помощью только квадратуръ, если извѣстенъ общій интегралъ соотвѣтствующаго однороднаго ур-ія. Къ разсмотрѣнію этого метода мы и обращаемся сейчасъ.

Возьмемъ неоднородное уравненіе (1)

$$y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+p_2 y^{(n-2)}+\ldots\ldots+p_n y=V \qquad (1)$$

и соотвѣтствующее однородное уравненіе:

$$y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+p_2 y^{(n-2)}+\ldots\ldots\ldots+p_n y=0\,; \qquad (2)$$

имѣемъ фундаментальную систему соотвѣтствующаго однороднаго ур-ія:

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ldots y_n\,; \qquad \text{тогда}$$

$$y=C_1 y_1+C_2 y_2+C_3 y_3+\ldots\ldots\ldots+C_n y_n \qquad (3)$$

гдѣ C - произвольныя постоянныя, - даетъ общее рѣшеніе уравненія (2). Имѣя такія данныя, задалимся вопросомъ: нельзя ли помощью равенства (3) опредѣлить и общій интегралъ ур-ія (1)? Этого сдѣлать нельзя, пока всѣ C остаются постоянными, и выраженіе (3) не можетъ удовлетворить неоднородному ур-ію (1). Далѣе, возможно ли достигнуть цѣли, если мы предположимъ всѣ C - функціями x, и всѣ ли рѣшенія тогда мы получимъ для ур-ія(1), предполагая лишь C функціями x? Если мы C полагаемъ функціями x, то мы получимъ n новыхъ перемѣнныхъ, и равенство (3) устанавливаетъ связь между старой функціей y и новыми функціями x, функціями C_i. Отсюда ясно, что не только возможно достигнуть нашей цѣли, но у насъ являются слишкомъ много новыхъ функцій: мы ввели ихъ n. Изъ числа n введенныхъ новыхъ функцій, мы

$n-1$: C_1, C_2, ..., C_{n-1} можемъ выбрать произвольно, и тогда формула (3) будетъ выражать связь у съ новымъ перемѣннымъ C_n. Благодаря произволу въ выборѣ $n-1$ функцій мы можемъ присоединить какія угодно $n-1$ ур-ій, которыя вмѣстѣ съ ур-іемъ (1) опредѣлятъ всѣ C.

Дифференцируемъ:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots\ldots + C_n y_n \qquad (1')$$

одинъ разъ и требуемъ, чтобы совокупность членовъ, получаемыхъ при дифференцированіи первыхъ факторовъ, равнялась нулю, т.е.

$$y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \ldots\ldots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0 \qquad (1'')$$

тогда:

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots\ldots + C_n y_n' \qquad (2')$$

Дифференцируемъ еще разъ и ставимъ аналогичное требованіе:

$$y_1' \frac{dC_1}{dx} + y_2' \frac{dC_2}{dx} + \ldots\ldots + y_n' \frac{dC_n}{dx} = 0 \qquad (2'')$$

тогда:

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \ldots\ldots + C_n y_n'' \qquad (2')$$

Такъ же поступаемъ дальше; послѣднее изъ поставленныхъ условій имѣетъ видъ:

$$y_1^{(n-2)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(n-2)} \frac{dC_2}{dx} + \ldots\ldots + y_n^{(n-2)} \frac{dC_n}{dx} = 0 \qquad (n-1)$$

и при этомъ

$$y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)} \qquad (n-1)'$$

Всѣхъ равенствъ (1"), (2"),..., $(n-1)$" числомъ $n-1$; это тѣ $n-1$ условій, которыя мы по произволу можемъ наложить на функціи C_i.

Дифференцируя $(n-1)'$, получаемъ:

$$y^{(n)} = C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots\ldots + C_n y_n^{(n)} +$$
$$+ y_1^{(n-1)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(n-1)} \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n^{(n-1)} \frac{dC_n}{dx} \qquad (n')$$

Вставляя выраженія у, y', y'',....., $y^{(n)}$ изъ ($1'$), ($2'$),..., (n') въ ур-іе (1), имѣемъ:

$$\begin{aligned} V = & C_1(P_n y_1 + P_{n-1} y_1' + P_{n-2} y_1'' + \dots\dots + y_1^{(n)}) + \\ & + C_2(P_n y_2 + P_{n-1} y_2' + P_{n-2} y_2'' + \dots\dots + y_2^{(n)}) + \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ & + C_n(P_n y_n + P_{n-1} y_n' + P_{n-2} y_n'' + \dots\dots + y_n^{(n)}) + \\ & + y_1^{(n-1)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(n-1)} \frac{dC_2}{dx} + \dots\dots + y_n^{(n-1)} \frac{dC_n}{dx} \end{aligned} \qquad (n'')$$

Коэффиціентъ при C_1 равенъ 0, точно такъ же и при C_2,....,C_n, такъ какъ y_1, y_2,...., y_n - частныя рѣшенія однороднаго ур-ія. Поэтому послѣднее ур-іе приметъ видъ:

$$y_1^{(n-1)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(n-1)} \frac{dC_2}{dx} + \dots\dots + y_n^{(n-1)} \frac{dC_n}{dx} = V \qquad (n'')$$

Уравненія 1", 2",..,n" содержатъ производныя C по x. Эти производныя изъ n ур-ій мы можемъ опредѣлить. Детерминантъ, составленный изъ коэффиціентовъ при производныхъ, есть не что иное, какъ детерминантъ Вронскаго. Онъ не равенъ нулю, т. к. y_1, y_2,...., y_n - частныя рѣшенія линейно-независимыя, и эти частныя рѣшенія составляютъ фундаментальную систему. Слѣд., рѣшая систему этихъ ур-ій, мы найдемъ всѣ производныя C по x; знаменателемъ въ выраженіяхъ этихъ производныхъ будетъ детерминантъ Вронскаго $W(y_1, y_2, y_3, \dots y_n)$; имѣемъ

$$\frac{dC_i}{dx} = \varphi_i(x)$$

и для опредѣленія C_i выполняемъ квадратуру:

$$C_i = \int \varphi_i(x)dx + \gamma_i$$

гдѣ γ_i - произвольная постоянная. Найденныя C вставляемъ въ равенство (3):

$$y=\gamma_1 y_1+\gamma_2 y_2+\ldots\ldots+\gamma_n y_n+y_1\int\varphi_1(x)dx+y_2\int\varphi_2(x)dx+\ldots+y_n\int\varphi_n(x)dx$$

Это выраженіе есть общее рѣшеніе ур-ія (1). Всѣ γ здѣсь постоянны, и выраженіе это такого же типа, какимъ оно должно быть въ силу общей теоріи. Всѣ члены съ γ составляютъ общее рѣшеніе соотвѣтствующаго однороднаго ур-ія, сумма же $\sum y_i\int\varphi_i(x)\,dx$ есть частное рѣшеніе неоднороднаго ур-ія, получаемое при $\gamma_1 = \gamma_2=\gamma_3=\ldots\ldots=\gamma_n = 0$. Итакъ, цѣль наша достигнута: зная фундаментальную систему соотвѣтствующаго однороднаго ур-ія, мы методомъ варіаціи (методъ Лагранжа) достигли того, что нашли общее рѣшеніе неоднороднаго уравненія.

Примѣнимъ этотъ методъ къ ур-ію, разсмотрѣнному раньше:

$$x^2y''-2xy'+2y=2x^3$$

Соотвѣтствующее однородное ур-іе будетъ:

$$x^2y''-2xy'+2y=0$$

Частныя рѣшенія его были $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$; общее рѣшеніе будетъ $y = C_1x + C_2x^2$. Полагая C функціями x, имѣемъ:

$$\frac{dC_1}{dx}x+\frac{dC_2}{dx}x^2=0\,,\quad \text{или}\quad \frac{dC_1}{dx}+x\frac{dC_2}{dx}=0\,;$$

$$\frac{dC_1}{dx}+2x\frac{dC_2}{dx}=\frac{2x^3}{x^2}=2x$$ Отсюда:

$$\frac{dC_1}{dx}=-x\frac{dC_2}{dx}\,;\quad \frac{dC_2}{dx}=2\,;\quad \frac{dC_1}{dx}=-2x\,;\quad C_1=-\int 2x\,dx+\gamma_1\,;$$

$$C_2=2\int dx+\gamma_2=2x+\gamma_2\,;\qquad C_1=-x^2+\gamma_1\,;$$

$$y=(-x^2+\gamma_1)x+(2x+\gamma_2)x^2=\gamma_1x+\gamma_2x^2-x^3+2x^3=\gamma_1x+\gamma_2x^2+x^3.$$

§ 20. ЛИНЕЙНЫЯ УРАВНЕНІЯ СЪ ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦІЕНТАМИ.

Обратимся къ вопросу: какимъ образомъ можно составить фундаментальную систему для даннаго линейнаго уравненія. Въ обмъ случаѣ такихъ указаній дать нельзя, но для частныхъ типовъ ур-ій можно составить фундаментальную систему и даже въ элементарныхъ функціяхъ. Возьмемъ ур-іе съ постоянными коэффиціентами. Ур-іе полагаемъ однороднымъ; неоднородное ур-іе мы могли бы свести къ ур-ію однородному. Итакъ пусть всѣ a - const.

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots\ldots+a_ny=0 \tag{1}$$

Этому уравненію мы можемъ удовлетворить, если дадимъ такое частное его рѣшеніе: $y = e^{kx}$. Дѣйствительно, вставивъ это значеніе въ ур-іе (1) и замѣтивъ при этомъ, что $y' = e^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$,... ..., $y^{(n)} = k^n e^{kx}$, получимъ ур-іе, гдѣ e^{kx} выйдетъ общимъ факторомъ:

$$e^{kx}(k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots\ldots+a_n)=0$$

Равенство нулю получится тогда, когда или $e^{kx} = 0$, или выраженіе въ скобкахъ равно 0. Но первое не равно нулю для любого x, слѣдовательно:

$$k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots\ldots+a_n=0 \tag{2}$$

Изъ этого условія опредѣляется k. Если $k_1, k_2, \ldots k_n$ суть корни этого уравненія, то e^{k_1x}, e^{k_2x},....., e^{k_nx} суть частныя рѣшенія даннаго уравненія.

Такимъ образомъ мы нашли возможность находить частныя рѣшенія дифф-наго ур-ія съ постоянными коэфф-тами, разрѣшая нѣкоторое алгебраическое ур-іе. Многочленъ въ лѣвой части ур-ія (2) мы будемъ обозначать черезъ $\varphi(k)$:

$$k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots\ldots+a_n=\varphi(k)$$

и назовемъ его характеристическимъ многочленомъ, а ур-іе $\varphi(k)=0$ характеристическимъ ур-іемъ. Обозначимъ лѣвую часть ур-ія (1) такъ:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots\ldots\ldots+a_ny=A\{y\},$$

гдѣ $A\{y\}$ обозначаетъ нѣкоторую операцію надъ y; $A\{y\}$ есть дифференціальное выраженіе. Мы имѣемъ равенство:

$$A\{e^{kx}\} = e^{kx}\varphi(k) \tag{3}$$

справедливое для <u>любого</u> k. (Если же $\varphi(k) = 0$, то $A\{e^{kx}\} = 0$.)

Отсюда: $$\varphi(k) = e^{-kx} A\{e^{kx}\} \tag{4}$$

Послѣднее равенство опредѣляетъ характеристическій многочленъ.

Если характеристическое ур-іе имѣетъ n различныхъ корней (предполагая, что нѣтъ равныхъ), тогда будемъ имѣть n частныхъ рѣшеній, и общее рѣшеніе выразится такъ:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots \dots + C_n e^{k_n x} \tag{5}$$

гдѣ C_i суть постоянныя. Это станетъ вполнѣ очевиднымъ, если мы докажемъ, что всѣ частныя рѣшенія линейно-независимы и, слѣд., образуютъ фундаментальную систему.

Доказательство поведемъ такъ: предположимъ, что наша теорія доказана для $n-1$ функцій вида e^{kx}, т.е. что эти $n-1$ функцій линейно-независимы; тогда докажемъ, что теорема справедлива и для n функцій, т.е. что n функцій линейно-независимы. Предположимъ, что мы имѣемъ зависимость такого рода:

$$\alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2 e^{k_2 x} + \dots \dots + \alpha_n e^{k_n x} = 0, \tag{6}$$

гдѣ α_i - const. и притомъ не всѣ α нули.

Раздѣлимъ всѣ члены соотношенія (6) на $e^{k_1 x}$:

$$\alpha_1 + \alpha_2 e^{(k_2-k_1)x} + \alpha_3 e^{(k_3-k_1)x} + \dots \dots + \alpha_n e^{(k_n-k_1)x} = 0$$

Затѣмъ продифференцируемъ все соотношеніе по x:

$$\alpha_2(k_2-k_1)e^{(k_2-k_1)x} + \dots \dots + \alpha_n(k_n-k_1)e^{(k_n-k_1)x} = 0 \tag{7}$$

Въ этомъ соотношеніи каждый членъ множится на нѣкоторый постоянный факторъ $(k_i - k_1)$. Это соотношеніе, слѣд., такого же типа какъ и (6), мо оно имѣетъ мѣсто уже для $n-1$ функцій. По предположенію же $(n-1)$ функцій линейно-независимы, слѣд. равенство (7) существовать не должно; если такъ, то не существуетъ и равенства (6). Наше положеніе доказано. Всѣ n функцій линейно независимы.

Сдѣлаемъ два замѣчанія по поводу доказаннаго:

1) Будутъ ли факторы въ показателяхъ всѣ различны? Мы предположили, что всѣ K различны; если бы $K_j - K_1 = K_i - K_1$, то отсюда слѣдовало бы, что $K_j = K_i$, чего по нашему предположенію не должно быть.

2) Не окажутся ли всѣ постоянные коэффиціенты въ равенствѣ (7) равными 0? Факторы $K_j - K_1$ не могутъ быть нулями, слѣдовательно коэффиціенты могутъ оказаться нулями только въ силу $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \dots = \alpha_n = 0$. Но тогда въ силу условія (6) окажется и $\alpha_1 = 0$, что противно нашему предположенію, такъ какъ всѣ α не могутъ быть нулями.

ПРИМѢРЪ 1. $y'' - \alpha^2 y = 0$, гдѣ α постоянно. Составляемъ характеристическое ур-іе: $K^2 - \alpha^2 = 0$ (производныя замѣняемъ степенями K). Рѣшаемъ и находимъ:

$$K = \pm\alpha\ ; \quad y_1 = e^{\alpha x}; \quad y_2 = e^{-\alpha x}\ ; \quad y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$$

Таковъ общій интегралъ.

ПРИМѢРЪ 2.

$$y'' + \alpha^2 y = 0\ ; \quad K^2 + \alpha^2 = 0\ ; \quad K = \pm i\alpha\ ; \quad y = C_1 e^{i\alpha x} + C_2 e^{-i\alpha x}$$

Послѣдній примѣръ приводитъ насъ къ мысли, нельзя ли полученный общій интегралъ, куда входитъ мнимость, представить въ болѣе удобной формѣ въ случаѣ, когда корни характеристическаго уравненія мнимы.

Если характеристическое ур-іе имѣетъ мнимые корни, то они попарно сопряжены. Пусть, слѣд., мы имѣемъ два корня для k $\alpha+\beta i$ и $\alpha-\beta i$, тогда частныя рѣшенія будутъ $e^{(\alpha+\beta i)x}$ и $e^{(\alpha-\beta i)x}$ и въ общемъ рѣшеніи будутъ 2 члена: $C_1e^{(\alpha+\beta i)x}+C_2e^{(\alpha-\beta i)x}$. Коэфф-ты C_1 и C_2 произвольны; подберемъ ихъ такъ, чтобы мнимость исчезла. Для этого 2 члена общаго интеграла представимъ въ видѣ:

$$e^{\alpha x}\{(C_1+C_2)\cos\beta x+i(C_1-C_2)\sin\beta x\}$$

Очевидно, что для того, чтобы мнимость исчезла, нужно C_1 и C_2 выбрать сопряженными, положивъ

$$C_1+C_2=C_1' \quad , \qquad i(C_1-C_2)=C_2'$$

при чемъ C_1' и C_2' считаемъ дѣйствительными, и тогда наше выраженіе принимаетъ дѣйствительный видъ:

$$e^{\alpha x}(C_1'\cos\beta x+C_2'\sin\beta x)$$

Въ нашемъ примѣрѣ $\alpha=0$, $\beta=a$ и общее рѣшеніе въ данномъ примѣрѣ принимаетъ видъ:

$$y=C_1'\cos ax+C_2'\sin ax.$$

Здѣсь слѣдуетъ сдѣлать только одно замѣчаніе: мы C_1 и C_2 считаемъ произвольными. Но ничто не мѣшаетъ намъ считать произвольными C_1' и C_2', и C_1, C_2 представить въ видѣ:

$$C_1=\frac{C_1'-iC_2'}{2} \qquad \text{и} \qquad C_2=\frac{C_1'+iC_2'}{2}$$

Послѣдними разсужденіями мы расширили понятіе о произвольномъ постоянномъ. Прежде мы считали его величиною только дѣйстви -

тельною, теперь же мы допускаемъ для произвольныхъ постоянныхъ не только дѣйствительныя, но и мнимыя значенія.

Приступаемъ теперь къ разсмотрѣнію случаевъ, когда характеристическое ур-іе имѣетъ кратные корни. Въ этомъ случаѣ не получимъ, очевидно, уже n частныхъ рѣшеній e^{kx} - ихъ будетъ меньше. Но мы сейчасъ покажемъ, что для каждаго кратнаго корня можно найти не одно частное рѣшеніе, а столько, какъ велика кратность корня.

Приступаемъ къ нашему доказательству съ частнаго случая. Предположимъ, что корень $k = 0$, и кратность корня есть m, тогда характеристическій многочленъ представится въ такомъ видѣ:

$$\varphi(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-m} k^m$$

Всѣ остальные члены исчезнутъ, т.е. $a_{n-m+1} = a_{n-m+2} = \dots = a_n = 0$. Дифф-ное ур-іе напишется въ силу этого такъ:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-m} y^{(m)} = 0$$

Замѣтимъ, что когда корень характеристическаго ур-ія $k = 0$, то $y = e^{kx}$ обращается въ 1. И не трудно видѣть, что единица удовлетворитъ нашему уравненію, такъ какъ всѣ производныя ея нули. Но кромѣ единицы мы можемъ указать еще рядъ частныхъ рѣшеній; если порядокъ послѣдней производной есть m то рѣшеніями будутъ $y = 1, x, x^2, x^3, \dots x^{m-1}$, такъ какъ всѣ производныя, начиная съ m-ой, суть нули. Дѣйствительно:

$$\frac{d^m(1)}{dx^m} = 0, \dots \dots \frac{d^m(x^{m-2})}{dx^m} = 0, \quad \frac{d^m(x^{m-1})}{dx^m} = 0$$

Поэтому дифф-ному ур-ію удовлетворяетъ не только $y = 1$, но и $x, x^2, x^3, \dots, x^{m-1}$, т.е. для m кратнаго корня мы нашли m частныхъ рѣшеній. Мы можемъ брать сумму этихъ рѣшеній и умно -

жать ихъ на постоянные коэффиціенты. Вообще, слѣд., частное рѣшеніе для m кратнаго корня есть многочленъ $(m-1)$-ой степени : $y = g_{m-1}(x)$. Этотъ многочленъ мы получили, исходя изъ разсмотрѣнія частнаго случая характеристическаго ур-iя, когда m-кратный корень его k равенъ нулю: $k = 0$. Но легко показать, что посредствомъ линейнаго преобразованія можно общій случай привести къ этому частному. Беремъ линейное дифф-ное ур-iе:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots + a_n y = A\{y\} = 0 \qquad \text{(I)}$$

и положимъ , что $y = e^{\sigma x} \cdot z$ (σ постоянно); тогда для всѣхъ производныхъ $e^{\sigma x}$ выйдетъ за скобку общимъ факторомъ: $y' = e^{\sigma x}(z' + \sigma z)$ и т.д.; по формулѣ Лейбница найдемъ, что какая-нибудь производная порядка p будетъ:

$$y^{(p)} = \sum_{s=0}^{s=p} (p_s)\sigma^s e^{\sigma x} z^{(p-s)} = e^{\sigma x} \sum_{s=0}^{s=p} (p_s)\sigma^s z^{(p-s)}$$

гдѣ (p_s) - биноміальный коэффиціентъ.

