БИБЛИОТЕКА РУССКОЙ НАУКИ

математика
механика
физика
астрономия

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

Д. Ф. ЕГОРОВ

РАБОТЫ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Под редакцией С. П. ФИНИКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

517.4
Е 30
УДК 513.731

2-2-3
39-70

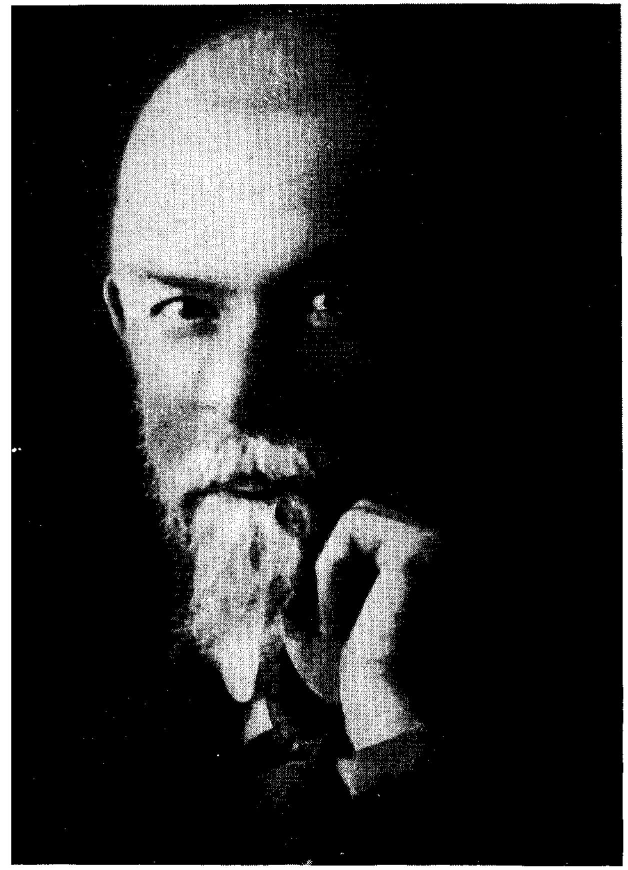
ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Настоящий сборник издается в связи со 100-летием со дня рождения крупнейшего геометра, профессора Московского университета, заслуженного деятеля науки и техники, Дмитрия Федоровича Егорова (1869—1931). Наиболее важные работы его по дифференциальной геометрии, помещенные в различных журналах, отечественных и зарубежных, были собраны, переведены и просмотрены ныне покойным профессором МГУ С. П. Финиковым и членом-корреспондентом АН СССР, профессором МГУ Л. Н. Сретенским.

Из 12 помещенных здесь сочинений Д. Ф. Егорова по дифференциальной геометрии наибольшим по объему и значению является его докторская диссертация «Об одном классе ортогональных систем». Она посвящена теории ортогональных систем линий и триортогональных систем поверхностей, в ней изучаются свойства систем потенциального типа, допускающие группы преобразований. Работа была опубликована в «Записках Московского университета», вып. 18 (1901). Появившееся вслед за этим в вып. 19 того же журнала «Добавление» в настоящем сборнике вставлено в текст основного сочинения согласно указаниям Д. Ф. Егорова, вследствие чего в § 3 первой части формулы (59) и (60) опущены, поэтому нумерация формул изменена. В нескольких работах рассмотрены непрерывные изгибания поверхностей. В книгу включено классическое сочинение «Об изгибании на главном основании при одном семействе плоских или конических линий». Очень интересно сочинение «О поверхностях, образованных распределением линий данного семейства», отличное по теме от остальных и дающее иное, отличное от *классического направление вопросам о взаимоогибаемых поверхностях с изложением их дифференциальных свойств, с установлением зависимостей между коэффициентами квадратичных форм поверхностей, между их кривизнами и др.*

Последняя по времени (1929 г.) *работа посвящена конгруэнции W с линейчатыми фокальными поверхностями. Метод изложения везде координатный в духе известных классических трудов по дифференциальной геометрии Дарбу и Бианки. Сочинения Д. Ф. Егорова послужили источником работ его многочисленных учеников и являются классическим наследием русской геометрической мысли.*

В. С. Люкшин



Д. Ф. ЕГОРОВ (1869—1931)

К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ СООТВЕТСТВИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ [1]

§ **1.** Допустим, что между двумя произвольными поверхностями S и S_1 установлено какое-нибудь соответствие, ограниченное лишь условиями, чтобы действительным точкам одной поверхности соответствовали действительные же точки другой и чтобы бесконечно близким точкам соответствовали, вообще говоря, тоже бесконечно близкие. Если выразим координаты x, y, z и X, Y, Z точек обеих поверхностей аналитическими функциями одних и тех же параметров u, v и будем считать соответственными те точки, которые получаются для одних и тех же значений u, v, то и получим соответствие упомянутого типа, если только X, Y, Z, x, y, z — функции такого вида, что при x, y, z действительных X, Y, Z действительны и обратно. Как известно, при сделанных ограничениях всегда можно выбрать параметры u, v так, чтобы координатные линии $u = \mathrm{const}$ и $v = \mathrm{const}$ были ортогональны как на S, так и на S_1 и чтобы эти линии были действительны. Выбор таких параметров u, v может быть сделан единственным способом в общем случае (если параметры $u' = f(u)$, $v' = \varphi(v)$ не считать отличными от u, v) и бесконечно разнообразно, если соответствие, установленное между S и S_1, есть соответствие изогональное (конформное). Для выбранной системы координат u, v квадраты линейных элементов S и S_1 пусть будут соответственно

$$ds^2 = e\,du^2 + g\,dv^2$$

и

$$ds_1{}^2 = E\,du^2 + G\,dv^2.$$

[1]) Матем. сб. 18 (1896), 86—107. (Читано в заседании Московского математического общества 15 ноября 1894 года.)

В случае изогонального соответствия, как известно, $\frac{E}{e}=\frac{G}{g}=\lambda(u,v)$ и, следовательно, как легко видеть, всем точкам, находящимся от некоторой определенной точки (u, v) поверхности S на одном и том же бесконечно малом расстоянии ds, соответствуют на поверхности S_1 точки, находящиеся от точки (u, v) тоже на одном расстоянии $ds_1=\sqrt{\lambda}\,ds$.

В общем случае этого не будет, и отношение расстояний соответственных точек от начальных точек (u, v)

$$\rho=\frac{ds_1}{ds}=\sqrt{\frac{Eu'^2+G}{eu'^2+g}},$$

где $u'=du/dv$, зависит от направления, по которому мы исходим из точки (u, v) на одной из поверхностей, например на S.

Рассмотрим изменение ρ при данных u, v, т. е. в определенных соответственных точках (u, v) на S и S_1. Очевидно, ни для какого действительного направления ρ не обращается ни в нуль, ни в бесконечность (первое имеет место для направлений линий нулевой длины S_1, второе — для направлений линий нулевой длины на S). Наибольшее и наименьшее значения ρ, определяемые из условия $\frac{\partial\rho}{\partial u'}=0$, получаются для $u'=0$ и $u'=\infty$. Таким образом, общая ортогональная сеть двух поверхностей $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ обладает тем свойством, что по направлениям этих линий величина ρ, которую можно назвать параметром подобия [1]), для каждой данной точки на S или S_1 получает наибольшее или наименьшее значение.

Если в выражении ρ сделать $u'=0$ и $u'=\infty$, то получаем соответственно

$$\rho=\sqrt{\frac{G}{g}} \quad \text{и} \quad \rho=\sqrt{\frac{E}{e}},$$

и все остальные значения параметра подобия заключаются между этими предельными.

Одинаковые значения ρ получаются, очевидно, для значений u', отличающихся только знаками, т. е. для направлений, симметричных относительно направлений общей ортогональной сети; в этом можно также убедиться из формулы

$$u'=\pm\sqrt{\frac{\rho^2 g-G}{E-\rho^2 e}},$$

которая дает два значения u' для данного ρ. Эти значения совпадают только для $\rho=\sqrt{G/g}$ или $\rho=\sqrt{E/e}$, причем соответственно $u'=0$ или $u'=\infty$.

Уравнения $G/g=\text{const}$, $E/e=\text{const}$ определяют на S и на S_1 системы линий, на каждой из которых maximum или minimum параметра подобия сохраняет одну и ту же величину.

Если

$$\frac{G}{g}=U, \quad \frac{E}{e}=V,$$

где U есть функция u, а V — функция v, так что

$$ds_1^2=Ve\,du^2+Ug\,dv^2,$$

то предельные значения параметра подобия остаются постоянными на линиях общей ортогональной сети, притом каждое на линии соответствующего ему направления.

Если

$$\frac{E}{e}=a, \quad \frac{G}{g}=b,$$

где a и b — постоянные, так что

$$ds_1^2=ae\,du^2+bg\,dv^2,$$

то maximum и minimum параметра подобия одни и те же для всех точек.

§ 2. Если из какой-нибудь точки на любой из поверхностей S или S_1 выйдем по направлению, соответствующему определенному значению ρ параметра подобия, до последовательной точки, далее опять пойдем по направлению, соответствующему тому же значению параметра подобия, и т. д., то получим линию, обладающую тем свойством, что параметр подобия для всех точек этой линии по ее направлению имеет одну и ту же величину ρ. На поверхностях S и S_1 получаем целую систему таких (соответствующих одна

[1]) Причина выбора такого термина выяснится далее.

другой) линий, определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{Eu'^2+G}{eu'^2+g}=\rho^2 \qquad (1)$$

и обладающую тем свойством, что точкам, взятым на одной из этих линий на поверхности S на равных расстояниях одна от другой, соответствуют точки на соответствующей линии на поверхности S_1, тоже находящиеся на равных расстояниях одна от другой, притом измененных сравнительно с расстояниями на S в отношении, равном ρ. Таким образом, если оставить в стороне деформацию, то линии, определяемые дифференциальным уравнением (1) на S, преобразуются в соответственные линии на S_1 подобно с параметром подобия ρ.

Если придавать ρ всевозможные значения, то получаем «двоякобесконечную» систему линий на S и на S_1, определяемых уравнением

$$\frac{Eu'^2+G}{eu'^2+g}=\text{const}, \qquad (2)$$

вдоль которых «сохраняется подобие» при преобразовании S в S_1 или обратно при помощи установленного соответствия.

Наоборот, очевидно, все линии, обладающие этим свойством, определяются уравнением (2), так как уравнение это в сущности является лишь аналитическим выражением упомянутого свойства.

Дифференцируя для исключения const, получаем дифференциальное уравнение второго порядка, интегралами которого служат линии, сохраняющие подобие, в следующем виде:

$$\begin{aligned}2(Eg-eG)u'u''&+\left(e\frac{\partial E}{\partial u}-E\frac{\partial e}{\partial u}\right)u'^5+\left(e\frac{\partial E}{\partial v}-E\frac{\partial e}{\partial v}\right)u'^4+\\&+\left(e\frac{\partial G}{\partial u}-E\frac{\partial g}{\partial u}+g\frac{\partial E}{\partial u}-G\frac{\partial e}{\partial u}\right)u'^3+\\&+\left(e\frac{\partial G}{\partial v}-E\frac{\partial g}{\partial v}+g\frac{\partial E}{\partial v}-G\frac{\partial e}{\partial v}\right)u'^2+\\&+\left(g\frac{\partial G}{\partial u}-G\frac{\partial g}{\partial u}\right)u'+\left(g\frac{\partial G}{\partial v}-G\frac{\partial g}{\partial v}\right)=0. \qquad (3)\end{aligned}$$

В случае $E/e=V$, $G/g=U$, как легко видеть из (2), линии общей ортогональной сети принадлежат к линиям, сохраняющим подобие.

В связи с предыдущим из (2) легко выводим, что через каждую точку (u, v) любой из поверхностей проходит целый пучок линий, сохраняющих подобие, притом с разными значениями параметра подобия, по две линии для каждого из возможных значений. Исключение составляют точки, для которых $\frac{E}{e}=\frac{G}{g}$. Для таких точек, если они существуют, параметр подобия имеет одно значение, не зависящее от направления и равное общей величине отношений

$$\frac{E}{e}=\frac{G}{g};$$

поэтому все линии, сохраняющие подобие, которые проходят через одну из таких точек, соответствуют одному значению параметра подобия. Обратно, нетрудно видеть, что для всякой точки, через которую проходит пучок линий, сохраняющих подобие, с одним и тем же параметром подобия, имеет место соотношение

$$\frac{E}{e}=\frac{G}{g}. \qquad (4)$$

В этих исключительных точках соответствие становится изогональным.

Для характеристики распределений линий, сохраняющих подобие, по поверхности особенно важно обратить внимание на рассмотренные раньше системы линий

$$\frac{E}{e}=\text{const}, \qquad \frac{G}{g}=\text{const}.$$

Именно, нетрудно видеть, что всякая линия, сохраняющая подобие с параметром ρ, не может пересечь ни одной из линий

$$\frac{E}{e}=\rho^2, \qquad \frac{G}{g}=\rho^2,$$

так как, например, в смежности с линией

$$\frac{E}{e}=\rho^2$$

одно из предельных значений параметра подобия $\sqrt{E/e}$ по одну сторону этой линии меньше ρ, а по другую больше ρ, и, следовательно, если величина ρ по одну сторону упомянутой линии находится в пределах возможных значений параметра подобия, то по другую она выходит из этих пределов, и, следовательно, ни одна из линий, определяемых уравнением

$$\frac{Eu'^2+G}{eu'^2+g}=\rho^2, \tag{1}$$

не может пересечь линий

$$\frac{E}{e}=\rho^2 \quad \text{и} \quad \frac{G}{g}=\rho^2. \tag{5}$$

Предыдущее рассуждение допускает исключение для точек, для которых имеет место условие (4). В самом деле, если существует точка, для которой

$$\frac{E}{e}=\frac{G}{g}=\rho^2,$$

то, очевидно, в этой точке пересекаются и линии (5), и все линии, сохраняющие подобие с параметром ρ. Если такой точки не существует, то линии, определяемые уравнениями (5), вовсе не пересекаются, и все линии, сохраняющие подобие с параметром ρ, заключаются между ними; в противном случае линии, сохраняющие подобие с параметром ρ, заключаются в двух вертикальных секторах, определяемых линиями (5). Точка, в которой одна из линий, сохраняющих подобие с параметром ρ, встречает одну из линий (5), по предыдущему, не может быть простой точкой пересечения (за исключением точек, где соответствие становится изогональным), а может быть только точкой прикосновения (без перекрещивания) или точкой возврата (в общем смысле) для линии, сохраняющей подобие с параметром ρ. В общем случае первое из этих предположений исключается, так как, если сделать

$$\frac{E}{e}=\rho^2 \quad \text{или} \quad \frac{G}{g}=\rho^2$$

в дифференциальном уравнении

$$\frac{Eu'^2+G}{eu'^2+g}=\rho^2, \tag{1}$$

то получим соответственно

$$u'=\infty \text{ или } u'=0,$$

так что касательная к одной из линий, определяемых уравнением (1), в точке встречи с одной из линий (5) совпадает с одним из направлений общей ортогональной сети, и, следовательно, в общем случае ни одна из линий (1) не может прикасаться ни к одной из линий (5). Из полученных результатов:

$$u'=0 \quad \text{или} \quad u'=\infty,$$

в связи с предыдущим (§ 1), следует, что в точке встречи соединяются две ветви линий, сохраняющих подобие с параметром ρ, так что действительно эта точка есть для нее точка возврата.

Таким образом, в общем случае линии общей ортогональной сети представляют собой облекающие касательных к линиям, сохраняющим подобие, в их точках возврата, а линии

$$\frac{E}{e}=\text{const}, \qquad \frac{G}{g}=\text{const} \tag{6}$$

получаются как геометрические места этих точек возврата для линий одного параметра подобия. Заключение это безусловно справедливо, так как всякая точка возврата линии, сохраняющей подобие, дает нам $u'=0$ или $u'=\infty$ и, следовательно, принадлежит к числу рассмотренных точек.

От общего случая перейдем к частному, когда имеют место оба или одно из условий

$$E=Ve, \quad G=Ug.$$

В этом предположении оба или одна из систем линий (6) совпадают с линиями общей ортогональной сети (притом, например, линии $E/e=\text{const}$ совпадают с линиями $v=\text{const}$, вдоль которых параметр подобия равен E/e) и тогда принадлежат к числу линий, сохраняющих подобие. Линии, для которых это имеет место, по-прежнему служат границами для остальных линий, сохраняющих подобие, но уже представляют не геометрические места их точек возврата, а их облекающие, так как, например, в точке встречи одной из линий, определяемых дифференциальным уравнением

$$\frac{Eu'^2 + G}{eu'^2 + g} = \rho^2, \tag{1}$$

с линией

$$\frac{G}{g} = U = \rho^2$$

имеем для обеих линий $u' = 0$, и, следовательно, точка встречи есть точка прикосновения.

Линия $\frac{G}{g} = \rho^2$, которая в общем случае была геометрическим местом точек возврата интегралов уравнения (1), в указанном частном случае обращается, как легко видеть, в особый интеграл этого уравнения.

Наконец, в еще более частном случае, для которого

$$E = ae, \quad G = bg,$$

где a, b — постоянные, линии

$$\frac{E}{e} = \text{const}, \qquad \frac{G}{g} = \text{const} \tag{6}$$

вовсе исчезают.

§ 3. Все предыдущее относилось к соответствиям неизогональным. Рассмотрим теперь случай изогональности, т. е. случай

$$\frac{E}{e} = \frac{G}{g} = \lambda(u, v).$$

Дифференциальное уравнение (2) в сделанных предположениях обращается в уравнение

$$\lambda(u, v) = \text{const}, \tag{7}$$

т. е. вместо «двоякобесконечной» системы линий, сохраняющих подобие, получаем простую систему, определяемую уравнением (7).

Является интересным проследить, как совершается это вырождение при постепенном обращении соответствия в изогональное. Для определенности рассмотрим соответствие, в котором, например,

$$\frac{E}{e} = \lambda(u, v), \qquad \frac{G}{g} = \lambda(u, v) + \gamma,$$

где γ — постоянное; при постепенном уменьшении γ это соответствие обращается в изогональное. Кривые

$$\frac{E}{e} = \rho^2, \qquad \frac{G}{g} = \rho^2$$

для данного случая будут

$$\lambda = \rho^2, \quad \lambda = \rho^2 - \gamma;$$

они принадлежат к одной системе

$$\lambda = \text{const} \tag{7}$$

и при уменьшении γ приближаются к совпадению. Между тем, по предыдущему, между этими кривыми заключаются все линии, сохраняющие подобие с параметром ρ, и, следовательно, при уменьшении γ все эти линии постепенно сплющиваются, и в пределе все они дают одну линию

$$\lambda = \rho^2,$$

и все линии, сохраняющие подобие, обращаются в систему

$$\lambda = \text{const}. \tag{7}$$

Уравнение (7), в которое в случае изогональности обращается уравнение (2), можно с известной более общей точки зрения, установленной Ли, рассматривать как дифференциальное, и тогда его интегралами служат точки линии

$$\lambda = \text{const},$$

каждая с совокупностью проходящих через нее направлений, а собственно линия

$$\lambda = \text{const}$$

будет особым интегралом этого уравнения. С этой точки зрения при изогональном соответствии опять имеем двоякобесконечную систему линий, сохраняющих подобие; только эти линии обращаются в точки, а линии $\lambda = \text{const}$ играют роль особых интегралов в задаче. Эта точка зрения вполне гармонирует с тем, что при изогональном соответствии подобие сохраняется в бесконечно малых частях — в соседстве с каждой точкой.

§ 4. Обратимся опять к общему случаю.

Пусть между поверхностями S и S_1 установлено соответствие; ищем все поверхности S', которые можно привести с S в такое соответствие, чтобы линии, сохраняющие подобие при этом соответствии на S, остались прежние. Понятно, что таким свойством все поверхности S' будут обладать не только по отношению к S, но и по отношению к S_1 и к любой поверхности из числа поверхностей S'. Пусть линейный элемент S' в тех же координатах

$$ds' = \sqrt{E_1du^2 + 2F_1du\,dv + G_1dv^2}\,. \tag{8}$$

Легко видеть, что в общем случае система линий $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$ должна и при новом соответствии остаться общей ортогональной сетью, так как линии эти определятся на S по-прежнему как облекающие касательных в точках возврата линий, сохраняющих подобие, которые по условию остаются прежние. Таким образом, в общем случае $F_1 = 0$. В случае

$$E = Ve, \quad G = Ug$$

линии $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$ определяются на S как те из линий, сохраняющих подобие, которые служат облекающими для остальных (это свойство, как легко видеть, только и принадлежит линиям $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$). При соответствии между S и S' линии, сохраняющие подобие на S, по условию должны остаться прежние, следовательно, и линии $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$ будут определяться по-прежнему, а поэтому система $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$ будет по-прежнему общей ортогональной сетью. Таким образом, опять имеем $F_1 = 0$; мы можем даже предвидеть, что в этом частном случае

$$E_1 = V_1e, \quad G = U_1g,$$

так как общая ортогональная сеть, определенная для S и S', должна по-прежнему принадлежать к системе линий, сохраняющих подобие. Понятно, что если бы мы предположили только, например,

$$E = Ve,$$

то система $v = \mathrm{const}$ определилась бы как в предыдущем случае, а система $u = \mathrm{const}$ — как в общем случае, и мы бы опять имели $F_1 = 0$. Наконец, если предположить одно из отношений

$$\frac{E}{e}, \quad \frac{G}{g}$$

постоянным, например $E = ae$, то система $v = \mathrm{const}$ определилась бы по-прежнему, и, следовательно, при новом соответствии она должна оставаться одной из систем линий общей ортогональной сети, а так как линии $u = \mathrm{const}$ на S ортогональны к линиям $v = \mathrm{const}$, то, следовательно, это свойство сохранится и на S', и по-прежнему $F_1 = 0$.

Итак, если оставить в стороне случай

$$E = ae, \quad G = bg,$$

где a, b — постоянные, к которому неприменимы предыдущие рассуждения, то всегда будет $F_1 = 0$ и, следовательно,

$$ds'^2 = E_1du^2 + G_1dv^2. \tag{9}$$

Другими словами, для всей системы поверхностей S' будет существовать одна общая ортогональная сеть.

Раз имеем $F_1 = 0$, то нетрудно видеть, что линии, сохраняющие подобие с одним и тем же значением параметра подобия при соответствии S_1 с S, будут обладать тем же свойством при соответствии S' с S_1, так как в точке встречи двух каких-нибудь линий, соответствующих одному значению параметра подобия, направления их должны быть симметричны относительно направлений общей ортогональной сети, а сеть эта по условию для нового соответствия остается прежняя. Параметр подобия для нового соответствия должен быть, таким образом, функцией параметра подобия для первоначального соответствия, т. е. мы должны иметь для всех значений u, v, u'

$$\frac{E_1u'^2 + G_1}{eu'^2 + g} = f\left(\frac{Eu'^2 + G}{eu'^2 + g}\right).$$

Очевидно, возможна только линейная связь

$$\frac{E_1u'^2 + G_1}{eu'^2 + g} = A + B\,\frac{Eu'^2 + G}{eu'^2 + g}\,, \tag{10}$$

откуда

$$E_1 = Ae + BE, \quad G_1 = Ag + BG, \tag{11}$$

где A, B — постоянные. Из формул (11) получаем

$$ds'^2 = A\,ds^2 + B\,ds_1^2, \tag{12}$$

и так как это соотношение должно, конечно, иметь место независимо от выбора координат, то, следовательно, при любых параметрах u, v, устанавливающих соответствие (а не только для параметров общей ортогональной сети), мы должны иметь

$$E_1 = Ae + BE, \quad F_1 = Af + BF, \quad G_1 = Ag + BG, \tag{13}$$

где A, B — произвольные постоянные, а E_1, F_1, G_1; e, f, g; E, F, G — коэффициенты линейных элементов поверхности S', S, S_1.

Формулы (13) определяют только форму линейного элемента поверхностей S'; следовательно, если мы нашли какую-либо поверхность, какая может быть приведена с данной поверхностью S в соответствие с сохранением подобия вдоль тех же линий, вдоль которых оно сохраняется при соответствии S_1 с S, то все изгибания найденной поверхности тоже служат решением вопроса. Заметим еще, что один из параметров A, B, входящих в формулы (13), не играет существенной роли. В самом деле, гомотетическим преобразованием поверхности всегда можем ввести один параметр в виде множителя (постоянного) при всех коэффициентах линейного элемента; а гомотетическое преобразование, конечно, допустимо, так как при нем подобие сохраняется вполне. Следовательно, если мы получили систему поверхностей S'' с одним произвольным параметром γ, притом такого рода, что коэффициенты линейного элемента для поверхностей системы имеют вид

$$\begin{aligned} E_1 &= f(\gamma)\cdot e + \varphi(\gamma)\cdot E, \\ F_1 &= f(\gamma)\cdot f + \varphi(\gamma)\cdot F, \\ G_1 &= f(\gamma)\cdot g + \varphi(\gamma)\cdot G, \end{aligned} \tag{14}$$

то поверхности системы S'' вместе со всеми поверхностями, полученными из них одновременным применением гомотетического преобразования и изгибания, дадут самую общую систему поверхностей S', находящихся в соответствии при тех же линиях, сохраняющих подобие.

Вопрос нами разрешен вполне, за исключением того частного случая, когда соответствие данных поверхностей S и S_1 было такого рода, что maximum и minimum параметра подобия сохраняли постоянную величину для всех точек, т. е. при прежнем выборе параметров u, v (параметров общей ортогональной сети) имели место условия

$$E = ae, \quad G = bg, \tag{15}$$

где a, b — постоянные.

Понятно, что и соответствие между S' и S должно обладать тем же свойством, так как в противном случае линии, сохраняющие подобие на S, должны были бы допускать точки возврата или облекающие линии, принадлежащие к их системе, чего не может быть, когда соответствие между S и S_1 рассматриваемого типа. Выберем за систему u, v мнимые симметрические координаты на S, так что квадраты линейных элементов S, S_1, S' будут соответственно

$$\begin{aligned} ds^2 &= 2\lambda\,du\,dv, \\ ds_1{}^2 &= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ ds'^2 &= E_1 du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2. \end{aligned} \tag{16}$$

Параметр подобия для соответствия между S и S_1 определяется из формулы

$$\rho^2 = \frac{Eu'^2 + 2Fu' + G}{2\lambda u'}$$

или, вводя обозначения $\frac{E}{2\lambda} = \alpha$, $\frac{F}{2\lambda} = \beta$, $\frac{G}{2\lambda} = \gamma$,

$$\rho^2 = \alpha u' + 2\beta + \frac{\gamma}{u'}; \tag{17}$$

maximum и minimum определяются из условия

$$\frac{\partial\rho}{\partial u'} = 0,$$

которое дает

$$u' = \pm\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

Вставляя эти значения u' в выражения ρ^2, мы должны по условию получить постоянные величины; следовательно, имеем

$$2\beta+2\sqrt{\alpha\gamma}=\mathrm{const},\qquad 2\beta-2\sqrt{\alpha\gamma}=\mathrm{const},$$

откуда

$$\beta=\mathrm{const},\quad \alpha\gamma=\mathrm{const}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае имеем

$$E=2\alpha\lambda,\qquad F=2B\lambda,\qquad G=\frac{2C\lambda}{\alpha},\tag{18}$$

где α — некоторая функция, B, C — постоянные.

Для E_1, F_1, G_1 мы должны иметь аналогичные формулы:

$$E_1=2\alpha_1\lambda,\qquad F_1=2B_1\lambda,\qquad G_1=\frac{2C_1\lambda}{\alpha_1},\tag{19}$$

так как предельные значения параметра подобия для соответствия между S и S' тоже должны быть постоянны. Уравнение линий, сохраняющих подобие при соответствии между S и S_1, будет

$$\alpha u'+2\beta+\frac{\gamma}{u'}=\mathrm{const}$$

или, принимая во внимание, что $\alpha\gamma=\mathrm{const}$, $\beta=\mathrm{const}$,

$$\alpha u'=\mathrm{const}.$$

Дифференцируя, получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$u''+\frac{\partial\ln\alpha}{\partial u}u'^2+\frac{\partial\ln\alpha}{\partial v}u'=0.\tag{20}$$

Аналогично получаем для линий, сохраняющих подобие при соответствии между S и S', уравнение

$$u''+\frac{\partial\ln\alpha_1}{\partial u}u'^2+\frac{\partial\ln\alpha_1}{\partial v}u'=0.\tag{21}$$

Уравнения (20) и (21) должны быть тождественны, следовательно,

$$\frac{\partial\ln\alpha_1}{\partial u}=\frac{\partial\ln\alpha}{\partial u},\qquad \frac{\partial\ln\alpha_1}{\partial v}=\frac{\partial\ln\alpha}{\partial v},$$

откуда

$$\alpha_1=\mathrm{const}\cdot\alpha,$$

и, следовательно, коэффициенты линейного элемента S' определяются формулами

$$E_1=L\alpha\lambda,\quad F_1=M\lambda,\quad G_1=\frac{N\lambda}{\alpha},\tag{22}$$

где L, M, N — произвольные постоянные, одна из которых по-прежнему несущественна. Если мы знаем систему поверхностей S'' с двумя произвольными параметрами m, n, линейные элементы которых имеют коэффициенты

$$E_1=f(m,n)\cdot\alpha\lambda,\quad F_1=\varphi(m,n)\cdot\lambda,\quad G_1=\frac{\psi(m,n)\cdot\lambda}{\alpha},\tag{23}$$

то все поверхности S' получаются применением изгибания и гомотетического преобразования к поверхностям S''.

Из формул (22) легко видеть, что соответствие между S и S' имеет место с пропорциональностью площадей и что линии $u=\mathrm{const}$, $v=\mathrm{const}$, соответствующие линиям мнимой симметрической сети на S, пересекаются под постоянным углом (хотя следует заметить, что при действительном соответствии эти линии мнимые).

§ 5. На основании вышеизложенного легко можем решить такую задачу: пусть имеем поверхность S и на ней двоякобесконечную систему линий; требуется найти все поверхности S', которые можно привести в соответствие с поверхностью S с сохранением подобия вдоль линий данной двоякобесконечной системы. Для определенности можем предполагать, что поверхность S нам дана формулами, выражающими декартовы прямоугольные координаты ее точек в виде функций двух параметров u, v, а система линий определяется некоторым дифференциальным уравнением второго порядка между u и v. Легко видеть, что в самом общем случае все поверхности S' сведутся к поверхностям, получаемым из S гомотетическим преобразованием и изгибанием. Действительно, все эти поверхности, очевидно, служат решениями задачи, так как при изгибании и гомотетическом преобразовании подобие сохраняется вполне, а следовательно, и вдоль линий данной системы; с другой стороны, если предположим, что существует еще хоть одно решение задачи, то это будет уже поверхность, линейный элемент которой (в параметрах u, v) отличен от линейного элемента данной, и притом отношение этих линейных элементов не есть постоянная величина. В таком случае дифференциальное уравнение второго порядка, которым определяется данная система линий, очевидно, должно допускать первый интеграл (относительно u' дробная функция второй степени), который получим, если приравняем произвольному постоянному отношение линейных элементов новой поверхности и поверхности S. Понятно, что произвольное дифференциальное уравнение второго порядка, вообще говоря, не допускает такого интеграла, и, следовательно, вышеприведенные решения — единственно возможные.

Допустим теперь, что дифференциальное уравнение

$$f(u'', u', u, v) = 0, \tag{24}$$

которым определяется заданная система линий, допускает первый интеграл вида

$$\frac{Eu'^2 + 2Fu' + G}{eu'^2 + 2fu' + G} = \text{const}, \tag{25}$$

где e, f, g — коэффициенты линейного элемента поверхности S, а E, F, G — некоторые функции u, v, удовлетворяющие известным ограничениям, при которых они могут служить коэффициентами линейного элемента некоторой поверхности. Тогда какая-нибудь поверхность S_1 из числа имеющих линейный элемент

$$ds_1 = \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} \tag{26}$$

будет одной из искомых поверхностей S'.

Одинаковыми значениями параметров u, v устанавливается соответствие между S и S_1, при котором подобие сохраняется вдоль заданных на S линий. Вообще говоря, это соответствие будет такого рода, что предельные значения параметра подобия не будут сохранять одной и той же величины для всех точек (u, v), и, следовательно, на основании вышеизложенного (§ 4), все поверхности S' получатся гомотетическим преобразованием и изгибанием системы поверхностей с одним произвольным параметром γ, коэффициенты линейных элементов которых определяются формулами (14). Если окажется, что maximum и minimum параметра подобия постоянны для всех точек, то, приведя линейные элементы ds и ds_1 к мнимым симметрическим координатам поверхности S, мы должны получить между преобразованными коэффициентами линейных элементов (обозначение коэффициентов S_1 сохраняем прежнее, предполагая для S $e = g = 0$, $f = \lambda$) связь (18), и, следовательно, на основании вышеизложенного (§ 4) все поверхности S' получатся гомотетическим преобразованием и изгибанием системы поверхностей с двумя произвольными параметрами m, n, коэффициенты линейных элементов которых определяются формулами (23).

§ 6. Закончив на этом общую теорию, приступлю к некоторым ее применениям. Во-первых, рассмотрю приложение ее к тому случаю, когда имеем соответствие поверхности S с ее гауссовым шаром, т. е. соответствие поверхности с шаром радиуса, равного 1, установленное параллельными нормалями; роль поверхности S_1, таким образом, играет в данном случае гауссов шар поверхности S. Общая ортогональная сеть обращается в систему линий кривизны S; maximum и minimum параметра подобия обращаются в $1/R_1$, $1/R_2$, где R_1, R_2 — главные радиусы кривизны поверхности S. Если соответствие обращается в конформное, то поверхность S минимальная. Если две системы линий, на которых предельные значения параметра подобия равны const, совпадают в одну (в общем случае это имеет место, когда E/e есть функция G/g), то поверхность S есть поверхность Вейнгартена; в частности, как легко видеть, если соответствие имеет место с сохранением площадей, то S — поверхность постоянной кривизны. Предполагая, что одна или обе системы линий общей ортогональной сети принадлежат к линиям, сохраняющим подобие, получаем общие поверхности каналов или циклиду Дюпена; предполагая, что одно из предельных значений параметра подобия постоянно, получаем поверхности каналов в тесном смысле и т. д.

Для второго приложения рассмотрю соответствие уже не двух различных поверхностей S и S_1, а преобразование поверхности S в самое себя и постараюсь определить такие поверхности S (точнее — линейные элементы), которые допускают одночленную непрерывную группу (в смысле, употребляемом Ли) преобразований с сохранением подобия вдоль одних и тех же линий, т. е. линии, которые сохраняют подобие при одном преобразовании группы, должны сохранять подобие и при всяком другом. При этом из определения группы явствует, что при преобразованиях группы система линий, сохраняющих подобие, не преобразуется в новые системы, а только отдельные линии этой системы переходят в другие линии той же системы, т. е. эта система «допускает все преобразования группы».

Если выбрать за систему линий $u = \text{const}$ траектории группы, за систему $v = \text{const}$ любую систему, допускающую преобразования группы, то, как известно, всегда можно привести группу к каноническому виду, в котором преобразования группы будут состоять в замене v через $v + \gamma$, где γ — параметр группы, при неизменном u. Тогда условия задачи, на основании предыдущего, сведутся к требованию, чтобы для любых u, v, γ имело место соотношение

$$a(u, v + \gamma) = f(\gamma) \cdot a(u, v) + \varphi(\gamma) \cdot a(u, v + 1), \tag{27}$$

где под $a(u, v)$ следует разуметь каждый из коэффициентов линейного элемента поверхности S. В этом условии u играет роль постоянного; если его не писать явно, то получаем условие

$$a(v + \gamma) = f(\gamma) \cdot a(v) + \varphi(\gamma) \cdot a(v + 1). \tag{28}$$

Заметим еще, что вместо $v + 1$ во второй части можно написать $v + 2$, $v + 3$ и т. д. Если обе части (28) продифференцировать по v, потом по γ и исключить $a'(v + \gamma)$, то получим уравнение, которое после нескольких преобразований и дифференцирований по γ, для исключения функций аргументов v и $v + 1$, позволит нам, наконец, определить $f(\gamma)$ и $\varphi(\gamma)$; $a(v)$ определим, полагая в (28) $v = 0$ и заменяя затем γ через v; тогда получим

$$a(v) = a(0) f(v) + a(1) \varphi(v).$$

В конце концов получим квадрат линейного элемента поверхности S в виде

$$ds^2 = [A(u) e^{\alpha v} + B(u) e^{\beta v}] du^2 + 2 [A_1(u) e^{\alpha v} + B_1(u) e^{\beta v}] du\, dv + [A_2(u) e^{\alpha v} + B_2(u) e^{\beta v}] dv^2.$$

Очевидно, в этой форме заключается как частный случай линейный элемент спиральных поверхностей, что и следовало предвидеть, так как спиральные поверхности допускают подобное преобразование. Замечу, что можно искать еще иные решения поставленной выше задачи, кроме тех, которые получаются из полученной формы линейного элемента, так как в решении был оставлен без внимания случай, когда для всех преобразований группы нет одной общей ортогональной сети; в этом случае формулы (14), которые нам послужили для решения задачи, могут и не применяться. Как на пример укажу на какую-либо одночленную группу проективных преобразований плоскости с сохранением бесконечно удаленной прямой (affinitas); при всех преобразованиях этой группы подобие, очевидно, сохраняется вдоль прямых.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ[1])

ВВЕДЕНИЕ

Со времени появления классического мемуара Г а у с с а «Общие исследования о кривых поверхностях»[2]) и не менее известного трактата Л а м е «Лекции о криволинейных координатах»[3]) криволинейные координаты сделались необходимым инструментом исследования почти для всех отделов дифференциальной геометрии и для многих областей прикладной математики. Впрочем, теоретическое значение криволинейных координат не исчерпывается значением их лишь как инструмента исследования. Действительно, по существу дела теория криволинейных координат есть не что иное, как теория линий на поверхности и систем поверхностей в пространстве, а с такой точки зрения эта теория, очевидно, является одной из наиболее важных составных частей дифференциальной геометрии.

Предположим, что мы имеем какое-либо семейство линий или поверхностей; свойства этого семейства, очевидно, существенным образом определяются теми бесконечно малыми преобразованиями, бесконечным повторением которых все семейство может быть получено из какой-либо одной линии или поверхности; другими словами, для возможно более полной характеристики семейства

[1]) Уч. зап. Моск. ун-та, отд. физ-матем. 18 (1901), 1—239. Добавление к исследованию «Об одном классе ортогональных систем», там же 19 (1902), 1—3.

[2]) C. F. G a u s s, Disquisitiones generales circa superficies curvas, Comm. Soc. Göttingensis, VI, 1827 (Werke, IV).

[3]) G. L a m é, Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications, Paris, 1859.

важное значение имеют непрерывные группы (в смысле, установленном Софусом Ли) преобразований, которые допускает это семейство. В силу этого всякая система криволинейных координат существенным образом характеризуется теми непрерывными группами преобразований, которые допускают одновременно все семейства координатных линий или координатных поверхностей. Исходя из групп преобразований, обладающих теми или иными частными свойствами, будем приходить к различным частным типам систем криволинейных координат. Так, система мнимых симметрических координат на поверхности вполне характеризуется тем, что все преобразования, допускаемые ею, суть преобразования конформные; ортогональная система на поверхности, допускающая двучленную (зависящую от двух параметров) группу конформных преобразований, есть необходимо система изотермическая; система ортогонально-геодезических координат точно так же может быть характеризована свойствами соответствующей группы, как это показано в главе I части первой настоящего исследования, и т. п.

В дальнейшем я буду говорить исключительно об ортогональных системах координат, другими словами,— об ортогональных системах линий на поверхности или триортогональных системах поверхностей в пространстве.

Если воспользуемся известной кинематической интерпретацией непрерывной одночленной группы преобразований при помощи стационарного течения (сжимаемой) жидкости (см. С. Л и, Теория групп преобразований, ч. I, § 15[1])), то ортогональная система, допускающая некоторую одночленную группу G, определяется как та, вообще говоря, единственная ортогональная система, которая переносится течением жидкости, соответствующим группе G. Естественным образом возникает вопрос о тех ортогональных системах, которые переносятся течением с потенциалом скоростей и которые я поэтому предлагаю назвать системами *потенциального* типа. Возможно предвидеть, что системы эти занимают совершенно особое место среди ос-

[1]) S. L i e, Theorie der Transformationsgruppen, Unter Mitwirkung von F. Engel, Abschn. 1, 1888.

тальных и что они обладают многими интересными свойствами. Это отчасти оправдывается уже тем замечательным видом, который принимает квадрат линейного элемента поверхности или пространства в параметрах произвольной потенциальной системы. Именно, нетрудно убедиться, что коэффициенты соответствующего выражения квадрата линейного элемента суть частные производные одной функции, и обратно, потенциальные системы вполне характеризуются такой «потенциальной» формой линейного элемента.

Настоящее исследование состоит из двух частей, из которых первая посвящена потенциальным системам на поверхностях.

Глава I этой части содержит изложение общих свойств потенциальных систем (§§ 1, 2) и метода изыскания потенциальных систем данного линейного элемента (§ 3).

В главе II исследуются некоторые частные типы потенциальных систем, причем многие известные ортогональные системы оказываются частными случаями этих типов. К числу их, между прочим, относятся ортогональная система Лиувилля и ортогональная система, состоящая из геодезических кругов (§ 4).

Глава III посвящена потенциальным системам на плоскости (§ 7) и на сфере (§§ 8—10). Наиболее подробно исследованы вторые из них ввиду дальнейших приложений. Между прочим, в § 10 определены всевозможные потенциально-изотермические системы на сфере.

Главы IV и V посвящены теории поверхностей, линии кривизны которых образуют потенциальную систему. Впервые поверхности подобного рода упоминаются в заметке А. Пето[1]), посвященной некоторым частным типам систем Ламе. Я предлагаю назвать эти поверхности поверхностями *потенциального* типа.

Глава IV содержит общую теорию потенциальных поверхностей. Оказывается, что этот обширный класс поверхностей занимает совершенно особое место среди всех остальных по тем упрощениям, которые вносятся почти во все основные формулы дифференциальной геометрии в

[1]) A. Petot, Compt. rend. Acad. Sci., Paris, 1891.

применении их к этим поверхностям, а также и по многим примечательным частным свойствам, которыми обладают поверхности этого типа. Так, все три основных квадратичных дифференциальных формы потенциальной поверхности имеют «потенциальный» вид в параметрах линий кривизны (§ 11); основное и тангенциальное уравнения Лапласа (Laplace) для линий кривизны допускают общее решение (§ 12); определение линий кривизны потенциальной поверхности сводится к квадратурам (§ 13). В § 17 рассматриваются частные типы потенциальных поверхностей, упоминаемые А. Пето. § 18 содержит изложение метода преобразования, при помощи которого из каждой данной потенциальной поверхности получается бесконечный ряд потенциальных поверхностей того же сферического изображения.

Глава V посвящена изысканию некоторых частных случаев потенциальных поверхностей. Между прочим, в § 20 я довольно подробно останавливаюсь на потенциально-изотермических поверхностях, так как задача об определении изотермических поверхностей в ее общей постановке принадлежит к числу наиболее трудных задач дифференциальной геометрии, и всякое частое решение ее имеет свою цену.

Вторая часть моего исследования посвящена потенциальным системам в пространстве.

Возможно дать этим системам определение, несколько отличное по форме от того общего определения, которое было нами установлено выше. Известно, что всякая триортогональная система S в пространстве может быть преобразована в другую триортогональную систему S_1, притом так, что нормали в соответственных точках систем S и S_1 параллельны между собой. Это преобразование носит название преобразования Комбескюра (Combescure) и играет важную роль в общей теории триортогональных систем. Если, в частности, S есть система потенциального типа, то она допускает непрерывную одночленную группу преобразований Комбескюра, переводящих эту систему саму в себя, и обратно, всякая триортогональная система, допускающая непрерывную группу преобразований Комбескюра, есть система потенциального типа. Заметим, что эта группа вполне совпадает с той группой G, которая нам служила выше для определения потенциальных систем и которая соответствует течению жидкости с потенциалом скоростей, переносящему ортогональную систему.

Если мы рассмотрим одно из семейств триортогональной системы потенциального типа, то легко убедимся, что все поверхности семейства имеют одно и то же сферическое изображение линий кривизны. С этой последней точки зрения потенциальные системы рассматриваются в заметке М. Фуше «О трижды ортогональных системах поверхностей, где поверхности одного семейства допускают одно и то же сферическое изображение их линий кривизны» [1]), помещенной в Comptes rendus Парижской Академии (17 января 1898 г.). Автор выводит интересное соотношение между главными радиусами кривизны поверхностей системы и одно свойство линий, устанавливающих соответствие параллельных нормалей между поверхностями одного и того же семейства. Результаты, полученные мною в теории потенциальных триортогональных систем, отчасти помещены в заметке «Об ортогональных системах, допускающих непрерывную группу преобразований Комбескюра» [2]), напечатанной точно так же в Comptes rendus (22 октября 1900 г.).

В том же издании и под тем же заглавием появилась недавно заметка М. Фуше (26 ноября 1900 г.), в которой автор указывает, что им получены некоторые результаты по тому же вопросу, не появившиеся до сих пор в печати; в этой же заметке автор дает интересное приложение установленного мною метода преобразования потенциальных систем.

Глава I второй части настоящего исследования содержит общую теорию потенциальных систем в пространстве; между прочим, в § 1 я доказываю, что системы эти вполне характеризуются соотношениями $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ между величинами β_{ik} Дарбу, которыми определяется сферическое изображение триортогональной системы. В § 4 идет речь

[1]) M. Fouché, Sur les systèmes des surfaces triplement orthogonales où les surfaces d'une même famille admettent la même représentation sphérique de leurs lignes de courbure, Compt. rend. Acad. Sci., Paris, 1898.

[2]) См. наст. сб., стр. 285.

об определении потенциальных систем по данному сферическому изображению; при этом я устанавливаю метод для определения триортогональных систем самого общего вида по данному сферическому изображению, отличный от обычного метода Дарбу.

Сопоставление того и другого методов в случае систем потенциального типа позволяет мне (§ 5) установить метод преобразования, при помощи которого из произвольной данной системы потенциального типа получается бесконечный ряд систем того же рода, «производных» данной системы.

Глава II посвящена исследованию главнейших типов потенциальных систем, а именно: потенциальных систем, допускающих группу поступательных перемещений (§ 6), группу гомотетических преобразований (§ 7), группу преобразований с плоскими траекториями (§ 8), и, наконец, потенциальных систем, для которых ряд производных систем есть ряд периодический (§ 9).

Первые два из перечисленных типов упоминаются А. Пето [1]).

В главе III исследуются некоторые частные случаи потенциальных систем, между прочим, потенциальные системы, в состав которых входит семейство поверхностей второго порядка (§ 10).

Наконец, глава IV содержит изложение метода, при помощи которого по данному сферическому изображению потенциального типа получается бесконечный ряд сферических изображений того же рода, зависящих последовательно от большего и большего числа произвольных постоянных.

Если для первоначального сферического изображения были определены всевозможные потенциальные системы, допускающие группу гомотетических преобразований, то построение вышеупомянутого ряда сферических изображений не требует никаких интегрирований; равным образом, без всякого интегрирования определяются системы, допускающие группу гомотетических преобразований для всех последующих сферических изображений (§ 13). Потенциальные системы общего вида определяются с помощью частных квадратур (§ 15).

[1]) См. работу, указанную в сноске на стр. 167.

В настоящем исследовании мне приходится часто делать ссылки на два фундаментальных сочинения Дарбу: «Лекции по общей теории поверхностей и геометрические приложения исчисления бесконечно малых» и «Лекции по ортогональным системам и криволинейным координатам»[1]). Для удобства первое из этих сочинений я сокращенно цитирую «Darboux S.», а второе — «Darboux S. O.».

[1]) G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal, Paris, 1887—1896; 2-е изд., 1914—1925; Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes, Paris, 1897, 2-е изд., 1910.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА НА ПОВЕРХНОСТЯХ

Глава I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

§ 1. Группа преобразований, не изменяющих данной ортогональной системы; истолкование с помощью течения жидкости; случай, когда течение совершается с потенциалом скоростей

Допустим, что мы имеем на поверхности некоторую ортогональную систему, состоящую из линий $u = \text{const}$, $v = \text{const}$. Квадрат линейного элемента поверхности относительно этой системы имеет вид

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2. \tag{1}$$

Всегда возможны такие преобразования поверхности самой в себя, при которых система $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ остается без изменения, т. е. кривые семейства $u = \text{const}$ переходят одна в другую, а равным образом и кривые семейства $v = \text{const}$. Очевидно, формулы подобного преобразования должны иметь вид

$$u_1 = f(u), \quad v_1 = \varphi(v), \tag{2}$$

где u_1, v_1 — новые значения параметров u, v. Обратно, при произвольном выборе функций f и φ равенства (2) устанавливают преобразование требуемого типа. Всегда возможно из подобных преобразований составить непрерывную одночленную группу в смысле, установленном Ли, т. е. систему преобразований, зависящую от одного параметра и обладающую тем свойством, что два последовательно выполненных преобразования системы равносильны одному преобразованию той же системы. Формулы, определяющие преобразования группы, в данном случае должны иметь вид

$$\psi(u_1) = \psi(u) + t, \quad \chi(v_1) = \chi(v) + t \tag{3}$$

или же

$$\psi(u_1) = \psi(u) + t, \quad v_1 = v, \tag{4}$$

где t — произвольный параметр; это легко следует из общей теории непрерывных групп и из сделанного выше замечания о форме соотношений, устанавливающих преобразования рассматриваемого нами типа. Нетрудно и непосредственной проверкой убедиться, что преобразования, определяемые равенствами (3) или (4), действительно образуют непрерывную группу. Равенства (4), очевидно, соответствуют тому частному случаю, когда линии $v = \text{const}$ служат траекториями группы, т. е. когда точки каждой из этих линий в силу преобразований группы передвигаются по этой самой линии. Пользуясь произволом выбора параметров, мы можем ввести вместо u, v новые параметры $\psi(u)$ и $\chi(v)$, и тогда равенства (3) и (4) окончательно принимают вид

$$u_1 = u + t, \quad v_1 = v + t \tag{5}$$

и

$$u_1 = u + t, \quad v_1 = v. \tag{6}$$

Обратно, равенства (5) или (6) при *произвольном* выборе параметров u, v определяют группу преобразований, сохраняющих данную ортогональную систему. Очевидно, таких групп бесчисленное множество (соответственно бесконечному произволу в выборе параметров).

Формулам (5) или (6) можно дать простое кинематическое истолкование, указанное самим Ли. Именно, можно параметр t считать за время, u_1, v_1 — за координаты (криволинейные) движущейся частицы жидкости, u, v — за ее начальные координаты. Тогда наша группа преобразований соответствует стационарному течению жидкости

(сжимаемой) по данной поверхности, причем в рассматриваемом случае кривые $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ переносятся этим течением. Проекции скорости течения на касательные к линиям $v = \text{const}$, $u = \text{const}$ определяются соответственно формулами

$$V_u = \sqrt{E}\,\frac{du_1}{dt}, \qquad V_v = \sqrt{G}\,\frac{dv_1}{dt},$$

причем координаты u, v, входящие в выражения E и G, следует заменить через u_1 и v_1. Из равенств (5) или (6) имеем соответственно

$$\frac{du_1}{dt} = 1, \quad \frac{dv_1}{dt} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{du_1}{dt} = 1, \quad \frac{dv_1}{dt} = 0,$$

а следовательно, проекции скорости в первом случае будут

$$V_u = \sqrt{E} \quad \text{и} \quad V_v = \sqrt{G}, \tag{7}$$

а во втором

$$V_u = \sqrt{E} \quad \text{и} \quad V_v = 0. \tag{8}$$

Во всяком случае время t явно не входит в эти выражения, как это и должно быть при стационарном течении; мы можем в равенствах (7) и (8) u_1 и v_1 заменить снова через u и v, и тогда эти равенства дают проекции скорости течения во всякой точке (u, v) поверхности. В том частном случае, когда кривые $v = \text{const}$ служат траекториями группы и когда имеют место равенства (8), вся скорость течения V равна

$$V_u = \sqrt{E}$$

и направлена в каждой точке по касательной к линии $v = \text{const}$, так что семейство $v = \text{const}$ есть семейство линий тока.

Решим теперь вопрос, когда течение жидкости, переносящее линии данной ортогональной системы, будет допускать потенциал скоростей, т. е. когда это будет течение без вращения (невихревое). Условие существования потенциала скоростей заключается в том, чтобы выражение $V \cos(V, ds)\, ds$, или, иначе,

$$V_u \cdot \sqrt{E}\, du + V_v \cdot \sqrt{G}\, dv, \tag{9}$$

было полным дифференциалом. Останавливаясь сначала на том предположении, что кривые $v = \text{const}$ суть линии тока, имеем в силу (8)

$$V_u \cdot \sqrt{E}\, du + V_v \cdot \sqrt{G}\, dv = E\, du,$$

а следовательно, E должно быть функцией одного параметра u. Полагая $E = U'$, где U — функция аргумента u, имеем

$$V \cos(V, ds)\, ds = dU.$$

Потенциал скоростей в этом случае, следовательно, равен U, скорость

$$V = V_u = \sqrt{E} = \sqrt{U'}.$$

Квадрат линейного элемента поверхности принимает вид

$$ds^2 = U' du^2 + G\, dv^2, \tag{10}$$

откуда заключаем, что линии $v = \text{const}$ геодезические, а линии $u = \text{const}$ — их ортогональные траектории. Таким образом, на всякой поверхности возможно течение жидкости без вращения, для которого семейством линий тока служит произвольное семейство геодезических линий и которым переносятся ортогональные траектории этого семейства (линии уровня).

Обращаясь к общему случаю, мы имеем в силу равенств (7)

$$V \cos(V, ds)\, ds = E\, du + G\, dv. \tag{11}$$

Для существования потенциала скоростей необходимо, чтобы выражение $E\, du + G\, dv$ было полным дифференциалом некоторой функции $\omega(u, v)$, т. е. чтобы существовало тождество

$$E\, du + G\, dv = d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial u} du + \frac{\partial \omega}{\partial v} dv, \tag{12}$$

откуда

$$E = \frac{\partial \omega}{\partial u}, \quad G = \frac{\partial \omega}{\partial v}. \tag{13}$$

Квадрат линейного элемента поверхности принимает вид

$$ds^2 = \frac{\partial \omega}{\partial u} du^2 + \frac{\partial \omega}{\partial v} dv^2. \tag{14}$$

Из предыдущих рассуждений, наоборот, следует, что всякая ортогональная система, для которой квадрат линейного элемента поверхности соответственным выбором параметров u, v может быть приведен к виду (14), переносится течением жидкости с потенциалом скоростей ω.

Подтвердим это, исходя из других соображений. Заметим прежде всего, что линии $\omega = \text{const}$ служат для упомянутого течения линиями уровня, и, следовательно, линии тока, как ортогональные к линиям уровня, определяются из уравнения

$$\Delta(\omega, \varphi) = 0, \tag{15}$$

где $\Delta(\psi, \chi)$ — знак промежуточного дифференциального параметра, т. е. для $ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$

$$\Delta(\psi, \chi) = \frac{E \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial \chi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \chi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial \chi}{\partial u}\right) + G \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \chi}{\partial u}}{EG - F^2}.$$

В данном случае уравнение (15) принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0,$$

откуда $\varphi = \varphi(u - v)$; следовательно, семейство линий тока определяется уравнением

$$u - v = \text{const}, \tag{16}$$

что вполне согласно с предыдущим, так как из формул (5), очевидно, можно вывести

$$u_1 - v_1 = u - v,$$

и, следовательно, линии $u - v = \text{const}$ у нас были траекториями группы, сохраняющей данную ортогональную систему.

Скорость течения V определяется из равенства

$$V^2 = \Delta(\omega), \tag{17}$$

где Δ — знак первого дифференциального параметра, т. е. для

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$$

$$\Delta\varphi = \frac{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}.$$

В данном случае имеем

$$V^2 = \frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{\partial\omega}{\partial v}. \qquad (18)$$

Принимая во внимание, что направление скорости совпадает с направлением касательной к линии $u - v = \text{const}$, легко получаем проекции скорости на касательные к координатным линиям:

$$V_u = \sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}}, \qquad V_v = \sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial v}}, \qquad (19)$$

что вполне согласно с предыдущим.

Если мы имеем семейство линий $\psi = \text{const}$, переносимых течением, то отрезки линий тока $u - v = \text{const}$, заключающиеся между каждой из линий $\psi = \text{const}$ и бесконечно близкой линией того же семейства, должны быть пропорциональны скоростям течения в точках линии $\psi = \text{const}$; притом очевидно, обратно, что если это условие выполнено, то семейство $\psi = \text{const}$ переносится данным течением. Проектируя отрезки линий тока на ортогональные траектории семейства $\psi = \text{const}$, можем выразить предыдущее условие в другой форме: расстояния между линией $\psi = \text{const}$ и смежной с ней должны быть пропорциональны проекциям скоростей в точках линий $\psi = \text{const}$ на ортогональные траектории семейства $\psi = \text{const}$. Замечая еще, что расстояния между линией $\psi = \text{const}$ и смежной с ней, очевидно, обратно пропорциональны значениям производной $d\psi/dn$ функции ψ по нормали, т. е., иначе, обратно пропорциональны $\sqrt{\Delta\psi}$, мы можем написать

$$V\cos(V, n) = \frac{F(\psi)}{\sqrt{\Delta\psi}},$$

или, так как

$$\cos(V, n) = \cos(\omega, \psi) = \frac{\Delta(\omega, \psi)}{\sqrt{\Delta\omega\,\Delta\psi}} \quad \text{и} \quad V = \sqrt{\Delta\omega},$$

то имеем окончательно

$$\Delta(\omega, \psi) = F(\psi). \qquad (20)$$

Уравнение (20) определяет все семейства, переносимые течением жидкости. Заменяя ψ функцией от ψ, всегда можем

уравнение это привести к виду

$$\Delta(\omega, \psi) = 1. \qquad (21)$$

Подставляя вместо ψ или u, или v, видим, что уравнение (21) удовлетворяется; следовательно, мы подтвердили окончательно, что ортогональная система $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ переносится течением с потенциалом скоростей ω.

Таким образом, ортогональные системы, для которых квадрат линейного элемента поверхности может быть приведен к виду

$$ds^2 = \frac{\partial\omega}{\partial u}du^2 + \frac{\partial\omega}{\partial v}dv^2, \qquad (14)$$

занимают особое место среди всех остальных; мы их будем называть системами *потенциального* типа; параметры u, v, для которых квадрат линейного элемента принимает вид (14), будем называть *потенциальными* параметрами, а функцию ω — *основной функцией* системы.

Заменяя u функцией от u, v функцией от v, получим для квадрата линейного элемента поверхности выражения

$$ds^2 = \frac{\partial\omega}{\partial u}U\,du^2 + \frac{\partial\omega}{\partial v}V\,dv^2, \qquad (22)$$

где U и V — функции соответственно одного u и одного v. Таким образом, при произвольном выборе параметров, коэффициенты квадрата линейного элемента относительно системы потенциального типа имеют вид

$$E = U\frac{\partial\omega}{\partial u}, \qquad G = V\frac{\partial\omega}{\partial v}. \qquad (23)$$

Из равенств (23) получаем

$$\frac{\partial E}{\partial v} : \frac{\partial G}{\partial u} = U : V; \qquad (24)$$

это есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы ортогональная ситема $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ была системой потенциального типа.

Посмотрим, насколько произволен выбор потенциальных параметров при данной системе потенциального типа. Если

$$ds^2 = \frac{\partial\omega}{\partial u}du^2 + \frac{\partial\omega}{\partial v}dv^2$$

и если u_1 и v_1 — новые потенциальные параметры, то мы должны иметь вместе с тем

$$ds^2 = \frac{\partial\omega_1}{\partial u_1}du_1^2 + \frac{\partial\omega_1}{\partial v_1}dv_1^2,$$

причем u и v суть функции соответственно от u_1 и от v_1. Таким образом, получим

$$\frac{\partial\omega}{\partial u}\left(\frac{du}{du_1}\right)^2 = \frac{\partial\omega_1}{\partial u_1}, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial v}\left(\frac{dv}{dv_1}\right)^2 = \frac{\partial\omega_1}{\partial v_1}$$

или

$$\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{du}{du_1} = \frac{\partial\omega_1}{\partial u}, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{dv}{dv_1} = \frac{\partial\omega_1}{\partial v}. \tag{25}$$

Дифференцируя первое равенство по v, второе по u и вычитая, получим

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\frac{du}{du_1} = \frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\frac{dv}{dv_1}, \tag{26}$$

откуда

$$\frac{du_1}{du} = \frac{dv_1}{dv} = \text{const} = a,$$

и, следовательно,

$$u_1 = au + \alpha, \qquad v_1 = av + \beta; \tag{27}$$

из равенств (25) легко получим, кроме того,

$$\omega_1 = \frac{1}{a}\omega + \gamma, \tag{28}$$

причем α, β, γ — постоянные.

Легко убедиться, что все четыре постоянных a, α, β, γ не имеют существенного значения. Действительно, проекции скорости V_u, V_v при потенциале скоростей ω_1 получают значения

$$V_u = \sqrt{\frac{\partial\omega_1}{\partial u_1}} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}}, \qquad V_v = \sqrt{\frac{\partial\omega_1}{\partial v_1}} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial v}},$$

отличающиеся от прежних только постоянным множителем; следовательно, геометрическая картина течения остается прежней; все отличие заключается лишь в величине скорости, но и этого различия мы можем избежать соответственным выбором единиц времени.

Итак, по данной системе потенциального типа вполне определяется соответствующее течение или, точнее, соответствующая группа преобразований. Исключение имеем в случае $\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} = 0$. Тогда равенство (26) само собою удовлетворяется, $\frac{du_1}{du}$ и $\frac{dv_1}{d}$ остаются совершенно произвольными, и, следовательно, имеем бесчисленное множество течений, переносящих данную систему потенциального типа. Если $\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} = 0$, то

$$\omega = U + V, \tag{29}$$

$$ds^2 = U'du^2 + V'dv^2; \tag{30}$$

следовательно, подобные потенциальные системы возможны лишь на развертывающихся поверхностях и состоят из линий, которые при развертывании поверхности в плоскость переходят в две взаимно перпендикулярные системы параллельных прямых.

На основании всего изложенного в этом параграфе системы потенциального типа обладают свойствами, которые принадлежат также системе, состоящей из семейства геодезических линий и из ортогональных траекторий этого семейства. С такой точки зрения эта последняя система является частным, предельным случаем потенциальных систем, хотя следует заметить, что форма линейного элемента поверхности существенно различна для собственно потенциальной системы и для системы, состоящей из семейства геодезических линий и из их ортогональных траекторий.

§ 2. Основные свойства систем потенциального типа

Возьмем на данной поверхности бесконечно малую жидкую площадку с центром в точке (u, v); ее можно предполагать (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) в касательной плоскости поверхности. В силу общих свойств течения жидкости с потенциалом скоростей передвижение площадки за бесконечно малый элемент времени сводится к поступательному перемещению со скоростью центра (u, v), к вращению около оси, лежащей в плоскости площадки, т. е. в касательной плоскости, и к так называемому внутреннему движению площадки (см., например, Н. Е. Жуковский, Кинематика жидкого тела, гл. I). При «внутреннем» движении сохраняют свое положение те два взаимно перпендикулярных радиуса-вектора площадки, которые остаются перпендикулярными при рассматриваемом перемещении площадки; в данном случае это будет, очевидно, касательные к линиям $u =$ $= \text{const}$, $v = \text{const}$. Таким образом, если мы будем рассматривать неизменяемую систему, образуемую в каждой точке поверхности касательной плоскостью с двумя лежащими на ней касательными к линиям $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, то можно сказать, что при течении жидкости эта система перемещается без вращения около нормали к поверхности. Иначе говоря, *ортогональная система потенциального типа допускает группу преобразований, в силу которой касательные плоскости перемещаются без вращения около нормали.* При этом касательную плоскость опять понимаем как неизменяемую систему, образованную касательными к линиям $u = \text{const}$, $v = \text{const}$; можно было бы так же рассматривать трехгранный угол, образованный двумя упомянутыми касательными и нормалью; при передвижении точки поверхности по траектории группы трехгранный угол передвигается без вращения около нормали. Все предыдущие рассуждения в равной мере относятся к собственно потенциальным системам и к системе, образованной семейством геодезических линий и их ортогональными траекториями.

Возможно вывести вышеприведенное свойство систем потенциального типа без помощи соображений, взятых из области кинематики жидкости. Мы сделаем этот вывод для собственно потенциальных систем.

Пусть квадрат линейного элемента поверхности имеет вид

$$ds^2 = \frac{\partial\omega}{\partial u}du^2 + \frac{\partial\omega}{\partial v}dv^2. \tag{14}$$

Согласно Дарбу (Darboux S., т. II, кн. V), поверхность определяется линейным элементом и системою величин p, q, r, p_1, q_1, r_1, которые суть проекции на касательные к кривым $v = \text{const}$, $u = \text{const}$ и на нормаль соответственно двух вращений; первое вращение (p, q, r) есть вращение трехгранного угла, образованного двумя вышеупомянутыми касательными и нормалью при передвижении точки поверхности по линии $v = \text{const}$; второе вращение (p_1, q_1, r_1) есть вращение того же трехгранного угла при передвижении точки по линии $u = \text{const}$. Вращение того же угла при передвижении по какой-нибудь линии определяется тремя проекциями

$$p\frac{du}{dt} + p_1\frac{dv}{dt}, \quad q\frac{du}{dt} + q_1\frac{dv}{dt}, \quad r\frac{du}{dt} + r_1\frac{dv}{dt}. \tag{31}$$

В случае перемещения по траектории группы $u - v =$ $= \text{const}$ имеем

$$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

и можем даже положить

$$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = 1,$$

если предполагаем, что уравнения движения имеют вид

$$u = u_0 + t, \quad v = v_0 + t,$$

т. е. если считаем, что время равно параметру группы. В таком случае проекции вращения принимают вид

$$p + p_1, \quad q + q_1, \quad r + r_1. \tag{32}$$

В силу формул Дарбу r и r_1 всецело определяются по линейному элементу поверхности $ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$, а именно:

$$r = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial v}, \quad r_1 = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\frac{\partial G}{\partial u}. \tag{33}$$

Полагая $E = \frac{\partial\omega}{\partial u}$, $G = \frac{\partial\omega}{\partial v}$, получаем

$$r = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}}}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}, \quad r_1 = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}}}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}, \tag{34}$$

и, следовательно,

$$r + r_1 = 0, \tag{35}$$

откуда заключаем, что трехгранный угол, образуемый нормалью и касательными к линиям $v = \text{const}$, $u = \text{const}$, при движении точки по линии $u - v = \text{const}$ перемещается без вращения около нормали.

Обратно, если мы предположим, что группа преобразований, сохраняющих данную ортогональную систему $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, обладает вышеупомянутым свойством, то, предполагая равенства, устанавливающие преобразования группы, в форме

$$u_1 = u + t, \quad v_1 = v + t,$$

мы должны иметь необходимо

$$r + r_1 = 0, \tag{35}$$

так как $r + r_1$ есть проекция на нормаль вращения трехгранного угла при передвижении точки по линии $u - v = \text{const}$. В силу формул (33) из равенства (35) получаем

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u},$$

откуда следует, что система $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ есть система потенциального типа. Как известно, группа преобразований вполне определяется бесконечно малым преобразованием группы, из которого все остальные получаются как бы «бесконечным повторением» его. Бесконечно малое преобразование группы соответствует бесконечно малому перемещению касательной плоскости или трехгранного угла, которым мы пользовались выше; все перемещение разлагается на поступательное перемещение со скоростью точки поверхности и на бесконечно малое врещение около оси, которая, очевидно, определяется как прямая пересечения касательной плоскости в точке (u, v) с касательной плоскостью в бесконечно близкой точке, взятой по направлению линии $u - v = \text{const}$. Как известно, эта прямая пересечения есть прямая, сопряженная (относительно поверхности) направлению касательной к линии $u - v = \text{const}$; таким образом, в каждой точке поверхности прямая, сопряженная касательной к траектории группы, служит осью вращения касательной плоскости или, можно сказать, элементарной площадки поверхности при преобразованиях группы. Если в каждой точке поверхности построим соответственную ось, то линии, огибаемые этими прямыми, образуют семейство, сопряженное семейству траекторий $u - v = \text{const}$.

Выведем теперь свойство потенциальной системы, аналогичное свойству изотермической сети. Для этой цели предположим, что на поверхности проведены линии семейства $u = \text{const}$ и семейства $v = \text{const}$ так, что параметры u и v получают бесконечно малые равные приращения при переходе к смежной кривой в том и другом семействе; другими словами, рассматривая элемент поверхности, будем полагать $du = dv$. При таком предположении, если система $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ изотермическая, то поверхность разбивается кривыми системы на бесконечно малые квадраты; если же данная система потенциальная, то поверхность разбивается ею на бесконечно малые прямоугольники, стороны которых соответственно равны $\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}}\,du$ и $\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial v}}\,dv$. Обозначая сторону, лежащую на линии $v = \text{const}$, через s_v, а сторону, лежащую на линии $u = \text{const}$, через s_u, имеем на основании предшествующего

$$s_v : s_u = \sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}} : \sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial v}}. \tag{36}$$

С другой стороны, обозначая радиусы геодезической кривизны линий $v = \text{const}$, $u = \text{const}$ соответственно через ρ_v и ρ_u, имеем (см. Б и а н к и, Лекции по дифференциальной геометрии, гл. VI, § 75 [1]))

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_v} &= -\frac{1}{\sqrt{EG}}\cdot\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = -\frac{1}{2\frac{\partial\omega}{\partial u}\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial v}}}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\\
\frac{1}{\rho_u} &= -\frac{1}{\sqrt{EG}}\cdot\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v} = -\frac{1}{2\frac{\partial\omega}{\partial v}\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}}}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}.
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Сопоставляя равенства (36) и (37), получаем

$$s_v : s_u = \rho_v : \rho_u. \tag{38}$$

[1]) B i a n c h i L., Vorlesungen über Differenzialgeometrie, Leipzig, 1899.

Таким образом, *поверхность разбивается линиями потенциальной системы на бесконечно малые прямоугольники, стороны которых пропорциональны соответственным радиусам геодезической кривизны.*

Если в точке (u, v) проведем радиусы ρ_v и ρ_u, то первый из них пойдет по касательной к линии $u = \text{const}$, а второй — по касательной к $v = \text{const}$; прямоугольник, образуемый этими радиусами, очевидно, подобен бесконечно малому прямоугольнику, о котором шла речь выше.

Нетрудно убедиться, что свойство потенциальных систем, выведенное нами, вполне характеризует их. Действительно, если мы допустим, что ортогональная система $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ разбивает поверхность на бесконечно малые прямоугольники, стороны которых пропорциональны соответственным радиусам геодезической кривизны, то, предполагая квадрат линейного элемента поверхности в виде

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

получим

$$\sqrt{E} : \sqrt{G} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} : -\frac{1}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}$$

или

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial E}{\partial v},$$

откуда следует, что система $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ потенциальная.

Рассмотрим в касательной плоскости поверхности прямую l, соединяющую центры геодезической кривизны линий $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ для точки (u, v). Так как эта прямая образует на касательных к линиям $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ отрезки, соответственно равные ρ_v и ρ_u, то, обозначая через φ угол прямой l с положительным направлением касательной к линии $v = \text{const}$, имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\rho_v}{\rho_u} = -\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}} : \sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial v}} \tag{39}$$

(см. Бианки, Лекции по дифференциальной геометрии, гл. III, § 34). С другой стороны, обозначая через ψ угол, образованный направлением линии $u - v = \text{const}$ с положительным направлением линии $v = \text{const}$, имеем на основании общих формул теории поверхности

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{dv}{du} = \left(\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial v}} : \sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}}\right)\frac{dv}{du}$$

(там же, гл. III, § 34).

В данном случае в силу $u - v = \text{const}$ имеем $dv = du$ и, следовательно, окончательно

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial v}} : \sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}}. \tag{40}$$

Сопоставляя равенства (39) и (40), получаем

$$\operatorname{tg}\varphi\,\operatorname{tg}\psi = -1,$$

т. е. *в каждой точке поверхности касательная к траектории группы $u - v = \text{const}$ перпендикулярна к соответствующей прямой l, соединяющей центры геодезической кривизны линий $v = \text{const}$, $u = \text{const}$ потенциальной системы.*

Можно также сказать, что в каждой точке *касательная к линии $\omega = \text{const}$ параллельна прямой l.*

Предположим обратно, что выведенное нами свойство имеет место для какой-нибудь ортогональной системы $u = \text{const}$, $v = \text{const}$. Соответственным выбором параметров всегда можно равенства, устанавливающие преобразования группы, привести к виду

$$u_1 = u + t, \quad v_1 = v + t,$$

как это мы видели в § 1. В таком предположении траекториями группы служат линии

$$u - v = \text{const}.$$

Если квадрат линейного элемента поверхности имеет вид

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

то, беря в качестве ψ и φ те же самые углы, которые мы выше обозначали теми же буквами, будем иметь

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{\rho_v}{\rho_u} = -\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} : \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}.$$

По условию $\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi = -1$, а следовательно, имеем

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial E}{\partial v},$$

откуда следует, что система $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ потенциальная.

Выведенное нами свойство, очевидно, имеет место и для предельного случая потенциальной системы, т. е. системы, состоящей из семейства геодезических линий и из ортогональных траекторий этого семейства. Прямые l в этом случае параллельны касательным ортогональных траекторий.

§ 3. Изыскание потенциальных систем данного линейного элемента

Так как ортогональная система потенциального типа вполне характеризуется видом квадрата линейного элемента поверхности

$$ds^2 = \frac{\partial \omega}{\partial u} du^2 + \frac{\partial \omega}{\partial v} dv^2 \tag{41}$$

относительно этой системы, то, очевидно, при всяком изгибании поверхности потенциальные системы остаются системами того же типа. Возникает, таким образом, вопрос: как определить все потенциальные системы данного линейного элемента?

Предполагая квадрат линейного элемента в произвольных параметрах u, v

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2, \tag{42}$$

обозначим через ω основную функцию одной из потенциальных систем, через φ и ψ соответствующие потенциальные параметры. Тогда квадрат линейного элемента относительно системы $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$ принимает вид

$$ds^2 = \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} d\varphi^2 + \frac{\partial \omega}{\partial \psi} d\psi^2. \tag{43}$$

Составляя промежуточные дифференциальные параметры для функций ω, φ, ψ относительно последнего вида квадрата линейного элемента (43), легко убеждаемся в

существовании следующих равенств:

$$\Delta(\omega, \varphi) = 1, \quad \Delta(\omega, \psi) = 1, \quad \Delta(\varphi, \psi) = 0. \tag{44}$$

По свойству дифференциальных параметров эти же равенства имеют место и в предположении данного произвольного вида квадрата линейного элемента (42), т. е. в параметрах u, v. Таким образом, получаем три уравнения первого порядка с частными производными, определяющие ω, φ, ψ как функции u, v. Легко убедиться, что всякое решение системы (44) приводит к ортогональной системе потенциального типа. Действительно, последнее из уравнений (44) есть условие ортогональности семейств $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$; что касается первых двух, то мы уже видели в § 1, что когда эти уравнения имеют место, семейства $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$ переносятся течением жидкости с потенциалом скоростей ω. Могло бы еще возникнуть сомнение, будут ли φ и ψ совпадать с потенциальными параметрами или будут только функциями их, но это сомнение разрешится, если заметим, что в системе параметров φ, ψ уравнения

$$\Delta(\omega, \varphi) = 1, \quad \Delta(\omega, \psi) = 1$$

удовлетворяются только при том предположении, что квадрат линейного элемента имеет вид (43).

Если из первых двух уравнений системы (44) исключим ω, то получим вместе с третьим уравнением два уравнения, связывающие функции φ и ψ. Можно с помощью дифференциальных параметров написать оба уравнения, не производя на самом деле исключения. Действительно, в параметрах φ, ψ имеем для квадрата линейного элемента выражение (43), или

$$ds^2 = E\, d\varphi^2 + G\, d\psi^2$$

при

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = \frac{\partial G}{\partial \psi}. \tag{45}$$

Равенство (45) можно написать при помощи дифференциальных параметров в следующем виде:

$$\frac{\Delta\left(\psi, \frac{1}{\Delta \varphi}\right)}{\Delta \psi} = \frac{\Delta\left(\varphi, \frac{1}{\Delta \psi}\right)}{\Delta \varphi}, \tag{46}$$

так как, очевидно,

$$\Delta\varphi = \frac{1}{E}, \qquad \Delta\psi = \frac{1}{G},$$

$$\Delta(\varphi, f) = \frac{\frac{\partial f}{\partial\varphi}}{E}, \qquad \Delta(\psi, f) = \frac{\frac{\partial f}{\partial\psi}}{G}.$$

Равенство (46) вместе с условием ортогональности семейств $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$

$$\Delta(\varphi, \psi) = 0$$

имеет место в любых координатах u, v и составляет необходимое и достаточное условия для того, чтобы система $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$ была системой потенциального типа и функции φ и ψ — потенциальными параметрами. Пользуясь общим свойством промежуточного дифференциального параметра

$$\Delta(\alpha, f(\beta)) = f'(\beta)\,\Delta(\alpha, \beta),$$

можем преобразовать равенство (46) и окончательно получаем следующие два уравнения для определения потенциальных параметров φ и ψ как функций произвольных параметров u, v:

$$\begin{gathered}\Delta\psi\,\Delta(\psi, \Delta\varphi) = \Delta\varphi\,\Delta(\varphi, \Delta\psi),\\ \Delta(\varphi, \psi) = 0.\end{gathered} \tag{47}$$

Если бы мы пожелали найти уравнения, определяющие оба семейства потенциальной системы, но не задавались бы целью определить соответствующие потенциальные параметры, то нам следовало бы лишь заменить в уравнениях (47) φ и ψ соответственно произвольными функциями аргументов φ_1 и ψ_1, где φ_1 и ψ_1 — новые параметры. Производя упрощения и отбрасывая значки при φ_1 и ψ_1, получим уравнения

$$\begin{gathered}F(\psi)\,\Delta\psi\,\Delta(\psi, \Delta\varphi) = \Phi(\varphi)\,\Delta\varphi\,\Delta(\varphi, \Delta\psi),\\ \Delta(\varphi, \psi) = 0,\end{gathered} \tag{48}$$

где F и Φ — произвольные функции.

Если из трех уравнений системы (44) исключим φ и ψ, то получим одно уравнение третьего порядка с частными производными для определения ω.

Мы составим это уравнение при помощи дифференциальных параметров. Для этой цели отнесем квадрат линейного элемента к потенциальным параметрам φ, ψ, отчего он примет вид (43), и будем составлять ряд дифференциальных параметров функции ω, причем для краткости будем полагать

$$\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} = p, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\psi} = q, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2} = r, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi\,\partial\psi} = s, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial\psi^2} = t$$

и операцию $\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial\psi}$ будем обозначать символом δ. В этом предположении имеем

$$\Delta\omega = \delta\omega = p + q, \qquad \Delta(\omega, f) = \delta f, \tag{49}$$

где f — произвольная функция. На основании второго из равенств (49)

$$\Delta(\omega, \Delta\omega) = \delta\Delta\omega = \delta(p + q) = \delta p + \delta q. \tag{50}$$

Далее составляем $\Theta(\omega, \Delta\omega)$ и $\Delta_2\omega$, причем в произвольных координатах u, v

$$\Theta(f, \chi) = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}, \tag{51}$$

$$\Delta_2 f = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial f}{\partial u} - F\frac{\partial f}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial f}{\partial v} - F\frac{\partial f}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right)\right\}. \tag{52}$$

Получаем

$$\Theta(\omega, \Delta\omega) = \frac{p(s + t) - q(r + t)}{\sqrt{pq}} = \frac{p\delta q - q\delta p}{\sqrt{pq}}, \tag{53}$$

$$\Delta_2\omega = \frac{1}{\sqrt{pq}}\,\delta\sqrt{pq} = \delta\ln\sqrt{pq} = \frac{p\delta q + q\delta p}{2pq}. \tag{54}$$

В силу второго из равенств (49) равенство (54) можно написать в следующем виде:

$$\Delta_2\omega = \frac{1}{2}\Delta(\omega, \ln pq) =$$
$$= \frac{1}{2pq}\Delta(\omega, pq) = -\frac{pq}{2}\Delta\left(\omega, \frac{1}{pq}\right). \quad (55)$$

Остается выразить pq через дифференциальные параметры функции ω. Для этой цели равенства (50), (53) и (54) пишем в виде

$$\begin{aligned} \delta q + \delta p &= \Delta(\omega, \Delta\omega), \\ p\delta q + q\delta p &= 2pq\,\Delta_2\omega, \\ p\delta q - q\delta p &= \sqrt{pq}\,\Theta(\omega, \Delta\omega) \end{aligned}$$

и исключаем из них δq, δp. Получаем

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \Delta(\omega, \Delta\omega) \\ p & q & 2pq\,\Delta_2\omega \\ p & -q & \sqrt{pq}\,\Theta(\omega, \Delta\omega) \end{vmatrix} = 0$$

или

$$-2pq\,\Delta(\omega, \Delta\omega) + 2pq(p+q)\Delta_2\omega -$$
$$- \sqrt{pq}\,(p-q)\,\Theta(\omega, \Delta\omega) = 0.$$

Замечая, что

$$p + q = \Delta\omega$$

и

$$p - q = \sqrt{(p+q)^2 - 4pq} = \sqrt{(\Delta\omega)^2 - 4pq},$$

находим из предыдущего равенства

$$\frac{1}{pq} = 4\left\{\frac{\Delta\omega\,\Delta_2\omega - \Delta(\omega, \Delta\omega)}{\Theta(\omega, \Delta\omega)\,\Delta\omega}\right\}^2 + 4\,\frac{1}{(\Delta\omega)^2}.$$

Подставляя это выражение $1/pq$ в равенство (55), после деления его на $4pq$ имеем

$$\Delta_2\omega\left[\frac{1}{(\Delta\omega)^2} + \left\{\frac{\Delta\omega\,\Delta_2\omega - \Delta(\omega, \Delta\omega)}{\Theta(\omega, \Delta\omega)\cdot\Delta\omega}\right\}^2\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\Delta\left(\omega, \frac{1}{(\Delta\omega)^2} + \left\{\frac{\Delta\omega\,\Delta_2\omega - \Delta(\omega, \Delta\omega)}{\Theta(\omega, \Delta\omega)\cdot\Delta\omega}\right\}^2\right) = 0. \quad (56)$$

Это равенство имеет место в произвольных координатах u, v и представляет собой уравнение третьего порядка с частными производными, служащее для определения функции ω. Пользуясь свойствами промежуточного параметра

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha, f(\beta)) &= f'(\beta)\cdot\Delta(\alpha, \beta), \\ \Delta(\alpha, f(\alpha)) &= f'(\alpha)\cdot\Delta\alpha, \\ \Delta(\alpha, f(\beta, \gamma)) &= \frac{\partial f}{\partial\beta}\Delta(\alpha, \beta) + \frac{\partial f}{\partial\gamma}\Delta(\alpha, \gamma), \end{aligned}$$

можем значительно упростить уравнение (56) и окончательно получим его в следующем виде:

$$[1 + \sigma^2]\,\Theta(\omega, \Delta\omega) + \Delta\omega\cdot\Delta(\omega, \sigma) = 0, \quad (57)$$

где для сокращения положено

$$\sigma = \frac{\Delta\omega\cdot\Delta_2\omega - \Delta(\omega, \Delta\omega)}{\Theta(\omega, \Delta\omega)}. \quad (58)$$

Раз определена основная функция ω, течение жидкости, или, иначе, группа преобразований, вполне известны, а следовательно, вообще говоря, вполне определяется соответствующая потенциальная система как ортогональная система, сохраняющаяся при преобразованиях группы. Определение параметров φ и ψ, раз найдена основная функция ω, можно вести так: исключая ψ из второго и третьего уравнений системы

$$\Delta(\omega, \varphi) = 1, \quad \Delta(\omega, \psi) = 1, \quad \Delta(\varphi, \psi) = 0, \quad (44)$$

получаем уравнение второго порядка с частными производными для функции φ; кроме того, имеем первое из уравнений (44). Определение φ из этих двух уравнений приводится в общем случае [1]), как нетрудно усмотреть, к квадратуре; функция ψ определяется затем тоже квадратурой из второго и третьего уравнений системы (44). Постоянные, вводимые квадратурами, не имеют существенного значения, так как прибавляются к потенциальным параметрам φ и ψ.

[1]) Частный случай, когда одной данной функции ω соответствуют различные потенциальные системы, подробно разобран в § 5 первой части моего исследования.

Таким образом, на всякой поверхности существует бесчисленное множество потенциальных систем, причем степень произвола в выборе системы соответствует степени произвола общего интеграла уравнения третьего порядка с частными производными по двум переменным, другими словами — степени произвола трех произвольных функций одного аргумента.

Из трех уравнений (44) можно также исключить функции ω, ψ, и тогда получим одно уравнение третьего порядка, определяющее потенциальный параметр φ как функцию u, v. Для вывода этого уравнения можем поступить совершенно так же, как поступали для вывода уравнения (57). В результате получаем

$$\frac{\Theta(\varphi, \Delta\varphi)}{(\Delta\varphi)^{3/2}} + 2\Delta\left(\varphi, \frac{\Theta(\varphi, \Delta\varphi)}{\sqrt{\Delta\varphi}\cdot[\Delta(\varphi, \Delta\varphi) - 2\Delta\varphi\, \Delta_2\varphi]}\right) = 0. \tag{59}$$

Замечая, что радиус геодезической кривизны ρ_φ кривой $\varphi = \text{const}$ определяется из равенства

$$\frac{1}{\rho_\varphi} = \frac{\Delta(\varphi, \Delta\varphi) - 2\Delta\varphi\, \Delta_2\varphi}{2\Delta\varphi\, \sqrt{\Delta\varphi}},$$

можем то же уравнение написать в следующем виде:

$$\frac{\Theta(\varphi, \Delta\varphi)}{(\Delta\varphi)^{3/2}} + 2\Delta\left(\varphi, \frac{\Theta(\varphi, \Delta\varphi)\, \rho_\varphi}{2(\Delta\varphi)^2}\right) = 0,$$

или

$$2\Theta\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right) + \Delta\left(\varphi, \rho_\varphi\Theta\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)\right) = 0. \tag{60}$$

Уравнениями (44), определяющими функции ω, φ, ψ, воспользуемся, между прочим, для определения вида линейного элемента относительно ортогональной системы, образуемой семейством $\omega = \text{const}$ и траекториями группы.

Если положим

$$\xi = \varphi - \psi, \tag{61}$$

то уравнение семейства траекторий будет $\xi = \text{const}$. Предположим, что квадрат линейного элемента относительно системы $\omega = \text{const}$, $\xi = \text{const}$ имеет вид

$$ds^2 = E\, d\omega^2 + G\, d\xi^2, \tag{62}$$

и напишем уравнения (44) в этом предположении. Для удобства введем еще обозначение

$$\varphi + \psi = f(\xi, \omega), \tag{63}$$

так что

$$\varphi = \frac{1}{2}(f + \xi), \qquad \psi = \frac{1}{2}(f - \xi).$$

Первые два из уравнений (44) принимают вид

$$\Delta(\omega, f) + \Delta(\omega, \xi) = 2,$$
$$\Delta(\omega, f) - \Delta(\omega, \xi) = 2,$$

откуда следует

$$\Delta(\omega, \xi) = 0, \qquad \Delta(\omega, f) = 2.$$

Первое из этих равенств выражает лишь, что семейства $\omega = \text{const}$, $\xi = \text{const}$ взаимно ортогональны, и потому тождественно удовлетворяется при той форме линейного элемента, которую мы предположили. Второе имеет вид

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial \omega}}{E} = 2,$$

откуда получаем

$$E = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \omega}. \tag{64}$$

Наконец, последнее из уравнений (44) дает

$$\Delta(f + \xi, f - \xi) = 0 = \Delta(f) - \Delta(\xi),$$

или в раскрытом виде

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)^2}{E} + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2}{G} - \frac{1}{G} = 0.$$

В силу равенства (64) отсюда получаем

$$G = \frac{1}{2}\,\frac{1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial \omega}}, \tag{65}$$

и, следовательно, квадрат линейного элемента относительно системы $\omega = \text{const}$, $\xi = \text{const}$ имеет вид

$$ds^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial f}{\partial \omega} d\omega^2 + \frac{1-\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial \omega}} d\xi^2\right\}. \qquad (66)$$

При этом из всего предыдущего явствует, что f может быть произвольной функцией аргументов ω, ξ.

