ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

И. А. ЕГОРОВА

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ЧАСТЬ III

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

УЧПЕДГИЗ · 1962

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Московский государственный заочный педагогический институт

И. А. ЕГОРОВА

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ЧАСТЬ III

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

Под редакцией проф. Б. З. Вулиха

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва 1962

ПРЕДИСЛОВИЕ

Работе над любым разделом задачника-практикума должно предшествовать глубокое изучение соответствующего теоретического материала, необходимого для понимания данного раздела. Поэтому в начале каждого параграфа в задачнике-практикуме указываются те разделы, главы и параграфы, которые надо предварительно прочитать в учебнике. Для удобства студентов-заочников указания даются по трем учебникам:

[1] Г. М. Фихтенгольц, Основы математического анализа, том I, Физматгиз, 1955 и том II, Физматгиз, 1956,

[2] Н. А. Фролов, Курс математического анализа, часть 2, Учпедгиз, 1959.

[3] И. А. Егорова, Математический анализ. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных (учебно-методическое пособие для студентов-заочников III и IV курсов физико-математических факультетов педагогических институтов), Учпедгиз, 1958.

Студент-заочник может выбрать тот учебник, который ему доступнее и понятнее. Достаточно пользоваться только одним из указанных учебников.

Глава I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Функции двух и трех переменных и их области определения

Предварительно изучите по [1] главу VIII, n° n° 123—130; 132—137; по [2] раздел II, главу 1, § 1; по [3] § 1—2.

Обратите особое внимание на понятие непрерывности функции. При чтении сравнивайте доказательства основных теорем о непрерывных функциях двух переменных с доказательствами соответствующих теорем о непрерывных функциях одной переменной.

1. Найти область определения функции

$$z = \sqrt{(1+x)(y-4)}.$$

Решение. Под *областью определения* функции двух переменных, заданной формулой, или, иначе говоря, заданной аналитически, подразумевается множество всех тех пар чисел (x, y) (т. е. множество точек плоскости), для которых формула, задающая функцию, имеет смысл в области вещественных чисел.

В данном примере сразу видно, что действия, указанные в правой части, выполнимы в области вещественных чисел, только если

$$(1+x)(y-4) \geqslant 0.$$

Это неравенство справедливо при выполнении условий:

$$\text{а) } 1+x \geqslant 0, \quad \text{т. е. } x \geqslant -1,$$
$$y-4 \geqslant 0, \quad \text{т. е. } y \geqslant 4,$$

или же

$$\text{б) } 1+x \leqslant 0, \qquad \text{т. е. } x \leqslant -1,$$
$$y-4 \leqslant 0, \qquad \text{т. е. } y \leqslant 4.$$

Отметим на плоскости расположение точек (x, y), координаты которых удовлетворяют либо неравенствам а), либо неравенствам б). Эти точки заполняют два угла, которые частично заштрихованы на рис. 1. Это и есть область определения данной функции.

2. Найти область определения функции

$$u = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{z(1-z)}} - 2\ln(9-y^2). \qquad (1)$$

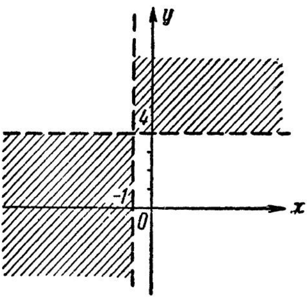

Рис. 1.

Решение. Под *областью определения* функции трех переменных, заданной формулой, аналогично случаю функции двух переменных, подразумевается множество всех тех троек чисел (x, y, z) (т. е. множество точек пространства), для которых формула, задающая функцию, имеет смысл в области вещественных чисел. Для выполнимости всех указанных действий необходимо выполнение следующих трех условий:

1. $4-x^2 \geqslant 0$, т. е. $|x| \leqslant 2$.

2. $z(1-z) > 0$ (знак равенства недопустим, так как недопустимо действие деления на нуль); это неравенство верно при одновременном выполнении неравенств

$$\text{а) } z>0, \qquad \text{б) } 1-z>0,$$

т. е. при

$$0<z<1$$

(одновременное выполнение неравенств $z<0$, $1-z<0$ невозможно).

3. $9-y^2>0$ (аргумент логарифма может быть только строго положительным, так как логарифм нуля и отрицательных чисел не имеет смысла в области вещественных чисел), т. е.

$$|y|<3.$$

Точки в пространстве, координаты которых удовлетворяют условиям 1 — 3, заполняют параллелепипед, который и представляет область определения данной функции (рис. 2). Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей вне этого параллелепипеда, невозможно по формуле (1) сосчитать значение функции u, следовательно, функция (1) в таких точках не определена.

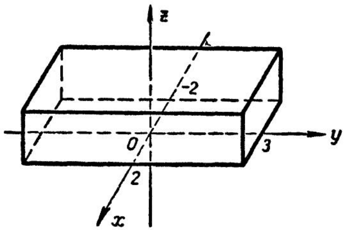

Рис. 2.

3. Найти область определения и проверить непрерывность функции

$$z = \frac{xy + 4}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Решение. Все указанные действия выполнимы для любых пар вещественных чисел (x, y); поэтому областью определения данной функции является вся плоскость. Для проверки непрерывности функции выберем произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$. Пусть точка $M(x, y)$ стремится к M любым способом; тогда

$$\lim_{M \to M_0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{xy + 4}{x^2 + y^2 + 1} =$$

$$= \frac{\lim x \cdot \lim y + 4}{(\lim x)^2 + (\lim y)^2 + 1} = \frac{x_0 y_0 + 4}{x_0^2 + y_0^2 + 1} = f(x_0, y_0).$$

(При вычислении предела функции мы пользовались теоремами о действиях с пределами, которые в данном случае применимы.) Итак, данная функция непрерывна на всей плоскости.

4. Найти область определения функции

$$z = \begin{cases} 0 & \text{в точке } (0, 0), \\ \dfrac{x^3 y}{2x^4 + y^4} & \text{в остальных точках плоскости} \end{cases}$$

и выяснить, непрерывна ли эта функция.

Решение. Областью определения функции является вся плоскость, так как формула $\frac{x^3 y}{2x^4 + y^4}$ действительно имеет смысл всюду, кроме начала координат, а в начале координат функция задана отдельно. Непрерывность функции всюду, кроме начала координат, также очевидна;

это легко проверить точно так же, как в предыдущем примере. Остается проверить, непрерывна ли функция в точке (0, 0); для этого будем искать предел функции при $M \to M_0(0, 0)$, пользуясь определением предела функции «на языке последовательностей» (теоремы о действиях с пределами неприменимы, так как при $x \to 0$ и $y \to 0$ получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$).

Возьмем последовательность точек $M_n\left(\frac{1}{n}, 0\right)$, которая, очевидно, стремится к точке $M_0(0, 0)$; соответствующая последовательность значений функции имеет вид

$$f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{\frac{1}{n^3} \cdot 0}{\frac{2}{n^4} + 0} = 0,$$

т. е. состоит сплошь из нулей, следовательно, предел ее также равен нулю.

Если же взять другую последовательность точек, стремящуюся к (0, 0), например последовательность $M_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, то для нее

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{3}.$$

Последовательность значений функции состоит из чисел $\frac{1}{3}$ и предел ее равен $\frac{1}{3}$.

Таким образом, две последовательности значений функции, соответствующие двум разным способам приближения на плоскости к точке (0, 0) (первый раз по оси Ox, второй раз по биссектрисе первого координатного угла), стремятся к разным пределам и, следовательно, данная функция не имеет предела в точке (0, 0). Таким образом, в точке (0, 0) функция имеет разрыв. В самом деле, равенство $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ не имеет места, так как величина, участвующая в левой части равенства, не существует.

Итак, заданная функция непрерывна на всей плоскости, кроме точки (0, 0), в которой она имеет разрыв.

В задачах 5—15 найти области определения заданных функций (сделать чертежи).

5. $z=\sqrt{x+4y-5}$.

6. $z=\sqrt{2x}-\sqrt{3y}-\sqrt{1-x-y}$.

7. $z=\sqrt{(x-2)(x-4)}-\sqrt{y(y+1)}$.

8. $z=\dfrac{\sqrt{y-2x^2}}{y}$.

9. $z=\arcsin\dfrac{x}{4}+\arcsin\dfrac{y}{5}$.

10. $z=\sin\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$.

11. $z=\ln(6-x-y)+\dfrac{x}{y}$.

12. $z=\ln(9-x^2-y^2-z^2)$.

13. $u=\sqrt[4]{z(4-z)}+\ln(1-x^2)+y$.

14. $u=\operatorname{arctg}\dfrac{3-x}{2-z}$.

15. $u=\sqrt{6-x^2-2y^2-3z^2}$.

16. Найти значения функции примера 6 в точках $A(0;1)$ и $B\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)$. (Предварительно проверить, находятся ли эти точки в области определения функции.)

17. Найти значения функции примера 15 в точках $A(0;0;1)$ и $B\left(-1;0;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. (Предварительно проверить, находятся ли эти точки в области определения функции.)

В задачах 18—22 проверить, непрерывны ли функции, и указать, где расположены их точки разрыва, если таковые имеются.

18. $z=\dfrac{x^2y^2+4}{2x^4+3y^4+2}$.

19. $z=\dfrac{x^2y^2+4}{2x^4+3y^4}$.

20. $z=\begin{cases} 0 & \text{для точки } (0,0). \\ \dfrac{x^2y^4}{2x^6+3y^6} & \text{для всех остальных точек плоскости.} \end{cases}$

21. $z=\dfrac{5x+1}{x^2y}$.

22. $z=\dfrac{y^2+1}{x-y}$.

23. Сформулировать:

а) определение функции трех переменных;

б) определение непрерывности функции трех переменных в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$;

в) определение непрерывности функции трех переменных в кубе $[0,1;\ 0,1;\ 0,1]$.

§ 2. Частные производные и полные дифференциалы первого порядка и высших порядков

Предварительно изучите по [1] главу IX, n° n° 138—144; 146—149; по [2] раздел II, главу I, § 2—9; по [3] § 3—7.

Прочитайте внимательно свойство неизменности формы полного дифференциала первого порядка, обратите внимание на то, как это свойство применяется в задачнике-практикуме при отыскании частных производных (см. примеры 25—27 и др.). В тех примерах задачника, в которых не даны ответы, обязательно проделайте выкладки двумя указанными способами; совпадение полученных в обоих случаях результатов подтвердит правильность выкладок.

24. Для функции

$$z = x^y + \frac{x^3}{y^2}$$

найти следующие частные производные:

$$z'_x,\ z'_y,\ z''_{x^2},\ z''_{y^2},\ z''_{xy},\ z''_{yx}.$$

Решение. Как известно, частные производные находятся по обычным правилам и формулам дифференцирования функций одной переменной.

При отыскании частной производной по x считаем y постоянным; тогда и первое и второе слагаемые в формуле для z дифференцируем как степенные функции:

$$z'_x = yx^{y-1} + \frac{3x^2}{y^2}.$$

При дифференцировании по y считаем x постоянным и тогда слагаемое x^y представляет собой показательную функцию:

$$z'_y = x^y \ln x - \frac{2x^3}{y^3}.$$

Дифференцируя производную z'_x еще раз по x, находим:

$$z''_{x^2} = y(y-1)x^{y-2} + \frac{6x}{y^2}.$$

Дифференцируем z'_y еще раз по y:

$$z''_{y^2} = x^y \ln^2 x + \frac{6x^3}{y^4}.$$

Дифференцируем z'_x по y:

$$z''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x - \frac{6x^2}{y^3}.$$

Дифференцируем z'_y по x:

$$z''_{yx} = yx^{y-1} \ln x + x^y \frac{1}{x} - \frac{6x^2}{y^3}.$$

(Обратите внимание на то, что $z''_{xy} = z''_{xy}$, и проверьте по учебнику, в каких случаях такое равенство имеет место.)

25. Найти полный дифференциал функции

$$z = \frac{x + 3y^3}{x - y}.$$

Решение. 1. Воспользуемся формулой полного дифференциала для функции двух переменных:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x - y - (x + 3y^3)}{(x - y)^2} = -\frac{y + 3y^3}{(x - y)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{9y^2(x - y) + (x + 3y^3)}{(x - y)^2} = \frac{9y^2x + x - 6y^3}{(x - y)^2};$$

$$dz = -\frac{y + 3y^3}{(x - y)^2} dx + \frac{9y^2x + x - 6y^3}{(x - y)^2} dy.$$

2. При выполнении выкладок пришлось дважды дифференцировать дробь; иногда выкладки можно сделать короче, если находить сразу полный дифференциал данной функции по правилу отыскания дифференциала дроби.

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}. \tag{2}$$

Это можно делать, так как даже, если x и y больше не являются независимыми переменными, то форма дифференциала первого порядка остается прежней (см. [1] n° 143) и поэтому формулой (2) можно пользоваться и в том случае, когда в числителе и знаменателе стоят не независимые переменные x и y, а функции (в нашем случае функции $x+3y^3$ и $x-y$). Проводим выкладки, пользуясь также формулами для дифференциала суммы и произведения:

$$dz=\frac{(x-y)\,d(x+3y^3)-(x+3y^3)\,d(x-y)}{(x-y)^2}=$$

$$=\frac{(x-y)(dx+9y^2\,dy)-(x+3y^3)(dx-dy)}{(x-y)^2}=$$

$$=\frac{x\,dx-y\,dx+9y^2x\,dy-9y^3\,dy-x\,dx-3y^3\,dx+x\,dy+3y^3\,dy}{(x-y)^2}=$$

$$=\frac{(x-y-x-3y^3)\,dx+(9y^2x-9y^3+x+3y^3)\,dy}{(x-y)^2}=$$

$$=-\frac{y+3y^3}{(x-y)^2}dx+\frac{x+9y^2x-6y^3}{(x-y)^2}dy. \tag{3}$$

Мы получили для dz то же выражение, которое было выведено раньше. Известно (см. [1], n° 142), что если выражение для полного дифференциала имеет вид

$$dz=A\,dx+B\,dy,$$

то $A=\frac{\partial z}{\partial x}$ и $B=\frac{\partial z}{\partial y}$. Таким образом, сразу получаем из (3) выражения для обеих частных производных:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y+3y^3}{(x-y)^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+9y^2x-6y^3}{(x-y)^2}.$$

Иногда бывает удобнее пользоваться первым приемом, а иногда — вторым.

26. Найти d^2z и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ для функции

$$z = \frac{x^2+1}{y^3}.$$

Решение. Так как для вычисления d^2z надо последовательно найти 5 частных производных, то лучше действовать приемом 2, указанным в задаче 25, что сократит выкладки:

$$dz = \frac{y^3\,d(x^2+1) - (x^2+1)\,d(y^3)}{y^6} = \frac{y^3\,2x\,dx - (x^2+1)3y^2\,dy}{y^6} =$$

$$= \frac{2xy\,dx - 3(x^2+1)\,dy}{y^4}.$$

При дальнейших выкладках учитываем, что dx и dy, как дифференциалы независимых переменных, суть постоянные величины. Имеем

$$d^2z = d(dz) =$$

$$= \frac{y^4\,d\,[2xy\,dx - 3(x^2+1)\,dy] - [2xy\,dx - 3(x^2+1)\,dy]\,d\,(y^4)}{y^8} =$$

$$= \frac{y^4\,[2ydxdx + 2xdydx - 6xdxdy] - [2xydx - 3(x^2+1)\,dy]\,4y^3dy}{y^8} =$$

$$= \frac{2y^2\,dx^2 - 12xy\,dxdy + 12(x^2+1)\,dy^2}{y^5} =$$

$$= \frac{2}{y^3}dx^2 - \frac{12x}{y^4}dx\,dy + \frac{12(x^2+1)}{y^5}dy^2.$$

Сравнивая полученное выражение для d^2z с формулой

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2, \qquad (4)$$

видим, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{6x}{y^4}$$

(выражения для остальных производных первого и второго порядка также видны из найденных d^2z и dz).

27. Найти полный дифференциал функции

$$u = \frac{3x+4yz}{xz+y}.$$

Решение. Будем искать сразу полный дифференциал вторым приемом, примененным в примере 25:

$$du = \frac{(xz+y)\,d(3x+4yz)-(3x+4yz)\,d(xz+y)}{(xz+y)^2} =$$

$$= \frac{(xz+y)(3\,dx+4ydz+4z\,dy)-(3x+4\,yz)(x\,dz+z\,dx+dy)}{(xz+y)^2} =$$

$$= \frac{(3y-4yz^2)\,dx+(4xz^2-3x)\,dy+(4y^2-3x^2)\,dz}{(xz+y)^2} =$$

$$= \frac{y(3-4z^2)}{(xz+y)^2}\,dx+\frac{x(4z^2-3)}{(xz+y)^2}\,dy+\frac{4y^2-3x^2}{(xz+y)^2}\,dz.$$

Коэффициенты при dx, dy, dz и являются тремя частными производными первого порядка функции u.

28. Найти d^3u для функции

$$u = x^3z^4-5y^2z^2+1.$$

Решение. Находим дифференциал первого порядка:

$$du = 3x^2z^4\,dx+4x^3z^3\,dz-10yz^2\,dy-10y^2z\,dz.$$

Находим дифференциал второго порядка:

$$\begin{aligned} d^2u &= 6xz^4\,dx^2+12x^2z^3\,dx\,dz+12x^2z^3\,dz\,dx+12x^3z^2\,dz^2- \\ &\quad -10z^2\,dy^2-20yzdydz-20yzdzdy-10y^2dz^2= \\ &= 6xz^4dx^2+24x^2z^3dx\,dz+12x^3z^2dz^2- \\ &\quad -10z^2\,dy^2-40yz\,dy\,dz-10y^2dz^2. \end{aligned}$$

Находим дифференциал третьего порядка:

$$\begin{aligned} d^3u &= 6z^4\,dx^3+24xz^3\,dx^2dz+48xz^3\,dx^2\,dz+ \\ &\quad +72x^2z^2\,dxdz^2+36x^2z^2dz^2dx+24x^3z\,dz^3- \\ &\quad -20z\,dy^2dz-40z\,dy^2dz-40y\,dy\,dz^2-20y\,dz^2dy= \\ &= 6z^4dx^3+72xz^3dx^2dz+108x^2z^2dxdz^2+ \\ &\quad +24x^3z\,dz^3-60z\,dy^2dz-60y\,dy\,dz^2. \end{aligned}$$

29. Найти частные производные первого и второго порядка и полные дифференциалы первого и второго порядка сложной функции

$$z = f(s^2+t^2)$$

(s и t — независимые переменные).

Решение. Расчленив эту сложную функцию на составляющие, получим:

$$z = f(x), \quad x = s^2+t^2 \tag{5}$$

(внешняя составляющая функция является функцией одной переменной, внутренняя — двух переменных).

1) Пользуемся формулами частных производных сложной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{dz}{dx} \cdot 2s, \tag{6}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{dz}{dx} \cdot 2t. \tag{7}$$

(Обратите внимание на обозначения производных: для производной от z по x применяем прямое «d», так как $z = f(x)$ зависит только от одной переменной.) Отсюда

$$dz = 2\,\frac{dz}{dx}\,(s\,ds + t\,dt). \tag{8}$$

При отыскании $\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ будем учитывать, что в выражении для $\frac{\partial z}{\partial s}$ оба множителя зависят от s: множитель $\frac{dz}{dx}$ зависит от s неявно, через посредство x, а второй множитель явно зависит от s. Поэтому при дифференцировании по s надо, во-первых, применять правило дифференцирования произведения и, во-вторых, при дифференцировании по s первого множителя — $\frac{dz}{dx}$ — применять тот результат, который уже был получен выше в формуле (6) и который можно словесно выразить так: при дифференцировании по s сложной функции данного типа (5) надо взять производную от z по x и умножить ее на $2s$.

Проводим выкладки:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{dz}{dx} \cdot 2s\right) =$$

$$= 2s \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{dz}{dx} \cdot \frac{d}{ds}(2s) =$$

$$= 2s \cdot \frac{d^2 z}{dx^2} \cdot 2s + \frac{dz}{dx} \cdot 2 =$$

(при отыскании производной по s от $\frac{dz}{dx}$ применяем к $\frac{dz}{dx}$ способ отыскания производной по s, сформулированный выше для z)

$$= 4s^2 \cdot \frac{d^2 z}{dx^2} + 2\,\frac{dz}{dx}.$$

Применяя такие же соображения и формулу (7), находим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dz}{dx}\cdot 2t\right)=$$

$$=2t\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d}{dt}\left(2t\right)=$$

$$=2t\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\cdot 2t+\frac{dz}{dx}\cdot 2=4t^2\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{dz}{dx};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dz}{dx}\cdot 2s\right)=2s\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dz}{dx}\right)=$$

$$=2s\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\cdot 2t=4st\,\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Составляем дифференциал второго порядка:

$$d^2z=\left(4s^2\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{dz}{dx}\right)ds^2+8st\,\frac{d^2z}{dx^2}\,ds\,dt+$$

$$+\left(4t^2\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{dz}{dx}\right)dt^2. \tag{9}$$

Мы нашли, таким образом, сначала частные производные и с их помощью составили полные дифференциалы.