Если мы вставимъ всѣ производныя въ лѣвую часть даннаго дифф-наго ур-iя $A\{y\}$, то получимъ новое преобразованное ур-iе. Имѣемъ

$$A\{y\} = A\{e^{\sigma z} z\} = e^{\sigma z} B\{z\} \quad , \qquad \text{(II)}$$

итакъ, наше новое преобразованное ур-iе будетъ

$$B\{z\} = 0 \qquad \text{(II)}$$

Это уравненіе тоже линейное и съ постоянными коэффиціентами. Для новаго дифф-наго ур-iя важно найти характеристическое ур-iе и связь этого ур-iя съ характеристическимъ ур-iемъ даннаго дифференціальнаго ур-iя. Выше мы опредѣлили характеристическій многочленъ даннаго такъ:

$$\varphi(k) = \frac{A\{e^{kx}\}}{e^{kx}} \qquad (4)$$

По правилу нахожденія этого многочлена найдемъ характеристическій многочленъ и для второго дифф-наго ур-ія: $B\{z\} = 0$. Назовемъ его характеристическій многочленъ черезъ $f(k)$:

$$f(k) = \frac{B\{e^{kx}\}}{e^{kx}} \tag{8}$$

Но $B\{z\}$ связано съ даннымъ ур-іемъ такъ:

$$A\{e^{\sigma x} z\} = e^{\sigma x} B\{z\}$$

Отсюда мы найдемъ: $\quad B\{z\} = \frac{A\{e^{\sigma x} z\}}{e^{\sigma x}}$

Поэтому въ состношеніе (8) вмѣсто $B\{z\}$ вставимъ найденное выраженіе и получимъ

$$f(k) = \frac{A\{e^{\sigma x} e^{kx}\}}{e^{\sigma x} e^{kx}} = \frac{A\{e^{(\sigma+k)x}\}}{e^{(\sigma+k)x}}$$

Итакъ, для нахожденія $f(k)$ нужно въ данное ур-іе вмѣсто y подставить величину $e^{(\sigma+k)x}$ и на нее же раздѣлить. А это въ силу равенства (4) есть не что иное, какъ $\varphi(\sigma+k)$, слѣдовательно:

$$f(k) = \frac{A\{e^{(\sigma+k)x}\}}{e^{(\sigma+k)x}} = \varphi(\sigma+k) \tag{9}$$

Мы получили новый характеристическій многочленъ для преобразованнаго ур-ія изъ перваго характеристическаго многочлена даннаго дифф-наго замѣною k черезъ $\sigma+k$. Отсюда между прочимъ видны и корни новаго характеристическаго ур-ія. Они получатся очевидно, вычитаніемъ изъ корней прежняго характеристическаго ур-ія числа σ. Это еще нагляднѣе представляется слѣдующимъ способомъ доказательства. Пусть

$$\varphi(k) = (k-k_1)^{m_1} (k-k_2)^{m_2} \ldots\ldots (k-k_s)^{m_s}$$

гдѣ $k_1, k_2, k_3, \ldots. k_s$ суть корни ур-ія $\varphi(k)$ кратности: m_1, m_2, $m_3, \ldots.$ Многочленъ же $f(k)$, по предыдущему, есть

$$f(k) = [k-(k_1-\sigma)]^{m_1} [k-(k_2-\sigma)]^{m_2} \ldots\ldots$$

Теперь ясно, что корни новаго характеристическаго ур-ія суть:

$(K_1-\sigma)$, $(K_2-\sigma)$,....., и притомъ кратность ихъ прежняя. Отсюда результатъ сказаннаго формулируемъ такъ:

Преобразованіе $y = e^{\sigma x} \cdot z$ преобразуетъ линейное ур-іе съ постоянными коэффиціентами въ новое, линейное же ур-іе съ постоянными коэффиціентами. При этомъ корни характеристическаго ур-ія получаются изъ корней прежняго вычитаніемъ σ, а кратность корней остается прежняя.

Переходимъ къ изысканію частныхъ рѣшеній для случая кратныхъ корней характеристическаго ур-ія. Пусть дифференціальное ур-іе съ постоянными коэфф-тами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots + a_n y = A\{y\} = 0$$

таково, что его характеристическое ур-іе имѣетъ кратные корни; $K_1, K_2, \ldots K_i, \ldots K_s$ суть корни ур-ія кратности: $m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots \ldots m_s$. Сумма кратностей равна порядку ур-ія: $m_1 + m_2 + \ldots + m_i + + \ldots + m_s = n$.

Построимъ рядъ частныхъ рѣшеній, напр., для корня K_i кратности m_i. Для этого дѣлаемъ подстановку: $y = e^{K_i x} \cdot z$. Этою подстановкою мы придемъ къ ур-ію, гдѣ характеристическое ур-іе имѣетъ кратный корень, равный нулю. Преобразованіемъ мы получимъ ур-іе $B\{z\} = 0$. Въ характеристическомъ ур-іи этого дифференціальнаго ур-ія корню кратности K_i соотвѣтствуетъ корень 0 той же кратности. Слѣд., для m_i-кратнаго корня 0 мы имѣемъ частныя рѣшенія $z = 1, x, x^2, \ldots x^{m_i-1}$. Но, зная частныя рѣшенія преобразованнаго ур-ія, мы найдемъ и частныя рѣшенія даннаго. Изъ подстановки вытекаетъ, что

$$y = e^{K_i x},\ xe^{K_i x},\ x^2 e^{K_i x}, \ldots\ldots x^{m_i-1} e^{K_i x}$$

Совершенно такъ же мы построимъ другія частныя рѣшенія для другихъ корней. Получаемъ рѣшенія для корней $k_1, k_2, \ldots\ldots k_s$. Такимъ образомъ эти частныя рѣшенія расположатся по группамъ, и въ каждой группѣ $e^{k_i x}$ выйдетъ общимъ факторомъ.

Намъ нужно доказать теперь, что всѣ эти частныя рѣшенія линейно-независимы, т.е. между ними не существуетъ линейной зависимости съ постоянными коэфф-тами. Подобное соотношеніе, по вынесеніи общимъ факторомъ $e^{k_i x}$ изъ рѣшеній каждой группы, принимаетъ видъ:
$$g_1(x)e^{k_1 x}+g_2(x)e^{k_2 x}+\ldots\ldots+g_s(x)e^{k_s x}=0,$$
гдѣ g_1 -многочленъ m_1-1 степени, g_2, - (m_2-1) степени и т. д. g_s, - (m_s-1) степени. Докажемъ, что такое соотношеніе невозможно. Доказательство поведемъ методомъ перехода отъ $s-1$ къ s. Предположимъ, что наше соотношеніе невозможно для $s-1$ слагаемыхъ и докажемъ, что и для s слагаемыхъ оно не существуетъ. Раздѣлимъ все соотношеніе на $e^{k_s x}$, получимъ:
$$g_1(x)e^{(k_1-k_s)}+g_2(x)e^{(k_2-k_s)x}+\ldots\ldots+g_{s-1}(x)e^{(k_{s-1}-k_s)x}+g_s(x)=0 \quad (10)$$
Дифференцируемъ это равенство столько разъ, чтобы производная послѣдняго многочлена была равна нулю. Степень послѣдняго многочлена (m_s-1); слѣд., дифференцируя m_s разъ, мы получимъ производную послѣдняго многочлена, равную 0. При дифференцированіи всѣ предыдущіе члены останутся прежняго типа. Дѣйствительно, дифференцируемъ одинъ разъ:
$$\frac{d}{dx}\left\{g(x)e^{\alpha x}\right\}=e^{\alpha x}\left\{\alpha g(x)+g'(x)\right\}$$
Многочленъ, полученный послѣ дифференцированія факторомъ при $e^{\alpha x}$, - той же степени, какъ и первый (до дифференцированія). При многократномъ дифф-ніи получимъ члены такого же типа. Про-

дифференцировавъ все соотношеніе m_s разъ, мы получимъ соотношеніе такого же типа, но уже составленное изъ s-1 функцій, такъ какъ $\frac{d^{m_s}}{dx^{m_s}} \mathcal{G}_s(x) = 0$. Это равенство по условію невозможно, слѣд. невозможно равенство и для s функцій. Слѣд., состношеніе (10) не можетъ имѣть мѣста. Легко видѣть, что это равенство невозможно для одной функціи, напр., $\mathcal{G}_1(x)\, e^{k_1 x} \neq 0$, слѣд.; по доказанному для $s = 2$ тоже невозможно и т.д. Итакъ, оно невозможно и для любого s.

Такимъ образомъ мы построимъ фундаментальную систему, а имѣя ее, можемъ составить и общій интегралъ, для чего частныя рѣшенія помножаемъ на произвольные постоянные коэфф-ты и сложимъ. Мы получимъ:

$$y = \Gamma_1(x)\, e^{k_1 x} + \Gamma_2(x)\, e^{k_2 x} + \ldots\ldots + \Gamma_s(x)\, e^{k_s x}$$

гдѣ Г есть многочленъ съ произвольными коэфф-тами, степени на единицу меньше кратности соотвѣтствующаго корня; такъ Γ_1 степени m_1-1; Γ_2 - степени m_2-1; и т.д. Γ_s - степени m_s-1.

Остается сдѣлать только одно замѣчаніе. Кратные корни могутъ быть и мнимыми. Въ этомъ случаѣ они будутъ встрѣчаться попарно-сопряженными и притомъ одной кратности. Если мы имѣемъ мнимый корень $\alpha + \beta i$ кратности m, то существуетъ корень, ему сопряженный $\alpha - \beta i$ той же кратности m. Возьмемъ въ общемъ рѣшеніи два только члена:

$$\Gamma_1(x)\, e^{(\alpha+\beta i)x} + \Gamma_2(x)\, e^{(\alpha-\beta i)x} =$$

гдѣ Γ_1 и Γ_2 - два многочлена степени m-1. Все выраженіе можемъ представить иначе, пользуясь формулами Эйлера:

$$= e^{\alpha x}\Big[\big(\Gamma_1(x) + \Gamma_2(x)\big)\cos x\beta + i\big(\Gamma_1(x) - \Gamma_2(x)\big)\sin \beta x\Big] =$$

$$= e^{\alpha x}\Big[\Gamma_1^{(1)}(x)\cos\beta x + \Gamma_2^{(1)}(x)\sin\beta x\Big],$$

гдѣ $\Gamma_1^{(1)}$ и $\Gamma_2^{(1)}$ (многочлены степени $m-1$) связаны съ Γ_1 и Γ_2 такъ:

$$\Gamma_1^{(1)}(x) = \Gamma(x) + \Gamma_2(x) \quad ; \quad \Gamma_2^{(1)}(x) = i\left[\Gamma_1(x) - \Gamma_2(x)\right]$$

Можно было бы $\Gamma_1^{(1)}$ и $\Gamma_2^{(1)}$ считать произвольными и черезъ нихъ выразить Γ_1 и Γ_2.

ПРИМѢРЪ 1. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

Ур-іе 3-го порядка; его характеристическое уравненіе:
$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$; $(k-1)^3 = 0$; $k = 1$ есть трекратный корень. Слѣдовательно, частныя рѣшенія будутъ: e^x, xe^x, x^2e^x, а общее:
$y = e^x(C_1 + C_2x + C_3x^2)$

ПРИМѢРЪ 2. $y'''' + 2y'' + y = 0$

Характеристическое ур-іе : $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$; $(k^2+1)^2 = 0$; $k = \pm i$. Корни $+i$, $-i$ двукратные, они попарно-сопряженные. Составляемъ общій интегралъ по выше указанному, принимая во вниманіе, что $\alpha = 0$. Получаемъ: $y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_1 - C_2x)\sin x$. Таково будетъ въ дѣйствителной формѣ общее рѣшеніе.

Остается теперь намъ разсмотрѣть еще случай неоднороднаго ур-ія:

$$A\{y\} = V(x) \tag{11}$$

Общій интегралъ этого ур-ія мы можемъ получить согласно общей теоріи, т.е. беремъ соотвѣтствующее однородное дифф-ное ур-іе $A\{y\} = 0$, находимъ его общій интегралъ и методомъ варіаціи постоянныхъ найдемъ общій интегралъ даннаго ур-ія. Но здѣсь мы разсмотримъ другой методъ; именно, мы найдемъ частное рѣшеніе даннаго намъ ур-ія Y, а затѣмъ общее рѣшеніе $y = Y +$ общее рѣшеніе однороднаго ур-ія. Слѣд., въ этомъ методѣ дѣло сведется къ нахожденію частнаго рѣшенія ур-ія со второй частью.

Мы ограничимся однимъ случаемъ, а именно предположимъ, что вторая часть V состоитъ изъ членовъ такого вида, какіе входили въ рѣшеніе (общее) ур-iя безъ второй части, т.е.

$$V(x)=\sum_{i=1}^{i=m} e^{\alpha_i x} g_i(x) \qquad (11')$$

т.е. показательная функція $e^{\alpha_i x}$ множится на нѣкоторый много - членъ; все же выраженіе представляетъ сумму показательныхъ функцій, умноженныхъ на многочлены. Но и въ этомъ случаѣ правая часть представляетъ довольно сложное выраженіе. Мы ее упростимъ, предположивъ, что правая часть содержитъ не сумму членовъ такого типа, а только одинъ членъ, т.е. мы разсмотримъ такое неоднородное уравненіе:

$$A\{y\}=e^{\alpha_i x} g_i(x)$$

Это мы сдѣлаемъ по слѣдующей причинѣ:

Возьмемъ m ур-iй послѣдняго вида, полагая $i=1,2,3,\ldots,m$, и предположимъ, что мы нашли по одному частному рѣшенію y_1, y_2, y_3,.... Итакъ:

$$\begin{aligned} A\{y_1\}&=e^{\alpha_1 x} g_1(x) \\ A\{y_2\}&=e^{\alpha_2 x} g_2(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A\{y_m\}&=e^{\alpha_m x} g_m(x), \end{aligned} \qquad (12)$$

и, если извѣстно по одному частному рѣшенію для всѣхъ этихъ ур-iй, то мы можемъ утверждать, что данному ур-iю (11) удовлетворимъ, положивъ $y=y_1+y_2+\ldots$ Дѣйствительно, вставимъ это въ ур-iе (11), принимая во вниманіе значеніе символа; получимъ:

$$A\{y_1+y_2+\ldots\}=A\Big\{\sum_{i=1}^{i=m} y_i\Big\}=A\{y_1\}+A\{y_2\}+\ldots= \\ =\sum_{i=1}^{i=m} A\{y_i\}.$$

Но такъ какъ $A\{y_i\}=e^{\alpha_i x} g_i(x)$, то мы получаемъ:

$$\sum_{i=1}^{i=m} A\{y_i\}=\sum_{i=1}^{i=m} e^{\alpha_i x} g_i(x)=V(x).$$

Отсюда видно, что рѣшеніе даннаго неоднороднаго ур-ія приводится къ изысканію частныхъ рѣшеній ур-ія со второй частью, состоящей только изъ одного члена.

Итакъ, обращаемся къ изысканію частнаго рѣшенія ур-ія такого типа:

$$A\{y\} = e^{\alpha x} g_\mu(x) \qquad (12')$$

гдѣ μ - указатель степени многочлена. Если въ частномъ случаѣ имѣемъ $\alpha = 0$, тогда имѣемъ просто $g_\mu(x)$; если же $\mu = 0$, т.е. многочленъ нулевой степени, то имѣемъ въ правой части одну показательную функцію. Обращаемся къ разсмотрѣнію характеристическаго ур-ія отъ дифф-наго $A\{y\} = 0$ и посмотримъ, будетъ ли α корнемъ этого характеристическаго уравненія:

$$k_1^n + a_1 k^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0$$

Вообще говоря, α не будетъ корнемъ этого ур-ія; въ частномъ же случаѣ можетъ оказаться и корнемъ. Предположимъ для общности, что α есть корень характеристическаго ур-ія и притомъ m-кратный (если α не есть корень, тогда достаточно m положить равнымъ 0). Воспользуемся преобразованіемъ зависимаго перемѣннаго y, положивъ $y = e^{\alpha x}.z$. Мы видѣли, что при линейномъ преобразованіи зависимаго перемѣннаго, послѣ преобразованія получится ур-іе тоже линейное. Въ данномъ случаѣ послѣ преобразованія, имѣемъ ур-іе вида:

$$e^{\alpha x} B\{z\} = e^{\alpha x} g_\mu(x) \qquad (13)$$

гдѣ $B\{z\} = z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + b_2 z^{(n-2)} + \ldots\ldots$ и b_i - постоянные коэффиціенты. Сокращая на $e^{\alpha x}$, получаемъ:

$$B\{z\} = g_\mu(x) \qquad (13')$$

Такимъ образомъ мы нашу задачу привели къ тому случаю, когда $\alpha = 0$.

Въ этомъ же частномъ случаѣ задачу уже легко рѣшить. Новое характеристическое ур-іе будетъ имѣть корнемъ 0 кратности m, т.к. всѣ корни новаго характеристическаго ур-ія получаются изъ корней прежняго вычитаніемъ α, и $\alpha - \alpha = 0$. Если наше диффер-ное ур-іе (преобразованное) удовлетворяется нѣкоторымъ значеніемъ z и если его продифференцируемъ, то полученное ур-іе тоже будетъ удовлетворяться этимъ z. Продифференцируемъ его $\mu+1$ разъ, тогда справа получимъ 0:

$$\frac{d^{\mu+1}}{dx^{\mu+1}}\left[\mathcal{B}\{z\}\right] = 0 \qquad (14)$$

и будемъ имѣть линейное однородное дифф-ное ур-іе съ постоянными коэффиціентами:

$$z^{(n+\mu+1)} + b_1 z^{(n+\mu)} + b_2 z^{(n+\mu-1)} + \ldots\ldots = 0.$$

Порядокъ этого ур-ія будетъ $n+\mu+1$, т. к. сначала оно было порядка n, да еще продифференцировали $\mu+1$ разъ. Всѣ рѣшенія ур-ія, изъ котораго мы исходили (13') - будутъ также рѣшеніями и ур-ія (14), но обратнаго вообще не будетъ. Рѣшенія же (14) мы легко найдемъ, такъ какъ это ур-іе однородное, но только среди этихъ рѣшеній мы должны будемъ выбрать тѣ, которыя удовлетворяютъ (13'). Напишемъ характеристическое ур-іе для уравненія (14): $K^{n+\mu+1} + b_1 K^{n+\mu} + b_2 K^{n+\mu-1} + \ldots\ldots = 0$

Корни этого ур-ія будутъ: во-первыхъ всѣ корни стараго ур-ія, а во-вторыхъ $\mu+1$ разъ кратный корень 0. Но у стараго характеристическаго ур-ія былъ уже корень 0, и притомъ m-кратный. Слѣд., у новаго ур-ія нуль будетъ $m+\mu+1$ кратности. Другіе же корни различные вообще $x_1, x_2, \ldots\ldots x_{p-1}$. Слѣдовательно, общее рѣшеніе уравненія (14) напишется такъ:

$$z = g_{m+\mu}(x) + \sum_{i=1}^{i=p-1} e^{x_i x} g_i(x).$$

Таковымъ должно быть z, чтобы удовлетворить ур-iю (14). Видоизмѣнимъ нѣсколько полученное выраженie. Въ многочленѣ $g_{m+\mu}(x)$ - степени $m+\mu$ - соберемъ всѣ члены со степенями не ниже m и x^m вынесемъ общимъ факторомъ; получимъ:

$$z = x^m g_\mu(x) + C_1 x^{m-1} + C_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + \sum_{i=1}^{i=p-1} e^{x_i x} g_i(x), \quad (15)$$

гдѣ g_μ (x) - многочленъ степени .

Выше мы сказали, что всякое рѣшенie ур-iя (13') должно удовлетворить ур-iю (14), но не обратно : не всѣ рѣшенiя (14) удовлетворяютъ ур-iю (13').Слѣд.,только нѣкоторыя рѣшенiя (14) удовлетворяютъ ур-iю (13') такъ какъ ур-ie (14) высшаго порядка Отсюда заключаемъ, что всѣ рѣшенiя ур-iя (13') должны заключаться въ формулѣ (15) при нѣкоторыхъ значенiяхъ постоянныхъ. Такимъ образомъ задача наша сводится къ тому, чтобы выбрать изъ формулы (15) всѣ рѣшенiя, удовлетворяющiя ур-iю (13'). Если мы возьмемъ изъ формулы (15) совокупность членовъ:

$$C_1 x^{m-1} + C_2 x^{m-2} + C_3 x^{m-3} + \ldots\ldots + \sum_{i=1}^{i=p-1} e^{x_i x} g_i(x) \quad (15')$$

то, какъ нетрудно видѣть, она есть рѣшенie ур-iя (13'), но только безъ второй части. Въ самомъ дѣлѣ, характеристическое ур-ie этого ур-iя (13') безъ второй части имѣетъ m-кратный корень 0 и еще корни $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_{p-1}$. Выраженie (15) какъ разъ и составлено для этихъ корней. Итакъ, группа членовъ формулы (15) есть общее рѣшенie ур-iя (13') при замѣнѣ правой части въ немъ нулемъ, т.е. для $E\{z\} = 0$. Замѣтивъ это, мы можемъ отбросить всѣ члены формулы (15), начиная со 2-го, безъ ущерба для ур-ія $(13')$. На самомъ дѣлѣ, пусть при нѣкоторыхъ значеніяхъ постоянныхъ формула (15) даетъ частное рѣшеніе Z для уравненія $(13')$. Тогда вычитая изъ Z все, кромѣ 1-го члена, получимъ:

$$Z - C_1 x^{m-1} - C_2 x^{m-2} - \ldots\ldots - \sum_{i=1}^{i=p-1} e^{\varkappa_i x} g_i(x) = x^m g_\mu(x).$$

Это будетъ тоже частное рѣшеніе для ур-ія $(13')$, такъ какъ, подставляя это въ $B\{z\}$ вмѣсто z получимъ:

$$\mathcal{B}\left\{\left[Z - C_1 x^{m-1} - C_2 x^{m-2} - \ldots\ldots - \sum_{i=1}^{i=p-1} e^{\varkappa_i x} g_i(x)\right]\right\} =$$
$$= \mathcal{B}\{Z\} - \mathcal{B}\{C_1 x^{m-1} + C_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + \sum_{i=1}^{i=p-1} e^{\varkappa_i x} g_i(x)\} = \mathcal{B}\{Z\} = g_\mu(x),$$

такъ какъ $B\{C_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + \sum_{i=1}^{i=p-1} e^{\varkappa_i x} g_i(x)\} = 0$.

Слѣд., наша разность есть тоже рѣшеніе ур-ія $(13')$ со 2-ой частью. Отсюда, видимъ, что рѣшеніе ур-ія $(13')$ мы можемъ искать въ видѣ $x^m g_\mu(x)$.