Глава II

ЧАСТНЫЕ ТИПЫ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

§ 4. Изотермические потенциальные системы

Если ортогональная система $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, относительно которой квадрат линейного элемента имеет вид

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2, \qquad (1)$$

есть система изотермическая, то отношение коэффициентов E и G должно равняться отношению функции аргумента u к функции аргумента v, так что можно положить

$$E : G = U' : V', \qquad (2)$$

где U и V — функции соответственно аргументов u и v. На этом основании, если имеем потенциальную систему, относительно которой квадрат линейного элемента имеет вид

$$ds^2 = \frac{\partial \omega}{\partial u} du^2 + \frac{\partial \omega}{\partial v} dv^2 \qquad (3)$$

и если эта система в то же время изотермическая, то мы должны иметь

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} : \frac{\partial \omega}{\partial v} = U' : V',$$

откуда

$$\omega = \omega\,(U + V), \qquad (4)$$

и, следовательно, квадрат линейного элемента для потенциально изотермической системы имеет вид

$$ds^2 = \omega'(U + V)\,[U'du^2 + V'dv^2]. \qquad (5)$$

Изотермические параметры u_1, v_1 определяются из равенств

$$u_1 = \int \sqrt{U'}\,du, \qquad v_1 = \int \sqrt{V'}\,dv, \qquad (6)$$

и, следовательно, изотермический вид квадрата линейного элемента следующий:

$$ds^2 = \omega'(U_1 + V_1)\,[du_1^2 + dv_1^2], \qquad (7)$$

где через U_1 и V_1 обозначены величины U и V, выраженные как функции u_1 и v_1. Отбрасывая значки и полагая $\omega' = \mu$, придадим квадрату того же линейного элемента вид:

$$ds^2 = \mu\,(U + V)\,[du^2 + dv^2]. \qquad (8)$$

Весьма много известных частных видов линейного элемента могут быть получены из найденного нами (8) соответственным выбором μ как функции U, V.

Так, полагая

$$\mu\,(U + V) = U + V, \qquad (9)$$

получаем

$$ds^2 = (U + V)\,[du^2 + dv^2], \qquad (10)$$

т. е. имеем известную форму Лиувилля. Соответствующая потенциальная форма, очевидно, будет

$$ds^2 = (U + V)\,[U'du^2 + V'dv^2], \qquad (11)$$

причем через u и v обозначены потенциальные параметры, и функции U и V, конечно, имеют другое значение, чем в (10). Сопоставляя с равенством (5), имеем еще

$$\omega = \frac{(U + V)^2}{2}. \qquad (12)$$

Как известно, семейства $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ в этом случае можно бесконечно разнообразно рассматривать как семейства геодезических эллипсов и гипербол (см. Darboux S, т. III, кн. VI, гл. I). Мы видим, что все семейства этого типа допускают группу преобразований, в силу которой касательная плоскость поверхности перемещается без вращения около нормали.

Полагая

$$\mu(U+V)=\frac{1}{(U+V)^2}, \tag{13}$$

получаем

$$ds^2=\frac{du^2+dv^2}{(U+V)^2}. \tag{14}$$

Семейства $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ в этом случае, как известно, состоят из линий постоянной геодезической кривизны (см. Darboux S, т. III, кн. VI, гл. VII). Соответствующая потенциальная форма квадрата линейного элемента, при сохранении обозначений u, v, U, V, имеет вид

$$ds^2=\frac{U'\,du^2+V'\,dv^2}{(U+V)^2}. \tag{15}$$

Сопоставляя с равенством (5), получаем отсюда

$$\omega=-\frac{1}{U+V}. \tag{16}$$

Полагая

$$\mu(U+V)=e^{U+V}, \tag{17}$$

имеем

$$ds^2=e^{U+V}\,[du^2+dv^2]. \tag{18}$$

Если, в частности, $V=v$, то

$$ds^2=e^{v+U}\,[du^2+dv^2] \text{ или } ds^2=e^vU_1\,[du^2+dv^2], \tag{19}$$

где $U_1=e^U$ — функция параметра u. Полученный нами вид линейного элемента соответствует произвольной спиральной или «безмерной» поверхности (или ее изгибанию). Поверхности эти обладают многими интересными свойствами, раскрытыми К. М. Петерсоном [1]) и Леви (M. Lévy); они образуются «спиральным» преобразованием, т. е. вращением и одновременным подобным изменением произвольной образующей кривой, причем центр подобия находится на оси вращения. При тех обозначениях, которыми мы пользовались, линии $u=\text{const}$ — это те линии, которые описываются точками образующей кривой при образовании поверхности, т. е. конические спирали. Само собою разумеется, что потенциальная система $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ остается потенциальной и при произвольном изгибании спиральной поверхности. Переходя от изотермических параметров к потенциальным и обозначая их по-прежнему через u, v, приведем квадрат линейного элемента спиральной поверхности к виду

$$ds^2=e^{v+U}\,[U'du^2+dv^2]. \tag{20}$$

Функция ω имеет здесь следующее значение:

$$\omega=e^{v+U}. \tag{21}$$

Возвращаясь к общему случаю, приведем квадрат линейного элемента (8) к мнимым симметрическим координатам, полагая

$$u+iv=x,\quad u-iv=y.$$

Очевидно,

$$U=f(x+y),\quad V=f_1(x-y),$$

и, следовательно,

$$ds^2=\mu\,[f(x+y)+f_1(x-y)]\,dx\,dy. \tag{22}$$

Отсюда заключаем, что произвольный линейный элемент не допускает потенциально-изотермических систем; условием для их существования служит приводимость линейного элемента в мнимых симметрических координатах к виду (22). Интересно было бы определить линейные элементы, для которых возможно более одной потенциально-изотермической системы, другими словами, линейные элементы, которые несколькими способами приводимы к виду (22). Но, по-видимому, решение этого вопроса требует сложных вычислений. Частный случай поставленной задачи, а именно определение линейных элементов, *несколькими* способами приводимых к виду Лиувилля, был

1) Матем. сб., т. X.

разрешен сравнительно недавно Раффи [1]) после того, как некоторые результаты в этом направлении были получены Ли и Дарбу.

§ 5. Различные между собой потенциальные системы, допускающие одну и ту же группу преобразований

В § 3 предыдущей главы мы упоминали, что по данной основной функции ω (потенциалу скоростей течения жидкости), или, другими словами, по данной группе преобразований, вообще говоря, вполне определяется соответствующая потенциальная система. Рассмотрим теперь тот исключительный случай, когда это положение становится неверным.

Допустим, что мы имеем две различные потенциальные системы, допускающие одну и ту же группу. Согласно определению мы в таком случае имеем две ортогональные системы, сохраняющие это свойство при всех преобразованиях группы, а следовательно, как известно, данная группа должна быть конформной, т. е. всякая ортогональная система в силу любого преобразования группы должна преобразоваться в ортогональную же систему. Отсюда, между прочим, следует, что данной группе необходимо соответствует бесчисленное множество потенциальных систем. Действительно, возьмем на поверхности произвольную линию; в силу преобразований группы получаем из этой линии семейство линий, зависящее от одного параметра и допускающее преобразования группы. Ортогональные траектории этого семейства, очевидно, образуют семейство, тоже допускающее преобразования группы, так как конформное преобразование сохраняет величину углов. Таким образом, мы получаем ортогональную систему, допускающую данную группу преобразований, или иначе, переносимую течением с данным потенциалом скоростей ω; подобная система и есть система потенциального типа. Согласно степени произвола в выборе линии на данной поверхности получаем, таким образом, бесконечное множество потенциальных систем, зависящих от одной произвольной функции одного аргумента.

На основании тех же соображений, которыми мы пользовались, легко заключаем, что семейство линий уровня $\omega = \text{const}$, как ортогональное к семейству траекторий, должно допускать преобразования группы. Таким образом, траектории группы и линии $\omega = \text{const}$ образуют потенциальную систему; а отсюда, как это мы видели в § 1 предыдущей главы, следует, что траектории группы должны быть геодезическими линиями. Обратно, если для данной поверхности, или, точнее, для данного линейного элемента возможна группа конформных преобразований, траекториями которой служат геодезические линии, то, во-первых, согласно § 1, течение, соответствующее этой группе, будет совершаться с потенциалом скоростей и, во-вторых, согласно предыдущему, этим течением будет переноситься бесчисленное множество ортогональных систем, т. е., другими словами, мы будем иметь бесчисленное множество потенциальных систем, допускающих одну и ту же группу. Таким образом, для окончательного решения поставленной нами задачи остается только найти вид линейного элемента, допускающего конформную группу, траекториями которой служат геодезические линии. Предполагая, что $v = \text{const}$, $u = \text{const}$ есть ортогональная система, образуемая геодезическими линиями (траекториями группы) и их ортогональными траекториями, мы должны иметь

$$ds^2 = U^2du^2 + G\,dv^2, \tag{23}$$

где U — некоторая функция аргумента u. Мы можем всегда предположить, что параметр u выбран так, что равенства, устанавливающие преобразования группы, имеют вид

$$u_1 = u + t, \quad v_1 = v \tag{24}$$

(см. § 1 гл. I). Выполняя преобразование, устанавливаемое равенствами (24), получаем

$$ds_1^2 = U^2\,(u + t)\,du^2 + G\,(u + t,\, v)\,dv^2.$$

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы данная группа была конформной, служит, как известно,

[1]) R a f f y, Détermination des éléments linéaires doublement harmoniques, J. de Math., 4 ser., 10 (1894).

равенство

$$\frac{U^2(u+t)}{U^2(u)} = \frac{G(u+t, v)}{G(u, v)}, \tag{25}$$

в силу которого $ds_1^2 = \rho(u, v, t)\, ds^2$. Из равенства (25) имеем

$$\frac{G(u+t, v)}{U^2(u+t)} = \frac{G(u, v)}{U^2(u)};$$

первое отношение не должно зависеть от t, а следовательно, оно есть функция одного аргумента v, равно как и второе отношение. Таким образом,

$$G(u, v) = U^2 V'^2, \tag{26}$$

где V — функция аргумента v. В силу (26) имеем

$$ds^2 = U^2[du^2 + V'^2 dv^2]$$

или, вводя новый параметр $\int V' dv = V$ и обозначая его по-прежнему через v, получаем окончательно

$$ds^2 = U^2[du^2 + dv^2]. \tag{27}$$

Квадрат линейного элемента вида (27) соответствует поверхности вращения (или ее изгибанию), причем линиями $v = \text{const}$ служат меридианы (или их изгибания), а линиями $u = \text{const}$ — параллели (или их изгибания). Группа преобразований определяется равенствами

$$u_1 = u + t, \quad v_1 = v,$$

причем линейный элемент предполагается в изотермической форме (27). Если допустим, что одна из поверхностей вращения данного линейного элемента определяется уравнениями

$$x = r(u)\cos v, \quad y = r(u)\sin v, \quad z = z(v), \tag{28}$$

где r — радиус параллели, а v — азимут, то

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = [r'^2(u) + z'^2(u)]\, du^2 + r^2(u)\, dv^2,$$

и если параметр u выбран так, чтобы линейный элемент имел изотермический вид, то необходимо

$$r'^2(u) + z'^2(u) = r^2(u)$$

и

$$ds^2 = r^2[du^2 + dv^2]. \tag{29}$$

Сравнивая выражения (27) и (29), получаем

$$U = r. \tag{30}$$

С другой стороны, скорость течения, соответствующего данной группе, равна, как мы видели в § 1 (гл. I), корню квадратному из коэффициента при du^2 в выражении квадрата линейного элемента, т. е. в данном случае равна U или, в силу (30), равна r. Таким образом, *на всякой поверхности вращения возможно бесчисленное множество потенциальных систем, допускающих одну и ту же группу. Любая из них может быть получена, если будем произвольную кривую на поверхности подвергать преобразованиям группы, т. е. точки кривой передвигать по меридианам со скоростями, равными или, лучше, пропорциональными радиусам соответствующих параллелей.*

Определим теперь вид линейного элемента относительно одной из потенциальных систем. Для этой цели заметим, что относительно изгибаний меридианов и параллелей квадрат линейного элемента необходимо должен быть приводим к виду

$$ds^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial \omega} d\omega^2 + \frac{1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial \omega}} d\xi^2\right], \tag{31}$$

полученному в § 3 (гл. I), так как изгибания меридианов служат траекториями группы. В данном случае, очевидно, $\frac{\partial f}{\partial \omega}$ должно быть функцией одного аргумента ω и, следовательно,

$$f = \Omega + \Xi, \tag{32}$$

где Ω и Ξ — функции соответственно аргументов ω и ξ. В силу (32) получаем из (31)

$$ds^2 = \frac{1}{2\Omega'}[\Omega'^2 d\omega^2 + (1 - \Xi'^2)\, d\xi^2], \tag{33}$$

и это выражение ds^2 должно совпадать с выражением (27) при соответственном выборе функциональной зависимости между ω и u и между ξ и v. Очевидно, следует положить

$$\Omega'\,d\omega = du, \quad \text{откуда} \quad \Omega = u, \quad \frac{1}{2\Omega'} = U, \quad v = \int \sqrt{1 - \Xi'^2}\,d\xi. \tag{34}$$

Равенствами (34) вполне определяется вид функции $\Omega(\omega)$ и зависимость между ω и u (не считая пропущенных нами постоянных, не имеющих существенного значения), но функция $\Xi(\xi)$ остается вполне произвольной. Для того чтобы перейти к потенциальной системе $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$, следует, согласно § 3 (гл. I, равенства (61), (63)), положить

$$\varphi - \psi = \xi, \quad \varphi + \psi = f$$

или в данном случае

$$\varphi - \psi = \xi, \quad \varphi + \psi = \Omega + \Xi. \tag{35}$$

Второе из равенств (35) позволяет нам определить ω как функцию φ, ψ; мы его напишем в следующем виде:

$$\Omega(\omega) = \varphi + \psi + A(\varphi - \psi)$$

или

$$\omega = F(\varphi + \psi + A(\varphi - \psi)), \tag{36}$$

где $A(\varphi - \psi)$ — произвольная функция аргумента $\varphi - \psi$ (в силу произвола Ξ), а F есть функция, вполне определенная для данного линейного элемента. Обозначая потенциальные параметры через u, v, имеем

$$\omega = F[u + v + A(u - v)] \tag{37}$$

и, кроме того, конечно,

$$ds^2 = \frac{\partial\omega}{\partial u}du^2 + \frac{\partial\omega}{\partial v}dv^2$$

или

$$ds^2 = F'(u + v + A(u - v))\,[\{1 + A'(u - v)\}\,du^2 + \\ + \{1 - A'(u - v)\}\,dv^2]. \tag{38}$$

К этому виду, согласно предыдущему, можно привести квадрат линейного элемента всякой поверхности вращения. Изменяя функцию $A(u - v)$, будем получать различные потенциальные системы, допускающие одну и ту же группу преобразований.

§ 6. Потенциальные системы, соответствующие группам с общими траекториями

Естественным обобщением задачи, решенной в предыдущем параграфе, является следующая: определить потенциальные системы, соответствующие одному и тому же семейству $\omega = \text{const}$, т. е., другими словами, потенциальные системы, допускающие хотя и различные группы, но с общими траекториями (семейство траекторий, как известно, ортогонально семейству $\omega = \text{const}$). Почти очевидно, что подобные потенциальные системы возможны лишь для особого вида линейного элемента, так что, вообще говоря, данному семейству $\omega = \text{const}$ соответствует единственная потенциальная система. Квадрат линейного элемента относительно семейства траекторий и семейства линий уровня, как мы видели, имеет вид

$$ds^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial\omega}d\omega^2 + \frac{1 - \left(\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial\omega}}d\xi^2\right]. \tag{39}$$

Поэтому поставленная нами задача равносильна задаче определить линейные элементы, которые для одной и той же ортогональной системы несколькими различными способами приводимы к виду (39).

Мы будем, впрочем, решать поставленный вопрос исходя из других соображений. Допустим, что имеем две различные потенциальные системы с общими траекториями группы или, безразлично, общими линиями уровня. Если первая система определяется основной функцией $\omega(u, v)$, то для второй соответствующая основная функция должна быть, очевидно, некоторой функцией аргумента ω, так как она должна оставаться постоянной на линиях того же семейства, на которых $\omega = \text{const}$. Притом, конечно, устраняем из рассмотрения линейные функции ω вида $a\omega + b$, так как, согласно § 1 (гл. I), прибавление постоянной величины к основной функции и умножение основной функции на постоянный множитель не изменяют соответствующей группы, и, следовательно, мы бы имели в таком случае не две различные потенциальные системы, а одну. Основная функция ω, как мы вывели в § 3 (гл. I), удовлетворяет некоторому уравнению третьего порядка с частными производными в произвольных координатах u, v, относительно которых квадрат линейного элемента имеет вид

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{40}$$

В данном случае, согласно вышеизложенному, упомянутому уравнению с частными производными, кроме ω, должна еще удовлетворять некоторая функция $\gamma(\omega)$. Уравнение, определяющее ω, имеет следующий вид (см. § 3 гл. I):

$$[1 + \sigma^2]\,\Theta(\omega, \Delta\omega) + \Delta\omega\Delta(\omega, \sigma) = 0, \tag{41}$$

где

$$\sigma = \frac{\Delta\omega\Delta_2\omega - \Delta(\omega, \Delta\omega)}{\Theta(\omega, \Delta\omega)}. \tag{42}$$

Заменяя в нем ω через $\gamma(\omega)$, получаем на основании общих свойств дифференциальных параметров

$$\frac{\gamma''}{\gamma}\left[2\sigma\Delta\omega + \Delta\left(\omega, \frac{(\Delta\omega)^2}{\Theta(\omega, \Delta\omega)}\right)\right] = 2\left(\frac{\gamma''^2}{\gamma'^2} - \frac{\gamma'''}{\gamma'}\right)\frac{(\Delta\omega)^3}{\Theta(\omega, \Delta\omega)}$$

или, иначе, полагая

$$\frac{1}{\gamma'(\omega)} = \zeta(\omega), \tag{43}$$

имеем

$$2\sigma\Delta\omega + \Delta\left(\omega, \frac{(\Delta\omega)^2}{\Theta(\omega, \Delta\omega)}\right) + \frac{\zeta''(\omega)}{\zeta'(\omega)}\cdot\frac{(\Delta\omega)^3}{\Theta(\omega, \Delta\omega)} = 0. \tag{44}$$

Функция ω должна одновременно удовлетворять уравнениям (41) и (44). На основании этого мы можем легко доказать, что если существуют две различные потенциальные системы с общими траекториями, то этим же траекториям необходимо соответствует бесчисленное множество (∞^1) потенциальных систем. В самом деле, уравнение (41) не

зависит от вида функции $\gamma(\omega)$, а уравнение (44) сохраняет свой вид, если выберем функцию $\gamma_1(\omega)$ так, чтобы

$$\frac{\zeta_1''(\omega)}{\zeta_1'(\omega)} = \frac{\zeta''(\omega)}{\zeta'(\omega)}, \tag{45}$$

где

$$\zeta_1(\omega) = \frac{1}{\gamma_1'(\omega)}. \tag{46}$$

Из равенства (45) имеем

$$\zeta_1(\omega) = m\zeta(\omega) + n, \tag{47}$$

где m и n — постоянные, или, иначе, подставляя значения $\zeta_1(\omega)$ и $\zeta(\omega)$,

$$\frac{1}{\gamma_1'(\omega)} = \frac{m}{\gamma'(\omega)} + n. \tag{48}$$

Общее выражение $\gamma_1(\omega)$ зависит от трех постоянных: m, n и еще одного постоянного, которое вводится при квадратуре, необходимой для определения $\gamma_1(\omega)$. Но мы уже знаем, что постоянные, которые прибавляются к основной функции или на которые эта функция умножается, не изменяют группы преобразований; следовательно, существенное значение имеет лишь отношение постоянных $m : n$, и мы получаем, таким образом, ∞^1 различных потенциальных систем с общими траекториями групп.

Из равенства (48), между прочим, можно получить соотношение между скоростями течений, определяемых основными функциями ω, $\gamma(\omega)$ и $\gamma_1(\omega)$. Обозначая эти скорости соответственно через V_0, V и V_1, имеем (см. § 1 гл. I)

$$V_0 = \sqrt{\Delta\omega}, \qquad V = \sqrt{\Delta\gamma} = \gamma'(\omega)\sqrt{\Delta\omega},$$

$$V_1 = \sqrt{\Delta\gamma_1} = \gamma_1'(\omega)\,\Delta\omega,$$

откуда

$$\frac{1}{\gamma'(\omega)} = \frac{V_0}{V}, \qquad \frac{1}{\gamma_1'(\omega)} = \frac{V_0}{V_1},$$

и, следовательно, равенство (48) может быть написано иначе:

$$\frac{V_0}{V_1}=\frac{mV_0}{V}+n$$

или

$$\frac{1}{V_1}=\frac{m}{V}+\frac{n}{V_0}. \tag{49}$$

Вводя обозначение

$$\mu(\omega)=\frac{\Theta(\omega,\Delta\omega)}{\Delta\omega}, \tag{50}$$

можем уравнения (41) и (44) написать в следующем виде:

$$\mu+\frac{1}{1+\sigma^2}\Delta(\omega,\sigma)=0, \tag{51}$$

$$2\sigma\Delta\omega+\Delta\left(\omega,\frac{2\omega}{\mu}\right)+\frac{\zeta''}{\zeta'}\frac{(\Delta\omega)^2}{\mu}=0 \tag{52}$$

или после умножения первого уравнения на 2σ, второго на $\frac{\mu}{\Delta\omega}$ и после некоторых упрощений

$$2\mu\sigma+\Delta(\omega,\ \ln(1+\sigma^2))=0, \tag{53}$$

$$2\mu\sigma+\Delta(\omega,\ln\Delta\omega)-\Delta(\omega,\ln\mu)+\Delta(\omega,\ln\zeta')=0. \tag{54}$$

Вычитая из уравнения (53) уравнение (54), получаем

$$\Delta\left(\omega,\ln\frac{\mu(1+\sigma^2)}{\zeta'(\omega)\Delta\omega}\right)=0$$

или

$$\Delta\left(\omega,\frac{\mu(1+\sigma^2)}{\zeta'(\omega)\Delta\omega}\right)=0. \tag{55}$$

Этим уравнением можно, например, заменить уравнение (52), и тогда для определения ω будем иметь систему

$$\mu+\frac{1}{1+\sigma^2}\Delta(\omega,\sigma)=0, \tag{51}$$

$$\Delta\left(\omega,\frac{\mu(1+\sigma^2)}{\zeta'(\omega)\Delta\omega}\right)=0. \tag{55}$$

Полагая для краткости

$$\alpha(\omega)=\frac{\mu(1+\sigma^2)}{\zeta'(\omega)\Delta\omega}, \tag{56}$$

уравнение (55) напишем в виде

$$\Delta(\omega,\alpha)=0, \tag{57}$$

а уравнение (51) — в виде

$$\alpha\zeta'(\omega)\Delta\omega+\Delta(\omega,\sigma)=0$$

или иначе

$$\Delta(\omega,\sigma+\alpha\zeta(\omega))=0, \tag{58}$$

так как $\Delta(\omega,\alpha)=0$ и $\Delta(\omega,\zeta)=\zeta''(\omega)\Delta\omega$. Таким образом, для определения ω получаем систему

$$\Delta(\omega,\alpha)=0, \tag{57}$$

$$\Delta(\omega,\sigma+\alpha\zeta(\omega))=0. \tag{58}$$

Функции α и $\sigma+\alpha\zeta(\omega)$ служат решениями одного и того же линейного однородного уравнения первого порядка с частными производными $\Delta(\omega,\chi)=0$, откуда следует, вообще говоря,

$$\sigma+\alpha\zeta(\omega)=\Phi(\alpha), \tag{59}$$

где Φ — знак произвольной функции. Уравнением (59); которое есть уравнение с частными производными второго порядка, можно заменить одно из двух предшествующих уравнений и, таким образом, получаем для определения ω, например, следующую систему:

$$\Delta(\omega,\alpha)=0, \tag{57}$$

$$\sigma+\alpha\zeta(\omega)=\Phi(\alpha), \tag{59}$$

где

$$\alpha=\frac{\mu(1+\sigma^2)}{\zeta'(\omega)\Delta\omega}, \tag{56}$$

$$\mu(\omega)=\frac{\Theta(\omega,\Delta\omega)}{\Delta\omega}, \tag{50}$$

$$\sigma=\frac{\Delta\omega\Delta_2\omega-\Delta(\omega,\Delta\omega)}{\Theta(\omega,\Delta\omega)}. \tag{42}$$

Определим вид квадрата линейного элемента относительно потенциальной системы, для которой основная функция равна ω. Если положим

$$ds^2 = \frac{\partial\omega}{\partial u} du^2 + \frac{\partial\omega}{\partial v} dv^2, \tag{60}$$

то в координатах u, v система двух уравнений, определяющих ω, должна сводиться к одному, так как при данной форме (60) линейного элемента система $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ есть система потенциального типа и, например, уравнение (41) или (51), как это следует из § 3 (гл. I), тождественно удовлетворяется для функции ω. Мы воспользуемся системой (57), (59), но при этом, согласно предыдущему, ограничимся одним каким-либо уравнением, следующим из этой системы.

Так как семейство линий $u - v = \text{const}$ ортогонально семейству $\omega = \text{const}$, то из уравнения

$$\Delta(\omega, \alpha) = 0 \tag{57}$$

следует

$$\alpha = A(u - v),$$

где A — знак произвольной функции. Подставляя полученное значение α в уравнение (59), имеем

$$\sigma + A(u - v)\,\zeta(\omega) = \Phi(A(u - v)).$$

Правая часть есть некоторая функция аргумента $u - v$; обозначим ее через $-B(u - v)$ и тогда получаем уравнение для определения ω

$$\sigma + A(u - v)\,\zeta(\omega) + B(u - v) = 0. \tag{61}$$

Вводя обозначения

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} = p, \quad \frac{\partial\omega}{\partial v} = q, \quad \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} = \delta,$$

имеем, согласно § 3 (гл. I):

$$\Delta\omega = p + q = \delta\omega, \quad \Theta(\omega, \Delta\omega) = \frac{p\delta q - q\delta p}{\sqrt{pq}},$$

$$\Delta_2\omega = \frac{p\delta q + q\delta p}{2pq}, \quad \Delta(\omega, \Delta\omega) = \delta p + \delta q,$$

и, следовательно,

$$\sigma(\omega) = \frac{\Delta\omega\Delta_2\omega - \Delta(\omega, \Delta\omega)}{\Theta(\omega, \Delta\omega)} = \frac{p - q}{2\sqrt{pq}}.$$

Вставляя полученное выражение σ в уравнение (61), имеем

$$\frac{q - p}{2\sqrt{pq}} = A(u - v)\,\zeta(\omega) + B(u - v),$$

откуда

$$\frac{p}{q} = 2[A\zeta + B]^2 + 1 - 2[A\zeta + B]\sqrt{[A\zeta + B]^2 + 1}. \tag{62}$$

Интегрирование этого уравнения с частными производными сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{1} = \frac{dv}{2[A\zeta + B]\sqrt{[A\zeta + B]^2 + 1} - 2[A\zeta + B]^2 - 1} = \frac{d\omega}{0},$$

откуда, во-первых, $\omega = \text{const}$ и, во-вторых,

$$u + v = \int \frac{A(u - v)\,\zeta(\omega) + B(u - v)}{\sqrt{[A(u - v)\,\zeta(\omega) + B(u - v)]^2 + 1}}\, d(u - v) + \text{const}.$$

На основании теории уравнений первого порядка с частными производными самое общее значение ω определяется из равенства

$$u + v = \int \frac{A(u - v)\,\zeta(\omega) + B(u - v)}{\sqrt{[A(u - v)\,\zeta(\omega) + B(u - v)]^2 + 1}}\, d(u - v) + \chi(\omega), \tag{63}$$

где χ — знак произвольной функции; квадратура в правой части есть так называемая частная квадратура, при выполнении которой ω считается постоянным.

Из равенства (63) можем найти $\frac{\partial\omega}{\partial u}$, $\frac{\partial\omega}{\partial v}$ и, следовательно, подставляя их значения в равенство (60), получим окончательно вид квадрата линейного элемента ds^2 относительно нашей потенциальной системы.

Нетрудно также найти вид ds^2 относительно системы $\omega = \text{const}$, $\xi = \text{const}$, образуемой линиями уровня и траекториями группы. Как было своевременно упомянуто (см. § 3 гл. I),

$$ds^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial\omega} d\omega^2 + \frac{1 - \left(\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial\omega}} d\xi^2\right], \tag{64}$$

причем если u и v — соответственные потенциальные параметры, то

$$\xi = u - v, \quad f = u + v.$$

В данном случае на основании равенства (63)

$$f = \int \frac{A(\xi)\,\zeta(\omega) + B(\xi)}{\sqrt{[A(\xi)\,\zeta(\omega) + B(\xi)]^2 + 1}}\,d\xi + \chi(\omega), \tag{65}$$

откуда легко найдем $\frac{\partial f}{\partial \omega}$ и $\frac{\partial f}{\partial \xi}$.

В начале параграфа было упомянуто, что квадрат линейного элемента должен быть приводим к виду (64) бесконечным числом способов, притом относительно одной и той же ортогональной системы. Мы можем теперь без труда подтвердить это. Согласно предыдущему мы должны иметь одновременно с (64)

$$ds^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_1}{\partial \omega_1}\,d\omega_1^2 + \frac{1 - \left(\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}\right)^2}{\frac{\partial f_1}{\partial \omega_1}}\,d\xi_1^2\right], \tag{66}$$

причем ω_1 и ξ_1 должны быть функциями соответственно ω и ξ; ω_1 есть основная функция для одной из потенциальных систем с общими траекториями; поэтому, сохраняя обозначения, которых придерживались в начале параграфа, мы должны положить

$$\omega_1 = \gamma_1(\omega), \qquad \frac{1}{\gamma_1'(\omega)} = \zeta_1(\omega), \tag{67}$$

причем

$$\zeta_1(\omega) = m\zeta(\omega) + n, \tag{68}$$

где $\zeta(\omega)$ — та самая функция, которая входит в равенство (65). Сравнивая два выражения (64) и (66) для ds^2, имеем

$$\frac{\partial f_1}{\partial \omega_1}\,d\omega_1^2 = \frac{\partial f}{\partial \omega}\,d\omega^2, \qquad \frac{1 - \left(\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}\right)^2}{\frac{\partial f_1}{\partial \omega_1}}\,d\xi_1^2 = \frac{1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial \omega}}\,d\xi^2. \tag{69}$$

Первое из равенств (69) в силу (67) и (68) дает

$$\frac{\partial f_1}{\partial \omega} = \frac{\partial f}{\partial \omega}\,[m\zeta(\omega) + n]; \tag{70}$$

второе на основании первого можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial \xi_1}{d\xi}\right)^2 - \left(\frac{\partial f_1}{\partial \xi}\right)^2 = [m\zeta(\omega) + n]^2\left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2\right]. \tag{71}$$

С другой стороны, функция f_1 аргументов ξ_1, ω_1 должна, очевидно, определяться равенством совершенно такого же вида, как (65), т. е. мы должны иметь

$$f_1 = \int \frac{A_1(\xi_1)\,\eta(\omega_1) + B_1(\xi_1)}{\sqrt{[A_1(\xi_1)\,\eta(\omega_1) + B_1(\xi_1)]^2 + 1}}\,d\xi_1 + \chi_1(\omega_1) \tag{72}$$

или, переходя к переменным ξ, ω и полагая

$$A_1(\xi_1) = a(\xi), \quad B_1(\xi_1) = b(\xi),$$
$$\eta(\omega_1) = \varepsilon(\omega), \quad \chi_1(\omega_1) = \rho(\omega),$$

получим

$$f_1 = \int \frac{a(\xi)\,\varepsilon(\omega) + b(\xi)}{\sqrt{[a(\xi)\,\varepsilon(\omega) + b(\xi)]^2 + 1}}\,\frac{d\xi_1}{d\xi}\,d\xi + \rho(\omega). \tag{73}$$

Подставляя в равенства (70) и (71) выражения f_1 из (73) и f из (65), имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{a(\xi)\,\varepsilon'(\omega)}{\{[a(\xi)\,\varepsilon(\omega) + b(\xi)]^2 + 1\}^{3/2}}\,\frac{d\xi_1}{d\xi}\,d\xi + \rho'(\omega) = \\ = [m\zeta(\omega) + n]\int \frac{A(\xi)\,\zeta'(\omega)}{\{[A(\xi)\,\zeta(\omega) + B(\xi)]^2 + 1\}^{3/2}}\,d\xi + \\ + [m\zeta(\omega) + n]\,\chi'(\omega), \end{aligned} \tag{74}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\xi_1}{d\xi}\right)^2 \frac{1}{[a(\xi)\,\varepsilon(\omega) + b(\xi)]^2 + 1} = \\ = [m\zeta(\omega) + n]^2\,\frac{1}{[A(\xi)\,\zeta(\omega) + B(\xi)]^2 + 1}. \end{aligned} \tag{75}$$

Оба равенства удовлетворяются, если положим

$$\begin{aligned} &\varepsilon(\omega) = \frac{1}{m\zeta(\omega) + n}, \qquad a(\xi) = -\frac{m^2 + [nA(\xi) - mB(\xi)]^2}{mA(\xi)}, \\ &\rho'(\omega) = [m\zeta(\omega) + n]\,\chi'(\omega), \quad b(\xi) = \frac{nA(\xi) - mB(\xi)}{m}, \\ &\left(\frac{d\xi_1}{d\xi}\right)^2 = \frac{m^2 + [nA(\xi) - mB(\xi)]^2}{A^2(\xi)}. \end{aligned} \tag{76}$$

Первые четыре из равенств (76) дают нам ε, a, b, ρ, а следовательно, в силу (73) f_1 как функцию ξ, ω; последнее позволяет выразить ξ через ξ_1, равенство

$$\omega_1 = \gamma_1(\omega) \tag{67}$$

устанавливает связь между ω_1 и ω. Таким образом, мы можем из (73) получить выражение (72) для f_1 как функции ω_1, ξ_1 и, следовательно, найдем выражение (66) для ds^2 в координатах ω_1, ξ_1, зависящее от произвольных параметров m, n.

Рассмотрим частный случай, когда $A = \text{const}$, $B = \text{const}$. Полагая для большей простоты

$$\frac{A\zeta(\omega)+B}{\sqrt{[A\zeta(\omega)+B]^2+1}} = \alpha(\omega), \tag{77}$$

имеем в силу (65)

$$f = \alpha(\omega)\,\xi + \chi(\omega) \tag{78}$$

и, следовательно,

$$ds^2 = \frac{[\alpha'(\omega)\,\xi + \chi'(\omega)]^2\,d\omega^2 + [1-\alpha^2(\omega)]\,d\xi^2}{2\,[\alpha'(\omega)\,\xi + \chi'(\omega)]}. \tag{79}$$

Соответствующую потенциальную форму ds^2 получим, определяя ω из равенства (63), которое в данном случае принимает вид

$$u + v = \alpha(\omega)(u - v) + \chi(\omega). \tag{80}$$

Дифференцируя по u и по v, получим $\frac{\partial\omega}{\partial u}$, $\frac{\partial\omega}{\partial v}$ и, следовательно,

$$ds^2 = \frac{\partial\omega}{\partial u}\,du^2 + \frac{\partial\omega}{\partial v}\,dv^2 = \frac{[1-\alpha(\omega)]\,du^2 + [1+\alpha(\omega)]\,dv^2}{\alpha'(\omega)(u-v) + \chi'(\omega)}, \tag{81}$$

причем ω предполагается выраженным как функция u, v из равенства (80).

Предположим, в частности,

$$\chi(\omega) = 0;$$

тогда из (79) имеем

$$ds^2 = \frac{1}{2}\,\alpha'(\omega)\,\xi\,d\omega^2 + \frac{1-\alpha^2(\omega)}{2\alpha'(\omega)\,\xi}\,d\xi^2 \tag{82}$$

или, полагая $\xi = e^t$,

$$ds^2 = \frac{1}{2}\,e^t\left[\alpha'(\omega)\,d\omega^2 + \frac{1-\alpha^2(\omega)}{\alpha'(\omega)}\,dt^2\right], \tag{83}$$

т. е. имеем квадрат линейного элемента спиральной поверхности, причем конические спирали (или их изгибания) служат линиями $\omega = \text{const}$. Мы видели в § 4, что конические спирали и их ортогональные траектории образуют потенциальную систему; таким образом, на всякой спиральной поверхности (или на ее изгибании) существует ортогональная система, которая одновременно может быть рассматриваема и как потенциальная система и как система, состоящая из траекторий и линий уровня для бесконечного множества (∞^1) потенциальных систем. Это свойство сближает спиральные поверхности с поверхностями вращения, для которых аналогичная ортогональная система образуется меридианами и параллелями.

Полагая $\chi(\omega) = 0$ в равенстве (80), имеем

$$\alpha(\omega) = \frac{u+v}{u-v},$$

и, следовательно, квадрат линейного элемента спиральной поверхности относительно потенциальной системы с основной функцией ω на основании (81) имеет вид

$$ds^2 = \frac{-2v\,du^2 + 2u\,dv^2}{(u-v)^2\,\alpha'(\omega)};$$

замечая, что ω есть функция отношения u/v, можем в несколько иной форме положить

$$ds^2 = F\left(\frac{u}{v}\right)\left[\frac{du^2}{u} - \frac{dv^2}{v}\right]; \tag{84}$$

при этом, обозначая $\ln u - \ln v$ через θ, имеем

$$\omega = \int F(e^\theta)\,d\theta. \tag{85}$$

Очевидно, потенциальная форма (84) может быть приведена к изотермической, так что мы получили новый пример потенциально изотермической системы (см. § 4).

Обозначая изотермические параметры через α, β, мы должны положить

$$\frac{du}{\sqrt{u}} = 2d\alpha, \qquad \frac{dv}{\sqrt{v}} = 2i\, d\beta,$$

откуда

$$\alpha = \sqrt{u}, \qquad i\beta = \sqrt{v}$$

и, следовательно,

$$ds^2 = 4F\left(\frac{\alpha^2}{-\beta^2}\right)[d\alpha^2 + d\beta^2],$$

или

$$ds^2 = \Phi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)[d\alpha^2 + d\beta^2]. \tag{86}$$

Если бы мы пожелали определить все потенциальные системы, соответствующие данным траекториям, то нам следовало бы применить к рассматриваемому случаю вышеприведенные формулы (66) — (76). Но вместо этого можем непосредственно заметить, что всякая изотермическая система на спиральной поверхности, для которой квадрат линейного элемента имеет вид (86), есть в то же время система потенциального типа, так как при помощи подстановки

$$\alpha = \sqrt{u}, \qquad i\beta = \sqrt{v}$$

приведем ds^2 к виду (84); притом, как это явствует из предыдущих выкладок, квадрат линейного элемента по отношению к траекториям и линиям уровня будет иметь вид (82), а следовательно, линиями уровня служат конические спирали, т. е. система $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ есть система требуемого типа.

Из формул

$$u - v = \xi = e^t, \quad u + v = \alpha(\omega)\,\xi = \alpha(\omega)\,e^t$$

следует

$$2u = e^t[\alpha(\omega) + 1],\; 2v = e^t[\alpha(\omega) - 1], \tag{87}$$

откуда легко заключаем, что семейства $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ состоят из подобных кривых; каждое семейство получается «спиральным» преобразованием одной начальной кривой. Справедливость этого замечания следует из того, что при замене t через $t + c$, где c — постоянное, квадрат линейного элемента ds^2 (например, в форме (83)) и параметры u, v изменяются в постоянном отношении.

Возвращаясь к более общему случаю, когда $A = \text{const}$, $B = \text{const}$, но $\chi(\omega)$, вообще говоря, отлично от нуля, постараемся определить форму соответствующего линейного элемента в мнимых симметрических координатах. Для этой цели заметим, что, согласно значению функций $A(u - v)$, $B(u - v)$ в самом общем случае, при данных предположениях мы должны иметь

$$\alpha = \frac{\mu(1 + \sigma^2)}{\zeta'(\omega)\,\Delta\omega} = \text{const} = A, \tag{88}$$
$$\sigma + \alpha\zeta(\omega) = \text{const} = B,$$

где σ определяется равенством (42), а μ — равенством (50). Так как по смыслу вопроса мы имеем право функцию $\zeta(\omega)$ заменить соответствующей функцией для какой-либо из потенциальных систем с общими траекториями, т. е. согласно результатам, полученным в начале параграфа, можем взять вместо $\zeta(\omega)$

$$\zeta_1(\omega) = m\zeta(\omega) + n,$$

то можем, без ущерба для общности положить в уравнениях (88) $A = 1$, $B = 0$ и, таким образом, имеем после подстановки значения σ из второго уравнения в первое

$$\sigma = -\zeta(\omega),$$
$$\mu = \frac{\zeta'(\omega)\,\Delta\omega}{1 + \zeta^2(\omega)}. \tag{89}$$

Первое из этих уравнений можем заменить следующим:

$$\mu\sigma = -\frac{\zeta(\omega)\,\zeta'(\omega)\,\Delta\omega}{1 + \zeta^2(\omega)}.$$

Вставляя выражения σ и μ из равенств (42) и (50), получаем

$$\Theta(\omega, \Delta\omega) = \frac{\zeta'(\omega)\,\Delta^2\omega}{1 + \zeta^2(\omega)},$$
$$\Delta_2\omega - \Delta(\omega, \ln\Delta\omega) = -\frac{\zeta(\omega)\,\zeta'(\omega)\,\Delta(\omega)}{1 + \zeta^2(\omega)}. \tag{90}$$

Предполагая квадрат линейного элемента в симметрических координатах

$$ds^2 = \frac{4}{\lambda}\, dx\, dy \tag{91}$$

и вводя обозначения

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial x\, \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = t,$$

напишем уравнения (90) в следующем виде:

$$\frac{\lambda^2}{2i}(-q^2r + p^2t) + \frac{\lambda pq}{2i}\left(p\frac{\partial\lambda}{\partial y} - q\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right) = \frac{\zeta'(\omega)}{1+\zeta^2(\omega)}\lambda^2p^2q^2,$$

$$-\frac{\lambda^2}{2\lambda pq}(q^2r + p^2t) - \frac{1}{2}\left(p\frac{\partial\lambda}{\partial y} + q\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right) = -\frac{\zeta(\omega)\,\zeta'(\omega)}{1+\zeta^2(\omega)}\lambda pq,$$

или после некоторых преобразований

$$-\frac{r}{p^2} + \frac{t}{q^2} - \frac{\partial \ln\lambda}{\partial x}\cdot\frac{1}{p} + \frac{\partial\ln\lambda}{\partial y}\cdot\frac{1}{q} = 2i\,\frac{\zeta'(\omega)}{1+\zeta^2(\omega)},$$

$$\frac{r}{p^2} + \frac{t}{q^2} + \frac{\partial \ln\lambda}{\partial x}\cdot\frac{1}{p} + \frac{\partial\ln\lambda}{\partial y}\cdot\frac{1}{q} = 2\,\frac{\zeta(\omega)\,\zeta'(\omega)}{1+\zeta^2(\omega)}.$$

Складывая и вычитая, имеем после умножения первого из полученных уравнений на p, второго на q

$$\begin{gathered}\frac{\partial\ln p}{\partial x} + \frac{\partial\ln\lambda}{\partial x} = \frac{\partial\ln[\zeta(\omega)+i]}{\partial x},\\ \frac{\partial\ln q}{\partial y} + \frac{\partial\ln\lambda}{\partial y} = \frac{\partial\ln[\zeta(\omega)-i]}{\partial y}.\end{gathered} \tag{92}$$

Интегрируя, получаем

$$p = \frac{Y[\zeta(\omega)+i]}{\lambda}, \qquad q = \frac{X[\zeta(\omega)-i]}{\lambda}, \tag{93}$$

где X и Y — функции соответственно аргументов x и y. Изменяя систему параметров, всегда можем привести ту и другую функцию к единице. В самом деле, если введем новые параметры

$$x_1 = \varphi(x), \; y_1 = \psi(y),$$

то

$$dx^2 = \frac{4}{\lambda_1}\cdot dx_1\, dy_1 = \frac{4}{\lambda_1}\varphi'(x)\,\psi'(y)\, dx\, dy = \frac{4}{\lambda}\, dx\, dy,$$

откуда

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1}\varphi'(x)\,\psi'(y).$$

С другой стороны,

$$p = \frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial x_1}\varphi'(x) = p_1\varphi'(x),$$

$$q = \frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial y_1}\psi'(y) = q_1\psi'(y).$$

Вставляя выражения p, q, λ в равенства (93), имеем

$$p_1\varphi'(x) = \frac{\varphi'(x)\,\psi'(y)\,Y[\zeta(\omega)+i]}{\lambda_1},$$

$$q_1\psi'(y) = \frac{\varphi'(x)\,\psi'(y)\,X[\zeta(\omega)-i]}{\lambda_1}.$$

Выбирая функции $\varphi(x)$, $\psi(y)$ так, чтобы

$$\varphi'(x) = \frac{1}{X}, \qquad \psi'(y) = \frac{1}{Y},$$

получаем

$$p_1 = \frac{\zeta(\omega)+i}{\lambda_1}, \qquad q_1 = \frac{\zeta(\omega)-i}{\lambda_1},$$

или, отбрасывая для удобства значки, другими словами, полагая в равенствах (93) $X = Y = 1$,

$$p = \frac{\zeta(\omega)+i}{\lambda}, \qquad q = \frac{\zeta(\omega)-i}{\lambda}. \tag{94}$$

Исключая λ, имеем

$$[\zeta(\omega) - i]p - [\zeta(\omega) + i]q = 0. \tag{95}$$

Интегрируя это уравнение с частными производными, получаем

$$\zeta(\omega)(x+y) + i(x-y) = F(\omega), \tag{96}$$

где F — знак произвольной функции. Дифференцируя равенство (96) по x и по y, найдем p и q и, следовательно, λ из того или другого уравнения системы (94):

$$\lambda = F'(\omega) - \zeta'(\omega)(x+y). \tag{97}$$

Равенства (96) и (97) вполне решают поставленный вопрос; исключая из них ω, найдем λ как функцию x и y.

Глава III

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ И НА СФЕРЕ

§ 7. Потенциальные системы на плоскости

Основное свойство потенциальных систем, выведенное нами в § 2 (гл. I) и состоящее в том, что касательная плоскость поверхности перемещается по соответствующей системе траекторий без вращения около нормали, в случае плоскости, очевидно, формулируется следующим образом: во всех точках любой траектории $u - v = \mathrm{const}$ касательные прямые к линиям $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$, входящим в состав потенциальной системы, имеют одно направление. К тому же результату придем, если заметим, что движение бесконечно малой площадки жидкости в рассматриваемом случае сводится к поступательному движению и к «внутреннему» движению, при котором направления касательных к линиям $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$ не изменяются. Можно также сказать, что всякий элементарный прямоугольник сети $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$ при всех преобразованиях группы сохраняет направления своих сторон.

Изыскание потенциальных систем на плоскости приводится к интегрированию уравнения второго порядка с частными производными, содержащего одну произвольную функцию. Уравнение это легко можем получить, если заметим, что

$$ds^2 = \frac{\partial\omega}{\partial u} du^2 + \frac{\partial\omega}{\partial v} dv^2 \qquad (1)$$

есть квадрат линейного элемента плоскости, коль скоро гауссова кривизна K квадратичной дифференциальной формы ds^2 равна нулю. Для

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

имеем вообще

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right] \qquad (2)$$

(см. Бианки, Лекции по дифференциальной геометрии, гл. III, § 35). Для потенциальной формы (1) получаем, следовательно,

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}}}\cdot\delta\left[\frac{\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}}{\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}}}\right], \qquad (3)$$

где символом δ обозначена операция $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$. Согласно предыдущему в случае плоскости имеем

$$\delta\left[\frac{\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}}{\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}}}\right] = 0,$$

откуда следует

$$\frac{\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}}{\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}}} = F(u - v), \qquad (4)$$

где F — знак произвольной функции. Мы получили, таким образом, уравнение (4) второго порядка с частными производными, определяющее основную функцию ω произвольной потенциальной системы на плоскости как функцию *соответствующих* потенциальных параметров u, v. В этом заключается существенное отличие выведенного нами уравнения (4) от уравнения

$$[1 + \sigma^2]\Theta(\omega, \Delta\omega) + \Delta\omega\Delta(\omega, \sigma) = 0$$

(гл. I, § 3), которое, конечно, имеет место и в случае плоскости, но определяет ω как функцию тех координат, в которых нам дан линейный элемент поверхности.

Мы ограничимся рассмотрением того частного случая, когда группа, соответствующая потенциальной системе, состоит из преобразований, сохраняющих площади; течение жидкости, соответствующее группе, в этом случае, очевидно, есть течение *несжимаемой* жидкости.

Элементарная площадка

$$\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}}\,du\,dv \qquad (5)$$

сети $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ всяким преобразованием группы преобразуется в элементарную площадку, расположенную на одной траектории $u - v = \text{const}$ с данной. Так как величина площадки по условию не должна меняться и так как в силу формул преобразования

$$u_1 = u + t, \quad v_1 = v + t$$

(см. § 1 гл. I) имеем

$$du_1 = du, \quad dv_1 = dv,$$

то необходимым условием для того, чтобы данная группа была требуемого типа, служит равенство

$$\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}} = \Phi(u-v), \tag{6}$$

где Φ — знак произвольной функции. Очевидно, что это есть вместе с тем *достаточное* условие, так как произвольная площадь может быть разбита на элементарные площадки сети $u = \text{const}$, $v = \text{const}$.

Вводя обозначения

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} = p, \quad \frac{\partial\omega}{\partial v} = q, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} = r, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} = s, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = t,$$

получаем из равенств (4) и (6)

$$pq = \varphi(u-v), \quad s = \psi(u-v). \tag{7}$$

Предположим, во-первых, что одна из производных первого порядка, например p, есть функция аргумента $u - v$; тогда на основании первого из уравнений (7) то же самое имеет место и для q; второе из уравнений (7) в этом предположении, очевидно, удовлетворяется, и окончательно получаем

$$\omega = F(u-v) + a(u+v). \tag{8}$$

Потенциальная система, соответствующая этому значению ω, принадлежит, очевидно, к числу систем, исследованных нами в § 5, так что траектории $u - v = \text{const}$ должны быть прямыми линиями. Согласно общим результатам § 5 квадрат линейного элемента плоскости принимает в ко-

ординатах ω и $\xi = u - v$ следующий вид:

$$ds^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}\,d\omega^2 + \frac{a^2 - F'^2(\xi)}{a}\,d\xi^2\right],$$

откуда непосредственно следует, что семейство траекторий $\xi = \text{const}$ и семейство линий уровня $\omega = \text{const}$ состоят из параллельных прямых. При соответственном выборе осей декартовых координат на плоскости можем положить

$$\omega = \sqrt{2a}\,x, \qquad y = \int\sqrt{\frac{a^2 - F'^2(\xi)}{2a}}\,d\xi. \tag{9}$$

Сопоставляя равенства (8) и (9), легко убеждаемся, что группа преобразований, допускаемых потенциальной системой, состоит из поступательных перемещений по направлению оси x; скорость соответствующего течения жидкости, очевидно, постоянна во всех точках плоскости. Согласно результатам § 5 данной группе преобразований соответствует бесконечное множество различных потенциальных систем в зависимости от произвола функции $F(u - v)$. Для построения какой-либо из этих систем можем произвольную кривую на плоскости перемещать поступательно по оси x; получаемое таким образом семейство может быть принято за семейство $u = \text{const}$ потенциальной системы; второе семейство $v = \text{const}$, ортогональное первому, очевидно, состоит точно так же из равных кривых и может быть получено поступательным перемещением по оси x одной из них.

Предположим, во-вторых, что ни одна из производных p и q не может быть выражена как функция одного аргумента $u - v$. Уравнения системы (7) могут быть написаны в следующем виде:

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \psi(u-v), \qquad \frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\varphi'(u-v)}{\varphi(u-v)}\,p - \frac{\psi(u-v)}{\varphi(u-v)}\,p^2. \tag{10}$$

После исключения производных $\frac{\partial p}{\partial v}$ и $\frac{\partial p}{\partial u}$ дифференцированием получаем

$$\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)' p^2 - \left[\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)' + 2\frac{\psi^2}{\varphi}\right] p + \frac{\varphi'\psi - \varphi\psi'}{\varphi} = 0, \tag{11}$$

где значки $'$ указывают дифференцирование по аргументу $u - v$. Из уравнения (11) мы получили бы выражение p как функцию $u - v$, следовательно, необходимо в отдельности положить

$$\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)' = 0, \qquad \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)' + 2\frac{\psi^2}{\varphi} = 0, \qquad \varphi'\psi - \varphi\psi' = 0. \qquad (12)$$

В силу первого из этих соотношений имеем

$$\psi = c\varphi, \qquad (13)$$

где c — постоянное. При этом предположении третье из соотношений (12) тождественно удовлетворяется, а второе дает

$$\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)' + 2c^2\varphi = 0. \qquad (14)$$

Интегрируя уравнение (14), получаем

$$\frac{\sqrt{k^2 - \varphi} - k}{\sqrt{k^2 - \varphi} + k} = Me^{2ck(u-v)}, \qquad (15)$$

где k и M — постоянные[1]). Мы всегда можем, не изменяя решения по существу, прибавлять к параметрам u, v постоянные величины; распоряжаясь этими постоянными, можем в равенстве (15) сделать $M = -1$ и тогда получим

$$\varphi = \frac{k^2}{\operatorname{ch}^2 ck(u-v)}, \qquad (16)$$

где ch есть знак гиперболического косинуса. Подставляя полученное значение φ в уравнения (10), найдем p квадратурой, затем определим q из соотношения $pq = \varphi$ и, наконец, найдем ω второй квадратурой. В результате будем иметь[2])

$$\begin{aligned} p &= -k \operatorname{th} ck(u-v) + k \operatorname{cth} cku = \frac{k \operatorname{ch} ckv}{\operatorname{sh} cku \operatorname{ch} ck(u-v)}, \\ q &= k \operatorname{th} ck(u-v) + k \operatorname{th} ckv = \frac{k \operatorname{sh} cku}{\operatorname{ch} ckv \operatorname{ch} ck(u-v)}, \\ \omega &= -\frac{1}{c} \ln [\operatorname{cth} cku - \operatorname{th} ckv]. \end{aligned} \qquad (17)$$

[1]) Частные случаи $c = 0$ и $k = 0$ не представляют интереса.
[2]) Здесь и далее $\operatorname{sh} u$, $\operatorname{ch} u$, $\operatorname{th} u$, $\operatorname{cth} u$ — гиперболические синус, косинус, тангенс и котангенс аргумента u.

При этом мы не ввели произвольных постоянных, которые должны были бы ввести в силу двух квадратур, так как нам пришлось бы тогда лишь изменить u и v на одну постоянную величину и прибавить другое постоянное к ω, а мы уже знаем, что и то и другое не вносит существенного изменения в решение. В § 1 (гл. I), кроме того, было доказано, что возможно оба потенциальных параметра умножить на одну постоянную величину, разделив в то же время на нее основную функцию. В данном случае, приняв

$$cku = u_1, \quad ckv = v_1$$

и отбрасывая затем значки, получим в сущности формулы (17), в которых лишь положено

$$ck = 1, \qquad \frac{1}{c} = k.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\begin{aligned} p &= -k \operatorname{th}(u-v) + k \operatorname{cth} u = \frac{k \operatorname{ch} v}{\operatorname{sh} u \operatorname{ch}(u-v)}, \\ q &= k \operatorname{th}(u-v) + k \operatorname{th} v = \frac{k \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} v \operatorname{ch}(u-v)}, \\ \omega &= -k \ln [\operatorname{cth} u - \operatorname{th} v], \end{aligned} \qquad (18)$$

и, следовательно,

$$ds^2 = \frac{k \operatorname{ch} v \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}(u-v)} \left[\frac{du^2}{\operatorname{sh}^2 u} + \frac{dv^2}{\operatorname{ch}^2 v}\right]. \qquad (19)$$

Из формы выражения ω следует, что система $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ потенциально изотермическая. Обозначая изотермические параметры через α и β, мы должны положить, как это явствует из формы (19) линейного элемента,

$$\alpha = \int \frac{du}{\operatorname{sh} u} = \ln \operatorname{th} \frac{u}{2}, \qquad \beta = \int \frac{dv}{\operatorname{ch} v} = 2 \operatorname{arctg} e^v. \qquad (20)$$

Изотермическая форма квадрата линейного элемента имеет вид

$$ds^2 = \frac{k}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta} [d\alpha^2 + d\beta^2]. \qquad (21)$$

Обозначая через x и y прямоугольные декартовы координаты на плоскости, мы должны иметь вместе с (21)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Сравнивая два выражения ds^2, без затруднения находим связь между α, β и x, y в следующей форме:

$$\sin\frac{y}{\sqrt{2k}}:\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{2k}}=\pm\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$$

$$\cos\frac{y}{\sqrt{2k}}:\operatorname{ch}\frac{x}{\sqrt{2k}}=\pm\operatorname{th}\frac{\alpha}{2}. \qquad (22)$$

Из равенств (22) следует, что кривые $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ или, безразлично, $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ — трансцендентные. Из формул (20) легко можем вывести соотношение

$$e^{v-u}=-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{th}\frac{\alpha}{2}$$

или в силу равенств (22)

$$e^{v-u}=\sin\frac{y}{\sqrt{{}^1/_2 k}}:\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{{}^1/_2 k}}. \qquad (23)$$

Таким образом, траектории $u - v = \text{const}$ — кривые того же вида, что и кривые $v = \text{const}$; следовательно, ортогональная система $\omega = \text{const}$, $u - v = \text{const}$ есть система потенциального типа, и мы имеем здесь случай, аналогичный тому, который имели для спиральных поверхностей (см. § 6).

Интересно отметить, что траектории и линии уровня новой потенциальной системы в данном случае опять образуют систему потенциального типа и т. д.; процесс можно продолжать беспредельно. Переход от одной потенциальной системы к следующей соответствует делению постоянного параметра k на 4. Кстати, можем заметить, что всякое изменение параметра k соответствует лишь подобному (гомотетическому) изменению линий $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, как это явствует из формы уравнений (22) и из формы линейного элемента (21).

§ 8. Изыскание потенциальных систем на сфере

Потенциальные системы на сфере упоминаются мимоходом в небольшой заметке Пето (A. Petot, Compt. Rend. Acad. Sci., Paris, 1891); при этом автор не указывает метода изыскания их и в виде примера приводит только систему софокусных сферических конических сечений и двойную ортогональную систему кругов (см. ниже, § 10).

Приступая к определению потенциальных систем на сфере, мы можем без ущерба для общности предположить, что радиус сферы равен 1 и центр находится в начале координат. Квадрат линейного элемента подобной сферы будем обозначать через $d\sigma^2$, основную функцию потенциальной системы через λ, координаты точки на поверхности сферы через X, Y, Z.

Пусть семейства $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ образуют потенциальную систему, так что

$$d\sigma^2=\frac{\partial\lambda}{\partial u}du^2+\frac{\partial\lambda}{\partial v}dv^2; \qquad (24)$$

нетрудно составить уравнение третьего порядка с частными производными, определяющее λ как функцию соответствующих потенциальных параметров.

В самом деле, для того чтобы квадратичная дифференциальная форма (24) выражала квадрат линейного элемента сферы, радиус которой равен 1, необходимо и достаточно, чтобы гауссова кривизна K формы $d\sigma^2$ равнялась 1. Пользуясь выражением K, выведенным в предшествующем параграфе, получаем, таким образом,

$$\delta\left[\frac{\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}}{\sqrt{\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}}}\right]=-2\sqrt{\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v}}, \qquad (25)$$

где символ δ обозначает операцию $\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}$. Если бы мы могли определить общий интеграл уравнения (25), то нашли бы самое общее решение задачи: «привести линейный элемент сферы радиуса, равного 1, к потенциальной форме».

Ограничение, налагаемое на функцию λ уравнением (25), можно выразить также в следующей форме:

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы квадратичная дифференциальная форма

$$d\sigma^2=\frac{\partial\lambda}{\partial u}du^2+\frac{\partial\lambda}{\partial v}dv^2 \qquad (24)$$

выражала квадрат линейного элемента сферы, радиус которой равен 1, заключается в том, чтобы выражение

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\frac{\partial\lambda}{\partial v}+\lambda^2=\delta\lambda+\lambda^2 \tag{26}$$

служило решением уравнения второго порядка с частными производными

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}\left\{\frac{\frac{\partial\theta}{\partial u}}{\frac{\partial\lambda}{\partial u}}+\frac{\frac{\partial\theta}{\partial v}}{\frac{\partial\lambda}{\partial v}}\right\}. \tag{27}$$

Действительно, полагая в уравнении (27)

$$\theta=\delta\lambda+\lambda^2$$

и производя выкладки, получаем уравнение (25). Заметим, между прочим, что уравнение (27) есть одно из трех уравнений, которыми определяются координаты X, Y, Z точки сферы как функции u, v.

Если предположить

$$d\sigma^2=e\,du^2+g\,dv^2, \tag{28}$$

то эти три уравнения имеют следующий вид (см. Б и а н к и, Лекции по дифференциальной геометрии, гл. V, § 63):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}&=-e\theta+\frac{1}{2e}\frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u}-\frac{1}{2g}\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial v},\\
\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}&=\frac{1}{2e}\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v},\\
\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}&=-g\theta-\frac{1}{2e}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial v}.
\end{aligned} \tag{29}$$

В данном случае мы должны положить

$$e=\frac{\partial\lambda}{\partial u},\qquad g=\frac{\partial\lambda}{\partial v},$$

вследствие чего уравнения (29) принимают вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}&=-\frac{\partial\lambda}{\partial u}\theta+\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^2}}{\frac{\partial\lambda}{\partial u}}\frac{\partial\theta}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}}{\frac{\partial\lambda}{\partial v}}\frac{\partial\theta}{\partial v},\\
\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}&=\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}}{\frac{\partial\lambda}{\partial u}}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}}{\frac{\partial\lambda}{\partial v}}\frac{\partial\theta}{\partial v},\\
\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}&=-\frac{\partial\lambda}{\partial v}\theta-\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}}{\frac{\partial\lambda}{\partial u}}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial^2\lambda}{\partial v^2}}{\frac{\partial\lambda}{\partial v}}\frac{\partial\theta}{\partial v}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Второе из них совпадает с уравнением (27).

Для того чтобы вполне определить потенциальную систему на сфере, остается выразить координаты X, Y, Z как функции потенциальных параметров u, v. Для этой цели можно воспользоваться уравнениями (30), которые образуют вполне интегрируемую систему; задача сведется к интегрированию системы линейных совокупных уравнений. Можно воспользоваться другим методом, указанным Дарбу (Darboux S., т. I, кн. I, гл. VI; т. II, кн. V, гл. I, II). Так как радиус сферы равен 1, то

$$X^2+Y^2+Z^2=1, \tag{31}$$

и можно положить

$$X=\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta},\qquad Y=i\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha\beta},\qquad Z=\frac{\alpha\beta-1}{\alpha\beta+1}, \tag{32}$$

где α, β — параметры мнимых прямолинейных образующих сферы. Квадрат линейного элемента сферы в параметрах α, β имеет вид

$$d\sigma^2=dX^2+dY^2+dZ^2=\frac{4d\alpha\,d\beta}{\alpha\beta+1}. \tag{33}$$

Задача наша сводится, таким образом, к приведению квадрата линейного элемента (24) к виду (33). Зная выражения α и β как функций u, v, из формул (32) найдем X, Y, Z. В большом числе частных случаев удается непосредственно выполнить потребное преобразование линейного элемента; вообще же говоря, для определения α и β

как функций u, v приходится интегрировать систему двух совокупных уравнений Риккати (общего вида), которые для потенциальной формы (24) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial u} &= \frac{1}{2} i \frac{\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\, \partial v}}{\sqrt{\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v}}}\cdot\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\partial\lambda}{\partial u}}\cdot(1+\alpha^2), \\ \frac{\partial\alpha}{\partial v} &= -\frac{1}{2} i \frac{\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\, \partial v}}{\sqrt{\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v}}}\cdot\alpha - \frac{1}{2} i\sqrt{\frac{\partial\lambda}{\partial v}}\cdot(1-\alpha^2). \end{aligned} \tag{34}$$

Найдя α, можем определить β непосредственно из того замечания, что для действительных точек сферы α и β — сопряженные мнимые величины. Заметим, что достаточно знать одну пару решений α_0, β_0, общие решения α, β легко могут быть найдены из соотношения

$$\frac{4d\alpha_0 d\beta_0}{(1+\alpha_0\beta_0)^2} = \frac{4d\alpha\, d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}, \tag{35}$$

откуда

$$\alpha = \frac{m\alpha_0 + n}{p\alpha_0 + q}, \quad \beta = \frac{p - q\beta_0}{n\beta_0 - m}, \tag{36}$$

или

$$\alpha = \frac{p - q\beta_0}{n\beta_0 - m}, \quad \beta = \frac{m\alpha_0 + n}{p\alpha_0 + q}, \tag{36'}$$

где m, n, p, q — постоянные (см. Darboux S., т. I, кн. I, стр. 148). Но все четыре постоянных не имеют существенного значения, так как формулы (36) выражают лишь вращение сферы или, безразлично, осей координат около начала, а формулы (36′) — подобное же вращение, сопровождаемое симметрическим преобразованием (там же). Вращение это вещественно, если величины q и m, p и n попарно сопряженные. Согласно предыдущему, если нам удалось найти одну пару решений α_0, A_0, для которой кривые $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$ действительные, то это решение можем считать за самое общее, отвлекаясь от возможного изменения *положения* сферы относительно осей координат и не различая между собой симметричных фигур на сфере.

§ 9. Потенциальные системы на сфере, для которых траекториями служит система меридианов

Уравнение (27) предыдущего параграфа, очевидно, допускает решение

$$\theta = a\lambda + b,$$

где a и b — постоянные. Поэтому, определяя λ из уравнения первого порядка с частными производными

$$\delta\lambda + \lambda^2 = a\lambda + b, \tag{37}$$

мы найдем, согласно замечанию, сделанному там же, основную функцию некоторой потенциальной системы на сфере. Обращаясь далее к уравнениям (30) предыдущего параграфа, легко убеждаемся, что в данном случае они допускают общее решение $\theta = \lambda - \frac{a}{2}$. Действительно, второе удовлетворяется при подстановке вместо θ произвольной линейной функции аргумента λ; первое и третье при подстановке $\theta = \lambda - \frac{a}{2}$ дают соответственно

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\{\delta\lambda + \lambda^2 - a\lambda\} = 0, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\{\delta\lambda + \lambda^2 - a\lambda\} = 0,$$

а эти соотношения выполняются в силу уравнения (37), из которого получаем

$$\delta\lambda + \lambda^2 - a\lambda = b = \mathrm{const}.$$

Система (30) допускает решения X, Y, Z и является системой вполне интегрируемой; следовательно, всякое решение может быть получено как однородная линейная функция X, Y, Z с постоянными коэффициентами. Между прочим,

$$\lambda - \frac{a}{2} = c_1X + c_2Y + c_3Z$$

или

$$\lambda = \frac{a}{2} + c_1X + c_2Y + c_3Z. \tag{38}$$

Отсюда заключаем, что семейство $\lambda = \mathrm{const}$ состоит из параллелей, а следовательно, семейство траекторий образуется меридианами; притом одной и той же основной функции λ, определяемой равенством (38), соответствует бесчисленное множество потенциальных систем, зависящих от произвольной функции, так как для определения семейств $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ остается выразить λ как функцию параметров u, v, а для этого необходимо интегрировать уравнение с частными производными (37). Таким образом, мы имеем здесь случай, разобранный в § 5 (гл. II) для произвольной поверхности вращения. Ограничиваясь действительными системами, мы можем всегда изменять систему осей координат так, чтобы новая ось Z была перпендикулярна к плоскостям параллелей $\lambda = \text{const}$. Тогда равенство (38) принимает вид

$$\lambda = \frac{a}{2} + c_3 Z; \tag{39}$$

кроме того, на основании общих замечаний в § 1, мы можем основную функцию потенциальной системы умножить на произвольный постоянный множитель и прибавить к ней произвольное постоянное; следовательно, окончательно можем положить

$$\lambda = Z, \tag{40}$$

считая $a = 0$, $c_3 = 1$. Полагая в уравнении (37) $a = 0$, $\lambda = Z$, получаем

$$\delta Z + Z^2 = b$$

или иначе

$$\frac{\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2}{\frac{\partial \lambda}{\partial u}} + \frac{\left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2}{\frac{\partial \lambda}{\partial v}} + Z^2 = b,$$

или, наконец,

$$\Delta Z + Z^2 = b, \tag{41}$$

где Δ есть знак дифференциального параметра первого порядка относительно сферы. На основании общей теории дифференциальных инвариантов на поверхности имеем

$$\Delta Z = 1 - Z^2$$

(см., например, Б и а н к и, Лекции по дифференциальной геометрии, гл. IV, § 60) и, следовательно, из равенства (41) получаем

$$b = 1 - Z^2 + Z^2 = 1. \tag{42}$$

Уравнение (37) окончательно принимает вид

$$\delta\lambda = 1 - \lambda^2; \tag{43}$$

после интегрирования имеем

$$\lambda = \frac{e^{u+v+A\,(u-v)} - 1}{e^{u+v+A\,(u-v)} + 1}, \tag{44}$$

где $A\,(u - v)$ — произвольная функция аргумента $u - v$. Результат, полученный нами, вполне согласен с общими результатами § 5. Квадрат линейного элемента $d\sigma^2$ относительно системы $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ имеет вид

$$d\sigma^2 = \frac{2e^{u+v+A\,(u-v)}}{(e^{u+v+A\,(u-v)} + 1)^2}\,[\{1 + A'\,(u - v)\}\,du^2 + \\ + \{1 - A'\,(u - v)\}\,dv^2]. \tag{45}$$

Для построения кривых $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ мы могли бы воспользоваться указаниями § 5, но в данном случае возможен другой метод, который приведет нас к особенно простым результатам.

Проведем в точке $(0, 0, -1)$ плоскость, касательную к сфере, и будем пользоваться стереографической проекцией сферы на эту плоскость, принимая, следовательно, центр проекции в точке $(0, 0, 1)$. Обозначая через x, y координаты точки плоскости относительно осей, параллельных осям X и Y, имеем формулы преобразования

$$x = \frac{2X}{-Z+1}, \qquad y = \frac{2Y}{-Z+1}, \tag{46}$$

а в силу их

$$ds_1^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{4d\sigma^2}{(-Z+1)^2}, \tag{47}$$

где ds_1 есть линейный элемент плоскости.

Для любой из потенциальных систем, о которых идет речь,

$$d\sigma^2 = \frac{\partial\lambda}{\partial u}\,du^2 + \frac{\partial\lambda}{\partial v}\,dv^2 = \frac{\partial Z}{\partial u}\,du^2 + \frac{\partial Z}{\partial v}\,dv^2;$$

следовательно, на основании равенства (47)

$$ds_1^2 = \frac{4\frac{\partial Z}{\partial u}du^2 + 4\frac{\partial Z}{\partial v}dv^2}{(-Z+1)^2} = \frac{\partial\omega}{\partial u}du^2 + \frac{\partial\omega}{\partial v}dv^2, \tag{48}$$

где

$$\omega = \frac{4}{-Z+1}. \tag{49}$$

Таким образом, стереографическая проекция исследуемых потенциальных систем дает на плоскости xy потенциальные системы с общей основной функцией ω, т. е. так же, как и на сфере, потенциальные системы того типа, который мы исследовали в § 5 (гл. II). Так как

$$\omega = \frac{4}{-Z+1} = \frac{4}{-\lambda+1}, \tag{49'}$$

то линии уровня, а следовательно, и траектории потенциальных систем на плоскости соответствуют (в силу стереографической проекции) линиям уровня и траекториям систем на сфере. Отсюда заключаем, что линии уровня на плоскости — концентрические окружности с центром в начале, а траектории — прямые, проходящие через начало. Все это вполне согласно с результатами § 5, так как линейный элемент плоскости относительно упомянутой ортогональной системы, т. е., другими словами, в полярных координатах, имеет форму линейного элемента поверхности вращения. Группа преобразований, допускаемая потенциальными системами на плоскости, вполне определяется, как это следует из § 5, двумя своими свойствами: во-первых, она конформная, во-вторых, траекториями ее служат прямые, проходящие через начало координат. Очевидно, оба эти свойства имеют место для группы подобных (гомотетических) преобразований с центром подобия в начале; следовательно, это и есть группа, соответствующая потенциальным системам на плоскости. Скорость течения, устанавливаемого уравнениями группы, очевидно, пропорциональна радиусу-вектору точки, что опять согласно с § 5. Семейство линий $u = \text{const}$ на плоскости может быть получено, если возьмем произвольную кривую и подвергнем ее группе гомотетических преобразований относительно начала. Семейство $v = \text{const}$, ортогональное $u = \text{const}$, очевидно, тоже состоит из подобных кривых при том же центре подобия.

В результате видим, что *самая общая потенциальная система на сфере, для которой траекториями служат меридианы, может быть получена, если на плоскости, прикасающейся к сфере в одном из полюсов, возьмем произвольное семейство подобных кривых, с центром подобия в полюсе, и семейство их ортогональных траекторий* (*которое тоже состоит из подобных кривых*) *и проектируем стереографически полученную ортогональную систему на сферу.*

Семейство подобных кривых на плоскости xy может быть представлено уравнением вида $x\cdot\chi(y/x) = \text{const}$ или дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \chi_1\left(\frac{y}{x}\right). \tag{50}$$

Переходя от координат x, y к параметрам α, β, в силу соотношений (46) и (32) имеем

$$x = \alpha + \beta, \quad y = i(\beta - \alpha) \tag{51}$$

и, следовательно, получаем из (50) дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = F\left(\frac{\alpha}{\beta}\right). \tag{52}$$

Этим уравнением определяется на сфере семейство кривых, которое можно принять за одно из семейств потенциальной системы, например $u = \text{const}$. Условие ортогональности двух направлений, из которых одно характеризуется дифференциалами $d\alpha$, $d\beta$, а другое — дифференциалами $d'\alpha$, $d'\beta$, в координатах α, β на сфере имеет вид

$$d\alpha\, d'\beta + d\beta\, d'\alpha = 0$$

(см. Бианки, Лекции по дифференциальной геометрии, гл. III, § 34); следовательно, семейство $v = \text{const}$ определяется уравнением

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -F\left(\frac{\alpha}{\beta}\right),$$

и можно оба семейства характеризовать дифференциальным уравнением первого порядка второй степени

$$\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2 = \Psi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right), \tag{53}$$

где $\Psi = F^2$. Давая всевозможные значения функции Ψ, будем получать на сфере всевозможные ортогональные системы, относительно которых квадрат линейного элемента имеет потенциальную форму и для которых траекториями служат меридианы. Кстати, можем заметить, что уравнение семейства меридианов в координатах α, β есть $\alpha/\beta = \text{const}$, как это явствует из формул (32).

Напишем, наконец, уравнение (53) в полярных координатах на плоскости xy. Обозначая через γ радиус-вектор и через φ — полярный угол, имеем $x = \gamma\cos\varphi$, $y = \gamma\sin\varphi$, или в силу (51)

$$\alpha + \beta = \gamma\cos\varphi, \qquad i(\beta - \alpha) = \gamma\sin\varphi.$$

Складывая и вычитая после умножения второго равенства на i, имеем

$$\alpha = \frac{1}{2}\gamma e^{i\varphi}, \qquad \beta = \frac{1}{2}\gamma e^{-i\varphi}. \tag{54}$$

Дифференцируя равенства (54) и вставляя $d\alpha$, $d\beta$ в уравнение (53), получаем после некоторых преобразований

$$\left(\frac{\gamma\,d\varphi}{d\gamma}\right)^2 + 2\psi(\varphi)\frac{\gamma\,d\varphi}{d\gamma} - 1 = 0, \tag{55}$$

где

$$\psi(\varphi) = i\,\frac{1 + e^{4i\varphi}\Psi(e^{2i\varphi})}{1 - e^{4i\varphi}\Psi(e^{2i\varphi})}. \tag{56}$$

Как известно, $\frac{\gamma\,d\varphi}{d\gamma}$ есть тангенс угла, образуемого радиусом-вектором с касательной; поэтому обозначая через θ этот угол для одного из семейств кривых, определяемых дифференциальным уравнением (55), т. е., например, для семейства $u = \text{const}$, и замечая, что для семейства $v = \text{const}$ тангенс соответствующего угла равен $-\operatorname{ctg}\theta$ (в силу ортогональности обоих семейств), имеем на основании уравнения (55)

$$\psi(\varphi) = \frac{-\operatorname{tg}\theta + \operatorname{ctg}\theta}{2} = \operatorname{ctg} 2\theta. \tag{57}$$

Равенство (57) устанавливает геометрический смысл функции $\psi(\varphi)$.

Нам остается для полноты решения поставленной задачи указать, как определяется функция $A(u - v)$, входящая в выражение (45) квадрата линейного элемента сферы, по данному виду функции $\psi(\varphi)$. Для этой цели можно два выражения квадрата линейного элемента плоскости (48) и

$$ds_1^2 = d\gamma^2 + \gamma^2\,d\varphi^2 \tag{58}$$

преобразовать к координатам

$$\omega \text{ и } \xi = u - v.$$

В силу равенств (49′) и (44) выражение (48) принимает вид

$$ds_1^2 = 2e^{u+v+A(u-v)}[\{1 + A'(u - v)\}du^2 + \{1 - A'(u-v)\}dv^2], \tag{59}$$

где функция $A(u - v)$ имеет то же значение, что и в выражении (45). Связь между потенциальными параметрами u, v и координатами ω, ξ устанавливается равенствами

$$u - v = \xi, \quad \omega = \omega(u + v + A(\xi));$$

так как на основании соотношения (49′)

$$\omega = 2[e^{u+v+A(u-v)} + 1],$$

то имеем

$$u - v = \xi, \qquad u + v = \ln\left(\frac{1}{2}\omega - 1\right) - A(\xi), \tag{60}$$

где $\ln\left(\frac{1}{2}\omega - 1\right)$ есть функция, которая в § 5 была обозначена через $\Omega(\omega)$. На основании общих результатов того же параграфа имеем в координатах ω, ξ

$$ds_1^2 = \frac{1}{2}\Omega' d\omega^2 + \frac{1 - A'^2(\xi)}{2\Omega'}d\xi^2,$$

или в данном случае

$$ds_1^2 = \frac{\frac{1}{4}d\omega^2}{\frac{1}{2}\omega - 1} + \left(\frac{1}{2}\omega - 1\right)[1 - A'^2(\xi)]\,d\xi^2. \tag{61}$$

Из равенства (49) на основании формул (32) и (54) имеем

$$\omega = 2\left(1 + \frac{1}{4}\gamma^2\right) \tag{62}$$

и, следовательно,

$$ds_1^2 = d\gamma^2 + \gamma^2 \frac{1 - A'^2(\xi)}{4} d\xi^2.$$

С другой стороны,

$$ds_1{}^2 = d\gamma^2 + \gamma^2 d\varphi^2 \tag{58}$$

и, следовательно,

$$d\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{1 - A'^2(\xi)}\, d\xi, \qquad \varphi = \frac{1}{2}\int \sqrt{1 - A'^2(\xi)}\, d\xi. \tag{63}$$

Равенства (62) и (63) устанавливают связь между координатами ω, ξ и γ, φ.

Дифференциальное уравнение (55) определяет семейства кривых $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ и потому должно быть равносильно уравнению

$$du\, dv = 0. \tag{64}$$

На основании формул (60), это последнее может быть записано так:

$$-\frac{\frac{1}{16}d\omega^2}{\left(\frac{1}{2}\omega - 1\right)^2} + \frac{\frac{1}{4}d\omega}{\frac{1}{2}\omega - 1} A'(\xi)\, d\xi + \frac{1 - A'^2(\xi)}{4} d\xi^2 = 0,$$

или в силу соотношений (62) и (63)

$$\left(\frac{\gamma\, d\varphi}{d\gamma}\right)^2 + \frac{\gamma A'(\xi)\, d\xi}{d\gamma} - 1 = 0. \tag{65}$$

Сравнивая с (55), имеем

$$A'(\xi)\, d\xi = 2\psi(\varphi)\, d\varphi, \tag{66}$$

откуда

$$A(\xi) = 2\int \psi(\varphi)\, d\varphi. \tag{66'}$$

Равенства (63) и (66′) устанавливают связь между ξ и φ и позволяют определить функцию $A(\xi)$. Произведя простое преобразование, мы их можем написать в более

удобной форме:

$$\xi = 2\int \sqrt{1 + \psi^2(\varphi)}\, d\varphi, \qquad A(\xi) = 2\int \psi(\varphi)\, d\varphi. \tag{67}$$

Постоянные, вводимые квадратурами, не имеют существенного значения, так как изменяют лишь потенциальные параметры u, v на постоянные величины.

Из равенств (60), (62), (63), (67) мы можем вывести формулы, непосредственно связывающие координаты γ, φ и u, v:

$$\frac{1}{4}\gamma^2 = e^{u+v+A(u-v)}, \qquad \varphi = \frac{1}{2}\int \sqrt{1 - A'^2(u-v)}\, d(u-v) \tag{68}$$

или

$$\frac{1}{4}\gamma^2 = e^{u+v+2\int \psi(\varphi)\, d\varphi}, \qquad 2\int \sqrt{1 + \psi^2(\varphi)}\, d\varphi = u - v. \tag{68'}$$

Наконец, сопоставляя формулы (32) и (54), имеем

$$X = \frac{\gamma\cos\varphi}{1 + {}^1\!/_4\gamma^2}, \quad Y = \frac{\gamma\sin\varphi}{1 + {}^1\!/_4\gamma^2}, \quad Z = \frac{{}^1\!/_4\gamma^2 - 1}{{}^1\!/_4\gamma^2 + 1}. \tag{69}$$

Рассмотрим два частных случая.

Возьмем, во-первых, на плоскости xy логарифмическую спираль с полюсом в начале. Гомотетическое преобразование дает семейство таких же спиралей, отличающихся между собою лишь положением (поворотом около начала). Все спирали пересекают радиусы-векторы под постоянным углом; ортогональное семейство, очевидно, тоже состоит из равных логарифмических спиралей. Стереографическая проекция дает на сфере две системы равных линий; притом в силу изогональности стереографической проекции получаем, очевидно, две взаимно ортогональные системы локсодром по отношению к одной системе меридианов. Угол, который мы выше обозначали через θ, в данном случае, очевидно, постоянный и, следовательно,

$$\psi(\varphi) = \operatorname{ctg} 2\theta = \text{const} = k. \tag{70}$$

Формулы (67) дают

$$\xi = 2\sqrt{1 + k^2}\cdot\varphi, \qquad A(\xi) = 2k\varphi,$$

откуда

$$A(\xi)=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\xi. \tag{71}$$

Квадрат линейного элемента имеет вид

$$d\sigma^2=\frac{2e^{u+v+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}(u-v)}}{\left(e^{u+v+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}(u-v)}+1\right)^2}\times$$

$$\times\left[\frac{\sqrt{1+k^2}+k}{\sqrt{1+k^2}}du^2+\frac{\sqrt{1+k^2}-k}{\sqrt{1+k^2}}dv^2\right] \tag{72}$$

или, если введем снова для удобства угол θ,

$$d\sigma^2=\frac{4e^{2\cos^2\theta\cdot u+2\sin^2\theta\cdot v}}{(e^{2\cos^2\theta\cdot u+2\sin^2\theta\cdot v}+1)^2}[\cos^2\theta\,du^2+\sin^2\theta\,dv^2]. \tag{72'}$$

Очевидно, имеем потенциально-изотермическую систему. Обозначая изотермические параметры через u, v, можем положить

$$u_1=2\cos\theta\cdot u,\quad v_1=2\sin\theta\cdot v, \tag{73}$$

и тогда

$$d\sigma^2=\frac{e^{\cos\theta\cdot u_1+\sin\theta\cdot v_1}}{(e^{\cos\theta\cdot u_1+\sin\theta\cdot v_1}+1)^2}[du_1^2+dv_1^2]. \tag{74}$$

Формулы (68) дают

$$\gamma=2e^{\cos^2\theta\cdot u+\sin^2\theta\cdot v},\qquad \varphi=\frac{1}{2}\sin 2\theta\cdot(u-v); \tag{75}$$

следовательно, на основании формул (69) имеем

$$X=\frac{2e^{\cos^2\theta\cdot u+\sin^2\theta\cdot v}\cos\left\{\frac{1}{2}\sin 2\theta\cdot(u-v)\right\}}{1+e^{2\cos^2\theta\cdot u+2\sin^2\theta\cdot v}},$$

$$Y=\frac{2e^{\cos^2\theta\cdot u+\sin^2\theta\cdot v}\sin\left\{\frac{1}{2}\sin 2\theta\cdot(u-v)\right\}}{1+e^{2\cos^2\theta\cdot u+2\sin^2\theta\cdot v}}, \tag{76}$$

$$Z=\frac{e^{2\cos^2\theta\cdot u+2\sin^2\theta\cdot v}-1}{e^{2\cos^2\theta\cdot u+2\sin^2\theta\cdot v}+1}.$$

Выражения X, Y, Z в изотермических параметрах получаются простой заменой

$$2u\cos\theta=u_1,\qquad 2v\sin\theta=v_1.$$

Возьмем, во-вторых, на плоскости xy произвольную прямую, не проходящую через начало. Без ущерба для общности можем предположить ее параллельной оси x. Гомотетическое преобразование даст нам все семейство прямых, параллельных той же оси; ортогональное семейство будет состоять из прямых, параллельных оси y. На сфере, при стереографической проекции, получим известную двойную ортогональную систему кругов, проходящих через полюс $(0,\ 0,\ +1)$, круги каждого семейства касаются одной и той же прямой; в данном случае этими двумя общими касательными служат прямые, параллельные осям X и Y.

Угол θ в рассматриваемом случае равен полярному углу φ; следовательно,

$$\psi(\varphi)=\operatorname{ctg}2\theta=\operatorname{ctg}2\varphi. \tag{77}$$

Сохраняя все прежние обозначения, имеем

$$\xi=2\int\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 2\varphi}\,d\varphi=\ln\operatorname{tg}\varphi,$$

$$A(\xi)=2\int\operatorname{ctg}2\varphi\,d\varphi=\ln\sin 2\varphi-\ln 2,$$

$$A(\xi)=\ln\frac{e^{\xi}}{1+e^{2\xi}}=\xi-\ln(1+e^{2\xi}),$$

$$d\sigma^2=\frac{4}{(1+e^{-2u}+e^{-2v})^2}\cdot(e^{-2u}du^2+e^{-2v}dv^2). \tag{78}$$

Полагая

$$e^{-u}=u_1,\qquad e^{-v}=v_1, \tag{79}$$

приводим $d\sigma^2$ к изотермическому виду:

$$d\sigma^2=\frac{4}{(1+u_1^2+v_1^2)^2}(du_1^2+dv_1^2). \tag{80}$$

Наконец, определяя γ, φ, X, Y, Z, имеем

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \frac{2e^u}{\sqrt{1+e^{2(u-v)}}} = \frac{2}{\sqrt{e^{-2u}+e^{-2v}}}, \\
\varphi &= \operatorname{arctg} e^{u-v}, \\
X &= \frac{2e^{-u}}{e^{-2u}+e^{-2v}+1}, \\
Y &= \frac{2e^{-v}}{e^{-2u}+e^{-2v}+1}, \\
Z &= \frac{1-e^{-2u}-e^{-2v}}{e^{-2u}+e^{-2v}+1}.
\end{aligned} \tag{81}
$$

В обоих примерах мы получили потенциально-изотермические системы, так как взаимно ортогональные семейства подобных кривых на плоскости xy, из которых мы исходили, в том и другом случае образуют изотермическую сеть, что, вообще говоря, конечно, не имеет места. Определением всевозможных потенциально-изотермических систем на сфере займемся в следующем параграфе.

