

Проф. Д. Егоровъ.

Интегрирование

дифференциальныхъ

уравнений.

Издание 3-е.

Студентской Межфакультетской Издательской Комисіи

подъ редакціей проф. Егорова.



МОСКВА.

Т-во „Печатня С. П. Яковлева“, Петровка, Салтыковский пер., д. Т-ва № 9.
1918 г.

В В Е Д Е Н И Е.

Определение производной отъ данной функции составляетъ прямую задачу исчисления безконечно-малыхъ величинъ. Общий вопросъ обратной задачи исчисления безконечно-малыхъ состоитъ въ томъ, чтобы опредѣлить одну или нѣсколько функций одного или нѣсколькихъ переменныхъ изъ данныхъ соотношеній между независимыми переменными, функциями и ихъ производными. Пусть имѣемъ рядъ независимыхъ переменныхъ:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$$

и рядъ функций этихъ переменныхъ:

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_m.$$

Соотношенія, о которыхъ идетъ рѣчь, имѣютъ видъ:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y_m}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p y_m}{\partial x_n^p}) = 0$$

и называются дифференціальными уравненіями; порядокъ высшей производной называется порядкомъ уравненія.

Если $n = 1$, т.е. независимое переменное одно, то уравненія называются обыкновенными, если же $n > 1$, то — уравненіями съ частными производными.

Мы начнемъ съ того случая, когда имѣется одна функція ($m=1$) и одно независимое переменное ($n=1$); тогда функція y опредѣляется однимъ дифференціальнымъ уравненіемъ:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = C;$$

если въ уравненіе входятъ производныя до порядка p , то уравненіе называется уравненіемъ p -го порядка.

Опредѣленіе функцій изъ дифф-ныхъ ур-ій или интерпроеваніе дифференціальныхъ ур-ій можно понимать различно. Самая узкая постановка задачи слѣдующая: выразить искомую функцію черезъ элементарныя функціи. Въ этомъ смыслѣ, вообще говоря, задача конечно не разрѣшима, такъ какъ даже для самаго простого дифф.

ур-ія $\frac{dy}{dx} = f(x)$

имѣемъ $y = \int f(x) dx + C,$

и y не всегда выражается въ элементарныхъ функціяхъ, хотя бы это имѣло мѣсто для $f(x)$. Во 2-хъ, нахожденіе функціи, удовлетворяющей дифференціальному уравненію, можно понимать въ смыслѣ указанія приема, котрымъ по каждому значенію переменнаго находится значеніе функціи. Такие приемы могутъ быть весьма разнообразны. Напримѣръ, задача въ этомъ смыслѣ будетъ разрѣшена, коль скоро будетъ найдено разложеніе функціи въ сходящійся рядъ, болѣе или менѣе простого типа. Взявъ известное число членовъ, для каждаго значенія переменнаго, въ предѣлахъ сходимости ряда, получимъ съ любымъ приближеніемъ значеніе функціи.

Третье толкованіе опредѣленія функціи изъ дифференціаль-

наго уравненія состоитъ въ томъ, что мы считаемъ задачу разрѣ-
шенной, какъ только намъ удастся привести ее къ другимъ, болѣе
простымъ задачамъ, а именно къ вычисленію интеграловъ данныхъ
функцій, или квадратурамъ. Такимъ образомъ возникаетъ вопросъ
о дифференціальныхъ уравненіяхъ, приводимыхъ къ квадратурамъ.

§ 1. ОБЫКНОВЕННЫЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ; ОБЩЕЕ,
ЧАСТНОЕ, ОСОВОЕ РѢШЕНІЕ И ИНТЕГРАЛЬ. ИСКЛЮЧЕНІЕ
ПОСТОЯННЫХЪ.

Уравненіе n -го порядка имѣетъ видъ:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

гдѣ $y', y'', \dots, y^{(n)}$ - производныя различныхъ порядковъ. При изу-
ченіи дифференціальныхъ уравненій возникаетъ прежде всего во-
просъ относительно функціи F , входящей въ 1-ю часть. Во всемъ
дальнѣйшемъ будемъ считать ее непрерывной и допускающей произ-
водныя по всѣмъ аргументамъ. Если мы поставили задачей опредѣ-
леніе y въ элементарныхъ функціяхъ, то въ этомъ случаѣ на
функцію F естественно придется наложить такое же ограниченіе, а
именно: $F(x, y, \dots)$ должно выражаться въ элементарныхъ функці-
яхъ; это послѣднее ограниченіе можетъ быть замѣнено болѣе тѣс-
нымъ предположеніемъ, что $F(x, \dots)$ функція алгебраическая отъ
 x, y, y', y'', \dots а слѣдовательно можно предположить, что
 $F(x, \dots)$ есть цѣлый раціональный многочленъ. Этого упро-
щенія можно достигнуть дифференцированіями и исключеніемъ. По-
кажемъ это на простомъ примѣрѣ. Пусть дано уравненіе:

$$e^y + xy' - 2y = 0,$$

гдѣ y' - первая производная. Дифференціальное уравненіе 1-го порядка дифференцируемъ:

$$e^{2x} y'' + x y'' + y' - 2y' = 0.$$

Изъ двухъ уравненій исключаемъ e^{2x} ; умножая 1-ое уравненіе на y'' и вычитая первое изъ второго, получимъ:

$$x(1 - y') y'' + 2y y'' - y' = 0.$$

Получили уравненіе алгебраическое относительно всѣхъ аргументовъ, но уже не 1-го порядка, а высшаго - 2-го. Такимъ образомъ уничтоженіе трансцендентностей произошло на счетъ увеличенія порядка дифференціального уравненія. Обыкновенно ограничиваются требованіемъ алгебраичности только относительно y и его производныхъ; напримѣръ, рассматриваютъ уравненіе хотя бы такого вида:

$$y' - \cos x \cdot y' + 2e^x \cdot y = 0.$$

При болѣе общей постановкѣ задачи ограничиваются предположеніями, упомянутыми въ самомъ началѣ.

Всякая функція y , удовлетворяющая дифференціальному уравненію, называется рѣшеніемъ дифференціального уравненія, процессъ нахожденія y называется интегрированіемъ дифференціального уравненія. Вмѣсто того, чтобы искать $y = f(x)$, мы можемъ искать соотношеніе вида $\varphi(x, y) = 0$, т.е. опредѣлить y , какъ неявную функцію x . Такого рода соотношеніе называется интеграломъ дифференціального уравненія. Равенство

$$y = f(x)$$

тоже есть интеграль, но сама функція $f(x)$ есть рѣшеніе дифференціального уравненія. Разсмотримъ простѣйшій случай

ния C , которыхъ всего n . Всего уравненій $(n + 1)$. Исключая отсюда всё постоянныя величины C_i , получимъ одно соотношение такого вида:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2)$$

т.е. дифференціальное уравненіе. Если изъ равенства (1) определимъ y , какъ функцію x , т.е.

$$y = f(x, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n) \quad (3)$$

и вставимъ въ дифференціальное уравненіе (2), то получимъ, очевидно, тождество; слѣдовательно

$$y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

есть рѣшеніе дифференціального уравненія. Оно содержитъ произвольныхъ постоянныхъ, которымъ можемъ давать любыя значенія; рѣшеніе (3) называется общимъ рѣшеніемъ дифференціального уравненія (2), а соотношение (1) — общимъ интеграломъ; если постояннымъ даемъ частныя значенія, то получаемъ частныя рѣшенія.

Итакъ, частными рѣшеніями наз. рѣшенія, получаемыя изъ общего при частныхъ значеніяхъ постоянныхъ. Частнымъ интеграломъ называется интегралъ, получаемый изъ общего при частныхъ значеніяхъ произвольныхъ постоянныхъ. Интегралъ

$$\psi(x, y) = 0$$

называется особымъ, если онъ не получается изъ общего ни при какихъ частныхъ значеніяхъ постоянныхъ; аналогично рѣшеніе

$$y = \varphi(x)$$

называется особымъ, если не получается изъ общего ни при какихъ частныхъ значеніяхъ постоянныхъ.

П Р И М Ъ Р Ъ :

$$y = xy' + y'^2.$$

Уравнению этому можно удовлетворить, положивъ

$$y = Cx + C^2,$$

гдѣ C - произвольное постоянное. Дѣйствительно, $y' = C$;

подставляя, получаемъ:

$$Cx + C^2 = Cx + C^2,$$

т.е. тождество. Итакъ

$$\underline{y = Cx + C^2}$$

есть рѣшеніе даннаго дифференціального уравненія. Оно есть общее, такъ какъ содержитъ одно ($n = 1$) произвольное постоянное. Можно было бы доказать, что оно дѣйствительно общее, т.е. изъ него случаются всѣ частныя рѣшенія. Положимъ $C = 0$; тогда получаемъ частное рѣшеніе $y = 0$. Положимъ $C = 1$, получаемъ $y = x + 1$ - тоже частное рѣшеніе. Легко видѣть, что уравненіе допускаетъ еще одно рѣшеніе

$$\underline{y = -\frac{x^2}{4}}$$

Дѣйствительно:

$$y' = -\frac{x}{2}; \quad -\frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}$$

Получается тождество. Легко видѣть, что это новое рѣшеніе не получится изъ общаго ни при какомъ частномъ значеніи постоянного C , такъ какъ общее линейно относительно x , а полученное - 2-ой степени; слѣдовательно это рѣшеніе - особое -

Мы видѣли, что исключеніемъ n постоянныхъ изъ соотношенія (1) получаемъ дифференціальное уравненіе n -го порядка. Самое исключеніе можно вести такъ: возьмемъ первыя n изъ уравненій системы (А), т.е. систему (В); изъ нея опре -

дѣлимъ C_1, C_2, \dots, C_n въ функціи $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ и вста-
вимъ въ последнее уравненіе системы (А); тогда и придемъ
къ уравненію (2). Можетъ однако случиться, что всѣ пo-
стоянныя C_1, C_2, \dots, C_n исключаются изъ меньшаго числа
уравненій, такъ что ихъ невозможно опредѣлить изъ системы
(В). Если всѣ, они исключаются изъ системы (В), то въ ре-
зультатѣ получимъ уравненіе $(n-1)$ -го порядка; если же
они исключаются изъ первыхъ $(n-1), (n-2), \dots$ урав-
неній системы (А), то соответственно получаемъ дифферен-
ціальное уравненіе $(n-2)$ -го, $(n-3)$ -го и т.д. поряд-
ковъ . Во всѣхъ этихъ случаяхъ, говорятъ, что n постоянныхъ
въ соотношеніи (1) з а в и с и м м ; они называются н е -
з а в и с и м ы м и, если въ результатѣ исключенія полу-
чаемъ дифференціальное уравненіе n -го порядка, т.е. если
 C_1, C_2, \dots, C_n опредѣляются изъ системы (В).

Соответственно съ этимъ интеграль дифференціального
уравненія n -го порядка называется о б щ и м ъ, если онъ
содержитъ н е з а в и с и м ы х ъ произвольныхъ посто-
янныхъ; другими словами, соотношеніе вида (1) называется
общимъ интеграломъ уравненія (2), если это последнее по-
лучается исключеніемъ постоянныхъ изъ системы (А).

П Р И М ъ Р Ы.

1) Разсмотримъ на плоскости кривыя 2-го порядка, отне-
сенныя къ Декартовымъ координатамъ. Въ уравненіе

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0 \quad (4)$$

входить 5 независимых произвольных постоянных, которые исключим дифференцированием. Для этого разрешаем уравнение относительно y , получаемъ

$$y = \alpha x + \beta \pm \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} \quad (2)$$

гдѣ α, β, A, B, C составлены изъ коэффициентовъ даннаго уравненія - и слѣдовательно тоже произвольныя постоянныя. Дифференцируемъ:

$$y' = \alpha \pm \frac{Ax + B}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}; \quad y'' = \frac{A}{(Ax^2 + 2Bx + C)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(Ax + B)^2}{(Ax^2 + 2Bx + C)^{\frac{5}{2}}} = \frac{AC - B^2}{(Ax^2 + 2Bx + C)^{\frac{5}{2}}}$$

Возведемъ y'' въ степень $(-\frac{2}{5})$:

$$(y'')^{-\frac{2}{5}} = \frac{Ax^2 + 2Bx + C}{(AC - B^2)^{\frac{2}{5}}}$$

Продифференцировавъ 3 раза, мы получимъ въ результатѣ 0:

$$\frac{d^3}{dx^3} [(y'')^{-\frac{2}{5}}] = 0.$$

Выполняя выкладки, получаемъ дифференціальное уравненіе

$$40y'''^3 - 45y''y''''y'''' + 9y''^2y''''^2 = 0 \quad (5)$$

Это уравненіе 5-го порядка; общій интегралъ его есть уравненіе (1) коническаго сѣченія. Если бы изъ совокупности этихъ кривыхъ мы выдѣлили только параболы, то для нихъ оказалось бы $A = 0$, и тогда имѣли бы

$$\frac{d^2}{dx^2} [(y'')^{-\frac{2}{5}}] = 0$$

и слѣдовательно дифференціальное уравненіе параболъ имѣеть видъ:

$$5y'''^2 - 3y''y'''' = 0 \quad (6)$$

Дифференциальное уравнение это 4-го порядка. Все решения, найденные для (6) дифференциального уравнения, суть также и решения (5).

$$2) \quad y = C_1 e^{x+C_2} \quad (7)$$

Имеем здесь 2 произвольных постоянных. Дифференцируем уравнение 2 раза:

$$y' = C_1 e^{x+C_2} \quad (8)$$

$$y'' = C_1 e^{x+C_2} \quad (9)$$

Общий прием исключения состоит в том, чтобы определить C_1 и C_2 из (7 и 8) уравнений и вставить их в уравнение (9), но здесь это определение невозможно, и C_1 , C_2 исключаются из уравнений (7) и (8): для 7-ого уравнение на 8-е почленно, получаем

$$\frac{y}{y'} = 1 \quad \text{или} \quad y = y' \quad (10)$$

Получили дифференциальное уравнение 1-го порядка, а не 2-го, как мы должны были ожидать. Отсюда заключаем, что постоянные C_1 и C_2 в уравнении (7) - зависимы. Не трудно заметить, что они входят в одной комбинации:

$$y = C_1 e^{C_2} \cdot e^x ;$$

полагая

$$C_1 e^{C_2} = C,$$

имеем

$$y = C e^x.$$

Следовательно, мы имеем только одно существенное постоянное C и общее решение уравнения (10) $y = C e^x$

Разберем более сложный пример:

3) $y^2 = 2axy + bx^2$.

a и b - два произвольных постоянных и, как видно, они не входят въ какой-нибудь одной комбинаціи. Дифференцируемъ два раза:

$$\begin{aligned} y y' &= ax y' + ay + bx \\ y y'' + y'^2 &= ax y'' + 2ay' + b . \end{aligned}$$

Слѣдовало бы изъ первыхъ двухъ равенствъ опредѣлить a и b и вставить въ последнее. Но изъ первыхъ двухъ равенствъ a и b исключаются и получается уравненіе свободное отъ a и b .

Дѣйствительно, имѣемъ изъ перваго уравненія:

$$y (y - ax) = x (ay + bx) ,$$

изъ втораго уравненія

$$y' (y - ax) = ay + bx .$$

Дѣлимъ 1-ое на второе, получаемъ:

$$\frac{y}{y'} = x , \quad y = xy' .$$

Получили дифференціальное уравненіе 1-го порядка. Исключенныхъ постоянныхъ 2. Слѣдовательно, эти постоянныя зависимы.

Данное уравненіе можно представить еще въ видѣ:

$$\frac{y^2}{x^2} - 2a \frac{y}{x} - b = 0 .$$

Отсюда:

$$\frac{y}{x} = k_1 \text{ или } \frac{y}{x} = k_2 , \text{ гдѣ } k_1 = a + \sqrt{a^2 + b} , \quad k_2 = a - \sqrt{a^2 + b}$$

Иначе:

$$y = k_1 x , \text{ или } y = k_2 x .$$

Дифференцируя по x , находимъ

$$y' = k_1 \text{ или } y' = k_2 .$$

Слѣдовательно, въ томъ и другомъ предположеніи $y = xu'$ будетъ
искомое дифференціальное уравненіе, и мы видимъ, что a и b при-
ходится исключать только въ одной комбинаціи k_1 или k_2 .

Если намъ дано дифференціальное уравненіе:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

и мы нашли общій интеграль

$$\phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

то мы вполнѣ опредѣлимъ постоянныя, если намъ даны для какого-
нибудь опредѣленнаго численнаго значенія $x = x_0$, значенія y
и производныхъ до $(n - 1)$ -го порядка:

$$y = y_0, \quad y' = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, наряду съ соотношеніемъ $\phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$
разсмотримъ тѣ, которыя получаютъ дифференцірованіемъ по x :

$$\phi = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot y' = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dots = 0, \dots$$

т.е. систему (В), и въ этой системѣ замѣнимъ x черезъ x_0 , а
слѣдовательно положимъ

$$y = y_0, \quad y' = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}.$$

Получимъ n уравненій, изъ которыхъ найдемъ C_1, C_2, \dots, C_n ,

т.е. опредѣленныя численныя значенія постоянныхъ. Замѣнивъ ихъ
въ общемъ интегралѣ, мы найдемъ опредѣляемый интеграль. Итакъ,
рѣшеніе дифференціального уравненія опредѣляется начальными
условіями:

$$\text{при } x = x_0 : \quad y = y_0, \quad y' = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}.$$

П Р И М ъ Р Ъ:

$$y'' = y.$$

Этому дифференциальному уравнению удовлетворяет

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Действительно, дифференцируя, имеем:

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$$

$$y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

т.е. $y'' = y$. Следовательно,

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

есть общее решение. Пусть теперь при $x = 0$: $y = 2$, а $y' = 0$.

Это данные начальная ^{или} условия; подставляя $x = 0$, $y = 2$, $y' = 0$,

найдем:

$$2 = C_1 + C_2$$

$$0 = C_1 - C_2$$

Отсюда

$$C_1 = 1 \text{ и } C_2 = 1$$

Наше частное решение будет

$$y = e^x + e^{-x}$$

§ 2. УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА; РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ.

Уравнение 1-го порядка содержит независимое переменное, функцию и первую ее производную и имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

На основании сказанного раньше общий интеграл такого дифференциального уравнения будет содержать только одно произвольное постоянное и имеет вид

$$\phi(x, y, C) = 0 \quad (2)$$

Из общего интеграла найдутся при определенных значениях по-

стояннаго C всѣ частные интегралы. Ясно, что разъ дѣло идетъ объ опредѣленіи облаго интеграла, мы имѣемъ право умножать и дѣлать данное уравненіе (1) на любую функцію x и y , такъ какъ при этомъ могутъ прибрѣтаться или теряться только рѣшенія, не содержащія произвольной постоянной и получаема приравниваніемъ нулю вышеупомянутой функціи x и y . Точно также ясно, что мы имѣемъ право въ данное уравненіе ввести новыя переменныя и интегрировать преобразованное уравненіе. Перехода въ полученномъ интегралѣ отъ новыхъ переменныхъ къ старымъ, имѣемъ интегралъ даннаго уравненія.

Если будемъ толковать x , y какъ Декартови координаты, то уравненіе

$$\phi(x, y, C) = 0$$

опредѣлитъ намъ семе́йство кривыхъ съ однимъ произвольнымъ параметромъ. Это семе́йство кривыхъ мы назовемъ интегральными кривыми. Производная y' есть tg угла наклоненія къ оси x касательной въ точкѣ (x, y) . По этому дифференціальное уравненіе представляетъ намъ соотношеніе между координатами точки и tg -сомъ угла наклоненія касательной въ данной точкѣ къ оси x . Задача интеграціи сводится къ опредѣленію кривыхъ, для которыхъ во всѣхъ точкахъ имѣеть мѣсто это соотношеніе.

Начнемъ съ простѣйшаго случая, когда дифференціальное уравненіе алгебраическое относительно y' и притомъ 1-ой степени. Въ такомъ случаѣ его можно представить въ видѣ:

$$N \frac{dy}{dx} + M = 0 \quad (3)$$

гдѣ M и N суть функціи только x и y . Это уравненіе можно представить еще въ такомъ видѣ, разрѣшивъ его относительно производной $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{M}{N} = f(x, y) \quad (3')$$

Подобное разрѣшеніе можно произвести и для общаго уравненія(1), которое опредѣляетъ y' какъ функцію x, y ; но на практикѣ это разрѣшеніе вообще не выполнимо въ элементарныхъ функціяхъ, даже если лѣвая часть уравненія (1) выражается въ элементарныхъ функціяхъ. Умножая уравненіе (3) на dx , получимъ новый видъ :

$$Ndy + Mdx = 0 \quad (4)$$

гдѣ M и N попережнему функціи переменныхъ x и y .

Уравненіе, въ которомъ каждый членъ содержитъ только одно переменное, называется уравненіемъ съ раздѣленными переменными; тогда M - функція только x , а N - функція только y , и для ясности можно принять обозначенія

$$M = X; \quad N = Y,$$

и получимъ:

$$Xdx + Ydy = 0 \quad (5)$$

Интегрированіе такого уравненія сводится къ квадратурамъ

Беремъ интегралъ отъ каждаго члена, и сумму приравняемъ C :

$$\int_{x_0}^x Xdx + \int_{y_0}^y Ydy = C \quad (6)$$

гдѣ C - произвольное постоянное, а x_0, y_0 , - какія угодно постоянныя значенія. Соотношеніе (6) есть общій интегралъ. Дѣйствительно, дифференцируя его, исключаемъ C и получимъ опять

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦ. УРАВНЕНІЯ.

Листъ 2-ой.

къ дифференціальному уравненію (5).

П Р И М Ъ Р Ъ:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

Дифференціальное уравненіе съ раздѣленными переменными. Двумя квадратурами находимъ:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = C$$

или

$$\arcsin x + \arcsin y = C.$$

Къ уравненію вида (5) приводится и уравненіе вида

$$\underline{X_1 Y_1 dx + X_2 Y_2 dy = 0.}$$

гдѣ

$$M = X_1 Y_1 \text{ и } N = X_2 Y_2.$$

Производимъ раздѣленіе переменныхъ: раздѣляя все уравненіе на $X_2 Y_1$, найдемъ:

$$\frac{X_1}{X_2} dx + \frac{Y_2}{Y_1} dy = 0.$$

Получаемъ уравненіе съ раздѣленными переменными. Выполняя квадратуры, получимъ общій интеграль.

П Р И М Ъ Р Ъ:

$$e^{-\frac{1}{x}} y^3 dx + x^2 y^2 dy = 0.$$

Раздѣляя уравненіе на $x^2 y^3$, получаемъ:

$$e^{-\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{y} dy = 0.$$

Переменные раздѣлены. Интегрируя, имѣемъ:

$$\int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{x}} dx}{x^2} + \int_1^y \frac{dy}{y} = C; \quad + e^{-\frac{1}{x}} + \lg y = C$$

Разсмотримъ еще примѣръ, гдѣ общій интеграль получает-
ся въ двухъ формахъ:

$$2) \quad \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0;$$

переменные раздѣлены. Интегрируемъ

$$\int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^y \frac{dy}{y} = C,$$

или

$$\lg x + \lg y = C \quad (A)$$

Поступаемъ иначе. Умножаемъ дифференціальное уравне-
нiе на xy , получаемъ

$$ydx + xdy = 0.$$

или

$$d(xy) = 0.$$

Слѣдовательно

$$xy = C'. \quad (B)$$

Общiе интегралы (A) и (B) очевидно тождественны между собою. Оп-
редѣлимъ C и C' условiемъ при $x = 1$, $y = z$ (z - постоянный па-
раметръ). Уравненiя (A) и (B) при $x = 1$ даютъ $\lg z = C$, $z = C'$.

Итакъ, имѣемъ:

$$\lg x + \lg y = \lg z,$$
$$xy = z$$

и слѣдовательно

$$\lg(xy) = \lg x + \lg y.$$

Такимъ образомъ мы доказали извѣстное свойство логарифма
произведенiя.

§ 3. ОДНОРОДНЫЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ; УРАВНЕНІЯ,
ПРИВОДИМЫЯ КЪ ОДНОРОДНЫМЪ.

Однороднымъ дифференціальнымъ уравненіемъ называется уравненіе вида

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right), \quad (1)$$

гдѣ F есть функція отношенія переменныхъ. Легко видѣть, что, если M и N — однородныя функціи (одного измѣренія) переменныхъ x и y , то:

$$\underline{Ndy + Mdx = 0} \quad (2)$$

будетъ однороднымъ дифференціальнымъ уравненіемъ. Дѣйстви- тельно, обозначимъ черезъ n измѣреніе однородности функцій M и N , тогда ихъ можно представить въ такомъ видѣ:

$$M = x^n f_1\left(\frac{y}{x}\right); \quad N = x^n f_2\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3)$$

Внеся эти значенія въ соотношеніе (2) и сокращая на x^n , получаемъ:

$$f_1\left(\frac{y}{x}\right) dx + f_2\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{f_1}{f_2} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Отношеніе переменныхъ $\frac{y}{x}$ можно замѣнить новымъ переменнымъ:

$$\frac{y}{x} = u; \quad \text{отсюда} \quad \underline{y = ux};$$

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} = f(u), \quad x \frac{du}{dx} = f(u) - u.$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}; \quad \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

Переменные разделены; выполняя квадратуры, находим общий ин-

теграль: $\int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$; $\int \frac{du}{f(u)-u} = \lg x + \lg C$.

Внося в данное уравнение вместо u его значение, получим об-
щий интеграль данного уравнения:

$$Cx = e^{\int \frac{du}{f(u)-u}} = \varphi(u) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (3)$$

Следовательно, общий интеграль имѣеть видъ:

$$\underline{Cx = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Давая C различные значения, получим различные частные инте-
гралы. Не трудно видѣть, что семейство интегральныхъ кривыхъ
въ данномъ случаѣ состоитъ изъ подобныхъ и подобно распо-
женныхъ кривыхъ. Дѣйствительно, умножая x и y на одно и то
же постоянное, мы только мѣняемъ C въ общемъ интегралѣ.

П Р И М ъ Р Ъ:

$$(x^2 - y^2) dx + yx dy = 0.$$

Обозначая

$$\frac{y}{x} = u, \quad \text{имѣемъ: } y = xu.$$

Дифференцируемъ:

$$dy = x du + u dx.$$

Вставляя значение dy въ данное уравнение, имѣемъ:

$$x^2(1 - u^2) dx + x^2u(x du + u dx) = 0;$$

раздѣляя на x^2 и раскрывая скобки:

$$dx + x u du = 0;$$

въ полученномъ уравненіи переменныя раздѣляются:

$$\frac{dx}{x} + u du = 0.$$

Интегрируемъ

$$2 \int dx + u^2 = C,$$

или

$$x^2 e^{u^2} = C'.$$

Таковъ общій интегралъ преобразованнаго уравненія. Подставляя значеніе u , находимъ:

$$x^2 e^{\left(\frac{y}{x}\right)^2} = C'.$$

Таковъ общій интегралъ даннаго уравненія.

Переходимъ теперь къ новому типу дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right). \quad (4)$$

Коэффициенты a, b, c, a', b', c' - постоянныя числа. Если бы мы предположили

$$c = c' = 0,$$

то пришли бы къ типу однородныхъ уравненій, рассмотрѣнному выше; дѣйствительно, дробь

$$\frac{ax + by}{a'x + b'y} = \frac{a + b\left(\frac{y}{x}\right)}{a' + b'\left(\frac{y}{x}\right)}$$

есть функція отношенія $\frac{y}{x}$, слѣдовательно и лѣвая часть есть функція этого отношенія; поэтому такое уравненіе будетъ однородно.

Постараемся теперь данный общій случай свести къ частному случаю предыдущаго типа. Поступаемъ такимъ образомъ: по-

лагаемъ:

$$y = \eta + k; \quad x = \xi + h,$$

гдѣ h и k - постоянныя, y и x - функции η и ξ и обратно ξ, η - функции x, y ; внесемъ вмѣсто x и y новыя переменныя и получимъ новое дифференціальное уравненіе въ переменныхъ η и ξ . Ясно, что

$$dy = d\eta; \quad dx = d\xi; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}$$

Величинами h и k воспользуемся такъ, чтобы помощью ихъ привести данное уравненіе къ однородному:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{f(a\xi + b\eta + (ah + bk + c))}{f(a'\xi + b'\eta + (a'h + b'k + c'))}.$$

Постоянные члены въ числитель и знаменатель

$$ah + bk + c \quad \text{и} \quad a'h + b'k + c'$$

приравняемъ нулю, тогда получимъ уравненіе однородное, какъ сказано выше. Изъ равенствъ

$$ah + bk + c = 0, \quad a'h + b'k + c' = 0 \quad (5)$$

опредѣляемъ h и k , и найденныя значенія вставимъ въ выраженія y и x черезъ η и ξ . Проинтегрировавъ полученное послѣ замѣны уравненіе какъ однородное, мы найдемъ общій интегралъ измененнаго уравненія. Произведя обратную замѣну, найдемъ общій интегралъ даннаго уравненія.

Однако такой методъ не всегда примѣнимъ, такъ какъ не всегда можно разрѣшить уравненія (5) относительно h и k . Можетъ именно случиться, что детерминантъ системы, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a' & b' \\ a & b \end{vmatrix}$$

равенъ 0, и тогда мы h и k не можемъ найти. Если :

$$a'b - ab' = 0.$$

то отсюда

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b};$$

обозначивъ это отношеніе черезъ ρ , имѣемъ:

$$a' = a\rho; \quad b' = b\rho$$

и подставимъ въ данное уравненіе:

$$\frac{dy}{dx} = f \left\{ \frac{ax + by + c}{\rho(ax + by) + c'} \right\}$$

Полагая теперь

$$ax + by = z,$$

получимъ

$$\frac{dy}{dx} = f \left\{ \frac{ax + by + c}{\rho(ax + by) + c'} \right\} = f \left\{ \frac{z + c}{\rho z + c'} \right\}.$$

Правая часть полученнаго уравненія есть функція только z , а само z есть функція x и y . Если въ данномъ уравненіи вмѣсто переменныхъ x и y будемъ разсматривать переменныя x и z , то

$$y = \frac{z - ax}{b}$$

и мы имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \cdot \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = f \left(\frac{z + c}{\rho z + c'} \right).$$

Разрѣшимъ полученное уравненіе относительно $\frac{dz}{dx}$; имѣемъ очевидно:

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(z),$$

гдѣ

$$\varphi(z) = a + b f \left(\frac{z + c}{\rho z + c'} \right).$$

Переменныя раздѣляются:

$$\frac{dz}{\varphi(z)} = dx$$

и имѣемъ:

$$\int \frac{dx}{f(x)} = x + C.$$

Вставляя вмѣсто x его значеніе, получаемъ обшій интегралъ даннаго уравненія. Итакъ, уравненіе проинтегрировано и въ случаѣ

$$a'b - ab' = 0.$$

Однимъ изъ наиболѣе часто встрѣчающихся типовъ уравненій являются уравненія вида

$$M dx + N dy = 0,$$

гдѣ M и N суть линейные многочлены:

$$M = ax + by + c$$

$$N = a'x + b'y + c',$$

т.е.

$$(ax + by + c) dx + (a'x + b'y + c') dy = 0.$$

Это уравненіе является частнымъ случаемъ предыдущаго разсмотрѣннаго типа.

П Р И М Ъ Р Ъ 1.

$$(2y + x - 1) dx + (y - 2x - 1) dy = 0.$$

Полагаемъ:

$$y = \eta + k; \quad x = \xi + h; \quad dy = d\eta; \quad dx = d\xi;$$

$$[2\eta + \xi + (2k + h - 1)] d\xi + [\eta - 2\xi + (k - 2h - 1)] d\eta = 0;$$

$$2k + h - 1 = 0; \quad k - 2h - 1 = 0; \quad k = \frac{3}{5}; \quad h = -\frac{1}{5}.$$

Полагаемъ

$$\frac{\eta}{\xi} = u, \quad \eta = \xi u,$$

$$(2u + 1) d\xi + (u - 2) (\xi d\xi + \xi du) = 0$$

или

$$(u^2 + 1) d\xi + \xi(u - 2) du = 0.$$

Переменные разделяются:

$$\frac{d\xi}{\xi} + \frac{(u - 2) du}{u^2 + 1} = 0; \quad \lg \xi + \frac{1}{2} \lg(u^2 + 1) - 2 \arctg u = C.$$

Возвращаясь къ старымъ переменнымъ и переходя отъ логарифмовъ къ числамъ, имѣемъ:

$$(x + 1/5)^2 + (y - 3/5)^2 = C' \cdot e^{4 \arctan \frac{y - 3/5}{x + 1/5}}$$

П Р И М Ъ Р Ъ 2.

$$(2x + 3y + 2)dx + (4x + 6y + 3)dy = 0.$$

Полагая

$$2x + 3y = z,$$

имѣемъ:

$$(z + 2)dx + (2z + 3) \frac{dz - 2dx}{3} = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} = 2 - \frac{3(z + 2)}{2z + 3} = \frac{z}{2z + 3}.$$

$$\frac{(2z + 3)dz}{z} = dx,$$

$$2z + 3 \lg z = x + C.$$

или въ старыхъ переменныхъ:

$$4x + 6y + 3 \lg(2x + 3y) = x + C. \text{ или } x + 2y + \lg(2x + 3y) = C'.$$

§ 4. ЛИНЕЙНЫЯ УРАВНЕНІЯ.

Линейнымъ уравненіемъ называется такое уравненіе, изъ котораго первая производная выражается линейно черезъ y . Общій видъ его

$$\frac{dy}{dx} = Py + Q, \quad (1)$$

гдѣ P и Q суть какія угодно функціи x , или

$$P_0 \frac{dy}{dx} + P_1 y + P_2 = 0.$$

гдѣ P_0, P_1, P_2 - функціи переменнаго x . Линейныя уравненія раздѣляются на однородныя и неоднородныя. Линейное уравненіе называ-

вается однородным, когда P_2 или $Q = 0$; однородные линейные уравнения можно рассматривать как частный случай уравнений неоднородных.

Линейные уравнения сохраняют свою форму:

а) при любом преобразовании независимого переменного.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем вместо x новое переменное x' , полагая:

$$x = \varphi(x'),$$

обратно

$$x' = \varphi(x), \quad dx = \varphi'(x') dx'$$

После подстановки получим линейное уравнение; действительно:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx'} \cdot \frac{1}{\varphi'(x')} \quad \text{и} \quad \frac{dx'}{dx} = \frac{1}{\varphi'(x')}$$

и, следовательно, имеем:

$$\frac{dy}{dx'} = P\varphi' \cdot y + Q\varphi'$$

где $P\varphi'$ и $Q\varphi'$ - функции переменного x' .

б) при линейном преобразовании функции y .

Введем вместо y новое переменное z , положив

$$y = \alpha z + \beta,$$

где α и β , как угодно функции x . После подстановки имеем

$$\alpha \frac{dz}{dx} + z\alpha' + \beta' = P(\alpha z + \beta) + Q$$

- уравнение линейное.

Рассмотрим однородное линейное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = P \cdot y.$$

Разделяя переменные, интегрируем и квадратурой найдем общий интеграл:

$$\frac{dy}{y} = P \cdot dx;$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int P dx + \int Q dx; \\ y = C \cdot e^{\int P dx} \quad (2)$$

Таковъ общій интеграль однороднаго линейнаго уравненія.

П Р И М Ъ Р Ъ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}; \quad y = C \cdot e^{\int \frac{dx}{x}} = Cx.$$

Предположимъ теперь, что мы нашли для однороднаго уравненія частное рѣшеніе

$$y_1 = \psi_1(x).$$

Легко видѣть, что общее рѣшеніе имѣеть видъ:

$$y = C y_1.$$

Въ самомъ дѣлѣ, общее рѣшеніе есть

$$y = A \cdot e^{\int P dx} \quad (3)$$

Даемъ А нѣкоторое частное значеніе a:

$$A = a.$$

тогда получимъ частное рѣшеніе

$$y_1 = a e^{\int P dx} \quad (4)$$

Дѣля (3) на (4), найдемъ:

$$\frac{y}{y_1} = \frac{A}{a}; \quad y = \frac{A}{a} y_1.$$

или полагая

$$\frac{A}{a} = C. \quad y = C y_1.$$

Предложеніе доказано. Можно этотъ результатъ доказать иначе.

Имѣемъ уравненіе

$$\frac{dy}{dx} = P y.$$

Пусть y_1 - частное рѣшеніе; тогда:

$$\frac{dy_1}{dx} = Py_1.$$

Умножая 1-ое равенство на y_1 , а второе на y и вычитая одно из другого, найдемъ:

$$y_1 \frac{dy}{dx} - y \frac{dy_1}{dx} = 0.$$

Дѣля на y_1^2 , имѣемъ:

$$y_1 \frac{dy}{dx} - y \frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{y_1} \right); \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{y_1} \right) = 0.$$

Если производная равна 0, то сама дробь равна постоянному числу, следовательно:

$$y = y_1 C.$$

Переходимъ теперь къ неоднороднымъ линейнымъ уравненіямъ. Неоднородныя линейныя уравненія имѣютъ видъ:

$$\frac{dy}{dx} = Py + Q,$$

гдѣ $Q \neq 0$. Наряду съ неоднороднымъ уравненіемъ рассмотримъ и однородное, получающееся, если слѣлаемъ $Q = 0$. Общій интеграль однороднаго уравненія

$$y = C.e^{\int P dx}.$$

Посмотримъ, нельзя ли для общаго рѣшенія неоднороднаго уравненія сохранить такое же выраженіе по виду, какъ и для однороднаго уравненія. Этому мы достигнемъ методомъ варіаціи или измененія постояннаго. Методъ состоитъ въ томъ, что C считаемъ функціей x и определяемъ его такъ, чтобы y удовлетворяло неоднородному уравненію:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx} \cdot e^{\int P dx} + C e^{\int P dx} \cdot P = P \cdot C \cdot e^{\int P dx} + Q;$$

получаемъ:

$$\frac{dC}{dx} = Q e^{-\int P dx}.$$

Изъ этого условия опредѣлимъ C при помощи квадратуры:

$$C = \int Q \cdot e^{-\int P dx} dx + c.$$

Найденное значение C вставимъ въ формулу для y : получаемъ:

$$\begin{aligned} y &= e^{\int P dx} \left[\int Q e^{-\int P dx} dx + c \right] = \\ &= c e^{\int P dx} + e^{\int P dx} \int Q e^{-\int P dx} dx \end{aligned} \quad (5),$$

гдѣ c - произвольное постоянное. Давая частныя значенія c , найдемъ частныя рѣшенія неоднороднаго линейнаго уравненія. Методъ варіаціи въ сущности приводится къ преобразованію зависимаго переменнаго: мы вводимъ новое переменное z , полагая:

$$y = z e^{\int P dx};$$

внося въ данное неоднородное уравненіе, получаемъ преобразованное уравненіе:

$$\frac{dz}{dx} = Q e^{-\int P dx},$$

общее рѣшеніе котораго есть:

$$z = \int Q e^{-\int P dx} dx + c,$$

а слѣдовательно формула (5) даетъ общее рѣшеніе первоначальнаго уравненія. Въ предьдущемъ изложеніи z было только обозначено черезъ C .

Мы пришли къ слѣдующему виду общаго рѣшенія дифференціального линейнаго уравненія:

$$y = C \varphi(x) + \psi(x) \quad (6)$$

гдѣ C - произвольное постоянное. Можно доказать обратно, что выраженіе (6) есть общее рѣшеніе линейнаго дифференціального уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя равенство (6):

$$\frac{dy}{dx} = C\varphi'(x) + \psi'(x)$$

и исключая C изъ двухъ полученныхъ равенствъ, имѣемъ:

$$\varphi(x) \frac{dy}{dx} - y\varphi'(x) = \varphi\psi' - \psi\varphi'.$$

Полученное уравненіе есть линейное дифференціальное уравненіе. Предположимъ теперь, что мы нашли два частныхъ рѣшенія линейнаго уравненія y_1 и y_2 ; - докажемъ, что, зная ихъ, можемъ найти общее рѣшеніе безъ всякихъ интеграцій.

Вводимъ новую функцію z , полагая:

$$y = y_1 + z;$$

вставляя въ уравненіе (1), получаемъ: $\frac{dy}{dx} = py + Q$;

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} = py_1 + Q + pz.$$

или

$$\frac{dz}{dx} = pz$$

- уравненіе однородное. Для этого однороднаго уравненія мы знаемъ частное рѣшеніе

$$y = y_1 + z; \quad y_2 = y_1 + z \\ z_1 = y_2 - y_1.$$

которое получится, если положимъ

$$y = y_2$$

Общее рѣшеніе однороднаго уравненія будетъ по предыдущему:

$$z = C(y_2 - y_1).$$

слѣдовательно

$$y = y_1 + C(y_2 - y_1).$$

Таково общее рѣшеніе неоднороднаго дифференціального уравненія, когда даны два частныхъ рѣшенія. Преобразуя это равенство, имѣемъ еще:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = C \quad (7)$$

При произвольном значении постоянного C равенство (7) есть общий интеграл. Если мы y заменим каким-нибудь частным решением y_1 , то C принимает определенное значение, и мы имеем соотношение:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \text{const.} \quad (8)$$

между тремя любыми решениями линейного уравнения. Если нам известно только одно частное решение y_1 уравнения (1), то, полагая

$$y = y_1 + z$$

получим для z однородное уравнение:

$$\frac{dz}{dx} = Pz,$$

которое интегрируется одной квадратурой, и, следовательно, общее решение данного уравнения (1) найдется одной квадратурой.

П Р И М Е Р Ъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x.$$

Интегрируя однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

имеем:

$$y = Cx \quad (\text{см. выше}).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x$$

Считая C функцией x и вставляя в данное уравнение, имеем:

$$x \frac{dC}{dx} = x; \quad \frac{dC}{dx} = 1; \quad C = x + c,$$

и следовательно

$$y = x^2 + cx.$$

полагая $c = 0$ и $c = 1$, имѣемъ два частныхъ рѣшенія:

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = x^2 + x.$$

Если бы мы ихъ знали, то общій интегралъ нашли бы непосредственно по (7):

$$\frac{y - x^2}{x} = C$$

§ 5. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ.

Разсмотримъ дифференціальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = Py + Qy^n,$$

гдѣ P и Q - функции x . Уравненія такого типа носятъ названіе уравненій Бернулли и легко приводятся къ линейнымъ уравненіямъ.

Умножимъ все уравненіе на y^{-n} ; получаемъ:

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} = Py^{1-n} + Q.$$

Положимъ

$$y^{1-n} = z$$

и замѣчая, что

$$\frac{dz}{dx} = (-n + 1) y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

представимъ данное уравненіе въ видѣ:

$$Pz + Q = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{1}{(-n+1)}$$

Для переменнаго z имѣемъ очевидно линейное уравненіе.

П Р И М Ъ Р Ъ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^2 y^2;$$

это уравнение Бернулли; $n = 2$. Полагаемъ

$$y = z^2 ;$$

дѣлимъ на y^2 :

$$-\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} z + x^2 ;$$

уравнение линейно. Интегрируя однородное уравнение

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x} ,$$

находимъ:

$$z = Ce^{-\int \frac{dx}{x}} = \frac{C}{x} .$$

Вставляя значеніе z въ прежнее ур-іе въ предположеніи, что

C - функція x , получаемъ:

$$-\frac{1}{x} \cdot \frac{dC}{dx} = x^2 ; \quad \frac{dC}{dx} = -x^3 ;$$

слѣдовательно,

$$C = -\frac{x^4}{4} + c$$
$$z = -\frac{x^3}{4} + \frac{c}{x} ; \quad y = \frac{1}{-\frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}} = \frac{4x}{4c - x^4} .$$

§ 6. УРАВНЕНІЕ RICCATI.

Ближайшимъ (за линейнымъ) по сложности типомъ уравненій являются уравненія вида:

$$\frac{dy}{dx} = Py^2 + Qy + R$$

гдѣ P, Q, R - функціи x . Уравненія такого вида называются уравненіями Riccati. Докажемъ, что уравненія Riccati, какъ и линейныя, сохраняютъ свой видъ при нѣкоторыхъ преобразованіяхъ:

1) Любое преобразование аргумента.

Изменим независимое переменное, полагая

$$x = \varphi(x').$$

Дифференцируем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dx} = \frac{dy}{dx'} \cdot \frac{1}{\varphi'(x')}.$$

Отсюда:

$$Py^2 + Qy + R = \frac{dy}{dx'} \cdot \frac{1}{\varphi'(x')} ;$$

$$\frac{dy}{dx'} = Py^2 \varphi'(x') + Qy \cdot \varphi'(x') + R \cdot \varphi'(x').$$

Это уравнение опять имеет вид уравнения Riccati.

2) Дробно-линейное преобразование переменного y. Поло-

жим y равным дробному выражению

$$y = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (2)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - какие угодно функции x . Отсюда обратно

и z выразится через y линейно:

$$z = \frac{-\delta y + \beta}{\gamma y + \alpha}.$$

Дифференцируя, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\gamma z + \delta) \left(\alpha \frac{dz}{dx} + \alpha' z + \beta' \right) - (\alpha z + \beta) \left(\gamma \frac{dz}{dx} + \gamma' z + \delta' \right)}{(\gamma z + \delta)^2} =$$

$$\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot \frac{dz}{dx} + a_0 z^2 + a_1 z + a_2}{(\gamma z + \delta)^2}$$

где a_0, a_1, a_2 составлены из $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$.

Приравнявая это выражение правой части данного уравнения

Riccati, получим, по умножению на $(\gamma z + \delta)^2$, очевидно,

соотношение вида

$$\frac{dz}{dx} = P_1 z^2 + Q_1 z + R_1,$$

гдѣ $P, Q, R,$ - функции x -а. Получили для z опять уравнение типа Riccati. Можно было бы комбинировать сразу оба преобразования, и мы получили бы опять уравнение вида Riccati.

Займемся теперь возможными упрощениями уравнения Riccati.

1) Коэффициент P можно сделать какой угодно функцией, в частности равным какому-нибудь постоянному, между прочим равным ± 1 . Докажем это. Положим, что

$$y = z \cdot \omega(x).$$

Эта замена является частным случаем преобразования (2). Вставим выражение y в данное уравнение:

$$\omega(x) \frac{dz}{dx} + \omega'(x)z = P \cdot \omega^2(x)z^2 + Q\omega(x)z + R$$

$$\frac{dz}{dx} = P \cdot \omega(x)z^2 + (Q - \frac{\omega'}{\omega})z + \frac{R}{\omega}.$$

Коэффициент при P можно сделать теперь каким угодно вследствие произвольности функции $\omega(x)$. Можно в частности положить

$$\omega(x) \cdot P = \pm 1, \text{ т.е. } \omega(x) = \frac{\pm 1}{P}$$

Выбирая $\omega(x)$ таким, мы в новом уравнении получим коэффициент при z^2 равным ± 1 .

2) Не меняя коэффициента P , можно Q сделать равным 0. Положим

$$y = z + \omega(x)$$

и вставляем в данное уравнение:

$$\frac{dz}{dx} + \omega'(x) = Pz^2 + (2P\omega + Q)z + P\omega^2 + Q\omega + R;$$

вычтем из обеих частей по $\omega'(x)$:

$$\frac{dz}{dx} = Pz^2 + (2P \cdot \omega(x) + Q)z + P \cdot \omega^2(x) + Q\omega(x) + R - \omega'(x).$$

Получаемъ уравненіе Riccati. Коэффициентъ при z сдѣлаемъ равнымъ нулю, полагая

$$2P \omega(x) + Q = 0.$$

Отсюда

$$\omega(x) = -\frac{Q}{2P}.$$

Слѣдовательно, полагая u равнымъ

$$u = z + \omega(x) = z - \frac{Q}{2P},$$

мы достигаемъ того, что въ преобразованномъ уравненіи Q будетъ нулемъ. Въ этомъ преобразованіи мы не измѣнили величины P . Слѣдовательно, производя одновременно два преобразования, мы уравненіе приведемъ къ такому виду:

$$\frac{du}{dx} = u^2 + X \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx} + u^2 = X,$$

гдѣ X - функція x .

Для всѣхъ предшествующихъ типовъ уравненій мы находили общій интегралъ квадратурами; для уравненій Riccati этого вообще сдѣлать нельзя. Докажемъ теперь такое положеніе: зная одно частное рѣшеніе уравненія Riccati, можно привести его къ линейному уравненію и слѣдовательно проинтегрировать двумя квадратурами. Пусть дано частное рѣшеніе u_1 уравненія Riccati, полагаемъ:

$$u = u_1 + z;$$

послѣ преобразованія, по предидущему, получимъ уравненіе Riccati:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{du_1}{dx} = Pz^2 + (2Pu_1 + Q)z + Pu_1^2 + Qu_1 + R;$$

такъ какъ:

$$\frac{du_1}{dx} = Pu_1^2 + Qu_1 + R,$$

то можно произвести сокращение, и для z получим уравнение Riccati:

$$\frac{dz}{dx} = Pz^2 + (2Py_1 + Q)z;$$

здесь $R = 0$. Следовательно, здесь мы имеем частный случай уравнения Бернулли: полагаем $z = \frac{1}{u}$ и следовательно

$$y = y_1 + \frac{1}{u}.$$

Тогда согласно теории уравнения Бернулли, при помощи этой подстановки уравнение Riccati обращается в линейное. Посмотрим, какого типа будет общее решение уравнения Riccati.

Согласно результатам теории линейных уравнений

$$u = C \varphi(x) + \psi(x),$$

следовательно

$$y = y_1 + \frac{1}{C \varphi(x) + \psi(x)} = \frac{y_1 C \varphi(x) + y_1 \psi(x) + 1}{C \varphi(x) + \psi(x)}.$$

Полученное выражение можно написать так:

$$y = \frac{f_1(x) \cdot C + f_2(x)}{f_3(x) \cdot C + f_4(x)}. \quad (3)$$

Такого типа будет полученное общее решение уравнения Riccati - оно дробно-линейное относительно произвольного постоянного C . Докажем теперь обратное положение: всякое дробно-линейное относительно постоянного выражения есть общее решение уравнения Riccati. Так как y выражается линейно через C , то обратно, C можно выразить линейно через y , и из равенства (3) имеем:

$$C = \frac{\varphi_1(x) \cdot y + \varphi_2(x)}{\varphi_3(x) \cdot y + \varphi_4(x)} \quad (4).$$

где

$$\varphi_1 = -f_4, \quad \varphi_2 = f_2, \quad \varphi_3 = f_3, \quad \varphi_4 = -f_1.$$

Въ такой формѣ напишется общій интеграль уравненія Riccati. Докажемъ теперь обратное положеніе. Для этого дифференцируемъ соотношеніе (4) и отбрасываемъ знаменатель; имѣемъ:

$$(\varphi_3 y + \varphi_4) \left(\varphi_1 \frac{dy}{dx} + \varphi_1' y + \varphi_2' \right) - (\varphi_1 y + \varphi_2) \left(\varphi_3 \frac{dy}{dx} + \varphi_3' y + \varphi_4' \right) = 0$$

Собирая члены съ производной, имѣемъ:

$$(\varphi_1 \varphi_4 - \varphi_2 \varphi_3) \frac{dy}{dx} + A_0 y^2 + A_1 y + A_2 = 0,$$

гдѣ A_0 , A_1 , A_2 - функціи x . Дѣля все уравненіе на коэфф-тъ при $\frac{dy}{dx}$, получаемъ дифференціальное уравненіе типа Riccati.