Возвращаясь отъ z къ y, мы находимъ частное рѣшеніе уравненія (11):

$$A\{y\} = e^{\alpha x} g_\mu(x) \tag{12'}$$

въ видѣ:

$$y = e^{\alpha x}\left[x^m g_\mu(x)\right] \tag{16}$$

гдѣ m есть кратность корня характеристическаго ур-ія (если α не есть корень характеристическаго ур-ія, то m надо положить $= 0$); $g_\mu(x)$ есть многочленъ μ-степени, какъ и $g_\mu(x)$.

Итакъ мы доказали только, что ур-іе $(12')$ имѣетъ частное рѣшеніе вида (16). Остается найти это частное рѣшеніе, т.е. найти коэфф-ты $g_\mu(x)$. Для этого мы воспользуемся методомъ неопредѣленныхъ коэфф-товъ. Вставимъ въ ур-іе $(12')$ выраженіе (16) и приравняемъ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x въ 2-хъ частяхъ. Этотъ методъ насъ непремѣнно приведетъ къ цѣли, такъ какъ мы доказали, что частное рѣшеніе будетъ вида (16).

П Р И М Ѣ Р Ъ 1. $y'' + y = (x+2).e^x$. Разсмотримъ характеристическое ур-іе $k^2 + 1 = 0$; $k = \pm i$; α равно единицѣ и не есть корень характеристическаго ур-ія, слѣд: $m = 0$.

Пишемъ общій видъ частнаго рѣшенія $y = (Ax + B)\, e^x$. Остается найти коэфф-ты A и B.

$$y' = e^x(Ax + A + B)\ , \qquad y'' = e^x(Ax + 2A + B)\ ;$$

$$e^x(Ax + 2A + B) + e^x(Ax + B) = (x + 2)e^x.$$

Отсюда: $2A = 1,\ A + B = 1\ ;\ A = \frac{1}{2}\ ,\ B = \frac{1}{2}$.

Слѣдовательно общее рѣшеніе будетъ:

$$y = \frac{1}{2} e^x(x+1) + C_1 \cos x + C_2 \sin x\ .$$

Разберемъ еще примѣръ, гдѣ α является корнемъ характеристическаго уравненія.

П Р И М Ѣ Р Ъ 2. $y'' - y = (2x + 1)\, e^x$. Характеристическое ур-іе: $k^2 - 1 = 0$, $k = \pm 1$; α - однократный корень характеристическаго ур-ія, слѣд. m не равно 0, $m = 1$. Общій видъ рѣшенія есть $y = e^x.x(Ax+B)$. Это выраженіе нужно продифференцировать и вставить въ данное ур-іе. Съ перваго взгляда кажется страннымъ то обстоятельство, что въ одной части x будетъ въ первой степени, въ другой во второй, но не трудно видѣть, что вторая степень исчезнетъ.

$$y = e^x(Ax^2 + Bx)\ , \qquad y' = e^x[Ax^2 + (2A + B)x + B]\ ,$$

$$y'' = e^x[Ax^2 + (4A + B)x + 2(A + B)].$$

Вычитаемъ изъ y'' величину y; вторыя степени исчезнутъ. Мы получимъ: $4Ax + 2(A + B) = 2x + 1\ ;\ 4A = 2\ ;\ A + B = \frac{1}{2}\ ;\ A = \frac{1}{2}\ ;\ B = 0$.

Мы нашли частное рѣшеніе: $y = \frac{1}{2} x^2 e^x$. Не трудно найти общее рѣшеніе; для этого прибавляемъ къ частному рѣшенію общее рѣ -

шеніе ур-ія 2-ой части:

$$y = \frac{1}{2}x^2 e^x + C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Таково общее рѣшеніе даннаго уравненія.

Мы могли бы также разсматривать и такія дифф-ныя ур-ія со второй частью, гдѣ вторая часть есть тригонометрическая функція, напр., $y'' + y = \cos x$. Въ этомъ случаѣ новой теоріи создавать не придется, такъ какъ тригонометрическую функцію мы всегда можемъ представить въ видѣ суммъ показательныхъ функцій:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Такимъ образомъ мы разобьемъ правую часть ур-ія на 2 отдѣльныя части и станемъ разсматривать два отдѣльныхъ ур-ія съ правою частью, напр., $\frac{e^{ix}}{2}$ и $\frac{e^{-ix}}{2}$.

Обращаемся къ разсмотрѣнію ур-ія: $y'' + y = \cos x$. Согласно общей теоріи мы будемъ разсматривать два ур-ія:

$$y'' + y = \frac{1}{2}e^{ix} \qquad \text{и} \qquad y'' + y = \frac{1}{2}e^{-ix}$$

и для каждаго найдемъ по одному частному рѣшенію и сложимъ. Разсмотримъ 1-ое ур-іе: $y'' + y = \frac{1}{2}e^{ix}$, характеристическое ур-іе: $k^2 + 1 = 0$. Его корни: $k = \mp i$; $\alpha = i$ есть однократный корень характеристическаго ур-ія, поэтому частное рѣшеніе будетъ:

$$y_1 = e^{ix} \cdot x \cdot g_\mu(x);$$

но $\mu = 0$; слѣд., $y_1 = e^{ix} . x\, g_0(x)$. Но $g_0(x)$ - это многочленъ нулевой степени, т.е. величина постоянная. Слѣд., $y_1 = A . xe^{ix}$.

Дифференцируемъ два раза:

$$y_1' = e^{ix}(Aix + A) \quad ; \quad y_1'' = e^{ix}(-Ax + 2iA)$$

Складываемъ y_1 съ y_1'', получаемъ:

$$e^{ix}(Ax - Ax + 2Ai) = \frac{1}{2}e^{ix} \quad ; \quad 2Ai = \frac{1}{2} \quad ; \quad A = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}.$$

Итакъ, мы знаемъ частное рѣшеніе $y_1 = -\frac{1}{4}xe^{ix}$.

Обращаемся къ 2-му ур-iю: $y'' + y = \frac{1}{2}e^{-ix}$. Характеристическое ур-iе: $k^2 + 1 = 0$. Его корни: $k = \pm i$; $\alpha = -i$ есть одно-кратный корень характеристическаго ур-iя, поэтому частное рѣшеніе будетъ: $y_2 = e^{-ix} \cdot x \cdot B$, гдѣ $B = g_0(x) = const$.

Дифференцируемъ 2 раза:

$$y_2' = e^{-ix}(Bxi + B) \ ; \quad y_2'' = e^{-ix}(-Bx - 2Bi)$$

Складываемъ: $y_2'' + y_2 = e^{-ix}(Bx - Bx - 2Bi) = \frac{1}{2}e^{-ix}; -2Bi = \frac{1}{2}; B = \frac{i}{4}$

Знаемъ частное рѣшеніе для второго ур-iя: $y_2 = \frac{i}{4}e^{-ix}x$.

Возвращаясь къ данному первоначальному ур-iю, найдемъ, что его частное рѣшеніе, согласно общей теорiи, будетъ:

$$y = y_1 + y_2 = \frac{x}{2} \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{x}{2}\sin x.$$

Общiй интегралъ найдемъ, если къ частному рѣшенiю прибавимъ общее рѣшеніе ур-iя безъ 2-ой части, т.е. получимъ:

$$y = \frac{x}{2}\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Не трудно доказать, что нашъ результатъ мы могли бы получить, не разбивая ур-iе на двѣ отдѣльныя части, такъ какъ заранѣе можемъ предвидѣть, что оба эти рѣшенія y_1 и y_2 будутъ сопряжены, т.к. сопряжены вторыя части двухъ ур-iй, т.е. если одно рѣшеніе есть вида: $\varphi(x) + i\psi(x)$, то другое рѣшеніе будетъ вида: $\varphi(x) - i\psi(x)$. Слѣд., рѣшеніе y_2 будетъ сопряжено съ рѣшеніемъ y_1 и найдя y_1, можемъ найти и y_2.

Но и отдѣльно каждое рѣшеніе нѣтъ надобности выводить, такъ какъ послѣ сложенія найденныхъ двухъ частныхъ рѣшенiй сопряженныхъ получается величина дѣйствительная. Слѣд., въ общее рѣшеніе могутъ войти $\sin x$ и $\cos x$ и множителемъ многочленъ, и мы можемъ сразу написать видъ такого общаго интеграла:

$$y = x(A\cos x + B\sin x).$$

Въ этой формѣ мы и будемъ искать общее рѣшеніе ур-ія, когда во второй части стоитъ тригонометрическая функція $\sin x$ или $\cos x$. Неизвѣстные коэфф-ты А и В найдутся методомъ неопредѣленныхъ коэфф-товъ; дифференцируя y извѣстное число разъ (въ нашемъ случаѣ два раза) вставляемъ въ данное ур-іе:

$$y' = x(-A\sin x + B\cos x) + A\cos x + B\sin x,$$
$$y'' = x(-A\cos x - B\sin x) + 2B\cos x - 2A\sin x$$

Складывая y'' и y и вставляя, найдемъ и коэффиціенты:

$$y'' + y = x(-A\cos x - B\sin x + A\cos x - B\sin x) + 2B\cos x - 2A\sin x;$$

$$2B\cos x - 2A\sin x = \cos x.$$ Откуда $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$

Слѣд., $y = \frac{1}{2}x.\sin x$, что мы имѣли и раньше.

Обращаемся теперь къ общему случаю. Пусть ур-іе имѣетъ видъ:

$$A\{y\} = {}^{\sin}_{\cos}\,\alpha x\, g_m(x)$$

Тогда, согласно общей теоріи, намъ придется разсмотрѣть 2 ур-ія:

$$\left.\begin{aligned} &\text{или}\quad A\{y\} = e^{\alpha i x}\,\cancel{x^m}\,\tfrac{1}{2}\,g_m(x) \\ &A\{y\} = e^{-\alpha i x}\,\cancel{x^m}\,\tfrac{1}{2}\,g_m(x) \end{aligned}\right\} \text{ для } \cos.$$

гдѣ αi и $-\alpha i$ есть m-кратный корень характеристическаго ур-ія,

$$\left.\begin{aligned} &\text{или}\quad A\{y\} = \tfrac{1}{2i}\,e^{\alpha i x}\,\cancel{x^m}\,g_m(x) \\ &A\{y\} = -\tfrac{1}{2i}\,e^{-\alpha i x}\,\cancel{x^m}\,g_m(x) \end{aligned}\right\} \text{ для } \sin$$

Легко видѣть, что въ обоихъ случаяхъ правыя части сопряжены. Вообще мы получили бы то же самое и въ болѣе общемъ случаѣ, когда имѣли бы въ правой части линейное сочетаніе $\cos$ и $\sin$.

Мы можемъ также разсматривать и тѣ случаи, когда cosinus и sinus имѣютъ, напр., такой видъ: $\cos(\alpha x+\beta)$. Въ этомъ случаѣ стоитъ только положить $x+\frac{\beta}{\alpha}$ равнымъ новому перемѣнному x', и все останется по прежнему: правыя части будутъ сопряжены. Слѣд., разъ мы нашли $y_1 = \varphi(x) + i\psi(x)$, то найдемъ и $y_2 = \varphi(x) - i\psi(x)$. Сумма же ихъ: $y = y_1 + y_2 = 2\varphi(x)$ есть величина дѣйствительная. Пусть мы нашли эти два частныя рѣшенія:

$$y_1 = e^{\alpha i x} x^m g_m(x) \text{ и } \quad y_2 = e^{-\alpha i x} x^m \bar{g}_m(x)$$

гдѣ $\bar{g}_m(x)$ - многочленъ, сопряженный съ первымъ $g_m(x)$. Беремъ сумму этихъ рѣшеній и находимъ частное рѣшеніе даннаго ур-ія:

$$y = y_1 + y_2 = x^m\left[\varphi_m(x)\cos\alpha x + \psi_m(x)\sin\alpha x\right],$$

гдѣ $\varphi_m(x)$ и $\psi_m(x)$ - два многочлена съ дѣйствительными коэффиціентами. Въ этой формѣ мы и будемъ искать частное рѣшеніе ур-ія, гдѣ во второй части стоитъ тригонометрическая функція. Коэфф-ты двухъ многочленовъ $\varphi_m(x)$ и $\psi_m(x)$ найдутся методомъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

---

§.21. УРАВНЕНІЕ ЭЙЛЕРА.

Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію новаго вида диффэрен. ур-ій, тѣсно связанныхъ съ линейными ур-іями съ постоянными коэффиціентами, - уравненіямъ Эйлера.

Ур-іе Эйлера имѣетъ видъ:

$$(ax+b)^n y^{(n)} + A_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + A_n y = 0 \quad (1)$$

Каждая производная множится на степень линейнаго фактора $(ax+b)$. Уравненіе такого типа мы можемъ нѣсколько упростить. Во-первыхъ, коэфф-тъ при x, a мы можемъ сдѣлать равнымъ единицѣ. Дѣйствительно, вынося изъ каждаго фактора a въ соотвѣтствующей степени и раздѣляя все ур-іе на a^n, получимъ:

$$\left(x+\frac{b}{a}\right)^n y^{(n)} + \frac{A}{a}\left(x+\frac{b}{a}\right)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{a^n} y = 0$$

Замѣняя теперь $\frac{b}{a}$ чрезъ b и $\frac{A_1}{a}$ чрезъ A_1 ..., $\frac{A_n}{a^n}$ чрезъ A_n, гдѣ b и $A_1, \ldots, A_n$ отличны отъ прежнихъ, получаемъ:

$$(x+b)^n y^{(n)} + A_1 (x+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots\ldots + A_n y = 0$$

Далѣе мы можемъ величину b считать равной 0, для чего положимъ: $x + b = x'$ и дифференцируемъ $dx = dx'$, слѣдовательно:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx'}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx'^2}$ и т.д. Вообще $\frac{d^my}{dx^m} = \frac{d^my}{dx'^m}$.

Слѣдовательно ур-іе приметъ такой видъ:

$$x'^n \frac{d^ny}{dx'^n} + A_1 x'^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx'^{n-1}} + \ldots\ldots + A_n y = 0.$$

Это - ур-іе прежняго типа, гдѣ только $b = 0$. Въ дальнѣйшемъ изслѣдованіи мы будемъ предполагать, $a = 1$, $b = 0$, и писать ур-іе будемъ такъ:

$$x^n y^{(n)} + A_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + A_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \ldots\ldots + A_n y = 0 \quad (1')$$

Въ этой формѣ ур-іе сейчасъ же превращается въ ур-іе съ постоянными коэфф-тами. Для этого введемъ новое перемѣнное t, положивъ $x = e^t$; и слѣд. $t = \lg x$.

Мы имѣемъ: $$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df(e^t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{df(e^t)}{dt} = e^{-t} \frac{df(e^t)}{dt}.$$

Слѣд., дифференцированіе по x сводится къ дифференцированію по t и умноженію на e^{-t}. Замѣтивъ это, выразимъ y', y'', ... черезъ производныя по новому перемѣнному:

$$y' = e^{-t}\frac{dy}{dt}; \quad y'' = e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

Нетрудно теперь подмѣтить и законъ составленія какой-нибудь k-ой производной:

$$y^{(k)} = e^{-kt}\left[\frac{d^ky}{dt^k} + a_{1k}\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}} + a_{2k}\frac{d^{k-2}y}{dt^{k-2}} + \ldots\ldots + a_{(k-1)k}\frac{dy}{dt}\right]$$

Легко видѣть, что именно такого типа будетъ общее выраженіе k-ой производной. Для доказательства общности этого выраженія воспользуемся методомъ полной индукціи. Допустимъ, найденное выраженіе имѣетъ мѣсто для k-ой производной: докажемъ, что этотъ законъ составленія справедливъ и для $(k+1)$ производной. Для этого стоитъ только продифференцировать выраженіе $y^{(k)}$:

$$y^{(k+1)} = e^{-t}\frac{dy^{(k)}}{dt} = e^{-(k+1)t}\left[\frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}} + (a_{1k} - k)\frac{d^k y}{dt^k} + (a_{2k} - k a_{1k})\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}} + \dots\dots\right]$$

Получили выраженіе такого же типа, какъ и $y^{(k)}$. Остается теперь внести выраженія найденныхъ производныхъ въ данное ур-іе. При этомъ замѣтимъ, что у каждой производной будетъ стоять множителемъ e^{-t} въ степени, равной порядку производной. Поэтому всѣ e^{-t} сократятся и останутся выраженія въ скобкахъ, т.е. дифференціальныя выраженія съ постоянными коэфф-тами. Въ окончательномъ видѣ, послѣ преобразованія мы получимъ дифф-ное ур-іе съ новымъ перемѣннымъ t и съ постоянными коэффиціентами. Проинтегрировавъ затѣмъ его, мы проинтегрируемъ и первоначальное ур-іе, стоитъ только возвратится къ первоначальному перемѣнному x.

Чтобы проинтегрировать полученное преобразованное ур-іе, надо составить характеристическое ур-іе. Послѣднее получимъ обыкновеннымъ способомъ; вставивъ вмѣсто y выраженіе e^{kt}, будемъ имѣть:

$$k^n + B_1 k^{n-1} + B_2 k^{n-2} + \dots\dots\dots = 0, \qquad (2)$$

гдѣ B_1, B_2,... - коэфф-ты преобразованнаго ур-ія. Частныя рѣшенія преобразованнаго ур-ія получимъ, вставивъ въ e^{kt} корни

$K_1, K_2, \ldots K_i \ldots$, т.е. $e^{K_i t}$. Общее же рѣшеніе будетъ вида:

$$y = \sum_{i=1}^{i=m} e^{K_i t} g_i(t),$$

гдѣ степень каждаго многочлена единицею ниже кратности соотвѣтствующаго корня. Затѣмъ отъ этого ур-ія уже можно перейти къ первоначальному.

Однако можно было бы поступить гораздо проще. Характеристическое ур-іе преобразованнаго ур-ія мы получили, подставляя вмѣсто у величину e^{Kt}, но мы положили $e^t = x$, слѣдовательно для первоначальнаго ур-ія нужно было положить $y = x^K$, тогда для K получимъ тѣ же значенія, что изъ характеристическаго ур-ія (2). Общій видъ рѣшенія даннаго ур-ія будетъ:

$$y = \sum_{i=1}^{i=m} x^{K_i} g_i(lg\,x).$$

Степень многочлена $g_i(lg\,x)$ на единицу меньше кратности корня K_i. Вставляя вмѣсто у величину x^K, мы получаемъ ур-іе, которое для преобразованія ур-ія называется характеристическимъ, а для даннаго ур-ія <u>опредѣляющимъ</u>.