§ 10. Потенциально-изотермические системы на сфере

Согласно общим результатам § 4 (гл. II), мы должны иметь для потенциально-изотермических систем на сфере

$$\lambda = \lambda\,(U+V), \tag{82}$$

где U и V — функции соответственно аргументов u и v. Вставляя выражение (82) в основное уравнение (25) § 8, получаем

$$\left(\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)'(U'+V') + \frac{1}{2}\frac{\lambda''}{\lambda'}\left(\frac{U''}{U'}+\frac{V''}{V'}\right) = -2\lambda', \tag{83}$$

где знак $'$ обозначает дифференцирование по соответственным аргументам; между прочим, следовательно,

$$\lambda' = \frac{d\lambda\,(U+V)}{d\,(U+V)}, \qquad \lambda'' = \frac{d^2\lambda\,(U+V)}{d\,(U+V)^2} \quad \text{и т. д.}$$

Соотношение (83) позволяет определить всевозможные

потенциально-изотермические системы на сфере. Квадрат линейного элемента при этом имеет вид

$$d\sigma^2 = \lambda'\,(U+V)\,(U'du^2 + V'dv^2), \tag{84}$$

откуда, между прочим, заключаем, что λ' и λ'' необходимо отличны от нуля, так как при $\lambda' = 0$ имели бы $d\sigma^2 = 0$, а при $\lambda'' = 0$ гауссова кривизна $d\sigma^2$ равнялась бы нулю.

Заметим предварительно, что мы всегда имеем право заменить функции U, V новыми U_1, V_1, полагая

$$U_1 = mU + n, \quad V_1 = mV + p,$$

где m, n, p — произвольные постоянные, так как

$$\lambda(U+V) = \lambda\left(\frac{U_1+V_1}{m} - \frac{n+p}{m}\right) = \lambda_1(U_1+V_1),$$

$$\lambda_1'(U_1+V_1) = \frac{1}{m}\lambda'(U+V), \quad U_1' = mU', \quad V_1' = mV'$$

и, следовательно,

$$d\sigma^2 = m\lambda_1'\frac{U_1'du^2 + V_1'dv^2}{m} = \lambda_1'(U_1'du^2 + V_1'dv^2).$$

Сопоставляя это замечание с общими результатами § 1 (гл. I), в силу которых мы, кроме того, имеем право потенциальные параметры u, v заменять линейными функциями их, полагая $u = au_1 + b$, $v = av_1 + c$, можем высказать такое общее утверждение:

если при интегрировании уравнения (83), определяющего основную функцию λ, получим

$$\lambda = \lambda\,(U_1 + V_1),$$

причем

$$U_1 = mU\,(au+b) + n, \qquad V_1 = mV\,(av+c) + p,$$

где m, n, p, a, b, c — произвольные постоянные, а U и V — некоторые определенные функции аргументов $au+b$ и $av+c$, то мы имеем право без ущерба для общности решения всем произвольным постоянным приписать частные значения, например положить

$$m = a = 1, \quad n = p = b = c = 0,$$

в силу чего

$$\lambda = \lambda\,(U\,(u) + V\,(v)).$$

Этим замечанием будем часто пользоваться в дальнейшем.

I. Приступая к разбору уравнения (83), можем, во-первых, предположить $U' = \text{const}$, $V' = \text{const}$, откуда

$$U = mu + n, \qquad V = mkv + p,$$

где m, n, p, k — постоянные; по предыдущему, можем положить $m = 1$, $n = p = 0$, и тогда

$$U = u, \qquad V = kv. \tag{85}$$

Уравнение (83) принимает вид

$$\left(\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)'\cdot(1+k) = -2\lambda'.$$

Дважды производя интегрирование, имеем

$$(1+k)\lambda' = -\lambda^2 + a\lambda + b, \tag{86}$$

или, замечая, что $\frac{\partial\lambda}{\partial u} = \lambda'$, $\frac{\partial\lambda}{\partial v} = k\lambda'$, — в другой форме:

$$\delta\lambda + \lambda^2 = a\lambda + b. \tag{86'}$$

На основании результатов предыдущего параграфа отсюда заключаем, что семейство линий $\lambda = \text{const}$ есть семейство параллелей, и без ущерба для общности можно положить $\lambda = c_1 Z + c_2$, где c_1, c_2 — произвольно выбранные постоянные. В данном случае удобно взять $c_1 = c_2 = \frac{1+k}{2}$. Уравнение (86′), как было упомянуто в § 9, может быть написано в виде

$$\Delta\lambda + \lambda^2 = a\lambda + b;$$

подставляя

$$\lambda = \frac{1+k}{2}(Z+1)$$

и замечая, что $\Delta Z = 1 - Z^2$, имеем

$$\frac{(1+k)^2}{4}(1-Z^2) + \frac{(1+k)^2}{4}(Z^2+2Z+1) = a\frac{1+k}{2}(Z+1) + b,$$

откуда

$$a = 1 + k, \qquad b = 0.$$

Уравнение (86) окончательно принимает вид

$$(1+k)\lambda' = \lambda\,[(1+k) - \lambda], \tag{87}$$

откуда после интегрирования

$$\lambda = \frac{(1+k)\,e^{u+kv}}{e^{u+kv}+1}. \tag{88}$$

При этом мы не ввели постоянного для интегрирования, которое здесь не имеет существенного значения. Квадрат линейного элемента имеет вид

$$ds^2 = \frac{(1+k)\,e^{u+kv}}{(e^{u+kv}+1)^2}(du^2 + dv^2). \tag{89}$$

Легко усмотреть, что он получается из квадрата линейного элемента (72′) предшествующего параграфа заменой $2\cos^2\theta\cdot u$ и $2\cos^2\theta\cdot v$ соответственно через u и v, причем полагаем $\operatorname{tg}^2\theta = k$.

Таким образом, семейства $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ состоят из локсодром, пересекающих меридианы под углами θ и $\frac{\pi}{2} + \theta$.

Формулы (75) и (76) § 9 после соответственной замены параметров дают

$$\gamma = 2e^{\frac{u+kv}{2}}, \qquad \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{k}\cdot(u-v) \tag{90}$$

и

$$X = \frac{2e^{\frac{u+kv}{2}}\cos\left\{\frac{\sqrt{k}\cdot(u-v)}{2}\right\}}{1+e^{u+kv}},$$

$$Y = \frac{2e^{\frac{u+kv}{2}}\sin\left\{\frac{\sqrt{k}\cdot(u-v)}{2}\right\}}{1+e^{u+kv}}, \tag{91}$$

$$Z = \frac{e^{u+kv}-1}{e^{u+kv}+1}.$$

II. Предположим, во-вторых, что $U' = \text{const}$, но V' есть функция v, отличная от постоянного. Можем положить без ущерба для общности $U = u$. Уравнение (83) тогда принимает вид

$$\left(\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)'(1+V') + \frac{1}{2}\frac{\lambda''}{\lambda'}\cdot\frac{V''}{V'} = -2\lambda'.$$

Деля обе части на λ''/λ' — выражение, заведомо отличное от нуля (см. выше),— и дифференцируя по u, имеем

$$\left(\ln\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)''\cdot(1+V') = -2\left(\frac{\lambda'^2}{\lambda''}\right)'. \tag{92}$$

Из равенства (92) мы получили бы, что V' — функция аргумента v — в то же время должна быть функцией аргумента $u+V$, от которого зависит λ; поэтому необходимо положить

$$\left(\ln\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)'' = 0, \qquad \left(\frac{\lambda'^2}{\lambda''}\right)' = 0,$$

откуда, обозначая аргумент $u+V$ через t, имеем

$$\frac{\lambda''}{\lambda'} = Ce^{at}, \qquad \frac{\lambda'^2}{\lambda''} = b, \tag{93}$$

где C, a, b — постоянные. Легко убедиться, что равенства (93) противоречат одно другому, и, следовательно, второе наше предположение невозможно.

III. Остается допустить, что U' и V' отличны от постоянных. В таком случае можем выразить эти величины как функции соответственно U и V. Обозначая временно U через x, V через y, имеем, таким образом,

$$\begin{aligned} U' &= X(x), \quad V' = Y(y),\\ U &= x, \qquad\quad V = y. \end{aligned} \tag{94}$$

Дифференцируя U' и V' по u и v, получаем

$$U'' = X'X, \quad V'' = Y'Y,$$

откуда

$$\frac{U''}{U'} = X', \qquad \frac{V''}{V'} = Y'. \tag{95}$$

В силу равенств (94) и (95) уравнение (83) принимает вид

$$\left(\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)'(X+Y) + \frac{1}{2}\frac{\lambda''}{\lambda'}(X'+Y') = -2\lambda', \tag{96}$$

причем аргумент функции λ (и ее производных λ', λ'', ...) равен $x+y$. Далее мы можем сделать два предположения: или сумма $X+Y$ может быть выражена как функция аргумента $x+y$, или нет. В первом случае, следовательно,

$$X + Y = \psi(x+y);$$

выполняя над обеими частями этого равенства операцию $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, имеем

$$X' + Y' = 2\psi'(x+y),$$

т. е. $X' + Y'$ есть функция того же аргумента. Во втором случае, как легко показать, и сумма $X' + Y'$ не может быть выражена как функция $x+y$. Действительно, если положим

$$X' + Y' = \psi(x+y),$$

то необходимо положить вместе с тем

$$\left(\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)' = 0, \tag{97}$$

так как в противном случае из равенства (96) мы получили бы $X+Y$ как функцию $x+y$, т. е. имели бы первый случай. Уравнение (97) дает

$$\frac{\lambda''}{\lambda'} = \text{const} = c, \qquad \lambda' = Ae^{c(x+y)},$$

где A — постоянное. Вставляя полученные результаты в уравнение (96), имеем равенство

$$\frac{1}{2}c(X'+Y') = -2Ae^{c(x+y)},$$

очевидно невозможное, так как, если мы продифференцируем его по x и y, то получим

$$0 = -2Ac^2e^{c(x+y)}.$$

А. Итак, допустим, во-первых, что

$$X + Y = \psi(x + y). \tag{98}$$

Дифференцируя обе части равенства (98) последовательно по x и по y, имеем

$$0 = \psi''(x + y),$$

откуда

$$\psi(x + y) = a(x + y) + b.$$

Сопоставляя этот результат с равенством (98), имеем

$$X = ax + b_1, \quad Y = ay + b_2, \tag{99}$$

где a, b_1, b_2 — постоянные и

$$b = b_1 + b_2.$$

Возвращаясь к прежним обозначениям, напишем равенства (99) в следующей форме:

$$U' = aU + b_1, \quad V' = aV + b_2.$$

Интегрируя, получаем

$$U = \frac{1}{a} e^{au+c_1} - \frac{b_1}{a}, \qquad V = \frac{1}{a} e^{av+c_2} - \frac{b_2}{a},$$

где, согласно замечанию, сделанному в начале параграфа, можем положить

$$a = 1, \; b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0.$$

Таким образом, окончательно

$$U = e^u, \qquad V = e^v, \tag{100}$$
$$X = x = e^u, \quad Y = y = e^v.$$

Полагая еще для удобства

$$x + y = e^u + e^v = t,$$

напишем уравнение (96) в следующем виде:

$$\left(\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)' t + \frac{\lambda''}{\lambda'} = -2\lambda'. \tag{101}$$

Интегрируя два раза, имеем

$$\lambda' t = -\lambda^2 + m\lambda + n, \tag{102}$$

где m, n — постоянные. Мы имеем право прибавлять к λ постоянное, так как уравнение (101) содержит лишь λ' и высшие производные; выберем это постоянное так, чтобы многочлен второй степени относительно λ, стоящий во второй части равенства (102), после преобразования не содержал члена первой степени. Тогда будем иметь

$$\lambda' t + \lambda^2 = \frac{c^2}{4}, \tag{103}$$

где c — постоянное. Так как

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \lambda' e^u, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \lambda' e^v,$$

то уравнение (103) можем написать также в следующем виде:

$$\delta\lambda + \lambda^2 = \frac{c^2}{4} \tag{104}$$

или

$$\Delta\lambda + \lambda^2 = \frac{c^2}{4}. \tag{104'}$$

Отсюда заключаем, что потенциальная система принадлежит к тому типу, который мы рассматривали в предыдущем параграфе, и можем положить

$$\lambda = c_1 Z + c_2.$$

Вставляя в уравнение (104'), получаем

$$c_1^2(1 - Z^2) + c_1^2 Z^2 + 2c_1c_2Z + c_2^2 = \frac{c^2}{4},$$

откуда

$$c_2 = 0, \quad c_1 = \frac{c}{2}$$

и, следовательно,

$$\lambda = \frac{c}{2} Z.$$

Постоянное c, очевидно, должно быть отлично от нуля, так как в противном случае имели бы $\lambda = 0$, что невозможно. Интегрируя уравнение (103), имеем

$$\lambda = \frac{c}{2} \cdot \frac{At^c - 1}{At^c + 1} = \frac{c}{2} \cdot \frac{A(e^u + e^v)^c - 1}{A(e^u + e^v)^c + 1}.$$

Изменяя u и v на одно и то же постоянное, можем сделать $A = 1$ и, таким образом, окончательно получаем

$$\lambda = \frac{c}{2} \cdot \frac{(e^u + e^v)^c - 1}{(e^u + e^v)^c + 1} \tag{105}$$

и, следовательно,

$$d\sigma^2 = \frac{c^2 (e^u + e^v)^{c-1}}{[1 + (e^u + e^v)^c]^2} [e^u du^2 + e^v dv^2]. \tag{106}$$

Полагая

$$e^{u/2} = u_1, \quad e^{v/2} = v_1, \tag{107}$$

приведем $d\sigma^2$ к изотермическому виду:

$$d\sigma^2 = \frac{4c^2 (u_1^2 + v_1^2)^{c-1}}{[1 + (u_1^2 + v_1^2)^c]^2} [du_1^2 + dv_1^2]. \tag{108}$$

Полагая

$$u_1 + v_1 i = \alpha^{1/c}, \quad u_1 - v_1 i = \beta^{1/c}, \tag{109}$$

имеем

$$d\sigma^2 = \frac{4d\alpha\, d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2};$$

следовательно, α, β — параметры мнимых прямолинейных образующих сферы.

Из равенств (109) и (107) имеем

$$\alpha = (e^{u/2} + ie^{v/2})^c, \quad \beta = (e^{u/2} - ie^{v/2})^c. \tag{110}$$

Вставляя эти выражения в формулы (32) § 8, получаем координаты X, Y, Z точки сферы как функции потенциальных параметров:

$$\begin{aligned} X &= \frac{(e^{u/2} + ie^{v/2})^c + (e^{u/2} - ie^{v/2})^c}{1 + (e^u + e^v)^c}, \\ Y &= i\,\frac{(e^{u/2} - ie^{v/2})^c - (e^{u/2} + ie^{v/2})^c}{1 + (e^u + e^v)^c}, \\ Z &= \frac{(e^u + e^v)^c - 1}{1 + (e^u + e^v)^c}. \end{aligned} \tag{111}$$

Вводя в равенства (109) полярные координаты γ, φ стереографической проекции сферы, которыми мы пользовались в предыдущем параграфе, получаем в силу

формул (54)

$$u_1 + v_1 i = \left(\frac{1}{2}\gamma\right)^{1/c} e^{\frac{i\varphi}{c}}, \quad u_1 - v_1 i = \left(\frac{1}{2}\gamma\right)^{1/c} e^{-\frac{i\varphi}{c}},$$

или, складывая и вычитая,

$$\begin{aligned} u_1 &= e^{u/2} = \left(\frac{1}{2}\gamma\right)^{1/c} \cos\frac{\varphi}{c}, \\ v_1 &= e^{v/2} = \left(\frac{1}{2}\gamma\right)^{1/c} \sin\frac{\varphi}{c}. \end{aligned} \tag{112}$$

Отсюда заключаем, что в стереографической проекции сферы семейства $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ изображаются семействами подобных кривых

$$\gamma^{1/c} \cos\frac{\varphi}{c} = \text{const}, \quad \gamma^{1/c} \sin\frac{\varphi}{c} = \text{const}. \tag{113}$$

Определяя угол θ касательной к кривой первого семейства с радиусом-вектором, имеем

$$\operatorname{tg}\theta = \gamma\frac{d\varphi}{d\gamma} = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{c},$$

и, следовательно, функция, которая в предыдущем параграфе была обозначена через $\psi(\varphi)$, в данном случае имеет следующее значение:

$$\begin{aligned} \psi(\varphi) = \operatorname{ctg} 2\theta = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\theta - \operatorname{tg}\theta) &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{c} - \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{c}\right) = \\ &= -\operatorname{ctg}\frac{2\varphi}{c}. \end{aligned} \tag{114}$$

Изменяя в выражении (106) знак постоянного c, видим, что новое значение $d\sigma^2$ совпадает с первоначальным; производя ту же замену в формулах (111), убеждаемся, что она соответствует повороту сферы около оси X на 180°. Таким образом, мы можем ограничиться одними положительными или одними отрицательными значениями c.

Полагая в уравнениях (113) $c = 1$, получаем

$$\gamma\cos\varphi = \text{const}, \quad \gamma\sin\varphi = \text{const}$$

или в декартовых координатах на плоскости xy

$$x = \text{const}, \quad y = \text{const}.$$

Стереографическая проекция линий $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ состоит из системы прямых, параллельных осям. Таким образом, мы имеем случай, уже разобранный в конце § 9.

Полагая в уравнениях (113) $c = \frac{1}{2}$, имеем

$$\gamma^2 \cos 2\varphi = \text{const}, \quad \gamma^2 \sin 2\varphi = \text{const}$$

или

$$x^2 - y^2 = \text{const}, \qquad xy = \text{const}.$$

Стереографическая проекция линий $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ состоит из двух семейств равносторонних гипербол; для первого оси x, y служат главными осями, для второго — асимптотами. На сфере получаем два семейства пространственных кривых четвертого порядка первого рода с общей двойной точкой $(0, 0, 1)$; для семейства $v = \text{const}$ касательные в двойной точке параллельны осям X и Y, для семейства $u = \text{const}$ — равноделящим тех же осей.

Для $c = 2$ уравнения (113) принимают вид

$$\gamma^{1/2} \cos \frac{\varphi}{2} = \text{const}, \quad \gamma^{1/2} \sin \frac{\varphi}{2} = \text{const}$$

или

$$\gamma (1 + \cos\varphi) = \text{const}, \; \gamma (1 - \cos\varphi) = \text{const};$$

на плоскости xy имеем два семейства парабол с общей осью и общим фокусом в начале. На сфере семейства $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ состоят из пространственных кривых четвертого порядка первого рода с общей точкой возврата $(0, 0, 1)$. Касательной к этой точке для всех кривых служит прямая, параллельная оси X.

Вообще, для всякого соизмеримого значения c кривые $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ алгебраические.

Б. Рассмотрим, наконец, случай, когда суммы $X + Y$ и $X' + Y'$, входящие в равенство (96), не могут быть выражены как функции $x + y$.

Обе части равенства (96) делим на λ''/λ' и получаем

$$\left(\ln\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)'(X + Y) + \frac{1}{2}(X' + Y') = -2\frac{\lambda'^2}{\lambda''}. \tag{115}$$

Дифференцируя последовательно по x и по y, имеем

$$\left(\ln\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)'''(X + Y) + \left(\ln\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)''(X' + Y') = -2\left(\frac{\lambda'^2}{\lambda''}\right)''. \tag{116}$$

Равенство (116) должно совпадать с (115), так как в противном случае из двух равенств (115) и (116) мы определили бы $X + Y$ и $X' + Y'$ как функции $x + y$. Итак, необходимо иметь

$$\frac{\left(\ln\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)'''}{\left(\ln\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)'} = \frac{\left(\ln\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)''}{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{\lambda'^2}{\lambda''}\right)''}{\frac{\lambda'^2}{\lambda''}}. \tag{117}$$

Можно бы еще предположить, что обе части равенства (116) тождественно исчезают, т. е.

$$\left(\ln\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)'' = 0, \qquad \left(\frac{\lambda'^2}{\lambda''}\right)'' = 0,$$

но тогда бы мы получили одновременно

$$\frac{\lambda''}{\lambda'} = Ce^{kt}, \qquad \frac{\lambda'^2}{\lambda''} = mt + n,$$

где C, k, m, n — постоянные; нетрудно убедиться, что результаты эти противоречат один другому, и, следовательно, последнее наше предположение невозможно.

Полагая $\ln\frac{\lambda''}{\lambda'} = \zeta$, имеем $\frac{\lambda'^2}{\lambda''} = e^{-\zeta}\lambda'$,

$$\frac{\left(\frac{\lambda'^2}{\lambda''}\right)''}{\frac{\lambda'^2}{\lambda''}} = \frac{(e^{-\zeta}\lambda')''}{e^{-\zeta}\lambda'} = \frac{\lambda'''}{\lambda'} - 2\zeta'\frac{\lambda''}{\lambda'} - (\zeta'' - \zeta'^2) =$$

$$= e^{2\zeta} - e^{\zeta}\zeta' - (\zeta'' - \zeta'^2),$$

и, следовательно, равенства (117) принимают следующий вид:

$$e^{2\zeta} - e^{\zeta}\zeta' - (\zeta'' - \zeta'^2) = 2\zeta'' = \frac{\zeta'''}{\zeta'}. \tag{118}$$

Последнее из них может быть написано как $\zeta''' = 2\zeta'\zeta''$, откуда

$$\zeta'' = \zeta'^2 + c^2, \tag{119}$$

где c — постоянное. Внося этот результат в первое из равенств (118), получаем

$$2\zeta'^2 + e^{\zeta}\zeta' - e^{2\zeta} + 3c^2 = 0. \tag{120}$$

Дифференцируя по аргументу $t = x + y$ и вставляя значение ζ'' из (119), имеем

$$4\zeta'^3 + 2e^{\zeta}\zeta'^2 + (4c^2 - 2e^{2\zeta})\,\zeta' + c^2e^{\zeta} = 0. \tag{121}$$

Наконец, умножая равенство (120) на $2\zeta'$ и вычитая из (121), имеем

$$c^2e^{\zeta} - 2c^2\zeta' = 0,$$

откуда или $c = 0$, или $\zeta' = {}^1/_2 e^{\zeta}$; но вставляя значение ζ' в (120), получаем $c = 0$, так что во всяком случае необходимо имеем

$$c = 0.$$

При этом предположении равенство (120) принимает вид

$$2\zeta'^2 + e^{\zeta}\zeta' - e^{2\zeta} = 0, \tag{120'}$$

откуда

$$\zeta' = {}^1/_2 e^{\zeta} \quad \text{или} \quad \zeta' = -e^{\zeta}.$$

Нетрудно видеть, что при обоих предположениях удовлетворяется и равенство (119), если положим в нем $c = 0$.

Предполагая сначала

$$\zeta' = {}^1/_2 e^{\zeta},$$

имеем

$$e^{-\zeta} = -{}^1/_2 t + m$$

или

$$\frac{\lambda'}{\lambda''} = -{}^1/_2 t + m; \qquad \frac{\lambda''}{\lambda'} = \frac{1}{m - {}^1/_2 t} = \frac{2}{2m - t},$$

откуда после интегрирования

$$\lambda' = \frac{A}{(1 - 2m)^2},$$

$$\lambda = -\frac{A}{t - 2m} + B = -\frac{A}{x + y - 2m} + B,$$

где m, A, B — произвольные постоянные. Так как $x = U$ и $y = V$, то, согласно общему замечанию в начале параграфа, мы можем без ущерба для общности предположить

$$\lambda = -\frac{1}{U + V} = -\frac{1}{x + y}, \qquad \lambda' = \frac{1}{(U + V)^2} = \frac{1}{(x + y)^2}. \tag{122}$$

Предполагая затем

$$\zeta' = -e^{\zeta},$$

имеем

$$e^{-\zeta} = t + m$$

или

$$\frac{\lambda'}{\lambda''} = t + m, \qquad \frac{\lambda''}{\lambda'} = \frac{1}{t + m},$$

откуда после интегрирования

$$\lambda' = A\,(t + m),$$

$$\lambda = \frac{1}{2}A\,(t + m)^2 + B = \frac{1}{2}A\,(x + y + m)^2 + B.$$

Без ущерба для общности можно взять

$$\lambda = \frac{1}{2}(U + V)^2 = \frac{(x + y)^2}{2}, \qquad \lambda' = U + V = x + y. \tag{123}$$

а) В первом случае, т. е. для

$$\lambda = -\frac{1}{U + V}, \qquad \lambda' = \frac{1}{(U + V)^2}, \tag{122}$$

мы имеем, согласно § 4, на сфере ортогональную систему, состоящую из линий постоянной геодезической кривизны, т. е. из окружностей. Соответствующая изотермическая форма квадрата линейного элемента сферы, как известно, имеет следующий вид:

$$d\sigma^2 = \frac{1 - h^2}{(\operatorname{ch} u_1 + h\cos v_1)^2}\,[du_1^2 + dv_1^2] \tag{124}$$

или, если для большей симметрии положим $h = \frac{n}{m}$,

$$d\sigma^2 = \frac{m^2 - n^2}{(m\operatorname{ch} u_1 + n\cos v_1)^2}\,[du_1^2 + dv_1^2] \tag{124'}$$

(см. Darboux S., т. I, стр. 316). При этом параметры α, β прямолинейных образующих сферы выражаются формулами (там же)

$$\alpha = \sqrt{\frac{1-h}{1+h}} \cdot \operatorname{tg}\frac{v_1 + iu_1}{2} = \sqrt{\frac{m-n}{m+n}} \cdot \operatorname{tg}\frac{v_1 + iu_1}{2},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1-h}{1+h}} \cdot \operatorname{tg}\frac{v_1 - iu_1}{2} = \sqrt{\frac{m-n}{m+n}} \cdot \operatorname{tg}\frac{v_1 - iu_1}{2},$$

а следовательно, выражения координат X, Y, Z точки сферы как функции u, v имеют вид

$$\begin{aligned} X &= \frac{\sqrt{1-h^2}\cdot \sin v_1}{\operatorname{ch} u_1 + h\cos v_1} = \frac{\sqrt{m^2-n^2}\cdot \sin v_1}{m \operatorname{ch} u_1 + n\cos v_1}, \\ Y &= \frac{\sqrt{1-h^2}\cdot \operatorname{sh} u_1}{\operatorname{ch} u_1 + h\cos v_1} = \frac{\sqrt{m^2-n^2}\cdot \operatorname{sh} u_1}{m \operatorname{ch} u_1 + n\cos v_1}, \\ Z &= -\frac{h\operatorname{ch} u_1 + \cos v_1}{\operatorname{ch} u_1 + h\cos v_1} = -\frac{n\operatorname{ch} u_1 + m\cos v_1}{m\operatorname{ch} u_1 + n\cos v_1}. \end{aligned} \tag{125}$$

Нам остается перейти от изотермических параметров u_1, v_1 к потенциальным, которые обозначим через u, v. Полагая

$$u_1 = u_1(u), \quad v_1 = v_1(v),$$

имеем

$$d\sigma^2 = \frac{m^2-n^2}{(m\operatorname{ch} u_1 + n\cos v_1)^2}\,(u_1'^2 du^2 + v_1'^2 dv^2). \tag{126}$$

Так как u и v — потенциальные параметры, то мы должны иметь

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u}, \tag{127}$$

если E и G — коэффициенты при du^2 и при dv^2 в выражении (126). Равенство (127) после упрощений дает

$$-n\sin v_1 \cdot u_1' = m \operatorname{sh} u_1 \cdot v_1',$$

откуда необходимо

$$\frac{u_1'}{-m\operatorname{sh} u_1} = \frac{v_1'}{n\sin v_1} = \text{const};$$

полагая const $= 1$ и выполняя квадратуры, имеем

$$\ln \operatorname{th}\frac{u_1}{2} = -mu, \quad \ln\operatorname{tg}\frac{v_1}{2} = nv,$$

откуда

$$\operatorname{th}\frac{u_1}{2} = e^{-mu}, \quad \operatorname{tg}\frac{v_1}{2} = e^{nv},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} u_1 &= \frac{1+e^{-2mu}}{1-e^{-2mu}} = \operatorname{cth} mu, \\ \cos v_1 &= \frac{1-e^{2nv}}{1+e^{2nv}} = -\operatorname{th} nv. \end{aligned} \tag{128}$$

Выражение (126) квадрата линейного элемента принимает вид

$$d\sigma^2 = \frac{m^2-n^2}{[m\operatorname{cth} mu - n\operatorname{th} nv]^2}\left[m^2\frac{du^2}{\operatorname{sh}^2 mu} + n^2\frac{dv^2}{\operatorname{ch}^2 nv}\right] \tag{129}$$

или

$$d\sigma^2 = \frac{\partial\lambda}{\partial u}\,du^2 + \frac{\partial\lambda}{\partial v}\,dv^2,$$

где

$$\lambda = \frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m\operatorname{cth} mu - n\operatorname{th} nv}. \tag{130}$$

Полагая, в частности, $m = 1$ и, следовательно, $n = h$, имеем

$$d\sigma^2 = \frac{1-h^2}{[\operatorname{cth} u - h\operatorname{th} hv]^2}\left[\frac{du^2}{\operatorname{sh}^2 u} + h^2\frac{dv^2}{\operatorname{ch}^2 hv}\right], \tag{129'}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{1-h^2}}{\operatorname{cth} u - h\operatorname{th} hv}. \tag{130'}$$

Вводя потенциальные координаты в формулы (125), имеем

$$\begin{aligned} X &= \frac{\sqrt{m^2-n^2}\cdot \operatorname{sh} mu}{m\operatorname{ch} mu\operatorname{ch} nv - n\operatorname{sh} mu\operatorname{sh} nv}, \\ Y &= \frac{\sqrt{m^2-n^2}\cdot \operatorname{ch} nv}{m\operatorname{ch} mu\operatorname{ch} nv - n\operatorname{sh} mu\operatorname{sh} nv}, \\ Z &= \frac{m\operatorname{sh} mu\operatorname{sh} nv - n\operatorname{ch} mu\operatorname{ch} nv}{m\operatorname{ch} mu\operatorname{ch} nv - n\operatorname{sh} mu\operatorname{sh} nv} \end{aligned} \tag{131}$$

и, полагая, в частности, $m = 1$ и $n = h$,

$$X = \frac{\sqrt{1-h^2}\,\mathrm{sh}\,u}{\mathrm{ch}\,u\,\mathrm{ch}\,hv - h\,\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{sh}\,hv},$$

$$Y = \frac{\sqrt{1-h}\ \mathrm{ch}\,hv}{\mathrm{ch}\,u\,\mathrm{ch}\,hv - h\,\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{sh}\,hv}, \tag{131'}$$

$$Z = \frac{\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{sh}\,hv - h\,\mathrm{ch}\,u\,\mathrm{ch}\,hv}{\mathrm{ch}\,u\,\mathrm{ch}\,hv - h\,\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{sh}\,hv}.$$

Для кривых $\lambda = \mathrm{const}$ имеем в силу (130')

$$\mathrm{cth}\,u - h\,\mathrm{th}\,hv = \mathrm{const} = k$$

и, следовательно, на основании формул (131')

$$X = \frac{\sqrt{1-h^2}}{k}\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}\,hv},$$

$$Y = \frac{\sqrt{1-h^2}}{k}\cdot\frac{1}{\mathrm{sh}\,u},$$

$$Z = \frac{(1-h^2)\,\mathrm{th}\,hv - hk}{k}.$$

Исключая v, имеем

$$\frac{(Z+h)^2}{1-h^2} + X^2 = \frac{1-h^2}{k^2} = \mathrm{const};$$

следовательно, проекции кривых $\lambda = \mathrm{const}$ на плоскость ZX образуют семейство подобных кривых второго порядка, имеющих центр на оси Z в точке $(0, 0, -1)$; на сфере получаем семейство пространственных кривых четвертого порядка первого рода. Нетрудно убедиться, что проекции тех же кривых на плоскость ZY образуют также семейство подобных кривых второго порядка; следовательно, каждая из кривых $\lambda = \mathrm{const}$ получается от пересечения двух цилиндров второго порядка.

Что касается до семейства траекторий $u - v = \mathrm{const}$, то кривые этого семейства алгебраические при соизмеримых значениях $h = n/m$ и трансцендентные в общем случае.

б) Обращаемся к последнему возможному предположению:

$$\lambda = \frac{1}{2}(U+V)^2 = \frac{(x+y)^2}{2}, \qquad \lambda' = U + V = x + y. \tag{123}$$

Квадрат линейного элемента в этом случае имеет вид

$$d\sigma^2 = (U+V)\,(U'du^2 + V'dv^2), \tag{132}$$

т. е. так называемый «гармонический» или «лиувиллевский» вид. Вопрос о приведении линейного элемента сферы к гармоническому виду разрешен, с указанием всех возможных случаев, во втором томе сочинения Darboux S., n° 414, но при этом не разграничены случаи, когда соответствующие системы $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$ состоят из действительных и когда из мнимых кривых. Ввиду этого проведем наши вычисления до конца, независимо от результатов Дарбу.

Уравнение (115) в данном случае после умножения на $x + y$ принимает вид

$$-(X+Y) + \frac{1}{2}(x+y)(X'+Y') = -2(x+y)^2. \tag{133}$$

Дифференцируя обе части последовательно по x и y, имеем

$$\frac{1}{2}(X''+Y'') = -12(x+y),$$

откуда

$$X'' + 24x = -(Y'' + 24y) = \mathrm{const} = 2a,$$

$$X'' = -24x + 2a, \qquad Y'' = -24y - 2a,$$

и, следовательно,

$$X = -4x^3 + ax^2 + bx + c,$$

$$Y = -4y^3 - ay^2 + b_1y + c_1.$$

Вставляя полученные результаты в равенство (133), имеем добавочные условия $b_1 = b$, $c_1 = -c$ и, следовательно, окончательно

$$X = -4x^3 + ax^2 + bx + c, \quad Y = -4y^3 - ay^2 + by - c.$$

Обозначая корни первого многочлена через x_0, x_1, x_2, легко убеждаемся, что корни второго будут $-x_0$, $-x_1$, $-x_2$, и, следовательно, можем иначе положить

$$X = -4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2),$$
$$Y = -4(y + x_0)(y + x_1)(y + x_2). \qquad (134)$$

Возвращаясь к прежним обозначениям, имеем

$$U' = -4(U - x_0)(U - x_1)(U - x_2),$$
$$V' = -4(V + x_0)(V + x_1)(V + x_2), \qquad (135)$$

и, следовательно, квадрат линейного элемента имеет вид

$$d\sigma^2 = (U + V)[-4(U - x_0)(U - x_1)(U - x_2)\,du^2 - -4(V + x_0)(V + x_1)(V + x_2)\,dv^2]. \qquad (136)$$

Заметим, что, видимо, входящие в выражение $d\sigma^2$ три произвольных постоянных x_0, x_1, x_2 не все имеют существенное значение. Действительно, вводя новые потенциальные параметры

$$u_1 = \frac{1}{k^2}u, \qquad v_1 = \frac{1}{k^2}v$$

и новые функции

$$U_1 = k(U - m), \qquad V_1 = k(V + m)$$

в выражение (136) и в равенства (135), получаем вполне аналогичные выражения $d\sigma^2$ и соотношения, определяющие U_1 и V_1 как функции u_1 и v_1, лишь с заменой x_0, x_1, x_2 соответственно на

$$k(x_0 - m), \qquad k(x_1 - m), \qquad k(x_2 - m).$$

Таким образом, мы имеем право из всех трех корней, x_0, x_1, x_2 вычесть одно постоянное и умножить их на постоянный множитель; существенное значение, следовательно, имеет лишь отношение

$$\tau = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}. \qquad (137)$$

Рассмотрим сначала общий случай, когда все три корня различны, или, иначе, когда отношение (137) конечно,

определенно и отлично от нуля и от единицы. Интегрируя уравнения (135), имеем

$$c_0 \ln(U - x_0) + c_1 \ln(U - x_1) + c_2 \ln(U - x_2) = u,$$
$$c_0 \ln(V + x_0) + c_1 \ln(V + x_1) + c_2 \ln(V + x_2) = v \qquad (138)$$

или

$$(U - x_0)^{c_0}(U - x_1)^{c_1}(U - x_2)^{c_2} = e^u,$$
$$(V + x_0)^{c_0}(V + x_1)^{c_1}(V + x_2)^{c_2} = e^v, \qquad (138')$$

где

$$c_0 = \frac{1}{4(x_0 - x_1)(x_2 - x_0)}, \qquad c_1 = \frac{1}{4(x_0 - x_1)(x_1 - x_2)},$$
$$c_2 = \frac{1}{4(x_1 - x_2)(x_2 - x_0)}. \qquad (139)$$

Между постоянными c_0, c_1, c_2 существуют соотношения

$$c_0 + c_1 + c_2 = 0,$$
$$c_0(x_1 + x_2) + c_1(x_2 + x_0) + c_2(x_0 + x_1) = 0, \qquad (140)$$
$$c_0x_1x_2 + c_1x_2x_0 + c_2x_0x_1 = -\frac{1}{4};$$

в силу первого из них и в силу замечания, сделанного выше по отношению к величинам x_0, x_1, x_2, существенное значение имеет лишь одно из отношений c_1/c_0 или c_2/c_0. Можно поэтому предположить хотя бы $c_0 = 1$, и тогда

$$c_2 = -1 - c_1.$$

При соизмеримых значениях c_1, а следовательно, и c_2, U и V — алгебраические функции величин e^u и e^v, так как уравнения (138′) в этом случае алгебраические относительно U и V. Вообще говоря, U и V не могут быть явно выражены через потенциальные параметры u и v; поэтому введем новые параметры:

$$\xi = U, \qquad \eta = -V. \qquad (141)$$

На основании соотношений (135) имеем

$$d\xi = -4(\xi - x_0)(\xi - x_1)(\xi - x_2)\,du,$$
$$d\eta = -4(\eta - x_0)(\eta - x_1)(\eta - x_2)\,dv, \qquad (142)$$

и, следовательно, квадрат линейного элемента в координатах ξ, η имеет вид

$$ds^2 = \frac{\eta-\xi}{2}\left[\frac{d\xi^2}{(\xi-x_0)(\xi-x_1)(\xi-x_2)} - \frac{d\eta^2}{(\eta-x_0)(\eta-x_1)(\eta-x_2)}\right]. \tag{143}$$

Изотермическая форма $d\sigma^2$, очевидно, должна зависеть от эллиптических функций. Из равенства (138′) можно получить соотношения, которые непосредственно устанавливают связь между ε, η и u, v. Для этого следует лишь положить $U = \xi$, $V = -\eta$. Замечая, кроме того, что

$$(-1)^{c_0+c_1+c_2} = (-1)^0 = 1,$$

имеем

$$\begin{aligned}(\xi-x_0)^{c_0}(\xi-x_1)^{c_1}(\xi-x_2)^{c_2} &= e^u,\\ (\eta-x_0)^{c_0}(\eta-x_1)^{c_1}(\eta-x_2)^{c_2} &= e^v.\end{aligned} \tag{144}$$

Нам остается выразить координаты X, Y, Z точки сферы как функции ξ, η. Вместо того чтобы идти обычным путем, воспользуемся результатом Дарбу, согласно которому общий случай гармонического вида линейного элемента сферы получается при введении эллиптических координат. Система софокусных сферических конических сечений определяется как система кривых четвертого порядка, по которым сфера пересекается с системой софокусных конусов второго порядка. Предположим уравнение этой системы конусов в виде

$$\frac{X^2}{x_0-\mu} + \frac{Y^2}{x_1-\mu} + \frac{Z^2}{x_2-\mu} = 0. \tag{145}$$

Освобождая от знаменателей, получим уравнение второй степени относительно μ. Обозначая корни μ_1 и μ_2 соответственно через ξ и η, имеем

$$\begin{aligned}\xi+\eta &= X^2(x_1+x_2) + Y^2(x_2+x_0) + Z^2(x_0+x_1),\\ \xi\eta &= X^2 x_1x_2 + Y^2x_2x_0 + Z^2x_0x_1,\end{aligned} \tag{146}$$

откуда наряду с

$$X^2+Y^2+Z^2 = 1$$

имеем

$$\begin{aligned}X^2 &= \frac{(x_0-\xi)(x_0-\eta)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = -4c_0(x_0-\xi)(x_0-\eta),\\ Y^2 &= \frac{(x_1-\xi)(x_1-\eta)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -4c_1(x_1-\xi)(x_1-\eta),\\ Z^2 &= \frac{(x_2-\xi)(x_2-\eta)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = -4c_2(x_2-\xi)(x_2-\eta).\end{aligned} \tag{147}$$

Дифференцируя равенства (146), находим

$$d\sigma^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 =$$
$$= \frac{\eta-\xi}{4}\left[\frac{d\xi^2}{(\xi-x_0)(\xi-x_1)(\xi-x_2)} - \frac{d\eta^2}{(\eta-x_0)(\eta-x_1)(\eta-x_2)}\right].$$

Таким образом, мы подтвердили результат Дарбу и нашли геометрическое значение параметров ξ, η. Формулы (146) дают самые общие выражения X, Y, Z, если отвлекаемся от возможного изменения положения системы $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ на сфере. Семейство софокусных конусов, определяемое уравнением (145), очевидно, не изменится, если мы x_0, x_1, x_2 умножим на общий постоянный множитель или прибавим к x_0, x_1, x_2 одну и ту же постоянную величину; таким образом, с другой точки зрения подтверждается замечание, сделанное выше относительно постоянных x_0, x_1, x_2. Нетрудно определить вид кривых семейства $\lambda = \text{const}$. Действительно,

$$\lambda = \frac{(U+V)^2}{2} = \frac{(\xi-\eta)^2}{2}$$

и, следовательно, уравнение этого семейства в параметрах ξ, η есть

$$\xi - \eta = \text{const} \text{ или } (\xi-\eta)^2 = \text{const}.$$

На основании формул (146) иначе можем написать

$$[X^2(x_1+x_2) + Y^2(x_2+x_0) + Z^2(x_0+x_1)]^2 - \\ - 4[X^2x_1x_2 + Y^2x_2x_0 + Z^2x_0x_1] = \text{const} \tag{148}$$

или, принимая во внимание уравнение сферы,

$$[X^2(x_2-x_0) - Y^2(x_1-x_0) + (x_0+x_1)]^2 - \\ - 4[X^2x_1(x_2-x_0) - Y^2x_0(x_1-x_2) + x_0x_1] = \text{const}. \tag{148′}$$

Уравнение (148′) есть уравнение цилиндра четвертого порядка, проектирующего кривую $\lambda = \text{const}$ на плоскость XY. Семейство $\lambda = \text{const}$ состоит, следовательно, из кривых восьмого порядка.

Рассмотрим теперь случаи, когда два из корней x_0, x_1, x_2 равны между собой и когда все три равны. Естественно допустить, что система $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ в том и в другом предположении является предельным случаем системы софокусных сферических конических сечений, а отсюда непосредственно следует, что при двух или трех равных корнях x_0, x_1, x_2 мы не получим действительных потенциальных систем. В самом деле, в каких бы двух действительных точках сферы ни находились два фокуса сферических эллипсов и гипербол, всегда получим систему общего типа, для которой x_0, x_1, x_2 различны между собой. Исключение, по-видимому, имеем в том случае, когда фокусы диаметрально противоположны; но тогда система софокусных конических сечений обращается в систему, состоящую из семейства меридианов и ортогонального ему семейства параллелей; эта система, как мы знаем, не есть собственно потенциальная. Таким образом, предельные случаи в точном смысле возможны лишь, когда один или оба фокуса мнимы, например, если оба фокуса лежат на одной прямолинейной образующей сферы или если один из них находится на абсолютном круге пространства; во всех подобных случаях система $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ состоит из мнимых кривых.

Нам остается подтвердить, что при двух или трех равных корнях x_0, x_1, x_2 мы действительно имеем на сфере системы софокусных конических сечений.

Предположим, во-первых, что имеем два равных корня; пусть, например, $x_0 = x_1$.

Прибавляя ко всем корням одно постоянное и умножая на общий постоянный множитель, всегда можем сделать

$$x_0 = x_1 = 1, \quad x_2 = -1.$$

Таким образом, имеем

$$U' = -4(U-1)^2(U+1),$$

$$V' = -4(V+1)^2(V-1),$$

$$d\sigma^2 = (U+V)[-4(U-1)^2(U+1)\,du^2 - 4(V+1)^2 \times \\ \times (V-1)\,dv^2] = (U+V)\left[\frac{dU^2}{-4(U-1)^2(U+1)} + \right. \\ \left. + \frac{dV^2}{-4(V+1)^2(V-1)}\right]. \quad (149)$$

Введем новые параметры μ, ν, полагая

$$U = \cos 2\mu, \quad V = -2\cos 2\nu.$$

Тогда имеем

$$d\sigma^2 = (\cos 2\mu - \cos 2\nu)\left(\frac{d\mu^2}{\cos 2\mu - 1} + \frac{d\nu^2}{1 - \cos 2\nu}\right). \quad (150)$$

Сумма обратных величин коэффициентов при $d\mu^2$ и $d\nu^2$ в выражении $d\sigma^2$ равна единице; следовательно, можем положить

$$d\sigma^2 = \frac{d\mu^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{d\nu^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (151)$$

причем

$$\left.\begin{aligned} \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{\cos 2\mu - 1}{\cos 2\mu - \cos 2\nu} = \frac{-2\sin^2 \mu}{\cos 2\mu - \cos 2\nu}, \\ \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos 2\nu}{\cos 2\mu - \cos 2\nu} = \frac{2\sin^2 \nu}{\cos 2\mu - \cos 2\nu}. \end{aligned}\right\} \quad (152)$$

Из формы (151) квадрата линейного элемента следует, что система $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ или, безразлично, $\mu = \text{const}$, $\nu = \text{const}$ состоит из геодезических эллипсов и гипербол, т. е. из кривых, для которых сумма или разность расстояний от двух данных кривых есть величина постоянная. Понятно, что каждую из данных кривых можно заменить любой геодезически параллельной. Семейства этих параллельных кривых определяются уравнениями

$$\mu + \nu = \text{const} \text{ и } \mu - \nu = \text{const}$$

(см. Darboux S., т. II, стр. 417—422). Для того чтобы система геодезических эллипсов и гипербол, в частности, была системой софокусных сферических конических сечений, необходимо и достаточно, чтобы семейства $\mu + \nu = \text{const}$ и $\mu - \nu = \text{const}$ состояли из окружностей, т. е. чтобы геодезическая кривизна кривых того и другого семейства была постоянна на соответствующей кривой. Пользуясь общим выражением геодезической кривизны кривой $\varphi =$ $= \mathrm{const}$ при квадрате линейного элемента $ds^2 = E\,du^2 +$ $+ 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, т. е. выражением

$$\frac{1}{\rho_\varphi} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{F\frac{\partial\varphi}{\partial v} - G\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}}\right\} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{F\frac{\partial\varphi}{\partial u} - E\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}}\right\}\right] \quad (153)$$

(см. Бианки, Лекции по дифференциальной геометрии, § 76), имеем в данном случае для семейств $\mu + \nu =$ $= \mathrm{const}$ и $\mu - \nu = \mathrm{const}$ в силу соотношений (152)

$$\frac{1}{\rho_{\mu+\nu}} = \frac{\partial \ln \cos\frac{\alpha}{2}}{\partial\mu} + \frac{\partial \ln \sin\frac{\alpha}{2}}{\partial\nu} = \frac{\sin 2\mu - \sin 2\nu}{\cos 2\mu - \cos 2\nu} = -\operatorname{ctg}(\mu+\nu), \quad (154)$$
$$\frac{1}{\rho_{\mu-\nu}} = \frac{\partial \ln \cos\frac{\alpha}{2}}{\partial\mu} - \frac{\partial \ln \sin\frac{\alpha}{2}}{\partial\nu} = \frac{\sin 2\mu + \sin 2\nu}{\cos 2\mu - \cos 2\nu} = -\operatorname{ctg}(\mu-\nu).$$

Равенства (154) подтверждают, что система $\mu = \mathrm{const}$, $\nu = \mathrm{const}$ или, безразлично, $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$ состоит из софокусных сферических конических сечений. Выражение (150) квадрата линейного элемента получается из общей формы

$$d\sigma^2 = (\cos 2\mu - \cos 2\nu)\left(\frac{d\mu^2}{\cos 2\mu - \cos 2c} + \frac{d\nu^2}{\cos 2c - \cos 2\nu}\right), \quad (155)$$

к которой можно, согласно Дарбу (там же), привести $d\sigma^2$ относительно системы софокусных конических сферических сечений; $2c$ при этом есть расстояние между фокусами. В нашем случае следует положить $\cos 2c = 1$ или $c = 0$, что имеет место, если оба фокуса находятся на одной прямолинейной образующей сферы.

Предположим, во-вторых, что все три корня x_0, x_1, x_2 равны между собой; мы имеем право, как было указано, положить, например,

$$x_0 = x_1 = x_2 = 0.$$

В таком случае

$$U' = -4U^3, \quad V' = -4V^3,$$
$$d\sigma^2 = [U+V]\,[-4U^3\,du^2 - 4V^3\,dv^2] = [U+V]\left[\frac{dU^2}{-4U^3} + \frac{dV^2}{-4V^3}\right].$$

Полагая

$$U = e^{2i\mu}, \quad V = e^{2i\nu},$$

имеем

$$d\sigma^2 = (e^{2i\mu} + e^{2i\nu})\left(\frac{d\mu^2}{e^{2i\mu}} + \frac{d\nu^2}{e^{2i\nu}}\right) \quad (156)$$

или

$$d\sigma^2 = \frac{d\mu^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{d\nu^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}, \quad (156')$$

причем

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{e^{2i\mu}}{e^{2i\mu} + e^{2i\nu}}, \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{e^{2i\nu}}{e^{2i\mu} + e^{2i\nu}}. \quad (157)$$

Вычисляя геодезическую кривизну кривых $\mu + \nu = \mathrm{const}$ и $\mu - \nu = \mathrm{const}$, имеем

$$\frac{1}{\rho_{\mu+\nu}} = \frac{\partial \ln \cos\frac{\alpha}{2}}{\partial\mu} + \frac{\partial \ln \sin\frac{\alpha}{2}}{\partial\nu} = \frac{i(e^{2i\mu} + e^{2i\nu})}{e^{2i\mu} + e^{2i\nu}} = i,$$
$$\frac{1}{\rho_{\mu-\nu}} = \frac{\partial \ln \cos\frac{\alpha}{2}}{\partial\mu} - \frac{\partial \ln \sin\frac{\alpha}{2}}{\partial\nu} = \frac{i(e^{2i\mu} - e^{2i\nu})}{e^{2i\mu} + e^{2i\nu}} = -\operatorname{tg}(\mu-\nu). \quad (158)$$

Таким образом, точно так же как и в предыдущем случае, заключаем, что система $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$ состоит из софокусных сферических конических сечений. На основании первого из равенств (158) концентрические окружности семейства $\mu + \nu = \text{const}$ все должны иметь одну и ту же геодезическую кривизну; это возможно только в том случае, если центр не находится в конечной области. Таким образом, в случае трех равных корней $x_0 = x_1 = x_2$ один из фокусов софокусной системы $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ находится на абсолютном круге пространства.

Глава IV

ПОВЕРХНОСТИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА; ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

§ 11. Поверхности, линии кривизны которых образуют потенциальную систему; свойство трех основных квадратичных дифференциальных форм

Допустим, что одна из потенциальных систем, возможных на некоторой данной поверхности, состоит из линий кривизны. Тогда квадрат линейного элемента ds^2 поверхности должен иметь потенциальную форму относительно ортогональной системы, образуемой линиями кривизны, т. е. мы должны иметь

$$ds^2 = \frac{\partial\omega}{\partial u} du^2 + \frac{\partial\omega}{\partial v} dv^2, \tag{1}$$

если u и v — параметры линий кривизны. Вид поверхности независимо от ее положения в пространстве, определяется, как известно, тремя квадратичными дифференциальными формами: квадратом линейного элемента ds^2 и двумя формами

$$\frac{ds^2}{\rho} \quad \text{и} \quad d\sigma^2,$$

где ρ есть радиус кривизны нормального сечения поверхности (по направлению, характеризуемому дифференциалами du, dv), а $d\sigma^2$ — квадрат линейного элемента так называемого гауссова шара, т. е. шара радиуса, равного 1, который приведен в соответствие с данной поверхностью с помощью параллельных нормалей; координаты X, Y, Z точки гауссова шара в то же время служат косинусами гулов, образуемых с осями координат нормалью к поверх-

ности в соответствующей точке (x, y, z). Три основные квадратичные формы выражаются через величины x, y, z, X, Y, Z следующим образом:

$$\begin{gathered} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \\ \frac{ds^2}{\rho} = -(dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz), \\ d\sigma^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2. \end{gathered} \tag{2}$$

Если u и v — параметры линий кривизны, то все три формы содержат лишь члены с квадратами дифференциалов du, dv, так что мы имеем

$$\begin{gathered} ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2, \qquad \frac{ds^2}{\rho^2} = D\,du^2 + D''dv^2, \\ d\sigma^2 = e\,du^2 + g\,dv^2. \end{gathered} \tag{3}$$

Коэффициенты D, D'' связаны с коэффициентами ds^2 уравнениями Кодацци

$$\frac{\partial D}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\frac{D}{E} + \frac{D''}{G}\right)\frac{\partial E}{\partial v}, \qquad \frac{\partial D''}{\partial u} = \frac{1}{2}\left(\frac{D}{E} + \frac{D''}{G}\right)\frac{\partial G}{\partial u} \tag{4}$$

(см. Бианки, Лекции по дифференциальной геометрии, §§ 48, 49).

В данном случае имеем

$$E = \frac{\partial\omega}{\partial u}, \qquad G = \frac{\partial\omega}{\partial v} \tag{5}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v},$$

поэтому из уравнений (4) получаем

$$\frac{\partial D}{\partial v} = \frac{\partial D''}{\partial u},$$

т. е. D и D'' могут быть рассматриваемы как частные производные по u и v одной и той же функции. Полагая

$$D = -\frac{\partial W}{\partial u}, \qquad D'' = -\frac{\partial W}{\partial v}, \tag{6}$$

замечаем, что оба уравнения (4) приводят к одному:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\left\{\frac{\frac{\partial W}{\partial u}}{\frac{\partial\omega}{\partial u}} + \frac{\frac{\partial W}{\partial v}}{\frac{\partial\omega}{\partial v}}\right\}. \tag{7}$$

В силу равенств (6) вторая основная форма поверхности в параметрах u, v имеет потенциальный вид подобно первой форме ds^2, а именно:

$$\frac{ds^2}{\rho} = -\left(\frac{\partial W}{\partial u} du^2 + \frac{\partial W}{\partial v} dv^2\right). \tag{8}$$

Легко убедиться, что то же свойство принадлежит и третьей основной форме

$$d\sigma^2 = e\, du^2 + g\, dv^2.$$

Действительно, на основании общих соотношений между коэффициентами E, G, D, D'', e, g (см. Бианки, Лекции по дифференциальной геометрии, §§ 61, 62, 69) имеем

$$e = \frac{D^2}{E} = \frac{\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2}{\frac{\partial \omega}{\partial u}}, \qquad g = \frac{D''^2}{G} = \frac{\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2}{\frac{\partial \omega}{\partial v}}. \tag{9}$$

Дифференцируя первое из равенств (9) по v, второе по u и вычитая из первого результата второй, имеем

$$\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} =$$
$$= 2\left\{\frac{\frac{\partial W}{\partial u}}{\frac{\partial \omega}{\partial u}} - \frac{\frac{\partial W}{\partial v}}{\frac{\partial \omega}{\partial v}}\right\}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial u\, \partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v}\left\{\frac{\frac{\partial W}{\partial u}}{\frac{\partial \omega}{\partial u}} + \frac{\frac{\partial W}{\partial v}}{\frac{\partial \omega}{\partial v}}\right\}\right] \tag{10}$$

или на основании уравнения (7)

$$\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} = 0. \tag{11}$$

В силу соотношения (11) имеем право положить

$$e = \frac{\partial \lambda}{\partial u}, \qquad g = \frac{\partial \lambda}{\partial v} \tag{12}$$

и, следовательно,

$$d\sigma^2 = \frac{\partial \lambda}{\partial u} du^2 + \frac{\partial \lambda}{\partial v} dv^2. \tag{13}$$

Таким образом, если линии кривизны поверхности образуют потенциальную систему, то все три основные формы поверхности $\left(ds^2, \frac{ds^2}{\rho}, d\sigma^2\right)$ в параметрах линий кривизны имеют потенциальный вид. Отсюда, между прочим, следует, что ортогональная система $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ на гауссовом шаре, или, как иначе говорят, сферическое изображение линий кривизны поверхности есть система потенциального типа.

Допустим, обратно, что сферическое изображение линий кривизны некоторой поверхности представляет собой систему потенциального типа, другими словами, допустим, что третья основная форма поверхности $d\sigma^2$ имеет потенциальный вид в параметрах линий кривизны, т. е.

$$d\sigma^2 = e\, du^2 + g\, dv^2 = \frac{\partial \lambda}{\partial u} du^2 + \frac{\partial \lambda}{\partial v} dv^2.$$

Коэффициенты D и D'' второй основной формы связаны с коэффициентами e, g двумя уравнениями, вполне аналогичными уравнениям Кодацци (4):

$$\frac{\partial D}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\frac{D}{e} + \frac{D''}{g}\right)\frac{\partial e}{\partial v}, \qquad \frac{\partial D''}{\partial u} = \frac{1}{2}\left(\frac{D}{e} + \frac{D''}{g}\right)\frac{\partial g}{\partial u} \tag{14}$$

(Бианки, Лекции по дифференциальной геометрии, §§ 63, 69). В данном случае

$$\frac{\partial e}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v};$$

следовательно, из уравнений (14) имеем

$$\frac{\partial D}{\partial v} = \frac{\partial D''}{\partial u}$$

и потому можем положить

$$D = -\frac{\partial W}{\partial u}, \qquad D'' = -\frac{\partial W}{\partial v}. \tag{6}$$

Вторая основная форма ds^2/ρ, таким образом, имеет потенциальный вид. Уравнения (14) на основании равенств (6) приводятся к одному:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v}\left\{\frac{\frac{\partial W}{\partial u}}{\frac{\partial \lambda}{\partial u}} + \frac{\frac{\partial W}{\partial v}}{\frac{\partial \lambda}{\partial v}}\right\}. \tag{15}$$

Наконец, коэффициенты E и G первой основной формы ds^2 определяются из соотношений

$$E=\frac{D^2}{e}=\frac{\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2}{\frac{\partial\lambda}{\partial u}},\qquad G=\frac{D''^2}{g}=\frac{\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2}{\frac{\partial\lambda}{\partial v}}. \tag{16}$$

Дифференцируя первое соотношение по u, второе по v и вычитая из первого результата второй, совершенно так же как и выше, убеждаемся, что в силу уравнения (15)

$$\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\partial G}{\partial u}=0,$$

и, следовательно, можно положить

$$E=\frac{\partial\omega}{\partial u},\qquad G=\frac{\partial\omega}{\partial v}.$$

Таким образом, первая основная форма имеет в параметрах линий кривизны потенциальный вид, т. е. линии кривизны поверхности образуют потенциальную систему.

Предположим наконец, что вторая основная форма поверхности ds^2/ρ имеет потенциальный вид в параметрах линий кривизны, т. е.

$$\frac{ds^2}{\rho}=-\frac{\partial W}{\partial u}du^2-\frac{\partial W}{\partial v}dv^2. \tag{8}$$

Так как в этом предположении

$$D=-\frac{\partial W}{\partial u},\qquad D''=-\frac{\partial W}{\partial v}, \tag{6}$$

то уравнения Кодацци (4) и (14) дают

$$\left(\frac{D}{e}+\frac{D''}{g}\right)\left(\frac{\partial e}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial u}\right)=0,\quad \left(\frac{D}{e}+\frac{D''}{g}\right)\left(\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\partial G}{\partial u}\right)=0. \tag{17}$$

Отсюда, вообще говоря, имеем

$$\frac{\partial e}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial u}=0,\qquad \frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\partial G}{\partial u}=0,$$

и, следовательно, можем положить

$$E=\frac{\partial\omega}{\partial u},\qquad G=\frac{\partial\omega}{\partial v}, \tag{5}$$

$$e=\frac{\partial\lambda}{\partial u},\qquad g=\frac{\partial\lambda}{\partial v}, \tag{12}$$

т. е. первая и третья основные формы поверхности имеют потенциальный вид, и линии кривизны образуют потенциальную систему.

Исключение имеем в том случае, когда

$$\frac{D}{e}+\frac{D''}{g}=0,\qquad \frac{D}{E}+\frac{D''}{G}=0, \tag{18}$$

причем оба эти равенства в силу соотношений

$$D^2=Ee,\qquad D''^2=Gg \tag{19}$$

(ср. выше (9) и (16)) сводятся к одному. Обозначая через R и R' главные радиусы кривизны поверхности, имеем

$$\frac{1}{R}=\frac{D}{E},\qquad \frac{1}{R'}=\frac{D''}{G} \tag{20}$$

(см., например, Кноблаух, Теория кривых поверхностей [1]), § 44), и, следовательно, второе из равенств (18) принимает вид

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=0,$$

т. е. данная поверхность в этом исключительном случае есть поверхность минимальная. Нетрудно подтвердить непосредственно, что для произвольной минимальной поверхности вторая основная форма имеет потенциальный вид в параметрах линий кривизны, хотя первая и третья основные формы, вообще говоря, не имеют потенциального вида. Действительно, согласно формулам Римана (Riemann), для произвольной минимальной поверхности мы имеем

$$ds^2=R(du^2+dv^2),\qquad d\sigma^2=\frac{1}{R}(du^2+dv^2),$$

если u и v — параметры линий кривизны (см. Darboux S., т. I, стр. 312—313). Таким образом,

$$E=G=R,\qquad e=g=\frac{1}{R},$$

а следовательно, на основании соотношений (19)

$$D=D''=1\quad\text{и}\quad \frac{ds^2}{\rho}=du^2+dv^2.$$

[1]) Кноблаух, Theorie der krummen Flächen, Leipzig, 1885.

Вторая основная форма имеет потенциальный вид, так как

$$\frac{\partial D}{\partial v}-\frac{\partial D''}{\partial u}=0,$$

первая и третья, вообще говоря, нет.

Из всего предыдущего можем вывести такое заключение: если одна из трех основных квадратичных дифференциальных форм поверхности (ds^2, ds^2/ρ, $d\sigma^2$) имеет потенциальный вид в параметрах линий кривизны, то это же свойство принадлежит и двум другим формам. Исключение имеем для произвольной минимальной поверхности по отношению ко второй основной форме.

Результаты, полученные нами в этом параграфе, показывают, что поверхности, линии кривизны которых образуют потенциальную систему, занимают совершенно особое место среди прочих поверхностей, и можно предвидеть, что подробное изучение их свойств не будет лишено интереса. Мимоходом эти поверхности упоминаются в заметке Пето, цитированной выше (§ 8); именно, Пето указывает, что первая основная форма поверхности имеет потенциальный вид в параметрах линий кривизны, если этим свойством обладает третья основная форма; кроме того, он указывает несколько частных примеров поверхностей подобного рода.

Мы будем эти поверхности называть *поверхностями потенциального типа* или *потенциальными поверхностями* подобно тому, как поверхности, линии кривизны которых образуют изотермическую систему, принято называть изотермическими поверхностями.

Согласно результатам §§ 1 и 2 (гл. I) линии кривизны разделяют потенциальную поверхность на бесконечно малые прямоугольники, стороны которых пропорциональны соответствующим радиусам геодезической кривизны; система линий кривизны допускает группу преобразований, траектории которой определяются следующим свойством: касательная в любой точке траектории перпендикулярна к прямой l, соединяющей центры геодезической кривизны тех двух линий кривизны, которые проходят через рассматриваемую точку; при всех преобразованиях группы трехгранный угол, образуемый нормалью и двумя касательными к линиям кривизны поверхности, перемещается без вращения около нормали. Любое из этих свойств может служить определением потенциальных поверхностей.

Те результаты, которые получены нами в настоящем параграфе, формулируются следующим образом:

три основных квадратичных формы потенциальной поверхности имеют в параметрах u, v линий кривизны потенциальный вид

$$ds^2=\frac{\partial\omega}{\partial u}du^2+\frac{\partial\omega}{\partial v}dv^2, \tag{1}$$

$$\frac{ds^2}{\rho}=-\left(\frac{\partial W}{\partial u}du^2+\frac{\partial W}{\partial v}dv^2\right), \tag{8}$$

$$d\sigma^2=\frac{\partial\lambda}{\partial u}du^2+\frac{\partial\lambda}{\partial v}dv^2; \tag{13}$$

между функциями ω, W, λ существуют соотношения

$$\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2=\frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial u},\qquad \left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2=\frac{\partial\omega}{\partial v}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial v}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\left\{\frac{\dfrac{\partial W}{\partial u}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial u}}+\frac{\dfrac{\partial W}{\partial v}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial v}}\right\}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}\left\{\frac{\dfrac{\partial W}{\partial u}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}}+\frac{\dfrac{\partial W}{\partial v}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}}\right\}, \tag{15}$$

из которых последние два являются, вообще говоря, следствиями первых двух; так как гауссова кривизна формы $d\sigma^2$ равна 1, то мы можем присоединить сюда еще уравнение, выведенное нами в § 8 предшествующей главы и выражающее выше упомянутое свойство формы $d\sigma^2$:

$$\delta\left\{\frac{\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}}{\sqrt{\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}\,\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}}}\right\}=-2\sqrt{\frac{\partial\lambda}{\partial u}\,\frac{\partial\lambda}{\partial v}}. \tag{22}$$

Наконец, упоминаем еще результат, которым часто будем пользоваться в дальнейшем: всякая поверхность, линии кривизны которой изображаются на сфере Гаусса потенциальной системой, есть поверхность потенциального типа.

Мы видели, что на сфере (радиуса, равного 1), как и на всякой поверхности, существует бесчисленное множество потенциальных систем, зависящее от трех произвольных функций одного аргумента (§ 3); кроме того, определение поверхностей, имеющих данное сферическое изображение линий кривизны, приводится к интегрированию линейного уравнения второго порядка с частными производными по двум переменным (Б и а н к и, Лекции по дифференциальной геометрии, §§ 69, 73, 74; Darboux S., т. IV, кн. VIII, гл. VII, VIII), общее решение которого зависит от двух произвольных функций одного аргумента. Таким образом, класс потенциальных поверхностей есть класс весьма обширный, и мы увидим, что многие замечательные поверхности входят в него как частные случаи.

§ 12. Свойство основного и тангенциального уравнений Лапласа для линий кривизны

Если u и v — параметры линий кривизны, то координаты x, y, z точки поверхности и половина квадрата вектора $\frac{x^2+y^2+z^2}{2}$ удовлетворяют, как известно, одному линейному уравнению с частными производными второго порядка

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\ln E}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial\ln G}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right) \tag{23}$$

(Б и а н к и, Лекции по дифференциальной геометрии, § 58; Darboux S., т. I, кн. II, гл. II, V). Равным образом координаты X, Y, Z точки гауссовой сферы и расстояние P начала координат от касательной плоскости поверхности удовлетворяют линейному уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\ln e}{\partial v}\frac{\partial\vartheta}{\partial u}+\frac{\partial\ln g}{\partial u}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right) \tag{24}$$

(Б и а н к и, Лекции по дифференциальной геометрии, §§ 63, 73; Darboux S., там же). Связь между решениями того и другого уравнения устанавливается формулами

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial u}=-\frac{D}{E}\frac{\partial\theta}{\partial u},\qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial v}=-\frac{D''}{G}\frac{\partial\theta}{\partial v}. \tag{25}$$

Исключая отсюда ϑ и принимая во внимание уравнения Кодацци (4), связывающие коэффициенты D и D'' второй основной формы с коэффициентами E и G первой формы (ds^2), получаем уравнение (23). Преобразуя соотношения (25) на основании равенств (19), получаем

$$\frac{\partial\theta}{\partial u}=-\frac{D}{e}\frac{\partial\vartheta}{\partial u},\qquad \frac{\partial\theta}{\partial v}=-\frac{D''}{g}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}; \tag{26}$$

исключая отсюда θ и принимая во внимание уравнения (14), связывающие D и D'' с коэффициентами e, g третьей основной формы, получим уравнение (24).

Полагая в равенствах (25) θ последовательно равным x, y, z, $\frac{x^2+y^2+z^2}{2}$, мы должны соответственно полагать ϑ равным X, Y, Z, P; формулы, получаемые при этом, носят название формул Родрига (Rodrigues) (Darboux S., т. I, кн. II, гл. V). Уравнения (23) и (24) называются основным и тангенциальным уравнениями Лапласа для линий кривизны.

Для потенциальной поверхности при сохранении обозначений § 11 формулы (25) и (26) принимают вид

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial u}=\frac{\dfrac{\partial W}{\partial u}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial u}}\frac{\partial\theta}{\partial u},\qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial v}=\frac{\dfrac{\partial W}{\partial v}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial v}}\frac{\partial\theta}{\partial v}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial u}=\frac{\dfrac{\partial W}{\partial u}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}}\frac{\partial\vartheta}{\partial u},\qquad \frac{\partial\theta}{\partial v}=\frac{\dfrac{\partial W}{\partial v}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}. \tag{28}$$

Уравнения Лапласа (23) и (24) при том же предположении обращаются в следующие:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\left\{\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial u}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial u}}+\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial v}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial v}}\right\}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}\left\{\frac{\dfrac{\partial\vartheta}{\partial u}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}}+\frac{\dfrac{\partial\vartheta}{\partial v}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}}\right\}. \tag{30}$$

Полагая, во-первых, $\theta=W$ и, во-вторых, $\vartheta=W$, видим, что оба эти уравнения удовлетворяются в силу соотношений (7) и (15) предшествующего параграфа. Таким образом, *основное и тангенциальное уравнения Лапласа для линий кривизны потенциальной поверхности допускают общее решение, а именно основную функцию второй дифференциальной формы* ds^2/ρ.

Полагая в равенствах (27) $\vartheta = W$, получаем $\theta = \omega$; равным образом, полагая в равенствах (28) $\theta = W$, имеем $\vartheta = \lambda$; таким образом, основное и тангенциальное уравнения допускают соответственно решения ω и λ, что, впрочем, непосредственно очевидно из формы этих уравнений.

Допустим, обратно, что основное и тангенциальное уравнения Лапласа для линий кривизны некоторой поверхности допускают общее решение W; заметим, между прочим, что это решение всегда можно умножить на произвольный постоянный множитель и прибавить к нему произвольную постоянную величину, так как, если W есть решение линейного однородного уравнения, то и $aW + b$, где $a = \text{const}$, $b = \text{const}$, удовлетворяет тому же уравнению. Принимая W за решение тангенциального уравнения, обозначим соответствующее решение основного уравнения через ω; равным образом, принимая W за решение основного уравнения, соответствующее решение тангенциального уравнения обозначим через λ. Тогда формулы (25) и (26) дают нам

$$\frac{\partial W}{\partial u} = -\frac{D}{E}\frac{\partial \omega}{\partial u}, \quad \frac{\partial W}{\partial v} = -\frac{D''}{G}\frac{\partial \omega}{\partial v},$$
$$\frac{\partial W}{\partial u} = -\frac{D}{e}\frac{\partial \lambda}{\partial u}, \quad \frac{\partial W}{\partial v} = -\frac{D''}{g}\frac{\partial \lambda}{\partial v}. \tag{31}$$

Предполагая производные

$$\frac{\partial W}{\partial u} \quad \text{и} \quad \frac{\partial W}{\partial v}$$

отличными от нуля, в силу чего и производные функции ω и λ тоже необходимо отличны от нуля, получаем из соотношений (31)

$$D = -\rho\frac{\partial W}{\partial u}, \quad E = \rho\frac{\partial \omega}{\partial u}, \quad e = \rho\frac{\partial \lambda}{\partial u},$$
$$D'' = -\rho'\frac{\partial W}{\partial v}, \quad G = \rho'\frac{\partial \omega}{\partial v}, \quad g = \rho'\frac{\partial \lambda}{\partial v}, \tag{32}$$

где ρ и ρ' — множители пропорциональности. Замечая, что ω есть решение основного уравнения (23), получаем при подстановке значений E и G из (32)

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial v}\frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{\partial \ln \rho'}{\partial u}\frac{\partial \omega}{\partial v} = 0; \tag{33}$$

равным образом, полагая в уравнении (24)

$$\vartheta = \lambda, \quad e = \rho\frac{\partial \lambda}{\partial u}, \quad g = \rho'\frac{\partial \lambda}{\partial u},$$

имеем

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \ln \rho'}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0. \tag{34}$$

Если производные $\frac{\partial \ln \rho}{\partial v}$ и $\frac{\partial \ln \rho'}{\partial u}$ отличны от нуля, то из равенств (33) и (34) имеем

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} : \frac{\partial \omega}{\partial v} = \frac{\partial \lambda}{\partial u} : \frac{\partial \lambda}{\partial v}$$

или

$$E : G = e : g,$$

т. е. поверхность параллельными нормалями конформно изображается на сфере Гаусса. Это возможно лишь в двух случаях: когда поверхность есть сфера или когда она есть произвольная минимальная поверхность. В первом случае, очевидно, основное и тангенциальное уравнения Лапласа имеют общее решение и даже бесчисленное множество общих решений, так как оба эти уравнения совпадают. Заметим, что всякую сферу можем считать потенциальной поверхностью, притом «бесконечным числом способов», так как произвольную потенциальную систему на сфере, как и всякую ортогональную систему, имеем право считать за систему линий кривизны. Во втором случае мы должны иметь

$$\frac{D}{E} + \frac{D''}{G} = 0$$

или

$$D : D'' = -E : G, \tag{35}$$

так как выражение

$$\frac{D}{E}+\frac{D''}{G}$$

есть средняя кривизна поверхности. С другой стороны, линии кривизны минимальной поверхности и их сферическое изображение должны образовать изотермические системы; следовательно, мы должны иметь

$$E:G=e:g=U':V'$$

или

$$\frac{\partial\omega}{\partial u}:\frac{\partial\omega}{\partial v}=\frac{\partial\lambda}{\partial u}:\frac{\partial\lambda}{\partial v}=U':V',$$

откуда

$$\omega=\omega\,(U+V),\qquad \lambda=\lambda\,(U+V). \tag{36}$$

Соотношение (35) дает нам

$$D:D''=\frac{\partial W}{\partial u}:\frac{\partial W}{\partial v}=-U':V',$$

откуда

$$W=W\,(U-V). \tag{37}$$

Обращаясь, наконец, к соотношениям (19) предшествующего параграфа, получаем после сокращения на ρ^2

$$\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2=\frac{\partial\omega}{\partial u}\,\frac{\partial\lambda}{\partial u},\qquad \left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2=\frac{\partial\omega}{\partial v}\,\frac{\partial\lambda}{\partial v}$$

или на основании значений (36), (37) функций ω, λ, W:

$$W'^2\,(U-V)=\omega'\,(U+V)\cdot\lambda'\,(U+V). \tag{38}$$

Равенство (38), очевидно, возможно лишь в том случае, если $W=\text{const}$. В этом последнем предположении основное или тангенциальное уравнения Лапласа (23) и (24), которым удовлетворяет функция W, дают нам соотношение

$$\frac{\partial\ln\rho}{\partial v}\,U'-\frac{\partial\ln\rho'}{\partial u}\,V'=0,$$

которое противоречит равенствам (33) и (34) при значениях (36) функций ω и λ. Таким образом, второе предположение ведет к противоречию.

Остается допустить

$$\frac{\partial\ln\rho}{\partial v}=0,\qquad \frac{\partial\ln\rho'}{\partial u}=0,$$

откуда

$$\rho=f\,(u),\qquad \rho'=f_1\,(v);$$

подставляя эти значения ρ и ρ' в равенства (32), непосредственно убеждаемся, что система $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ есть система потенциального типа (ср. § 1, (23)); соответственным выбором параметров u, v можем привести ρ и ρ' к единице, так что, сохраняя прежние обозначения, будем иметь

$$D=-\frac{\partial W}{\partial u},\qquad D''=-\frac{\partial W}{\partial v},$$
$$E=\frac{\partial\omega}{\partial u},\qquad G=\frac{\partial\omega}{\partial v},$$
$$e=\frac{\partial\lambda}{\partial u},\qquad g=\frac{\partial\lambda}{\partial v}.$$

Допустим теперь, что одна из производных $\frac{\partial W}{\partial u}$, $\frac{\partial W}{\partial v}$ равна нулю, например, $\frac{\partial W}{\partial v}=0$, т. е., другими словами,

$$W=U, \tag{39}$$

где U есть функция аргумента u. Внося значение (39) для W в основное и тангенциальное уравнения Лапласа (23) и (24), получаем

$$\frac{\partial\ln E}{\partial v}=\frac{\partial\ln e}{\partial v}=0,$$

откуда заключаем, что коэффициенты E и e зависят от одного параметра u. Таким образом, семейство линий кривизны $v=\text{const}$ на поверхности есть вместе с тем семейство геодезических линий; сферическим изображением его служит (как это и должно быть) семейство больших кругов. Данная поверхность в этом случае есть поверхность Монжа (surface moulure), образуемая движением произвольной плоской кривой, при котором плоскость кривой катится по некоторой развертывающейся поверхности. Последовательные положения образующей кривой составляют семейство $v=\text{const}$. Система линий кривизны поверхности состоит, как мы видели, из геодезических линий и их ортогональных траекторий; следовательно, согласно с результатами § 1, поверхности Монжа мы можем рассматривать как предельный случай потенциальных поверхностей; с этим вполне согласуется, что сферическое изображение линий кривизны образует ортогональную систему того же типа, т. е. предельный случай потенциальной системы. Интересно отметить, что все три основные формы поверхности Монжа имеют один и тот же вид, а именно коэффициент при du^2 во всех трех формах есть функция одного параметра u; для первой и третьей форм это уже доказано; для второй следует из соотношения $D^2 = Ee$.

Частный случай поверхностей Монжа составляют, между прочим, поверхности вращения; таким образом, всякая поверхность вращения есть поверхность потенциальная (предельный случай).

В результате мы можем высказать такое положение: *всякая поверхность, для которой основное и тангенциальное уравнения Лапласа допускают общее решение, есть поверхность потенциального типа.*

§ 13. Основное и тангенциальное уравнения в произвольных параметрах; определение линий кривизны потенциальной поверхности

Предполагая, что u и v обозначают произвольные параметры, относительно которых три основных формы поверхности имеют вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= E du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2, \\ \frac{ds^2}{\rho} &= D\, du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2, \\ d\sigma^2 &= e\, du^2 + 2f\, du\, dv + g\, dv^2, \end{aligned} \tag{40}$$

мы можем и в этих параметрах без затруднения определить вид основного и тангенциального уравнений. Действительно, оба эти уравнения должны быть линейными однородными второго порядка с частными производными, т. е. должны иметь соответственно вид

$$L\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + M\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} + N\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = A\frac{\partial\theta}{\partial u} + B\frac{\partial\theta}{\partial v}, \tag{41}$$

и

$$l\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u^2} + m\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u\,\partial v} + n\frac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2} = a\frac{\partial\vartheta}{\partial u} + b\frac{\partial\vartheta}{\partial v}; \tag{42}$$

что касается коэффициентов $L, M, N, A, B, l, m, n, a, b$, то отношения их определяются из того условия, что уравнение (41) удовлетворяется при

$$\theta = x, \quad y, \quad z, \quad \frac{x^2+y^2+z^2}{2},$$

и уравнение (42) — при

$$\vartheta = X,\ Y,\ Z,\ P.$$

Мы можем еще упростить дело, если заметим, что характеристиками того и другого уравнений служат линии кривизны, так как в параметрах линий кривизны то и другое уравнения содержат лишь одну производную второго порядка по обоим параметрам (см. § 12). Дифференциальное уравнение линий кривизны имеет вид

$$(ED' - FD)\, du^2 + (ED'' - GD)\, du\, dv + (FD'' - GD')\, dv^2 = 0 \tag{43}$$

(Бианки, Лекции по дифференциальной геометрии, § 52); следовательно, мы можем непосредственно положить

$$\begin{aligned} L &= e = FD'' - GD', \\ M &= m = -(ED'' - GD) = GD - ED'', \\ N &= n = ED' - FD, \end{aligned} \tag{44}$$

так как характеристики уравнений (41) и (42) должны определяться уравнениями

$$L\, dv^2 - M\, du\, dv + N\, du^2 = 0,$$
$$l\, dv^2 - m\, du\, dv + n\, du^2 = 0.$$

Полагая в уравнении (41) $\theta = x, y, z$ и пользуясь формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + DX, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + D'X, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + D''X, \end{aligned} \tag{45}$$

где $\begin{Bmatrix}ik\\j\end{Bmatrix}$ — известные символы Кристоффеля для формы

ds^2, и аналогичными формулами для y и z (там же, § 47), получаем

$$\left[L\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+M\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+N\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\right]\frac{\partial x}{\partial u}+\left[L\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}+M\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+N\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right]\frac{\partial x}{\partial v}=A\frac{\partial x}{\partial u}+B\frac{\partial x}{\partial v} \qquad (46)$$

и два уравнения, получаемых из (46) заменой x через y и z. Из этих трех уравнений мы имели бы

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}=\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}=0,$$

следовательно, две координаты выражались бы как функции третьей, а потому необходимо, чтобы коэффициенты при $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ в вышеупомянутых уравнениях исчезали; таким образом, имеем

$$\left.\begin{aligned}
A&=L\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+M\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+N\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=\begin{vmatrix}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\\ E & F & G\\ D & D' & D''\end{vmatrix},\\
B&=L\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}+M\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+N\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}=\begin{vmatrix}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\\ E & F & G\\ D & D' & D''\end{vmatrix}.
\end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

Полагая в уравнении (42) $\vartheta = X, Y, Z$ и пользуясь формулами

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}&=\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}'\frac{\partial X}{\partial u}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'\frac{\partial X}{\partial v}-eX,\\
\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v}&=\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'\frac{\partial X}{\partial u}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'\frac{\partial X}{\partial v}-fX,\\
\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}&=\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'\frac{\partial X}{\partial u}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}'\frac{\partial X}{\partial v}-gX
\end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

и аналогичными для Y и Z, где $\begin{Bmatrix}ik\\j\end{Bmatrix}'$ — символы Кристоффеля для третьей основной формы $d\sigma^2$, получаем

совершенно аналогичными рассуждениями

$$\left.\begin{aligned}
a&=L\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}'+M\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'+N\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'=\begin{vmatrix}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}' & \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' & \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'\\ E & F & G\\ D & D' & D''\end{vmatrix},\\
b&=L\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'+M\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'+N\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}'=\begin{vmatrix}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}' & \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' & \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}'\\ E & F & G\\ D & D' & D''\end{vmatrix}.
\end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

Пользуясь полученными результатами, мы можем для произвольной поверхности, данной в каких угодно параметрах u, v, решить вопрос, принадлежит ли эта поверхность к числу поверхностей потенциального типа или нет. Действительно, вопрос сводится, согласно § 12, к следующему: допускают ли уравнения (41) и (42), в которых коэффициенты определяются равенствами (44), (47), (49), общее решение

$$\theta = \vartheta = W$$

или нет. Заменяя в уравнениях (41) и (42) θ и ϑ через W и вычитая второе из первого, получаем уравнение первого порядка

$$(A-a)\frac{\partial W}{\partial u}+(B-b)\frac{\partial W}{\partial v}=0, \qquad (50)$$

которым можем заменить одно из уравнений второго порядка. Таким образом, окончательно дело сводится к решению вопроса о совместности системы

$$(A-a)\frac{\partial W}{\partial u}+(B-b)\frac{\partial W}{\partial v}=0, \qquad (51)$$

$$L\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}+M\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v}+N\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}=A\frac{\partial W}{\partial u}+B\frac{\partial W}{\partial v} \qquad (52)$$

или системы, состоящей из уравнения (50) и уравнения (42). Решение этого вопроса требует лишь дифференцирований и исключений (см. Г у р с а, Уравнения в частных производных 2-го порядка [1]), т. II, гл. VI).

[1]) G o u r s a t, Equations aux dérivees partielles du 2-e ordre.

Система (51), (52) может быть, во-первых, совместной, если уравнение (51) служит промежуточным частным интегралом уравнения (52). В таком случае, обозначая через W_0 одно из решений уравнения (51), имеем для общего решения основного и тангенциального уравнений выражение

$$W = f(W_0),$$

где f — знак произвольной функции. Легко убедиться, что в этом предположении данная поверхность есть поверхность Монжа. Действительно, переходя к параметрам линий кривизны, мы должны допустить, что уравнения (23) и (24) предшествующего параграфа допускают решение $W = f(W_0)$. Полагая, например, в первом из них $\vartheta = W$, получаем в силу произвольности функции f

$$\frac{\partial W_0}{\partial u} \cdot \frac{\partial W_0}{\partial v} = 0,$$

откуда или $\frac{\partial W_0}{\partial u} = 0$, или $\frac{\partial W_0}{\partial v} = 0$, и, следовательно, общее решение основного и тангенциального уравнений есть функция только одного из параметров линий кривизны, а в § 12 мы видели, что это имеет место только для поверхностей Монжа.

В общем случае, полагая

$$\frac{\partial W}{\partial u} = p, \qquad \frac{\partial W}{\partial v} = q$$

и замечая, что

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} = \frac{\partial p}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial p}{\partial v}, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} = \frac{\partial q}{\partial v},$$

можем уравнения (51) и (52) написать в виде

$$(A - a)\,p + (B - b)\,q = 0, \tag{51'}$$

$$L\frac{\partial p}{\partial u} + M\frac{\partial p}{\partial v} + N\frac{\partial q}{\partial v} = Ap + Bq. \tag{52'}$$

Присоединяя к ним условие

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial u}$$

и определяя q через p из уравнения (51′), получаем два уравнения вида

$$c_1\frac{\partial p}{\partial u} + c_2\frac{\partial p}{\partial v} = c_3 p, \qquad c_4\frac{\partial p}{\partial u} + c_5\frac{\partial p}{\partial v} = c_6 p,$$

из которых находим $\frac{\partial \ln p}{\partial u}$ и $\frac{\partial \ln p}{\partial v}$ как функции u, v. Условие интегрируемости должно быть выполнено для потенциальной поверхности, и мы получаем $\ln p$ квадратурой. Таким образом, мы будем знать p, а следовательно, и q на основании уравнения (51′) и можем определить W второй квадратурой. Очевидно, будем иметь

$$W = aW_0 + b,$$

где a и b — произвольные постоянные, не имеющие, впрочем, существенного значения, так как функция $-W$ есть основная функция формы ds^2/ρ, а изменение основной функции формы потенциального вида постоянным слагаемым и постоянным множителем не имеет, как мы знаем, существенного значения.

На основании полученных результатов можем доказать, что *линии кривизны всякой потенциальной поверхности определяются квадратурами.*

Пусть, во-первых, имеем поверхность Монжа. Тогда одно из семейств линии кривизны $\varphi = \text{const}$ состоит из ортогональных траекторий семейства геодезических линий, и, следовательно, мы должны иметь при соответственном выборе параметра φ

$$\Delta(\varphi) = 1. \tag{53}$$

Кроме того, дифференциальное уравнение (43) линий кривизны должно удовлетворяться в силу

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv = 0,$$

откуда имеем

$$(FD'' - GD')\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - (ED'' - GD)\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \\ + (ED' - FD)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 = 0. \tag{54}$$

Таким образом, функция φ должна удовлетворять двум уравнениям первого порядка с частными производными, из которых определяем $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ как функции u, v и, следовательно, находим φ квадратурой. Определение второго семейства линий кривизны тоже сводится к квадратуре, так как нам приходится искать семейство *геодезических* плоских линий, ортогональных данному семейству $\varphi = \text{const}$.

Допустим, во-вторых, что мы имеем потенциальную поверхность общего типа. Обозначая через φ *потенциальный параметр*, соответствующий одному из семейств линий кривизны, имеем для определения φ, во-первых, уравнение (54), как и в предыдущем случае, и, во-вторых, еще одно линейное уравнение первого порядка с частными производными, которое получим из следующих соображений: для основной формы ds^2/ρ функции $-W$ и φ служат соответственно основной функцией и потенциальным параметром некоторой потенциальной системы, а потому на основании общих результатов § 3 (гл. I) (которые вполне применимы к форме ds^2/ρ, так как она имеет значение, не зависящее от выбора параметров, совершенно так же, как и форма ds^2) мы должны иметь

$$\bar{\Delta}(W, \varphi) = -1, \tag{55}$$

где $\bar{\Delta}$ есть обозначение промежуточного дифференциального параметра относительно формы ds^2/ρ, т. е.

$$\bar{\Delta}(W, \varphi) = \frac{D''\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - D'\left(\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + D\frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{DD'' - D'^2}.$$

Функция W, как мы видели, определяется квадратурами; из уравнений (54) и (55) находим $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ как функции u, v и затем потенциальный параметр φ одной квадратурой. Так как в уравнение (55) входят лишь производные W, то всего для определения φ потребуются две квадратуры (см. выше). Для определения потенциального параметра ψ второго семейства линий кривизны, очевидно, получим те же два уравнения (54) и (55), так как к параметру ψ применимы все предыдушие рассуждения; легко убедиться, что уравнения (54), (55) дают два значения для производных $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ и, следовательно, два значения для φ: одно из них, очевидно, соответствует первому параметру (φ), другое — второму (ψ).