Решим теперь эту же задачу вторым способом: сначала непосредственно найдем дифференциалы и по их виду определим частные производные.

2) По свойству неизменности формы дифференциала первого порядка функции (5) можем написать:

$$dz=\frac{dz}{dx}\,dx$$

и находя dx из (5), получаем:

$$dz=\frac{dz}{dx}\,d\,(s^2+t^2)=\frac{dz}{dx}(2s\,ds+2t\,dt)=2\frac{dz}{dx}\,(s\,ds+t\,dt).$$

Это выражение совпадает с выражением (8). Из него можно определить $\frac{\partial z}{\partial s}$ и $\frac{\partial z}{\partial t}$.

Находим дифференциал второго порядка:

$$d^2z=d\,(dz)=d\left[2\,\frac{dz}{dx}\cdot(s\,ds+t\,dt\right]=$$

$$=2(s\,ds+t\,dt)\,d\left(\frac{dz}{dx}\right)+2\,\frac{dz}{dx}\cdot d(s\,ds+t\,dt)=$$

$$=2\,(s\,ds+t\,dt)\,2\,\frac{d^2z}{dx^2}(s\,ds+t\,dt)+2\frac{dz}{dx}(ds\cdot ds+dt\cdot dt)=$$

(для отыскания $d\left(\frac{dz}{dx}\right)$ используем способ нахождения дифференциала, указанный в (8))

$$= 4(s^2ds^2 + 2st\,ds\,dt + t^2dt^2) \cdot \frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{dz}{dx}(ds^2 + dt^2) =$$

$$= \left(4s^2\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{dz}{dx}\right)ds^2 + 8st\frac{d^2z}{dx^2}\,ds\,dt + \left(4t^2\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{dz}{dx}\right)dt^2.$$

Мы получили выражение (9), найденное выше первым способом. Отсюда можно получить сразу все три частные производные второго порядка от z по s и t.

30. Найти частные производные первого и второго порядка и полные дифференциалы первого и второго порядка сложной функции

$$z = f(x, y), \ x = 4st, \ y = s^3 + 2t. \tag{10}$$

Решение. Проводим вычисления двумя способами.

1. Находим частные производные от z по независимым переменным s и t:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 4t + \frac{\partial z}{\partial y}3s^2; \tag{11}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 4s + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot 2. \tag{12}$$

Составляем полный дифференциал первого порядка:

$$dz = \left(4t\frac{\partial z}{\partial x} + 3s^2\frac{\partial z}{\partial y}\right)ds + \left(4s\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y}\right)dt. \tag{13}$$

Находим частные производные второго порядка от функции z по s и t:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(4t\frac{\partial z}{\partial x} + 3s^2\frac{\partial z}{\partial y}\right) =$$

$$= 4t\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 6s\frac{\partial z}{\partial y} + 3s^2\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) =$$

$$= 4t\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot 4t + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \cdot 3s^2\right) + 6s\frac{\partial z}{\partial y} +$$

$$+ 3s^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} \cdot 4t + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot 3s^2\right) =$$

(при дифференцировании по s выражений $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ пользуемся формулами (11), применяя их не к функции z, а к $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ соответственно)

$$= 16t^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 24s^2t\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 9s^4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 6s\frac{\partial z}{\partial y}$$

(смешанные производные равны друг другу). Аналогично находим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 4t+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot 3s^2\right)=$$

$$=4\frac{\partial z}{\partial x}+4t\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+3s^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=$$

$$=4\frac{\partial z}{\partial x}+4t\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}4s+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}2\right)+3s^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\cdot 4s+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}2\right)=$$

(при дифференцировании производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ используем результат (12), применяя его не к функции z, а соответственно к функциям $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$)

$$=16st\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(8t+12s^3)\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}+6s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+4\frac{\partial z}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}4s+\frac{\partial z}{\partial y}2\right)=$$

$$=4s\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=$$

$$=4s\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}4s+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}2\right)+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}4s+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}2\right)=$$

(опять применяем результат (12) к функциям $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$)

$$=16s^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+16s\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Составляем полный дифференциал второго порядка:

$$d^2z=\left[16t^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+24s^2t\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+9s^4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+6s\frac{\partial z}{\partial y}\right]ds^2+$$

$$+2\left[16st\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(8t+12s^3)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+6s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+4\frac{\partial z}{\partial x}\right]ds\,dt+$$

$$+\left[16s^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+16s\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]dt^2. \quad (14)$$

2. Находим сразу полный дифференциал первого порядка, пользуясь свойством неизменности его формы:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial x}d(4st) + \frac{\partial z}{\partial y}d(s^3 + 2t) =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}(4s\,dt + 4t\,ds) + \frac{\partial z}{\partial y}(3s^2\,ds + 2\,dt). \qquad (15)$$

Если сгруппировать иначе эти слагаемые, то получим выражение (13) и из него определим $\frac{\partial z}{\partial s}$ и $\frac{\partial z}{\partial t}$, совпадающие с выражениями (11) и (12)

Находим дифференциал второго порядка:

$$d^2z = d(dz) = d\left[(4s\,dt + 4t\,ds)\frac{\partial z}{\partial x} + (3s^2\,ds + 2\,dt)\frac{\partial z}{\partial y}\right] =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot d(4s\,dt + 4t\,ds) + (4s\,dt + 4t\,ds)d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial y}\cdot d(3s^2ds + 2\,dt) + (3s^2ds + 2\,dt)\,d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}(4\,ds\,dt + 4\,dt\,ds) + (4s\,dt + 4t\,ds)\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(4s\,dt + 4t\,ds) +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(3s^2ds + 2\,dt)\right] + \frac{\partial z}{\partial y}6s\,ds\,ds +$$

$$+ (3s^2ds + 2\,dt)\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(4s\,dt + 4t\,ds) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(3s^2ds + 2\,dt)\right] =$$

(при отыскании полного дифференциала функций $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ мы пользовались результатом (15), применяя его не к z, а соответственно к $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$)

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(4s\,dt + 4t\,ds)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(4s\,dt + 4t\,ds)(3s^2ds + 2\,dt) +$$

$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(3s^2ds + 2\,dt)^2 + 8\,dt\,ds\frac{\partial z}{\partial x} + 6s\,ds^2\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Проделав в полученном выражении все указанные умножения и сгруппировав слагаемые с ds^2, dt^2 и $ds\,dt$, получим выражение (14). (Сделайте проверку сами.) Из него тогда можно определить $\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial t}$.

Так как

$$d^2x = d(dx) = d(4\,sdt + 4t\,ds) = 8\,ds\,dt,$$
$$d^2y = d(dy) = d(3s^2ds + 2\,dt) = 6s\,ds^2,$$

то можно написать:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2y. \quad (16)$$

Запись для d^2z в виде (16) наглядно показывает, что для сложной функции свойство неизменности формы не имеет места для дифференциалов высших порядков (оно иногда имеет место в частных случаях): действительно, первые три слагаемых в правой части (16) совпадают с правой частью формулы (4), а слагаемые $\frac{\partial z}{\partial x} d^2x$ и $\frac{\partial z}{\partial y} d^2y$ являются новыми.

31. Вычислить приближенно в точке $M(-1, 1)$ полное приращение функции

$$z = 4xy^3 - 5x^2 + 6y,$$

пользуясь его заменой полным дифференциалом. Принять $\Delta x = \Delta y = 0{,}001$.

Решение. При достаточно малых Δx и Δy можно пользоваться приближенным равенством $\Delta z \approx dz$. Находим

$$dz = 4y^3dx + 12xy^2dy - 10x\,dx + 6\,dy,$$

подставляем числовые данные:

$$dz = 4 \cdot 0{,}001 - 12 \cdot 0{,}001 + 10 \cdot 0{,}001 + 6 \cdot 0{,}001 = 0{,}008.$$

Итак, $\Delta z \approx 0{,}008$.

32. В результате измерения получено: диаметр r основания конуса равен 8,3 *см*, высота h равна 35,7 *см*; абсолютная погрешность измерений меньше 0,1 *см*. Вычислить объем конуса и указать относительную погрешность подсчета.

Решение. Считаем по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ см}^3 = \frac{1}{3}\pi (8{,}3)^2 \cdot 35{,}7 \text{ см}^3 = 819{,}791\pi \text{ см}^3 \approx$$

$$\approx 820\pi \text{ см}^3 \approx 2575 \text{ см}^3.$$

Результат вычисления дает объем конуса неточно, хотя подсчет и велся по точной формуле, в силу того что были неточные данные. Ошибку можно рассматривать как изменение (приращение) функции $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, соответствующее данным ошибкам (приращениям) Δh и Δr; приращение же ΔV можно приближенно заменить полным дифференциалом dV (см., например, [1], n° 144)

$$\Delta V \approx dV = \frac{\pi}{3}(2rh\Delta r + r^2\Delta h).$$

При подсчете в числах заменим Δr и Δh на 0,1, хотя на самом деле погрешности приращений Δr и Δh возможно были и меньше:

$$\Delta V < \frac{\pi}{3}\left[2\cdot 8{,}3\cdot 0{,}1\cdot 35{,}7 + (8{,}3)^2\cdot 0{,}1\right] см^3 < 23\pi\ см^3.$$

Относительная погрешность получается при делении ΔV на истинное значение V, но так как последнее неизвестно, то полагаем

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\Delta V}{820\pi}$$

и тогда получаем

$$\frac{\Delta V}{V} < \frac{23\pi}{820\pi} < 0{,}03.$$

Таким образом, относительная ошибка вычисления менее трех процентов.

В задачах 33—46 найти частные производные и полные дифференциалы первого порядка (ответы на эти задачи не даются, для самоконтроля проделайте все выкладки двумя способами, как это сделано в задачах 25, 26).

33. $z = e^{-\frac{x}{y^2}}$.

34. $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}$.

35. $z = y^2 \ln 3x$.

36. $z = \arcsin (x^3y^2)$.

37. $z = \frac{4x - 5y}{x + y}$.

38. $z = x^{y^2}$.

39. $z = \cos (x^3 + 2y^4)$.

40. $z = (\cos x)^{y^3}$.

41. $u = e^{\frac{xy}{z}}$.

42. $u = \operatorname{arc\,ctg} \frac{z + x}{y}$.

43. $u = x^{y^2z}$.

44. $u = \frac{xyz}{x + y + z}$.

45. $u = \sqrt{xyz}$.

46. $u = \frac{x - 2y}{(x-z)(y-z)}$.

47. Найти z''_{xy}, z'''_{xy^2}, z'''_{x^2y}, и $z^{\mathrm{IV}}_{x^4}$ от функции

$$z = 5x^3y - \frac{8x}{y^3}.$$

48. Найти z''_{x^2} и z''_{xy} от функции $z = x^{2y}$.

49. Найти u''_{xz} и u'''_{y^3} от функции $u = x^{\frac{y}{z}}$.

50. Найти $u^{(5)}_{x^2y^2z}$ от функции $u = \dfrac{4z^8x^3}{y^5}$.

51. Доказать, что функция $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

52. Доказать, что функция $z = e^x (x \cos y - y \sin y)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

В задачах 53—60 найти полные дифференциалы второго порядка (ответы не даются; для самоконтроля проделайте выкладки двумя способами).

53. $z = 5x^3y^3 + 8xy^5$.

54. $z = \sin (x^3 + y^3)$.

55. $z = \dfrac{1}{2x - 3y}$.

56. $z = \ln (1 - x^2y^2)$.

57. $z = ye^{x-y}$.

58. $u = x^3y^2 + 5zy^4$.

59. $u = z^{x+y}$.

60. $u = \dfrac{1}{x + y + z}$.

61. Найти d^3z для функции

$$z = x^4y - \frac{x^5}{y}$$

и из него определить z'''_{x^2y}.

62. Найти d^3z для функции

$$z = \sin (xy)$$

и из него определить z'''_{yx^2}.

63. Найти d^3z для функции

$$z = x^8y^8$$

и из него определить z'''_{xy^2}.

64. Найти d^3u для функции

$$u = e^{xyz}$$

в точке $O(0,\ 0,\ 0)$.

65. Найти d^4u для функции

$$u = z^3x^2y.$$

66. Найти d^2u для функции

$$u = \frac{y}{xz}$$

и из него определить u''_{xz}.

В задачах 67—74 найти полные дифференциалы и частные производные первого и второго порядка сложных функций. Рекомендуется решать часть примеров первым из двух указанных способов, а другую часть — вторым из двух указанных способов.

67. $z = f(3x + 2y)$. **68.** $z = f(x^3 - y)$.

69. $z = f(xy)$. **70.** $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

71. $z = f\left(\frac{x^2}{y}\right)$. **72.** $z = f(x,y),\ x = s + t,\ y = s - t$.

73. $z = f(x,y),\ x = t^2,\ y = t^3$.

74. $z = f(x,y),\ x = s^2t^2,\ y = s^2 + t^2$.

75. Вычислить приближенно в точке $(1,1)$ приращение функции

$$z = \frac{xy}{x+y},$$

соответствующее приращениям $\Delta x = \Delta y = 0{,}001$.

76. Подсчитать приближенно $(0{,}99)^{3{,}01}$.

Указание. Возьмите функцию $z = x^y$, значения $x = 1$, $y = 3$ и данное число запишите в виде:

$$(0{,}99)^{3{,}01} = (x + \Delta x)^{y+\Delta y},$$

где $\Delta x = -0{,}01$ и $\Delta y = 0{,}01$; воспользуйтесь определением приращения функции и формулой $\Delta z \approx dz$

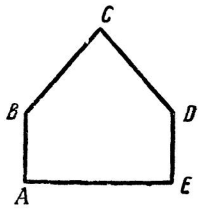

Рис. 3.

77. Подсчитать приближенно $(2{,}02)^{0{,}97}$.

78. Найти границы погрешности в вычислении объема ящика, размеры которого: $1{,}3$ *м*; $0{,}8$ *м* и $1{,}4$ *м* измерены с ошибкой, не превышающей 1 *см*.

79. Найти границы погрешности в вычислении площади фигуры $ABCDE$ (рис. 3), если линейные размеры получены с ошибкой, не превышающей 0,1 *см*:

$$AE = 20 \text{ см}; \; AB = ED = 8{,}7 \text{ см}; \; BC = DC = 15{,}2 \text{ см}.$$

§ 3. Дифференцирование неявных функций

Предварительно изучите по [1] главу XIX, n° n° 314—318 (в n° 317 можно опустить доказательство теоремы 3); по [2] раздел II, главу I, § 10; по [3] § 8.

80. Найти производную первого и второго порядка неявной функции $y(x)$, заданной уравнением

$$xe^{2y} - y \ln x - 8 = 0.$$

Решение. Проверим, действительно ли данное уравнение определяет некоторую неявную функцию. Для этого надо проверить, выполняются ли в данном случае условия теоремы существования неявной функции (см., например, [1], n° 315).

Функция

$$F(x, y) = xe^{2y} - y \ln x - 8$$

непрерывна в точке (x, y) при всяком $x > 0$ и при любом y; частные производные

$$F'_x = e^{2y} - \frac{y}{x}, \quad F'_y = 2xe^{2y} - \ln x$$

непрерывны в той же части плоскости. Нетрудно указать точки (x_0, y_0), в которых $F(x_0, y_0) = 0$, например, $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{3}{2} \ln 2$ (из уравнения при $x_0 = 1$ получаем $e^{2y} - y \cdot 0 - 8 = 0$, откуда $e^{2y} = 8$, $y = \frac{1}{2} \ln 8 = \frac{3}{2} \ln 2$). Легко видеть, что в этой точке $F'_y(x_0, y_0) = 16 \neq 0$. Следовательно, в некоторой окрестности такой точки заданное уравнение действительно определяет однозначную неявную функцию с непрерывной производной. Однако из данного уравнения нельзя фактически найти выражение y через x или x через y.

Несмотря на то, что сама функция явно не задана, все же можно найти ее производную (см., например, [1], формулу (4) из n° 315):

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = \frac{e^{2y} - \frac{y}{x}}{\ln x - 2xe^{2y}} \tag{17}$$

(в выражение для производной входит сама функция y). Эту же производную можно было найти и не пользуясь готовой формулой путем следующих рассуждений.

Если в уравнении

$$xe^{2y} - y \ln x - 8 = 0$$

подразумевать под y ту самую неявную функцию, которая этим уравнением определяется, то это уравнение обращается в тождество, т. е. левая часть равна нулю при всех x, при которых определена неявная функция $y(x)$. Тогда и производная по x от левой части тоже равна нулю, как производная от нуля, и можно написать:

$$e^{2y} + xe^{2y} \cdot 2y' - y' \ln x - \frac{y}{x} = 0 \tag{18}$$

(когда берем производную по x, то учитываем, что y есть функция от x; поэтому, например, производную от e^{2y} берем, как производную сложной функции). Отсюда находим y' и получаем для нее то же выражение (17), что и раньше

Для того чтобы найти y'', можно дифференцировать по x выражение (17), но можно, что более удобно (так как не надо дифференцировать дробь), дифференцировать опять по x тождество (18), помня также, что y и y' — функции от x:

$$e^{2y} \cdot 2y' + 2e^{2y} \cdot y' + 2xe^{2y} \cdot 2y' \cdot y' + 2xe^{2y} \cdot y'' - y'' \ln x - \\ - \frac{y'}{x} - \frac{y'x - y}{x^2} = 0.$$

Отсюда находим

$$y'' = \frac{4e^{2y} \cdot y' + 4xe^{2y} \cdot y'^2 - \frac{2y'}{x} + \frac{y}{x^2}}{\ln x - 2xe^{2y}}.$$

81. Найти третью производную при $x = 0$ неявной функции, определяемой уравнением

$$x^3y^2 - xy^5 + 5x + y = 0.$$

Решение. Проверьте сами так же, как это было сделано в предыдущем примере, что данное уравнение определяет неявную функцию $y(x)$.

Из уравнения сразу видно, что $y=0$ при $x=0$. Находим производные:

$$3x^2y^2+2x^3yy'-y^5-5xy^4y'+5+y'=0;$$

полагая $x=0$ и $y=0$, получаем:

$$5+y'=0,\ y'=-5.$$

Дифференцируем еще раз полученное выше тождество:

$$6xy^2+6x^2yy'+6x^2yy'+2x^3y'^2+2x^3yy''-5y^4y'-5y^4y'-$$
$$-20xy^3y'^2-5xy^4y''+y''=0;$$

полагая $x=0$, $y=0$ и $y'=-5$, находим:

$$y''=0.$$

Дифференцируем еще раз:

$$6y^2+12xyy'+24xyy'+12x^2y'^2+12x^2yy''+6x^2y'^2+$$
$$+4x^3y'y''+6x^2yy''+2x^3y'y''+2x^3yy'''-40y^3y'^2-10y^4y''-$$
$$-20y^3y'^2-60xy^2y'^3-40xy^3y'y''-5y^4y''-20xy^3y'y''-$$
$$-5xy^4y'''+y'''=0.$$

[y'^2 мы дифференцируем, как сложную функцию:

$$(y'^2)'=2y'\cdot(y')'=2y'\cdot y''].$$

Полагая $x=0$, $y=0$, $y'=-5$ и $y''=0$, находим:

$$y'''=0.$$

82. Неявная функция $z(x, y)$ определяется уравнением

$$z^3x-2zy+x^3y-y^4=0.$$

Найти частные производные z''_{y^2} и z''_{xy} в точке $(0, 2)$.