Пусть извѣстно еще одно частное рѣшеніе y_2 уравненія Riccati. Мы имѣли

$$y = y_1 + z; \quad z = \frac{1}{u}; \quad y = y_1 + \frac{1}{u},$$

откуда

$$u = \frac{1}{y - y_1};$$

подставляя на мѣсто y 2-ое рѣшеніе y_2 , находимъ:

$$u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}.$$

u_1 есть частное рѣшеніе линейнаго уравненія, а если намъ извѣстно одно частное рѣшеніе линейнаго уравненія, то общее рѣшеніе найдется одною квадратурой. Итакъ, зная два частныхъ рѣшенія уравненія Riccati, находимъ общій интеграль одною квадратурой. Если же даны 3 частныхъ рѣшенія y_1 , y_2 , y_3 уравненія Riccati, то общее рѣшеніе найдется безъ помощи квадратуръ. Дѣйствительно, имѣемъ:

$$u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1} \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{1}{y_3 - y_1}.$$

а зная 2 частных рѣшенія u_1 и u_2 линейнаго уравненія, найдемъ общій интеграль безъ помощи квадратуръ. Общій интеграль напишется, какъ извѣстно, такъ:

$$\frac{u - u_1}{u_2 - u_1} = C.$$

Замѣняя u , u_1 и u_2 ихъ выраженіями черезъ y , y_1 , y_2 , y_3 , получаемъ соотношеніе:

$$\frac{\frac{1}{y - y_1}}{\frac{1}{y_3 - y_1}} - \frac{\frac{1}{y_2 - y_1}}{\frac{1}{y_2 - y_1}} = C.$$

Приводя къ общему знаменателю, найдемъ:

$$\frac{(y_2 - y)(y_3 - y_1)(y_2 - y_1)}{(y - y_1)(y_2 - y_1)(y_2 - y_3)} = C.$$

Преобразуя это соотношеніе, имѣемъ:

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = C$$

или:

$$\frac{y - y_2}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C' \quad (5)$$

Лѣвая часть называется ангармоническимъ отношеніемъ четырехъ элементовъ y , y_1 , y_2 , y_3 ; y есть какое-либо рѣшеніе уравненія Riccati. Если C даемъ какое-нибудь частное значеніе, получаемъ различныя частныя рѣшенія. Отсюда теорема: ангармоническое отношеніе 4-хъ рѣшеній уравненія Riccati равно постоянному. Это положеніе можно выразить еще такъ, полагая $y = y_4$:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} = \text{const.} \quad (6)$$

Частный видъ уравненія Riccati:

$$y' + ay^2 = bx^m,$$

гдѣ a и b постоянныя числа, разсматривалъ самъ Riccati.

§7. ТЕОРІЯ ИНТЕГРИРУЮЩАГО МНОЖИТЕЛЯ.

Мы можемъ всякое уравненіе 1-го порядка и 1-ой степени относительно производной представить въ слѣдующемъ видѣ.

$$Mdx + Ndy = 0 \quad (1)$$

гдѣ M и N — функція x и y . Начнемъ съ частнаго случая этихъ уравненій. Положимъ, что

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad N = \frac{\partial u}{\partial y},$$

при чемъ u есть функція x, y :

$$u = u(x, y).$$

Если для M и N выполняются вышенаписанныя равенства, то будемъ имѣть:

$$Mdx + Ndy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = du,$$

т.е. будемъ имѣть полный дифференціалъ функція u двухъ переменныхъ и уравненіе приметъ видъ

$$du = 0,$$

откуда обшій интегралъ его есть $u = C$. Дѣйствительно, первоначальное дифференціальное уравненіе должно удовлетворяться, если бы мы вставили вмѣсто y рѣшеніе уравненія. Когда мы вставимъ въ уравненіе $du = 0$ вмѣсто y его выраженіе $y = \varphi(x)$, тогда получимъ:

$$d[u\{x, \varphi(x)\}] = 0,$$

т.е. дифференціалъ функція $u(x, \varphi(x))$ переменнаго x долженъ равняться нулю, а это можетъ быть тогда, когда функція, отъ которой берется дифференціалъ, есть постоянное, т.е.

$$u\{x, \varphi(x)\} = C.$$

Такимъ образомъ всякое рѣшеніе у уравненія должно удовлетво-
рять соотношенію, которое было написано выше:

$$u(x, y) = C.$$

Если отсюда опредѣлить функцію u и вставить въ дифференціаль-
ное уравненіе, то получимъ тождество, и соотношеніе это есть
общій интеграль. Итакъ, мы указали методъ интеграціи уравненія
(1) для этого частнаго случая. Возьмемъ примѣръ на его примѣ -
неніе; пусть имѣемъ:

$$x dy + y dx = 0; \quad M = \frac{\partial(xy)}{\partial x}; \quad N = \frac{\partial(xy)}{\partial y},$$

слѣдовательно, $u = x.y$ и уравненіе переписется такъ:

$$d(x.y) = 0.$$

Общій интеграль

$$x.y = C, \quad \text{откуда } y = \frac{C}{x}.$$

Посмотримъ теперь, когда наше уравненіе будетъ уравненіемъ
указаннаго типа (т.е. когда лѣвая часть уравненія будетъ точ-
нымъ дифференціаломъ функціи 2-хъ переменныхъ). Очевидно, что
въ этомъ случаѣ должны быть равны производныя:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

(такъ какъ, если

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \text{а } N = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \text{то } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x})$$

и обратно, M будетъ произвольной u по x и $N - u$ по y , если
существуетъ равенство (2). Такимъ образомъ, если условіе (2)
выполнено, то лѣвая часть (1) точный дифференціаль и уравне-
ніе интегрируется квадратурами, такъ какъ функція u по дан -

ному дифференціалу du находится, какъ известно, квадратурами x). Въ общемъ случаѣ условіе (2) не выполняется. Посмотримъ, нельзя ли въ этомъ случаѣ замѣнить данное уравненіе другимъ, ему равносильнымъ, но для котораго бы выполнялось условіе (2). Для этого умножимъ его на нѣкоторый факторъ μ (гдѣ μ - функція x, y):

$$\mu M dx + \mu N dy = 0.$$

Полученное уравненіе будетъ равносильно данному, такъ какъ общій интеграль послѣдняго уравненія будетъ удовлетворять и первоначальному, равенство же $\mu = 0$ можетъ дать только частный интеграль. Положимъ, что μ выбранъ такъ, что для преобразованнаго уравненія выполняется условіе (2), т.е.

$$\frac{\partial (\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial (\mu N)}{\partial x}$$

Тогда лѣвая часть преобразованнаго уравненія будетъ точнымъ дифференціаломъ, и уравненіе интегрируется квадратурами. Этотъ факторъ μ есть такъ называемый интегрирующій факторъ. Докажемъ, что для каждаго дифференціального уравненія существуетъ этотъ факторъ. Вслѣдствіи мы докажемъ, что для каждаго дифференціального уравненія существуетъ общій интеграль. При доказательствѣ мы будемъ теперь пользоваться только что упомянутымъ положеніемъ, какъ уже доказанный теоремой. Итакъ, пусть для даннаго дифференціального уравненія

$$x) \quad du = M dx + N dy; \quad u = \int M dx + \varphi(y); \quad \varphi'(y) = N - \frac{\partial M}{\partial y} dx,$$

$$\varphi(y) = \int \left\{ N - \frac{\partial M}{\partial y} dx \right\} dy. \quad ?$$

существуетъ общій интеграль:

$$\phi(x, y, C) = 0.$$

Мы можемъ разрѣшить его относительно постоянной C , т.е. взять въ видѣ

$$u(x, y) = C. \quad (3)$$

Продифференцируемъ (3):

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0.$$

Откуда:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$$

Опредѣливъ производную и вставивъ ее въ данное дифференціальное уравненіе, мы должны удовлетворить послѣднему, т.е. должны имѣть:

$$- \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = - \frac{M}{N}$$

Въ это равенство C не входитъ, но оно должно удовлетворяться функцией u изъ (3) при всякомъ C , стало быть оно должно удовлетворяться тождественно (такъ какъ изъ 3-го уравненія оно не слѣдуетъ). Мы его напомнимъ такъ:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{N}$$

Тогда также можемъ сказать, что лѣвая и правая части одна и та же функция x и y (т.е. это тождество). Назовемъ ее черезъ $\mu(x, y)$; тогда мы можемъ утверждать, что μ и есть интегрирующій факторъ. Дѣйствительно:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \mu N.$$

Замѣняя данное дифференціальное уравненіе другимъ, полученнымъ изъ него путемъ умноженія на μ , будемъ имѣть:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0.$$

Слѣдовательно, μ - интегрирующій факторъ. Итакъ, мы доказали что для всякаго уравненія 1-го порядка существуетъ интегрирующій факторъ.

П Р И М Ъ Р Ъ: $yx - xdy = 0.$

Условіе (2) здѣсь не выполняется, соотвѣтствующія производныя коэффиціентовъ при дифференціалахъ не равны между собой, такъ какъ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1.$$

Мы должны найти интегрирующій факторъ, на него помножить обѣ части уравненія. Въ данномъ случаѣ этотъ факторъ есть $\mu = \frac{1}{x^2}$;

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right).$$

Найдя интегрирующій факторъ, мы нашли общій интеграль; онъ будетъ

$$\frac{y}{x} = C.$$

Мы показали, что для всякаго уравненія 1-го порядка существуетъ интегрирующій факторъ.

Теперь докажемъ, что такихъ факторовъ для каждаго уравненія существуетъ безчисленное множество. Положимъ, что мы нашли одну такой факторъ; онъ есть μ . Слѣдовательно, по умноженіи на него мы будемъ имѣть такое тождество:

$$\mu M dx + \mu N dy = du.$$

Тогда интегрирующим факторомъ будетъ также $\mu_1 = \mu f(u)$, гдѣ $f(u)$ - какая угодно функція u . Чтобы доказать это положеніе, мы перепишемъ выраженіе новаго фактора такъ:

$$\mu_1 = \mu \varphi'(u),$$

гдѣ $\varphi'(u)$ - производная новой функціи, которую мы найдемъ, зная f , слѣдующимъ образомъ:

$$\varphi(u) = \int f(u) du.$$

Докажемъ, что μ_1 - интегрирующій факторъ. Умноживъ на него данное уравненіе, мы получимъ:

$$\mu_1(Mdx + Ndy) = \varphi'(u) \mu(Mdx + Ndy) = \varphi'(u) \cdot du = d[\varphi(u)];$$

слѣдовательно, μ_1 - тоже интегрирующій факторъ. Положимъ, что имѣемъ уравненіе

$$ydx - xdy = 0;$$

какъ видѣли, интегрирующій факторъ $\mu = \frac{1}{x^2}$; послѣ умноженія на него

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right).$$

Вмѣсто фактора μ мы можемъ взять новый факторъ μ_1 , получа - емый изъ первоначальнаго умноженіемъ его на произвольную функ - цію u (въ данномъ случаѣ $u = \frac{y}{x}$), напримѣръ на $\frac{x}{y}$; мы бе - демъ тогда:

$$\mu_1 = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{y} = \frac{1}{xy}$$

По умноженіи на μ_1 мы придемъ къ желаемому результату. Дѣй - ствительно, мы будемъ имѣть:

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = d(\lg x - \lg y).$$

Изменяя функцію f , мы получимъ безчисленное множество интегри-

рующихся факторовъ. Докажемъ теперь обратно, что если μ одинъ факторъ, μ_1 - другой, то отношеніе $\frac{\mu}{\mu_1}$ равно функціи отъ u гдѣ u - та самая функція, полный дифференціалъ которой получается въ лѣвой части уравненія, послѣ умноженія его на μ . Пусть мы имѣемъ:

$$\mu (M dx + N dy) = du \quad (4)$$

$$\mu_1 (M dx + N dy) = dv \quad (5)$$

Отсюда слѣдуетъ тождество:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} du &= \frac{1}{\mu_1} dv \text{ или } \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) = \\ &= \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right). \end{aligned}$$

Коэффициенты при dx и dy слѣва и справа должны быть равны,

т.е. мы должны имѣть:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

откуда

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial y}},$$

или въ видѣ равенства нулю детерминанта

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & , & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & , & \frac{\partial u}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Детерминантъ такого состава есть названіе опредѣлителя Якоби. Равенство его нулю показываетъ, что между u и v есть соотношеніе, т.е. что v есть функція отъ одной u ;

итакъ

$$v = \varphi(u).$$

Разъ мы доказали, что $v = \varphi(u)$, то имѣемъ:

$$dv = \varphi'(u) du$$

и, дѣля равенство (5) на (4), будемъ имѣть:

$$\frac{M_1}{M} = \varphi'(u).$$

Такимъ образомъ наша теорема доказана. Введемъ изъ нея одно слѣдствіе. Если мы напишемъ, что $\varphi'(u) = C$, то тогда и $u = \text{const.}$ И обратно, если $u = \text{const.}$, то $\varphi'(u) = C$. Такимъ образомъ два этихъ равенства равносильны. Но второе изъ нихъ даетъ общій интегралъ, первое же имѣетъ видъ $\frac{M_1}{M} = C$, а потому, приравнявъ отношеніе двухъ интегрирующихъ факторовъ произвольному постоянному, мы получимъ общій интегралъ. Въ нашемъ примѣрѣ мы нашли $M = \frac{1}{x^2}$ и $M_1 = \frac{1}{x, y}$. Раздѣливъ 2-е на 1-е, найдемъ $\frac{x}{y} = C$.

Приступаемъ теперь къ изложенію способа, которымъ можно найти интегрирующій множитель для даннаго дифференціального уравненія. Предположимъ, что намъ дано дифференціальное уравненіе, для котораго μ интегрирующій факторъ, тогда :

$$\mu M = \frac{\partial \mu}{\partial x} ; \quad \mu N = \frac{\partial \mu}{\partial y} ;$$

или, если продифференцировать эти соотношенія, первое по y , второе по x , получимъ слѣдующее равенство:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Это условіе необходимое и достаточное для того, чтобы μ было

интегрирующимъ факторомъ. Напишемъ его въ раскрытой формѣ;

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$

или въ другой формѣ, если перенесемъ члены съ μ въ одну сторону:

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu \quad (I)$$

Это и есть уравненіе, которому должны удовлетворять интегрирующій факторъ. Здѣсь M и N - данныя функціи x, y , а μ - неизвестная функція. Итакъ, для опредѣленія интегрирующаго фактора мы получили дифференціальное уравненіе съ частными производными. Такимъ образомъ, изысканіе его приводитъ къ задачѣ болѣе сложной, чѣмъ задача интегрированія даннаго дифференціального уравненія, такъ какъ въ уравненіе (I) входятъ частныя производныя. Чтобы найти μ , надо найти рѣшеніе такого уравненія. Это (I) уравненіе можно написать въ болѣе удобномъ видѣ. Раздѣлимъ его на μ , тогда получимъ:

$$N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad (I')$$

Здѣсь за неизвестную функцію можно считать $\ln \mu$, при чемъ въ уравненіе (I') также входятъ частныя производныя этой функціи и съ этой стороны дѣло не упростилось. Но уравненіе (I') проще чѣмъ (I) тѣмъ, что въ немъ не входитъ сама неизвестная функція, а входятъ только ея производныя. Для нашей цѣли достаточно найти какое-либо частное рѣшеніе μ уравненія (I) или (I'). Дѣйствительно, если мы найдемъ такое μ , то умножая данное

дифференціальное уравненіе (1) на него, мы квадратурами нах-
димъ функцію μ , а затѣмъ найдемъ и обшій интеграль $u = C$
(приравнявъ найденную функцію постоянному C). Такимъ образомъ,
если мы нашли какое-нибудь рѣшеніе уравненія (I'), то обшій
интеграль даннаго дифференціального уравненія найдется квад-
ратурами. Для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ (когда M и N суть
функціи опредѣленнаго частнаго вида) можно найти рѣшеніе урав-
ненія (I'), а слѣдовательно довести до конца и данную задачу.
Возможно обратно дать функцію μ , а затѣмъ смотрѣть, какимъ
условіямъ должны удстветворять M и N , чтобы уравненіе (1) до-
пускало μ интегрирующимъ факторомъ. При этомъ мы будемъ слѣ-
довательно искать тѣ уравненія, которыя имѣютъ интегрирующій
множитель даннаго вида. Посмотримъ, какъ это можно сдѣлать.
Очевидно, мы должны данное намъ μ вставить въ уравненіе (I'),
а затѣмъ найти такія M и N , для которыхъ это уравненіе бы
удстветворялось. Пусть, на примѣръ, факторъ μ зависитъ только
отъ x -а, а отъ y -ка не зависитъ, т.е.

$$\mu = f(x).$$

Если μ - функція x , то

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0;$$

частная же производная

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \varphi(x)$$

будетъ функціей только x -а. Вставляя въ уравненіе (I'), по-
лучимъ:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \varphi(x) \quad (6)$$

Для того, чтобы дифференциальное уравнение допускало интегрирующую множитель μ , зависящий от x , необходимо и достаточно, чтобы левая часть (6) была функцией только x . Действительно, в этом случае имеем

$$\varphi(x) = \frac{d \lg \mu}{dx}; \quad \lg \mu = \int \varphi(x) dx.$$

откуда

$$\mu = e^{\int \varphi(x) dx}$$

т.е. функция только x -а. Между M и N , получился только одно соотношение (6), следовательно одно из них, M или N , может быть взято произвольно. Мы имеем:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = N \varphi(x) + \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Дадим N какое-нибудь значение, тогда

$$M = \int \left\{ N \varphi(x) + \frac{\partial N}{\partial x} \right\} dy.$$

Изменяя вид N , мы будем получать различные функции M и следовательно различные уравнения (1). Ограничимся частным случаем, предположив, что коэффициент при дифференциале dy , т.е. $N = 1$; к такому виду всегда можно привести каждое уравнение, разделив его на N . Полагая $N = 1$, получим:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \varphi(x).$$

Отсюда

$$M = \varphi(x) \cdot y + \psi(x).$$

Для уравнения с таким M и N существует интегрирующий фактор, зависящий только от x . Посмотрим, какое получится тогда дифференциальное уравнение. Легко видеть, что оно будет

линейное; на самоѣ дѣлѣ:

$$\frac{d y}{d x} + \varphi(x)y + \psi(x) = 0.$$

Или, измѣняя обозначенія:

$$\frac{d y}{d x} + P.y + Q = 0.$$

Соответствующій интегрирующей факторъ $\mu = e^{\int P dx}$.

Мы получили новый методъ интегрированія линейнаго уравненія.

Примѣнимъ его къ уравненію;

$$\frac{d y}{d x} + \frac{y}{x} + 2x^2 = 0.$$

Такъ какъ въ этомъ уравненіи коэффициентъ P равенъ $\frac{1}{x}$, то интегрирующей факторъ

$$\mu = e^{\int \frac{dx}{x}} ;$$

постоянное интегрированіе можно взять какое угодно, а потому возьмемъ просто

$$\int \frac{dx}{x} = \lg x.$$

Тогда $\mu = x$. Умножаемъ на этотъ факторъ данное уравненіе; получаемъ

$$x dy + (y + 2x^3) \cdot dx = 0.$$

Лѣвая часть, какъ слѣдуетъ изъ общей теоріи, есть полный дифференціалъ нѣкоторой функціи. Ее найдемъ двумя квадратурами. Интегрируя коэффициентъ при dy по y , найдемъ функцію

$$u = xy + F(x).$$

($F(x)$ - постоянная интегрированія). $F(x)$ надо выбрать такъ, чтобы производная u по x равнялась коэффициенту при dx . Дифференцируемъ и приравняемъ. тогда:

$$y + F'(x) = y + 2x^3.$$

Функцию $F(x)$ найдем квадратурой. Таким образом мы найдем u . Приравняв его C , получим общий интеграл данного уравнения:

$$xu + \frac{x^4}{4} = C.$$

Рассмотрим теперь однородное уравнение, т.е. предположим, что N и M однородны, измерения m . Тогда функции M и N можно представить в виде произведения x^m на некоторую функцию отношения $\frac{y}{x}$. Сдѣлаем $N = 1$, для чего уравнение разделим на N или иначе разрешим его относительно $\frac{dy}{dx}$; тогда будем имѣть:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

x^m сократится. Итакъ, вмѣсто начального будем имѣть уравнение:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) dx + dy = 0.$$

Для уравнения въ этой формѣ будем пользоваться интегрирующей факторъ. Чтобы получить его, мы должны вставить соответствующіе коэффициенты M и N въ (I'):

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} - \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{1}{x} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Можно утверждать, что этому уравнению удовлетворяет μ - однородная функция, т.е. удовлетворяетъ:

$$\mu = x^\sigma \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

гдѣ σ - измерение функции μ . Логарифмировавъ, имѣемъ:

$$\lg \mu = \sigma \lg x + \lg \psi.$$

Обозначимъ для краткости $\lg \psi$ черезъ $\omega\left(\frac{y}{x}\right)$.

Взявъ частныя производныя отъ $\lg \mu$ по x и y , вставимъ

ихъ въ уравненіе (I'):

$$\frac{\sigma}{x} - \omega' \left(\frac{y}{x} \right) \frac{y}{x^2} - \varphi \left(\frac{y}{x} \right) \omega' \left(\frac{y}{x} \right) \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \varphi' \left(\frac{y}{x} \right).$$

Умножимъ послѣднее равенство на x и соберемъ члены 2-й и 3-й вмѣстѣ:

$$\sigma - \omega' \left(\frac{y}{x} \right) \cdot \left\{ \frac{y}{x} + \varphi \left(\frac{y}{x} \right) \right\} = \varphi' \left(\frac{y}{x} \right).$$

Опредѣляя ω' , получимъ:

$$\omega' \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{\sigma - \varphi' \left(\frac{y}{x} \right)}{\frac{y}{x} + \varphi \left(\frac{y}{x} \right)}.$$

Задача наша разрѣшена. Дѣйствительно, справа стоитъ нѣкоторая функція отношенія $\frac{y}{x}$. Если мы для краткости назовемъ его черезъ u , т.е. положимъ $\frac{y}{x} = u$, то будемъ имѣть

$$\omega'(u) = \frac{\sigma - \varphi'(u)}{u + \varphi(u)}$$

и квадратурой найдемъ функцію ω . При чемъ, такъ какъ σ произвольное число, то мы можемъ его выбрать такъ, чтобы удобнѣе было взять квадратуру. Возьмемъ $\sigma = -1$, тогда числитель будетъ производною знаменателя, только взятый съ обратнымъ знакомъ, и слѣдовательно:

$$\omega(u) = \int \varphi = - \int [u + \varphi(u)] \quad ;$$

(постоянное интегрированія беремъ = 0, такъ какъ достаточно знать только какое-нибудь значеніе ω). Откуда:

$$\varphi = \frac{1}{u + \varphi(u)}.$$

Итакъ,

$$\mu = \frac{1}{x \left[\frac{y}{x} + \varphi \left(\frac{y}{x} \right) \right]} = \frac{1}{y + x \cdot \varphi \left(\frac{y}{x} \right)}.$$

Вотъ одинъ изъ интегрирующихся факторовъ нашего уравненія. Въ данномъ случаѣ μ однородная функція (-1) измѣренія. Это μ

является интегрирующим фактором для уравнения, въ которомъ $N = 1$. Посмотримъ, каковъ этотъ факторъ будетъ для первоначальнаго уравненія. Очевидно, что для того, чтобы привести уравненіе къ разсмотрѣнному виду, надо его раздѣлить на N , или умножить на $\frac{1}{N}$; а затѣмъ его придется умножить на μ . Короче, интегрирующимъ факторомъ для первоначальнаго уравненія будутъ:

$$\mu_1 = \frac{1}{N} \mu = \frac{1}{xM + yN} \quad (B)$$

такъ какъ

$$\psi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{M}{N};$$

такимъ образомъ мы получили новый методъ интеграціи однороднаго уравненія.

П Р И М ъ Р Ъ. Дано дифференціальное уравненіе:

$$(x^2 + y^2) dx - xy dy = 0.$$

Уравненіе однородно, 2-го измѣренія. Его интегрирующій факторъ будетъ:

$$\frac{1}{(x^2 + y^2) x - xy^2} = \frac{1}{x^3}.$$

Итакъ, данное уравненіе надо умножить на $\frac{1}{x^3}$, и тогда лѣвая часть будетъ полнымъ дифференціаломъ. Умножаемъ:

$$\frac{x^2 + y^2}{x^3} dx - \frac{y}{x^2} dy = 0.$$

Квадратурами находимъ u . Проинтегрировавъ 2-ой коэффициентъ по y , будемъ имѣть:

$$u = -\frac{y^2}{2x^2} + F(x).$$

Надо найти $F(x)$; для этого предыдущее выраженіе продифферен-

цируемъ по x , приравняемъ 1-му коэффициенту, получаемъ:

$$\frac{y^2}{x^3} + F'(x) = \frac{x^2 + y^2}{x^3}$$

или по сокращеніи $F'(x) = \frac{1}{x}$. Отсюда

$$F(x) = \lg x.$$

Итакъ, общій интегралъ даннаго уравненія есть

$$-\frac{y^2}{2x^2} + \lg x = C.$$

§ 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ ПЕРВАГО ПОРЯДКА СТЕПЕНИ ВЫШЕ 1-ОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ.

До сихъ поръ мы рассматривали дифференціальныя уравненія, которыя были разрѣшены относительно производной; теперь же рассмотримъ такія дифференціальныя уравненія, которыя даны въ общемъ видѣ:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \quad (1)$$

Разрѣшая уравненіе (1) относительно производной, приходимъ къ одному или нѣсколькимъ уравненіямъ разсмотрѣннаго выше вида:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Предположимъ въ частности, что уравненіе (1) алгебраическое относительно y' - n -й степени и, слѣдствительно, имѣетъ видъ:

$$y'^n + A_1 y'^{n-1} + A_2 y'^{n-2} + \dots + A_n = 0, \quad (2)$$

гдѣ A_1, A_2, \dots, A_n - функціи x и y ; мы можемъ предположить еще, что эти коэффициенты - раціональныя функціи x и y . Разрѣшая уравненіе (2), получаемъ n значений для производной y' и слѣ -

довательно n различныхъ уравненій:

$$\frac{dy}{dx} = f_i(x, y), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

Для каждаго изъ этихъ уравненій существуетъ свой общій интеграль:

$$\phi_i(x, y, C) = 0 \quad (4)$$

и возникаетъ вопросъ, какъ зная ихъ, получить общій интеграль даннаго уравненія (2); т.е. такое соотношеніе между x , y , C , для котораго бы удовлетворялись всё уравненія (3). Для разрѣшенія этого вопроса надо предварительно установить понятіе о неприводимости уравненія вида (2). Уравненіе (2) называется неприводимымъ, если лѣвую часть его нельзя разложить на факторы того же вида, какъ и сама лѣвая часть этого уравненія, т.е. безъ введенія ирраціональности относительно x и y . Въ противномъ случаѣ уравненіе называется приводимымъ, и его можно замѣнить рядомъ неприводимыхъ уравненій, разбивая лѣвую часть на неприводимые факторы. Такъ, уравненіе:

$$y'^2 - \frac{y}{x} = 0 \quad (5)$$

неприводимо, ибо лѣвую часть, правда, можно представить въ видѣ произведенія линейныхъ, относительно y' , факторовъ, какъ это и всегда имѣетъ мѣсто:

$$\left(y' - \sqrt{\frac{y}{x}}\right) \cdot \left(y' + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) = 0,$$

но факторы эти ирраціональны относительно x и y . Наоборотъ, уравненіе

$$y'^2 - (x + y^2)y' + xy^2 = 0 \quad (6)$$

приводимо, ибо представляется въ видѣ:

$$(y' - x)(y' - y^2) = 0$$

и распадается на два неприводимых уравнения

$$y' = x \quad \text{и} \quad y' = y^2. \quad (7)$$

Если уравнение (2) неприводимо, то правая часть уравнений (3) всё зависяет от одной иррациональности, и следовательно от одного уравнения (3) к другому переходим простым изменением значения иррациональности. Так, для уравнения (5) уравнения (3) будут:

$$y' = + \sqrt{\frac{y}{x}} \quad \text{и} \quad y' = - \sqrt{\frac{y}{x}} \quad (8)$$

и от одного переходим к другому, меняя знак перед квадратным радикалом. Очевидно, что и от одного общего интеграла (4) к другому можем переходить сходным образом, так как вид каждого должен зависеть от значения иррациональности, и общий интеграл

$$\phi(x, y, C) = 0 \quad (9)$$

уравнения (2) получим, исключая иррациональность (радикалы или высшие иррациональности, если $n > 4$) из уравнения:

$$\phi_i(x, y, C) = 0. \quad (4)$$

Так, для 1-го из уравнений (8) общий интеграл имеет вид:

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} + C;$$

исключаем иррациональность: возводя в квадрат, имеем:

$$y = x + C^2 + 2C \sqrt{x},$$

откуда, по перенесении членов и возведении в квадрат, получаем общий интеграл

$$(y - x - C^2)^2 = 4C^2 x \quad (10)$$

уравнения (5), такъ какъ соотношеніе (10), очевидно имѣетъ мѣсто для обоихъ значеній квадратнаго корня въ уравненіяхъ (8). Наоборотъ, если уравненіе (2) приводимо, то нельзя отъ одного изъ уравненій (3) перейти ко всѣмъ остальнымъ, измѣняя только ирраціональности. Такъ уравненія (7), полученныя для уравненія (3), совершенно независимы другъ отъ друга, и ихъ общіе интегралы

$$y = \frac{x^2}{2} + C \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{C - x} \quad (11)$$

тоже не имѣютъ никакой связи между собою. - Въ случаѣ приводимости уравненія (2) разбиваемъ его лѣвую часть на неприводимые факторы и для каждаго неприводимаго уравненія, получаемаго приравниваніемъ нулю одного изъ этихъ факторовъ, находимъ общій интеграль по предидущему. Получаемъ рядъ такихъ интеграловъ:

$$\Phi_1(x, y, C) = 0, \quad \Phi_2(x, y, C) = 0, \dots, \Phi_s(x, y, C) = 0 \quad (12)$$

Общій интеграль уравненія (2) получимъ, перемножая равенства (12):

$$\Phi_1(x, y, C) \cdot \Phi_2(x, y, C) \cdot \dots \cdot \Phi_s(x, y, C) = 0 \quad (13)$$

Дѣйствительно, соотношеніе (13) имѣетъ мѣсто для любого изъ значеній производной y' , получаемыхъ изъ уравненія (2). Для уравненія (6), имѣя въ виду равенства (11), получаемъ общій интеграль въ видѣ:

$$\left(y - \frac{x^2}{2} - C\right) \left(y - \frac{1}{C - x}\right) = 0,$$

или, послѣ упрощеній:

$$(C - x) y^2 - y \left[1 + (C - x) \left(\frac{x^2}{2} + C\right)\right] + \frac{x^2}{2} + C = 0 \quad (14)$$

Приведемъ еще одинъ примѣръ.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - (x + y) \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy = 0,$$

или

$$\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\right] \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\right] = 0.$$

Уравнение распадается на два

$$1) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x = 0 \quad 2) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y = 0.$$

Оба уравнения рациональны и независимы другъ отъ друга. Каждое изъ нихъ въ свою очередь распадается на два, а именно:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{y}.$$

Уравнения 1) и 2) неприводимы. Интегрируемъ уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{y}.$$

$$1) y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C;$$

$$2) 2\sqrt{y} = x + C.$$

Общие интегралы уравнений 1) и 2) найдемъ, исключая иррациональность изъ 2-хъ найденныхъ интеграловъ:

$$1) (y - C)^2 = \frac{4}{9} x^3 \quad 2) 4y = (x + C)^2;$$

общий интегралъ даннаго уравнения будетъ:

$$\left[(y - C)^2 - \frac{4}{9} x^3\right] \left[4y - (x + C)^2\right] = 0.$$

Обращаясь къ непосредственному рассмотрѣнiю уравненiя

$$\mathcal{F}(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

независимо отъ приведенiя его къ ряду уравненiй вида (3), начнемъ съ частныхъ случаевъ, когда отсутствуетъ одинъ изъ трехъ аргументовъ, т.е. когда уравненiе имѣетъ видъ:

$$I) \mathcal{F}(y, y') = 0,$$

$$II) \mathcal{F}(x, y') = 0.$$

Если бы уравнение

$$\mathcal{F}(y, y') = 0 \quad (I)$$

разрешить относительно производной, то переменные разделились бы, и мы могли бы уравнение проинтегрировать квадратурой. Если оно не разрешено относительно y' , то оно может быть 1-ой степени относительно y или вообще допустить удобное разрешение относительно y .

Пусть уравнение разрешено относительно y и имеет вид:

$$y = f(y');$$

введем новое переменное p , обозначив производную через p , т.е. полагая $y' = p$; тогда последнее уравнение переищется так:

$$y = f(p) \quad (15)$$

Наша цель - найти общий интеграл, т.е. мы хотим найти соотношение между x , y , C . Можно также выразить x и y через один какой-нибудь параметр, а затем исключить его. Если p примем за такой параметр, то y уже выражено в функции его; остается выразить x ; мы имеем:

$$y' = p = \frac{dy}{dx} \quad . \quad dy = p \cdot dx, \quad dx = \frac{dy}{p} \quad .$$

С другой стороны:

$$y = f(p), \quad dy = f'(p) dp.$$

Итак,

$$dx = \frac{f'(p) dp}{p}$$

и квадратурой находим:

$$x = \int \frac{f'(p) dp}{p} + C \quad (16)$$

Таким образом x и y выражены в функции вспомогательного пара-

метра p . Если мы исключим p , т.е. y' , то получим уравнение вида:

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

т.е. общий интеграл. Если исключение не выполнять, то равенства (15) и (16) замѣняютъ общий интегралъ. Методъ, примененный нами здѣсь, есть въ сущности методъ преобразованія переменныхъ. Мы получили дифференціальное уравненіе:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{f'(p)}$$

а къ такому уравненію мы придѣмъ стѣ нашего, если введемъ новое переменное, полагая $y' = p$. Разсмотримъ болѣе общий случай уравненія (I), предполагая, что уравненіе

$$F(y, y') = 0$$

не разрѣшено ни стносительно y , ни стносительно y' , но y и y' выражены въ функціи нѣкотораго параметра t , т.е. замѣнимъ его двумя уравненіями:

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t) \quad (17)$$

(Исключая изъ нихъ t , придѣмъ опять къ данному уравненію). Выразимъ y и x въ функціи параметра t .

$$y' = \frac{dy}{dx}; \quad dx = \frac{dy}{y'}; \quad dy = \varphi'(t)dt; \quad dx = \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)};$$

x найдется квадратурой:

$$x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + C \quad (18)$$

присоединяя $y = \varphi(t)$ (17'), исключивъ t , получимъ общий интегралъ. Можно оставить безъ исключенія общий интегралъ въ видѣ 2-хъ уравненій (17') и (18).

П Р И М ъ Р Ы:

1.)

$$y = y'^2 e^{y'}$$

Относительно y' уравнение неразрешимо въ элементарныхъ функціяхъ. Обозначимъ:

$$y' = p, \quad y = p^2 e^p$$

$$dx = \frac{dy}{p}; \quad dy = (2pe^p + p^2 e^p) dp; \quad dx = \frac{2pe^p + p^2 e^p}{p} dp$$

$$dx = (2e^p + pe^p) dp;$$

выполняемъ квадратуру:

$$x = 2e^p + pe^p - e^p + C \quad \text{и} \quad y = p^2 e^p.$$

$$2) \quad y^2 (y' - 1) = (2 - y')^2.$$

Уравнение легко разрешимо относительно y и y' ; но рѣшеніе получится ирраціональное. Для избѣжанія ирраціональности введемъ параметръ t , полагая

$$2 - y' = yt;$$

уравнение даетъ намъ:

$$y^2 (y' - 1) = y^2 t^2; \quad y' = t^2 + 1;$$

$$y = \frac{1-t^2}{t}; \quad dx = \frac{dy}{y'} = \frac{-\frac{1-t^2}{t^2}}{1+t^2} dt, \quad \text{или} \quad dx = -\frac{dt}{t^2};$$

$$x = \frac{1}{t} + C, \quad y = \frac{1}{t} - t.$$

Исключая t , имѣемъ обшій интеграль:

$$y = x - C - \frac{1}{x-C}.$$

Переходимъ къ уравненію (II):

$$F(x, y') = 0.$$

Относительно уравненій этого вида мы могли бы повторить всё наши разсужденія для предшествующаго случая. Если бы уравненіе было разрешено относительно y' , то оно интегрировалось бы квад-

ратурой. То же самое было бы, если бы мы могли разрешить уравнение относительно x .

Мы положим вообще, что оба аргумента x и y' можно выразить в виде 2-х функций вспомогательного параметра t ; полагая в частности $y' = t$ или $x = t$, будем иметь два вышеупомянутых случая разрешимости. Итак, пусть

$$x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t).$$

Выразим и y в функции параметра t .

$$dy = y'dx = \varphi(t) \cdot \psi'(t) dt; \quad y = \int \varphi(t) \psi'(t) dt + c.$$

Присоединяя равенство $x = \varphi(t)$, имеем общий интеграл. В данном случае мы также в сущности делали преобразование переменных. Действительно, мы получили дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \varphi(t) \cdot \psi'(t),$$

т.е. мы вместо x ввели новое переменное t и определили производную искомой функции y по t , а не по x .

П Р И М Е Р Ы. Пусть в частности t совпадает с y' :

$$x = y' + \cos y', \quad y' = p, \quad x = p + \cos p, \quad dy = p dx; \\ dy = p(1 - \sin p) dp, \quad y = \frac{p^2}{2} + p \cos p - \sin p + C;$$

изъ выражений x и y в функции p не трудно исключить p и получить общий интеграл.

До сих пор мы предполагали, что уравнение содержит два аргумента. Перейдем к общему случаю, когда в уравнение входят три аргумента x , y и y' . Положим, мы имеем такое уравнение с 3-мя аргументами. Покажем, каким образом можем заменить его новым дифференциальным уравнением 1-ой степени

относительно производной. Пусть имѣемъ уравненіе:

$$F(x, y, y') = 0,$$

разрѣшенное относительно y ;

$$y = f(x, y'). \quad (III)$$

Введемъ новое переменное, полагая

$$y' = p, \text{ тогда } y = f(x, p).$$

Дифференцируя по x , имѣемъ:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}.$$

Мы получили дифференціальное уравненіе, въ которое входятъ p , x и $\frac{dp}{dx}$. Относительно $\frac{dp}{dx}$ полученное уравненіе 1-ой степени, слѣдовательно цѣль наша достигнута. Точно также дифференціальное уравненіе можно замѣнить новымъ, 1-ой степени относительно производной, если только оно разрѣшено относительно x . Дѣйствительно, если

$$x = f(y, y') \quad (IV),$$

то, полагая $y' = p$, будемъ имѣть:

$$x = f(y, p)$$

и дифференцируя по x :

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y} p + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx};$$

Но намъ нужно теперь получить уравненіе съ $y, p, \frac{dp}{dy}$; поэтому, замѣтивъ, что

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

перепишемъ наше равенство такимъ образомъ:

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y} p + \frac{\partial f}{\partial p} p \cdot \frac{dp}{dy}.$$

Мы получили дифференціальное уравненіе относительно переменных p и u , при чемъ оно 1-ой степени относительно производной $\frac{dp}{du}$. Посмотримъ теперь, какимъ образомъ можно найти общій интегралъ даннаго дифференціального уравненія. Очевидно для этого придется исключить p изъ общаго интеграла преобразованнаго уравненія и изъ даннаго дифференціального уравненія. Напримѣръ, во второмъ случаѣ, если мы опредѣлимъ общій интегралъ новаго уравненія

$$\Phi(p, u, C) = 0,$$

то, присоединивъ къ нему уравненіе $x = f(u, p)$ и исключая p , найдемъ общій интегралъ даннаго уравненія. Въ обоихъ предшествующихъ случаяхъ мы предполагали, что уравненіе разрѣшено относительно одного изъ аргументовъ. Естественно теперь обратиться къ болѣе общему случаю, когда уравненіе не разрѣшено относительно одного изъ аргументовъ x, u, u' . Разсмотримъ способъ приведенія уравненія къ ур-ю 1-ой степени относительно производной въ этомъ случаѣ. Будемъ данное уравненіе толковать, какъ уравненіе поверхности, замѣнивъ временно аргументы x, u, u' координатами ξ, η, ζ :

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Предположимъ, что координаты ξ, η, ζ поверхности выражаются въ функціи 2-хъ вспомогательныхъ параметровъ (криволинейныя Гауссовы координаты). Тогда дифференціальное уравненіе замѣнится тремя уравненіями вида:

$$x = \varphi(u, v); \quad u = \psi(u, v); \quad u' = \chi(u, v).$$

Если бы изъ этихъ трехъ уравненій исключили u и v , то получили бы данное дифференціальное уравненіе. Въ томъ случаѣ, когда данное дифференціальное уравненіе можно представить въ такомъ ви-

дѣ, то его можно привести къ новому дифференціальному уравне-
нію 1-ой степени относительно произвольной. Дѣйствительно, диф-
ференцируя переня 2 уравненія, имѣемъ:

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv; \quad dy = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv.$$

Чтобы получить производную $\frac{dy}{dx}$, разлѣлимъ 2-ое равенство на
1-ое; тогда

$$\chi(u, v) = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{dv}{du}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{dv}{du}}$$

Освобождая послѣднее уравненіе отъ знаменателя, получимъ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du} = \chi(u, v) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du} \right].$$

Это дифференціальное ур-іе 1-ой степени относительно производ-
ной (въ этомъ уравненіи аргументы $u, v, \frac{dv}{du}$). Если мы проинте-
грируемъ его, то получимъ соотношеніе вида:

$$\Phi(u, v, C) = 0.$$

Присоединяя къ нему 2 первыхъ равенства:

$$x = \varphi(u, v); \quad y = \psi(u, v),$$

получимъ по исключеніи u и v общій интеграль первоначальнаго
уравненія. Обратимся къ рассмотрѣнію частныхъ случаевъ, въ ко-
торыхъ задача интеграціи сводится до конца въ квадратурахъ.

§ 9. УРАВНЕНІЯ ЛАГРАНЖА И КЛЕРО.

Разсмотримъ уравненіе первой степени относительно x и y , коэф-
фициентами при которыхъ служатъ функціи только одной производ-
ной y' . Это будетъ такъ называемое уравненіе Лагранжа. Послѣ

разрѣшенія относительно y , оно приметъ видъ

$$y = x \varphi(y') + \psi(y'). \quad (1)$$

Введя $y' = p$, мы будемъ поступать такъ, какъ поступали и раньше въ случаѣ разрѣшенныхъ относительно y уравненій. Дифференцируя по x , имѣемъ:

$$p = \varphi(p) + [\varphi'(p) x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx}.$$

Вотъ то уравненіе, которое мы получили въ результатѣ нашихъ преобразованій. Это ур-іе 1-ой степени относительно производной. Оно замѣчательно тѣмъ, что его можно проинтегрировать квадратурами. Мы можемъ считать p за независимое переменное, а x -за зависимое. Помноживъ все уравненіе на $\frac{dx}{dp}$ и перенеся всѣ члены съ этой производной, мы наше ур-іе представимъ такъ:

$$[p - \varphi(p)] \frac{dx}{dp} = \varphi'(p) x + \psi'(p),$$

или

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} x + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Мы, очевидно, получили линейное уравненіе. Оно, какъ извѣстно, интегрируется двумя квадратурами. Слѣдовательно, двумя квадратурами мы получимъ общій интеграль:

$$F(x, p, C) = 0.$$

Присоединяя къ нему уравненіе

$$y = \varphi(p) x + \psi(p),$$

и исключая изъ этихъ 2-хъ уравненій p , получимъ:

$$\varphi(x, y, C) = 0$$

- общій интеграль даннаго уравненія

Разсмотримъ примѣръ на уравненіе Лагранжа:

$$y = 2xy' + y'^3 .$$

Вводя обозначеніе p вмѣсто y' ,

$$y = 2px + p^3 ;$$

дифференцируя по x , получимъ:

$$p = 2p + (2x + 3p^2) \frac{dp}{dx} \quad \text{или} \quad p \frac{dx}{dp} + 2x + 3p^2 = 0,$$

или раздѣливъ его на p :

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p} x + 3p = 0.$$

Общій интегралъ этого уравненія есть:

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{3}{4} p^2 .$$

Присоединяя сюда $y = 2px + p$ и исключая изъ нихъ p , получаемъ общій интегралъ даннаго уравненія. Можно сохранить эти 2 равенства и сказать, что они опредѣляютъ общій интегралъ даннаго уравненія.

Обращаемся къ частному случаю ур-ія Лагранжа. Предположимъ, что

$$\psi(y') = y' .$$

Уравненія такого типа носятъ названіе уравненій К л е р о.

Итакъ, пусть

$$y = xy' + \psi(y') \quad (2)$$

Пробуемъ примѣнить къ нему предшествующій методъ. Обозначая y' черезъ p , имѣемъ:

$$y = px + \psi(p).$$

Дифференцируя по x , получаемъ:

$$p = p + [x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx} .$$

Полученный результатъ отличается отъ предшествующихъ тѣмъ, что членъ свободный отъ $\frac{dp}{dx}$ уничтожается и все уравненіе прини-

$$[x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0.$$

Уравненію этому мы удовлетворимъ, если обратимъ одинъ изъ факторовъ въ 0. Итакъ, намъ надо разсматривать 2 предположенія .

Во 1-хъ, когда $\frac{dp}{dx} = 0$, и во 2-хъ, когда:

$$x + \psi'(p) = 0. \quad (3)$$

Первое изъ нихъ даетъ $p = C$. Это есть общій интеграль преобразованнаго уравненія. Чтобы получить общій интеграль даннаго уравненія, надо къ нему присоединить:

$$y = px + \psi(p)$$

и исключить p . Тогда получаемъ

$$y = Cx + \psi(C).$$

Это общій интеграль даннаго уравненія. Итакъ: если намъ дано уравненіе Клеро, то для того, чтобы найти общій интеграль его, надо y' замѣнить въ уравненіи произвольнымъ постояннымъ C . Обращаемся ко 2-му предположенію. Здѣсь p получаетъ значеніе функціи x , свободное отъ C . Но p - новое переменное, которое надо исключить. Присоединимъ къ выраженію, найденному для p изъ (3), уравненіе:

$$y = px + \psi(p)$$

и исключимъ изъ нихъ p . Послѣ этого получимъ соотношеніе между x и y , но свободное отъ C . Это соотношеніе будетъ также интеграломъ даннаго уравненія, но не общимъ. Онъ будетъ:

$$y = p(x) \cdot x + \psi[p(x)].$$

при чемъ $p(x)$ - то значеніе p , которое получается изъ уравненія (3). Не трудно убѣдиться въ томъ, что это соотношеніе не можетъ получиться изъ общаго интеграла ни при какомъ постоянномъ значеніи C . Мы знаемъ, что общій интеграль даетъ частные

интегралы, если мы C даемъ частныя постоянныя значенія. Такимъ образомъ послѣднее соотношеніе, къ которому мы пришли изъ 2-го предположенія (приравнявъ 1-й факторъ 0), не есть частный интегралъ. Онъ изъ общаго не получается. Такимъ образомъ второй интегралъ будетъ интегралъ особый, не получаемый изъ общаго ни при какомъ частномъ постоянномъ значеніи постояннаго C . Посмотримъ, какъ его получить. Для полученія его мы исключали p изъ 2-хъ уравненій. Если мы p обозначимъ черезъ C , то эти уравненія будутъ:

$$y = Cx + \psi(C); \quad 0 = x + \psi'(C).$$

Первое изъ нихъ совпадаетъ съ общимъ интеграломъ, второе же получится изъ перваго, если мы въ немъ будемъ x и y рассматривать какъ параметры и пролифференцируемъ по C . Итакъ, для того, чтобы получить особый интегралъ уравненія Клеро, надо пролифференцировать общій интегралъ по C и изъ 2-хъ уравненій исключить C . Приемъ, который казался пригоднымъ для нахождения особаго интеграла уравненія Клеро, какъ увидимъ дальше, есть общій приемъ нахождения особаго интеграла; есть только уравненіе, вообще, допускаетъ особый интегралъ. Возьмемъ примѣръ:

$$y = xy' + \frac{1}{2y'};$$

по предидущему общій интегралъ будетъ:

$$y = Cx + \frac{1}{2C};$$

чтобы найти особый интегралъ, надо взять уравненія:

$$y = Cx + \frac{1}{2C} \quad \text{и} \quad 0 = x - \frac{1}{2C^2}$$

и исключите изъ нихъ C . Опредѣливъ изъ 2-го C и вставивъ его значеніе въ 1-ое, имѣемъ:

$$y = \frac{x}{\sqrt{2x}} + \frac{\sqrt{2x}}{2} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$$

откуда $y = \sqrt{2x}$ или $y^2 = 2x$. Это и есть особый интеграль. Онъ не получается изъ общаго ни при какомъ численномъ значеніи C .

Результаты, полученные при рѣшеніи уравненія Клеро, по - лучаютъ простое геометрическое толкованіе. Если переменныя x и y мы будемъ разсматривать, какъ Декартовы координаты, то общій интеграль

$$y = Cx + \psi(C)$$

будетъ уравненіемъ с е м е й с т в а различныхъ прямыхъ ли - ній. Посмотримъ, что будетъ представлять изъ себя уравненіе особаго интеграла. Для полученія послѣдняго мы писали уравне - нія

$$y = Cx + \psi(C) \quad \text{и} \quad 0 = x + \psi'(C)$$

и затѣмъ исключали C . Точно такимъ путемъ мы находимъ уравне - ніе огибающей семейства съ однимъ параметромъ. Такимъ образомъ мы будемъ имѣть огибающую кривую и ея касательная, которая и образуютъ данное семейство прямыхъ. Уравненіе каждой касатель - ной въ отдѣльности даетъ частный интеграль, а ур-іе огибающей даетъ особый интеграль. Въ томъ частномъ случаѣ, который мы имѣли въ примѣрѣ, огибающей будетъ парабола. Примѣняя сказан - ное выше сюда, скажемъ, что ур-іе параболы - особый интеграль, а совокупность ея касательныхъ даетъ общій.

Этимъ мы заканчиваемъ разсмотрѣніе частныхъ случаевъ уравненій 1-го порядка и переходимъ далѣе къ ихъ общей теоріи. Ближайшая наша задача будетъ состоять въ томъ, чтобы показать, что ур-іе 1-го порядка допускаетъ общій интеграль. Положеніе это было впервые доказано Cauchy.

Мы докажемъ эту теорему для болѣе общаго случая, а именно мы рассмотримъ не одно уравненіе, а цѣлую систему уравненій 1-го порядка, и докажемъ существованіе рѣшеній этой системы.

§ 10. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПИКАРА СУЩЕСТВОВАНІЯ ИНТЕГРАЛА ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО УРАВНЕНІЯ (ТЕОРЕМА КОШИ).

Рассмотримъ систему уравненій:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, \dots, u); \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, \dots, u); \dots \frac{du}{dx} = f_n(x, y, z, \dots, u) \quad (1)$$

Въ этой системѣ одно независимое переменное x , а y, z, \dots, u — n функций этого переменнаго. Пусть для нѣкотораго численнаго значенія $x = x_0$ даны всѣ численныя значенія нашихъ функций

$$y = y_0, \quad z = z_0, \quad \dots, \quad u = u_0. \quad (A)$$

Требуется опредѣлить функции y, z, \dots, u , удовлетворяющія системѣ (1) и принимающія при $x = x_0$ заданныя значенія. Докажемъ существованіе таксго рѣшенія y, z, \dots, u нашей системы и притомъ единственнаго. При этомъ намъ нужно оговорить, какого рода наши уравненія (1), т.е. какія функции стоятъ въ правой части.