§ 14. Уравнение пятого порядка с частными производными, определяющее потенциальные поверхности

Предполагая, что поверхность дана уравнением в декартовых координатах

$$z = z(x, y), \tag{56}$$

мы можем принять координаты x, y за параметры, которые были обозначены через u, v в предшествующем параграфе, и тогда, пользуясь формулами (44), (47), (49), получим основное и тангенциальное уравнения в параметрах x, y. Впрочем, проще получить эти уравнения непосредственно с помощью тех же соображений, которыми мы пользовались в § 13. Так, легко убеждаемся, что основное уравнение не должно содержать первых производных $\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}$, потому что оно должно допускать решения $\theta = x, y$, и окончательно имеем

$$[(1+q^2)s - pqt]\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + [(1+p^2)t - (1+q^2)r]\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} + \\ + [pqr - (1+p^2)s]\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0 \tag{57}$$

(см. Darboux S., т. I, стр. 137). Тангенциальное уравнение имеет вид

$$[(1+q^2)s - pqt]\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + [(1+p^2)t - (1+q^2)r]\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x\,\partial y} + \\ + [pqr - (1+p^2)s]\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} = a\frac{\partial\vartheta}{\partial u} + b\frac{\partial\vartheta}{\partial v}, \tag{58}$$

где коэффициенты a и b содержат частные производные z третьего порядка, так как они определяются из того условия, что уравнение (58) допускает решения

$$\vartheta = X, Y, Z,$$

а в данном случае

$$X = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Y = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Z = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Если поверхность, определяемая уравнением (56), потенциальная, то уравнения (57) и (58) должны допускать общее решение $\theta = \vartheta = W$, или, иначе, система

$$[(1+q^2)s - pqt]\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + [(1+p^2)t - (1+q^2)r]\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y} + \\ + [pqr - (1+p^2)s]\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \quad (59)$$

$$a\frac{\partial W}{\partial x} + b\frac{\partial W}{\partial y} = 0 \quad (60)$$

должна быть совместной. Поступая так же, как и в общем случае (§ 13), положим

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \pi;$$

тогда система (59), (60) сводится к двум линейным однородным уравнениям первого порядка с частными производными для функции π. При составлении этих уравнений приходится выражать $\frac{\partial W}{\partial y}$ через π из уравнения (60) и дифференцировать результат по y для определения $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$ и по x — для подстановки в соотношение

$$\frac{\partial \pi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)$$

(см. § 13); таким образом, два полученных уравнения первого порядка будут содержать (в коэффициентах) производные a и b по x и по y. Далее из этих двух уравнений определяем $\frac{\partial \ln \pi}{\partial x}$, $\frac{\partial \ln \pi}{\partial y}$ и получаем окончательно условие совместности системы (59), (60), дифференцируя первое выражение по y, второе по x и приравнивая результаты. Очевидно, получим уравнение, содержащее вторые производные a и b, а следовательно, производные пятого порядка функции z. Уравнение это можем рассматривать как уравнение, определяющее z как функцию x, y, и, таким образом, изыскание потенциальных поверхностей в декартовых координатах приводится к интегрированию уравнения пятого порядка с частными призводными.

§ 15. Определение потенциальных поверхностей по данному сферическому изображению линий кривизны

Метод изыскания потенциальных поверхностей, указанный в предудущем параграфе, на практике, несомненно, мало применим, так как требует интегрирования уравнения пятого порядка; но мы можем это интегрирование заменить последовательным интегрированием двух уравнений третьего и второго порядков, как это было указано в § 11. Для этой цели мы должны искать выражения координат x, y, z точки поверхности как функций параметров u, v линий кривизны, и задача сводится к изысканию поверхностей, для которых сферическое изображение линий кривизны образует потенциальную систему. Определение всевозможных потенциальных систем на сфере приводится к интегрированию уравнения третьего порядка (§ 8); мы в свое время указали целый ряд решений этого уравнения (гл. III); теперь займемся второй частью задачи, т. е. изысканием всех поверхностей, для которых линии кривизны изображаются на гауссовой сфере данной потенциальной системой.

Сохраняя прежние обозначения, имеем для третьей основной формы искомых поверхностей выражение

$$d\sigma^2 = \frac{\partial \lambda}{\partial u}du^2 + \frac{\partial \lambda}{\partial v}dv^2,$$

где λ — данная функция u, v. Предполагаем, кроме того, что известны выражения координат X, Y, Z точки гауссовой сферы как функций параметров u, v. Тогда задача сводится при обычном методе к определению расстояния P касательной плоскости поверхности от начала координат; P должно удовлетворять, как мы знаем, тангенциальному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\,\partial v}\left\{\frac{\frac{\partial P}{\partial u}}{\frac{\partial \lambda}{\partial u}} + \frac{\frac{\partial P}{\partial v}}{\frac{\partial \lambda}{\partial v}}\right\}, \quad (61)$$

и обратно, всякое решение этого уравнения, коэффициенты которого вполне определяются по данной функции λ, дает расстояние касательной плоскости какой-либо из искомых поверхностей от начала координат (Б и а н к и, Лекции по дифференциальной геометрии, § 73). Зная выражения X, Y, Z как функций u, v, найдем координаты x, y, z точки поверхности из формул Вейнгартена (Weingarten)

$$x = PX + \Delta'(P, X),\ y = PY + \Delta'(P, Y),\quad z = PZ + \Delta'(P, Z) \tag{62}$$

(там же, § 72), где Δ' — знак дифференциального параметра относительно третьей основной формы.

Отметим еще формулы, тоже принадлежащие Вейнгартену:

$$\begin{aligned} -D &= \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}' \frac{\partial P}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}' \frac{\partial P}{\partial v} + eP, \\ -D' &= \frac{\partial^2 P}{\partial u\, \partial v} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' \frac{\partial P}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' \frac{\partial P}{\partial v} + fP, \\ -D'' &= \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}' \frac{\partial P}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}' \frac{\partial P}{\partial v} + gP. \end{aligned} \tag{63}$$

В данном случае из второй формулы получаем, как и следовало ожидать, $D' = 0$, а первая и третья принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial u} &= \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}} \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}} \frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial u} P, \\ \frac{\partial W}{\partial v} &= \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} + \frac{1}{2} \frac{\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}} \frac{\partial P}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}} \frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} P. \end{aligned} \tag{64}$$

Отсюда можем определить основную функцию W второй дифференциальной формы ds^2/ρ при помощи квадратуры; условие интегрируемости выполняется в силу уравнения (61). Функция W, как мы знаем, удовлетворяет тому же тангенциальному уравнению Лапласа, которому удовлетворяет и P; таким образом, формулы (64) позволяют по произвольному решению уравнения (61) находить другое решение этого же уравнения и, следовательно, по данному решению — бесчисленное множество. Связь между функциями W и P принадлежит к числу соотношений, исследованных Дарбу во втором томе его курса по теории поверхностей в одной из глав, посвященных теории линейных уравнений второго порядка с частными производными (кн. IV, гл. VIII); но, между тем как, вообще говоря, функция W удовлетворяет уравнению, отличному от уравнения для P, в данном случае формулы (64) устанавливают преобразование уравнения (61) самого в себя.

Для определения поверхностей данного сферического изображения можно пользоваться и другим методом. Именно, можно определить коэффициенты второй основной формы D и D'' из уравнений Кодацци (14), составленных по отношению к третьей основной форме (Б и а н к и, Лекции по дифференциальной геометрии, § 69). В случае потенциальных поверхностей оба уравнения (14), как мы видели, сводятся к одному

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v} \left\{ \frac{\dfrac{\partial W}{\partial u}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}} + \frac{\dfrac{\partial W}{\partial v}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}} \right\}, \tag{65}$$

причем

$$D = -\frac{\partial W}{\partial u}, \qquad D'' = -\frac{\partial W}{\partial v}.$$

Функция W определяется из того же тангенциального уравнения, из которого определяется P; оба метода, в общем случае различные, приводят здесь к одному и тому же уравнению. Мы увидим впоследствии, что благодаря этому обстоятельству возможно установить преобразование, при помощи которого из произвольной данной потенциальной поверхности получается бесконечный ряд других потенциальных поверхностей.

Дальнейшее решение после определения W и, следовательно, D и D'' требует, как известно, только квадратур. Именно, из формул Родрига (см. (28) § 12) имеем

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\dfrac{\partial W}{\partial u}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}} \frac{\partial X}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\dfrac{\partial W}{\partial v}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}} \frac{\partial X}{\partial v} \tag{66}$$

и аналогично для y и z; из равенств (66) x определяется квадратурой.

При том или другом методе решения нам приходится интегрировать линейное уравнение второго порядка с частными производными. Если мы имеем два решения этого уравнения P_1, P_2 в первом случае и W_1, W_2 — во втором, то, очевидно, решениями будут и выражения

$$aP_1 + bP_2, \tag{67}$$

$$aW_1 + bW_2, \tag{68}$$

где a и b — произвольные постоянные. Обозначая через x_1, y_1, z_1 координаты точки поверхности, соответствующей решению P_1 или W_1, и через x_2, y_2, z_2 — координаты точки поверхности, соответствующей второму решению, можем непосредственно написать выражения координат x, y, z, соответствующие решениям (67) или (68), в виде

$$x = ax_1 + bx_2, \quad y = ay_1 + by_2, \quad z = az_1 + bz_2. \tag{69}$$

Формулы (69) легко получаются при первом методе решения из формул Вейнгартена (62), при втором — из формул Родрига (66).

В частности, полагая $b = 0$, имеем

$$x = ax_1, \quad y = ay_1, \; z = az_1;$$

поверхность, соответствующая решению aP_1 или aW_1, получается, очевидно, подобным изменением начальной поверхности.

Полагая $a = b = 1$, имеем

$$x = x_1 + x_2, \; y = y_1 + y_2, \; z = z_1 + z_2;$$

поверхность, соответствующая решению $P_1 + P_2$ или $W_1 + W_2$, получается геометрическим сложением (по правилу параллелограмма) радиусов-векторов двух данных поверхностей.

Сопоставляя эти замечания, формулам (69) можем дать такое толкование: поверхность, соответствующая решениям $aP_1 + bP_2$ или $aW_1 + bW_2$, получается геометрическим сложением радиусов-векторов двух поверхностей, соответственно подобных двум данным.

Деля правые части формул (69) на $a + b$, что соответствует лишь подобному изменению поверхности, имеем

$$x' = \frac{ax_1 + bx_2}{a+b}, \qquad y' = \frac{ay_1 + by_2}{a+b}, \qquad z' = \frac{az_1 + bz_2}{a+b}. \tag{69'}$$

Новая поверхность есть, очевидно, геометрическое место точек, делящих в отношении $a : b$ отрезки прямых, соединяющих соответственные точки двух данных поверхностей. При этом соответственными точками здесь, как и выше, считаем точки, в которых нормали параллельны. Чтобы получить всевозможные поверхности, соответствующие решениям $aP_1 + bP_2$ или $aW_1 + bW_2$, остается поверхности, получаемые при указанном выше построении, подвергать произвольному подобному преобразованию; впрочем, подобное преобразование не играет существенной роли, так как не изменяет формы поверхности, и можно раз и навсегда условиться всю совокупность подобных поверхностей считать за одно решение задачи; в таком случае указанное выше построение служит геометрическим истолкованием формул (69) и дает все существенно различные поверхности, соответствующие решениям $aP_1 + bP_2$, $aW_1 + bW_2$.

Условимся вообще построение, соответствующее формулам

$$\begin{aligned} x &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots, \\ y &= a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + \ldots, \\ z &= a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 + \ldots, \end{aligned} \tag{70}$$

называть геометрическим сложением, независимо от значений постоянных коэффициентов a_1, a_2, ... Тогда мы можем высказать такое общее положение: имея несколько поверхностей одного сферического изображения, получаем более общее решение геометрическим сложением данных поверхностей; положение это справедливо, очевидно, не только для поверхностей потенциального типа, но и в самом общем случае.

Допустим далее, что имеем решение P или W тангенциального уравнения, зависящее от произвольного параметра σ; тогда решениями того же уравнения будут выражения

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma} \quad \text{и} \quad \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} Pf(\sigma)\, d\sigma$$

или

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma} \quad \text{и} \quad \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} Wf(\sigma)\, d\sigma,$$

где f — знак произвольной функции и квадратуры производятся между постоянными пределами. Пользуясь формулами Вейнгартена (62) при первом методе решения или формулами Родрига (66) при втором, легко получаем следующие выражения для координат точки поверхности:

$$\bar{x} = \frac{\partial x}{\partial \sigma}, \quad \bar{y} = \frac{\partial y}{\partial \sigma}, \quad \bar{z} = \frac{\partial z}{\partial \sigma}, \tag{71}$$

$$\bar{\bar{x}} = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} xf(\sigma)\, d\sigma, \quad \bar{\bar{y}} = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} yf(\sigma)\, d\sigma, \quad \bar{\bar{z}} = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} zf(\sigma)\, d\sigma, \tag{72}$$

где x, y, z — координаты, соответствующие решению P или W. Квадратуры в формулах (72) частные. И та и другая группа формул, очевидно, может быть получена из формул «сложения» (70) при помощи перехода к пределу.

Выведенные нами формулы (69) — (72) позволяют по частным решениям задачи находить более общие, что имеет существенное значение, когда невозможно найти общий интеграл тангенциального уравнения для линий кривизны.

Укажем, наконец, третий метод для определения потенциальных поверхностей данного сферического изображения.

Для этой цели заметим, что в в общем случае коэффициенты E, G и D, D'' первой и второй основных форм должны удовлетворять соотношениям (19) и (14) § 11, и обратно, всякие две пары величин E, G и D, D'', удовлетворяющих этим соотношениям, служат коэффициентами первой и второй основных форм для некоторой поверхности данного сферического изображения. В случае потенциальной поверхности соотношения (19) и (14) принимают, как мы

знаем, следующий вид:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 = \frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial u}, \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2 = \frac{\partial \omega}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial v}, \tag{73}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v}\left\{\frac{\dfrac{\partial W}{\partial u}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}} + \frac{\dfrac{\partial W}{\partial v}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}}\right\}. \tag{74}$$

Но последнее соотношение, как уже было своевременно упомянуто (§ 11), следует из первых двух. Действительно, исключая из двух уравнений (73) функцию ω, имеем

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\left(\dfrac{\partial W}{\partial u}\right)^2}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}}\right\} - \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\left(\dfrac{\partial W}{\partial v}\right)^2}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}}\right\} = 0$$

или

$$\left[\frac{\dfrac{\partial W}{\partial u}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}} - \frac{\dfrac{\partial W}{\partial v}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}}\right] \cdot \left[\frac{\partial^2 W}{\partial u\, \partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v}\left\{\frac{\dfrac{\partial W}{\partial u}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}} + \frac{\dfrac{\partial W}{\partial v}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}}\right\}\right] = 0. \tag{75}$$

Первый множитель

$$\frac{\dfrac{\partial W}{\partial u}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}} - \frac{\dfrac{\partial W}{\partial v}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}} = \frac{D}{e} - \frac{D''}{g} = \frac{E}{D} - \frac{G}{D''} = R - R'$$

(см. § 11) может обращаться в нуль только для сферы; но в этом случае все три функции ω, W, λ могут отличаться только постоянными множителями, а уравнение (74) при $W = c\lambda$ удовлетворяется тождественно. В общем случае первый множитель отличен от нуля; следовательно, второй множитель должен исчезать, и мы опять приходим к уравнению (74).

Таким образом, соотношения между функциями W, ω, λ для произвольной потенциальной поверхности сводятся к уравнению

$$\delta\left\{\frac{\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}}{\sqrt{\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}}}\right\}=-2\sqrt{\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v}}, \tag{22}$$

определяющему λ, и к двум уравнениям

$$\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2=\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial u}, \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2=\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial\lambda}{\partial v}, \tag{73}$$

определяющим функции W и ω по данному λ.

Метод, о котором мы упоминали выше, заключается в определении функции ω непосредственно по данной функции λ, т. е. в исключении из уравнений (73) функции W. Для этой цели определяем производные

$$\frac{\partial W}{\partial u}=\pm\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial u}}, \qquad \frac{\partial W}{\partial v}=\pm\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial\lambda}{\partial v}}; \tag{73'}$$

первое равенство дифференцируем по v, второе по u и вычитаем из первого результата второй. После некоторых упрощений получаем

$$\frac{\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}}{\sqrt{\dfrac{\partial\omega}{\partial u}\dfrac{\partial\omega}{\partial v}}}=\pm\frac{\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}}{\sqrt{\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}}}. \tag{76}$$

Уравнение (76) и может служить для определения функции ω; функция W затем определяется из равенств (73′) квадратурой.

§ 16. Семейство линий $W=\text{const}$ на поверхности и на сфере Гаусса

Из общей теории потенциальных систем мы знаем, что семейства линий $\omega=\text{const}$ на потенциальной поверхности и $\lambda=\text{const}$ на сфере Гаусса состоят из линий, ортогональных к семействам траекторий $u-v=\text{const}$ (соответственно на поверхности и на сфере Гаусса). Нетрудно также определить семейство линий, параметром которого служит основная функция второй дифференциальной формы ds^2/ρ, т. е. семейство

$$W=\text{const}. \tag{77}$$

Для этой цели заметим, что два семейства линий на поверхности, характеризуемые дифференциалами du, dv и $d'u$, $d'v$, сопряжены одно другому относительно данной поверхности, если соблюдается условие

$$D\,du\,d'u+D'(du\,d'v+dv\,d'u)+D''dv\,d'v=0 \tag{78}$$

(см. Б и а н к и, Лекции по дифференциальной геометрии, § 56). Если семейства даны уравнениями

$$\varphi(u,v)=\text{const}, \qquad \psi(u,v)=\text{const},$$

то имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv=0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv=0,$$

и условие (78) принимает вид

$$\overline{\Delta}(\varphi,\psi)=0, \tag{79}$$

где $\overline{\Delta}$ — знак промежуточного параметра относительно второй основной формы. Принимая во внимание значения коэффициентов D, D'' для потенциальной поверхности, легко убеждаемся в существовании равенства

$$\overline{\Delta}(W,u-v)=0,$$

где u, v — потенциальные параметры линий кривизны. Таким образом, семейство $W=\text{const}$ на потенциальной поверхности состоит из линий, сопряженных семейству траекторий

$$u-v=\text{const}.$$

На основании результатов § 2 отсюда заключаем, что во всякой точке поверхности касательная к соответствующей линии $W=\text{const}$ служит осью того бесконечно малого вращения, которое испытывает трехгранный угол, образованный нормалью и касательными к линиям кривизны, в силу бесконечно малого преобразования группы.

На основании общих свойств сферического изображения Гаусса заключаем еще, что касательные к линиям $W=\text{const}$ на поверхности параллельны касательным к линиям $\lambda = \mathrm{const}$ на сфере Гаусса в соответственных точках поверхности и сферы (Darboux S., т. I, стр. 201). Нетрудно в этом убедиться и непосредственно: косинусы углов с осями касательной к линии $W = \mathrm{const}$ (на поверхности) пропорциональны дифференциалам координат x, y, z, взятым в предположении

$$W = \mathrm{const} \quad \text{или} \quad \frac{\partial W}{\partial u} du + \frac{\partial W}{\partial v} dv = 0;$$

дифференциал x принимает следующий вид:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = \frac{\dfrac{\partial W}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{\partial W}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u}}{\dfrac{\partial W}{\partial v}} dv,$$

и окончательно получаем, что искомые косинусы пропорциональны трем якобианам:

$$\frac{\partial (W, x)}{\partial (u, v)} : \frac{\partial (W, y)}{\partial (u, v)} : \frac{\partial (W, z)}{\partial (u, v)}. \tag{80}$$

Повторяя те же рассуждения для семейства $\lambda = \mathrm{const}$ на сфере Гаусса, получаем, что косинусы углов, образуемых с осями касательной к кривой $\lambda = \mathrm{const}$, пропорциональны

$$\frac{\partial (\lambda, X)}{\partial (u, v)} : \frac{\partial (\lambda, Y)}{\partial (u, v)} : \frac{\partial (\lambda, Z)}{\partial (u, v)}. \tag{81}$$

На основании формул Родрига имеем

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\dfrac{\partial W}{\partial u}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}} \frac{\partial X}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\dfrac{\partial W}{\partial v}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}} \frac{\partial X}{\partial v}$$

и аналогично для y и z; вставляя эти выражения производных в якобианы (80), получаем

$$\frac{\partial (W, x)}{\partial (u, v)} : \frac{\partial (W, y)}{\partial (u, v)} : \frac{\partial (W, z)}{\partial (u, v)} = \frac{\partial (\lambda, X)}{\partial (u, v)} : \frac{\partial (\lambda, Y)}{\partial (u, v)} : \frac{\partial (\lambda, Z)}{\partial (u, v)}, \tag{82}$$

откуда и следует справедливость сделанного выше замечания.

Если мы имеем несколько потенциальных поверхностей одного сферического изображения, то на основании предыдущего для всех этих поверхностей касательные к линиям $W = \mathrm{const}$ в соответственных точках параллельны между собой.

Составляя для функции W первый дифференциальный параметр относительно первой основной формы, имеем в силу соотношений (73)

$$\Delta (W) = \frac{\left(\dfrac{\partial W}{\partial u}\right)^2}{\dfrac{\partial \omega}{\partial u}} + \frac{\left(\dfrac{\partial W}{\partial v}\right)^2}{\dfrac{\partial \omega}{\partial v}} = \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \delta\lambda,$$

или, иначе,

$$\Delta(W) = \Delta'(\lambda), \tag{83}$$

где Δ' — знак первого дифференциального параметра относительно третьей основной формы. Принимая во внимание, что $\Delta'(\lambda)$ равняется квадрату скорости течения жидкости по сфере Гаусса, переносящего потенциальную систему $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$ (§ 1), и пользуясь геометрическим истолкованием параметра $\Delta (W)$ как квадрата производной функции W по нормали, можно дать равенству (83) такое толкование: бесконечно малые расстояния между кривыми семейства $W = \mathrm{const}$ обратно пропорциональны скоростям течения, соответствующего данной потенциальной системе на гауссовой сфере.

Мы можем также рассматривать семейство $W = \mathrm{const}$ на сфере Гаусса, т. е. сферическое изображение того семейства, которое мы уже исследовали. Косинусы углов, образуемых касательной к кривой этого семейства с осями, очевидно, пропорциональны

$$\frac{\partial (W, X)}{\partial (u, v)} : \frac{\partial (W, Y)}{\partial (u, v)} : \frac{\partial (W, Z)}{\partial (u, v)}.$$

На основании формул Родрига

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\dfrac{\partial W}{\partial u}}{\dfrac{\partial \omega}{\partial u}} \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\dfrac{\partial W}{\partial v}}{\dfrac{\partial \omega}{\partial v}} \frac{\partial x}{\partial v} \quad \text{и т. д.}$$

легко получаем

$$\frac{\partial (W, X)}{\partial (u, \partial)} : \frac{\partial (W, Y)}{\partial (u, v)} : \frac{\partial (W, Z)}{\partial (u, v)} = \frac{\partial (\omega, x)}{\partial (u, v)} : \frac{\partial (\omega, y)}{\partial (u, v)} : \frac{\partial (\omega, z)}{\partial (u, v)},$$

а отсюда заключаем, что касательные к линиям $W = \text{const}$ на сфере Гаусса параллельны касательным к линиям $\omega = \text{const}$ на поверхности.

Равенство (83), выведенное выше, устанавливает связь между дифференциальными параметрами функций W и λ относительно первой и третьей основных форм. Принимая во внимание соотношения (73) и отмечая дифференциальные параметры относительно третьей формы значком $'$, а относительно второй — чертой $^-$, легко получаем целый ряд подобных соотношений:

$$\begin{gathered} \Delta (\omega, \lambda) = \Delta (W) = \Delta' (\lambda) = \overline{\Delta} (W, \lambda), \\ \Delta' (\omega, \lambda) = \Delta' (W) = \Delta (\omega) = \overline{\Delta} (W, \omega), \qquad (84) \\ \overline{\Delta} (\omega, \lambda) = \overline{\Delta} (W) = \Delta (\omega, W) = \Delta' (\lambda, W). \end{gathered}$$

Все эти соотношения по свойству дифференциальных параметров имеют место в произвольных координатах на поверхности.

§ 17. Потенциальные поверхности, которые при прямолинейном поступательном перемещении или при подобном изменении образуют семейства Ламе

В § 15 мы видели, что потенциальные поверхности данного сферического изображения могут быть определяемы по основной функции $-W$ второй квадратичной дифференциальной формы ds^2/ρ, причем для W мы можем взять произвольное решение тангенциального уравнения Лапласа. С другой стороны, как известно, тангенциальному уравнению удовлетворяют координаты X, Y, Z точки гауссовой сферы (ср. § 12) или произвольное линейное сочетание этих координат

$$c_1X + c_2Y + c_3Z,$$

где c_1, c_2, c_3 — постоянные величины. Таким образом,

мы имеем право положить, между прочим,

$$W = c_1X + c_2Y + c_3Z. \qquad (85)$$

Соответствующая этому решению потенциальная поверхность определяется квадратурами (см. § 15), так как выражения X, Y, Z как функций u, v известны, если дано сферическое изображение. Вся совокупность поверхностей этого типа, соответствующих различным значениям постоянных c_1, c_2, c_3, может быть получена «геометрическим сложением» (см. § 15) трех поверхностей, соответствующих решениям $W = X$, $W = Y$, $W = Z$. Изменяя направление осей координат, мы всегда можем соотношение (85) (при данных c_1, c_2, c_3) привести к виду $W = cZ$ и даже можем предположить $c = 1$, так как умножение функции W на постоянный множитель соответствует лишь подобному изменению поверхности. Итак, окончательно полагаем

$$W = Z, \qquad (86)$$

причем все наши результаты будут относиться и к поверхностям, для которых W определяется общим соотношением (85).

На основании формул Родрига

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{\dfrac{\partial W}{\partial u}}{\dfrac{\partial \omega}{\partial u}} \frac{\partial z}{\partial u}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial v} = \frac{\dfrac{\partial W}{\partial v}}{\dfrac{\partial \omega}{\partial v}} \frac{\partial z}{\partial v}$$

получаем в силу соотношения (86)

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial v},$$

откуда

$$\omega = z \qquad (87)$$

(постоянное, вводимое квадратурой, не имеет существенного значения). Таким образом, семейство $\omega = \text{const}$ линий, ортогональных траекториям $u - v = \text{const}$ на поверхности, состоит из сечений поверхности параллельными плоскостями. Равным образом семейство $W = \text{const}$ на сфере Гаусса, т. е. сферическое изображение линий, сопряженных семейству траекторий $u - v = \text{const}$ на поверхности, состоит из системы параллелей (в силу соотношения (86)). Система лучей l, соединяющих центры геодезической кривизны двух линий кривизны для всякой точки поверхности, состоит из прямых, параллельных одной и той же плоскости (плоскости xy при $W = Z$), так как лучи l параллельны касательным к кривым $\omega = \text{const}$ (см. § 11, § 2).

Будем произвольную поверхность рассматриваемого типа перемещать поступательно так, чтобы все точки ее описывали прямые, параллельные оси z. Тогда мы получим семейство равных поверхностей, и нетрудно доказать, что это семейство будет семейством Ламе (Lamé), т. е. одним из семейств тройной ортогональной системы в пространстве. Действительно, необходимое и достаточное условие того, чтобы некоторое семейство поверхностей было семейством Ламе, заключается, согласно Кэли, в следующем: бесконечно малое расстояние произвольной поверхности семейства от бесконечно близкой поверхности должно удовлетворять основному уравнению Лапласа для линий кривизны поверхности (см. Darboux S. O., т. I, гл. IV, n° 45). В данном случае это бесконечно малое расстояние может быть найдено как проекция пути, пройденного точкой поверхности при бесконечно малом поступательном перемещении параллельно оси z, на нормаль и, следовательно, выражается произведением

$$\varepsilon Z,$$

где ε — бесконечно малый множитель, не зависящий от u, v. Так как мы имели $W = Z$, то Z, а следовательно, и εZ удовлетворяют основному уравнению Лапласа, которое, очевидно, для всех поверхностей семейства одно и то же, и, таким образом, замечание наше оправдывается.

Обратно, если мы предположим, что имеем семейство Ламе, образованное поступательным перемещением некоторой поверхности параллельно оси z, то бесконечно малое расстояние εZ, а следовательно, и Z должны удовлетворять основному уравнению Лапласа для линий кривизны данной поверхности (уравнение это для всех поверхностей одно и то же). Так как z, кроме того, удовлетворяет тангенциальному уравнению Лапласа, то оба уравнения имеют общее решение $W = Z$, и, следовательно, семейство состоит из потенциальных поверхностей исследуемого типа.

Очевидно, и два других семейства тройной ортогональной системы того же типа, что и первое. В самом деле, если мы всей тройной ортогональной системе сообщим поступательное перемещение по оси z, то первое семейство преобразуется само в себя, а следовательно, преобразуются в себя и два других семейства, так как прямые углы сохраняются при перемещении.

Семейства Ламе, с которыми нам пришлось встретиться, рассматривались А. Пето; им посвящена заметка автора, которую мы уже два раза цитировали (Compt. rend. Acad. Sci. Paris, 1891). Заметим, между прочим, что все поверхности, которые при поступательном перемещении по оси z образуют семейства Ламе, определяются уравнением третьего порядка с частными производными. Действительно, допустим, что поверхность дана уравнением в декартовых координатах

$$z = z(x, y);$$

тогда

$$Z = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \tag{88}$$

и основное уравнение Лапласа для линий кривизны в координатах x, y принимает вид

$$[(1+q^2)s - pqt]\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + [(1+p^2)t - (1+q^2)r]\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} + \\ + [pqr - (1+p^2)s]\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0 \tag{89}$$

(см. § 14). Согласно предыдущему поверхности исследуемого типа вполне характеризуются условием, чтобы Z удовлетворяло основному уравнению Лапласа. Полагая в уравнении (89)

$$\theta = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

получаем, очевидно, уравнение третьего порядка с частными производными, определяющее z как функцию x, y.

Тангенциальному уравнению Лапласа (30) для линий кривизны можно также удовлетворить, полагая $\vartheta = \sigma P$, где P — расстояние начала от касательной плоскости и σ — постоянный множитель; следовательно, возможны потенциальные поверхности, для которых основная функция второй формы определяется равенством

$$W = \sigma P. \tag{90}$$

На основании формул Родрига

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\dfrac{\partial W}{\partial u}}{\dfrac{\partial \omega}{\partial u}} \cdot \frac{\partial\left(\dfrac{1}{2} r^2\right)}{\partial u}, \qquad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\dfrac{\partial W}{\partial v}}{\dfrac{\partial \omega}{\partial v}} \cdot \frac{\partial\left(\dfrac{1}{2} r^2\right)}{\partial v}$$

получаем в силу соотношения (90)

$$\omega = \sigma \cdot \frac{r^2}{2}, \tag{91}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ есть радиус-вектор из начала координат. Таким образом, семейство $\omega = \text{const}$ линий, ортогональных траекториям $u - v = \text{const}$, состоит из сферических линий, расположенных на концентрических сферах. Семейство $W = \text{const}$ линий, сопряженных траекториям $u - v = \text{const}$, состоит из линий прикосновения развертывающихся поверхностей, описанных около данной поверхности и около концентрических сфер, на которых расположены линии $\omega = \text{const}$ (в силу соотношения(90)).

Система лучей l, соединяющих центры геодезической кривизны двух линий кривизны для всякой точки поверхности, обладает следующим свойством: плоскости, проведенные через точки поверхности перпендикулярно соответствующим лучам l, все проходят через одну точку; справедливость этого замечания следует из параллельности лучей l касательным к кривым $\omega = \text{const}$.

Будем произвольную потенциальную поверхность, для которой $W = \sigma P$, подвергать подобному (гомотетическому) изменению с центром подобия в начале координат. Нетрудно убедиться, что мы получим при этом семейство Ламе. Действительно, бесконечно малое расстояние произвольной поверхности семейства от бесконечно близкой поверхности того же семейства, очевидно, равняется εP, где ε — бесконечно малый множитель, не зависящий от u, v; с другой стороны, имеем $W = \sigma P$, и, следовательно, εP удовлетворяет основному уравнению Лапласа для линий кривизны, которое, как легко убедиться, тождественно для всех поверхностей семейства. Обратно, если предположим, что семейство Ламе состоит из гомотетических поверхностей, то вполне аналогично тому, как в предшествующем случае, докажем, что все поверхности семейства принадлежат к числу потенциальных, для которых $W = \sigma P$. Совокупность всех поверхностей этого типа определяется уравнением третьего порядка с частными производными, которое получим, полагая в основном уравнении (85), написанном в декартовых координатах x, y,

$$\theta = \sigma P = \sigma \frac{px + qy - z}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

(см. выше).

Семейства Ламе, состоящие из гомотетических поверхностей, были впервые указаны А. Пето (Compt. rend. Acad. Sci. Paris, 1891).

Решим вопрос об определении по данному сферическому изображению всех потенциальных поверхностей, для которых $W = \sigma P$ и которые мы будем называть потенциальными поверхностями гомотетического типа. Для этой цели обратимся к формулам Вейнгартена (63) § 15, которые устанавливают связь между P и коэффициентами второй основной формы

$$D = -\frac{\partial W}{\partial u}, \qquad D' = 0, \qquad D'' = -\frac{\partial W}{\partial v}.$$

В данном случае эти уравнения принимают вид (в силу $W = \sigma P$)

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} - \left\{\frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}} + \sigma\right\}\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}}\frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\partial\lambda}{\partial u}P = 0,\\
\frac{\partial^2 P}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}}\frac{\partial P}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}}\frac{\partial P}{\partial v} = 0, \qquad (92)\\
\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} - \frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}}\frac{\partial P}{\partial u} - \left\{\frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}} + \sigma\right\}\frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\partial\lambda}{\partial v}P = 0.
\end{gathered}$$

Таким образом, P определяется из системы трех совокупных уравнений второго порядка с частными производными. Исключая дифференцированием производные второго порядка, легко убеждаемся, что эта система вполне интегрируемая, и определение P сводится к интегрированию системы трех обыкновенных дифференциальных линейных уравнений первого порядка или одного уравнения третьего порядка. Интегрирование вводит три произвольных постоянных; кроме того, имеем произвольный параметр σ и, следовательно, получаем ∞^4 потенциальных поверхностей гомотетического типа, линии кривизны которых имеют сферическим изображением произвольную потенциальную систему на сфере.

§ 18. Преобразование потенциальных поверхностей с сохранением сферического изображения линий кривизны

Если мы имеем произвольную потенциальную поверхность Σ данного сферического изображения, то мы вместе с тем знаем два решения соответствующего тангенциального уравнения Лапласа, а именно функцию W, которая с обратным знаком служит основной функцией второй дифференциальной формы поверхности, и расстояние P касательной плоскости от начала координат. На основании общих замечаний об определении потенциальных поверхностей данного сферического изображения (§ 15) мы можем получить две потенциальные поверхности Σ_1 и Σ_{-1} одного сферического изображения с поверхностью Σ, полагая соответственно

$$P^{(1)} = W, \tag{93}$$

и

$$W^{(-1)} = P, \tag{94}$$

причем значками $^{(1)}$ и $^{(-1)}$ отмечаем величины, относящиеся соответственно к поверхностям Σ_1 и Σ_{-1}. Поверхность Σ_1 определяется без всякого интегрирования с помощью формул Вейнгартена (62) § 15, в которых следует заменить P через $P_1 = W$ и координаты x, y, z через координаты x_1, y_1, z_1 точки поверхности Σ_1.

Принимая во внимание формулы Родрига (66) § 15, получаем окончательно

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} + WX, \\ y_1 &= \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} + WY, \\ z_1 &= \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} + WZ. \end{aligned} \tag{95}$$

Поверхность Σ_{-1} определяется с помощью квадратур из формул Родрига (66), в которых следует заменить W через $W^{(-1)} = P$ и координаты x, y, z через координаты x_{-1}, y_{-1}, z_{-1} точки поверхности Σ_{-1}. Применяя те же рассуждения к поверхностям Σ_1 и Σ_{-1} и т. д., получим бесконечный ряд потенциальных поверхностей

$$\ldots, \Sigma_{-3}, \Sigma_{-2}, \Sigma_{-1}, \Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots \tag{96}$$

одного сферического изображения. Поверхности Σ_1, Σ_2, ... будем называть положительными, а поверхности ..., Σ_{-2}, Σ_{-1} — отрицательными производными данной поверхности Σ относительно начала координат. Очевидно, всякая поверхность Σ_{i+1} ряда (96) получается из предшествующей Σ_i с помощью формул (95), в которых следует заменить x, y, z и x_1, y_1, z_1 соответственно через x_i, y_i, z_i и x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}.

Если поверхность Σ гомотетического типа, то имеем

$$W = \sigma P \tag{90}$$

и все поверхности ряда (96) обращаются в поверхности, подобные начальной.

Если Σ — гауссова сфера, на которой нам дана потенциальная система, то имеем

$$W = \lambda, \qquad P = 1.$$

Для поверхности Σ_1 получаем из формул Вейнгартена (64) § 15

$$W_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \lambda^2\right),$$

В случае

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\frac{\partial\lambda}{\partial v}+\lambda^2=a\lambda+b,$$

который мы рассматривали в § 9, поверхность Σ_1, очевидно,— тоже сфера, и, следовательно, все положительные производные Σ — сферы. Отрицательные производные Σ_{-1}, Σ_{-2} отпадают, так как имеем

$$W^{(-1)}=1,$$

и, следовательно, коэффициенты второй основной формы для поверхности Σ_{-1} исчезают, а этого не может быть для собственной поверхности.

Если предположим, что поверхность Σ — сфера радиуса, равного R, и центр этой сферы не совпадает с началом координат, то имеем

$$W=\lambda,$$
$$P=R+c_1X+c_2Y+c_3Z. \tag{97}$$

Ряд положительных производных остается прежний Что касается до отрицательных производных, то для Σ_{-}. имеем

$$W^{(-1)}=R+c_1X+c_2Y+c_3Z,$$

и, следовательно, Σ_{-1} есть поверхность, которая при прямолинейном поступательном перемещении образует семейство Ламе (см. § 17).

Формулы (93) и (94), устанавливающие связь между данной поверхностью и ее двумя первыми производными, по-видимому, допускают некоторое обобщение, а именно, можно положить

$$P^{(1)}=aW+b,$$
$$W^{(-1)}=aP+b, \tag{98}$$

где a и b — постоянные. Но нетрудно убедиться, что существенно новых результатов мы при этом не получим. Действительно, во-первых, постоянное b во второй из формул не имеет никакого значения, так как для определения поверхности Σ_{-1} требуются лишь производные функции

$W^{(-1)}$; во-вторых, умножение $P^{(1)}$ или $W^{(-1)}$ на постоянный множитель соответствует лишь подобному изменению поверхностей Σ_1 и Σ_{-1} и последующих производных; наконец, постоянное b в первой из формул (98) соответствует переходу от поверхности Σ_1 к параллельной ей поверхности или, что безразлично,— к геометрическому сложению поверхности Σ_1 с гауссовой сферой; если построить целый ряд поверхностей, переходя от предыдущей к последующей с помощью первой из формул (98), то полученные поверхности, очевидно, могут быть образованы геометрическим сложением производных Σ_1, Σ_2, ... с производными гауссовой сферы.

Возможно, наконец, образовать для данной поверхности Σ ряд производных не относительно начала, а относительно произвольной точки (c_1, c_2, c_3); другими словами, в формулах (93) и (94) можно рассматривать P и $P^{(1)}$ как расстояния касательных плоскостей от точки (c_1, c_2, c_3). В этом предположении положительные производные отличаются от положительных производных относительно начала только положением. Что касается до отрицательных производных, то, обозначая по-прежнему через P расстояние касательной плоскости от начала, будем иметь

$$W^{(-1)}=P-c_1X-c_2Y-c_3Z,$$

и, следовательно, первая отрицательная производная получается геометрическим сложением первой отрицательной производной относительно начала и поверхности, которая при поступательном движении образует семейство Ламе.

На основании предыдущего можем также сказать, что первую отрицательную производную поверхности Σ относительно точки (c_1, c_2, c_3) можно рассматривать как первую отрицательную производную относительно начала от поверхности, получаемой геометрическим сложением Σ с некоторой сферой. Отсюда заключаем, что весь ряд отрицательных производных относительно произвольной точки получается геометрическим сложением отрицательных производных данной поверхности и некоторой сферы относительно начала координат.

Глава V

ЧАСТНЫЕ ТИПЫ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 19. Минимальные поверхности потенциального типа

Произвольная минимальная поверхность конформно изображается на гауссовой сфере, причем сферическим изображением системы линий кривизны служит изотермическая система на сфере. Обратно, произвольная изотермическая система на сфере позволяет построить вполне определенную минимальную поверхность, если все подобные поверхности не будем считать существенно различными между собой. Если будем исходить из потенциально-изотермических систем на сфере, то соответствующие им минимальные поверхности, очевидно (см. § 15), будут потенциального типа; притом мы исчерпываем все поверхности этого рода, если рассмотрим всевозможные потенциально-изотермические системы на сфере.

Если линейный элемент гауссовой сферы дан в изотермических параметрах, то определение соответствующей минимальной поверхности можем вести обычным путем, пользуясь формулами Вейерштрасса или Эннепера и Римана. Если тот же линейный элемент дан в потенциальных параметрах u, v, то, сохраняя прежние обозначения, имеем

$$\lambda = \lambda\,(U,\ V) \tag{1}$$

и, как нетрудно убедиться,

$$\omega = \omega\,(U+V); \tag{2}$$

действительно, семейства кривых $\lambda = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$, ортогональных траекториям $u—v=\text{const}$, соответственно на гауссовой сфере и на поверхности, должны соответствовать одно другому в силу того, что минимальная поверхность конформно изображается на гауссовой сфере. Соотношение (76) предшествующей главы (§ 15) принимает вид

$$\omega'' : \omega' = \pm\,\lambda'' : \lambda', \tag{3}$$

где значки $'$ указывают дифференцирование по аргументу $U+V$. Если в уравнении (3) возьмем верхний знак, то получим $\omega' = c\lambda'$; но это предположение приведет нас,

очевидно, не к минимальной поверхности, а к сфере. Итак, окончательно имеем

$$\omega'' : \omega' = -\,\lambda'' : \lambda',$$

откуда

$$\omega' = c : \lambda';$$

выбирая одну из системы подобных поверхностей, имеем

$$\omega' = 1 : \lambda'. \tag{4}$$

Из соотношения (4) определим функцию ω; дальнейшее решение сводится к квадратурам (см. § 15).

В § 10 (гл. III) были определены всевозможные потенциально-изотермические системы на сфере.

Первая из указанных там потенциальных систем, состоящая из двух ортогональных семейств локсодром, приводит к винтовой минимальной поверхности Шерка (Scherk). Действительно, согласно результатам § 9 (гл. III), для системы локсодром имеем, сохраняя все обозначения этого параграфа, $\Psi\,(\varphi) = k$ и

$$\Psi\,(\varphi) = \frac{k-i}{k+i}\,e^{-4i\varphi} = \frac{k-i}{k+i}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha^2};$$

следовательно, дифференциальное уравнение локсодром в параметрах α, β прямолинейных образующих гауссовой сферы имеет вид (см. (53) § 9)

$$\frac{k-i}{\alpha^2}\,d\alpha^2 - \frac{k+i}{\beta^2}\,d\beta^2 = 0. \tag{5}$$

С другой стороны, дифференциальное уравнение линий кривизны минимальной поверхности в параметрах u, u_1 Вейерштрасса, которые совпадают с параметрами α, β, имеет вид

$$F\,(u)\,du^2 - F_1\,(u_1)\,du_1^2 = 0, \tag{6}$$

где $F\,(u)$ и $F_1\,(u_1)$ — функции, входящие в формулы Вейерштрасса (см. Darboux S., т. I, стр. 302). Так как линии кривизны изображаются на сфере локсодромами, то необходимо

$$F\,(u) = c\cdot\frac{k-i}{u^2},\qquad F_1(u_1) = c\cdot\frac{k+i}{u_1^2},$$

откуда следует справедливость сделанного выше замечания (там же, стр. 307).

Второй тип потенциально-изотермической системы на сфере, указанный в § 10, соответствует следующему виду линейного элемента:

$$d\sigma^2 = \frac{c^2 (e^u + e^v)^{c-1}}{[1 + (e^u + e^v)^c]^2} [e^u du^2 + e^v dv^2] \tag{7}$$

(см. (106) § 10). При этом имеем соотношения

$$e^{u/2} + ie^{v/2} = \alpha^{1/c}, \qquad e^{u/2} - ie^{v/2} = \beta^{1/c}, \tag{8}$$

где α, β (или по обозначению Вейерштрасса u, u_1) — параметры прямолинейных образующих гауссовой сферы. Пользуясь соотношениями (8), составляем дифференциальное уравнение линий кривизны в параметрах α, β и, так же как и в предшествующем случае, находим функции Вейерштрасса

$$F(u) = Cu^{\frac{2}{c}-2}, \qquad F_1(u_1) = Cu_1^{\frac{2}{c}-2}. \tag{9}$$

Соответствующая минимальная поверхность принадлежит к числу налагающихся на поверхности вращения (Darboux S., т. I, стр. 338). Из формул Вейерштрасса (там же, стр. 289) следует, что поверхность эта алгебраическая для соизмеримых значений c, кроме $c = \pm 2$.

Третий тип потенциальной системы, указанный в § 10, состоит из двух взаимно ортогональных пучков кругов. В общем случае получаем минимальную поверхность, указанную Бонне (Bonnet) и изученную Дарбу (там же, стр. 315, 316); в частности, если круги каждого пучка соприкасаются в одной точке, имеем поверхность Эннепера (там же, стр. 317, 318).

Наконец, четвертый тип изотермической потенциальной системы есть система софокусных сферических конических сечений. В § 10 были даны соответствующие формулы в эллиптических параметрах ξ, η. Предполагая линейный элемент ds минимальной поверхности и линейный элемент $d\sigma$ сферы Гаусса в потенциальных параметрах u, v, имеем

$$ds^2 = \omega' (U' du^2 + V' dv^2),$$
$$d\sigma^2 = \lambda' (U' du^2 + V' dv^2),$$

откуда

$$\frac{ds^2}{d\sigma^2} = \frac{\omega'}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda'^2},$$

в силу равенства (4). Отношение $\frac{ds^2}{d\sigma^2}$ не зависит от выбора параметров; следовательно, в эллиптических параметрах ξ, η имеем точно так же

$$\frac{ds^2}{d\sigma^2} = \frac{1}{\lambda'^2}$$

или, так как $\lambda' = \xi - \eta$ и

$$d\sigma^2 = \frac{\eta - \xi}{4}\left[\frac{d\xi^2}{(\xi - x_0)(\xi - x_1)(\xi - x_2)} - \frac{d\eta^2}{(\eta - x_0)(\eta - x_1)(\eta - x_2)}\right]$$

(см. § 10), то окончательно

$$ds^2 = \frac{1}{4(\eta - \xi)}\left[\frac{d\xi^2}{(\xi - x_0)(\xi - x_1)(\xi - x_2)} - \frac{d\eta^2}{(\eta - x_0)(\eta - x_1)(\eta - x_2)}\right]. \tag{10}$$

Зная линейный элемент и сферическое изображение поверхности ((147) § 10), находим выражения координат x, y, z с помощью квадратур из формул Родрига (см. § 15). Предполагая $x_0 > \eta > x_1 > \xi > x_2$, имеем

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{x_0 - \eta}{x_0 - \xi}}, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{(x_0 - x_1)(x_1 - x_2)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\eta - x_1}{x_1 - \xi}}, \\ z &= \frac{1}{\sqrt{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{x_2 - \eta}{x_2 - \xi}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Исключая параметры ξ, η, получаем уравнение поверхности

$$\begin{aligned} &(x_1 - x_2)\operatorname{ch}^2(x\sqrt{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}) + \\ &\quad + (x_2 - x_0)\cos^2(y\sqrt{(x_0 - x_1)(x_1 - x_2)}) + \\ &\quad\quad + (x_0 - x_1)\operatorname{ch}^2(z\sqrt{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Обратные величины функций $F(u)$, $F_1(u_1)$, входящих в формулы Вейерштрасса, для рассматриваемой поверхности имеют вид многочленов четвертой степени.

§ 20. Потенциально-изотермические поверхности

Если линии кривизны поверхности образуют систему в одно и то же время потенциальную и изотермическую, то поверхность принадлежит одновременно к числу поверхностей потенциального типа и поверхностей изотермических. Сохраняя все прежние обозначения, мы должны иметь в этом случае

$$\omega = \omega\,(U + V). \tag{13}$$

Вставляя значение (13) функции ω в соотношение (76) § 15, получаем

$$\frac{\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}}{\sqrt{\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v}}} = \pm\frac{\omega''}{\omega'}\sqrt{U'V'}, \tag{14}$$

и так как функция λ должна удовлетворять уравнению (22) § 11, то имеем, кроме того,

$$\sqrt{\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v}} = -\frac{1}{2}\delta\left(\pm\frac{\omega''}{\omega'}\sqrt{U'V'}\right). \tag{15}$$

Исключая λ из двух уравнений (14) и (15), получаем условия, которые определяют вид функции ω и вид функций U, V.

По-видимому, полное решение вопроса требует довольно сложных выкладок, и потому в дальнейшем ограничимся изысканием частных типов потенциально-изотермических поверхностей.

Известно, что всякая изотермическая поверхность S параллельными нормалями изображается конформно на некоторой другой изотермической поверхности S_1; поверхности S и S_1 связаны так называемым соответствием Кристоффеля (см. Darboux S., т. II, стр. 239—243). Если поверхность S потенциального типа, то и S_1, очевидно, тоже. Обозначая основные функции для системы линий кривизны той и другой поверхностей соответственно через ω и ω_1, мы должны иметь

$$\omega = \omega\,(U + V),\quad \omega_1 = \omega_1\,(U_1 + V_1).$$

Квадраты линейных элементов S и S_1 имеют соответственно вид

$$ds^2 = \omega'(U'\,du^2 + V'dv^2),\quad ds_1^2 = \omega_1'(U_1'\,du^2 + V_1'dv^2).$$

Так как соответствие между S и S_1 конформное, то необходимо

$$U_1' : U' = V_1' : V',$$

откуда

$$U_1 = mU + a,\quad V_1' = mV + b. \tag{16}$$

Без ущерба для общности можем предположить $m = 1$, $a = b = 0$, так как мы имеем право к каждой из функций U_1, V_1 прибавлять постоянное и умножать их на один и тот же постоянный множитель (ср. гл. III, § 10). Итак, можем положить $U_1 = U$, $V_1 = V$, и, следовательно,

$$\omega = \omega\,(U + V),\quad \omega_1 = \omega_1\,(U + V). \tag{17}$$

Функция λ для поверхностей S и S_1 должна иметь одно и то же значение, так как сферическое изображение линий кривизны той и другой поверхности общее; поэтому на основании равенства (14) и аналогичного равенства для функции ω_1 имеем

$$\omega_1'' : \omega_1' = \pm\,\omega'' : \omega'.$$

Необходимо выбрать в этом соотношении нижний знак, так как в противном случае поверхность S_1 будет подобна поверхности S и мы не будем иметь соответствия Кристоффеля между двумя существенно различными изотермическими поверхностями. Итак, мы должны положить

$$\omega_1'' : \omega_1' = -\,\omega'' : \omega',$$

откуда

$$\omega_1' = c : \omega'.$$

Если все подобные поверхности не считать существенно различными между собой, то можем взять $c = 1$, т. е.

$$\omega_1' = 1 : \omega', \tag{18}$$

и с такой точки зрения каждой потенциально-изотермической поверхности S в силу преобразования Кристоффеля соответствует вполне определенная потенциально-изотермическая поверхность S_1.

Если поверхность S — сфера, на которой имеем потенциально-изотермическую систему $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, то S_1, очевидно,— минимальная поверхность потенциального типа, т. е. поверхность, принадлежащая к числу рассмотренных в предшествующем параграфе.

Допустим теперь, что между двумя потенциально-изотермическими поверхностями S и S_1 возможно установить соответствие параллельными нормалями с сохранением линий кривизны, но притом отличное от соответствия Кристоффеля и, следовательно, не конформное. Сферическое изображение линий кривизны поверхностей S и S_1 в этом предположении одно и то же, и, следовательно, функция λ для S и S_1 имеет одно и то же значение; кроме того, имеем, сохраняя прежние обозначения,

$$\omega = \omega\,(U + V), \quad \omega_1 = \omega_1\,(U_1 + V_1), \tag{19}$$

но при этом функции U_1 и V_1, вообще говоря, отличны от U и V и не могут быть выражены линейно через U и V, т. е. между U_1, V_1 и U, V не существует, вообще говоря, соотношений вида (16). Из равенства (14) и аналогичного равенства для функции ω имеем, в нашем предположении,

$$\frac{\omega_1''}{\omega_1'}\sqrt{U_1'V_1'} = \pm\frac{\omega''}{\omega'}\sqrt{U'V'}. \tag{20}$$

Возводя обе части соотношения (20) в квадрат и умножая обе части полученного равенства на $4du_1dv_1$, имеем

$$4\left(\frac{\omega_1''}{\omega_1'}\right)^2 dU_1dV_1 = 4\left(\frac{\omega''}{\omega'}\right)^2 dU\,dV;$$

полагая для краткости

$$\frac{\omega''}{\omega'} = e^{F(U+V)}, \qquad \frac{\omega_1''}{\omega_1'} = e^{F_1(U_1+V_1)}, \tag{21}$$

получаем

$$4e^{F_1}\,dU_1dV_1 = 4e^{F}\,dU\,dV. \tag{22}$$

Мы можем рассматривать две части равенства (22) как два выражения для квадрата линейного элемента некоторой поверхности Σ в мнимых симметрических координатах. Полагая

$$\begin{aligned} U + V &= \xi, \qquad & U - V &= i\eta, \\ U_1 + V_1 &= \xi_1, \qquad & U_1 - V_1 &= i\eta_1, \end{aligned} \tag{23}$$

можем равенство (22) написать в следующем виде:

$$e^{2F_1(\xi_1)}\,(d\xi_1^2 + d\eta_1^2) = e^{2F(\xi)}\,(d\xi^2 + d\eta^2). \tag{24}$$

Оба выражения квадрата линейного элемента поверхности Σ соответствуют, очевидно, изгибаниям поверхностей вращения; таким образом, поверхность Σ двумя *различными* способами изгибается в поверхность вращения; а в таком случае, как известно, она допускает бесчисленное множество таких изгибаний, и гауссова кривизна ее имеет постоянную величину. Обратно, произвольная поверхность постоянной кривизны допускает ∞^2 различных изгибаний в поверхности вращения. Таким образом, соотношение (22), а следовательно, и соотношение (20), вполне равносильны требованию, чтобы гауссова кривизна квадратичных дифференциальных форм, находящихся в двух частях равенства (22), имела одну и ту же постоянную величину — k^2. Аналитически это требование выражается уравнением

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U\,\partial V} = k^2 e^{2F} \tag{25}$$

и вполне аналогичным уравнением для функции F_1. Вид функции F может быть также найден на основании того замечания, что квадрат линейного элемента поверхности Σ в координатах ξ, η (23) имеет вид

$$e^{2F(\xi)}\,(d\xi^2 + d\eta^2).$$

Таким образом, дело сводится к изысканию на поверхности постоянной кривизны семейства геодезических линий и их ортогональных траекторий, которые допускают изгибание в меридианы и параллели поверхности вращения.

Оставляя в стороне случай $k = 0$, при котором потенциально-изотермические поверхности S и S_1 могут быть только конусами или цилиндрами, имеем для k, отличного от нуля, как известно, три различных типа семейств геодезических линий, изгибаемых в меридианы. Соответственно этому получаем для функции e^F одно из следующих выражений:

$$e^F = \pm\frac{1}{k(U+V)}, \quad e^F = \pm\frac{2}{k}\frac{e^{U+V}}{1-e^{2(U+V)}}, \quad e^F = \pm\frac{2}{k}\operatorname{cosec} 2(U+V). \tag{26}$$

В силу соотношения (21), получаем отсюда

$$\omega' = C(U+V)^{\pm 1/k}, \tag{27}$$

или

$$\omega' = C\left(\frac{1+e^{U+V}}{1-e^{U+V}}\right)^{\pm 1/k}, \tag{28}$$

или, наконец,

$$\omega' = C\operatorname{tg}^{\pm 1/k}(U+V), \tag{29}$$

где C — постоянная величина. Функции F_1 и ω_1 определяются вполне аналогичными равенствами. Заметим, что между выражениями (28) и (29) функции ω' нет существенного различия, и квадрат линейного элемента поверхности S

$$ds^2 = \omega'(U'du^2 + V'dv^2) \tag{30}$$

в предположении

$$\omega' = C\operatorname{tg}^{\pm 1/k}(U+V), \tag{29}$$

при замене U и V линейными функциями вида $mU+a$, $mV+b$ принимает вид, соответствующий значению

$$\omega' = C_1\left(\frac{1+e^{U+V}}{1-e^{U+V}}\right)^{\pm 1/k}.$$

Выбор той или другой формы линейного элемента зависит от того, для какой из них параметры U, V имеют действительные значения в действительных точках поверхности.

Нам остается установить связь между функциями U_1, V_1 и U, V. Для этой цели обратимся к равенству (22) и заметим, что обе части его могут быть приведены к виду

$$-\frac{4d\alpha\,d\beta}{k^2(1+\alpha\beta)^2}. \tag{31}$$

Таким образом, по умножении двух частей на $-k^2$ имеем

$$\frac{4d\alpha_1 d\beta_1}{(1+\alpha_1\beta_1)^2} = \frac{4d\alpha\,d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}, \tag{32}$$

откуда, как известно, следует

$$\alpha_1 = \frac{m\alpha+n}{p\alpha+q}, \quad \beta_1 = \frac{p-q\beta}{n\beta-m}, \tag{33}$$

где m, n, p, q — постоянные (ср. § 8 гл. III). Самое преобразование дифференциальной формы $4e^{2F}dU\,dV$ к виду (31) выполняется различно в зависимости от вида функции F; сообразно трем различным типам (26) функции e^F имеем

$$4e^{2F}dU\,dV = \frac{4dU\,dV}{k^2(U+V)^2} = \frac{-4U\cdot d\left(\frac{1}{V}\right)}{k^2\left[1+U\cdot\left(\frac{1}{V}\right)\right]^2}, \tag{34}$$

$$4e^{2F}dU\,dV = \frac{16e^{2(U+V)}dU\,dV}{k\,[1-e^{2(U+V)}]^2} = \frac{-4d(e^{2U})\cdot d(-e^{2V})}{k^2[1+e^{2U}(-e^{2V})]^2}, \tag{35}$$

$$4e^{2F}dU\,dV = \frac{16dU\,dV}{k^2\sin^2 2(U+V)} = \frac{-4d\operatorname{tg}2U\cdot d\operatorname{ctg}2V}{k^2[1+\operatorname{tg}2U\operatorname{ctg}2V]^2}. \tag{36}$$

Таким образом, параметры α, β имеют одно из следующих значений:

$$\alpha = U, \quad \beta = \frac{1}{V}, \tag{37}$$

$$\alpha = e^{2U}, \quad \beta = -e^{2V}, \tag{38}$$

$$\alpha = \operatorname{tg}2U, \quad \beta = \operatorname{ctg}2V. \tag{39}$$

Аналогичные формулы получаем и для параметров α_1, β_1. Подставляя выражения α, β, α_1, β_1 в равенство (33), получаем искомые соотношения между функциями U, V, U_1, V_1.

Из всего предыдущего следует, что если мы имеем потенциально-изотермическую поверхность S, для которой производная ω' основной функции ω имеет одно из значений (27), (28) или (29), то мы можем найти бесчисленное множество потенциально-изотермических поверхностей S_1 того же сферического изображения, определяя основную функцию ω_1 из соотношений, аналогичных (27), (28) или (29), и функции U_1, V_1 через функции U, V, как это указано выше. Вся совокупность поверхностей этого вида может быть сгруппирована в пары поверхностей, находящихся в соответствии Кристоффеля; поверхности S_2 и S_1 находятся в таком соответствии, если ω_2' и ω_1' относительно своих аргументов $U_2 + V_2$ и $U_1 + V_1$ имеют соответственно вид, отличающийся только знаком при показателе $\pm 1/k$, например,

$$\omega_2' = C_2 (U_2 + V_2)^{1/k}, \qquad \omega_1' = C_1 (U_1 + V_1)^{-1/k},$$

а функции U_2, V_2 связаны с U_1, V_1 линейными соотношениями вида (16).

Так как достаточно иметь одну вполне произвольную поверхность S, соответствующую данному значению k, для того чтобы определить все остальные поверхности того же сферического изображения, то допустим, что для поверхности S функция ω' имеет вид

$$\omega' = C (U + V)^{1/k}. \tag{40}$$

Если возьмем

$$\omega_1' = C_1 (U_1 + V_1)^{\pm 1/k}, \tag{41}$$

то формулы, связывающие U_1, V_1 с U, V, принимают вид (см. выше (33) и (37))

$$U_1 = \frac{mU + n}{pU + q}, \qquad V_1 = \frac{n - mV}{pV - q}. \tag{42}$$

Если $p = 0$, то без ущерба для общности можем положить $m = q = 1$, $n = 0$; в таком случае поверхность S_1 или подобна поверхности S, или связана с ней преобразованием Кристоффеля, в зависимости от знака показателя в выражении (41) для функции ω_1'. Если p отлично от нуля, то мы можем без ущерба для общности положить $m = 0$, $n = p = 1$, так что соотношения (42) принимают вид

$$U_1 = \frac{1}{U + q}, \qquad V_1 = \frac{1}{V - q}. \tag{43}$$

Действительно, формулы (42) переходят в формулы (43) при замене U_1 и V_1 линейными функциями вида $aU_1 + b$ и $aV_1 - b$; при такой замене квадрат линейного элемента поверхности S_1

$$ds_1^2 = \omega_1' (U_1' du^2 + V_1' dv^2) \tag{44}$$

приобретает лишь постоянный множитель $a^{1 \pm \frac{1}{k}}$, и поверхность S_1 подвергается, следовательно, лишь подобному изменению, так как линейный элемент $d\sigma$ гауссовой сферы для всех поверхностей S_1 и S один и тот же. Подобное изменение не дает существенно новых решений вопроса, да, кроме того, всю совокупность поверхностей, подобных одной из поверхностей S_1, мы получаем, изменяя множитель C_1 в выражении (41) для функции ω_1'.

Обозначая через x_1, y_1, z_1 и x, y, z соответственно координаты точек поверхностей S_1 и S, мы можем написать формулы Родрига:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\frac{\partial W}{\partial u}}{\frac{\partial \lambda}{\partial u}} \frac{\partial X}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\frac{\partial W}{\partial v}}{\frac{\partial \lambda}{\partial v}} \frac{\partial X}{\partial v} \quad \text{и т. д.,}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\frac{\partial W_1}{\partial u}}{\frac{\partial \lambda}{\partial u}} \frac{\partial X}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\frac{\partial W_1}{\partial v}}{\frac{\partial \lambda}{\partial v}} \frac{\partial X}{\partial v} \quad \text{и т. д.}$$

Деля второй ряд равенств на первый и пользуясь соотношениями

$$\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 = \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial u}, \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2 = \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial v},$$

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial u}\right)^2 = \frac{\partial \omega_1}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial u}, \qquad \left(\frac{\partial W_1}{\partial v}\right)^2 = \frac{\partial \omega_1}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial v},$$

получаем

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \sqrt{\frac{\frac{\partial \omega_1}{\partial u}}{\frac{\partial \omega}{\partial u}}} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \pm \sqrt{\frac{\frac{\partial \omega_1}{\partial v}}{\frac{\partial \omega}{\partial v}}} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}, \tag{45}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial u} = \sqrt{\frac{\dfrac{\partial \omega_1}{\partial u}}{\dfrac{\partial \omega}{\partial u}}} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial v} = \pm \sqrt{\frac{\dfrac{\partial \omega_1}{\partial v}}{\dfrac{\partial \omega}{\partial v}}} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}, \tag{45}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} = \sqrt{\frac{\dfrac{\partial \omega_1}{\partial u}}{\dfrac{\partial \omega}{\partial u}}} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial v} = \pm \sqrt{\frac{\dfrac{\partial \omega_1}{\partial v}}{\dfrac{\partial \omega}{\partial v}}} \cdot \frac{\partial z}{\partial v};$$

знак во второй группе равенств надо выбрать так, чтобы удовлетворялось условие интегрируемости. Вставляя значения ω, ω_1 и пользуясь соотношениями (43), окончательно придаем равенствам (45) следующий вид:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \sqrt{-\frac{C_1}{C}} \cdot \frac{1}{(U+q)^{\frac{1}{2k}+1} (V-q)^{\frac{1}{2k}}} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{-\frac{C_1}{C}}\, U_1^{\frac{1}{2k}+1} V_1^{\frac{1}{2k}} \frac{\partial x}{\partial u},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \sqrt{-\frac{C_1}{C}} \cdot \frac{-1}{(U+q)^{\frac{1}{2k}} (V-q)^{\frac{1}{2k}+1}} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = -\sqrt{-\frac{C_1}{C}}\, U_1^{\frac{1}{2k}} V_1^{\frac{1}{2k}+1} \frac{\partial x}{\partial v} \tag{46}$$

и т. д., или же

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \sqrt{-\frac{C_1}{C}} \cdot \frac{(U+q)^{\frac{1}{2k}-1} (V-q)^{\frac{1}{2k}}}{(U+V)^{1/k}} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{-\frac{C_1}{C}} \cdot \frac{U_1^{\frac{1}{2k}+1} V_1^{\frac{1}{2k}}}{(U_1+V_1)^{1/k}} \frac{\partial x}{\partial u},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \sqrt{-\frac{C_1}{C}} \cdot \frac{(U+q)^{\frac{1}{2k}} (V-q)^{\frac{1}{2k}-1}}{(U+V)^{1/k}} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{-\frac{C_1}{C}} \cdot \frac{U_1^{\frac{1}{2k}} V_1^{\frac{1}{2k}+1}}{(U_1+V_1)^{1/k}} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \quad \text{и т. д.} \tag{47}$$

Соотношения (46) и (47) выведены нами в предположении, что u и v — потенциальные параметры, но, очевидно, они имеют место и в том случае, если u, v — произвольно выбранные параметры линий кривизны; в частности, можно взять $u = U_1$, $v = V_1$.

Если предположим

$$\omega_1' = C_1 \left(\frac{1 + e^{U_1+V_1}}{1 - e^{U_1+V_1}} \right)^{\pm 1/k}, \tag{48}$$

то соотношения между U_1, V_1, U, V принимают вид (см. (33), (37), (38))

$$e^{2U_1} = \frac{mU+n}{pU+q}, \qquad e^{2V_1} = \frac{pV-q}{mV-n}. \tag{49}$$

Два постоянных m и p не могут одновременно равняться нулю. Предположим сначала, что одно из них, например p, равно нулю. Вид функции ω_1' и линейного элемента поверхности S_1 не меняется, если заменим U_1 и V_1 соответственно через $U_1 + a$, $V_1 - a$. Благодаря этому без ущерба для общности можем положить $m = 1$, $q = 1$ и соотношения (49) принимают вид

$$e^{2U_1} = U + n, \qquad e^{2V_1} = \frac{1}{n-V}. \tag{50}$$

Повторяя все рассуждения, которыми пользовались выше, получаем

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \sqrt{\frac{C_1}{2C}} \frac{1}{(\sqrt{n-V} \mp \sqrt{U+n})^{1/k}} \frac{1}{\sqrt{U+n}} \frac{\partial x}{\partial u},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \sqrt{\frac{C_1}{2C}} \frac{\mp 1}{(\sqrt{n-V} \mp \sqrt{U+n})^{1/k}} \frac{1}{\sqrt{n-V}} \frac{\partial x}{\partial v} \tag{51}$$

и т. д.

Формулы эти имеют место в произвольных параметрах u, v линий кривизны. Выбирая тот или другой из двух знаков $\pm$ в равенствах (51), будем получать поверхности, попарно связанные преобразованием Кристоффеля.

Допустим теперь, что m и p отличны от нуля; тогда можем сделать $m = p = 1$, и соотношения (49) принимают вид

$$e^{2U_1} = \frac{U+n}{U+q}, \qquad e^{2V_1} = \frac{V-q}{V-n}.$$

Производя те же выкладки, получаем

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \sqrt{\frac{C_1}{2C}}\,(q-n)^{\frac{k+1}{2k}} \times \\ \times \frac{1}{[\sqrt{(U+q)(V-n)} \mp \sqrt{(U+n)(V-q)}]^{1/k}} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{(U+n)(U+q)}}\,\frac{\partial x}{\partial u}, \tag{52}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \sqrt{\frac{C_1}{2C}}\,(q-n)^{\frac{k+1}{2k}} \times \\ \times \frac{1}{[\sqrt{(U+q)(V-n)} \mp \sqrt{(U+n)(V-q)}]^{1/k}} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{(V-n)(V-q)}}\,\frac{\partial x}{\partial v} \text{ и т. д.}$$

Все замечания, сделанные в предыдущем случае, относятся и к последним формулам.

Если бы мы, наконец, предположили

$$\omega_1' = C_1 \operatorname{tg}^{\pm 1/k}(U_1 + V_1), \tag{53}$$

то пришли бы к формулам, равносильным (51) и (52), так как, согласно сделанному выше замечанию, выражение (53) для функции ω_1' не отличается существенно от выражения (48).

В результате видим, что вся совокупность поверхностей S_1 получается по данной поверхности S квадратурами из формул (46), (47), (51) и (52). Постоянные множители $\sqrt{\frac{C_1}{C}}$, $\sqrt{\frac{C_1}{2C}}$, $(q-n)^{\frac{k+1}{2k}}$ во всех этих формулах мы можем отбросить, так как это соответствует лишь подобному изменению поверхности.

А. Предположим, в частности, что поверхность S есть сфера, на которой дана некоторая потенциально-изотермическая система $u = \text{const}$, $v = \text{const}$. Мы можем, не ограничивая задачи, предположить, что радиус сферы равен 1, и тогда она будет служить сферой Гаусса для всей совокупности поверхностей S_1. Роль функции ω в данном случае будет играть функция λ; координаты x, y, z должны быть заменены координатами X, Y, Z точки сферы Гаусса; координаты x_1, y_1, z_1 и функцию ω_1 будем в данном случае обозначать соответственно через x, y, z и ω. Согласно предыдущему производная λ' функции λ по аргументу $U + V$ должна иметь вид (27), (28) или (29). В § 10 (гл. III) были определены всевозможные потенциально-изотермические системы на сфере, и мы легко можем усмотреть, что λ' имеет потребную в данном случае форму для двойной ортогональной системы кругов частного или общего типа и для системы софокусных сферических конических сечений. В первом случае имеем

$$\lambda' = \frac{1}{(U+V)^2} = (U+V)^{-2},$$

во втором

$$\lambda' = U + V.$$

Совокупность поверхностей S в первом случае состоит, очевидно, из изотермических поверхностей с плоскими линиями кривизны обеих систем. Поверхности этого типа принадлежат к числу изученных Дарбу и Адамом (Darboux S., т. IV, стр. 217—238; Ann. de l'Éc. Normale, сер. 3, 10 (1893)).

Рассмотрим второй случай. Соответствующие формулы для гауссовой сферы были даны в § 10 в параметрах

$$\xi = U, \qquad \eta = -V.$$

I. Предполагая, во-первых, для поверхности S_1

$$\omega' = C\,(U_1 + V_1),$$

имеем на основании формул (43) настоящего параграфа

$$U_1 = \frac{1}{\xi + q}, \qquad V_1 = -\frac{1}{\eta + q};$$

но, согласно результатам § 10, изменение ξ и η на постоянную величину соответствует лишь изменению на эту же постоянную трех параметров x_0, x_1, x_2, входящих в выражения X, Y, Z и в выражение линейного элемента. Система софокусных конических сечений существенно зависит лишь от отношения $(x_1 - x_2) : (x_2 - x_0)$; таким образом, мы можем принять $q = 0$, т. е. положить

$$U_1 = \frac{1}{\xi}, \qquad V_1 = -\frac{1}{\eta},$$

если только будем приписывать всевозможные значения параметрам x_0, x_1, x_2 (§ 10). Формулы (46) настоящего параграфа при подстановке значений X, Y, Z из формул (147) § 10 дают

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{-4c_0C}\cdot\frac{1}{x_0}\cdot\sqrt{\frac{(x_0-\xi)(x_0-\eta)}{\xi\eta}}, \\ y &= \sqrt{-4c_1C}\cdot\frac{1}{x_1}\cdot\sqrt{\frac{(x_1-\xi)(x_1-\eta)}{\xi\eta}}, \\ z &= \sqrt{-4c_2C}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\sqrt{\frac{(x_2-\xi)(x_2-\eta)}{\xi\eta}}. \end{aligned} \tag{54}$$

Вводя новые параметры

$$\frac{1}{\xi} = U_1 = \rho_1, \qquad \frac{1}{\eta} = -V_1 = \rho_2 \tag{55}$$

и полагая

$$x_0 = \frac{1}{a^2}, \qquad x_1 = \frac{1}{b^2}, \qquad x_2 = \frac{1}{c^2}, \tag{56}$$

имеем при надлежащем выборе постоянного C

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{a^2(a^2-\rho_1)(a^2-\rho_2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}, \\ y &= \sqrt{\frac{b^2(b^2-\rho_1)(b^2-\rho_2)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}}, \\ z &= \sqrt{\frac{c^2(c^2-\rho_1)(c^2-\rho_2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}. \end{aligned} \tag{57}$$

Формулы (57) определяют центральную поверхность второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{58}$$

Согласно предыдущему (см. (56)) все поверхности (58), для которых разности $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}$ имеют одну и ту же величину, изображаются параллельными нормалями одна на другой с сохранением линий кривизны; так как при гомотетическом изменении сферическое изображение поверхности не меняется, то можем вышеупомянутое свойство распространить на всю совокупность поверхностей (58), для которых отношение

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) : \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{(a^2-b^2)\,c^2}{(a^2-c^2)\,b^2}$$

имеет одну и ту же величину.

Все выкладки, выполненные нами, предполагают x_0, x_1, x_2 отличными от нуля. Если же предположим $x_2 = 0$, то формулы (46) дают для x и y те же самые выражения, как и выше (см. (54)), но для z получаем следующее выражение:

$$z = -\sqrt{-4c_2C}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta}\right) + \text{const}. \tag{59}$$

Полагая $x_0 = \frac{1}{a^2}$, $x_1 = \frac{1}{b^2}$ и подбирая подходящие значения постоянных C и const, легко убеждаемся, что поверхность, соответствующая сделанному предположению, есть параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -2z. \tag{60}$$

Вводя новые параметры

$$\mu = \frac{1}{\xi} = U_1, \qquad \nu = \frac{1}{\eta} = -V_1 \tag{61}$$

и выбирая несколько иначе постоянное const в равенстве (59), а именно, полагая const $= a^2 + b^2$, получаем

$$\begin{gathered} x = \sqrt{\frac{a^2(\mu-a^2)(\nu-a^2)}{b^2-a^2}}, \qquad y = \sqrt{\frac{b^2(\mu-b^2)(\nu-b^2)}{a^2-b^2}}, \\ z = -\frac{1}{2}(\mu+\nu) + a^2 + b^2. \end{gathered} \tag{62}$$

Начало координат в этом предположении находится в точке, которая при прежнем выборе осей определяется координатами $\left(0, 0, -\frac{a^2+b^2}{2}\right)$, так как по исключении μ и ν из равенств (62) имеем уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-2z+a^2+b^2, \tag{62'}$$

которое получается из уравнения (60) заменой z через $z-\frac{a^2+b^2}{2}$. Нетрудно убедиться, что нормали параболоида, проходящие через новое начало, пересекают параболоид в точках закругления. Действительно, нормали, находящиеся в плоскости xy и проходящие через начало, пересекают, очевидно, параболоид в точках, для которых

$$x=0, \qquad y^2=b^2(a^2-b^2);$$

пользуясь выражениями гауссовой и средней кривизны в декартовых координатах

$$K=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}, \quad H=\frac{(q^2+1)r-2pqs+(p^2+1)t}{(1+p^2+q^2)^{3/2}},$$

легко убеждаемся, что для вышеупомянутых точек пересечения

$$4K=H^2,$$

откуда следует, что главные радиусы кривизны поверхности в этих точках равны между собою.

Возводя равенства (62) в квадрат и складывая между собою, получаем квадрат радиуса-вектора

$$r^2=x^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}(\mu-\nu)^2+a^2b^2.$$

С другой стороны, из равенства

$$\omega'=C(U_1+V_1)=\frac{\mu-\nu}{a^2b^2}$$

получаем

$$\omega=\frac{1}{2a^2b^2}(\mu-\nu)^2+\text{const} \tag{63}$$

и, следовательно, можем взять

$$\omega=\frac{2}{a^2b^2}r^2=\frac{4}{a^2b^2}\cdot\frac{1}{2}r^2. \tag{64}$$

Из формул Родрига

$$\frac{\partial P}{\partial u}=\frac{\frac{\partial W}{\partial u}}{\frac{\partial\omega}{\partial u}}\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{2}r^2\right)}{\partial u}, \qquad \frac{\partial P}{\partial v}=\frac{\frac{\partial W}{\partial v}}{\frac{\partial\omega}{\partial v}}\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{2}r^2\right)}{\partial v}$$

имеем в силу (64)

$$W=\frac{4}{a^2b^2}P; \tag{65}$$

следовательно, параболоид (62′) принадлежит к числу поверхностей, которые при гомотетическом изменении образуют семейство Ламе (см. § 17 гл. IV). При этом центр подобия должен быть взят в точке пересечения оси с нормалью в точке закругления. Заметим, что параболоид может быть и гиперболическим; точки закругления при этом мнимые, но нормали, проведенные в этих точках, пересекают оси в действительной точке.

II. Если бы мы предположили

$$\omega'=C_1(U_1+V_1)^{-1},$$

то получили бы поверхности, связанные преобразованием Кристоффеля с центральными поверхностями второго порядка или с параболоидом.

В первом случае имеем

$$x=\frac{a}{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}\,\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{a^2-\rho_1}+\sqrt{a^2-\rho_2}}{\sqrt{a^2-\rho_1}-\sqrt{a^2-\rho_2}} \tag{66}$$

и два аналогичных равенства для y и z, где ρ_1 и ρ_2 — эллиптические параметры соответствующей поверхности второго порядка, определяемые равенствами (55). По исключении ρ_1, ρ_2 получаем уравнение поверхности

$$\begin{aligned}(a^2-b^2)\,\mathrm{ch}^2\frac{z\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}}{c}&+\\ +(b^2-c^2)\,\mathrm{ch}^2\frac{\sqrt{x(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}{a}&=\\ =(a^2-c^2)\cos^2\frac{y\sqrt{(b^2-c^2)(a^2-b^2)}}{b}&.\end{aligned} \tag{67}$$

Во втором случае имеем

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\mu-a^2}-\sqrt{\nu-a^2}}{\sqrt{\mu-a^2}+\sqrt{\nu-a^2}},\\
y &= \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\mu-b^2}-\sqrt{\nu-b^2}}{\sqrt{\mu-b^2}+\sqrt{\nu-b^2}},\\
z &= -\frac{1}{2}\ln(\mu-\nu),
\end{aligned}
\tag{68}
$$

где μ и ν — параметры, определяемые равенствами (61). Исключая их, получаем уравнение поверхности

$$
\cos\frac{2x\sqrt{a^2-b^2}}{a}-\operatorname{ch}\frac{2y\sqrt{a^2-b^2}}{b}+2(a^2-b^2)e^{2z}=0. \tag{69}
$$

В случае гиперболического параболоида для удобства можно заменить b^2 на $-b^2$; уравнение (69) может быть тогда приведено к виду

$$
e^{-2x}\sin\left[\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\sqrt{a^2+b^2}\right]\sin\left[\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\sqrt{a^2+b^2}\right]=
$$
$$
=a^2+b^2. \tag{70}
$$

При $a=b$, т. е. для равностороннего параболоида, можно то же самое уравнение относительно новых осей x и y написать в следующем виде:

$$
e^{-2z}\sin 2x\sin 2y=2a^2. \tag{70'}
$$

Обращаясь к формулам (68), видим, что z есть функция разности $\mu-\nu$; но с другой стороны, ω', а следовательно, и ω — функции той же разности; следовательно, семейство линий $\omega=\text{const}$ на поверхности (69) состоит из линий, лежащих в плоскостях $z=\text{const}$. Отсюда можем непосредственно заключить, что поверхность, связанная с параболоидом преобразованием Кристоффеля, образует семейство Ламе при поступательном перемещении по оси z. Если бы мы выполнили вычисления, то нашли бы между ω и z связь вида $\omega=kz$, откуда на основании формул Родрига $W=kZ$; а последнее соотношение, как мы видели в § 17, характеризует поверхности, которые при поступательном перемещении образуют семейство Ламе. Мы получаем, таким образом, в данном случае семейство Ламе, состоящее из равных изотермических поверхностей.

Само собою разумеется, что в уравнениях (67), (69), (70), (70′) мы имеем право координаты x, y, z умножить на один и тот же постоянный множитель, так как это соответствует лишь гомотетическому изменению поверхности.

III. Предположим, наконец,

$$
\omega'=C\left(\frac{1+e^{U_1+V_1}}{1-e^{U_1+V_1}}\right)^{\pm1}.
$$

При этом ограничимся тем случаем, когда соотношения между функциями U_1, V_1 и U, V устанавливаются равенствами (50), т. е. когда

$$
e^{2U_1}=U+n=\xi+n,\qquad e^{2V_1}=\frac{1}{n-V}=\frac{1}{n+\eta}.
$$

Совершенно так же, как выше, убеждаемся, что можем принять $n=0$, если только параметрам x_0, x_1, x_2, входящим в формулы (147) § 10, будем придавать всевозможные значения. Итак, имеем

$$
e^{2U_1}=\xi,\qquad e^{2V_1}=\frac{1}{\eta} \tag{71}
$$

и можем получить искомую поверхность из формул (51) настоящего параграфа, заменяя в них x, y, z, x_1, y_1, z_1, ω', ω_1', C, C_1, U, V соответственно через X, Y, Z, x, y, z, λ', ω', 1, C, ξ, $-\eta$. Предполагая x_0, x_1, x_2 отличными от нуля и придавая постоянному C подходящее значение, получаем

$$
x=\frac{1}{\sqrt{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}}\times
$$
$$
\times\ln\frac{\sqrt{(\sqrt{x_0}\mp\sqrt{\xi})(\sqrt{x_0}+\sqrt{\eta})}-\sqrt{(\sqrt{x_0}\pm\sqrt{\xi})(\sqrt{x_0}-\sqrt{\eta})}}{\sqrt{(\sqrt{x_0}\mp\sqrt{\xi})(\sqrt{x_0}+\sqrt{\eta})}+\sqrt{(\sqrt{x_0}\pm\sqrt{\xi})(\sqrt{x_0}-\sqrt{\eta})}} \tag{72}
$$

и две аналогичные формулы для y и z. Двойные знаки в этих формулах соответствуют двойному знаку в показателе выражения функции ω'. Так как выбор того или другого знака соответствует лишь замене $\sqrt{\xi}$ через $-\sqrt{\xi}$ в формулах (72), то мы имеем не две различные, *а одну* *поверхность, которая переходит сама в себя преобразованием Кристоффеля.*

Исключая ξ, η из формул (72), получаем уравнение этой поверхности

$$\begin{aligned}\sqrt{x_0}\,(x_1 - x_2)\operatorname{ch}\left(x\sqrt{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}\right) &+ \\ + \sqrt{x_1}(x_2 - x_0)\operatorname{ch}\left(y\sqrt{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}\right) &+ \\ + \sqrt{x_2}\,(x_0 - x_1)\operatorname{ch}\left(z\sqrt{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)}\right) &= 0.\end{aligned}$$

Вводя обозначения (ср. выше)

$$x_0 = \frac{1}{a^2}, \quad x_1 = \frac{1}{b^2}, \quad x_2 = \frac{1}{c^2}$$

и предполагая $a^2 > b^2 > c^2$, можем предыдущее уравнение написать в несколько ином виде; мы, кроме того, заменим поверхность (72) гомотетической, умножая x, y, z на a, b, c. Уравнение этой поверхности будет

$$\begin{aligned}c\,(a^2 - b^2)\operatorname{ch}\frac{z\sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}}{c} + a\,(b^2 - c^2)\,\times \\ \times\operatorname{ch}\frac{x\sqrt{(a^2 - b^2)(a - c^2)}}{a} = b\,(a^2 - c^2)\cos\frac{y\sqrt{(b^2 - c^2)(a^2 - b^2)}}{b}.\end{aligned} \tag{73}$$

Легко убедиться, что она состоит из замкнутых выпуклых частей (овалоидов), периодически расположенных по оси y.

Допустим теперь, что одна из величин x_0, x_1, x_2, например x_2, равна нулю. В таком случае из формул (51) получаем

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{x_0(x_0 - x_1)}}\,\times \\ &\times \ln\frac{\sqrt{(\sqrt{x_0} \mp \sqrt{\xi})(\sqrt{x_0} + \sqrt{\eta})} - \sqrt{(\sqrt{x_0} \pm \sqrt{\xi})(\sqrt{x_0} - \sqrt{\eta})}}{\sqrt{(\sqrt{x_0} \mp \sqrt{\xi})(\sqrt{x_0} + \sqrt{\eta})} + \sqrt{(\sqrt{x_0} \pm \sqrt{\xi})(\sqrt{x_0} - \sqrt{\eta})}}, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{x_1(x_1 - x_0)}}\,\times \\ &\times \ln\frac{\sqrt{(\sqrt{x_1} \mp \sqrt{\xi})(\sqrt{x_1} + \sqrt{\eta})} - \sqrt{(\sqrt{x_1} \pm \sqrt{\xi})(\sqrt{x_1} - \sqrt{\eta})}}{\sqrt{(\sqrt{x_1} \mp \sqrt{\xi})(\sqrt{x_1} + \sqrt{\eta})} + \sqrt{(\sqrt{x_1} \pm \sqrt{\xi})(\sqrt{x_1} - \sqrt{\eta})}}, \\ z &= \mp\frac{1}{\sqrt{x_0 x_1}}\ln\frac{\sqrt{\xi} \mp \sqrt{\eta}}{\sqrt{\xi}\,\sqrt{\eta}}. \end{aligned} \tag{74}$$

Исключая ξ, η из равенств (74), имеем

$$\begin{aligned}\sqrt{x_0}\,x_1\operatorname{ch}\left(x\sqrt{x_0(x_0 - x_1)}\right) - \sqrt{x_1}\,x_0\cos\left(y\sqrt{x_1(x_0 - x_1)}\right) &+ \\ + (x_0 - x_1)\,e^{\mp\sqrt{x_0 x_1}} &= 0.\end{aligned} \tag{75}$$

Уравнение (75), очевидно, определяет две симметрические поверхности, которые связаны соответствием Кристоффеля.

Б. Предположим, что поверхность S есть одна из поверхностей, указанных Бонне (Bonnet), для которых линии кривизны образуют систему геодезических кругов. В этом случае

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(U + V)^2},$$

или в потенциальных параметрах

$$ds^2 = \frac{U'du^2 + V'dv^2}{(U + V)^2}$$

и, следовательно,

$$\omega' = (U + V)^{-2}. \tag{76}$$

Мы можем применить формулы (46), (47), (51), (52), полагая в них $k = -{}^1/_2$, и получим соответствующие потенциально-изотермические поверхности S_1. Так как, согласно результатам Рибокура, поверхности S Бонне или принадлежат к числу поверхностей вращения, или же получаются инверсией поверхностей вращения или произвольных конусов или цилиндров, то очевидно, что одно семейство линий кривизны поверхности S во всех случаях состоит из кругов, а следовательно, и на сфере Гаусса изображается кругами. С другой стороны, сферическое изображение линий кривизны — одно и то же для всех поверхностей S_1; отсюда заключаем, что все поверхности S_1 имеют одно семейство плоских линий кривизны, т. е. принадлежат к числу изотермических поверхностей, изученных Дарбу (Darboux S., т. IV, стр. 217—238).