Решение. Из уравнения находим значение z в данной точке:

$$z^3\cdot 0-2z\cdot 2+0\cdot 2-16=0,\ z=-4.$$

Находим сначала частную производную z'_y, так как она нужна для отыскания обеих частных производных второго порядка. Имеем:

$$3xz^2z'_y-2z'_y\cdot y-2z+x^3-4y^3=0 \qquad (19)$$

(x мы считаем при этом постоянным); отсюда при $x=0$, $y=2$ и $z=-4$ получаем

$$0-2z'_y\cdot 2+2\cdot 4+0-4\cdot 8=0, \qquad z'_y=-6.$$

Дифференцируем тождество (19) еще раз по y:

$$6xzz_y'^2+3xz^2z''_{y^2}-2z''_{y^2}\cdot y-2z'_y-2z'_y-12y^2=0,$$

откуда, подставляя числовые данные, получаем

$$0+0-2z''_{y^2}\cdot 2+4\cdot 6-12\cdot 4=0, \qquad z''_{y^2}=-6.$$

Теперь возвращаемся к исходному уравнению и снова, рассматривая его как тождество (т. е. подразумевая в нем под z неявную функцию, им определяемую), дифференцируем его по x (найти производную z'_x необходимо, так как даже если бы мы стали дифференцировать тождество (19) по x для определения частной производной z''_{yx}, которая равна искомой z''_{xy}, все равно при дифференцировании появилась бы частная производная z'_x):

$$z^3+3z^2z'_xx-2z'_xy+3x^2y=0 \qquad (20)$$

(y мы считаем при этом постоянным); отсюда при $x=0$, $y=2$ и $z=-4$ получаем

$$-64-2z'_x\cdot 2=0,\ z'_x=-16.$$

Теперь дифференцируем тождество (20) по y:

$$3z^2\cdot z'_y+6zz'_yz'_xx+3z^2z''_{xy}\cdot x-2z''_{xy}y-2z'_x+3x^2=0;$$

подставляя $x=0$, $y=2$, $z=-4$, $z'_x=-16$, $z'_y=-6$,

находим:

$$-3\cdot 16\cdot 6-2z''_{xy}\cdot 2+2\cdot 16=0,$$

откуда

$$z''_{xy}=80.$$

При решении этой задачи мы не пользовались готовыми формулами для z'_x и z'_y (см., например, [1], n° 318); можно было ими воспользоваться, но применяемый выше прием практически более удобен, особенно когда требуется вычислить производные порядка выше первого.

83. Найти полный дифференциал первого порядка неявной функции $z(x, y)$, заданной уравнением

$$4xz^5+y^3z^2-x^3z+y=0.$$

Решение. В данном уравнении опять подразумеваем под z неявную функцию, им определяемую (чем обращаем его в тождество), и берем сразу полный дифференциал от правой и левой части (а не частные производные, как делали до сих пор):

$$4z^5dx + 20xz^4dz + 3y^2z^2dy +$$
$$+ 2y^3z\,dz - 3x^2z\,dx - x^3dz + dy = 0;$$

отсюда находим dz:

$$dz = \frac{3x^2z - 4z^5}{20xz^4 + 2y^3z - x^3}\,dx + \frac{1 - 3y^2z^2}{20xz^4 + 2y^3z - x^3}\,dy.$$

84. Найти при $x = 1$ производные y', y'', z', z'' неявных функций $y(x)$ и $z(x)$, определяемых системой уравнений:

$$\begin{cases} 8x^2 - z^3 - 3y^4 = 0, \\ x^3 - z^2 + 5y = -3. \end{cases}$$

Дано, что при $x = 1$ функции y и z принимают соответственно значения 0 и 2:

$$y(1) = 0, \quad z(1) = 2.$$

Решение. Для того чтобы составить систему уравнений для отыскания y' и z', нужно, подразумевая под y и z в данных уравнениях те неявные функции, которые ими определяются, и обратив тем самым уравнения в тождества, продифференцировать эти тождества по x:

$$\left.\begin{aligned} 16x - 3z^2z' - 12y^3y' = 0, \\ 3x^2 - 2zz' + 5y' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Подставим числовые данные и найдем y' и z':

$$\left.\begin{aligned} 16 - 12z' = 0, \\ 3 - 4z' + 5y' = 0, \end{aligned}\right\} \quad z' = \frac{4}{3}, \quad y' = \frac{7}{15}.$$

Для отыскания y'' и z'' дифференцируем второй раз тождества (21):

$$16 - 6zz'^2 - 3z^2z'' - 36y^2y'^2 - 12y^3y'' = 0,$$
$$6x - 2z'^2 - 2zz'' + 5y'' = 0.$$

Подставляем числовые данные и находим y'' и z'':

$$\left.\begin{aligned} 16 - 6 \cdot 2 \cdot \frac{16}{9} - 3 \cdot 4 \cdot z'' = 0, \\ 6 - 2 \cdot \frac{16}{9} - 2 \cdot 2z'' + 5y'' = 0, \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} z'' &= -\frac{4}{9}, \\ y'' &= -\frac{38}{45}. \end{aligned}$$

В задачах 85—90 найти первую производную неявной функции $y(x)$.

85. $x^3+y^3-3axy=0$.

86. $y^3=\dfrac{x^3+y}{x-y}$.

87. $2x+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{y}-y=0$.

88. $xy^3-2\operatorname{arctg}\sqrt{y}+x^2=0$.

89. $y^2-4xy+8x^2y=0$.

90. $y\sin x-\cos(x-y)=0$.

91. $y^3x-7x^5y^2+8x+2=0$.

92. Найти значения второй и третьей производных при $x=1$ неявной функции $y(x)$, определяемой уравнением

$$x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0$$

(дано, что $y(1)=1$).

93. Найти при $x=0$ значения второй производной неявной функции, заданной уравнением

$$xe^y+ye^x=1.$$

94. Найти при $x=0$ значения первой и второй производных неявной функции $y(x)$, заданной уравнением

$$x^3y-xy^4+y-1=0.$$

В задачах 95—97 найти полный дифференциал неявной функции $z(x, y)$.

95. $e^z=z\cos(x+y)$.

96. $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$.

97. $x\cos y+y\cos z+z\cos x=1$.

98. Доказать, что неявная функция $z(x, y)$, определяемая уравнением $z=x\,\varphi\left(\dfrac{z}{y}\right)$, удовлетворяет соотношению:

$$y\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}=z.$$

99. Найти d^2z в точке $(-2, 0)$ неявной функции $z(x, y)$, определяемой уравнением

$$2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$$

(дано, что $z(-2, 0)=1$).

100. Найти z''_{x^2} и z''_{xy} в точке $(1, 1)$ неявной функции $z(x, y)$, определяемой уравнением

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2yz - 2xz - 72 = 0$$

(дано, что $z(1, 1) = 4$).

101. Найти d^2z в точке $(1; 0)$ неявной функции $z(x, y)$, определяемой уравнением

$$xz^5 + y^3z - x^3 = 0$$

(дано, что $z(1; 0) = 1$).

102. При $x = 1$ найти y', y'', z', z'' для неявных функций $y(x)$ и $z(x)$, определяемых системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 1, \\ y^2 - 2x + z = 0 \end{cases}$$

(дано, что $y(1) = 1$ и $z(1) = 1$).

103. Найти y', y'', z', z'' для неявных функций $y(x)$ и $z(x)$, определяемых системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1. \end{cases}$$

104. При $x = 1$ найти y', y'', z', z'' для неявных функций $y(x)$ и $z(x)$, определяемых системой уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^3 + y^3 + z^3 - 10 = 0 \end{cases}$$

(дано, что $y(1) = 1$ и $z(1) = -2$).

105. При $x = 7$ найти y' и z' для неявных функций $y(x)$ и $z(x)$, определямых системой уравнений

$$\begin{cases} 3z^2 - 2y^2 + x^2 = 59, \\ z^2 + 3y^2 - x = 0 \end{cases}$$

(дано, что $y(7)$ и $z(7) = 2$).

§ 4. Экстремумы, наибольшие и наименьшие значения функций нескольких переменных

Предварительно изучите по [1] главу IX, n°n° 151—154 (вывод достаточных условий экстремума функции двух переменных в n° 152 можно опустить) и главу XIX, n° n° 319—321; по [2] раздел II, главу I, § 11—12; по [3] § 11—13.

При самостоятельном решении задач на отыскание наибольших и наименьших значений функции двух переменных в замкнутой области (№ 120—128) записывайте исследование так же подробно, как это сделано в примерах 108, 109, 110. Аккуратная подробная запись поможет избежать ошибок в длинных выкладках, связанных с такими исследованиями.

106. Найти экстремумы функции

$$z = x^3 + y^3 - 3axy.$$

Решение. Находим частные производные

$$z'_x = 3x^2 - 3ay,$$
$$z'_y = 3y^2 - 3ax$$

и ищем точки, в которых обе частные производные обращаются в нуль (стационарные точки):

$$x^2 - ay = 0, \quad y^2 - ax = 0;$$

отсюда находим

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0,$$
$$x_2 = a,\ y_2 = a.$$

Итак, найдены две стационарные точки $M_1(0,\ 0)$ и $M_2(a,\ a)$ и, следовательно, по необходимым условиям существования экстремума он может быть только в этих двух точках (частные производные непрерывны и поэтому других точек, подозрительных на экстремум, нет).

Проверим выполнение достаточных условий; для этого найдем производные второго порядка (см., например, [1], n° 152):

$$z''_{x^2} = 6x,\ z''_{y^2} = 6y,\ z''_{xy} = -3a.$$

В точке $M_1(0,\ 0)$ имеем

$$z''_{x^2} \cdot z''_{y^2} - (z''_{xy})^2 = 0 - 9a^2 < 0,$$

следовательно, в точке M_1 экстремума нет.

В точке $M_2(a, a)$ имеем

$$z''_{x^2} \cdot z''_{y^2} - (z''_{xy})^2 = 6a \cdot 6a - 9a^2 > 0,$$

следовательно, экстремум есть. Характер экстремума зависит от знака числа a; если $a > 0$, то функция имеет минимум (так как $(z''_{x^2})_{M_2} = 6a > 0$) и если $a < 0$, то функция имеет максимум.

107. Найти экстремумы функции

$$z = e^{2x}(x + y^2 + 2y).$$

Решение. Находим стационарные точки:

$$z'_x = 2e^{2x}(x + y^2 + 2y) + e^{2x} = e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1);$$

$$z'_y = e^{2x}(2y + 2);$$

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2y^2 + 4y + 1 = 0, \\ 2y + 2 = 0, \end{cases}$$

откуда $x = \frac{1}{2}$; $y = -1$. Найдена одна стационарная точка $M_1\left(\frac{1}{2}, -1\right)$. Других точек, подозрительных на экстремум, нет.

Проверяем наличие экстремума в M_1 с помощью достаточных условий:

$$z''_{x^2} = e^{2x}(4x + 4y^2 + 8y + 4);$$

$$z''_{y^2} = 2e^{2x};$$

$$z''_{xy} = e^{2x}(4y + 4);$$

$$(z''_{x^2})_{M_1} = 2e, \ (z''_{y^2})_{M_1} = 2e, \ (z''_{xy})_{M_1} = 0,$$

откуда $(z''_{x^2})_{M_1} \cdot (z''_{y^2})_{M_1} - (z''_{xy})^2_{M_1} = 4e^2 > 0$.

Так как $(z''_{x^2})_{M_1} > 0$, то в точке M_1 функция имеет минимум.

108. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = xy - x^2y - \frac{xy^2}{2}$$

в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

Решение. 1. Находим стационарные точки внутри данной области:

$$z'_x = y - 2xy - \frac{y^2}{2} = y\left(1 - 2x - \frac{y}{2}\right);$$

$$z'_y = x - x^2 - xy = x(1 - x - y);$$

$$\begin{cases} y\left(1 - 2x - \frac{y}{2}\right) = 0, \\ x(1 - x - y) = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$x = 0,\ y = 0;\ x = 0,\ y = 2;\ x = 1,\ y = 0;\ x = \frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3};$$

им соответствуют четыре точки:

$$M_1(0;\ 2);\ M_2(0;\ 0);\ M_3(1;\ 0);\ M_4\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right).$$

Внутренней точкой области является только точка M_4; вычислим значение функции в этой стационарной точке:

$$z_4 = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9\cdot 2} = \frac{2}{27}.$$

2. Исследуем изменение функции на границе области. Используя уравнения границы, мы можем свести дело к исследованию функции одной переменной и вычислить значения функции во всех «подозрительных на экстремум» точках границы и во всех угловых точках. Граница состоит из четырех отдельных отрезков, поэтому проведем исследование отдельно на каждой стороне прямоугольника.

а) Исследование на стороне M_2M_3. Уравнение этой стороны есть $y = 0$; так как сейчас нас интересует изменение заданной функции только на линии M_2M_3, то, подставляя $y = 0$ в формулу, задающую функцию, находим, что на стороне M_2M_3 исследуемая функция принимает вид $z \equiv 0$.

б) Исследование на стороне M_3M_5. (Через M_5 обозначена точка с координатами (1; 2).) Уравнение этой стороны есть $x = 1$; подставляя $x = 1$ в формулу для z, находим, что на стороне M_3M_5 исследуемая функция принимает вид: $z = -\frac{y^2}{2}$ (получаем функцию одной переменной). При возрастании y от 0 до 2 (при движении от M_3 до M_5) функция $z = -\frac{y^2}{2}$ монотонно убывает; своего наименьшего значения она достигает в точке $M_5(1;\ 2)$:

$$z_5 = -2.$$

в) Исследование на стороне M_1M_5. Уравнение этой стороны есть $y = 2$; подставляя $y = 2$ в формулу для z, находим, что на стороне M_1M_5 исследуемая функция принимает вид: $z = -2x^2$. При возрастании x от 0 до 1 (при движении от M_1 до M_5) функция $z = -2x^2$

монотонно убывает; следовательно, наибольшее значение она принимает в точке $M_1(0,\ 2)$:

$$z_1 = 0,$$

а наименьшее значение — в точке M_5 (уже было вычислено выше).

г) Исследование на стороне M_2M_1. Уравнение этой стороны есть $x = 0$; подставляя $x = 0$ в формулу для z, находим, что на стороне M_2M_1 исследуемая функция принимает вид: $z \equiv 0$.

3. Сравниваем между собой по величине все вычисленные значения функции: $z = 0$ на линии $M_1M_2M_3$

$$z_4 = \frac{2}{27},\ z_5 = -2.$$

Наибольшее в прямоугольнике [0,1; 0,2] значение функции, равное $\frac{2}{27}$, достигается внутри прямоугольника в точке M_4.

Наименьшее в прямоугольнике [0,1; 0,2] значение функции, равное -2, достигается в точке M_5.

109. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^6 + y^6 - 3x^2 + 6xy - 3y^2$$

в области, заданной неравенствами:

$$0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 2.$$

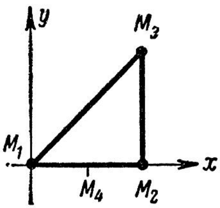

Рис. 4.

Решение. Выясним прежде всего вид области. Точки плоскости, ординаты которых удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant y \leqslant x$, расположены не ниже оси Ox и не выше биссектрисы $y = x$; точки плоскости, абсциссы которых удовлетворяют неравенству $x \leqslant 2$, расположены не правее вертикальной прямой $x = 2$. Точки плоскости, абсциссы и ординаты которых одновременно удовлетворяют поставленным требованиям, заполняют прямоугольный треугольник $M_1M_2M_3$ (рис. 4) вместе с его границей.

1. Найдем стационарные точки функции внутри заданной области:

$$z'_x = 6x^5 - 6x + 6y;\ \ z'_y = 6y^5 + 6x - 6y;$$

из системы

$$\begin{cases} x^5 - x + y = 0, \\ y^5 + x - y = 0 \end{cases}$$

находим $x^5 + y^5 = 0$, $x^5 = -y^5$. Так как в заданной области и $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, то стационарная точка функции z не попадает внутрь заданной области.

2. Исследуем функцию на границе области. Граница треугольника распадается на три стороны: M_1M_2, M_2M_3 и M_3M_1.

а) Исследование на стороне M_1M_2. Уравнение этой стороны есть $y = 0$. Подставляя $y = 0$ в заданную функцию z, получаем: $z = x^6 - 3x^2$. На стороне M_1M_2 переменная x изменяется от 0 до 2; посмотрим, как при этом изменяется z. Найдем производную $z' = 6x^5 - 6x$; $z' = 0$ при $x = 0$ и при $x = \pm 1$. Значение $x = -1$ не попадает в промежуток изменения x, а значение $x = 0$ совпадает с концом промежутка изменения x. Вычисляем значение функции в точке $M_4(1, 0)$; имеем $z_4 = -2$. Вычисляем также значение z и в точках $M_1(0, 0)$ и $M_2(2, 0)$:

$$z_1 = 0 \text{ и } z_2 = 52.$$

(Эти точки соответствуют концам промежутка изменения x, а в таких точках функция одной переменной x может принимать свое наибольшее или наименьшее в промежутке значение.)

б) Исследование на стороне M_2M_3. Уравнение этой стороны $x = 2$. Подставляя $x = 2$ в функцию z, тогда:

$$z = y^6 - 3y^2 + 12y + 52.$$

На стороне M_2M_3 переменная y изменяется от 0 до 2; посмотрим, как при этом изменяется z. Найдем производную

$$z' = 6y^5 - 6y + 12;$$

положим $z' = 0$, т. е. $y^5 - y + 2 = 0$. Это уравнение пятой степени мы не умеем решать, но если переписать его в виде $y^5 = y - 2$, то его можно решить графически: в координатной системе Oyu начертим линии $u = y^5$ и $u = y - 2$ (рис. 5); они пересекаются в третьей четверти, т. е. при $y < 0$, а такие y не входят в заданную область изменения y. Таким образом, на стороне M_2M_3 производная функции z не обращается в нуль. Надо вычислить значения z на концах стороны M_2M_3: в M_2 значение z уже было вычислено; в точке $M_3(2, 2)$ имеем $z_3 = 128$.

в) Исследование на стороне M_1M_3. Уравнение этой стороны есть $y = x$. Подставляя $y = x$ в z, получаем $z = 2x^6$. На стороне M_1M_3 переменная x изменяется от 0 до 2 и при этом $2x^6$ растет от 0 до 128.

3. Сравниваем между собой все вычисленные значения функции:

$$z_1 = 0,\ z_2 = 52,\quad z_3 = 128,\ \text{и}\ z_4 = -2.$$

Наибольшее из них 128 достигается в вершине M_3 треугольника; наименьшее из них -2 достигается в точке $M_4(1,\ 0)$.

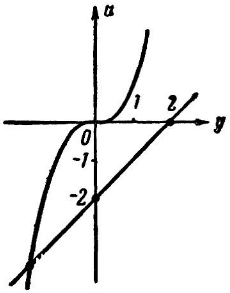

Рис. 5.

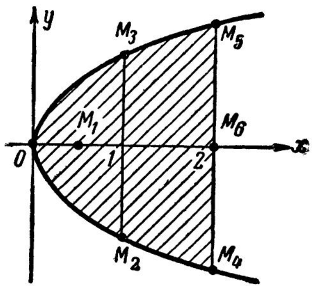

Рис. 6.

110. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = (x - y^2)\sqrt[3]{(x-1)^2}$$

в области, заданной неравенствами $y^2 \leqslant x \leqslant 2$.

Решение. Выясним вид области. Неравенство $y^2 \leqslant x$ указывает на то, что рассматриваются точки плоскости, лежащие в части плоскости, ограниченной параболой $y^2 = x$ (рис. 6) (так как ординаты этих точек не превосходят ординат точек параболы), и, кроме того, абсциссы этих точек плоскости не превосходят 2. Следовательно, указанные точки заполняют параболический сегмент (он заштрихован на рис. 6), ограниченный справа прямой $x = 2$, вместе с границей.

1. Найдем точки «подозрительные на экстремум» внутри этой области. Имеем

$$z'_x = \frac{5x - 2y^2 - 3}{3\sqrt[3]{x-1}};\quad z'_y = -2y\sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

Приравнивая частные производные нулю, получаем систему

$$\begin{cases} 5x - 2y^2 - 3 = 0, \\ 2y\sqrt[3]{(x-1)^2} = 0. \end{cases}$$

При решении этой системы считаем, что $x \neq 1$, так как в выражении для z'_x имеем $\sqrt[3]{x-1}$ в знаменателе. Решая систему, получаем $y = 0$ и $x = \frac{3}{5}$. Вычисляем значение z в стационарной точке $M_1\left(\frac{3}{5}, \ 0\right)$:

$$z_1 = \frac{3\sqrt[3]{20}}{25}.$$

Подозрительными на экстремум являются и все точки хорды M_2M_3, так как в них $z'_x = \infty$ и $z'_y = 0$. Во всех точках этой хорды $z = 0$.

2. Исследуем функцию z на границе области. Граница параболического сегмента распадается на часть параболы $M_4M_2OM_3M_5$ и хорду M_4M_5.

а) Исследуем функцию сначала на линии $M_4M_2OM_3M_5$. Уравнение этой линии есть $y^2 = x$. Подставляя x вместо y^2 в z, получаем $z \equiv 0$. Итак, на этой части границы z постоянно равно нулю.

б) Исследуем теперь функцию на линии M_4M_5. Уравнение этой хорды есть $x = 2$. Подставляя $x = 2$ в z, получаем $z = 2 - y^2$. При движении по хорде от M_4 к M_5 переменная y растет от $-\sqrt{2}$ до $\sqrt{2}$. Проследим изменение z. Имеем $z' = -2y$, следовательно, $z' = 0$ при $y = 0$. Итак, $M_6(2;\ 0)$ — стационарная точка для функции $z = 2 - y^2$; находим: $z_6 = 2$. На концах промежутка изменения y, т. е. в точках M_4 и M_5, значения $z_4 = z_5 = 0$ по а).