Предположимъ, что намъ дана область измѣненій переменнаго. Пусть эта область дана около x_0 , т.е. мы рассматриваемъ всѣ значенія x отъ $x_0 - a$ до $x_0 + a$. Точно такъ же ограничимъ область измѣненій функций y, z, \dots, u . Будемъ рассматривать измѣненія функций:

$$\begin{aligned} y &\text{ отъ } y_0 - b \text{ до } y_0 + b \\ z &\text{ отъ } z_0 - c \text{ до } z_0 + c \quad \text{и т.д.} \\ &\dots\dots\dots \\ u &\text{ отъ } u_0 - k \text{ до } u_0 + k \end{aligned}$$

Такимъ образомъ нами выдѣлена нѣкоторая область D измѣненій пе-

ремѣнныхъ x, y, z, \dots, u . Для каждаго переменнаго даны предѣлы. Рассматривая эту область \mathcal{D} , скажемъ, что въ ней функціи f_1, f_2, \dots, f_n должны быть конечными непрерывными функціями $(n+1)$ аргументовъ x, y, z, \dots, u . Добавимъ еще второе требованіе. Если допустимъ, что функція f_i дифференцируема по любому изъ аргументовъ y, z, \dots, u , т.е. что существуетъ частныя производныя функціи f_i по аргументамъ y, z, \dots, u и что эти производныя конечны и непрерывны въ области \mathcal{D} , то для каждой изъ производныхъ

$$\frac{\partial f_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial z}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f_i}{\partial u}$$

можно установить въ области \mathcal{D} высшій предѣлъ ея абсолютной величины, т.е. можемъ указать такіа положительныя числа A, B, \dots, K , что въ области \mathcal{D} все время

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial y} \right| < A; \quad \left| \frac{\partial f_i}{\partial z} \right| < B; \dots \dots \dots \left| \frac{\partial f_i}{\partial u} \right| < K,$$

и затѣмъ, применяя къ функціямъ f_i теорему о конечномъ приращеніи, возьмемъ разность значеній какой-нибудь функціи f_i для одного и того же x -а и различныхъ y, z, \dots, u , т.е. возьмемъ разность

$$f_i(x, y', z', \dots, u') - f_i(x, y, z, \dots, u),$$

если x, y', z', \dots, u' и y, z, \dots, u лежатъ въ упомянутой области \mathcal{D} , то эта разность по теоремѣ о конечномъ приращеніи представится такъ:

$$(y' - y) \left(\frac{\partial f_i}{\partial y} \right) + (z' - z) \left(\frac{\partial f_i}{\partial z} \right) + \dots + (u' - u) \left(\frac{\partial f_i}{\partial u} \right), \quad (2)$$

гдѣ производныя $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial f_i}{\partial z} \right), \dots, \left(\frac{\partial f_i}{\partial u} \right)$ взяты для значеній $y = \eta, z = \xi, \dots, u = \omega$ и η, ξ, \dots, ω заключаются между y и y', z и z', \dots, u и u' . Абсолютная величина разности

$$\left| f_i(x, y', z', \dots, u') - f_i(x, y, z, \dots, u) \right|$$

будет равна абсолютной величине суммы (2). Далее, так как абсолютная величина суммы меньше суммы абсолютных величин слагаемых, то мы будем иметь:

$$|f_i(x, y', z', \dots, u') - f_i(x, y, z, \dots, u)| < A |y' - y| + B |z' - z| + \dots + K |u' - u| \quad (3)$$

Итак, мы будем иметь также неравенство (3), раз только существуют конечные, непрерывные производные в области \mathcal{D} . Но если известно только, что существует неравенство (3), то функции f_i могут и не быть дифференцируемыми. Поэтому требование о существовании частных производных мы заменим требованием о существовании неравенства (3) в области \mathcal{D} . Итак, второе требование формулируется так: существует ряд таких положительных чисел A, B, C, \dots , что в области \mathcal{D} существует неравенство:

$$|f_i(x, y', z', \dots, u') - f_i(x, y, z, \dots, u)| < A |y' - y| + B |z' - z| + \dots + K |u' - u|.$$

Мы будем предполагать, что для всех значений аргументов в указанной области все наши функции f_i удовлетворяют этому требованию. Это условие называется условием Липшица (Lipschitz). При наличии таких условий мы можем сказать такую теорему: для всех значений x — а есть $x_0 - h$ до $x_0 + h$, где h наименьшее из чисел ряда:

$$a, \frac{b}{M}, \frac{c}{M}, \dots, \frac{n}{M}$$

существует единственная система функций y, z, \dots, u , удовлетворяющих системе (1) и при $x = x_0$ принимающих данные значения y_0, z_0, \dots, u_0 . Причем M превосходит наибольший из максимумов абсолютных величин функций f_i в данной области \mathcal{D} , т.е. M также положительное число, что для каждой функции f_i :

$$|f_i(x, y, z, \dots, u)| < M$$

для всех значений аргументов в этой области. Доказательство

этой теоремы изложимъ слѣдующая П и к а р у. Искомыя рѣшенія мы будемъ находить методомъ послѣдовательныхъ приближеній. За начальное приближеніе къ функциямъ y, z, u, \dots можно считать y_0, z_0, u_0, \dots (постоянныя). Назовемъ это приближеніе нулевымъ или нулевого порядка. - Ищемъ теперь первое приближеніе y_1, z_1, u_1, \dots .

Мы ихъ такъ опредѣлимъ:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_0, \dots, u_0); \quad \frac{dz_1}{dx} = f_2(x, y_0, \dots, u_0), \dots \dots$$

$$\frac{du_1}{dx} = f_n(x, y_0, \dots, u_0) \quad (4)$$

Правыя части суть данныя функции х-а. Функции y, z, \dots опредѣляются изъ этихъ дифференціальныхъ уравненій и условій, что при $x = x_0, \quad y_1 = y_0, \quad z_1 = z_0, \dots, u_1 = u_0$

Ихъ не трудно найти квадратурами. Имѣемъ, очевидно,

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f_1(x, y_0, z_0, \dots, u_0) dx,$$

такъ какъ при $x = x_0$ предѣлы интеграла равны и интегралъ равенъ нулю. Аналогично:

$$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^x f_2(x, y_0, z_0, \dots, u_0) dx \quad \text{и т.д.}$$

Такимъ образомъ мы нашли функции х-а. y_1, z_1, \dots, u_1 . Это будетъ первое приближеніе. Помощью ихъ найдемъ также второе приближеніе, которое назовемъ y_2, z_2, \dots, u_2 . Это будетъ рядъ функций х-а, которыя принимаютъ данныя значенія y_0, z_0, \dots, u_0 при $x = x_0$ и удовлетворяютъ системѣ уравненій:

$$\frac{dy_2}{dx} = f_1(x, y_1, z_1, \dots, u_1); \quad \frac{dz_2}{dx} = f_2(x, y_1, z_1, \dots, u_1), \dots \dots$$

$$\frac{du_2}{dx} = f_n(x, y_1, z_1, \dots, u_1) \quad (5)$$

Правыя части опять данныя функции х-а; слѣдовательно y_2, z_2, \dots, u_2 найдутся квадратурами:

$$y_2 - y_0 = \int_{x_0}^x f_1(x, y_1, z_1, \dots, u_1) dx; \quad z_2 - z_0 = \int_{x_0}^x f_2(x, y_1, z_1, \dots, u_1) dx$$

и т.д.

Такимъ образомъ мы нашли функціи х-а y_2, z_2, \dots, u_2 , которыя удовлетворяютъ начальному условію (А). Мы можемъ продолжать такъ далѣе и по каждому приближенію находить слѣдующее указаннымъ путемъ. Пусть мы уже нашли приближенія $y_{m-1}, z_{m-1}, \dots, u_{m-1}$.

Съ помощью ихъ найдемъ нынѣ приближенія: y_m, z_m, \dots

Для этого имѣемъ рядъ слѣдующихъ равенствъ:

$$\frac{dy_m}{dx} = f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \dots, u_{m-1}); \quad \frac{dz_m}{dx} = f_2(x, y_{m-1}, \dots, u_{m-1}),$$

$$\frac{du_m}{dx} = f_n(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \dots, u_{m-1}). \quad (6)$$

Точно также присоединяя сюда условія (А), мы найдемъ y_m, z_m, \dots, u_m квадратурами:

$$y_m - y_0 = \int_{x_0}^x f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \dots, u_{m-1}) dx \quad \text{и т.д.}$$

Процессъ этотъ можно продолжать неограниченно, и мы будемъ получать приближенія все большаго и большаго индекса m . Намъ теперь надо доказать, что при всѣхъ значеніяхъ х-а отъ $x_0 - h$ до $x_0 + h$ значенія всѣхъ функцій: y_m, z_m, \dots, u_m не будутъ выходить изъ области D . Во 2-хъ докажемъ, что всё эти функціи заслуживаютъ названія приближеній, т.е. что, увеличивая m , мы будемъ приближаться къ нѣкоторымъ определеннымъ предѣламъ, т.е. мы

будемъ имѣть, что $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m(x) = Y(x); \quad \lim_{m \rightarrow \infty} z_m(x) = Z(x)$

и т.д., при чемъ функціи Y, Z, \dots, U будутъ искомыми рѣшеніями, т.е. онѣ будутъ удовлетворять системѣ (1) и условіямъ (А). Докажемъ прежде всего, что значенія функцій не выходятъ изъ области D ; y_0, z_0, \dots, u_0 лежатъ въ этой области; обращаемся къ равен-

ствамъ:

$$y_1 - y_0 = \int_{x_0}^x f_1(x, y_0, z_0, \dots, u_0) dx \quad \text{и т.д.}$$

Абсолютная величина интеграла будетъ меньше, чѣмъ произведение абсолютной величины подынтегральной функціи на абсолютную величину разности предѣловъ интеграла, и неравенство усилится, если мы абсолютную величину подынтегральной функціи замѣнимъ вышеупомянутымъ числомъ M ; т.е.

$$|y_1 - y_0| < M|x - x_0| < Mh,$$

такъ какъ x далѣе, чѣмъ на h отъ x_0 , не уходитъ. Точно такъ же

$$|z_1 - z_0| < M|x - x_0| < Mh \text{ и т.д.}$$

Но h - наименьшее изъ чиселъ ряда $a, \frac{b}{M}, \frac{c}{M}, \dots, \frac{\kappa}{M}$ и, слѣдовательно,

$$Mh \leq b, \quad Mh \leq c, \quad \dots \quad Mh \leq \kappa,$$

слѣдовательно $|y_1 - y_0| < b$; $|z_1 - z_0| < c$ и т.д.

Такимъ образомъ мы доказали, что y_1, z_1, \dots, u_1 не выходятъ изъ установленной области. Далѣе докажемъ, что въ этой области находятся также y_2, z_2, \dots, u_2 . Для этого мы рассмотримъ равенства: $y_2 - y_0 = \int_{x_0}^x f_1(x, y_1, z_1, \dots, u_1) dx$; $z_2 - z_0 = \int_{x_0}^x f_2(x, y_1, z_1, \dots, u_1) dx$ и т.д.; x не выходитъ по предположенію изъ области \mathcal{D} ; относительно y_1, z_1, \dots, u_1 мы доказали принадлежность ихъ къ области, а потому, какъ и раньше, имѣемъ:

$$|y_2 - y_0| < M|x - x_0| < Mh; \quad |z_2 - z_0| < M|x - x_0| < Mh$$

и т.д. Вспоминая теперь, какъ выбирали h , мы придемъ къ тому же результату, что и раньше, а именно:

$$|y_2 - y_0| < b; \quad |z_2 - z_0| < c \text{ и т.д.,}$$

т.е. y_2, z_2, \dots, u_2 не выходятъ изъ области \mathcal{D} . Продолжая такія разсужденія далѣе, мы увидимъ, что разъ будетъ доказано для u_{m-1}

z_{m-1}, \dots, u_{m-1} , что онѣ не выходятъ изъ области, то можно будетъ

показать, что y_m, z_m, \dots, u_m также не выходят из области. Действительно, по ихъ выраженіямъ мы найдемъ:

$$|y_m - y_0| < M|x - x_0| < Mh; \quad |z_m - z_0| < M|x - x_0| < Mh \text{ и т. д.}$$

$$\text{или } |y_m - y_0| < b; \quad |z_m - z_0| < c \quad \text{и т. д.}$$

ибо Mh меньше любого изъ этихъ чиселъ. Итакъ мы доказали, что всѣ функции, которыя мы брали, для всѣхъ значеній x -а отъ $x_0 - h$ до $x_0 + h$ не выходятъ изъ установленной области. Далѣе, намъ надо доказать, что эти приближенія стремятся къ опредѣленнымъ предѣламъ. Для доказательства рассмотримъ разности послѣдова- тельныхъ приближеній, а именно разности каждаго приближенія со своимъ предидущимъ. Одну изъ такихъ разностей мы уже разсматривали и доказали, что

$$|y_1 - y_0| < M|x - x_0|;$$

точно такъ же и $|z_1 - z_0| < M|x - x_0|$ и т. д.

Переходимъ къ слѣдующимъ разностямъ этого типа. Рассмотримъ $y_2 - y_1$. Мы имѣли выраженіе для $y_2 - y_0$ и для $y_1 - y_0$; вычитая изъ первой разности вторую, мы получимъ въ правой части разность двухъ интеграловъ, а такъ какъ предѣлы ихъ общіе, то будемъ имѣть, что:

$$y_2 - y_1 = \int_{x_0}^x \{f_1(x, y_1, z_1, \dots, u_1) - f_1(x, y_0, z_0, \dots, u_0)\} dx;$$

аналогично найдемъ выраженіе для $z_2 - z_1$ и др. Замѣтимъ, что подынтегральная функция есть разность значеній функции f_1 для одного и того же значенія x , но различныхъ y, z, \dots, u . Всѣ аргументы находятся въ области \mathcal{D} и для абсолютной величины разности можно воспользоваться неравенствомъ Липшица. Заменяя подынтегральную разность ея абсолютной величиной, мы абсолютную величину интеграла увеличимъ. Она еще болѣе увеличится,

если абсолютную величину подынтегральной разности мы замѣнимъ количествомъ большимъ, пользуясь условіемъ Липшица; итакъ:

$$|y_2 - y_1| < \left| \int_{x_0}^x \{ A |y_1 - y_0| + B |z_1 - z_0| + \dots + K |u_1 - u_0| \} dx \right|$$

Мы видѣли, что абсолютныя величины разностей $|y_1 - y_0|$, $|z_1 - z_0|$ и т.д. менѣе $M|x - x_0|$, а потому неравенство усилится, если мы замѣнимъ въ немъ эти разности черезъ $M|x - x_0|$. При этомъ можно будетъ взять за знакъ интеграла $M\theta$, гдѣ черезъ θ мы обозначимъ слѣдующую сумму:

$$\theta = A + B + C + \dots + K.$$

Тогда будемъ имѣть:

$$(y_2 - y_1) < M\theta \left| \int_{x_0}^x (x - x_0) dx \right|;$$

интеграцію нетрудно выполнить, и тогда получимъ:

$$M\theta \frac{|x - x_0|^2}{1.2}.$$

Вотъ окончательный предѣлъ для $|y_2 - y_1|$; тотъ же самый предѣлъ будетъ для абсолютныхъ величинъ разностей:

$$|z_2 - z_1|, \dots, |u_2 - u_1|.$$

Итакъ, мы имѣемъ:

$$|y_2 - y_1| < M\theta \cdot \frac{|x - x_0|^2}{1.2}; \quad |z_2 - z_1| < M\theta \cdot \frac{|x - x_0|^2}{1.2}$$

и такъ далѣе. Переходимъ далѣе къ вычисленію выраженія разности $y_3 - y_2$, она будетъ также выражаться интеграломъ и будетъ:

$$y_3 - y_2 = \int_{x_0}^x \{ f_1(x, y_2, z_2, \dots, u_2) - f_1(x, y_1, z_1, \dots, u_1) \} dx.$$

Опредѣляя абсолютную величину $|y_3 - y_2|$, замѣнимъ подынтегральную разность ея абсолютнымъ значеніемъ, и примѣняя неравенство Липшица, по предыдущему, получимъ:

$$|y_3 - y_2| < \left| \int_{x_0}^x \{ A |y_2 - y_1| + B |z_2 - z_1| + \dots + K |u_2 - u_1| \} dx \right|.$$

Мы усилимъ неравенство, если произведемъ слѣдующую замѣну: все -

демъ въ послѣдній интегралъ вмѣсто предыдущихъ разностей

$$|y_2 - y_1|, |z_2 - z_1|, \dots \text{ выражение } M\theta \frac{|x-x_0|^2}{1.2}$$

тогда будемъ имѣть:

$$|y_3 - y_2| < M\theta^2 \left| \int_{x_0}^x \frac{(x-x_0)^2}{1.2} dx \right| = M\theta^2 \frac{|x-x_0|^3}{1.2.3}$$

То же самое получимъ для $|z_3 - z_2|$ и др. Слѣдовательно, мы будемъ имѣть вгруппу неравенствъ такого типа:

$$|y_3 - y_2| < M\theta^2 \frac{|x-x_0|^3}{1.2.3}$$

Эти вычисления можемъ продолжать и далѣе. По аналогіи видно, каковы будутъ результаты. Такимъ образомъ, мы придемъ къ группѣ такихъ неравенствъ:

$$|y_m - y_{m-1}| < M\theta^{m-1} \frac{|x-x_0|^m}{m!}$$

Не трудно доказать, что эта формула общая. Предполагая, что предыдущія неравенства:

$$|y_{m-1} - y_{m-2}| < M\theta^{m-2} \frac{|x-x_0|^{m-1}}{(m-1)!}$$

существуютъ, имѣемъ:

$$|y_m - y_{m-1}| = \int_{x_0}^x \{f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \dots, u_{m-1}) - f_1(x, y_{m-2}, z_{m-2}, \dots, u_{m-2})\} dx$$

Примѣняя условіе Липшица, найдемъ:

$$|y_m - y_{m-1}| < \left| \int_{x_0}^x \{A|y_{m-1} - y_{m-2}| + B|z_{m-1} - z_{m-2}| + \dots + K|u_{m-1} - u_{m-2}|\} dx \right| ;$$

такъ какъ для разностей типа $|y_{m-1} - y_{m-2}|$ формулы уже выведены, то

$$|y_m - y_{m-1}| < M\theta^{m-1} \left| \int_{x_0}^x \frac{|x-x_0|^{m-1}}{(m-1)!} dx \right| = M\theta^{m-1} \frac{|x-x_0|^m}{m!}$$

Итакъ мы имѣемъ:

$$|y_m - y_{m-1}| < M\theta^{m-1} \frac{|x-x_0|^m}{m!} ; |z_m - z_{m-1}| < M\theta^{m-1} \frac{|x-x_0|^m}{m!} \text{ и т.д.}$$

что и требовалось доказать. Разсмотримъ далѣе такой рядъ:

$$y_1 + (y_1 - y_2) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \dots + (y_m - y_{m-1}) + \dots \quad (7)$$

Всѣ члены этого ряда функции x-а. Разсмотримъ сумму (m+1) чле -

новъ этого ряда. Называя ее черезъ S_m , будемъ имѣть:

$$S_m = y_0 + y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + y_3 - y_2 + \dots + y_m - y_{m-1} = y_m$$

Сумма конечнаго числа членовъ равна y_m . Предположимъ, что мы

доказали сходимость ряда (7). Онъ будетъ сходящимся, если существуетъ:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S$$

Такимъ образомъ, если мы докажемъ сходимость ряда, то мы докажемъ, что существуетъ предѣлъ:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y_m = Y(x)$$

Точно такъ же мы будемъ поступать для доказательства существованія предѣла $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = Z(x)$ и т.д.

Чтобы доказать сходимость нашего ряда, сравнимъ его съ

другимъ. Возьмемъ рядъ:

$$M \frac{|x-x_0|}{1} + M\theta \frac{|x-x_0|^2}{1.2} + M\theta^2 \frac{|x-x_0|^3}{1.2.3} + \dots + M\theta^{m-1} \frac{|x-x_0|^m}{m!} + \dots \quad (8)$$

Если теперь къ этой суммѣ прибавимъ $\frac{M}{\theta}$ и весь рядъ умножимъ на θ и раздѣлимъ на M , то будемъ имѣть разложеніе показательной

функции $e^{\theta|x-x_0|}$. Слѣдовательно, до нашихъ преобразованій

рядъ (8) равенъ:

$$M \frac{e^{\theta|x-x_0|} - 1}{\theta} = \frac{M}{\theta} e^{\theta|x-x_0|} - \frac{M}{\theta}$$

Рядъ (8), который мы получаемъ изъ разложенія показательной функции, заведомо сходящійся. Все члены его положительны, и онъ

будетъ равномерно сходящимся. Сравнимъ теперь этотъ рядъ съ на-

шимъ. Если мы имѣемъ сходящійся рядъ съ положительными членами

и затѣмъ другой рядъ, абсолютныя величины членовъ котораго

меньше соответствующихъ членовъ предлагаемаго ряда, то этотъ рядъ

будетъ также сходиться; въ силу этого будетъ сходиться и нашъ

рядъ (7), а такжъ очевидно и рядъ:

$$y_0 + |y_1 - y_0| + |y_2 - y_1| + \dots + |y_m - y_{m-1}| + \dots$$

т.е. рядъ (7) будетъ сходящійся "абсолютно". Кроме того, онъ будетъ сходящійся и равномерно, т.к. члены его по абсолютной величинѣ меньше членовъ ряда (8), который - равномерно-сходящійся. Такимъ образомъ рядъ нашъ сходитсѣ равномерно и абсолютно. Разъ такъ, то по предыдущему существуетъ предѣлъ для

$$\lim y_m = Y(x),$$

и функція эта будетъ непрерывна, т.к. если мы имѣемъ равномерно сходящійся рядъ, при чемъ всѣ члены - функціи непрерывныя, то сумма его будетъ непрерывная функція, а всѣ члены нашего ряда были непрерывныя функціи, такъ какъ они выражались интегралами, у которыхъ подынтегральныя функціи f_i непрерывныя функціи своихъ аргументовъ и аргументы сами по себѣ тоже непрерывныя функціи x . Въ послѣднемъ можно убѣдиться изъ разсмотрѣнія постепеннаго ихъ полученія. Дѣйствительно: y_1, z_1, \dots, u_1 - непрерывныя функціи; слѣдовательно y_2, z_2, \dots, u_2 тоже непрерывны, т.к. они получаются квадратурой непрерывныхъ функцій и т.д. Итакъ, мы доказали существованіе предѣла для y ; точно такъ же докажемъ

$$\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = Z(x)$$

гдѣ $Z(x)$ - непрерывная функція и т.д. Теперь остается посмотрѣть, удовлетворяютъ ли эти функціи начальнымъ условіямъ (A) и дифференціальнымъ уравненіемъ (1). Первому условію всѣ найденныя функціи удовлетворяютъ, т.к. для $x=x_0$ любая функція

$$y_m(x_0) = y_0.$$

Слѣдовательно и въ предѣлѣ

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y_m(x_0) = y_0,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} z_m(x_0) = z_0 \quad \text{и т.д.}$$

Остается проверить, удовлетворяют ли они нашим дифференциальным уравнениям. Напишем те уравнения, которыми удовлетворяют наши приближения.

$$\frac{dy_m}{dx} = f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \dots, u_{m-1}); \frac{dz_m}{dx} = f_2(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \dots, u_{m-1})$$

и т.д., или после интегрирования:

$$y_m - y_0 = \int_{x_0}^x f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \dots, u_{m-1}) dx.$$

и перейдем к предѣлу; $y_{m-1}, z_{m-1}, \dots, y_m, z_m, \dots$ стремятся каждая къ определенному предѣлу, т.е. взявъ достаточно большіе, можно сказать, что для любого значенія x -а

$$\begin{aligned} |y(x) - y_{m-1}(x)| < \varepsilon & \quad |z(x) - z_{m-1}(x)| < \varepsilon \\ |y(x) - y_m(x)| < \varepsilon & \quad |z(x) - z_m(x)| < \varepsilon \end{aligned} \quad \text{и т.д.}$$

гдѣ ε - произвольно мало. Принимая это во вниманіе, мы можем предыдущее равенство переписать такъ:

$$(y_m - y) + (y - y_0) = \int_{x_0}^x \{f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \dots) - f_1(x, y, z, \dots, u)\} dx + \int_{x_0}^x f_1(x, y, z, \dots, u) dx.$$

Первая разность въ скобкахъ слѣва и разность интеграловъ справа обращаются въ предѣлѣ въ 0. Дѣйствительно, въ силу условій Липшица (которыя здѣсь можно примѣнить)

$$\left| \int_{x_0}^x \{f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \dots) - f_1(x, y, z, \dots, u)\} dx \right| < \left| \int_{x_0}^x \{A|y_{m-1} - y| + B|z_{m-1} - z| + \dots\} dx \right|.$$

Множители при A, B, \dots меньше ε ; замѣняя ихъ черезъ ε , мы усилимъ неравенство, которое по выполненіи интеграцій даетъ намъ, что лѣвая часть $< \theta \varepsilon |x - x_0|$. Понятно, что благодаря произволу выбора ε , правую часть можно сдѣлать какъ угодно малой и слѣдовательно въ предѣлѣ для $m = \infty$

$$\lim \int_{x_0}^x \{f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \dots, u_{m-1}) - f_1(x, y, z, \dots, u)\} dx = 0.$$

Слѣдовательно въ предѣлѣ обратятся въ нуль: слѣва первая разность, справа разность интеграловъ, и мы получимъ:

$$y - y_0 = \int_{x_0}^x f_1(x, y, z, \dots, u) dx.$$

Дифференцируя это равенство, имѣемъ

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, \dots),$$

т.е. мы видимъ, что найденная функция y удовлетворяетъ первому изъ нашихъ дифференціальныхъ уравненій. Точно такъ же докажемъ, что эти функции удовлетворяютъ и остальнымъ ур-ямъ. Такимъ образомъ мы доказали, что функции y, z, \dots, u непрерывны, принимаютъ заданныя начальныя значенія и что онѣ удовлетворяютъ даннымъ дифференціальнымъ ур-ямъ (1). Теперь надо показать, что эта система единственная, что другихъ рѣшеній, которыя удовлетворяли бы тѣмъ же условіямъ (A) - нѣтъ. Замѣтимъ, что y, z, \dots, u , необходимо непрерывныя функции, имѣющія непрерывныя производныя (последнее вытекаетъ изъ того, что эти производныя выражаются написанной выше системой дифференціальныхъ ур-ій). Положимъ, мы нашли одну такую систему рѣшеній:

$$y(x), \quad z(x), \dots, u(x) \quad (I)$$

и пусть существуетъ другая система рѣшеній:

$$Y(x), \quad Z(x), \dots, U(x) \quad (II)$$

при чемъ $x = x_0$ системы (I) и (II) совпадаютъ, для другихъ же значеній x -а онѣ вообще различны. Выдѣлимъ промежутокъ для измененія x -а отъ $x_0 - h$ до $x_0 + h$. Геометрически это значитъ, что мы рассматриваемъ значенія x -а на отрѣзкѣ АВ. При этомъ h не



должно превышать того значенія h ,

которымъ, мы выше ограничили область для измененій x -а. Разсмотр-

римв слѣдующія абсолютныя величины разностей:

$$|Y(x) - y(x)|; |Z(x) - z(x)| \dots |U(x) - u(x)| \quad (III)$$

Всѣ эти абсолютныя величины разностей будутъ непрерывныя функціи x -а. Такимъ образомъ мы имѣемъ рядъ положительныхъ (такъ какъ берутся абсолютныя величины) непрерывныхъ функцій; при $x = x_0$ всѣ онѣ равны 0. Въ такомъ случаѣ при измѣненіи x въ данной области можно найти максимумъ для каждой изъ нихъ. Укажемъ эти максимумы для 1-ой, 2-ой и т.д. разностей. Пусть они будутъ соответственн~~о~~ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. При этомъ всѣ эти ξ_i максимумы, которыхъ достигаютъ наши функціи. Выберемъ изъ нихъ наибольшій. Пусть наибольшій изъ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ будетъ ξ , тогда для всякаго ξ_i

$$\xi_i \leq \xi.$$

Изъ функцій ряда (III), по крайней мѣрѣ, одна достигаетъ этого значенія ξ при нѣкоторомъ x ; ξ - положительное число, или нуль, если всѣ функціи (I), (II) совпадаютъ. Далѣе, рассмотримъ производныя тѣхъ разностей, абсолютныя величины которыхъ мы ранѣе вписали:

$$\frac{d(Y-y)}{dx} = f_1(x, y, z, \dots, u) - f_1(x, y, z, \dots, u)$$

$$\frac{d(Z-z)}{dx} = f_2(x, y, z, \dots, u) - f_2(x, y, z, \dots, u) \quad \text{и т.д.}$$

Если теперь проинтегрируемъ эти равенства, то получимъ упомянутыя разности. Интегрируемъ ихъ въ предѣлахъ x и x_0 (при $x = x_0$ получимъ 0 ибо для $x = x_0$ функціи совпадаютъ). Будемъ имѣть:

$$Y - y = \int_{x_0}^x \{ f_1(x, y, z, \dots, u) - f_1(x, y, z, \dots, u) \} dx.$$

Имѣя эти выраженія, можно найти наибвысшій предѣлъ абсолютныхъ величинъ разностей $|Y - y|$ и др. Можно написать, что $|Y(x) - y(x)|$

меньше правой части послѣдняго равенства, въ которой полынте-
гральную величину замѣнимъ ея абсолютнымъ значеніемъ, а это по-
слѣднее еще большимъ, пользуясь условіемъ Липшица:

$$|y(x) - y(x_0)| < \left| \int_{x_0}^x \{ A|y - y| + B|z - z| + \dots + K|u - u| \} dx \right|.$$

Между прочимъ сейчасъ же являются ограниченія для h . Его надо
выбрать такъ, чтобы въ промежуткѣ (характеризуемомъ h) функціи
 y, z, \dots, u тоже не выходили изъ указанной области D (иначе нельзя
было бы примѣнить условіе Липшица). Но при $x = x_0$ эти функціи
совпадаютъ съ y, z, \dots, u , слѣдовательно всегда h можно подобрать
столь малымъ, чтобы функціи не выходили изъ области. Замѣнимъ
каждую изъ абсолютныхъ величинъ $|y - y|, |z - z|$ черезъ ξ , ко-
торая есть наибольшій изъ максимумовъ этихъ разностей; ξ - нѣ-
которое положительное число; его вынесемъ за скобки, тогда,
обозначивъ черезъ θ сумму:

$$A + B + \dots + K,$$

будемъ имѣть:

$$|y(x) - y(x_0)| < \theta \cdot \xi \cdot |x - x_0|.$$

Совершенно такъ же найдемъ аналогичныя неравенства для осталь-
ныхъ разностей. Итакъ, всѣ абсолютныя величины разностей:

$$|y(x) - y(x_0)|, |z(x) - z(x_0)|, \dots, |u(x) - u(x_0)|$$

меньше слѣдующаго выраженія:

$$|x - x_0| \cdot \theta \cdot \xi < h \cdot \theta \cdot \xi.$$

h пока еще произвольно. Оно только не могло быть больше нѣко-
торыхъ чиселъ. Наложимъ еще ограниченія на h . Потребуемъ, чтобы
 $h\theta$ было меньше или равно $1/2$, т.е. $h\theta \leq 1/2$. А для этого
нужно, чтобы h было $\leq \frac{1}{2\theta}$; тогда всѣ функціи (III) будутъ
меньше $1/2 \xi$. Итакъ, мы имѣемъ въ области измененія x

отъ $x_0 - h$ до $x_0 + h$:

$$|y - y'| < \frac{1}{2}\xi; \quad |z - z'| < \frac{1}{2}\xi \dots |u - u'| < \frac{1}{2}\xi.$$

Мы пришли къ противорѣчю, такъ какъ черезъ ξ мы обозначили наибольшій изъ максимум'овъ въ томъ же самомъ промежуткѣ, который мы выбрали. Выходитъ, что для функций ряда (III) наибольшій изъ максимум'овъ больше всѣхъ ихъ. Противорѣчя не будетъ, если только мы положимъ $\xi = 0$, слѣдовательно функции совпадаютъ. Итакъ, мы доказали, что для x въ промежуткѣ $x_0 - h$ и $x_0 + h$ наши функции непремѣнно совпадутъ. Теперь, какимъ же будетъ h ? Если оно прежнее, то положеніе наше будетъ доказано. Это будетъ тогда, когда новыя условія для h не будутъ стѣснять ранѣе наложенныхъ условій. Если же новыя требованія не заключаются въ прежнихъ, то еще мы не доказали совпаденія функций (I) и (II) во всемъ прежнемъ промежуткѣ. Тогда мы можемъ итти далѣе такъ: мы можемъ повторить процессъ, принимая $x_0 + h$ за новое, начальное x_0 , и повторять наши рассужденія, пока не исчерпаемъ весь промежутокъ. Такимъ образомъ мы убѣдились, что начальными данными (A) вполне опредѣляется система рѣшеній. При этомъ мы доказали существованіе рѣшенія въ некоторой области. Возникаетъ вопросъ, нельзя ли эти функции, какъ говорятъ, продолжить. Нельзя ли вычислять эти рѣшенія далѣе? Положимъ, что у насъ онѣ вычислены для промежутка $x_0 - h$, $x_0 + h$. Тогда $x_0 + h$ принимаемъ за начальное значеніе переменнаго $x_0 + h = x'_0$, тогда у насъ получится новый промежутокъ: отъ $x'_0 - h$ до $x'_0 + h$, въ которомъ можетъ опять примѣняться методъ Picard'а. Новый промежутокъ будетъ захватывать прежній, но вообще выходитъ изъ него вправо;

такимъ образомъ можемъ "продолжать" наши функціи.

Пусть теперь $n = 1$, т.е. рассмотримъ одно уравненіе пер-
ваго порядка, вида:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Примѣняя къ этому уравненію общіе результаты и при выполнении
основныхъ требованій относительно функціи $f(x, y)$, т.е. . если
функція f непрерывна, конечна и удовлетворяетъ условію Lip-
schitz' а въ области отъ $x_0 - a$ до $x_0 + a$ и отъ $y_0 - b$ до $y_0 + b$,
и если для этихъ значеній $|f(x, y)| < M$, мы получимъ, называя че-
резъ h меньшее изъ двухъ чиселъ $a, \frac{b}{M}$, для значенія x въ пре-
дѣлахъ отъ $x_0 - h$ до $x_0 + h$ (напримѣръ методомъ Picard' а) един-
ственное рѣшеніе y , которое для $x = x_0$ обращается въ y_0 . Бу-
демъ измѣнять теперь начальное значеніе y_0 ; тогда будемъ полу-
чать различныя функціи y . Вообще, мы можемъ положить:

$$y = \varphi(x, y_0),$$

гдѣ y_0 произвольный параметръ. Наше рѣшеніе есть функція x и
одного произвольнаго постояннаго. Мы приходимъ къ тому же ре-
зультату, съ котораго начали изложеніе теоріи дифференціальныхъ
уравненій. Всѣ рѣшенія, вообще говоря, исчерпываются уравнені-
емъ

$$y = \varphi(x, y_0).$$

Можетъ получиться рѣшеніе и въ другой формѣ:

$$y = \varphi(x, C).$$

гдѣ C - произвольное постоянное. Будетъ ли это общее рѣшеніе?
Вообще да, и мы можемъ дать критерій для разрѣшенія этого во-
проса. Общее рѣшеніе то, которое можетъ получаться по теоремѣ
Коши. Итакъ, вопросъ въ томъ, можемъ ли мы опредѣлить C такъ,

чтобы при $x = x_0$, было $y = y_0$. Условие

$$y_0 = \varphi(x_0, C)$$

вообще позволяет найти значение C для любого y_0 ; итакъ, наше рѣшеніе

$$y = \varphi(x, C)$$

есть также общее рѣшеніе, совпадающее съ тѣмъ, существованіе котораго мы доказали.

§ 11. ОСОБНЫЯ РѢШЕНІЯ.

Переходимъ къ изслѣдованію особыхъ рѣшеній дифференціального уравненія, т.е. такихъ рѣшеній, которыя не получаются изъ общаго ни при какихъ частныхъ значеніяхъ произвольнаго постояннаго. Пусть дифференціальное уравненіе дано въ видѣ:

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

и пусть

$$y = \varphi(x)$$

есть рѣшеніе уравненія (1). Даемъ x какое-нибудь значеніе x_0 , и вычисляемъ

$$y_0 = \varphi(x_0).$$

По теоремѣ Коши существуетъ единственнае рѣшеніе уравненія(1), которое при $x = x_0$ принимаетъ значеніе y_0 , если только въ области значеній x_0, y_0 функція $f(x, y)$ удовлетворяетъ извѣстнымъ ограниченіямъ (непрерывность, условіе Липшица). Такимъ образомъ рѣшеніе $y = \varphi(x)$,

вообще говоря, получается по теоремѣ Коши и слѣдовательно оно есть частное, получаемое изъ общаго при частномъ значеніи произвольнаго постояннаго. Если бы для выбраннаго значенія x_0 и соответствующаго y_0 функція $f(x, y)$ не удовлетворяла условіямъ

теоремы Коши, то мы могли бы изменить x_0 и такимъ образомъ въ концѣ концовъ все же получили бы:

$$y = \varphi(x)$$

какъ частное рѣшеніе по теоремѣ Коши. Отсюда ясно, что рѣшеніе

$$y = \varphi(x)$$

не получается по теоремѣ Коши и слѣдовательно можетъ быть особымъ только тогда, если для любого x и для соответствующаго

$$y = \varphi(x)$$

функция $f(x, y)$ не удовлетворяетъ условіямъ теоремы Коши. Такъ напримѣръ, если предположить, что функция $f(x, y)$ для всѣхъ конечныхъ значеній аргументовъ непрерывна и что существуетъ непрерывная частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$, то, принимая во вниманіе изложенное въ предыдущемъ параграфѣ, легко убѣдимся, что если

$$y = \varphi(x)$$

есть особое рѣшеніе, то для любого x и $y = \varphi(x)$ частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ должна обращаться въ безконечность. Въ самомъ дѣлѣ, въ противномъ случаѣ для какого-либо x_0 и

$$y_0 = \varphi(x_0)$$

функция $f(x, y)$ удовлетворяла бы условію Липшица и рѣшеніе

$$y = \varphi(x)$$

было бы частнымъ.

П Р И М Ъ Р Ъ 1.

$$y' = \sqrt{y-x} + 1.$$

Здѣсь

$$f(x, y) = \sqrt{y-x} + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y-x}}.$$

По предыдущему особое рѣшеніе можетъ получиться только изъ

требованія, чтобы $\frac{\partial f}{\partial y}$ обращалось въ бесконечность, что даетъ намъ

$$y = x.$$

При этомъ значеніи y имѣемъ:

$$y' = 1.$$

и дифференціальное уравненіе удовлетворяется; слѣдовательно, мы получили рѣшеніе уравненія. Общее рѣшеніе легко получимъ, освободя уравненіе отъ радикала и замѣчая, что оно принадлежитъ къ типу уравненій Лагранжа. Имѣемъ:

$$y = x + \frac{(x - C)^2}{4} \dots$$

Ни при какомъ постоянномъ значеніи C отсюда не получимъ $y = x$, слѣдовательно, это послѣднее рѣшеніе есть особое.

Предположимъ теперь дифференціальное уравненіе въ общемъ видѣ:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2}$$

Разрѣшая его, имѣемъ вообще нѣсколько значеній y' :

$$y' = f_i(x, y) \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \tag{3}$$

Пара значеній x_0, y_0 , слѣдовательно, опредѣляетъ здѣсь не одно рѣшеніе, а нѣсколько въ силу той же теоремы Коши, такъ какъ мы можемъ эту теорему примѣнить къ любому изъ уравненій (3). Ограничимся такими уравненіями (2), для которыхъ функція $F(x, y, y')$ конечна и непрерывна для всѣхъ конечныхъ значеній аргументовъ и допускаетъ таковыя же производныя по аргументамъ. Въ этомъ предположеніи опредѣлимъ условія, при которыхъ рѣшеніе

$$y = \varphi(x)$$

уравненія (2) можетъ быть особымъ рѣшеніемъ. По известной теоремѣ теоріи функцій уравненія (2) опредѣляетъ y' какъ функцію x и y , и эта функція $f(x, y)$ конечна и непрерывна и допускаетъ таковыя же производныя, если только для рассматриваемыхъ значеній аргу-

ментовъ частная производная $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'}$ не равна нулю. (Въ частности производная $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}$ опредѣляется изъ равенства:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = 0).$$

Такимъ образомъ, если для какого-либо x_0 и соответствующихъ

$$y_0 = \varphi(x_0) \quad \text{и} \quad y' = \varphi'(x_0)$$

частная производная $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} \neq 0$,

то рѣшеніе $y = \varphi(x)$

получается по теоремѣ Коши; такъ какъ функція

$$y' = f(x, y)$$

удовлетворяетъ для x_0, y_0 условіямъ теоремы. Отсюда заключаемъ, что если рѣшеніе

$$y = \varphi(x)$$

есть особое, то для любого x , для

$$y = \varphi(x) \quad \text{и} \quad y' = \varphi'(x)$$

должно удовлетворяться уравненіе

$$\frac{\partial \mathcal{F}(x, y, y')}{\partial y'} = 0 \tag{4}$$

Соотношеніе это имѣетъ видъ:

$$\Psi(x, y, y') = 0 \tag{4}$$

и слѣдовательно особое рѣшеніе

$$y = \varphi(x)$$

должно удовлетворять одновременно д в у м з дифференціаль - нымъ уравненіямъ (2) и (4), откуда ясно, что, вообще говоря, уравненіе (2) не допускаетъ особыхъ рѣшеній.

Исключивъ y' изъ уравненій (2) и (4), придемъ къ одному уравненію

$$\mathcal{R}(x, y) = 0. \tag{5}$$

которое должно удовлетворяться для $y = \varphi(x)$ в случае существования особого решения; таким образом равенство (5) в этом случае есть особый интеграл. Но, вообще говоря, соотношение (5) не есть вовсе интеграл уравнения (2) и y , определенное из уравнения (5), не удовлетворяет данному дифференциальному уравнению. Истолковывая x, y как Декартовы координаты на плоскости, скажем, что уравнение (5) определяет так называемую "дискриминантную кривую". Уравнение этой кривой дает особый интеграл, если он существует. Для решения этого вопроса из уравнения (5) определяем y и вставляем в уравнение (2); если оно удовлетворяется, то найденное y может быть особым решением. Вообще говоря, дискриминантная кривая не есть интегральная кривая, и можно бы показать, что она есть геометрическое место точек возврата интегральных кривых, определяемых уравнением общего интеграла.

Для особого решения, если оно существует, не трудно кроме уравнений (2) и (4) получить еще третье уравнение, которому оно должно удовлетворять. В самом деле, продифференцируем по x уравнение (2) в предположении, что y заменено его значением

$$y = \varphi(x);$$

получаемъ:
$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0$$

или принимая во внимание уравнение (4):

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0 \quad (6)$$

Таким образом особое решение должно удовлетворять одновременно трем уравнениям (2), (4) и (6). Для произвольно за -

даннаго ур-ія (2) три уравненія (2), (4), (6), вообще говоря, удовлетворяются только для отдѣльных системъ численныхъ значеній трехъ аргументовъ x , y , y' и слѣдовательно, мы не получаемъ особаго рѣшенія. Условимся называть систему значеній x , y , y' э л е м е н т о м ъ; тогда скажемъ, что ур-ія (2), (4), (6) опредѣляютъ одинъ или нѣсколько элементовъ, которые назовемъ особыми элементами. Особое рѣшеніе можетъ получиться только тогда, когда изъ трехъ ур-ій (2) (4), (6) одно есть слѣдствіе двухъ другихъ, такъ что они опредѣляютъ многообразіе элементовъ одного измѣренія, ибо для особаго рѣшенія имѣемъ :

$$y = \varphi(x), \quad y' = \varphi'(x)$$

и x остается произвольнымъ.

Резюмируя предыдущее, получаемъ такіе 2 метода изысканія особыхъ рѣшеній:

1) Изъ ур-ій (2) и (4) исключаемъ y' ; полученное ур-іе (5) есть вообще говоря, особый интегралъ, если y , опредѣляемое имъ, удовлетворяетъ данному уравненію (2).

2) Беремъ ур-ія (2), (4), (6); если они эквивалентны двумъ ур-іямъ, такъ что при исключеніи y' получаемъ только одно ур-іе между x и y , то это послѣднее есть, вообще говоря, особый интегралъ.

Получивъ тѣмъ или другимъ пріемомъ рѣшеніе

$$y = \varphi(x),$$

мы должны еще провѣрить, будетъ ли оно дѣйствительно особымъ, а не частнымъ рѣшеніемъ, т.е. не получится ли оно изъ общаго при какомъ-нибудь частномъ значеніи произвольнаго постояннаго.

П Р И М Ъ Р Ъ 2.

$$y^2 (1 + y'^2) - R^2 = 0.$$

Дифференцируя по y' , имѣемъ:

$$2 y^2 y' = 0.$$

Исключая y' , получаемъ (такъ какъ изъ 2-го $y' = 0$)

$$y^2 - R^2 = 0$$

или

$$y = \pm R.$$

Дифференцируя по x , имѣемъ:

$$y' = 0$$

и, слѣдовательно, данное уравненіе удовлетворяется.

$$y = \pm R$$

есть рѣшеніе, притомъ особое, какъ нетрудно провѣрить, т.к. об-
щій интеграль легко получается раздѣленіемъ переменныхъ въ
видѣ:

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2.$$

откуда ни при какомъ значеніи постояннаго C не получимъ

$$y = \pm R.$$

Истолковывая x, y какъ Декартовы координаты на плоскости, ви-
димъ, что общій интеграль опредѣляетъ семейство круговъ радиу-
са R съ центрами на оси x , а особый интеграль опредѣляетъ па-
ру прямыхъ, параллельныхъ оси x и проходящихъ отъ нея на раз-
стояніи $\pm R$. Очевидно, всѣ круги касаются этихъ прямыхъ.

П Р И М Ъ Р Ъ 3. Рассмотримъ произвольное линейное уравненіе:

$$P_0 y' + P_1 y + P_2 = 0.$$

гдѣ P_0, P_1, P_2 - функціи x . Дифференцируя по y' , получаемъ:

$$P_0 = 0.$$

откуда для x получаемъ опредѣленные численные значенія; та -

кимъ образомъ линейное уравненіе не допускаетъ особаго рѣшенія.

Разсмотримъ какое-либо частное рѣшеніе $y = \varphi(x)$ ур-ія (2). Докажемъ, что въ числѣ его элементовъ

$$x, y = \varphi(x), \quad y' = \varphi'(x)$$

необходимо находятся особые элементы. Въ самомъ дѣлѣ имѣемъ тождество:

$$\mathcal{F}[x, \varphi(x), \varphi'(x)] = 0.$$

дифференцируя по x , получаемъ:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} \varphi'(x) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} \varphi''(x) = 0 \quad (7)$$

Присоединимъ равенство (4), которое по подстановкѣ

$$y = \varphi(x), \quad y' = \varphi'(x)$$

обращается въ уравненіе, содержащее только x , изъ котораго найдемъ одно или нѣсколько численныхъ значеній $x=a$ и затѣмъ соответствующихъ значеній $y = \varphi(a), \quad y' = \varphi'(a)$

Для этихъ же значеній равенство (7) обращается, въ силу ур-ія (4), въ ур-іе (6), и такимъ образомъ элементъ

$$x = a, \quad y = \varphi(a), \quad y' = \varphi'(a)$$

есть особый.

Предположимъ теперь, что ур-іе (2) допускаетъ особое рѣшеніе; всѣ элементы x, y, y' этого рѣшенія суть особые элементы. Прибѣгая къ обычному геометрическому истолкованію, можемъ въ этомъ случаѣ сказать, что всѣ интегральныя кривыя касаются ин-тегральной кривой, опредѣляемой ур-іемъ особаго интеграла. Въ самомъ дѣлѣ, согласно предьдущему, всякое рѣшеніе имѣетъ

общій элементъ съ особымъ рѣшеніемъ, а это и значитъ, что опредѣляемъ этими рѣшеніями кривыя соприкасаются и, слѣдовательно, "особая" интегральная кривая есть огибающая всѣхъ прочихъ. На основаніи изложеннаго приходимъ къ новому методу опредѣленія особаго рѣшенія.

Пусть мы имѣемъ общій интеграль

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (8)$$

дифференціального ур-ія (2). Равенство (8) опредѣляетъ семейство интегральныхъ кривыхъ, зависящее отъ одного параметра C

Находимъ огибающую этого семейства, исключая C изъ двухъ уравненій (8) и

$$\frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0 \quad (9)$$

Такъ какъ въ точкахъ огибающей касательныя ея совпадаютъ съ касательными кривыхъ семейства, то элементы x, y, y' для огибающей суть въ то же время элементы различныхъ частныхъ рѣшеній, получаемыхъ изъ ур-ія (8), и слѣдовательно непосредственно ясно, что ур-іе огибающей есть интеграль дифференціального ур-ія (2); притомъ этотъ интеграль - вообще особый, какъ это явствуетъ изъ предыдущаго.

Можетъ однако случиться, что огибающая есть въ то же время одна изъ кривыхъ семейства (8), тогда мы этимъ методомъ получимъ не особое рѣшеніе, а частное.^{x)}

Наконецъ, возможно, что при исключеніи C изъ ур-ій (8) и (9) мы не получимъ огибающей, а геометрическое мѣсто особыхъ точекъ интегральныхъ кривыхъ; тогда дифференціальное ур-іе (2) не допускаетъ особаго рѣшенія.

x) Иногда, впрочемъ, называютъ рѣшеніе такого рода одновременно особымъ и частнымъ.

Дадимъ независимое обоснованіе 2-му методу изысканія
особаго рѣшенія. Изъ общаго интеграла (8) получаемъ общее рѣ -
шеніе:

$$y = \psi(x, C) \quad (10)$$

Подставляя въ дифференціальное ур-іе, которое предположимъ въ
разрѣшенномъ видѣ (1), получимъ

$$\frac{\partial \psi(x, C)}{\partial x} = f\{x, \psi(x, C)\} \quad (11)$$

Равенство(11) выполняется для любого значенія постояннаго C , а
слѣдовательно оно есть тождество. Введемъ вмѣсто y новое пе -
ремѣнное z , полагая

$$y = \psi(x, z) \quad (12)$$

Уравненіе (1) принимаетъ видъ:

$$\frac{\partial \psi(x, z)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} \cdot z' = f\{x, \psi(x, z)\} \quad (13)$$

но въ силу тождества (11)

$$\frac{\partial \psi(x, z)}{\partial x} = f\{x, \psi(x, z)\}$$

и слѣдовательно имѣемъ окончательно:

$$\frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} \cdot z' = 0 \quad (14)$$

Откуда или $z' = 0$, или

$$\frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

Первое предположеніе даетъ намъ $z = C$ и слѣдовательно приво -
дитъ къ общему рѣшенію (10). Второе предположеніе даетъ рѣше -
ніе, которое получимъ, исключая z изъ двухъ равенствъ (12) и
(15). Вмѣсто этого можемъ, конечно, исключить постоянное C изъ
двухъ равенствъ (10) и

$$\frac{\partial \psi(x, C)}{\partial C} = 0 \quad (16)$$

Рѣшеніе, которое получимъ, есть, вообще говоря, особое, т.к.

не получается изъ общаго при постоянномъ значеніи C . Въ са -
момъ дѣлѣ/, мы получимъ его, подставляя въ (10) значеніе C , по -
лученное изъ уравненія (16), откуда C выражается въ функціи x .

Если сохранимъ общій интеграль въ видѣ (8), то производ -
ная $\frac{\partial \psi}{\partial C}$ опредѣлится, если продифференцируемъ ур-іе (8) по C ,
считая y функціей $\psi(x, C)$ отъ x и C ; получаемъ:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial C} = 0,$$

и условіе (16) приводитъ насъ къ требованію:

$$\frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0 \quad (9)$$

Такимъ образомъ особый интеграль получается исключеніемъ C изъ
двухъ ур-ій (8) и (9), изъ которыхъ 2-ое получается дифферен -
цированіемъ 1-го по C .

Истолковывая геометрически послѣдній результатъ, придемъ
къ прежнимъ геометрическимъ соотношеніямъ.