§ 21. Потенциальные поверхности гомотетического типа, для которых траектории группы изображаются на сфере меридианами

В § 17 (гл. IV) были даны уравнения, определяющие расстояние P касательной плоскости от начала координат для всех потенциальных поверхностей гомотетического типа и данного сферического изображения ((92) § 17).

Предположим, в частности, что траектории $u - v = \text{const}$ потенциальной системы изображаются на сфере Гаусса меридианами; другими словами, допустим при сохранении прежних обозначений, что

$$\lambda = Z \tag{77}$$

и

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \frac{\partial\lambda}{\partial v} + \lambda^2 = 1 \tag{78}$$

(см. § 9 гл. III). Нетрудно убедиться, что в силу соотношения (78) уравнениям (92) § 17 можно удовлетворить, полагая

$$P = \lambda + \sigma = Z + \sigma. \tag{79}$$

Соответствующая этому решению поверхность есть, очевидно, сфера радиуса σ с центром в точке (0,0,1), так как равенство (79) может быть написано в следующем виде:

$$Xx + Yy + Z(z - 1) = 0. \tag{79'}$$

Координаты x, y, z точек этой сферы определяются соотношениями

$$x = \sigma X, \quad y = \sigma Y, \quad z = 1 + \sigma Z. \tag{80}$$

Таким образом, в рассматриваемом частном случае мы знаем одно из решений системы (92) § 17, а следовательно, система эта, согласно результатам того же параграфа, должна приводиться к линейному уравнению *второго* порядка.

Мы выполним это приведение, исходя из других соображений.

Из соотношения (77), на основании формул Родрига

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\dfrac{\partial W}{\partial u}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}}\frac{\partial Z}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\dfrac{\partial W}{\partial v}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}}\frac{\partial Z}{\partial v},$$

получаем $W = z + \text{const}$, а так как гомотетические поверхности характеризуются соотношением

$$W = \sigma P \tag{81}$$

(см. § 17), то имеем

$$z = \sigma P + \text{const} = \sigma P - a. \tag{82}$$

Обратно, если предположим, что имеет место равенство (82), то расстояние P касательной плоскости от начала, которое, вообще говоря, служит одним из решений тангенциального уравнения Лапласа для линий кривизны, должно удовлетворять и основному уравнению Лапласа, так как этому уравнению удовлетворяет z, с которым P связано линейным соотношением. На основании результатов § 12 отсюда заключаем, что соответствующая поверхность есть поверхность потенциального типа, для которой основная функция — W второй квадратичной дифференциальной формы определяется соотношением вида (81). На основании равенств (81) и (82) и формул Родрига, получаем еще $\lambda = Z$, и, таким образом, соотношение (82) вполне определяет рассматриваемые нами поверхности.

Воспользовавшись выражением P в декартовых координатах

$$P = \frac{px + qy - z}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

мы получили бы из (82) уравнение с частными производными первого порядка, которое легко интегрируется и дает всевозможные поверхности требуемого типа; но наша задача состоит в определении поверхностей, соответствующих данному сферическому изображению.

Для этой цели отнесем искомую поверхность к параметрам α, β прямолинейных образующих гауссовой сферы. Потенциальная система, для которой $\lambda = Z$, определяется, как было упомянуто в § 9 (гл. III), дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d\beta^2}{d\alpha^2} = \Psi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right). \tag{83}$$

Полагая

$$P = \frac{-\xi}{1 + \alpha\beta} \tag{84}$$

и обозначая первые и вторые производные ξ по α и β через

p, q, r, s, t, имеем на основании формул Бонне

$$Z = \frac{\xi - p\alpha - q\beta}{1 + \alpha\beta}, \tag{85}$$

$$\frac{r}{t} = \Psi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \tag{86}$$

(см. Darboux S., т. I, стр. 246). Уравнение (86) определяет всевозможные поверхности, для которых сферическое изображение линий кривизны характеризуется дифференциальным уравнением (83). Соотношение (82) дает нам

$$p\alpha + q\beta = (\sigma + 1)\xi + a\,(1 + \alpha\beta); \tag{87}$$

интегрируя это уравнение, получаем

$$\xi = a\left[\frac{\alpha\beta}{1-\sigma} - \frac{1}{1+\sigma}\right] + (\alpha\beta)^{\frac{\sigma+1}{2}}\,\chi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right), \tag{88}$$

где χ — знак произвольной функции. Решение

$$\xi_0 = a\left[\frac{\alpha\beta}{1-\sigma} - \frac{1}{1+\sigma}\right], \tag{89}$$

получаемое при $\chi = 0$, соответствует, как нетрудно убедиться, сфере и при $a = -1 + \sigma^2$ совпадает с решением, упомянутым в начале параграфа. В дальнейшем можем положить $a = 0$, так как общее решение для P, а следовательно и для ξ, получается, очевидно, как линейное сочетание частных решений.

Вставляя

$$\xi = (\alpha\beta)^{\frac{\sigma+1}{2}}\,\chi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \tag{90}$$

в уравнение (86), получим линейное уравнение второго порядка, определяющее функцию λ. Для бо́льшего удобства введем параметры γ, φ — полярные координаты стереографической проекции гауссова шара, которыми мы пользовались в § 9 (гл. III). Так как

$$\alpha = \frac{1}{2}\gamma e^{i\varphi}, \quad \beta = \frac{1}{2}\gamma e^{-i\varphi}$$

((54) § 9), то имеем

$$\xi = \gamma^{\sigma+1}\,\frac{\chi\,(e^{2i\varphi})}{2^{\sigma+1}} = \gamma^{\sigma+1}\xi\,(\varphi). \tag{91}$$

Дифференцируя по α и β, находим p, q, r, s, t. Вставляя найденные значения r и t в уравнение (86), имеем

$$\frac{(\sigma^2-1)\,\zeta - 2i\sigma\zeta' - \zeta''}{(\sigma^2-1)\,\zeta + 2i\sigma\zeta' - \zeta''} = e^{4i\varphi}\Psi\,(e^{2i\varphi}), \tag{92}$$

или

$$\zeta'' + 2\sigma\psi(\varphi)\zeta' - (\sigma^2 - 1)\,\zeta = 0, \tag{93}$$

где функция $\psi\,(\varphi)$ имеет то же значение, что и в § 9 (формула (56)) и где значками $'$ указано дифференцирование по аргументу φ. Уравнение (93) и есть то линейное уравнение второго порядка, к которому приводится поставленная нами задача. Поверхность, соответствующая какому-либо решению ζ этого уравнения, определяется при помощи формул Бонне

$$\begin{gathered} z = \frac{\xi - p\alpha - q\beta}{1+\alpha\beta}, \qquad x - iy = -\frac{\beta\,(\xi - p\alpha - q\beta)}{1+\alpha\beta} - p, \\ x + iy = -\frac{\alpha\,(\xi - p\alpha - q\beta)}{1+\alpha\beta} - q \end{gathered} \tag{94}$$

(см. Darboux S., т. I, стр. 246). Вставляя значения ξ, p, q, r, s, t, получаем

$$\begin{aligned} z &= -\frac{\sigma\gamma^{\sigma+1}\zeta\,(\varphi)}{1 + {}^1/_4\gamma^2}, \\ x &= \gamma^\sigma\left\{\left[\sigma - 1 - \frac{2\sigma}{1 + {}^1/_4\gamma^2}\right]\zeta\,(\varphi)\cos\varphi + \zeta'\,(\varphi)\sin\varphi\right\}, \\ y &= \gamma^\sigma\left\{\left[\sigma - 1 - \frac{2\sigma}{1 + {}^1/_4\gamma^2}\right]\zeta\,(\varphi)\sin\varphi - \zeta'\,(\varphi)\cos\varphi\right\}. \end{aligned} \tag{95}$$

Поворачивая оси x, y на угол φ и называя новые оси x', y', имеем уравнение поверхности относительно *подвижных* осей

$$\begin{gathered} z = -\frac{\sigma\gamma^{\sigma+1}\zeta\,(\varphi)}{1 + {}^1/_4\gamma^2}, \qquad x' = \gamma^\sigma\left[\sigma - 1 - \frac{2\sigma}{1 + {}^1/_4\gamma^2}\right]\zeta\,(\varphi), \\ y' = \gamma^\sigma\zeta'\,(\varphi). \end{gathered} \tag{96}$$

Из этих уравнений легко усматриваем, что поверхность образуется одновременным вращением и однородно-проективным преобразованием (affine Transformation) некоторой начальной кривой; это последнее преобразование сводится к изменению координат z и x' пропорционально

$\zeta(\varphi)$ и координаты y' пропорционально $\zeta'(\varphi)$, причем для каждой из получаемых кривых φ имеет постоянное значение, но изменяется при переходе от одной кривой к другой. Начальную кривую получаем, полагая $\varphi = 0$ в равенствах (95) или, безразлично, (96), так как при $\varphi = 0$ имеем $x' = x$, $y' = y$. Определяя из равенств (96) при $\varphi = 0$ отношения x'/z и y'/z и исключая из них γ, легко убеждаемся, что начальная кривая, а следовательно, и все кривые $\varphi = \mathrm{const}$ расположены на конусах второго порядка, имеющих вершины в начале координат. Из формы соотношений (96), кроме того, явствует, что при соизмеримых значениях σ все упомянутые кривые алгебраические. Обозначая через ζ_1, ζ_2 два основных решения линейного уравнения (93) и подставляя их в формулы (95), получим две поверхности Σ_1, Σ_2 рассматриваемого нами типа. Ранее мы имели еще поверхность Σ_0 того же типа, а именно сферу, определяемую равенствами (80); вводя параметры γ, φ и обозначая координаты точек поверхности Σ_0 через x_0, y_0, z_0, имеем

$$x_0 = \frac{\sigma\gamma\cos\varphi}{1 + {}^1/_4\gamma^2}, \quad y_0 = \frac{\sigma\gamma\sin\varphi}{1 + {}^1/_4\gamma^2}, \quad z_0 = \sigma + 1 - \frac{2\sigma}{1 + {}^1/_4\gamma^2} \tag{97}$$

(см. § 9, формула (69)). Самая общая поверхность Σ рассматриваемого нами типа получается, на основании результатов § 15, геометрическим сложением поверхностей Σ_0, Σ_1, Σ_2, т. е. координаты x, y, z ее точек определяются равенствами

$$\begin{gathered} x = C_0x_0 + C_1x_1 + C_2x_2, \quad y = C_0y_0 + C_1y_1 + C_2y_2, \\ z = C_0z_0 + C_1z_1 + C_2z_2, \end{gathered} \tag{98}$$

где C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные, а x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 — координаты точек поверхностей Σ_1 и Σ_2.

Во всех предшествующих выкладках мы неявно предполагали σ отличным от ± 1. Рассмотрим теперь эти два исключительных случая.

Пусть, во-первых, $\sigma = 1$. Уравнение (87) принимает тогда вид

$$p\alpha + q\beta = 2\xi + a(1 + \alpha\beta)$$

и имеет решение

$$\xi = \frac{a}{2}(\alpha\beta\ln(\alpha\beta) - 1) + \alpha\beta\chi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right),$$

или в параметрах γ, φ

$$\xi = \frac{a}{4}\gamma^2\ln\gamma - \frac{a}{2} + \gamma^2\zeta(\varphi). \tag{99}$$

Дифференцируя по α и β, получаем p, q, r, s, t. Вставляя значения r и t в уравнение (86) и производя упрощения, получаем

$$\zeta'' + 2\psi(\varphi)\zeta' - \frac{a}{2} = 0. \tag{100}$$

Интегрируя уравнение (100), имеем

$$\zeta(\varphi) = C_0 + C_1\zeta_1(\varphi) + \frac{a}{2}\zeta_2(\varphi), \tag{101}$$

где

$$\zeta_1(\varphi) = \int e^{-2\int\psi d\varphi}d\varphi, \quad \zeta_2(\varphi) = \int\left(e^{-2\int\psi d\varphi}\int e^{2\int\psi d\varphi}d\varphi\right)d\varphi. \tag{102}$$

Соответственно этому получаем для ξ следующее выражение:

$$\xi = C_0\xi_0 + C_1\xi_1 + C_2\xi_2,$$

где через C_2 обозначено $a/2$ и, кроме того,

$$\begin{gathered} \xi_0 = \gamma^2, \quad \xi_1 = \gamma^2\zeta_1(\varphi), \\ \xi_2 = {}^1/_2\gamma^2\ln\gamma - 1 + \gamma^2\zeta_2(\varphi). \end{gathered} \tag{103}$$

Решение ξ_0, как нетрудно видеть, приводит к сфере, так что координаты x_0, y_0, z_0 определяются по формулам (97), в которых лишь следует положить $\sigma = 1$. Решение ξ_1 имеет тот же вид, как в общем случае, и, следовательно, координаты x_1, y_1, z_1 получаются из формул (95), в которых лишь следует положить $\sigma = 1$, $\zeta = \zeta_1$. Таким образом, имеем относительно подвижных осей x', y' (см. выше)

$$z_1 = -\frac{\gamma^2\zeta_1(\varphi)}{1 + {}^1/_4\gamma^2}, \quad x_1' = -\frac{2\gamma\zeta_1(\varphi)}{1 + {}^1/_4\gamma^2}, \quad y_1' = \gamma\zeta_1'(\rho). \tag{104}$$

Поверхность Σ_1 образуется, очевидно, вращением и однородно-проективным изменением пространственной кривой третьего порядка.

Наконец, решение ξ_2 в силу соотношения (103) и формул (94) приводит к следующим выражениям координат:

$$x_2 = \left[\frac{-\gamma\ln\gamma + {}^1/_8\gamma^2}{1+{}^1/_4\gamma^2} - \frac{2\gamma}{1+{}^1/_4\gamma^2}\zeta_2(\varphi)\right]\cos\varphi + \gamma\zeta_2'(\varphi)\sin\varphi,$$

$$y_2 = \left[\frac{-\gamma\ln\gamma + {}^1/_8\gamma^2}{1+{}^1/_4\gamma^2} - \frac{2\gamma}{1+{}^1/_4\gamma^2}\zeta_2(\varphi)\right]\sin\varphi - \gamma\zeta_2'(\varphi)\cos\varphi, \tag{105}$$

$$z_2 = -\frac{{}^1/_2\gamma^2\ln\gamma + {}^1/_2\gamma^2 + 1 + \gamma^2\zeta_2(\varphi)}{1+{}^1/_4\gamma^2}.$$

Предположим, во-вторых, $\sigma = -1$. Тогда уравнение (87) принимает вид

$$p\alpha + q\beta = a(1+\alpha\beta),$$

откуда

$$\xi = \frac{a}{2}(\alpha\beta + \ln(\alpha\beta)) + \chi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

или в параметрах γ, φ

$$\xi = \frac{a}{8}\gamma^2 + a\ln\gamma + \zeta(\varphi). \tag{106}$$

Дифференцируя по α и β, получаем p, q, r, s, t. Вставляя выражения r и t в уравнение (86), получаем

$$\zeta'' - 2\psi(\varphi)\zeta' + 2a = 0, \tag{107}$$

откуда

$$\zeta(\varphi) = C_0 + C_1\zeta_1(\varphi) - 2q\zeta_2(\varphi), \tag{108}$$

причем

$$\zeta_1(\varphi) = \int e^{2\int\psi\,d\varphi}d\varphi,\quad \zeta_2(\varphi) = \int\left(e^{2\int\psi\,d\varphi}\int e^{-2\int\psi d\varphi}d\varphi\right)d\varphi. \tag{109}$$

Для ξ получаем следующее выражение:

$$\xi = C_0 + C_1\zeta_1(\varphi) + C_2\xi_2(\varphi), \tag{110}$$

где через C_2 обозначено $-2a$ и, кроме того,

$$\xi_2(\varphi) = -\frac{1}{16}\gamma^2 - \frac{1}{2}\ln\gamma + \zeta_2(\varphi). \tag{111}$$

Решение $\xi = 1$ приводит к сфере; соответствующие выражения координат x_0, y_0, z_0 могут быть получены из формул (97). Решение $\xi = \zeta_1(\varphi)$ имеет тот же вид, что и в общем случае (при произвольном σ), и, следовательно, координаты x_1, y_1, z_1 определяются формулами (95), в которых лишь следует положить $\sigma = -1$. Относительно подвижных осей x', y' (ср. выше) имеем

$$z_1 = \frac{\zeta_1(\varphi)}{1+{}^1/_4\gamma^2},\qquad x_1' = -\frac{{}^1/_2\gamma}{1+{}^1/_4\gamma^2}\zeta_1(\varphi),\qquad y_1' = \frac{1}{\gamma}\zeta_1'(\varphi). \tag{112}$$

Поверхность Σ_1, определяемая этими формулами, получается точно так же, как и в предыдущем случае (при $\sigma = 1$), вращением и однородно-проективным изменением пространственной кривой третьего порядка. Наконец, решение ξ_2 дает поверхность Σ_2, определяемую равенствами

$$z_2 = \frac{{}^1/_{16}\gamma^2 + {}^1/_2 - {}^1/_2\ln\gamma + \zeta_2(\varphi)}{1+{}^1/_4\gamma^2},$$

$$x_2 = \left[\frac{{}^1/_4\gamma\ln\gamma + \frac{1}{2\gamma}}{1+{}^1/_4\gamma^2} - \frac{\zeta_2(\varphi)}{1+{}^1/_4\gamma^2}\right]\cos\varphi + \frac{\zeta_2'(\varphi)}{\gamma}\sin\varphi, \tag{113}$$

$$y_2 = \left[\frac{{}^1/_4\gamma\ln\gamma + \frac{1}{2\gamma}}{1+{}^1/_4\gamma^2} - \frac{\zeta_2(\varphi)}{1+{}^1/_4\gamma^2}\right]\sin\varphi - \frac{\zeta_2'(\varphi)}{\gamma}\cos\varphi.$$

Общее решение в обоих исключительных случаях ($\sigma = \pm 1$) получается по формулам (98).

Если бы мы пожелали перейти от параметров γ, φ к параметрам u, v линий кривизны, то во всех выведенных формулах нам лишь следовало бы вставить выражения γ и φ в функции u, v, данные в § 9 ((68), (68')).

Рассмотрим частные случаи.

Пусть, во-первых, имеем на сфере Гаусса потенциальную систему, состоящую из локсодром. В этом случае

$$\psi(\varphi) = \text{const} = \operatorname{ctg} 2\theta = k \tag{114}$$

(см. (70) § 9). Уравнение (93) принимает вид

$$\zeta'' + 2\sigma k\zeta' - (\sigma^2 - 1)\zeta = 0,$$

и мы можем взять

$$\zeta_1(\varphi) = e^{h_1\varphi}, \qquad \zeta_2(\varphi) = e^{h_2\varphi}, \tag{115}$$

где h_1 и h_2 — корни квадратного уравнения

$$h^2 + 2\sigma k h - (\sigma^2 - 1) = 0. \tag{116}$$

Обозначая через h один из корней и полагая $\zeta = e^{h\varphi}$ в формулах (95), получаем формулы

$$\begin{gathered} z = -e^{h\varphi}\frac{\sigma\gamma^{\sigma+1}}{1+{}^1/_4\gamma^2}, \\ x = e^{h\varphi}\gamma^{\sigma}\left\{\left[\sigma - 1 - \frac{2\sigma}{1+{}^1/_4\gamma}\right]\cos\varphi + h\sin\varphi\right\}, \\ y = e^{h\varphi}\gamma^{\sigma}\left\{\left[\sigma - 1 - \frac{2\sigma}{1+{}^1/_4\gamma}\right]\sin\varphi - h\cos\varphi\right\}, \end{gathered} \tag{117}$$

которые при замене h через h_1 и h_2 и соответственно x, y, z через x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 определяют поверхности Σ_1 и Σ_2. Очевидно, обе эти поверхности в рассматриваемом частном случае *спиральные*, т. е. получаются одновременным вращением и гомотетическим изменением некоторой кривой. Если придадим k такое значение, при котором уравнение (116) имеет равные корни $h_1 = h_2 = h$, то будем иметь

$$\zeta_1 = e^{h\varphi}, \qquad \zeta_2 = \varphi e^{h\varphi};$$

поверхность Σ_1 в этом случае спиральная, а поверхность Σ_2 принадлежит к более общему классу поверхностей, получаемых вращением и однородно-проективным изменением образующей кривой.

Потенциальные параметры u, v линий кривизны связаны с параметрами γ, φ в рассматриваемом случае равенствами

$$\begin{gathered} \gamma = 2e^{\cos^2\theta\cdot u + \sin^2\theta\cdot v}, \\ \varphi = \frac{1}{2}\sin 2\theta\cdot(u - v) \end{gathered} \tag{118}$$

(см. (75) § 9).

Предположим, во-вторых,

$$\psi(\varphi) = -\operatorname{ctg}\frac{2\varphi}{c}. \tag{119}$$

Сферическое изображение линий поверхностей в данном случае состоит из линий

$$\gamma^{1/c}\cos\frac{\varphi}{c} = \text{const}, \qquad \gamma^{1/c}\sin\frac{\varphi}{c} = \text{const}$$

(см. (113) § 10). Уравнение (93) принимает вид

$$\zeta'' - 2\sigma\operatorname{ctg}\frac{2\varphi}{c}\cdot\zeta' - (\sigma^2 - 1)\zeta = 0 \tag{120}$$

и при помощи подстановки

$$\sin^2\frac{\varphi}{c} = t \tag{121}$$

приводится к гипергеометрическому уравнению

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)t}{t(1-t)}\frac{d\zeta}{dt} - \frac{\alpha\beta}{t(1-t)}\zeta = 0, \tag{122}$$

где α, β, γ имеют следующие значения:

$$\begin{gathered} \alpha = -\frac{\sigma c}{2} + \frac{c}{2}, \\ \beta = -\frac{\sigma c}{2} - \frac{c}{2}, \\ \gamma = \frac{1 - \sigma c}{2}. \end{gathered} \tag{123}$$

Если c есть целое нечетное (положительное или отрицательное) число, то уравнение (122) для всевозможных значений σ интегрируется в элементарных функциях. Действительно, мы можем выбрать за основную систему интегралов уравнения (122) следующие два:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= (1-t)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ t), \\ \zeta_2 &= t^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma-1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ t), \end{aligned} \tag{124}$$

где F есть знак гипергеометрической функции (см. К у м м е р, О гипергеометрических рядах [1])). Вставляя

---

[1]) K u m m e r, Über die hypergeometrische Reihe, Crelle J. f. Math. 50.

значения α, β, γ из равенств (123) и полагая

$$c = 2m + 1, \tag{125}$$

получаем

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= (1-t)^{\frac{1+\sigma c}{2}} F(-m, m+1, \gamma, t), \\ \zeta_2 &= t^{\frac{1+\sigma c}{2}} F(m+1, -m, 2-\gamma, t) \end{aligned} \tag{126}$$

или, заменяя t его значением (121),

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \cos^{1+\sigma c}\frac{\varphi}{c}\cdot F\left(-m, m+1, \frac{1-\sigma c}{2}, \sin^2\frac{\varphi}{c}\right), \\ \zeta_2 &= \sin^{1+\sigma c}\frac{\varphi}{c}\cdot F\left(m+1, -m, \frac{3+\sigma c}{2}, \sin^2\frac{\varphi}{c}\right). \end{aligned} \tag{127}$$

Гипергеометрические ряды, входящие в эти формулы, очевидно, конечные, так как один из двух первых аргументов, m или $m+1$, в том и другом ряде есть целое отрицательное число или нуль.

В случае $c = 1$ (или $m = 0$) формулы (127) принимают вид

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \cos^{1+\sigma}\varphi, \\ \zeta_2 &= \sin^{1+\sigma}\varphi. \end{aligned} \tag{128}$$

Поверхности Σ_1 и Σ_2 в этом предположении определяются соответственно формулами

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma^\sigma \cos^\sigma\varphi \left[2\sigma\left(1 - \frac{1}{1+{}^1\!/\!_4\gamma^2}\right)\cos^2\varphi - (\sigma+1)\right], \\ y_1 &= \gamma^\sigma \cos^{\sigma+1}\varphi \sin\varphi \cdot 2\sigma\left(1 - \frac{1}{1+{}^1\!/\!_4\gamma^2}\right), \\ z_1 &= -\frac{\sigma\gamma^{\sigma+1}\cos^{\sigma+1}\varphi}{1+{}^1\!/\!_4\gamma^2} \end{aligned} \tag{129}$$

и

$$\begin{aligned} x_2 &= \gamma^\sigma \sin^{\sigma+1}\varphi \cos\varphi \cdot 2\sigma\left(1 - \frac{1}{1+{}^1\!/\!_4\gamma^2}\right), \\ y_2 &= \gamma^\sigma \sin^\sigma\varphi \left[2\sigma\left(1 - \frac{1}{1+{}^1\!/\!_4\gamma^2}\right)\sin^2\varphi - (\sigma+1)\right], \\ z_2 &= -\frac{\sigma\gamma^{\sigma+1}\sin^{\sigma+1}\varphi}{1+{}^1\!/\!_4\gamma^2}. \end{aligned} \tag{130}$$

Нетрудно убедиться, что первая группа равенств пере-

ходит во вторую при замене φ через $\frac{\pi}{2} - \varphi$ и x_1, y_1, z_1 соответственно через y_2, x_2, z_2. Таким образом, поверхности Σ_1 и Σ_2 симметричны относительно плоскости, проходящей через ось z и делящей пополам угол между плоскостями zx и zy. При соизмеримых значениях σ эти поверхности, очевидно, алгебраические.

Связь между параметрами γ, φ и потенциальными параметрами u, v линий кривизны была установлена в § 10 (формула (112)), но в предположении зависимости $\lambda = \frac{c}{2}Z$. В настоящем параграфе мы предполагали $\lambda = Z$; следовательно, основная функция потенциальной системы на сфере отличается от аналогичной функции § 10 множителем $2/c$, а в таком случае, согласно результатам § 1, потенциальные параметры u, v должны отличаться от параметров u, v § 10 множителем $c/2$. Таким образом, получаем после некоторых упрощений

$$e^u = \frac{1}{2}\gamma\cos^c\frac{\varphi}{c}, \qquad e^v = \frac{1}{2}\gamma\sin^c\frac{\varphi}{c}, \tag{131}$$

откуда

$$\gamma = 2\left(e^{2\frac{u}{c}} + e^{2\frac{v}{c}}\right), \qquad \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{c} = e^{\frac{u-v}{c}}. \tag{132}$$

Если бы мы рассмотрели исключительные случаи $\sigma = \pm 1$, то, например, для $\sigma = +1$ при $\psi(\varphi) = k$ из формул (102) получили бы

$$\zeta_1(\varphi) = e^{-2k\varphi} \tag{133}$$

и на основании формул (104) или (95) имели бы спиральную поверхность Σ_1, образующей кривой которой служит пространственная кривая третьего порядка. В случае

$$\psi(\varphi) = -\operatorname{ctg} 2\varphi$$

из формул (102) имеем

$$\zeta_1(\varphi) = \cos^2\varphi \tag{134}$$

и поверхность Σ_1 определяется формулами

$$z_1 = \frac{-\gamma^2}{1+{}^1/_4\gamma^2}\cos^2\varphi,$$

$$x_1 = \frac{{}^1/_2\gamma^3}{1+{}^1/_4\gamma^2}\cos^3\varphi - 2\gamma\cos\varphi, \tag{135}$$

$$y_1 = \frac{{}^1/_2\gamma^3}{1+{}^1/_4\gamma^2}\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

Исключая γ и φ, получаем уравнение

$$z(x^2+y^2+z^2)+4(y^2+z^2)=0. \tag{136}$$

Таким образом, Σ_1 есть циклида третьего порядка, получаемая инверсией круглого цилиндра

$$z+4y^2+4z^2=0.$$

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВЕ

Глава I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Группа преобразований, не изменяющих данной триортогональной системы; триортогональные системы, допускающие группу преобразований Комбескюра

Предположим, что нам даны три взаимно ортогональных семейства поверхностей $\rho = \text{const}$, $\rho_1 = \text{const}$, $\rho_2 = \text{const}$, образующих триортогональную систему S в пространстве. Квадрат линейного элемента пространства в координатах ρ, ρ_1, ρ_2 имеет вид

$$ds^2 = H^2d\rho^2 + H_1^2d\rho_1^2 + H_2^2d\rho_2^2. \tag{1}$$

Косинусы углов, образуемых с осями x, y, z нормалями к трем поверхностям системы S в любой точке пространства, будем обозначать X_i, Y_i, Z_i, причем $i = 0, 1, 2$ и $X_0 = X$, $Y_0 = Y$, $Z_0 = Z$. Введем, кроме того, согласно Дарбу (Darboux S., т. I, стр. 161, 188), обозначения

$$\beta_{ik} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i}, \tag{2}$$

причем $i, k = 0, 1, 2$ и $H_0 = H$, $\rho_0 = \rho$. Величинами β_{ik} характеризуются сферические изображения поверхностей триортогональной системы; а именно, если обозначим через $d\sigma_i$ линейный элемент гауссовой сферы для поверхности $\rho_i = \text{const}$, то

$$d\sigma_i^2 = \beta_{ik}^2 d\rho_k^2 + \beta_{il}^2 d\rho_l^2, \tag{3}$$

причем $i \neq k \neq l$ (там же, стр. 191). Всегда возможно построить такую группу преобразований в пространстве, в силу которой поверхности каждого семейства данной триортогональной системы переходят одна в другую, так что триортогональная система S преобразуется сама в себя; притом таких групп преобразований для каждой данной системы S существует бесчисленное множество. Соответственным выбором параметров ρ, ρ_1, ρ_2 уравнения группы можем привести к одному из следующих трех видов:

$$\overline{\rho} = \rho + t, \quad \overline{\rho}_1 = \rho_1 + t, \quad \overline{\rho}_2 = \rho_2 + t, \tag{4}$$

$$\overline{\rho} = \rho, \quad \overline{\rho}_1 = \rho_1 + t, \quad \overline{\rho}_2 = \rho_2 + t, \tag{5}$$

$$\overline{\rho} = \rho + t, \quad \overline{\rho}_1 = \rho_1, \quad \overline{\rho}_2 = \rho_2, \tag{6}$$

где через $\overline{\rho}_i$ обозначаем то значение параметра ρ_i, которое он получает в силу преобразования группы. Равенства (4) соответствуют наиболее общему случаю, в котором траектории группы не лежат на поверхностях системы S и определяются уравнениями

$$\rho_1 - \rho = u = \text{const}, \quad \rho_2 - \rho = v = \text{const}. \tag{7}$$

Равенства (5) соответствуют тому частному случаю, когда траектории группы лежат на поверхностях $\rho = \text{const}$, так что каждая из этих поверхностей при всех преобразованиях группы преобразуется сама в себя; уравнения траекторий в этом случае имеют вид

$$\rho = \text{const}, \quad \rho_1 - \rho_2 = \text{const}. \tag{8}$$

Наконец, равенства (6) соответствуют тому случаю, когда траектории совпадают с линиями

$$\rho_1 = \text{const}, \quad \rho_2 = \text{const}, \tag{9}$$

ортогональными к поверхностям $\rho = \text{const}$. Все эти результаты получаются совершенно аналогично результатам § 1 гл. I части I: впрочем, и непосредственно очевидно, что равенства (4), или (5), или (6), в которых t — переменный параметр, определяют группу преобразований, переводящих систему S саму в себя. Совершенно так же, как для ортогональных систем на поверхности, можем параметр t принять за время и равенства (4), или (5), или (6) понимать как уравнения движения частицы жидкости с начальными криволинейными координатами ρ, ρ_1, ρ_2. В таком случае механическим истолкованием группы преобразований служит стационарное течение жидкости, переносящее поверхности триортогональной системы S. Мы можем, аналогично тому как для ортогональных систем на поверхности, поставить вопрос: в каком случае стационарное течение, упомянутое выше, допускает потенциал скоростей? Соответствующие триортогональные системы S будем называть системами *потенциального* типа. Нетрудно дать этим системам другое, чисто геометрическое определение. Действительно, если течение совершается с потенциалом скоростей, то, как известно, бесконечно малое движение частицы жидкости сводится к поступательному движению со скоростью центра частицы и к так называемой деформации. При этом прямой трехгранный угол, образованный осями деформации, т. е. прямой трехгранный угол, ребра которого остаются взаимно перпендикулярными при бесконечно малом движении частицы, перемещается, сохраняя направления ребер и граней. В нашем случае оси деформации во все время движения частицы остаются одни и те же (в частице), а именно всегда направляются по нормалям к поверхностям системы S, так как группа преобразований сохраняет прямые углы между поверхностями системы. Таким образом, мы приходим к заключению, что нормали или, безразлично, касательные плоскости поверхностей системы S при всех преобразованиях группы перемещаются параллельно или, другими словами, нормали различных поверхностей любого семейства системы S, проведенные в точках пересечения с одной и той же траекторией группы, параллельны между собою. Траектории группы устанавливают между поверхностями одного семейства соответствие параллельных нормалей; при этом, очевидно, линии кривизны сохраняются при преобразовании, так как по теореме Дюпена они определяются пересечением поверхностей различных семейств системы, которые все допускают преобразования группы; таким образом, все поверхности одного семейства имеют одно и то же сферическое изображение линий кривизны. Из самого хода наших рассуждений очевидно, что если мы, обратно, допустим параллельность нормалей в точках пересечения траектории группы с поверхностями системы S, то течение жидкости, соответствующее преобразованиям группы, будет совершаться с потенциалом скоростей. Если мы имеем произвольную триортогональную систему, то, как известно, всегда можно определить бесчисленное множество триортогональных систем, связанных с данной таким соответствием, при котором нормали в соответствующих точках ко всем поверхностям той и другой системы параллельны между собой; соответствие это носит название соответствия Комбескюра; иначе, можем сказать, что все упомянутые триортогональные системы получаются преобразованием Комбескюра из данной начальной системы (см. Darboux S. O., т. I, стр. 164). В рассматриваемом нами случае триортогональная система S находится в соответствии Комбескюра сама с собой; все преобразования группы, определяемой равенствами (4), или (5), или (6), суть преобразования Комбескюра.

Таким образом, *триортогональные системы потенциального типа могут быть определены как системы, допускающие (одночленную) группу преобразований Комбескюра.*

Если преобразования группы определяются уравнениями (6), то линии $\rho_1 = \text{const}$, $\rho_2 = \text{const}$, ортогональные поверхностям $\rho = \text{const}$, должны быть, очевидно, прямыми, так как нормали поверхностей $\rho = \text{const}$ или, иначе, касательные к какой-либо линии $\rho_1 = \text{const}$, $\rho_2 = \text{const}$ во всех точках этой линии должны иметь одно и то же направление. Таким образом, в этом случае потенциальная система состоит из семейства параллельных поверхностей и двух семейств развертывающихся поверхностей, образуемых нормалями первого семейства. Обратно, произвольная система этого рода есть система потенциального типа, так как допускает группу преобразований Комбескюра, а именно группу так называемых расширений (dilatation).

Если преобразования группы определяются уравнениями (5), то нормали к поверхности $\rho = \text{const}$ в точках

линии $\rho_1 - \rho_2 = \text{const}$, лежащей на этой поверхности, должны быть параллельны между собою. Это может быть только в двух случаях: или поверхность $\rho = \text{const}$ есть поверхность развертывающаяся и линии $\rho_1 - \rho_2 = \text{const}$ — ее прямолинейные образующие, или поверхность $\rho = \text{const}$ есть плоскость, и тогда все ее нормали параллельны между собою. Первое предположение отпадает, так как одной из систем линий кривизны развертывающейся поверхности служит система прямолинейных образующих, а между тем две системы линий кривизны поверхностей $\rho = \text{const}$ определяются пересечением с поверхностями $\rho_1 = \text{const}$, $\rho_2 = \text{const}$, и ни одна из этих систем не совпадает с линиями $\rho_1 - \rho_2 = \text{const}$. Итак, необходимо допустить, что поверхности $\rho = \text{const}$ — плоскости, для которых линии кривизны неопределенны. Триортогональная система S в этом случае состоит из семейства плоскостей $\rho = \text{const}$ и двух семейств поверхностей Монжа (surfaces moulures); самую общую систему подобного рода получим, начертив в некоторой плоскости P два взаимно ортогональных семейства кривых и заставляя затем эту плоскость катиться без скольжения по произвольной развертывающейся поверхности (Darboux S. O., т. I, стр. 27). Для того чтобы система S была потенциального типа, достаточно в плоскости P взять ортогональную систему потенциального типа; это легко следует из результатов § 7 части I.

Оба рассмотренных нами частных случая имеют характер случаев предельных, и потому мы будем называть собственно потенциальными системами лишь те системы, которые соответствуют общей форме уравнений группы

$$\bar\rho = \rho + t, \quad \bar\rho_1 = \rho_1 + t, \quad \bar\rho_2 = \rho_2 + t. \tag{4}$$

Мы могли бы совершенно так же, как в § 1 части I, исходя из механических соображений, доказать, что коэффициенты H^2, $H_1{}^2$, $H_2{}^2$ линейного элемента в этом случае имеют вид

$$H^2 = \frac{\partial \omega}{\partial \rho}, \quad H_1^2 = \frac{\partial \omega}{\partial \rho_1}, \quad H_2^2 = \frac{\partial \omega}{\partial \rho_2}, \tag{10}$$

если ω есть потенциал скоростей соответствующего течения. К тому же результату придем и независимо от кинематического истолкования группы преобразований. Так как траектории группы определяются уравнениями

$$u = \rho_1 - \rho = \text{const}, \qquad v = \rho_2 - \rho = \text{const} \tag{7}$$

и так как нормали поверхностей системы должны быть параллельны во всех точках каждой траектории, то, очевидно, мы должны иметь

$$X_i = X_i(u,\ v), \quad Y_i = Y_i(u,\ v), \quad Z_i = Z_i(u,\ v) \quad (i = 0,\ 1,\ 2), \tag{11}$$

где через u и v, как и везде в последующем, обозначаем разности $\rho_1 - \rho$ и $\rho_2 = \rho$. Косинусы углов нормалей удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial U_i}{\partial \rho_i} = -U_k\beta_{ki} - U_l\beta_{li}, \qquad \frac{\partial U_i}{\partial \rho_k} = \beta_{ik}U_k \qquad (i \neq k \neq l), \tag{12}$$

где $U_i = X_i, Y_i, Z_i$ (Darboux S. O., т. I, стр. 190). Обозначая через δ операцию $\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial}{\partial\rho_1} + \frac{\partial}{\partial\rho_2}$, получаем из уравнений (12)

$$\delta U_i = (\beta_{ik} - \beta_{ki})U_k + (\beta_{il} - \beta_{li})U_l. \tag{13}$$

Так как в силу равенств (11) $\delta X_i = \delta Y_i = \delta Z_i = 0$, то имеем

$$(\beta_{ik} - \beta_{ki})X_k + (\beta_{il} - \beta_{li})X_l = 0,$$
$$(\beta_{ik} - \beta_{ki})Y_k + (\beta_{il} - \beta_{li})Y_l = 0;$$
$$(\beta_{ik} - \beta_{ki})\,Z_k + (\beta_{il} - \beta_{li})\,Z_l = 0,$$

откуда необходимо следует, что разности $\beta_{ik} - \beta_{ki}$, $\beta_{il} - \beta_{li}$ должны исчезать, так как в противном случае мы бы имели

$$X_k : Y_k : Z_k = X_l : Y_l : Z_l,$$

т. е. нормали к поверхностям $\rho_k = \text{const}$ и $\rho_l = \text{const}$ должны были бы совпадать. Итак, имеем

$$\beta_{ik} = \beta_{ki} \qquad (i,\ k = 0,\ 1,\ 2), \tag{14}$$

а отсюда на основании равенств (2) получаем

$$\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial \rho_k}$$

или

$$\frac{\partial H_k^2}{\partial \rho_i} = \frac{\partial H_i^2}{\partial \rho_k}. \tag{15}$$

Соотношения (15) дают нам

$$H_i^2 = \frac{\partial\omega}{\partial\rho_i} \qquad (i = 0, 1, 2), \tag{16}$$

и, следовательно, мы приходим к прежнему результату.

Квадрат линейного элемента пространства в криволинейных координатах ρ, ρ_1, ρ_2 имеет вид

$$ds^2 = \frac{\partial\omega}{\partial\rho}\,d\rho^2 + \frac{\partial\omega}{\partial\rho_1}\,d\rho_1^2 + \frac{\partial\omega}{\partial\rho_2}\,d\rho_2^2. \tag{17}$$

Так как поверхности трех семейств триортогональной системы пересекаются по линиям кривизны и так как квадрат линейного элемента поверхности $\rho_i = \text{const}$ на основании (17) имеет вид

$$ds_i^2 = \frac{\partial\omega}{\partial\rho_k}\,d\rho_k^2 + \frac{\partial\omega}{\partial\rho_l}\,d\rho_l^2, \tag{18}$$

то, следовательно, все *три семейства триортогональной потенциальной системы состоят из поверхностей потенциального типа.*

Предположим, обратно, что квадрат линейного элемента пространства относительно триортогональной системы S имеет вид (17), т. е., другими словами, что коэффициенты H_i^2 определяются равенствами (16). Тогда из соотношений (2) следует

$$\beta_{ik} = \beta_{ki} = \frac{\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\rho_i\partial\rho_k}}{\sqrt{\dfrac{\partial\omega}{\partial\rho_i}\,\dfrac{\partial\omega}{\partial\rho_k}}}, \tag{19}$$

а из соотношений (13) в силу равенств (19) получаем

$$\delta X_i = \delta Y_i = \delta Z_i = 0,$$

т. е. все 9 косинусов углов нормалей с осями суть функции разностей $u = \rho_1 - \rho$, $v = \rho_2 - \rho$. Рассматривая группу преобразований (4), которую допускает система S, легко убеждаемся, что все преобразования группы суть преобразования Комбескюра, так как нормали поверхностей системы в точках любой траектории группы $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$ параллельны между собою.

Таким образом, *триортогональные потенциальные системы вполне характеризуются формой* (17) *линейного элемента пространства или соотношениями* $\beta_{ik} = \beta_{ki}$.

Из равенств (12), между прочим, следует, что величины β_{ik} суть функции разностей $u = \rho_1 - \rho$, $v = \rho_2 - \rho$; это вполне соответствует результату, полученному выше, согласно которому все поверхности одного семейства системы S имеют одно и то же сферическое изображение линий кривизны. Действительно, коэффициентами линейного элемента (3) гауссовой сферы для поверхностей одного из семейств служат квадраты величин β_{ik}, и, например, для поверхностей $\rho = \mathrm{const}$ имеем

$$d\sigma^2 = \beta_{01}^2 d\rho_1^2 + \beta_{02}^2 d\rho_2^2$$

или, безразлично,

$$d\sigma^2 = \beta_{01}^2 du^2 + \beta_{02}^2 dv^2, \tag{20}$$

где, по предыдущему, β_{01}^2 и β_{02}^2 зависят лишь от u и v и не изменяются с переходом от одной поверхности $\rho = \mathrm{const}$ к другой.

Если мы, обратно, предположим, что поверхности хотя бы одного семейства триортогональной системы S имеют одно и то же сферическое изображение, то, во-первых, легко убеждаемся, что это же свойство принадлежит и остальным двум семействам, так как нормали этих семейств служат касательными к линиям кривизны первого семейства и, следовательно, параллельны в соответствующих точках; во-вторых, можем доказать, что система S есть система потенциального типа. Действительно, систему S, очевидно, возможно ∞^2 числом способов привести в соответствие саму с собою с помощью параллельных нормалей, т. е., другими словами, мы имеем ∞^1 преобразований Комбескюра, сохраняющих данную систему; непосредственно очевидно, что все эти преобразования составляют непрерывную группу, и, следовательно, система S есть система потенциального типа.

Триортогональные системы, состоящие из семейств поверхностей с общим сферическим изображением, упоминаются в заметке М. Фуше (Fouché), помещенной в Compt. Rend. Acad. Sci. Paris (17 января 1898); автор заметки упоминает, что величины β_{ik} для этих систем являются функциями двух параметров, и дает несколько свойств, относящихся к кривизне поверхностей системы.

§ 2. Свойства траекторий группы; поверхности ω=const, ортогональные траекториям; радиусы кривизны поверхностей системы; соприкасающиеся плоскости координатных линий

Предполагая квадрат линейного элемента пространства в виде (17), будем называть функцию ω *основной функцией* триортогональной системы S, а параметры ρ, ρ_1, ρ_2 — потенциальными параметрами. Рассуждениями, вполне аналогичными рассуждениям § 1 части I, легко убедимся, что по данной системе S потенциальные параметры и основная функция определяются единственным образом, если не считать не имеющих существенного значения постоянных, которые можно, очевидно, прибавить к ρ, ρ_1, ρ_2 и ω, и постоянного множителя, на который можно умножить потенциальные параметры, разделив на него же основную функцию. Относительно любой системы координат, в частности относительно декартовых, функции ω, ρ, ρ_1, ρ_2 определяются уравнениями

$$\begin{matrix} \Delta(\omega, \rho) = 1, & \Delta(\omega, \rho_1) = 1, & \Delta(\omega, \rho_2) = 1, \\ \Delta(\rho, \rho_1) = 0, & \Delta(\rho_1, \rho_2) = 0, & \Delta(\rho_2, \rho) = 0, \end{matrix} \tag{21}$$

где $\Delta(\varphi, \psi)$ есть знак промежуточного параметра и, в частности, в декартовых координатах

$$\Delta(\varphi, \psi) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Последние три из уравнений (21) представляют собой условия ортогональности семейств $\rho_i = \mathrm{const}$; первые три выражают, что семейства $\rho_i = \mathrm{const}$ переносятся течением жидкости с потенциалом скоростей, равным ω. Независимо от кинематического истолкования они могут быть получены на основании того замечания, что, они, очевидно, имеют место в системе координат ρ, ρ_1, ρ_2, для которой

$$\Delta(\varphi, \psi) = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}}{\frac{\partial\omega}{\partial\rho}} + \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\frac{\partial\psi}{\partial\rho_1}}{\frac{\partial\omega}{\partial\rho_1}} + \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}\frac{\partial\psi}{\partial\rho_2}}{\frac{\partial\omega}{\partial\rho_2}}, \quad (22)$$

а следовательно, имеют место и в любых координатах на основании общего свойства дифференциальных инвариантов.

Исключая из уравнений (21), которые можем предполагать в декартовых координатах, функции ρ, ρ_1, ρ_2, получаем условия, ограничивающие ω; таким образом, основная функция потенциальной системы не может быть выбрана произвольно; то же самое скажем и про семейство поверхностей $\omega = \text{const}$.

Если воспользуемся кинематической интерпретацией группы преобразований, то непосредственно получим, что семейство $\omega = \text{const}$, как семейство поверхностей уровня, ортогонально к семейству траекторий группы $u = \text{const}$, $v = \text{const}$. Нетрудно в этом убедиться и непосредственно. Действительно, обозначая через d' дифференциалы, соответствующие передвижению по траекториям, имеем

$$d'u = d'\rho_1 - d'\rho = 0, \qquad d'v = d'\rho_2 - d'\rho = 0,$$

откуда

$$d'\rho = d'\rho_1 = d'\rho_2. \quad (23)$$

Условие ортогональности двух направлений, характеризуемых дифференциалами $d\rho_i$ и $d'\rho_i$, имеет вид

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho}d\rho\, d'\rho + \frac{\partial\omega}{\partial\rho_1}d\rho_1 d'\rho_1 + \frac{\partial\omega}{\partial\rho_2}d\rho_2 d'\rho_2 = 0$$

или в силу (23)

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\omega}{\partial\rho_1}d\rho_1 + \frac{\partial\omega}{\partial\rho_2}d\rho_2 = 0.$$

А это последнее дифференциальное соотношение выполняется для всех перемещений по поверхности $\omega = \text{const}$.

Функция ω служит основной функцией для поверхностей всех трех семейств триортогональной системы, как

это явствует из формы (18) линейного элемента поверхности $\rho_i = \text{const}$. Поэтому касательная к линии пересечения какой-либо из поверхностей $\omega = \text{const}$ с поверхностью $\rho_i = \text{const}$, согласно § 2 части I, в любой точке параллельна лучу l_i, соединяющему центры геодезических кривизн линий кривизны поверхности $\rho_i = \text{const}$. На основании предыдущего отсюда заключаем, что *касательная к траектории* $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ *во всякой точке перпендикулярна к трем лучам* l, l_1, l_2, *соединяющим центры геодезических кривизн линий кривизны тех трех поверхностей системы, которые проходят через рассматриваемую точку.*

Так как центр геодезической кривизны линии кривизны, лежащей на поверхности $\rho_i = \text{const}$ в пересечении ее с поверхностью $\rho_k = \text{const}$, есть вместе с тем один из главных центров кривизны поверхности $\rho_i = \text{const}$, то лучи l, l_1, l_2 могут быть иначе определены как прямые, соединяющие главные центры кривизны поверхностей различных семейств системы; притом луч l_i соединяет главные центры кривизны поверхностей $\rho_k = \text{const}$ и $\rho_l = \text{const}$, соответствующие линиям кривизны $\rho_i = \text{const}$, $\rho_k = \text{const}$ и $\rho_i = \text{const}$, $\rho_l = \text{const}$. Как следствие из предыдущего получаем, что *во всякой точке пространства три луча* l, l_1, l_2 *параллельны одной и той же плоскости* (касательной плоскости поверхности $\omega = \text{const}$).

Каждый из лучей l_i лежит в одной из трех граней трехгранного угла, образуемого в соответствующей точке пространства касательными плоскостями трех поверхностей системы S; отрезки, отсекаемые лучами l_i на ребрах этого угла, т. е. на трех нормалях, очевидно, равны главным радиусам кривизны поверхностей системы. Для того чтобы три луча l, l_1, l_2 были параллельны одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы произведение трех из этих отрезков, лежащих на разных ребрах и отсекаемых *различными* лучами, равнялось произведению трех остальных. Обозначая через R_{ik} главный радиус кривизны поверхности $\rho_i = \text{const}$, соответствующий элементу дуги $H_k d\rho_k$, получаем, таким образом, соотношение

$$R_{01}R_{12}R_{20} = R_{02}R_{21}R_{10}, \quad (24)$$

приводимое М. Фуше в его заметке.

Предположим, обратно, что для некоторой триортогональной системы S три луча l, l_1, l_2, соединяющие главные центры кривизны поверхностей различных семейств, в каждой точке параллельны одной плоскости, или, безразлично, предположим, что между главными радиусами кривизны существует соотношение (24), так как оба эти предположения равносильны; легко доказать, что система S есть система потенциального типа. Для доказательства, прежде всего, на основании формул

$$R_{ik} = -\frac{H_k}{\beta_{ik}} \tag{25}$$

(см. Darboux S. O., т. I, стр. 190) заменим соотношение (24) соотношением

$$\beta_{01}\beta_{12}\beta_{20} = \beta_{02}\beta_{21}\beta_{10}. \tag{26}$$

Величины β_{ik} в самом общем случае связаны следующими уравнениями (там же, стр. 189):

$$\frac{\partial\beta_{ik}}{\partial\rho_l} = \beta_{il}\beta_{lk}, \qquad \frac{\partial\beta_{ik}}{\partial\rho_i} + \frac{\partial\beta_{ki}}{\partial\rho_k} + \beta_{li}\beta_{lk} = 0. \tag{27}$$

Умножая обе части первого из них на β_{ki} и замечая, что числа i, k, l представляют собой какую-либо перестановку чисел 0, 1, 2, получаем в силу (26)

$$\beta_{ki}\frac{\partial\beta_{ik}}{\partial\rho_l} = \beta_{ik}\frac{\partial\beta_{ki}}{\partial\rho_l},$$

откуда после интегрирования имеем

$$\beta_{10} = F(\rho, \rho_1)\beta_{01}, \quad \beta_{21} = \Phi(\rho_1, \rho_2)\beta_{12},$$
$$\beta_{02} = \Psi(\rho_2, \rho)\beta_{20}. \tag{28}$$

Вставляя выражения β_{10}, β_{21}, β_{02} в соотношение (26), получаем

$$F(\rho, \rho_1)\,\Phi(\rho_1, \rho_2)\Psi(\rho_2, \rho) = 1,$$

что возможно лишь при

$$F(\rho, \rho_1) = \frac{f_1(\rho_1)}{f(\rho)}, \quad \Phi(\rho_1, \rho_2) = \frac{f_2(\rho_2)}{f_1(\rho_1)}, \quad \Psi(\rho_2, \rho) = \frac{f(\rho)}{f_2(\rho_2)}.$$

Равенства (28), таким образом, принимают вид

$$\beta_{ik}f_k(\rho_k) = \beta_{ki}f_i(\rho_i), \tag{29}$$

но из выражения

$$d\sigma_i^2 = \beta_{ik}^2 d\rho_k^2 + \beta_{il}^2 d\rho_l^2 \tag{30}$$

линейного элемента гауссовой сферы для поверхности $\rho_i = \text{const}$ явствует, что, заменяя параметры ρ, ρ_1, ρ_2 соответственно выбранными функциями этих же параметров, мы всегда можем достигнуть того, чтобы вычисленные в новых параметрах величины $\overline{\beta}_{ik}$ были связаны с прежними β_{ik} равенствами

$$\overline{\beta}_{ik} = \beta_{ik}f_k(\rho_k),$$

а в таком случае на основании соотношений (29) будем иметь $\overline{\beta}_{ik} = \overline{\beta}_{ki}$, и, следовательно, система S есть система потенциального типа (см. § 1).

Формулы (25), которыми мы пользовались в предшествующем выводе, позволяют, между прочим, очень просто получить основные функции вторых дифференциальных форм для поверхностей трех семейств системы S. Обозначая через D_{ik}, D_{il} коэффициенты второй формы для поверхности $\rho_i = \text{const}$, т. е. полагая

$$\frac{ds_i^2}{r_i} = D_{ik}d\rho_k^2 + D_{il}d\rho_l^2,$$

где r_i — радиус кривизны нормального сечения поверхности, имеем на основании общих формул теории поверхностей (ср. § 11 части I)

$$R_{ik} = \frac{H_k^2}{D_{ik}},$$

откуда в силу равенства (25)

$$D_{ik} = -H_k\beta_{ik}.$$

Замечая, что $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ и вставляя выражение β_{ki} из равенства

$$\beta_{ki} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial\rho_k}, \tag{2}$$

получаем окончательно

$$D_{ik} = -\frac{\partial H_i}{\partial \rho_k}. \tag{31}$$

Таким образом, при сохранении прежних условий относительно знаков (часть I, § 11) — H_i служит основной функцией второй дифференциальной формы для поверхности $\rho_i = \text{const}$.

Рассмотрим на различных поверхностях семейства $\rho_i = \text{const}$ линии $H_i = \text{const}$. Так как все поверхности одного семейства имеют одно сферическое изображение и так как $-H_i$ служит основной функцией второй дифференциальной формы, то, согласно результатам § 16 части I, касательные к линиям $H_i = \text{const}$, а следовательно, и нормальные плоскости этих линий в точках пересечения поверхностей $\rho_i = \text{const}$ с одной и той же траекторией группы параллельны между собою. С другой стороны, всякую линию $H_i = \text{const}$ можно рассматривать как линию, вдоль которой поверхность $\rho_i = \text{const}$ находится на постоянном расстоянии $H_i' d\rho_i$ от бесконечно близкой поверхности того же семейства, а потому на основании общей теории (см. Б и а н к и, Лекции по дифференциальной геометрии, стр. 491) нормальная плоскость линии $H_i = \text{const}$ совпадает с соприкасающейся плоскостью ортогональной траектории семейства $\rho_i = \text{const}$, т. е., другими словами,— координатной линии ρ_i. Таким образом, *соприкасающиеся плоскости координатных линий во всех точках одной и той же траектории группы параллельны между собою*. То же свойство, очевидно, принадлежит бинормалям, а также и главным нормалям координатных линий; последнее замечание следует из того, что касательные к координатным линиям, т. е. нормали поверхностей системы, точно так же параллельны в точках одной и той же траектории группы.

Косинусы углов, образуемых с осями касательной к линии $H_i = \text{const}$ на поверхности $\rho_i = \text{const}$, согласно результатам § 16, пропорциональны якобианам

$$\frac{\partial (H_i, x)}{\partial (\rho_k, \rho_l)} : \frac{\partial (H_i, y)}{\partial (\rho_k, \rho_l)} : \frac{\partial (H_i, z)}{\partial (\rho_k, \rho_l)}$$

(там же, стр. 491). Пользуясь соотношениями (2) и замечая, что

$$\frac{\partial x}{\partial \rho_i} = H_i X_i, \qquad \frac{\partial y}{\partial \rho_i} = H_i Y_i, \qquad \frac{\partial z}{\partial \rho_i} = H_i Z_i \qquad (i = 0, 1, 2) \tag{32}$$

(см. Darboux S. O., т. I, стр. 159), можем заменить вышеупомянутые якобианы пропорциональными им выражениями

$$(\beta_{ki} X_l - \beta_{li} X_k) : (\beta_{ki} Y_l - \beta_{li} Y_k) : (\beta_{ki} Z_l - \beta_{li} Z_k). \tag{33}$$

Отсюда, между прочим, непосредственно явствует справедливость вышедоказанного положения, так как величины β_{ik} и косинусы углов нормалей суть функции разностей u, v и остаются постоянными на одной и той же траектории группы. Пользуясь полученными результатами, можем также написать уравнения соприкасающихся плоскостей координатных линий системы в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&(\beta_{10} X_2 - \beta_{20} X_1)(\xi - x) + (\beta_{10} Y_2 - \beta_{20} Y_1)(\eta - y) + \\
&\qquad\qquad + (\beta_{10} Z_2 - \beta_{20} Z_1)(\zeta - z) = 0, \\
&(\beta_{21} X - \beta_{01} X_2)(\xi - x) + (\beta_{21} Y - \beta_{01} Y_2)(\eta - y) + \\
&\qquad\qquad + (\beta_{21} Z - \beta_{01} Z_2)(\zeta - z) = 0, \\
&(\beta_{02} X_1 - \beta_{12} X)(\xi - x) + (\beta_{02} Y_1 - \beta_{12} Y)(\eta - y) + \\
&\qquad\qquad + (\beta_{02} Z_1 - \beta_{12} Z)(\zeta - z) = 0,
\end{aligned} \tag{34}$$

где ξ, η, ζ — текущие координаты. Складывая эти уравнения, получаем тождество $0 = 0$, так как $\beta_{ik} = \beta_{ki}$. Отсюда заключаем, что *во всякой точке пространства три соприкасающиеся плоскости координатных линий потенциальной системы проходят через одну прямую*. Определяя косинусы углов этой прямой с осями, находим, что они пропорциональны выражениям

$$\left(\frac{X}{\beta_{12}} + \frac{X_1}{\beta_{20}} + \frac{X_2}{\beta_{01}}\right) : \left(\frac{Y}{\beta_{12}} + \frac{Y_1}{\beta_{20}} + \frac{Y_2}{\beta_{01}}\right) : \left(\frac{Z}{\beta_{12}} + \frac{Z_1}{\beta_{20}} + \frac{Z_2}{\beta_{01}}\right). \tag{35}$$

Бинормали трех координатных линий в каждой точке пространства, очевидно, перпендикулярны прямой, косинусы которой пропорциональны выражениям (35), и, следовательно, параллельны одной и той же плоскости. Составляя детерминант Δ из коэффициентов уравнений (34), получаем

$$\Delta = \beta_{10}\beta_{21}\beta_{02} - \beta_{20}\beta_{01}\beta_{12}. \tag{36}$$

Отсюда заключаем, что *если для какой-либо триортогональной системы S соприкасающиеся плоскости трех координатных линий в каждой точке пространства пересекаются по одной прямой, то эта система есть система потенциального типа*, так как условие $\Delta = 0$, как мы видели выше, вполне характеризует потенциальную систему.

В заключение выведем для траекторий группы $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ выражения основных дифференциальных элементов. Прежде всего заметим, что для всякого перемещения по траектории имеем

$$d\rho = d\rho_1 = d\rho_2, \tag{37}$$

и, следовательно, операция

$$\delta = \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial}{\partial\rho_1} + \frac{\partial}{\partial\rho_2},$$

которой мы уже пользовались выше, есть в сущности операция дифференцирования по траектории, так что δf есть производная функция f по траектории $u = \text{const}$, $v = \text{const}$. В силу равенств (37) элемент дуги траектории имеет вид

$$ds = \sqrt{H^2 + H_1^2 + H_2^2}\, d\rho = \sqrt{\delta\omega}\, d\rho. \tag{38}$$

Косинусы углов касательной к траектории с осями определяются производными

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\delta x}{\sqrt{\delta\omega}}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\delta y}{\sqrt{\delta\omega}}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{\delta z}{\sqrt{\delta\omega}},$$

в силу формул (32) имеем

$$\begin{aligned} \delta x &= \sum \frac{\partial x}{\partial\rho_i} = \sum H_i X_i, \\ \delta y &= \sum \frac{\partial y}{\partial\rho_i} = \sum H_i Y_i, \\ \delta z &= \sum \frac{\partial z}{\partial\rho_i} = \sum H_i Z_i \qquad (i = 0, 1, 2), \end{aligned} \tag{39}$$

и, следовательно, окончательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{\sum H_i X_i}{\sqrt{\delta\omega}} = \frac{\sum \sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial\rho_i}}\, X_i}{\sqrt{\delta\omega}}, \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{\sum H_i Y_i}{\sqrt{\delta\omega}} = \frac{\sum \sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial\rho_i}}\, Y_i}{\sqrt{\delta\omega}}, \\ \frac{dz}{ds} &= \frac{\sum H_i Z_i}{\sqrt{\delta\omega}} = \frac{\sum \sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial\rho_i}}\, Z_i}{\sqrt{\delta\omega}}. \end{aligned} \tag{40}$$

Косинусы углов главной нормали с осями пропорциональны производным

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{\sqrt{\delta\omega}}\,\delta\left\{\frac{\delta x}{\sqrt{\delta\omega}}\right\}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{1}{\sqrt{\delta\omega}}\,\delta\left\{\frac{\delta y}{\sqrt{\delta\omega}}\right\},$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{1}{\sqrt{\delta\omega}}\,\delta\left\{\frac{\delta z}{\sqrt{\delta\omega}}\right\}.$$

Так как $\delta X_i = \delta Y_i = \delta Z_i = 0$, то на основании формул (40) имеем

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{\sqrt{\delta\omega}} \sum \delta\left\{\frac{H_i}{\sqrt{\delta\omega}}\right\}\cdot X_i = \frac{1}{\sqrt{\delta\omega}} \sum \delta \sqrt{\frac{\frac{\partial\omega}{\partial\rho_i}}{\delta\omega}}\cdot X_i, \tag{41}$$

и аналогично для $\frac{d^2y}{ds^2}$ и $\frac{d^2z}{ds^2}$.

Радиус кривизны R определяется из равенства

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = \frac{1}{\delta\omega} \sum \left\{\delta \sqrt{\frac{\frac{\partial\omega}{\partial\rho_i}}{\delta\omega}}\right\}^2. \tag{42}$$

Наконец, обозначая через T кривизну кручения, имеем

$$T = R^2 \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix} = -\frac{R^2}{(\delta\omega)^3} \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ \delta^2 x & \delta^2 y & \delta^2 z \\ \delta^3 x & \delta^3 y & \delta^3 z \end{vmatrix},$$

или в силу формул (39)

$$T = -\frac{R^2}{(\delta\omega)^3}\begin{vmatrix} \sum H_i\cdot X_i & \sum H_i\cdot Y_i & \sum H_i\cdot Z_i \\ \sum \delta H_i\cdot X_i & \sum \delta H_i\cdot Y_i & \sum \delta H_i\cdot Z_i \\ \sum \delta^2 H_i\cdot X_i & \sum \delta^2 H_i\cdot Y_i & \sum \delta^2 H_i\cdot Z_i \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{R^2}{(\delta\omega)^3}\begin{vmatrix} H & H_1 & H_2 \\ \delta H & \delta H_1 & \delta H_2 \\ \delta^2 H & \delta^2 H_1 & \delta^2 H_2 \end{vmatrix}, \qquad (43)$$

где можем еще вставить $H_i = \sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial\rho_i}}$.

§ 3. Сферическое изображение системы потенциального типа

Изыскание триортогональных систем в самом общем случае может быть приведено к определению из уравнений (27) § 2 величин β_{ik}, от которых зависит сферическое изображение поверхностей системы, затем к определению косинусов нормалей X_i, Y_i, Z_i из уравнений (12) § 1 и, наконец, к изысканию всех триортогональных систем данного сферического изображения.

Системы потенциального типа, как мы видели, вполне характеризуются условием $\beta_{ik} = \beta_{ki}$. Вводя это предположение в уравнения (27), имеем

$$\frac{\partial\beta_{01}}{\partial\rho_2} = \beta_{02}\beta_{12}, \quad \frac{\partial\beta_{02}}{\partial\rho_1} = \beta_{01}\beta_{12}, \quad \frac{\partial\beta_{12}}{\partial\rho} = \beta_{01}\beta_{02}, \qquad (44)$$

$$\frac{\partial\beta_{01}}{\partial\rho} + \frac{\partial\beta_{01}}{\partial\rho_1} + \beta_{02}\beta_{12} = 0, \quad \frac{\partial\beta_{02}}{\partial\rho} + \frac{\partial\beta_{02}}{\partial\rho_2} + \beta_{01}\beta_{12} = 0,$$

$$\frac{\partial\beta_{12}}{\partial\rho_1} + \frac{\partial\beta_{12}}{\partial\rho_2} + \beta_{01}\beta_{02} = 0. \qquad (45)$$

Складывая соответственные уравнения группы (44) и группы (45), получаем $\delta\beta_{ik} = 0$ и, таким образом, подтверждаем, что все β_{ik} суть функции разностей $u = \rho_1 - \rho$, $v = \rho_2 - \rho$. Умножая обе части каждого из уравнений (44) соответственно на $2\beta_{01}$, $2\beta_{02}$ и $2\beta_{12}$, получаем

$$\frac{\partial(\beta_{01}^2)}{\partial\rho_2} = \frac{\partial(\beta_{02}^2)}{\partial\rho_1} = \frac{\partial(\beta_{12}^2)}{\partial\rho} = 2\beta_{01}\beta_{02}\beta_{12}, \qquad (46)$$

откуда следует

$$\beta_{ik}^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial\rho_i\partial\rho_k}. \qquad (47)$$

Так как все β_{ik} суть функции разностей u, v, то из всех возможных значений функции V, определяемой равенствами (47), можно выбрать такое, которое точно так же зависит лишь от u и v. В этом предположении равенства (47) принимают вид

$$\beta_{01}^2 = -\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial u\,\partial v}, \quad \beta_{02}^2 = -\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial u\,\partial v}, \quad \beta_{12}^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial u\,\partial v}. \qquad (48)$$

Вносся выражения (48) для величин β_{ik} в уравнения (46) и (45), видим, что все они приводятся к уравнению

$$\left\{\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right\}\left(\sqrt{\frac{\partial^2 V}{\partial u\,\partial v}}\right) + \\ + \sqrt{\left\{\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right\}\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right\}\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)} = 0. \qquad (49)$$

Таким образом, изыскание сферического изображения триортогональных систем потенциального типа приводится к интегрированию одного уравнения (49) третьего порядка с частными производными по двум переменным u, v. В координатах ρ, ρ_1, ρ_2 уравнение (49) принимает более симметричный вид

$$\frac{\partial^3 V}{\partial\rho\partial\rho_1\partial\rho_2} = 2\sqrt{\frac{\partial^2 V}{\partial\rho\partial\rho_1}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\rho\partial\rho_2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\rho_1\partial\rho_2}}; \qquad (50)$$

но так как V, по предположению, есть функция разностей u, v, то для полного определения V к уравнению (50) следует присоединить еще уравнение первого порядка

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial\rho} + \frac{\partial V}{\partial\rho_1} + \frac{\partial V}{\partial\rho_2} = 0. \qquad (51)$$

Определение сферического изображения триортогональной системы потенциального типа можно вести несколько иначе. Из уравнений (46) имеем

$$\beta_{01}^2 = \frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1}, \quad \beta_{02}^2 = \frac{\partial\lambda}{\partial\rho_2}, \qquad (52)$$

причем на основании равенств (47)

$$\lambda = \frac{\partial V}{\partial \rho}. \tag{53}$$

Функция λ есть, очевидно, основная функция третьей дифференциальной формы для поверхностей $\rho = \mathrm{const}$, так как линейный элемент гауссовой сферы для поверхностей $\rho = \mathrm{const}$ имеет вид

$$d\sigma^2 = \beta_{01}^2\, d\rho_1^2 + \beta_{02}^2\, d\rho_2^2.$$

Совершенно аналогично можно усмотреть, что $\mu = \frac{\partial V}{\partial \rho_1}$ и $\nu = \frac{\partial V}{\partial \rho_2}$ служат основными функциями третьих дифференциальных форм соответственно для поверхностей $\rho_1 = \mathrm{const}$ и $\rho_2 = \mathrm{const}$. Так как β_{ik} зависят лишь от разностей u, v, то и λ имеем право считать функцией u, v; тогда равенства (52) принимают вид

$$\beta_{01}^2 = \frac{\partial \lambda}{\partial u}, \qquad \beta_{02}^2 = \frac{\partial \lambda}{\partial v} \tag{54}$$

и для линейного элемента гауссовой сферы имеем

$$d\sigma^2 = \frac{\partial \lambda}{\partial u}\, du^2 + \frac{\partial \lambda}{\partial v}\, dv^2. \tag{55}$$

Внося выражения (54) в первые два из уравнений (44) и (45), получаем

$$\beta_{12} = \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial u\,\partial v}}{\sqrt{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}}}. \tag{56}$$

Внося те же выражения в третье из уравнений (44) и в третье из уравнений (45), получаем из обоих

$$\left\{\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right\}\left\{\frac{\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial u\,\partial v}}{\sqrt{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}}}\right\} = -2\sqrt{\frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial v}}, \tag{57}$$

т. е. приходим к уравнению, выведенному нами в § 8 части I и определяющему произвольную потенциальную систему на сфере. Таким образом, *изыскание сферического изображения триортогональных систем потенциального типа приводится к изысканию потенциальных систем на сфере.* Любую потенциальную систему на сфере можно принять за сферическое изображение линий кривизны поверхностей одного из трех семейств, например семейства $\rho = \mathrm{const}$. Величины β_{ik} определяются из формул (54) и (56), где λ — основная функция потенциальной системы на сфере и где u и v следует заменить разностями $\rho_1 - \rho$ и $\rho_2 - \rho$. Основные функции μ и ν для семейств $\rho_1 = \mathrm{const}$ и $\rho_2 = \mathrm{const}$ определяются по основной функции λ из соотношений

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} = -\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{1}{4}\,\frac{\left(\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial u\,\partial v}\right)^2}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}}, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{1}{4}\,\frac{\left(\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial u\,\partial v}\right)^2}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}}, \tag{58}$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial u} = \frac{1}{4}\,\frac{\left(\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial u\,\partial v}\right)^2}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}}, \qquad \frac{\partial \nu}{\partial v} = -\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{1}{4}\,\frac{\left(\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial u\,\partial v}\right)^2}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}}, \tag{59}$$

которые легко получаются из формул (54) и (56). Между тремя функциями λ, μ, ν существует, очевидно, соотношение

$$\lambda + \mu + \nu = \mathrm{const},$$

которое можем взять в частном виде

$$\lambda + \mu + \nu = 0, \tag{60}$$

так как каждую из основных функций имеем право изменить на постоянное.

Раз найдены все величины β_{ik}, остается определить косинусы X_i, Y_i, Z_i нормалей из уравнений (12) § 1, интегрирование которых приводится к интегрированию уравнений Риккати (см. Darboux S. O., т. I, стр. 186). Первая группа уравнений (12) показывает, что достаточно определить косинусы нормали какого-либо одного семейства, например X, Y, Z; тогда остальные косинусы определяются из равенств

$$X_1 = \frac{1}{\beta_{01}}\frac{\partial X}{\partial \rho_1}, \qquad X_2 = \frac{1}{\beta_{02}}\frac{\partial X}{\partial \rho_2} \tag{61}$$

и аналогичных равенств для Y_1, Z_1, Y_2, Z_2. Внося выражения (61) в остальные уравнения (12), заменяя β_{ik} их выражениями (54) и (56) через λ и замечая, что все косинусы X_i, Y_i, Z_i зависят только от разностей u, v, получаем для определения X, а также Y и Z те самые уравнения, которые были даны в § 8 части I (формула (30)). Этого результата, конечно, и следовало ожидать, так как для всех поверхностей $\rho = \text{const}$ сферическим изображением линий кривизны служит потенциальная система с основной функцией λ.

Заметим еще в заключение, что из первой группы уравнений (12), которые для потенциальной системы совпадают с уравнениями (2), определяющими величины H_i, можно получить

$$X_i^2 = \frac{\partial \xi}{\partial \rho_i}, \qquad Y_i^2 = \frac{\partial \eta}{\partial \rho_i}, \qquad Z_i^2 = \frac{\partial \zeta}{\partial \rho_i}, \tag{62}$$

обратно, предположив, что, например X^2, X_1^2, X_2^2 выражаются частными производными одной функции, получаем из уравнений (12) $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ и, следовательно, имеем систему потенциального типа.

§ 4. Определение триортогональных систем потенциального типа по данному сферическому изображению

Все триортогональные системы, соответствующие данному сферическому изображению, для которого $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, принадлежат к числу систем потенциального типа (см. § 1). Для определения их можем, согласно общей теории (Darboux S. O., т. I, стр. 164), воспользоваться шестью уравнениями (2) § 1, которые напишем в следующем виде:

$$\frac{\partial H_i}{\partial \rho_k} = \beta_{ki} H_k. \tag{63}$$

Условия интегрируемости для этих уравнений выполнены в силу соотношений (27), и общее решение зависит от трех произвольных функций соответственно аргументов ρ, ρ_1

и ρ_2 (там же); можно, в частности, потребовать, чтобы

$$H = f(\rho) \quad \text{при } \rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 0,$$
$$H_1 = f_1(\rho_1) \quad \text{при } \rho = 0, \quad \rho_2 = 0,$$
$$H_2 = f_2(\rho_2) \quad \text{при } \rho_1 = 0, \quad \rho = 0,$$

где $f(\rho)$, $f_1(\rho_1)$, $f_2(\rho_2)$ — произвольные функции; каждой системе трех определенных функций f, f_1, f_2 соответствует единственное решение системы (63).

Два из уравнений (63) позволяют выразить H_1 и H_2 через H:

$$H_1 = \frac{1}{\beta_{10}} \frac{\partial H}{\partial \rho_1}, \qquad H_2 = \frac{1}{\beta_{20}} \frac{\partial H}{\partial \rho_2}. \tag{64}$$

Вставляя эти выражения в остальные уравнения (63), получаем следующую систему уравнений, которая может служить для определения H (см. Б и а н к и, Лекции по дифференциальной геометрии, стр. 495):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} &= \frac{\beta_{12}\beta_{20}}{\beta_{10}} \frac{\partial H}{\partial \rho_1} + \frac{\beta_{21}\beta_{10}}{\beta_{20}} \frac{\partial H}{\partial \rho_2}, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \rho_1 \partial \rho} &= \frac{\partial \ln \beta_{10}}{\partial \rho} \frac{\partial H}{\partial \rho_1} + \beta_{10}\beta_{01} H, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \rho_2 \partial \rho} &= \frac{\partial \ln \beta_{20}}{\partial \rho} \frac{\partial H}{\partial \rho_2} + \beta_{20}\beta_{02} H. \end{aligned} \tag{65}$$

Принимая во внимание условия $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ и соотношения (44), окончательно напишем предыдущие уравнения в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} &= \frac{\partial \ln \beta_{01}}{\partial \rho_2} \frac{\partial H}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \ln \beta_{02}}{\partial \rho_1} \frac{\partial H}{\partial \rho_2}, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \rho \partial \rho_1} &= \frac{\partial \ln \beta_{01}}{\partial \rho} \frac{\partial H}{\partial \rho_1} + \beta_{01}^2 H, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \rho \partial \rho_2} &= \frac{\partial \ln \beta_{02}}{\partial \rho} \frac{\partial H}{\partial \rho_2} + \beta_{02}^2 H. \end{aligned} \tag{65'}$$

Первое из этих уравнений при подстановке значений (54) для β_{01}^2, β_{02}^2 принимает вид

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \, \partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \, \partial v} \left\{ \frac{\dfrac{\partial H}{\partial u}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}} + \frac{\dfrac{\partial H}{\partial v}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}} \right\} \tag{66}$$

и, следовательно, совпадает с тангенциальным уравнением Лапласа для поверхностей $\rho = \mathrm{const}$ (см. часть I, § 12). Результат этот вполне согласуется с тем, что $-H$, как мы видели выше, есть основная функция второй дифференциальной формы для поверхностей $\rho = \mathrm{const}$.

Функция H вполне определяется начальными условиями

$$H = f(\rho) \text{ при } \rho_1 = 0, \ \rho_2 = 0,$$
$$\frac{\partial H}{\partial \rho_1} = \varphi(\rho_1) \text{ при } \rho = 0, \ \rho_2 = 0,$$
$$\frac{\partial H}{\partial \rho_2} = \psi(\rho_2) \text{ при } \rho = 0, \ \rho_1 = 0,$$

как это явствует из сделанного выше замечания об интегрировании системы (63) и из формул (64).

Отсюда можно заключить, что за начальную поверхность $\rho = 0$ первого семейства триортогональной системы S можем выбрать любую потенциальную поверхность с данным сферическим изображением линий кривизны (характеризуемых функцией λ). Действительно, основной функцией второй дифференциальной формы для этой поверхности служит значение $-H$ при $\rho = 0$; обозначая соответствующее значение H через $\bar{H}$ и замечая, что при $\rho = 0$ будет $u = \rho_1$, $v = \rho_2$, видим, что $\bar{H}$ удовлетворяет тангенциальному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial u \, \partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} \left\{ \frac{\dfrac{\partial \bar{H}}{\partial u}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}} + \frac{\dfrac{\partial \bar{H}}{\partial v}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}} \right\}$$

и начальным условиям

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial u} = \varphi(u) \qquad \text{при } v = 0,$$
$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial v} = \psi(v) \qquad \text{при } u = 0$$

и

$$\bar{H} = f(0) = C \quad \text{при} \quad u = 0, \quad v = 0.$$

Если $\varphi(u)$, $\psi(v)$ — произвольные функции и C — произвольное постоянное, то приведенными начальными условиями характеризуется самое общее решение тангенциального уравнения Лапласа и, следовательно, самая общая потенциальная поверхность данного сферического изображения (ср. часть I, § 15).

Таким образом, *если мы имеем произвольную потенциальную поверхность* Σ, *то всегда можем определить триортогональную систему* S *потенциального типа, в состав которой входит* Σ. Сферическое изображение всех поверхностей системы S, как мы видели, вполне определяется по данной поверхности Σ. Что касается до самой системы S, то она не вполне определяется по Σ, и совокупность всевозможных систем S, как это явствует из предыдущего, зависит от одной произвольной функции одного аргумента ($f(\rho)$ при сохранении прежних обозначений).

По определении величин H, H_1, H_2 координаты x, y, z точки пространства определяются как функции ρ, ρ_1, ρ_2 на основании соотношений (32) § 2 с помощью квадратур, а именно

$$x = \int H X \, d\rho + \int H_1 X_1 d\rho_1 + \int H_2 X_2 d\rho_2 \tag{67}$$

и аналогично для y и z.

Заметим еще, что шесть уравнений (63) после подстановки значений

$$H_i^2 = \frac{\partial \omega}{\partial \rho_i} \tag{16}$$

приводятся к трем уравнениям

$$\frac{\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \rho_i \partial \rho_k}}{\sqrt{\dfrac{\partial \omega}{\partial \rho_i} \dfrac{\partial \omega}{\partial \rho_k}}} = 2\beta_{ik}, \tag{68}$$

которые могут служить для определения основной функции ω системы S, а следовательно, и величин H_i.

При определении триортогональной системы по данным β_{ik} возможно в самом общем случае идти путем, отличным от пути, указанного Дарбу.

Обозначим через P, P_1, P_2 расстояния начала координат от трех касательных плоскостей системы S в точке

(x, y, z), т. е. положим вообще

$$P_i = X_i x + Y_i y + Z_i z. \tag{69}$$

Дифференцируя равенство (69) по ρ_k и принимая во внимание соотношения (12) § 1, а также очевидные равенства

$$X_i \frac{\partial x}{\partial \rho_k} + Y_i \frac{\partial y}{\partial \rho_k} + Z_i \frac{\partial z}{\partial \rho_k} = 0 \qquad (i \neq k), \tag{70}$$

получаем шесть уравнений

$$\frac{\partial P_i}{\partial \rho_k} = \beta_{ik} P_k, \tag{71}$$

которые могут служить для определения P, P_1, P_2, так как условия интегрируемости выполняются в силу соотношений (27). Координаты x, y, z могут быть затем найдены из равенств (69), откуда, очевидно, следует

$$x = PX + P_1X_1 + P_2X_2, \quad y = PY + P_1Y_1 + P_2Y_2, \quad z = PZ + P_1Z_1 + P_2Z_2. \tag{72}$$

Если бы мы продифференцировали равенства (72) по ρ, ρ_1, ρ_2, принимая во внимание уравнения (71) и соотношения (12), то убедились бы непосредственно, что равенства (72) определяют триортогональную систему данного сферического изображения. Таким образом, уравнения (71) представляют необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять расстояния P, P_1, P_2 касательных плоскостей от начала.

В общем случае эти уравнения отличны от уравнений (63), определяющих величины H_i; для триортогональных систем потенциального типа обе группы уравнений в силу условия $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ совпадают друг с другом. Исключая из системы (71) P_1 и P_2, приходим к трем уравнениям для P, которые могут быть получены из уравнений (65) заменой β_{ik} через β_{ki}. В случае потенциальной системы эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial\rho_1\partial\rho_2} &= \frac{\partial \ln \beta_{01}}{\partial\rho_2}\frac{\partial P}{\partial\rho_1} + \frac{\partial \ln \beta_{02}}{\partial\rho_1}\frac{\partial P}{\partial\rho_2}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial\rho\partial\rho_1} &= \frac{\partial \ln \beta_{01}}{\partial\rho}\frac{\partial P}{\partial\rho_1} + \beta_{01}^2 P, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial\rho\partial\rho_2} &= \frac{\partial \ln \beta_{02}}{\partial\rho}\frac{\partial P}{\partial\rho_2} + \beta_{02}^2 P, \end{aligned} \tag{73}$$

т. е. совпадают с уравнениями (65′); P_1 и P_2 определяются из равенств

$$P_1 = \frac{1}{\beta_{01}}\frac{\partial P}{\partial\rho_1}, \quad P_2 = \frac{1}{\beta_{02}}\frac{\partial P}{\partial\rho_2}. \tag{74}$$

Между величинами H, H_1, H_2, с одной стороны, и P, P_1, P_2, с другой, в случае потенциальной системы существуют простые соотношения, которые можем получить следующим образом: подвергаем обе части равенства (69) операции δ; тогда, принимая во внимание формулы (39) § 2 и замечая, что $\delta X_i = \delta Y_i = \delta Z_i = 0$, получаем

$$\delta P_i = X_i \sum_{j=0}^{2} H_j X_j + Y_i \sum_{j=0}^{2} H_j Y_j + Z_i \sum_{j=0}^{2} H_j Z_j.$$

На основании известных соотношений между косинусами трех взаимно ортогональных направлений коэффициенты при H_j для $j \neq i$ в правой части предыдущего равенства исчезают, а коэффициент при H_i равен 1, и мы получаем окончательно

$$H_i = \delta P_i \qquad (i = 0, 1, 2). \tag{75}$$

Возможно вывести эти соотношения из чисто геометрических соображений, принимая во внимание, что нормальное расстояние поверхности $\rho_i = \text{const}$ от бесконечно близкой поверхности того же семейства равняется $H_i d\rho_i$ и что, с другой стороны, оно должно с точностью до бесконечно малых высшего порядка совпадать с расстоянием между касательными плоскостями к упомянутым поверхностям в точках их пересечения с одной и той же траекторией, т. е. должно равняться $\delta P_i \cdot d\rho_i$.

При определении триортогональных систем самого общего вида по данному сферическому изображению нам приходится определять одну из функций H_i или P_i из системы линейных уравнений, например H, из системы (65) или P из аналогичной системы, получаемой заменой β_{ik} через β_{ki}. Допустим, что мы имеем две триортогональные системы S_1 и S_2 одного сферического изображения, другими словами, имеем два решения $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ системы

(65) или два решения $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ уравнений, определяющих P. Из формы этих уравнений явствует, что решением их будет служить также $H = C_1H^{(1)} + C_2H^{(2)}$ или $P = C_1P^{(1)} + C_2P^{(2)}$, где C_1, C_2 — постоянные. Пользуясь соотношениями (64) или (74), легко убеждаемся вообще в существовании равенств

$$H_i = C_1H_i^{(1)} + C_2H_i^{(2)}, \qquad P_i = C_1P_i^{(1)} + C_2P_i^{(2)} \tag{76}$$

для $i = 0, 1, 2$, где значками ${}^{(1)}$ и ${}^{(2)}$ отмечены величины, относящиеся к системам S_1 и S_2 и где H_i или P_i определяют новую триортогональную систему S. Обозначая координаты точки пространства по отношению к системам S, S_1, S_2 соответственно через x, y, z, через x_1, y_1, z_1 и через x_2, y_2, z_2, получаем из формул (67) или (72)

$$x = C_1x_1 + C_2x_2, \qquad y = C_1y_1 + C_2y_2, \qquad z = C_1z_1 + C_2z_2. \tag{77}$$

Поверхности трех семейств системы S получаются, очевидно, геометрическим сложением соответственных поверхностей систем S_1 и S_2 (см. часть I, § 15). Рассуждения наши, очевидно, сохраняют силу для любого числа систем одного сферического изображения. Таким образом, *если имеем несколько триортогональных систем S_i с общим сферическим изображением, то, складывая их геометрически, получаем новую систему S того же сферического изображения.* Соответственными точками при этом «сложении» считаются те, в которых нормали параллельны.

Совершенно сходным образом мы можем распространить на триортогональные системы и другие результаты § 15 части I; а именно легко можем доказать, что если имеем триортогональную систему S данного сферического изображения, зависящую от произвольного параметра σ, и если обозначим координаты точки пространства по отношению к этой системе через x, y, z, то формулы

$$x' = \frac{\partial x}{\partial \sigma}, \qquad y' = \frac{\partial y}{\partial \sigma}, \qquad z' = \frac{\partial z}{\partial \sigma}, \tag{78}$$

$$x'' = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} xf(\sigma)\,d\sigma, \qquad y'' = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} yf(\sigma)\,d\sigma, \qquad z'' = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} zf(\sigma)\,d\sigma, \tag{79}$$

где $f(\sigma)$ — произвольная функция аргумента σ, определяют новые триортогональные системы S' и S'' того же сферического изображения. Формулы (78) и (79), очевидно, могут быть получены переходом к пределу из формул «сложения».

§ 5. Ряд триортогональных систем потенциального типа, производных данной системы

Если мы имеем потенциальную систему S, то имеем вместе с тем две системы решений уравнений

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \rho_i} = \beta_{ik}\theta_k,$$

а именно $\theta_i = H_i$ и $\theta_i = P_i$. Поэтому мы можем построить две потенциальные системы S_1 и S_{-1} того же сферического изображения, положив для первой

$$P_i^{(1)} = H_i, \tag{80}$$

а для второй

$$H_i^{(-1)} = P_i. \tag{81}$$

Продолжая преобразование в ту и в другую сторону, получим ряд потенциальных систем

$$\ldots, \quad S_{-2}, \quad S_{-1}, \quad S, \quad S_1, \quad S_2, \quad \ldots \tag{82}$$

одного сферического изображения, из которых каждая следующая S_{k+1} получается из предыдущей S_k с помощью формул

$$P_i^{(k+1)} = H_i^{(k)}. \tag{83}$$

Так как функция $-H_i$ служит основной функцией второй дифференциальной формы для поверхностей $\rho_i = \mathrm{const}$, то, очевидно, поверхности соответствующих семейств для систем ряда (82) образуют ряды положительных и отрицательных производных (относительно начала) от поверхностей системы S (см. часть I, § 18). Будем систему S_k ряда (82) называть производной порядка k системы S относительно начала координат.