3) Сравниваем все найденные значения функции и находим, что наибольшее значение функции $z = 2$ достигается в M_6 и наименьшее значение $z = 0$ достигается на хорде M_2M_3 и на части границы $M_4M_2OM_3M_5$.

111. При каких размерах прямоугольного открытого ящика с заданным объемом 4 $м^3$ его поверхность будет наименьшей из возможных.

Решение. Обозначим размеры ящика через x, y, z. По условию $V = 4$ $м^3$, т. е.

$$xyz = 4. \tag{22}$$

Ищем наименьшее значение величины поверхности, т. е. функции

$$S = xy + 2xz + 2yz.$$

Величины x, y и z в S удовлетворяют условию (22), которое и является уравнением связи и, следовательно, надо искать относительный минимум функции S. Так как из уравнения связи в данном случае легко определить, например, z, то из (22) находим $z = \frac{4}{xy}$ и подставляем в S:

$$S = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}.$$

Теперь для функции S речь уже идет об отыскании обычного экстремума (см., например, [1] п° 319).

Находим стационарные точки:

$$S'_x = y - \frac{8}{x^2}, \quad S'_y = x - \frac{8}{y^2},$$

откуда

$$y - \frac{8}{x^2} = 0, \qquad x - \frac{8}{y^2} = 0;$$

решая систему, находим:

$$x = y, \ x^3 = 8, \ x = y = 2,$$

т. е. единственной стационарной точкой является точка (2, 2). По смыслу задачи ясно, что найденные значения x и y доставляют минимум функции S (можно это проверить и по достаточным условиям экстремума). При найденных x и y имеем: $z = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1$ и, следовательно, наиболее выгодный (в указанном в задаче смысле) по форме ящик такой: дно квадратное и высота в два раза меньше стороны основания.

112. Найти размеры параллелепипеда наибольшего объема, вписанного в эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{23}$$

(числа a, b, c — известны).

Решение. Если точка $M(x, y, z)$ является вершиной параллелепипеда в первом октанте, то, очевидно, объем параллелепипеда будет равен

$$V = 8xyz \tag{24}$$

(ребра параллелепипеда, очевидно, параллельны координатным осям). Следовательно, надо найти относительный максимум функции (24) при наличии уравнения связи (23) (см., например, [1], п° 320) . Составляем функцию

$$\Phi(x, \quad y, \quad z) = 8xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$

и систему (метод Лагранжа применяется к случаю функции трех переменных и с одним уравнением связи):

$$8yz + \lambda \cdot \frac{2x}{a^2} = 0,$$

$$8zx + \lambda \cdot \frac{2y}{b^2} = 0,$$

$$8xy + \lambda \cdot \frac{2z}{c^2} = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Отсюда находим:

$$\lambda = -\frac{4a^2yz}{x} = -\frac{4b^2xz}{y} = -\frac{4c^2xy}{z}; \quad \frac{a^2yz}{x} = \frac{b^2xz}{y},$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2}; \quad \frac{a^2yz}{x} = \frac{c^2xy}{z}, \quad \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2}.$$

Используя последнее уравнение системы, получаем

$$3\frac{x^2}{a^2} = 1; \ x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Таковы размеры искомого параллелепипеда. По смыслу задачи ясно, что это и есть параллелепипед наибольшего объема.

113. Найти длины полуосей эллипса

$$36x^2 + 24xy + 29y^2 = 180. \tag{25}$$

Р е ш е н и е. Длины полуосей эллипса совпадают с расстоянием от центра эллипса до наиболее удаленной и до наиболее близкой от центра точками эллипса. Введем функцию

$$u = x^2 + y^2;$$

она выражает квадрат расстояния точек эллипса до начала координат (центр эллипса (25) находится в начале координат, так как в уравнении отсутствуют члены с первыми степенями x и y), если x и y таковы, что удовлетворяют уравнению связи (25). Итак, решение задачи свелось к следующему: найти относительный максимум и относительный минимум функции $u = x^2 + y^2$ при наличии уравнения связи (25).

В данном случае из уравнения связи неудобно выражать y через x или x через y (громоздко) и поэтому решим задачу методом Лагранжа. Метод применяется в данном случае к функции двух переменных и с одним уравнением связи. Составляем вспомогательную функцию

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(36x^2 + 24xy + 29y^2 - 180)$$

и систему

$$\begin{cases} \Phi'_x(x, y) = 0, \\ \Phi'_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0, \end{cases}$$

где $\varphi(x, y) = 0$ — уравнение связи:

$$\begin{cases} 2x + \lambda(72x + 24y) = 0, \\ 2y + \lambda(24x + 58y) = 0, \\ 36x^2 + 24xy + 29y^2 = 180. \end{cases}$$

Исключаем сначала x и y из первых двух уравнений:

$$x(1 + 36\lambda) + 12y\lambda = 0; \quad y = -\frac{x(1 + 36\lambda)}{12\lambda} \tag{26}$$

(подставляем найденное y во второе уравнение)

$$-\frac{x(1 + 36\lambda)}{12\lambda} + \lambda\left[12x - \frac{29x(1 + 36\lambda)}{12\lambda}\right] = 0,$$

$$-x(1 + 36\lambda) + \lambda[144x\lambda - 29x(1 + 36\lambda)] = 0,$$

$$900\lambda^2 + 65\lambda + 1 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем

$$\lambda_1 = -\frac{1}{20} \text{ и } \lambda_2 = -\frac{1}{45};$$

а) при $\lambda_1 = -\frac{1}{20}$ из (26) находим $y = -\frac{4x}{3}$ и, подставляя в третье уравнение, получаем

$$x = \pm\frac{9}{5}, \qquad y = \frac{12}{5}.$$

В таком случае полуось эллипса $a = \sqrt{\frac{81 + 144}{25}} = 3$. Точки $A\left(\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}\right)$ и $B\left(-\frac{9}{5}, +\frac{12}{5}\right)$ являются концами оси эллипса длины $2a$ (рис. 7);

б) при $\lambda_2 = -\frac{1}{45}$ из (26) находим $y = \frac{3x}{4}$ и, подставляя в уравнение эллипса, получаем

$$x = \pm\frac{8}{5},\ y = \pm\frac{6}{5}.$$

Отсюда вторая полуось эллипса $b = \sqrt{\frac{64+36}{25}} = 2$. Точки $C\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$ и $D\left(-\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ являются концами оси эллипса длины $2b$ (рис. 7). (Уравнения осей эллипса:

$$y = -\frac{4x}{3} \text{ и } y = \frac{3x}{4};$$

оси, действительно перпендикулярны друг другу, так как $-\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4} = -1$)

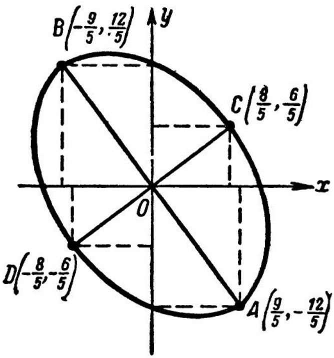

Рис. 7.

В задачах 114—119 найти экстремумы функции.

114. $z = -x^2 - xy - y^2 + x + y$.

115. $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ $(x > 0,\ y > 0)$.

116. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$.

117. $z = (2ax - x^2)(2by - y^2)$.

118. $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$.

119. $z = x^2 + 2xy - 3y^2 + 1$.

В задачах 120—128 найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных областях.

120. $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$ в квадрате $[0,1;\ 0,1]$.

121. $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$ в области $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 4$.

122. $z = x^3 - 2y^3 + 3xy - 5$ в квадрате $[-1,1;\ -1,1]$.

123. $z = x^3 + 3y^2 - 3xy$ в прямоугольнике $[0,2;\ 0,1]$.

124. $z = \frac{xy}{2} - \frac{x^2y}{6} - \frac{xy^2}{8}$ в области $x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$; $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leqslant 1$.

125. $z = \frac{xy}{2} - \frac{x^2y}{6} - \frac{xy^2}{8}$ в прямоугольнике $[0,3;\ 0,4]$.

126. $z = x^3y + x^2y^2 - x^2y$ в квадрате $[0,1;\ 0,1]$.

127. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ в области $x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$; $x + y \leqslant 1$.

128. $z = \cos x \cdot \cos y \cdot \cos(x + y)$ в квадрате $[0,\pi;\ 0,\pi]$.

129. Найти размеры прямоугольного параллелепипеда, который имеет наибольший возможный объем при данной полной поверхности.

130. Найти размеры параллелепипеда наибольшего объема, вписанного в шар данного радиуса.

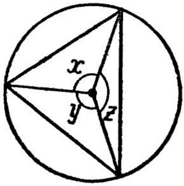

Рис. 8.

131. Разделить данное положительное число a на три части $(a = x + y + z)$ так, чтобы их произведение было наибольшим.

132. Из всех треугольников, вписанных в данный круг, найти тот, площадь которого наибольшая (возьмите центральные углы за независимые переменные, рис. 8).

133. Указать размеры прямоугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс с полуосями a и b (указать также способ построения такого прямоугольника).

134. Представить положительное число в виде произведения четырех положительных множителей так, чтобы их сумма была наименьшей.

135. На плоскости

$$x + y - 2z = 0$$

найти точку, сумма квадратов расстояний которой от точек $A(1,\ 1,\ 1)$ и $B(2,\ 3,\ 4)$ была бы наименьшей.

136. Найти правильную треугольную пирамиду заданного объема, имеющую наименьшую сумму ребер.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

137. На эллипсе

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

даны две точки $A\left(-\sqrt{3};\ \frac{1}{2}\right)$ и $B\left(1;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Найти на том же эллипсе третью точку C так, чтобы треугольник ABC имел наибольшую возможную площадь.

Указание. Воспользоваться известной из аналитической геометрии формулой для площади треугольника, выраженной через координаты его сторон.

138. На эллипсе

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$$

найти точки наиболее и наименее удаленные от прямой $x+2y-10=0$.

Указание. Расстояние от точек эллипса до прямой надо отсчитывать по перпендикуляру, опущенному из точки $M(x, y)$ эллипса на прямую $x+2y-10=0$. Обозначив точку в основании этого перпендикуляра на прямой через $M_1(\xi, \eta)$, надо составить выражение для расстояния между точками M и M_1. Так как квадрат этого расстояния будет наименьшим тогда, когда само расстояние будет наименьшим, то при составлении вспомогательной функции можно для упрощения выкладок ввести квадрат этого расстояния. Кроме того, при составлении вспомогательной функции надо учесть два уравнения связи (координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению эллипса, а координаты точки $M_1(\xi, \eta)$ — уравнению прямой) и, следовательно, ввести два множителя λ и μ. Таким образом, вспомогательная функция будет зависеть от шести величин: x, y, ξ, η, λ и μ. Обычным путем, дифференцируя по x, y, ξ и η и добавляя два уравнения связи, надо составить систему из шести уравнений и из нее найти координаты искомых точек M на эллипсе.

139. На параболе

$$x^2+2xy+y^2+4y=0$$

найти точку, наименее удаленную от прямой

$$3x-6y+4=0.$$

См. указание к задаче 138.

Глава II

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Вычисление двойных интегралов

Предварительно изучите по [1] главу XXI, n°n° 336—341 (в n° 339 выводы условий существования двойного интеграла можно опустить), примеры из n° 344, n° 352 (пример 1) и последние рассуждения n° 355, относящиеся к полярной системе координат; по [2] раздел II, главу II, § 1—8.

Перед тем как переходить к задачам на вычисление двойных интегралов, усвойте хорошенько принцип расстановки пределов в повторном интеграле. Делайте обязательно чертеж области интегрирования, не пытайтесь расставлять пределы, не имея перед глазами начерченной области интегрирования.

Вычисление двойного интеграла производится путем сведе́ния его к повторным интегралам по любой из двух формул:

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy, \qquad (27)$$

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx. \qquad (28)$$

Пределы внутреннего интеграла в формуле (27) берутся из уравнений кривых AMB и ANB, ограничивающих область (P). Для рис. 9 уравнение кривой AMB имеет вид $y = y_1(x)$ и уравнение кривой ANB имеет вид $y = y_2(x)$. Проведенные на рис. 9 линии (например, MN), параллельные оси Oy, входят в область (P) через кривую AMB и выходят из области (P) через кривую ANB. Точка A

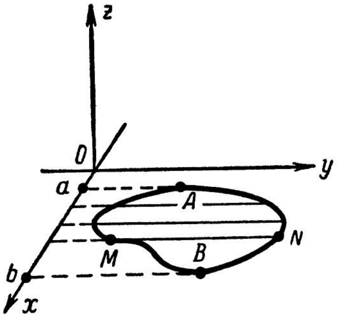

Рис. 9.

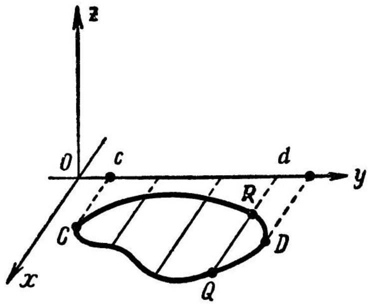

Рис. 10.

есть точка контура области (P) с наименьшей абсциссой a и точка B есть точка контура с наибольшей абсциссой b.

Пределы внутреннего интеграла в формуле (28) берутся из уравнений кривых CQD и CRD, ограничивающих область (P). Для рис. 10 уравнение кривой CRD имеет вид $x = x_1(y)$ и уравнение кривой CQD имеет вид $x = x_2(y)$. Проведенные на рис. 10 линии (например, QR), параллельные оси Ox, входят в область (P) через кривую CRD. и выходят из области (P) через кривую CQD. Точка C есть точка контура области (P) с наименьшей ординатой c и точка D есть точка с наибольшей ординатой d.

Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат производится по следующей формуле:

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,dr, \qquad (29)$$

где α и β обозначают пределы изменения полярного угла φ в области (P), а $r_1(\varphi)$ и $r_2(\varphi)$ берутся из уравнений кривых BNA и BMA в полярной системе координат (рис. 11), ограничивающих область (P). Для рис. 11 уравнение кривой BNA имеет вид $r = r_1(\varphi)$ и уравнение кривой BMA имеет вид $r = r_2(\varphi)$.

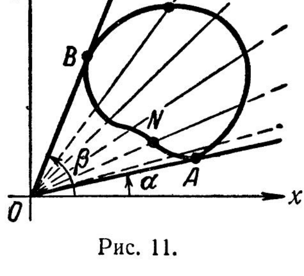

Рис. 11.

140. Записать двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области (P) в виде повторных интегралов двумя способами (по формулам (27) и (28)), если область (P) — прямоугольник $[0,2;\ 1,3]$.

Решение. Так как по условию $0 \leqslant x \leqslant 2$ и $1 \leqslant y \leqslant 3$, то (сделайте чертеж).

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_1^3 f(x, y)\,dy = \int\limits_1^3 dy \int\limits_0^2 f(x, y)\,dx.$$

141. Записать двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области (P) в виде повторных интегралов двумя способами (по формулам (27) и (28)), если область (P) ограничена линиями $x = 0$, $y = 0$ и $x + 3y = 6$.

Решение. Область (P) представляет собой прямоугольный треугольник (рис. 12).

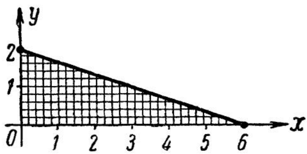

Рис. 12.

1. Воспользуемся формулой (27). Для того чтобы установить, какие будут пределы у внутреннего интеграла по y, надо провести на рис. 12 прямые, параллельные оси Oy (такие же прямые, например MN, какие были проведены на рис. 9 в общем случае), и посмотреть, на какой линии, ограничивающей фигуру (P), эти прямые входят в область (P) и на какой линии выходят из области (P). В данном случае все прямые, параллельные оси Oy, входят в (P) на оси Ox и выходят из (P) на прямой $x + 3y = 6$. Поэтому уравнение оси Ox $(y = 0)$ и уравнение

$$x + 3y = 6,$$

решенное относительно $y\left(y = 2 - \frac{x}{3}\right)$, и будут теми уравнениями $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, о которых шла речь в общем случае. Их и надо использовать для расстановки пределов во внутреннем интеграле. Во внешнем же интеграле по переменной x, как видно из рис. 12, надо брать пределы от 0 до 6, так как самые левые точки фигуры (P) имеют абсциссу, равную нулю, а самая правая имеет абсциссу 6. Итак,

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^6 dx \int_0^{2-\frac{x}{3}} f(x, y)\,dy.$$

2. Воспользуемся формулой (28). Теперь надо провести прямые, параллельные оси Ox (на рис. 10, например, прямая QR), и опять-таки посмотреть, на каких линиях расположены точки входа в область и выхода из области (P) этих прямых. На рис. 12 видно, что эти прямые входят в (P) по оси Oy и выходят из (P) на прямой $x + 3y = 6$. Поэтому уравнение оси Oy $(x = 0)$ и уравнение $x + 3y = 6$, решенное относительно x $(x = 6 - 3y)$, и будут теми уравнениями $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$, о которых шла речь в общем случае. Они должны быть использованы для расстановки пределов во внутреннем интеграле. Во внешнем же интеграле по переменной y надо брать пределы от 0 до 2, так как из рис. 12 видно, что наименьшие ординаты точек фигуры равны нулю, а наибольшая ордината равна 2. Итак,

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^2 dy \int_0^{6-3y} f(x, y)\,dx.$$

142. Записать двумя способами двойной интеграл от $f(x, y)$ в виде повторных интегралов, если область (P) расположена в первой четверти и ограничена линиями

$$4x^2 + y^2 = 4, \quad 2x + y = 2.$$

Решение. Область (P) указана на рис. 13 (линия $4x^2 + y^2 = 4$ есть эллипс $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ с полуосями $a = 1$, $b = 2$).

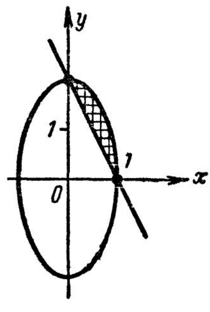

Рис. 13.

1. Воспользуемся формулой (27). Как и в предыдущем примере, для определения пределов внутреннего интеграла проводим прямые, параллельные оси Oy; они все входят в (P) на линии $2x + y = 2$ и выходят из нее на эллипсе $4x^2 + y^2 = 4$. Поэтому уравнение прямой $2x + y = 2$, решенное относительно y $(y = 2 - 2x)$, служит для установления нижнего предела $(y = y_1(x))$, а уравнение эллип-

са $4x^2+y^2=4$, решенное относительно y $(y=2\sqrt{1-x^2}$, для установления верхнего предела $(y=y_2(x))$. Заметьте, что при решении уравнения эллипса относительно y мы берем корень только со знаком плюс, так как ординаты точек фигуры (P) все неотрицательны.

Изменение переменной x в области (P) видно по чертежу: x изменяется от 0 до 1. Итак,

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{2-2x}^{2\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy.$$

2. Воспользуемся формулой (28). Проводим теперь в (P) прямые, параллельные оси Ox; они все входят в (P) на линии $2x+y=2$ и выходят из нее на линии $4x^2+$ $+y^2=4$. Следовательно, находя x из этих уравнений, и получаем нижний и верхний пределы внутреннего интеграла. Изменение переменной y в области (P) определяем по рис. 13: видно, что наименьшая ордината точек (P) равна 0, а наибольшая равна 2. Итак,

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{1-\frac{y}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\,dx.$$

В выражении $x=\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}$ мы также берем корень только со знаком плюс, так как все абсциссы точек фигуры (P) неотрицательны.

143. Записать двумя способами двойной интеграл от функции $f(x, y)$ в виде повторных интегралов, если область (P) ограничена линиями:

$$y=2x,\ y=2,\ y+2x=8.$$

Решение. Все три линии границы области (P) суть прямые; поэтому область (P) есть треугольник. Для определения его вершин решаем совместно уравнения прямых, взятые попарно, и получаем вершины со следующими координатами: A (1, 2), D (2, 4), C (3, 2). Область (P) изображена на рис. 14.

1. Воспользуемся формулой (27). Проводим прямые, параллельные оси Oy, и видим, что все они входят в об-

ласть (P) на границе AC $(y=2)$, но выходят они из области (P) на разных линиях: часть из них выходит на линии AD $(y=2x)$, часть — на линии DC $(2x+y=8)$. Таким образом, оказывается невозможным использовать какое-то одно уравнение границы для определения верхнего предела внутреннего интеграла. Приходится в таких случаях разбивать область (P) на такие части, чтобы избежать указанного выше неудобства; на рис. 14 треугольник ADC разделен на две части высотой BD. Тогда в треугольнике ADB все прямые, параллельные оси Oy, будут входить в область на линии AC и выходить из области на линии AD, а в треугольнике DBC они будут входить в область также на линии AC, а выходить на линии DC. Так как по свойству двойного интеграла можно написать

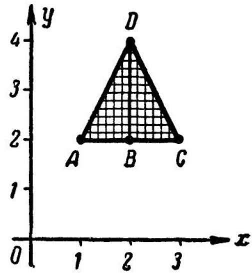

Рис. 14.