Сопоставляя первый и второй методы, мы, повидимому, при -
ходимъ къ противорѣчію: съ точки зрѣнія 1-го метода дифферен -
ціальное ур-іе (1), вообще говоря, не допускаетъ особаго ин -
теграла; съ точки зрѣнія 2-го метода особый интеграль вообще
существуетъ, т.к. семейство (8) интегральныхъ кривыхъ, вообще
говоря, допускаетъ огибающую. Парадоксъ этотъ разрѣшается, ес -
ли замѣтимъ, что терминъ "вообще говоря" употребляется здѣсь
въ двухъ разныхъ смыслахъ: въ 1-мъ случаѣ, "вообще говоря" зна -
чить - для произвольно взятаго дифференціального ур-ія (2); во
2-мъ случаѣ - для произвольно взятаго общаго интеграла (8).

Опредѣляя особый интеграль тѣмъ или другимъ методомъ, мы

должны всегда въ заключеніе провѣрить, будетъ ли полученный интегралъ дѣйствительно особымъ, а не частнымъ.

П Р И М Ъ Р Ъ. 4. Пусть дано соотношеніе

$$(y - c)^2 = (x - c)^3,$$

которое есть общій интегралъ дифференціального уравненія:

$$x - y = \frac{4}{9} y'^2 - \frac{8}{27} y'^3.$$

Дифференцируя по c , имѣемъ:

$$2(y - c) = 3(x - c)^2.$$

Изъ двухъ уравненій или

$$y - c = 0, \quad x - c = 0,$$

или

$$x - c = \frac{4}{9}, \quad y - c = \frac{8}{27}.$$

исключая c , получаемъ:

$$x - y = 0 \quad \text{или} \quad x - y = \frac{4}{27},$$

въ первомъ предположеніи

$$y = x, \quad y' = 1,$$

и дифференціальное ур-іе не удовлетворяется. Во 2-мъ предположеніи

$$y = x - \frac{4}{27}, \quad y' = 1,$$

и дифференціальное ур-іе удовлетворяется. Такимъ образомъ

$$y = x - \frac{4}{27}$$

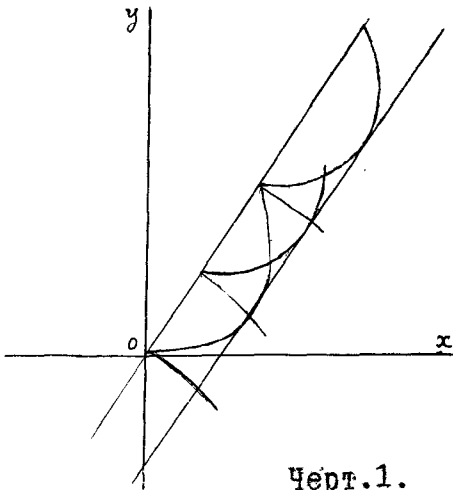
есть рѣшеніе, притомъ особое, такъ какъ не получается изъ общаго интеграла ни при какомъ постоянномъ значеніи c .

Геометрическое истолкованіе нашихъ результатовъ слѣдующее: общій интегралъ опредѣляетъ семейство полукубическихъ параболъ, имѣющихъ точки заостренія на равнолѣнящей $y=x$ координатнаго угла. Въ самомъ дѣлѣ, при $c = 0$ получаемъ полукуби-

ческую параболу.

$$y^2 = x^3 ;$$

всѣ остальные получаютъ изъ нея передвиженіемъ по направле -
нію вышеупомянутой равнодѣлящей, т.к. точка заостренія при
любомъ C имѣетъ координаты $x = C, y = 0$.



Черт.1.

Прямая $y = x$, полученная
при изысканіи огибающей, не есть
огибающая, а геометрическое мѣсто
точекъ заостренія интегральныхъ
кривыхъ. Прямая
$$x - y = \frac{4}{27},$$

параллельная равнодѣлящей есть
огибающая семейства (ср. черт.1).

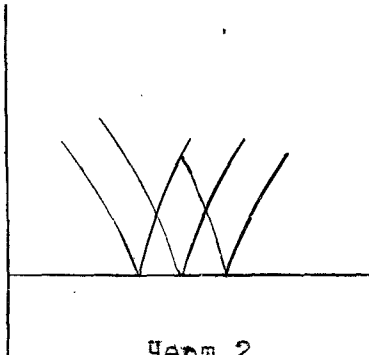
П Р И М ъ Р Ъ Б. Дифференціальное уравненіе

$$9yy'^2 = 4$$

допускаетъ общій интегралъ

$$y^3 = (x-C)^2,$$

опредѣляющій семейство полукубическихъ параболъ, имѣющихъ
точку заостренія $(C, 0)$ на оси x (черт.2). Дифференцируя по



Черт.2.

C , имѣемъ: $-2(x-C) = 0;$

исключая C , получаемъ

$$y = 0$$

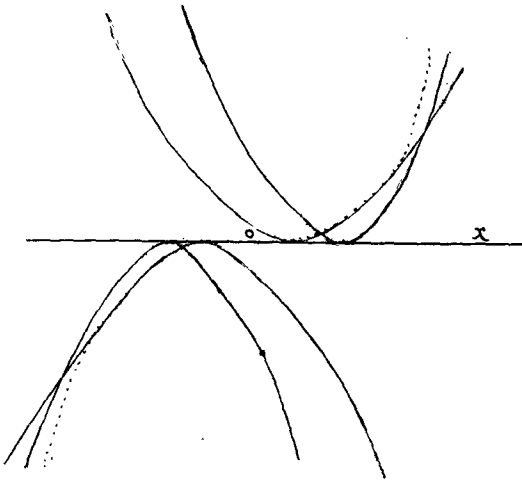
- уравненіе оси x . Очевидно, эта
прямая - не огибающая, а геомет -
рическое мѣсто точекъ заостренія

интегральныхъ кривыхъ. Дифференцируя $y = 0$, получаемъ $y' = 0$.

и дифференціальное ур-іе не удовлетворяется; такимъ образомъ способа рѣшенія нѣтъ.

П Р И М Ъ Р Ъ 6. Дифференціальное уравненіе

$$y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$$



Черт. 3.

допускаетъ общій интегралъ

$$y = C (x-C)^2,$$

который опредѣляетъ семейство параболъ съ діаметрами, параллельными оси y и съ вершинами на оси x . Параметръ параболы приближается къ нулю по мѣрѣ приближенія вер-

шины къ началу координатъ, и при $C = 0$ получаемъ ур-іе $y = 0$ оси x , - параболы раскрываются въ прямую (черт. 3).

Дифференцируя по C , имѣемъ

$$0 = (x-C)^2 - 2C (x - C),$$

или

$$(x-C) (x - 3C) = 0.$$

Отсюда, или

$$x - C = 0, \quad \text{или} \quad x - 3C = 0.$$

Исключая C въ первомъ предположеніи, получаемъ

$$y = 0,$$

а во второмъ

$$y = \frac{4}{27} x^3$$

Дифференцируя по x , имѣемъ въ томъ и другомъ случай соответственно

$$y' = 0 \quad \text{и} \quad y' = \frac{4}{9} x^2.$$

Данное дифференціальное ур-іе удовлетворяется и, слѣдователь-

но, мы получили два рѣшенія. Но первое есть частное, т.к. получается изъ общаго при $C = 0$, а второе особое, такъ какъ ни при какомъ постоянномъ значеніи C не получается изъ общаго. Уравненіе $y = 0$ опредѣляетъ ось x , которая, правда, есть сгибающая семейства параболъ, опредѣляемаго общимъ интеграломъ но въ то же время есть одна изъ параболъ семейства (при $C = 0$); уравненіе

$$y = \frac{4}{27} x^3$$

опредѣляетъ кубическую параболу, которая есть огибающая семейства.

§ 12. ЗАДАЧА О ТРАЕКТОРІЯХЪ.

Къ дифференціальнымъ ур-ніямъ 1-го порядка приводится рѣшеніе многихъ задачъ дифференціальной геометріи. Рассмотримъ одну изъ нихъ, именно задачу о траекторіяхъ.

Положимъ, что имѣемъ семейство кривыхъ съ однимъ параметромъ α :

$$F(x, y, \alpha) = 0 \quad (1)$$

Будемъ искать такую кривую, которая пересѣкала бы каждую изъ данныхъ кривыхъ подъ постояннымъ угломъ θ , и пусть $\operatorname{tg} \theta = m$. Искомая линия называется траекторіей; если этотъ уголъ прямой, траекторія называется ортогональной, въ общемъ случаѣ — изогональной. Пусть τ и τ' — углы касательныхъ къ кривой семейства и къ траекторіи съ осью x , тогда

$$\tau - \tau' = \theta, \quad \text{а} \quad \operatorname{tg} \theta = m = \operatorname{tg}(\tau - \tau') = \frac{\operatorname{tg} \tau - \operatorname{tg} \tau'}{1 + \operatorname{tg} \tau \cdot \operatorname{tg} \tau'} \quad (A)$$

Опредѣлимъ $\operatorname{tg} \tau$ и $\operatorname{tg} \tau'$. Дифференцируемъ уравненіе (1):

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0, \quad y' = \operatorname{tg} \tau$$

Откуда
$$\operatorname{tg} \tau = - \frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}} ; \quad \operatorname{tg} \tau' = \frac{dy}{dx} ,$$

при чемъ \underline{y} взято изъ уравненія искомой траекторіи; подставляемъ въ предыдущее равенство:

$$m = \frac{-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \cdot \frac{dy}{dx}} \quad (2)$$

Пусть (x, y) - координаты точки пересѣченія траекторіи съ одной изъ нашихъ кривыхъ семейства. Для этихъ координатъ, для производной $\frac{dy}{dx}$ и для параметра α удовлетворяются ур-ія (1) и (2).

При этомъ α мѣняется съ переходомъ съ одной кривой семейства къ другой. Наша цѣль получить уравненіе между координатами точекъ траекторіи и производной $\frac{dy}{dx}$, т.е. дифференціальное уравненіе траекторіей. Для этого параметръ α исключаемъ изъ ур-ій

(1) и (2) и получаемъ уравненіе вида:

$$\Psi \left(x, y, \frac{dy}{dx} \right) = 0, \quad (3)$$

которое будетъ дифференціальнымъ ур-іемъ траекторіи. Найдя общій интеграль ур-ія (3) получимъ семейство траекторій, т.к.

въ общій интеграль войдетъ постоянное C . Въ частности полагая

$\theta = \frac{\pi}{2}$ и слѣд. $\operatorname{tg} \theta = \infty$, получимъ, что знаменатель въ (2) равенъ нулю, т.е. получимъ:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2')$$

Такимъ образомъ для полученія дифференціального ур-ія ортогональныхъ траекторій, нужно будетъ исключить α изъ ур-ій (1) и

(2'). Если θ не равно $\frac{\pi}{2}$, то въ самой постановкѣ задачи за -

ключается двойственность, ибо мы могли положить по произволу $\theta = \tau - \tau'$ или $\theta = \tau' - \tau$, что соответствовало бы изменению знака у m . Заменяя m через $-m$, получим другое семейство изогональных траекторий, которая пересекают данное семейство кривых под таким же углом, только отсчитываемым в другую сторону. Заметим, что решение задачи упрощается, если семейство данных кривых определяется не уравнением вида (1), а дифференциальным уравнением 1-го порядка, которое мы могли бы получить, пролифференцировав уравнение (1) и исключив α ; тогда получили бы уравнение вида

$$\Phi(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \quad (4)$$

Предположим, что нам непосредственно дано это уравнение (4).

Уравнение (4) устанавливает связь между координатами точки (x, y) и tg -сом угла касательной к кривым семейства с осью x . В той же точке (x, y) имеем другую касательную - касательную к нашей траектории. Между этими двумя tg -сами существует соотношение (A), которое было дано выше. Один из этих tg сам можно определить через другую:

$$tg \tau = \frac{m + tg \tau'}{1 - m tg \tau'}$$

заменим в уравнении (4) $\frac{dy}{dx}$ этим выражением, при чем $tg \tau'$ есть производная y по x , взятая из уравнения траектории; назвав ее через y' , имеем

$$\Phi(x, y, \frac{m + y'}{1 - my'}) = 0 \quad (5)$$

Это уравнение имеет место в каждой точке x, y траектории и есть их дифференциальное уравнение. Особенно простой результат получается, когда траектории ортогональны. В этом случае

$$tg \tau = - \frac{1}{tg \tau'}$$

и мы получаем
$$\Phi(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0. \tag{5'}$$

Это дифференциальное уравнение ортогональных траекторий для случая, когда данное семейство определяется уравнением (4).

П Р И М Е Р Ъ 1 . Будем искать изогнальные траектории пучка прямых, уравнение которого
$$y = \alpha x;$$

напишем равенство (2):

$$m = \frac{\alpha - \frac{dy}{dx}}{1 + \alpha \frac{dy}{dx}}; \quad \text{исключая } \alpha \text{ имеем: } m = \frac{\frac{y}{x} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx}}$$

Это и есть дифференциальное уравнение траекторий. Освободившись от знаменателя, будем иметь:

$$m + m \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} \left(1 + m \frac{dy}{dx}\right) = \frac{y}{x} - m.$$

Интегрируется это уравнение легко при помощи обычных методов интегрирования. Но можно поступить и иначе. Преобразуем это уравнение в полярные координаты:

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz \sin \varphi + z \cos \varphi d\varphi}{dz \cos \varphi - z \sin \varphi d\varphi}, \\ (m \sin \varphi - \cos \varphi) \cdot (dz \sin \varphi + z \cos \varphi d\varphi) &= \\ = (\sin \varphi - m \cos \varphi) \cdot (dz \cos \varphi - z \sin \varphi d\varphi); \end{aligned}$$

выполняя перемножение, производя сокращения, находим:

$$m dz = -z d\varphi; \quad \frac{dz}{z} = -\frac{d\varphi}{m}; \quad \operatorname{lg} z = \operatorname{lg} K - \frac{1}{m} \varphi,$$

или
$$z = K e^{-\frac{\varphi}{m}},$$

где K - постоянное. Получили семейство логарифмических спиралей.

П Р И М Е Р Ъ 2. Найдем ортогональные траектории семейства парабол, которые касаются оси x в одной точке, а именно в начале координат. В таком случае уравнение параболы будет

$$y = \alpha x^2,$$

или

$$y - \alpha x^2 = 0.$$

Равенство (2') дает нам:

$$1 + 2\alpha x \frac{dy}{dx} = 0;$$

Исключаем α :

$$\alpha = \frac{y}{x^2};$$

имеем:

$$1 + 2 \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

или

$$x dx + 2y dy = 0.$$

Переменные разделены. Интегрируем и находим:

$$x^2 + 2y^2 - C = 0.$$

Траектории суть эллипсы с центрами в начале координат. Приводя это уравнение в надлежащий вид, найдем:

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{\frac{C}{2}} = 1;$$

следовательно \sqrt{C} - большая полуось; а $\sqrt{\frac{C}{2}}$ - малая полуось.

УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХЪ ПОРЯДКОВЪ

§ 13. ИНТЕГРАЛЫ УР-ІЙ ВЫСШАГО ПОРЯДКА.

Дифференціальное ур-іе n -го порядка есть соотношеніе

вида:
$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

гдѣ $y', y'', \dots, y^{(n)}$ суть производныя стѣ y . Докажемъ, что

дифференціальное ур-іе n -го порядка эквивалентно системѣ ур-ій

1-го порядка. Введемъ новыя функціи y_1, y_2, \dots, y_{n-1} и рассмотримъ систему:

$$F(x, y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \frac{dy_{n-1}}{dx}) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = y_1; \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2; \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3; \quad \dots; \quad \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1} \quad (3)$$

Всего мы имѣемъ n уравненій, и всѣ они 1-го порядка. Изъ уравненій (3) имѣемъ:

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = y'$$

затѣмъ
$$y_2 = \frac{dy_1}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \quad y_3 = \frac{dy_2}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$$

и такъ далѣе;

$$y_{n-2} = \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = y^{(n-2)},$$

и, наконецъ,

$$y_{n-1} = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = y^{(n-1)}$$

откуда еще

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = \frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)},$$

и уравненіе (2) обращается въ слѣдующее:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

т.е. совпадаетъ съ даннымъ уравненіемъ (1).

Примѣняя къ системѣ ур-ій 1-го порядка (2), (3) теорему Коши и замѣчая, что неизвѣстными функциями этой системы явля- ются y и послѣдовательныя производныя y', y'', \dots , приходимъ къ слѣдующему результату для уравненія (1):

Дифференціальное ур-іе n -го порядка (1) допускаетъ рѣше- ніе y, опредѣляемое начальными условіями:

$$\text{при } x = x_0; \quad y = y_0, \quad y' = y'_0, \dots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

гдѣ $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ - данныя численныя значенія y и первыхъ $(n-1)$ его производныхъ. При этомъ условія теоремы Коши, очевид- но, всегда выполняются для правыхъ частей ур-ій (3) системы 1-го порядка, и остается примѣнить ихъ къ правой части ур-ія (2), по разрѣшеніи его относительно производной:

$$\frac{dy_{n-1}}{dx}$$

или, всеравно, къ правой части ур-ія (1) по разрѣшеніи отно- сительно n -ой производной $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{4}$$

Такимъ образомъ функція f въ правой части ур-ія (4) должна быть конечной, непрерывной и должна удовлетворять условію Липшица въ области измѣненія аргументовъ $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$, къ которой принадлежитъ система значеній $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$. Опредѣ- ляемое начальными данными рѣшеніе y - единственное, если ур-іе (1) даетъ единственное значеніе (4) для $y^{(n)}$; если же изъ ур-ія (1) имѣемъ различныя значенія:

$$y^{(n)} = f_i(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \quad (5)$$

то каждому ур-ию (5) или, иначе говоря, каждому значению

$$y_0^{(n)} = f_i(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$$

соответствует себе решение y .

Предполагая, что начальныя значения $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ (при данномъ численномъ значеніи $x=x_0$) - произвольныя парамет-ры, мы видимъ, что соответствующее рѣшеніе

$$y = \psi(x, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$$

зависитъ отъ выбора этихъ параметровъ и, являясь такимъ обра-зомъ функціей x и n произвольныхъ параметровъ, есть такъ назы-ваемое общее рѣшеніе, изъ котораго получаютъ рѣшенія, отвѣ-чающія теоремѣ Коши, при различныхъ значеніяхъ этихъ парамет-ровъ. Отсюда ясно, что какой-либо интеграль

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \quad (6)$$

уравненія (1), содержащій n произвольныхъ постоянныхъ, есть обшій, если эти постоянныя можно опредѣлить такъ, чтобы при $x = x_0$ имѣть

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

для любыхъ $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$. Дифференцируя ур-іе (5) $(n-1)$ разъ и замѣняя x черезъ x_0 , приходимъ къ системѣ:

$$\Phi(x_0, y_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 y_0' = 0$$

.....

$$\left(\frac{\partial^{n-1} \Phi}{\partial x^{n-1}}\right)_0 + \dots + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 y_0^{(n-1)} = 0,$$

которая, согласно предидущему, должна быть разрѣшима относи-

тельно C_1, C_2, \dots, C_n . Таким образом получаем критерий "независимости" постоянных в интеграле (6), который уже был дан в начале курса.

Если общий интеграл (6) продифференцируем K раз ($K < n$) и из полученной системы $K+1$ уравнений исключим K постоянных C_1, C_2, \dots, C_K , то получим соотношение:

$$\Psi(x, y, y', \dots, y^{(K)}, C_{K+1}, \dots, C_n) = 0, \quad (7)$$

содержащее производная y до K -го порядка и $n-K$ произвольных постоянных $C_{K+1}, C_{K+2}, \dots, C_n$. Соотношение (7) выполняется для общего решения y уравнения (1), получаемого из общего интеграла (6), и называется промежуточным интегралом K -го порядка.

Если бы для ур-ия (1) мы нашли промежуточный интеграл $n-1$ порядка или, так называемый, первый интеграл

$$\Psi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, C_1) = 0, \quad (8)$$

для этого интеграла, рассматривая его как дифференциальное ур-ие $n-1$ -го порядка, его первый интеграл

$$\Psi_1(x, y, y', \dots, y^{(n-2)}, C_1, C_2) = 0 \quad (9)$$

и т.д., то мы пришли бы наконец к общему интегралу

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

данного уравнения (1).

§ 14 . РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ n -ГО ПОРЯДКА ВЪ БЕЗКОНЕЧНЫЙ РЯДЪ.

Пусть дифференциальное ур-ие дано въ видѣ:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

и ищется решение, определяемое начальными данными:

$$\text{при } x = x_0, \quad y = y_0, \quad y' = y_0', \dots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}.$$

Дифференцируя уравнение последовательно по x , имеем:

$$y^{(n+1)} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \dots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-2)} + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \cdot f = f_1(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{2}$$

$$y^{(n+2)} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-2)} + \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}} f_1 = f_2(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{3}$$

т.е. все производные, начиная с n -го порядка, выражаются через $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$. Вставляя в равенства (1), (2), (3), ... вместо x его значение x_0 и принимая во внимание начальные данные, мы последовательно вычислим начальные значения всех производных в функции данных $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$:

$$y_0^{(n)} = f_1(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$$

$$y_0^{(n+1)} = f_2(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$$

$$y_0^{(n+2)} = f_3(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$$

.....
.....

А зная начальные значения всех производных, мы можем определить искомое решение y его разложением в ряд Тейлора:

$$y = y_0 + \frac{y_0'}{1} (x-x_0) + \frac{y_0''}{1.2} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{y_0^{(n-1)}}{1.2\dots(n-1)} (x-x_0)^{n-1} + \frac{y_0^{(n)}}{1.2\dots n} (x-x_0)^n + \dots \tag{4}$$

Предыдущия рассуждения могли бы служить доказательством су-

существования решения, определяемого данными начальными условиями, если бы была доказана сходимость ряда (4) и было доказано, что этот ряд удовлетворяет данному дифференциальному уравнению (1).

§ 15. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВИДА:

$$y^{(n)} = f(x), \quad F(x, y^{(n)}) = 0, \quad F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \quad F(y^{(n-2)}, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0.$$

Применим последовательное нахождение промежуточных интегралов к уравнению вида:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$

Выполняя квадратуру, найдем:

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^x f(x) dx + C_1.$$

Полученный интеграл есть промежуточный; повторяя квадратуру, найдем промежуточный интеграл:

$$\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x f(x) dx + \frac{C_1}{1} x + C_2$$

и так далее и, наконец, найдем:

$$y = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x f(x) dx + \frac{C_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n.$$

Итак мы нашли общий интеграл данного дифференциального уравнения n -го порядка. Покажем, что n -кратную квадратуру можно заменить простой квадратурой. Назовем эту квадратуру через Y , т.е. положим:

$$Y = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x f(x) dx.$$

Это выражение есть ничто иное, как частное решение, когда все C_i равны 0. Это частное решение очевидно при $x = x_0$, обращается в нуль; легко видеть, что и производные $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ при $x = x_0$ равны нулю, так как все они выражаются квадратурами с пределами x_0 и x . Таким образом, по теореме Коши, y вполне определяется во 1-хъ темъ, что оно удовлетворяет данному ур-ю и во 2-хъ начальными условиями:

$$\text{при } x = x_0, \quad y = y' = \dots = y^{(n-1)} = 0.$$

Съ другой стороны рассмотрим выражение

$$Z = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^{n-1} dt.$$

Дифференцируя по x , имеемъ:

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dx} &= \frac{n-1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^{n-2} dt + \\ &+ \left[\frac{1}{(n-1)!} f(t) (x-t)^{n-1} \right]_{t=x} = \frac{1}{(n-2)!} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^{n-2} dt \end{aligned}$$

Аналогично

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} = \frac{1}{(n-3)!} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^{n-3} dt$$

и такъ далѣе; наконецъ

$$\frac{d^{n-1} Z}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad \text{и} \quad \frac{d^n Z}{dx^n} = f(x).$$

Такимъ образомъ Z есть решение данного ур-я; кроме того изъ предидущаго явствуетъ, что при $x = x_0$ имеемъ:

$$Z = 0, \quad \frac{dZ}{dx} = 0, \dots, \frac{d^{n-1} Z}{dx^{n-1}} = 0.$$

Слѣдовательно, по теоремѣ Коши Z совпадаетъ съ y , и мы имеемъ общее решение данного уравненія въ видѣ:

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^{n-1} dt + \frac{C_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{C_{n-1} x}{1} + C_n$$

Разсмотримъ теперь уравненіе болѣе общее сравнительно съ раз-
смотрѣннымъ ранѣе:

$$F(x, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Если его разрѣшить относительно $y^{(n)}$, то получимъ ур-іе преж-
няго вида. Но можетъ случиться, что оно не разрѣшается удобно
относительно производной, но легко разрѣшимо относительно x ,
или же вообще x и $y^{(n)}$ выражаются въ функціи одного параметра t :

$$x = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t); \quad (2)$$

тогда эти 2 ур-ія будутъ равносильны одному ур-ію (1). Эти
ур-ія мы можемъ проинтегроровать рядомъ квадратуръ. Постара-
емся выразить и y въ функціи этого параметра.

Мы имѣемъ

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx = \varphi(t) \psi'(t) dt, \quad y^{(n-1)} = \int \varphi(t) \psi'(t) dt.$$

Произвольную постоянную подразумѣваемъ подъ знакомъ квадрату-
ры. Далѣе, мы можемъ найти слѣдующую $(n-2)$ -ую производную :

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx = \left[\int \varphi(t) \psi'(t) dt \right] \psi'(t) dt,$$

откуда

$$y^{(n-2)} = \int \left\{ \int \varphi(t) \psi'(t) dt \right\} \psi'(t) dt$$

и т.д. Вообще

$$dy^{(k-1)} = y^{(k)} dx.$$

Квадратурой находимъ $y^{(k-1)}$. Продолжая такъ, мы наконецъ дой-
демъ до y и такимъ образомъ x и y выразимъ функціями параме-
тра t , т.е.

$$x = \varphi(t), \quad y = \Phi(t, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n);$$

всего произвольныхъ постоянныхъ, такъ какъ при каждой квад-
ратурѣ мы будемъ получать по одному постоянному. Исключивъ па-
раметръ t изъ двухъ уравненій, мы получимъ соотношеніе между
 x и y , которое и будетъ общимъ интеграломъ.

Переходимъ теперь къ слѣдующему виду уравненія:

$$\mathcal{F}(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0, \quad (3)$$

въ которомъ порядокъ одной производной на единицу отличается отъ порядка другой. Предположимъ, что обѣ производныя выражаются въ функціи вспомогательнаго параметра t :

$$y^{(n)} = \varphi(t), \quad y^{(n-1)} = \psi(t), \quad (4)$$

при чемъ въ частности параметръ t можетъ совпадать съ одной изъ производныхъ, на примѣръ съ $(n-1)$ -ой производной, если урав-іе (3) разрѣшимъ относительно $y^{(n)}$. Мы рассмотримъ общій случай. Наша задача - представить x и y въ функціи параметра t . Поступаемъ по предѣдущему:

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx, \quad \psi'(t) dt = \varphi(t) dx,$$

откуда
$$dx = \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)} dt;$$

x найдемъ квадратурой:

$$x = \int \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)} dt;$$

произвольное постоянное заключается въ знакѣ квадратуры. Находимъ $(n-2)$ -ую производную:

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx = \psi(t) \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)} dt,$$

откуда квадратурой находимъ:

$$y^{(n-2)} = \int \psi(t) \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)} dt.$$

Вообще, если какая-нибудь производная k -го порядка выражается черезъ t , то производная $(k-1)$ найдется выраженной черезъ t изъ условія

$$dy^{(k-1)} = y^{(k)} dx$$

квадратурой. Продолжая далѣе, дойдемъ наконецъ до y , которое будетъ выражено черезъ t . Слѣдовательно, x и y будутъ выраже-

ны через t Исключая t , мы получимъ общій интеграль. Произвольныхъ постоянныхъ всего войдетъ n .

Переходимъ теперь къ третьему виду ур-ій съ двумя аргументами, гдѣ порядокъ производныхъ развится на двѣ единицы:

$$F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0 \quad (5)$$

при чемъ предполагаемъ, что оба аргумента выражаются через параметръ t , т. е.

$$y^{(n)} = \varphi(t), \quad y^{(n-2)} = \psi(t). \quad (6)$$

И въ этомъ случаѣ представимъ x и y въ функціи параметра t .

Какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, мы пишемъ рядъ соотношеній:

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx; \quad dy^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx.$$

Здѣсь мы пишемъ оба равенства одновременно, такъ какъ одного было бы недостаточно. Взявъ оба, мы дѣленіемъ исключаемъ dx :

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dy^{(n-2)}} = \frac{y^{(n)}}{y^{(n-1)}}, \quad y^{(n-1)} dy^{(n-1)} = y^{(n)} dy^{(n-2)}$$

Правая часть выражается черезъ t , и мы имѣемъ:

$$y^{(n-1)} dy^{(n-1)} = \varphi(t) \psi'(t) dt$$

Последнее ур-іе есть дифференціальное, гдѣ переменныя раздѣ-

лены. Выполняя квадратуру, находимъ: $\frac{1}{2} (y^{(n-1)})^2 = \int \varphi(t) \psi'(t) dt$

произвольное постоянное подразумѣваемъ въ знакѣ интеграла.

$$y^{(n-1)} = \sqrt{2 \int \varphi(t) \psi'(t) dt}$$

Выразивъ $(n-1)$ производную черезъ t , не трудно затѣмъ выразить

и x черезъ t . Изъ равенства $dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx$

находимъ:

$$dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} ;$$

подставляя сюда значение $dy^{(n-1)}$, получим:

$$dx = \frac{\varphi(t) \cdot \psi'(t) dt}{\sqrt{2 \int \varphi(t) \psi'(t) dt} \cdot \varphi(t)}$$

Выполнив квадратуру, найдем x :

$$x = \int \frac{\psi'(t) dt}{\sqrt{2 \int \varphi(t) \psi'(t) dt}}.$$

Произвольное постоянное заключается в знакѣ интеграла. Теперь остается выразить y через параметръ t . Производныя $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$ выражены через t ; нужно выразить дальнѣйшія $y^{(n-3)}$ и т. д.; поступаемъ обычнымъ путемъ:

$$dy^{(n-3)} = y^{(n-2)} dx = \frac{\psi(t) \psi'(t) dt}{\sqrt{2 \int \varphi(t) \psi'(t) dt}},$$

откуда квадратурой находимъ $y^{(n-3)}$:

$$y^{(n-3)} = \int \frac{\psi(t) \psi'(t) dt}{\sqrt{2 \int \varphi(t) \psi'(t) dt}}$$

Вообще, если имѣемъ $y^{(k)}$, то

$$dy^{(k-1)} = y^{(k)} dx,$$

и квадратурой найдемъ $y^{(k-1)}$. Поступая такимъ образомъ далѣе наконецъ дойдемъ до y , которое будетъ выражено въ функціи параметра t . Слѣдовательно x и y будутъ выражены въ функціи параметра t . Исключая t , найдемъ соотношеніе между x и y , которое и будетъ общимъ интеграломъ. Войдетъ всего n произвольн. постоянныхъ.

✓ Иллюстрируемъ разобранные выше случаи ур-ій слѣдующими видами уравненій 2-го порядка:

$$I. \mathcal{F}(x, y'') = 0 \quad II. \mathcal{F}(y'', y') = 0 \quad III. \mathcal{F}(y'', y) = 0.$$

Къ этимъ уравненіямъ примѣнимы всё вышеуказанные приемы. Кроме того, къ этимъ ур-іямъ могутъ быть примѣнимы и частные

приемы. Такъ I и II мы можемъ сейчасъ же привести къ ур-іямъ перваго порядка. Обращаемся къ уравненію первому:

$$\mathcal{F}(y'', x) = 0.$$

Положимъ

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx};$$

ур-іе принимаетъ видъ

$$\mathcal{F}\left(\frac{dp}{dx}, x\right) = 0;$$

получили уравненіе 1-го порядка одного изъ разсмотрѣнныхъ типовъ. Интегрируя его, найдемъ общій интеграль:

$$\Phi(p, x, C) = 0 \quad \text{или} \quad \Phi\left(\frac{dy}{dx}, x, C\right) = 0.$$

Это будетъ то, что мы выше называли промежуточнымъ интеграломъ. Въ данномъ случаѣ это ур-іе 1-го порядка того же типа.

Обращаемся къ уравненію II :

$$\mathcal{F}(y'', y') = 0;$$

положимъ

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx};$$

ур-іе принимаетъ видъ:

$$\mathcal{F}\left(\frac{dp}{dx}, p\right) = 0;$$

опять получили уравненіе 1-го порядка одного изъ разсмотрѣнныхъ типовъ. Проинтегрировавъ его, получимъ интеграль промежуточный:

$$\Phi(p, x, C) = 0, \quad \text{гдѣ} \quad p = \frac{dy}{dx}.$$

Интегрируя этотъ послѣдній, получимъ общій интеграль.

Обращаемся, наконецъ, къ послѣднему типу:

$$\text{III) } \mathcal{F}(y'', y) = 0;$$

непосредственно мы не можемъ привести его къ ур-ію 1-го порядка. Въ этомъ случаѣ поступимъ такъ: будемъ считать y независимымъ переменнымъ, а p функціей y; при такомъ разсмотрѣніи мы сейчасъ же приведемъ данное ур-іе къ ур-ію 1-го порядка:

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}.$$

Уравнение принимает видъ:

$$F\left(p \cdot \frac{dp}{dy}, y\right) = 0.$$

Это ур-іе уже 1-го порядка, хотя, повидимому, болѣе сложнаго типа, такъ какъ содержитъ $p \cdot \frac{dp}{dy}$, y . Не трудно однако его замѣнить ур-іемъ болѣе простаго вида, слѣдуетъ только ввести новое переменное, положивъ:

$$\frac{1}{2} p^2 = u.$$

Тогда

$$p \cdot \frac{dp}{dy} = \frac{du}{dy}.$$

и уравнение принимает видъ:

$$F\left(\frac{du}{dy}, y\right) = 0.$$

Оно 1-го порядка, содержитъ производную и независимую переменную. Промежуточный интегралъ будетъ:

$$\Phi(u, y, C) = 0 \quad \text{или} \quad \Phi\left[\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2, y, C\right] = 0.$$

Это ур-іе 1-го порядка, не содержащее независимаго переменнаго. Замѣтимъ, что ур-іе III типа 2-го порядка допускаетъ еще одинъ непосредственный методъ интеграціи, если ур-іе разрѣшено относительно второй производной. Если ур-іе III-ье можно представить такъ:

$$y'' = f(y),$$

то помимо общаго приема поступаемъ еще такъ: умножаемъ обѣ части разрѣшеннаго уравненія на $y'dx$:

$$y'' y'dx = y' f(y) dx \quad \text{или} \quad y' dy' = f(y) dy.$$

Переменные раздѣлены; интеграціей находимъ:

$$\frac{1}{2} y'^2 = \int f(y) dy; \quad y' = \sqrt{2 \int f(y) dy}; \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{2 \int f(y) dy}; \quad dx = \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy}}.$$

Интегрируя, находимъ х:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy}}$$

Это равенство и представляетъ общій интеграль. Замѣтимъ кста-ти, что методомъ, указаннымъ для ур-ій 2-го порядка, мы можемъ воспользоваться и для уравненій съ производными высшихъ по-рядковъ I, II и III видовъ. Такъ, мы могли бы въ случаѣ III замѣнить уравненіе

$$F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0,$$

положивъ

$$y^{(n-2)} = p,$$

уравненіемъ 2-го порядка

$$F\left(\frac{d^2 p}{dx^2}, p\right) = 0.$$

Принтегрировавъ его, получимъ:

$$\Phi(p, x, C_1, C_2) = 0,$$

т.е. мы привели уравненіе къ 1-му виду, понизивъ его порядокъ при этомъ на 2 единицы.

П Р И М Ъ Р Ъ I.

$$x = e^{y''} + y'',$$

гдѣ y'' - 2-ая производная. Ур-іе 1-го изъ разсмотрѣнныхъ ти-повъ, и притомъ въ разрѣшенномъ видѣ относительно х. обозна-чимъ $y'' = t$, тогда

$$x = e^t + t; dx = (e^t + 1)dt, \quad dy' = y'' dx, \quad dy' = (te^t + t)dt;$$

$$y' = \int (te^t + t)dt, \quad y' = \int te^t dt + \int t dt = te^t - e^t + \frac{1}{2}t^2 + C_1.$$

Опредѣляемъ теперь у:

$$dy = y' dx = \left(te^t - e^t + \frac{1}{2}t^2 + C_1 \right) (e^t + 1) dt = \left[te^{2t} - e^{2t} + \frac{1}{2}t^2 e^t + te^t + (C_1 - 1)e^t + \frac{1}{2}t^2 + C_1 \right] dt.$$

Выполняя квадратуру, находимъ у:

$$y = \frac{t e^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4} - \frac{1}{2} t^2 e^t + (C_1 - 1) e^t + \frac{1}{6} t^3 + C_1 t + C_2.$$

Такимъ образомъ x и y мы выразимъ въ функціи вспомогательнаго параметра t . Исключивъ t , мы получимъ соотношеніе между x и y и двумя постоянными C_1 и C_2 .

П Р И М Ъ Р Ъ II.

$$y'' = \kappa^2 y,$$

гдѣ κ - постоянно. Умножимъ обѣ части на y' :

$$2y' y'' = 2\kappa^2 y y',$$

или по умноженіи двухъ частей на dx :

$$2y' dy' = 2\kappa^2 y dy;$$

переменные раздѣлены; интегрируя, имѣемъ:

$$y'^2 = \kappa^2 y^2 - C^2,$$

откуда находимъ:

$$y' = \sqrt{\kappa^2 y^2 - C^2} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\kappa^2 y^2 - C^2},$$

откуда

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\kappa^2 y^2 - C^2}};$$

x находится квадратурой:

$$x + C' = \int \frac{dy}{\sqrt{\kappa^2 y^2 - C^2}}.$$

Квадратура выполняется въ гиперболическихъ функціяхъ:

$$\kappa y = C \cosh u \varphi; \quad dy = \frac{C \sinh u \varphi d\varphi}{\kappa};$$

$$x + C' = \int \frac{1}{\kappa} d\varphi = \frac{\varphi}{\kappa}$$

вмѣсто φ остается вставить его значеніе: $\varphi = \operatorname{arccos} \frac{\kappa y}{C}$

$$\cosh u \varphi \left\{ \kappa (x + C') \right\} = \cosh u \varphi = \frac{\kappa y}{C}$$

Отсюда находимъ y :

$$y = \frac{C}{\kappa} \cdot \frac{e^{\kappa(x+C')} + e^{-\kappa(x+C')}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{C}{\kappa} \cdot e^{\kappa C'} \cdot e^{\kappa x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{C}{\kappa} \cdot e^{-\kappa C'} \cdot e^{-\kappa x} =$$

$$= Ae^{kx} + Be^{-kx},$$

гдѣ А и В - два новыхъ постоянныхъ.

§ 16. ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ, НЕ СОДЕРЖАЩІЯ ФУНКЦІИ;
ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ, НЕ СОДЕРЖАЩІЯ НЕЗАВИСИМАГО ПЕРЕМѢННАГО; ОДНОРОДНЫЯ УРАВНЕНІЯ.

Разсмотримъ уравненіе n -го порядка, въ которое не входитъ непосредственно искомая функція y , т.е. уравненіе вида:

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', x) = 0 \quad (I)$$

Порядокъ такого уравненія можно понизить на единицу.

Положивъ $y' = p$, будемъ имѣть:

$$F\left(\frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}, \frac{d^{n-2}p}{dx^{n-2}}, \dots, \frac{dp}{dx}, p, x\right) = 0.$$

Это уравненіе $(n-1)$ -го порядка. Если бы проинтегрировали его, то нашли бы промежуточный интеграль:

$$\Phi(p, x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0$$

первоначального ур-ія. Остается проинтегрировать этотъ интеграль:

$$\Phi\left(\frac{dy}{dx}, x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}\right) = 0.$$

Тогда найдемъ общій интеграль, куда войдетъ n произвольныхъ постоянныхъ.

Пусть далѣе въ ур-іе не входятъ производныя ниже k -го порядка, т.е. уравненіе будетъ вида:

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y^{(k)}, x) = 0 \quad (II)$$

Тогда, полагая $y^{(k)} = p$, мы уравненіе представимъ такъ:

$$F\left(\frac{d^{n-k}p}{dx^{n-k}}, \frac{d^{n-k-1}p}{dx^{n-k-1}}, \dots, \frac{dp}{dx}, p, x\right) = 0.$$

Это уравнение $(n-k)$ -го порядка. Его порядокъ ниже порядка даннаго ур-ія на k единицъ. Если бы мы нашли общій интеграль, то онъ былъ бы промежуточнымъ интеграломъ k -го порядка:

$$\Phi(p, x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$$

куда входило бы $(n-k)$ произвольныхъ постоянныхъ. Проинтегрировавъ его, мы найдемъ общій интеграль даннаго ур-ія. Всего постоянныхъ будетъ $n-k$ отъ первой интеграціи и k отъ второй т.е. $n-k+k = n$ произвольныхъ постоянныхъ.

Переходимъ къ новому типу дифференціального ур-ія, въ которое входитъ n производныхъ и сама функція, но не входитъ независимое переменное:

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y) = 0 \quad (III)$$

Полагаемъ $y' = p$, а y считаемъ за независимое переменное ;

$$\text{тогда } y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}, \quad y''' = \frac{d^2 p}{dx^2} = p \frac{d^2 p}{dy^2} + p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2.$$

Поступаемъ такъ и дальше. Легко видѣть, что каждая производная v -ка по x выразится черезъ производныя p по y :

$$y^{(k)} = \Phi \left(p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2 p}{dy^2}, \dots, \frac{d^{k-1} p}{dy^{k-1}} \right),$$

и данное уравненіе представится такъ:

$$\Psi \left(\frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}}, \frac{d^{n-2} p}{dy^{n-2}}, \dots, \frac{dp}{dy}, p, y \right) = 0.$$

Получили уравненіе $(n-1)$ -го порядка. Если бы его проинтегрировали, то получили бы промежуточный интеграль вида:

$$\Phi(p, y, C_1, C_2, C_3, \dots, C_{n-1}) = 0.$$

Интегрируя его, введемъ еще одно постоянное и получимъ общій интеграль даннаго ур-ія. Разберемъ для примѣра ур-іе 2-го порядка вида:

$$F(y'', y', y) = 0.$$

Примѣнимъ къ нему указанная преобразованія. Положимъ:

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx} = p \frac{dp}{dy}.$$

Уравненіе принимаетъ видъ:

$$F\left(p \frac{dp}{dy}, p, y\right) = 0.$$

Проинтегрировавъ его, найдемъ:

$$\Phi(p, y, C_1) = 0,$$

гдѣ $p = y'$. Это — промежуточный интегралъ. Дальнѣйшей интеграціей введемъ еще одно постоянное C_2 и получимъ общій интегралъ даннаго уравненія.

Обращаемся къ разсмотрѣнію типа уравненія:

$$F(x, y, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0,$$

гдѣ функція F однородная относительно y и производныхъ, при чемъ x разсматривается, какъ параметръ. Напримѣръ:

$$yy'' - xy'^2 = 0.$$

Это ур-іе однородно относительно y, y', y'' . Мы можемъ показать, что порядокъ уравненія такого типа можетъ быть пониженъ на единицу, введеніемъ новаго переменнаго. Полагаемъ

$$y = e^{\int z dx}, \quad \text{тогда} \quad y' = yz = e^{\int z dx} \cdot z,$$

или

$$z = \frac{y'}{y}.$$

Далѣе $y'' = e^{\int z dx} (z^2 + z')$; $y''' = e^{\int z dx} (z^3 + 3zz' + z'')$

и такъ далѣе; въ каждой производной, послѣ преобразованія,

$e^{\int z dx}$ войдетъ общимъ множителемъ. Пусть вообще

$$y^{(k)} = e^{\int z dx} \Phi_{k-1}(z)$$

гдѣ $\Phi(z)$ есть дифференціальное выраженіе, составленное изъ z и производныхъ до $(k-1)$ -го порядка. Дифференцируя, имѣемъ:

$$y^{(k+1)} = e^{\int z dx} \left\{ z \Phi_{k-1}(z) + \frac{d}{dx} \Phi_{k-1}(z) \right\} = e^{\int z dx} \Phi_k(z)$$

слѣдовательно этотъ законъ составленія - общій. Составляемъ значенія найденныхъ производныхъ въ данное ур-іе. Всѣ они имѣютъ общій факторъ $e^{\int z dx}$, который въ нѣкоторой степени выйдетъ общимъ множителемъ изъ функціи f , вслѣдствіе ея однородности; т.е. будемъ имѣть:

$$e^{\int z dx} f(x, 1, z, z^2 + z', \dots, \Phi_{n-1}(z)) = 0.$$

Сокращая на $e^{\int z dx}$, мы будемъ имѣть уравненіе вида:

$$\Psi(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Порядокъ преобразованнаго ур-ія на единицу ниже порядка данного ур-ія. Проинтегрировавъ его, получимъ выраженіе z ; \int найдется квадратурой. Всѣхъ постоянныхъ будетъ n .

Примѣнимъ изложенный методъ къ примѣру:

$$yy'' - xy'^2 = 0;$$

вводимъ новое переменное:

$$y = e^{\int z dx} \quad y' = e^{\int z dx} \cdot z, \quad y'' = e^{\int z dx} (z^2 + z')$$

подставляя въ данное, имѣемъ

$$z^2 + z' - xz^2 = 0;$$

уравненіе перваго порядка

$$z' = z^2(x-1) \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dx} = z^2(x-1); \quad \frac{dz}{z^2} = dx(x-1).$$

Переменные разделены; имѣемъ:

$$-\frac{dz}{z^2} + dx(x-1) = 0, \quad \frac{1}{z} + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{c}{2} = 0;$$

находимъ:

$$z = \frac{2}{c - (x-1)^2}; \quad y = e^{\int \frac{2}{c - (x-1)^2} dx};$$

Полагая

$$C = a^2, \quad x - 1 = t,$$

имѣемъ:

$$\int \frac{2}{C-(x-1)^2} dx = \int \frac{2dt}{a^2-t^2} = \frac{1}{a} \int \frac{a+t}{a-t} + Const.; \quad a = \sqrt{C};$$

подставляя, имѣемъ:

$$y = e^{\frac{1}{\sqrt{C}} \int \frac{\sqrt{C+(x-1)}}{\sqrt{C-(x-1)}} + \int g C'} = C' \left[\frac{\sqrt{C+(x-1)}}{\sqrt{C-(x-1)}} \right]^{\frac{1}{\sqrt{C}}}.$$

Сдѣлаемъ одно замѣчаніе по поводу этого типа однороднаго ур-ія; покажемъ, что если этому уравненію удовлетворяетъ какое-нибудь частное рѣшеніе

$$y = \varphi(x),$$

то ему будетъ удовлетворять и рѣшеніе:

$$y = C \varphi(x),$$

гдѣ C - произвольное постоянное. Если мы замѣнимъ y черезъ Cy, тогда y' замѣнится черезъ Cy', y⁽ⁿ⁾ черезъ Cy⁽ⁿ⁾ и т.д.

Всѣ производныя множатся на одинъ и тотъ же факторъ C; но по предположенію уравненіе однородно, слѣдовательно, отъ умноженія y, y', y'' на C все уравненіе умножится на C^m,

т.е. $F(x, Cy, Cy', Cy'', \dots, Cy^{(n)}) = C^m F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$

Отсюда видно, что если ур-іе удовлетворяется y, то ему удовлетворитъ и Cy и что одно изъ произвольныхъ постоянныхъ должно входить въ общее рѣшеніе въ видѣ множителя.

Разсмотримъ еще уравненіе однородное относительно x, y

и ихъ дифференціаловъ. Замѣтимъ, что $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k};$

поэтому всякое уравненіе

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

можно рассматривать, какъ уравнение вида:

$$\Phi (x, y, dx, dy, d^2y, d^3y, \dots, d^ny) = 0$$

въ дифференціалахъ; напимѣрь, если бы намъ было дано ур-іе:

$$x^2 y'' + yy' + 2y = 0,$$

то, умноживъ его на квадратъ дифференціала dx , т.е. dx^2 найдемъ:

$$x^2 d^2y + ydx \cdot dy + 2ydx^2 = 0.$$

Это соотношеніе представлено въ дифференціальной формѣ. Займемся теперь разсмотрѣніемъ ур-ія однороднаго относительно $x, y, dx, dy, d^2y, \dots, d^ny$, при чемъ каждый аргументъ 1-го измѣренія. Можно показать, что порядокъ такого ур-ія можетъ быть пониженъ на единицу. Замѣтимъ, что если въ ур-іи x, y замѣнимъ черезъ Cx, Cy , то оно удовлетворится по прежнему. Дѣйствительно при умноженіи x и y на C , и всё дифференціалы получаютъ общій факторъ C : dx обратится въ Cdx и т.д.; но, т.к. ур-іе однородно относительно всехъ аргументовъ, то въ ур-іи появится общій факторъ C^m , гдѣ m - показатель однородности, и на C^m мы можемъ сократить уравненіе. Слѣдовательно ур-іе удовлетворится по прежнему. Принимая во вниманіе это замѣчаніе, введемъ новое переменное u , положивъ: $\frac{y}{x} = u$. Переменное u не измѣнится, если мы совершимъ предшествующую замѣну, т.к. $\frac{Cy}{Cx} = \frac{y}{x} = u$.

Если мы введемъ u вмѣсто x , то новое уравненіе будетъ обладать такимъ свойствомъ: оно допускаетъ замѣну y черезъ Cy , при чемъ u сохраняется безъ измѣненія. Такимъ свойствомъ обладать, какъ мы видѣли, однородныя ур-ія, и это свойство типическое для однородныхъ ур-ій. Слѣдовательно преобразованное

уравнение однородное и его порядокъ можно понизить на единицу.

Мы можемъ дать и ту подстановку, которая прямо приведетъ насъ къ цѣли. Именно, полагаемъ $x = e^z$, $y = e^z u$; тогда

$$dx = e^z dz, \quad dy = e^z (u dz + du); \quad d^2 y = e^z (u dz^2 + 2 du dz + d^2 u) \dots \text{и т. д.}$$

Всюду e^z будетъ общимъ множителемъ. Вставимъ эти значенія въ данное ур-іе; e^{mz} выйдетъ общимъ факторомъ и на него сократимъ ур-іе. Получимъ дифференціальное ур-іе между u и z , не содержащее переменнаго z . Мы приходимъ такимъ образомъ къ виду ур-ія уже разобраннаго, а такое ур-іе, какъ извѣстно, допускаетъ пониженіе порядка. Обращаемся къ примѣру, который раньше имѣли:

$$x^2 y'' + y y' + 2y = 0;$$

полагаемъ:

$$x = e^z; \quad dx = e^z dz; \quad y = u e^z; \quad dy = e^z (u dz + du);$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \left(u + \frac{du}{dz}\right); \quad y'' = \left(\frac{du}{dz} + \frac{d^2 u}{dz^2}\right) e^{-z}.$$

Вставляемъ въ данное ур-іе эти значенія:

$$e^z (u' + u'') + e^z u (u + u') + 2e^z u = 0.$$

Сокращаемъ все уравненіе на e^z :

$$u'' + u' + u u' + u^2 + 2u = 0.$$

Получили ур-іе 2-го порядка, куда не входитъ независимое переменное. Порядокъ такого ур-ія, какъ мы знаемъ, можетъ быть пониженъ на единицу. Для этого полагаемъ

$$u' = p; \quad u'' = \frac{dp}{dz} = p \frac{dp}{du}$$

и ур-іе приметъ видъ:

$$p \frac{dp}{du} + p + u p + u^2 + 2u = 0.$$

Это уравненіе 1-го порядка относительно p . Иногда приводитъ къ цѣли и такая подстановка болѣе общаго характера:

$$x = e^z, \quad y = e^{mz} \cdot u;$$

тогда $y' = e^{(m-1)x} \cdot (mx + \frac{dx}{dx}), \dots$

Если ур-іе однородно, когда мы считаемъ x 1-го измѣренія, y m-го, y' - (n-1)-го измѣренія и т.д., то при подстановкѣ e^z сокращается, и мы получаемъ ур-іе, не содержащее независимаго переменнаго z .

§ 17. ЛИНЕЙНЫЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ.

Линейнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ называется уравненіе, линейное относительно неизвѣстной функціи и ея производныхъ. Его общій видъ таковъ:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = A \quad (I)$$

гдѣ всѣ a_i и A суть функціи только одного x , т.е.

$$a_x = \varphi_x(x); \quad A = A(x).$$

Такое ур-іе называется полнымъ линейнымъ дифференціальнымъ ур-іемъ n-го порядка. Если въ этомъ ур-іи $A = 0$, то имѣемъ неполное линейное дифференціальное ур-іе или ур-іе безъ послѣдняго члена. Оно называется также однороднымъ, т.к. оно однородно относительно функціи и ея производныхъ.

Его видъ таковъ:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (II)$$

Ур-іе (I) можемъ упростить, сдѣлавъ коэфф-тъ при старшей производной равнымъ единицѣ, раздѣливъ на него все ур-іе. Тогда получимъ:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = \mathcal{U} \quad (III)$$

гдѣ всѣ p_i и \mathcal{U} суть функціи только одного x .

Если $\mathcal{U} = 0$, то имѣемъ однородное линейное ур-іе:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = 0 \quad (IV)$$

Линейное дифф-ное ур-іе сохраняетъ свой видъ при нѣкото- рыхъ преобразованіяхъ переменнаго.

а) При всякомъ преобразованіи независимаго переменнаго ли- нейное уравненіе остается линейнымъ.

Положимъ, что $x = \varphi(x')$ и обратно $x' = \psi(x)$. Тогда ко- эфф-ты $p_k = p_k(x)$ преобразуются: $p_k = p_k[\varphi(x')]$.

Далѣе имѣемъ:

$$y = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dx} = \frac{dy}{dx'} \cdot \psi'[\varphi(x')]$$
$$y'' = \frac{d}{dx'} \left(\frac{dy}{dx'} \right) \cdot \frac{dx'}{dx} = \left[\frac{d^2y}{dx'^2} \cdot \psi'\{\varphi(x')\} + \frac{dy}{dx'} \cdot \psi''\{\varphi(x')\} \psi'\{\varphi(x')\} \right] \psi'\{\varphi(x')\},$$

.....

Очевидно, что каждая производная выражается линейно черезъ про- изводныя по новому переменному, и послѣ подстановки новое ур-іе будетъ линейнымъ.

б) Линейное уравненіе остается линейнымъ при линейномъ преоб- разованіи зависимаго переменнаго.

Выразимъ y черезъ новую функцію η такъ, чтобы связь меж- ду ними была линейная, т.е. положимъ: $y = u\eta + v$, гдѣ u и v суть функціи x . Дифференцируя, имѣемъ:

$$y' = u\eta' + u'\eta + v'$$
$$y'' = u\eta'' + 2u'\eta' + u''\eta + v'';$$

.....

Всѣ производныя y выразятся черезъ η и производныя η линейно. Внося всѣ значенія преобразованныхъ производныхъ въ данное ур-іе, получимъ новое ур-іе тоже линейное.

Два преобразования а) и в) можно очевидно комбинировать вмѣстѣ.

Обращаемся теперь къ разсмотрѣнію свойствъ линейныхъ однородныхъ уравненій, т.е. гдѣ А или $V = 0$.

Порядокъ однороднаго линейнаго ур-ія можно понизить на единицу при помощи слѣдующей подстановки: $y = e^{\int z dx}$

Мы уже видѣли выше, что такая подстановка понижаетъ порядокъ всякаго однороднаго ур-ія. Выполнимъ ее для линейнаго ур-ія второго порядка:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0;$$
$$y = e^{\int z dx} ; \quad y' = e^{\int z dx} \cdot z ; \quad y'' = e^{\int z dx} (z' + z^2).$$

Вставляя это въ данное уравненіе и сокращая на $e^{\int z dx}$, получимъ:

$$z' + z^2 + p_1 z + p_2 = 0.$$

Это - ур-іе перваго порядка. Проинтегрировавъ его, найдемъ z , а затѣмъ квадратурою - y . Полученное ур-іе перваго порядка есть ур-іе типа Riccati.

§ 18. ОБЩАЯ ТЕОРІЯ ОДНОРОДНЫХЪ ЛИНЕЙНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

Частныхъ рѣшеній у всякаго дифф-наго ур-ія безчисленное множество. Для линейнаго однороднаго ур-ія среди этихъ рѣшеній есть одно рѣшеніе, которое мы можемъ указать a priori. Это $y = 0$. Это рѣшеніе мы навсегда устраняемъ изъ разсмотрѣнія.

Т Е О Р Е М А. Если мы имѣемъ нѣсколько частныхъ рѣшеній линейнаго однороднаго ур-ія, то ему удовлетворить и рѣшеніе, составленное изъ линейной комбинаціи частныхъ рѣшеній съ постоянными коэффиціентами.

Пусть имѣемъ однородное линейное ур-іе:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \quad (I)$$

и знаемъ нѣсколько частныхъ рѣшеній его:

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_k(x);$$

тогда данному уравненію удовлетворить и такое:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_k y_k = \sum_{i=1}^{i=k} C_i y_i \quad (II)$$

гдѣ C_i - какія угодно постоянныя.

Д О К А З А Т Е Л Ъ С Т В О. Какая-нибудь производная $y^{(s)}$ представится такъ: $y^{(s)} = \sum_{i=1}^{i=k} C_i y_i^{(s)}$. Вставимъ въ (I) и распредѣливъ члены съ одинаковыми C_i , получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=k} C_i (y_i^{(n)} + y_i^{(n-1)} p_1 + y_i^{(n-2)} p_2 + \dots + y_i p_n) = 0.$$

Выраженіе, стоящее въ скобкахъ - нуль для каждаго i въ отдѣльности, такъ какъ y_i со значкомъ i есть частное рѣшеніе. Слѣдовательно, выраженіе (II) есть рѣшеніе ур-ія (I).

С Л Ъ Д С Т В І Я И З Ъ Т Е О Р Е М Ы.

1) Полагая $k = 1$, получаемъ: если однородное ур-іе допускаетъ рѣшеніе y , то оно допускаетъ и рѣшеніе $C_1 y$.

2) Полагая $k = 2$, $C_1 = C_2 = 1$, получаемъ: если однородное ур-іе имѣетъ два частныхъ рѣшенія, то и сумма этихъ частныхъ рѣшеній $y_1 + y_2$ есть частное рѣшеніе.

Отсюда же мы можемъ вывести и общее положеніе, только что доказанное, т.е. если мы имѣемъ k рѣшеній, то $C_1 y_1, C_2 y_2, C_3 y_3, \dots, C_k y_k$ суть тоже рѣшенія, а отсюда и сумма ихъ $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_k y_k$ есть тоже рѣшеніе.

Установимъ теперь понятіе о линейной зависимости функцій одного переменнаго.

Пусть даны намъ функции переменнаго x :

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_n;$$

назовемъ эти функции линейно независимыми, если нельзя подобрать такой системы постоянныхъ чиселъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, чтобы тождественно для любого x существовало равенство:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \dots + \alpha_{n-1} y_{n-1} + \alpha_n y_n = 0.$$

конечно исключая случая, когда все $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$.

Наоборотъ, n функций будутъ линейно зависими, если для некоторой системы постоянныхъ коэфф-товъ α_s существуетъ равенство типа:

$$\sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s y_s = 0.$$

П Р И М Ъ Р Ъ:

$$y_1 = e^x; \quad y_2 = 2e^x.$$

Нетрудно видѣть, что эти функции линейно зависими, ибо, помножая первую на 2, а вторую на -1 и складывая, мы получимъ:

$$2y_1 - y_2 = 0 \text{ тождественно для любого } x.$$

Двѣ функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$ будутъ линейно-независимы, т.к. мы не найдемъ постоянныхъ α , чтобы они удовлетворяли равенству:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0.$$

За исключеніемъ $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, это равенство невозможно. Дѣйствительно:

$$\alpha_1 y_1 = -\alpha_2 y_2 \text{ или } \frac{y_1}{y_2} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \text{ или } e^{2x} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1};$$

получаемъ, что функция равна постоянному, что невозможно.

Введемъ теперь критерій для рѣшенія вопроса о линейной зависимости и линейной независимости. Для этого рассмотрим детерминантъ, называемый д е т е р м и н а н т о м ъ В р о н с к а г о:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Порядокъ высшей производной единицей ниже числа функций, т.е. функций n , а порядокъ производной $n - 1$.

Детерминантъ Вронскаго для функций $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$ будетъ:

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = W(e^x, e^{-x}) = -2$$

Детерминантъ Вронскаго обладаетъ нѣкоторыми замѣчательными свойствами, изъ которыхъ укажемъ на два.

Если функции линейно зависимы, то детерминантъ Вронскаго равенъ 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имѣемъ, что

$$\sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s y_s = 0.$$

Дифференцируя это равенство нѣсколько разъ, получимъ:

$$\sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s y_s' = 0; \quad \sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s y_s'' = 0; \dots; \quad \sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s y_s^{(n-1)} = 0.$$

Возьмемъ теперь детерминантъ Вронскаго:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Нетрудно видѣть, что между элементами каждой строки существу -

еть линейная зависимость. Помножимъ первый столбецъ на α_1 , второй на α_2, \dots , послѣдній - на α_n и къ элементамъ послѣдняго столбца прибавимъ элементы остальныхъ столбцовъ. Получимъ:

$$\sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s y_s, \quad \sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s y'_s, \dots, \dots, \quad \sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s y_s^{(n-1)}.$$

Такія выраженія по условію равны 0.

Слѣдовательно детерминантъ Вронскаго будетъ = 0:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0.$$

О Б Р А Т Н А Я Т Е О Р Е М А. Если детерминантъ Вронскаго равенъ 0, то функціи, составляющія элементы детерминанта, линейно зависимы.

Д О К А З А Т Е Л Ъ С Т В О. Дано, что детерминантъ Вронскаго $W(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = 0$ для всякаго значенія x . При этомъ допустимъ, что миноръ, соотвѣтствующій послѣднему элементу послѣдняго столбца, не равенъ 0, т.е.

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_{n-1} \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & \dots & y'_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & y_3^{(n-2)} & \dots & y_{n-1}^{(n-2)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Легко видѣть, что этотъ миноръ есть детерминантъ Вронскаго для функцій y_1, y_2, \dots, y_{n-1} , т.е. $W(y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1})$.

Наше допущеніе нисколько не стѣсняетъ общности доказательства, такъ какъ мы хотимъ доказать положеніе для какого-нибудь числа n функцій n , если бы взятый нами миноръ оказался нулемъ, то дѣло свелось бы къ доказательству того же положенія для меньшаго числа $n-1, n-2, \dots$, такъ какъ если $n-1$ функцій изъ общаго числа n линейно зависимы, то n функцій тоже, ибо если:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \dots + \alpha_{n-2} y_{n-2} + \alpha_{n-1} y_{n-1} = 0, \quad \text{то и}$$

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \dots + \alpha_{n-2} y_{n-2} + \alpha_{n-1} y_{n-1} + \alpha_n y_n = 0,$$

гдѣ $\alpha_n = 0$.

Итакъ, намъ дано, что $W(y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}) \neq 0$

и мы предположили, что

$$W(y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}) \neq 0.$$

Разложимъ данный детерминантъ по элементамъ послѣдней строки:

$$A_1 y_1^{(n-1)} + A_2 y_2^{(n-1)} + A_3 y_3^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)} + A_n y_n^{(n)} = 0,$$

гдѣ $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ суть минары, соответствующіе элементамъ послѣдней строки. Одинъ изъ нихъ, извѣстно намъ, отличенъ отъ 0, т.е.

$$A_n = W(y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}) \neq 0.$$

Мы можемъ все равенство раздѣлить на A_n и все члены перенести въ другую часть, кромѣ члена $y_n^{(n-1)}$:

$$y_n^{(n-1)} = u_1 y_1^{(n-1)} + u_2 y_2^{(n-1)} + u_3 y_3^{(n-1)} + \dots + u_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}, \quad \text{(III)}$$

при чемъ $u_x = -\frac{A_x}{A_n}$ и $A_n \neq 0$.

Докажемъ теперь, что все u постоянны, и тогда теорема наша будетъ доказана. Для доказательства поступаемъ такъ: въ $W(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ элементы послѣдней строки замѣняемъ элементами первой, второй, ... строкъ, тогда полученный детерминантъ, имѣя по двѣ равныя строки, равенъ нулю. Разлагая такой детерминантъ по элементамъ послѣдней строки, получимъ:

$$A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + \dots + A_n y_n = 0$$

$$A_1 y_1' + A_2 y_2' + A_3 y_3' + \dots + A_n y_n' = 0$$

.....

$$A_1 y_1^{(n-2)} + A_2 y_2^{(n-2)} + A_3 y_3^{(n-2)} + \dots + A_n y_n^{(n-2)} = 0.$$

гдѣ A_1, A_2, \dots, A_n суть тѣ же минары, какъ и въ равенствѣ (III).

Съ каждымъ изъ этихъ равенствъ поступаемъ такъ же, какъ съ первымъ, т.е. дѣлимъ каждое изъ нихъ на $A_n \neq 0$ и переносимъ все члены, кромѣ послѣдняго, въ правую часть:

$$y_n^{(n-1)} = u_1 y_1^{(n-1)} + u_2 y_2^{(n-1)} + \dots + u_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}$$

$$y_n^{(n-2)} = u_1 y_1^{(n-2)} + u_2 y_2^{(n-2)} + \dots + u_{n-1} y_{n-1}^{(n-2)}$$

.....

$$y_n'' = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + \dots + u_{n-1} y_{n-1}''$$

$$y_n' = u_1 y_1' + u_2 y_2' + \dots + u_{n-1} y_{n-1}'$$

$$y_n = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_{n-1} y_{n-1}$$

гдѣ $u_k = -\frac{A_{nk}}{A_n}$. Пролифференцируемъ послѣднее равенство и принимаемъ во вниманіе предпослѣднее, - получимъ:

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' + y_3 u_3' + \dots + y_{n-1} u_{n-1}' = 0. \quad (1)$$

Дифференцируя предпослѣднее и принимая во вниманіе третье отъ конца и такъ продолжая до послѣдняго, получаемъ:

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_3' y_3' + \dots + u_{n-1}' y_{n-1}' = 0 \quad (2)$$

$$u_1' y_1'' + u_2' y_2'' + u_3' y_3'' + \dots + u_{n-1}' y_{n-1}'' = 0 \quad (3)$$

.....

$$u_1' y_1^{(n-2)} + u_2' y_2^{(n-2)} + u_3' y_3^{(n-2)} + \dots + u_{n-1}' y_{n-1}^{(n-2)} = 0 \quad (n-1)$$

Всего равенствъ $n-1$; ихъ рассматриваемъ, какъ систему линейныхъ однородныхъ ур-ій относительно неизвѣстныхъ $u_1', u_2', \dots, u_{n-1}'$; при этомъ нетрудно видѣть, что детерминантъ этой системы есть ничто иное, какъ миноръ $W(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \neq 0$, который мы предположили не равнымъ 0. А если для системы однородныхъ линейныхъ ур-ій детерминантъ системы не равенъ 0, то все неизвѣстныя - нули, т.е. $u_1' = u_2' = u_3' = \dots = u_{n-1}' = 0$, откуда все u постоянны.

и въ формулѣ (III) мы имѣемъ линейную зависимость между $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ вида:

$$\sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s y_s = 0,$$

гдѣ α_n отлично отъ 0 и равно - 1.

Положеніе доказано вполне, и его можно формулировать такъ: Если детерминантъ Бронскаго равенъ 0 и если миноръ, соответствующій послѣднему элементу $\neq 0$, то функціи линейно зависимы и линейное соотношеніе можетъ быть разрешено относительно y_n .

Такимъ образомъ, вопросъ о линейной зависимости и независимости функцій сводится къ разсмотрѣнію величины детерминанта Бронскаго для данныхъ функцій. Если этотъ детерминантъ не равенъ нулю, то всё функціи линейно независимы; если же онъ - нуль, то функціи линейно зависимы.

Найденныя свойства детерминанта Бронскаго применимы къ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Пусть мы имѣемъ однородное линейное уравненіе:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0.$$

Для этого уравненія можно найти любое число частныхъ рѣшеній n , если для n изъ нихъ детерминантъ Бронскаго $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ равенъ 0, то эти n рѣшеній линейно зависимы; если же онъ не равенъ 0, то они линейно независимы. Если частныя рѣшенія линейно независимы, то они образуютъ такъ называемую "фундаментальную систему". Для нихъ не можетъ имѣть мѣста равенство:

$$\sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s y_s = 0.$$

Возникаетъ вопросъ: существуетъ ли для всякаго дифференціального уравненія

такая фундаментальная система? Нетрудно доказать, что для всякого дифф-ного ур-ия существует фундаментальная система.

В силу основной теоремы (доказанной в первой части) какое-либо частное решение y_i определяется начальными значениями

$$y_i = y_{i0}, \quad y_i' = y_{i0}', \quad y_i'' = y_{i0}'' , \quad \dots, \quad y_i^{(n-1)} = y_{i0}^{(n-1)}$$

для какого-либо значения переменного $x = x_0$.

Составим детерминант \mathcal{D} :

$$\begin{vmatrix}
 y_{10} & y_{20} & \dots & y_{n0} \\
 y_{10}' & y_{20}' & \dots & y_{n0}' \\
 y_{10}'' & y_{20}'' & \dots & y_{n0}'' \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 y_{10}^{(n-1)} & y_{20}^{(n-1)} & \dots & y_{n0}^{(n-1)}
 \end{vmatrix} = \mathcal{D} \neq 0.$$

Величины, стоящие в каждом столбце, принимаем за начальные значения, определяющие какие-нибудь решения. Эти величины - числа вполне произвольны. Они определяют решения:

$$y_1(x), \quad y_2(x), \quad y_3(x), \quad \dots, \quad y_n(x).$$

Такие решения будут линейно независимы, т.е. образуют фундаментальную систему, если детерминант, составленный из этих чисел, не равен нулю. Докажем это. Составим детерминант

Вронского $W^0(y_1, y_2, \dots, y_n)$, где $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ - функции x . В этом детерминанте дадим x значение x_0 и получим как раз вышезаписанный детерминант, который не равен нулю, т.е.

$$\Big|_{x=x_0} W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \mathcal{D}.$$

Итак детерминант Вронского, будучи для $x = x_0$ отличен от 0, не может тождественно равняться 0, и мы имеем фундаментальную

систему. Итакъ всякое линейное дифференціальное уравіе имѣетъ фундаментальную систему.

Докажемъ затѣмъ такую теорему. Пусть

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$$

частныя рѣшенія, составляющія фундаментальную систему; тогда

общій интегралъ опредѣляется формулой $y = \sum_{s=1}^{s=n} C_s y_s$ (I),

гдѣ C_s - произвольныя постоянныя. То обстоятельство, что y есть рѣшеніе, нами уже было доказано и намъ важно теперь доказать,

что y есть рѣшеніе общее при произвольныхъ значеніяхъ постоянныхъ C_s . Мы будемъ доказывать, что всякое рѣшеніе получается

изъ этой формулы $y = \sum C_s y_s$. Оставляя обозначеніе $y(x)$ для любого рѣшенія, получимъ рядъ такихъ равенствъ:

$$y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + p_2 y_1^{(n-2)} + \dots + p_n y_1 = 0$$

$$y_2^{(n)} + p_1 y_2^{(n-1)} + p_2 y_2^{(n-2)} + \dots + p_n y_2 = 0$$

.....

$$y_n^{(n)} + p_1 y_n^{(n-1)} + p_2 y_n^{(n-2)} + \dots + p_n y_n = 0$$

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = 0$$

Разсматриваемъ полученныя уравненія, какъ линейныя съ неизвѣстными p_1, p_2, \dots, p_n . Всѣхъ уравненій $n+1$, а неизвѣстныхъ n слѣд., детерминантъ изъ коэфф-въ долженъ быть равнымъ нулю. А этотъ детерминантъ есть детерминантъ Вронскаго

$$W^0(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, y) = 0$$

для функцій $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, y$. Это показываетъ, что эти функціи линейно зависимы. Но детерминантъ Вронскаго, составленный изъ y_1, y_2, \dots, y_n , не равенъ нулю, т.е.

$$W^0(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0.$$

А это есть миноръ отъ детерминанта съ $n+1$ элементами. По предвдущему мы знаемъ, что въ этомъ случаѣ линейное соотноше-
нiе разрѣшимо относительно y , т.е.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n.$$

гдѣ $C_i = \text{const}$. Слѣд. теорема доказана, т.е. всякое рѣшенiе y
линейно выражается чрезъ фундаментальную систему и слѣдователь-
но формула (I) есть общее рѣшенiе. Изъ предвдущаго видно еще
больше, а именно: эта формула не только даетъ общее рѣшенiе,
но и изъ нея получаютъ всѣ рѣшенiя линейнаго дифф-наго ур-iя,
т.е. линейное ур-iе не имѣетъ особаго рѣшенiя. Такимъ образомъ
линейныя дифф-ныя ур-iя не допускаютъ особаго рѣшенiя.

П Р И М Ъ Р Ъ 1. Имѣемъ ур-iе $y'' + y = 0$. Ему удовле-
творяютъ $y_1 = \cos x$ и $y_2 = \sin x$. Дифференцируя два раза зна-
ченiя y_1 и y_2 , получимъ $y_1' = -\sin x$; $y_1'' = \cos x$; $y_2' = \cos x$;
 $y_2'' = -\sin x$. Получаемъ: $-\cos x + \cos x = 0$ и $-\sin x + \sin x = 0$. Эти y_1
и y_2 линейно независимы, т.е. нельзя подобрать α_1 и α_2 такъ,

чтобъ $\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x = 0$, и детерминантъ Вронскаго, составленный

$$\text{изъ } y_1, y_2, y_1', y_2' \neq 0 \quad \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \mathcal{W}(\cos x, \sin x) = 1.$$

Слѣд., рѣшенiя образуютъ фундаментальную систему и можно на-
писать общее рѣшенiе:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

П Р И М Ъ Р Ъ 2. Даны частныя рѣшенiя $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$.

Составить ур-iе 2-го порядка, для котораго y_1 и y_2 служатъ рѣ-
шенiями. Пишемъ:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0; \quad y_1 = x; \quad y_1' = 1; \quad y_1'' = 0; \quad p_1 + p_2 x = 0 \quad (1)$$

$$y_2 = x^2; y_2' = 2x; y_2'' = 2; 2 + 2p_1 x + p_2 x^2 = 0; 2p_1 x + x^2 p_2 = -2 \quad (2)$$

Отсюда найдем p_1 и p_2 : $p_1 = -x p_2$; $p_2 = \frac{2}{x^2}$; $p_1 = -\frac{2}{x}$.

Искомое ур-ие будеть: $y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0$.

Общее рѣшеніе этого ур-ія будеть: $y = C_1 x + C_2 x^2$, ибо дифф-ное ур-іе допускаетъ фундаментальную систему $y_1 = x, y_2 = x^2$. Этотъ примѣръ интересенъ въ томъ отношеніи, что, зная два рѣшенія, мы построили дифф-ное ур-іе. Такимъ образомъ фундаментальной системой у насъ опредѣлилось дифф-ное ур-іе.

Докажемъ общую теорему:

Т Е О Р Е М А. Фундаментальная система вполне опредѣляетъ линейное дифференціальное уравненіе.

Пусть мы имѣемъ n функцій, y_1, y_2, \dots, y_n отъ переменнаго x , для которыхъ детерминантъ Вронскаго не равенъ 0. Составимъ ур-іе n -го порядка, для котораго эта система была бы фундамен- тальной. Называя коэфф-ты ур-ія чрезъ p (они неизвѣстны), напи- шемъ ур-іе такъ:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = 0.$$

Вставляя въ искомое ур-іе значенія y_1, y_2, \dots, y_n , мы получимъ n равенствъ, которыя и опредѣлятъ намъ неизвѣстные коэффиціен- ты p .

$$y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + p_2 y_1^{(n-2)} + \dots + p_n y_1 = 0 \quad (I)$$

$$y_2^{(n)} + p_1 y_2^{(n-1)} + p_2 y_2^{(n-2)} + \dots + p_n y_2 = 0 \quad (1)$$

$$y_3^{(n)} + p_1 y_3^{(n-1)} + p_2 y_3^{(n-2)} + \dots + p_n y_3 = 0 \quad (2)$$

.....
.....

$$y_n^{(n)} + p_1 y_n^{(n-1)} + p_2 y_n^{(n-2)} + \dots + p_n y_n = 0 \quad (n)$$

Последнія n равенствъ опредѣляютъ всё p , найдя которые мы вста-

визь ихъ значеніе въ (I) и найдемъ искомое ур-іе. Но можно построить искомое уравненіе и проще. Мы исключимъ p_i изъ $(n+1)$ равенствъ; детерминантъ изъ коэфф-товъ при p_i долженъ быть равенъ нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} y^{(n)} & y^{(n-1)} & \dots & y \\ y_1^{(n)} & y_1^{(n-1)} & \dots & y_1 \\ y_2^{(n)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(n)} & y_n^{(n-1)} & \dots & y_n \end{vmatrix} = 0$$

Это равенство имѣетъ видъ:

$$W^0(y_1, y_2, \dots, y_n, y) = 0,$$

гдѣ y - неизвѣстная функція. Раскрывая этотъ детерминантъ по элементамъ 1-ой строки, мы получимъ искомое ур-іе въ видѣ

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0,$$

гдѣ все a суть миноры для 1-ой строки детерминанта. Они суть функціи x . Раздѣливъ на a_0 , мы получимъ уравненіе вида (I).

Опредѣлимъ теперь въ отдѣльности коэффиціенты p_i изъ n уравненій; p_i опредѣлится дробью. Знаменателемъ этой дроби будетъ детерминантъ, составленный изъ коэфф-товъ при p_i . Не трудно видѣть, что детерминантъ этотъ есть детерминантъ Вронскаго

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

составленный изъ частныхъ рѣшеній. Числитель же получится, если въ детерминантѣ Вронскаго коэфф-ты при p_i замѣнимъ извѣстными членами. Итакъ p_i будетъ равенъ:

$$p_i = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

Припомнимъ теперь правило дифференцированія детерминантовъ. Производная детерминанта есть сумма детерм-въ, въ кото-рыхъ мы дифференцируемъ элементы одной строки. Если продиффе-ренцируемъ первую строку детерминанта Вронскаго, то получимъ нуль и т.д. Только продифференцировавъ послѣднюю строку, полу-чимъ детерминантъ отличный отъ нуля и, именно, тотъ детерми-нантъ, который стоитъ у насъ въ числитель p_1 , и слѣдовательно,

для p_1 получаемъ слѣдующее выраженіе:

$$p_1 = - \frac{\frac{d}{dx}(W)}{W^2} = - \frac{d \log W}{dx}$$

Итакъ, зная детерминантъ W , мы найдемъ p_1 и обратно: интегрируя выраженіе для p_1 , найдемъ W :

$$W = C e^{-\int p_1 dx}$$

Положеніе, выражаемое этой формулой, носитъ названіе теоремы Лиувилля.

Послѣдней формулѣ можно дать удобнѣй видъ, выразивъ C черезъ начальное значеніе W . Для этого возьмемъ интеграль съ опредѣленными нижнимъ предѣломъ x_0 для опредѣленія C положимъ $x = x_0$. Тогда

$$W_0 = C e^{-\int_{x_0}^x p_1 dx} = C,$$

и формула Лиувилля напишется такъ:

$$W = W_0 e^{-\int_{x_0}^x p_1 dx},$$

гдѣ W_0 есть детерминантъ Вронскаго для начальнаго значенія $x = x_0$. Откуда видно, что съ исчезновеніемъ W_0 исчезаетъ и W .

Подобравъ начальное значеніе такъ, чтобы W_0 не исчезало, ви-димъ, что и W тоже не исчезнетъ.

Введемъ теперь слѣдствіе изъ теоремы Лиувилля для ли-нейнаго уравненія второго порядка. Зная одно частное рѣшеніе, мы

найдемъ общій интеграль квадратурою. Пусть для ур-ія

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$$

известно частное рѣшеніе y_1 . Назовемъ какое-нибудь частное рѣшеніе, отличное отъ даннаго, чрезъ y_2 и составимъ детерминантъ Вронскаго:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C e^{-\int p_1 dx}$$

Мы получимъ соотношеніе для опредѣленія y_2 . Раскрывая детерминантъ, находимъ:

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = C e^{-\int p_1 dx},$$

гдѣ C имѣеть различныя постоянныя значенія въ зависимости отъ выбора второго рѣшенія y_2 . Полученное выраженіе есть диф-ное ур-іе перваго порядка, изъ котораго квадратурою находится y_2 :

$$-\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{1}{y_1^2} C e^{-\int p_1 dx}$$

Отсюда опредѣлимъ y_2 :

$$y_2 = y_1 \left\{ \int \frac{C e^{-\int p_1 dx}}{y_1^2} dx + C' \right\}$$

Такимъ образомъ, зная одно частное рѣшеніе, находимъ общій интеграль съ двумя постоянными. Слѣдовательно, всякое однородное линейное дифференціальное ур-іе второго порядка интегрируется квадратурою, коль скоро мы имѣемъ одно частное рѣшеніе.

П Р И М Ъ Р Ъ: $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1 = x$

Примѣняя формулу Лівилля, получимъ:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{x} \right) = \frac{1}{x^2} C e^{\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x^2} C x^2 = C;$$

откуда: $\frac{y_2}{x} = Cx + C'$; $y_2 = Cx^2 + C'x$

Общее рѣшеніе опредѣлится этимъ выраженіемъ.

Последній результатъ наводитъ на вопросъ: что дастъ намъ знаніе для ур-ія n -го порядка одного частнаго рѣшенія? Не трудно показать, что, зная одно частное рѣшеніе линейнаго уравненія

n -го порядка, можно понизить порядок ур-я на одну единицу.

Пусть дано уравнение

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = 0$$

и известно одно частное решение. Введем новую функцию z , полагая $y = y_1 \cdot z$. Для z получим опять линейное ур-е. Дифференцируем $y = z y_1$ до n -го порядка:

$$y = y_1 z$$

$$y' = y_1' z + y_1 z'$$

$$y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$$

.....

$$y^{(n)} = y_1^{(n)} z + \frac{n}{1} y_1^{(n-1)} z' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y_1^{(n-2)} z'' + \dots + y_1 z^{(n)}$$

Умножая первое равенство на p_n , второе - на p_{n-1} ,, последнее на 1, сложим. Получим новое ур-е:

$$z(p_n y_1 + p_{n-1} y_1' + \dots + y_1^{(n)}) + z'(p_{n-1} y_1 + 2p_{n-2} y_1' + \dots + n y_1^{(n-1)}) + \dots + z^{(n)} y_1 = 0$$

или, вводя сокращенные обозначения q :

$$y_1 z^{(n)} + q_1 z^{(n-1)} + q_2 z^{(n-2)} + \dots + q_n z = 0,$$

где

$$q_n = y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + p_2 y_1^{(n-2)} + \dots + p_n y_1,$$

т.е. величина q_n есть результат подстановки в ур-е вместо y величины y_1 ; следовательно: $q_n = 0$, и порядок ур-я понизим на единицу, полагая $z' = u$:

$$y_1 u^{(n-1)} + q_1 u^{(n-2)} + \dots + q_{n-1} u = 0$$

Для u получили линейное ур-е $n-1$ порядка, и предложение наше доказано.

Найдем теперь связь между переменными y и z . Мы по-

ложили $z' = u$ и $y = y_1 z$; $z = \frac{y}{y_1}$; $z' = \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{y_1} \right) = u$. Определяя u ,

мы одною квадратурою найдем z ; чрез квадратуру мы все -

демь одно произвольное постоянное.

Мы можем дальше вести наши рассужденія и положить, что намъ дано не одно частное рѣшеніе, а нѣсколько, напр. m ; въ этомъ случаѣ можемъ понизить порядокъ ур-ія на единицу. При этомъ пониженіе будемъ вести послѣдовательно, и всё наши рѣшенія должны быть линейно независимы.

Пусть мы имѣемъ сначала два рѣшенія y_1 и y_2 . Воспользуемся сначала только y_1 : получимъ, по предположенію,

$$u = \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{y_1} \right);$$

для u мы имѣемъ ур-іе уже $(n-1)$ порядка. Для него мы знаемъ еще одно частное рѣшеніе, получаемое изъ рѣшенія $y = y_2$. Вставимъ его въ выраженіе для u вмѣсто y , получимъ:

$$u_1 = \frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right).$$

Такимъ образомъ для ур-ія съ u намъ извѣстно одно рѣшеніе u_1 , т.е. для ур-ія $(n-1)$ порядка мы знаемъ одно частное рѣшеніе u_1 и можемъ опять понизить порядокъ ур-ія на единицу. Обозначая новое переменное, подобное u , черезъ v , мы имѣемъ: $v = \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{u_1} \right)$; для v имѣемъ ур-іе $n-2$ порядка.

Въ числѣ частныхъ рѣшеній мы, по условію, не считаемъ тривиальнаго рѣшенія $y = 0$, поэтому u_1 не нуль: $u_1 \neq 0$. Если бы u_1 оказалось нулемъ, то $\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = 0$, и $\frac{y_2}{y_1}$ было бы постоянно, и мы получили бы $\frac{y_2}{y_1} = k$; $y_2 - ky_1 = 0$ т.е. наши рѣшенія y_1 , y_2 оказались бы линейно зависимыми, тогда какъ мы считаемъ ихъ линейно независимыми. Итакъ $u_1 \neq 0$. Точно такъ же можно вести рассужденія, когда даны три рѣшенія y_1 , y_2 , y_3 .

Для ур-ія $(n-2)$ порядка мы нашли бы $v = \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{u_1} \right)$. Для это-

го ур-ія тоже мы можем найти рѣшеніе, пользуясь y_3 ; вставляя

y_3 вмѣсто y въ выраженіе u , имѣемъ: $u_2 = \frac{d}{dx} \left(\frac{y_3}{y_1} \right)$. т.е. для

ур-ія съ u мы уже знаемъ два частныхъ рѣшенія u_1 и u_2 . Нужно

только показать, что u_1 и u_2 линейно независимы. Предположимъ ,

что они линейно зависимы, т.е. существуетъ равенство $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0$

или, вставляя вмѣсто u_1 и u_2 ихъ выраженіе чрезъ y_1, y_2 и

y_3 , нахолимъ:
$$\alpha_1 \frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) + \alpha_2 \frac{d}{dx} \left(\frac{y_3}{y_1} \right) = 0$$

Интегрируя это равенство, будемъ имѣть:

$$\alpha_1 \frac{y_2}{y_1} + \alpha_2 \frac{y_3}{y_1} = C \quad , \quad \text{или}$$

$$\alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_3 - C y_1 = 0$$

Это равенство представляетъ линейную зависимость между данны-

ми рѣшеніями y_1, y_2 и y_3 , которыя мы предположили линейно не-

зависимыми. Слѣдовательно, подобное равенство существовать не

можетъ, а, слѣд., и u_1 и u_2 линейно независимы, и, взявъ

$$v_1 = \frac{d}{dx} \left(\frac{u_2}{u_1} \right), \text{ можемъ поступать по прежнему.}$$

Итакъ, указаннымъ приемомъ помощью послѣдовательнаго по-

ниженія мы можемъ понизить порядокъ ур-ія на единицу, когда

даномъ частныхъ рѣшеній.

Надимъ теперь общее доказательство для нашего предложе-

нія - доказательство стѣм-1 кѣм, т.е. полагая, что теорема

доказана для $m-1$ рѣшеній, докажемъ, что она справедлива и для

m рѣшеній.

Пусть дано m рѣшеній

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_m,$$

гдѣ $m < n$. Докажемъ, что порядокъ ур-ія можно понизить на m .

единицу. Лѣблемъ въ данномъ ур-іи подстановку, полагая $y = y_1 z$;

затѣмъ обозначая $z' = u$ получаемъ ур-іе для u на единицу низ -

шого порядка. Для него мы будемъ имѣть $m-1$ рѣшеній:

$$u_1 = \frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right); \quad u_2 = \frac{d}{dx} \left(\frac{y_3}{y_1} \right); \quad \dots \quad u_{m-1} = \frac{d}{dx} \left(\frac{y_m}{y_1} \right).$$

Мы предположили, что для $m-1$ порядка наше предложеніе доказано, и порядокъ понижается на $m-1$ единицъ. Переходя отъ u къ u , мы порядокъ понизили на 1; слѣдовательно всего порядокъ даннаго уравненія понизился на $m-1+1$ единицъ, т.е. на m единицъ. При этомъ замѣтимъ, что всѣ u будутъ линейно независимы въ силу нашего предположенія, что y_1, y_2, \dots, y_m линейно независимы. Въ самомъ дѣлѣ, если всѣ u линейно зависимы, то между ними должно существовать линейное соотношеніе вида:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \dots + \alpha_{m-1} u_{m-1} = 0.$$

Замѣняя здѣсь u чрезъ ихъ выраженія и интегрируя, мы будемъ имѣть такое соотношеніе:

$$\alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_3 + \dots + \alpha_{m-1} y_m - C y_1 = 0$$

а такая линейная зависимость между y невозможна, слѣдовательно, всѣ u линейно независимы.

Последними разсужденіями мы воспользуемся для доказательства существованія фундаментальной системы для всякаго линейнаго дифференціального уравненія n -го порядка. Одно доказательство нами уже было дано; — это — доказательство, вытекающее изъ разсмотрѣнія детерминанта Вронскаго. Теперь мы воспользуемся методомъ перехода отъ $n-1$ къ n .

Предполагаямъ, что существованіе фундаментальной системы доказано для уравненія $n-1$ порядка; докажемъ, что она суще-

ствуешь и для ур-ія n -го порядка.

Пусть мы имѣемъ одно частное рѣшеніе y_1 , которое мы всегда можемъ найти, задавъ начальныя данныя. Вводимъ новое переменнѣе, полагая $u = y_1 \cdot z$. Затѣмъ, какъ дѣлали прежде, введемъ переменнѣе u . Тогда порядокъ ур-ія понизится на единицу, и получимъ ур-іе въ u , $(n-1)$ порядка. По предположенію для ур-ія $(n-1)$ порядка существуетъ фундаментальная система; и тогда общее рѣшеніе напишется такъ:

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_{n-1} u_{n-1}$$

Отъ переменнаго u мы должны возвратиться къ y ; $u = z'$,

слѣдовательно: $z = C_1 \int u_1 dx + C_2 \int u_2 dx + \dots + C_{n-1} \int u_{n-1} dx + C_n$.

Умножая послѣднее выраженіе на y_1 , получимъ:

$$y = C_1 y_1 \int u_1 dx + C_2 y_1 \int u_2 dx + \dots + C_{n-1} y_1 \int u_{n-1} dx + C_n y_1$$

или мѣняя обозначенія C на γ , получимъ: $(C_n = \gamma_1, C_1 = \gamma_2, C_2 = \gamma_3, \dots)$

$$y = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 \int u_1 dx + \dots + \gamma_n y_1 \int u_{n-1} dx$$

Легко видѣть, что всѣ факторы при γ суть частныя рѣшенія даннаго уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, при любыхъ значеніяхъ γ , y есть рѣшеніе. Положимъ всѣ γ равными 0, кромѣ одного = 1; тогда наша формула приметъ видъ: $y = y_1$ или $y = y_2$ или $y = y_3$ и т.д., гдѣ

$$y_k = y_1 \int u_{k-1} dx \quad \text{и} \quad k = 2, 3, 4, \dots, n;$$

очевидно, y_k есть частное рѣшеніе.

Остается доказать, что всѣ найденныя частныя рѣшенія линейно независимы, т.е. образуютъ фундаментальную систему. Предположимъ, что они линейно зависимы, т.е.

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$$

вставимъ вмѣсто y ихъ значенія: $y_2 = y_1 \int u_1 dx, \dots$ и, сокра-

тивъ на y_1 , пролифференцируемъ по x ; получимъ:

$$\alpha_2 u_1 + \alpha_3 u_2 + \dots + \alpha_n u_{n-1} = 0,$$

гдѣ всѣ α постоянны. Получили линейную зависимость между всѣми u . Мы ихъ предположили линейно независимыми, слѣдовательно написанное равенство существовать не можетъ, и всѣ u линейно независимы.

Итакъ, если фундаментальная система существуетъ для ур-ія $n-1$ порядка, то она будетъ существовать и для ур-ія n -го порядка.

Остается показать, будетъ ли справедлива теорема для линейнаго однороднаго ур-ія перваго порядка. Возьмемъ линейное однородное ур-іе перваго порядка: $y' + py = 0$. Для него общее рѣшеніе выразится чрезъ одно частное, т.е. $y = C_1 u$, гдѣ C_1 - произвольное постоянное. Слѣдовательно, одно рѣшеніе образуетъ фундаментальную систему. Откуда, по доказанному, существуетъ фундаментальная система и для ур-ія 2-го порядка, а слѣдовательно, и для ур-ія 3-го порядка и т.д.

§ 19. ТЕОРИЯ НЕОДНОРОДНЫХЪ ЛИНЕЙНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

Неоднородные линейныя дифференціальныя ур-ія или ур-ія со второй частью имѣютъ видъ:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = \mathcal{V}, \quad (1)$$

гдѣ всѣ p и \mathcal{V} суть функціи x . Интеграція такихъ ур-ій приводится къ интеграціи ур-ій безъ второй части или однородныхъ, если только извѣстно одно частное рѣшеніе неоднороднаго уравненія.

Однородное уравнение, имеющее те же коэффициенты, как и неоднородное, называется соответствующим ему однородным уравнением:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = 0 \quad (2)$$

Ясно, что общих решений у (1) и (2) нет.

Пусть нам известно частное решение неоднородного уравнения $y(x)$; введем новое переменное, полагая:

$$y = \zeta + z \quad (3)$$

вставим выражение (3) в уравнение (1); мы увидим, что каждый член распадается на два: с ζ и z ; сгруппируем их в отдельные и мы получим в левой части, во-первых, левую часть уравнения (1) с заменой y через ζ , а во-вторых левую часть уравнения (2) с заменой y через z . Первая группа членов уничтожится со второй частью, и останется 2-ая группа, и мы получим линейное однородное уравнение n -го порядка относительно z . Нам остается теперь проинтегрировать это уравнение, и мы найдем по формуле неопределенности (3) интеграл неоднородного уравнения.

Если же мы имеем фундаментальную систему соответствующего однородного уравнения $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, то

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

будет общее решение уравнения (2). Если же мы сюда прибавим y (т.е. частное решение неоднородного), то

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + y \quad (3)$$

определим нам общее решение уравнения (1). Выражение для y линейно относительно постоянных. Обратное: если мы имеем линейное выражение относительно n произвольных постоянных, то оно может служить общим решением линейного уравнения (1) n -го по -

рядка. Пусть мы имѣемъ .

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + Y, \quad (3')$$

гдѣ C - произвольныя постоянныя, а y_i и Y суть некоторыя функции x . Утверждаемъ, что выраженіе (3') удовлетворяетъ нѣ-
которому линейному ур-ію. Для доказательства положенія нужно
исключить произвольныя постоянныя C изъ соотношенія (3'), про-
дифференцировавъ его n разъ. Пишемъ:

$$y = \sum_{s=1}^{s=n} C_s y_s + Y$$

$$y' = \sum_{s=1}^{s=n} C_s y'_s + Y'$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y^{(n)} = \sum_{s=1}^{s=n} C_s y_s^{(n)} + Y^{(n)}$$

имѣемъ $(n+1)$ ур-ій, гдѣ n неизвѣстныхъ C , которыя нужно ис-
ключить. Детерминантъ системы долженъ быть равенъ 0, т.е.

$$\begin{vmatrix} y - Y & y_1 & \dots & y_n \\ y' - Y' & y'_1 & \dots & y'_n \\ y'' - Y'' & y''_1 & \dots & y''_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n)} - Y^{(n)} & y^{(n)}_1 & \dots & y^{(n)}_n \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая детерминантъ по элементамъ перваго столбца, полу-
чимъ линейное диф-ное ур-іе n -го порядка. Итакъ положеніе
доказано.

Мы видимъ такимъ образомъ, что если намъ извѣстна n неза-
висимыхъ рѣшеній (2)-го ур-ія и одно частное рѣшеніе ур-ія
(1), то общее рѣшеніе неоднороднаго ур-ія находится безъ ин-
тегралівъ.

Возникаетъ вопросъ, получимъ ли каксе-нибудь упроще -

ние, если намъ известно только одно частное рѣшеніе однороднаго ур-ія - y_1 . Для разрѣшенія его прибѣгаемъ къ подстаровкѣ, полагая $y = y_1 z$ и вставляя это выраженіе въ ур-іе (1), предварительно проидифференцировавъ:

$$\begin{array}{l|l}
 p_n & y = y_1 z \\
 p_{n-1} & y' = y_1' z + y_1 z' \\
 p_{n-2} & y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'' \\
 & \dots\dots\dots \\
 1 & y^{(n)} = y_1^{(n)} z + \frac{n}{1} y_1^{(n-1)} z' + \dots\dots\dots + y_1 z^{(n)}
 \end{array}$$

Умножая y на p_n , y' на p_{n-1} и т.д., послѣднее на 1, складывая, мы въ лѣвой части получимъ въ силу даннаго ур-ія U' , и слѣдовательно имѣемъ:

гдѣ

$$U' = y_1 z^{(n)} + q_1 z^{(n-1)} + q_2 z^{(n-2)} + \dots\dots\dots + q_{n-1} z' + q_n z,$$

$$q_n = y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + p_2 y_1^{(n-2)} + \dots\dots\dots + p_n y_1$$

Легко видѣть, что q_n равно нулю, какъ результатъ замѣны y рѣшеніемъ y_1 въ лѣвой части ур-ія (2), и для z мы имѣемъ линейное ур-іе со второй частью, куда входятъ только производныя z , само же z не входитъ, т.е.

$$U' = y_1 z^{(n)} + q_1 z^{(n-1)} + \dots\dots\dots + q_{n-1} z'$$

Полагая $z' = u$, получаемъ ур-іе $(n-1)$ -го порядка. Отсюда результатъ такой: зная одно частное рѣшеніе y_1 , соответствующаго однороднаго линейнаго ур-ія, мы съ помощью подстановки $y = y_1 z$ можемъ понизить порядокъ даннаго неоднороднаго ур-ія на единицу; зная два частныхъ рѣшенія, мы понизимъ порядокъ ур-ія на 2 единицы и т.д. Доказательство, какъ видно, аналогично доказательству въ случаѣ однороднаго ур-ія.

Предположимъ теперь обратно: пусть намъ известно нѣ -

сколько частных рѣшеній даннаго неоднороднаго ур-ія (1) и не даны рѣшенія ур-ія (2). Пусть имѣемъ нѣсколько такихъ рѣшеній $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$ - это частныя рѣшенія ур-ія (1). Какое упрощеніе интеграціи получится въ этомъ случаѣ? Выбираемъ одно

изъ рѣшеній y_1 и дѣлаемъ такую подстановку: $y = y_1 + z$; получаемъ для z однородное ур-іе вида (2). Заменяя теперь въ формулѣ подстановки y частными рѣшеніями y , мы для z будемъ имѣть :

$z = 0$	и всѣ значенія z суть не что иное, какъ рѣшенія однороднаго ур-ія (2). Такимъ образомъ для (2) ур-ія мы будемъ знать $(m-1)$ рѣшеній, кромѣ тривіальнаго $z = 0$, а черезъ это, какъ видѣли выше, мы можемъ понизить порядокъ на $(m-1)$. Отсюда такъ формулируемъ сказанное: зная m частныхъ рѣшеній неоднороднаго линейнаго ур-ія, мы можемъ привести его къ однородному и понизить порядокъ ур-ія на $m-1$ единицъ.
$z = y_2 - y_1$	
$z = y_3 - y_1$	
.....	
$z = y_m - y_1$	

Отсюда такъ формулируемъ сказанное: зная m частныхъ рѣшеній неоднороднаго линейнаго ур-ія, мы можемъ привести его къ однородному и понизить порядокъ ур-ія на $m-1$ единицъ.

Иллюстрируемъ все сказанное примѣромъ:

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^3 \tag{1}$$

Раздѣляя это ур-іе на коэфф-тъ при старшей производной, приведемъ ур-іе къ обычному виду. Этому ур-ію удовлетворяетъ частное рѣшеніе $y = x^3$, что провѣряется подстановкой: $6x^3 - 6x^3 + 2x^3 = 2x^3$. Полагая $y = x^3 - z$, мы для z найдемъ однородное ур-іе:

$$x^2 z'' - 2xz' + 2z = 0 \tag{2}$$

Если теперь для однороднаго ур-ія (2) извѣстны два частныхъ рѣшенія, то мы можемъ найти общее рѣшеніе даннаго ур-ія; легко видѣть, что $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$ удовлетворяютъ ур-ію (2).

Слѣдовательно общее рѣшеніе данного неоднороднаго ур-ія есть

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + x^3 \quad (3)$$

Отсюда, давая C частныя значенія, получимъ частныя рѣшенія ; полагая $C_1 = C_2 = 0$, получимъ $y = x^3$. Если $C_2 = 0$, $C_1 = 1$, то $y = x + x^3$. Пусть теперь намъ заранее были даны два частныя рѣшенія $y_1 = x + x^3$ и $y_2 = x^3$, неоднороднаго ур-ія, тогда для его интегрированія мы сначала придемъ къ однородному (2) и порядкъ его понизимъ на единицу. Имѣемъ частное рѣшеніе однороднаго ур-ія (2): $z_1 = x^3 + x - x^3 = x$ и полагаемъ $z = xt$;

$$x^2(2t' + xt'') - 2x(t + xt') + 2xt = 0 ; \quad x^3 t'' = 0$$

или $t'' = 0$, полагая t' -и; имѣемъ $u' = 0$, слѣдовательно $u = A$ и

$$t = Ax + B, \quad z = Ax^2 + Bx; \quad y = x^3 + Ax^2 + Bx.$$

Если бы намъ было дано только одно частное рѣшеніе $y_1 = x$ соответственнаго однороднаго ур-ія, тогда порядкъ даннаго неоднороднаго ур-ія мы могли бы понизить на единицу. Пусть $y_1 = x$, полагая $y = x \cdot z$ и подставляя это въ ур-іе, имѣемъ:

$$x^2(2z' + xz'') - 2x(z + xz') + 2xz = 2x^3$$

Раскрывая скобки и произведя сокращенія, имѣемъ: $z'' = 2$

ур-іе со вторюю частью, которое подстановкой $z' = u$ приводится къ ур-ію $u' = 2$; по второму имѣемъ $z = x^2 + C_1 x + C_2$.

$$\text{Откуда } y = x^3 + C_1 x^2 + C_2 x.$$

Итакъ мы видимъ, что, зная частныя линейно-независимыя рѣшенія для однороднаго ур-ія и одно частное рѣшеніе неоднороднаго, мы находимъ общій интегралъ неоднороднаго ур-ія безъ интеграціи. Такимъ образомъ звать фундаментальную систему для соответствующаго однороднаго ур-ія еще не достаточно для того, чтобы проинтегрировать неоднородное ур-іе, — мы должны еще

знати одно частное рѣшеніе. Но посредствомъ метода, указаннаго Лагранжемъ и названнаго методомъ варіаціи постоянныхъ, мы можемъ найти общій интеграль неоднороднаго ур-ія помощью только квадратуръ, если извѣстень общій интеграль соответствующаго однороднаго ур-ія. Къ разсмотрѣнію этого метода мы и обрабаемся сейчасъ.

Возьмемъ неоднородное уравненіе (1)

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = V \quad (1)$$

и соответствующее однородное уравненіе:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = 0 ; \quad (2)$$

имѣемъ фундаментальную систему соответствующаго однороднаго ур-ія:

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n ; \quad \text{тогда} \\ y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_n y_n \quad (3)$$

гдѣ C - произвольныя постоянныя, - даетъ общее рѣшеніе уравненія (2). Имѣя такія данныя, зададимся вопросомъ: нельзя ли помощью равенства (3) опредѣлить и общій интеграль ур-ія (1)?