На основании формул (75) предшествующего параграфа мы можем равенства (83) написать в следующем виде:

$$P_i^{(k+1)} = \delta P_i^{(k)}. \tag{84}$$

Производя над обеими частями равенств (73) операцию δ, мы получили бы аналогично

$$H_i^{(k+1)} = \delta H_i^{(k)}. \tag{85}$$

Отмечая координаты точки пространства по отношению к системам S_1 и S_{k+1} соответствующими значками и пользуясь формулами (72) § 4 и соотношениями (84), имеем

$$x_{k+1} = \sum_i X_i \delta P_i^{(k)} = \delta \sum_i X_i P_i^{(k)} = \delta x_k \tag{86}$$

и аналогично $y_{k+1} = \delta y_k$, $z_{k+1} = \delta z_k$.

В частности, для S_1 имеем

$$x_1 = \delta x, \quad y_1 = \delta y, \quad z_1 = \delta z. \tag{87}$$

Возводя в квадрат и складывая, получаем

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r_1^2 = \delta\omega,$$

откуда

$$r_1 = \sqrt{\delta\omega}. \tag{88}$$

Формулы (87) показывают, что радиусы-векторы системы S_1 получаются как геометрические производные радиусов-векторов системы S при передвижении точки по траектории группы. Сопоставляя формулы (87) и (88) с формулами, данными в конце § 2, мы придем к равносильному результату, а именно легко усмотрим, что радиус-вектор системы S_1 параллелен касательной к траектории группы в системе S и пропорционален бесконечно малому расстоянию между смежными поверхностями системы S по направлению траектории группы. Каждая поверхность системы S имеет вполне определенную первую производную, определяемую с помощью вышеуказанного построения; но так как данная потенциальная поверхность Σ может входить в различные потенциальные системы, то и первых производных Σ_1 для нее может существовать бесчисленное множество, а именно ∞^1, как мы видели в § 18 части I,

так как в формулы, определяющие Σ_1, входит основная функция второй дифференциальной формы поверхности Σ, определяющаяся только с точностью до произвольного постоянного.

Возвращаясь к триортогональным системам, заметим, что мы могли бы рассматривать их производные не относительно начала, а относительно любой точки; но для положительных производных такое обобщение не имеет существенного значения, так как соответствует лишь передвижению систем в пространстве; что касается до отрицательных производных, то мы могли бы, так же как в § 18 части I, легко убедиться, что производные системы S относительно произвольной точки складываются геометрически из производных относительно начала данной системы S и относительно некоторой системы $\bar{S}$, соответствующей предположению $H_i = aX_i + bY_i + cZ_i$. Система $\bar{S}$, очевидно, состоит из трех семейств того типа, который мы исследовали в § 17 части I.

Производные (относительно начала) данной потенциальной поверхности Σ играют важную роль при построении потенциальной системы S, для которой Σ служит начальной поверхностью одного из семейств, например поверхностью $\rho = 0$. Предполагая координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ точки пространства относительно системы S выраженными в виде функции от $u = \rho_1 - \rho$, $v = \rho_2 - \rho$ и ρ и замечая, что операция дифференцирования по ρ совпадает с операцией δ, так как $\rho_1 = u + \rho$, $\rho_2 = v + \rho$, мы можем разложить $\bar{x}$ в ряд вида

$$\bar{x} = x + x' \frac{\rho}{1} + x'' \frac{\rho^2}{1 \cdot 2} + \ldots, \tag{89}$$

где x есть значение $\bar{x}$ для $\rho = 0$ и где через $x^{(i)}$ обозначен результат операции $\delta^i \bar{x}$ при $\rho = 0$; аналогичные ряды имеем для $\bar{y}$ и $\bar{z}$. Координатами x, y, z определяется поверхность Σ системы, соответствующая $\rho = 0$; координатами $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$, очевидно, определяются положительные производные поверхности относительно начала. Таким образом, если мы знаем все положительные производные Σ_i поверхности Σ, то с помощью ряда (89) и аналогичных рядов для $\bar{y}$ и $\bar{z}$ определим ортогональную систему S, в состав которой входит Σ. При определении каждой следующей производной вводится новое произвольное постоянное (см. выше); таким образом, система S зависит от ∞^1 произвольных постоянных. Если мы пожелаем явно ввести их в наши ряды, то, сохраняя обозначения x', x'', x''', ... для координат точек производных поверхности Σ, соответствующих какому-нибудь *определенному* выбору основной функции второй дифференциальной формы, можем написать общие выражения этих же координат в следующем виде:

$$x' + c_0X, \quad x'' + c_0X' + c_1X, \ \dots,$$

где X, X', X'' — координаты точек сферы Гаусса и ее производных (см. часть I, § 18). Равенство (89) после некоторых преобразований принимает вид

$$\bar{x} = x + x'\cdot\frac{\rho}{1} + x''\cdot\frac{\rho^2}{1\cdot 2} + \dots$$

$$\dots + \int_0^\rho \left[X + X'\cdot\frac{\rho - t}{1} + X''\cdot\frac{(\rho - t)^2}{1\cdot 2} + \dots\right] f(t)\,dt, \qquad (90)$$

где

$$f(t) = c_0 + c_1\frac{t}{1} + c_2\frac{t^2}{1\cdot 2} + \dots$$

есть произвольная функция; аналогичные формулы имеем для $\bar{y}$ и $\bar{z}$.

Глава II

ГЛАВНЕЙШИЕ ТИПЫ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

§ 6. Потенциальные системы, допускающие группу поступательных перемещений

Уравнения (63) § 4, определяющие величины H_i по данному сферическому изображению, очевидно, допускают решения

$$H_i = aX_i + bY_i + cZ_i, \qquad (91)$$

как это явствует из второй группы соотношений (12) § 1, если будем иметь, кроме того, в виду, что для потенциальных систем $\beta_{ik} = \beta_{ki}$. Соответственным выбором осей координат равенства (91) можем всегда привести к виду

$$H_i = cZ_i \qquad (i = 0,\ 1,\ 2) \qquad (92)$$

и даже без ущерба для общности можем предположить $c = 1$, так как это соответствует лишь подобному изменению всех поверхностей системы. Функция $H_i = Z_i$, которая, будучи взята со знаком минус, служит основной функцией второй дифференциальной формы для поверхностей $\rho_i = \mathrm{const}$ (см. § 2), по умножении на $d\rho$ определяет бесконечно малое расстояние между поверхностями семейства; следовательно, на основании результатов § 17 части I, каждое из трех семейств рассматриваемой триортогональной системы S образуется поступательным перемещением одной начальной поверхности по оси z. Группа преобразований Комбескюра, допускаемых системой S, в данном случае состоит из поступательных перемещений по оси z; траекториями группы служат прямые, параллельные оси z; семейство поверхностей $\omega = \mathrm{const}$ состоит из параллельных плоскостей. Подставляя значения (92) величин H_i в равенства (39) § 2, получаем $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = c$, откуда

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v) + c\rho. \qquad (93)$$

Равенства (93) вполне подтверждают все предыдущие результаты.

Для построения триортогональной системы S рассматриваемого типа достаточно знать начальную поверхность Σ одного из трех семейств; очевидно, Σ может быть произвольной потенциальной поверхностью того типа, который был изучен в начале § 17 части I.

Если мы желаем получить *всевозможные* потенциальные системы S данного сферического изображения, допускающие группу поступательных перемещений, то мы должны определить три системы, соответствующие трем различным предположениям: $H_i = X_i$, $H_i = Y_i$ и $H_i = Z_i$. Общая система получается геометрическим сложением этих трех.

Триортогональные системы, допускающие группу поступательных перемещений, упоминаются в заметке Пето (Compt. rend. Acad. Sci. Paris, 1891), как об этом уже было сказано в § 17 части I.

§ 7. Потенциальные системы, допускающие группу гомотетических преобразований

Уравнения (63) и (71) § 4, определяющие величины H_i и P_i, совпадают между собой для потенциальных систем, как мы это видели выше; следовательно, возможны потенциальные системы, определяемые условиями $H_i = P_i$ или в несколько более общем виде

$$H_i = \sigma P_i \qquad (i = 0,\ 1,\ 2), \tag{94}$$

где σ — постоянная величина. Изменяя параметры ρ, ρ_1, ρ_2 трех семейств системы на постоянный множитель, всегда можем сделать $\sigma = 1$ (см. § 2); но если сферическое изображение системы дано и, следовательно, выбор потенциальных параметров ρ_i установлен, то соотношения (94) следует предполагать в общем виде, приписывая σ всевозможные значения. Принимая во внимание значение функции H_i для поверхностей $\rho_i = \text{const}$, непосредственно видим, что все поверхности системы принадлежат к числу потенциальных поверхностей «гомотетического» типа, исследованных в § 17 части I; точно так же легко убеждаемся, что каждое из трех семейств системы получается гомотетическим изменением одной начальной поверхности, т. е. триортогональная система принадлежит к числу систем, которые упоминают Пето в своей заметке (Compt. rend. Acad. Sci. Paris, 1891) и которые были отчасти исследованы в § 17 части I. Очевидно, что группа преобразований Комбескюра, допускаемая системой подобного типа, состоит из гомотетических преобразований с центром подобия в начале координат; траекториями группы служат прямые, проходящие через начало; семейство поверхностей $\omega = \text{const}$ состоит из концентрических сфер. Чтобы построить потенциальную систему S такого «гомотетического» типа, очевидно, достаточно знать одну потенциальную поверхность Σ гомотетического типа; подвергая Σ гомотетическому изменению (при центре подобия в начале координат), получаем одно из семейств системы S; остальные два семейства, как известно, вполне определяются по первому и точно так же состоят из гомотетических поверхностей (ср. часть I, § 17).

Все эти результаты можем получить и непосредственно из соотношений (94) и общих соотношений, выведенных

нами для потенциальных систем. Заменяя величины H_i их выражениями (94) в соотношениях (75) § 4, имеем

$$\delta P_i = \sigma P_i \qquad (i = 0,\ 1,\ 2),$$

откуда

$$P_i = e^{\sigma\rho} p_i(u, v), \tag{95}$$

а следовательно,

$$H_i = \sigma P_i = e^{\sigma\rho} h_i(u, v), \tag{96}$$

причем мы положили

$$h_i(u, v) = \sigma p_i(u, v). \tag{97}$$

Пользуясь формулами (72) § 4, получаем в силу равенств (85)

$$x = e^{\sigma\rho}\xi(u, v), \quad y = e^{\sigma\rho}\eta(u, v), \quad z = e^{\sigma\rho}\zeta(u, v). \tag{98}$$

Так как

$$e^{\sigma\rho} = e^{\sigma\rho_1}, \quad e^{-\sigma\rho} = e^{\sigma\rho_1} e^{-\sigma v},$$

то из равенств (98) легко усматриваем, что все три семейства системы состоят из гомотетических поверхностей, причем лучи, на которых лежат соответственные точки всех поверхностей системы, определяются уравнениями

$$u = \rho_1 - \rho = \text{const}, \quad v = \rho_2 - \rho = \text{const}.$$

Полагая $\rho = 0$ в равенствах (95), (96), (98), имеем

$$P_i = p_i, \quad H_i = h_i, \quad x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta;$$

следовательно, функции $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$, $\zeta(u, v)$ представляют собой выражения координат точек поверхности $\rho = 0$ через потенциальные параметры u, v (при $\rho = 0$ будет $u = \rho_1$, $v = \rho_2$), а функции $p_i(u, v)$, $h_i(u, v)$ дают значения величин P_i, H_i для той же поверхности; между прочим, функция $-h(u, v)$ служит основной функцией второй дифференциальной формы для поверхности $\rho = 0$. Если нам дана произвольная поверхность Σ гомотетического типа уравнениями

$$x = \xi(u, v), \quad y = \eta(u, v), \quad z = \zeta(u, v), \tag{99}$$

где u, v — потенциальные параметры линий кривизны, то, принимая Σ за поверхность $\rho = 0$ триортогональной системы S гомотетического типа, получим, согласно предыдущему, выражения координат x, y, z точки пространства как функций параметров ρ, ρ_1, ρ_2 системы S, полагая в равенствах (99) $u = \rho_1 - \rho$, $v = \rho_2 - \rho$ и умножая ξ, η, ζ на $e^{\sigma\rho}$; таким образом, получим равенства (98), определяющие систему S, в состав которой входит поверхность Σ. Интересно отметить, что по данной поверхности Σ определяются без всякого интегрирования все три семейства системы, между тем как в общем случае для определения двух семейств триортогональной системы по данному первому семейству необходимо проинтегрировать обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Если бы поверхность Σ была дана в произвольных параметрах, хотя бы, в частности, уравнением в декартовых координатах, то для построения системы S потребовались бы только квадратуры. Действительно, во-первых, определение линий кривизны поверхности Σ сводится к квадратурам, как это было показано в § 13 части I для всякой потенциальной поверхности. Во-вторых, если линейный элемент поверхности Σ в произвольных параметрах α, β линий кривизны определяется равенством

$$ds^2 = E\,d\alpha^2 + G\,d\beta^2,$$

то необходимо имеем

$$\frac{\partial E}{\partial \beta} : \frac{\partial G}{\partial \alpha} = A(\alpha) : B(\beta),$$

и потенциальные параметры u, v определяются из условия

$$\frac{\partial \{E\alpha'^2(u)\}}{\partial v} = \frac{\partial \{G\beta'^2(v)\}}{\partial u}$$

или

$$\frac{\partial E}{\partial \beta}\beta'(v)\,\alpha'^2(u) = \frac{\partial G}{\partial \alpha}\alpha'(u)\,\beta'^2(v)$$

или, наконец,

$$A(\alpha)\,\alpha'(u) = B(\beta)\,\beta'(v);$$

обе части последнего равенства, очевидно, должны равняться некоторому постоянному c, и, таким образом, получаем

$$c\,du = A(\alpha)\,d\alpha, \qquad c\,dv = B(\beta)\,d\beta,$$

откуда u и v определяются квадратурами.

Для определения всех потенциальных систем гомотетического типа, соответствующих данным значениям величин $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, т. е. имеющих данное сферическое изображение, мы можем заменить в уравнениях (71) § 4 величины P_i их выражениями (95). Исключая из уравнений, к которым мы придем, функции p_1 и p_2, получим для определения $p(u, v)$ три уравнения, совпадающих с уравнениями (92) § 17 части I. Этого и следовало ожидать, так как $p(u, v)$ есть расстояние касательной плоскости поверхности $\rho = 0$ от начала координат. Таким образом, согласно результатам § 17 части I, для каждой системы значений $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ будем иметь ∞^1 систем гомотетического типа, зависящих от параметра σ и трех постоянных, вводимых интегрированием обыкновенного дифференциального линейного уравнения третьего порядка, к которому приводится система, определяющая $p(u, v)$ (§ 17 части I). Выбирая три независимых решения упомянутого уравнения третьего порядка, получаем три системы гомотетического типа S_1, S_2, S_3, зависящие от параметра σ; общая система S получается геометрическим сложением систем S_1, S_2, S_3.

Равенства (94), послужившие нам для определения систем гомотетического типа, по-видимому, допускают обобщение; а именно можно положить

$$H_i = \sigma P_i - aX_i - bY_i - cZ_i \qquad (i = 0, 1, 2), \qquad (100)$$

где a, b, c — постоянные, так как X_i, Y_i, Z_i удовлетворяют уравнениям (63) § 4. Нетрудно, однако, убедиться, что мы не получим существенно новых потенциальных систем. Действительно, выражение

$$P_i - \frac{a}{\sigma}X_i - \frac{b}{\sigma}Y_i - \frac{c}{\sigma}Z_i,$$

очевидно, определяет расстояние касательной плоскости поверхности $\rho_i = \text{const}$ от точки $\left(\frac{a}{\sigma}, \frac{b}{\sigma}, \frac{c}{\sigma}\right)$; перенося начало координат в эту точку и замечая, что при этом величины H_i не изменяются, приведем равенства (100) к прежнему виду (94). Таким образом, соотношения (100) определяют системы гомотетического типа, для которых центром подобия служит точка, отличная от начала координат; очевидно, эти системы отличаются от исследованных нами только положением в пространстве.

Удаляя центр подобия в бесконечность, мы обратим траектории группы, допускаемой системой, в семейство параллельных прямых; таким образом, системы, исследованные нами в § 6, можно рассматривать как предельные случаи систем гомотетического типа.

Нетрудно убедиться, что системы гомотетического типа и системы, исследованные в § 6,— единственные потенциальные системы, для которых траекториями группы служат прямые линии. Действительно, если семейство траекторий $u=\mathrm{const}$, $v=\mathrm{const}$ состоит из прямых, то мы должны иметь для этого семейства $\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d^2y}{ds^2}=\frac{d^2z}{ds^2}=0$. Пользуясь равенствами (41) § 2, имеем отсюда

$$\sum\delta\left(\frac{H_i}{\sqrt{\delta\omega}}\right)\cdot X_i=0,\qquad \sum\delta\left(\frac{H_i}{\sqrt{\delta\omega}}\right)\cdot Y_i=0,$$
$$\sum\delta\left(\frac{H_i}{\sqrt{\delta\omega}}\right)\cdot Z_i=0.$$

Так как детерминант, составленный из девяти косинусов X_i, Y_i, Z_i, равен 1, то из предыдущих равенств следует

$$\delta\left(\frac{H_i}{\sqrt{\delta\omega}}\right)=0\qquad (i=0,\ 1,\ 2),$$

откуда

$$\frac{H_i}{\sqrt{\delta\omega}}=\varphi_i(u,\ v).$$

Так как $\delta\omega=H^2+H_1^2+H_2^2$, то полученным соотношениям можно удовлетворить или полагая все три величины H_i функциями u, v, или предполагая лишь

$$H:H_1:H_2=\varphi(u,\ v):\varphi_1(u,\ v):\varphi_2(u,\ v).$$

В первом случае линейный элемент пространства сохраняет свой вид при всех преобразованиях группы, соответствующей данной системе; следовательно, группа эта есть группа перемещений, а так как она, кроме того, должна состоять из преобразования Комбескюра, то, очевидно, мы имеем в этом случае триортогональную систему, допускающую группу поступательных перемещений. Во втором случае преобразования группы, соответствующей данной системе, суть преобразования конформные. Конформные преобразования пространства исчерпываются инверсией, гомотетическим преобразованием и перемещением; так как касательные плоскости поверхностей системы должны оставаться параллельными при всех преобразованиях группы, то группа эта, очевидно, может быть лишь группой поступательных перемещений или группой гомотетических преобразований (с общим центром). Первое предположение приводит к рассмотренному уже случаю; второе ведет к системам гомотетического типа.

К тем же системам мы придем, решая следующий вопрос: в каком случае одной и той же группе преобразований соответствует более одной потенциальной системы? Заметим предварительно, что касательные плоскости трех поверхностей потенциальной системы во всякой точке пространства образуют систему трех взаимно перпендикулярных плоскостей, сохраняющих это свойство при всех преобразованиях группы. При произвольном преобразовании пространства в каждой точке определяется, вообще говоря, единственная система трех взаимно ортогональных плоскостей, сохраняющих это свойство при преобразовании; следовательно, данной группе преобразований может, вообще говоря, соответствовать единственная потенциальная система. Исключение имеем лишь в том случае, когда данная группа есть группа конформная, так как при конформном преобразовании все прямые углы сохраняют свою величину. Согласно предыдущему, необходимо предположить, в частности, что данная группа есть группа поступательных перемещений или группа гомотетических преобразований. В первом случае данной группе соответствуют всевозможные потенциальные системы, рассмотренные нами в § 6 и соответствующие данному направлению перемещения, во втором случае — всевозможные системы гомотетического типа с данным центром подобия.

§ 8. Потенциальные системы, допускающие группу преобразований с плоскими траекториями

Определим потенциальные системы, для которых траектории $u=\mathrm{const}$, $v=\mathrm{const}$ — плоские кривые; при этом, само собою разумеется, оставляем в стороне уже рассмотренный случай, когда траектории, в частности,— прямые линии.

Кривизна кручения T линий $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ в рассматриваемом случае должна равняться нулю, и это есть условие не только необходимое, но и достаточное. Пользуясь выведенным выше выражением для T ((43) § 2), получаем

$$\begin{vmatrix} H & H_1 & H_2 \\ \delta H & \delta H_1 & \delta H_2 \\ \delta^2 H & \delta^2 H_1 & \delta^2 H_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Из равенства нулю детерминанта заключаем, что между элементами трех столбцов существует одно и то же линейное соотношение, которое можем предположить в виде

$$\delta^2 H_i = a\delta H_i + bH_i \qquad (i = 0, 1, 2), \tag{101}$$

так как, если бы мы допустили, что в него не входит $\delta^2 H_i$, то пришли бы к системам гомотетического типа или к системам, допускающим группу поступательных перемещений. Дифференцируя равенство (101) по ρ_k $(k \neq i)$ и замечая, что операции δ и $\frac{\partial}{\partial \rho_k}$ переместительны, получаем в силу соотношений (63)

$$\frac{\partial a}{\partial \rho_k}\delta H_i + \frac{\partial b}{\partial \rho_k}H_i = 0,$$

где $i \neq k$ и оба индекса принимают значения 0, 1, 2. Из последних равенств непосредственно следует

$$\frac{\partial a}{\partial \rho_k} = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial \rho_k} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2),$$

так как в противном случае мы бы пришли к системам гомотетического типа. Таким образом, a и b суть постоянные величины, и уравнение (101) дает после интегрирования

$$H_i = e^{\sigma_1\rho}h_i(u, v) + e^{\sigma_2\rho}h_i'(u, v), \tag{102}$$

где σ_1 и σ_2 — корни определяющего уравнения

$$\sigma^2 = a\sigma + b. \tag{103}$$

Вставляя выражения H_i в уравнения (63) § 4, легко убеждаемся, что решениями этих уравнений должны в отдельности служить $H_i = e^{\sigma_1\rho}h_i$ и $H_i = e^{\sigma_2\rho}h_i'$. Таким образом, система S, соответствующая значениям (102) функций H_i, получается геометрическим сложением двух систем, соответствующих значениям тех же функций: $H_i = e^{\sigma_1\rho}h_i$ и $H_i = e^{\sigma_2\rho}h_i'$; эти последние системы, очевидно,— системы гомотетического типа. Для координат x, y, z точки пространства получаем следующие выражения в функции параметров системы S:

$$\begin{aligned} x &= e^{\sigma_1\rho}\xi(u, v) + e^{\sigma_2\rho}\xi'(u, v), \\ y &= e^{\sigma_1\rho}\eta(u, v) + e^{\sigma_2\rho}\eta'(u, v), \\ z &= e^{\sigma_1\rho}\zeta(u, v) + e^{\sigma_2\rho}\zeta'(u, v). \end{aligned} \tag{104}$$

Постоянным σ_1 и σ_2 можем приписывать всевозможные значения, так как коэффициенты a и b уравнения (103) остаются совершенно произвольными. Из вида формул (104) непосредственно явствует, что кривые $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ плоские, и плоскости их проходят через начало координат; если σ_1/σ_2 есть число рациональное, то упомянутые кривые — алгебраические.

В частности, мы можем предположить, что один из корней уравнения (103) равен нулю; тогда имеем

$$H_i = e^{\sigma\rho}h_i(u, v) + h_i'(u, v) \tag{105}$$

и система S получается сложением системы гомотетического типа и системы, допускающей группу поступательных перемещений. Выбирая направление этих перемещений за направление оси z, получаем для координат точки пространства следующие выражения:

$$\begin{gathered} x = e^{\sigma\rho}\xi(u, v) + \xi'(u, v), \quad y = e^{\sigma\rho}\eta(u, v) + \eta'(u, v), \\ z = e^{\sigma\rho}\zeta(u, v) + \zeta'(u, v) + \rho. \end{gathered} \tag{106}$$

Кривые $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ в этом случае — необходимо трансцендентные; плоскости их параллельны оси z.

Допустим, наконец, что корни определяющего уравнения (103) равные. В таком случае имеем

$$H_i = e^{\sigma\rho}h_i''(u, v) + \rho e^{\sigma\rho}h_i(u, v) \qquad (i = 0, 1, 2). \tag{107}$$

Вставляя полученные выражения H_i в уравнения (63) § 4 и приравнивая в двух частях каждого из этих уравнений члены, содержащие множитель $\rho e^{\sigma\rho}$, легко убеждаемся, что решениями уравнений (63) служат в отдельности выражения $e^{\sigma\rho}h_i(u, v)$. Соответствующая этим решениям потенциальная система есть, очевидно, система гомотетического типа; параметр σ, от которого зависит вид системы, необходимо входит в состав функций $h_i(u, v)$, как это явствует, например, из результатов § 7 или § 17 части I. Равенства (107) можем, очевидно, написать в следующем виде:

$$H_i = e^{\sigma\rho}h_i'(u, v) + \frac{\partial}{\partial\sigma}\{e^{\sigma\rho}h_i(u, v)\}, \tag{108}$$

причем

$$h_i''(u, v) - \frac{\partial h_i(u, v)}{\partial\sigma} = h_i'(u, v) \qquad (i = 0, 1, 2).$$

Предположив

$$H_i = \frac{\partial}{\partial\sigma}\{e^{\sigma\rho}h_i(u, v)\} \qquad (i = 0, 1, 2),$$

мы удовлетворим уравнениям (63), так как выражения $e^{\sigma\rho}h_i(u, v)$ служат решениями этих уравнений для всевозможных значений σ; отсюда заключаем, что и выражения $e^{\sigma\rho}h_i'(u, v)$ служат решениями тех же уравнений.

Таким образом, система S, соответствующая значениям (107) или (108) функций H_i, получается геометрическим сложением системы, соответствующей предположению

$$H_i = e^{\sigma\rho}h_i'(u, v) \qquad (i = 0, 1, 2),$$

и системы, соответствующей предположению

$$H_i = \frac{\partial}{\partial\sigma}\{e^{\sigma\rho}h_i(u, v)\} \qquad (i = 0, 1, 2).$$

Первая из этих систем есть система гомотетического типа; вторая получается из подобной же системы дифференцированием по параметру σ (см. § 4). Обозначая через x, y, z и через x_1, y_1, z_1 выражения координат точки пространства как функций параметров ρ, ρ_1, ρ_2 двух гомотетических систем, получаемых соответственно в предположении $H_i = e^{\sigma\rho}h_i(u, v)$ и $H_i = e^{\sigma\rho}h_i'(u, v)$, имеем для системы S

следующие выражения координат:

$$\bar{x} = x_1 + \frac{\partial x}{\partial\sigma}, \quad \bar{y} = y_1 + \frac{\partial y}{\partial\sigma}, \quad \bar{z} = z_1 + \frac{\partial z}{\partial\sigma}. \tag{109}$$

Заменяя x, y, z и x_1, y_1, z_1 их выражениями через ρ, ρ_1, ρ_2, получаем для $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ выражения следующего вида:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= e^{\sigma\rho}\xi(u, v) + \rho e^{\sigma\rho}\xi_1(u, v), \\ \bar{y} &= e^{\sigma\rho}\eta(u, v) + \rho e^{\sigma\rho}\eta_1(u, v), \\ \bar{z} &= e^{\sigma\rho}\zeta(u, v) + \rho e^{\sigma\rho}\zeta_1(u, v). \end{aligned} \tag{110}$$

Из равенств (110) непосредственно видно, что кривые $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ трансцендентные и что плоскости их проходят через начало координат.

Из всего предыдущего явствует, что определение всевозможных потенциальных систем с плоскими траекториями, соответствующих данным значениям $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, всецело сводится к изысканию систем гомотетического типа и систем, допускающих группу поступательных перемещений.

§ 9. Потенциальные системы, для которых ряд производных систем есть ряд периодический

В § 5 мы видели, как для произвольной потенциальной системы S возможно построить бесконечный ряд систем того же типа

$$\ldots, \quad S_{-2}, \quad S_{-1}, \quad S, \quad S_1, \quad S_2, \quad \ldots \tag{111}$$

— производных систем S относительно начала. Пусть n-й член этого ряда S_n совпадает с S; тогда вообще S_{n+k} будет совпадать с S_k, т. е. ряд положительных производных будет периодический, так как каждая система S_{i+1} получается из системы S_i одним и тем же преобразованием. Что касается до отрицательных производных, то определение их зависит от квадратур, которые вводят произвольные постоянные; но всегда можно этим постоянным дать такие значения, чтобы периодичность сохранялась для всего ряда (111). Действительно, система S может быть рассматриваема как n-я производная системы S_{-n}, а так как, с другой стороны, S совпадает с S_n, то, следовательно, имеем право считать систему S_{-n} совпадающей с S;

точно так же вообще можем принять, что S_k совпадает с S_{k+n}.

Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы ряд (111) был периодический с периодом в n членов, согласно результатам § 5, состоит в том, чтобы для системы S имели место соотношения

$$\delta^n P_i = P_i \qquad (i = 0, 1, 2). \tag{112}$$

Если не будем считать существенно различными две триортогональные системы, из которых одна получается одним и тем же подобным изменением всех поверхностей другой, то можем соотношения (112) заменить более общими:

$$\delta^n P_i = \sigma P_i \qquad (i = 0, 1, 2), \tag{113}$$

где σ — некоторое постоянное. Можно также пользоваться соотношениями

$$\delta^n x = \sigma x, \qquad \delta^n y = \sigma y, \qquad \delta^n z = \sigma z, \tag{114}$$

вполне равносильными предыдущим. В случае $n = 1$ имеем

$$\delta x = \sigma x, \qquad \delta y = \sigma y, \qquad \delta z = \sigma z,$$

откуда

$$x = e^{\sigma\rho}\xi(u, v), \qquad y = e^{\sigma\rho}\eta(u, v), \qquad z = e^{\sigma\rho}\zeta(u, v);$$

таким образом, приходим к системам гомотетического типа.

В общем случае из уравнений (113) получаем

$$P_i = e^{\alpha_1\rho}p_i^{(1)}(u, v) + e^{\alpha_2\rho}p_i^{(2)}(u, v) + \ldots + e^{\alpha_n\rho}p_i^{(n)}(u, v), \tag{115}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — n различных значений корня $\sqrt[n]{\sigma}$. Вставляя выражения (115) в уравнения (71), легко убеждаемся, что им можно удовлетворить, полагая

$$P_i = e^{\alpha_k\rho}p_i^{(k)}(u, v) \qquad (i = 0, 1, 2). \tag{116}$$

Таким образом, система S получается геометрическим сложением систем, определяемых равенствами (116) ($k = 1, 2, \ldots, n$); эти последние системы, очевидно, все гомотетического типа.

Из числа значений $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ корня $\sqrt[n]{\sigma}$ при $n > 2$ всегда есть мнимые, а именно или все (при σ отрицательном и n четном), или все, за исключением одного (при n нечетном) или двух (при n четном и σ положительном); несмотря на это, выражения (115) могут приводить к действительным системам S, так как мнимые значения $\sqrt[n]{\sigma}$ группируются в попарно сопряженные и так как из способа определения систем гомотетического типа явствует, что функции $p_i^{(k)}(u, v)$ и $p_i^{(l)}(u, v)$, соответствующие сопряженным значениям α_k и α_l корня $\sqrt[n]{\sigma}$, могут быть выбраны так, чтобы они были попарно сопряжены одна другой.

Вставляя выражения (115) в формулы (72) или непосредственно пользуясь соотношениями (114), получаем следующие выражения координат точки пространства в виде функций параметров системы S:

$$\begin{aligned} x &= e^{\alpha_1\rho}\xi_1(u, v) + e^{\alpha_2\rho}\xi_2(u, v) + \ldots + e^{\alpha_n\rho}\xi_n(u, v), \\ y &= e^{\alpha_1\rho}\eta_1(u, v) + e^{\alpha_2\rho}\eta_2(u, v) + \ldots + e^{\alpha_n\rho}\eta_n(u, v), \\ z &= e^{\alpha_1\rho}\zeta_1(u, v) + e^{\alpha_2\rho}\zeta_2(u, v) + \ldots + e^{\alpha_n\rho}\zeta_n(u, v). \end{aligned} \tag{117}$$

В случае $n = 2$ имеем

$$x = e^{\sqrt{\sigma}\rho}\xi_1(u, v) + e^{-\sqrt{\sigma}\rho}\xi_2(u, v)$$

и аналогично для y и z. Соответствующая система принадлежит, очевидно, к числу систем, изученных нами в предыдущем параграфе. Исключая ρ из равенств, определяющих x, y, z, легко убеждаемся, что траектории $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ — конические сечения.

Глава III

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

§ 10. Потенциальные системы, в состав которых входит семейство поверхностей второго порядка

На основании исследований М. Леви [1]) условие, необходимое и достаточное для того, чтобы семейство поверхностей второго порядка было семейством Ламе, заключается в следующем: линия, образованная точками закругления

[1]) M. L e v y, J. d'Ec. Polytechn. 43, стр. 157.

поверхностей, должна быть ортогональна ко всем поверхностям семейства. Пусть, в частности, семейство Ламе, образованное поверхностями второго порядка, входит в состав потенциальной системы. В таком случае все поверхности семейства должны иметь общее сферическое изображение линий кривизны, т. е. при установлении между ними соответствия параллельными нормалями, линии кривизны двух произвольных поверхностей должны соответствовать одни другим. В частности, в точках закругления, которые можно рассматривать как бесконечно малые линии кривизны, нормали всех поверхностей семейства должны быть параллельны между собою, откуда заключаем, что геометрическое место соответственных точек закругления для всего семейства есть прямая линия. Таким образом, для центральных поверхностей второго порядка мы имеем случай, рассмотренный Гумбертом[1]). Уравнение семейства в этом случае имеет вид

$$(u+\alpha)x^2 + (u+\beta)y^2 + (u+\gamma)z^2 = \\ = (u+\alpha)(u+\beta)(u+\gamma), \qquad (1)$$

где u — переменный параметр, а α, β, γ — постоянные (см. Darboux S. O., т. I, стр. 101). Определяя отношение разностей обратных величин квадратов полуосей для поверхности (1), получаем

$$\frac{u+\beta-(u+\alpha)}{u+\gamma-(u+\alpha)} = \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha},$$

т. е. величину постоянную; на основании результатов § 20 части I отсюда непосредственно следует, что все поверхности семейства (1) имеют общее сферическое изображение, и, следовательно, семейство Ламе, образованное ими, входит в состав триортогональной системы потенциального типа.

Предположим теперь, что семейство Ламе состоит из параболоидов. В § 20 части I мы уже указывали, что из параболоидов можно составить семейство Ламе, подвергая произвольный параболоид гомотетическому изменению, причем центр подобия должен быть взят в точке пересечения главного диаметра с нормалями в точках закругле-

[1]) Humbert, Sur les normales aux quadriques, Compt. rend. Acad. Sci. Paris, 111, стр. 963.

ния. Очевидно, соответственные точки закругления для всех параболоидов полученного семейства располагаются на прямой, проходящей через центр подобия; следовательно, построенное нами семейство есть семейство требуемого типа. С другой стороны, согласно результатам М. Леви и Дарбу, не может существовать двух различных семейств Ламе, состоящих из поверхностей второго порядка, для которых геометрические места точек закругления одни и те же; следовательно, приведенное нами решение вопроса есть самое общее. Согласно результатам § 20 части I, перенося начало координат в центр подобия, имеем для начального параболоида следующие выражения координат:

$$x = \sqrt{\frac{a^2(\mu-a^2)(\nu-a^2)}{b^2-a^2}}, \quad y = \sqrt{\frac{b^2(\mu-b^2)(\nu-b^2)}{a^2-b^2}}, \\ z = -\frac{1}{2}(\mu+\nu) + a^2 + b^2; \qquad (2)$$

при этом $\mu = \frac{1}{\xi}$, $\nu = \frac{1}{\eta}$, где через ξ и η обозначены эллиптические параметры на сфере Гаусса. Связь между параметрами ξ, η и потенциальными параметрами u, v устанавливается равенствами (144) § 10 части I, в которых нужно положить $x_0 = \frac{1}{a^2}$, $x_1 = \frac{1}{b^2}$, $x_2 = 0$, и, следовательно,

$$c_0 = \frac{a^4b^2}{4(a^2-b^2)}, \quad c_1 = \frac{a^2b^4}{4(b^2-a^2)}, \quad c_2 = \frac{-a^2b^2}{4}. \qquad (3)$$

Вводя в упомянутые равенства параметры μ, ν и выполняя некоторые преобразования, имеем

$$(a^2-\mu)^{c_0}(b^2-\mu)^{c_1} = a^{2c_0}b^{2c_1}e^{u}, \\ (a^2-\nu)^{c_0}(b^2-\nu)^{c_1} = a^{2c_0}b^{2c_1}e^{v}.$$

Так как мы всегда имеем право изменить потенциальные параметры на постоянные величины, то постоянные множители в правых частях полученных равенств можем отбросить и имеем окончательно

$$(\mu-a^2)^{\frac{a^2}{a^2-b^2}}(\mu-b^2)^{\frac{b^2}{b^2-a^2}} = -e^{\frac{4u}{a^2b^2}}, \\ (\nu-a^2)^{\frac{a^2}{a^2-b^2}}(\nu-b^2)^{\frac{b^2}{b^2-a^2}} = -e^{\frac{4v}{a^2b^2}}. \qquad (4)$$

Между основной функцией $-W$ второй дифференциальной формы и расстоянием P касательной плоскости от начала существует соотношение

$$W = \frac{4}{a^2b^2} P, \tag{5}$$

выведенное нами в § 20 части I; следовательно, параметр, который мы обозначали для поверхностей гомотетического типа через σ, в данном случае равен $4/a^2b^2$.

На основании всего предыдущего и руководствуясь общими замечаниями § 7, можем непосредственно написать формулы, определяющие потенциальную систему, в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= e^{\frac{4}{a^2b^2}\rho} \sqrt{\frac{a^2(\mu - a^2)(\nu - a^2)}{b^2 - a^2}}, \\ y &= e^{\frac{4}{a^2b^2}\rho} \sqrt{\frac{b^2(\mu - b^2)(\nu - b^2)}{a^2 - b^2}}, \\ z &= e^{\frac{4}{a^2b^2}\rho} \left[-\frac{1}{2}(\mu + \nu) + a^2 + b^2\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

При этом μ и ν определяются равенствами (4), в которых следует положить

$$u = \rho_1 - \rho, \; v = \rho_2 - \rho.$$

Заметим, что параболоид, из которого мы исходили, может быть и гиперболическим; потенциальная система, определяемая формулами (6), остается действительной (b^2 имеет лишь отрицательное значение).

Для того чтобы исследовать поверхности двух семейств, дополняющих семейство параболоидов до триортогональной системы, удобнее привести равенства (6) к несколько иному виду. Так, если желаем исследовать поверхности $\rho_1 = \text{const}$, то заменяем параметр ρ равной ему величиной $\rho_1 - u$. Множитель $e^{\frac{4}{a^2b^2}\rho}$ принимает тогда вид

$$e^{\frac{4}{a^2b^2}\rho_1} e^{-\frac{4}{a^2b^2}u}$$

и равенства (6) на основании первого из соотношений (4)

могут быть написаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= -e^{\frac{4}{a^2b^2}\rho_1} \sqrt{\frac{a^2}{b^2 - a^2}} (\mu - a^2)^{\frac{a^2+b^2}{2(b^2-a^2)}} (\nu - a^2)^{\frac{1}{2}}, \\ y &= -e^{\frac{4}{a^2b^2}\rho_1} \sqrt{\frac{b^2}{a^2 - b^2}} (\mu - a^2)^{\frac{a^2}{2(b^2-a^2)}} (\nu - b^2)^{\frac{1}{2}}, \\ z &= -e^{\frac{4}{a^2b^2}\rho_1} (\mu - a^2)^{\frac{a^2}{b^2-a^2}} (\mu - b^2)^{\frac{a^2}{b^2-a^2}} \times \\ &\qquad \times \left[-\frac{1}{2}(\mu + \nu) + a^2 + b^2\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

Параметр ρ_1 имеет постоянное значение; мы можем даже положить $\rho_1 = 0$, так как все поверхности семейства $\rho_1 = \text{const}$ подобны между собою, и, следовательно, достаточно исследовать одну из них. Исключая из равенств (7) параметры μ и ν при $\rho_1 = 0$, получим уравнение поверхности $\rho_1 = 0$. Если отношение a^2/b^2 выражается рациональным числом, то, очевидно, поверхность эта алгебраическая. Формулы, определяющие поверхности $\rho_2 = \text{const}$, получаются из формул (7) простой заменой ρ_1 через ρ_2 и перестановкой параметров μ и ν. Таким образом, при соизмеримых значениях отношения a^2/b^2 потенциальная система состоит исключительно из алгебраических поверхностей.

В частности, если $b^2 = -a^2$, т. е. если имеем семейство равносторонних гиперболических параболоидов, то формулы (7) принимают особенно простой вид. Соответствующая триортогональная система была впервые указана Серре [1]). Семейства $\rho_1 = \text{const}$ и $\rho_2 = \text{const}$ в этом случае состоят из поверхностей — геометрических мест точек, для которых сумма или разность расстояний от двух пересекающихся перпендикулярных прямых имеет постоянную величину.

В самом общем случае, несмотря на видимую сложность равенств (7), возможно фактически выполнить исключение параметров μ и ν и получить уравнение поверхности $\rho_1 = 0$ в декартовых координатах. Полагая $\rho_1 = 0$ и исключая параметр ν, имеем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2Qz + (a^2 + b^2) Q^2, \tag{8}$$

[1]) J. Serret, J. de Math. Liouville 12 (1847).

и

$$\frac{x^2}{a^2(\mu^2-a^2)}+\frac{y^2}{b^2(\mu^2-b^2)}=Q^2, \tag{9}$$

где

$$Q=(\mu-a^2)^{\frac{a^2}{b^2-a^2}}(\mu-b^2)^{\frac{b^2}{a^2-b^2}}. \tag{10}$$

Решая уравнения (8) и (9) относительно Q и μ, получаем выражения, зависящие от квадратных радикалов; вставляя их в равенство (10), получаем уравнение в декартовых координатах, которое определяет поверхность $\rho_1=0$, а равным образом, на основании предыдущего, и поверхность $\rho_2=0$ в зависимости от выбора знака при радикалах.

Одно из двух семейств линий кривизны для всякой поверхности $\rho_1=\text{const}$ (или $\rho_2=\text{const}$) состоят из пространственных кривых четвертого порядка — линий кривизны параболоидов. Что касается до линий второго семейства, то легко определить их проекции на плоскость xy. Для линий этого семейства мы должны иметь $\rho_2=\text{const}$ или, безразлично, $\rho_2-\rho_1=v-u=\text{const}$. На основании равенств (4) это последнее уравнение может быть написано в следующем виде:

$$\frac{(v-a^2)^{\frac{a^2}{b^2-a^2}}(v-b^2)^{\frac{b^2}{a^2-b^2}}}{(\mu-a^2)^{\frac{a^2}{b^2-a^2}}(\mu-b^2)^{\frac{b^2}{a^2-b^2}}}=\text{const}. \tag{11}$$

Возводя первое из равенств (7) в степень $\frac{a^2}{b^2-a^2}$, второе в степень $\frac{b^2}{a^2-b^2}$ и перемножая их почленно, получаем в силу уравнения (11)

$$x^{\frac{a^2}{b^2-a^2}}y^{\frac{b^2}{a^2-b^2}}=\text{const}. \tag{12}$$

Уравнение (12) и есть искомое уравнение проекций на плоскость xy. Вместе с тем при изменении постоянного (const) оно определяет семейство подобных цилиндров, на которых лежат линии кривизны второго семейства, т. е., другими словами, линии $\rho_1=\text{const}$, $\rho_2=\text{const}$,

ортогональные к семейству параболоидов $\rho=\text{const}$. Так как на каждом из цилиндров (12) находится ∞^1 упомянутых линий, то, очевидно, семейство цилиндров (12) есть семейство, ортогональное семейству параболоидов. Сечение любого из цилиндров (12) с какой-либо из поверхностей $\rho_1=\text{const}$ или $\rho_2=\text{const}$ служит линией кривизны для этой поверхности.

Для построения триортогональной системы нам достаточно определить семейство линий $\rho_1=\text{const}$, $\rho_2=\text{const}$, зависящее от одного параметра: проводя в каждой точке одной из этих линий (l) пространственные кривые четвертого порядка — линии кривизны параболоида, проходящего через эту точку,— мы построим поверхности семейств $\rho_1=\text{const}$ и $\rho_2=\text{const}$, проходящие через выбранную нами линию (l); так как мы имеем ∞^1 линий (l), то, следовательно, можем построить все поверхности семейств $\rho_1=\text{const}$ и $\rho_2=\text{const}$. Удобнее всего определять те линии $\rho_1=\text{const}$, $\rho_2=\text{const}$, которые лежат в плоскостях zx и zy, очевидно, ортогональных ко всем параболоидам $\rho=\text{const}$ и представляющих предельные случаи цилиндров (12). В сечении параболоидов с любой из этих плоскостей получается семейство гомотетических парабол, и задача сводится к изысканию ортогональных траекторий этого семейства; решение не представляет затруднений и, например, на плоскости zx получаем семейство линий $\rho_1=\text{const}$, $\rho_2=\text{const}$, определяемых уравнением

$$\left[z+\sqrt{z^2+\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2}\right]^{a^2}\left[a^2\sqrt{z^2+\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2}-b^2z\right]^{b^2}x^{-2a^2}=\text{const}. \tag{13}$$

Заметим, что построение, указанное выше, дает нам только одно из семейств $\rho_1=\text{const}$ и $\rho_2=\text{const}$, если мы ограничимся линиями $\rho_1=\text{const}$, $\rho_2=\text{const}$, расположенными на одной из плоскостей zx и zy. Это зависит от того, что сечения параболоидов плоскостями zx и zy принадлежат к числу их линий кривизны.

Для того чтобы получить оба семейства $\rho_1=\text{const}$ и $\rho_2=\text{const}$, необходимо воспользоваться линиями $\rho_1=\text{const}$, $\rho_2=\text{const}$, расположенными как на плоскости zx, так и на плоскости zy.

§ 11. Потенциальные системы, для которых одно из семейств координатных линий состоит из плоских кривых

Допустим, что семейство линий $\rho_1 = \text{const}$, $\rho_2 = \text{const}$, т. е. семейство ортогональных траекторий поверхностей $\rho = \text{const}$, состоит из плоских кривых. Кривизна кручения $1/T$ линий $\rho_1 = \text{const}$, $\rho_2 = \text{const}$, согласно Бианки (Лекции по дифференциальной геометрии, стр. 490, 491), определяется формулой

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\operatorname{arctg}\frac{R_{20}}{R_{10}}\right\}, \tag{14}$$

где через R_{ik}, точно так же как и в § 2, обозначаем главный радиус кривизны поверхности $\rho_i = \text{const}$, соответствующий элементу дуги $H_k d\rho_k$. В исследуемом случае мы должны, очевидно, иметь

$$\frac{R_{20}}{R_{10}} = f(\rho_1, \rho_2)$$

или, в силу формул (25) § 2,

$$\frac{\beta_{01}}{\beta_{02}} = f(\rho_1, \rho_2). \tag{15}$$

Так как, с другой стороны, все величины β_{ik} суть функции разностей $u = \rho_1 - \rho$, $v = \rho_2 - \rho$, то равенство (15) принимает вид

$$\frac{\beta_{01}}{\beta_{02}} = f(u - v). \tag{16}$$

Возводя обе части в квадрат и выражая β_{01}^2 и β_{02}^2 через основную функцию λ сферического изображения семейства $\rho = \text{const}$, имеем

$$\frac{\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}} = f^2(u - v). \tag{17}$$

Интегрируя уравнение (17), получаем для λ выражение вида

$$\lambda = F\,(u + v + A\,(u - v)),$$

откуда на основании результатов § 5 части I (гл. II), заключаем, что семейство линий $u - v = \text{const}$ на сфере Гаусса состоит из меридианов; таким образом, сферическое изображение линий кривизны поверхностей $\rho = \text{const}$ есть потенциальная система того типа, который мы исследовали в § 9 части I (гл. III) и который вполне характеризуется при соответственном выборе осей соотношением

$$\lambda = Z. \tag{18}$$

Обратно, допустим, что линии кривизны поверхностей $\rho = \text{const}$ изображаются на сфере Гаусса потенциальной системой упомянутого типа. В таком случае из формул Родрига для произвольной поверхности $\rho = \text{const}$ получаем на основании соотношения (18)

$$W = z + \text{const}, \tag{19}$$

где $-W$ есть основная функция второй дифференциальной формы поверхности (ср. часть I, § 21). Так как основной функцией второй дифференциальной формы для поверхностей $\rho_i = \text{const}$ служит функция $-H_i$ (ср. § 2), то равенство (19) приводит к следующему соотношению, имеющему место для всей триортогональной системы:

$$H = z + f(\rho). \tag{20}$$

Соприкасающиеся плоскости линий $\rho_1 = \text{const}$, $\rho_2 = \text{const}$, как известно, служат нормальными плоскостями линий $H = \text{const}$ на поверхностях семейства $\rho = \text{const}$ (ср. § 2). Отсюда заключаем в силу соотношения (20), что соприкасающиеся плоскости всякой линии $\rho_1 = \text{const}$, $\rho_2 = \text{const}$ перпендикулярны плоскости $z = 0$, или, иначе, параллельны оси z. Очевидно, что это имеет место лишь в том случае, если линия $\rho_1 = \text{const}$, $\rho_2 = \text{const}$ есть плоская кривая, плоскость которой параллельна оси z. Таким образом, для всех триортогональных систем потенциального типа, характеризуемых соотношением (18), семейство ортогональных траекторий поверхностей $\rho = \text{const}$ состоит из плоских кривых.

Триортогональные системы, для которых имеет место соотношение (20), представляют частный случай систем, характеризуемых соотношением

$$H = \varphi_0(\rho)(x^2 + y^2 + z^2) + \varphi_1(\rho)x + \varphi_2(\rho)y + \varphi_3(\rho)z + \varphi_4(\rho); \quad (21)$$

все эти системы обладают тем свойством, что соприкасающиеся круги ортогональных траекторий семейства $\rho = \mathrm{const}$ для всех точек какой-либо из поверхностей этого семейства ортогональны одной и той же сфере

$$\varphi_0(\rho)(x^2 + y^2 + z^2) + \varphi_1(\rho)x + \varphi_2(\rho)y + \varphi_3(\rho)z + \varphi_4(\rho) = 0 \quad (22)$$

(см. Darboux S. O., т. I, гл. 3). В рассматриваемом случае сфера (22) обращается, очевидно, в плоскость

$$z + f(\rho) = 0. \quad (23)$$

Согласно результатам Дарбу (там же) возможно без всякого интегрирования определить всю совокупность систем, характеризуемых соотношением (22), по данной начальной поверхности Σ семейства $\rho = \mathrm{const}$. Применяя этот результат к нашему случаю, видим, что по данной потенциальной поверхности Σ_1, для которой сферическое изображение линий кривизны характеризуется соотношением (18), возможно определить без интегрирования всю совокупность триортогональных систем, для которых имеет место соотношение (20) и для которых поверхность Σ служит поверхностью $\rho = 0$. Совокупность этих систем зависит от одной произвольной функции одного аргумента ввиду произвольности функции $f(\rho)$ в соотношении (20). С другой стороны, мы видели в § 5, что поверхность Σ входит в состав триортогональных систем потенциального типа, вся совокупность которых точно так же зависит от одной произвольной функции, и для всех этих систем, согласно результатам настоящего параграфа, имеет место соотношение (20). Естественно ожидать поэтому, что системы, получаемые из поверхности Σ построением Дарбу, все принадлежат к числу систем потенциального типа, и, действительно, в этом нетрудно убедиться, если воспользуемся замечанием Бианки (Лекции по дифференциальной геометрии, стр. 500), что все триортогональные системы

с плоскими ортогональными траекториями $\rho_1 = \mathrm{const}$, $\rho_2 = \mathrm{const}$, в состав которых входит одна и та же поверхность $\rho = 0$, находятся в соответствии Комбескюра между собою.

Формулы (90) § 5 позволяют особенно просто подтвердить, что для определения потенциальных систем, в состав которых входит данная поверхность Σ, не требуется никакого интегрирования. Полагая в этих формулах $f(t) = 0$, мы получаем

$$\bar{x}_0 = x + x'\frac{\rho}{1} + x''\frac{\rho^2}{1\cdot 2} + \ldots$$

и аналогично для $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$; выражения $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$ определяют какую-либо одну из потенциальных систем, в состав которых входит Σ, и мы можем предположить, что эта система S_0 есть система, соответствующая предположению $f(\rho) = 0$ в соотношении (20). Система S_0 принадлежит, очевидно, к числу циклических систем; для построения ее достаточно в каждой точке поверхности Σ построить круг, ортогональный поверхности Σ и плоскости $z = 0$; выражения координат $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$ в виде функций параметров ρ, ρ_1, ρ_2 получаются, очевидно, без всякого интегрирования (ср. Darboux S., т. II, кн. IV, гл. 5; т. IV, кн. VIII; Darboux S. O., т. I, кн. I, гл. 3). Обращаясь к интегральным членам формул (90) § 5, заметим, что первая производная поверхность сферы Гаусса в рассматриваемом случае обращается в точку (0, 0, 1), так как для расстояния касательной плоскости от начала координат имеем (часть I, § 18) $P^{(1)} = \lambda = Z$; таким образом, $X' = 0$, $Y' = 0$, $Z' = 1$, а следовательно, $X'' = X''' = \ldots = Y'' = Y''' = \ldots = Z'' = Z''' = \ldots = 0$. Полагая в формулах (90) § 5 $f(t) = \psi''(t)$, окончательно получаем

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + X[\psi'(\rho) - \psi'(0)], \quad \bar{y} = \bar{y}_0 + Y[\psi'(\rho) - \psi'(0)],$$
$$\bar{z} = \bar{z}_0 + Z[\psi'(\rho) - \psi'(0)] + \psi(\rho) - \psi(0) - \rho\psi'(0), \quad (24)$$

где $\psi'(\rho)$ — произвольная функция. Потенциальная система, определяемая формулами (24), получается, очевидно, геометрическим сложением циклической системы

S_0 и системы S_1, определяемой формулами

$$\bar{x}_1 = X\,[\psi'(\rho) - \psi'(0)],\quad \bar{y}_1 = Y\,[\psi'(\rho) - \psi'(0)],$$
$$\bar{z}_1 = Z\,[\psi'(\rho) - \psi'(0)] + \psi(\rho) - \psi(0) - \rho\psi'(0). \tag{25}$$

Семейство $\rho = \text{const}$ этой последней системы, очевидно, состоит из сфер, имеющих центры на оси z, притом зависимость между радиусом и расстоянием центра сферы от начала координат остается произвольной (ввиду произвольности функции $\psi(\rho)$), так что система S есть самая общая триортогональная система потенциального типа, в состав которой входит семейство сфер, имеющих центры на оси z. Правда, при $\rho = 0$ одновременно исчезают радиус и расстояние центра сферы от начала, и, следовательно, в состав семейства сфер должна входить сфера нулевого радиуса, совпадающая с началом координат; но это ограничение касается лишь положения системы в пространстве.

Рассмотрим, в частности, потенциальные системы *гомотетического* типа, для которых семейство линий $\rho_1 = \text{const}$, $\rho_2 = \text{const}$ состоит из плоских кривых. Для построения семейства $\rho = \text{const}$ подобной системы достаточно, согласно результатам § 7, подвергнуть гомотетическому изменению произвольную потенциальную поверхность гомотетического типа Σ, сферическое изображение которой характеризуется соотношением (18). Формулы, определяющие потенциальную систему, получаются из формул, выведенных нами в § 21 части I для координат точек поверхностей Σ умножением на $e^{\sigma\rho}$ (ср. § 7). Таким образом, получаем, что общая потенциальная система гомотетического типа S получается геометрическим сложением систем S_0, S_1, S_2, определяемых равенствами

$$\bar{x}_i = e^{\sigma\rho}x_i,\quad \bar{y}_i = e^{\sigma\rho}y_i,\quad \bar{z}_i = e^{\sigma\rho}z_i \qquad (i = 0, 1, 2), \tag{26}$$

в которых через $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, $\bar{z}_i$ обозначены выражения координат точки пространства в виде функций параметров системы S_i, а через x, y, z — выражения, определяемые равенствами (95) и (97) § 21 части I; при $\sigma = \pm 1$ x_i, y_i, z_i определяются равенствами (95), (97) и (105) или же (95), (97) и (113) того же параграфа.

Для произвольной поверхности Σ гомотетического типа, характеризуемой соотношением (18), имеет место равенство

$$\sigma P = z + a, \tag{27}$$

выведенное нами в § 21 части I. Отсюда в силу результатов § 7 (часть II) заключаем, что для потенциальной системы S гомотетического типа, в состав которой входит Σ, имеет место соотношение

$$\sigma P = z + ae^{\sigma\rho}, \tag{28}$$

или, так как $\sigma P = H$ (§ 7), то иначе

$$H = z + ae^{\sigma\rho}. \tag{29}$$

Три основных потенциальных системы S_0, S_1, S_2, геометрическим сложением которых получается общая система S, соответствуют трем основным поверхностям Σ_0, Σ_1, Σ_2 гомотетического типа, определенным нами в § 21 части I. В общем случае (при $\sigma \neq \pm 1$) поверхность Σ_0 есть сфера и, следовательно, семейство $\rho = \text{const}$ системы S_0 состоит из гомотетических сфер при центре подобия в начале координат. Ортогональные траектории этого семейства, т. е. линии $\rho_1 = \text{const}$, $\rho_2 = \text{const}$, очевидно, лежат в плоскостях, проходящих через ось z. Что касается до поверхностей Σ_1, Σ_2, то они соответствуют частному предположению $a = 0$ в соотношении (27) (см. § 21 части I) и, следовательно, соотношение (29) для систем S_1, S_2 принимает вид $H = z$, откуда заключаем, что обе эти системы принадлежат к числу циклических систем (ср. выше). Одна из двух серий линий кривизны для поверхностей $\rho_1 = \text{const}$ или $\rho_2 = \text{const}$ той и другой системы состоит из кругов, ортогональных плоскости $z = 0$; следовательно, поверхности эти могут быть получены как огибающие семейств шаров, имеющих центры на плоскости $z = 0$. Те же самые замечания в равной мере относятся к любой системе, получаемой геометрическим сложением систем S_1, S_2. Что касается до системы, получаемой геометрическим сложением S_0, S_1, S_2 или S_0 и S_1, или S_0 и S_2, то, очевидно, для нее семейство линий $\rho_1 = \text{const}$, $\rho_2 = \text{const}$ состоит из плоских кривых, отличных от окружностей, и плоскости этих кривых не проходят через ось z, а только параллельны этой оси.

В случае $\sigma = \pm 1$ система S_0, в состав которой входит семейство сфер, есть в то же время система циклическая; система S_1 тоже принадлежит к числу циклических; что касается до системы S_2, то она есть система более общего характера: семейство линий $\rho_1 = \text{const}$, $\rho_2 = \text{const}$ для нее состоит из плоских кривых, отличных от окружностей, и плоскости этих кривых не проходят через ось z. В справедливости последнего замечания легко убедимся, если примем во внимание, что семейство поверхностей $\rho = \text{const}$ может быть ортогонально к семейству плоских кривых, плоскости которых проходят через ось z, только в том случае, если все поверхности этого семейства суть поверхности вращения с общей осью z.

Если рассмотрим частный случай $\psi(\varphi) = k$ (см. § 21 части I), то при $\sigma \neq \pm 1$ будем иметь системы S_1, S_2, все три семейства которых состоят из спиральных поверхностей. Действительно, подвергая произвольную триортогональную систему «спиральному» преобразованию, мы, очевидно, получаем опять-таки триортогональную систему. В данном случае семейство $\rho = \text{const}$ состоит из подобных спиральных поверхностей и, следовательно, каждая из поверхностей этого семейства одним и тем же спиральным преобразованием преобразуется сама в себя; в связи с предыдущим отсюда заключаем, что поверхности остальных двух семейств переходят одна в другую при том же спиральном преобразовании. Так как, кроме того, каждое из остальных двух семейств состоит из гомотетических поверхностей (при центре подобия в начале), то, присоединяя к спиральному преобразованию подходящим образом выбранное гомотетическое преобразование-получим некоторое спиральное преобразование, которое преобразует в себя поверхности того или другого из двух остальных семейств. Таким образом, семейства $\rho_1 = \text{const}$, $\rho_2 = \text{const}$ состоят точно так же из спиральных поверхностей; очевидно, каждая из этих поверхностей может быть получена спиральным преобразованием круга, ортогонального плоскости $z = 0$, так как семейства S_1, S_2, согласно предыдущему, принадлежат к числу циклических.

§ 12. Потенциальные системы, для которых оскулирующие циклические системы одного из семейств образуются кругами, ортогональными одной сфере

Если для всех точек одной из поверхностей $\rho = \text{const}$ триортогональной системы S построим соприкасающиеся круги ортогональных траекторий семейства $\rho = \text{const}$, то получим, как известно, циклическую систему, которую, согласно Бианки (Лекции по дифференциальной геометрии, гл. 19, § 278), будем называть *оскулирующей* циклической системой данной триортогональной системы S. Если все круги оскулирующих циклических систем, построенных для поверхностей $\rho = \text{const}$, ортогональны к одной сфере, изменяющейся, вообще говоря, с переходом от одной поверхности семейства к другой, то для системы S имеет место соотношение

$$H = \varphi_0(\rho)(x^2 + y^2 + z^2) + \varphi_1(\rho)x + \varphi_2(\rho)y + \\ + \varphi_3(\rho)z + \varphi_4(\rho) \quad (30)$$

(ср. Darboux S. O., т. I, стр. 72; Бианки, Лекции по дифференциальной геометрии, гл. 19, § 278), которое, обратно, вполне характеризует системы упомянутого типа, как мы это уже упоминали в предыдущем параграфе.

Поставим себе задачу — определить системы потенциального типа, для которых имеет место соотношение (30).

Дифференцируем обе части этого соотношения по ρ_1 и по ρ_2. Принимая во внимание соотношения (2) § 1, соотношения (32) § 2 и соотношения (69) § 4, получаем

$$\beta_{01} = 2\varphi_0(\rho)P_1 + \varphi_1(\rho)X_1 + \varphi_2(\rho)Y_1 + \varphi_3(\rho)Z_1, \quad (31)$$

$$\beta_{02} = 2\varphi_0(\rho)P_2 + \varphi_1(\rho)X_2 + \varphi_2(\rho)Y_2 + \varphi_3(\rho)Z_2. \quad (32)$$

Умножая обе части равенства (31) на β_{01}, обе части равенства (32) на β_{02} и пользуясь соотношениями (52) § 3, (12) § 1 и (71) § 4, получаем

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1} = 2\varphi_0(\rho)\frac{\partial P}{\partial\rho_1} + \varphi_1(\rho)\frac{\partial X}{\partial\rho_1} + \varphi_2(\rho)\frac{\partial Y}{\partial\rho_1} + \varphi_3(\rho)\frac{\partial Z}{\partial\rho_1},$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_2} = 2\varphi_0(\rho)\frac{\partial P}{\partial\rho_2} + \varphi_1(\rho)\frac{\partial X}{\partial\rho_2} + \varphi_2(\rho)\frac{\partial Y}{\partial\rho_2} + \varphi_3(\rho)\frac{\partial Z}{\partial\rho_2},$$

откуда

$$\lambda = 2\varphi_0(\rho) P + \varphi_1(\rho) X + \varphi_2(\rho) Y + \varphi_3(\rho) Z + \varphi_4(\rho). \tag{33}$$

Если, в частности, $\varphi_0(\rho) = 0$, то необходимо $\varphi_i(\rho) = \mathrm{const}$ для $i = 1, 2, 3, 4$, так как λ, X, Y, Z суть функции разностей $u = \rho_1 - \rho$, $v = \rho_2 - \rho$; следовательно, мы имеем здесь случай, рассмотренный в предыдущем параграфе, так как соответственным выбором осей и функции λ соотношение (33) при сделанных предположениях можно привести к виду $\lambda = Z$. Во всем дальнейшем будем поэтому предполагать $\varphi_0(\rho)$ отличным от нуля.

Решая равенства (31), (32), (33) относительно P_1, P_2, P, представим их в виде

$$\begin{aligned} P &= k(\rho)\lambda + a(\rho) X + b(\rho) Y + c(\rho) Z + g(\rho),\\ P_1 &= k(\rho)\beta_{01} + a(\rho) X_1 + b(\rho) Y_1 + c(\rho) Z_1,\\ P_2 &= k(\rho)\beta_{02} + a(\rho) X_2 + b(\rho) Y_2 + c(\rho) Z_2. \end{aligned} \tag{34}$$

Вставляя значения (34) для P, P_1, P_2 в соотношения (71) § 4 и принимая во внимание все вышеупомянутые соотношения, получаем следующие два условия совместности равенств (34):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} k\left(\frac{\partial\lambda^2}{\partial\rho_1} - \frac{\partial^2\lambda}{\partial\rho\,\partial\rho_1}\right) + [g'(\rho) - k'(\rho)]\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1} = \\ &\qquad = a'(\rho)\frac{\partial X}{\partial\rho_1} + b'(\rho)\frac{\partial Y}{\partial\rho_1} + c'(\rho)\frac{\partial Z}{\partial\rho_1},\\ &\frac{1}{2} k\left(\frac{\partial\lambda^2}{\partial\rho_2} - \frac{\partial^2\lambda}{\partial\rho\,\partial\rho_2}\right) + [g'(\rho) - k'(\rho)]\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_2} = \\ &\qquad = a'(\rho)\frac{\partial X}{\partial\rho_2} + b'(\rho)\frac{\partial Y}{\partial\rho_2} + c'(\rho)\frac{\partial Z}{\partial\rho_2}. \end{aligned} \tag{35}$$

Принимая во внимание, что λ есть функция u, v, получаем из (35) соотношение

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} k'(\rho)\left[\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \frac{\partial\lambda}{\partial v} + \lambda^2\right] + [g'(\rho) - k'(\rho)]\,\lambda = \\ &\qquad = a'(\rho) X + b'(\rho) Y + c'(\rho) Z + f(\rho), \end{aligned} \tag{36}$$

из которого, обратно, следуют равенства (35). Так как λ, X, Y, Z суть функции u, v, то соотношение (36)

необходимо должно иметь вид

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \frac{\partial\lambda}{\partial v} + \lambda^2 + m\lambda = \alpha X + \beta Y + \gamma Z + h, \tag{37}$$

где m, α, β, γ, h — постоянные. Изменяя направление осей координат, мы можем сделать $\alpha = \beta = 0$; кроме того, мы имеем право прибавить к λ произвольное постоянное и умножить параметры u, v на постоянный множитель, разделив на него λ (см. часть I, § 1); распоряжаясь этими постоянными, можем сделать $m = 0$, $\gamma = 1$ и окончательно имеем

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \frac{\partial\lambda}{\partial v} + \lambda^2 = Z + h. \tag{38}$$

Заметим, что соотношение (37) можно заменить следующим требованием: выражение

$$\theta = \frac{\partial\lambda}{\partial u} + \frac{\partial\lambda}{\partial v} + \lambda^2 + m\lambda - h$$

должно удовлетворять трем уравнениям с частными производными второго порядка, которыми определяются косинусы X, Y, Z углов, образуемых нормалью поверхности $\rho = \mathrm{const}$ с осями координат. Действительно, система этих уравнений (см. часть I, § 8, формула (30)) есть система вполне интегрируемая, и, следовательно, всякое решение этой системы выражается линейно и однородно через три решения X, Y, Z. Подставляя значение θ во второе уравнение системы, получим уравнение, которым характеризуется основная функция λ всякой потенциальной системы на сфере Гаусса; выполняя ту же подстановку для остальных двух уравнений, получаем условия, характеризующие сферическое изображение потенциальных систем того специального типа, который мы исследуем.

Предположим, что мы каким-либо образом определили функцию λ, удовлетворяющую вышеупомянутым условиям; другими словами, предположим, что для λ имеет место соотношение (37) или, в более простой форме, соотношение (38). Тогда из предыдущих рассуждений непосредственно заключаем, что возможно построить триортогональную систему потенциального типа данного сферического изображения, для которой расстояния касательных плоскостей от начала определяются равенствами вида (34) или (31), (32) и (33). Умножая равенства (31) и (32) соответственно на H_1 и H_2 и замечая, что в силу формул (32) § 2

$$H_iX_i = \frac{\partial x}{\partial \rho_i}, \quad H_iY_i = \frac{\partial y}{\partial \rho_i}, \quad H_iZ_i = \frac{\partial z}{\partial \rho_i},$$

$$2H_iP_i = \frac{\partial}{\partial \rho_i}(x^2 + y^2 + z^2),$$

приходим к соотношению (30), из которого мы исходили выше. Таким образом, мы получаем потенциальную систему исследуемого нами типа.

Сопоставляя равенства (36) и (38), имеем

$$g(\rho) = k'(\rho), \quad c'(\rho) = \frac{1}{2}k(\rho),$$

$$f(\rho) = \frac{h}{2}k(\rho), \quad a'(\rho) = b'(\rho) = 0$$

или

$$g(\rho) = k'(\rho), \quad f(\rho) = \frac{h}{2}k(\rho), \quad a = \text{const}, \quad b = \text{const},$$

$$c(\rho) = \frac{1}{2}\int_0^\rho k(\rho)\,d\rho + \text{const} = \frac{1}{2}\int_0^\rho k(\rho)\,d\rho + c_1. \quad (39)$$

Первое из равенств (34), таким образом, принимает вид

$$P = k(\rho)\lambda + \frac{1}{2}\int_0^\rho k(\rho)\,d\rho\cdot Z + k'(\rho) + aX + bY + c_1Z. \quad (40)$$

Легко убедиться, что постоянные a, b, c не имеют существенного значения; действительно, если начало координат перенесем в точку (a, b, c), то расстояние нового начала от касательной плоскости к поверхности $\rho = \text{const}$ будет равняться $P - aX - bY - cZ$ и, следовательно, при сохранении прежних обозначений будем иметь

$$P = k(\rho)\lambda + \frac{1}{k}\int_0^\rho k(\rho)\,d\rho\cdot Z + k'(\rho). \quad (40')$$

Равенством (40′) вполне определяется соответствующая потенциальная система (см. § 4), и, таким образом, для данного λ получаем совокупность потенциальных систем исследуемого типа, зависящую от одной произвольной функции $k(\rho)$. Заметим, что потенциальные системы, полученные нами, очевидно, не исчерпывают всей совокупности потенциальных систем данного сферического изображения, так что для данного λ возможны системы, для которых и не имеет места соотношение (30).

Рассмотрим, в частности, системы *гомотетического* типа, для которых имеет место соотношение (30) или, безразлично, соотношение (40). Так как для системы гомотетического типа P должно иметь вид $e^{\sigma\rho}p(u, v)$ (см. § 7) и так как величины λ, X, Y, Z суть функции u, v, то в равенстве (40) необходимо положить $a = b = c_1 = 0$ и $k(\rho) = me^{\sigma\rho}$ или, без ущерба для общности, $k(\rho) = e^{\sigma\rho}$. Таким образом, равенство (40′) принимает вид

$$P = e^{\sigma\rho}\left[\lambda + \frac{1}{2\sigma}Z + \sigma\right]. \quad (41)$$

Второе и третье из соотношений (34) дают при тех же предположениях

$$P_1 = e^{\sigma\rho}\left[\beta_{01} + \frac{1}{2\sigma}Z_1\right], \quad P_2 = e^{\sigma\rho}\left[\beta_{02} + \frac{1}{2\sigma}Z_2\right]. \quad (42)$$

Вставляя выражения P, P_1, P_2 в формулы (72) § 4, находим x, y, z и, следовательно, можем определить $x^2 + y^2 + z^2$; таким образом, имеем

$$\left.\begin{aligned} z &= e^{\sigma\rho}\left[\lambda Z + \beta_{01}Z_1 + \beta_{02}Z_2 + \frac{1}{2\sigma} + \sigma Z\right], \\ x^2 + y^2 + z^2 &= e^{2\sigma\rho}\left[\frac{\lambda + 2\sigma}{\sigma}Z + \frac{\beta_{01}}{\sigma}Z_1 + \frac{\beta_{02}}{\sigma}Z_2 + {}\right. \\ &\qquad \left. + 2\lambda\sigma + \sigma^2 + \frac{1}{4\sigma^2} + h\right]. \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

С другой стороны, для всякой системы гомотетического типа $H = \sigma P$ (см. § 7). Сопоставляя выражение, получаемое для H при подстановке значения P из равенства

(41), с соотношениями (43), получаем

$$H = \frac{1}{2} e^{-\sigma\rho}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{2\sigma} z + e^{\sigma\rho}\left[\frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{8\sigma^2} - \frac{h}{2}\right]. \tag{44}$$

Соотношение (44) есть не что иное, как соотношение (30) для системы гомотетического типа. Из всего предыдущего заключаем, что для данного значения λ, удовлетворяющего условию (38), возможно определить ∞^1 потенциальных систем гомотетического типа, для которых имеет место соотношение (30), ввиду произвольности параметра σ в полученных формулах. Заметим, что в числе этих систем есть такие, для которых соотношение (44) принимает более простой вид:

$$H = \frac{1}{2} e^{-\sigma\rho}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{2\sigma} z; \tag{45}$$

они получаются, если σ припишем одно из значений, удовлетворяющих уравнению

$$4\sigma^4 - 4h\sigma^2 + 1 = 0. \tag{46}$$

Это замечание позволит нам весьма просто получить всю совокупность потенциальных систем исследуемого типа из потенциальных систем с плоскими ортогональными траекториями одного из семейств, которые мы исследовали в предшествующем параграфе (см. далее, гл. IV).

Глава IV

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ИНВЕРСИИ

§ 13. Построение бесконечного ряда различных сферических изображений потенциального типа с помощью инверсии гомотетических систем

Если мы подвергаем инверсии произвольную триортогональную систему S, то, как известно, получаем некоторую новую триортогональную систему S'. Пусть, в частности, S есть потенциальная система гомотетического типа. Тогда все три семейства S состоят из гомотетических

поверхностей при центре подобия в одной и той же точке для всех трех семейств, например в начале координат. Подвергая систему S инверсии относительно начала координат, получим, очевидно, систему S', все три семейства которой точно так же состоят из гомотетических поверхностей при том же центре подобия. Система S', следовательно, допускает группу гомотетических преобразований и потому наравне с S принадлежит к числу потенциальных систем гомотетического типа. Сферическое изображение всякой триортогональной системы изменяется при инверсии; следовательно, мы имеем способ по данной системе величин $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, характеризующих сферическое изображение потенциальной системы, определять новую систему $\beta'_{ik} = \beta'_{ki}$, отличную от первой. Отмечая значками $'$ все величины, относящиеся к системе S', имеем, как известно,

$$x' = \frac{x}{r^2}, \quad y' = \frac{y}{r^2}, \quad z' = \frac{z}{r^2}, \quad r' = \frac{1}{r}, \quad H'_i = \frac{H_i}{r^2}, \tag{1}$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. Если система S определяется формулами вида

$$x = e^{\sigma\rho}\xi(u, v), \quad y = e^{\sigma\rho}\eta(u, v), \quad z = e^{\sigma\rho}\zeta(u, v) \tag{2}$$

(см. гл. II, § 7), то для системы S' в силу (1) имеем

$$x' = e^{-\sigma\rho}\xi'(u, v), \quad y' = e^{-\sigma\rho}\eta'(u, v), \quad z' = e^{-\sigma\rho}\zeta'(u, v). \tag{3}$$

Заметим, что для всякой потенциальной системы гомотетического типа, определяемой формулами вида (2), основная функция ω связана с радиусом-вектором соотношением $\omega = \frac{\sigma}{2} r^2$, которое непосредственно следует из результатов, выведенных для потенциальных поверхностей гомотетического типа (см. часть I, гл. IV, § 17). К тому же результату придем, замечая, что

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\rho_i}(r^2) = x\frac{\partial x}{\partial\rho_i} + y\frac{\partial y}{\partial\rho_i} + z\frac{\partial z}{\partial\rho_i} = \\ = H_iP_i = \frac{1}{\sigma}H_i^2 = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\omega}{\partial\rho_i}.$$

Таким образом, для систем S и S' имеем

$$\omega = \frac{\sigma}{2} r^2, \qquad \omega' = -\frac{\sigma}{2} r'^2. \tag{4}$$

Принимая во внимание соотношения (4) и подставляя выражения H_i' из соотношений (1) в основные равенства $\frac{\partial H_i'}{\partial \rho_k} = \beta'_{ki} H'_k$, получаем

$$\beta'_{ki} = \beta_{ki} - \frac{H_i H_k}{\omega} \tag{5}$$

или

$$\beta'_{ki} = \beta_{ki} - \sqrt{\frac{\partial \ln \omega}{\partial \rho_i} \frac{\partial \ln \omega}{\partial \rho_k}}. \tag{5'}$$

Пользуясь соотношениями (5) и (5′), без затруднения получаем, кроме того,

$$\lambda' = \lambda - \frac{H^2}{\omega}, \qquad V' = V - \ln \omega, \tag{6}$$

где λ — основная функция сферического изображения семейства $\rho = \text{const}$, а V — функция, введенная в § 3 и определяемая равенствами

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_i \partial \rho_k} = \beta_{ik}^2.$$

Допустим, что для данного сферического изображения, характеризуемого величинами $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, мы определили всевозможные системы S гомотетического типа. Подвергая инверсии каждую из систем S, мы будем получать новые системы величин $\beta'_{ik} = \beta'_{ki}$, и нетрудно убедиться, что все эти системы различны между собою. Действительно, для того чтобы при инверсии двух различных систем потенциального типа S и S_1 одного сферического изображения получились системы S' и S_1' точно так же одного сферического изображения, необходимо в силу формул (5′), чтобы для S и S_1 имели место соотношения

$$\frac{\partial \ln \omega_1}{\partial \rho_i} = \pm \frac{\partial \ln \omega}{\partial \rho_i},$$

откуда или $\omega_1 = c\omega$, или $\omega_1 = \frac{c}{\omega}$. Второе предположение, очевидно, невозможно, так как при $\omega_1 = \frac{c}{\omega}$ система S_1 может быть лишь получена инверсией системы S и, следовательно, имеет сферическое изображение, отличное от S; при первом предположении выражения квадрата линейного элемента пространства в параметрах системы S_1 и системы S отличаются только постоянным множителем, и, следовательно, система S_1 подобна системе S; так как, кроме того, обе системы допускают группу гомотетических преобразований, то они, очевидно, могут отличаться только положением в пространстве или даже вполне совпадают одна с другой, если центр подобия, как было установлено выше, всегда принимаем в начале координат. Таким образом, в силу результатов § 7 мы получаем совокупность систем величин $\beta'_{ik} = \beta'_{ki}$, зависящую от четырех произвольных постоянных, согласно степени произвольности системы гомотетического типа S, соответствующей данному сферическому изображению. Если для каждой из систем величин β'_{ik} определим всевозможные потенциальные системы гомотетического типа, то будем иметь ∞^{16} новых систем величин $\beta''_{ik} = \beta''_{ki}$ и т. д. Мы установили, таким образом, метод, при помощи которого, исходя из некоторого данного сферического изображения потенциального типа, получаем бесконечный ряд новых сферических изображений все с бо́льшим и бо́льшим числом произвольных постоянных.

Существенным является вопрос, каким образом можно определить потенциальные системы гомотетического типа, соответствующие системе величин $\beta'_{ik} = \beta'_{ki}$, если известны все гомотетические системы первоначального сферического изображения. Мы докажем, что для определения упомянутых систем не требуется никакого интегрирования, так что бесконечный ряд различных сферических изображений, характеризуемый величинами β'_{ik}, β''_{ik}, ..., строится без всякого интегрирования.

Заметим предварительно, что, согласно Дарбу (Darboux S., т. IV, стр. 294), возможно определить с помощью квадратур все триортогональные системы одного сферического изображения с системой S', получаемой инверсией системы S, если известны все системы одного сферического изображения с S. Формулы Дарбу имеют вид

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + \frac{2x}{r^2}(\Omega - xx_1 - yy_1 - zz_1), \\ y_1' &= y_1 + \frac{2y}{r^2}(\Omega - xx_1 - yy_1 - zz_1), \\ z_1' &= z_1 + \frac{2z}{r^2}(\Omega - xx_1 - yy_1 - zz_1), \end{aligned} \tag{7}$$

где через $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_1', y_1', z_1'$ обозначены соответственно выражения координат точки пространства в виде функций параметров данной системы S, системы S_1 — одного сферического изображения с данной — и системы S_1' — одного сферического изображения с системой S', получаемой инверсией системы S. Функция Ω определяется квадратурой из соотношений

$$x_1 \frac{\partial x}{\partial \rho_i} + y_1 \frac{\partial y}{\partial \rho_i} + z_1 \frac{\partial z}{\partial \rho_i} = \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_i} \qquad (i = 0, 1, 2). \tag{8}$$

Полагая

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 - \Omega = \theta, \tag{9}$$

можем придать формулам Дарбу (7) более простой вид:

$$x_1' = x_1 - \frac{2x}{r^2}\theta, \quad y_1' = y_1 - \frac{2y}{r^2}\theta, \quad z_1' = z_1 - \frac{2z}{r^2}\theta, \tag{10}$$

причем функция θ определяется квадратурой из соотношений

$$x \frac{\partial x_1}{\partial \rho_i} + y \frac{\partial y_1}{\partial \rho_i} + z \frac{\partial z_1}{\partial \rho_i} = \frac{\partial \theta}{\partial \rho_i} \qquad (i = 0, 1, 2). \tag{11}$$

Пользуясь формулами (32) § 2 и отмечая величины H_i и P_i, относящиеся к системе S_1, значками $^{(1)}$, можем соотношения (8) и (11) заменить следующими:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho_i} = H_i P_i^{(1)}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \rho_i} = H_i^{(1)} P_i. \tag{13}$$

Если S и S_1 — системы гомотетического типа, то

$$H_i = \sigma P_i, \qquad H_i^{(1)} = \sigma' P_i^{(1)} \tag{14}$$

(§ 7), где σ' вообще отлично от σ. Вставляя значения (14) для H_i и $H_i^{(1)}$ в соотношения (12) и (13), получаем

$$\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \rho_i} = \sigma' \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_i}$$

и можем взять $\theta = \frac{\sigma'}{\sigma}\Omega$. Сопоставляя этот результат с равенством (9), получаем

$$\theta = \frac{\sigma'}{\sigma + \sigma'}(xx_1 + yy_1 + zz_1), \tag{15}$$

и, следовательно, формулы (10) принимают вид

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - \frac{2\sigma'}{\sigma + \sigma'} \cdot \frac{x}{r^2}(xx_1 + yy_1 + zz_1), \\ y_1' &= y_1 - \frac{2\sigma'}{\sigma + \sigma'} \cdot \frac{y}{r^2}(xx_1 + yy_1 + zz_1), \\ z_1' &= z_1 - \frac{2\sigma'}{\sigma + \sigma'} \cdot \frac{z}{r^2}(xx_1 + yy_1 + zz_1). \end{aligned} \tag{16}$$

Для координат x, y, z имеем выражения вида (2), для x_1, y_1, z_1 — выражения того же типа с заменой σ через σ'. Формулы (16), очевидно, дают для x_1', y_1', z_1' выражения опять того же вида, и, следовательно, система S_1' есть система *гомотетического* типа. Предположим, что мы определили всевозможные системы S_1 гомотетического типа, соответствующие данной системе величин β_{ik}. При помощи формул (16) без всякого интегрирования найдем ∞^4 систем гомотетического типа S_1', соответствующих системе величин β_{ik}'. Совокупность систем S_1' зависит от параметра σ' и от трех постоянных, которые линейно входят в выражения координат x_1, y_1, z_1, а следовательно, и в выражения x_1', y_1', z_1' (и тоже линейно). Таким образом, согласно результатам § 7, мы имеем всевозможные гомотетические системы S_1' нового сферического изображения (β_{ik}').

Формулы (16) имеют простой геометрический смысл. Проводя радиусы-векторы r и r_1 из начала в соответственные точки систем S и S_1, т. е. в такие точки, в которых нормали параллельны между собою, имеем

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = rr_1 \cos(r, r_1),$$

и, следовательно, система S_1' может быть получена следующим построением: проектируем радиус-вектор r_1 на направление вектора r, изменяем проекцию в отношении $-\frac{2\sigma'}{\sigma+\sigma'}$ и складываем полученный вектор r_0 (геометрически) с вектором r_1; геометрическая сумма векторов r_0 и r_1 есть радиус-вектор системы S_1'. Если правые части равенств (16) умножим на $\frac{\sigma+\sigma'}{\sigma-\sigma'}$, что не имеет существенного значения, то придем к несколько иному толкованию наших формул: если A и B — две точки систем S и S_1, определяемые соответственно координатами (x, y, z) и (x_1, y_1, z_1), то опускаем из B перпендикуляр BC на радиус-вектор точки A; отрезок BC делим в отношении $-2\sigma' : (\sigma + \sigma')$; полученная точка и есть точка системы S_1', определяемая координатами (x_1', y_1', z_1'). Применяя это построение к точкам двух соответственных поверхностей систем S и S_1, получаем поверхность системы S_1'.

§ 14. Случай $\sigma' = -\sigma$

Рассуждения, которыми мы пользовались в предыдущем параграфе для определения функции θ, становятся, очевидно, неприменимыми в случае $\sigma' = -\sigma$. Обращаясь к общим формулам (10), видим, что при $\sigma' = -\sigma$ они могут определять систему гомотетического типа в том и только в том случае, если θ есть функция разностей $u = \rho_1 - \rho$, $v = \rho_2 - \rho$ или, иначе, если

$$\delta\theta = 0. \tag{17}$$

Складывая почленно равенства (11) предшествующего параграфа и принимая во внимание условие (17) и соотношения

$$\delta x_1 = \sigma' x_1,\ \delta y_1 = \sigma' y_1,\ \delta z_1 = \sigma' z_1$$

(ср. § 9), получаем

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0. \tag{18}$$

Равенство (18) представляет необходимое и достаточное условие для того, чтобы формулы (10) определяли систему S_1' гомотетического типа. Заметим, что выражение $xx_1 + yy_1 + zz_1$ при $\sigma' = -\sigma$, вообще говоря, равно постоянной величине. Действительно, дифференцируя это выражение по ρ, ρ_1, ρ_2 и принимая во внимание формулы (32) § 2 и соотношения (14) § 13, имеем

$$\frac{\partial}{\partial\rho_i}(xx_1 + yy_1 + zz_1) = H_i P_i^{(1)} + H_i^{(1)} P_i = (\sigma + \sigma') P_i P_i^{(1)} = 0,$$

откуда $xx_1 + yy_1 + zz_1 = \text{const}$. Общие выражения x_1, y_1, z_1 зависят линейно от трех произвольных постоянных C_0, C_1, C_2 (ср. § 17); таким образом,

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = a_0 C_0 + a_1 C_1 + a_2 C_2,$$

где a_0, a_1, a_2 — постоянные величины, и, следовательно, соотношение (18) накладывает одно условие на постоянные C_0, C_1, C_2. По-видимому, мы получим только ∞^2 (вместо ∞^3) систем гомотетического типа S_1', соответствующих значению $\sigma' = -\sigma$, согласно степени произвольности в выборе системы S_1; но мы знаем еще одну систему гомотетического типа, для которой $\sigma' = -\sigma$, а именно систему S', получаемую инверсией системы S. Складывая ее геометрически (в произвольном отношении) с вышеупомянутыми системами S_1', получим ∞^3 систем гомотетического типа, для которых $\sigma' = -\sigma$. К тому же результату придем, если заметим, что функция θ в данном случае определяется из равенств (11) с помощью квадратуры, которая вводит одно произвольное постоянное; таким образом, выражения x_1', y_1', z_1' из формул (10) зависят всего от *трех* произвольных постоянных.

Заметим, что условие (18) имеет простой геометрический смысл: радиусы-векторы системы S', для которой имеет место это условие, должны быть перпендикулярны к соответственным радиусам-векторам системы S.