Не трудно найти опредѣляющее ур-іе; пусть дано дифф-ное ур-іе вида ~~Коши~~ Эйлера:

$$x^n y^{(n)} + x^{n-1} y^{(n-1)} A_1 + \ldots\ldots + A_n y = 0 \qquad (1')$$

Вставимъ въ него вмѣсто <u>у</u> величину x^K; предварительно, найдя производныя:

$$y' = Kx^{K-1}, \quad y'' = K(K-1)x^{K-2}, \quad y''' = K(K-1)(K-2)x^{K-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)} = K(K-1)(K-2)\ldots\ldots[K-(n-1)]x^{K-n}.$$

Послѣ подстановки во всѣ члены войдетъ множителемъ $x^K = x^{K-n}.x^n$; сокративъ на него, получимъ опредѣляющее ур-іе:

$$K(K-1)(K-2)\ldots(K-n+1) + A_1 K(K-1)(K-2)\ldots(K-n+2) + \ldots + A_n = 0.$$

~~Эйлера:~~

Разрѣшивъ это уравненіе, мы найдемъ: κ_1, κ_2, ..., слѣд.найдемъ и частныя рѣшенія вида $y = t^s e^{\kappa_i t}$ или $y = (\lg x)^s x^{\kappa_i}$, при чемъ въ случаѣ однократныхъ корней $s = 0$. Если бы мы взяли ур-іе въ общемъ видѣ (1), тогда, замѣнивъ x черезъ $x = x + \frac{b}{a}$, мы въ данное ур-іе подставили бы $y = (ax + b)^\kappa$ (собственно говоря, имѣемъ $y = \frac{(ax+b)^\kappa}{a^\kappa}$, но постоянный факторъ $\frac{1}{a^\kappa}$ можно отбросить), нашли бы опредѣляющее ур-іе, затѣмъ опредѣлили бы его корни, а отсюда получили бы рядъ частныхъ рѣшеній вида:

$$y = [\lg(ax+b)]^s (ax+b)^{\kappa_i}$$

П Р И М Ѣ Р Ъ: $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Ур-іе ~~Коши~~ Эйлера, упрощеннаго вида. Пологаемъ $y = x^\kappa$; $y' = \kappa x^{\kappa-1}$;

$$y'' = \kappa(\kappa-1)x^{\kappa-2}; \quad x^2\kappa(\kappa-1)x^{\kappa-2} - 2x\kappa x^{\kappa-1} + 2x^\kappa = 0$$

Сокращаемъ на x^κ; $\kappa(\kappa-1) - 2\kappa + 2 = 0$. Опредѣляющее ур-іе будетъ: $\kappa^2 - 3\kappa + 2 = 0$. Корни его $\kappa = 1, 2$ - корни однократные. Слѣд., $y_1 = x$, $y_2 = x^2$. Общее рѣшеніе $y = C_1 x + C_2 x^2$

Мы изложили теорію построенія частныхъ рѣшеній линейныхъ дифференціальныхъ ур-ій съ постоянными коэфф-тами, когда характеристическое ур-іе имѣетъ кратные корни. Но къ такому же результату построенія частныхъ рѣшеній можно притти инымъ путемъ: методомъ d'Alemberta'a. Хотя этотъ методъ не достаточно строгій; но все же представляетъ значительный интересъ. Допустимъ, что мы изложили теорію линейныхъ дифф-ныхъ ур-ій съ постоянными коэфф-тами для случая, когда характеристическое ур-іе имѣетъ однократные корни. Предположимъ теперь, что корни характеристическаго ур-ія кратные и имѣемъ ур-іе вида:

~~Эйлера,~~

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+a_2 y^{(n-2)}+\ldots\ldots+a_n y=0.$$

Тогда, полагая у = e^{kx} , найдемъ характеристическое ур-іе:

$$k^n+a_1 k^{n-1}+a_2 k^{n-2}+\ldots\ldots+a_n=0$$

Пусть это ур-іе имѣетъ двукратный корень k. Тогда разсуждаемъ такъ: измѣнимъ коэфф-ты дифф-наго ур-ія такъ, чтобы новое характеристическое ур-іе имѣло однократные корни k и $k+\delta$. Пусть для этихъ корней мы построили частныя рѣшенія $y_1=e^{kx}$ и $y_2=e^{(k+\delta)x}$. Затѣмъ, перейдя къ предѣлу при $\delta=0$, получаемъ двукратные корни. Поступаемъ при этомъ такъ: если y_1 и y_2 суть рѣшенія, то и линейная комбинація этихъ рѣшеній тоже будетъ рѣшеніемъ. Беремъ такую комбинацію этихъ рѣшеній:

$$\bar{y}=\frac{y_2-y_1}{\delta}=\frac{e^{\delta x}e^{kx}-e^{kx}}{\delta}=e^{kx}\cdot\frac{e^{\delta x}-1}{\delta}$$

Разлагаемъ $e^{\delta x}$ въ рядъ Тэйлора:

$$\bar{y}=e^{kx}\left[x+\frac{\delta x^2}{1.2}+\frac{\delta^2 x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\right]$$

Переходимъ къ предѣлу, полагая $\delta=0$:

$$\lim_{\delta=0}\bar{y}=e^{kx}\cdot x$$

Это и будетъ второе частное рѣшеніе для двукратнаго корня. Но это разсужденіе недостаточно строгое.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы утверждаемъ, что $\bar{y}=\frac{y_2-y_1}{\delta}$ есть частное рѣшеніе, то значитъ, если мы его вставимъ въ наше уравненіе(съ измѣненными коэфф-тами),оно должно удовлетвориться. Результатъ подстановки въ лѣвую часть $\bar{y}$ вмѣсто y есть нѣкоторая функція δ, $F(\delta)$, которая тождественно равна нулю,слѣд. $\lim F(\delta)=0$. Но мы утверждаемъ, что $\lim\limits_{\delta=0}\bar{y}$ есть рѣшеніе ур-іа при $\delta=0$; а это получится только, если будетъ доказано, что

$$\lim_{\delta=0}\frac{d^m\bar{y}}{dx^m}=\frac{d^m(\lim\bar{y})}{dx^m}$$

Такую же перестановку операцій производить можно не всегда, такъ какъ нельзя утверждать, что предѣлъ производной будетъ равенъ производной отъ предѣла. Методъ d'Alembert'a можно распространять и на случай корней бо́льшей кратности. Пусть, напр., характеристическое ур-іе имѣетъ трехкратный корень κ. Къ этому случаю мы можемъ подойти, исходя изъ разсмотрѣнія двухкратнаго корня. Пусть мы измѣнили данное ур-іе такъ, что его характеристическое ур-іе имѣетъ одинъ двукратный корень κ и одинъ однократный $\kappa+\delta$. Тогда имѣемъ рѣшенія: $y_1 = e^{\kappa x}$, $y_2 = xe^{\kappa x}$, $y_3 = e^{(\kappa+\delta)x}$.

Построимъ теперь линейное сочетаніе этихъ рѣшеній:

$$y = 2\frac{y_3 - y_1 - \delta y_2}{\delta^2} = 2\frac{e^{\kappa x}e^{x\delta} - e^{\kappa x} - \delta x e^{\kappa x}}{\delta^2} = 2e^{\kappa x}\frac{e^{x\delta} - 1 - x\delta}{\delta^2}$$

Затѣмъ разлагаемъ въ строку Тэйлора:

$$\bar{y} = e^{\kappa x}\left(x^2 + \frac{\delta x^3}{3} + \dots\dots\right);$$

$\bar{y}$ есть тоже рѣшеніе, такъ какъ представляетъ линейную комбинацію другихъ рѣшеній. Полагая $\delta = 0$, т.е. переходя къ предѣлу, найдемъ $\lim \bar{y} = x^2 e^{\kappa x}$. Получили 3-ье рѣшеніе для трехкратнаго корня κ. Такъ же можно продолжать далѣе.

---

§ 22. ЛИНЕЙНЫЯ УРАВНЕНІЯ 2-ГО ПОРЯДКА.

Переходимъ къ разсмотрѣнію частнаго случая линейныхъ дифф-ныхъ ур-ій, - ур-ій 2-го порядка. Всякое ур-іе 2-го порядка имѣетъ видъ:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 \qquad \text{или} \qquad y'' + p_1 y' + p_2 y = v$$

Коэфф-ты p_1, p_2 суть функціи x. Къ ур-іямъ 2-го порядка мы можемъ примѣнить результаты, полученные въ общей теоріи.

Во-первыхъ, если дано одно частное рѣшеніе y_1, то общій интегралъ находимъ квадратурой, такъ какъ подстановкою $y = y_1 z$, $z' = u$ мы приходимъ къ линейному ур-ію 1-го порядка.

Во-вторыхъ, ур-іе 2-го порядка съ помощью подстановки можно привести къ виду, гдѣ $p_1 = 0$, т.е. къ ур-ію вида:

$$y'' = Jy$$

Такой видъ ур-ія наз. к а н о н и ч е с к и м ъ. Полагаемъ $y = \mu \cdot z$, гдѣ μ - функція x, которую можемъ выбрать произвольно. Дифференцируя два раза, вставимъ въ ур-іе 2-го порядка:

$$y' = \mu' z + z'\mu \; ; \; y'' = \mu'' z + 2\mu' z' + z''\mu \, ,$$

$$\mu'' z + 2\mu' z' + z''\mu + p_1 \mu' z + p_1 z'\mu + p_2 \mu z = 0 .$$

Собираемъ члены съ z':

$$\mu'' z + (2\mu' + p_1 \mu) z' + z''\mu + p_1 \mu' z + p_2 \mu z = 0$$

Мы хотимъ уничтожить членъ съ z'; для этого нужно положить коэффиціентъ при z' равнымъ 0, т.е. $2\mu' + p_1 \mu = 0$ или $\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{2} p_1$. Интегрируя, находимъ μ: $\lg \mu = -\frac{1}{2}\int p_1 dx$, $\mu = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx}$. Ур-іе послѣ уничтоженія z' будетъ: $z'' + \left(\frac{\mu''}{\mu} + p_1 \frac{\mu'}{\mu} + p_2\right) z = 0$.

Но: $\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{2} p_1$; $\mu' = -e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx} \cdot \frac{1}{2} p_1$; $\frac{\mu''}{\mu} = -\frac{1}{2} p_1' + \frac{1}{4} p_1^2$.

Слѣд., опредѣляется коэффиціентъ при z; $J = \frac{1}{2} p_1' + \frac{1}{4} p_1^2 - p_2$

Ур-іе принимаетъ видъ: $z'' = Jz = \left(\frac{1}{2} p_1' + \frac{1}{4} p_1^2 - p_2\right) z$.

Замѣтимъ между прочимъ, что если найдены два частныхъ рѣшенія y_1 и y_2 даннаго ур-ія и соотвѣтственныя рѣшенія z_1 и z_2 для преобразованнаго, то отношеніе между ними одно и то же, т.е.
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{y_1}{y_2}$$
что слѣдуетъ прямо изъ формулъ преобразованія.

Въ-третьихъ, съ помощью подстановки $y = e^{\int z dx}$ можно понизить порядокъ ур-iя. Но понижая порядокъ, мы придемъ къ ур-iю типа Riccati. Пусть

$$y = e^{\int z dx}, \quad \text{тогда} \quad y' = z e^{\int z dx}; \quad y'' = (z' + z) e^{\int z dx}$$

Подставляемъ и, дѣлая сокращенiя на $e^{\int z dx}$, получимъ:

$$z' + z^2 + p_1 z + p_2 = 0.$$

Это ур-iе Riccati, но частнаго вида. Общiй же видъ ур-iй типа Riccati будетъ:

$$v' + Av^2 + 2Bv + C = 0,$$

гдѣ коэфф-ты A B, C суть функцiи x.

Теперь возникаетъ вопросъ, какъ ур-iе Riccati 1-го пор. привести къ линейному ур-iю 2-го порядка. Для нашего случая A=1. Дѣлаемъ такую подстановку: $z = \frac{y'}{y}$, и тогда ур-iе Riccati для z приведется къ линейному ур-iю второго порядка. Положимъ $v = \mu z$, $v' = \mu z' + \mu' z$, подставляемъ въ ур-iе Riccati для v: $\mu z' + z\mu' + A\mu^2 z^2 + 2B\mu z + C = 0$; раздѣлимъ на μ и при z^2 получимъ коэфф-тъ $A\mu$. Здѣсь нужно положить $A\mu = 1$, слѣд.,

$$\mu = \frac{1}{A} \quad \text{и} \quad v = \frac{1}{A} \frac{y'}{y}.$$

Вставимъ значенiе v въ общее ур-iе Riccati, получимъ ур-iе 2-го порядка линейное. Такимъ образомъ отъ ур-iя Riccati мы можемъ притти къ линейнымъ ур-iямъ 2-го порядка.

-------- o0o --------

СИСТЕМЫ СОВОКУПНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

§ 23. ИСКЛЮЧЕНІЕ ФУНКЦІЙ; ПРИВЕДЕНІЕ КЪ НОРМАЛЬНОЙ СИСТЕМѢ.

Совокупныя дифф-ныя уравненія съ нѣсколькими неизвѣстными функціями имѣютъ такой видъ:

$$\mathcal{F}_i(x, y_1, y_1', y_1'', y_1''' \ldots, y_2, y_2', y_2'' \ldots, y_m, y_m', y_m'', \ldots) = 0$$

гдѣ $i = 1, 2, 3 \ldots m$, т.е. представляютъ изъ себя рядъ соотношеній между независимымъ перемѣннымъ и нѣсколькими функціями и ихъ производными. Предположимъ, что число уравненій равно числу функцій. Такая система, какъ увидимъ далѣе, опредѣляетъ всѣ неизвѣстныя функціи y_i; если же число ур-ій больше числа функцій, то, вообще говоря, такая система будетъ несовмѣстною. Если же число функцій больше числа уравненій, то она является неопредѣленной.

Мы покажемъ, что черезъ исключеніе функцій изъ уравненій мы можемъ уменьшить число ур-ій $\mathcal{F} = 0$ и довести до одного. А именно, если имѣемъ m уравненій съ m функціями, то послѣ исключенія $m-1$ функцій мы дойдемъ до одного уравненія съ одной функціей. Но если бы число ур-ій было меньше числа функцій, то всѣхъ функцій мы исключить не могли бы и получили бы одно ур-іе съ нѣсколькими функціями. Если же число ур-ій было бы больше числа функцій, то, исключивъ ихъ, мы пришли бы къ невозможному ур-ію, гдѣ входятъ только независимыя перемѣнныя.

Покажемъ, какъ можно исключить одну функцію изъ двухъ ур-ій. Возьмемъ два ур-ія съ 2-мя функціями:

$$\mathcal{F}_1(x, y, y', y'', \dots\dots y^{(n)}, z, z', z'', \dots\dots z^{(m)}) = 0$$

$$\mathcal{F}_2(x, y, y', y'', \dots\dots y^{(\nu)}, z, z', z'', \dots\dots z^{(\mu)}) = 0,$$

гдѣ n и m — порядокъ наивысшей производной y и z въ 1-мъ ур-іи, а ν и μ — во 2-мъ ур-іи. Продифференцируемъ первое ур-іе μ разъ, а второе m разъ; тогда порядокъ наивысшей производной z будетъ $m+\mu$ для обоихъ ур-ій. Число же всѣхъ ур-ій будетъ $m+1+\mu+1$. Всѣхъ же производныхъ z (считая и z) войдетъ $m+\mu+1$. Отсюда видно, что число ур-ій на единицу больше числа производныхъ. Исключивъ всѣ производныя z, (считая и z) въ результатѣ получимъ ур-іе, куда будутъ входить только y, y', y'',....., т.е. получимъ обыкновенное дифф-ное ур-іе съ одной функціей, которое должно удовлетворяться для всякаго рѣшенія y системы. Порядокъ этого ур-ія будетъ или $n+\mu$ или $\nu+m$, смотря по тому, которое изъ этихъ чиселъ будетъ больше. Дальше уже z можно опредѣлить безъ всякой интеграціи. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ $m+\mu+2$ уравненій для опредѣленія $m+\mu+1$ неизвѣстныхъ $z, z', z'', \dots$. Опредѣливъ y изъ найденнаго ур-ія и вставивъ его въ систему $m+\mu+2$ уравней, опредѣлимъ z. Итакъ, имѣя два ур-ія съ двумя неизвѣстными функціями, продифференцировавъ ихъ опредѣленное число разъ, исключая затѣмъ изъ этихъ уравненій какую-нибудь неизвѣстную функцію съ ея производными, мы приходимъ къ одному дифф-ному ур-ію съ одной неизвѣстной функціей, опредѣливъ которую и вставивъ въ систему, мы опредѣлимъ безъ интеграціи и другую неизвѣстную функцію. Таковъ общій методъ исключенія функціи.

Онъ же будетъ справедливъ и въ томъ случаѣ, если мы имѣемъ не двѣ функціи, а нѣсколькоm; послѣдовательно, комбинируя по два ур-ія, мы можемъ исключить одну функцію, и получимъ $m-1$ ур-іе съ $m-1$ функціями и т.д.

Все изложенное справедливо лишь въ общихъ чертахъ, и всѣ разсужденія наши не достаточно строго обоснованы. Исключеніе функцій изъ нѣсколькихъ ур-ій является операціей довольно сложной, и возможны исключительные случаи. Поэтому мы приступимъ къ доказательству возможности исключенія функцій другимъ методомъ. До сихъ поръ мы старались получить одно ур-іе съ одной функціей, для чего пришлось повышать порядокъ ур-ія. Теперь пойдемъ обратнымъ путемъ: мы будемъ увеличивать число функцій, но понижая порядокъ ур-ій. Итакъ, докажемъ, что всякую систему ур-ій можно замѣнить системой ур-ій 1-го порядка. Если въ ур-ія входятъ y_1, y_1', y_1'', y_1''', y_1^{IV} ......, то введемъ сюда новыя функціи, полагая:

$$y_1' = y_{11}\ ,\quad y_1'' = y_{12}\ , \ldots\ldots , y_1^{(n_1-1)} = y_{1,\,n_1-1}$$

Для y_2 будемъ имѣть $y_2' = y_{21}$, $y_2'' = y_{22}$ .... $y_2^{(n_2-1)} = y_{2,n_2-1}$ и т.д.

Наивысшія производныя выразятся такъ:

$$y_1^{(n_1)} = \frac{d(y_{1,\,n_1-1})}{dx}\ ;\qquad y_2^{(n_2)} = \frac{d(y_{2\,,\,n_2-1})}{dx}\ , \ldots$$

Черезъ такую замѣну всѣ наши ур-ія $\mathcal{F}_i = 0$ обращаются въ ур-ія 1-го порядка. Но къ нашимъ ур-іямъ прибавится еще рядъ новыхъ ур-ій, которыя будутъ указывать на значеніе новыхъ функцій, введенныхъ въ данныя ур-ія $\mathcal{F}_i = 0$. У насъ прибавятся такія ур-ія :

$$\frac{dy_1}{dx} = y_{11}\ ,\quad \frac{dy_{11}}{dx} = y_{12}\ , \ldots\ldots ,\ \frac{dy_{1,\,n-2}}{dx} = y_{1,\,n_1-1}$$ и т.д.

для другихъ функцій. Всѣ эти ур-ія указываютъ на то, что введенныя новыя функціи суть производныя отъ функцій, входящихъ въ наши ур-іи $\mathcal{F}_i = 0$. Прибавленіемъ новыхъ ур-ій мы систему увеличиваемъ, но зато порядокъ каждаго ур-іи будетъ равенъ единицѣ. Итакъ, наше положеніе доказано: всякую систему совокупныхъ ур-ій можно замѣнить системой ур-ій 1-го порядка съ бóльшимъ числомъ функцій.

Въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ мы будемъ говорить только о совокупныхъ ур-іяхъ перваго порядка.

Пусть мы имѣемъ систему уравненій вида:

$$\mathcal{F}_i(x, y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_m, y_1', y_2', y_3', \ldots\ldots y_m') = 0$$

Эту систему можно замѣнить другой, разрѣшенной относительно производныхъ. Чтобы такое разрѣшеніе было возможно, для этого необходимо, чтобы $i = 1,2,3\ldots m$, т.е. число ур-ій было бы равно числу неизвѣстныхъ функцій. Данныя ур-іи $\mathcal{F}_i = 0$ опредѣляютъ въ такомъ случаѣ производныя y_i' въ функціи $x, y_1, y_2 \ldots y_m$, и мы получаемъ эквивалентную систему вида:

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots\ldots y_m), \quad (i = 1, 2, 3, \ldots m)$$

Въ частности, если бы подобное разрѣшеніе было невозможно, то изъ данной системы $\mathcal{F} = 0$ можно было бы исключить всѣ производныя y_i', и мы получили бы одно или нѣсколько конечныхъ соотношеній вида

$$A(x, y_1, y_2, \ldots\ldots y_m) = 0,$$

пользуясь которыми выразили бы однѣ изъ функцій y_i черезъ другія и перемѣнное x. Вставляя въ данную систему, мы пришли бы къ болѣе простой системѣ того же типа - съ меньшимъ числомъ неизвѣстныхъ функцій, и съ этой системой могли бы поступать по прежнему, т.е. разрѣшать ее относительно производныхъ или же, если это невозможно, то, исключая производныя, получить новыя конечныя соотношенія и т.д. Выкладки можно вести хотя бы такъ: взявъ первое изъ ур-ій $\mathcal{F}_i = 0$, опредѣлить изъ него y_1' черезъ остальные аргументы:

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots\ldots y_m, y_2', y_3', \ldots\ldots y_m')$$

и вставить въ остальныя $m-1$ уравненія, которыя примутъ видъ:

$$\Phi_i(x, y_1, y_2, \ldots\ldots y_m, y_2', y_3', \ldots\ldots y_m') = 0.$$

Изъ одного изъ нихъ опредѣляемъ

$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots\ldots y_m, y_3', y_4', \ldots\ldots y_m'),$$

вставляемъ въ остальныя $m-2$ уравненія, которыя принимаютъ видъ:

$$\Psi_i(x, y_1, y_2, \ldots\ldots y_m, y_3', y_4', \ldots\ldots y_m') = 0,$$

и т.д., пока послѣднюю производную y_m' не выразимъ черезъ x, y_1, $y_2, \ldots y_m$; а тогда и остальныя производныя y_{m-1}', $y_{m-2}', \ldots y_1'$ выразятся въ функціи тѣхъ же аргументовъ.

Если бы изъ какой-либо изъ системъ исключились всѣ производныя, то имѣли бы вышеупомянутый случай упрощенія.

Въ концѣ концовъ мы всегда получаемъ систему вида:

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots\ldots y_m),$$

слѣд., всякую систему ур-ій 1-го порядка можно привести къ системѣ такого вида и процессъ послѣдовательнаго разрѣшенія всегда дойдетъ до конца. Въ противномъ случаѣ получаются состношенія свободныя отъ производныхъ, и тогда мы можемъ исключить часть функцій и затѣмъ имѣть дѣло съ болѣе простой системой, и т.д.

П Р И М Ѣ Р Ъ. Пусть даны уравненія:

$$y' + z' + u' - 2y + 3z = 0$$
$$y' - z' + u' - 3y - 4z = 0$$
$$y' + 3z' + u' - 5y + u = 0$$

Мы можемъ изъ одного ур-ія опредѣлить u' черезъ остальныя и исключить, - вставляя въ остальныя уравненія:

$$u' = -y' - z' + 2y - 3z,$$

$$-2z' - y - 7z = 0 \quad , \quad 2z' - 3y - 3z + u = 0 .$$

Въ полученныя ур-ія y' не входитъ. Исключаемъ теперь z':

$$-4y - 10z + u = 0 .$$

Получили соотношеніе свободное отъ производныхъ; опредѣляя изъ него одну функцію черезъ остальныя, получимъ:

$$u = 4y + 10z$$

и вставляемъ въ нашу систему; получимъ только два ур-ія независимыхъ, а третье, не трудно видѣть, будетъ слѣдствіемъ одного изъ двухъ:

$$5y' + 11z' - 2y + 3z = 0 ,$$
$$5y' + 9z' - 3y - 4z = 0$$

Изъ 2-го имѣемъ:

$$y' = -\frac{9}{5}z' + \frac{3}{5}y + \frac{4}{5}z$$

Вставляя въ 1-е, получаемъ, по разрѣшеніи относительно z',

$$z' = -\frac{1}{2}y - \frac{7}{2}z \quad ,$$

а слѣдовательно

$$y' = \frac{3}{2}y + \frac{71}{10}z$$

Система ур-ій, представленная въ видѣ:

$$y_i' = \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots\ldots y_m) ,$$

гдѣ $i = 1, 2 \ldots, m$ называется нормальной системой. И, какъ видѣли выше, мы всегда можемъ притти къ этой системѣ. Въ первой части нашего курса мы доказали, что такая система всегда допускаетъ интеграцію. Отсюда легко видѣть, что если число ур-ій первоначальной системы будетъ меньше числа функцій, то система будетъ неопредѣленная; если же число ур-ій больше числа функцій, то всобще система невозможна.