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(P_1)} f(x, y)\,dx\,dy + \iint\limits_{(P_2)} f(x, y)\,dx\,dy,$$

где через (P_1) обозначен треугольник ADB и через (P_2) — треугольник DBC, то нужно будет сводить к повторным интегралам отдельно оба двойных интеграла в правой части. Выполнив это, получаем:

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2}^{2x} f(x, y)\,dy + \int\limits_{2}^{3} dx \int\limits_{2}^{8-2x} f(x, y)\,dy$$

(пределы внешних интегралов определены из рис. 14).

2. Воспользуемся формулой (28). При проведении прямых, параллельных оси Ox, видим, что все они входят в область (P) на границе AD $(y=2x)$ и выходят из (P) на границе DC $(2x+y=8)$. Следовательно, можно сразу заменять двойной интеграл повторным (пределы для y взяты по рис. 14):

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{\frac{8-y}{2}} f(x, y)\,dx.$$

Ясно, что в данном примере второй способ сведѐния двойного интеграла к повторному лучше, так как он дает более простое выражение для двойного интеграла, чем при первом способе. Надо научиться сразу по чертежу фигуры (P) определять, каким способом выгоднее сводить данный интеграл к повторному.

144. Переменить порядок интегрирования в следующем повторном интеграле:

$$\int_{1}^{2} dx \int_{\frac{x}{4}}^{\frac{1}{x}} f(x, y)\, dy.$$

Решение. Здесь задача осложнена тем, что надо сначала выяснить вид области (P) по пределам повторного интеграла. Так как внутренний интеграл взят по y, то пределы внутреннего интеграла были, следовательно, получены исходя из уравнений $y = \frac{x}{4}$ и $y = \frac{1}{x}$. Эти линии (прямая и гипербола) являются поэтому частью границы области интегрирования. Пределы внешнего интеграла указывают промежуток изменения x в области интегрирования: $1 \leqslant x \leqslant 2$. Решая совместно уравнения прямой $y = \frac{x}{4}$ и гиперболы $y = \frac{1}{x}$, находим точки их пересечения $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$ и $B_1\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$. Точка B_1 не принадлежит области интегрирования, так как абсцисса $x = -2$ не входит в указанный выше промежуток изменения x. Если теперь начертить гиперболу $y = \frac{1}{x}$ и прямую $y = \frac{x}{4}$ и учесть промежуток изменения x, то получим область интегрирования ABC (рис. 15).

Данный в задаче порядок интегрирования надо изменить. Для этого надо взять внутренний интеграл по x. На рис. 15 видно, что прямые, параллельные оси Ox, все входят в область ABC на прямой CA $(x = 1)$, а выходят из нее и на прямой CB $\left(y = \frac{x}{4}\right)$ и на гиперболе AB $\left(y = \frac{1}{x}\right)$. Следовательно, здесь надо разбить область ABC на части; для этого проведем прямую DB, параллельную оси Ox. Тогда все прямые, параллельные оси Ox, будут выходить из области DBC только на прямой CB, а из области ABD—только на гиперболе. Переменная y будет изменяться в области DBC от ординаты точки C до ординаты точки D. Ординату точки C находим, решая совместно уравнения прямых $y=\frac{x}{4}$ и $x=1$: получаем $y=\frac{1}{4}$. Ордината точки D, как видно из рис. 15, равна $\frac{1}{2}$ и ордината точки A равна 1. Итак, получаем:

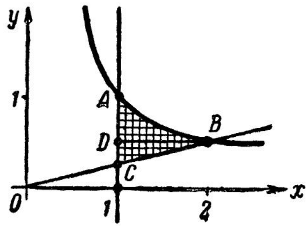

Рис. 15.

$$\int_1^2 dx \int_{\frac{x}{4}}^{\frac{1}{x}} f(x, y)\,dy = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_1^{4y} f(x, y)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_1^{\frac{1}{y}} f(x, y)\,dx$$

(верхние пределы в обоих внутренних интегралах получены путем отыскания x из уравнений соответственно прямой и гиперболы).

В задачах 145—151 запишите двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области (P) в виде повторных интегралов двумя способами (во всех случаях сделайте чертеж).

145. Область (P) ограничена линиями

$$y^2 = 4x,\ y = 0,\ x = 4.$$

146. Область (P) ограничена линией

$$y^2 + x^2 + 6y - 4x - 3 = 0.$$

147. Область (P) ограничена линиями

$$y = 2x,\ x = 0,\ y = 4.$$

148. Область (P) ограничена линиями

$$y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 3,\ x = 0$$

(взять ту часть, где $x \geqslant 0$).

149. Область (P) ограничена линиями

$$x^2+y^2=9,\ x=0,\ y=x,$$

причем $y\geqslant 0,\ x\geqslant 0.$

150. Область (P) ограничена линиями

$$y=x,\ y=x-2,\ y=1,\ y=2.$$

151. Область (P) ограничена линиями

$$y=x,\ y=4x,\ x=1,\ x=3.$$

В задачах 152—156 перемените порядок интегрирования (сделайте чертежи).

152. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,\ y)\,dy.$

153. $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{\frac{9}{x}}^{10-x} f(x,\ y)\,dy.$

154. $\int\limits_1^3 dy \int\limits_{-y}^{y} f(x,\ y)\,dx.$

155. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,\ y)\,dx+\int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} dy \int\limits_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,\ y)\,dx.$

156. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,\ y)\,dx+\int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x,\ y)\,dx.$

157. Вычислить двойной интеграл

$$I=\iint\limits_{(P)}(3x^2+xy^3-5y)\,dx\,dy,$$

если область (P) есть прямоугольник $[1,2;\ -1,1]$.

Решение. Заменим двойной интеграл повторным

$$I = \int_1^2 dx \int_{-1}^{1} (3x^2 + xy^3 - 5y)\, dy$$

(здесь расстановка пределов не вызывает затруднений, так как (P)—прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям), и будем вычислять сначала внутренний интеграл по y, считая при этом x постоянным, а затем от результата вычисления внутреннего интеграла возьмем внешний интеграл по x. Запись можно вести следующим образом:

$$I = \int_1^2 \left[\left(3x^2y + \frac{1}{4}\, xy^4 - \frac{5}{2}\, y^2\right)\Big|_{-1}^{1}\right] dx =$$

$$= \int_1^2 \left(3x^2 + \frac{1}{4}\, x - \frac{5}{2} + 3x^2 - \frac{1}{4}\, x + \frac{5}{2}\right) dx =$$

$$= \int_1^2 6x^2\, dx = \frac{6}{3}\, x^3 \Big|_1^2 = 2\,.\,(8-1) = 14.$$

158. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_{(P)} \frac{x}{y}\, dx\, dy,$$

если область (P) ограничена линиями $y = x^2$, $y^2 = x$, $y = \frac{1}{4}$, причем $y \geqslant \frac{1}{4}$.

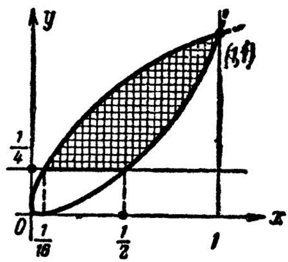

Рис. 16.

Решение. Из рис. 16, на котором изображена область (P), видно, что порядок интегрирования в повторных интегралах: внутренний интеграл по x, внешний — по y выгоден, так как он приведет к одному повторному интегралу (все прямые, параллельные оси Ox, входят в область (P) на параболе $y^2 = x$ и выходит из нее на параболе $y = x^2$). Обратный порядок интегрирования привел бы к сумме двух повторных интегралов, так как часть прямых, параллельных оси Oy, входит в область (P) на прямой $y=\frac{1}{4}$, а часть — на параболе $y=x^2$. Для пределов внутреннего интеграла по x используем уравнения парабол, решенные относительно x:

$$x=y^2 \text{ и } x=\sqrt{y}$$

($\sqrt{y}$ взят со знаком плюс, так как область (P) расположена там, где $x \geqslant 0$). Итак, проведя выкладки, получаем;

$$\iint\limits_{(P)} \frac{x}{y}\,dx\,dy=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} \frac{x}{y}\,dx=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{dy}{y} \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} x\,dx=$$

$$=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{y}\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_{y^2}^{\sqrt{y}}\right) dy=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{y}\left(\frac{y}{2}-\frac{y^4}{2}\right) dy=$$

$$=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \left(\frac{1}{2}-\frac{y^3}{2}\right) dy=\left(\frac{y}{2}-\frac{y^4}{8}\right)\Bigg|_{\frac{1}{4}}^{1}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot 256}\right)=\frac{513}{2048}.$$

(Множитель $\frac{1}{y}$ выносится из-под знака внутреннего интеграла, так как этот множитель не зависит от переменной, по которой производится интегрирование во внутреннем интеграле.)

159. Вычислить с помощью перехода к полярной системе координат двойной интеграл

$$\iint\limits_{(P)} (x+y)\,dx\,dy,$$

где область (P) ограничена окружностью

$$x^2+y^2=R^2.$$

Решение. Полярную систему координат хорошо использовать в тех случаях, когда областью интегрирования является круг, или часть круга, или же когда подынтегральная функция содержит выражение x^2+y^2, просто записывающееся в полярной системе координат. Так как в данном примере круг имеет центр в начале координат, то пределы для полярного радиуса r постоянные, что значительно облегчает вычисления (в декартовой системе координат пределы внутреннего из повторных интегралов были бы громоздкие). Применяем формулу (29) преобразования двойного интеграла к полярной системе координат:

$$\iint\limits_{(P)} (x+y)\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r(r\cos\varphi + r\sin\varphi)\,dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi \int\limits_0^R r^2\,dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi)\left(\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^R\right) d\varphi =$$

$$= \frac{R^3}{3} \int\limits_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi = \frac{R^3}{3}(\sin\varphi - \cos\varphi)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{R^3}{3}(-1+1) = 0.$$

160. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(P)} (x^2+y)\,dx\,dy,$$

где область (P) лежит в первом квадранте и ограничена линиями $y=0$, $x^2+y^2-6x=0$.

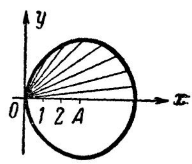

Рис. 17.

Решение. Уравнение последней кривой можно преобразовать к виду

$$(x-3)^2 + y^2 = 9,$$

откуда видно, что это окружность радиуса 3 с центром в точке A (3; 0) (рис. 17). Уравнение этой окружности в полярной системе координат будет

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 6r\cos\varphi = 0,$$

или

$$r = 6\cos\varphi.$$

Это выражение для r и будет переменным верхним пределом во внутреннем интеграле по r.

Из рис. 17 видно, что полярный радиус изменяется от 0 до значения $r = 6\cos\varphi$, а угол φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Проводим выкладки:

$$\iint\limits_{(P)} (x^2+y)\,dx\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{6\cos\varphi} (r^2\cos^2\varphi + r\sin\varphi)\,r\,dr =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{r^4}{4}\cos^2\varphi + \frac{r^3}{3}\sin\varphi\right)\Bigg|_0^{6\cos\varphi}\right] d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{6^4\cos^6\varphi}{4} + \frac{6^3}{3}\cos^3\varphi\sin\varphi\right) d\varphi =$$

$$= 324\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\varphi\,d\varphi + 36\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= 324\,\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2} - 36\cdot\frac{1}{4}\cos^4\varphi\,\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{405}{8}\pi + 9.$$

Интеграл от четной степени косинуса вычислен по известной формуле

$$\int\limits_0^{\pi} \cos^{2n}\varphi\,d\varphi = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$ (см., например, [1], n° 187).

Этой формулой мы будем неоднократно пользоваться в дальнейшем.

Вычислите следующие двойные интегралы (сделайте чертежи).

161. $\iint\limits_{(P)} (x^3+3y^2)\,dx\,dy$, где область (P) ограничена параболами $y^2 = x$, $y = x^2$.

162. $\iint\limits_{(P)} \frac{x+y}{x^2}\,dx\,dy$, где область (P) ограничена прямыми $y = x$, $y = \frac{x}{2}$, $x = 1$ и $x = 3$.

163. $\iint\limits_{(P)} \cos(x+y)\,dx\,dy$, где область (P) ограничена прямыми $x=0$, $y=\pi$, $y=x$.

164. $\iint\limits_{(P)} (x^2+y^2)\,dx\,dy$, где область (P) ограничена линией $x^2+(y+2)^2=4$.

§ 2. Вычисление объемов

С помощью двойного интеграла можно вычислять объем цилиндрического бруса, расположенного над координатной плоскостью Oxy. Этот объем вычисляется по формуле

$$V=\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{30}$$

где подынтегральная функция представляет собой правую часть решенного относительно z уравнения поверхности, ограничивающей сверху цилиндрический брус, а область интегрирования (P) — основание цилиндрического бруса (см. [1], глава XXI, n°336; по [2] раздел II, главу II, § 1 и главу III § 1).

Если цилиндрический брус расположен под координатной плоскостью Oxy, то в правой части формулы (30) следует брать абсолютную величину интеграла. Если цилиндрический брус расположен частично над координатной плоскостью Oxy, а частично под ней, то надо разбить его на части, каждая из которых расположена или только над плоскостью Oxy, или только под ней, и вычислять порознь объемы этих частей.

При решении задачи на вычисление объема какого-либо тела нужно сделать чертеж, который хотя бы и грубо, но все же давал понятие о форме того тела, объем которого вычисляется. Для того чтобы это было легче сделать, рекомендуется вспомнить канонические уравнения простейших поверхностей второго порядка, их форму и расположение в системе координат. К таким поверхностям относятся: сфера, эллипсоид, параболоид вращения, эллиптический параболоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, гиперболический параболоид, круговой и эллиптический конус и цилиндрические поверхности.

Если пространственный чертеж вызывает очень большие затруднения, то можно сделать только чертеж области интегрирования (основания цилиндрического бруса) на плоскости, но все же надо постараться хотя бы представить себе то тело, объем которого требуется вычислить.

165. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = \frac{1}{2} y^2, \ 2x + 3y - 12 = 0, \ x = 0, \ z = 0.$$

Решение. Поверхность $z = \frac{1}{2} y^2$ цилиндрическая с образующими параллельными оси Ox; направляющей этого цилиндра служит парабола $z = \frac{1}{2} y^2$ в плоскости Oyz. Плоскость $2x + 3y - 12 = 0$ расположена параллельно оси Oz и след ее на плоскости Oxy пересекается с осями Ox и Oy в точках $(6, 0, 0)$ и $(0, 4, 0)$. Плоскости $x = 0$ и $z = 0$ это две координатные плоскости Oyz и Oxy. На рис. 18 изображено тело, объем которого надо вычислить; оно ограничено снизу плоскостью Oxy, справа плоскостью $2x + 3y - 12 = 0$, сзади плоскостью Oyz, которая срезается по кривой AO выступающим параболическим цилиндром. Сверху оно покрыто нависающей поверхностью параболического цилиндра. Это тело является цилиндрическим брусом, расположенным над плоскостью Oxy, и поэтому его объем можно вычислять по формуле (30). Основание цилиндрического бруса, т. е. область интегрирования (P),— это треугольник OBC. Подынтегральной функцией должна быть функция $\frac{1}{2} y^2$, так как она является правой частью решенного относительно z уравнения параболического цилиндра, покрывающего сверху данный цилиндрический брус.

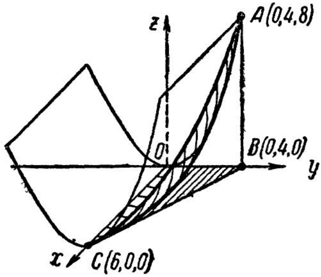

Рис. 18.

Проводим вычисления:

$$V = \iint\limits_{(P)} \frac{1}{2} y^2 \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int\limits_0^4 y^2 \, dy \int\limits_0^{6 - \frac{3}{2} y} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^4 y^2 \left(x \Big|_0^{6 - \frac{3}{2} y} \right) dy = \frac{1}{2} \int\limits_0^4 y^2 \left(6 - \frac{3}{2} y \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^4 \left(6y^2 - \frac{3}{2} y^3 \right) dy = \frac{1}{2} \left(2y^3 - \frac{3}{8} y^4 \right) \Big|_0^4 =$$

$$= \frac{y^3}{2} \left(2 - \frac{3}{8} y \right) \Big|_0^4 = \frac{1}{2} \cdot 4^3 \cdot \left(2 - \frac{3}{8} \cdot 4 \right) = 4^3 \left(1 - \frac{3}{4} \right) = 16.$$

В проведенном вычислении следует обратить внимание на порядок интегрирования в повторном интеграле: пределы интегрирования не выглядели бы сложнее и при другом порядке интегрирования (внутренний интеграл по y, внешний по x), но если бы внутреннее интегрирование велось по y, то первообразная была бы $\frac{1}{6} y^3$, и результат подстановки верхнего предела и, следовательно, последующее интегрирование по x были бы гораздо сложнее. Соображения такого рода надо также учитывать при определении порядка интегрирования в повторном интеграле.

166. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями.

$$z = 9 - y^2, \; y = x^2,$$
$$z = 0 \text{ и } x = 0.$$

Решение. Поверхность $z = 9 - y^2$ — это параболический цилиндр с образующими параллельными оси Ox и направляющей параболой $z = 9 - y^2$ в плоскости Oyz; эта парабола имеет вершину в точке $(0, 0, 9)$ на оси Oz и направлена вниз по оси Oz.

Поверхность $y = x^2$ — также параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz, и направляющей параболой $y = x^2$ в плоскости Oxy.

Тело, о котором идет речь, ограничено снизу половиной параболического сегмента OAB в плоскости Oxy, сзади — половиной другого параболического сегмента CAO в плоскости Oyz, спереди — боковой поверхностью цилиндра $y = x^2$, срезанного поверхностью цилиндра $z = 9 - y^2$

и сверху и справа—выпуклой поверхностью цилиндра $z = 9 - y^2$ (рис. 19). Областью интегрирования (P) является фигура OAB. Подынтегральной функцией будет функция $9 - y^2$; поэтому и здесь лучше выполнить внутреннее интегрирование по x. Нужно еще узнать ординату точки A; для этого находим точку пересечения параболы $z = 9 - y^2$ в плоскости Oyz с осью Oy и получаем $y = 3$. Итак,

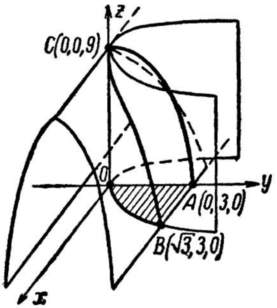

Рис. 19.

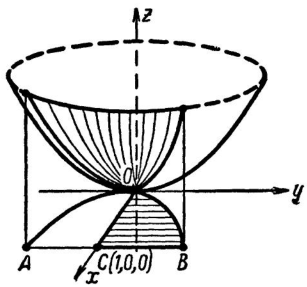

Рис. 20.

$$V = \iint\limits_{(P)} (9 - y^2)\, dx\, dy = \int\limits_0^3 (9 - y^2)\, dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} dx =$$

$$= \int\limits_0^3 (9 - y^2) \cdot \left(x \Big|_0^{\sqrt{y}} \right) dy = \int\limits_0^3 \left(9\sqrt{y} - y^{\frac{5}{2}}\right) dy =$$

$$= \left(\frac{2 \cdot 9 y^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2 y^{\frac{7}{2}}}{7} \right) \Bigg|_0^3 = 2y^{\frac{3}{2}} \left(3 - \frac{y^2}{7}\right) \Bigg|_0^3 =$$

$$= 2 \cdot 3\sqrt{3} \left(3 - \frac{9}{7}\right) = \frac{72\sqrt{3}}{7}.$$

167. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = x^2 + y^2, \; y^2 = 4x, \; x = 1, \; z = 0.$$

Решение. Поверхность $z = x^2 + y^2$ — это параболоид вращения, полученный вращением параболы $z = x^2$ вокруг оси Oz. Поверхность $y^2 = 4x$ — параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz, и параболой $y^2 = 4x$ в плоскости Oxy в качестве направляющей. Уравнение $x = 1$ — это уравнение плоскости, параллельной плоскости Oyz, и $z = 0$ уравнение плоскости Oxy. На рис. 20 изображено указанное в данном примере тело:

оно ограничено снизу плоскостью Oxy, спереди плоскостью $x=1$, с остальных боков — параболическим цилиндром $y^2=4x$ и сверху вогнутой нависающей поверхностью параболоида вращения. Основанием этого цилиндрического бруса служит параболический сегмент OAB.