Этого сдѣлать нельзя, пока всё C остаются постоянными, и выдѣженіе (3) не можетъ удовлетворить неоднородному ур-ію (1). Далѣе, возможно ли достигнуть нѣли, если мы предположимъ всё C - функциями x , и всё ли рѣшенія тогда мы получимъ для ур-ія(1), предполагая лишь C функциями x ? Если мы C полагаемъ функциями x , то мы получимъ n новыхъ переменныхъ, и равенство (3) устанавливаетъ связь между старой функцией y и новыми функциями x , функциями C_i . Отсюда ясно, что не только возможно достигнуть нашей нѣли, но у насъ является слишкомъ много новыхъ функцій: мы ввели ихъ n . Изъ числа n введенныхъ новыхъ функцій, мы

$n-1$: C_1, C_2, \dots, C_{n-1} можемъ выбратьъ произвольно, и тогда формула (3) будетъ выражать связь y съ новыми переменными C_n . Благодаря произволу въ выборѣ $n-1$ функций мы можемъ присоединить какія угодно $n-1$ ур-ій, которыя вмѣстѣ съ ур-іемъ (1) опредѣляютъ все C .

Дифференцируемъ:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \quad (1')$$

одинъ разъ и требуемъ, чтобы совокупность членовъ, получаемыхъ при дифференцированіи первыхъ факторовъ, равнялась нулю, т.е.

$$y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \dots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0 \quad (1'')$$

тогда:

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots + C_n y_n' \quad (2')$$

Дифференцируемъ еще разъ и ставимъ аналогичное требованіе:

$$y_1' \frac{dC_1}{dx} + y_2' \frac{dC_2}{dx} + \dots + y_n' \frac{dC_n}{dx} = 0 \quad (2'')$$

тогда:

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \dots + C_n y_n'' \quad (2''')$$

Такъ же поступаемъ дальше; послѣднее изъ поставленныхъ условий имѣетъ видъ:

$$y_1^{(n-2)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(n-2)} \frac{dC_2}{dx} + \dots + y_n^{(n-2)} \frac{dC_n}{dx} = 0 \quad (n-1)$$

и при этомъ

$$y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} \quad (n-1)'$$

Во всехъ равенствахъ (1''), (2''), ..., (n-1)'' численны $n-1$; это тѣ $n-1$ условий, которыя мы по произволу можемъ наложить на функции C_i .

Дифференцируя (n-1)', получаемъ:

$$y^{(n)} = C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \dots + C_n y_n^{(n)} + y_1^{(n-1)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(n-1)} \frac{dC_2}{dx} + \dots + y_n^{(n-1)} \frac{dC_n}{dx} \quad (n'')$$

Вставляя выражения $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ изъ (1'), (2'), ..., (n') въ ур-іе (1), имѣемъ:

$$\begin{aligned}
V = & C_1 (P_n y_1 + P_{n-1} y_1' + P_{n-2} y_1'' + \dots + y_1^{(n)}) + \\
& + C_2 (P_n y_2 + P_{n-1} y_2' + P_{n-2} y_2'' + \dots + y_2^{(n)}) + \\
& + \dots + \\
& + C_n (P_n y_n + P_{n-1} y_n' + P_{n-2} y_n'' + \dots + y_n^{(n)}) + \\
& + y_1^{(n-1)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(n-1)} \frac{dC_2}{dx} + \dots + y_n^{(n-1)} \frac{dC_n}{dx}
\end{aligned} \tag{n''}$$

Коэффициентъ при C_1 равенъ 0, точно такъ же и при C_2, \dots, C_n , такъ какъ y_1, y_2, \dots, y_n - частныя рѣшенія однороднаго ур-ія.

Поэтому послѣднее ур-іе приметъ видъ:

$$y_1^{(n-1)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(n-1)} \frac{dC_2}{dx} + \dots + y_n^{(n-1)} \frac{dC_n}{dx} = V \tag{n''}$$

Уравненія 1'', 2'', ..., n'' содержатъ производныя C по x . Эти производныя изъ n ур-ій мы можемъ опредѣлить. Детерминантъ, составленный изъ коэффициентовъ при производныхъ, есть не что иное, какъ детерминантъ Вронскаго. Онъ не равенъ нулю, т. к. y_1, y_2, \dots, y_n - частныя рѣшенія линейно-независимыя, и эти частныя рѣшенія составляютъ фундаментальную систему. Слѣд., рѣшая систему этихъ ур-ій, мы найдемъ все производныя C по x ; знаменателемъ въ выраженіяхъ этихъ производныхъ будетъ детерминантъ Вронскаго $W(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$; имѣемъ

$$\frac{dC_i}{dx} = \varphi_i(x)$$

и для опредѣленія C_i выполняемъ квадратуру:

$$C_i = \int \varphi_i(x) dx + \gamma_i$$

гдѣ γ_i - произвольная постоянная. Найденныя C вставляемъ въ равенство (3):

$$y = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \dots + \gamma_n y_n + y_1 \int \varphi_1(x) dx + y_2 \int \varphi_2(x) dx + \dots + y_n \int \varphi_n(x) dx$$

Это выражение есть общее решение ур-я (1). Все γ здесь постоянны, и выражение это такого же типа, какимъ оно должно быть въ силу общей теоріи. Все члены съ γ составляютъ общее решение соответствующаго однороднаго ур-я, сумма же $\sum y_i \int \varphi_i(x) dx$ есть частное решение неоднороднаго ур-я, получаемое при $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \gamma_n = 0$. Итакъ, цѣль наша достигнута: зная фундаментальную систему соответствующаго однороднаго ур-я, мы методомъ варіант (методъ Лагранжа) достигли того, что нашли общее решение неоднороднаго уравненія.

Примѣнимъ этотъ методъ къ ур-ю, рассмотрѣнному раньше:

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^3$$

Составляющее однородное ур-іе будетъ:

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

Частные решения его были $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$; общее решение будетъ $y = C_1 x + C_2 x^2$. Полагая C функциями x , имѣемъ:

$$\frac{dC_1}{dx} x + \frac{dC_2}{dx} x^2 = 0, \quad \text{или} \quad \frac{dC_1}{dx} + x \frac{dC_2}{dx} = 0;$$

$$\frac{dC_1}{dx} + 2x \frac{dC_2}{dx} = \frac{2x^3}{x^2} = 2x \quad \text{откуда:}$$

$$\frac{dC_1}{dx} = -x \frac{dC_2}{dx}; \quad \frac{dC_2}{dx} = 2; \quad \frac{dC_1}{dx} = -2x; \quad C_1 = -\int 2x dx + \gamma_1;$$

$$C_2 = 2 \int dx + \gamma_2 = 2x + \gamma_2; \quad C_1 = -x^2 + \gamma_1;$$

$$y = (-x^2 + \gamma_1)x + (2x + \gamma_2)x^2 = \gamma_1 x - \gamma_2 x^2 - x^3 + 2x^3 = \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + x^3$$

§ 20. ЛИНЕЙНЫЯ УРАВНЕНІЯ СЪ ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦІЕНТАМИ.

Обратимся къ вопросу: какимъ образомъ можно составить фундаментальную систему для даннаго линейнаго уравненія. Въ об-

мъ случаѣ такихъ указаній дать нельзя, но для частныхъ типовъ ур-ій можно составить фундаментальную систему и даже въ элементарныхъ функціяхъ. Возьмемъ ур-іе съ постоянными коэффициентами. Ур-іе полагаемъ однороднымъ; неоднородное ур-іе мы могли бы свести къ ур-ію однородному. Итакъ пусть всё $a = \text{const}$.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0 \quad (1)$$

Этому уравненію мы можемъ удовлетворить, если дадимъ такое частное его рѣшеніе: $y = e^{kx}$. Дѣйствительно, вставивъ это значеніе въ ур-іе (1) и замѣтивъ при этомъ, что $y' = e^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$, ...

..., $y^{(n)} = k^n e^{kx}$, получимъ ур-іе, гдѣ e^{kx} выйдетъ общимъ факторомъ:

$$e^{kx} (k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n) = 0$$

Равенство нулю получится тогда, когда или $e^{kx} = 0$, или выраженіе въ скобкахъ равно 0. Но первое не равно нулю для любого x , следовательно:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (2)$$

Изъ этого условія опредѣляется k . Если k_1, k_2, \dots, k_n суть корни этого уравненія, то $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}$ суть частныя рѣшенія даннаго уравненія.

Такимъ образомъ мы нашли возможность находить частныя рѣшенія дифференціалаго ур-ія съ постоянными коэффициентами, разрешая нѣкоторое алгебраическое ур-іе. Многочленъ въ лѣвой части ур-ія (2) мы будемъ обозначать черезъ $\varphi(k)$:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n = \varphi(k)$$

и назовемъ его характеристическимъ многочленомъ, а ур-іе $\varphi(k) = 0$ характеристическимъ ур-іемъ. Обозначимъ лѣвую часть ур-ія (1)

такъ:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = \mathcal{A}\{y\},$$

гдѣ $A\{y\}$ обозначаетъ нѣкоторую операцію надъ y ; $A\{y\}$ есть дифференціальное выраженіе. Мы имѣемъ равенство:

$$A\{e^{kx}\} = e^{kx} \varphi(k) \tag{3}$$

справедливое для любого k . (Если же $\varphi(k) = 0$, то $A\{e^{kx}\} = 0$.)

Отсюда: $\varphi(k) = e^{-kx} A\{e^{kx}\}$ (4)

Послѣднее равенство опредѣляетъ характеристическій многочленъ.

Если характеристическое уравненіе имѣетъ n различныхъ корней (предполагая, что нѣтъ равныхъ), тогда будемъ имѣть n частныхъ рѣшеній, и общее рѣшеніе выразится такъ:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x} \tag{5}$$

гдѣ C_i суть постоянныя. Это станетъ вполне очевиднымъ, если мы докажемъ, что всѣ частныя рѣшенія линейно-независимы и, слѣд., образуютъ фундаментальную систему.

Доказательство поведемъ такъ: предположимъ, что наша теорія доказана для $n-1$ функцій вида e^{kx} , т.е. что эти $n-1$ функцій линейно-независимы; тогда докажемъ, что теорема справедлива и для n функцій, т.е. что n функцій линейно-независимы. Предположимъ, что мы имѣемъ зависимость такого рода:

$$\alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2 e^{k_2 x} + \dots + \alpha_n e^{k_n x} = 0, \tag{6}$$

гдѣ α_i - const. и притомъ не все α нули.

Раздѣлимъ все члены соотношенія (6) на $e^{k_1 x}$:

$$\alpha_1 + \alpha_2 e^{(k_2 - k_1)x} + \alpha_3 e^{(k_3 - k_1)x} + \dots + \alpha_n e^{(k_n - k_1)x} = 0$$

Затѣмъ продифференцируемъ все соотношеніе по x :

$$\alpha_2 (k_2 - k_1) e^{(k_2 - k_1)x} + \dots + \alpha_n (k_n - k_1) e^{(k_n - k_1)x} = 0 \tag{7}$$

Въ этомъ соотношеніи каждый членъ множится на нѣкоторый постоянный факторъ $(k_i - k_1)$. Это соотношеніе, слѣд., такого же типа

какъ и (6), но оно имѣетъ мѣсто уже для $n-1$ функций. По предположенію же $(n-1)$ функций линейно-независимы, слѣд. равенство (7) существовать не должно; если такъ, то не существуетъ и равенства (6). Наше положеніе доказано. Всѣ n функций линейно независимы.

Сдѣлаемъ два замѣчанія по поводу доказаннаго:

1) Будутъ ли факторы въ показателяхъ всѣ различны? Мы предположили, что всѣ κ различны; если бы $\kappa_j = \kappa_i = \kappa_i - \kappa_j$, то отсюда слѣдовало бы, что $\kappa_j = \kappa_i$, чего по нашему предположенію не должно быть.

2) Не окажутся ли всѣ постоянные коэффициенты въ равенствѣ (7) равными 0? Факторы $\kappa_j - \kappa_i$ не могутъ быть нулями, слѣдовательно коэффициенты могутъ оказаться нулями только въ силу $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \dots = \alpha_n = 0$. Но тогда въ силу условія (6) окажется и $\alpha_1 = 0$, что противно нашему предположенію, такъ какъ всѣ α не могутъ быть нулями.

П Р И М Ъ Р Ъ 1. $y'' - \alpha^2 y = 0$, гдѣ α постоянно. Составляемъ характеристическое уравненіе: $\kappa^2 - \alpha^2 = 0$ (производная замѣняемъ степенями κ). Рѣшаемъ и находимъ:

$$\kappa = \pm \alpha ; y_1 = e^{\alpha x} ; y_2 = e^{-\alpha x} ; y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$$

Таковъ общій интеграль.

П Р И М Ъ Р Ъ 2.

$$y'' + \alpha^2 y = 0 ; \kappa^2 + \alpha^2 = 0 ; \kappa = \pm i\alpha ; y = C_1 e^{i\alpha x} + C_2 e^{-i\alpha x}$$

Последній примѣръ привести насъ къ мысли, нельзя ли полученный общій интеграль, куда входитъ мнимость, представить въ болѣе удобной формѣ въ случаѣ, когда корни характеристическаго

уравненія мнимы.

Если характеристическое уравнение имеет мнимые корни, то они попарно сопряжены. Пусть, следовательно, мы имеем два корня для κ $\alpha + \beta i$ и $\alpha - \beta i$. Тогда частные решения будут $e^{(\alpha + \beta i)x}$ и $e^{(\alpha - \beta i)x}$ и в общем решении будут 2 члена: $C_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + C_2 e^{(\alpha - \beta i)x}$. Коэффициенты C_1 и C_2 произвольны; подберем их так, чтобы мнимость исчезла. Для этого 2 члена общего интеграла представим в виде:

$$e^{\alpha x} \{ (C_1 + C_2) \cos \beta x + i (C_1 - C_2) \sin \beta x \}$$

Очевидно, что для того, чтобы мнимость исчезла, нужно C_1 и C_2 выбрать сопряженными, положив

$$C_1 + C_2 = C'_1, \quad i(C_1 - C_2) = C'_2$$

при чем C'_1 и C'_2 считаем действительными, и тогда наше выражение принимает действительный вид:

$$e^{\alpha x} (C'_1 \cos \beta x + C'_2 \sin \beta x)$$

В нашем примере $\alpha = 0$, $\beta = a$ и общее решение в данном примере принимает вид:

$$y = C'_1 \cos ax + C'_2 \sin ax.$$

Здесь следует сделать только одно замечание: мы C_1 и C_2 считаем произвольными. Но ничто не мешает нам считать произвольными C'_1 и C'_2 , и C_1 , C_2 представить в виде:

$$C_1 = \frac{C'_1 - iC'_2}{2} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{C'_1 + iC'_2}{2}$$

Последними рассуждениями мы расширили понятие о произвольном постоянном. Прежде мы считали его величиной только действительной.

тельно, теперь же мы допускаем для произвольных постоянных не только действительные, но и мнимые значения.

Приступаем теперь к рассмотрению случаев, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни. В этом случае не получим, очевидно, уже n частных решений e^{kx} — их будет меньше. Но мы сейчас покажем, что для каждого кратного корня можно найти не одно частное решение, а столько, как велика кратность корня.

Приступаем к нашему доказательству от частного случая. Предположим, что корень $k = 0$, и кратность корня есть m , тогда характеристический многочлен представится в таком виде:

$$\varphi(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-m} k^m$$

Все остальные члены исчезнут, т.е. $a_{n-m+1} = a_{n-m+2} = \dots = a_n = 0$. Дифференциальное уравнение напишется в силу этого так:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-m} y^{(m)} = 0$$

Заметим, что когда корень характеристического уравнения $k = 0$, то $y = e^{kx}$ обращается в 1. И не трудно видеть, что единица удовлетворяет нашему уравнению, так как все производные ее нули. Но кроме единицы мы можем указать еще ряд частных решений; если порядок последней производной есть m то решениями будут $y = 1, x, x^2, x^3, \dots, x^{m-1}$, так как все производные, начиная с m -ой, суть нули. Действительно:

$$\frac{d^m(1)}{dx^m} = 0, \dots, \frac{d^m(x^{m-2})}{dx^m} = 0, \quad \frac{d^m(x^{m-1})}{dx^m} = 0$$

Поэтому дифференциальному уравнению удовлетворяют не только $y = 1$, но и $x, x^2, x^3, \dots, x^{m-1}$, т.е. для m кратного корня мы нашли m частных решений. Мы можем брать сумму этих решений и умно-

жать ихъ на постоянные коэффициенты. Вообще, слѣд., частное рѣшеніе для m кратнаго корня есть многочленъ $(m-1)$ -ой степени :

$y = g_{m-1}(x)$. Этотъ многочленъ мы получили, исходя изъ разсмотрѣнія частнаго случая характеристическаго ур-ія, когда m -кратный корень его K равенъ нулю: $K = 0$. Но легко показать, что посредствомъ линейнаго преобразованія можно общій случай приве-

сти къ этому частному. Беремъ линейное дифф-ное ур-іе:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = A\{y\} = 0 \quad (I)$$

и положимъ, что $y = e^{\beta x} \cdot z$ (β постоянно); тогда для всѣхъ производныхъ $e^{\beta x}$ выйдетъ за скобку общимъ факторомъ: $y' = e^{\beta x} (z' + \beta z)$

и т.д.; по формулѣ Лейбница найдемъ, что какая-нибудь производная порядка p будетъ:

$$y^{(p)} = \sum_{s=0}^{s=p} (p_s) \beta^s e^{\beta x} z^{(p-s)} = e^{\beta x} \sum_{s=0}^{s=p} (p_s) \beta^s z^{(p-s)}$$

гдѣ (p_s) - биномиальный коэффициентъ.

Если мы вставимъ всё производная въ лѣвую часть даннаго дифф-наго ур-ія $A\{y\}$, то получимъ новое преобразованное ур-іе.

Имѣемъ $A\{y\} = A\{e^{\beta x} z\} = e^{\beta x} B\{z\}$, (II)

итакъ, наше новое преобразованное ур-іе будетъ

$$B\{z\} = 0 \quad (II)$$

Это уравненіе тоже линейное и съ постоянными коэффициентами. Для новаго дифф-наго ур-ія важно найти характеристическое ур-іе и связь этого ур-ія съ характеристическимъ ур-іемъ даннаго дифференціального ур-ія. Выше мы опредѣлили характеристическій многочленъ даннаго такъ:

$$\varphi(K) = \frac{A\{e^{Kx}\}}{e^{Kx}} \quad (4)$$

По правилу нахождения этого многочлена найдемъ характеристическій многочленъ и для второго дифф-наго ур-ія: $B\{z\} = 0$. Назовемъ его характеристическій многочленъ черезъ $f(k)$:

$$f(k) = \frac{B\{e^{kx}\}}{e^{kx}} \quad (8)$$

Но $B\{z\}$ связано съ даннымъ ур-іемъ такъ:

$$A\{e^{bx} z\} = e^{bx} B\{z\}$$

Откуда мы найдемъ: $B\{z\} = \frac{A\{e^{bx} z\}}{e^{bx}}$

Поэтому въ соотношеніе (8) вмѣсто $B\{z\}$ вставимъ найденное выраженіе и получимъ

$$f(k) = \frac{A\{e^{bx} e^{kx}\}}{e^{bx} e^{kx}} = \frac{A\{e^{(b+k)x}\}}{e^{(b+k)x}}$$

Итакъ, для нахождения $f(k)$ нужно въ данное ур-іе вмѣсто u подставить величину $e^{(b+k)x}$ и на нее же раздѣлить. А это въ силу равенства (4) есть не что иное, какъ $\varphi(b+k)$, слѣдовательно:

$$f(k) = \frac{A\{e^{(b+k)x}\}}{e^{(b+k)x}} = \varphi(b+k) \quad (9)$$

Мы получили новый характеристическій многочленъ для преобразованнаго ур-ія изъ перваго характеристическаго многочлена даннаго дифф-наго замѣною k черезъ $b+k$. Отсюда между прочимъ видны и корни новаго характеристическаго ур-ія. Они получатся очевидно, вычитаніемъ изъ корней прежняго характеристическаго ур-ія числа b . Это еще нагляднѣе представляется слѣдующимъ способомъ доказательства. Пусть

$$\varphi(k) = (k - k_1)^{m_1} \cdot (k - k_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (k - k_s)^{m_s}$$

гдѣ $k_1, k_2, k_3, \dots, k_s$ суть корни ур-ія $\varphi(k)$ кратности: m_1, m_2, m_3, \dots . Многочленъ же $f(k)$, по предлущему, есть

$$f(k) = [k - (k_1 - b)]^{m_1} \cdot [k - (k_2 - b)]^{m_2} \cdot \dots$$

Теперь ясно, что корни новаго характеристическаго ур-ія суть:

$(\kappa_1 - \bar{b}), (\kappa_2 - \bar{b}), \dots$, и притомъ кратность ихъ прежняя. Отсюда результатъ сказаннаго формулируемъ такъ:

Преобразование $y = e^{\bar{b}x}$ преобразуетъ линейное ур-іе съ постоянными коэффициентами въ новое, линейное же ур-іе съ постоянными коэффициентами. При этомъ корни характеристическаго ур-ія получаются изъ корней прежняго вычитаніемъ \bar{b} , а кратность корней остается прежняя.

Переходимъ къ изысканію частныхъ рѣшеній для случая кратныхъ корней характеристическаго ур-ія. Пусть дифференціальное ур-іе съ постоянными коэфф-тами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = A\{y\} = 0$$

таково, что его характеристическое ур-іе имѣетъ кратные корни; $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_i, \dots, \kappa_s$ суть корни ур-ія кратности: $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_s$. Сумма кратностей равна порядку ур-ія: $m_1 + m_2 + \dots + m_i + \dots + m_s = n$.

Построимъ рядъ частныхъ рѣшеній, напр., для корня κ_i кратности m_i . Для этого дѣлаемъ подстановку: $y = e^{\kappa_i x}$. Этою подстановкою мы приходимъ къ ур-ію, гдѣ характеристическое ур-іе имѣетъ кратный корень, равный нулю. Преобразованиемъ мы получимъ ур-іе $B\{z\} = 0$. Въ характеристическомъ ур-іи этого дифференціального ур-ія корню кратности κ_i соответствуетъ корень 0 той же кратности. Слѣд., для m_i -кратнаго корня 0 мы имѣемъ частныя рѣшенія $z = 1, x, x^2, \dots, x^{m_i-1}$. Но, зная частныя рѣшенія преобразованнаго ур-ія, мы найдемъ и частныя рѣшенія даннаго. Изъ подстановки вытекаетъ, что

$$y = e^{\kappa_i x}, x e^{\kappa_i x}, x^2 e^{\kappa_i x}, \dots, x^{m_i-1} e^{\kappa_i x}$$

Совершенно так же мы построим другія частныя рѣшенія для другихъ корней. Получаемъ рѣшенія для корней $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_s$. Такимъ образомъ эти частныя рѣшенія расположатся по группамъ, и въ каждой группѣ $e^{\kappa_i x}$ выйдетъ общимъ факторомъ.

Намъ нужно доказать теперь, что всѣ эти частныя рѣшенія линейно-независимы, т.е. между ними не существуетъ линейной зависимости съ постоянными коэфф-тами. Подобное соотношение, по вынесени общима факторомъ $e^{\kappa_i x}$ изъ рѣшеній каждой группы, принимаетъ видъ:

$$g_1(x)e^{\kappa_1 x} + g_2(x)e^{\kappa_2 x} + \dots + g_s(x)e^{\kappa_s x} = 0,$$

гдѣ g_1 - многочленъ $m_1 - 1$ степени, g_2 , - $(m_2 - 1)$ степени и т. д.

g_s , - $(m_s - 1)$ степени. Докажемъ, что такое соотношение невозможно. Доказательство поведемъ методомъ перехода стъ $s - 1$ къ s . Предположимъ, что наше соотношение невозможно для $s - 1$ слагаемыхъ и докажемъ, что и для s слагаемыхъ оно не существуетъ.

Раздѣлимъ все соотношение на $e^{\kappa_s x}$, получимъ:

$$g_1(x)e^{(\kappa_1 - \kappa_s)x} + g_2(x)e^{(\kappa_2 - \kappa_s)x} + \dots + g_{s-1}(x)e^{(\kappa_{s-1} - \kappa_s)x} + g_s(x) = 0 \quad (10)$$

Дифференцируемъ это равенство столько разъ, чтобы производная послѣдняго многочлена была равна нулю. Степень послѣдняго многочлена $(m_s - 1)$; слѣд., дифференцируя m_s разъ, мы получимъ производную послѣдняго многочлена, равную 0. При дифференцировани всѣ предыдущіе члены останутся прежняго типа. Дѣйствительно, дифференцируемъ одинъ разъ:

$$\frac{d}{dx} \{ g(x)e^{\alpha x} \} = e^{\alpha x} \{ \alpha g(x) + g'(x) \}$$

Многочленъ, полученный послѣ дифференцированія факторомъ при $e^{\alpha x}$, - той же степени, какъ и первый (до дифференцированія). При многократномъ дифф-ни получимъ члены такого же типа. Про-

дифференцировавъ все соотношеніе m -разъ, мы получимъ соотношеніе такого же типа, но уже составленное изъ $s-1$ функций, такъ какъ $\frac{d^{m_s}}{dx^{m_s}} g_s(x) = 0$. Это равенство по условію невозможно, слѣд- невозможно равенство и для s функций. Слѣд., соотношеніе (10) не можетъ имѣть мѣста. Легко видѣть, что это равенство невозможно для одной функции, напр., $g_1(x) e^{k_1 x} \neq 0$, слѣд.; по доказанному для $s = 2$ тоже невозможно и т. д. Итакъ, оно невозможно и для любого s .

Такимъ образомъ мы построимъ фундаментальную систему, а имѣя ее, можемъ составить и общій интеграль, для чего частныя рѣшенія помножаемъ на произвольные постоянныя коэфф-ты и сложимъ. Мы получимъ:

$$y = \Gamma_1(x) e^{k_1 x} + \Gamma_2(x) e^{k_2 x} + \dots + \Gamma_s(x) e^{k_s x}$$

гдѣ Γ есть многочленъ съ произвольными коэфф-тами, степени на единицу меньше кратности соответствующаго корня; такъ Γ_1 степени m_1-1 ; Γ_2 - степени m_2-1 ; и т. д. Γ_s - степени m_s-1 .

Остается сдѣлать только одно замѣчаніе. Кратные корни могутъ быть и мнимыми. Въ этомъ случаѣ они будутъ встрѣчаться попарно-сопряженными и притомъ одной кратности. Если мы имѣемъ мнимый корень $\alpha + \beta i$ кратности m , то существуетъ корень, ему сопряженный $\alpha - \beta i$ той же кратности m . Возьмемъ въ общемъ рѣшеніи два только члена:

$$\Gamma_1(x) e^{(\alpha + \beta i)x} + \Gamma_2(x) e^{(\alpha - \beta i)x} =$$

гдѣ Γ_1 и Γ_2 - два многочлена степени $m-1$. Все выраженіе можемъ представить иначе, пользуясь формулами Эйлера:

$$= e^{\alpha x} \left[(\Gamma_1(x) + \Gamma_2(x)) \cos \beta x + i (\Gamma_1(x) - \Gamma_2(x)) \sin \beta x \right] =$$

$$= e^{\alpha x} \left[\Gamma_1^{(1)}(x) \cos \beta x + \Gamma_2^{(1)}(x) \sin \beta x \right],$$

гдѣ $\Gamma_1^{(1)}$ и $\Gamma_2^{(1)}$ (многочлены степени $m-1$) связаны съ Γ_1 и Γ_2 такъ:

$$\Gamma_1^{(1)}(x) = \Gamma_1(x) + \Gamma_2(x) \quad ; \quad \Gamma_2^{(1)}(x) = c [\Gamma_1(x) - \Gamma_2(x)]$$

Можно было бы $\Gamma_1^{(1)}$ и $\Gamma_2^{(1)}$ считать произвольными и черезъ нихъ выразить Γ_1 и Γ_2 .

П Р И М Ъ Р Ъ 1. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

Ур-іе 3-го порядка; его характеристическое уравненіе:

$$\kappa^3 - 3\kappa^2 + 3\kappa - 1 = 0; \quad (\kappa-1)^3 = 0; \quad \kappa = 1 \text{ есть трехкратный корень.}$$

Слѣдовательно, частныя рѣшенія будутъ: e^x , xe^x , x^2e^x , а общее:

$$y = e^x (C_1 + C_2x + C_3x^2)$$

П Р И М Ъ Р Ъ 2. $y'''' + 2y'' + y = 0$

Характеристическое ур-іе: $\kappa^4 + 2\kappa^2 + 1 = 0; \quad (\kappa^2 + 1)^2 = 0;$

$\kappa = \pm i$. Корни $+i$, $-i$ двукратные, они попарно-сопряженные. Составляемъ общій интегралъ по выше указанному, принимая во вниманіе, что $\alpha = 0$. Получаемъ: $y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 - C_4x)\sin x$. Таково будетъ въ действительной формѣ общее рѣшеніе.

Остается теперь намъ рассмотреть еще случай неоднороднаго ур-ія:

$$A\{y\} = V(x) \quad (11)$$

Общій интегралъ этого ур-ія мы можемъ получить согласно общей теоріи, т.е. беремъ соответствующее однородное диф-нсе ур-іе $A\{y\} = 0$, находимъ его общій интегралъ и методомъ варіаціи постоянныхъ найдемъ общій интегралъ даннаго ур-ія. Но здѣсь мы рассмотримъ другой методъ; именно, мы найдемъ частное рѣшеніе даннаго намъ ур-ія Y , а затѣмъ общее рѣшеніе $y = Y +$ общее рѣшеніе однороднаго ур-ія. Слѣд., въ этомъ методѣ дѣло сведется къ нахожденію частнаго рѣшенія ур-ія со второй частью.

Мы ограничимся однимъ случаемъ, а именно предположимъ, что

Вторая часть V состоит изъ членовъ такого вида, какіе входили въ рѣшеніе (общее) ур-ія безъ второй части, т.е.

$$V(x) = \sum_{i=1}^m e^{\alpha_i x} g_i(x) \quad (11')$$

т.е. показательная функція $e^{\alpha x}$ множится на нѣкоторый много-членъ; все же выраженіе представляетъ сумму показательныхъ функцій, умноженныхъ на многочлены. Но и въ этомъ случаѣ правая часть представляетъ довольно сложное выраженіе. Мы ее упростимъ, предположивъ, что правая часть содержитъ не сумму членовъ такого типа, а только одинъ членъ, т.е. мы рассмотримъ такое неоднородное уравненіе:

$$A\{y\} = e^{\alpha_i x} g_i(x)$$

Это мы сдѣлаемъ по слѣдующей причинѣ:

Возьмемъ m ур-ій послѣдняго вида, полагая $i=1, 2, 3, \dots, m$, и предположимъ, что мы нашли по одному частному рѣшенію y_1, y_2, y_3, \dots . Итакъ:

$$A\{y_1\} = e^{\alpha_1 x} g_1(x) \quad (12)$$

$$A\{y_2\} = e^{\alpha_2 x} g_2(x)$$

$$\dots \dots \dots$$
$$A\{y_m\} = e^{\alpha_m x} g_m(x)$$

и, если извѣстно по одному частному рѣшенію для всѣхъ этихъ ур-ій, то мы можемъ утверждать, что данному ур-ію (11) удовлетворимъ, положивъ $y = y_1 + y_2 + \dots$. Дѣйствительно, вставимъ это въ ур-іе (11), принимая во вниманіе значеніе символа; получимъ:

$$A\{y_1 + y_2 + \dots\} = A\{\sum_{i=1}^m y_i\} = A\{y_1\} + A\{y_2\} + \dots = \sum_{i=1}^m A\{y_i\}$$

Но такъ какъ $A\{y_i\} = e^{\alpha_i x} g_i(x)$, то мы получаемъ:

$$\sum_{i=1}^m A\{y_i\} = \sum_{i=1}^m e^{\alpha_i x} g_i(x) = V(x).$$

Отсюда видно, что рѣшеніе даннаго неоднороднаго ур-ія приводит- ся къ изысканію частныхъ рѣшеній ур-ія со второй частью, состо- ящей только изъ одного члена.

Итакъ, обращаемся къ изысканію частнаго рѣшенія ур-ія та- кого типа:

$$A\{y\} = e^{\alpha x} g_{\mu}(x) \tag{12'}$$

гдѣ μ - указатель степени многочлена. Если въ частномъ случаѣ имѣемъ $\alpha = 0$, тогда имѣемъ просто $g_{\mu}(x)$; если же $\mu = 0$, т. е. многочленъ нулевой степени, то имѣемъ въ правой части одну по- казательную функцію. Обращаемся къ разсмотрѣнію характери- ческаго ур-ія отъ дифф-наго $A\{y\} = 0$ и посмотримъ, будетъ ли α корнемъ этого характеристическаго уравненія:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Вообще говоря, α не будетъ корнемъ этого ур-ія; въ частномъ же случаѣ можетъ оказаться и корнемъ. Предположимъ для общности, что α есть корень характеристическаго ур-ія и притомъ m -кратный (если α не есть корень, тогда достаточно положить равнымъ 0).

Воспользуемся преобразованиемъ зависимаго переменнаго y , поло- живъ $y = e^{\alpha x} z$. Мы видѣли, что при линейномъ преобразованіи за- висимаго переменнаго, послѣ преобразованія получится ур-іе то- же линейное. Въ данномъ случаѣ послѣ преобразованія, имѣемъ

ур-іе вида: $e^{\alpha x} B\{z\} = e^{\alpha x} g_{\mu}(x) \tag{13}$

гдѣ $B\{z\} = z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + b_2 z^{(n-2)} + \dots$ и b_i - постоянные коэффициенты.

Сокращая на $e^{\alpha x}$, получаемъ :

$$B\{z\} = g_{\mu}(x) \tag{13'}$$

Такимъ образомъ мы нашу задачу привели къ тому случаю, когда $\alpha = 0$.

Въ этомъ же частномъ случаѣ задачу уже легко рѣшить. Новое характеристическое уравненіе будетъ имѣть корнемъ 0 кратности m , т. к. все корни новаго характеристическаго уравненія получаются изъ корней прежняго вычитаніемъ α , и $\alpha - \alpha = 0$. Если наше дифференціальное уравненіе (преобразованное) удовлетворяется нѣкоторымъ значеніемъ z и если его продифференцируемъ, то полученное уравненіе тоже будетъ удовлетворяться этимъ z . Продифференцируемъ его $\mu + 1$ разъ, тогда справа получимъ 0:

$$\frac{d^{\mu+1}}{dx^{\mu+1}} [B\{z\}] = 0 \quad (14)$$

и будемъ имѣть линейное однородное дифференціальное уравненіе съ постоянными коэффициентами:

$$z^{(n+\mu+1)} + b_1 z^{(n+\mu)} + b_2 z^{(n+\mu-1)} + \dots = 0.$$

Порядокъ этого уравненія будетъ $n + \mu + 1$, т. к. сначала оно было порядка n , да еще продифференцировали $\mu + 1$ разъ. Все рѣшенія уравненія, изъ котораго мы исходили (13') - будутъ также рѣшеніями и уравненія (14), но обратнаго всеобща не будетъ. Рѣшенія же (14) мы легко найдемъ, такъ какъ это уравненіе однородное, но только среди этихъ рѣшеній мы должны будемъ избрать тѣ, которыя удовлетворяютъ (13'). Напишемъ характеристическое уравненіе для уравненія (14):

$$\chi^{n+\mu+1} + b_1 \chi^{n+\mu} + b_2 \chi^{n+\mu-1} + \dots = 0$$

Корни этого уравненія будутъ: во-первыхъ все корни стараго уравненія, а во-вторыхъ $\mu + 1$ разъ кратный корень 0. Но у стараго характеристическаго уравненія былъ уже корень 0, и притомъ m -кратный.

Слѣд., у новаго уравненія нуль будетъ $m + \mu + 1$ кратности. Другіе же корни различныя назовемъ $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{p-1}$. Слѣдствительно, общее рѣшеніе уравненія (14) напишется такъ:

$$z = g_{m,\mu}(x) + \sum_{i=1}^{i=p-1} e^{\lambda_i x} g_i(x) \quad - 177 -$$

Такимъ должно быть z , чтобы удовлетворить ур-ю (14). Видоизменимъ нѣсколько полученное выраженіе. Въ многочленѣ $g_{m,\mu}(x)$ степени $m + \mu$ соберемъ все члены со степенями не ниже m и x^m вынесемъ общимъ факторомъ; получимъ:

$$z = x^m g_{\mu}(x) + C_1 x^{m-1} + C_2 x^{m-2} + \dots + \sum_{i=1}^{i=p-1} e^{\lambda_i x} g_i(x) \quad (15)$$

Гдѣ $g_{\mu}(x)$ — многочленъ степени μ .

Выше мы сказали, что всякое рѣшеніе ур-я (13') должно удовлетворить ур-ю (14), но не обратно: не все рѣшенія (14) удовлетворяютъ ур-ю (13'). Слѣд., только нѣкоторыя рѣшенія (14) удовлетворяютъ ур-ю (13') такъ какъ ур-е (14) высшаго порядка. Отсюда заключаемъ, что все рѣшенія ур-я (13') должны заключаться въ формулѣ (15) при нѣкоторыхъ значеніяхъ постоянныхъ. Такимъ образомъ задача наша сводится къ тому, чтобы выбрать изъ формулы (15) все рѣшенія, удовлетворяющія ур-ю (13'). Если мы возьмемъ изъ формулы (15) совокупность членовъ:

$$C_1 x^{m-1} + C_2 x^{m-2} + C_3 x^{m-3} + \dots + \sum_{i=1}^{i=p-1} e^{\lambda_i x} g_i(x) \quad (15')$$

то, какъ нетрудно видѣть, она есть рѣшеніе ур-я (13'), но только безъ второй части. Въ самомъ дѣлѣ, характеристическое ур-е этого ур-я (13') безъ второй части имѣетъ m -кратный корень 0 и еще корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}$. Выраженіе (15) какъ разъ и составлено для этихъ корней. Итакъ, группа членовъ формулы (15) есть общее рѣшеніе ур-я (13') при замѣнѣ правой части въ немъ нулемъ, т.е. для $B\{z\} = 0$. Замѣтивъ это, мы можемъ сбросить все члены формулы (15), начиная со 2-го, безъ ущерба

для ур-ия (13'). На самом дѣлѣ, пусть при нѣкоторыхъ значеніяхъ постоянныхъ формула (15) даетъ частное рѣшеніе Z для уравненія (13'). Тогда вычитая изъ Z все, кромѣ 1-го члена, получимъ:

$$Z - C_1 x^{m-1} - C_2 x^{m-2} - \dots - \sum_{i=1}^{i=p-1} e^{\lambda_i x} g_i(x) = x^m g_m(x).$$

Это будетъ тоже частное рѣшеніе для ур-ия (13'), такъ какъ, подставляя это въ $B\{z\}$ вмѣсто z получимъ:

$$\begin{aligned} B\{Z - C_1 x^{m-1} - C_2 x^{m-2} - \dots - \sum_{i=1}^{i=p-1} e^{\lambda_i x} g_i(x)\} &= \\ = B\{Z\} - B\{C_1 x^{m-1} + C_2 x^{m-2} + \dots + \sum_{i=1}^{i=p-1} e^{\lambda_i x} g_i(x)\} &= B\{Z\} = g_m(x), \end{aligned}$$

такъ какъ $B\{C_1 x^{m-1} + \dots + \sum_{i=1}^{i=p-1} e^{\lambda_i x} g_i(x)\} = 0$,

Слѣд., наша разность есть тоже рѣшеніе ур-ия (13') со 2-ой частью. Отсюда, видимъ, что рѣшеніе ур-ия (13') мы можемъ искать въ видѣ $x^m g_m(x)$.

Возвращаясь отъ z къ y , мы находимъ частное рѣшеніе уравненія (11):

$$A\{y\} = e^{\alpha x} g_m(x) \tag{12'}$$

въ видѣ:

$$y = e^{\alpha x} [x^m g_m(x)] \tag{16}$$

Гдѣ m есть кратность корня характеристическаго ур-ия (если α не есть корень характеристическаго ур-ия, то m надо положить = 0); $g_m(x)$ есть многочленъ m - степени, какъ и $g_m(x)$.

Итакъ мы доказали только, что ур-іе (12') имѣетъ частное рѣшеніе вида (16). Остается найти это частное рѣшеніе, т.е. найти коэфф-ты $g_m(x)$. Для этого мы воспользуемся методомъ неопредѣленныхъ коэфф-товъ. Вставимъ въ ур-іе (12') выраженіе (16) и приравняемъ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x въ 2-хъ частяхъ. Этотъ методъ насъ непремѣнно приведетъ къ нѣмн. такъ

как мы доказали, что частное рѣшеніе будетъ вида (16).

П Р И М Ъ Р Ъ 1. $y'' + y = (x+2).e^x$. Рассмотрим ха-
рактеристическое ур-іе $\kappa^2 + 1 = 0$; $\kappa = \pm i$; α равно единицѣ и
не есть корень характеристическаго ур-ія, слѣд: $m = 0$.

Пишемъ общій видъ частнаго рѣшенія $y = (Ax + B) e^x$. Оста-
ется найти коэфф-ты А и В.

$$y' = e^x(Ax + A + B), \quad y'' = e^x(Ax + 2A + B);$$
$$e^x(Ax + 2A + B) + e^x(Ax + B) = (x + 2)e^x.$$

Отсюда: $2A = 1, A + B = 1$; $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$.

Слѣдовательно общее рѣшеніе будетъ:

$$y = \frac{1}{2} e^x(x+1) + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Разберемъ еще примѣръ, гдѣ α является корнемъ характери-
стическаго уравненія.

П Р И М Ъ Р Ъ 2. $y'' - y = (2x + 1) e^x$. Характеристиче-
ское ур-іе: $\kappa^2 - 1 = 0, \kappa = \pm 1$; α - однократный корень харак-
теристическаго ур-ія, слѣд. m не равно 0, $m = 1$. Общій видъ рѣ-
шенія есть $y = e^x \cdot x(Ax + B)$. Это выраженіе нужно продифференци-
ровать и вставить въ данное ур-іе. Съ перваго взгляда кажется
страннымъ то обстоятельство, что въ одной части x будетъ въ
первой степени, въ другой во второй, но не трудно видѣть, что
вторая степень исчезнетъ.

$$y = e^x(Ax^2 + Bx), \quad y' = e^x[Ax^2 + (2A + B)x + B],$$
$$y'' = e^x[Ax^2 + (4A + B)x + 2(A + B)].$$

Вычитаемъ изъ y'' величину y ; вторая степень исчезнетъ. Мы по-

лучимъ: $4Ax + 2(A + B) = 2x + 1$; $4A = 2$; $A + B = \frac{1}{2}$; $A = \frac{1}{2}$; $B = 0$.
Мы нашли частное рѣшеніе: $y = \frac{1}{2} x^2 e^x$. Не трудно найти общее

рѣшеніе; для этого прибавляемъ къ частному рѣшенію общее рѣ -

нение ур-ия 2-ой части:

$$y = \frac{1}{2} x^2 e^x + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Таково общее решение данного уравнения.

Мы могли бы также рассматривать и такая диф-нция ур-ия со второй частью, где вторая часть есть тригонометрическая функция, напр., $y'' + y = \cos x$. В этом случае новой теории создавать не придется, так как тригонометрическую функцию мы всегда можем представить в виде сумм показательных функций:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Таким образом мы разобьем правую часть ур-ия на 2 отдельные части и станем рассматривать два отдельных ур-ия с правой частью, напр., $\frac{e^{ix}}{2}$ и $\frac{e^{-ix}}{2}$.

Обращаемся к рассмотрению ур-ия: $y'' + y = \cos x$. Согласно общей теории мы будем рассматривать два ур-ия:

$$y'' + y = \frac{1}{2} e^{ix} \quad \text{и} \quad y'' + y = \frac{1}{2} e^{-ix}$$

и для каждого найдем по одному частному решению и сложим. Рассмотрим 1-ое ур-ие: $y'' + y = \frac{1}{2} e^{ix}$, характеристическое ур-ие: $K^2 + 1 = 0$. Его корни: $K = \pm i$; $\alpha = i$ есть однократный корень характеристического ур-ия, поэтому частное решение будет:

$$y_1 = e^{ix} x \cdot g_0(x);$$

но $m = 0$; слѣд., $y_1 = e^{ix} \cdot x \cdot g_0(x)$. Но $g_0(x)$ - это многочлен нулевой степени, т.е. величина постоянная. слѣд., $y_1 = A \cdot x e^{ix}$.

Дифференцируем два раза:

$$y_1' = e^{ix} (Ax + A); \quad y_1'' = e^{ix} (-Ax + 2Ai)$$

Закладываем y_1 с y_1'' , получаем:

$$e^{ix} (Ax - Ax + 2Ai) = \frac{1}{2} e^{ix}; \quad 2Ai = \frac{1}{2}; \quad A = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$$

Итакъ, мы знаемъ частное рѣшеніе $y_1 = \frac{1}{4} x e^{ix}$.

Обращаемся къ 2-му ур-ію: $y'' + y = \frac{1}{2} e^{-ix}$. Характеристическое ур-іе: $\kappa^2 + 1 = 0$. Его корни: $\kappa = \pm i$; $\alpha = -i$ есть однократный корень характеристическаго ур-ія, поэтому частное рѣшеніе будетъ: $y_2 = e^{-ix} \cdot x \cdot B$, гдѣ $B = g_0(x) = \text{const}$.

Дифференцируемъ 2 раза:

$$y_2' = e^{-ix} (Bxi + B) ; \quad y_2'' = e^{-ix} (-Bx - 2Bi)$$

Складываемъ: $y_2'' + y_2 = e^{-ix} (Bx - Bx - 2Bi) = \frac{1}{2} e^{-ix}$; $-2Bi = \frac{1}{2}$; $B = \frac{i}{4}$

Знаемъ частное рѣшеніе для второго ур-ія: $y_2 = \frac{i}{4} e^{-ix} x$.

Возвращаясь къ данному первоначальному ур-ію, найдемъ, что его частное рѣшеніе, согласно общей теоріи, будетъ:

$$y = y_1 + y_2 = \frac{x}{2} \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{x}{2} \sin x$$

Общій интеграль найдемъ, если къ частному рѣшенію прибавимъ общее рѣшеніе ур-ія безъ 2-ой части, т.е. получимъ:

$$y = \frac{x}{2} \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Не трудно доказать, что нашъ результатъ мы могли бы получить, не разбивая ур-іе на двѣ отдѣльныя части, такъ какъ заранее можемъ предвидѣть, что оба эти рѣшенія y_1 и y_2 будутъ сопряжены, т.к. сопряжены вторыя части двухъ ур-ій, т.е. если одно рѣшеніе есть вида: $\varphi(x) + i\psi(x)$, то другое рѣшеніе будетъ вида: $\varphi(x) - i\psi(x)$. Слѣд., рѣшеніе y_2 будетъ сопряжено съ рѣшеніемъ y_1 , и найдя y_1 , можемъ найти и y_2 .

Но и отдѣльно каждое рѣшеніе нѣтъ надобности выводить, такъ какъ послѣ сложенія найденныхъ двухъ частныхъ рѣшеній сопряженныхъ получается величина дѣйствительная. Слѣд., въ общее рѣшеніе могутъ войти $\sin x$ и $\cos x$ и множителемъ многочленъ, и ма

можем сразу написать видь такого общего интеграла:

$$y = x (A \cos x + B \sin x).$$

Въ этой формѣ мы и будемъ искать общее рѣшеніе ур-ія, когда во второй части стоитъ тригонометрическая функція $\sin x$ или $\cos x$.

Неизвѣстные коэфф-ты A и B найдутся методомъ неопредѣленныхъ коэфф-товъ; дифференцируя y известное число разъ (въ нашемъ случаѣ два раза) вставляемъ въ данное ур-іе:

$$y' = x(-A \sin x + B \cos x) + A \cos x + B \sin x, \\ y'' = x(-A \cos x - B \sin x) + 2B \cos x - 2A \sin x$$

Складывая y'' и y и вставляя, найдемъ и коэффиценты:

$$y'' + y = x(-A \cos x - B \sin x + A \cos x - B \sin x) + 2B \cos x - 2A \sin x, \\ 2B \cos x - 2A \sin x = \cos x \quad \text{Откуда } A = 0, B = \frac{1}{2}$$

Слѣд., $y = \frac{1}{2} x \cdot \sin x$, что мы имѣли и раньше.

Обращаемся теперь къ общему случаю. Пусть ур-іе имѣеть

видь: $A\{y\} = \frac{\sin}{\cos} \alpha x g_m(x)$

Тогда, согласно общей теоріи, намъ придется рассмотреть 2 ур-ія:

$$\left. \begin{aligned} \text{или } A\{y\} &= e^{\alpha ix} \frac{1}{2} g_m(x) \\ A\{y\} &= e^{-\alpha ix} \frac{1}{2} g_m(x) \end{aligned} \right\} \text{ для } \cos.$$

гдѣ αi и $-\alpha i$ есть m -кратный корень характеристическаго ур-ія,

$$\left. \begin{aligned} \text{или } A\{y\} &= \frac{1}{2i} e^{\alpha ix} g_m(x) \\ A\{y\} &= -\frac{1}{2i} e^{-\alpha ix} g_m(x) \end{aligned} \right\} \text{ для } \sin$$

Легко видѣть, что въ обоихъ случаяхъ правыя части сопряжены. Вообще мы получили бы то же самое и въ болѣе общемъ случаѣ, когда имѣли бы въ правой части линейное сочетаніе \cos и \sin .

Мы можемъ также рассматривать и тѣ случаи, когда \cos и \sin имѣють, напр., такой видъ: $\cos(\alpha x + \beta)$. Въ этомъ случаѣ

стоит только положить $x + \frac{\beta}{\alpha}$ равнымъ новому переменному x' , и все останется по прежнему: правая часть будутъ сопряжены. Слѣд., разъ мы нашли $y_1 = \varphi(x) + i\psi(x)$, то найдемъ и $y_2 = \varphi(x) - i\psi(x)$. Сумма же ихъ: $y = y_1 + y_2 = 2\varphi(x)$ есть величина действительная. Пусть мы нашли эти два частныхъ рѣшенія:

$$y_1 = e^{\alpha ix} x^m g_m(x) \quad \text{и} \quad y_2 = e^{-\alpha ix} x^m \bar{g}_m(x)$$

гдѣ $\bar{g}_m(x)$ - многочленъ, сопряженный съ первымъ $g_m(x)$. Беремъ сумму этихъ рѣшеній и находимъ частное рѣшеніе даннаго ур-ія:

$$y = y_1 + y_2 = x^m [\varphi_m(x) \cos \alpha x + \psi_m(x) \sin \alpha x],$$

гдѣ $\varphi_m(x)$ и $\psi_m(x)$ - два многочлена съ действительными коэффиціентами. Въ этой формѣ мы и будемъ искать частное рѣшеніе ур-ія, гдѣ во второй части стоитъ тригонометрическая функція. Коэфф-ты двухъ многочленовъ $\varphi_m(x)$ и $\psi_m(x)$ найдутся методомъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

§. 21. УРАВНЕНІЕ ЭЙЛЕРА .

Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію новаго вида дифференціальныхъ, тѣсно связанныхъ съ линейными ур-іями съ постоянными коэффиціентами, - уравненіямъ Эйлера.