Мы доказали, что изъ системы совокупныхъ ур-ій можно исключить всѣ функціи и привести систему къ одному ур-ію высшаго порядка. Теперь мы можемъ нѣсколько дополнить этотъ результатъ.

Пусть мы имѣемъ какую-нибудь систему. Мы ее замѣняемъ нормальной системой.

Докажемъ, что нормальную систему съ n функціями можно привести къ одному ур-ію n-го порядка.

Имѣемъ систему уравненій:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots y_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots y_n)$$

Дифференцируя 1-ое уравненіе, получимъ:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \ldots\ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx} \ldots$$

Замѣняя производныя перваго порядка изъ нашихъ ур-ій, замѣтимъ, что

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = f_{12}(x, y_1, \ldots y_n).$$

Дифференцируя еще разъ, получимъ:

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = \frac{\partial f_{12}}{\partial x} + \frac{\partial f_{12}}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \ldots\ldots + \frac{\partial f_{12}}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx} = f_{13}(x, y_1, \ldots y_n)$$

Такъ продолжая, дойдемъ до производной n-го порядка:

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = f_{1n}(x, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n):$$

Изъ этихъ равенствъ вмѣстѣ съ вышенаписанными мы можемъ исключить y_2, y_3, ... y_n. Тогда мы получимъ одно уравненіе n-го порядка. Исключеніе можно выполнить такъ: отбросимъ послѣднее равенство:

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = f_{1n}(x, y_1, y_2, \ldots\ldots y_n),$$

найдемъ y_2, y_3, ..., y_n въ функціи $x, y, \frac{dy_1}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ изъ остальныхъ, вставимъ въ послѣднее ур-іе и получимъ ур-іе n-го поряд -

ка. Но может случиться, что наши y_2, y_3, ..., y_n сами собою исключаются изъ $n-1$ первыхъ ур-ій, такъ что опредѣлить ихъ нельзя. Въ результатѣ будемъ тогда имѣть соотношеніе вида:

$$\Psi(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \dots\dots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}) = 0$$

Въ этомъ случаѣ опять будемъ имѣть для y_1 одно ур-іе, но низшаго порядка. Итакъ, мы найдемъ для y_1 ур-іе или n-го, или низшаго порядка, говоря вообще, h-го порядка.

Проинтегрировавъ это ур-іе n-го порядка, мы найдемъ y_1. Легко видѣть, что тогда всѣ остальные y найдутся безъ всякихъ интеграцій. Въ самомъ дѣлѣ, найдя y_1, мы будемъ знать и производныя y_1 и, слѣдовательно, y_2, ..., y_n получимъ только рѣшеніемъ первыхъ $n-1$ уравненій.

Въ исключительныхъ случаяхъ, если одно или нѣсколько ур-ій изъ числа первыхъ $n-1$ являются слѣдствіемъ остальныхъ, мы не получимъ всѣхъ y_2, ... y_n изъ этихъ ур-ій. Для y_1 мы найдемъ ур-іе низшаго порядка, чѣмъ n. Пусть только одно ур-іе изъ числа $n-1$ есть слѣдствіе другихъ. Въ этомъ случаѣ для y_1 будемъ имѣть ур-іе $n-1$ порядка. Проинтегрировавъ его, найдемъ y_1. Но всѣ y_2, ... y_n мы уже не опредѣлимъ безъ интеграцій, потому что нельзя выразить y_2, ..., y_n черезъ y_1 и ея производныя. Вставивъ въ нашу систему $n-1$ ур-ій найденное y_1 въ функціи x, мы можемъ выразить y_3, ..., y_n черезъ x, y_1, y_2, $\frac{dy_1}{dx}$, ..., $\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$

Въ результатѣ взявъ 2-ое ур-іе первоначальной системы мы выразимъ $\frac{dy_2}{dx}$ въ функціи x и y_2, и для опредѣленія y_2 будемъ имѣть дифференціальное ур-іе 1-го порядка. Интегрируя его, введемъ еще n-ое постоянное, а y_3, ... y_n найдемъ уже безъ всякихъ интеграцій.

Если бы мы получили для y_1 ур-іе $n-2$ порядка, то намъ удалось бы $y_4, \ldots, y_n$ выразить чрезъ остальныя функціи, и для опредѣленія y_2, y_3 мы должны были бы взять два первоначальныя ур-ія и произвести двѣ интеграціи. При этомъ войдутъ два произвольныхъ постоянныхъ.

ПРИМѢРЫ. Имѣемъ три ур-ія съ тремя функціями въ видѣ разрѣшенномъ:

$$\frac{dy}{dx} = 2y + 3z - u$$
$$\frac{dz}{dx} = y - z + u$$
$$\frac{du}{dx} = y + z + u$$

Дифференцируя первое ур-іе, будемъ имѣть:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} + 3\frac{dz}{dx} - \frac{du}{dx} = 2\frac{dy}{dx} + 2y - 4z + 2u = 6y + 2z;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 4\frac{dz}{dx} + 2\frac{du}{dx} = 2\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 2y + 6z - 2u = 14y + 16z - 4u$$

Исключаемъ z и u; изъ второго равенства имѣемъ:

$$z = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2} - 3y; \quad u = \frac{3}{2}\frac{d^2y}{dx^2} - 7y - \frac{dy}{dx}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 2\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 6y$$

Мы получили ур-іе третьяго порядка для опредѣленія y. Найдя y, мы найдемъ z и u уже безъ всякихъ интеграцій.

Разсмотримъ примѣръ на исключительномъ случаѣ:

$$\frac{dy}{dx} = y + z + u; \quad \frac{dz}{dx} = y + z - u; \quad \frac{du}{dx} = y - z + u;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3y + z + u; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + 2y$$

(по исключеніи z и u)

Получимъ ур-іе съ постоянными коэффиціентами:

$$y'' - y' - 2y = 0, \quad k^2 - k - 2 = 0$$

$k_1 = +2$; $k_2 = -1$; слѣдовательно, $y = C e^{2x} + C_2 e^{-x}$.

Опредѣливъ u изъ перваго уравненія:

$$u = \frac{dy}{dx} - y - z$$

и вставивъ это во второе, получимъ ур-іе для опредѣленія z:

$$\frac{dz}{dx} - 2z = 2y - \frac{dy}{dx} \quad \text{гдѣ} \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

Интегрируя это ур-іе 1-го порядка, получаемъ:

$$z = -C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} \quad ; \quad u = \frac{dy}{dx} - y - z = (C_1 - C_3) e^{2x} - C_2 e^{-x}$$

---

§ 24. ОБЩАЯ ТЕОРІЯ СОВОКУПНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

Пусть имѣемъ систему ур-ій въ нормальномъ видѣ:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots \ldots y_n) \qquad (A)$$

гдѣ $i = 1, 2, 3, \ldots n$. Пусть для даннаго начальнаго значенія $x = x_0$ дана система начальныхъ значеній

$$y_i = y_{i0}$$

По теоремѣ Коши этими начальными значеніями опредѣляется единственное рѣшеніе системы:

$$y_i = \varphi_i(x, y_{10}, y_{20}, \ldots \ldots y_{n0})$$

Эти ур-ія мы можемъ разрѣшить относительно y_0

$$y_{i0} = \psi_i(x, y_1, \ldots \ldots \ldots y_n)$$

Мы допускаемъ, что такое разрѣшеніе возможно. Если бы разрѣшить наши ур-ія относительно всѣхъ y_0 оказалось невозможнымъ, то всѣ y_0 изъ предшествующихъ равенствъ исключились бы, и мы получили бы по крайней мѣрѣ одно соотношеніе вида:

$$A(x, y_1, \ldots \ldots \ldots y_n) = 0$$

Отсюда мы одну функцію выразили бы чрезъ другія, и число функцій въ нашей системѣ уменьшилось бы. Въ этомъ случаѣ нельзя было бы произвольно задавать начальная значенія, ибо они были бы связаны соотношеніемъ, получаемымъ при $x = x_0$ изъ предыдущаго:

$$A(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots \ldots y_{n0}) = 0.$$

Итакъ, относительно y_0 равенства разрѣшить можно.

Предположимъ, что y выражены чрезъ x и произвольныя постоянныя:

$$y_i = \overline{\varphi}_i(x, C_1, C_2, \ldots C_n).$$

Пользуясь произволомъ n постоянныхъ, мы можемъ ихъ выбрать такъ, чтобы y_i получили начальныя значенія y_{i0}. Дѣйствительно, полагая $x = x_0$, получаемъ:

$$y_{i0} = \overline{\varphi}_i(x_0, C_1, C_2, \ldots C_n)$$

Будемъ имѣть n ур-ій, откуда всѣ C и опредѣлются чрезъ y_0:

$$C_i = \overline{\psi}_i(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots \ldots y_{n0}).$$

Внеся эти выраженія для C въ предшествующія равенства, получимъ:

$$y_i = \varphi_i(x, \overline{\psi}_1, \ldots \ldots \overline{\psi}_n) = \varphi_i(x, y_{10}, y_{20}, \ldots y_{n0})$$

Изъ хода разсужденій ясно, что мы предполагаемъ ур-ія вида

$$y_i = \overline{\varphi}_i(x, C_1, C_2, \ldots \ldots C_n)$$

разрѣшимыми относительно C. Если это возможно, то постоянныя называются "существенными" постоянными. Если бы ур-ія были неразрѣшимы относительно C, то постоянныя были бы "несущественными".

Итакъ, имѣемъ право написать:

$$C_1 = \overline{\psi}_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_n = \overline{\psi}_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Равенства такого вида мы и будемъ далѣе разсматривать и будемъ называть ихъ **интегралами системы**.

Найдимъ независимое опредѣленіе каждому изъ равенствъ.

Возьмемъ соотношеніе

$$C_i = \psi_i(x, y_1, y_2, \ldots \ldots, y_n)$$

и продифференцируемъ его:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx} = 0$$

Замѣняемъ производныя y по x изъ нашей системы:

$$0 = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1} \cdot f_1 + \cdots + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n} \cdot f_n$$

Правая часть содержитъ только x и y; слѣдовательно это будетъ соотношеніе вида:

$$A(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0.$$

Это равенство должно быть тожествомъ, ибо такого соотношенія, какъ мы видѣли, быть не можетъ.

Итакъ, равенство вида $\psi(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = C$ называется интеграломъ данной системы, если послѣ дифференцированія по x и по замѣнѣ производныхъ ихъ значеніями изъ данной системы мы получаемъ тожество.

Мы видимъ, что правая часть интеграла нашей системы, какъ функція $n+1$ аргументовъ удовлетворяетъ ур-ію съ частными производными типа:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \cdot f_1 + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} \cdot f_n = 0 \qquad (B)$$

Очевидно и обратно: если мы нашли функцію, удовлетворяющую (B), то, приравнивая ее произвольному постоянному, имѣемъ интегралъ системы (A).

Несимметричность въ ур-іи (B) произошла отъ того, что x и всѣ y у насъ неравноправны. Нашу систему (A) мы можемъ переписать въ видѣ равенства отношеній:

$$\frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \cdots = \frac{dx}{1} \qquad (A')$$

Въ этой формѣ (A') всѣ перемѣнныя стали равноправными. Введемъ теперь такое обозначеніе: всѣ y назовемъ чрезъ x со значками (при чемъ $n+1$ замѣняемъ чрезъ n):

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} \qquad (I);$$

гдѣ $X_i = F_i(x_1, \ldots, x_n)$. Всѣ x кромѣ одного являются функ -

ціями этого оставшагося: $$\frac{dx_j}{dx_n} = \frac{X_j}{X_n}$$

при чемъ $j = 1, 2, \dots, n-1$ (въ данномъ случаѣ x_n - независимое перемѣнное). Предполагая интегралъ системы въ видѣ

$$\psi(x_1, x_2, \dots \dots x_n) = C,$$

получимъ при дифференцированіи по x_n:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_n} + \frac{\partial \psi}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{X_{n-1}}{X_n} + \dots \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot \frac{X_1}{X_n} = 0,$$

или, освобождая отъ знаменателя:

$$X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \dots \dots + X_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \tag{II}$$

Въ примѣненіи къ полученнымъ симметричнымъ ур-іямъ (I) и (II) доказанное нами положеніе можемъ формулировать такъ: имѣя интегралъ системы (I) $\psi(x_1, \dots, x_n) = C$, мы имѣемъ рѣшеніе ур-ія (II) (функцію ψ) и обратно: имѣя рѣшеніе ур-ія (II) ψ и приравнивая его произвольному постоянному, получаемъ интегралъ системы (I).

Докажемъ, что наиболѣе общее рѣшеніе ур-ія (II) имѣетъ видъ:

$$\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots \dots \psi_{n-1})$$

гдѣ Ф - произвольная функція, а $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_{n-1}$ суть лѣвыя части интеграловъ системы (I):

$$\psi_1(x_1, \dots \dots x_n) = C_1; \; \psi_2(x_1, \dots \dots x_n) = C_2; \dots \psi_{n-1}(x_1, \dots x_n) = C_{n-1},$$

при чемъ эти интегралы должны быть независимыми, т.е. не должно существовать тождественнаго соотношенія вида $A(\psi_1, \psi_2, \dots \dots \psi_{n-1}) = 0$ (это противорѣчило бы произволу постоянныхъ $C_1, C_2 \dots$).

Производныя ψ по x выразятся такъ:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} + \dots\dots + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_{n-1}}\cdot\frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_i}$$

Вставляя эти производныя въ ур-іе (II) и отбирая коэффиціен - ты при $\frac{\partial \Phi}{\partial \psi_1}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \psi_2}$, ..., $\frac{\partial \Phi}{\partial \psi_{n-1}}$, мы увидимъ, что всѣ эти коэф- фиціенты - нули. Въ самомъ дѣлѣ, коэффиціентъ, напримѣръ, при $\frac{\partial \Phi}{\partial \psi_j}$ будетъ: $S\, X_i \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} = 0$

Итакъ, для любой функціи Φ выраженіе

$$\Psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots\dots \psi_{n-1})$$

есть рѣшеніе нашего ур-ія (II).

Чтобы доказать, что это будетъ наиболѣе общее рѣшеніе нашего ур-ія (II), напишемъ рядъ равенствъ:

$$X_1\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \dots\dots + X_n\frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} = 0$$
$$X_1\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \dots\dots + X_n\frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$X_1\frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2} + \dots\dots + X_n\frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} = 0$$
$$X_1\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \dots\dots + X_n\frac{\partial \Psi}{\partial x_n} = 0$$

гдѣ Ψ - любое рѣшеніе ур-ія (II).

Разсматривая эту систему какъ однородную линейную от - носительно X, мы получимъ, что Якобіевъ опредѣлитель функ - цій $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_{n-1}, \Psi$ долженъ равняться 0. Если такъ, то наши функціи не независимы, а такъ какъ $\psi_1, \dots \psi_{n-1}$ независимы между собою, то соотношеніе будетъ непремѣнно содержать въ се - бѣ Ψ:

$$A(\Psi, \psi_1, \psi_2, \dots\dots \psi_{n-1}) = 0$$

Разрѣшая относительно Ψ, и получимъ результатъ, который мы имѣли выше:

$$\Psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots\dots \psi_{n-1})$$

Разсмотримъ примѣръ. Имѣемъ систему:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{\partial x_2}{x_2} = \cdots\cdots = \frac{dx_n}{x_n}$$

Соотвѣтствующее ур-іе съ частными производными будетъ:

$$x_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \cdots\cdots + x_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n} = 0$$

Проинтегрировавъ нашу систему, получимъ:

$$\frac{x_1}{x_n} = C_1, \quad \cdots\cdots; \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} = C_{n-1}.$$

Это будутъ интегралы нашей системы. Для ур-ія съ частными производными общимъ рѣшеніемъ будетъ такое:

$$\psi = \mathcal{F}\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \cdots\cdots \frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

гдѣ $\mathcal{F}$ есть символъ произвольной функціи.

---

§ 25. ЛИНЕЙНЫЯ СОВОКУПНЫЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ.

Пусть имѣемъ систему въ нормальномъ видѣ, гдѣ производныя выражаются линейно чрезъ функціи:

$$\frac{dy_1}{dx} + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots\cdots + a_{1n}y_n = X_1$$

$$\frac{dy_2}{dx} + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots\cdots + a_{2n}y_n = X_2 \quad (1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_n}{dx} + a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots\cdots + a_{nn}y_n = X_n$$

Коэффиціенты a. X, какія угодно функціи x:

$$a_{ik} = \varphi_{ik}(x) \quad ; \quad X_i = \varphi_i(x)$$

Такая система называется линейной.

Начнемъ съ системы однородной, когда всѣ X_i суть нули:

$$\frac{dy_1}{dx} + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots\cdots + a_{1n}y_n = 0$$

$$\frac{dy_2}{dx} + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots\cdots + a_{2n}y_n = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_n}{dx} + a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots\cdots + a_{nn}y_n = 0.$$

Замѣтимъ прежде всего, что если бы стали исключать всѣ функціи кромѣ одной, то мы получили бы линейное ур-іе. Въ самомъ дѣлѣ, для исключенія мы должны были бы дифференцировать первое ур-іе и вмѣсто производныхъ перваго порядка вставить ихъ выраженія изъ системы. При дальнѣйшемъ дифференцированіи линейность сохранится, и въ результатѣ мы имѣли бы $\frac{d^k y}{dx^k}$ выраженною линейно чрезъ y_1, y_2, ..., y_n. Въ результатѣ исключенія будемъ имѣть линейное ур-іе относительно y_1, вообще говоря, n-го порядка.

Рѣшеніемъ системы называется система значеній функцій y_1, y_2, ..., y_n, удовлетворяющихъ системѣ ур-ій. Пусть мы имѣемъ k такихъ рѣшеній:

$$
\begin{array}{l}
y_1^{(1)}, \; y_2^{(1)}, \; \ldots\ldots \; y_n^{(1)} \\
y_1^{(2)}, \; y_2^{(2)} \; \ldots\ldots \; y_n^{(2)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_1^{(k)}, \; y_2^{(k)}, \; \ldots\ldots \; y_n^{(k)}
\end{array}
$$

Докажемъ ТЕОРЕМУ I: если мы имѣемъ k частныхъ рѣшеній, то рѣшеніемъ будутъ и такія выраженія для y:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)} + \ldots\ldots + C_k y_1^{(k)}, \\
y_2 &= C_1 y_2^{(1)} + C_2 y_2^{(2)} + \ldots\ldots + C_k y_2^{(k)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n &= C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)} + \ldots\ldots + C_k y_n^{(k)},
\end{aligned}
$$

гдѣ всѣ C-постоянныя. Въ самомъ дѣлѣ, если мы вставимъ эти выраженія въ наши ур-ія и отберемъ коэффиціенты при C, то увидимъ, что всѣ они обращаются въ нули.

ТЕОРЕМА II. Если мы имѣемъ n независимыхъ рѣшеній, то общее рѣшеніе представляется формулой:

$$y_i = C_1 y_i^{(1)} + C_2 y_i^{(2)} + \ldots\ldots + C_n y_i^{(n)} \qquad (2)$$

гдѣ $i = 1, 2, \ldots, n$, а С - произвольныя постоянныя. Независимыми рѣшенiй называются, если

$$\begin{vmatrix} y_1^{(1)}, & y_2^{(1)}, & \ldots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)}, & y_2^{(2)}, & \ldots & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Докажемъ эту теорему методомъ варiацiи постоянныхъ. Мы имѣемъ n независимыхъ рѣшенiй; всѣ у, записанныя въ детерминантѣ, суть опредѣленныя функцiи х; будемъ разсматривать и С, такъ новыя функцiи х, связанныя съ у равенствами (2). Мы можемъ разрѣшить эти равенства относительно С, ибо детерминантъ изъ коэффицiентовъ не равенъ 0. Итакъ, преобразуемъ указаннымъ способомъ нашу систему. При дифференцированiи у изъ каждаго члена получится два, такъ какъ мы будемъ дифференцировать и С и $y^{(k)}$.

Дифференцируя y_i и вставляя въ i-ое ур-iе, будемъ имѣть:

$$\frac{dC_1}{dx} y_i^{(1)} + \frac{dC_2}{dx} y_i^{(2)} + \ldots + \frac{dC_n}{dx} y_i^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} C_k \frac{dy_i^{(k)}}{dx} +$$
$$+ a_{i1} \sum_{k=1}^{n} C_k y_1^{(k)} + a_{i2} \sum_{k=1}^{n} C_k y_2^{(k)} + \ldots + a_{in} \sum_{k=1}^{n} C_k y_n^{(k)} = 0$$

Легко видѣть, что коэффицiенты при С - всѣ нули, напр. при C_k коэффицiентомъ будетъ:

$$\frac{dy_i^{(k)}}{dx} + a_{i1} y_1^{(k)} + \ldots + a_{in} y_n^{(k)} = 0,$$

ибо это есть результатъ подстановки въ ур-iе k-го рѣшенiя.

Итакъ, наша система преобразовалась въ новую систему:

$$y_1^{(1)} \frac{dC_1}{dx} + y_1^{(2)} \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_1^{(n)} \frac{dC_n}{dx} = 0,$$
$$y_2^{(1)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(2)} \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_2^{(n)} \frac{dC_n}{dx} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n^{(1)} \frac{dC_1}{dx} + y_n^{(2)} \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n^{(n)} \frac{dC_n}{dx} = 0$$

Детерминантъ полученной системы не равенъ 0, слѣдовательно всѣ неизвѣстныя равны нулю:

$$\frac{dC_1}{dx}=0\ ,\quad \frac{dC_2}{dx}=0,\ \ldots\ldots\ \frac{dC_n}{dx}=0 .$$

Отсюда слѣдуетъ, что всѣ C - постоянныя, и наша теорема доказана.