Возможно получить формулы, соответствующие случаю $\sigma' = -\sigma$, из общих формул (16) предыдущего параграфа с помощью перехода к пределу. Для этого полагаем $\sigma' = -\sigma + \varepsilon$, выбираем систему S_1 так, чтобы выражение $xx_1 + yy_1 + zz_1$ при $\varepsilon = 0$ обращалось в нуль, и переходим к пределу, полагая $\varepsilon = 0$. Для того чтобы получить самое общее решение, надо присоединить к правым частям полученных равенств члены

$$k\frac{x}{r^2}, \quad k\frac{y}{r^2}, \quad k\frac{z}{r^2},$$

где k — произвольное постоянное.

§ 15. Построение потенциальных систем общего типа, соответствующих ряду сферических изображений, который получается последовательной инверсией

Если для данного сферического изображения, характеризуемого величинами β_{ik}, мы знаем всевозможные потенциальные системы, то формулы Дарбу (7) и (10) дают нам возможность построить всевозможные потенциальные системы, соответствующие сферическому изображению, которое характеризуется величинами β'_{ik}, и т. д. Определение потенциальных систем данного сферического изображения (β_{ik}) требует интегрирования трех совокупных уравнений Лапласа (ср. § 4). Мы можем, однако, избежать этого интегрирования и ограничиться определением всевозможных систем гомотетического типа данного сферического изображения, для чего достаточно проинтегрировать обыкновенное линейное уравнение третьего порядка (§ 7). Действительно, в таком случае, согласно §§ 13 и 14, мы находим без всякого интегрирования системы гомотетического типа для всего ряда сферических изображений $(\beta'_{ik}, \beta''_{ik}, \ldots)$, а затем можем применить результаты § 4 для получения из этих частных решений задачи более общих.

Допустим, что S_1, S_2, S_3 — три системы гомотетического типа, геометрическим сложением которых получается самая общая гомотетическая система данного сферического изображения. Выражения координат точки пространства в виде функций параметров этих систем будем отмечать соответственными значками; очевидно, выражения эти существенно зависят от параметра σ, входящего в равенства (94) § 7. В таком случае, согласно

результатам § 4, формулы

$$\begin{aligned}
x &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_1'} x_1 f_1(\sigma)\,d\sigma + \int_{\sigma_2}^{\sigma_2'} x_2 f_2(\sigma)\,d\sigma + \int_{\sigma_3}^{\sigma_3'} x_3 f_3(\sigma)\,d\sigma,\\
y &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_1'} y_1 f_1(\sigma)\,d\sigma + \int_{\sigma_2}^{\sigma_2'} y_2 f_2(\sigma)\,d\sigma + \int_{\sigma_3}^{\sigma_3'} y_3 f_3(\sigma)\,d\sigma,\\
z &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_1'} z_1 f_1(\sigma)\,d\sigma + \int_{\sigma_2}^{\sigma_2'} z_2 f_2(\sigma)\,d\sigma + \int_{\sigma_3}^{\sigma_3'} z_3 f_3(\sigma)\,d\sigma,
\end{aligned} \tag{19}$$

в которых $f_1(\sigma)$, $f_2(\sigma)$, $f_3(\sigma)$ — произвольные функции, а пределы квадратур — постоянные величины, определяют потенциальную систему одного сферического изображения с S_1, S_2, S_3. Формулы (19) зависят от трех произвольных функций; естественно поэтому ожидать, что они определяют самую общую потенциальную систему данного сферического изображения. Во всяком случае решение, полученное нами, весьма обширное, и нетрудно было бы показать, что по крайней мере в смысле, установленном Ампером, оно есть общее решение задачи.

§ 16. Применение метода к потенциальным системам, для которых одно из семейств координатных линий состоит из плоских кривых

Применим изложенный метод преобразования к потенциальным системам, сферическое изображение которых характеризуется условием

$$\lambda = Z. \tag{20}$$

В § 11 мы доказали, что семейство линий $\rho_1 = \mathrm{const}$, $\rho_2 = \mathrm{const}$ для всех систем этого рода состоит из плоских кривых, плоскости которых параллельны оси z. Самая общая система гомотетического типа, соответствующая данному сферическому изображению, может быть получена геометрическим сложением систем S_0, S_1, S_2, из которых две последние[1]), согласно результатам § 11,

---

[1]) Случай $\sigma = \mp 1$ оставляем в стороне.

принадлежат к числу циклических; что касается до первой (S_0), то семейство $\rho = \text{const}$, входящее в состав этой системы, состоит из гомотетических сфер (§ 11).

Подвергая инверсии систему S_0, мы получим, очевидно, систему S_0', в состав которой точно так же входит семейство гомотетических сфер. Ортогональными траекториями этого семейства служат, очевидно, плоские кривые, и, следовательно, согласно результатам § 11, мы получаем потенциальную систему, сферическое изображение которой характеризуется тем же самым соотношением (20), что и сферическое изображение системы, из которой мы исходили.

Подвергая инверсии системы S_1 и S_2, которые принадлежат к числу циклических, получаем, очевидно, тоже циклические системы S_1', S_2'. Ортогональными траекториями семейства $\rho = \text{const}$ той и другой системы служат плоские кривые — окружности; следовательно, согласно результатам § 11, мы опять получаем потенциальные системы, сферическое изображение которых характеризуется соотношением (20). К тому же результату придем, если будем подвергать инверсии какую-либо из систем, получаемых геометрическим сложением систем S_1 и S_2 (см. § 11).

Таким образом, мы имеем возможность по данному сферическому изображению, характеризуемому соотношением (20), построить целый ряд новых сферических изображений того же типа, последовательно применяя изложенный метод преобразования к системам S_0, S_1, S_2 и к системам, получаемым геометрическим сложением S_1 и S_2, для каждого из вновь получаемых сферических изображений. Сферическое изображение, характеризуемое соотношением (20), вполне определяется функцией $\psi(\varphi)$, введенной нами в § 9 части I; поступая по предыдущему, мы строим целый ряд функций $\psi(\varphi)$ по данной — начальной. Определение систем S_0, S_1, S_2 зависит, как мы знаем (§ 11), от интегрирования некоторого линейного уравнения второго порядка (часть I, § 21, формула (93)), одним из коэффициентов которого служит $\psi(\varphi)$. Применяя вышеуказанный метод преобразования, мы получаем целый ряд подобных уравнений, которые интегрируются одновременно с начальным уравнением.

Подвергаем, наконец, инверсии систему S, получаемую геометрическим сложением систем S_0 и S_1 или S_0 и S_2, или S_1 и S_2. Ортогональными траекториями семейства $\rho = \text{const}$ для системы S служат плоские кривые (отличные от окружностей), плоскости которых параллельны оси z, но не проходят через эту ось (см. § 11). При инверсии получаем систему S', для которой ортогональные траектории семейства $\rho = \text{const}$ лежат на сферах, проходящих через начало координат и имеющих центры на плоскости xy; притом траектории эти необходимо отличны от окружностей и, следовательно, принадлежат к числу кривых двоякой кривизны. Таким образом, мы получаем сферическое изображение, для которого уже не имеет места соотношение (20). Так как для системы S выполняется соотношение

$$H = z + ae^{\sigma\rho}$$

(см. § 11, формула (29)), то в силу формул (1) § 13 имеем для системы S'

$$H' = z' + ae^{\sigma\rho}(x'^2 + y'^2 + z'^2), \tag{21}$$

и, следовательно, она принадлежит к числу исследованных в § 12. Сферическое изображение системы S' характеризуется, согласно § 12, тем условием, что выражение $\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \frac{\partial\lambda}{\partial v} + \lambda^2 - h$ удовлетворяет трем уравнениям, определяющим косинусы X, Y, Z нормалей семейства $\rho = \text{const}$. Обратно, всякое сферическое изображение этого типа может быть получено указанным приемом. Действительно, согласно § 12, в числе систем гомотетического типа данного сферического изображения всегда существует система, характеризуемая соотношением, которое отличается от соотношения (21) постоянным множителем при z (§ 12, формула (45)) и легко может быть приведено к виду (21); подвергая ее инверсии, получаем, очевидно, систему, сферическое изображение которой характеризуется соотношением (20). Таким образом, системы, которые мы исследовали в § 12, могут быть полностью получены применением установленного метода преобразования к системам, которые были рассмотрены в § 11, В числе гомотетических систем, имеющих общее сферическое изображение с полученной системой S', есть системы, для которых имеет место соотношение вида

$$H = \varphi_0(\rho)(x^2 + y^2 + z^2) + \varphi_1(\rho)\, x + \varphi_2(\rho)\, y + \varphi_3(\rho)\, z + \varphi_4(\rho), \quad (22)$$

и системы, для которых подобное соотношение не имеет места. При дальнейшем применении метода мы можем подвергать инверсии систему того или другого рода. В первом случае получим, очевидно, систему того же типа, так как соотношение (22) при инверсии переходит в соотношение такого же вида. Во втором случае получим систему S'', для которой соотношение вида (22) не имеет места. Сферическое изображение системы S'', как нетрудно убедиться, вообще говоря, не удовлетворяет условиям § 12, и, таким образом, продолжая процесс далее и далее, будем получать сферические изображения существенно новых типов.

ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ, ДОПУСКАЮЩИХ НЕПРЕРЫВНУЮ ГРУППУ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КОМБЕСКЮРА[1]

Фуше напечатал здесь же интересное сообщение о триортогональных системах поверхностей, где поверхности одного семейства допускают одно и то же сферическое изображение линий кривизны[2].

В моих собственных исследованиях ортогональных систем я пришел, не зная сообщения Фуше, к рассмотрению тех же самых специальных систем с другой точки зрения. Поскольку результаты, к которым я пришел, позволяют продвинуть далее развитие теории этих систем, я хочу изложить наиболее важные из тех среди них, которые касаются темы, затронутой Фуше.

Рассматриваемые ортогональные системы могут быть определены тем, что они *допускают непрерывную группу преобразований Комбескюра.*

При подходящем выборе параметров можно привести уравнения траектории группы к виду $\rho_1 - \rho = \text{const}$, $\rho_2 - \rho = \text{const}$, где ρ, ρ_1, ρ_2 — параметры трех семейств системы. Девять конусов X, Y, Z, X_1, ..., очевидно, являются функциями разностей $u = \rho_1 - \rho$, $v = \rho_2 - \rho$; вводя это условие в уравнения Дарбу[3]), получаем следующие выражения для величин β_{ik}, которые определяют сферическое изображение системы:

$$\beta_{ik} = \beta_{ki} = \sqrt{\frac{\partial^2 V}{\partial\rho_i\, \partial\rho_k}}, \quad (1)$$

---

[1]) Sur les systèmes orthogonaux admettant un groupe continu de transformations de Combescure, Compt. rend. Acad. Sci. Paris **131** (1900), 668—671. (Перевод С. П. Финикова.)

[2]) Compt. rend. Acad. Sci. Paris, Janvier 1898.

[3]) G. Darboux, Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes, Paris, 1897, стр. 188—190.

где V — функция переменных u, v. Положим $\frac{\partial V}{\partial \rho} = \lambda$; функция V и, следовательно, величины β_{ik} вполне определяются следующим условием: выражение $\theta = \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \lambda^2$ должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\dfrac{\partial \theta}{\partial u}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}} + \frac{\dfrac{\partial \theta}{\partial v}}{\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}}\right), \tag{2}$$

которое является тангенциальным уравнением Лапласа относительно системы линий кривизны поверхностей $\rho = \mathrm{const}$. Это замечание позволяет получить достаточно общее решение задачи, принимая

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \lambda^2 = a\lambda + b.$$

Возвращаясь к общему случаю, легко получаем из уравнений Дарбу [1])

$$\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i} = \beta_{ik} H_i, \tag{3}$$

что величины H_i^2 будут частными производными одной и той же функции

$$\omega\,(\rho, \rho_1, \rho_2);$$

отсюда вытекает следующая форма линейного элемента пространства:

$$ds^2 = \frac{\partial \omega}{\partial \rho} d\rho^2 + \frac{\partial \omega}{\partial \rho_1} d\rho_1^2 + \frac{\partial \omega}{\partial \rho_2} d\rho_2^2. \tag{4}$$

Три семейства системы состоят из поверхностей (S) Пето [2]). Среди многочисленных интересных свойств этих поверхностей я остановлюсь только на следующих:

1. *Каждая поверхность* (S) *делится линиями кривизны на бесконечно малые прямоугольники, стороны которых пропорциональны соответствующим радиусам геодезической кривизны.*

[1]) См. сноску [3]) на стр. 285.

[2]) A. Petot, Compt. rend. Acad. Sci. Paris, 22 Juin 1891.

2. *Два уравнения Лапласа (точечное и тангенциальное) относительно системы линий кривизны имеют общее решение.*

3. *Определение линии кривизны поверхности S требует простых квадратур.*

Обозначая через P, P_1, P_2 расстояния от начала до трех касательных плоскостей ортогональной системы, будем иметь, вообще говоря, шесть уравнений

$$\frac{\partial P_k}{\partial \rho_i} = \beta_{ki} P_i. \tag{5}$$

Для наших систем имеем $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, и уравнения (5) будут совпадать с уравнениями (3), которые определяют величины H_i. Следовательно, когда будет найдена ортогональная система Σ этого рода, то получим две системы Σ_1 и Σ_{-1} того же рода, если рассматривать величины H_i относительно системы Σ как величины P_i системы Σ_i, а величины P_i относительно системы Σ как величины H_i системы Σ_{-1}. Продолжая так же, получим бесконечную последовательность ортогональных систем

$$\ldots,\ \Sigma_{-2},\ \Sigma_{-1},\ \Sigma,\ \Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \ldots, \tag{6}$$

допускающих одно и то же сферическое изображение.

Все системы серии (6) становятся тождественными системе Σ, если

$$H_i = \sigma P_i,\quad \sigma = \mathrm{const}. \tag{7}$$

Поскольку величины H_i и P_i относительно одной и той же системы связаны уравнением

$$H_i = \frac{\partial P_i}{\partial \rho} + \frac{\partial P_i}{\partial \rho_1} + \frac{\partial P_i}{\partial \rho_2}, \tag{8}$$

легко обнаружить, что системы, соответствующие условию (7), образованы тремя семействами гомотетических поверхностей; системы этого рода рассматривал Пето [1]).

Определение всех гомотетических систем, соответствующих заданным значениям величин β_{ik}, приводит к интегрированию обыкновенного линейного уравнения третьего порядка; это следует из уравнений (7), (8) и (5).

[1]) См. сноску [2]) на стр. 286.

Посредством инверсии из гомотетической системы с полюсом инверсии в центре гомотетии получается система того же рода, но с другим сферическим изображением. Определение всех гомотетических систем, соответствующих новым значениям величины β_{ik}, не требует интегрирования. Таким образом, *если получена только одна система величин* $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, *то достаточно проинтегрировать одно обыкновенное линейное уравнение третьего порядка, чтобы получить бесконечную последовательность значений величин* β_{ik} *и все соответствующие гомотетические ортогональные системы.*

Обозначим через x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 координаты относительно трех систем, соответствующих трем решениям основного линейного уравнения третьего порядка; эти координаты зависят от параметра σ в силу уравнений (7). Если обозначить через $\varphi_1(\sigma)$, $\varphi_2(\sigma)$, $\varphi_3(\sigma)$ три произвольные функции, то формулы

$$x = \int_{\sigma_1}^{\sigma_1'} x_1\varphi_1(\sigma)\,d\sigma + \int_{\sigma_2}^{\sigma_2'} x_2\varphi_2(\sigma)\,d\sigma + \int_{\sigma_3}^{\sigma_3'} x_3\varphi_3(\sigma)\,d\sigma$$

будут определять общую ортогональную систему, допускающую непрерывную группу преобразований Комбескюра, соответствующих заданным значениям величин β_{ik}.

ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ, ДОПУСКАЮЩИХ ГРУППУ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КОМБЕСКЮРА[1]

В недавно опубликованной заметке[2] я кратко изложил некоторые свойства ортогональных систем, допускающих непрерывную группу преобразований Комбескюра. Поскольку позднее Фуше[3] пожелал вернуться к той же теме, я предполагаю, с своей стороны, сделать несколько замечаний, которые за недостатком места не были напечатаны в моей предыдущей заметке.

1. Рассмотрим в произвольной точке (x, y, z) три соприкасающиеся плоскости к координатным линиям ρ_i ортогональной системы. Эти плоскости определяются уравнениями

$$\beta_{il}A_k - \beta_{kl}A_i = 0, \tag{1}$$

где $A_i = 0$ — нормальные уравнения трех касательных плоскостей в точке (x, y, z). Для системы рассматриваемого вида имеем $\beta_{ik} = \beta_{ki}$; следовательно, *три соприкасающиеся плоскости в точке* (x, y, z) *пресекаются по одной и той же прямой.*

Легко видеть, что это свойство характеризует рассматриваемые системы.

2. Пусть

$$\ldots,\ \Sigma_{-2},\ \Sigma_{-1},\ \Sigma,\ \Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \ldots \tag{2}$$

— бесконечная последовательность ортогональных систем, упомянутая в предыдущей заметке (стр. 287). Пере-

[1]) Sur les systèmes orthogonaux admettant un groupe de transformations de Combescure, Compt. rend. Acad. Sci. Paris 132 (1901), 74—77. (Перевод С. П. Финикова.)

[2]) Compt. rend. Acad. Sci. Paris 131 (1900), 668—671. (Русский перевод: Об ортогональных системах, допускающих непрерывную группу преобразований Комбескюра, наст. сб., стр. 285—288.)

[3]) M. Fouché, Compt. rend. Acad. Sci. Paris, 26 Novembre 1900.

ход от системы Σ_k к системе Σ_{k+1} осуществляется посредством формул

$$x_{k+1} = \frac{\partial x_k}{\partial \rho} + \frac{\partial x_k}{\partial \rho_1} + \frac{\partial x_k}{\partial \rho_2}, \tag{3}$$

которые получаются из уравнений (8) моей предыдущей заметки (стр. 287) и общих формул теории ортогональных систем. Геометрическое значение формул (3) очевидно.

3. Системы последовательности (2) не будут различны, если

$$x_1 = \sigma x, \quad y_1 = \sigma y, \quad z_1 = \sigma z \quad (\sigma = \text{const}).$$

Тогда система Σ допускает группу преобразований подобия (гомотетии) (стр. 287); она определяется уравнениями

$$x = e^{\sigma\rho}\xi(\rho_1 - \rho,\ \rho_2 - \rho), \qquad y = e^{\sigma\rho}\eta(\rho_1 - \rho,\ \rho_2 - \rho),$$
$$z = e^{\sigma\rho}\zeta(\rho_1 - \rho,\ \rho_2 - \rho), \tag{4}$$

которые легко получаются, если ввести в уравнения (3) предположение, которое мы только что сделали. Я не привожу параметр σ к единице заменой переменного $\sigma\rho_i \to \rho_i$, указанной Фуше[1]), потому что речь идет об определении всех систем, подобных *заданной* системе с величинами β_{ik}, тогда как цитированная замена переменных заменит β_{ik} на $\sigma\beta_{ik}$. Таким образом, существует ∞^4 подобных систем с одним и тем же сферическим изображением. Все системы, соответствующие определенному значению σ, получаются *геометрической композицией* трех из них, ибо общие выражения для координат x, y, z зависят линейно от трех констант, получаемых при интегрировании линейного уравнения третьего порядка, указанного в моей предыдущей заметке (стр. 288).

4. Последовательность (2) будет периодической, если

$$x = e^{\alpha_1\rho}\xi_1(\rho_1 - \rho,\ \rho_2 - \rho) + e^{\alpha_2\rho}\xi_2(\rho_1 - \rho,\ \rho_2 - \rho) + \ldots$$
$$\ldots + e^{\alpha_n\rho}\,\xi_n(\rho_1 - \rho,\ \rho_2 - \rho), \tag{5}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ представляют собой n корней двучленного уравнения степени n. Наиболее общая система этого рода, очевидно, получается геометрической композицией n подобных систем, соответствующих значениям $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ константы σ в уравнениях (4). Если $n = 2$, то семейство линий $\rho_1 - \rho = \text{const}$, $\rho_2 - \rho = \text{const}$ (траектории группы) составлено только из конических сечений.

5. Семейство $\rho_1 - \rho = \text{const}$, $\rho_2 - \rho = \text{const}$ траекторий группы образовано из прямых только для систем, указанных Пето (Petot), которые допускают группу подобных преобразований или группу переносов. Наиболее общая система, у которой траектории $\rho_1 - \rho = \text{const}$, $\rho_2 - \rho = \text{const}$ состоят из плоских линий, может быть получена геометрическим сложением из гомотетической системы S и системы S_1 с тем же сферическим изображением, что дает основание различать следующие три случая: 1) S_1 — гомотетическая система, соответствующая значению постоянной σ, отличной от того значения, от которого зависят координаты x, y, z системы S; 2) S_1 — система, допускающая группу переносов; 3) S_1 — система, получаемая дифференцированием по параметру σ функций x, y, z, определяемых уравнениями (4) для гомотетической системы с тем же значением σ, что и система S.

6. Допустим, что определены все гомотетические системы с заданным сферическим изображением. Пусть S — одна из этих систем, S' — гомотетическая система, полученная из системы S инверсией (с полюсом инверсии в центре гомотетии), и S_1 — какая-то из гомотетических систем с данным сферическим изображением, отличная от системы S. Тогда все гомотетические системы S_1' с тем же сферическим изображением, что и система S', получаются посредством следующих формул:

$$x_1' = x_1 - \frac{2\sigma}{\sigma + \sigma'}(xx_1 + yy_1 + zz_1)\frac{x}{r^2}, \tag{6}$$

где через $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_1', y_1', z_1'$ обозначены координаты соответственно для систем S, S_1, S_1'.

Уравнения (6) без затруднений получаются из общих уравнений Дарбу[1]). Пусть r и r_1 — радиусы-векторы

[1]) M. Fouché, Compt. rend. Acad. Sci. Paris, 26 Novembre 1900, стр. 874.

[1]) G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal, Paris, 1887—1896, т. IV, стр. 295.

в соответствующих точках для систем S и S_1. Спроектируем радиус-вектор r_1 на r; радиус-вектор точки системы S', очевидно, будет суммой вектора r_1 и вектора, полученного изменением проекции r_1 в постоянном отношении $2\sigma : (\sigma + \sigma')$, где σ и σ' — значения постоянной σ в уравнении (4) соответственно для систем S и S_1.

7. Чтобы дать хоть один пример, рассмотрим семейство гомотетичных параболоидов

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -2kz + k^2(a^2 + b^2). \tag{7}$$

Поскольку омбилические линии будут прямыми, проходящими через начало нормально ко всем параболоидам, семейство (7) будет семейством Ламе. Уравнения двух семейств, которые дополняют систему, легко пишутся в явной форме. Все поверхности системы будут алгебраическими, если отношение $a^2 : b^2$ соизмеримо.

Все эти результаты были сообщены на заседании Московского математического общества; в полном изложении они содержатся в работе (печатается), которая появится в Ученых записках Московского университета.

НОВЫЙ КЛАСС АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, КОТОРЫЕ, ОСТАВАЯСЬ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ, ДОПУСКАЮТ НЕПРЕРЫВНОЕ ИЗГИБАНИЕ [1])

1. Рассмотрим тетраэдральную поверхность 18-го порядка, декартовы координаты x, y, z которой определяются как функции двух переменных u, v следующими выражениями:

$$\begin{gathered} x = A_1(u-s_1)^{3/2}(v-s_1)^{3/2}, \qquad y = A_2(u-s_2)^{3/2}(v-s_2)^{3/2}, \\ z = A_3(u-s_3)^{3/2}(v-s_3)^{3/2}. \end{gathered} \tag{1}$$

Исключение параметров u, v приводит к хорошо известному уравнению

$$\begin{gathered} (s_2-s_3)\left(\frac{x}{A_1}\right)^{2/3} + (s_3-s_1)\left(\frac{y}{A_2}\right)^{2/3} + (s_1-s_2)\left(\frac{z}{A_3}\right)^{2/3} = \\ = (s_1-s_2)(s_2-s_3)(s_3-s_1). \end{gathered} \tag{2}$$

Кривые $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ высекают на рассматриваемой поверхности сопряженную систему, ибо три координаты x, y, z удовлетворяют одному линейному уравнению [2])

$$(u-v)\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} + \frac{3}{2}\frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{3}{2}\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0. \tag{3}$$

---

[1]) Une classe nouvelle de surfaces algébriques qui admettent une déformation continue en restant algébriques, Compt. rend. Acad. Sci. Paris 132 (1901), 302—304. (Перевод С. П. Финикова.)

[2]) G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal, Paris, 1887—1896, т. I, стр. 142.

Дифференцируя формулы (1), легко получим следующее выражение линейного элемента:

$$ds^2 = \frac{9}{4}[(a_0v^3 - 3a_1v^2 + 3a_2v - a_3)u - a_1v^3 + 3a_2v^2 - 3a_3v + a_4]\,du^2 + \frac{18}{4}[a_0u^2v^2 - 2a_1uv(u+v) + a_2(u^2 + 4uv + v^2) - 2a_3(u+v) + a_4]\,du\,dv + \frac{9}{4}[(a_0u^3 - 3a_1u^2 + 3a_2u - a_3)v - a_1u^3 + 3a_2u^2 - 3a_3u + a_4]\,dv^2, \quad (4)$$

где положено

$$\sum A_i^2 = a_0,\ \sum A_i^2 s_i = a_1,\ \sum A_i^2 s_i^2 = a_2,\ \sum A_i^2 s_i^3 = a_3,\ \sum A_i^2 s_i^4 = a_4. \quad (5)$$

Обратно, предположим, что линейный элемент определяется формулой (4) (постоянные a_i имеют произвольные фиксированные значения), и поставим себе целью найти все тетраэдральные поверхности, определяемые формулами вида (1) и допускающие заданный линейный элемент. Поставленная задача сводится в конце концов к определению шести величин A_i, s_i, удовлетворяющих уравнениям (5). Поскольку эта система содержит пять уравнений, *получается*, очевидно, *однопараметрическое семейство тетраэдральных поверхностей, наложимых одна на другую с сохранением сопряженной системы* $u = \text{const}$, $v = \text{const}$. Все поверхности семейства получаются *непрерывным изгибанием* из одной из них.

Определение этих поверхностей можно свести к решению кубичного уравнения, коэффициенты которого линейно зависят от произвольного параметра. Действительно, положим

$$(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) = \varphi(s) = s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3. \quad (6)$$

Составляя сумму первых четырех уравнений (5), умноженных соответственно на b_3, b_2, b_1, и поступая так же с четырьмя последними, получим

$$a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3 = 0,$$
$$a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4 = 0. \quad (7)$$

Обозначим через B_1, B_2, B_3 произвольную систему значений величин b_1, b_2, b_3, удовлетворяющих уравнениям (7); общие решения этих уравнений имеют вид

$$b_1 = B_1 + \sigma(a_0a_2 - a_1^2),\quad b_2 = B_2 + \sigma(a_1a_2 - a_0a_3),\quad b_3 = B_3 + \sigma(a_1a_3 - a_2^2), \quad (8)$$

где через σ обозначен произвольный параметр. Величины s_i будут корнями кубического уравнения $\varphi(s) = 0$, коэффициенты которого линейно зависят от параметра σ. После разрешения этого уравнения величины A_i получаются из системы (5), линейной относительно квадратов A_i^2, и задача решается без затруднений.

2. Вернемся к уравнению (2). Если предположить соответствующую поверхность известной, то величины A_i, s_i не будут вполне определены. Углубляя это замечание, легко видеть, что на каждой тетраэдральной поверхности (2) существует однопараметрическое семейство (∞^1) различных сопряженных систем, соответствующих формулам вида (1). Сравнивая этот результат с результатом, найденным ранее, получаем, что *тетраэдральная поверхность 18-го порядка* (2) *налагается на многообразие поверхностей того же вида, зависящее от двух произвольных параметров.*

3. В силу прекрасной теоремы Петерсона [1]) можно получить из произвольного семейства поверхностей, налагающихся одна на другую с сохранением сопряженной системы, бесконечное множество новых семейств того же рода. Приложим эту теорему к семейству тетраэдральных поверхностей, отмеченных в п. 1. Обозначая через x, y, z выражения координат для этого семейства (и, следовательно, зависящих от произвольного параметра σ), положим, согласно указанной выше теореме,

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = m\frac{\partial x}{\partial u},\quad \frac{\partial y_1}{\partial u} = m\frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial z_1}{\partial u} = m\frac{\partial z}{\partial u},$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = n\frac{\partial x}{\partial v},\quad \frac{\partial y_1}{\partial v} = n\frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{\partial z_1}{\partial v} = n\frac{\partial z}{\partial v}. \quad (9)$$

Исключение x_1, y_1, z_1 приводит к тому же уравнению Лапласа для трех координат x, y, z, поскольку это уравнение

[1]) Московский Математический сборник, т. I.

не может отличаться от уравнения (3); получаем

$$(u-v)\frac{\partial m}{\partial v}=(u-v)\frac{\partial n}{\partial u}=\frac{3}{2}(m-n). \qquad (10)$$

Система (10) эквивалентна следующей системе:

$$m=\frac{\partial\psi}{\partial u},\quad n=\frac{\partial\psi}{\partial v},\ (u-v)\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}-\frac{3}{2}\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{3}{2}\frac{\partial\psi}{\partial v}=0, \qquad (11)$$

и мы приходим к интегрированию хорошо известного уравнения Эйлера $E\,(^3/_2,\ ^3/_2)$. Всякое частное решение этого уравнения приводит к определенному семейству налагающихся поверхностей; координаты x_1, y_1, z_1 для этого семейства получаются квадратурами в силу уравнений (9). Обозначая через E, F, G коэффициенты линейного элемента, имеем, очевидно,

$$dx_1^2+dy_1^2+dz_1^2=m^2\,E\,du^2+2mnF\,du\,dv+n^2G\,dv^2. \qquad (12)$$

Уравнение $E\,(^3/_2,\ ^3/_2)$ допускает бесконечное множество целых решений [1]). Семейства налагающихся поверхностей, соответствующих этим частным решениям, составлены исключительно из алгебраических поверхностей.

[1]) G. D a r b o u x, Leçons sur la theorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal, Paris, 1887—1896, т. II, стр. 57.

ОБ ОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА [1])

Я недавно отметил достаточно широкий класс поверхностей, допускающих непрерывное изгибание с сохранением сопряженной системы [2]).

Все поверхности этого класса получаются преобразованием К. М. Петерсона из тетраэдральной поверхности 18-го порядка

$$x=A_1(u-s_1)^{3/2}(v-s_1)^{3/2},\quad y=A_2(u-s_2)^{3/2}(v-s_2)^{3/2},\quad z=A_3(u-s_3)^{3/2}(v-s_3)^{3/2}, \qquad (1)$$

которая является простейшей поверхностью рассматриваемого класса.

Я хочу дополнить мои результаты, определяя поверхность, ассоциированную в бесконечно малом изгибании этого рода (такое изгибание получается, если считать бесконечно малым произвольный параметр, обозначенный в указанной статье буквой σ). Впрочем, достаточно рассмотреть изгибание тетраэдральной поверхности (1), ибо преобразование Петерсона не меняет ассоциированной поверхности. Чтобы эффективно определить искомую поверхность, надо только построить двенадцать поверхностей Дарбу [3]), принимая за исходную поверхность S тетраэдральную поверхность (1) и рассматривая бесконечно малое изгибание, которое только что было определено. Поверхность (см. формулу (2) на стр. 293) этой

[1]) Sur certaine surface du troisième ordre, Compt. rend. Acad. Sci. Paris 132 (1901), 538—540. (Перевод С. П. Финикова.)

[2]) См. статью «Новый класс алгебраических поверхностей, которые, оставаясь алгебраическими, допускают непрерывное изгибание», наст. сб., стр. 293—296.

[3]) G. D a r b o u x, Leçons sur la théorie générales des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal, Paris, 1887—1896, т. IV, стр. 48—72.

совокупности — в точности искомая поверхность; она определяется уравнением

$$\left(\frac{x}{m_1}\right)^2+\left(\frac{y}{m_2}\right)^2+\left(\frac{z}{m_3}\right)^2-2\,\frac{xyz}{m_1m_2m_3}=1, \tag{2}$$

где через m_1, m_2, m_3 обозначены три константы, соответственно пропорциональные величинам

$$\frac{A_1}{(s_2-s_3)^2},\quad \frac{A_2}{(s_3-s_1)^2},\quad \frac{A_3}{(s_1-s_2)^2}.$$

Поверхность (2) является поверхностью третьего порядка с четырьмя двойными точками (коническими)

$(m_1,\ m_2,\ m_3)$, $(m_1,\ -m_2,\ -m_3)$, $(-m_1,\ m_2,\ -m_3)$ и $(-m_1,\ -m_2,\ m_3)$,

что легко обнаружить, если перенести начало координат в одну из этих точек. Асимптотические линии поверхности (2) соответствуют сопряженной системе $u=\mathrm{const}$, $v=\mathrm{const}$ поверхности (1), если соответствие устанавливается параллельностью касательных плоскостей. Выражения для косинусов нормали поверхности (2) совпадают с таковыми для поверхности (1), откуда немедленно следует, что эти косинусы пропорциональны трем функциям

$$\theta_1=\frac{s_2-s_3}{A_1}\frac{\sqrt{u-v}}{\sqrt{(u-s_1)(v-s_1)}},\quad \theta_2=\frac{s_3-s_1}{A_2}\frac{\sqrt{u-v}}{\sqrt{(u-s_2)(v-s_2)}},$$

$$\theta_3=\frac{s_1-s_2}{A_3}\frac{\sqrt{u-v}}{\sqrt{(u-s_3)(v-s_3)}}, \tag{3}$$

которые удовлетворяют одному и тому же линейному уравнению

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{4(u-v)^2}\theta. \tag{4}$$

Поверхность (2) принадлежит к классу поверхностей, полная кривизна K которых выражается в параметрах u, v асимптотических линий следующим образом:

$$K=-\frac{1}{[\varphi(u)+\psi(v)]^2}. \tag{5}$$

Это следует из общей формулы [1])

$$K=-\frac{1}{(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2)^2}$$

и выражений (3) для величин θ_i; этот результат, впрочем, очевиден a priori в силу исследований Коссера [2]).

Класс поверхностей (5) изучался Бианки [3]), который указал для них много интересных свойств. В частности, если определить поверхность S_1, соответствующую ортогональности линейных элементов поверхности S рассматриваемого класса, и провести через точки поверхности S_1 прямые, параллельные нормалям S, то получится прямолинейная конгруэнция (g), которую можно рассматривать как циклическую конгруэнцию бесконечным числом различных способов. Определение конгруэнций (g), соответствующих поверхности (2), сводится к интегрированию уравнения (4); используя целые решения этого уравнения, придем к алгебраическим конгруэнциям (g).

Впрочем, число поверхностей класса (5), которые известны в конечном виде, достаточно ограничено; вот почему я считал, что имеет некоторый интерес отметить такую простую поверхность (2), принадлежащую к рассматриваемому классу.

---

[1]) G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal, Paris, 1887—1896, т. IV, стр. 29—30.

[2]) Cosserat, Compt. rend. Acad. Sci. Paris, 1891.

[3]) L. Bianchi, Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali, Ann. di Mat., сер. 2, 18 (1890).

О НЕПРЕРЫВНОМ ИЗГИБАНИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ [1])

В недавно опубликованной заметке [2]) Цицейка (Tzitzeica) пожелал сослаться на одну из моих недавних заметок (Compt. rend. Acad. Sci. Paris **132** (1901), 302—304 [3])), напоминая, что он уже опубликовал ранее (там же **128** (1899), 1276—1277) некоторую часть моих результатов. Я стремлюсь исправить мою ошибку, отмечая, что речь идет о следующем результате, принадлежащем Цицейке: существует однопараметрическое семейство тетраэдральных поверхностей

$$x = A\,(a+u)^{3/2}\,(a+v)^{3/2},\ y = B\,(b+u)^{3/2}\,(b+v)^{3/2},\qquad z = C\,(c+u)^{3/2}\,(c+v)^{3/2}, \tag{1}$$

налагающихся друг на друга, имея общую сопряженную систему линий $u=\text{const}$, $v=\text{const}$.

Я хочу теперь сделать несколько замечаний относительно темы последней заметки Цицейки.

Речь идет о следующей проблеме: *найти все поверхности, допускающие сопряженную сеть, инвариантную в непрерывном изгибании.* Цицейка занимается частным случаем, который он считает общим [4]).

Да будет мне позволено заметить в противоположность мнению, выраженному Цицейкой, что это — не так. Действительно, анализ Цицейки приводит только к поверхностям, которые я отметил в цитированной заметке и которые получаются из тетраэдральных поверхностей

[1]) Sur le déformation continue des surfaces, Compt. rend. Acad. Sci. Paris 132 (1901), 1545—1547. (Перевод С. П. Финикова.)

[2]) Compt. rend. Acad. Sci. Paris 132 (1901), 1100—1102.

[3]) См. «Новый класс алгебраических поверхностей, которые, оставаясь алгебраическими, допускают непрерывное изгибание», наст. сб., стр. 293—296.

[4]) См. стр. 1100 в статье, указанной в сноске [2]).

с помощью преобразований Петерсона [1]). Что касается общей задачи, то известны частные решения, отличные от того решения, которое я только что отметил. Достаточно назвать результаты, полученные Буром (Bour), Бонне (Bonnet) — изгибание поверхностей вращения и поверхностей Монжа, Бианки (Bianchi) — изгибание поверхностей вращения, Фоссом (Voss) — изгибание поверхностей, допускающих сопряженную систему из геодезических линий, Петерсоном [2]).

В силу исследований Гишара (Guichard), Бианки, Коссера (Cosserat) определение поверхностей, допускающих сопряженную сеть, инвариантную в непрерывном изгибании, сводится в конце концов к изысканию уравнений Лапласа с равными инвариантами вида

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = k\theta, \tag{2}$$

три решения θ_1, θ_2, θ_3 которого удовлетворяют соотношению вида

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \varphi(u) + \psi(v). \tag{3}$$

Полагая $k = 0$, придем к большей части известных результатов; поверхности, изучаемые в заметках Цицейки и моей, соответствуют уравнению Эйлера $E\,(^1/_2)$. Наконец, вот результат, который кажется новым.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{2}{(u+v)^2}\,\theta \tag{4}$$

и его три решения

$$\theta_1 = 2\frac{U}{u+v} - U',\quad \theta_2 = 2\frac{U_1}{u+v} - U_1',\quad \theta_3 = 2\frac{V}{u+v} - V', \tag{5}$$

где U, U_1 и V — функции соответственно параметров u и v, удовлетворяющие соотношениям

$$U^2 + U_1^2 = a_0u^3 + a_1u^2 + a_2u + a_3,\qquad V^2 = a_0v^3 - a_1v^2 + a_2v - a_3. \tag{6}$$

[1]) Там же, стр. 1101—1102.

[2]) Матем. сб., т. 1.

Легко видеть, что три решения (5) удовлетворяют соотношению вида (3). Наиболее общая поверхность, допускающая сопряженную систему, инвариантную в непрерывном изгибании, и соответствующая уравнению (4), является огибающей плоскости

$$\theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z + \omega = 0, \tag{7}$$

где через ω обозначено общее решение уравнения (4).

Легко прийти к тому же результату, рассматривая соответствующую ассоциированную поверхность, которая получается из прямого коноида, если к нему приложить преобразование, указанное Бианки в одном из его мемуаров, напечатанных в Annali di Matematice (2-я серия, т. 18).

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ КЛАССЕ ГЛАВНЫХ ОСНОВАНИЙ ИЗГИБАНИЯ[1]

Рассмотрим поверхность S, и пусть Σ — одна из двух полостей поверхностей главных центров кривизны S.

Хорошо известно, что линии кривизны $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ исходной поверхности S соответствуют сопряженной системе линий (на поверхности Σ), из которых одно семейство, например семейство $v = \text{const}$, состоит из геодезических линий.

Допустим, что эта система будет *главным основанием*, т. е. такой системой, что поверхность Σ может непрерывно изгибаться, причем два семейства $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ остаются сопряженными. Почти очевидно, что конгруэнция тех главных касательных поверхности S, которые параллельны нормалям поверхности Σ, является конгруэнцией Рибокура, поскольку она имеет производящей поверхностью поверхность, одно из двух семейств асимптотических линий которой состоит из линий постоянного кручения; следовательно, поверхность S принадлежит к классу поверхностей, отмеченных Бианки[2].

Чтобы показать это прямым подсчетом, можно поступить следующим образом: необходимые и достаточные условия, чтобы сопряженная система $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ была главным основанием изгибания на поверхности Σ, выражаются двумя уравнениями:

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0, \qquad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \varphi(u) = \frac{U'}{U}, \tag{1}$$

где скобки Кристоффеля образованы из коэффициентов линейного элемента $d\sigma'$ сферического изображения поверхности Σ. Но сферическое изображение поверхности

[1]) Sur une classe particulière de systèmes conjugués persistants, Compt. rend. Acad. Sci. Paris 138 (1904), 885—888. (Перевод С. П. Финикова.)

[2]) Bianchi, Ann. di Mat., сер. 2, 18 (1890).

Σ известно, если известно изображение поверхности S, и коэффициенты $d\sigma'$ легко выражаются посредством коэффициентов e, g и их производных при условии, что линейный элемент $d\sigma$ сферического изображения поверхности S определяется уравнением

$$d\sigma^2 = e\,du^2 + g\,dv^2. \tag{2}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (1), заметим, что первое уравнение удовлетворяется тождественно; интегрируя второе по переменному u, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} = UV, \tag{3}$$

или же, приводя подходящим выбором переменного v функцию V к единице,

$$\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} = U\ ^{1)}. \tag{4}$$

Обозначим через E, G коэффициенты линейного элемента поверхности S; хорошо известные формулы Дарбу [2]) дают нам два уравнения:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} = -U,\\ \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}.\end{gathered} \tag{5}$$

Первое показывает, что поверхность S действительно принадлежит к классу, рассмотренному Бианки [3]). Подставляя во второе уравнение (5) значения $\sqrt{E}$ и $\sqrt{e}$, взятые из первого уравнения (5) и из уравнений (4), заметим, что $\sqrt{G}$ удовлетворяет уравнению Лапласа с равными

[1]) Если функция U приводится к постоянной, то поверхность Σ становится поверхностью Фосса (Voss), а соответствующая поверхность S принадлежит к классу поверхностей, отмеченных Гишаром. В общем случае можно привести U к такой функции от u, какую пожелаем,— например, можно принять $U = u$.

[2]) G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal, Paris, 1887—1896, т. II, стр. 336.

[3]) См. работу, приведенную в сноске [2]) на стр. 305,

инвариантами

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial^2 \sqrt{g}}{\partial u\,\partial v}\theta, \tag{6}$$

которое допускает частные решения

$$\frac{\xi}{U},\quad \frac{\eta}{U},\quad \frac{\zeta}{U},\quad \frac{\Pi}{U},$$

где ξ, η, ζ, Π — соответственно направляющие косинусы нормали и расстояние начала от касательной плоскости поверхности Σ.

Условие (4) можно написать в эквивалентной форме, которая позволит нам указать новое решение задачи главных оснований изгибания. С этой целью рассмотрим тангенциальное уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}\frac{\partial\vartheta}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}\frac{\partial\vartheta}{\partial v} \tag{7}$$

относительно сопряженной системы, образованной линиями кривизны поверхности S. Полагая там $\vartheta = g$ и интегрируя относительно параметра u, приходим к соотношению вида (3); следовательно, поверхности S рассматриваемого класса могут быть охарактеризованы следующим свойством: *тангенциальное уравнение относительно системы линий кривизны допускает частным решением коэффициент g линейного элемента $d\sigma^2$ сферического изображения.* Увидим также, что точечное уравнение допускает частным решением G. Но тангенциальное уравнение (7) допускает частными решениями направляющие косинусы X, Y, Z нормали; поверхность S принадлежит, следовательно, к рассмотренному классу, если коэффициент g равен линейной комбинации (с постоянными коэффициентами) трех косинусов X, Y, Z. Выбирая подходящим образом оси, можно предположить, в частности,

$$g = \frac{n - Z}{m}, \tag{8}$$

где n, m — две константы, из которых вторую можно привести к единице. Обозначим через Δ' дифференциальный параметр первого порядка относительно дифференциальной квадратичной формы $d\sigma^2$. Направляющий косинус Z удовлетворяет хорошо известному уравнению $\Delta'(Z) = 1 - Z^2$; подставляя сюда значение Z, взятое из уравнения (8), и принимая во внимание уравнение (4), имеем

$$4\left(\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial v}\right)^2 = \frac{1}{m^2} - \left(\frac{n}{m} - g\right)^2 - 4U^2 g. \tag{9}$$

Уравнение (9) легко интегрируется, и мы получаем выражение g в эллиптических функциях, модуль которых зависит от переменной u. Полученное частное решение зависит от одной произвольной функции. Если коэффициент g определен, то значение e можно получить из уравнения (4). Так же уравнение (8) снабдит нас значением Z; два остальных направляющих косинуса X и Y получаются квадратурами. Изыскание поверхностей S, соответствующих полученному сферическому изображению, сводится к интегрированию уравнения (6), которое определяет коэффициент G линейного элемента. Получив G, будем иметь E посредством уравнения (5) и, применяя формулы Олинда Родрига (Olinde Rodrigues), получим координаты x, y, z квадратурами.

Пусть θ_1 — частное решение уравнения (6); полагая $\sqrt{G} = \theta_1$, определяем соответствующую поверхность S_1. Построим поверхность Σ_1 (место центров кривизны поверхности S_1) и подсчитаем расстояние Π начала от касательной плоскости Σ_1. Деля Π на U, получаем новое решение θ_2 уравнения (6) и, следовательно, полагая $\sqrt{G} = \theta_2$, получаем новую поверхность S_2 рассматриваемого класса. Продолжая таким образом, придем к бесконечной последовательности $S_1, S_2, S_3, \ldots$ поверхностей; очевидно, можно было бы продолжить ее также и в обратном направлении.

Возьмем в качестве исходного решения

$$\theta_1 = a\frac{\zeta}{U} + b\frac{\eta}{U} + c\frac{\xi}{U} = \frac{1}{U\sqrt{e}}\left(a\frac{\partial X}{\partial u} + b\frac{\partial Y}{\partial u} + c\frac{\partial Z}{\partial u}\right).$$

Определение всех поверхностей S и Σ тогда потребует только квадратур. Так же легко увидеть, что определение поверхностей, налагающихся на поверхности Σ с сохранением рассматриваемой сопряженной системы, сводится к квадратурам.

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛАПЛАСА И ГЛАВНЫХ ОСНОВАНИЯХ ИЗГИБАНИЯ [1]

Рассмотрим поверхность Σ, и пусть $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ — два семейства линий, образующих сопряженную систему на этой поверхности. Рассмотрим конгруэнцию, образованную касательными к кривым $u = \text{const}$, и поверхность Σ_1, которая является второй полостью фокальной поверхности этой конгруэнции. Хорошо известно [2], что уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = a\frac{\partial\theta}{\partial u} + b\frac{\partial\theta}{\partial v} + c\theta, \tag{1}$$

которому удовлетворяют координаты точек поверхности Σ_1, получается преобразованием Лапласа из аналогичного уравнения для поверхности Σ. То же самое имеет место для тангенциальных уравнений относительно сопряженных систем на двух поверхностях Σ_1 и Σ.

Допустим, что линии $v = \text{const}$ на поверхности Σ будут коническими (по Петерсону), то есть линиями прикосновения семейства конусов, описанных около поверхности Σ. Поверхность Σ_1, очевидно, сводится к линии, и точечное уравнение относительно сопряженной системы на поверхности Σ характеризуется тем свойством, что один из ее инвариантов равен нулю [2].

Допустим теперь, что линии $u = \text{const}$ на поверхности Σ — плоские. Поверхность Σ_1, очевидно, сводится к развертывающейся поверхности, огибаемой плоскостями линий $u = \text{const}$ поверхности Σ, и семейство $u = \text{const}$ на развертывающейся поверхности Σ_1 образовано ее

[1] Sur la transformation de Laplace et les systèmes conjugués persistants, Compt. rend. Acad. Sci. Paris **145** (1907), 1256—1259. (Перевод С. П. Финикова.)

[2] G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal, Paris, 1887—1896, т. II, гл. 1, 2, 7.

прямолинейными образующими. Отсюда следует, что применение к поверхности Σ_1 вышеописанного построения приводит к линии — ребру возврата развертывающейся поверхности, ибо конгруэнция касательных сводится к системе прямолинейных образующих, и точечное уравнение относительно сопряженной системы на поверхности Σ характеризуется тем свойством, что одним преобразованием Лапласа приводится к уравнению, у которого один из инвариантов равен нулю.

Поскольку соотношение между поверхностями Σ и Σ_1 взаимно, можно высказать следующие два предложения:

1. *Если одно их двух семейств сопряженной системы составлено из плоских линий, то один из инвариантов тангенциального уравнения относительно этой системы равен нулю.*

2. *Если одно из двух семейств сопряженной системы состоит из конических линий, то тангенциальное уравнение относительно этой системы может быть преобразовано посредством преобразования Лапласа в уравнение, у которого один из инвариантов равен нулю.*

Эти два предложения приводят быстро к решению следующей задачи.

Определить все поверхности, которые могут непрерывно изгибаться с сохранением сопряженной системы, у которой одно из семейств этой системы составлено из плоских или конических линий.

Поскольку рассматриваемая сопряженная система сохраняется при изгибании, соответствующее тангенциальное уравнение должно быть уравнением с *равными инвариантами* и, следовательно, подходящим выбором переменных u, v и тангенциальных координат θ_i может быть приведено к одному из следующих двух видов [1]):

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=0, \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\frac{2}{(u+v)^2}\,\theta. \tag{2}$$

Решение поставленной задачи зависит от определения трех решений $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, удовлетворяющих соотношению вида

$$\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2=\varphi(u)+\psi(v). \tag{3}$$

[1]) См. сноску [2]) на стр. 309.

Для первого из уравнений (2) приходим к хорошо известным результатам; сопряженная система будет составлена из *двух семейств* линий, *плоских* и *конических* одновременно.

Для второго уравнения (2) я дал ранее [1]) общее решение

$$\theta_1=2\frac{U}{u+v}-U', \qquad \theta_2=2\frac{U_1}{u+v}-U_1', \ \theta_3=2\frac{V}{u+v}-V', \tag{4}$$

где U, U_1, V — соответственно функции от u или от v, удовлетворяющие соотношениям

$$\left.\begin{aligned} U^2+U_1^2&=a_0u^3+a_1u^2+a_2u+a_3,\\ V^2&=a_0v^3-a_1v^2+a_2v-a_3.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Поскольку поверхность Σ будет огибающей плоскостей

$$\theta_1x+\theta_2y+\theta_3z+\theta_4=0, \tag{6}$$

остается выбрать θ_4 так, чтобы линии $u=\text{const}$ были коническими. Легко видеть, что достаточно положить

$$\theta_4=2\frac{U_2}{u+v}-U_2', \tag{7}$$

где U_2 — произвольная функция переменного u. Вершины конусов будут расположены в плоскости $z=0$, и все конусы будут *алгебраическими* так же, как и линии $u=\text{const}$, ибо θ_i будут алгебраическими функциями от v. Поверхность Σ сама становится алгебраической, если функции U, U_1, U_2 будут алгебраическими.

Легко видеть, что непрерывное изгибание рассматриваемых поверхностей с сохранением сопряженной системы приводит к поверхностям того же рода. Действительно, один из инвариантов точечного уравнения, очевидно, обращается в нуль, если линии $u=\text{const}$ конические; впрочем, коэффициенты точечного уравнения зависят только от линейного элемента поверхности, и этот инвариант равен нулю для всех поверхностей, получаемых изгибанием данной поверхности; следовательно, линии $u=\text{const}$ будут *коническими* линиями на всех этих поверхностях.

[1]) См. статью «О непрерывном изгибании поверхностей», наст. б., стр. 301—303.

ОБ ИЗГИБАНИИ НА ГЛАВНОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ПЛОСКИХ ИЛИ КОНИЧЕСКИХ ЛИНИЙ [1])

§ 1. В своих исследованиях по дифференциальной геометрии [2]) К. М. Петерсон неоднократно рассматривает сопряженные системы линий на поверхности, в состав которых входят семейства линий, плоских или же конических, т. е. линий, обладающих тем свойстом, что касательные плоскости поверхности в точках такой линии образуют конус.

Отчасти сам Петерсон, отчасти другие авторы рассматривают случаи изгибания поверхностей на главном основании (т. е. непрерывного изгибания с сохранением сопряженной системы — главного основания), состоящем из двух семейств линий, плоских или конических.

Вопрос об изыскании всевозможных изгибаний такого рода можно считать в настоящее время исчерпанным. Для сопряженной системы, состоящей из двух семейств конических линий, его рассматривал Б. К. Млодзеевский [3]), причем оказалось, что, кроме известных уже ранее случаев, новых не получается.

Возможно поставить более общую задачу: найти все изгибания на главном основании, *одно* из семейств которого состоит из линий, плоских или конических. Решение этой задачи я наметил в общих чертах в заметке, помещенной в Comptes rendus Парижской Академии [4]); попутно, конечно, получается решение и ранее упомянутой задачи как частного случая.

Настоящий труд посвящен той же задаче, что и заметка в Comptes rendus; он содержит полное ее решение.

[1]) Матем. сб. 28 (1910—11), 167—187.
[2]) Матем. сб. 1.
[3]) Матем. сб. 24, стр. 417.
[4]) См. статью «О преобразовании Лапласа и главных основаниях изгибания», наст. сб., стр. 309—311.

Пусть на поверхности S имеется сопряженная система $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, и пусть S_1 есть поверхность, которая служит второй полостью фокальной поверхности для конгруэнции, образованной касательными к линиям $u = \text{const}$ на поверхности S. Координаты точек поверхности S удовлетворяют одному и тому же уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = a\,\frac{\partial\theta}{\partial u} + b\,\frac{\partial\theta}{\partial v} + c\theta. \tag{1}$$

Координаты точек поверхности S_1 удовлетворяют уравнению того же вида, так как система $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ на поверхности S_1 есть тоже система сопряженная. При этом уравнение Лапласа, аналогичное (1), для поверхности S_1 получается, как известно, из соответствующего уравнения (1) для поверхности S с помощью известного преобразования Лапласа. То же самое имеет место и для так называемых тангенциальных уравнений типа (1), которым удовлетворяют тангенциальные координаты для поверхности S и S_1 [1]).

Предположим, что линии $v = \text{const}$ на поверхности S конические. Тогда касательные к линиям $u = \text{const}$, сопряженным линиям $v = \text{const}$, в точках какой-либо линии семейства $v = \text{const}$ образуют, очевидно, конус и, следовательно, сходятся в одной точке — вершине конуса. Поверхность S_1, таким образом, обращается в линию — геометрическое место вершин конусов. В силу исследований Дарбу [1]) отсюда следует, что преобразование Лапласа, соответствующее нашему геометрическому построению, преобразует основное уравнение (1) для координат точек поверхности S в уравнение не второго, а только первого порядка, а потому один из инвариантов основного уравнения (1) для поверхности S равен нулю.

Обратно, очевидно, что если для поверхности S (не развертывающейся) один из инвариантов основного уравнения равен нулю, то одно из семейств сопряженной системы $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ состоит из конических линий.

[1]) G. Darboux, Leçons sur la theorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal, Paris, 1887—1896, т. II, гл. 1, 2, 7.

Соотношение между двумя полостями S и S_1 фокальной поверхности конгруэнции касательных сохраняется при взаимном преобразовании пространства. А потому, переходя к тангенциальным координатам и замечая, что при взаимном преобразовании конические линии преобразуются в плоские, в силу закона двойственности непосредственно приходим к такому положению:

1. *Если одно из семейств сопряженной системы на поверхности состоит из плоских линий, то один из инвариантов соответствующего этой системе тангенциального уравнения Лапласа равен нулю.*

Справедливо, очевидно, и обратное положение.

Предполагая, что на поверхности S семейство линий $u = \text{const}$ сопряженной системы $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ состоит из плоских линий, рассмотрим в этом случае то построение, о котором говорили выше. Очевидно, что вторая полость S_1 фокальной поверхности в данном случае есть развертывающаяся поверхность, образованная плоскостями линий $u = \text{const}$ на поверхности S. На поверхности S_1 линии $u = \text{const}$, очевидно,— прямолинейные образующие. Касательные к ним совпадают с этими образующими, и, таким образом, при попытке применить еще раз то же построение к поверхности S_1 мы приходим к предельному случаю построения, при котором конгруэнция касательных обращается в семейство образующих развертывающейся поверхности; все эти образующие касаются одной линии — ребра возврата поверхности S_1, и это ребро возврата играет роль второй полости фокальной поверхности, если за первую полость принять S_1. Отсюда ясно, что основное уравнение Лапласа для поверхности S_1 должно иметь один инвариант, равный нулю. В этом же нетрудно было бы убедиться непосредственно простыми выкладками, относя произвольную развертывающуюся поверхность к семейству $u = \text{const}$ ее образующих и к семейству $v = \text{const}$ любых других линий на этой поверхности. Легко видеть, что два коэффициента D'' и D' второй основной квадратичной формы поверхности равны нулю, и уравнение

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

которому удовлетворяют координаты x, y, z точек поверхности, имеет один инвариант, равный нулю. Принимая это во внимание, мы можем сказать, что основное уравнение Лапласа для поверхности S одним преобразованием Лапласа может быть преобразовано в уравнение с одним инвариантом, равным нулю.

В силу принципа двойственности, переходя от точечных координат к тангенциальным, непосредственно приходим к следующему положению:

2. *Если одно из семейств сопряженной системы на поверхности состоит из конических линий, то соответствующее этой системе тангенциальное уравнение Лапласа может быть преобразовано с помощью одного преобразования Лапласа в уравнение с одним инвариантом, равным нулю.*

§ 2. Положения 1 и 2 позволяют очень просто решить поставленную нами задачу.

Действительно, пусть на поверхности S сопряженная система $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ служит главным основанием изгибания. В таком случае, во-первых, соответствующее тангенциальное уравнение Лапласа должно иметь равные инварианты [1]) и, следовательно, подходящим выбором общего множителя, на который всегда можно умножить четыре однородных тангенциальных координаты θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, оно может быть приведено к виду

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = k\theta. \tag{2}$$

Касательная плоскость поверхности S при этом определяется уравнением

$$\theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z + \theta_4 = 0, \tag{3}$$

где θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 — четыре решения уравнения (2). Во-вторых, раз система $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ есть главное основание изгибания, три координаты θ_1, θ_2, θ_3 должны удовлетворять условию вида [1])

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \varphi(u) + \psi(v). \tag{4}$$

Предполагая, что одно из семейств $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ состоит из плоских линий, в силу положения 1

[1]) L. Bianchi, Geometria differenziale, т. II, гл. 15, 16.

заключаем, что один из инвариантов, а следовательно, и оба (поскольку они равны) уравнения (2) должны исчезать, а поэтому $k = 0$, и уравнение это принимает вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial u\, \partial v} = 0. \tag{5}$$

Обратно, если тангенциальные координаты θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 суть решения уравнения (5), то, применяя положение, обратное положению 1, легко заключаем, что оба семейства сопряженной системы $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ состоят из плоских линий.

Остается определить три решения θ_1, θ_2, θ_3 уравнения (5) так, чтобы для них удовлетворялось соотношение вида (4). Это не представляет труда, но соответствующие результаты все уже известны, так как определены все возможные изгибания с сохранением сопряженной системы, состоящей из двух семейств плоских линий.

Мы можем только присоединить к этим результатам следующее положение:

3. *Если одно из семейств сопряженной системы, служащей главным основанием изгибания, состоит из плоских линий, то то же самое имеет место и для второго семейства.*

§ 3. Пусть теперь семейство $u = \text{const}$ сопряженной системы состоит из конических линий, причем предполагаем, что эти линии, равно как и линии $v = \text{const}$, двоякой кривизны, так как в противном случае мы пришли бы опять к предыдущему. Уравнение (2) одним преобразованием Лапласа должно, в силу положения 2 § 1, преобразовываться в уравнение с исчезающим инвариантом; при этом, так как само уравнение (2) имеет равные инварианты, то ясно, что возможны два таких преобразования: как относительно переменного u, так и относительно v, и уравнение (2), в силу результатов исследований Дарбу [1]), подходящим выбором параметров u, v может быть приведено к виду

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{2}{(u+v)^2}\,\theta. \tag{6}$$

[1]) См. сноску на стр. 314.

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\theta = 2\,\frac{U+V}{u+v} - U' - V', \tag{7}$$

где U — произвольная функция u, а V — произвольная функция v. Если бы мы взяли четыре каких-либо решений θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 уравнения (6), то поверхность, огибающая плоскости, определяемые уравнением (3), еще не была бы поверхностью требуемого типа и семейство $u = \text{const}$ на ней не состояло бы из конических линий. Это следует из того, что положение, обратное положению 2 § 1, вообще говоря, несправедливо. Итак, пусть

$$\theta_i = 2\,\frac{U_i+V_i}{u+v} - U_i' - V_i' \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{8}$$

и определим восемь функций U_i, V_i так, чтобы семейство $u = \text{const}$ на поверхности, огибающей плоскости,

$$\theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z + \theta_4 = 0, \tag{3}$$

состояло из конических линий.

Предварительно заметим, что, не изменяя решения (7) уравнения (6), мы можем прибавить к функции V любой многочлен второй степени

$$av^2 + bv + c,$$

прибавив в то же время к функции U многочлен

$$-\,au^2 + bu - c.$$

В самом деле, от этого к θ прибавится

$$2\,\frac{a(v^2-u^2) + b(v+u) + c - c}{u+v} - 2av - b + 2au - b =$$
$$= 2a(v-u) + 2b - 2a(v-u) - 2b = 0.$$

Умножив уравнение (3) на $(u+v)$, представим его в виде

$$A_1 x + A_2 y + A_3 z + A_4 = 0, \tag{9}$$

причем

$$A_i = 2(U_i + V_i) - (u+v)(U_i' + V_i') \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{10}$$

При постоянном u уравнение (9) определяет семейство плоскостей, касающихся поверхности в точках линии $u = \mathrm{const}$. Ребро возврата развертывающейся поверхности, образуемой этим семейством, определим, как обычно, дифференцируя два раза по параметру v уравнение (9).

Таким образом придем к системе

$$\left.\begin{aligned} A_1x + A_2y + A_3z + A_4 &= 0,\\ A_1'x + A_2'y + A_3'z + A_4' &= 0,\\ A_1''x + A_2''y + A_3''z + A_4'' &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где штрихами обозначено дифференцирование по v. Если линии $u = \mathrm{const}$ конические, то ребро возврата обращается в точку — вершину конуса, и, следовательно, система (11) должна удовлетворяться для координат x, y, z вершины конуса, а эти координаты, очевидно,— функции одного параметра u (так как каждой линии $u = \mathrm{const}$ соответствует одна определенная вершина).

Для того чтобы не исключать частного случая конических линий — линий цилиндрических, перейдем к однородным координатам, положив

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

и тогда система (11) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 &= 0,\\ A_1'x_1 + A_2'x_2 + A_3'x_3 + A_4'x_4 &= 0,\\ A_1''x_1 + A_2''x_2 + A_3''x_3 + A_4''x_4 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

причем x_1, x_2, x_3, x_4 — функции одного параметра u — однородные координаты вершины конуса; для случая цилиндра следует лишь положить $x_4 = 0$.

Дифференцируя по v равенства (10), имеем

$$\begin{aligned} A_i' &= V_i' - (u+v)\,V_i'',\\ A_i'' &= -(u+v)\,V_i''', \end{aligned} \tag{13}$$

и, следовательно, последнее из уравнений системы (12)

по сокращении на $-(u+v)$ принимает вид

$$V_1'''x_1 + V_2'''x_2 + V_3'''x_3 + V_4'''x_4 = 0. \tag{14}$$

Так как x_1, x_2, x_3, x_4 от v не зависят, то, дав v то или другое численное значение, мы получаем из равенства (14) одно или более линейных соотношений с постоянными коэффициентами между x_1, x_2, x_3, x_4.

Таким образом, все вершины конусов необходимо должны лежать на одной плоскости или на одной прямой или все должны совпадать в одной точке, смотря по тому, эквивалентно ли уравнение (14) одному, двум или трем уравнениям с постоянными коэффициентами. Легко видеть, что последний случай невозможен; второй не может иметь места, так как мы бы имели в этом предположении, как известно, сопряженное семейство $v = \mathrm{const}$, состоящее из плоских линий — сечений поверхности пучком плоскостей, проходящих через прямую — геометрическое место вершин конусов, а следовательно, тангенциальное уравнение Лапласа было бы типа, разобранного в § 2.

Итак, приходим к результату, что геометрическим местом вершин конусов должна быть плоская линия, но не прямая. Далее приходится рассматривать два случая: или плоскость этой линии есть бесконечно удаленная плоскость, и тогда все конусы обращаются в цилиндры, или эта плоскость — на конечном расстоянии, и тогда, преобразуя систему координат, можем достигнуть того, чтобы эта плоскость была плоскостью $z = 0$. При этом предполагаем, конечно, что упомянутая плоскость действительна; но на это предположение имеем право, если имеем в виду ограничиться действительными решениями задачи.

§ 4. Итак, пусть сначала линии $u = \mathrm{const}$ цилиндрические и уравнение (14) приводится к уравнению $x_4 = 0$ бесконечно удаленной плоскости. Для этого необходимо

$$V_1''' = V_2''' = V_3''' = 0,$$

а следовательно, V_1, V_2, V_3 — многочлены второй степени. Но тогда в силу замечания, сделанного в начале § 3, можно сделать $V_1 = V_2 = V_3 = 0$, вычитая эти многочлены и прибавляя соответственные к U_1, U_2, U_3.

Таким образом, имеем

$$\theta_1 = 2\frac{U_1}{u+v} - U_1'; \quad \theta_2 = 2\frac{U_2}{u+v} - U_2';$$
$$\theta_3 = 2\frac{U_3}{u+v} - U_3'; \quad \theta_4 = 2\frac{U_4+V_4}{u+v} - U_4' - V_4', \tag{15}$$

и легко усмотреть, что система (12) дает $x_4 = 0$ и два уравнения

$$U_1x_1 + U_2x_2 + U_3x_3 = 0, \quad U_1'x_1 + U_2'x_2 + U_3'x_3 = 0, \tag{16}$$

из которых определятся отношения $x_1 : x_2 : x_3$,— иначе говоря, угловые коэффициенты образующих цилиндров.

Остается выбрать функции U_1, U_2, U_3 так, чтобы удовлетворить соотношению

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \varphi(u) + \psi(v). \tag{4}$$

Вставляя выражения θ_1, θ_2, θ_3, имеем

$$4\frac{\sum\limits_{i=1}^{3} U_i^2}{(u+v)^2} - 4\frac{\sum\limits_{i=1}^{3} U_iU_i'}{u+v} + \sum_{i=1}^{3} U_i'^2 = \varphi(u) + \psi(v). \tag{17}$$

Дифференцируя по v, получаем

$$-8\frac{\sum U_i^2}{(u+v)^3} + 4\frac{\sum U_iU_i'}{(u+v)^2} = \psi'(v). \tag{18}$$

Дифференцируя далее по u, имеем

$$24\frac{\sum U_i^2}{(u+v)^4} - 16\frac{\sum U_iU_i'}{(u+v)^3} - 8\frac{\sum U_iU_i'}{(u+v)^3} + 4\frac{\left(\sum U_iU_i'\right)'}{(u+v)^2} = 0$$

или по умножении на $(u+v)^2$ и сокращении на 4

$$6\frac{\sum U_i^2}{(u+v)^2} - 6\frac{\sum U_iU_i'}{u+v} + \left(\sum U_iU_i'\right)' = 0. \tag{19}$$

Рассматривая левую часть как функцию v, непосредственно убеждаемся, что отдельно должны исчезать числители двух дробей и целая часть. Итак, имеем прежде всего

$$\sum_{i=1}^{3} U_i^2 = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 0, \tag{20}$$

а отсюда как следствия

$$\sum U_iU_i' = 0, \qquad \left(\sum U_iU_i'\right)' = 0.$$

Основное равенство (17), очевидно, тоже выполняется в силу (20), причем

$$\psi(v) = 0, \qquad \varphi(u) = \sum_{i=1}^{3} U_i'^2.$$

Итак, выбирая три функции U_1, U_2, U_3 так, чтобы удовлетворялось равенство (20), мы из формул (15) получаем решение задачи при произвольных функциях U_4 и V_4. Поверхность S определяется как огибающая семейства плоскостей

$$\theta_1x + \theta_2y + \theta_3z + \theta_4 = 0,$$

следовательно, координаты x, y, z ее точек определяются из уравнений

$$\theta_1x + \theta_2y + \theta_3z + \theta_4 = 0,$$
$$\frac{\partial\theta_1}{\partial u}x + \frac{\partial\theta_2}{\partial u}y + \frac{\partial\theta_3}{\partial u}z + \frac{\partial\theta_4}{\partial u} = 0, \tag{21}$$
$$\frac{\partial\theta_1}{\partial v}x + \frac{\partial\theta_2}{\partial v}y + \frac{\partial\theta_3}{\partial v}z + \frac{\partial\theta_4}{\partial v} = 0.$$

Конечно, поверхность S мнимая, и система цилиндрических линий $u = \text{const}$ на этой поверхности обладает тем свойством, что образующие цилиндров суть прямые абсолютного направления (пересекают бесконечно удаленный мнимый абсолютный круг пространства). В самом деле, угловые коэффициенты x_1, x_2, x_3 этих образующих в силу системы (16) пропорциональны детерминантам второго порядка из U_1, U_2, U_3 и U_1', U_2', U_3', а сумма квадратов этих детерминантов, как известно, равна

$$\begin{vmatrix} \sum U_i^2 & \sum U_iU_i' \\ \sum U_iU_i' & \sum U_i'^2 \end{vmatrix} = 0$$

и, следовательно, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.

Так как образующие цилиндров служат касательными к линиям $v = \text{const}$, то эти последние не что иное, как линии нулевой длины на поверхности S. Таким образом, мы имеем довольно интересную сопряженную систему на поверхности, одно из семейств которой состоит из линий нулевой длины. Ввиду мнимости соответствующих поверхностей не будем далее останавливаться на этом случае.

§ 5. Пусть теперь линии $u = \text{const}$ конические, и геометрическое место вершин конусов есть плоская линия, лежащая в плоскости $z = 0$.

В таком случае уравнение (14) § 3 должно приводиться к $z = 0$ или $x_3 = 0$, и мы имеем

$$V_1''' = V_2''' = V_4''' = 0,$$

то есть V_1, V_2, V_4 — многочлены второй степени. Так же, как и в § 4, отсюда заключаем, что можно принять

$$V_1 = V_2 = V_4 = 0,$$

и система (11) дает в этом предположении $z = 0$ и два соотношения

$$U_1 x + U_2 y + U_4 = 0, \quad U_1' x + U_2' y + U_4' = 0, \qquad (22)$$

определяющие координаты x, y вершин конусов как функции параметра u. Самая форма уравнений (22) указывает, что геометрическое место этих вершин есть огибающая семейства прямых на плоскости $z = 0$:

$$U_1 x + U_2 y + U_4 = 0, \qquad (23)$$

зависящего от одного параметра u.

Тангенциальные координаты θ_i определяются формулами

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 2\frac{U_1}{u+v} - U_1'; & \theta_2 &= 2\frac{U_2}{u+v} - U_2'; \\ \theta_3 &= 2\frac{U_3 + V_3}{u+v} - U_3' - V_3'; & \theta_4 &= 2\frac{U_4}{u+v} - U_4'. \end{aligned} \qquad (24)$$

Остается определить функции U_1, U_2, U_3, U_4 так, чтобы удовлетворялось соотношение

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \varphi(u) + \psi(v). \qquad (4)$$

Замечая, что

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial u\, \partial v} = \frac{2}{(u+v)^2}\theta_i,$$

имеем

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \theta_i}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial u\, \partial v} = \frac{2}{(u+v)^2} \sum_{i=1}^{3} \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial u} =$$

$$= \frac{1}{(u+v)^2} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \sum_{i=1}^{3} \theta_i^2 \right\} = \frac{\varphi'(u)}{(u+v)^2}.$$

Интегрируя по v, получаем отсюда

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial u} \right)^2 = -\frac{2\varphi'(u)}{u+v} + U; \qquad (25)$$

или, разрешая относительно $\frac{\partial \theta_3}{\partial u}$,

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial u} = \sqrt{-\frac{2\varphi'(u)}{u+v} + U - \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial u}\right)^2}. \qquad (26)$$

Вставляя сюда значения

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial u} = -\frac{2U_1}{(u+v)^2} + \frac{2U_1'}{u+v} - U_1'',$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial u} = -\frac{2U_2}{(u+v)^2} + \frac{2U_2'}{u+v} - U_2'',$$

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial u} = -\frac{2(U_3 + V_3)}{(u+v)^2} + \frac{2U_3'}{u+v} - U_2'';$$

умножая все на $-\frac{(u+v)^2}{2}$ и перенося члены, имеем

$$V_3 = -\frac{U_3''}{2}(u+v)^2 + U_3'(u+v) - U_3 +$$

$$+ \sqrt{P_4(v)} = P_2(v) + \sqrt{P_4(v)}, \qquad (27)$$

где $P_2(v)$, $P_4(v)$ — многочлены соответственно второй и четвертой степени относительно v. Так как V_3 есть функция только v, то и коэффициенты правой части равенства (27) должны не содержать u, то есть $P_2(v)$ и $P_4(v)$ должны быть многочлены с постоянными коэффициентами.

Предварительно, впрочем, надо разрешить вопрос, не может ли формула (27) упроститься благодаря тому, что многочлен $P_4(v)$ окажется точным квадратом и, следовательно, V_3 будет просто квадратным многочленом. Но тогда, согласно замечанию в § 3, можно было бы принять $V_3 = 0$; A_1, A_2, A_3, A_4 были бы линейными функциями v:

$$A_i = 2U_i - (u+v)\,U_i' \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

и поверхность S обратилась бы в линию, что и непосредственно можно усмотреть, изыскивая огибающую семейства плоскостей

$$A_1x + A_2y + A_3z + A_4 = 0. \tag{9}$$

Итак, многочлен $P_4(v)$ не может быть квадратом.

Что касается до многочлена $P_2(v)$, то, согласно общему замечанию в § 3, его можно предположить равным нулю, и, следовательно,

$$V_3 = \sqrt{P_4(v)}, \tag{28}$$

но тогда из формулы (27) явствует, что $U_3 = 0$, и равенство (4) принимает вид

$$\frac{4(U_1^2+U_2^2+V_3^2)}{(u+v)^2} - \frac{4(U_1U_1'+U_2U_2'+V_3V_3')}{u+v} + U_1'^2 + U_2'^2 + V_3'^2 = \varphi(u) + \psi(v). \tag{29}$$

Умножая обе части равенства на $(u+v)^2$ и полагая $v = -u$, замечаем, что все члены, кроме первого, исчезают благодаря исчезновению множителя $u+v$, а следовательно, должен исчезнуть и первый; принимая во внимание формулу (28), получаем, таким образом,

$$U_1^2 + U_2^2 = -P_4(-u), \tag{30}$$

то есть $U_1^2 + U_2^2$ равняется многочлену четвертой степени, коэффициенты которого легко получаются из коэффициентов многочлена $P_4(v)$.

Мы можем положить

$$U_1^2 + U_2^2 = a_0u^4 + a_1u^3 + a_2u^2 + a_3u + a_4, \tag{31}$$

и тогда

$$V_3^2 = -a_0v^4 + a_1v^3 - a_2v^2 + a_3v - a_4. \tag{32}$$

Вставляя эти значения в равенство (29), легко убеждаемся, что оно удовлетворяется.

Действительно,

$$\frac{U_1^2+U_2^2+V_3^2}{u+v} - (U_1U_1' + U_2U_2' + V_3V_3') =$$
$$= a_0(u^3 - u^2v + uv^2 - v^3) + a_1(u^2 - uv + v^2) + a_4(u - v) +$$
$$+ a_3 - 2a_0(u^3 - v^3) - \frac{3}{2}a_1(u^2 + v^2) - a_2(u - v) - a_3 =$$
$$= (u+v)\left[a_0(-u^2 + v^2) - \frac{a_1}{2}(u+v)\right].$$

Деля на $(u+v)$ и умножая на 4, получаем, что первые два члена в правой части равенства (29) дают

$$4a_0\,(-u^2 + v^2) - 2a_1(u+v);$$

присоединяя еще $U_1'^2 + U_2'^2 + U_3'^2$, видим, что левая часть действительно имеет вид

$$\varphi(u) + \psi(v).$$

Итак, получаем положение

4. *Тангенциальные координаты θ_i для поверхности S, допускающей изгибание на главном основании с одним семейством конических линий, определяются равенствами*

$$\theta_1 = \frac{2U_1}{u+v} - U_1'; \qquad \theta_2 = \frac{2U_2}{u+v} - U_2';$$
$$\theta_3 = \frac{2V_3}{u+v} - V_3'; \qquad \theta_4 = \frac{2U_4}{u+v} - U_4', \tag{33}$$

причем U_1, U_2 — две функции u, связанные лишь соотношением (31), V_3 определяется равенством (32), а U_4 — произвольная функция u.

Поверхность S есть огибающая семейства плоскостей

$$\theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z + \theta_4 = 0$$

или, по умножении на $u + v$,

$$[2U_1 - (u + v)\, U_1'] \, x + [2U_2 - (u + v)\, U_2'] \, y + \\ + [2V_3 - (u + v)\, V_3'] \, z + 2U_4 - (u + v)\, U_4' = 0. \quad (34)$$

Дифференцируя по u и затем по v для определения огибающей и присоединяя к уравнению (34), мы получим три уравнения, которые легко приводятся к следующим более простым:

$$\begin{aligned} &U_1 x + U_2 y + \left[V_3 - (u+v)\, V_3' + \frac{1}{2}(u+v)^2 V_3''\right] z + U_4 = 0, \\ &U_1' x + U_2' y - [V_3' - (u+v)\, V_3''] \, z \ + U_4' = 0, \qquad (35) \\ &U_1'' x + U_2'' y + V_3'' z \ + U_4'' = 0. \end{aligned}$$

Три уравнения (35) определяют координаты x, y, z точек поверхности S как функции параметров u, v.

Многочлены четвертой степени, входящие в формулы (31) и (32), можно привести к более простому виду, В самом деле, уравнение (6), которому удовлетворяют θ_1, θ_2, θ_3, как известно, не меняет вида при одной и той же дробно-линейной подстановке над переменными u и $(-v)$, а, располагая коэффициентами этой подстановки, можем три корня многочлена четвертой степени сделать равными трем каким-либо числам. Сделав один корень равным ∞, обратим, в частности, многочлены четвертой степени в многочлены третьей степени. В таком именно виде дано решение поставленной задачи в моей заметке [1]) в Comptes rendus.

Обращаясь к уравнениям (35), видим, что x, y, z рационально выражаются через v и корень квадратный из многочлена (32), то есть

$$\sqrt{-a_0 v^4 + a_1 v^3 - a_2 v^2 + a_3 v - a_4};$$

следовательно, кривые $u = \text{const}$ на поверхности S алгебраические. Равным образом конусы, образованные ка-

[1]) См. сноску [4]) на стр. 313.

сательными плоскостями в точках линий $u = \text{const}$, алгебраические, так как θ_1, θ_2, θ_3 рационально выражаются через v и тот же корень квадратный и, следовательно, являются алгебраическими функциями v.

Обращаясь к вопросу об изгибании поверхности S на главном основании $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, легко убеждаемся, что при этом изгибании получаются поверхности того же типа. В самом деле, основное уравнение Лапласа, которому удовлетворяют x, y, z для поверхности S, имеет один инвариант, равный нулю, так как семейство $u = \text{const}$ состоит из конических линий; но уравнение это остается неизменным при изгибании, так как коэффициенты его

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

образованы из коэффициентов линейного элемента поверхности; таким образом, и для всех изгибаний поверхности S, о которых идет речь, линии $u = \text{const}$ будут коническими, так как инвариант основного уравнения Лапласа равен нулю.

§ 6. Предыдущие исследования позволяют получить ряд результатов и помимо решения поставленной в самом начале задачи. Так, замечая, что если поверхность допускает бесконечно малое изгибание на основании $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, то тангенциальное уравнение Лапласа, относящееся к этой системе, имеет равные инварианты, мы можем все результаты § 2 и следующих, для получения которых не пользовались соотношением

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \varphi(u) + \psi(v), \qquad (4)$$

применить к бесконечно малым изгибаниям на данном основании.

Таким образом, получаем положения:

5. *Если поверхность допускает бесконечно малое изгибание на основании, одно из семейств которого состоит из плоских линий, то и сопряженное семейство состоит тоже из плоских линий.*

6. *Если поверхность допускает бесконечно малое изгибание на основании, одно из семейств которого состоит из конических (цилиндрических) линий, то вершины описанных конусов лежат в одной плоскости, и поверхность*

можно определить формулами (15) § 4 *или* (24) § 5, *где* U_i, V_i — *произвольные функции.*

Далее, не затрагивая вопроса об изгибании, можно поставить, например, такую задачу: найти все поверхности, допускающие системы сопряженных линий, оба семейства которых состоят или из плоских или из конических линий. Эта задача уже разрешена и для плоских и для конических линий, но небезынтересно указать, как просто получается ее решение из соображений § 1. В самом деле, непосредственно ясно, что если сопряженная система состоит из двух семейств плоских линий, то оба инварианта тангенциального уравнения Лапласа исчезают, а если она состоит из двух семейств конических линий, то то же самое имеет место для основного уравнения Лапласа. Но уравнение Лапласа с двумя исчезающими инвариантами может быть приведено к виду

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=0,$$

и, следовательно, в первом случае четыре однородных тангенциальных координаты, а во втором случае четыре однородных координаты точек поверхности суть решения такого уравнения.

Итак, поверхность с двумя семействами сопряженных плоских линий есть огибающая семейства плоскостей

$$(U_1+V_1)\,x+(U_2+V_2)\,y+(U_3+V_3)\,z+ \\ +(U_4+V_4)=0,$$

а поверхность с двумя сопряженными семействами конических линий определяется формулами

$$x=\frac{U_1+V_1}{U_4+V_4},\quad y=\frac{U_2+V_2}{U_4+V_4},\quad z=\frac{U_3+V_3}{U_4+V_4}.$$

Мог бы возникнуть вопрос, почему в §§ 4 и 5 среди решений поставленной задачи не получились поверхности с двумя сопряженными семействами конических линий. Но объясняется это, конечно, тем, что мы заранее исключили случай плоских линий, взяв уравнение (6), а не (5); между тем, если главное основание состоит из двух семейств конических линий, то эти линии в то же время плоские.

§ 7. Возможно, с другой стороны, поставить совершенно иную задачу, чем в настоящем исследовании,

относительно уравнений

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\frac{2}{(u+v)^2}\,\theta. \tag{6}$$

А именно, можно искать три решения θ_1, θ_2, θ_3 этих уравнений, связанные соотношением

$$\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2=\varphi(u)+\psi(v). \tag{4}$$

Это соответствовало бы изысканию вообще сопряженных систем, определяемых этими уравнениями и служащих главными основаниями изгибания для поверхностей, огибающих плоскости

$$\theta_1 x+\theta_2 y+\theta_3 z+\theta_4=0,$$

где θ_4 — любое решение уравнения (5) или (6).

Для уравнения (5) эта задача разрешена. Для уравнения (6) я наметил действительные ее решения в заметке, помещенной в Comptes rendus Парижской Академии [1]). Недавно появилась статья Драша [2]), посвященная тому же вопросу. В нем длинными выкладками получаются для θ_1, θ_2, θ_3 те же формулы, что в моей вышеупомянутой заметке и в настоящем исследовании в §§ 4 и 5, с той разницей, что к функциям U_i, V_i прибавлены квадратные многочлены, которые, как мною показано, не играют существенной роли и могут быть заменены нулями.

Во всяком случае интересно отметить, что самые общие сопряженные системы упомянутого типа имеют то же сферическое изображение, что и системы с одним семейством конических линий, и, следовательно, получаются из них известным преобразованием Петерсона. Формулы, данные в §§ 4 и 5 [3]), решают и самую общую задачу, если только θ_4 заменить произвольным решением уравнения (6):

$$\theta_4=2\,\frac{U_4+V_4}{u+v}-U_4'-V_4'.$$

[1]) См. статью «О непрерывном изгибании поверхностей» наст. сб., стр. 301—303.

[2]) J. Drach, Recherches sur certaines déformations remarquables à réseau conjugué persistant, Ann. de la Fac. des Sci. de l'univ. de Toulouse 10 (1908).

[3]) Формулы (15), (20) § 4; (31) — (33) § 5.

О ПОВЕРХНОСТЯХ, ОБРАЗОВАННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЛИНИЙ ДАННОГО СЕМЕЙСТВА[1])

§ **1**. Пусть (F) — заданное семейство линий, зависящих от одного параметра v. Координаты x, y, z точки какой-нибудь линии, принадлежащей семейству, зависят, очевидно, от двух параметров, один из которых v — параметр семейства, а другой u меняется вдоль линии от одной точки к другой. Линии семейства (F) образуют поверхность S, и линии $v = \text{const}$ этой поверхности и будут линиями семейства (F).

Представим теперь, что каждая линия семейства (F) подвергается какому-то конечному смещению, которое непрерывно меняется от одной линии к другой. Получается новое семейство $(\overline{F})$ и, следовательно, новая поверхность $\overline{S}$, образованная линиями $v = \text{const}$, соответственно равными линиям $v = \text{const}$ поверхности S. Впрочем, если рассматривать касательные плоскости, или, что то же, нормали к поверхности в точках линии $v = \text{const}$, то эти нормали вообще не будут одними и теми же по отношению к рассматриваемой линии для поверхностей S и $\overline{S}$.

В последующем мы будем рассматривать тот замечательный частный случай, когда нормали поверхности, проведенные в точках одной линии $v = \text{const}$, совпадут с нормалями поверхности в точках соответствующей линии, когда будут приведены к совпадению эти две линии. Условимся говорить в таком случае, что поверхность $\overline{S}$ получена «распределением» линий $v = \text{const}$ поверхности S. Очевидно, на двух поверхностях S и $\overline{S}$ описанные вдоль линии $v = \text{const}$ соответствующие развертывающиеся поверхности равны, и «распределение» линий семейства (F) по существу сводится к распределению одномерных многообразий элементов (x, y, z, p, q), образованных из точки (x, y, z) и проходящей через эту точку плоскости, определяемой уравнением

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

где эта плоскость — не что иное, как касательная плоскость к поверхности S в соответствующей точке. Отсюда непосредственно следует, что *геодезическая кривизна в соответствующих точках линий $v = \text{const}$ на поверхностях S и $\overline{S}$ одна и та же.*

В частности, если линии семейства (F) геодезические на поверхности S, то они сохраняют это свойство и после «распределения».

То же самое имеет место для асимптотических линий и для линий кривизны. Чтобы доказать это, достаточно заметить, что нормали к поверхности в точках геодезической линии, асимптотической или линии кривизны, совпадают соответственно с главными нормалями, бинормалями рассматриваемой линии или образуют развертывающуюся поверхность, и все эти свойства сохраняются и после «распределения».

Следует еще отметить частный случай «распределения», когда поверхность S допускает ∞^1 «распределений» сама в себя. Очевидно, что в таком случае семейство (F) состоит из равных линий и развертывающиеся поверхности, описанные около поверхности вдоль этих линий, будут также равны. Поверхность S принадлежит, следовательно, к поверхностям, которые рассматривал Хааг [1]), и легко видеть, что все поверхности Хаага допускают ∞^1 «распределений» в себя.

Возвращаясь к общему случаю распределения, рассмотрим в первую очередь следующую проблему: при произвольно заданной поверхности S определить все поверхности $\overline{S}$, которые можно получить некоторым распределением подходяще подобранного семейства линий (F) поверхности S.

[1]) Sur les surfaces, engendrées par la distribution des lignes d'une famille donnée, Матем. сб. 31 (1923), 154—184. Результаты этой статьи были сообщены Московскому математическому обществу в 1913 и 1914 гг. (Перевод С. П. Финикова.)

[1]) H a a g, Compt. rend. Acad. Sci. Paris.

Очевидно, мы получим искомую поверхность $\bar{S}$ следующим построением: *подвергнем заданную поверхность S произвольному движению, зависящему от одного параметра; огибающая последовательных положений поверхности S будет решением поставленной задачи.* Действительно, поскольку характеристики семейства, образованного последовательными положениями поверхности S, принадлежат поверхности $\bar{S}$ и различным положениям поверхности S, причем касательные плоскости вдоль этих характеристик будут одни и те же для огибающей и для поверхностей семейства, то ясно, что после совпадения всех последовательных положений поверхности S с ее исходным положением эти характеристики (на начальной поверхности S) образуют семейство линий (F), которые отвечают всем поставленным ранее условиям, и непосредственно видно, что поверхность $\bar{S}$ получается «распределением» семейства (F).