Ур-іе Эйлера имѣетъ видъ:

$$(ax + b)^n y^{(n)} + A_1 (ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + A_n y = 0 \quad (1)$$

Каждая производная носитъ на степень линейнаго фактора $(ax + b)$. Уравненіе такого типа мы можемъ нѣсколько упростить. Во-первыхъ, коэфф-ты при x , а мы можемъ сдѣлать равнымъ единицѣ. Действительно, вынося изъ каждаго фактора а въ соответствующей степени и раздѣляя все ур-іе на a^n , получимъ:

$$(x + \frac{b}{a})^n y^{(n)} + \frac{A_1}{a} (x + \frac{b}{a})^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + \frac{A_n}{a^n} y = 0$$

Замѣняя теперь $\frac{b}{a}$ чрезъ b и $\frac{A_1}{a}$ чрезъ $A_1, \dots, \frac{A_n}{a^n}$ чрезъ A_n , гдѣ b и A_1, \dots, A_n отличны отъ прежнихъ, получаемъ:

$$(x+b)^n y^{(n)} + A_1(x+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + A_n y = 0$$

Далѣе мы можемъ величину b считать равной 0, для чего положимъ: $x + b = x'$ и дифференцируемъ $dx = dx'$, слѣдовательно :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx'}; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx'^2} \text{ и т.д. Вообще } \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{d^m y}{dx'^m}$$

Слѣдовательно ур-іе приметъ такой видъ:

$$x'^n \frac{d^n y}{dx'^n} + A_1 x'^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx'^{n-1}} + \dots + A_n y = 0$$

Это - ур-іе прежняго типа, гдѣ только $b=0$. Въ дальнѣйшемъ изслѣдованіи мы будемъ предполагать $a = 1, b = 0$,

и писать ур-іе будемъ такъ:

$$x^n y^{(n)} + A_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + A_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \dots + A_n y = 0 \quad (1)$$

Въ этой формѣ ур-іе сейчасъ же превращается въ ур-іе съ постоянными коэфф-тами. Для этого введемъ новое переменное t , положивъ $x = e^t$; и слѣд. $t = \lg x$.

Мы имѣемъ: $\frac{dy(x)}{dx} = \frac{df(e^t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{df(e^t)}{dt} = e^{-t} \frac{df(e^t)}{dt}$

Слѣд., дифференцированіе по x сводится къ дифференцированію по t и умноженію на e^{-t} . Замѣтивъ это, выразимъ y', y'', \dots чрезъ производныя по новому переменному:

$$y' = e^{-t} \frac{dy}{dt}; \quad y'' = e^{-t} \frac{d}{dt} (e^{-t} \frac{dy}{dt}) = e^{-2t} (\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})$$

Нетрудно теперь подмѣтить и законъ составленія какой-нибудь k -ой производной:

$$y^{(k)} = e^{-kt} \left[\frac{d^k y}{dt^k} + a_{1,k} \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + a_{2,k} \frac{d^{k-2} y}{dt^{k-2}} + \dots + a_{(k-1),k} \frac{dy}{dt} \right]$$

Легко видѣть, что именно такого типа будетъ общее выраженіе κ -ой производной. Для доказательства общности этого выраженія воспользуемся методомъ полной индукціи. Допустимъ, найденное выраженіе имѣетъ мѣсто для κ -ой производной; докажемъ, что этотъ законъ составленія справедливъ и для $(\kappa+1)$ производной.

Для этого стоитъ только продифференцировать выраженіе $y^{(\kappa)}$:

$$y^{(\kappa+1)} = e^{-t} \frac{d y^{(\kappa)}}{dt} = e^{-(\kappa+1)t} \left[\frac{d^{(\kappa+1)} y}{dt^{\kappa+1}} + (a_{1,\kappa} - \kappa) \frac{d^{\kappa} y}{dt^{\kappa}} + (a_{2,\kappa} - \kappa a_{1,\kappa}) \frac{d^{\kappa-1} y}{dt^{\kappa-1}} + \dots \right]$$

Получили выраженіе такого же типа, какъ и $y^{(\kappa)}$. Остается теперь внести выраженія найденныхъ производныхъ въ данное ур-іе. При этомъ замѣтимъ, что у каждой производной будетъ стоять множителемъ e^{-t} въ степени, равной порядку производной. Поэтому всё e^{-t} сократится и останутся выраженія въ скобкахъ, т.е. дифференціальныя выраженія съ постоянными коэфф-тами. Въ окончательномъ видѣ, послѣ преобразованія мы получимъ дифф-ное ур-іе съ новымъ переменнымъ t и съ постоянными коэффиціентами. Проинтегрировавъ затѣмъ егс, мы проинтегрируемъ и первоначальное ур-іе, стоитъ только возвратится къ первоначальному переменному x .

Чтобы проинтегрировать полученное преобразованное ур-іе, надо составить характеристическое ур-іе. Последнее получимъ обыкновеннымъ способомъ; вставивъ вмѣсто y выраженіе $e^{\kappa t}$, будемъ имѣть:

$$\kappa^n + B_1 \kappa^{n-1} + B_2 \kappa^{n-2} + \dots = 0, \quad (2)$$

гдѣ B_1, B_2, \dots - коэфф-ты преобразованнаго ур-ія. Частныя рѣшенія преобразованнаго ур-ія получимъ, вставивъ въ $e^{\kappa t}$ корни

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots$, т.е. $e^{\lambda_i t}$. Общее же решение будетъ вида:

$$y = \sum_{i=1}^m e^{\lambda_i t} g_i(t).$$

гдѣ степень каждаго многочлена единицейъ ниже кратности соответствующаго корня. Затѣмъ отъ этого ур-ія уже можно перейти къ первоначальному.

Однако можно было бы поступить гораздо проще. Характеристическое ур-іе преобразованнаго ур-ія мы получили, подставляя вмѣсто y величину $e^{\lambda t}$, но мы положили $e^t = x$, слѣдствительно для первоначальнаго ур-ія нужно было положить $y = x^k$, тогда для k получимъ тѣ же значенія, что изъ характеристическаго ур-ія (2). Общій видъ рѣшенія даннаго ур-ія будетъ:

$$y = \sum_{i=1}^m x^{\lambda_i} g_i(\lg x).$$

Степень многочлена $g_i(\lg x)$ на единицу меньше кратности корня λ_i . Вставляя вмѣсто y величину x^k , мы получаемъ ур-іе, которое для преобразованія ур-ія называется характеристическимъ, а для даннаго ур-ія опредѣляющимъ.

Не трудно найти опредѣляющее ур-іе; пусть дано дифференціальное ур-іе вида Коши-Эйлера:

$$x^n y^{(n)} + x^{n-1} y^{(n-1)} A_1 + \dots + A_n y = 0 \quad (1')$$

Вставимъ въ него вмѣсто y величину x^k ; предварительно, найдя производныя:

$$y' = kx^{k-1}, \quad y'' = k(k-1)x^{k-2}, \quad y''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}, \\ y^{(n)} = k(k-1)(k-2) \dots [k-(n-1)] x^{k-n}$$

Послѣ подстановки во все члены войдетъ множителемъ $x^k = x^{k-n} \cdot x^n$; сокративъ на него, получимъ опредѣляющее ур-іе:

$$k(k-1)(k-2) \dots (k-n+1) + A_1 k(k-1)(k-2) \dots (k-n+2) + \dots + A_n = 0.$$

~~Эйлера:~~

Разрѣшивъ это уравненіе, мы найдемъ: $\kappa_1, \kappa_2, \dots$, слѣд. найдемъ и частныя рѣшенія вида $y = t^{\kappa} e^{\kappa_i t}$ или $y = (\lg x)^{\kappa} x^{\kappa_i}$, при чемъ въ случаѣ однократныхъ корней $\delta = 0$. Если бы мы взяли ур-іе въ об-щемъ видѣ (1), тогда, замѣнивъ x черезъ $x = x + \frac{b}{a}$, мы въ дан-ное ур-іе подставили бы $y = (ax + b)^{\kappa}$ (собственно говоря, имѣ-емъ $y = \frac{(ax+b)^{\kappa}}{a^{\kappa}}$, но постоянный факторъ $\frac{1}{a^{\kappa}}$ можно сбросить), нашли бы опредѣляющее ур-іе, затѣмъ опредѣлили бы его корни, а отсюда получили бы рядъ частныхъ рѣшеній вида:

$$y = [\lg(ax+b)]^{\delta} (ax+b)^{\kappa_i}$$

П Р И М Ъ Р Ъ: $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Ур-іе Коши ^{Эйлера}, упрощеннаго вида. Пологаемъ $y = x^{\kappa}$; $y' = \kappa x^{\kappa-1}$;

$$y'' = \kappa(\kappa-1)x^{\kappa-2}; \quad x^2 \kappa(\kappa-1)x^{\kappa-2} - 2x \kappa x^{\kappa-1} + 2x^{\kappa} = 0$$

Сокращаемъ на x^{κ} ; $\kappa(\kappa-1) - 2\kappa + 2 = 0$. Опредѣляющее ур-іе будетъ: $\kappa^2 - 3\kappa + 2 = 0$. Корни его $\kappa = 1, 2$ - корни однократные. Слѣд., $y_1 = x$, $y_2 = x^2$. Общее рѣшеніе $y = C_1 x + C_2 x^2$

Мы изложили теорію построенія частныхъ рѣшеній линейныхъ диф-ференціальныхъ ур-ій съ постоянными коэфф-тами, когда харак-теристическое ур-іе имѣеть кратные корни. Но къ такому же результату построенія частныхъ рѣшеній можно притти инымъ пу-темъ: 'методомъ d'Alemberta'а. Хотя этотъ методъ не достаточно строгій; но все же представляетъ значительный интересъ. Допу-стимъ, что мы изложили теорію линейныхъ диф-ныхъ ур-ій съ по-стоянными коэфф-тами для случая, когда характеристическое ур-іе имѣеть однократные корни. Предположимъ теперь, что корни характеристическаго ур-ія кратные и имѣемъ ур-іе вида:

~~Эйлера,~~

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0. \quad - 188 -$$

Тогда, полагая $y = e^{kx}$, найдем характеристическое уравнение:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

Пусть это уравнение имеет двукратный корень k . Тогда рассуждаем так: изменим коэффициенты дифференциального уравнения так, чтобы новое характеристическое уравнение имело однократные корни k и $k+\delta$. Пусть

для этих корней мы построили частные решения $y_1 = e^{kx}$ и

$y_2 = e^{(k+\delta)x}$. Затем, перейдя к пределу при $\delta = 0$, получаем двукратные корни. Поступаем при этом так: если y_1 и y_2 суть решения, то и линейная комбинация этих решений тоже будет решением.

Берем такую комбинацию этих решений:

$$\bar{y} = \frac{y_2 - y_1}{\delta} = \frac{e^{\delta x} e^{kx} - e^{kx}}{\delta} = e^{kx} \frac{e^{\delta x} - 1}{\delta}$$

Разлагаем $e^{\delta x}$ в ряд Тейлора:

$$\bar{y} = e^{kx} \left[x + \frac{\delta x^2}{1 \cdot 2} + \frac{\delta^2 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right]$$

Переходим к пределу, полагая $\delta = 0$:

$$\lim_{\delta=0} \bar{y} = e^{kx} \cdot x$$

Это и будет второе частное решение для двукратного корня. Но это рассуждение недостаточно строгое.

В самом деле, если мы утверждаем, что $\bar{y} = \frac{y_2 - y_1}{\delta}$ есть частное решение, то значит, если мы его вставим в наше уравнение (с измененными коэффициентами), оно должно удовлетвориться. Результат подстановки в левую часть \bar{y} вместо y есть некая функция δ , $F(\delta)$, которая тождественно равна нулю, следовательно,

$\lim_{\delta=0} F(\delta) = 0$. Но мы утверждаем, что $\lim_{\delta=0} \bar{y}$ есть решение уравнения при $\delta = 0$; а это получится только, если будет доказано, что

$$\lim_{\delta=0} \frac{d^m \bar{y}}{dx^m} = \frac{d^m (\lim \bar{y})}{dx^m}$$

Такую же перестановку операций производить можно не всегда, так как нельзя утверждать, что предельная производная будет равна производной от предельной. Методъ d'Alembert'a можно распространять и на случай корней бóльшей кратности. Пусть, напр., характеристическое уравнение имѣетъ трехкратный корень κ . Къ этому случаю мы можемъ подойти, исходя изъ разсмотрѣнія двукратнаго корня. Пусть мы измѣнили данное уравнение такъ, что его характеристическое уравнение имѣетъ одинъ двукратный корень κ и одинъ однократный $\kappa + \delta$.

Тогда имѣемъ рѣшенія: $y_1 = e^{\kappa x}$, $y_2 = x e^{\kappa x}$, $y_3 = e^{(\kappa + \delta)x}$.

Построимъ теперь линейное сочетание этихъ рѣшеній:

$$y = 2 \frac{y_3 - y_1 - \delta y_2}{\delta^2} = 2 \frac{e^{\kappa x} e^{x\delta} - e^{\kappa x} - \delta x e^{\kappa x}}{\delta^2} = 2 e^{\kappa x} \frac{e^{x\delta} - 1 - x\delta}{\delta^2}$$

Затѣмъ разлагаемъ въ строку Тейлора:

$$\bar{y} = e^{\kappa x} \left(x^2 + \frac{\delta x^3}{3} + \dots \right);$$

\bar{y} есть тоже рѣшеніе, такъ какъ представляетъ линейную комбинацію другихъ рѣшеній. Полагая $\delta = 0$, т.е. переходя къ предѣлу, найдемъ $\lim \bar{y} = x^2 e^{\kappa x}$. Получили 3-ье рѣшеніе для трехкратнаго корня κ . Такъ же можно продолжать далѣе.

§ 22. ЛИНЕЙНЫЯ УРАВНЕНІЯ 2-ГО ПОРЯДКА.

Переходимъ къ разсмотрѣнію частнаго случая линейныхъ дифференціальныхъ уравненій 2-го порядка. Всякое уравненіе 2-го порядка имѣетъ видъ:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 \quad \text{или} \quad y'' + p_1 y' + p_2 y = v$$

Коэффициенты p_1 , p_2 суть функции x . Къ уравненіямъ 2-го порядка мы можемъ примѣнить результаты, полученные въ общей теоріи.

Во-первыхъ, если дано одно частное рѣшеніе y_1 , то общій интеграль находимъ квадратурой, такъ какъ подстановкою $y = y_1 z$, $z' = u$ мы приходимъ къ линейному ур-ію 1-го порядка.

Во-вторыхъ, ур-іе 2-го порядка съ помощью подстановки можно привести къ виду, гдѣ $p_1 = 0$, т.е. къ ур-ію вида:

$$y'' = Jy$$

Такой видъ ур-ія наз. к а н о н и ч е с к и м ъ. Полагаемъ $y = \mu z$, гдѣ μ - функція x , которую можемъ выбрать произвольно.

Дифференцируя два раза, вставимъ въ ур-іе 2-го порядка:

$$y' = \mu'z + z'\mu ; y'' = \mu''z + 2\mu'z' + z''\mu ,$$

$$\mu''z + 2\mu'z' + z''\mu + p_1\mu'z + p_1z'\mu + p_2\mu z = 0 .$$

Собираемъ члены съ z' :

$$\mu''z + (2\mu' + p_1\mu)z' + z''\mu + p_1\mu'z + p_2\mu z = 0$$

Мы хотимъ уничтожить членъ съ z' ; для этого нужно положить коэффициентъ при z' равнымъ 0, т.е. $2\mu' + p_1\mu = 0$ или $\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{2} p_1$.

Интегрируя, находимъ μ : $\int \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{2} \int p_1 dx$, $\mu = e^{-\frac{1}{2} \int p_1 dx}$. Ур-іе послѣ уничтоженія z' будетъ: $z'' + (\frac{\mu''}{\mu} + p_1 \frac{\mu'}{\mu} + p_2)z = 0$.

Ис: $\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{2} p_1$; $\mu' = -e^{-\frac{1}{2} \int p_1 dx} \cdot \frac{1}{2} p_1$; $\frac{\mu''}{\mu} = -\frac{1}{2} p_1' + \frac{1}{4} p_1^2$.

Слѣд., опредѣляется коэффициентъ при z ; $J = \frac{1}{2} p_1' + \frac{1}{4} p_1^2 - p_2$

Ур-іе принимаетъ видъ: $z'' = Jz = (\frac{1}{2} p_1' + \frac{1}{4} p_1^2 - p_2)z$.

Замѣтимъ между прочимъ, что если найдены два частныхъ рѣшенія y_1 и y_2 данного ур-ія и соответственныя рѣшенія z_1 и z_2 для преобразованнаго, то отношеніе между ними одно и то же, т.е.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

что слѣдуетъ прямо изъ формулъ преобразованія.

Въ-третьихъ, съ помощью подстановки $y = e^{\int z dx}$ можно понизить порядокъ ур-ія. Но понижая порядокъ, мы придемъ къ ур-ію типа Riccati. Пусть

$$y = e^{\int z dx}, \quad \text{тогда } y' = z e^{\int z dx}; \quad y'' = (z' + z) e^{\int z dx}$$

Подставляем и, дѣлая сокращенія на $e^{\int z dx}$, получимъ:

$$z' + z^2 + p_1 z + p_2 = 0.$$

Это ур-іе Riccati, но частнаго вида. Общій же видъ ур-ій типа Riccati будетъ:

$$v' + Av^2 + 2Bv + C = 0,$$

гдѣ коэфф-ты A, B, C суть функции x .

Теперь возникаетъ вопросъ, какъ ур-іе Riccati 1-го пор. привести къ линейному ур-ію 2-го порядка. Для нашего случая $A=1$. Дѣлаемъ такую подстановку: $z = \frac{y'}{y}$, и тогда ур-іе Riccati для z приведетъ къ линейному ур-ію второго порядка. Положимъ

$v = \mu z$, $v' = \mu z' + \mu' z$, подставляемъ въ ур-іе Riccati для v : $\mu z' + z \mu' + A \mu^2 z^2 + 2B \mu z + C = 0$; раздѣлимъ на μ и при z^2 получимъ коэфф-тъ $A \mu$. Здѣсь нужно положить $A \mu = 1$, слѣд.,

$$\mu = \frac{1}{A} \quad \text{и} \quad v = \frac{1}{A} \frac{y'}{y}.$$

Вставимъ значеніе v въ общее ур-іе Riccati, получимъ ур-іе 2-го порядка линейное. Такимъ образомъ стъ ур-ія Riccati мы можемъ притти къ линейнымъ ур-іямъ 2-го порядка.

СИСТЕМЫ СОБОКУПНЫХЪ
ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

§ 23 . ИСКЛЮЧЕНІЕ ФУНКЦІЙ; ПРИВЕДЕНІЕ КЪ НОРМАЛЬНОЙ СИСТЕМѢ.

Совкупныя диф-вныя уравненія съ нѣсколькими неизвѣстными функціями имѣютъ такой видъ:

$$F_i(x, y, y', y'', y''', \dots, y_2, y_2', y_2'', \dots, y_m, y_m', y_m'', \dots) = 0$$

гдѣ $i = 1, 2, 3, \dots, m$. т.е. представляютъ изъ себя рядъ соотношеній между независимымъ переменнымъ и нѣсколькими функціями и ихъ производными. Предположимъ, что число уравненій равно числу функцій. Такая система, какъ увидимъ далѣе, опредѣляетъ всѣ неизвѣстныя функціи y ; если же число ур-ій больше числа функцій, то, вообще говоря, такая система будетъ несовмѣстною. Если же число функцій больше числа уравненій, то она является неопредѣленною.

Мы покажемъ, что черезъ исключеніе функцій изъ уравненій мы можемъ уменьшить число ур-ій $\mathcal{F} = 0$ и довести до одного. А именно, если имѣемъ m уравненій съ m функціями, то послѣ исключенія $m-1$ функцій мы дойдемъ до одного уравненія съ одной функціей. Но если бы число ур-ій было меньше числа функцій, то всѣхъ функцій не исключить не могли бы и получили бы одно ур-іе съ нѣсколькими функціями. Если же число ур-ій было бы больше числа функцій, то, исключивъ ихъ, мы пришли бы къ невозможному ур-ію, гдѣ входятъ только независимыя переменныя .

Покажемъ, какъ можно исключить одну функцію изъ двухъ ур-ій. Возьмемъ два ур-ія съ 2-мя функціями:

$$F_1(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}, z, z', z'', \dots, z^{(m)}) = 0$$
$$F_2(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}, z, z', z'', \dots, z^{(m)}) = 0,$$

гдѣ n - порядкъ наивысшей производной y и z въ 1-мъ ур-іи, а n и m - во 2-мъ ур-іи. Продифференцируемъ первое ур-іе m разъ, а второе n разъ; тогда порядкъ наивысшей производной z будетъ $m+n$ для обоихъ ур-ій. Число же всѣхъ ур-ій будетъ $m+1+n+1$. Всѣхъ же производныхъ z (считая и z) войдетъ $m+n+1$. Отсюда видно, что число ур-ій на единицу больше числа производныхъ. Исключивъ всѣ производныя z , (считая и z) въ результатѣ получимъ ур-іе, куда будутъ входить только y, y', y'', \dots , т.е. получимъ обыкновенное диф-ное ур-іе съ одной функціей, которое должно удовлетворяться для всякаго рѣшенія y системы. Порядкъ этого ур-ія будетъ или n или $n+m$, смотря по тому, которое изъ этихъ чиселъ будетъ больше. Дальше уже z можно опредѣлить безъ всякой интеграціи. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ $m+n+2$ уравненій для опредѣленія $m+n+1$ неизвѣстныхъ z, z', z'', \dots . Опредѣливъ y изъ найденнаго ур-ія и вставивъ его въ систему $m+n+2$ уравненій, опредѣлимъ z . Итакъ, имѣя два ур-ія съ двумя неизвѣстными функціями, пролифференцировавъ ихъ опредѣленное число разъ, исключая затѣмъ изъ этихъ уравненій какую-нибудь неизвѣстную функцію съ ея производными, мы приходимъ къ одному диф-ному ур-ію съ одной неизвѣстной функціей, опредѣливъ которую и вставивъ въ систему, мы опредѣлимъ безъ интеграціи и другую неизвѣстную функцію. Такойъ общій методъ исклю-

ченія функцій.

Онъ же будетъ справедливъ и въ томъ случаѣ, если мы имѣемъ не двѣ функцій, а нѣсколькомъ; послѣдовательно, комбинируя по два ур-ія, мы можемъ исключить одну функцію, и получимъ $m-1$ ур-іе съ $m-1$ функціями и т.д.

Все изложенное справедливо лишь въ общихъ чертахъ, и всѣ разсужденія наши не достаточно строго обоснованы. Исключеніе функцій изъ нѣсколькихъ ур-ій является операцией довольно сложной, и возможны исключительные случаи. Поэтому мы приступимъ къ доказательству возможности исключенія функцій другимъ методомъ. До сихъ поръ мы старались получить одно ур-іе съ одной функціей, для чего пришлось повышать порядокъ ур-ія. Теперь пойдёмъ обратнымъ путемъ: мы будемъ увеличивать число функцій, но понижая порядокъ ур-ій. Итакъ, докажемъ, что всякую систему ур-ій можно замѣнить системой ур-ій 1-го порядка. Если въ ур-ія входят $y_1, y_1', y_1'', y_1''', y_1^{(4)}, \dots$ то введемъ сюда новыя функціи, полагая:

$$y_1' = y_{11}, \quad y_1'' = y_{12}, \quad \dots, \quad y_1^{(n_1-1)} = y_{1, n_1-1}$$

Для y_2 будемъ имѣть $y_2' = y_{21}, \quad y_2'' = y_{22}, \dots, \quad y_2^{(n_2-1)} = y_{2, n_2-1}$ и т.д.

Наивысшія производныя выразятся такъ:

$$y_1^{(n_1)} = \frac{d(y_{1, n_1-1})}{dx} \quad ; \quad y_2^{(n_2)} = \frac{d(y_{2, n_2-1})}{dx}, \dots$$

Черезъ такую замѣну всѣ наши ур-ія $\mathcal{F}_i = 0$ обращаются въ ур-ія

1-го порядка. Но къ нашимъ ур-іямъ прибавится еще рядъ новыхъ ур-ій, которыя будутъ указывать на значеніе новыхъ функцій, введенныхъ въ данныя ур-ія $\mathcal{F}_i = 0$. У насъ прибавятся такія ур-ія :

$$\frac{dy_{11}}{dx} = y_{11}, \quad \frac{dy_{12}}{dx} = y_{12}, \dots, \quad \frac{dy_{1, n_1-2}}{dx} = y_{1, n_1-1} \text{ и т.д.}$$

для другихъ функцій. Всѣ эти ур-ія указываютъ на то, что введен-

ныя новыя функціи суть производныя отъ функцій, входящихъ въ наши ур-ія $\mathcal{F}_i = 0$. Прибавленіемъ новыхъ ур-ій мы систему увеличиваемъ, но зато порядокъ каждаго ур-ія будетъ равенъ единицѣ. Итакъ, наше положеніе доказано: всякую систему совокупныхъ ур-ій можно замѣнить системой ур-ій 1-го порядка съ большимъ числомъ функцій.

Въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ мы будемъ говорить только о совокупныхъ ур-іяхъ перваго порядка.

Пусть мы имѣемъ систему уравненій вида:

$$\mathcal{F}_i(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_m, y'_1, y'_2, y'_3, \dots, y'_m) = 0$$

Эту систему можно замѣнить другою, разрѣшенной относительно производныхъ. Чтобы таксе разрѣшеніе было возможно, для этого необходимо, чтобы $i = 1, 2, 3, \dots, m$, т.е. число ур-ій было бы равно числу неизвѣстныхъ функцій. Данныя ур-ія $\mathcal{F}_i = 0$ опредѣляютъ въ такомъ случаѣ производныя y'_i въ функціи x, y_1, y_2, \dots, y_m . И мы получаемъ эквивалентную систему вида:

$$y'_i = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m), \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m)$$

Въ частности, если бы подобное разрѣшеніе было невозможно, то изъ данной системы $\mathcal{F} = 0$ можно было бы исключить всѣ производныя y'_i , и мы получили бы одно или нѣсколько конечныхъ соотношеній вида

$$A(x, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0,$$

пользуясь которыми выразили бы однѣ изъ функцій y_i черезъ другія и переменное x . Вставляя въ данную систему, мы пришли бы къ болѣе простой системѣ того же типа - съ меньшимъ числомъ неизвѣстныхъ функцій, и съ этой системой могли бы поступать по прежнему, т.е. разрѣшать ее относительно производныхъ или

же, если это невозможно, то, исключая производныя, получить новыя конечныя соотношенія и т. д. Выкладки можно вести хотя бы такъ: взявъ первое изъ ур-ій $F_1 = 0$, опредѣлить изъ него y_1' черезъ остальные аргументы:

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m, y_2', y_3', \dots, y_m')$$

и вставить въ остальные $m-1$ уравненія, которыя примутъ видъ:

$$F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m, y_2', y_3', \dots, y_m') = 0.$$

Изъ одного изъ нихъ опредѣляемъ

$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m, y_3', y_4', \dots, y_m')$$

вставляемъ въ остальные $m-2$ уравненія, которыя принимаютъ видъ:

$$F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m, y_3', y_4', \dots, y_m') = 0,$$

и т. д., пока послѣднюю производную y_m' не выразимъ черезъ x, y_1, y_2, \dots, y_m ; а тогда и остальные производныя $y_{m-1}', y_{m-2}', \dots, y_1'$ выразятся въ функціи тѣхъ же аргументовъ.

Если бы изъ какой-либо изъ системъ исключились всё производныя, то имѣли бы вышеупомянутый случай упрощенія.

Въ концѣ концовъ мы всегда получаемъ систему вида:

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m),$$

слѣд., всякую систему ур-ій 1-го порядка можно привести къ системѣ такого вида и процессъ послѣдовательнаго разрѣшенія всегда дойдетъ до конца. Въ противномъ случаѣ получаются соотношенія свободныя отъ производныхъ, и тогда мы можемъ исключить часть функцій и затѣмъ имѣть дѣло съ болѣе простой системой, и т. д.

П Р И М ъ Р Ъ. Пусть даны уравненія:

$$y' + z' + u' - 2y + 3z = 0$$

$$y' - z' + u' - 3y - 4z = 0$$

$$y' + 3z' + u' - 5y + u = 0$$

Мы можем изъ одного ур-ія опредѣлить u черезъ остальные и исключить, - вставляя въ остальные уравненія:

$$u' = -y' - z' + 2y - 3z,$$
$$-2z' - y - 7z = 0, \quad 2z' - 3y - 3z + u = 0.$$

Въ полученныя ур-ія y' не входитъ. Исключаемъ теперь z' :

$$-4y - 10z + u = 0.$$

Получили соотношеніе свободное отъ производныхъ; опредѣляя изъ него одну функцію черезъ остальные, получимъ:

$$u = 4y + 10z$$

и вставляемъ въ нашу систему; получимъ только два ур-ія независимыхъ, а третье, не трудно видѣть, будетъ слѣдствіемъ одного изъ двухъ:

$$5y' + 11z' - 2y + 3z = 0,$$
$$5y' + 9z' - 3y - 4z = 0$$

Изъ 2-го имѣемъ:

$$y' = -\frac{2}{5}z' + \frac{3}{5}y + \frac{4}{5}z$$

Вставляя въ 1-е, получаемъ, по разрѣшеніи относительно z' ,

$$z' = -\frac{1}{2}y - \frac{7}{2}z,$$

а слѣдовательно

$$y' = \frac{3}{2}y + \frac{7}{10}z$$

Система ур-ій, представленная въ видѣ:

$$y'_i = \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m),$$

гдѣ $i = 1, 2, \dots, m$ называется нормальной системой. И, какъ видѣли выше, мы всегда можемъ перейти къ этой системѣ. Въ первой части нашего курса мы доказали, что такая система всегда допускаетъ интеграцію. Отсюда легко видѣть, что если число ур-ій первона- чальной системы будетъ меньше числа функцій, то система будетъ неопредѣленная; если же число ур-ій больше числа функцій, то вс-

Общ. система невозможна.

Мы доказали, что из системы совокупных ур-ий можно исключить все функции и привести систему к одному ур-ию высшего порядка. Теперь мы можем несколько дополнить этот результат.

Пусть мы имеем какую-нибудь систему. Мы ее заменяем нормальной системой.

Докажем, что нормальную систему с n функциями можно привести к одному ур-ию n -го порядка.

Имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Дифференцируя 1-ое уравнение, получим:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dx}$$

Заменяя производные первого порядка из наших ур-ий, заметим,

что
$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = f_{12}(x, y_1, \dots, y_n).$$

Дифференцируя еще раз, получим:

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = \frac{\partial f_{12}}{\partial x} + \frac{\partial f_{12}}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial f_{12}}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dx} = f_{13}(x, y_1, \dots, y_n)$$

Так продолжая, дойдем до производной n -го порядка:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = f_{1n}(x, y_1, y_2, \dots, y_n):$$

Из этих равенств вместе с вышенаписанными мы можем исключить y_2, y_3, \dots, y_n . Тогда мы получим одно уравнение n -го порядка. Исключение можно выполнить так: отбросим последнее

равенство:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = f_{1n}(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

найдем y_2, y_3, \dots, y_n в функции $x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ из остальных, вставим в последнее ур-ие и получим ур-ие n -го поряд -

ка. Но может случиться, что наши y_2, y_3, \dots, y_n сами собой исключаются из $n-1$ первых ур-ий; такъ что опредѣлить ихъ нельзя. Въ результатѣ будемъ тогда имѣть соотношеніе вида:

$$\Psi(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}) = 0$$

Въ этомъ случаѣ опять будемъ имѣть для y_1 одно ур-іе, но низшаго порядка. Итакъ, мы найдемъ для y_1 ур-іе или n -го, или низшаго порядка, говоря вообще, n -го порядка.

Проинтегрировавъ это ур-іе n -го порядка, мы найдемъ y_1 . Легко видѣти, что тогда все остальные y найдутся безъ всякихъ интеграцій. Въ самомъ дѣлѣ, найдя y_1 , мы будемъ знать и производныя y_1 и, слѣдовательно, y_2, \dots, y_n получимъ только рѣшеніемъ первыхъ $n-1$ уравненій.

Въ исключительныхъ случаяхъ, если одно или нѣсколько ур-ий изъ числа первыхъ $n-1$ являются слѣдствіемъ остальныхъ, мы не получимъ всехъ y_2, \dots, y_n изъ этихъ ур-ий. Для y_1 мы найдемъ ур-іе низшаго порядка, чѣмъ n . Пусть только одно ур-іе изъ числа $n-1$ есть слѣдствіе другихъ. Въ этомъ случаѣ для y_1 будемъ имѣть ур-іе $n-1$ порядка. Проинтегрировавъ его, найдемъ y_1 . Но все y_2, \dots, y_n мы уже не опредѣлимъ безъ интеграцій, потому что нельзя выразить y_2, \dots, y_n черезъ y_1 и ея производныя. Вставивъ въ нашу систему $n-1$ ур-ий найденное y_1 въ функціи x , мы можемъ выразить y_2, \dots, y_n черезъ $x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}$. Въ результатѣ взявъ 2-ое ур-іе первоначальной системы мы выразимъ $\frac{dy_2}{dx}$ въ функціи x и y_2 , и для опредѣленія y_2 будемъ имѣть дифференціальное ур-іе 1-го порядка. Интегрируя его, введемъ еще n -се постоянное, а y_2, \dots, y_n найдемъ уже безъ всякихъ интеграцій.

Если бы мы получили для y_1 ур-іе $n-2$ порядка, то намъ удалось бы y_1, \dots, y_n выразить чрезъ остальные функціи, и для опредѣленія y_2, y_3 мы должны были бы взять два первоначальныя ур-ія и произвести двѣ интеграціи. При этомъ войдутъ два произвольныхъ постоянныхъ.

П Р И М Ъ Р Ы. Имѣемъ три ур-ія съ тремя функціями въ видѣ разрѣшенномъ:

$$\frac{dy}{dx} = 2y + 3z - u$$

$$\frac{dz}{dx} = y - z + u$$

$$\frac{du}{dx} = y + z + u$$

Дифференцируя первое ур-іе, будемъ имѣть:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \frac{dy}{dx} + 3 \frac{dz}{dx} - \frac{du}{dx} = 2 \frac{dy}{dx} + 2y - 4z + 2u = 6y + 2z;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} - 4 \frac{dz}{dx} + 2 \frac{du}{dx} = 2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} - 2y + 6z - 2u = 14y + 6z - 4u$$

Исключаемъ z и u ; изъ второго равенства имѣемъ:

$$z = \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2} - 3y, \quad u = \frac{3}{2} \frac{d^2y}{dx^2} - 7y - \frac{dy}{dx}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} - 6y$$

Мы получили ур-іе третьяго порядка для опредѣленія y . Найдя y , мы найдемъ z и u уже безъ всякихъ интеграцій.

Рассмотримъ примѣръ на исключительномъ случай:

$$\frac{dy}{dx} = y + z + u, \quad \frac{dz}{dx} = y + z - u; \quad \frac{du}{dx} = y - z + u;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3y + z + u;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + 2y$$

(по исключеніи z и u)

Получимъ ур-іе съ постоянными коэффициентами:

$$y'' - y' - 2y = 0, \quad \therefore \kappa^2 - \kappa - 2 = 0$$

$$\kappa_1 = +2; \quad \kappa_2 = -1; \quad \text{слѣдовательно, } y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

Опредѣливъ z изъ перваго уравненія:

$$u = \frac{dy}{dx} - y - z$$

и вставивъ это во второе, получимъ ур-іе для опредѣленія z:

$$\frac{dz}{dx} - 2z = 2y - \frac{dy}{dx} \quad \text{гдѣ} \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

Интегрируя это ур-іе 1-го порядка, получаемъ:

$$z = -C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} ; \quad u = \frac{dy}{dx} - y - z = (C_1 - C_3) e^{2x} - C_2 e^{-x}$$

§ 24. ОБЩАЯ ТЕОРІЯ СОВОКУПНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

Пусть имѣемъ систему ур-ій въ нормальномъ видѣ:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (A)$$

гдѣ $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Пусть для даннаго начальнаго значенія $x = x_0$

дана система начальныхъ значеній

$$y_i = y_{i0}$$

По теоремѣ Коши этими начальными значеніями опредѣляется единственное рѣшеніе системы:

$$y_i = \varphi_i(x, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$$

Эти ур-ія мы можемъ разрѣшить относительно y_0

$$y_{i0} = \psi_i(x, y_1, \dots, y_n)$$

Мы допускаемъ, что такое разрѣшеніе возможно. Если бы разрѣшить наши ур-ія относительно всѣхъ y_0 оказалось невозможнымъ, то всѣ y_0 изъ предшествующихъ равенствъ исключились бы, и мы получили бы по крайней мѣрѣ одно соотношеніе вида:

$$A(x, y_1, \dots, y_n) = 0$$

Откуда мы одну функцію выразили бы чрезъ другія, и число функцій въ нашей системѣ уменьшилось бы. Въ этомъ случаѣ нельзя было бы произвольно задавать начальная значенія, ибо они были бы связаны соотношеніемъ, получаемымъ при $x = x_0$ изъ предыдущаго:

$$A(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) = 0$$

Итакъ, относительно y_i равенства разрешить можно.

Предположимъ, что y_i выражены чрезъ x и произвольныя

постоянныя:

$$y_i = \bar{\varphi}_i(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Пользуясь произвольностью постоянныхъ, мы можем ихъ выбрать такъ, чтобы y_i получили начальныя значенія y_{i0} . Дѣйствительно, полагая

$x = x_0$, получаемъ:

$$y_{i0} = \bar{\varphi}_i(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Будемъ имѣть и ур-ій, откуда всё C и опредѣляются чрезъ y_i :

$$C_i = \bar{\psi}_i(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}).$$

Внеся эти выраженія для C въ предшествующія равенства, получимъ:

$$y_i = \varphi_i(x, \bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n) = \varphi_i(x, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$$

Изъ хода разсужденій ясно, что мы предполагаемъ ур-ія вида

$$y_i = \bar{\varphi}_i(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

разрѣшимыми относительно C . Если это возможно, то постоянныя называются "существенными" постоянными. Если бы ур-ія были неразрѣшимыми относительно C , то постоянныя были бы "несущественными".

Итакъ, имѣемъ право написать:

$$C_1 = \bar{\varphi}_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$C_n = \bar{\varphi}_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Равенства такого вида мы и будемъ далѣе разсматривать и будемъ называть ихъ **интегралами системы**.

Дадимъ независимое опредѣленіе каждому изъ равенствъ.

Возьмемъ соотношеніе

$$C_i = \varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

и продифференцируемъ его:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dx} = 0$$

Замѣняемъ производныя y по x изъ нашей системы:

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \cdot f_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} \cdot f_n$$

Правая часть содержит только x и y ; следовательно это будет соотношение вида:

$$A(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0.$$

Это равенство должно быть тождеством, ибо такого соотношения, как мы видели, быть не может.

Итак, равенство вида $\psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C$.

называется интегралом данной системы, если после дифференцирования по x и по замене производных их значениями из данной системы мы получаем тождество.

Мы видим, что правая часть интеграла нашей системы, как функция $n+1$ аргументов удовлетворяет ур-ию с частными производными типа:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \cdot f_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} \cdot f_n = 0 \quad (B)$$

Очевидно и обратно: если мы нашли функцию, удовлетворяющую (B), то, приравнявая ее произвольному постоянному, имеем интеграл системы (A).

Несимметричность в ур-ии (B) произошла от того, что x и все y у нас неравноправны. Нашу систему (A) мы можем переписать в виде равенства отношений:

$$\frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \dots = \frac{dx}{1} \quad (A')$$

В этой форме (A') все переменные стали равноправными. Введем теперь такое обозначение: все y назовем через x со значками (при чем $n+1$ заменяем через n):

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} \quad (I);$$

где $X_i = F_i(x_1, \dots, x_n)$. Все x кроме одного являются функ -

прямы этого оставшегося:

$$\frac{dx_j}{dx_n} = \frac{X_j}{X_n}$$

при чем $j = 1, 2, \dots, n-1$ (въ данномъ случаѣ x_n - независимое переменное). Предполагая интеграль системы въ видѣ

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = C,$$

получимъ при дифференцированіи по x_n :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_n} + \frac{\partial \psi}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{X_{n-1}}{X_n} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot \frac{X_1}{X_n} = 0,$$

или, освобождая отъ знаменателя:

$$X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \tag{II}$$

Въ примѣненіи къ полученнымъ симметричнымъ ур-ямъ (I)

и (II) доказанное нами положеніе можемъ формулировать такъ:

имѣя интеграль системы (I) $\psi(x_1, \dots, x_n) = C$,

мы имѣемъ рѣшеніе ур-ія (II) (функцию

ψ) и обратно: имѣя рѣшеніе, ур-ія (II) ψ

и приравнивая его произвольному

постоянному, получаемъ интеграль

системы (I).

Докажемъ, что наиболѣе общее рѣшеніе ур-ія (II) имѣеть

видъ:

$$\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$$

гдѣ Φ - произвольная функція, а $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ суть лѣвыя части

интеграловъ системы (I):

$$\psi_1(x_1, \dots, x_n) = C_1; \psi_2(x_1, \dots, x_n) = C_2; \dots; \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = C_{n-1}$$

при чемъ эти интегралы должны быть независимыми, т.е. не долж-

но существовать тождественнаго соотношенія вида $A(\psi_1, \psi_2, \dots$

$\dots, \psi_{n-1}) = 0$ (это противорѣчило бы произволу постоянныхъ

C_1, C_2, \dots).

Произвольная ψ по x выразится такъ:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial y_{n-1}} \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_i}$$

Вставляя эти производныя въ ур-іе (II) и отбирая коэффициентны при $\frac{\partial \phi}{\partial y_1}, \frac{\partial \phi}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial y_{n-1}}$, мы увидимъ, что все эти коэффициенты - нули. Въ самомъ дѣлѣ, коэффициентъ, напримеръ, при

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_j} \text{ будетъ: } \int \chi_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = 0$$

Итакъ, для любой функции ϕ выраженіе

$$\Psi = \phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$$

есть рѣшеніе нашего ур-ія (II).

Чтобы доказать, что это будетъ наиболѣе общее рѣшеніе нашего ур-ія (II), напишемъ рядъ равенствъ:

$$\begin{aligned} \chi_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \chi_2 \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \dots + \chi_n \frac{\partial y_1}{\partial x_n} &= 0 \\ \chi_1 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \chi_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \dots + \chi_n \frac{\partial y_2}{\partial x_n} &= 0 \\ \dots &\dots \\ \chi_1 \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1} + \chi_2 \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_2} + \dots + \chi_n \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} &= 0 \\ \chi_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \chi_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \dots + \chi_n \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned}$$

гдѣ Ψ - любое рѣшеніе ур-ія (II).

Разсматривая эту систему какъ однородную линейную относительно χ , мы получимъ, что Якобьевъ определитель функций $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \Psi$ долженъ равняться 0. Если такъ, то наши функции не независимы, а такъ какъ y_1, \dots, y_{n-1} независимы между собою, то соотношеніе будетъ непремѣнно содержать въ себѣ Ψ :

$$A(\Psi, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = 0$$

Разрѣшая относительно Ψ , и получимъ результатъ, который мы имѣли выше:

$$\Psi = \phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$$

Разсмотримъ примѣръ. Имѣемъ систему:

где $l = 1, 2, \dots, n$, а C - произвольные постоянные. Независимыми решениями называются, если

$$\begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Докажем эту теорему методом вариации постоянных. Мы имеем n независимых решений; все y , записанные в детерминанте, суть определенные функции x ; будем рассматривать и C , как новые функции x , связанные с y равенствами (2). Мы можем разрешить эти равенства относительно C , ибо детерминант из коэффициентов не равен 0. Итак, преобразуем указанным способом нашу систему. При дифференцировании y из каждого члена получится два, так как мы будем дифференцировать и C и $y^{(k)}$.

Дифференцируя y_l и вставляя в l -ое уравнение, будем иметь:

$$\frac{dC_1}{dx} y_l^{(1)} + \frac{dC_2}{dx} y_l^{(2)} + \dots + \frac{dC_n}{dx} y_l^{(n)} + \sum_{k=1}^n C_k \frac{dy_l^{(k)}}{dx} + a_{l1} \sum_{k=1}^n C_k y_l^{(k)} + a_{l2} \sum_{k=1}^n C_k y_l^{(k)} + \dots + a_{ln} \sum_{k=1}^n C_k y_l^{(k)} = 0$$

Легко видеть, что коэффициенты при C - все нули, напр. при C_k коэффициентом будет:

$$\frac{dy_l^{(k)}}{dx} + a_{l1} y_l^{(k)} + \dots + a_{ln} y_l^{(k)} = 0,$$

ибо это есть результат подстановки в уравнение k -го решения.

Итак, наша система преобразовалась в новую систему:

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} \frac{dC_1}{dx} + y_1^{(2)} \frac{dC_2}{dx} + \dots + y_1^{(n)} \frac{dC_n}{dx} &= 0, \\ y_2^{(1)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(2)} \frac{dC_2}{dx} + \dots + y_2^{(n)} \frac{dC_n}{dx} &= 0, \\ \dots & \dots \\ y_n^{(1)} \frac{dC_1}{dx} + y_n^{(2)} \frac{dC_2}{dx} + \dots + y_n^{(n)} \frac{dC_n}{dx} &= 0. \end{aligned}$$

Детерминантъ полученной системы не равенъ 0, слѣдовательно
всѣ неизвѣстныя равны нулю:

$$\frac{dC_1}{dx} = 0, \quad \frac{dC_2}{dx} = 0, \quad \dots, \quad \frac{dC_n}{dx} = 0.$$

Откуда слѣдуетъ, что всѣ C - постоянныя, и наша теорема доказана.

Возникаетъ вопросъ: всегда ли мы можемъ подобрать неза-
висимыя рѣшенія? Въ силу основной теоремы Коши существуютъ рѣ-
шенія, принимающія опредѣленныя значенія для заданнаго началь-
наго значенія x. Зададимъ такія начальныя значенія. Пусть для
x=x₀ одно рѣшеніе опредѣляется начальными значеніями:

$$y_1 = \alpha_{11}, \quad y_2 = \alpha_{12}, \quad \dots, \quad y_n = \alpha_{1n};$$

другое для x = x₀ опредѣляется значеніями:

$$y_1 = \alpha_{21}, \quad y_2 = \alpha_{22}, \quad \dots, \quad y_n = \alpha_{2n}$$

..... И т.д.

(n-ое рѣшеніе) $y_1 = \alpha_{n1}, \quad y_2 = \alpha_{n2}, \quad \dots, \quad y_n = \alpha_{nn},$

гдѣ всѣ α суть постоянныя. Выберемъ эти начальныя значенія
такъ, чтобы

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда рѣшенія, опредѣляемыя этими начальными данными, будутъ
независимы. Дѣйствительно, составимъ детерминантъ для этихъ
рѣшеній. Очевидно, онъ не можетъ тождественно равняться нулю,
ибо при x=x₀ онъ обращается въ вышенаписанный детерминантъ,
который не равенъ нулю.

Итакъ, всегда мы можемъ найти n независимыхъ рѣшеній a

зная эти рѣшенія, знаемъ и общее рѣшеніе. Теорема доказана.

§ 26. ЛИНЕЙНЫЯ СОВОКУПНЫЯ НЕОДНОРОДНЫЯ УРАВНЕНІЯ.

Т Е О Р Е М А I. Пусть имѣемъ неоднородную систему

$$\frac{dy_i}{dx} + a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n = X_i, \quad (1)$$

гдѣ $i = 1, 2, 3, \dots, n$, и пусть мы имѣемъ систему рѣшеній этихъ неоднородныхъ ур-ій:

$$y_1 = \eta_1, \quad y_2 = \eta_2, \quad \dots, \quad y_n = \eta_n,$$

гдѣ η - данныя функціи x . Тогда подстановкой $y_i = \eta_i + \xi_i$,

гдѣ ξ_i - новая неизвѣстная функція x , замѣняемъ эту систему однородной.

Въ самомъ дѣлѣ, когда мы вставимъ въ нашу систему, вмѣсто $y_i, \eta_i + \xi_i$, то все члены распалутся на два, при чемъ члены съ η уничтожатся со 2-ми частями, и мы получимъ однородную систему

$$\text{вида: } \frac{d\xi_i}{dx} + a_{i1}\xi_1 + \dots + a_{in}\xi_n = 0.$$

Т Е О Р Е М А II. Пусть для соответствующей однородной системы, получающейся замѣной X нулями

$$\frac{dy_i}{dx} + a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n = 0 \quad (2)$$

знаемъ систему независимыхъ частныхъ рѣшеній

$$\begin{array}{ccccccc}
 y_1^{(1)} & , & y_2^{(1)} & , & \dots & , & y_n^{(1)} \\
 y_1^{(2)} & , & y_2^{(2)} & , & \dots & , & y_n^{(2)} \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 y_1^{(n)} & , & y_2^{(n)} & , & \dots & , & y_n^{(n)}
 \end{array}$$

тогда общее рѣшеніе данной системы находимъ квадратурами.

Для доказательства устроимъ методъ варіаціи постоянныхъ. Мы знаемъ, что общее рѣшеніе однородной системы выразится такъ:

чимъ систему, которая совмѣстна, такъ какъ Δ равенъ нулю. Изъ этой системы мы найдемъ, чему пропорціональны h .

Итакъ, для каждаго корня ω мы найдемъ соотвѣтственныя значенія h и, слѣдовательно, будемъ знать n рѣшеній.

$$y_1^{(i)} = h_1^{(i)} e^{\omega_i x}, \quad y_2^{(i)} = h_2^{(i)} e^{\omega_i x}, \quad \dots \quad y_n^{(i)} = h_n^{(i)} e^{\omega_i x}$$

Эти рѣшенія будутъ независимы, такъ какъ, если составить детерминантъ, то онъ будетъ, вообще говоря, отличенъ отъ нуля, и слѣдовательно можемъ найти общее рѣшеніе.

Корни ур-ія (4) могутъ быть кратными, и тогда мы не получимъ указаннымъ методомъ общаго рѣшенія. Это будетъ затрудненіе того же характера, какъ и въ случаѣ одного линейнаго ур-ія. Роль характеристическаго ур-ія въ данномъ случаѣ играетъ ур-іе (4).

Разсмотримъ остроумный методъ интегрированія системы d'Alembert'a для случая двухъ уравненій:

$$\frac{dy}{dx} + a_1 y + a_2 z = A,$$

$$\frac{dz}{dx} + b_1 y + b_2 z = B.$$

Относительно a_1, a_2, b_1, b_2, A, B никакихъ ограниченій не дѣлаемъ: они могутъ быть функциями x . Введемъ новую функцію, полагая $y + hz = u$; отсюда $y = u - hz$. Для произвольной будемъ

имѣть:

$$\frac{dy}{dx} + h \frac{dz}{dx} = \frac{du}{dx} - z \frac{dh}{dx}$$

Умноживъ второе ур-іе на h и сложимъ оба:

$$\frac{du}{dx} - z \frac{dh}{dx} + (a_1 + b_1 h)(u - hz) + (a_2 + h b_2)z = A + Bh.$$

Приравнявая коэффициентъ при z нулю, наше ур-іе перепишемъ въ

видѣ:

$$\frac{du}{dx} + (a_1 + b_1 h)u = A + Bh \quad (2)$$

Равенство нулю коэффициента при z даетъ:

$$-\frac{dh}{dx} - h(a_1 + b_1 h) + a_2 + h b_2 = 0,$$

$$\text{или } \frac{dh}{dx} + b_1 h^2 + (a_1 - b_2)h - a_2 = 0 \quad (R)$$

Найдя изъ этого ур-ія типа Riccati h и вставивъ его значеніе въ (L) , получимъ u . Взявъ два частныхъ рѣшенія ур-ія (R)

$$h_1 = h_1(x) \quad , \quad h_2 = h_2(x)$$

соотвѣтственно изъ (L) найдемъ:

$$u_1 = u_1(x, C_1) \quad \text{и} \quad u_2 = u_2(x, C_2).$$

Для опредѣленія u и x будемъ имѣть равенства:

$$y + h_1 x = u_1$$

$$y + h_2 x = u_2$$

Методъ d'Alembert'a легко примѣняется, если можно найти частныя рѣшенія ур-ія Riccati. Это и будетъ, когда оно имѣетъ постоянные коэффициенты.