Возникаетъ вопросъ: всегда ли мы можемъ подобрать независимыя рѣшенія? Въ силу основной теоремы Коши существуютъ рѣшенія, принимающія опредѣленныя значенія для заданнаго начальнаго значенія x. Зададимъ такія начальныя значенія. Пусть для $x=x_0$ одно рѣшеніе опредѣляется начальными значеніями:

$$y_1=\alpha_{11}\ ,\quad y_2=\alpha_{12}\ ,\ \ldots\ldots\ y_n=\alpha_{1n}\ ;$$

другое для $x = x_0$ опредѣляется значеніями:

$$y_1=\alpha_{21}\ ,\quad y_2=\alpha_{22}\ ,\ \ldots\ldots\ y_n=\alpha_{2n}$$

. . . . и т.д.

(n-ое рѣшеніе) $y_1=\alpha_{n1}\ ,\quad y_2=\alpha_{n2}\ .\ \ldots\ y_n=\alpha_{nn}\ ,$

гдѣ всѣ α суть постоянныя. Выберемъ эти начальныя значенія такъ, чтобы

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\ , & \alpha_{12}\ , & \ldots\ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\ , & \alpha_{22}\ , & \ldots\ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1}\ , & \alpha_{n2}\ , & \ldots\ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда рѣшенія, опредѣляемыя этими начальными данными, будутъ независимы. Дѣйствительно, составимъ детерминантъ для этихъ рѣшеній. Очевидно, онъ не можетъ тожественно равняться нулю, ибо при $x=x_0$ онъ обращается въ вышенаписанный детерминантъ, который не равенъ нулю.

Итакъ, всегда мы можемъ найти n независимыхъ рѣшеній а зная эти рѣшенія, знаемъ и общее рѣшеніе. Теорема доказана.

---

§ 26. ЛИНЕЙНЫЯ СОВОКУПНЫЯ НЕОДНОРОДНЫЯ УРАВНЕНІЯ.

Т Е О Р Е М А I. Пусть имѣемъ неоднородную систему

$$\frac{dy_i}{dx} + a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \cdots + a_{in} y_n = X_i \quad , \qquad (1)$$

гдѣ $i = 1,2,3,\ldots n$, и пусть мы имѣемъ систему рѣшеній этихъ неоднородныхъ ур-ій:

$$y_1 = \eta_1 , \quad y_2 = \eta_2 , \quad \cdots \quad y_n = \eta_n \quad ,$$

гдѣ η - данныя функціи x. Тогда подстановкой $y_i = \eta_i + \xi_i$, гдѣ ξ_i - новая неизвѣстная функція x, замѣняемъ эту систему однородной.

Въ самомъ дѣлѣ, когда мы вставимъ въ нашу систему, вмѣсто y_i, $\eta_i + \xi_i$, то всѣ члены распадутся на два, при чемъ члены съ η уничтожатся со 2-ми частями, и мы получимъ однородную систему вида:

$$\frac{d\xi_i}{dx} + a_{i1} \xi_i + \cdots + a_{in} \xi_n = 0.$$

Т Е О Р Е М А II. Пусть для соотвѣтствующей однородной системы, получающейся замѣной X нулями

$$\frac{dy_i}{dx} + a_{i1} y_1 + \cdots + a_{in} y_n = 0 \qquad (2)$$

знаемъ систему независимыхъ частныхъ рѣшеній

$$\begin{array}{llll} y_1^{(1)}, & y_2^{(1)}, & \cdots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)}, & y_2^{(2)}, & \cdots & y_n^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, & \cdots & y_n^{(n)} \end{array}$$

тогда общее рѣшеніе данной системы находимъ квадратурами.

Для доказательства употребимъ методъ варіаціи постоянныхъ. Мы знаемъ, что общее рѣшеніе однородной системы выразится такъ:

$$y_i = C_1 y_i^{(1)} + C_2 y_i^{(2)} + \dots + C_n y_i^{(n)} \qquad (3)$$

гдѣ $i = 1,2,3,\dots,n$, а C - произвольныя постоянныя. Будемъ разсматривать C какъ функціи x и опредѣлимъ ихъ такъ, чтобы они давали общее рѣшеніе системы ур-ій (1). Преобразуемъ перемѣнныя въ ур-іяхъ (1), введя вмѣсто y новыя перемѣнныя C, связанныя съ y равенствами (3). Итакъ, y выражены чрезъ C, но можно, конечно, и C выразить чрезъ y. Подставимъ въ ур-ія (1) выраженія (3). Такую подстановку мы уже выполняли и видѣли, что останутся только члены, получаемые отъ дифференцированія C, а совокупность остальныхъ дастъ намъ нуль. Итакъ, имѣемъ

$$y_i^{(1)} \frac{dC_1}{dx} + y_i^{(2)} \frac{dC_2}{dx} + \dots + y_i^{(n)} \frac{dC_n}{dx} = X_i .$$

Мы можемъ разрѣшить нашу систему относительно производныхъ C, ибо детерминантъ Δ отличенъ отъ нуля. Итакъ, будемъ имѣть:

$$\frac{dC_k}{dx} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \Delta_{ik}}{\Delta} = \varphi_k(x)$$

Отсюда для C_k получимъ:

$$C_k = \int \varphi_k(x) + \gamma_k ,$$

гдѣ γ_k - произвольныя постоянныя.

Вставляя эти выраженія для C въ формулы (3), найдемъ общее рѣшеніе системы (1):

$$y_i = \gamma_1 y_i^{(1)} + \gamma_2 y_i^{(2)} + \dots + \gamma_n y_i^{(n)} +$$
$$+ y_i^{(1)} \int \varphi_1(x)dx + y_i^{(2)} \int \varphi_2(x)dx + \dots + y_i^{(n)} \int \varphi_n(x)dx . \quad (i = 1,2,\dots n)$$

§ 27. ЛИНЕЙНЫЯ СИСТЕМЫ СЪ ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦІЕНТАМИ.

Имѣемъ однородную систему съ постоянными коэффиціентами:

$$\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} + a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n = 0 \\ &\frac{dy_2}{dx} + a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{dy_n}{dx} + a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Всѣ a_{ik} = const.

Если бы исключеніемъ функцій, кромѣ одной, замѣнили эту систему однимъ ур-іемъ n-го порядка, то это ур-іе было бы, очевидно, линейнымъ съ постоянными коэффиціентами. Поэтому частное рѣшеніе системы мы можемъ искать въ видѣ показательныхъ функцій съ нѣкоторыми постоянными коэффиціентами:

$$y_1 = \lambda_1 e^{\omega x}, \quad y_2 = \lambda_2 e^{\omega x}, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad y_n = \lambda_n e^{\omega x}, \qquad (2.)$$

гдѣ всѣ λ и ω - постоянныя. Очевидно въ одномъ рѣшеніи ω для всѣхъ y одно и то же, такъ какъ всѣ остальныя y находятся черезъ одно изъ нихъ безъ интеграцій.

Вставляя значенія y въ наши ур-ія и сокращая на $e^{\omega x}$, будемъ имѣть:

$$\begin{array}{l} (a_{11}+\omega)\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + a_{13}\lambda_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}\lambda_n = 0 \\ a_{21}\lambda_1 + (a_{22}+\omega)\lambda_2 + a_{23}\lambda_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}\lambda_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + a_{n3}\lambda_3 + \ldots\ldots\ldots + (a_{nn}+\omega)\lambda_n = 0 \end{array} \qquad (3)$$

Имѣемъ относительно λ систему n линейныхъ однородныхъ уравненій. Такая система можетъ удовлетворяться, если или всѣ λ - нули (но это будутъ тривіальныя рѣшенія), или детерминантъ системы равенъ нулю:

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} a_{11}+\omega, & a_{12}, & \ldots\ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}+\omega, & \ldots\ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots\ldots, & a_{nn}+\omega \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Это есть уравненіе n-ой степени относительно ω; рѣшивъ его, найдемъ n корней: $\omega_1, \omega_2, \ldots\ldots\ldots, \omega_n$.

Взявъ одинъ изъ этихъ корней и вставляя въ (3), полу -

чимъ систему, которая совмѣстна, такъ какъ Δ равенъ нулю. Изъ этой системы мы найдемъ, чему пропорціональны h.

Итакъ, для каждаго корня ω мы найдемъ соотвѣтственныя значенія h и, слѣдовательно, будемъ знать n рѣшеній.

$$y_1^{(i)} = h_1^{(i)} e^{\omega_i x}, \quad y_2^{(i)} = h_2^{(i)} e^{\omega_i x}, \quad \ldots\ldots \quad y_n^{(i)} = h_n^{(i)} e^{\omega_i x}.$$

Эти рѣшенія будутъ независимы, такъ какъ, если составить детерминантъ, то онъ будетъ, вообще говоря, отличенъ отъ нуля, и слѣдовательно можемъ найти общее рѣшеніе.

Корни ур-ія (4) могутъ быть кратными, и тогда мы не получимъ указаннымъ методомъ общаго рѣшенія. Это будетъ затрудненіе того же характера, какъ и въ случаѣ одного линейнаго ур-ія. Роль характеристическаго ур-ія въ данномъ случаѣ играетъ ур-іе (4).

Разсмотримъ остроумный методъ интегрированія системы d'Alembert'a для случая двухъ уравненій:

$$\frac{dy}{dx} + a_1 y + a_2 z = A,$$
$$\frac{dz}{dx} + b_1 y + b_2 z = B.$$

Относительно a_1, a_2, b_1, b_2, A, B никакихъ ограниченій не дѣлаемъ: они могутъ быть функціями x. Введемъ новую функцію, полагая $y + hz = u$; отсюда $y = u - hz$. Для производной будемъ имѣть:

$$\frac{dy}{dx} + h\frac{dz}{dx} = \frac{du}{dx} - z\frac{dh}{dx}$$

Умноживъ второе ур-іе на h и сложимъ оба:

$$\frac{du}{dx} - z\frac{dh}{dx} + (a_1 + b_1 h)(u - hz) + (a_2 + h b_2) z = A + Bh.$$

Приравнивая коэффиціентъ при z нулю, наше ур-іе перепишемъ въ видѣ:

$$\frac{du}{dx} + (a_1 + b_1 h) u = A + Bh \qquad (\mathcal{L})$$

Равенство нулю коэффиціента при z даетъ:

$$-\frac{dh}{dx}-h(a_1+b_1h)+a_2+hb_2=0,$$

или $\frac{dh}{dx}+b_1h^2+(a_1-b_2)h-a_2=0$ $\qquad (R)$

Найдя изъ этого ур-iя типа Riccati h и вставивъ его значенiе въ $(\mathfrak{L})$, получимъ u. Взявъ два частныхъ рѣшенiя ур-iя (R)

$$h_1=h_1(x)\quad,\qquad h_2=h_2(x)$$

соотвѣтственно изъ $(\mathfrak{L})$ найдемъ:

$$u_1=u_1(x,C_1)\qquad \text{и}\qquad u_2=u_2(x,C_2).$$

Для опредѣленiя у и z будемъ имѣть равенства:

$$y+h_1z=u_1$$
$$y+h_2z=u_2$$

Методъ d'Alembert'а легко примѣняется, если можно найти частныя рѣшенiя ур-iя Riccati. Это и будетъ, когда оно имѣетъ постоянные коэффицiенты.

Перепишемъ ур-iе (R) такъ:

$$\frac{dh}{b_1h^2+(a_1-b_2)h-a_2}=-dx$$

Если a и b постоянныя, то слѣва имѣемъ функцiю только h и квадратурой найдемъ:

$$C-x=\int\frac{dh}{b_1h^2+(a_1-b_2)h-a_2}\qquad(5.)$$

Мы можемъ даже потребовать, чтобы только имѣли мѣсто соотношенiя

$$b_1:a_1-b_2:-a_2=\alpha:\beta:\gamma,$$

гдѣ α, β, γ постоянны. Въ этомъ случаѣ

$$b_1=\alpha\varrho\ ;\quad a_1-b_2=\beta\varrho\ ;\quad -a_2=\gamma\varrho\ ,$$

гдѣ ϱ - любая функцiя x.

Перемѣнныя раздѣлятся, и мы получимъ

$$\frac{dh}{\alpha h^2+\beta h+\gamma}=-\varrho dx\qquad \text{и далѣе}\qquad \int\frac{dh}{\alpha h^2+\beta h+\gamma}=C-\int\varrho dx.\ (5')$$

Но кромѣ того легко видѣть, что ур-iе Riccati въ этомъ случаѣ и въ частности при пост.коэфф. допускаетъ постоянныя рѣшенія $\lambda = \mathrm{const}$. Дѣйствительно, тогда $\frac{d\lambda}{dx} = 0$, и мы получимъ:

$$b_1\lambda^2 + (a_1 - b_2)\lambda - a_2 = 0 \qquad (Q)$$

гдѣ b_1, $a_1 - b_2$, a_2 постоянны или пропорціональны постояннымъ α, β, γ.

Ур-іе (Q) имѣетъ два постоянныхъ корня λ_1 и λ_2, которые и будутъ частными рѣшеніями ур-ія ($\mathcal{R}$).

Въ случаѣ кратнаго корня ($\lambda_1 = \lambda_2$) придется второе частное рѣшеніе искать изъ общей формулы (5). Въ случаѣ кратнаго корня ур-іе Riccati перепишется въ видѣ:

$$-\frac{d\lambda}{(\lambda - \lambda_1)^2} = b_1 dx.$$

Выполняя квадратуру, найдемъ:

$$\frac{1}{\lambda - \lambda_1} = b_1 x + C$$

Чтобы найти второе частное рѣшеніе, кромѣ λ_1, положимъ $C = 0$. Тогда получимъ:
$$\lambda = \frac{1}{b_1 x} + \lambda_1 .$$

П Р И М Ѣ Р Ъ. Имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx} + y - 2z = 2e^{2x}$$

$$\frac{dz}{dx} + y + 4z = -e^{2x}$$

Напишемъ ур-іе Riccati ($\mathcal{R}$):

$$\frac{d\lambda}{dx} + \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Ур-іе ($\mathcal{L}$) будетъ такое: $\frac{du}{dx} + (1+\lambda)u = (2-\lambda)e^{2x}$.

Беремъ ур-іе Riccati и ищемъ корни ур-ія

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \ ; \ \lambda_1 = 1 \ ; \ \lambda_2 = 2.$$

Пишемъ два ур-ія для u_1 и u_2:

$$\frac{du_1}{dx} + 2u_1 = e^{2x} \quad ; \quad \frac{du_2}{dx} + 3u_2 = 0.$$

Интегрируемъ эти два уравненія:

$$e^{2x} du_1 + 2e^{2x} u_1 dx = e^{4x} dx ,$$

$$d(e^{2x} u_1) = e^{4x} dx \ ; \ e^{2x} u_1 = \frac{e^{4x}}{4} + C_1 \ ;$$

$$u_1 = \frac{e^{2x}}{4} + C_1 e^{-2x} \ ; \ u_2 = C_2 e^{-3x} \ ;$$

$$y + z = \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 e^{-2x} \ ; \ y + 2z = C_2 e^{-3x} .$$

Отсюда:

$$y = 2C_1 e^{-2x} - C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2} e^{2x} ,$$

$$z = C_2 e^{-3x} - C_1 e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

и есть общее рѣшенiе нашей системы.

---- о ----

ТЕОРIЯ УРАВНЕНIЙ СЪ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ.

§ 28. УР-IЯ ВЪ ПОЛНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦIАЛАХЪ.

Всякое дифференцiальное ур-iе есть ур-iе съ отношенiями дифференцiаловъ; напримѣръ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + xy = x^2 .$$

Освобождая отъ знаменателя, будемъ имѣть:

$$d^2y - 2dydx + (xy - x^2)dx^2 = 0 .$$

Будемъ теперь разсматривать вообще ур-iя въ дифференцiалахъ вида:

$$F(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, dx_1, dx_2, \ldots dx_n, d^2x_1, d^2x_2, \ldots) = 0$$

при этомъ мы налагаемъ условiе, чтобы лѣвая часть была однородна относительно дифференцiаловъ, считая за измѣренiе дифференцiала его порядокъ.

Пусть мы имѣемъ рядъ конечныхъ соотношенiй между n переменными:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0$$

Продифференцируемъ эти соотношенія:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_2}dx_2 + \dots\dots + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_n}dx_n = 0 \qquad \text{и т.д.}$$

Если окажется, что данныя дифф-ныя соотношенія являются слѣдствіемъ полученныхъ, то мы скажемъ, что соотношеніями

$$\Phi_i(x_1, x_2, \dots\dots, x_n) = 0$$

удовлетворяются данныя дифференціальныя; короче

$$\Phi_i(x_1, x_2, \dots\dots, x_n) = 0$$

суть интегральныя соотношенія для данныхъ дифференціальныхъ .

Пусть мы имѣемъ нѣсколько соотношеній однородныхъ относительно дифференціаловъ (ур-ій Monge'а) вида:

$$\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots\dots, x_n, dx_1, dx_2, \dots\dots, dx_n) = 0 \qquad (M)$$

въ которыя входятъ дифференціалы только перваго порядка. Раздѣливъ на подходящую степень одного дифференціала наши ур-ія приведемъ къ виду:

$$\Psi(x_1, x_2, \dots\dots x_n, \frac{dx_1}{dx_n}, \frac{dx_2}{dx_n}, \dots\dots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n}) = 0$$

Замѣтимъ, что если мы имѣемъ n-1 ур-ій Monge'а, то придемъ къ системѣ обыкновенныхъ ур-ій перваго порядка, такъ какъ тогда всѣ отношенія дифференціаловъ къ одному изъ нихъ вполнѣ опредѣлятся въ функціи перемѣнныхъ. Если же ур-ій (M) будетъ больше, то будемъ имѣть невозможную систему, которая удовлетворяется только, если положить всѣ x постоянными, ибо въ этомъ случаѣ всѣ дифференціалы будутъ нулями и ур-ія (M) обратятся въ тождества. (Если измѣреніе относительно дифференціаловъ положительно).

Будемъ говорить о случаѣ, когда дано только одно уравненіе Монжа:

$$\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots\dots, x_n, dx_1, dx_2, \dots\dots, dx_n) = 0 \qquad (1)$$

и будемъ искать соотношенія вида:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) = 0$$

такія, чтобы ур-іе (1) было слѣдствіемъ (А) и ихъ полныхъ дифференціаловъ:
$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}dx_n = 0 \qquad (2)$$

Возникаетъ вопросъ о числѣ конечныхъ соотношеній (А). Если ихъ будетъ $n (i = 1,2,3,\ldots,n)$, то всѣ х должны быть постоянными и ур-іе (1) удовлетворится, если только измѣреніе его относительно дифференціаловъ положительно. Если $i = 1$, то ур-іе (1) должно быть слѣдствіемъ двухъ соотношеній: одного вида (А) и другого вида (2), и ясно, что лѣвая часть ур-ія (1) должна распасться на множители, и въ числѣ ихъ должны быть множители перваго измѣренія относительно дифференціаловъ, какъ ур-іе (2). Отсюда заключеніе: возможно удовлетворить ур-ію Монжа однимъ конечнымъ соотношеніемъ только тогда, когда изъ лѣвой части этого ур-ія выдѣляется линейный относительно дифференціаловъ факторъ. Мы и будемъ разсматривать ур-ія Монжа только линейныя относительно дифференціаловъ, т.е. такъ называемыя ур-ія Pfaff'a, вида
$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots\ldots\ldots + X_n dx_n = 0,$$
гдѣ $X_i = f_i(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$.

Ограничимся случаемъ, когда $n = 3$, т.е. будемъ разсматривать ур-іе вида
$$A dx + B dy + C dz = 0, \qquad (3)$$
гдѣ A, B, C суть функціи x, y, z.

Ясно, что x, y, z независимыми быть не могутъ, ибо когда x и y постоянны, то $dx = 0$, $dy = 0$, а тогда изъ ур-ія (3) и $dz = 0$, т.е. и z постоянно.

Если будемъ имѣть три интегральныхъ соотношенія для ур-ія (3), то изъ нихъ опредѣлимъ x, y, z, такъ что

$$x = \mathrm{const.};\quad y = \mathrm{const.};\quad z = \mathrm{const.}$$

Въ этомъ случаѣ, очевидно, наше ур-іе удовлетворится при любыхъ значеніяхъ постоянныхъ: такое рѣшеніе особаго значенія не имѣетъ. Это - тривіальное рѣшеніе.

Пусть теперь имѣемъ два соотношенія между перемѣнными. Тогда наше ур-іе тоже удовлетворится и одно соотношеніе мы можемъ выбирать произвольно. Въ этомъ случаѣ два изъ перемѣнныхъ будутъ функціями третьяго.

Положимъ $y = \varphi(x)$. Тогда будемъ имѣть:

$$[A + B\varphi'(x)]dx + C dz = 0$$

при чемъ въ A, B и C вмѣсто $\underline{y}$ вставлено $\varphi(x)$. Получится обыкновенное дифф-ное ур-іе съ однимъ независимымъ перемѣннымъ:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{A + B\varphi(x)}{C}$$

Проинтегрировавъ его, найдемъ второе интегральное соотношеніе

$$z = \psi(x, C_1).$$

Если мы будемъ понимать x, y, z какъ Декартовы координаты въ пространствѣ, то въ первомъ случаѣ будемъ имѣть одну точку, а во второмъ такъ называемую интегральную линію. Первое соотношеніе, взятое нами, есть ур-іе цилиндрической поверхности съ образующими, параллельными оси z. Если присоединимъ второе соотношеніе, то получимъ на этой поверхности цѣлое семейство линій, зависящее отъ одного параметра C_1.