Можно сразу отметить, что построенный цилиндрический брус симметричен относительно плоскости Oxz и поэтому при вычислении объема можно интегрировать только по половине области OAB, например по OCB, и полученный результат удвоить. Проводим выкладки:

$$V=2\int_0^1 dx\int_0^{2\sqrt{x}}(x^2+y^2)\,dy=$$

$$=2\int_0^1\left(\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^{2\sqrt{x}}\right]dx=$$

$$=2\int_0^1\left(2x^2\sqrt{x}+\frac{8}{3}x\sqrt{x}\right)dx=4\left(\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}+\frac{4}{3}\cdot\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=8\left(\frac{1}{7}+\frac{4}{15}\right)=\frac{344}{105}.$$

168. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=4x,\quad z=x,\quad z=2x.$$

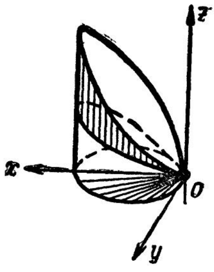

Рис. 21.

Решение. Поверхность $x^2+y^2=4x$ — это круговой цилиндр; его образующие параллельны оси Oz, а направляющей служит окружность $x^2+y^2=4x$ в плоскости Oxy. Уравнение окружности можно преобразовать к виду $(x-2)^2+y^2=4$, откуда уже видно расположение ее в координатной системе. Оба уравнения $z=x$ и $z=2x$ — это уравнения плоскостей, проходящих через начало координат, но с разным наклоном к плоскости Oxy. Эти плоскости, пересекая наклонно цилиндр, вырезают из него некоторый суженный к началу координат слой (рис. 21), объем которого и надо вычислить. По симметрии можно вычислить объем половины тела и результат затем удвоить; в качестве области интегрирования возьмем половину круга в первой четверти.

Сам интересующий нас слой не является цилиндрическим брусом, но его объем можно получить, как разность объемов двух цилиндрических брусов: первый из них представляет собой часть кругового цилиндра, стоящего на плоскости Oxy, срезанную плоскостью $z=2x$, а второй — часть, срезанную плоскостью $z=x$. Таким образом,

$$V=2\left\{\iint\limits_{(P)} 2x\,dx\,dy-\iint\limits_{(P)} x\,dx\,dy\right\}=2\iint\limits_{(P)} x\,dx\,dy.$$

Интегралы удобнее вычислять в полярной системе координат, так как областью интегрирования является часть круга. Уравнение окружности $x^2+y^2=4x$ в полярной системе координат принимает вид $r=4\cos\varphi$ и по рис. 21 видно, что r изменяется от 0 до $4\cos\varphi$, а φ — от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Итак,

$$V=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{4\cos\varphi} r\cos\varphi\cdot r\,dr=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{4\cos\varphi} r^2\,dr=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\cdot\left[\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{4\cos\varphi}\right]d\varphi=\frac{128}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{128}{3}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=8\pi.$$

169. Найти объем трехосного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Решение. Ввиду симметрии тела относительно координатных плоскостей можно вычислить объем части тела, приходящейся на первый октант, и результат умножить на 8. Областью интегрирования будет четверть эллипса, а подынтегральную функцию получаем, находя z из уравнения эллипсоида;

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Тогда
$$V = 8c \iint\limits_P \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy.$$
Интегрирование в декартовой системе координат проводить в данном случае неудобно: первообразная подынтегральной функции очень громоздкая и пределы внутреннего интеграла также громоздкие, так как они получаются из уравнения эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ отысканием x или y; и то и другое выражения содержат корень из квадратного двучлена. Переход к обычной полярной системе координат также не дает в данном случае упрощения, так как выражение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ в обычной полярной системе координат остается неудобным для выкладок.

Иногда используется так называемая «обобщенная полярная система координат», переход к которой осуществляется по формулам:
$$x = ar\cos\varphi, \quad y = br\sin\varphi. \tag{31}$$
В этих формулах переменная φ уже не является углом наклона радиуса-вектора к оси Ox, как это было в обычной полярной системе координат. При подробном изучении вопроса о замене переменных под знаком двойного интеграла доказывается, что при переходе к новым переменным r и φ по формулам (31) преобразование двойного интеграла производится по формуле, отличающейся от формулы (29) только наличием в правой части множителя ab (см., например, [1], n° 356). Уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в этой координатной системе приводится к виду
$$r^2 = 1,$$
а подынтегральная функция принимает вид
$$z = c\sqrt{1 - r^2}.$$
Итак, вычисляем объем эллипсоида. Из формул (31) видим, что изменению x от 0 до a и изменению y от 0 до b соответствует изменение φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Из уравнения

эллипса видно, что для точек, лежащих на нем, $r=1$, а значения $0 \leqslant r < 1$ соответствуют точкам внутри эллипса. Поэтому при любом φ интегрирование по r нужно производить от 0 до 1. Имеем

$$V = 8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r\,dr =$$

$$= 8abc\cdot\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^1 =$$

$$= 4\,abc\pi\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

(Обратите внимание на последовательность действий, проведенных выше: оба интеграла вычислялись одновременно и результаты вычислений просто перемножались. Это можно было сделать потому, что внутренний интеграл не содержал переменной φ и имел постоянные пределы и, следовательно, его вычисление давало число. Поэтому внешний интеграл можно было вычислять независимо от внутреннего.)

170. Найти объем тела, вырезанного цилиндром

$$x^2+y^2=Rx$$

из сферы

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

171. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=1,\ 2x+3y+z=4,\ z=0.$$

172. Найти в первом октанте объем тела, ограниченного поверхностями

$$z=xy,\ x^2+y^2=4 \text{ и } z=0.$$

173. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x+2y=2,\ x+2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$$

174. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z=4-x^2,\ 2x+y=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$$

175. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z=x^2+y^2,\ x+y=1,\ y=x,\ z=0,\ y=0.$$

176. Найти объем части цилиндра

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

вырезанной цилиндром

$$x^2 + z^2 = R^2.$$

177. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = 4 - y^2, \ y = \frac{x^2}{2}, \quad x = 0, \ z = 0.$$

178. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = y^2, \ x + 3y = 9, \ z = 0, \ y = 0, \ x = 0.$$

179. Найти объем тела, вырезанного параболоидом вращения

$$x^2 + y^2 = z \ (z \geqslant 0)$$

из цилиндра

$$x^2 + y^2 = x.$$

180. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = z, \ y = 5x, \ x = 1, \ z = 0, \ y = 0.$$

181. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = 2x^2 + y^2, \ y = 2x, \ x = 0, \ y = 3, \ z = 0.$$

182. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 1, \ z = x^2 + y^2, \ z = 0.$$

183. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 4z^2, \ x^2 + y^2 = 2x, \ z = 0.$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

184. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z, \ x^2 + y^2 = z.$$

Указание. Искомый объем можно получить, как разность объемов двух цилиндрических брусов. Вычисления проще проводить в полярной системе координат. При преобразовании уравнения сферы в полярной системе координат учтите, что в задаче рассматривается нижняя половина сферы.

185. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 3z, \ x + z = 6.$$

У к а з а н и е. Найдите сначала линию пересечения данных поверхностей и спроектируйте ее на плоскость Oxy для того, чтобы определить область интегрирования. Искомый объем надо рассматривать, как разность объемов двух цилиндрических брусов. Вычисления проводить в полярной системе координат. При переходе к полярной системе координат поместите полюс в центр того круга, который составляет область интегрирования.

186. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=2z, \quad x+y+z=1.$$

См. указание к задаче 185.

187. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+\frac{y^2}{4}=\frac{z}{3}, \quad x+\frac{z}{3}=2.$$

Используйте указание к задаче 185, введите систему обобщенных полярных координат (см. задачу 169).

188. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{9}+y^2+\frac{z^2}{4}=1, \quad \frac{x^2}{9}+y^2+\frac{(z-2)^2}{4}=1.$$

У к а з а н и е. Найдите сначала то значение z, при котором пересекаются данные эллипсоиды. Затем определите искомый объем, как разность объемов двух цилиндрических брусов. Для упрощения выкладок введите систему обобщенных полярных координат.

§ 3. Вычисление площадей плоских фигур

Предварительно изучите по [1] главу XXI, n° 352, пример 1, n° 358; по [2] раздел II, главу III, § 1.

По определению, двойной интеграл по области (P) с подынтегральной функцией, равной единице, равен площади области (P):

$$\iint\limits_{(P)} dx\,dy=P. \tag{32}$$

Читателю известно, что площади криволинейных трапеций и фигур, разбивающихся на конечное число криволинейных трапеций, можно вычислять с помощью определенного интеграла. Приведенная выше формула (32) позволяет вычислить площадь фигуры в более сложных случаях. При вычислении по формуле (32) часто приходится пользоваться переходом к полярной системе координат или к обобщенной полярной системе координат (см. формулу (31)).

189. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y^2 = x,\ y^2 = 4x,\ y = 1,\ y = 3.$$

Решение. Фигура изображена на рис. 22. Из чертежа видно, что двойной интеграл в формуле (32) выгодно сводить к повторному, беря внутренний интеграл по x, а внешний по y, так как в этом случае получим один повторный интеграл (все прямые, параллельные оси Ox, входят в область на параболе $y^2 = 4x$ и выходят на параболе $y^2 = x$). При другом порядке интегрирования мы получили бы сумму двух повторных интегралов.

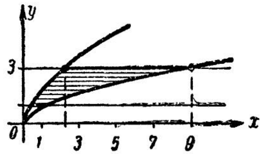

Рис. 22.

Вычисляем площадь:

$$P = \iint\limits_{(P)} dx\,dy = \int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}}^{y^2} dx = \int\limits_1^3 \left(x \Bigg|_{\frac{y^2}{4}}^{y^2} \right) dy =$$

$$= \int\limits_1^3 \left(y^2 - \frac{y^2}{4} \right) dy = \frac{3}{4} \int\limits_1^3 y^2\,dy = \frac{1}{4}\, y^3 \Big|_1^3 = \frac{1}{4}(27 - 1) = \frac{13}{2}.$$

(Эту площадь можно вычислить и с помощью определенного интеграла, но вычисления были бы более длинными.)

190. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$(x^2 + y^2)^3 = 2x^5.$$

Решение. Кривая задана уравнением 6-й степени относительно x и y и форма кривой неизвестна. Исследовать кривую по ее уравнению методами дифференциального исчисления, т. е. найти максимумы и минимумы и построить по этим данным график, в данном случае нельзя, так как уравнение кривой дает громоздкое выражение при разрешении относительно y и не разрешается относительно x. Можно указать целый ряд вопросов, относящихся к форме кривой, ответы на которые могут быть даны и исходя из «неявного» уравнения кривой. Приводимый ниже порядок этих вопросов будет сохраняться и при исследовании формы кривых в других задачах.

1. В каких четвертях расположена кривая?

В данном уравнении левая часть всегда неотрицательна, так как там стоит сумма квадратов чисел x и y; в правой же части x находится в нечетной степени. Поэтому равенство левой и правой частей возможно только при условии $x \geqslant 0$. Итак, кривая расположена только в первой и четвертой четвертях.

2. Симметрична ли кривая относительно какой-либо координатной оси или относительно начала координат?

При выясненном выше расположении кривой может идти речь только о симметрии относительно оси Ox. Для того чтобы проверить, есть ли такая симметрия, надо посмотреть, соответствует ли всякой точке (x, y) на кривой точка $(x, -y)$ на кривой; для этого, закрепив некоторое значение x, заменим в уравнении y на $-y$; так как y входит в уравнение только в четной степени, то такая замена не нарушит равенства левой и правой частей. Следовательно, данная кривая симметрична относительно оси Ox.

3. В каких точках кривая пересекается с координатными осями?

Для данной кривой надо искать только пересечение с осью Ox. Положив в уравнении кривой $y = 0$, получим $x^6 = 2x^5$, откуда $x = 0$ и $x = 2$. Итак, кривая пересекается с осью Ox в точках $O(0, 0)$ и $A(2, 0)$.

4. В каких четвертях кривая уходит в бесконечность и в каких ограничена или образует петли?

Из уравнения кривой видно, что при больших положительных значениях x и y невозможно равенство левой и правой частей, так как в левой части большие положительные числа будут возводиться в шестую степень, а в правой только в пятую. Эта разница в порядке роста левой и правой частей показывает, что в первой четверти кривая не может неограниченно уходить в сторону от начала координат. По симметрии кривой то же справедливо и в четвертой четверти.

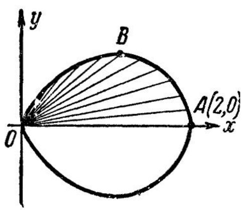

Рис. 23.

При вычислении двойного интеграла выгодно перейти к полярной системе координат, так как в уравнение кривой входит выражение $x^2 + y^2$, которое имеет простой вид в полярной системе координат. После преобразования уравнение кривой принимает вид

$$r^6 = 2r^5 \cos^5 \varphi, \ r = 2\cos^5 \varphi.$$

По этому уравнению видно, что каждому значению φ отвечает одно значение r и, следовательно, кривая приблизительно имеет вид, изображенный на рис. 23. По симметрии кривой видно, что можно вычислить с помощью двойного интеграла только площадь фигуры OAB и результат удвоить. В области интегрирования при фиксированном φ переменная r изменяется от 0 до $2\cos^5\varphi$. Итак,

$$P = 2\iint\limits_{OAB} dx\,dy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos^5\varphi} r\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[r^2 \Big|_0^{2\cos^5\varphi} \right] d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10}\varphi\, d\varphi = 4\cdot\frac{9\cdot7\cdot5\cdot3}{10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{315}{320}\pi.$$

191. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2 = x^2 y.$$

Решение. Проведем исследование формы кривой по схеме предыдущей задачи.

1. Кривая расположена только в первой и второй четвертях, так как равенство левой и правой частей уравнения возможно только при $y \geqslant 0$.

2. Кривая симметрична относительно оси Oy, так как замена x на $-x$ при закрепленном y ничего не меняет в уравнении.

3. Найдем пересечение кривой с осью Oy (пересечение с осью Ox невозможно в силу пункта 1); при $x = 0$ из уравнения получаем

$$\frac{y^4}{81} = 0, \ y = 0.$$

Итак, кривая пересекает ось Oy только в начале координат.

4. Левая часть уравнения при $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ возрастает вместе с x и y как четвертая степень, а правая — только как третья. Поэтому уходящих в бесконечность ветвей кривой в первой четверти нет, а так как кривая

пересекается с осями только в начале координат, то, следовательно, в первой четверти кривая образует петлю.

В данном случае переход к полярным координатам не упрощает выражения, а проводить выкладки в декартовых координатах также невозможно, так как уравнение кривой нельзя разрешить ни относительно x, ни относительно y. Для упрощения уравнения кривой надо перейти к обобщенным полярным координатам, подобрав соответствующим образом числа a и b в формулах (31), а именно, подобрав их так, чтобы $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=r^2$. Для этого надо взять $a=2$, $b=3$. После преобразования по формулам $x=2r\cos\varphi$, $y=3r\sin\varphi$ уравнение кривой принимает вид

$$r^4=12r^3\cos^2\varphi\sin\varphi, \text{ или}$$
$$r=12\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

По этому уравнению можно составить таблицу для построения кривой. Вид кривой показан на рис. 24.

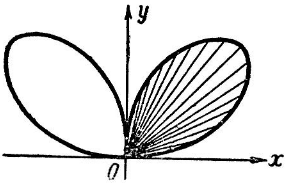

Рис. 24.

Вычисляем площадь (интегрирование производим по заштрихованной на рис. 24 внутренности петли:

$$P=2\cdot2\cdot3\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{12\cos^2\varphi\sin\varphi}r\,dr=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[r^2\Big|_0^{12\cos^2\varphi\sin\varphi}\right]d\varphi=$$

$$=6\cdot144\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi=6^3\cdot4\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\,d\varphi\right]=$$

$$=6^3\cdot4\left[\frac{3\cdot1}{4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5\cdot3}{6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}\right]=27\,\pi.$$

192. Найти площадь, ограниченную кривой (лемнискаты)

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2).$$

Решение. Исследуем форму кривой.

1. Левая часть уравнения всегда неотрицательна, поэтому в правой части всегда должно быть $x^2 - y^2 \geqslant 0$, $x^2 \geqslant y^2$, т. е. $|x| \geqslant |y|$.

Те точки плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x| \geqslant |y|$, расположены между биссектрисами координатных углов (там, где проходит ось Ox).

2. Так как и x и y входят в уравнение только в четных степенях, то налицо симметрия и относительно оси Ox и относительно сси Oy.

3. Положив в уравнении $y = 0$, получаем $x^4 = 2a^2x^2$; отсюда $x = 0$ и $x^2 = 2a^2$, $x = \pm a\sqrt{2}$. Таким образом, точками пересечения кривой с осью Ox будут $A(-a\sqrt{2}, 0)$ $O(0, 0)$ и $B(a\sqrt{2}, 0)$. Точек пересечения кривой с осью Oy, отличных от точки $O(0, 0)$, не может быть согласно пункту 1.

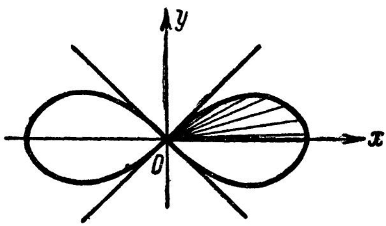

Рис. 25.

4. При очень больших значениях x невозможно равенство левой и правой частей уравнения; действительно, левая часть больше, чем x^4, а правая — меньше, чем $2a^2x^2$, а при больших значениях x, очевидно, имеет место строгое неравенство $x^4 > 2a^2x^2$. Следовательно, кривая ограничена.

Уравнение лемнискаты в полярных координатах принимает вид:

$$r^4 = 2a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi), \quad r^2 = 2a^2\cos 2\varphi.$$

Вид кривой изображен на рис. 25. Находим площадь фигуры, ограниченной обеими петлями, в полярной системе координат (интегрируем по части фигуры, лежащей в первой четверти):

$$P = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r\,dr = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[r^2 \Big|_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \right] d\varphi =$$

$$= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d\varphi = 4a^2 \, \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2.$$

193. Найти площадь фигуры, ограниченной гиперболами

$$xy = 1, \ xy = 4$$

и прямыми

$$x = 2, \ x = 5.$$

194. Найти площадь фигуры, ограниченной параболами

$$y = \frac{x^2}{2}, \quad y^2 = 2x$$

и прямой $y = \frac{2}{3}$.

195. Найти площадь фигуры, ограниченной параболами

$$y = x^2, \ y = 4x^2$$

и прямыми

$$y = 2x, \ y = 4x.$$

В задачах 196—200 найти площади фигур, ограниченных замкнутыми кривыми:

196. $(x^2 + 4y^2)^2 = 3xy$. **197.** $(x^2 + 2y^2)^3 = xy^4$.

198. $\left(4x^2 + \frac{1}{3}y^2\right)^2 = xy^2$. **199.** $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - \frac{y^2}{3}$.

200. $\left(\frac{x^2}{9} + 5y^2\right)^2 = x^2$.

§ 4. Вычисление площадей поверхностей

Предварительно изучите по [1] главу XXII, n° 364, 365, 367; по [2] раздел II, главу III, § 2.

Для вычисления площади поверхности используется формула

$$F = \iint\limits_{(P)} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy \tag{33}$$

со следующими обозначениями: уравнение поверхности имеет вид $z = f(x, y)$ и через p и q обозначены соответственно частные производные от $f(x, y)$ по x и по y, а (P) есть фигура, получающаяся в проекции поверхности на плоскость Oxy.

201. Найти часть площади поверхности цилиндра $z = x^2$, вырезанной из него плоскостями $y = x$, $y = 3x$ и $x = 4$.

Решение. Цилиндр $z=x^2$ имеет образующую, параллельную оси Oy, а направляющей является парабола $z=x^2$ в плоскости Oxz. Плоскости $y=x$ и $y=3x$ проходят через начало координат и через ось Oz, а плоскость $x=4$ проходит параллельно плоскости Oyz. Они вырезают из цилиндрической поверхности некоторую часть. Проекция этой части на плоскость Oxy представляет собой треугольник OAB (рис. 26), который и является областью интегрирования. При переходе к повторному интегралу надо вести внутреннее интегрирование по y, а внешнее по x (другой порядок интегрирования дал бы, как видно из рис. 26, сумму двух повторных интегралов). Находим p и q:

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=2x; \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

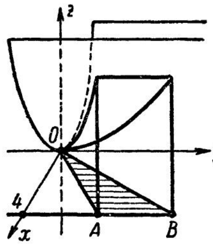

Рис. 26.