Перепишемъ ур-іе (R) такъ:

$$\frac{dh}{b_1 h^2 + (a_1 - b_2)h - a_2} = -dx$$

Если a и b постоянныя, то слѣва имѣемъ функцію только h и квадратурой найдемъ:

$$C - x = \int \frac{dh}{b_1 h^2 + (a_1 - b_2)h - a_2} \quad (5)$$

Мы можемъ даже потребовать, чтобы только имѣли мѣсто соотношенія

$$b_1 : a_1 - b_2 : -a_2 = \alpha : \beta : \gamma,$$

гдѣ α, β, γ постоянны. Въ этомъ случаѣ

$$b_1 = \alpha \rho; \quad a_1 - b_2 = \beta \rho; \quad -a_2 = \gamma \rho,$$

гдѣ ρ - любая функція x .

Переменные раздѣляются, и мы получимъ

$$\frac{dh}{\alpha h^2 + \beta h + \gamma} = -\rho dx \quad \text{и дальѣ} \quad \int \frac{dh}{\alpha h^2 + \beta h + \gamma} = C - \int \rho dx. (5')$$

Но кромѣ того легко видѣть, что ур-іе Riccati въ этомъ случаѣ

и въ частности при пост. коэфф. допускаетъ постоянныя рѣшенія $h = \text{const.}$ Дѣйствительно, тогда $\frac{dh}{dx} = 0$, и мы получимъ:

$$b_1 h^2 + (a_1 - b_2)h - a_2 = 0 \quad (Q)$$

гдѣ $b_1, a_1 - b_2, a_2$ постоянны или пропорціональны постояннымъ α, β, γ .

Ур-іе (Q) имѣетъ два постоянныхъ корня h_1 и h_2 , которые и будутъ частными рѣшеніями ур-ія (R).

Въ случаѣ кратнаго корня ($h_1 = h_2$) придется второе частное рѣшеніе искать изъ общей формулы (5). Въ случаѣ кратнаго корня ур-іе Riccati переписется въ видѣ:

$$- \frac{dh}{(h-h_1)^2} = b_1 dx.$$

Выполняя квадратуру, найдемъ:

$$\frac{1}{h-h_1} = b_1 x + C$$

Чтобы найти второе частное рѣшеніе, кромѣ h_1 , положимъ $C = 0$.

Тогда получимъ: $h = \frac{1}{b_1 x} + h_1$.

П Р И М Ъ Р Ъ. Имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx} + y - 2z = 2e^{2x}$$

$$\frac{dz}{dx} + z + 4z = -e^{2x}$$

Напишемъ ур-іе Riccati (R):

$$\frac{dh}{dx} + h^2 - 3h + 2 = 0$$

Ур-іе (L) будетъ такое: $\frac{du}{dx} + (1+h)u = (2-h)e^{2x}$.

Веремъ ур-іе Riccati и ищемъ корни ур-ія

$$h^2 - 3h + 2 = 0 ; h_1 = 1 ; h_2 = 2$$

Пишемъ два ур-ія для u_1 и u_2 :

$$\frac{du_1}{dx} + 2u_1 = e^{2x} ; \frac{du_2}{dx} + 3u_2 = 0$$

Интегрируемъ эти два уравненія:

$$e^{2x} du_1 + 2e^{2x} u_1 dx = e^{4x} dx,$$

$$d(e^{2x} u_1) = e^{4x} dx; e^{2x} u_1 = \frac{e^{4x}}{4} + C_1;$$

$$u_1 = \frac{e^{2x}}{4} + C_1 e^{-2x}; u_2 = C_2 e^{-3x};$$

$$y + z = \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 e^{-2x}; y + 2z = C_2 e^{-3x}.$$

Отсюда:

$$y = 2C_1 e^{-2x} - C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2} e^{2x},$$

$$z = C_2 e^{-3x} - C_1 e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

и есть общее решение нашей системы.

----- 0 -----

ТЕОРИЯ УРАВНЕНИЙ СЪ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ.

§ 23. УР-ІЯ ВЪ ПОЛНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛАХЪ.

Всякое дифференціальное ур-іе есть ур-іе съ отношеніями дифференціаловъ; на примѣръ:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + xy = x^2.$$

Свободная отъ знаменателя. Будемъ имѣть:

$$d^2 y - 2 dy dx + (xy - x^2) dx^2 = 0.$$

Будемъ теперь разсматривать вообще ур-ія въ дифференціалахъ вида:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, dx_1, dx_2, \dots, dx_n, d^2 x_1, d^2 x_2, \dots) = 0$$

ри этомъ мы налагаемъ условіе, чтобы лѣвая часть была однородна относительно дифференціаловъ, считая за измѣреніе дифференціалаго порядокъ.

Пусть мы имѣемъ рядъ конечныхъ соотношеній между n пере-

нными:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Продифференцируемъ эти соотношенія:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Если окажется, что данныя дифференціальныя соотношенія являются слѣдствиемъ полученныхъ, то мы скажемъ, что соотношеніями

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

удовлетворяются данныя дифференціальныя; короче

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

суть интегральныя соотношенія для данныхъ дифференціальныхъ.

Пусть мы имѣемъ нѣсколько соотношеній однородныхъ относительно дифференціаловъ (ур-ій Monge'a) вида:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = 0 \quad (M)$$

въ которыя входятъ дифференціалы только перваго порядка. Раздѣливъ на подходящую степень одного дифференціала наши ур-ія приведемъ къ виду:

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{dx_1}{dx_n}, \frac{dx_2}{dx_n}, \dots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n}) = 0$$

Замѣтимъ, что если мы имѣемъ $n-1$ ур-ій Monge'a, то приведемъ къ системѣ обыкновенныхъ ур-ій перваго порядка, такъ какъ тогда всѣ отношенія дифференціаловъ къ одному изъ нихъ вполне опредѣлятся въ функціи переменныхъ. Если же ур-ій (M) будетъ больше, то будемъ имѣть невозможную систему, которая удовлетворяется только, если положить всѣ x постоянными, ибо въ этомъ случаѣ всѣ дифференціалы будутъ нулями и ур-ія (M) обратятся въ тождества. (Если измѣреніе относительно дифференціаловъ положительно).

Будемъ говорить о случаѣ, когда дано только одно уравненіе Монжа:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = 0 \quad (1)$$

и будемъ искать соотношенія вида:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

такія, чтобы ур-іе (1) было слѣдствіемъ (А) и ихъ полныхъ дифференціаловъ:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (2)$$

Возникаетъ вопросъ о числѣ конечныхъ соотношеній (А). Если ихъ будетъ n ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), то всё X должны быть постоянными и ур-іе (1) удовлетворится, если только измѣреніе его относительно дифференціаловъ положительно. Если $i = 1$, то ур-іе (1) должно быть слѣдствіемъ двухъ соотношеній: одного вида (А) и другого вида (2), и ясно, что лѣвая часть ур-ія (1) должна распасться на множители, и въ числѣ ихъ должны быть множители перваго измѣренія относительно дифференціаловъ, какъ ур-іе (2). Отсюда заключеніе: возможно удовлетворить ур-ію Монжа однимъ конечнымъ соотношеніемъ только тогда, когда изъ лѣвой части этого ур-ія выдѣляется линейный относительно дифференціаловъ факторъ. Мы и будемъ разсматривать ур-ія Монжа только линейныя относительно дифференціаловъ, т.е. такъ называемыя ур-ія

Pfaff'a, вида $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n = 0$,

гдѣ $X_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ограничимся случаемъ, когда $n = 3$, т.е. будемъ разсматривать ур-іе вида

$$A dx + B dy + C dz = 0, \quad (3)$$

гдѣ А, В, С суть функціи x, y, z .

Ясно, что x, y, z независимыми быть не могутъ, ибо когда x и y постоянны, то $dx = 0, dy = 0$, а тогда изъ ур-ія (3) и $dz = 0$, т.е. и z постоянно.

Если будемъ имѣть три интегральныхъ соотношенія для

ур-ія (3), то изъ нихъ опредѣлимъ x , y , z , такъ что

$$x = \text{const.}; \quad y = \text{const.}; \quad z = \text{const.}$$

Въ этомъ случаѣ, очевидно, наше ур-іе удовлетворится при любыхъ значеніяхъ постоянныхъ: такое рѣшеніе особаго значенія не имѣетъ. Это - тривиальное рѣшеніе.

Пусть теперь имѣемъ два соотношенія между переменными. Тогда наше ур-іе тоже удовлетворится и одно соотношеніе мы можемъ выбирать произвольно. Въ этомъ случаѣ два изъ переменныхъ будутъ функциями третьяго.

Положимъ $y = \varphi(x)$. Тогда будемъ имѣть:

$$[A + B\varphi'(x)]dx + Cdz = 0$$

при чемъ въ A , B и C вмѣсто y вставлено $\varphi(x)$. Получится обыкновенное дифф-ное ур-іе съ однимъ независимымъ переменнымъ:

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{A + B\varphi(x)}{C}$$

Проинтегрировавъ его, найдемъ второе интегральное соотношеніе

$$z = \psi(x, C_1).$$

Если мы будемъ понимать x , y , z какъ Декартовы координаты въ пространствѣ, то въ первомъ случаѣ будемъ имѣть одну точку, а во второмъ такъ называемую интегральную линію. Первое соотношение, взятое нами, есть ур-іе цилиндрической поверхности съ образующими, параллельными оси z . Если присоединимъ второе соотношение, то получимъ на этой поверхности цѣлое семейство линій, зависящее отъ одного параметра C_1 .

Пусть теперь имѣемъ какое-нибудь ур-іе

$$F(x, y, z) = 0 \tag{4}$$

вмѣсто соотношенія $y = \varphi(x)$. Легко видѣть, что у насъ опять по-

лучится обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Мы можем из (4) определить z въ функции x, y .

$$z = \chi(x, y) \quad (4')$$

и, пролифференцировавъ

$$dz = \frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy,$$

вставить въ уравнение (3):

$$(A + C \frac{\partial \chi}{\partial x}) dx + (B + C \frac{\partial \chi}{\partial y}) dy = 0 \quad (3')$$

Проинтегрировавъ уравнение (3'), получимъ интеграль

$$\Phi(x, y, C') = 0 \quad (5)$$

Соотношения (4) и (5) определяютъ интегральныя линии, лежащія на произвольно выбранной нами поверхности (4) и образующія семейство съ однимъ параметромъ.

Для большей симметріи можно определить поверхность въ Гауссовыхъ криволинейныхъ координатахъ, полагая

$$x = \varphi(u, v)$$

$$y = \psi(u, v)$$

$$z = \chi(u, v).$$

Найдя dx, dy, dz и вставивъ въ уравнение (3), получимъ обыкновенное дифференциальное уравнение въ u и v :

$$\left\{ A \frac{\partial \varphi}{\partial u} + B \frac{\partial \psi}{\partial u} + C \frac{\partial \chi}{\partial u} \right\} du + \left\{ A \frac{\partial \varphi}{\partial v} + B \frac{\partial \psi}{\partial v} + C \frac{\partial \chi}{\partial v} \right\} dv = 0.$$

Интегрируя, получимъ соотношение

$$\Phi(u, v, C_1) = 0,$$

которое вмѣстѣ съ данными и определяетъ семейство линий на нашей поверхности, зависящее отъ одного параметра.

Переходимъ къ третьему случаю: нельзя ли проинтегрировать уравнение Pfaff'а однимъ соотношеніемъ?

Это значитъ, что если мы имѣемъ соотношеніе

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad (I)$$

и если его продифференцируемъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0, \quad (II)$$

то ур-іе (3) будетъ слѣдствіемъ этихъ двухъ. Ур-іе (I) есть ур-іе интегральной поверхности. Легко видѣть, что всякая произвольная линія на ней будетъ интегральной, потому что, если мы къ ур-ію (I) прибавимъ произвольное уравненіе

$$\Psi(x, y, z) = 0, \quad (III)$$

то ур-іе Pfaff'а этими двумя соотношеніями будетъ удовлетво- ряться. Итакъ, съ геометрической точки зрѣнія вопросъ сводится къ изысканію такихъ поверхностей, гдѣ всякая линія была бы ин- тегральной. Это сдѣлать можно не всегда.

Выразивъ изъ ур-ія (I) одинъ изъ дифференціаловъ чрезъ другіе

$$dz = P dx + Q dy$$

и вставивъ въ (3), получимъ:

$$(A + CP) dx + (B + CQ) dy = 0. \quad (IV)$$

При этомъ изъ ур-ія (I) можемъ опредѣлить z и вставить сюда.

Въ результатѣ получимъ дифференціальное соотношеніе между x и y , которое должно тождественно удовлетворяться, ибо въ противномъ случаѣ x и y не были бы независимы. (Изъ соотношенія (I) z опре- дѣляется въ функціи x, y , а эти послѣднія остаются независимыми.)

Итакъ необходимо

$$A + CP = 0,$$

$$B + CQ = 0,$$

или:

$$A : B : C = P : Q : -1,$$

или еще:

$$A : B : C = \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Итакъ, ур-ію Pfaff'а можно удовлетворить однимъ соотношеніемъ, только тогда, если можно найти такой факторъ λ , чтобы

$$\begin{aligned} \lambda A &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \lambda B &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \lambda C &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \quad (A)$$

Мы полагали коэффициенты въ ур-іи (I) равными 0 въ силу ур-ія (I), которое есть интегральное соотношеніе для ур-ія Pfaff'а. Въ дальнѣйшемъ мы ограничимся случаемъ, когда пропорціональность

$$A : B : C = \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

имѣеть мѣсто тождественно; легко видѣть, что въ этомъ случаѣ интегральнымъ соотношеніемъ будетъ не только (I), но и такое:

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.} \quad (I')$$

Обратно, если мы потребуемъ, чтобы ур-іе Pfaff'а интегрировалось однимъ соотношеніемъ вида (I'), то A, B, C должны быть пропорціональны частнымъ производнымъ одной функціи $\varphi(x, y, z)$, и эта пропорціональность должна имѣть мѣсто тождественно. Очевидно, ни одно изъ двухъ равенствъ, выражающихъ пропорціональность, не можетъ быть слѣдствіемъ (I'), такъ какъ въ (I') входитъ const., которое ни въ одно изъ этихъ равенствъ не войдетъ. Они удовлетворяются при независимыхъ x, y и z.

Итакъ, если ур-іе Pfaff'а интегрируется однимъ соотношеніемъ съ произвольнымъ постояннымъ, то существуетъ такое λ , что, при умноженіи на λ , лѣвая часть обращается въ точный дифференціалъ:

$$\lambda(A dx + B dy + C dz) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi(x, y, z) \quad (B)$$

Найдемъ условіе для А, В, С, при которомъ существуетъ эта функція \mathcal{L} . Беремъ ур-ія (А); дифференцируемъ первое по y , второе по z , и результаты приравниваемъ:

$$\mathcal{L} \frac{\partial A}{\partial y} + A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \mathcal{L} \frac{\partial B}{\partial x} + B \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

Аналогично имѣемъ:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \frac{\partial B}{\partial z} + B \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= \mathcal{L} \frac{\partial C}{\partial y} + C \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \\ \mathcal{L} \frac{\partial C}{\partial x} + C \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= \mathcal{L} \frac{\partial A}{\partial z} + A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \end{aligned}$$

Переносимъ въ этихъ трехъ уравненіяхъ члены:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \right) &= B \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}, \\ \mathcal{L} \left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y} \right) &= C \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - B \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}, \\ \mathcal{L} \left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} \right) &= A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - C \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}. \end{aligned}$$

Чтобы получить зависимость между А, В и С, умножаемъ первое на С, второе на А и третье на В и складываемъ. Будемъ имѣть:

$$A \left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y} \right) + B \left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} \right) + C \left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \right) = 0. \quad (E)$$

Это соотношеніе (E) и есть условіе интегрируемости уравненія Pfaff'а однимъ соотношеніемъ. Это условіе должно имѣть мѣсто тождественно, только если въ интегральное соотношеніе входитъ произвольное постоянное; если же интегральное соотношеніе имѣетъ видъ

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

то условіе (E) можетъ быть его слѣдствіемъ.

Доказавъ необходимость условія (E), докажемъ его достаточность. Для этого употребимъ методъ Эйлера для интеграціи ур-ія Pfaff'а.

Предполагаемъ, что для ур-ія Pfaff'а тождественно удовлетворено соотношеніе (E). Положимъ одно изъ переменныхъ временно постояннымъ; пусть $z = \text{const.}$, слѣд. $dz = 0$. Ур-іе

(3) принимает видъ: $A dx + B dy = 0$

При этомъ въ А и В входитъ z , но какъ параметръ. Проинтегрировавъ это обыкновенное дифференціальное уравненіе, получимъ соотношение вида

$$u(x, y, z) = const.$$

Изъ теоріи дифференціальныхъ уравненій перваго порядка извѣстно, что существуетъ интегрирующій факторъ μ , по умноженіи на который лѣвая часть дифференціального уравненія превращается въ полный дифференціалъ,

такъ что $\mu A = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\mu B = \frac{\partial u}{\partial y}$

Эти два равенства имѣютъ мѣсто тождественно.

Теперь возвращаемся къ предположенію, что z — переменное.

Тогда можемъ написать:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

ибо u есть функція трехъ переменныхъ x, y, z , или, въ силу предыдущихъ равенствъ:

$$du = \mu(A dx + B dy) + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Умножаемъ уравненіе (3) на μ , получимъ:

$$\mu A dx + \mu B dy + \mu C dz = 0.$$

Пользуясь предыдущимъ равенствомъ, будемъ имѣть:

$$du - \frac{\partial u}{\partial z} dz + \mu C dz = du + M dz = 0,$$

гдѣ

$$M = \mu C - \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (6)$$

Итакъ, уравненіе (3) замѣнилось уравненіемъ вида (6), гдѣ M есть функція x, y, z . Докажемъ, что M можетъ быть выражено чрезъ u и z ,

т.е. что

$$M = \varphi(u, z).$$

Если это будетъ доказано, то у насъ будетъ обыкновенное дифференціальное уравненіе 1-го порядка, проинтегрировавъ которое мы

получимъ соотношение вида:

$$\Psi(u, z) = \text{const.} \quad (7)$$

Вставивъ въ него вмѣсто u его значеніе, будемъ имѣть искомое интегральное соотношение вида

$$\Phi(x, y, z) = \text{const.} \quad (I)$$

Мы видимъ, что методъ Эйлера требуетъ двухъ послѣдовательныхъ интеграцій двухъ ур-ій перваго порядка.

Покажемъ, что если имѣеть мѣсто условіе (E), то M есть функція u и z . Имѣемъ три равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= m A, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= m B, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= m C - m \end{aligned}$$

Продифференцируемъ первое по z , третье по x , и результаты приравняемъ:

$$m \frac{\partial A}{\partial z} + A \frac{\partial m}{\partial z} = m \frac{\partial C}{\partial x} + C \frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial x} \quad (a)$$

Аналогично будемъ имѣть:

$$m \frac{\partial B}{\partial z} + B \frac{\partial m}{\partial z} = m \frac{\partial C}{\partial y} + C \frac{\partial m}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial y} \quad (b)$$

$$m \frac{\partial A}{\partial y} + A \frac{\partial m}{\partial y} = m \frac{\partial B}{\partial x} + B \frac{\partial m}{\partial x},$$

или:

$$m \left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \right) = B \frac{\partial m}{\partial x} - A \frac{\partial m}{\partial y} \quad (c)$$

Наше положеніе будетъ доказано, если докажемъ, что Якобиевъ определитель для функцій M и u по x и y равенъ нулю:

$$\frac{\partial M}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Если определитель равенъ нулю, то наши функціи относительно x и y зависимы, т.е.

$$M = \varphi(u, z)$$

Въ этомъ равенствѣ замѣняемъ $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ пропорціональными имъ

величинами А и В:

$$B \frac{\partial M}{\partial x} - A \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Умножаемъ ур-іе (а) на В, (б) на А, и вычитаемъ второе изъ перваго:

$$\mu (B \frac{\partial A}{\partial z} - A \frac{\partial B}{\partial z}) = \mu (B \frac{\partial C}{\partial x} - A \frac{\partial C}{\partial y}) + C (B \frac{\partial M}{\partial x} - A \frac{\partial M}{\partial y}) - (B \frac{\partial M}{\partial x} - A \frac{\partial M}{\partial y})$$

Мы хотимъ доказать, что послѣдній членъ равенъ 0. Замѣнимъ

второй членъ правой части изъ (с) чрезъ $C \mu (\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x})$

и перенесемъ все члены вправо: въ лѣвой части будемъ имѣть 0:

$$0 = \mu [A (\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}) + B (\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}) + C (\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x})] - (B \frac{\partial M}{\partial x} - A \frac{\partial M}{\partial y})$$

Выраженіе въ квадратной скобкѣ исчезаетъ въ силу условія (Е).

Слѣдовательно наше положеніе доказано.

Итакъ мы видимъ, что условіе (Е) есть не только необходимое, но и достаточное для интегрируемости ур-ія (3) однимъ соотношеніемъ.

П Р И М ъ Р Ё Т.

$$(y+a)^2 dx + z dy - (y+a) dz = 0 \quad (\alpha)$$

Посмотримъ, удовлетворяется ли условіе (Е).

$$(y+a)^2 (1+1) + z (0-0) - (y+a) [2(y+a) - 0] = 0.$$

Условіе выполнено. Полагаемъ постоянными: $dz = 0$. Получимъ:

$$(y+a)^2 dx + z dy = 0.$$

Интегрируя, будемъ имѣть:

$$\frac{1}{y+a} - \frac{x}{z} = C = u$$

Вводимъ въ наше уравненіе u и z:

$$x = \frac{z}{y+a} - zu, \text{ отсюда: } dx = -\frac{z dy}{(y+a)^2} + (\frac{1}{y+a} - u) dz - z du;$$

Вставляя

$$-zdy + [(y+a) - u(y+a)^2]dz - z(y+a)^2du + zdy - (y+a)dz = 0$$

По сокращении имеемъ:

$$udz + zdu = 0.$$

Это есть ур-іе (6). Интегрируемъ его:

$$uz = const.$$

Остается вмѣсто u ввести его значеніе:

$$\frac{z}{y+a} - x = const.$$

Это и есть интегральное соотношеніе.

На практикѣ исключеніе x и y изъ даннаго ур-ія ведутъ проще, а priori зная, что въ результатѣ должно получиться

уравненіе вида $Pdu + Qdz = 0$,

гдѣ въ P и Q входятъ только u и z .

Пишемъ: $du = \frac{xdz}{z^2} - \frac{dx}{z} - \frac{dz}{(y+a)^2}$ (β)

А затѣмъ къ данному уравненію прибавимъ (β) по умноженіи на такой факторъ, чтобы исчезли dx и dy . Вѣдѣсь, очевидно, можно умножить (α) на $\frac{1}{z}$, (β) на $(y+a)^2$ и сложить; получаемъ:

$$(y+a)^2 du = \left\{ \frac{x(y+a)^2}{z^2} - \frac{y+a}{z} \right\} dz$$

По дѣленіи на $(y+a)^2$ и умноженіи на z будемъ имѣть:

$$zdu = -udz.$$

§ 29. ЛИНЕЙНЫЯ УРАВНЕНІЯ СЪ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВАГО ПОРЯДКА.

Линейное ур-іе съ частными производными первого порядка

имѣетъ видъ:

$$A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = A.$$

гдѣ все A суть функции x_1, x_2, \dots, x_n .

Если $A = 0$ и если каждое A_i есть функция только независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_n

$$A_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

то будем иметь уравнение, которое мы уже рассматривали.

Введем новые обозначения:

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad (1)$$

где $X_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Интеграция такого уравнения приводится к интеграции системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} \quad (2)$$

Взяв отношения дифференциалов к какому-нибудь одному, будем иметь $n-1$ уравнений вида:

$$\frac{dx_k}{dx_n} = \frac{X_k}{X_n}, \quad \text{где } k = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$$

Проинтегрировав эту систему, получим независимые интегралы системы вида:

$$\psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_k$$

где $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$. Мы видели, что любая функция левых частей этих интегралов

$$\phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$$

удовлетворяет нашему уравнению (1). Это есть общее решение уравнения

(1). Вообще, если нам удастся привести интеграцию уравнения с

частными производными к интеграции обыкновенных дифференциальных

уравнений, то мы будем считать задачу разрешенной. В этом смысле

уравнение (1) считаем проинтегрированным.

Рассмотрим уравнение общего вида:

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_n p_n = R, \quad (I)$$

где все P и R суть функции x_1, x_2, \dots, x_n . $\text{Здесь } p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$.

Интеграція такого ур-ія можетъ бытъ приведена къ интеграціи ур-ія однороднаго. Намъ надо найти ξ въ функціи x_1, x_2, \dots, x_n , но мы можемъ вообше искать соотношеніе вида

$$V(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (A)$$

которое давало бы ξ , удовлетворяющее нашему ур-ію (I).

Посмотримъ, какому же условію удовлетворяетъ функція V .

Дифференцируемъ $V = 0$ по x_i :

$$\frac{\partial V}{\partial z} p_i + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0,$$

откуда

$$p_i = - \frac{\frac{\partial V}{\partial x_i}}{\frac{\partial V}{\partial z}}$$

Вставимъ это въ ур-іе (I):

$$P_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + R \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \quad (II)$$

Наше ур-іе должно удовлетворяться, если мы ξ опредѣлимъ изъ условія (A) и вставимъ въ наше ур-іе. Но если мы потребуемъ, чтобы равенство (II) удовлетворялось независимо отъ этой постановки при независимыхъ x_1, x_2, \dots, x_n , то это будетъ ур-іе съ частными произвольными пол+1 переменными и уже однородное. Проинтегрировавъ его, найдемъ V и, приравнявъ его нулю, рѣшимъ нашу задачу.

Возникаетъ вопросъ: всё ли рѣшенія мы такимъ образомъ получимъ? Мы наложили лишнее требованіе, чтобы ур-іе (II) удовлетворялось тождественно, независимо отъ условія (A).

Замѣтимъ, что если бы мы искали цѣлое семейство рѣшеній ξ , зависящихъ отъ произвольнаго постояннаго, то имѣли бы соотношение вида:

$$V(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = C \quad (A')$$

Но въ этомъ случаѣ ур-іе (II) должно уже непремѣнно удовлетво- ряться тождественно, ибо въ него С не входитъ и оно поэтому не можетъ быть слѣдствіемъ (A').

Итакъ, отвѣтъ на поставленный вопросъ такой: мы найдемъ всѣ рѣшенія ур-ія (1) такія, которыя могутъ быть получены изъ семейства рѣшеній, зависящихъ отъ произвольнаго постояннаго.

Мы пришли къ ур-ію (II). Оно приводитъ къ системѣ

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R} \quad (III)$$

Принтегрировавъ систему, получимъ рядъ интеграловъ вида

$$\psi_i(x, x_1, x_2, \dots, x_n) = C_i$$

гдѣ $i = 1, 2, 3, \dots, n$; функцію V мы можемъ положить равной про- извольной функціи F отъ лѣвыхъ частей этихъ интеграловъ:

$$V = F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$$

Чтобы найти интегралъ ур-ія (I), мы должны положить $V = 0$ (мо- жемъ приравнять не только нулю, а любому постоянному; но это большей общности не внесетъ, т.к. можемъ положить

$$F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) - C = \phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = 0$$

(произвольный выборъ C покрывается произвольности функціи F .)

Итакъ имѣемъ $F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = 0$ и отсюда получимъ всѣ рѣшенія за исключеніемъ такъ называемыхъ особыхъ, т.е. такихъ, которыя не могутъ входить въ составъ ни одного семей- ства рѣшеній.

П Р И М Ъ Р Ъ.

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = z$$

Система ур-ій будетъ такая:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dz}{z}$$

Раздѣливъ на dx_n и интегрируя, имѣемъ:

$$\lg a^{x_n} = \lg x_n + \lg C_k, \quad \lg z = \lg x_n + \lg C_n,$$

или

$$\frac{x_1}{x_n} = C_1, \quad \frac{x_2}{x_n} = C_2, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} = C_{n-1}, \quad \frac{z}{x_n} = C_n.$$

Искомое соотношение будет:

$$F\left(\frac{z}{x_n}, \frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{z}{x_n} = \psi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$
$$z = x_n \psi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

гдѣ ψ есть произвольная функція.

Наше ур-іе выражаетъ ничто иное, какъ теорему Эйлера объ однородныхъ функціяхъ.

Пусть имѣемъ въ частности ур-іе съ двумя независимыми переменными:

$$Pp + Qq = R, \tag{I}$$

гдѣ $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ Система приметъ видъ:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Эта система обыкновенныхъ ур-ій опредѣляетъ собой систему ("конгруэнтную") линій въ пространствѣ своими интегралами:

$$\varphi(x, y, z) = a, \quad \psi(x, y, z) = b$$

Линіи эти называются характеристиками.

Интеграль ур-ія (I) $F(\varphi, \psi) = 0$ есть ур-іе нѣкоторой поверхности. Очевидно, она есть геометрическое мѣсто линій конгруэнтній, для которыхъ удовлетворяется соотношение $F(a, b) = 0$.

Итакъ, мы выделяемъ произвольное семейство съ однимъ произвольнымъ параметромъ линій въ пространствѣ - характеристикъ, и это семейство образуетъ нашу поверхность. Поверхность эта называется интегральной поверхностью для данного ур-ія.

П Р И М Ъ Р Ъ: $xp + yq = z$

Интегралами системы будутъ: $\frac{y}{z} = A$; $\frac{z}{x} = B$; мы получили семейство прямыхъ. Уравненіе

$$F\left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right) = 0$$

представляетъ коническую поверхность, проходящую чрезъ начало координатъ. Итакъ, въ этомъ случаѣ интегральныя поверхности суть конусы.

§ 30. НЕЛИНЕЙНЫЯ УР-ІЯ СЪ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ПЕРВАГО ПОРЯДКА.

Ограничимся случаемъ двухъ независимыхъ переменныхъ. Примемъ обозначенія Монжа:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

Имѣемъ ур-іе перваго порядка:

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

Будемъ называть полнымъ интеграломъ ур-ія (1) соотношение между x , y , z и двумя произвольными постоянными, по исключеніи которыхъ мы приходимъ къ уравненію (1).

Пусть мы имѣемъ такое соотношение:

$$V(x, y, z, a, b) = 0 \tag{2}$$

гдѣ a и b — произвольныя постоянныя. Дифференцируя получимъ:

$$\frac{\partial V}{\partial z} p + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} q + \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

Исключивъ изъ (3) и (4) a и b , мы и получимъ наше соотношение (1). Это ур-іе (1) будетъ слѣдствіемъ (2), (3) и (4), и (2) опредѣляетъ рѣшеніе ур-ія (1).

Докажемъ, что если мы нашли полный интегралъ, то общій

и особый интегралы получаемъ безъ всякихъ интеграцій.

Замѣтимъ, что ур-іе (1) есть слѣдствіе ур-ій (2), (3), (4), каковы бы ни были a и b . Они могутъ быть не только постоянными, но и переменными.

Итакъ, пусть у насъ a и b - некоторыя функціи x и y . Функція z опредѣляется ур-іемъ (1). Для опредѣленія a и b мы можемъ добавить къ ур-ію (2) еще одно условіе по нашему произволу.

Дифференцируемъ соотношеніе (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Чтобы добавить произвольное соотношеніе между a и b , мы можемъ взять одно изъ условій (3) и (4), рассматривая a и b , какъ функціи x и y . Кроме того, у насъ имѣется ур-іе (1); оно есть слѣдствіе (2), (3) и (4). Слѣдовательно, равенства (2), (3) (или (4)) и (1) эквивалентны (2), (3) и (4); равенство (1) мы можемъ отбросить.

Итакъ, принявъ во вниманіе (3) и (4), напомнимъ равенства (5) въ болѣе простомъ видѣ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Полученныя равенства (6) эквивалентны въ силу соотношеній (5) равенствамъ (3) и (4).

Итакъ, для опредѣленія a , b и z имѣемъ соотношенія (6) и (2). Два ур-ія (6) содержатъ производныя a и b и опредѣляютъ эти двѣ функціи.

Разсмотримъ детерминантъ системы (6):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Если этотъ детерминантъ отличенъ отъ нуля, то ур-ія (6) могутъ удовлетворяться только благодаря исчезновенію производныхъ $\frac{\partial v}{\partial a}$ и $\frac{\partial v}{\partial b}$. Если же онъ равенъ нулю, то система (6) приводится къ одному ур-ію. Детерминантъ можетъ равняться нулю или:

1) когда въ отдѣльности исчезаютъ все его элементы; но тогда $a = \text{const.}$ и $b = \text{const.}$, и мы получимъ нашъ полный интегралъ;

2) когда функции зависимы, т. е. имѣемъ, что определитель Якоби равенъ нулю. Въ этомъ случаѣ

$$b = \varphi(a) \tag{7}$$

и два ур-ія (6) обращаются въ одно:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} \varphi'(a) \right] \frac{\partial a}{\partial x} &= 0 \\ \left[\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} \varphi'(a) \right] \frac{\partial a}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Такъ какъ по предположенію $\frac{\partial a}{\partial x}$ и $\frac{\partial a}{\partial y}$ одновременно не исчезаютъ (въ противномъ случаѣ $a = \text{const.}$), то имѣемъ:

$$\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} \varphi'(a) = 0 \tag{8}$$

Равенства (2), (7) и (8) вполне рѣшаютъ поставленный вопросъ, при чемъ функция φ въ (7) - произвольная. Изъ этихъ трехъ равенствъ мы можемъ исключить a и b . Получаемое при этомъ рѣшеніе называется общимъ рѣшеніемъ, а самое соотношеніе - общимъ интеграломъ.

Полный интегралъ является, очевидно, частнымъ случаемъ

общаго, когда a и b постоянны.

3) Пусть теперь детерминантъ не равенъ нулю. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial b} &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Равенства (9) тоже рѣшаютъ вопросъ вмѣстѣ съ равенствомъ (2).

Изъ нихъ мы исключаемъ a и b , и получимъ соотношеніе, которое называется особымъ интеграломъ. Оно не содержитъ ни одного произвольнаго постояннаго, а только x , y и z . Соответственное рѣшеніе называется особымъ.

Итакъ, наша теорема доказана.

Полученный результатъ имѣетъ простое геометрическое толкованіе. Пусть x , y , z — декартовы координаты. Мы имеемъ поверхность, которую назовемъ интегральной. Ур-іе (2) опредѣляетъ семейство поверхностей съ двумя параметрами. Когда мы имеемъ особый интеграль, то, очевидно, опредѣляемъ огибающую всего семейства. Общій интеграль представляетъ собою огибающую семейства съ однимъ параметромъ, ибо мы ур-іемъ $\vartheta = \varphi(a)$ выдѣляемъ изъ всего семейства семейство съ однимъ параметромъ, а ур-іе (8) получаемъ дифференцированиемъ (2) по a .

П Р И М Ъ Р Ъ. Имѣемъ полный интеграль:

$$z = ax + by + ab.$$

Онъ опредѣляетъ семейство плоскостей; дифференцируя по x и y , имѣемъ:

$$0 = a; \quad 0 = b.$$

Отсюда:

$$z = px + qy + pq$$

Чтобы найти особый интеграль, дифференцируемъ по a и b наше

соотношение:

$$0 = x + \beta, \quad 0 = y + \alpha$$

Особый интеграль будеть: $z = -xy$

Обгибаящая семейства плоскостей есть параболоидъ.

Чтобы получить общій интеграль, полагаемъ:

$$\beta = \varphi(\alpha); \quad 0 = x + \beta + (y + \alpha)\varphi'(\alpha).$$

Отсюда мы должны опредѣлить α и вставить въ ур-іе

$$z = \alpha x + \varphi(\alpha)y + \alpha \varphi(\alpha).$$

§ 31. МЕТОДЪ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ОТЫСКАНІЯ ПОЛНАГО ИНТЕГРАЛА.

Пусть мы имѣемъ ур-іе съ частными производными

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (1)$$

и пусть мы имѣемъ еще соотношение

$$\varphi(x, y, z, p, q) = a \quad (2)$$

Изъ (1) и (2) мы можемъ найти p и q и вставить въ уравненіе

Pfaff'а: $dz = p dx + q dy \quad (3)$

Пусть ур-іе (3) интегрируется однимъ соотношеніемъ

$$\Psi(x, y, z, a) = \beta \quad (4)$$

Тогда z , отсюда найденное, удовлетворитъ ур-ію (1), ибо равенство (3) имѣетъ мѣсто при независимыхъ x и y , и слѣдовательно p и q будутъ соотвѣтственно $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Пишемъ условіе интегрируемости для ур-ія (3):

$$p \left\{ \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial(-1)}{\partial y} \right\} + q \left\{ \frac{\partial(-1)}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z} \right\} + (-1) \left\{ \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right\} = 0$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} p \quad (5)$$

Дифференцируемъ (1), считая p и q функциями x , y и z ,

чтобы найти комбинации, стоящая въ равенствѣ (5):

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

Введемъ для сокращенія письма обозначеніе

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} p = \frac{\delta X}{\delta x}; \quad \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} q = \frac{\delta X}{\delta y}$$

Умножая (7) на p и складывая съ (6), получимъ:

$$\frac{\delta F}{\delta x} + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\delta q}{\delta x} = 0$$

Аналогично изъ (2) будемъ имѣть:

$$\frac{\delta \phi}{\delta x} + \frac{\partial \phi}{\partial p} \cdot \frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \cdot \frac{\delta q}{\delta x} = 0$$

Разрѣшаемъ эти уравненія относительно $\frac{\delta q}{\delta x}$:

$$\frac{\delta q}{\delta x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\delta F}{\delta x} & \frac{\partial F}{\partial p} \\ \frac{\delta \phi}{\delta x} & \frac{\partial \phi}{\partial p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} & \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{vmatrix}}$$

Совершенно такъ же найдемъ и $\frac{\delta p}{\delta y}$:

$$\frac{\delta p}{\delta y} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\delta F}{\delta y} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\delta \phi}{\delta y} & \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} & \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{vmatrix}}$$

Вставляя найденныя значенія $\frac{\delta q}{\delta x}$ и $\frac{\delta p}{\delta y}$ въ равенство (5) и отбрасывая общаго знаменателя, будемъ имѣть:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial p} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial p} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{vmatrix} = 0$$

Вводимъ обозначенія:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = Z, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = Q$$

Раскрывая детерминанты, получимъ:

$$P \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \phi}{\partial y} + (P_p + Q_q) \frac{\partial \phi}{\partial z} - (X + Z_p) \frac{\partial \phi}{\partial p} - (Y + Z_q) \frac{\partial \phi}{\partial q} = 0 \quad (A)$$

Интеграція этого линейнаго однороднаго ур-ія съ частными производными функции ϕ по аргументамъ x, y, z, p, q приводится къ интеграціи системы:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{P_p + Q_q} = \frac{-dp}{X + Z_p} = \frac{-dq}{Y + Z_q} \quad (8)$$

Интегралъ этой системы и будетъ искомымъ соотношеніемъ (2) :

$$\phi(x, y, z, p, q) = a \quad (2)$$

т.к. функция ϕ удовлетворяетъ ур-ію (A).

Найдя изъ (1) и (2) p и q и вставивъ ихъ значенія въ ур-іе Pfaff'а (3), мы его проинтегрируемъ однимъ соотношеніемъ, которое и дастъ намъ полный интегралъ.

Итакъ, все дѣло сводится къ интеграціи системы (8) и ур-ія Pfaff'а (3). Это и есть методъ Лагранжа.

Легко видѣть, что система (4) допускаетъ интегралъ вида

$$F(x, y, z, p, q) = C,$$

ибо для $\phi = F$ ур-іе (A) обращается въ тождество:

$$XP + YQ + Z(P_p + Q_q) - P(X + Z_p) - Q(Y + Z_q) = 0.$$

Этотъ интегралъ очевидно неограниченъ. Но знаніе его позволяетъ упростить интеграцію, т.к. одно изъ переменныхъ мы можемъ исключить изъ системы (A) помощью ур-ія: $F(x, y, z, p, q) = 0$ и бу -

демъ имѣть систему трехъ уравненій (вмѣсто четырехъ).

П Р И М Ъ Р Ъ: $pq = z$

Интеграломъ системы (8) будетъ $q = ap$. Изъ полученныхъ ур-ій находимъ $p = \sqrt{\frac{z}{a}}$; $q = \sqrt{a}\sqrt{z}$. Уравненіе Pfaff'а будетъ имѣть видъ:

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{dx}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} dy$$

Интеграль его

$$2\sqrt{z} = \frac{x}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}y + b$$

и будетъ полнымъ интеграломъ нашего уравненія съ частными производными.

О Г Л А В Л Е Н І Е .

Стр.

	Введеніе.	3
§ 1.	Обыкновенныя дифференціальныя уравненія. Общее частное, особое рѣшеніе и интегралъ . Исключеніе постоянныхъ. Примѣры.	5
	УРАВНЕНІЯ 1-ГО ПОРЯДКА.	
§ 2.	Уравненія 1-го порядка. Раздѣленіе переменныхъ. . .	15
§ 3.	Однородныя дифференціальныя уравненія; уравненія, приводимыя къ однороднымъ.	20
§ 4.	Линейныя уравненія	26
§ 5.	Уравненіе Бернулли	33
§ 6.	Уравненіе Riccati	34
§ 7.	Теорія интегрирующаго множителя.	41
§ 8.	Дифференціальныя уравненія 1-го порядка степени выше 1-й относительно производной.	56
§ 9.	Уравненія Лагранжа и Клеро.	67
§ 10.	Доказательство Пикара существованія интеграла дифференціального уравненія (теорема Коши).	73
§ 11.	Способы рѣшенія	90
§ 12.	Задача о траекторіяхъ.	104
	УРАВНЕНІЯ ВЫСШИХЪ ПОРЯДКОВЪ.	
§ 13.	Интегралы уравненій высшаго порядка.	109
§ 14.	Разложеніе рѣшенія уравненія -го порядка въ безконечный рядъ.	112

II

§ 15.	Дифференціальныя уравненія вида:	Стр.
	$y^{(n)} - f(x), F(x, y^{(n)})=0, F(y^{(n-1)}, y^{(n)})=0, F(y^{(n-2)}, y^{(n)})=0. \dots$	114
§ 16.	Дифференціальныя уравненія, не содержащія функцій; дифференціальныя уравненія, не содержащія незави- симаго перемѣннаго; однородныя уравненія.	124
§ 17.	Линейныя дифференціальныя уравненія	131
§ 18.	Общая теорія однородныхъ линейныхъ уравненій.	133
§ 19.	Теорія неоднородныхъ линейныхъ уравненій.	153
§ 20.	Линейныя уравненія съ постоянными коэффициентами.	162
§ 21.	Уравненіе Эйлера	183
§ 22.	Линейныя уравненія 2-го порядка.	189

СИСТЕМА СОВОКУПНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

§ 23.	Исключеніе функцій, приведеніе къ нормальной систе- мѣ	192
§ 24.	Общая теорія совокупныхъ дифференц. уравненій.	201
§ 25.	Линейныя совокупныя дифференціальныя уравненія.	206
§ 26.	Линейныя совокупныя неоднородныя уравненія.	210
§ 27.	Линейныя системы съ постоянными коэффициентами.	211

ТЕОРІЯ УРАВНЕНІЙ СЪ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ.

§ 28.	Уравненія въ полныхъ дифференціалахъ.	216
§ 29.	Линейныя уравненія съ частными производными 1-го порядка	227
§ 30.	Нелинейныя уравненія съ частными производными 1-го порядка	232
§ 31.	Методъ Лагранжа для отысканія полнаго интеграла.	236

ЗАМѢЧЕНІЯ О ПЕЧАТКѢ.

Стран. Строка.	Напечатано.	Должно быть.
4 4 св.	$(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$	$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}) = C$
7 2 сн.	$\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n} + \frac{n}{1} \frac{\partial^n \phi}{\partial x^{n-2} \partial y} y' + \dots$	$\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n} + \frac{n}{1} \frac{\partial^n \phi}{\partial x^{n-2} \partial y} y' + \dots$
10 1 св.	$x, y, y, \dots, y^{(n)}$	$x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$
13 11 сн.	$-y = xy$	$y = xy'$
15 9 св.	начальная	начальная
19 6 сн.	$\lg x = \lg y = \lg z$	$\lg x + \lg y = \lg z$
28 7 сн.	$y = \frac{A}{a y_1}$	$y = \frac{A}{a} y_1$
34 8 сн.	$\frac{1}{\frac{x^2}{4} + \frac{c}{x}} - \frac{4x}{4c - x^4}$	$\frac{1}{-\frac{x^2}{4} + \frac{c}{x}} - \frac{4x}{4c - x^4}$
35 1 сн.		Боя строка ("умноженіи") должна быть выброшена.
37 1 сн.	$\frac{dy_1}{dx} = Py_1 + Qy_1 + R$	$\frac{dy_1}{dx} = Py_1^2 + Qy_1 + R$
39 1 сн.		Боя строка выбрасывается.
43 2 сн.	$du - Mdx + Ndy$	$du = Mdx + Ndy$
58 8 сн.	$\phi_i(x, u, C) = 0$	$\phi_i(x, y, C) = 0$

Стран.Строкэ	Напечатано.	Должно быть.
61 7 стр.	$dx = \frac{dy}{p}$	$dx = \frac{dy}{p}$
62 8 стр.	$dy = \varphi'(t)dt ; dx = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} dt$	$dy = \varphi'(t)dt ; dx = \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}$
63 8 св.		Въ началѣ строки слѣдуетъ вставить: "2)"
76 3 св.	функціямъ y, \dots	функціямъ y, z, u, \dots
" " "	считать y .	считать y_0, z_0, u_0, \dots
" " 5 св.	приближеніе y, \dots	приближеніе y_1, z_1, u_1, \dots
" " " 7 и 8 св.		$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_0, \dots, u_0);$ $\frac{dz_1}{dx} = f_2(x, y_0, \dots, u_0) \dots$ $\frac{du_1}{dx} = f_n(x, y_0, \dots, u_0) (4)$
" " 9 св.	функціи y, \dots	функціи y, z, \dots
" " 11 св.	при $x=x_0, y=y_0, z=z_0, \dots, u=u_0$	при $x=x_0, y=y_0, z_1=z_0, \dots, u_1=u_0$
" " 16 св.	$z_1 = z_0 =$	$z_1 - z_0 =$
77 7 св.	приближенія: y, \dots	приближенія: y_m, z_m, \dots
80 11 св.	$(y_2 - y_1) \ll \text{Мод} \int_{x_0}^x (x-x_0) dx$	$(y_2 - y_1) \ll \text{Мод} \int_{x_0}^x (x-x_0) dx$
81 4 св.	$(y_3 - y_2) \ll \text{Мод}^2 \int_{x_0}^x \frac{(x-x_0)^2}{1.2} dx$	$(y_3 - y_2) \ll \text{Мод}^2 \int_{x_0}^x \frac{(x-x_0)^2}{1.2} dx$

Стран. Строка.	Напечатано.	Должно быть:
85 6 стр.	при чемъ $x=x_0$	при чемъ для $x = x_0$
86 9 св.	соотвѣтствовать	соотвѣтственно.
89 8 св.	до $x_0 + a$; и	до $x_0 + a$ и
" 9 св.	$ f(x, y) < M$ мн	$ f(x, y) < M$, мн
96 8 св.	$y = \pm R$	$y = \pm R$
" 7 и 8 стр.	пара	пару
97 4 св.	$z(z)$	(2)
104 3 стр.	$m = \operatorname{tg}(\tau - \tau')$	$m = \operatorname{tg}(\tau - \tau')$
105 10 св.	получить	получить
" 6 стр.	$\operatorname{tg} \theta = \infty$	$\operatorname{tg} \theta = \infty$
107 12 св.	$\frac{dy}{dx} (1 + m \frac{dy}{dx}) = \frac{y}{x} - m$	$\frac{dy}{dx} (1 + m \frac{y}{x}) = \frac{y}{x} - m$
115 2 св.	$x = x$	$x = x_0$
" 9 стр.	$(x-t)^{n-3} dt$	$(x-t)^{n-3} dt$
118 5 св.	$F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0$	$F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0$
123 4 стр.	$\operatorname{arccosh} \frac{ky}{c}$	$\operatorname{arccosh} \frac{ky}{c}$
124 3 стр.	$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y^{(k)}, \dot{x})$	$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y^{(k)}, x)$
129 7 стр.	$\frac{y}{x} = u$	$\frac{y}{x} = u$
132 9 св.	$\frac{dy}{dx} \psi'[\varphi(x')]$	$\frac{dy}{dx'} \cdot \psi'[\varphi(x')]$

Стран.Строка.	Напечатано.	Должно быть.
135 14 стр.	на 1	на - 1
138 4 св.	$\mathcal{W}(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \neq 0$	$\mathcal{W}(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = 0$
139 10 стр.	$\dots + u'_{n-1} y_{n-1} = 0$	$\dots + u'_{n-1} y_{n-1} = 0$
" " 1 стр.	$= u_{n-1} = 0$	$= u'_{n-1} = 0$
145 ВНИЗУ	$p_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{\mathcal{W}(y_1, y_2, \dots, y_n)}$	$p_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{\mathcal{W}(y_1, y_2, \dots, y_n)}$
151 11 св.	$\dots + \alpha_m u_m = 0$	$\dots + \alpha_{m-1} u_{m-1} = 0$
158 8 стр.	по инерции	по интеграции
161 3 св.	$\dots + y_1^{(n)} +$	$\dots + y_1^{(n)}) +$
" " 4 св.	$\dots + y_2^{(n)} +$	$\dots + y_2^{(n)}) +$
169 15 св.	$\mathcal{A}\{e^{(\delta+\kappa)+x}\}$	$\mathcal{A}\{e^{(\delta+\kappa)x}\}$
177 1 св.	$z = g_{m+u}(x) +$	$z = g_{m+\mu}(x) +$
182 10 стр.	$\mathcal{A}\{y\} = e^{aix} x^m \cdot \frac{1}{2} g_m(x)$	$\mathcal{A}\{y\} = e^{aix} \frac{1}{2} g_m(x)$
" " 9 стр.	$\mathcal{A}\{y\} = e^{-aix} x^m \frac{1}{2} g_m(x)$	$\mathcal{A}\{y\} = e^{-aix} \frac{1}{2} g_m(x)$
" " 7 стр.	$\mathcal{A}\{y\} = \frac{1}{2i} e^{aix} x^m g_m(x)$	$\mathcal{A}\{y\} = \frac{1}{2i} e^{aix} g_m(x)$
" " 6 стр.	$\mathcal{A}\{y\} = -\frac{1}{2i} e^{-aix} x^m g_m(x)$	$\mathcal{A}\{y\} = -\frac{1}{2i} e^{-aix} g_m(x)$
184 8 стр.	$= e^t \frac{df(e^t)}{dt}$	$= e^{-t} \frac{df(e^t)}{dt}$
" " 4 стр.	$y'' = -\frac{t}{dt} (e^{-t} \frac{dy}{dt})$	$y'' = e^{-t} \frac{d}{dt} (e^{-t} \frac{dy}{dt})$

УИ

Стран. Строка

Напечатано.

Должно быть.

186 10 сн.

Коши

Эйлера

" " 1 сн.

Выбросить всю строку
("Эйлера:")

187 11 сн.

Коши

Эйлера

" " 1 сн.

Выбросить всю строку
("Эйлера")

188 1 сн.

$\lim_{\delta=0}$

$\lim_{\delta=0}$

190 11 сн.

$\mu''z + 2\mu'z' + 2\mu +$

$\mu''z + 2\mu'z' + z''\mu +$

" " 15 сн.

$2\mu + p_1\mu = 0$

$2\mu' + p_1\mu = 0$

194 10 сн.

$y_1 \cdot n - 1$

$y_1 \cdot n_1 - 1$

228 10 сн.

$\frac{\partial x_2}{x_2}$

$\frac{dx_2}{x_2}$