Пусть теперь имѣемъ какое-нибудь ур-іе

$$F(x, y, z) = 0 \tag{4}$$

вмѣсто соотношенія $y = \varphi(x)$. Легко видѣть, что у насъ опять получится обыкновенное дифф-ное ур-iе перваго порядка. Мы можемъ изъ (4) опредѣлить z въ функцiи x, y.

$$z = \chi(x, y) \qquad (4')$$

и, продифференцировавъ

$$dz = \frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy,$$

вставить въ ур-iе (3):

$$\left(A + C \frac{\partial \chi}{\partial x}\right) dx + \left(B + C \frac{\partial \chi}{\partial y}\right) dy = 0 \qquad (3')$$

Проинтегрировавъ ур-iе (3'), получимъ интегралъ

$$\Phi(x, y, C') = 0 \qquad (5)$$

Соотношенiя (4) и (5) опредѣляютъ интегральныя линiи, лежащiя на произвольно выбранной нами поверхности (4) и образующiя семейство съ однимъ параметромъ.

Для большей симметрiи можно опредѣлить поверхность въ Гауссовыхъ криволинейныхъ координатахъ, полагая

$$x = \varphi(u, v)$$
$$y = \psi(u, v)$$
$$z = \chi(u, v).$$

Найдя dx, dy, dz и вставивъ въ ур-iе (3), получимъ обыкновенное дифф-ное ур-iе въ u и v:

$$\left\{A \frac{\partial \varphi}{\partial u} + B \frac{\partial \psi}{\partial u} + C \frac{\partial \chi}{\partial u}\right\} du + \left\{A \frac{\partial \varphi}{\partial v} + B \frac{\partial \psi}{\partial v} + C \frac{\partial \chi}{\partial v}\right\} dv = 0.$$

Интегрируя, получимъ соотношенiе

$$\Phi_1(u, v, C_1) = 0,$$

которое вмѣстѣ съ данными и опредѣлитъ семейство линiй на нашей поверхности, зависящее отъ одного параметра.

Переходимъ къ третьему случаю: нельзя ли проинтегрировать ур-iе Pfaff'а однимъ соотношенiемъ?

Это значитъ, что если мы имѣемъ соотношеніе

$$\Phi(x, y, z) = 0 \tag{I}$$

и если его продифференцируемъ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = 0, \tag{II}$$

то ур-іе (8) будетъ слѣдствіемъ этихъ двухъ. Ур-іе (I) есть ур-іе интегральной поверхности. Легко видѣть, что всякая произвольная линія на ней будетъ интегральной, потому что, если мы къ ур-ію (I) прибавимъ произвольное уравненіе

$$\Psi(x, y, z) = 0, \tag{III}$$

то ур-іе Pfaff'а этими двумя соотношеніями будетъ удовлетворяться. Итакъ, съ геометрической точки зрѣнія вопросъ сводится къ изысканію такихъ поверхностей, гдѣ всякая линія была бы интегральной. Это сдѣлать можно не всегда.

Выразивъ изъ ур-ія (I) одинъ изъ дифференціаловъ чрезъ другіе

$$dz = P dx + Q dy$$

и вставивъ въ (3), получимъ:

$$(A + CP)dx + (B + CQ)dy = 0. \tag{IV}$$

При этомъ изъ ур-ія (I) можемъ опредѣлить z и вставить сюда. Въ результатѣ получимъ дифференціальное соотношеніе между x и y, которое должно тожественно удовлетворяться, ибо въ противномъ случаѣ x и y не были бы независимы. (Изъ соотношенія (I) z опредѣляется въ функціи x, y, а эти послѣднія остаются независимыми.)

Итакъ необходимо

$$A + CP = 0,$$

$$B + CQ = 0,$$

или:

$$A : B : C = P : Q : -1,$$

или еще: $$A : B : C = \frac{\partial \Phi}{\partial x} : \frac{\partial \Phi}{\partial y} : \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Итакъ, ур-iю Pfaff'а можно удовлетворить однимъ соотношенiемъ, только тогда, если можно найти такой факторъ λ, чтобы

$$\begin{aligned} \lambda A &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \lambda B &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \lambda C &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{aligned} \qquad (A)$$

Мы полагали коэффицiенты въ ур-iи (IУ) равными 0 въ силу ур-iя (I), которое есть интегральное соотношенiе для ур-iя Pfaff'а. Въ дальнѣйшемъ мы ограничимся случаемъ, когда пропорцiональность $$A : B : C = \frac{\partial \Phi}{\partial x} : \frac{\partial \Phi}{\partial y} : \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$ имѣетъ мѣсто тождественно; легко видѣть, что въ этомъ случаѣ интегральнымъ соотношенiемъ будетъ не только (I), но и такое:

$$\Phi(x, y, z) = const. \qquad (I')$$

Обратно, если мы потребуемъ, чтобы ур-iе Pfaff'а интегрировалось однимъ соотношенiемъ вида (I'), то A, B, C должны быть пропорцiональны частнымъ производнымъ одной функцiи Ф (x,y,z), и эта пропорцiональность должна имѣть мѣсто тождественно. Очевидно, ни одно изъ двухъ равенствъ, выражающихъ пропорцiональность, не можетъ быть слѣдствiемъ (I'), такъ какъ въ (I') входитъ const., которое ни въ одно изъ этихъ равенствъ не войдетъ. Они удовлетворяются при независимыхъ x, y и z.

Итакъ, если ур-iе Pfaff'а интегрируется однимъ соотношенiемъ съ произвольнымъ постояннымъ, то существуетъ такое λ, что, при умноженiи на λ, лѣвая часть обращается въ точный дифференцiалъ:

$$\lambda(A dx + B dy + C dz) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = d\,\Phi(x, y, z) \qquad (B)$$

Найдемъ условіе для A, B, C, при которомъ существуетъ эта функція λ. Беремъ ур-ія (A); дифференцируемъ первое по y, второе по z, и результаты приравниваемъ:

$$\lambda \frac{\partial A}{\partial y} + A \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \lambda \frac{\partial B}{\partial x} + B \frac{\partial \lambda}{\partial x}.$$

Аналогично имѣемъ:

$$\lambda \frac{\partial B}{\partial z} + B \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \lambda \frac{\partial C}{\partial y} + C \frac{\partial \lambda}{\partial y}$$

$$\lambda \frac{\partial C}{\partial x} + C \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \lambda \frac{\partial A}{\partial z} + A \frac{\partial \lambda}{\partial z}.$$

Переносимъ въ этихъ трехъ уравненіяхъ члены:

$$\lambda\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right) = B \frac{\partial \lambda}{\partial x} - A \frac{\partial \lambda}{\partial y},$$

$$\lambda\left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}\right) = C \frac{\partial \lambda}{\partial y} - B \frac{\partial \lambda}{\partial z},$$

$$\lambda\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right) = A \frac{\partial \lambda}{\partial z} - C \frac{\partial \lambda}{\partial x}.$$

Чтобы получить зависимость между A, B и C, умножаемъ первое на C, второе на A и третье на B и складываемъ. Будемъ имѣть:

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right) + C\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right) = 0 \qquad (E)$$

Это соотношеніе (E) и есть условіе интегрируемости уравненія Pfaff'a однимъ соотношеніемъ. Это условіе должно имѣть мѣсто тожественно, только если въ интегральное соотношеніе входитъ произвольное постоянное; если же интегральное соотношеніе имѣетъ видъ

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

то условіе (E) можетъ быть его слѣдствіемъ.

Доказавъ необходимость условія (E), докажемъ его достаточность. Для этого употребимъ методъ Эйлера для интеграціи ур-ія Pfaff'a.

Предполагаемъ, что для ур-ія Pfaff'a тождественно удовлетворено соотношеніе (E). Положимъ одно изъ перемѣнныхъ временно постояннымъ; пусть z = const., слѣд. $dz = 0$. Ур-іе

(3) принимаетъ видъ: $Adx + Bdy = 0$

При этомъ въ A и B входитъ z, но какъ параметръ. Проинтегрировавъ это обыкновенное дифф-ное ур-iе, получимъ соотношенiе вида

$$u(x, y, z) = const.$$

Изъ теорiи дифф-ныхъ ур-iй перваго порядка извѣстно, что существуетъ интегрирующiй факторъ μ, по умноженiи на который лѣвая часть дифф-наго ур-iя превращается въ полный дифференцiалъ, такъ что

$$\mu A = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \mu B = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Эти два равенства имѣютъ мѣсто тождественно.

Теперь возвращаемся къ предположенiю, что z - перемѣнное. Тогда можемъ написать:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz,$$

ибо u есть функцiя трехъ перемѣнныхъ x, y, z, или, въ силу предыдущихъ равенствъ:

$$du = \mu(Adx + Bdy) + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Умножаемъ ур-iе (3) на μ, получимъ:

$$\mu Adx + \mu Bdy + \mu Cdz = 0.$$

Пользуясь предыдущимъ равенствомъ, будемъ имѣть:

$$du - \frac{\partial u}{\partial z}dz + \mu Cdz = du + Mdz = 0,$$

гдѣ

$$M = \mu C - \frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (6)$$

Итакъ, ур-iе (3) замѣнилось ур-iемъ вида (6), гдѣ M есть функцiя x, y, z. Докажемъ, что M можетъ быть выражено чрезъ u и z, т.е. что

$$M = \varphi(u, z).$$

Если это будетъ доказано, то у насъ будетъ обыкновенное дифференцiальное ур-iе 1-го порядка, проинтегрировавъ которое мы получимъ соотношеніе вида:

$$\Psi(u, z) = const. \tag{7}$$

Вставивъ въ него вмѣсто u его значеніе, будемъ имѣть искомое интегральное соотношеніе вида

$$\Phi(x, y, z) = const. \tag{I}$$

Мы видимъ, что методъ Эйлера требуетъ двухъ послѣдовательныхъ интеграцій двухъ ур-ій перваго порядка.

Покажемъ, что если имѣетъ мѣсто условіе (E), то M есть функція u и z. Имѣемъ три равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu A,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \mu B,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \mu C - M$$

Продифференцируемъ первое по z, третье по x, и результаты приравняемъ:

$$\mu\frac{\partial A}{\partial z} + A\frac{\partial \mu}{\partial z} = \mu\frac{\partial C}{\partial x} + C\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial x} \tag{a}$$

Аналогично будемъ имѣть:

$$\mu\frac{\partial B}{\partial z} + B\frac{\partial \mu}{\partial z} = \mu\frac{\partial C}{\partial y} + C\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial y} \tag{b}$$

$$\mu\frac{\partial A}{\partial y} + A\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial B}{\partial x} + B\frac{\partial \mu}{\partial x},$$

или:

$$\mu\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right) = B\frac{\partial \mu}{\partial x} - A\frac{\partial \mu}{\partial y} \tag{c}$$

Наше положеніе будетъ доказано, если докажемъ, что Якобіевъ опредѣлитель для функцій M и u по x и y равенъ нулю:

$$\frac{\partial M}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Если опредѣлитель равенъ нулю, то наши функціи относительно x и y зависимы, т.е.

$$M = \varphi(u, z)$$

Въ этомъ равенствѣ замѣняемъ $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ пропорціональными имъ величинами А и В:
$$B\frac{\partial M}{\partial x} - A\frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Умножаемъ ур-іе (а) на В, (в) на А, и вычитаемъ второе изъ перваго:
$$\mu\left(B\frac{\partial A}{\partial z} - A\frac{\partial B}{\partial z}\right) = \mu\left(B\frac{\partial C}{\partial x} - A\frac{\partial C}{\partial y}\right) + C\left(B\frac{\partial \mu}{\partial x} - A\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) - \left(B\frac{\partial M}{\partial x} - A\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$
Мы хотимъ доказать, что послѣдній членъ равенъ 0. Замѣнимъ второй членъ правой части изъ (с) чрезъ $C\mu\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right)$

и перенесемъ всѣ члены вправо: въ лѣвой части будемъ имѣть 0:
$$0 = \mu\left[A\left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right) + C\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right)\right] - \left(B\frac{\partial M}{\partial x} - A\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$
Выраженіе въ квадратной скобкѣ исчезаетъ въ силу условія (Е). Слѣдовательно наше положеніе доказано.

Итакъ мы видимъ, что условіе (Е) есть не только необходимое, но и достаточное для интегрируемости ур-ія (3) однимъ соотношеніемъ.

ПРИМѢРЪ.
$$(y+a)^2dx + z\,dy - (y+a)dz = 0 \qquad (\alpha)$$
Посмотримъ, удовлетворяется ли условіе (Е).
$$(y+a)^2(1+1) + z(0-0) - (y+a)\left[2(y+a) - 0\right] = 0.$$
Условіе выполнено. Полагаемъ z постояннымъ; $dz = 0$. Получимъ:
$$(y+a)^2dx + z\,dy = 0.$$

Интегрируя, будемъ имѣть:
$$\frac{1}{y+a} - \frac{x}{z} = C = u$$
Вводимъ въ наше уравненіе u и z:
$$x = \frac{z}{y+a} - zu, \quad \text{откуда:} \quad dx = -\frac{z\,dy}{(y+a)^2} + \left(\frac{1}{y+a} - u\right)dz - z\,du;$$

Вставляя

$$-zdy+[(y+a)-u(y+a)^2]dz-z(y+a)^2du+zdy-(y+a)dz=0$$

По сокращенiи имѣемъ:

$$u\,dz+z\,du=0.$$

Это есть ур-iе (6). Интегрируемъ его:

$$uz=const.$$

Остается вмѣсто u ввести его значенiе:

$$\frac{z}{y+a}-x=const.$$

Это и есть интегральное соотношенiе.

На практикѣ исключенiе x и y изъ даннаго ур-iя ведутъ проще, a priori зная, что въ результатѣ должно получиться уравненiе вида

$$P\,du+Q\,dz=0,$$

гдѣ въ P и Q входятъ только u и z.

Пишемъ:
$$du=\frac{x\,dz}{z^2}-\frac{dx}{z}-\frac{dy}{(y+a)^2}\qquad(\beta)$$

А затѣмъ къ данному уравненiю прибавляемъ (β) по умноженiи на такой факторъ, чтобы исчезли dx и dy. Здѣсь, очевидно, можно умножить (α) на $\frac{1}{z}$, (β) на $(y+a)^2$ и сложить; получаемъ:

$$(y+a)^2du=\left\{\frac{x(y+a)^2}{z^2}-\frac{y+a}{z}\right\}dz$$

По дѣленiи на $(y+a)^2$ и умноженiи на z будемъ имѣть:

$$z\,du=-u\,dz.$$

---

§ 29. Линейныя уравненiя съ частными производными перваго порядка.

Линейное ур-iе съ частными производными перваго порядка имѣетъ видъ:

$$A_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+A_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\dots\dots+A_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=A,$$

гдѣ всѣ A суть функцiи $z, x_1, x_2, \dots, x_n$.

Если $A = 0$ и если каждое A_i есть функція только независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$A_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

то будемъ имѣть ур-іе, которое мы уже разсматривали.

Введемъ новыя обозначенія:

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \qquad (1)$$

гдѣ $X_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Интеграція такого ур-ія приводится къ интеграціи системы обыкновенныхъ дифф-ныхъ ур-ій:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} \qquad (2)$$

Взявъ отношенія дифференціаловъ къ какому-нибудь одному, будемъ имѣть $n-1$ ур-ій вида:

$$\frac{dx_k}{dx_n} = \frac{X_k}{X_n}, \quad \text{гдѣ} \quad k = 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$$

Проинтегрировавъ эту систему, получимъ независимые интегралы системы вида:

$$\psi_k(x_1, x_2, \ldots x_n) = C_k$$

гдѣ $k = 1, 2, 3 \ldots, n-1$. Мы видѣли, что любая функція лѣвыхъ частей этихъ интеграловъ $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{n-1})$

удовлетворяетъ нашему ур-ію (1). Это есть общее рѣшеніе ур-ія (1). Вообще, если намъ удастся привести интеграцію ур-ія съ частными производными къ интеграціи обыкновенныхъ дифф-ныхъ ур-ій, то мы будемъ считать задачу разрѣшенной. Въ этомъ смыслѣ ур-іе (1) считаемъ проинтегрированнымъ.

Разсмотримъ ур-іе общаго вида:

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P_n p_n = R, \qquad (I)$$

гдѣ всѣ P и R суть функціи $x_1, x_2 \ldots, x_n$, а $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$.

Интеграція такого ур-ія можетъ быть приведена къ интеграціи ур-ія однороднаго. Намъ надо найти z въ функціи $x_1, x_2, \ldots x_n$, но мы можемъ вообще искать соотношеніе вида

$$V(z, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) = 0, \qquad (A)$$

которое давало бы z, удовлетворяющее нашему ур-ію (I).

Посмотримъ, какому же условію удовлетворяетъ функція V. Дифференцируемъ $V = 0$ по x_i:

$$\frac{\partial V}{\partial z} p_i + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0,$$

откуда

$$p_i = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_i}}{\frac{\partial V}{\partial z}}.$$

Вставимъ это въ ур-іе (I):

$$P_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots\ldots\ldots + P_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + R \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \; (II)$$

Наше ур-іе должно удовлетворяться, если мы z опредѣлимъ изъ условія (A) и вставимъ въ наше ур-іе. Но если мы потребуемъ, чтобы равенство (II) удовлетворялось независимо отъ этой подстановки при независимыхъ z, x_1, $x_2, \ldots\ldots, x_n$, то это будетъ ур-іе съ частными производными по $n+1$ перемѣннымъ и уже однородное. Проинтегрировавъ его, найдемъ V и, приравнявъ его нулю, рѣшимъ нашу задачу.

Возникаетъ вопросъ: всѣ ли рѣшенія мы такимъ образомъ получимъ? Мы наложили лишнее требованіе, чтобы ур-іе (II) удовлетворялось тожественно, независимо отъ условія (A).

Замѣтимъ, что если бы мы искали цѣлое семейство рѣшеній z, зависящихъ отъ произвольнаго постояннаго, то имѣли бы соотношеніе вида:

$$V(z, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n) = C \qquad (A')$$

Но въ этомъ случаѣ ур-іе (II) должно уже непремѣнно удовлетворяться тожественно, ибо въ него С не входитъ и оно поэтому не можетъ быть слѣдствіемъ (А').

Итакъ, отвѣтъ на поставленный вопросъ такой: мы найдемъ всѣ рѣшенія ур-ія (1) такія, которыя могутъ быть получены изъ семействъ рѣшеній, зависящихъ отъ произвольнаго постояннаго.

Мы пришли къ ур-ію (II). Оно приводитъ къ системѣ

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots\ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R} \qquad \text{(III)}$$

Проинтегрировавъ систему, получимъ рядъ интеграловъ вида

$$\psi_i(z, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = C_i$$

гдѣ $i = 1,2,3,\ldots,n$; функцію V мы можемъ положить равной произвольной функціи F отъ лѣвыхъ частей этихъ интеграловъ:

$$V = F(\psi_1, \psi_2, \ldots\ldots \psi_n)$$

Чтобы найти интегралъ ур-ія (I), мы должны положить $V = 0$ (можемъ приравнять не только нулю, а любому постоянному; но это большей общности не внесетъ, т.к. можемъ положить

$$F(\psi_1, \psi_2, \ldots\ldots \psi_n) - C = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots\ldots \psi_n) = 0$$

(произволъ выбора С покрывается произволомъ функціи F.)

Итакъ имѣемъ $F(\psi_1, \psi_2, \ldots\ldots, \psi_n) = 0$ и отсюда получимъ всѣ рѣшенія за исключеніемъ такъ называемыхъ особыхъ, т.е. такихъ, которыя не могутъ входить въ составъ ни одного семейства рѣшеній.

П Р И М Ѣ Р Ъ. $x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots\ldots + x_np_n = z$

Система ур-ій будетъ такая:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots\ldots = \frac{dz}{z}$$

Раздѣливъ на dx_n и интегрируя, имѣемъ:

$\lg x_k = \lg x_n + \lg C_k$, $\lg z = \lg x_n + \lg C_n$, или

$\frac{x_1}{x_n} = C_1$, $\frac{x_2}{x_n} = C_2$, ... $\frac{x_{n-1}}{x_n} = C_{n-1}$, $\frac{z}{x_n} = C_n$.

Искомое соотношенiе будетъ:

$$F\left(\frac{z}{x_n}, \frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ , что

$$\frac{z}{x_n} = \psi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

$$z = x_n \psi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

гдѣ ψ есть произвольная функцiя.

Наше ур-iе выражаетъ ничто иное, какъ теорему Эйлера объ однородныхъ функцiяхъ.

Пусть имѣемъ въ частности ур-iе съ двумя независимыми перемѣнными:

$$Pp + Qq = R \, , \qquad (I)$$

гдѣ $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ Система приметъ видъ:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} .$$

Эта система обыкновенныхъ ур-iй опредѣляетъ собою систему("конгруэнцiю") линiй въ пространствѣ своими интегралами

$$\varphi(x, y, z) = a \, , \quad \psi(x, y, z) = b$$

Линiи эти называются характеристиками.

Интегралъ ур-iя (I') $F(\varphi, \psi) = 0$ есть ур-iе нѣкоторой поверхности. Очевидно, она есть геометрическое мѣсто линiй конгруэнцiй, для которыхъ удовлетворяется соотношенiе $F(a, b) = 0$. Итакъ, мы выдѣляемъ произвольное семейство съ однимъ произвольнымъ параметромъ линiй въ пространствѣ - характеристикъ, и это семейство образуетъ нашу поверхность. Поверхность эта называется интегральной поверхностью для даннаго ур-iя.