Обратно, пусть $\bar{S}$ — поверхность, полученная распределением семейства (F) из линий $v = \text{const}$ поверхности S. В силу самого определения распределения можно переместить поверхность S таким путем, что она будет касаться поверхности $\bar{S}$ в точках одной из линий $v = \text{const}$; таким образом, поверхность $\bar{S}$ будет огибающей различных положений поверхности S, и мы видим, что указанное решение поставленной задачи будет ее общим решением.

Перейдем к задаче, внутренне связанной с только что решенной задачей: при заданной поверхности S найти на ней семейство линий (F), допускающих «распределение».

Рассмотрим две системы осей; одна (x, y, z), к которой мы относим поверхность S и которая, мы будем полагать, увлекается перемещением каждой из линий $v = \text{const}$ системы (F) в рассматриваемом «распределении», и другая $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ неподвижна в пространстве. Имеем формулы

$$\begin{aligned} \bar{x} &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z + A, \\ \bar{y} &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z + B, \\ \bar{z} &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z + C, \end{aligned} \tag{1}$$

где c_{ik} — косинусы углов, образованных подвижными осями (x, y, z) с неподвижными $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Эти девять косинусов, так же как A, B, C, являются функциями параметра v (перемещение меняется от одной линии семейства к другой), и формулы (1), где мы будем предполагать координаты x, y, z замененными их выражениями в виде функций переменных u, v для поверхности S, определяют поверхность $\bar{S}$, полученную рассматриваемым распределением.

Будем обозначать через X, Y, Z направляющие косинусы нормали к линии семейства (F), которая в то же время является нормалью к поверхности S, относительно осей (x, y, z). Пусть $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ — направляющие косинусы той же нормали относительно осей $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ после распределения. По определению $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ будут направляющими косинусами нормали к поверхности $\bar{S}$.

Имеем очевидные формулы

$$\begin{aligned} \bar{X} &= c_{11}X + c_{12}Y + c_{13}Z, \\ \bar{Y} &= c_{21}X + c_{22}Y + c_{23}Z, \\ \bar{Z} &= c_{31}X + c_{32}Y + c_{33}Z \end{aligned} \tag{2}$$

и обратно,

$$\begin{gathered} X = c_{11}\bar{X} + c_{21}\bar{Y} + c_{31}\bar{Z}, \quad Y = c_{12}\bar{X} + c_{22}\bar{Y} + c_{32}\bar{Z}, \\ Z = c_{13}\bar{X} + c_{23}\bar{Y} + c_{33}\bar{Z}. \end{gathered} \tag{3}$$

Из определения X, Y, Z немедленно следует

$$\sum X \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \sum X \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \tag{4}$$

где суммирование распространяется на три оси. Так же мы должны иметь, по определению распределения, уравнения

$$\sum \bar{X} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0, \qquad \sum \bar{X} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = 0. \tag{5}$$

Первое из этих уравнений является непосредственным следствием первого из уравнений (4) и формул (1) и (2) в силу хорошо известных соотношений между косинусами c_{ik}. Впрочем, это уравнение выражает только вполне очевидный факт, а именно, что $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ являются направляющими косинусами нормали к линии $v = \text{const}$ семейства (F) в ее новом положении.

Второе уравнение (5) заменим уравнением

$$\sum (c_{11}\overline{X} + c_{21}\overline{Y} + c_{31}\overline{Z}) \left(c_{11}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v} + c_{21}\frac{\partial \overline{y}}{\partial v} + c_{31}\frac{\partial \overline{z}}{\partial v}\right) = 0. \qquad (6)$$

Эквивалентность этих двух уравнений непосредственно следует из соотношений между девятью косинусами c_{ik}. Впрочем, легко видеть, что уравнение (6), так же как второе уравнение (5), — не что иное, как условие ортогональности рассматриваемой нормали к линии $u = \text{const}$ поверхности $\overline{S}$, если только это условие выражено не относительно неподвижных осей $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, а относительно осей (x, y, z).

Дифференцируя формулы (1), получим

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial v} = c_{11}\frac{\partial x}{\partial v} + c_{12}\frac{\partial y}{\partial v} + c_{13}\frac{\partial z}{\partial v} + c_{11}'x + c_{12}'y + c_{13}'z + A',$$

$$\frac{\partial \overline{y}}{\partial v} = c_{21}\frac{\partial x}{\partial v} + c_{22}\frac{\partial y}{\partial v} + c_{23}\frac{\partial z}{\partial v} + c_{21}'x + c_{22}'y + c_{23}'z + B',$$

$$\frac{\partial \overline{z}}{\partial v} = c_{31}\frac{\partial x}{\partial v} + c_{32}\frac{\partial y}{\partial v} + c_{33}\frac{\partial z}{\partial v} + c_{31}'x + c_{32}'y + c_{33}'z + C'$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} c_{11}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v} + c_{21}\frac{\partial \overline{y}}{\partial v} + c_{31}\frac{\partial \overline{z}}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial v} + qz - ry + \xi, \\ c_{12}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v} + c_{22}\frac{\partial \overline{y}}{\partial v} + c_{32}\frac{\partial \overline{z}}{\partial v} &= \frac{\partial y}{\partial v} + rx - pz + \eta, \\ c_{13}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v} + c_{23}\frac{\partial \overline{y}}{\partial v} + c_{33}\frac{\partial \overline{z}}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial v} + py - qx + \zeta, \end{aligned} \qquad (7)$$

полагая, как это обычно делается [1]),

$$\begin{aligned} p &= c_{13}c_{12}' + c_{23}c_{22}' + c_{33}c_{32}' = -c_{12}c_{13}' - c_{22}c_{23}' - c_{32}c_{33}', \\ q &= c_{11}c_{13}' + c_{21}c_{23}' + c_{31}c_{33}' = -c_{13}c_{11}' - c_{23}c_{21}' - c_{33}c_{31}', \\ r &= c_{12}c_{11}' + c_{22}c_{21}' + c_{32}c_{31}' = -c_{11}c_{12}' - c_{21}c_{22}' - c_{31}c_{32}', \end{aligned} \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} \xi &= c_{11}A' + c_{21}B' + c_{31}C', \\ \eta &= c_{12}A' + c_{22}B' + c_{32}C', \\ \zeta &= c_{13}A' + c_{23}B' + c_{33}C', \end{aligned} \qquad (9)$$

[1]) G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal, Paris, 1887—1896, т. I, гл. 1.

где штрихами обозначается дифференцирование по переменному v. Величины $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ имеют очень простое кинематическое значение [1]). Меняя переменное v и рассматривая последовательные положения осей (x, y, z) в «распределении», получаем непрерывное движение этих осей; проекции на оси (x, y, z) скорости вращения и скорости переноса будут соответственно p, q, r и ξ, η, ζ (время принимается равным переменному v).

Обращаясь к формулам (3) и (7), получаем из уравнения (6)

$$\sum X\left(\frac{\partial x}{\partial v} + qz - ry + \xi\right) = 0$$

или же, в силу второго уравнения (4),

$$\sum X\,(qz - ry + \xi) = 0. \qquad (10)$$

Развертывая эти члены, имеем

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} + \xi X + \eta Y + \zeta Z = 0. \qquad (11)$$

Три определителя второго порядка

$$\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}$$

и три направляющих косинуса X, Y, Z — не что иное, как шесть плюккеровых координат нормали к поверхности S в точке (x, y, z). Поскольку величины $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ зависят только от v и, следовательно, постоянны в точках одной линии $v = \text{const}$, непосредственно видно, если обратиться к уравнению (11), что нормали к поверхности S в точках одной из линий $v = \text{const}$ принадлежат одному линейному комплексу, уравнение которого в плюккеровых координатах и выражается равенством (11).

Таким образом, имеем следующее *необходимое* условие: чтобы семейство линий на заданной поверхности S было семейством (F), допускающим распределение, необходимо, чтобы нормали к поверхности, взятые в точках каждой из

[1]) См. предыдущую сноску.

этих линий, принадлежали линейному комплексу (который меняется от линии к линии).

Это условие *достаточно.* Действительно, допустим, что нормали к поверхности S в точках одной линии $v = \text{const}$ принадлежат линейному комплексу. Тогда будем иметь

$$V_1(yZ - zY) + V_2(zX - xZ) + V_3(xY - yX) + \\ + V_4X + V_5Y + V_6Z = 0, \quad (12)$$

где $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$ — шесть функций параметра v, или же

$$\begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} + V_4X + V_5Y + V_6Z = 0. \quad (12')$$

Сравнивая уравнения (11) и (12′), легко заметить, что можно положить

$$\begin{gathered} p = VV_1, \; q = VV_2, \quad r = VV_3, \\ \xi = VV_4, \; \eta = VV_5, \quad \zeta = VV_6, \end{gathered} \quad (13)$$

где V — произвольная функция переменной v.

Формулы (13) определяют мгновенное движение осей (x, y, z). Девять косинусов c_{ik} и три величины A, B, C получаются, как хорошо известно[1]), интегрированием линейной системы

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \beta r - \gamma q, & \frac{dA}{ds} &= c_{11}\xi + c_{12}\eta + c_{13}\zeta, \\ \frac{d\beta}{ds} &= \gamma p - \alpha r, & \frac{dB}{ds} &= c_{21}\xi + c_{22}\eta + c_{23}\zeta, \\ \frac{d\gamma}{ds} &= \alpha q - \beta p, & \frac{dC}{ds} &= c_{31}\xi + c_{32}\eta + c_{33}\zeta, \end{aligned} \quad (14)$$

из которых первая допускает решения

$$\begin{gathered} \alpha = c_{11}, \quad \beta = c_{12}, \quad \gamma = c_{13}, \\ \alpha = c_{21}, \quad \beta = c_{22}, \quad \gamma = c_{23}, \\ \alpha = c_{31}, \quad \beta = c_{32}, \quad \gamma = c_{33}; \end{gathered}$$

[1]) См. сноску на стр. 332.

их определение сводится к интегрированию уравнения Рикатти[1]). Впрочем, уравнения (14) являются простыми следствиями уравнений (8) и (9) и соотношений между косинусами c_{ik}. Если величины c_{ik}, A, B, C определены, то формулы (1), куда вместо x, y, z будут подставлены их значения в виде функций переменных u, v для поверхности S, определят поверхность $\bar{S}$, получаемую распределением семейства линий $v = \text{const}$, как это непосредственно следует из уравнения (11), эквивалентного, как мы видели, второму уравнению (5).

Наиболее общая поверхность $\bar{S}$, получаемая распределением семейства (F), зависит, очевидно, от одной произвольной функции (функция V в формулах (13)).

Характеристическое свойство семейства (F), которое мы только что получили, могло бы быть получено, если рассмотреть кинематическую сторону результатов, которые мы привели выше, решая предыдущую задачу. Мы ограничимся этим указанием.

Определение семейства (F) на заданной поверхности S не представляет никакой трудности. Предполагая поверхность S заданной уравнением

$$z = z(x, y), \quad (15)$$

направляющие косинусы нормали к поверхности мы найдем пропорциональными величинам

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \; -1.$$

Следовательно, уравнение (12′) примет вид

$$\begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ x & y & z \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & -1 \end{vmatrix} + V_4\frac{\partial z}{\partial x} + V_5\frac{\partial z}{\partial y} - V_6 = 0. \quad (16)$$

Если дать переменному v постоянное значение, то уравнение (16) будет соотношением между x, y и определяет линию на поверхности S. При изменении параметра v получается семейство линий $v = \text{const}$, которое будет в точности семейством линий (F) на поверхности S.

[1]) См. сноску на стр. 332.

Заметим, что если все нормали к поверхности принадлежат одному и тому же линейному комплексу, то поверхность будет геликоидом. Действительно, в этом случае уравнение (16) будет тождеством, и коэффициенты V_1, V_2, ..., V_6 будут константами. Выбирая ось комплекса за ось z, мы придадим этому уравнению простую форму

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = k,$$

общий интеграл которого

$$z = -k \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \varphi(x^2 + y^2)$$

определяет геликоид.

Возвращаясь к семейству (F) и используя предыдущее замечание, легко видеть, что произвольная линия $v = \text{const}$ семейства (F) на поверхности S определяет геликоид, который касается поверхности S в точках рассматриваемой линии; ось этого геликоида совпадает с осью линейного комплекса, который соответствует рассматриваемой линии $v = \text{const}$. Поверхность S будет огибающей семейства этих геликоидов, а семейство линий (F) образовано характеристиками рассматриваемого семейства геликоидов.

Обратно, рассмотрим какое-нибудь однопараметрическое семейство геликоидов и огибающую S этого семейства. Пусть L — одна из характеристик семейства. Нормали поверхности S в точках линии L, будучи в то же время нормалями геликоида, содержащего эту линию L, принадлежат линейному комплексу. Следовательно, семейство характеристик L будет семейством (F) на поверхности S, которое допускает распределение, определяемое этими линейными комплексами, или, что сводится к тому же, осями геликоидов данного семейства.

Мы закончим общие рассуждения этого параграфа рассмотрением двух простых частных примеров.

Рассмотрим в первую очередь произвольную плоскость и приложим к ней предыдущие результаты. Ясно, что поверхности $\overline{S}$, получаемые распределением семейства линий (F), нанесенных на плоскость, будут развертывающимися поверхностями, и семейство (F) будет образовано прямыми линиями (образующими развертывающейся поверхности)

Рассмотрим также сферу S. Поверхности $\overline{S}$ будут огибающими семейств сфер, равных сфере S, то есть поверхностями каналов; семейства (F) образованы окружностями больших кругов.

§ 2. Выше мы определили все поверхности $\overline{S}$, которые происходят из данной поверхности S посредством распределения определенного семейства линий (F), и мы видели, что общее решение задачи зависит от одной произвольной функции. Естественно поставить вопрос, существуют ли поверхности S и семейства (F), для которых эта же задача допускает решение, зависящее от двух или даже трех и т. д. произвольных функций.

Из рассуждений предыдущего параграфа непосредственно следует, что линейный комплекс, которому принадлежат нормали в точках одной линии семейства (F), не будет больше определяться единственным образом в рассматриваемом случае. Поскольку, с другой стороны, нормали, принадлежащие двум различным линейным комплексам, принадлежат линейной конгруэнции, мы видим, что в этом случае семейство (F) будет характеризоваться следующим свойством: нормали поверхности S в точках одной линии семейства (F) принадлежат линейной конгруэнции (меняющейся от линии к линии семейства).

В рассматриваемом случае будем иметь два линейных соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &\begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} + V_{14}X + V_{15}Y + V_{16}Z = 0, \\ &\begin{vmatrix} V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} + V_{24}X + V_{25}Y + V_{26}Z = 0 \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

между шестью плюккеровыми координатами нормали

$$\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}, \qquad X, Y, Z.$$

Складывая два уравнения (17) после умножения их на две произвольные функции соответственно V_1 и V_2, получим линейное соотношение, которое определяет линейный комплекс, и можно применить общие результаты предыдущего параграфа, полагая

$$\begin{aligned} p &= V_1V_{11} + V_2V_{21}, & \xi &= V_1V_{14} + V_2V_{24},\\ q &= V_1V_{12} + V_2V_{22}, & \eta &= V_1V_{15} + V_2V_{25},\\ r &= V_1V_{13} + V_2V_{23}, & \zeta &= V_1V_{16} + V_2V_{26} \end{aligned} \tag{18}$$

и определяя косинусы c_{ik} и величины A, B, C уравнениями (14). Общее решение будет зависеть от двух произвольных функций V_1 и V_2.

Пусть

$$z = z(x, y) \tag{19}$$

— уравнение поверхности S. Полагая

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

будем иметь

$$X : Y : Z = p : q : -1$$

и, следовательно, два уравнения (17) дадут нам

$$\begin{gathered} \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13}\\ x & y & z\\ p & q & -1 \end{vmatrix} + V_{14}p + V_{15}q - V_{16} = 0,\\ \begin{vmatrix} V_{21} & V_{22} & V_{23}\\ x & y & z\\ p & q & -1 \end{vmatrix} + V_{24}p + V_{25}q - V_{26} = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Поскольку два уравнения (20) должны иметь место для одного и того же семейства линий (F) поверхности S, уравнение

$$\Phi(x, y, z, p, q) = 0, \tag{21}$$

полученное исключением параметра v из уравнений (20), должно удовлетворяться тождественно для всех точек поверхности S. Уравнение (21) является уравнением первого порядка в частных производных. Поверхности S рассматриваемого класса будут, следовательно, интегральными поверхностями этого уравнения.

Имеет некоторый интерес показать метод интегрирования, который может применяться прямо к двум уравнениям (20).

Обозначим через $F_1(x, y, z, p, q, v)$ и $F_2(x, y, z, p, q, v)$ левые части этих уравнений. Можно сказать, что уравнением в частных производных этих поверхностей будет уравнение

$$F_1(x, y, z, p, q, v) = 0, \tag{22}$$

куда надо поставить вместо v его значение, взятое из уравнения

$$F_2(x, y, z, p, q, v) = 0; \tag{23}$$

Классический метод Лагранжа — Шарпи требует определения интеграла уравнения

$$[\Phi, \Psi] = 0, \tag{24}$$

где положено

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}p\right) - \frac{\partial\Psi}{\partial p}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}p\right) + {} + \frac{\partial\Phi}{\partial q}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}q\right) - \frac{\partial\Psi}{\partial q}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}q\right) = [\Phi, \Psi].$$

Из предшествующего следует, что вместо Φ надо подставить выражение

$$F_1(x, y, z, p, q, v(x, y, z, p, q)),$$

где функция $v(x, y, z, p, q)$ определяется уравнением (23). На место частных производных таких, как $\frac{\partial\Phi}{\partial p}, \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \ldots$ $\ldots, \frac{\partial\Psi}{\partial p}, \ldots$, надо подставить соответственно комбинации

$$\frac{\partial F_1}{\partial p} + \frac{\partial F_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial p}, \ldots, \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial\Psi}{\partial p} + \frac{\partial\Psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial p}.$$

Дифференцируя уравнение (23)

$$\frac{\partial F_2}{\partial p} + \frac{\partial F_2}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \ldots,$$

мы получим отсюда значения $\frac{\partial v}{\partial p}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, ... Выполнив все эти подстановки в уравнение (24), придем к уравнению

$$\frac{\partial \Psi}{\partial v}[F_1, F_2] + \frac{\partial F_1}{\partial v}[F_2, \Psi] + \frac{\partial F_2}{\partial v}[\Psi, F_1] = 0, \qquad (25)$$

где скобки Майера $[F_1, F_2]$, $[F_2, \Psi]$, $[\Psi, F_1]$ образованы в предположении $v = \text{const}$.

Уравнение (25) и будет в точности то, которое мы хотели построить.

Дадим простой пример поверхности S рассматриваемого класса.

Положим в уравнениях (20)

$$V_{11} = 1,\ V_{12} = 0,\ V_{13} = 0,\ V_{15} = 0,\ V_{16} = 0,\ V_{21} = 0,$$
$$V_{22} = 1,\ V_{23} = 0,\ V_{24} = 0,\ V_{26} = 0,\ V_{25} = V_{14} = V.$$

Мы будем иметь

$$-y - zq + Vp = 0, \qquad x + zp + Vp = 0$$

или по исключении v

$$p(x + zp) + q(y + zq) = 0. \qquad (26)$$

Уравнение (26) приводится преобразованием Лежандра

$$p = X,\ q = Y,\ x = P,\ y = Q,\ z = -Z + PX + QY \qquad (27)$$

к уравнению

$$PX + QY = Z\frac{X^2 + Y^2}{1 + X^2 + Y^2},$$

которое непосредственно интегрируется; имеем

$$Z = f\left(\frac{Y}{X}\right)\sqrt{1 + X^2 + Y^2}, \qquad (28)$$

где f — произвольная функция. Возвращаясь к переменным x, y, z, получаем из уравнений (27)

$$\begin{aligned} z &= -f\left(\frac{Y}{X}\right)\frac{1}{\sqrt{1 + X^2 + Y^2}}, \\ x &= f\left(\frac{Y}{X}\right)\frac{X}{\sqrt{1 + X^2 + Y^2}} - f'\left(\frac{Y}{X}\right)\frac{Y}{X^2}, \\ y &= f\left(\frac{Y}{X}\right)\frac{Y}{\sqrt{1 + X^2 + Y^2}} + f'\left(\frac{Y}{X}\right)\frac{1}{X}. \end{aligned} \qquad (29)$$

Уравнения (29) определяют искомую поверхность S. Линии семейства (F) определяются уравнениями

$$\frac{y + zq}{p} = -\frac{x + zp}{q} = \text{const},$$

которые приводят к соотношению

$$f'\left(\frac{Y}{X}\right)\frac{1}{X^2} = \text{const}. \qquad (30)$$

Движение осей (x, y, z) в «распределении» семейства (F) определяется формулами

$$\begin{aligned} p &= V_1, \quad q = V_2, \quad r = 0, \\ \xi &= VV_1,\ \eta = VV_2,\ \zeta = 0. \end{aligned} \qquad (31)$$

Мы дали общее решение задачи. Следует еще отметить решение уравнения (26), которое не содержится в формулах (29), ибо соответствует предположению $q = Cp$, что дает

$$\frac{Y}{X} = C.$$

Полагая $q = Cp$ в уравнении (26), получим

$$(x + Cy) + zp(1 + C^2) = 0,$$

и легко получается полный интеграл

$$z^2(1 + C^2) + (x + Cy)^2 = D^2, \qquad (32)$$

где C, D — два произвольных постоянных. Семейство линий (F) определяется соотношением

$$\frac{x + zp}{q} = \text{const},$$

что дает

$$\frac{Cx - y}{x + Cy}z = \text{const}. \qquad (33)$$

Линии (F), следовательно, будут алгебраическими линиями четвертого порядка.

Возвращаясь к общей задаче, поставленной в этом параграфе, заметим, что рассматриваемые линии семейства (F) могут быть определены независимо от поверхностей S. Действительно, линия рассматриваемого вида характеризуется тем, что можно выбрать семейство ее нормалей, принадлежащих линейному комплексу. Обозначая через X, Y, Z направляющие косинусы нормали в точке (x, y, z) рассматриваемой линии, имеем два линейных соотношения между шестью плюккеровыми координатами, которые можно написать в виде

$$\begin{gathered} X(cy - bz + A) + Y(az - cx + B) + \\ + Z(bx - ay + C) = 0, \\ X(c'y - b'z + A') + Y(a'z - c'x + B') + \\ + Z(b'x - a'y + C') = 0. \end{gathered} \tag{34}$$

Присоединяя третье соотношение

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

которое является условием ортогональности рассматриваемой прямой к касательной этой линии, и исключая X, Y, Z, имеем уравнение Пфаффа

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ cy - bz + A & az - cx + B & bx - ay + C \\ c'y - b'z + A' & a'z - c'x + B' & b'x - a'y + C' \end{vmatrix} = 0, \tag{35}$$

которое определяет искомые линии.

Подходящим выбором осей можно привести систему (34), оставляя в стороне некоторые частные случаи, к виду

$$xY - yX + kZ = 0, \quad yZ - zY + MX + PZ = 0;$$

уравнение (35) тогда примет вид

$$[x(y + P) + kz]\,dx + [y(y + P) + kM]\,dy + \\ + [yz - Mx]\,dz = 0.$$

Интегрируя, по общей процедуре, получаем уравнения искомых линий

$$\begin{gathered} -\frac{M-k}{2}xz - \frac{M+k}{2}(z^2 + x^2)\operatorname{arctg}\frac{z}{x} + \frac{y^3}{3} + \frac{Py^2}{2} + kMy = \\ = F(z^2 + x^2), \\ F'(z^2 + x^2) + \frac{1}{2}y + \frac{M+k}{2}\operatorname{arctg}\frac{z}{x} = 0, \end{gathered} \tag{36}$$

где F — произвольная функция.

§ 3. Перейдем к исследованию случая, когда решение задачи распределения зависит не от двух, а от трех произвольных функций,— случай, который можно рассматривать как частный случай или скорее предельный случай рассмотренного в предыдущем параграфе.

Линии семейства (F) характеризуются здесь тем, что нормали к поверхности S в точках рассматриваемой линии принадлежат трем независимым линейным комплексам или, что сводится к тому же, линейчатая поверхность, образованная этими нормалями, будет поверхностью второго порядка (однополостный гиперболоид или гиперболический параболоид).

В этом случае имеется три линейных соотношения:

$$\begin{gathered} \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} + V_{14}X + V_{15}Y + V_{16}Z = 0, \\ \begin{vmatrix} V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} + V_{24}X + V_{25}Y + V_{26}Z = 0, \\ \begin{vmatrix} V_{31} & V_{32} & V_{33} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} + V_{34}X + V_{35}Y + V_{36}Z = 0 \end{gathered} \tag{37}$$

между плюккеровыми координатами нормали. Складывая три уравнения (37), предварительно умножив их на три произвольных функции V_1, V_2, V_3, получим уравнение линейного комплекса, и, применяя к нему результаты § 1, можно положить

$$\begin{aligned} p &= V_1V_{11} + V_2V_{21} + V_3V_{31}, \\ q &= V_1V_{12} + V_2V_{22} + V_3V_{32}, \\ r &= V_1V_{13} + V_2V_{23} + V_3V_{33}, \\ \xi &= V_1V_{14} + V_2V_{24} + V_3V_{34}, \\ \eta &= V_1V_{15} + V_2V_{25} + V_3V_{35}, \\ \zeta &= V_1V_{16} + V_2V_{26} + V_3V_{36} \end{aligned} \tag{38}$$

в уравнениях (14); решение задачи распределения зависит, очевидно, от трех произвольных функций V_1, V_2, V_3.

Начнем с определения линий, характеризуемых требованием, чтобы допускать нормали, образующие линейчатые поверхности второго порядка.

Наиболее простой способ прийти к этим уравнениям — непосредственно искать ортогональные траектории прямолинейных образующих однополостного гиперболоида или же гиперболического параболоида.

Рассмотрим сначала однополостный гиперболоид, определяемый уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{39}$$

Очевидно, можно было бы положить

$$x=\frac{a}{c}\cos\varphi\cdot z+a\sin\varphi, \qquad y=\frac{b}{c}\sin\varphi\cdot z-b\cos\varphi, \tag{40}$$

где φ — переменный параметр. Поскольку уравнения (40) линейны относительно x, y, z, линии $\varphi=\mathrm{const}$, очевидно, будут прямолинейными образующими гиперболоида. Полагая

$$m=\frac{a}{c}\cos\varphi, \qquad n=\frac{b}{c}\sin\varphi, \tag{41}$$

найдем, что направляющие косинусы образующей пропорциональны

$$m:n:1.$$

Поскольку квадрат линейного элемента поверхности будет

$$ds^2=\frac{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi+c^2}{c^2}\,dz^2+$$
$$+2\left(\frac{b^2-a^2}{c^2}\sin\varphi\cos\varphi\cdot z+\frac{a^2}{c}\cos^2\varphi+\frac{b^2}{c}\sin^2\varphi\right)d\varphi\,dz+$$
$$+\left[\left(\frac{a^2}{c^2}\sin^2\varphi+\frac{b^2}{c^2}\cos^2\varphi\right)z^2+2\,\frac{b^2-a^2}{c}\sin\varphi\cos\varphi\cdot z+\right.$$
$$\left.+a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\right]d\varphi^2, \tag{42}$$

имеем уравнение ортогональных траекторий образующих в виде

$$\frac{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi+c^2}{c^2}\,dz+$$
$$+\left[\frac{b^2-a^2}{c^2}\sin\varphi\cos\varphi\cdot z+\frac{a^2}{c}\cos^2\varphi+\frac{b^2}{c}\sin^2\varphi\right]d\varphi=0$$

или, полагая

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}=k^2, \tag{43}$$

будем иметь

$$\frac{dz}{d\varphi}-\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi}\,z+\frac{c\left(\dfrac{a^2}{a^2+c^2}-k\sin^2\varphi\right)}{1-k^2\sin^2\varphi}=0. \tag{44}$$

Интегрируя линейное уравнение (44), получим

$$z=\frac{D}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+\frac{c^3}{a^2+c^2}\cdot\frac{F(\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-c\,\frac{E(\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{45}$$

где D — произвольная постоянная, $F(\varphi)$ и $E(\varphi)$ — эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода; модуль k эллиптических функций определяется уравнением (43). Уравнение (45) вместе с уравнениями (40) определяют искомые ортогональные траектории.

Перейдем к построению поверхностей S или же, что сводится к тому же, к построению семейств (F), образованных из линий рассматриваемого рода. Чтобы прийти к этому, надо взять семейство однополостных гиперболоидов, зависящее от одного переменного параметра v, и выбрать линию рассматриваемого вида на каждом из этих гиперболоидов.

Три постоянных a, b, c и константа интегрирования D в уравнениях (39), (40), (45) будут функциями параметра v.

Поскольку уравнение (39) гиперболоида взято в канонической форме, необходимо, кроме того, сообщить системе осей (x, y, z) движение, зависящее от параметра v. Выбирая систему $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, неподвижную в пространстве, получим формулы (1) § 1, где c_{ik}, A, B, C будут функциями параметра v. Подставляя сюда значения x, y, z, полученные из уравнений (40), (45), получим уравнения поверхности S. Чтобы она была рассматриваемого вида, необходимо и достаточно, чтобы ее нормали совпадали с прямолинейными образующими этих гиперболоидов. Обозначая через X, Y, Z и $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ направляющие косинусы этих образующих относительно осей (x, y, z) и $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ соответственно, имеем, как в § 1, два соотношения

$$\sum \overline{X}\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}=0, \quad \sum \overline{X}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}=0, \tag{46}$$

из которых первое удовлетворяется тождественно, ибо оно совпадает с условием ортогональности этих образующих к линиям $v=\text{const}$ на поверхности S, то есть к линиям, определяемым выше. Что касается до второго, увидим, повторяя рассуждения § 1, что оно эквивалентно уравнению

$$\sum (c_{11}\overline{X}+c_{21}\overline{Y}+c_{31}\overline{Z})\left(c_{11}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}+c_{21}\frac{\partial \overline{y}}{\partial v}+c_{31}\frac{\partial \overline{z}}{\partial v}\right)=0 \tag{47}$$

или же уравнению

$$\sum X\left(\frac{\partial x}{\partial v}+qz-ry+\xi\right)=0, \tag{48}$$

где p, q, r, ξ, η, ζ определены формулами (8) и (9) § 1. Поскольку имеем

$$X:Y:Z=m:n:1=\frac{a}{c}\cos\varphi:\frac{b}{c}\sin\varphi:1,$$

а с другой стороны, дифференцируя уравнения (40), получим

$$\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{a}{c}\cos\varphi\cdot\frac{\partial z}{\partial v}+\left(\frac{a}{c}\right)'\cos\varphi\cdot z-a'\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{b}{c}\sin\varphi\cdot\frac{\partial z}{\partial v}+\left(\frac{b}{c}\right)'\sin\varphi\cdot z-b'\cos\varphi,$$

то уравнение (48) преобразуется к виду

$$\left(\frac{a}{c^2}\cos^2\varphi+\frac{b^2}{c^2}\sin^2\varphi+1\right)\frac{\partial z}{\partial v}+$$
$$+\left[\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{c}\right)'\cos^2\varphi+\left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c}\right)'\sin^2\varphi\right]z+$$
$$+\frac{aa'-bb'}{c}\sin\varphi\cos\varphi+\begin{vmatrix} m & n & 1\\ p & q & r\\ x & y & z\end{vmatrix}+m\xi+n\eta+\zeta=0. \tag{49}$$

Подсчитывая определитель третьего порядка, имеем

$$\begin{vmatrix} m & n & 1\\ p & q & r\\ x & y & z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} m & n & 1\\ p & q & r\\ mz+a\sin\varphi & nz-b\cos\varphi & z\end{vmatrix}=$$
$$=\begin{vmatrix} m & n & 1\\ p & q & r\\ a\sin\varphi & -b\cos\varphi & 0\end{vmatrix}=-pb\cos\varphi-qa\sin\varphi+r\frac{ab}{c}$$

и окончательно уравнение (48) принимает вид

$$\left(\frac{a^2}{c^2}\cos^2\varphi+\frac{b^2}{c^2}\sin^2\varphi+1\right)\frac{\partial z}{\partial v}+$$
$$+\left[\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{c}\right)'\cos^2\varphi+\left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c}\right)'\sin^2\varphi\right]z+$$
$$+\frac{aa'-bb'}{c}\sin\varphi\cos\varphi+\left(\frac{\xi a}{c}-pb\right)\cos\varphi+$$
$$+\left(\frac{\eta b}{c}-qa\right)\sin\varphi+\zeta+r\frac{ab}{c}=0. \tag{50}$$

Подставляя в это уравнение значение (45) для z и пользуясь формулами

$$\frac{\partial F}{\partial v}=\frac{\partial F}{\partial k}\frac{dk}{dv}=\frac{d\ln k}{dv}[F(\varphi)-\Pi(-k^2,\varphi)]=$$
$$=\frac{d\ln k}{dv}\left[F(\varphi)-\frac{1}{k'^2}E(\varphi)+\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{k'^2\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right],$$
$$\frac{\partial E}{\partial v}=\frac{\partial E}{\partial k}\frac{dk}{dv}=\frac{d\ln k}{dv}[E(\varphi)-F(\varphi)],$$

придем к одному соотношению, содержащему два эллиптических интеграла $F(\varphi)$, $E(\varphi)$ и тригонометрические функции от φ. Поскольку это соотношение должно приводиться к тождеству относительно φ, мы закончим достаточно простыми соотношениями, определяющими p, q, r, ξ, η, ζ, a/c, b/c, D. Поскольку, тем не менее, вычисления немного длинны, мы ограничимся указанием частного решения. Уравнение (50) будет, очевидно, удовлетворено, если мы предположим, что a, b, c и D не зависит от v, что влечет за собой $\frac{\partial z}{\partial v}=0$, и если мы положим

$$\xi\frac{a}{c}-pb=0, \quad \frac{\eta b}{c}-qa=0, \quad \zeta+r\frac{ab}{c}=0.$$

В этом случае все гиперболоиды (39) равны; семейство (F) составлено из равных линий. Три проекции вращения p, q, r — произвольные функции v, а три проекции ξ, η, ζ переноса определяются формулами

$$\xi = p\frac{bc}{a}, \qquad \eta = q\frac{ca}{b}, \qquad \zeta = -r\frac{ab}{c}. \tag{51}$$

Все соответствующие поверхности S — очевидно, поверхности Хаага. Поскольку совокупность всех этих поверхностей зависит от трех произвольных функций p, q, r (a, b, c, D сохраняют фиксированные значения), очевидно, возможно их получить все, исходя из одной из них, посредством распределений семейства (F). Поскольку вращения (p, q, r) произвольны, можно взять произвольно девять косинусов c_{ik} при условии удовлетворения хорошо известных соотношений ортогональной подстановки; тогда p, q, r будут определяться формулами (8) § 1; ξ, η, ζ — формулами (51); наконец A, B, C получаются квадратурами, отправляясь от уравнений (14) § 1; подставляя c_{ik}, A, B, C, а также значения (40), (45) для x, y, z в формулы (1) § 1, получим уравнение поверхности S.

Рассмотрим теперь частный случай гиперболоида вращения. Мы имеем в этом случае

$$a = b,$$

и, следовательно, при $k = 0$ уравнение (44) принимает вид

$$\frac{dz}{d\varphi} + \frac{a^2c}{a^2+c^2} = 0. \tag{52}$$

Интегрируя, имеем

$$z = D - \frac{a^2c}{a^2+c^2}\varphi \tag{53}$$

и, подставляя в формулы (40), после того как положим $b = a$,

$$\begin{aligned} x &= \frac{Da}{c}\cos\varphi + a\sin\varphi - \frac{a^3}{a^2+c^2}\varphi\cos\varphi, \\ y &= \frac{Da}{c}\sin\varphi - a\cos\varphi - \frac{a^3}{a^2+c^2}\varphi\sin\varphi. \end{aligned} \tag{54}$$

Уравнения (53), (54) определяют линии, ортогональные к прямолинейным образующим гиперболоида вращения.

Чтобы построить поверхности S, обратимся к уравнению (50), которое принимает вид

$$\frac{a^2+c^2}{c^2}\left[D' - \left(\frac{a^2c}{a^2+c^2}\right)'\varphi\right] + \left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{c}\right)'\left[D - \frac{a^2c}{a^2+c^2}\varphi\right] + \\ + \left(\frac{\xi a}{c} - pa\right)\cos\varphi + \left(\frac{\eta a}{c} - qa\right)\sin\varphi + \zeta + r\frac{a^2}{c} = 0. \tag{55}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при членах φ, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ и при свободном члене, получим

$$\frac{a^2+c^2}{c^2}\left(\frac{a^2c}{a^2+c^2}\right)' + \left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{c}\right)'\frac{a^2c}{a^2+c^2} = 0, \tag{56}$$

$$\xi = pc, \quad \eta = qc, \quad \zeta = -r\frac{a^2}{c} - D'\frac{a^2+c^2}{c^2} - D\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{c}\right)'. \tag{57}$$

Интегрируя уравнение (56), получим

$$\left(\frac{a^2c}{a^2+c^2}\right)^2\frac{a^2+c^2}{c^2} = \mathrm{const}$$

или же

$$\frac{a^4}{a^2+c^2} = \mathrm{const}. \tag{58}$$

Следовательно, можно принять a и c любыми функциями v, с условием удовлетворить соотношению (58); постоянная интегрирования D и проекции вращения p, q, r — произвольные функции от v; проекции ξ, η, ζ переноса определяются формулами (57). Уравнения поверхности S получаются путем, указанным в предыдущем случае.

Предположим, наконец, что семейство линейчатых поверхностей второго порядка составлено из гиперболических параболоидов. Поскольку путь следования остается тот же, что и для однополостных гиперболоидов, ограничимся частным случаем прямоугольных параболоидов

$$x^2 - y^2 = 4kz, \tag{59}$$

где вычисления значительно упрощаются.

Берятя уравнение прямолинейных образующих в виде

$$x = mz + \alpha, \quad y = nz + \beta \tag{60}$$

и подставляя значения x, y в уравнение (59), будем иметь

$$m^2 - n^2 = 0, \qquad m\alpha - n\beta = 2k, \qquad \alpha^2 - \beta^2 = 0,$$

что позволит нам положить

$$m = \sqrt{k}\cdot u, \qquad n = \sqrt{k}\cdot u, \qquad \alpha = \frac{\sqrt{k}}{u}, \qquad \beta = -\frac{\sqrt{k}}{u}, \tag{61}$$

где u — переменный параметр. Подставляя в (60), получим

$$x = \sqrt{k}\left[uz + \frac{1}{u}\right], \qquad y = \sqrt{k}\left[uz - \frac{1}{u}\right], \tag{62}$$

и, следовательно, квадрат линейного элемента будет

$$ds^2 = k\left[2u^2 + \frac{1}{k}\right]dz^2 + 4kuz\,dz\,du + 2k\left[z^2 + \frac{1}{u^4}\right]du^2.$$

Поскольку прямолинейные образующие определяются уравнением $u = \text{const}$, дифференциальное уравнение их ортогональных траекторий будет

$$\left[2u^2 + \frac{1}{k}\right]dz + 2uz\,du = 0. \tag{63}$$

Интегрируя, получим

$$z = \frac{D}{\sqrt{u^2 + \frac{1}{2k}}}, \tag{64}$$

где D — произвольная постоянная. Подставляя в уравнения (62), имеем

$$x = \sqrt{k}\left[\frac{Du}{\sqrt{u^2 + \frac{1}{2k}}} + \frac{1}{u}\right], \qquad y = \sqrt{k}\left[\frac{Du}{\sqrt{u^2 + \frac{1}{2k}}} - \frac{1}{u}\right]. \tag{65}$$

Уравнения (64), (65) определяют ортогональные траектории образующих; это, очевидно, алгебраические кривые четвертого порядка.

Чтобы построить поверхности S, последуем указанным выше путем. Предположим D, k и девять косинусов c_{ik}, так же, как A, B, C в формулах (1) § 1, функциями переменного v и определим их условием (48), которому можно дать форму

$$\left(m\frac{\partial x}{\partial v} + n\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial v}\right) + \begin{vmatrix} m & n & 1 \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + m\xi + n\eta + \zeta = 0$$

или же, пользуясь уравнениями (60) и теми, которые из них получаются дифференцированием,

$$(m^2 + n^2 + 1)\frac{\partial z}{\partial v} + (mm' + nn')z + \begin{vmatrix} m & n & 1 \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + m\xi + n\eta + \zeta = 0. \tag{66}$$

Подставляя значения z, m, n, α, β, получим

$$(2kD' + Dk')\sqrt{u^2 + \frac{1}{2k}} - \frac{\sqrt{k}}{u}p - \frac{\sqrt{k}}{u}q + 2kr + \sqrt{k}\,u\xi + \sqrt{k}\,u\eta + \zeta = 0. \tag{67}$$

Два первых члена, так же как члены с переменными u, $1/u$ и постоянный член, должны обращаться в нуль порознь; отсюда

$$k' = 0, \quad D' = 0, \tag{68}$$

$$p + q = 0, \tag{69}$$

$$\xi + \eta = 0, \tag{70}$$

$$\zeta = -2kr. \tag{71}$$

В силу уравнений (68) величины k и D постоянны; следовательно, параболоиды и линии семейства (F) конгруэнтны; поверхность S будет поверхностью Хаага. Уравнения (69), (70), (71) являются соотношениями между проекциями скоростей вращения и переноса; три из этих функций могут быть выбраны произвольно. Совокупность получаемых таким образом поверхностей может быть построена из одной из них посредством распределения семейства (F).

§ 4. Вернемся к общей теории семейств (F).

Пусть $v = \text{const}$ — такое семейство на поверхности S, определяемой в криволинейных координатах u, v, и пусть

$$\begin{gathered} ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ -\sum dx\,dX = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 \end{gathered} \tag{72}$$

— квадрат линейного элемента и вторая основная квадратичная дифференциальная форма поверхности S. Поскольку нормали в точках одной линии $v = \text{const}$ принадлежат линейному комплексу, имеем

$$\sum X\,(qz - ry + \xi) = 0, \tag{73}$$

где шесть величин p, q, r, ξ, η, ζ являются функциями переменного v. Поскольку уравнение (73) — не что иное, как условие ортогональности нормали к прямой линии, направляющие косинусы которой пропорциональны $(qz - ry + \xi)$, $(rx - pz + \eta)$, $(py - qx + \zeta)$, непосредственно видно, что оно равносильно трем соотношениям

$$\begin{aligned} qz - ry + \xi &= A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial x}{\partial v}, \\ rx - pz + \eta &= A\frac{\partial y}{\partial u} + B\frac{\partial y}{\partial v}, \\ py - qx + \zeta &= A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned} \tag{74}$$

Подходящим выбором линий $u = \text{const}$ можно их привести к более простому виду

$$\begin{aligned} \mu\frac{\partial x}{\partial v} &= qz - ry + \xi, \\ \mu\frac{\partial y}{\partial v} &= rx - pz + \eta, \\ \mu\frac{\partial z}{\partial v} &= py - qx + \zeta. \end{aligned} \tag{75}$$

Обращаясь к известным свойствам линейного комплекса легко увидеть, что касательная в точке (x, y, z) к линии $u = \text{const}$ имеет в точности направление винтового перемещения, присоединенного к соответствующему линейному комплексу.

Параллельно соотношению (73) имеется тождественное соотношение

$$\sum X\,(qZ - rY) = 0. \tag{76}$$

Прилагая к нему предыдущие рассуждения, приходим к трем уравнениям

$$\begin{aligned} qZ - rY &= \alpha\frac{\partial X}{\partial u} + \beta\frac{\partial X}{\partial v}, \\ rX - pZ &= \alpha\frac{\partial Y}{\partial u} + \beta\frac{\partial Y}{\partial v}, \\ pY - qX &= \alpha\frac{\partial Z}{\partial u} + \beta\frac{\partial Z}{\partial v}. \end{aligned} \tag{77}$$

Рассмотрим теперь поверхность $\bar{S}$, полученную распределением семейства (F) линий $v = \text{const}$ на заданной поверхности S.

В силу результатов § 1 она будет определяться формулами (1) § 1, где c_{ik} и A, B, C удовлетворяют уравнениям (4), куда вместо p, q, r, ξ, η, ζ надо подставить значения этих величин в уравнениях (75), помноженные на произвольную функцию V одного переменного v. Мы имеем, следовательно,

$$\begin{aligned} c_{13}c'_{12} + c_{23}c'_{22} + c_{33}c'_{32} &= -c_{12}c'_{13} - c_{22}c'_{23} - c_{32}c'_{33} = Vp, \\ c_{11}c'_{13} + c_{21}c'_{23} + c_{31}c'_{33} &= -c_{13}c'_{11} - c_{23}c'_{21} - c_{33}c'_{31} = Vq, \\ c_{12}c'_{11} + c_{22}c'_{21} + c_{32}c'_{31} &= -c_{11}c'_{12} - c_{21}c'_{22} - c_{31}c'_{32} = Vr, \end{aligned} \tag{78}$$

$$\begin{aligned} c_{11}A' + c_{21}B' + c_{31}C' &= V\xi, \\ c_{12}A' + c_{22}B' + c_{32}C' &= V\eta, \\ c_{13}A' + c_{23}B' + c_{33}C' &= V\zeta. \end{aligned} \tag{79}$$

Подсчитаем коэффициенты $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$, $\bar{D}$, $\bar{D}'$, $\bar{D}''$ двух основных квадратичных дифференциальных форм поверхности $\bar{S}$.

Дифференцируя формулы (1) § 1 и используя хорошо известные соотношения между c_{ik}, имеем[1]) в силу

[1]) Ср. разложения § 1.

формул (78)

$$c_{11}\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}+c_{21}\frac{\partial\bar{y}}{\partial u}+c_{31}\frac{\partial\bar{z}}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial u},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{80}$$

$$c_{11}\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}+c_{21}\frac{\partial\bar{y}}{\partial v}+c_{31}\frac{\partial\bar{z}}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial u}+V(qz-ry+\xi)=$$
$$=(1+\mu V)\frac{\partial x}{\partial v},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Отправляясь от формул (2), получим также

$$c_{11}\bar{X}+c_{21}\bar{Y}+c_{31}\bar{Z}=X,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_{11}\frac{\partial\bar{X}}{\partial u}+c_{21}\frac{\partial\bar{Y}}{\partial u}+c_{31}\frac{\partial\bar{Z}}{\partial u}=\frac{\partial X}{\partial u},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{81}$$

$$c_{11}\frac{\partial\bar{X}}{\partial v}+c_{21}\frac{\partial\bar{Y}}{\partial v}+c_{31}\frac{\partial\bar{Z}}{\partial v}=\frac{\partial X}{\partial v}+V(qZ-rY)=$$
$$=V\alpha\frac{\partial X}{\partial u}+(1+V\beta)\frac{\partial X}{\partial v}$$

Если формулы (80) и (81) будут установлены, немедленно получим

$$\bar{E}=\sum\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}\right)^2=\sum\left(c_{11}\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}+c_{21}\frac{\partial\bar{y}}{\partial u}+c_{31}\frac{\partial\bar{z}}{\partial u}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2=E,$$

$$\bar{F}=\sum\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}=$$
$$=\sum\left(c_{11}\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}+c_{21}\frac{\partial\bar{y}}{\partial u}+c_{31}\frac{\partial\bar{z}}{\partial u}\right)\left(c_{11}\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}+c_{21}\frac{\partial\bar{y}}{\partial v}+c_{31}\frac{\partial\bar{z}}{\partial v}\right)=$$
$$=\sum\frac{\partial x}{\partial u}(1+\mu V)\frac{\partial x}{\partial v}=(1+\mu V)F, \tag{82}$$

$$\bar{G}=\sum\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}\right)^2=\sum\left(c_{11}\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}+c_{21}\frac{\partial\bar{y}}{\partial v}+c_{31}\frac{\partial\bar{z}}{\partial v}\right)^2=$$
$$=\sum(1+\mu V)^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2=(1+\mu V)^2G.$$

Также получим

$$\bar{D}=-\sum\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}\frac{\partial\bar{X}}{\partial u}=$$
$$=-\sum\left(c_{11}\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}+c_{21}\frac{\partial\bar{y}}{\partial u}+c_{31}\frac{\partial\bar{z}}{\partial u}\right)\left(c_{11}\frac{\partial\bar{X}}{\partial u}+c_{21}\frac{\partial\bar{Y}}{\partial u}+c_{31}\frac{\partial\bar{Z}}{\partial u}\right)=$$
$$=-\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}=D,$$

$$\bar{D}'=-\sum\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}\frac{\partial\bar{X}}{\partial u}=$$
$$=-\sum\left(c_{11}\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}+c_{21}\frac{\partial\bar{y}}{\partial v}+c_{31}\frac{\partial\bar{z}}{\partial v}\right)\left(c_{11}\frac{\partial\bar{X}}{\partial u}+c_{21}\frac{\partial\bar{Y}}{\partial u}+c_{31}\frac{\partial\bar{Z}}{\partial u}\right)=$$
$$=-\sum(1+\mu V)\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}=(1+\mu V)D', \tag{83}$$

$$\bar{D}''=-\sum\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}\frac{\partial\bar{X}}{\partial v}=$$
$$=-\sum\left(c_{11}\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}+c_{21}\frac{\partial\bar{y}}{\partial v}+c_{31}\frac{\partial\bar{z}}{\partial v}\right)\left(c_{11}\frac{\partial\bar{X}}{\partial v}+c_{21}\frac{\partial\bar{Y}}{\partial v}+c_{31}\frac{\partial\bar{Z}}{\partial v}\right)=$$
$$=-\sum(1+\mu V)\frac{\partial x}{\partial v}\left[\alpha V\frac{\partial X}{\partial u}+(1+\beta V)\frac{\partial X}{\partial v}\right]=$$
$$=-(1+\mu V)\alpha V\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}-(1+\mu V)(1+\beta V)\times$$
$$\times\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}=(1+\mu V)\alpha VD'+(1+\mu V)(1+\beta V)D''.$$

Подсчитывая коэффициенты при D' другим способом, получим

$$D'=-\sum\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}\frac{\partial\bar{X}}{\partial v}=$$
$$=-\sum\left(c_{11}\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}+c_{21}\frac{\partial\bar{y}}{\partial u}+c_{31}\frac{\partial\bar{z}}{\partial u}\right)\left(c_{11}\frac{\partial\bar{X}}{\partial v}+c_{21}\frac{\partial\bar{Y}}{\partial v}+c_{31}\frac{\partial\bar{Z}}{\partial v}\right)=$$
$$=-\sum\frac{\partial x}{\partial u}\left[\alpha V\frac{\partial X}{\partial u}+(1+\beta V)\frac{\partial X}{\partial v}\right]=\alpha VD+(1+\beta V)D'.$$

Сравнивая со значением $\bar{D}'$, полученным ранее, имеем соотношение

$$\alpha D+(\beta-\mu)D'=0. \tag{84}$$

Формулы (82) дают нам

$$\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2=(1+\mu V)^2\,(EG-F^2). \tag{85}$$

Так же из формул (83) получаем

$$\bar{D}\bar{D}'' - \bar{D}'^2 = (1+\mu V)\,\alpha V D D' + \\ + (1+\mu V)(1+\beta V) D D'' - (1+\mu V)^2 D'^2.$$

Поскольку

$$\alpha D = -(\beta-\mu) D',$$

в силу соотношения (84) имеем

$$\bar{D}\bar{D}'' - \bar{D}'^2 = (1+\mu V)\,[-(\beta-\mu) V D'^2 + \\ + (1+\beta V) D D'' - (1+\mu V) D'^2] = \\ = (1+\mu V)(1+\beta V)(DD'' - D'^2). \quad (86)$$

Деля почленно уравнение (86) на уравнение (85) и обозначая буквами K и $\bar{K}$ полные кривизны поверхностей S, $\bar{S}$ соответственно, получим

$$\bar{K} = K\frac{1+\beta V}{1+\mu V}. \quad (87)$$

Подсчитывая среднюю кривизну $\bar{H}$ поверхности $\bar{S}$, получим так же

$$\bar{H} = H - \frac{EV\,[\alpha D' + (\beta-\mu) D'']}{(1+\mu V)(EG-F^2)}. \quad (88)$$

Возвращаясь к уравнениям (75), небесполезно заметить, что эти уравнения можно рассматривать как основные уравнения всей теории. Система (75) есть система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений; интегрируя (при заданных p, q, r, ξ, η, ζ, μ), получим поверхность S, на которой семейство $v = \text{const}$ является семейством линий (F). Дифференцируя уравнения (75) по переменному u, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \mu\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial u} &= q\frac{\partial z}{\partial u} - r\frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \mu\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u} &= r\frac{\partial x}{\partial u} - p\frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} + \mu\frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial u} &= p\frac{\partial y}{\partial u} - q\frac{\partial x}{\partial u}. \end{aligned} \quad (89)$$

Складывая эти уравнения, умножив их предварительно на $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, будем иметь

$$\frac{\partial\mu}{\partial u}F + \frac{1}{2}\mu\frac{\partial E}{\partial v} = 0 \quad (90)$$

или же

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial u} = -\frac{1}{2F}\frac{\partial E}{\partial v}. \quad (91)$$

Из последнего соотношения следует, что если коэффициент μ не зависит от переменной v, то коэффициент E не зависит от переменной u и обратно. Заменой параметров можно тогда оба коэффициента привести к единице. В этом случае линии $u = \text{const}$ высекают равные дуги на линиях семейства $v = \text{const}$.

Рассмотрим более внимательно этот частный случай. Уравнения (75) становятся здесь

$$\frac{\partial x}{\partial v} = qz - ry + \xi, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = rx - pz + \eta, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = py - qx + \zeta \quad (92)$$

и не содержат параметра u. Пусть $x_0(v)$, $y_0(v)$, $z_0(v)$ — частное решение системы (92). Полагая $x = x_0 + \alpha$, $y = y_0 + \beta$, $z = z_0 + \gamma$, имеем

$$\frac{\partial\alpha}{\partial v} = q\gamma - r\beta, \quad \frac{\partial\beta}{\partial v} = r\alpha - p\gamma, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial v} = p\beta - q\alpha. \quad (93)$$

Линейная однородная система (93) допускает, как хорошо известно (Дарбу), три частных решения

$$\begin{matrix} c_{11}, & c_{12}, & c_{13}, \\ c_{21}, & c_{22}, & c_{23}, \\ c_{31}, & c_{32}, & c_{33}, \end{matrix}$$

где таблица девяти функций c_{ik} переменной v является ортогональной таблицей. Общее решение системы (92) дается формулами

$$\begin{aligned} x &= x_0 + c_{11}U_1 + c_{21}U_2 + c_{31}U_3, \\ y &= y_0 + c_{12}U_1 + c_{22}U_2 + c_{32}U_3, \\ z &= z_0 + c_{13}U_1 + c_{23}U_2 + c_{33}U_3, \end{aligned} \quad (94)$$

где U_1, U_2, U_3 — три произвольные функции переменного u. Поверхность S, определяемая уравнениями (94), очевидно, является поверхностью, описываемой движением неизменной линии

$$x = U_1,\ y = U_2,\quad z = U_3,$$

и семейство (F) составлено из различных положений этой линии. Обратно, вполне ясно, что все поверхности, порожденные движением произвольной линии, будут поверхностями рассматриваемого вида, так как при x, y, z, определенных формулами вида (94), имеем три уравнения (92). Впрочем, непосредственно вытекает из очень простых кинематических соображений, что нормали к поверхности в точках линии, образующей эту поверхность, принадлежат линейному комплексу; ось этого комплекса будет осью мгновенного винтового движения, соответствующего рассматриваемому положению линии. Семейство (F) составлено из равных линий; мы замечаем, что развертывающиеся поверхности, описанные около поверхности S в точках этих линий, вообще не конгруэнтны. Если, в частности, они равны, то имеем поверхность Хаага.

Возвращаясь к общей теории распределения, сложим уравнения (89), предварительно умножив их соответственно на X, Y, Z; тогда получится

$$\mu \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = \sum X\left(q\frac{\partial z}{\partial u} - r\frac{\partial y}{\partial u}\right) = -\sum \frac{\partial x}{\partial u}(qZ - rY)$$

или же, в силу уравнений (77),

$$\mu D' = -\alpha \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} - \beta \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = \alpha D + \beta D'.$$

Полученное соотношение — не что иное, как соотношение (84).

Дифференцируя уравнения (75) по переменному v, получаем

$$\frac{\partial \mu}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + \mu\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = q\frac{\partial z}{\partial v} - r\frac{\partial y}{\partial v} + q'z - r'y + \xi',$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} + \mu\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = r\frac{\partial x}{\partial v} - p\frac{\partial z}{\partial v} + r'x - p'z + \eta',$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v} + \mu\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = p\frac{\partial y}{\partial v} - q\frac{\partial x}{\partial v} + p'y - q'z + \zeta'.$$

Складывая полученные уравнения, предварительно

умножив их соответственно на X, Y, Z, получим

$$\mu \sum X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \sum X\left(q\frac{\partial z}{\partial v} - r\frac{\partial y}{\partial v}\right) + \sum X(q'z - r'y + \xi') =$$
$$= -\sum \frac{\partial x}{\partial v}(qZ - rY) + \sum X(q'z - r'y + \xi')$$

или же, используя уравнения (77),

$$\mu \sum X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \mu D' =$$
$$= -\alpha \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} - \beta \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v} + \sum X(q'z - r'y + \xi') =$$
$$= \alpha D' + \beta D'' + \sum X(q'z - r'y + \xi') = 0$$

и окончательно, после некоторых преобразований,

$$\alpha D' + (\beta - \mu) D'' + \sum X(q'z - r'y + \xi') = 0. \qquad (95)$$

§ 5. Последнее из соотношений предыдущего параграфа приводит непосредственно к важному частному случаю семейств (F), а именно: когда имеется соотношение

$$\sum X(q'z - r'y + \xi') = 0 \qquad (96)$$

в точках линий $v = \text{const}$ семейства. Поскольку соотношение (73) § 4 имеет место для тех же самых линий, общее число соотношений равно двум, и, следовательно, семейство (F) принадлежит к классу семейств, изученных в § 2. Нормали в точках линии $v = \text{const}$ семейства принадлежат линейной конгруэнции. Вид уравнения (96) непосредственно показывает, что с точностью до бесконечно малых высших порядков нормали в точках линии $v = \text{const}$ принадлежат не только соответствующему линейному комплексу $(p, q, r, \xi, \eta, \zeta)$, но и комплексу, бесконечно близкому. Это свойство, очевидно, характерно для рассматриваемого случая.

Возвращаясь к соотношению (95) предыдущего параграфа, получаем для нашего случая в силу (96)

$$\alpha D' + (\beta - \mu) D'' = 0. \qquad (97)$$

Сравнивая с уравнением (84) § 4 и предполагая, что поверхность S не развертывающаяся (и, следовательно,

$DD'' - D'^2$ отлично от нуля), заключаем

$$\alpha = 0, \quad \beta - \mu = 0, \tag{98}$$

так что уравнения (77) § 4 принимают вид

$$\mu \frac{\partial X}{\partial v} = qZ - rY, \quad \mu \frac{\partial Y}{\partial v} = rX - pZ, \quad \mu \frac{\partial Z}{\partial v} = pY - qX. \tag{99}$$

Линейная дифференциальная система (99) отличается от системы (75) только отсутствием в правой части членов ξ, η, ζ.

Обратно, если параллельно имеются две системы

$$\begin{aligned} qz - ry + \xi &= A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial x}{\partial v}, \\ rx - pz + \eta &= A \frac{\partial y}{\partial u} + B \frac{\partial y}{\partial v}, \\ py - qx + \zeta &= A \frac{\partial z}{\partial u} + B \frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned} \tag{74}$$

и

$$\begin{aligned} qZ - rY &= A \frac{\partial X}{\partial u} + B \frac{\partial X}{\partial v}, \\ rX - pZ &= A \frac{\partial Y}{\partial u} + B \frac{\partial Y}{\partial v}, \\ pY - qX &= A \frac{\partial Z}{\partial u} + B \frac{\partial Z}{\partial v}, \end{aligned} \tag{100}$$

то заменой параметра u они приводятся к виду (75) и (99); следовательно, имеем

$$\alpha = 0, \quad \beta = \mu,$$

и уравнение (95) § 4 дает нам

$$\sum X (q'z - r'y + \xi') = 0. \tag{96}$$

Дифференцируя три уравнения (99) по u, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + \mu \frac{\partial^2 X}{\partial u \, \partial v} &= q \frac{\partial Z}{\partial u} - r \frac{\partial Y}{\partial u}, \\ \frac{\partial \mu}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} + \mu \frac{\partial^2 Y}{\partial u \, \partial v} &= r \frac{\partial X}{\partial u} - p \frac{\partial Z}{\partial u}, \\ \frac{\partial \mu}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial v} + \mu \frac{\partial^2 Z}{\partial u \, \partial v} &= p \frac{\partial Y}{\partial u} - q \frac{\partial X}{\partial u}. \end{aligned} \tag{101}$$

Складывая эти три уравнения, предварительно умножив их соответственно на $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial Y}{\partial u}$, $\frac{\partial Z}{\partial u}$, придем параллельно к соотношению (90) § 4:

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} f + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial e}{\partial v} = 0, \tag{102}$$

где e, f, g — коэффициенты квадрата линейного элемента сферического изображения.

Аналогично, умножая три уравнения (89) соответственно на $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial Y}{\partial u}$, $\frac{\partial Z}{\partial u}$, а три уравнения (101) соответственно на $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ и складывая, получим

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} D' + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial D}{\partial v} = 0. \tag{103}$$

Если нормали в точках линий $v = \text{const}$ принадлежат линейным конгруэнциям, то в силу результатов § 2 очевидно, что поверхность S, порождаемая семейством (F) рассматриваемого вида, допускает распределения, зависящие от двух произвольных функций. Ограничимся, однако, исследованием распределений, зависящих от одной произвольной функции и определяемых значениями p, q, r, ξ, η, ζ в уравнениях (75) и (99).

Мы можем тогда применить общие формулы § 4, вводя туда значения $\alpha = 0$, $\beta = \mu$; получится (см. формулы (82), (83), (87), (88))

$$\begin{aligned} \bar{E} = E, \quad \bar{F} = (1 + \mu V) F, \quad \bar{G} = (1 + \mu V)^2 G, \\ \bar{D} = D, \quad \bar{D}' = (1 + \mu V) D', \quad \bar{D}'' = (1 + \mu V)^2 D'' \end{aligned} \tag{104}$$

и, следовательно,

$$\bar{K} = \frac{\bar{D}\bar{D}'' - \bar{D}'^2}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} = \frac{(1 + \mu V)^2 (DD'' - D'^2)}{(1 + \mu V)^2 (EG - F^2)} = K, \tag{105}$$

$$\bar{H} = \frac{2\bar{F}\bar{D}' - \bar{E}\bar{D}'' - \bar{G}\bar{D}}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} = \frac{(1 + \mu V)^2 (2FD' - ED'' - GD)}{(1 + \mu V)^2 (EG - F^2)} = H. \tag{106}$$

Поскольку полная и средняя кривизны для поверхностей S и $\bar{S}$ равны, мы видим, что в рассмотренном случае распределение семейства (F) линии $v = \text{const}$ поверхности S оставляет инвариантными главные радиусы кривизны. Следовательно, если поверхность S, в частности,— поверхность Вейнгартена, то и все поверхности $\bar{S}$, получаемые, исходя из поверхности $\bar{S}$, будут тоже поверхностями Вейнгартена.

Определение поверхностей S, допускающих специальное распределение, рассмотренное в этом параграфе, получаем, следуя указаниям § 2. Искомые поверхности будут интегральными поверхностями уравнения в частных производных первого порядка, получаемого исключением параметра v из двух уравнений

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ x & y & z \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{q} & -1 \end{vmatrix} + \xi\mathfrak{p} + \eta\mathfrak{q} - \zeta = 0,$$

$$\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ x & y & z \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{q} & -1 \end{vmatrix} + \xi'\mathfrak{p} + \eta'\mathfrak{q} - \zeta' = 0, \tag{107}$$

где

$$\mathfrak{p} = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \mathfrak{q} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

В силу результатов § 2 интегрирование этого уравнения сводится к определению интеграла Ψ уравнения (25) того же параграфа, где F_1 и F_2 будут левыми частями уравнений (107).

Поскольку $F_2 = \frac{\partial F}{\partial v}$, можно упростить уравнение (25), придавая ему вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial v}\left[F_1, \frac{\partial F_1}{\partial v}\right] + \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2}[\Psi, F_1] = 0. \tag{108}$$

Укажем другой метод отыскания поверхностей S этого рода.

Положим для краткости

$$a = qz - ry + \xi, \quad b = rx - pz + \eta, \quad c = py - qx + \zeta, \tag{109}$$

$$a' = q'z - r'y + \xi', \; b' = r'x - p'z + \eta', \; c' = p'y - q'x + \zeta'.$$

Здесь a', b', c',— очевидно, частные производные от a, b, c по переменному v. Имеем два основных соотношения

$$\sum Xa = 0, \qquad \sum Xa' = 0,$$

и, следовательно,

$$X : Y : Z = A : B : C,$$

где A, B, C — три определителя второго порядка матрицы

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{Vmatrix}.$$

Поскольку, с другой стороны, имеем

$$\sum X \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \sum X \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

получаем

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0. \tag{110}$$

Два уравнения (110) эквивалентны одному:

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0, \tag{111}$$

которое будем писать

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0. \tag{112}$$

Это — уравнение Пфаффа с четырьмя переменными x, y, z, v. Изыскание поверхностей S сводится к определению v как функции от x, y, z так, чтобы подстановка этого значения в уравнение (112) приводила к интегрируемому уравнению (то есть к уравнению, которому можно удовлетворять одним соотношением между x, y, z, которое и будет уравнением поверхности S). Условие интегрируемости дает нам

$$A\left(B_z + B_v\frac{\partial v}{\partial z} - C_y - C_v\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \\ + B\left(C_x + C_v\frac{\partial v}{\partial x} - A_z - A_v\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \\ + C\left(A_y + A_v\frac{\partial v}{\partial y} - B_x - B_v\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$$

или же

$$(BC_v - CB_v)\frac{\partial v}{\partial x} + (CA_v - AC_v)\frac{\partial v}{\partial y} + (AB_v - BA_v)\frac{\partial v}{\partial z} + \\ + A(B_z - C_y) + B(C_x - A_z) + C(A_y - B_x) = 0, \quad (113)$$

где $A_v, B_z, \ldots$ — частные производные от A, B по переменным v, z соответственно. Имеем, очевидно,

$$A_v = \frac{\partial}{\partial v}\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$BC_v - CB_v = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c & a \\ c'' & a'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

тогда $BC_v - CB_v$,— очевидно, один из миноров определителя, сопряженного определителю Δ; следовательно,

$$BC_v - CB_v = \Delta a$$

и аналогично

$$CA_v - AC_v = \Delta b, \quad AB_v - BA_v = \Delta c.$$

Уравнение (113) тогда приобретает вид

$$a\frac{\partial v}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y} + c\frac{\partial v}{\partial z} + M = 0, \quad (114)$$

где M — выражение, которое мы не будем вычислять, но вычисление которого не представляет трудностей.

Чтобы дать хотя бы один пример, положим в уравнениях (107)

$$p = -1,\ q = 0,\ r = 0,\ \xi = 0,\ \eta = V_1,\ \zeta = -V_2.$$

Получим

$$y + zq + V_1 q + V_2 = 0, \quad V_1' q + V_2' = 0 \quad (115)$$

или же, исключая V_1, V_2,

$$y + zq = f(q). \quad (116)$$

Уравнение (116) интегрируется, как обыкновенное дифференциальное уравнение (уравнение Лагранжа). Получим

$$y = \frac{q}{\sqrt{q^2+1}}\left(X + \int \frac{f'(q)\,q - f(q)}{q^2\sqrt{q^2+1}}\,dq\right), \quad (117)$$

где X — произвольная функция от x. Уравнения (116) и (117) определяют поверхность S. Линии $v = \text{const}$ — плоские линии, так как в силу второго из уравнений (115) имеем для этих самых линий $v = \text{const}$, и уравнение (116) становится уравнением плоскости, параллельной оси x.

Переходим к рассмотрению частного случая, полагая $\frac{\partial \mu}{\partial u} = 0$ или же, после замены параметра v, $\mu = 1$, как мы уже попутно делали в § 4.

Из уравнений (90), (102) и (103) следует, что в рассматриваемом случае получаем

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial e}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial D}{\partial v} = 0. \quad (118)$$

Уравнения (76) и (99) принимают вид

$$\frac{\partial x}{\partial v} = qz - ry + \xi, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = rx - pz + \eta, \\ \frac{\partial z}{\partial v} = py - qx + \zeta \quad (92)$$

и

$$\frac{\partial X}{\partial v} = qZ - rY, \quad \frac{\partial Y}{\partial v} = rX - pZ, \quad \frac{\partial Z}{\partial v} = pY - qX. \quad (119)$$

Из уравнений (92) мы получили в § 4, что семейство (F) в этом случае образовано из конгруэнтных линий. Аналогично из уравнений (119) получим, что сферическое изображение семейства (F) состоит из конгруэнтных линий, и, следовательно, развертывающиеся поверхности, описанные около поверхности S в точках линий $v = \text{const}$ семейства (F), тоже конгруэнтны. Следовательно, поверхность S является поверхностью Хаага (Haag). Обратно, легко видеть, что для поверхности Хаага имеем формулы (92) и (119), и, следовательно, она действительно является поверхностью S рассматриваемого класса.

§ 6. Оставляя за собой право вернуться позднее к приложениям общей теории, развитой в предыдущих параграфах, я ограничусь здесь некоторыми общими замечаниями.

Допустим, что семейство (F) состоит либо из геодезических, либо из асимптотических линий, либо из линий кривизны поверхности S. В силу результатов § 1 то же самое будет иметь место для всех поверхностей $\bar{S}$, получаемых произвольным распределением семейства (F). Из результатов того же параграфа следует, что всякая линия семейства (F) будет в то же время геодезической, асимптотической или линией кривизны подходяще подобранного геликоида. Разыскание линий рассматриваемого семейства эквивалентно определению линий, которые будут или геодезическими, или асимптотическими, или линиями кривизны на некотором геликоиде. Поскольку эти линии характеризуются свойствами, не зависящими от выбора геликоида, мы видим, что их можно определить, не задаваясь уравнением геликоида, и этот любопытный результат стоит быть отмеченным.

Три свойства, о которых мы говорим, соответственно для трех отмеченных случаев будут:

1. Главные нормали линии принадлежат линейному комплексу.

2. Бинормали линии принадлежат линейному комплексу.

3. Серия нормалей, описывающих развертывающуюся поверхность, принадлежит линейному комплексу.

Рассмотрим более подробно первый случай. Обозначая через l, m, n направляющие косинусы главной нормали, имеем условие

$$a(yn - zm) + b(zl - xn) + c(xm - yl) + fl + gm + hn = 0. \quad (120)$$

Поскольку

$$l = \frac{d^2x}{ds^2}, \quad m = \frac{d^2y}{ds^2}, \quad n = \frac{d^2z}{ds^2},$$

получаем, интегрируя,

$$a\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right) + b\left(z\frac{dx}{ds} - x\frac{dz}{ds}\right) + c\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) + f\frac{dx}{ds} + g\frac{dy}{ds} + h\frac{dz}{ds} = C, \quad (121)$$

где C — произвольная константа. Полагая

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}$$

и пользуясь хорошо известным соотношением

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

получим

$$a(y\gamma - z\beta) + b(z\alpha - x\gamma) + c(x\beta - y\alpha) + f\alpha + g\beta + h\gamma = C\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}. \quad (122)$$

Возвышая в квадрат обе части уравнения (122) и замечая, что α, β, γ — направляющие косинусы касательной, видим, что касательные к рассматриваемой линии принадлежат квадратичному комплексу, определяемому уравнением

$$\left\{\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} + f\alpha + g\beta + h\gamma\right\}^2 = C^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2). \quad (123)$$

Все кривые комплекса (123) (то есть кривые, касательные к которым принадлежат комплексу) являются геодезическими на подходяще подобранных геликоидах. Определение кривых комплекса совершается, следуя, например, пути, указанному Софусом Ли (Geometrie der Berührungstransformationen, Abschn. II). Задача сводится к определению интегральных кривых уравнений Монжа

$$\left\{\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} + f\,dx + g\,dy + h\,dz\right\}^2 = C^2(dx^2+dy^2+dz^2). \tag{124}$$

Если принять $C = 0$, то квадратичный комплекс выродится в линейный

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} + f\alpha + g\beta + h\gamma = 0. \tag{125}$$

Следовательно, в частности, хорошо известные кривые линейного комплекса (ср. Ли, Geometrie der Berührungstransformationen, Abschn. II) принадлежат к рассматриваемому классу линий.

Отметим другой интересный частный случай. Допустим, что главные нормали линии, как мы предполагали в § 2, принадлежат линейной конгруэнции. Мы имеем в таком случае два соотношения вида (120). Интегрируя, приходим к двум соотношениям вида (122). Обозначая через a', b', c', f', g', h', C' коэффициенты второго из этих соотношений и складывая с первым, умноженным на c', второе, умноженное на $-c$, получим линейное соотношение между плюккеровыми координатами касательной. Следовательно, касательные к рассматриваемой линии принадлежат конгруэнции второго порядка и второго класса; эти касательные образуют, очевидно, развертывающиеся поверхности конгруэнции, для которой искомая линия служит ребром возврата.

Определение развертывающихся поверхностей и линий этого рода — хорошо известная проблема, решенная Клейном и Ли.

Перейдем к случаю линий кривизны. Нормали поверхности в точках линии образуют развертывающуюся поверхность; следовательно, определение искомых линий сводится к определению ортогональных траекторий прямолинейных образующих развертывающихся поверхностей, принадлежащих линейному комплексу. Ребра возврата этих развертывающихся поверхностей, очевидно, являются кривыми линейного комплекса; следовательно, задача сводится к хорошо известной и вполне решенной проблеме.

Надо отметить один частный случай. Если линейный комплекс будет специальным комплексом (соответствующий геликоид тогда вырождается в поверхность вращения), то рассматриваемая линия будет плоской. Обратно, нормали плоской кривой, расположенной в плоскости этой кривой, принадлежат, очевидно, линейному комплексу. Если мы предположим, что этот частный случай имеет место для линий семейства (F), то ясно, что поверхность S будет общей поверхностью Монжа, где семейство (F) образовано из плоских линий кривизны.

Следовательно, поверхность Монжа допускает распределение линий кривизны; получающиеся распределением поверхности будут поверхностями того же рода.

В заключение вернемся к поверхности Хаага, которые мы встречали много раз в нашем исследовании. Пусть x_0, y_0, z_0, X_0, Y_0, Z_0 — координаты точки и направляющие косинусы нормали кривой L, описывающей поверхность S Хаага; эти величины — функции параметра u. Координаты x, y, z точки u и направляющие косинусы X, Y, Z нормали поверхности S определяются формулами

$$\begin{aligned} x &= A + c_{11}x_0 + c_{21}y_0 + c_{31}z_0, \\ y &= B + c_{12}x_0 + c_{22}y_0 + c_{32}z_0, \\ z &= C + c_{13}x_0 + c_{23}y_0 + c_{33}z_0, \end{aligned} \tag{126}$$

$$\begin{aligned} X &= c_{11}X_0 + c_{21}Y_0 + c_{31}Z_0, \\ Y &= c_{12}X_0 + c_{22}Y_0 + c_{32}Z_0, \\ Z &= c_{13}X_0 + c_{23}Y_0 + c_{33}Z_0, \end{aligned} \tag{127}$$

где A, B, C и девять величин c_{ik} — функции параметра v и c_{ik} удовлетворяют условиям ортогональной таблицы. Немедленно следует из уравнений (126) и (127), что x, y, z и X, Y, Z удовлетворяют соответственно системам (92) и

(119), причем p, q, r, ξ, η, ζ определяются по формулам (8) и (9) § 1. Мы использовали в предыдущем параграфе системы (92) и (119), чтобы прийти к свойствам поверхностей Хаага. Их можно получить непосредственно из формул (126), (127). Подставляя значения x, y, z, X, Y, Z в соотношения

$$\sum X\frac{\partial x}{\partial u}=0, \qquad \sum X\frac{\partial x}{\partial v}=0,$$

получим, действительно,

$$\sum X_0 x_0'=0, \tag{128}$$

$$\sum X_0(qz_0-ry_0+\xi)=0. \tag{129}$$

Первое из этих уравнений удовлетворено тождественно; второе, которое можно переписать в виде

$$p\,(y_0Z_0-Y_0z_0)+q\,(z_0X_0-Z_0x_0)+\\+r\,(x_0Y_0-X_0y_0)+\xi X_0+\eta Y_0+\zeta Z_0=0, \tag{130}$$

является соотношением вида

$$\sum_{i=1}^{6} V_iU_i=0. \tag{131}$$

Теория соотношения вида (131) хорошо известна, и применяя ее к соотношению (130), увидим, что возможны три случая:

1) p, q, r, ξ, η, ζ пропорциональны константам; поверхность — геликоид.

2) p_1, q_1, r_1, ξ_1, η_1, ζ_1 и p_2, q_2, r_2, ξ_2, η_2, ζ_2 — константы и

$$p=V_1p_1+V_2p_2,\quad q=V_1q_1+V_2q_2,\quad r=V_1r_1+V_2r_2,$$
$$\xi=V_1\xi_1+V_2\xi_2,\quad \eta=V_1\eta_1+V_2\eta_2;\quad \zeta=V_1\zeta_1+V_2\zeta_2.$$

Соответствующее движение является движением, рассмотренным Хаагом; оно получается своего рода сложением двух винтовых движений. Соотношение (130) распадается на два линейных соотношения между плюккеровыми координатами нормали; следовательно, линия L допускает серию нормалей, принадлежащих линейной конгруэнции.

3) p_1, q_1, r_1, ξ_1, η_1, ζ_1; p_2, q_2, r_2, ξ_2, η_2, ζ_2; p_3, q_3, r_3, ξ_3, η_3, ζ_3 — константы, имеем

$$p=V_1p_1+V_2p_2+V_3p_3,\qquad \xi=V_1\xi_1+V_2\xi_2+V_3\xi_3,$$
$$q=V_1q_1+V_2q_2+V_3q_3,\qquad \eta=V_1\eta_1+V_2\eta_2+V_3\eta_3,$$
$$r=V_1r_1+V_2r_2+V_3r_3,\qquad \zeta=V_1\zeta_1+V_2\zeta_2+V_3\zeta_3.$$

Соответствующее движение получается «сложением» трех винтовых движений. Соотношение (130) распадается на три линейных соотношения между плюккеровыми координатами нормали; следовательно, линия L допускает серию нормалей, описывающих линейчатую поверхность второго порядка.

Случаи 2) и 3) приводят к поверхностям Хаага, которые получаются движением Хаага линий, определенных в §§ 2 и 3.

О КОНГРУЭНЦИЯХ W С ЛИНЕЙЧАТЫМИ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ [1])

Конгруэнции W, обе фокальные полости которых являются линейчатыми поверхностями, рассматривались различными геометрами (Л. Бианки, Е. Сегре, Пиконе и Торторичи). Мои личные исследования о конгруэнциях, образованных прямолинейными образующими семейства поверхностей второго порядка (см. Московский Матем. сборник, **31** и мемуар, который появится в этом же сборнике), привели меня к новому и очень простому аналитическому определению конгруэнций с линейчатыми фокальными поверхностями, которое я хочу здесь кратко изложить.

Во всем последующем я буду обозначать через p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 плюккеровы координаты прямой; хорошо известное квадратичное соотношение между этими координатами будет

$$p_1p_4 + p_2p_5 + p_3p_6 = 0. \tag{1}$$

Согласившись приводить по модулю 6 индексы этих координат, то есть полагая

$$p_7 = p_1,\ p_8 = p_2,\ p_9 = p_3,\ p_{10} = p_4,\ p_{11} = p_5,\ p_{12} = p_6, \tag{2}$$

мы запишем соотношение между координатами p_i и q_i двух пересекающихся прямых в виде

$$\sum_{i=1}^{6} p_i q_{i+3} = 0. \tag{3}$$

[1]) Sur les congruences W à focales reglées, Atti dei Lincei Rend., сер. 6, **10** (1929), 145—148 (Перевод С. П. Финикова.)

Чтобы упростить обозначения, я буду везде опускать пределы ($i = 1$, $i = 6$) суммирования. Соотношение (1) запишется при этих условиях в виде

$$\sum p_i p_{i+3} = 0. \tag{1'}$$

Наиболее общая конгруэнция W с линейчатыми фокальными поверхностями будет представлена тремя соотношениями

$$\sum V_i p_i = 0, \qquad \sum V_i' p_i = 0, \qquad \sum V_i'' p_i = 0, \tag{4}$$

где V_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) — шесть произвольных функций одного переменного параметра v и штрихи в V_i' означают дифференцирование; исключая v из уравнений (4), приходим к двум уравнениям относительно координат луча p_i рассматриваемой конгруэнции.

Чтобы показать, что соотношения (4) действительно дают решение нашей проблемы, достаточно показать, что все прямые p_i конгруэнции касаются двух линейчатых поверхностей. Если обозначать через q_i координаты образующей одной такой поверхности (причем q_i будут функциями параметра v), то нам останется доказать два соотношения

$$\sum q_i p_{i+1} = 0, \qquad \sum q_i' p_{i+1} = 0. \tag{5}$$

Итак, положим

$$q_i = \lambda V_{i+3} + \mu V_{i+3}' \tag{6}$$

и, следовательно,

$$q_i' = \lambda' V_{i+3} + (\lambda + \mu') V_{i+3}' + \mu V_{i+3}''.$$

Тогда два соотношения (5) будут удовлетворены в силу уравнений (4), и соотношение (1′) для координат q_i дает уравнение

$$\lambda^2 \sum V_i V_{i+3} + \lambda\mu \sum (V_i V_{i+3}' + V_i' V_{i+3}) + \mu^2 \sum V_i' V_{i+3}' = 0,$$

откуда получаем два значения для отношения $\lambda : \mu$; подставляя их в формулы (6), получаем две фокальные полости конгруэнции.

Чтобы показать, что решение проблемы, которое мы дали, наиболее общее, заметим, что достаточно, как это хорошо известно, рассматривать случай конгруэнций W, для которых прямолинейные образующие соответствуют друг другу на двух фокальных полостях. Поскольку пучок касательных плоскостей к линейчатой поверхности в точках одной прямолинейной образующей проективен ряду точек касания, ясно, что лучи конгруэнции, проходящие через точки одной прямолинейной образующей фокальной полости, образуют поверхность второго порядка, и, следовательно, рассматриваемые конгруэнции W принадлежат к классу конгруэнций, образуемых прямолинейными образующими семейства поверхностей второго порядка (квадрик).

Такая конгруэнция определяется соотношениями

$$\sum A_i p_i = 0, \quad \sum B_i p_i = 0, \quad \sum C_i p_i = 0, \tag{7}$$

где A_i, B_i, C_i — функции переменного параметра v. Для заданного значения v уравнения (7) определяют поверхность второго порядка. Фокальная поверхность конгруэнции — не что иное, как огибающая семейства этих поверхностей второго порядка. Пересечение двух инфинитезимально близких поверхностей второго порядка из этого семейства есть вообще пространственная кривая четвертого порядка. Чтобы конгруэнция, определяемая уравнениями (7), была конгруэнцией рассматриваемого класса, необходимо и достаточно, чтобы упомянутая кривая четвертого порядка сводилась к косому четырехугольнику, образованному двумя парами прямолинейных образующих двух систем соответствующей поверхности второго порядка. Следовательно, три уравнения (7) и уравнения, соответствующие инфинитезимально близким значениям параметра v, или, что сводится к тому же, три уравнения (7) и три уравнения

$$\sum A_i' p_i = 0, \quad \sum B_i' p_i = 0, \quad \sum C_i' p_i = 0 \tag{8}$$

должны сводиться к четырем независимым уравнениям, определяющим две прямые — две образующие,

принадлежащие конгруэнции. Пусть, например,

$$\begin{aligned} \sum B_i' p_i &= \alpha \sum A_i p_i + \beta \sum B_i p_i + \gamma \sum C_i p_i + \rho \sum A_i' p_i, \\ \sum C_i' p_i &= \delta \sum A_i p_i + \varepsilon \sum B_i p_i + \zeta \sum C_i p_i + \sigma \sum A_i' p_i, \end{aligned} \tag{9}$$

где α, β, γ, δ, ε, ζ, ρ, σ — функции параметра v. Но, исходя из соотношений (9), нетрудно образовать три линейные комбинации из уравнений (7), которые будут вида (4). Для этого введем 9 функций переменного v: λ_1, μ_1, ν_1, λ_2, μ_2, ν_2, λ_3, μ_3, ν_3 и положим

$$\begin{aligned} \lambda_3 \sum A_i p_i + \mu_3 \sum B_i p_i + \nu_3 \sum C_i p_i &= \\ = \frac{d}{dv}\left(\lambda_1 \sum A_i p_i + \mu_1 \sum B_i p_i + \nu_1 \sum C_i p_i\right) &= \\ = \lambda_1 \sum A_i' p_i + \mu_1 \sum B_i' p_i + \nu_1 \sum C_i' p_i &+ \\ + \lambda_1' \sum A_i p_i + \mu_1' \sum B_i p_i + \nu_1' \sum C_i p_i&, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \sum A_i p_i + \mu_i \sum B_i p_i + \nu_1 \sum C_i p_i &= \\ = \frac{d}{dv}\left(\lambda_3 \sum A_i p_i + \mu_3 \sum B_i p_i + \nu_3 \sum C_i p_i\right) &= \\ = \lambda_3 \sum A_i' p_i + \mu_3 \sum B_i' p_i + \nu_3 \sum C_i' p_i + \lambda_3' \sum A_i p_i &+ \\ + \mu_3' \sum B_i p_i + \nu_3' \sum C_i p_i&. \end{aligned} \tag{11}$$

Подставляя значения $\sum B_i' p_i$ и $\sum C_i' p_i$, взятые из соотношений (9), и сравнивая коэффициенты при четырех суммах $\sum A_i p_i$, $\sum B_i p_i$, $\sum C_i p_i$, $\sum A_i' p_i$, придем к девяти уравнениям, определяющим девять функций $\lambda_1, \ldots, \nu_3$, и доказательство закончено.

Предыдущие рассуждения показывают, что каждая конгруэнция W рассматриваемого класса сопровождается другой конгруэнцией того же класса. Две конгруэнции образованы двумя системами прямолинейных образующих тех поверхностей второго порядка, которые мы рассматривали в нашем доказательстве. Фокальные поверхности обеих конгруэнций образованы одной или другой парой противоположных сторон косого четырехугольника, отмеченного выше.

Чтобы закончить, я хочу указать очень простое решение задачи: «построить конгруэнцию рассматриваемого класса, исходя из заданной одной фокальной полости».

Пусть q_i (шесть функций переменного v) — координаты прямолинейной образующей данной линейчатой поверхности. Задача сводится к определению функции V_i так чтобы два уравнения

$$\sum q_i p_i = 0, \qquad \sum q_i' p_i = 0$$

были следствиями трех уравнений (4). Я не даю здесь очень простого подсчета, который приводит к следующему результату.

1. Можно положить $V_i = q_i$. Это очевидное решение приводит к специальной конгруэнции с совпадающей парой фокальных полостей.

2. Можно положить

$$V_i = \int \omega q_i dv,$$

где ω — произвольная функция переменной v; это — общее решение задачи.

СОДЕРЖАНИЕ

Дмитрий Федорович Егоров
РАБОТЫ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ
ГЕОМЕТРИИ

М., 1970 г., 380 стр.

Редакторы *В. С. Люкшин, В. В. Донченко.*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр.*
Корректор *И. Б. Мамулова*

Сдано в набор 27/III 1970 г.
Подписано к печати 6/VIII1970 г. Бумага $84\times108^{1}/_{32}$
Физ. печ. л. 11,875+1 вкл. Условн. печ. л. 20,06.
Уч.-изд. л. 20.37 Тираж 4500 экз. Т-09845.
Цена книги 1 р. 63 к. Заказ № 329

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография издательства «Наука».
Москва, Шубинский пер., 10.