Вычисляем площадь поверхности по формуле (33):

$$F=\iint\limits_{(P)}\sqrt{1+4x^2}\,dx\,dy=\int\limits_0^4\sqrt{1+4x^2}\,dx\int\limits_x^{3x}dy=$$

$$=\int\limits_0^4\sqrt{1+4x^2}\left(y\Big|_x^{3x}\right)dx=2\int\limits_0^4\sqrt{1+4x^2}\,x\,dx=$$

$$=\frac{2}{8}\int\limits_0^4(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}\,d(1+4x^2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\,(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4=$$

$$=\frac{1}{6}\left[(1+64)^{\frac{3}{2}}-1\right]=\frac{1}{6}(65\sqrt{65}-1).$$

202. Найти площадь поверхности части сферы

$$x^2+y^2+z^2=9,$$

вырезанной цилиндром

$$x^2+y^2=4.$$

Решение. Из рис. 27 видно, что можно вычислить с помощью двойного интеграла площадь одной восьмой части указанной поверхности. Кроме того ясно, что вычисление надо проводить в полярной системе координат, так как областью интегрирования (P) является четверть круга OAB. Из уравнения сферы находим

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad p = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \quad q = \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{9 - x^2 - y^2}} = \frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

По формуле (33) имеем

$$F = 8 \cdot 3 \iint\limits_{(P)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{9 - (x^2 + y^2)}} = 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \frac{r\,dr}{\sqrt{9 - r^2}} =$$

$$= 24\,\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sqrt{9 - r^2}\right) \Big|_0^2 = 12\pi\left(3 - \sqrt{5}\right)$$

(Обратите внимание на то, что, как и в задаче 169, процесс вычисления интеграла от интеграла здесь заменен умножением интегралов; объясните, почему это можно было сделать.)

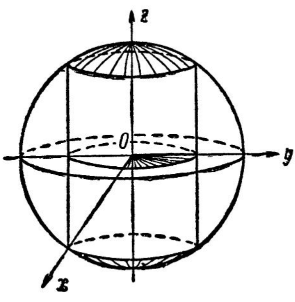

Рис. 27.

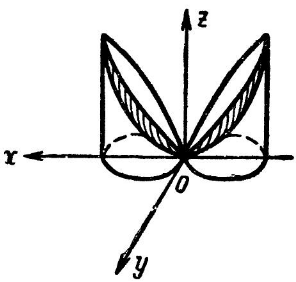

Рис. 28.

203. Найти площадь той части поверхности параболоида вращения

$$x^2 + y^2 = 2z,$$

которая вырезается из него цилиндром

$$(x^2 + y^2) = x^2 - y^2.$$

Решение. Основанием цилиндра служит плоская фигура, ограниченная лемнискатой (см. задачу 192) на плоскости Oxy. Образующие цилиндра параллельны оси Oz (рис. 28). Находим подынтегральную функцию:

$$p = x, \quad q = y, \quad \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Вычисления ведем в полярной системе координат:

$$F = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r\sqrt{1 + r^2}\, dr = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(1 + r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \right] d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(1 + \cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] d\varphi = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[2\sqrt{2}\cos^3\varphi - 1 \right] d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[2\sqrt{2}\cos\varphi\,(1 - \sin^2\varphi) - 1 \right] d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}\sin\varphi - \frac{2\sqrt{2}}{3}\sin^3\varphi - \varphi \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{8} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{20 - 3\pi}{9}.$$

204. Найти площадь части поверхности сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4,$$

вырезанной цилиндром

$$x^2 + y^2 = 1.$$

205. Найти площадь части поверхности сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

вырезанной цилиндром

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

206. Найти площадь части поверхности сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

вырезанной цилиндром

$$x^2+y^2=Rx$$

(см. задачу 170).

207. Найти площадь части поверхности конуса

$$x^2+z^2=y^2,$$

лежащую внутри цилиндра

$$x^2+y^2=R^2.$$

208. Найти площадь части поверхности параболоида вращения

$$2z=x^2+y^2,$$

вырезанной цилиндром

$$x^2+y^2=1.$$

209. Найти площадь части поверхности сферы

$$x^2+y^2+z^2=3a^2,$$

вырезанной параболоидом вращения

$$x^2+y^2=2az.$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

210. Найти площадь части поверхности конуса

$$x^2+z^2=y^2,$$

вырезанной цилиндром

$$y^2=3x.$$

Указание. Для определения области интегрирования найдите на плоскости Oxy точки пересечения направляющей цилиндра и прямых, по которым конус пересекается с плоскостью Oxy.

211. Найти площадь поверхности той части параболоида вращения

$$x^2+y^2=2z,$$

которая заключена внутри сферы

$$x^2+y^2+z^2=4z.$$

Указание. Найдите положение центра сферы и после этого сделайте чертеж. Затем найдите высоту, на которой пересекаются данные поверхности, и, проектируя линию пересечения на плоскость Oxy, определите область интегрирования.

212. Найти площадь части поверхности цилиндра

$$z^2 = 4y,$$

которая заключена между поверхностями

$$x^2 = 2y \text{ и } y = 3.$$

Указание. Обратите внимание на правильное определение области интегрирования.

§ 5. Механические приложения двойных интегралов

Предварительно изучите по [1] главу XXI, n° 345; по [2] раздел II, главу III, § 3.

Обратите внимание на два типа механических приложений двойного интеграла.

1. Отыскание массы, статических моментов, координат центра тяжести и моментов инерции неоднородной пластинки.

2. Отыскание статических моментов, координат центра тяжести и моментов инерции однородного цилиндрического бруса.

213. Найти массу круга, плотность которого в каждой точке равна расстоянию от этой точки до контура круга.

Решение. Пусть дан круг радиуса R. Выберем систему координат, как указано на рис. 29. Имеем

$$OA = R,\ OM = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$MA = R - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

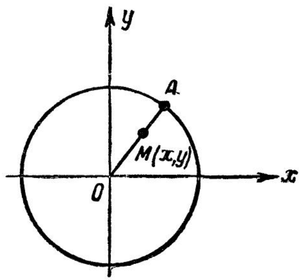

Рис. 29.

По условию задачи плотность распределения массы $\rho(x, y)$ выражается по формуле

$$\rho(x, y) = R - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

По формуле для массы пластинки, переходя в процессе вычислений к полярным координатам, получим:

$$m = \iint\limits_{(P)} \rho(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{(P)} (R - \sqrt{x^2 + y^2})\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R - r) r\, dr = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{Rr^3}{2} - \frac{r^2}{3}\right) \Big|_0^R = 2\pi \cdot \frac{R^3}{6} = \frac{\pi R^3}{3}.$$

214. Найти центр тяжести одной четверти круга предыдущей задачи.

Решение. Найдем сначала статические моменты четверти круга:

$$S_x = \iint\limits_{(P)} y\,\rho(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R r \sin\varphi\,(R-r)\,r\,dr =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,d\varphi \int\limits_0^R (Rr^2 - r^3)\,dr = (-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{Rr^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^R =$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{R^4}{3} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{R^4}{12}.$$

Очевидно, по соображениям симметрии, что также и $S_y = \frac{R^4}{12}$.

Используя результаты решения задачи 213, находим массу одной четверти круга: $m = \frac{\pi R^3}{12}$. По формулам для координат центра тяжести получаем:

$$\xi = \eta = \frac{R^4 \cdot 12}{12\pi \cdot R^3} = \frac{R}{\pi}.$$

215. Найти центр тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями

$$y = x^2,\ y + x = 2,\ y = 0.$$

Решение. Находим массу, которая при $\rho(x, y) = 1$ численно равна площади:

$$P = \iint\limits_{(P)} dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} dx =$$

(обратите внимание на то, что другой порядок интегрирования был бы неудобен)

$$= \int\limits_0^1 \left(x \Big|_{\sqrt{y}}^{2-y}\right) dy = \int\limits_0^1 (2 - y - \sqrt{y})\,dy =$$

$$= \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}.$$

Находим статические моменты пластинки:

$$S_x = \iint\limits_{(P)} y\,dx\,dy = \int\limits_0^1 y\,dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} dx = \int\limits_0^1 y\,(2 - y - \sqrt{y})\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(2y - y^2 - y^{\frac{3}{2}}\right) dy = \left(y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{15};$$

$$S_y = \iint_{(P)} x\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2 \Big|_{\sqrt{y}}^{2-y}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (4 - 4y + y^2 - y)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (4 - 5y + y^2)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4y - \frac{5}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{5}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{12}.$$

Итак:

$$\xi = \frac{11 \cdot 6}{12 \cdot 5} = \frac{11}{10}, \quad \eta = \frac{4 \cdot 6}{15 \cdot 5} = \frac{8}{25}.$$

Положение центра тяжести $C\left(\frac{11}{10}, \ \frac{8}{25}\right)$ помечено на рис. 30.

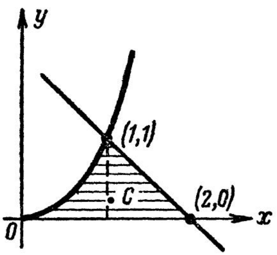

Рис. 30.

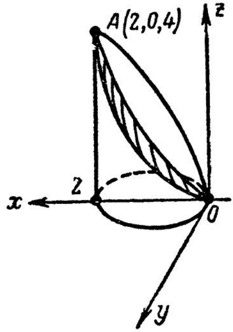

Рис. 31

216. Найти центр тяжести однородного цилиндрического бруса, ограниченного поверхностями (рис. 31):

$$z = 0, \ x^2 + y^2 = 2x, \ z = x^2 + y^2.$$

Решение. Находим объем цилиндрического бруса:

$$V = \iint_{(P)} (x^2 + y^2)\,dx\,dy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 r\,dr =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4}r^4 \Big|_0^{2\cos\varphi}\right) d\varphi = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\,d\varphi = 8 \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

(уравнение направляющей цилиндра $x^2+y^2=2x$ в полярных координатах принимает вид $r=2\cos\varphi$). По соображениям симметрии ясно, что центр тяжести тела лежит на оси Ox, т. е. $\eta=0$.

Находим статические моменты S_{yz} и S_{xy}:

$$S_{yz}=\iint\limits_{(P)} xz\,dx\,dy=\iint\limits_{(P)} x\,(x^2+y^2)\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r\cos\varphi\, r^2\, r\,dr=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r^4\,dr=$$

$$=\frac{1}{5}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\cdot\left(r^5\Big|_0^{2\cos\varphi}\right)d\varphi=\frac{2^5}{5}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{2^6}{5}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\,d\varphi=\frac{2^6}{5}\cdot\frac{5\cdot 3}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi;$$

$$S_{xy}=\frac{1}{2}\iint\limits_{(P)} z^2\,dx\,dy=\frac{1}{2}\iint\limits_{(P)}(x^2+y^2)^2\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r^4\, r\,dr=\frac{1}{12}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(r^6\Big|_0^{2\cos\varphi}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{2^4}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\,d\varphi=\frac{2^5}{3}\cdot\frac{5\cdot 3}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{3}.$$

В выкладках мы использовали свойство определенного интеграла от четной функции по промежутку, симметричному относительно нуля.

Находим координаты центра тяжести

$$\xi=\frac{S_{yz}}{V}=\frac{2\pi\cdot 2}{3\pi}=\frac{4}{3};\quad \eta=0;\quad \zeta=\frac{S_{xy}}{V}=\frac{5\pi\cdot 2}{3\cdot 3\pi}=\frac{10}{9}.$$

Для того чтобы отметить высоту положения центра тяжести, надо знать аппликату точки A (наивысшая точка линии пересечения параболоида и цилиндра); для этого решаем совместно уравнение параболоида и цилиндра при $x=2$ и получаем $z=4$. Тогда видно, что центр тяжести $C\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{10}{9}\right)$ расположен близко к основанию цилиндрического бруса.

217. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями

$$y=4-x^2,\ y+2x=4.$$

218. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями

$$y=2x-1,\ y^2=x,\ y=0.$$

219. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями

$$y=x^2,\ y=3x^2,\ y=3x.$$

220. Найти координаты центра тяжести тел из задач 165, 167, 183.

221. Найти моменты инерции однородного прямого кругового цилиндра массы m относительно диаметра основания.

222. Найти массу квадратной неоднородной пластинки со стороной $2a$, если плотность материала пластинки пропорциональна квадрату расстояния от точки пересечения диагоналей и на углах квадрата равна единице.

223. Плоское кольцо ограничено двумя концентрическими окружностями, радиусы которых равны R и r $(R>r)$. Зная, что плотность материала обратно пропорциональна расстоянию от центра окружностей, найти массу кольца. Плотность на окружности внутреннего круга равна единице.

224. Найти статический момент прямого однородного круглого конуса с плотностью, равной единице, относительно плоскости, проходящей через вершину параллельно основанию (R — радиус основания конуса, H — высота).

§ 6. Криволинейные интегралы

Предварительно изучите по [1] главу XX, n° 330—333 (в n° 331 можно опустить вывод формулы (5), n° 335 1); главу XXI, n° 346—347; 348—351; по [2] раздел II, главу IV, § 1—9.

225. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} x\sqrt[3]{y}\,dx - 6x^3\,dy,$$

если кривая AB задана уравнением $y = x^3$ и $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Решение. Так как кривая задана явным уравнением $y = f(x)$, где $a \leqslant x \leqslant b$, то вычисляем интеграл по формуле

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$

$$= \int\limits_a^b \{P[x, f(x)] + Q[x, f(x)]f'(x)\}\,dx. \quad (34)$$

Находим:

$$\int\limits_{AB} x\sqrt[3]{y}\,dx - 6x^3\,dy = \int\limits_{-1}^{1} \left(x\sqrt[3]{x^3} - 6x^3 \cdot 3x^2\right)dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (x^2 - 18x^5)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^6\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{3} - 3 + \frac{1}{3} + 3 = \frac{2}{3}.$$

226. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} y\,dx + x(y^3 + 1)\,dy,$$

если кривая AB задана уравнением $x = \frac{1}{2}y^2$ и $0 \leqslant y \leqslant 2$.

Решение. Так как кривая задана явным уравнением вида $x = g(y)$, где $c \leqslant y \leqslant d$, то вычисляем интеграл по формуле

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x; y)\,dy =$$

$$= \int\limits_c^d \{P[g(y), y]\,g'(y), + Q[g(y), y]\}\,dy. \quad (35)$$

Находим:

$$\int\limits_{AB} y\,dx + x(y^3 + 1)\,dy = \int\limits_0^2 \left[y \cdot \frac{1}{2}2y + \frac{1}{2}y^2(y^3 + 1)\right]dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{3}{2} y^2 + \frac{1}{2} y^5\right) dy = \left(\frac{1}{2} y^3 + \frac{1}{12} y^6\right) \Big|_0^2 =$$

$$= \frac{y^3}{2}\left(1 + \frac{y^3}{6}\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{2} \cdot \left(1 + \frac{8}{6}\right) = \frac{28}{3}.$$

227. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AB} xy\,dx + 5y^2\,dy,$$

если кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = 3\cos t,\ \ y = 2\sin t,\ \ 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$$

(кривая AB есть часть эллипса с полуосями 3 и 2, находящаяся в первой четверти).

Решение. Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то криволинейный интеграл вычисляется сведением к определенному интегралу по следующей формуле:

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P[x(t),\ y(t)]\,x'(t) + Q[x(t),\ y(t)]\,y'(t)\}\,dt.$$

Находим:

$$\int_{AB} xy\,dx + 5y^2\,dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-3\cos t\, 2\sin t\, 3\sin t + 5 \cdot 4\sin^2 t\, 2\cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-18\cos t \sin^2 t + 40\cos t \sin^2 t)\,dt =$$

$$= 22\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t\,dt = 22 \cdot \frac{1}{3}\sin^3 t\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{22}{3}.$$

228. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AB} 3x^2 y\,dx + (x^3 + 2y)\,dy,$$

если кривая AB задана уравнением $y = 2x^2$ и $0 \leqslant x \leqslant 2$

Решение. Можно вычислить этот интеграл по формуле (34). Но известно (см. [1], n° 350, [2], § 8), что криволинейные интегралы, не зависящие от формы пути интегрирования, вычисляются по следующей формуле

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \Phi(B) - \Phi(A), \tag{36}$$

где $\Phi(x, y)$ такова, что $d\Phi = P\,dx + Q\,dy$. Известно также, что для того чтобы криволинейный интеграл не зависел от формы пути интегрирования при весьма широких условиях, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{37}$$

(подробно см. [1], n° 349, теорема 2, или [2], § 6). Проверим выполнение равенства (37) в данном примере:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2, \text{ т. е. } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Следовательно, данный интеграл можно вычислять по формуле (36). Вид функции $\Phi(x, y)$ можно в данном простом примере легко угадать, а именно, $\Phi(x, y) = x^3 y + y^2$. Итак,

$$\int_{AB} 3x^2 y\,dx + (x^3 + 2y)\,dy = (x^3 y + y^2)\Big|_A^B =$$

$$= (x^3 y + y^2)\Big|_{(0,0)}^{(2,8)} = 8 \cdot 8 + 64 = 128.$$

229. Проверить, является ли выражение

$$\left(12x^2 y + \frac{1}{y^2}\right)dx + \left(4x^3 - \frac{2x}{y^3}\right)dy \tag{38}$$

полным дифференциалом некоторой функции двух переменных и если да, то найти эту функцию.

Решение. Для того чтобы выражение $P\,dx + Q\,dy$ было полным дифференциалом некоторой функции двух переменных, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (37) (см. [1], n° 350, или [2], § 7). Проверим, выполняется ли оно:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12x^2 - \frac{2}{y^3}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12x^2 - \frac{2}{y^2}.$$

Итак, равенство (37) имеет место и данное выражение является полным дифференциалом некоторой функции двух переменных. Угадать вид этой функции $\Phi(x, y)$, как это было сделано в задаче 228, здесь трудно. Для отыскания $\Phi(x, y)$ воспользуемся формулой

$$\Phi(x, y) = \int\limits_{AM} P\,dx + Q\,dy, \tag{39}$$

где A — фиксированная точка, а $M(x, y)$ — переменная точка [см. [1], n° 350, равенство (8) или [2], § 7, формула (7)]. Криволинейный интеграл от данного выражения (38) не зависит от формы пути интегрирования, поэтому в качестве кривой AM возьмем ломаную, состоящую из двух звеньев AB и BM; AB лежит на оси Oy, а BM параллельно оси Ox (рис. 32). Это удобно делать, так как при интегрировании по AB имеем $x = 0$ и $dx = 0$, а при интегрировании по BM имеем $dy = 0$, что сильно упрощает подынтегральное выражение и обращает криволинейный интеграл в сумму определенных интегралов. Выбор точки A произволен, надо только следить за тем, чтобы проводимые линии проходили там, где функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны. Так, в данном примере функции P и Q теряют непрерывность при $y = 0$ и поэтому путь интегрирования надо проводить так, чтобы он не проходил через ось Ox. Проводим вычисления:

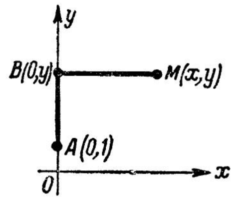

Рис. 32.

$$\Phi(x, y) = \int\limits_{ABM} \left(12x^2y + \frac{1}{y^2}\right)dx + \left(4x^3 - \frac{2x}{y^3}\right)dy =$$

$$= \int\limits_{AB} + \int\limits_{BM} = \int\limits_0^x \left(12x^2y + \frac{1}{y^2}\right)dx = \left(4x^3y + \frac{x}{y^2}\right)\Bigg|_0^x =$$

$$= 4x^3y + \frac{x}{y^2}$$

(интеграл по AB обратился в 0).

Очевидно, что если найдена одна функция $\Phi(x, y)$, то все остальные функции, имеющие тот же полный дифференциал, т. е. все остальные первообразные выражения для $P\,dx + Q\,dy$, отличаются от нее постоянным слагаемым. Итак, общий вид всех первообразных для выражения (38) следующий

$$4x^3y + \frac{x}{y^2} + C.$$

230. Проверить, является ли выражение

$$(e^{2y} - 5y^3 e^x)\,dx + (2xe^{2y} - 15y^2 e^x)\,dy$$

полным дифференциалом некоторой функции двух переменных и если да, то найти эту функцию.

Решение. Проверяем выполнение равенства (37):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2e^{2y} - 15y^2 e^x;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2e^{2y} - 15y^2 e^x.$$

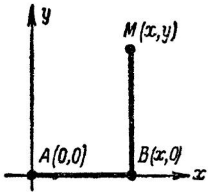

Рис. 33.

Равенство (37) имеет место и, следовательно, данное выражение является полным дифференциалом. Ищем первообразную $\Phi(x, y)$ по формуле (39); путь интегрирования AM выбираем, как указано на рис. 33 (на пути AB имеем $y = 0$ и $dy = 0$ и на пути BM имеем $dx = 0$):

$$\Phi(x, y) = \int_{ABM} (e^{2y} - 5y^3 e^x)\,dx + (2xe^{2y} - 15y^2 e^x)\,dy =$$

$$= \int_{AB} + \int_{BM} = \int_0^x dx + \int_0^y (2xe^{2y} - 15y^2 e^x)\,dy =$$

$$= x\Big|_0^x + (xe^{2y} - 5y^3 e^x)\Big|_0^y = x + xe^{2y} - 5y^3 e^x - x =$$

$$= xe^{2y} - 5y^3 e^x.$$

Общий вид всех первообразных для заданного в примере выражения можно записать следующим образом:

$$xe^{2y} - 5y^3 e^x + C.$$

231. Найти площадь, ограниченную петлей кривой

$$(x + y)^4 = x^2 y.$$

Решение. Применим для исследования формы этой кривой соображения, развитые в § 3 (см. задачи 190, 191, 192).