П Р И М Ѣ Р Ъ: $xp + yq = z$

Интегралами системы будутъ: $\frac{y}{x} = A$; $\frac{z}{x} = B$; мы получили семейство прямыхъ. Уравненіе

$$\mathcal{F}\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$$

представляетъ коническую поверхность, проходящую чрезъ начало координатъ. Итакъ, въ этомъ случаѣ интегральныя поверхности суть конусы.

---

§ 30. НЕЛИНЕЙНЫЯ УР-ІЯ СЪ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВАГО ПОРЯДКА.

Ограничимся случаемъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ. Примемъ обозначенія Монжа:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

Имѣемъ ур-іе перваго порядка:

$$\mathcal{F}(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

Будемъ называть полнымъ интеграломъ ур-ія (1) соотношеніе между x, y, z и двумя произвольными постоянными, по исключеніи которыхъ мы приходимъ къ уравненію (1).

Пусть мы имѣемъ такое соотношеніе:

$$V(x, y, z, a, b) = 0 \tag{2}$$

гдѣ a и b - произвольныя постоянныя. Дифференцируя получимъ:

$$\frac{\partial V}{\partial z} p + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} q + \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

Исключивъ изъ (3) и (4) a и b мы и получимъ наше соотношеніе (1). Это ур-іе (1) будетъ слѣдствіемъ (2), (3) и (4), и (2) опредѣляетъ рѣшеніе ур-ія (1).

Докажемъ, что если мы нашли полный интегралъ, то общій и особый интегралы получаемъ безъ всякихъ интеграцій.

Замѣтимъ, что ур-іе (1) есть слѣдствіе ур-ій (2), (3),(4), каковы бы ни были a и b. Они могутъ быть не только постоянными, но и перемѣнными.

Итакъ, пусть у насъ a и b - нѣкоторыя функціи x и y. Функція z опредѣляется ур-іемъ (1). Для опредѣленія a и b мы можемъ добавить къ ур-ію (2) еще одно условіе по нашему произволу.

Дифференцируемъ соотношеніе (2):

$$\frac{\partial V}{\partial z}p+\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial b}\,\frac{\partial b}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial V}{\partial z}q+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial b}\,\frac{\partial b}{\partial y}=0 \qquad (5)$$

Чтобы добавить произвольное соотношеніе между a и b, мы можемъ взять одно изъ условій (3) и (4), разсматривая a и b, какъ функціи x и y. Кромѣ того, у насъ имѣется ур-іе (1); оно есть слѣдствіе (2), (3) и (4). Слѣдовательно, равенства (2), (3) (или (4)) и (1) эквивалентны (2), (3) и (4); равенство (1) мы можемъ отбросить.

Итакъ, принявъ во вниманіе (3) и (4), напишемъ равенства (5) въ болѣе простомъ видѣ:

$$\frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial y}=0. \qquad (6)$$

Полученныя равенства (6) эквивалентны въ силу соотношеній (5) равенствамъ (3) и (4).

Итакъ, для опредѣленія a, b и z имѣемъ соотношенія (6) и (2). Два ур-ія (6) содержатъ производныя a и b и опредѣляютъ эти двѣ функціи.

Разсмотримъ детерминантъ системы (6):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x}, & \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y}, & \frac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Если этотъ детерминантъ отличенъ отъ нуля, то ур-iя (6) могутъ удовлетворяться только благодаря исчезновенiю производныхъ $\frac{\partial v}{\partial a}$ и $\frac{\partial v}{\partial b}$. Если же онъ равенъ нулю, то система (6) приводится къ одному ур-iю. Детерминантъ можетъ равняться нулю или:

1) когда въ отдѣльности исчезаютъ всѣ его элементы; но тогда $a=$ const. и $b=$ const., и мы получимъ нашъ полный интегралъ;

2) когда функцiи зависимы, т.к. имѣемъ, что опредѣлитель Якоби равенъ нулю. Въ этомъ случаѣ

$$b = \varphi(a) \tag{7}$$

и два ур-iя (6) обращаются въ одно:

$$\left[\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b}\varphi'(a)\right]\frac{\partial a}{\partial x} = 0$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b}\varphi'(a)\right]\frac{\partial a}{\partial y} = 0$$

Такъ какъ по предположенiю $\frac{\partial a}{\partial x}$ и $\frac{\partial a}{\partial y}$ одновременно не исчезаютъ (въ противномъ случаѣ $a=$ const.), то имѣемъ:

$$\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b}\varphi'(a) = 0 \tag{8}$$

Равенства (2), (7) и (8) вполнѣ рѣшаютъ поставленный вопросъ, при чемъ функцiя φ въ (7) - произвольная. Изъ этихъ трехъ равенствъ мы можемъ исключить a и b. Получаемое при этомъ рѣшенiе называется общимъ рѣшенiемъ, а самое соотношенiе - общимъ интеграломъ.

Полный интегралъ является, очевидно, частнымъ случаемъ общаго, когда a и b постоянны.

3) Пусть теперь детерминантъ не равенъ нулю. Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial a}=0$$
$$\frac{\partial v}{\partial b}=0 \qquad (9)$$

Равенства (9) тоже рѣшаютъ вопросъ вмѣстѣ съ равенствомъ (2). Изъ нихъ мы исключаемъ a и b, и получимъ соотношеніе, которое называется особымъ интеграломъ. Оно не содержитъ ни одного произвольнаго постояннаго, а только x, y и z. Соотвѣтственное рѣшеніе называется особымъ.

Итакъ, наша теорема доказана.

Полученный результатъ имѣетъ простое геометрическое толкованіе. Пусть x, y, z - декартовы координаты. Мы ищемъ поверхность, которую назовемъ интегральною. Ур-іе (2) опредѣляетъ семейство поверхностей съ двумя параметрами. Когда мы ищемъ особый интегралъ, то, очевидно, опредѣляемъ огибающую всего семейства. Общій интегралъ представляетъ собою огибающую семейства съ однимъ параметромъ, ибо мы ур-іемъ $b=\varphi(a)$ выдѣляемъ изъ всего семейства семейство съ однимъ параметромъ, а ур-іе (8) получаемъ дифференцированіемъ (2) по a.

П Р И М Ѣ Р Ъ. Имѣемъ полный интегралъ:

$$z=ax+by+ab.$$

Онъ опредѣляетъ семейство плоскостей; дифференцируя по x и y, имѣемъ:

$$p=a; \qquad q=b.$$

Отсюда:

$$z=px+qy+pq$$

Чтобы найти особый интегралъ, дифференцируемъ по a и b наше соотношенiе:

$$0 = x + b \quad , \quad 0 = y + a$$

Особый интегралъ будетъ: $z = -xy$

Огибающая семейства плоскостей есть параболоидъ.

Желая получить общiй интегралъ, полагаемъ:

$$b = \varphi(a) \ ; \qquad 0 = x + b + (y+a)\varphi'(a).$$

Отсюда мы должны опредѣлить a и вставить въ ур-iе

$$z = ax + \varphi(a)y + a\varphi(a).$$

---

§ 31. МЕТОДЪ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ОТЫСКАНIЯ ПОЛНАГО ИНТЕГРАЛА.

Пусть мы имѣемъ ур-iе съ частными производными

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

и пусть мы имѣемъ еще соотношенiе

$$\Phi(x, y, z, p, q) = a \tag{2}$$

Изъ (1) и (2) мы можемъ найти p и q и вставить въ уравненiе Pfaff'а:

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{3}$$

Пусть ур-iе (3) интегрируется однимъ соотношенiемъ

$$\Psi(x, y, z, a) = b \tag{4}$$

Тогда z, отсюда найденное, удовлетворитъ ур-iю (1), ибо равенство (3) имѣетъ мѣсто при независимыхъ x и y, и слѣдовательно p и q будутъ соотвѣтственно $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Пишемъ условiе интегрируемости для ур-iя (3):

$$p\left\{\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial(-1)}{\partial y}\right\} + q\left\{\frac{\partial(-1)}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z}\right\} + (-1)\left\{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right\} = 0$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}p \tag{5}$$

Дифференцируемъ (1), считая p и q функцiями x, y и z, чтобы найти комбинаціи, стоящія въ равенствѣ (5):

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial z} = 0 \tag{7}$$

Введемъ для сокращенія письма обозначеніе

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z}p = \frac{\delta X}{\delta x}\ ; \qquad \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z}q = \frac{\delta X}{\delta y}$$

Умножая (7) на p и складывая съ (6), получимъ:

$$\frac{\delta F}{\delta x} + \frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\delta q}{\delta x} = 0$$

Аналогично изъ (2) будемъ имѣть:

$$\frac{\delta \Phi}{\delta x} + \frac{\partial \Phi}{\partial p}\cdot\frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\partial \Phi}{\partial q}\cdot\frac{\delta q}{\delta x} = 0$$

Разрѣшаемъ эти уравненія относительно $\frac{\delta q}{\delta x}$:

$$\frac{\delta q}{\delta x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\delta F}{\delta x}, & \frac{\partial F}{\partial p} \\ \frac{\delta \Phi}{\delta x}, & \frac{\partial \Phi}{\partial p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p}, & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p}, & \frac{\partial \Phi}{\partial q} \end{vmatrix}}$$

Совершенно такъ же найдемъ и $\frac{\delta p}{\delta y}$:

$$\frac{\delta p}{\delta y} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\delta F}{\delta y}, & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\delta \Phi}{\delta y}, & \frac{\partial \Phi}{\partial q} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p}, & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p}, & \frac{\partial \Phi}{\partial q} \end{vmatrix}}$$

Вставляя найденныя значенія $\frac{\delta q}{\delta x}$ и $\frac{\delta p}{\delta y}$ въ равенство (5) и от - брасывая общаго знаменателя, будемъ имѣть:

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta x}, & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p} \\ \frac{\delta \Phi}{\delta x}, & \frac{\partial \Phi}{\partial p} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta y}, & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} \\ \frac{\delta \Phi}{\delta y}, & \frac{\partial \Phi}{\partial q} \end{vmatrix} = 0$$

Вводимъ обозначенія:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = \mathcal{X}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = \mathcal{Y}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} = \mathcal{Z}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p} = \mathcal{P}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} = \mathcal{Q}$$

Раскрывая детерминанты, получимъ:

$$\mathcal{P}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathcal{Q}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + (\mathcal{P}p + \mathcal{Q}q)\frac{\partial \Phi}{\partial z} - (\mathcal{X} + \mathcal{Z}p)\frac{\partial \Phi}{\partial p} - (\mathcal{Y} + \mathcal{Z}q)\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0 \quad (A)$$

Интеграція этого линейнаго однороднаго ур-ія съ частными производными функціи Ф по аргументамъ x, y, z, p, q приводится къ интеграціи системы:

$$\frac{dx}{\mathcal{P}} = \frac{dy}{\mathcal{Q}} = \frac{dz}{\mathcal{P}p + \mathcal{Q}q} = \frac{-dp}{\mathcal{X} + \mathcal{Z}p} = \frac{-dq}{\mathcal{Y} + \mathcal{Z}q} \qquad (8)$$

Интегралъ этой системы и будетъ искомымъ соотношеніемъ (2) :

$$\Phi(x, y, z, p, q) = a \qquad (2)$$

т.к. функція Ф удовлетворяетъ ур-ію (A).

Найдя изъ (1) и (2) p и q и вставивъ ихъ значенія въ ур-іе Pfaff'а (3), мы его проинтегрируемъ однимъ соотношеніемъ, которое и дастъ намъ полный интегралъ.

Итакъ, все дѣло сводится къ интеграціи системы (8) и ур-ія Pfaff'а (3). Это и есть методъ Лагранжа.

Легко видѣть, что система (4) допускаетъ интегралъ вида

$$\mathcal{F}(x, y, z, p, q) = C,$$

ибо для Ф = $\mathcal{F}$ ур-іе (A) обращается въ тождество:

$$\mathcal{X}\mathcal{P} + \mathcal{Y}\mathcal{Q} + \mathcal{Z}(\mathcal{P}p + \mathcal{Q}q) - \mathcal{P}(\mathcal{X} + \mathcal{Z}p) - \mathcal{Q}(\mathcal{Y} + \mathcal{Z}q) = 0.$$

Этотъ интегралъ очевидно непригоденъ. Но знаніе его позволяетъ упростить интеграцію, т.к. одно изъ перемѣнныхъ мы можемъ исключить изъ системы (A) помощью ур-ія: $\mathcal{F}$(x, y, z, p, q)=0 и бу -

демъ имѣть систему трехъ уравненій (вмѣсто четырехъ).

П Р И М Ѣ Р Ъ: $pq = z$

Интеграломъ системы (8) будетъ $q = ap$. Изъ полученныхъ ур-ій находимъ $p = \sqrt{\frac{z}{a}}$; $q = \sqrt{a}\sqrt{z}$. Уравненіе Pfaff'а будетъ имѣть видъ:

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{dx}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}\,dy$$

Интегралъ его

$$2\sqrt{z} = \frac{x}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}\,y + b$$

и будетъ полнымъ интеграломъ нашего уравненія съ частными производными.

------- oOo -------

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стр.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стран.	Строка.	Напечатано.	Должно быть.
4	4 св.	$(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$	$\mathcal{F}(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}) = C$
7	2 сн.	$\frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n} + \frac{n}{1} \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^{n-2} \partial y} y' + \dots$	$\frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n} + \frac{n}{1} \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^{n-1} \partial y} y' + \dots$
10	1 св.	$x, y, y, \dots y^{(n)}$	$x, y, y', \dots y^{(n-1)}$
13	11 сн.	$-y = xy$	$y = xy'$
15	9 св.	начальная	начальныя
19	6 сн.	$\lg x = \lg y = \lg z$	$\lg x + \lg y = \lg z$
28	7 сн.	$y = \frac{A}{a y_1}$	$y = \frac{A}{a} y_1$
34	8 сн.	$\frac{1}{\frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}} - \frac{4x}{4c - x^4}$	$\frac{1}{-\frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}} = \frac{4x}{4c - x^4}$
35	1 сн.		Вся строка ("умноженіи") должна быть выброшена.
37	1 сн.	$\frac{dy_1}{dx} = Py_1 + Qy_1 + R$	$\frac{dy_1}{dx} = Py_1^2 + Qy_1 + R$
39	1 сн.		Вся строка выбрасывается.
43	2 сн.	$du - Mdx + Ndy$	$du = Mdx + Ndy$
58	8 сн.	$\Phi_i(x, u, C,) = 0$	$\Phi_i(x, y, C) = 0$

Стран.	Строка	Напечатано.	Должно быть.
61	7 сн.	$dx- \frac{dy}{p}$	$dx= \frac{dy}{p}$
62	8 сн.	$dy=\varphi'(t)dt\ ;dx=\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}dt$	$dy=\varphi'(t)dt;dx=\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}$
63	8 св.		Въ началѣ строки слѣдуетъ вставить: "2)"
76	3 св.	функціямъ у,....	функціямъ $y, z, u, \dots$
""	" "	считать у ,	считать $y_0, z_0, u_0, \dots$
""	5 св.	приближеніе у,....	приближеніе $y_1, z_1, u_1, \dots$
"""	7 и 8 св.		$\frac{dy_1}{dx}=f_1(x, y_0, \dots u_0);$ $\frac{dz_1}{dx}=f_2(x, y_0, \dots u_0)\dots$ $\frac{du_1}{dx}=f_n(x, y_0, \dots u_0)$ (4)
""	9 св.	Функціи у,....	Функціи $y, z_1, \dots$
""	11 св.	при $x-x,\ y-y_0,\ z-I, \dots u_1=u_0$	при $x=x_0, y_1=y_0, z_1=z_0, \dots u_1=u_0$
""	16 св.	$z_1=z_0\ =$	$z_1-z_0=$
77	7 св.	приближенія: у,.....	приближенія: $y_m; z_m, \dots$ ....
80	11 св.	$/\,y_2-y_1/<M\theta\Big/\int_{x_0}^{x}(x-x_0)dx$	$(y_2-y_1)<M\theta\Big|\int_{x_0}^{x}(x-x_0)dx\Big|$
81	4 св.	$(y_3-y_2)<M\theta^2\Big/\int_{x_0}^{x}\frac{(x-x_0)^2}{1.2}dx$	$(y_3-y_2)<M\theta^2\Big|\int_{x_0}^{x}\frac{(x-x_0)^2}{1.2}dx\Big|$

Стран.	Строка.	Напечатано.	Должно быть:
85	6 сн.	при чемъ $x=x_0$	при чемъ для $x = x_0$
86	9 св.	ссотвѣтствовать	соотвѣтственно.
89	8 св.	до $x_0 + a; u$	до $x_0 + a$ и
" "	9 св.	$\vert f(x,y) \vert < \mathcal{M}$ мы	$\vert f(x,y) \vert < \mathcal{M}$, мы
96	8 св.	$y = + \mathcal{R}$	$y = \pm \mathcal{R}$
" "	7 и 8 сн.	паря	пару
97	4 св.	2(2)	(2)
104	3 сн.	$m - tg\,(\tau - \tau')$	$m = tg(\tau - \tau')$
105	10 св.	получитъ	получить
" "	6 сн.	$tg - = \infty$	$tg\,\theta = \infty$
107	12 св.	$\frac{dy}{dx}(1+m\frac{dy}{dx}) = \frac{y}{x} - m$	$\frac{dy}{dx}(1+m\frac{y}{x}) = \frac{y}{x} - m$
115	2 св.	$x = x$	$x = x_0$
" "	9 сн.	$(\kappa t)^{n-3} dt$	$(x - t)^{n-3} dt$
118	5 св.	$\mathcal{F}(y^{(n)}\ y^{(n-2)}) = ($	$\mathcal{F}(y^{(n)},\ y^{(n-2)}) = 0$
123	4 сн.	arycoshyo $\frac{\kappa y}{c}$	argcoshyo $\frac{\kappa y}{c}$
124	3 сн.	$\mathcal{F}(y^{(n)}, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots y^{\kappa}, x)$	$\mathcal{F}(y^{(n)}, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots y^{(\kappa)} x)$
129	7 сн.	$\frac{y}{x} - u$	$\frac{y}{x} = u$
132	9 св.	$= \frac{dy}{dx} \psi'[\varphi(x')$	$= \frac{dy}{dx'} \cdot \psi'[\varphi(x')]$

Стран.	Строка.	Напечатано.	Должно быть.
135	14 сн.	на 1	на - 1
138	4 св.	$W(y_1, y_2, y_3, \dots y_n) \neq 0$	$W(y_1, y_2, y_3, \dots y_n) = 0$
139	10 сн.	$\dots + u'_{n-1} y_{n-1} = 0$	$\dots + u'_{n-1} y_{n-1} = 0$
" "	1 сн.	$= u_{n-1} = 0$	$= u'_{n-1} = 0$
145	внизу	$p_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1, y_2, \dots y_n \\ \dots\dots\dots \\ y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2, \dots y_n)}$	$p_1 = \dfrac{-\begin{vmatrix} y_1, y_2, \dots y_n \\ \dots\dots\dots \\ y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2, \dots y_n)}$
151	11 св.	$\dots + \alpha_m u_m = 0$	$\dots + \alpha_{m-1} u_{m-1} = 0$
158	8 сн.	по инерціи	по интеграціи
161	3 св.	$\dots + y_1^{(n)} +$	$\dots + y_1^{(n)}) +$
" "	4 св.	$\dots + y_2^{(n)} +$	$\dots + y_2^{(n)}) +$
169	15 св.	$A\{e^{(\sigma+k)+x}\}$	$A\{e^{(\sigma+k)x}\}$
177	1 св.	$z = g_{m+u}(x) +$	$z = g_{m+\mu}(x) +$
182	10 сн.	$A\{y\} = e^{\alpha ix} x^m \cdot \frac{1}{2} g_\mu(x)$	$A\{y\} = e^{\alpha ix} \frac{1}{2} g_\mu(x)$
" "	9 сн.	$A\{y\} = e^{-\alpha ix} x^m \frac{1}{2} g_\mu(x)$	$A\{y\} = e^{-\alpha ix} \frac{1}{2} g_\mu(x)$
" "	7 сн.	$A\{y\} = \frac{1}{2i} e^{\alpha ix} x^m g_\mu(x)$	$A\{y\} = \frac{1}{2i} e^{\alpha ix} g_\mu(x)$
" "	6 сн.	$A\{y\} = -\frac{1}{2i} e^{-\alpha ix} x^m g_\mu(x)$	$A\{y\} = -\frac{1}{2i} e^{-\alpha ix} g_\mu(x)$
184	8 сн.	$= e^{t} \frac{df(e^t)}{dt}$	$= e^{-t} \frac{df(e^t)}{dt}$
" "	4 сн.	$y'' = {}^{-t} \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right)$	$y'' = e^{-t} \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right)$

Стран.	Строка	Напечатано.	Должно быть.
186	10 сн.	Коши	Эйлера
" "	1 сн.	---------	Выбросить всю строку ("Эйлера:")
187	11 св.	Коши	Эйлера
" "	1 сн.	---------	Выбросить всю строку ("Эйлера")
188	1 сн.	$\lim\limits_{\sigma=0}$	$\lim\limits_{\delta=0}$
190	11 сн.	$\mu'' z + 2\mu' z' + z\mu +$	$\mu'' z + 2\mu' z' + z''\mu +$
" "	15 св.	$2\mu + p_1\mu = 0$	$2\mu' + p_1\mu = 0$
194	10 сн.	$y_1, n-1$	y_1, n_1-1
228	10 св.	$\frac{\partial x_2}{x_2}$	$\frac{d x_2}{x_2}$