1. Для равенства левой и правой частей необходимо, чтобы было $y \geqslant 0$ и, следовательно, кривая расположена только в первой и второй четвертях.

2. Симметрии относительно оси Oy нет, так как изменение знака x изменяет члены уравнения.

3. При $x = 0$ получаем $y^4 = 0$, т. е. $y = 0$; следовательно, кривая пересекается с осью Oy только в начале координат. Пересечения с осью Ox не может быть согласно пункту 1.

4. Если $x > 0$ (y согласно пункту 1 всегда неотрицательно), то при больших x и y невозможно равенство левой и правой частей уравнения, так как левая часть растет, как четвертая степень, а правая — только как третья. Поэтому можно сказать, что кривая в первой четверти образует петлю. Если же $x < 0$, то несоответствия в порядке роста между правой и левой частями уравнения нет, так как в левой части под знаком четвертой степени фактически производится вычитание, а не сложение больших чисел. Поэтому во второй четверти могут быть ветви кривой, бесконечно удаляющиеся от начала координат. Более подробное исследование (например, по параметрическим уравнениям) показало бы, что таких ветвей во второй четверти две (рис. 34).

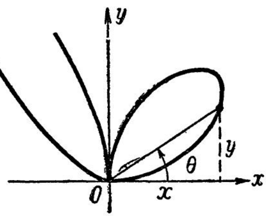

Рис. 34.

Для того чтобы можно было пользоваться формулами

$$P = -\int_C y\,dx, \text{ или } P = \int_C x\,dy, \text{ или } P = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx,$$

где C — контур петли, надо иметь более удобную форму уравнения данной кривой. Очевидно, что переход к полярной системе координат в данном случае не внесет никакого упрощения в уравнение кривой, так как в левой части уравнения стоит сумма первых степеней x и y. Часто бывает удобно перейти к параметрическим уравнениям кривой, взяв в качестве параметра отношение y к x:

$$t = \frac{y}{x}.$$

Так как $t = \operatorname{tg}\theta$ (рис. 34), то в первой четверти t изменяется от 0 до ∞. Преобразуем уравнение кривой:

$$(x + tx)^4 = x^3 t, \quad x^4 (1 + t)^4 = x^3 t,$$

откуда

$$x = \frac{t}{(1+t)^4}, \quad y = \frac{t^2}{(1+t)^4}$$

(так как $y = tx$). Эти формулы и служат для построения кривой на рис. 34. Составим выражение $y\,dx$:

$$y\,dx = \frac{t^2}{(1+t)^4} \cdot \frac{(1+t)^4 - 4t(1+t)^3}{(1+t)^8}\,dt = \frac{t^2(1-3t)}{(1+t)^9}\,dt.$$

Вычисляем площадь:

$$P = -\int\limits_C y\,dx = -\int\limits_0^\infty \frac{t^2(1-3t)}{(1+t)^9}\,dt.$$

Мы получили несобственный интеграл первого рода. Для отыскания первообразной удобно сделать замену переменной, положив $1 + t = z$. Тогда получим

$$\int \frac{t^2(1-3t)}{(1+t)^9}\,dt = \int \frac{(z-1)^2(1-3z+3)}{z^9}\,dz =$$

$$= \int \frac{-3z^3 + 10z^2 - 11z + 4}{z^9}\,dz = \int \left(-\frac{3}{z^6} + \frac{10}{z^7} - \frac{11}{z^8} + \frac{4}{z^9}\right) dz =$$

$$= \frac{3}{5z^5} - \frac{5}{3z^6} + \frac{11}{7z^7} - \frac{1}{2z^8} =$$

$$= \frac{3}{5(1+t)^5} - \frac{5}{3(1+t)^6} + \frac{11}{7(1+t)^7} - \frac{1}{2(1+t)^8}.$$

Возвращаемся к вычислению площади, причем пользуемся правилом вычисления несобственного интеграла первого рода:

$$P = -\int\limits_0^\infty \frac{t^2(1-3t)}{(1+t)^9}\,dt =$$

$$= -\left[\frac{3}{5(1+t)^5} - \frac{5}{3(1+t)^6} + \frac{11}{7(1+t)^7} - \frac{1}{2(1+t)^8}\right]\Bigg|_0^\infty =$$

$$= \frac{3}{5} - \frac{5}{3} + \frac{11}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{210}.$$

232. Силовое поле образовано силой $F(x, y)$, равной расстоянию точки ее приложения от начала координат и направленной в начало. Найти работу сил поля, когда материальная точка единичной массы описывает дугу параболы $y^2 = 8x$ от $x = 2$ до $x = 4$ (рис. 35).

Решение. Находим проекции силы:

$$P = -x \text{ и } Q = -y.$$

По формуле для работы силового поля (см. [1], n° 335 и n° 351 или [2], § 9) имеем:

$$A = -\int_{BC} x\,dx + y\,dy = -\int_2^4 \left(x + 2\sqrt{2x}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)dx =$$

$$= -\int_2^4 (x+4)\,dx = -\left(\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_2^4 =$$

$$= -\left(\frac{16}{2} + 16 - \frac{4}{2} - 8\right) = -14.$$

233. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AB} \sqrt{y}\,dx + \frac{x\,dy}{2\sqrt{y}},$$

где кривая AB задана уравнением

а) $y^2 = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$

б) $y = x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$

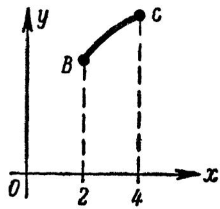

Рис. 35

234. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AB} 3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy,$$

где кривая AB задана уравнением $y^3 = x^2$ и $1 \leqslant x \leqslant 2$

235. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AB} x^3y^2\,dx + \frac{1}{2}x^4y\,dy,$$

где кривая AB задана уравнением $y = \frac{1}{8}x^3$ и $0 \leqslant x \leqslant 2.$

236. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AB} x^2y\,dx + x\,dy,$$

где кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

237. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} \frac{x+1}{y}\,dx - y^3 dy,$$

где AB — та же кривая, что и в задаче 234.

Проверить, являются ли выражения в задачах 238—243 полными дифференциалами функции двух переменных и если да, то найти эти функции.

Следите за правильным выбором пути интегрирования при отыскании функции по ее полному дифференциалу. В задачах 238—243 этот выбор не безразличен, так как функции P, Q и их производные не всюду непрерывны.

238. $\dfrac{2x\,dx}{y^3} + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}\,dy.$

239. $(2x\sqrt{3-y} + 8y\sqrt{y} - 2)\,dx +$
$$+\left(12x\sqrt{y} - \frac{x^2}{2\sqrt{3-y}}\right)dy.$$

240. $\left[24x^2\sin 2y + \dfrac{4\sqrt{y^2+1}}{(x+1)^2}\right]dx +$
$$+\left[16x^3\cos 2y - \frac{4y}{(x+1)\sqrt{y^2+1}} - 10y\right]dy.$$

241. $\left(\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)dx + 2\,xy\,dy.$

242. $\left[10xy + \dfrac{3\sqrt{y}}{(x+1)^4}\right]dx + \left[5x^2 - \dfrac{1}{2\sqrt{y}(x+1)^3}\right]dy.$

243. $e^{xy}\left(\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}\right)dx + \dfrac{1}{x}\,e^{xy}\,dy.$

244. Найти площадь, ограниченную астроидой

$$x = a\cos^3 t, \; y = b\sin^3 t$$

(рис. 36).

245. Найти площадь, ограниченную петлей кривой

$$(x+y)^5 = x^2y^2.$$

246. Найти площадь, ограниченную петлей кривой

$$(x+y)^3 = xy.$$

247. В каждой точке плоскости действует сила, имеющая постоянную величину F и направленная параллельно оси Ox в сторону положительного направления последней. Найти работу, совершаемую этой силой, при движении точки с массой, равной единице, по дуге окружности $x^2+y^2=R^2$ в первой четверти по часовой стрелке.

248. В каждой точке плоскости действует сила, проекции которой на координатные оси равны:

$$P = xy,\ Q = x + y.$$

Вычислить работу силы при перемещении точки с массой, равной единице, из начала координат в точку (1, 1):

а) по прямой $y = x$.

б) по параболе $y = x^2$.

249. Проекции силы на координатные оси задаются формулами: $P = 2xy$, $Q = x^2$. Показать, что силовое поле потенциальное и вычислить работу поля при перемещении точки с массой, равной единице, из $B(1, 0)$ в $C(0, 3)$.

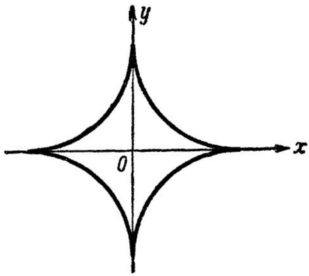

Рис. 36.

250. Сила по величине обратно пропорциональна расстоянию от точки ее приложения до плоскости Oxy и направлена к началу координат. Вычислить работу при движении точки с массой, равной единице, по прямой

$$x = t,\ y = 2t,\ z = 3t$$

от $B(1, 2, 3,)$ до $C(2, 4, 6)$.

§ 7. Тройные интегралы

Предварительно изучите по [1] главу XXIII, § 1, 3 (n^0 382, 384, 385, 386) или по [2] раздел II, главу II, § 9, 10 и главу III, § 5.

Вычисление тройного интеграла производится путем свёде́ния его к повторным интегралам, т. е. к последовательному вычислению трех простых интегралов. Способ расстановки порядка интегрирования по переменным x, y, z надо выбирать тот, который удобнее для каждого конкретного интеграла. Иногда удобно производить выкладки в цилиндрической или сферической системах координат. Известно, что объем V кубируемого тела (V) вычисляется по формуле

$$V = \iiint\limits_{V} dx\,dy\,dz \tag{40}$$

251. Вычислить тройной интеграл от функции $f(x, y, z) = xy + z^2$ по параллелепипеду $(V) = [0,1;\ 1,2;\ 0,3]$.

Решение. В данном случае пределы всех простых интегралов постоянные:

$$\iiint\limits_{(V)} (xy + z^2)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^3 (xy + z^2)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_1^2 dy \left(xyz + \frac{1}{3} z^3 \right) \Bigg|_0^3 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_1^2 (3xy + 9)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \left(\frac{3}{2} xy^2 + 9y \right) \Bigg|_1^2 = \int\limits_0^1 \left(6x + 18 - \frac{3}{2} x - 9\right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{9}{2} x + 9 \right) dx = 9 \left(\frac{x^2}{4} + x \right) \Bigg|_0^1 = 9 \left(\frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{45}{4}.$$

252. Вычислить тройной интеграл от функции $f(x, y, z) = x + y + z$ по телу (V), ограниченному поверхностями $z^2 = x^2 + y^2$ и $z = 1$ $(z \geqslant 0.)$

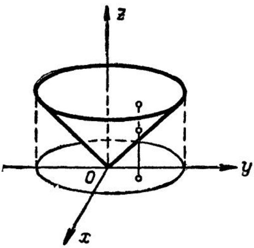

Рис. 37.

Решение. Данное тело является частью конической поверхности с вершиной в начале координат, срезанной плоскостью, параллельно плоскости Oxy на высоте, равной единице. Возьмем внутренний интеграл по переменной z. Из рис. 37 видно, что всякая прямая, параллельная оси Oz, входит в тело (V), на поверхности конуса и выходит из тела (V) на плоскости $z = 1$. Поэтому в качестве нижнего предела для интеграла по z надо взять аппликату точки, лежащей на конусе. Для этого находим z из уравнения конуса:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(перед корнем берем знак «плюс», так как требуемая часть конуса расположена над плоскостью Oxy по условию задачи). Верхним пределом интеграла по z будет единица. Интегрирование по переменным x и y оставим пока в виде двойного интеграла:

$$I=\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{(P)}dx\,dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}(x+y+z)\,dz$$

(через (P) обозначена область интегрирования по переменным x и y; на рис. 37 показано, что это круг, который получился проектированием тела (V) на плоскость Oxy; радиус этого круга равен единице). Проводя вычисление внутреннего интеграла, имеем

$$I=\iint\limits_{(P)}dx\,dy\left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=1}=$$

$$=\iint\limits_{(P)}\left[x+y+\frac{1}{2}-(x+y)\sqrt{x^2+y^2}-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]dx\,dy.$$

Вычислим этот двойной интеграл в полярной системе координат:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 r\left[r(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{1}{2}-r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)-\frac{r^2}{2}\right]dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left[\frac{r^3}{3}(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{4}(\cos\varphi+\sin\varphi)-\frac{r^4}{8}\right]\Bigg|_0^1=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{3}(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(\cos\varphi+\sin\varphi)-\frac{1}{8}\right]d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{12}(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{1}{8}\right]d\varphi=\left[\frac{1}{12}(\sin\varphi-\cos\varphi)+\frac{\varphi}{8}\right]\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{4}.$$

253. Найти объем общей части двух сфер

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \text{ и } x^2+y^2+z^2=2Rz.$$

Решение. Вторая сфера имеет радиус R и центр на оси Oz на высоте R, как видно из преобразованного уравнения

$$x^2+y^2+(z-R)^2=R^2.$$

Решая совместно уравнения обеих сфер, получаем

$$R^2 = 2Rz, \quad z = \frac{R}{2}.$$

Следовательно, сферы пересекаются на высоте $\frac{R}{2}$.

Искомый объем складывается из объемов двух шаровых сегментов, причем из рис. 38 видно, что шаровые сегменты имеют одинаковые объемы (сферы имеют одинаковые радиусы и сегменты одинаковые высоты, равные $\frac{R}{2}$). Поэтому можно найти объем, например, нижнего сегмента и результат вычислений удвоить. По формуле (40) имеем:

$$V = 2\int\limits_0^{\frac{R}{2}} dz \iint\limits_{(P_z)} dx\,dy, \tag{41}$$

где через (P_z) обозначено сечение сегмента плоскостью, параллельной плоскости Oxy, на высоте z. Но внутренний двойной интеграл равен площади сечения (P_z) и, так как все сечения (P_z) — это круги, то двойной интеграл можно заменить просто площадью круга (P_z). Для определения переменного радиуса такого круга (радиус зависит от z, т. е. от высоты, на которой проведено сечение) перенесем в уравнении второй сферы z^2 в правую сторону:

$$x^2 + y^2 = 2Rz - z^2.$$

Рассматривая это уравнение, как уравнение окружности, видим, что квадрат радиуса этой окружности равен $2Rz - z^2$. Тогда получаем:

$$P_z = \pi(2Rz - z^2).$$

Подставляя найденную площадь сечения в (41), находим искомый объем:

$$V = 2\int\limits_0^{\frac{R}{2}} \pi(2Rz - z^2)\,dz = 2\pi\left(Rz^2 - \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{R}{2}} =$$

$$= 2\pi\left(\frac{R^3}{4} - \frac{R^3}{24}\right) = \frac{5\pi R^3}{12}.$$

254. Найти центр тяжести одной восьмой части однородной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, расположенной в первом октанте.

Решение. Из соображений симметрии ясно, что все три координаты центра тяжести одинаковы. Объем одной восьмой части сферы равен $\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{\pi a^3}{6}$. Будем считать, что плотность распределения массы равна единице.

По формулам (10) из п⁰ 379, § 1 главы XXIII учебника [1] (или по формулам (2), § 5, главы III из учебника [2])

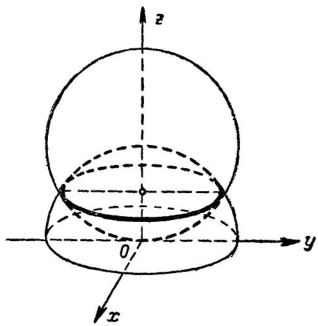

Рис. 38.

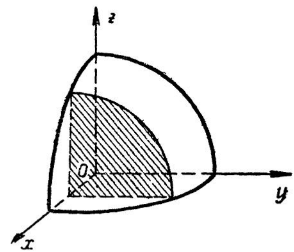

Рис. 39.

получаем:

$$\xi = \frac{6}{\pi a^3}\iiint\limits_{(V)} x\,dx\,dy\,dz.$$

Для вычисления тройного интеграла представим его в виде двойного и простого следующим образом:

$$\xi = \frac{6}{\pi a^3}\int\limits_0^a x\,dx \iint\limits_{(P_x)} dy\,dz. \tag{42}$$

Площадь сечения (P_x) можно найти, как площадь четверти круга переменного радиуса, зависящего от x (см. рис. 39) А именно, записав уравнение сферы в виде

$$y^2 + z^2 = a^2 - x^2,$$

видим, что квадрат этого радиуса равен $a^2 - x^2$. Так как двойной интеграл в (42) равен площади (P_x), то, подставляя в (42) выражение $P_x = \frac{\pi(a^2 - x^2)}{4}$, получаем

$$\xi = \frac{6}{\pi a^3} \int_0^a x \cdot \frac{\pi(a^2 - x^2)}{4} dx = \frac{3}{2a^3}\left(\frac{x^2a^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^a = \frac{3a}{8}.$$

Итак, центр тяжести одной восьмой части однородной сферы расположен в точке $C\left(\frac{3a}{8};\ \frac{3a}{8};\ \frac{3a}{8}\right)$.

255. Найти массу неоднородного шара радиуса a, если известно, что в каждой точке шара плотность распределения массы равна удвоенному расстоянию от этой точки до поверхности шара.

Решение. Расстояние от точки $M(x;\ y;\ z)$ до поверхности шара (расстояние отсчитывается по радиусу, проходящему через точку M) равно $a - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Следовательно, плотность распределения массы в шаре выражается формулой

$$\rho(x,\ y,\ z) = 2\left(a - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

По известной формуле находим массу:

$$m = \iiint\limits_{(V)} 2\left(a - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) dx\,dy\,dz. \tag{43}$$

В силу заданного закона распределения массы, массы частей шара, расположенных в разных октантах, равны между собой. Интеграл (43) выгодно вычислить в сферической системе координат (вспомните формулу перехода к сферической системе координат под знаком тройного интеграла):

$$m = 8 \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^a r^2 (a - r)\, dr =$$

$$= 16\,\theta \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot (-\cos\varphi)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{r^3 a}{3} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= 16 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4}\right) = \frac{2\pi a^4}{3}.$$

256. Вычислить тройной интеграл от функции $f(x, y, z) = x$ по телу (V), ограниченному плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y + z = 3$.

(Проведите вычисление несколько раз, беря разные порядки интегрирования в повторных интегралах.)

257. Вычислить тройной интеграл от функции $f(x, y, z) = x + yz$ по телу (V), ограниченному плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 4$, $x + y + z = 8$.

258. Вычислить тройной интеграл от функции $f(x, y, z) = y$ по телу (V), ограниченному поверхностями $x^2 + y^2 = z$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 3$.

259. Найти объем общей части параболоида вращения

$$2z = x^2 + y^2$$

и сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

Указание. Решите задачу таким же методом, каким была решена задача 253.

260. Найти массу прямого кругового цилиндра высоты h с радиусом основания R, если известно, что плотность распределения массы в любой точке M прямо пропорциональна расстоянию от этой точки до оси цилиндра (коэффициент пропорциональности обозначим через k).

261. Найти положение центра тяжести однородного прямого кругового конуса высоты h.

262. Вычислить тройной интеграл от функции $f(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$ по телу (V), ограниченному поверхностями $y^2 = 2x - x^2$, $z = 0$ и $z = a$.

Указание. Перейдите к цилиндрической системе координат.

263. Вычислить тройной интеграл от функции $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ по телу (V), ограниченному поверхностями $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$, $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

Указание. Перейдите к цилиндрической системе координат.

264. Вычислить тройной интеграл от функции $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ по телу (V), ограниченному поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($z \geqslant 0$ и $R > r$).

Указание. Перейдите к сферической системе координат.

265. Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$(x^2+y^2+z^2)^3=a^3xyz. \tag{44}$$

Решение. Можно составить приблизительное представление о форме этого тела, проведя исследование уравнения (44) методом, аналогичным использованному в § 3 при определении вида некоторых плоских фигур. Для этого дадим ответ на следующие вопросы.

1. В каких октантах расположена поверхность?

В уравнении (44) левая часть всегда неотрицательна. Поэтому равенство левой и правой частей в (44) возможно только, если $xyz \geqslant 0$. Последнее неравенство выполняется в первом, третьем, шестом и восьмом октантах. Следовательно, поверхность расположена только в этих октантах.

2. Симметрична ли поверхность относительно какой-либо координатной плоскости, оси или относительно начала координат?

При выясненном выше расположении поверхности речь может идти только о проверке симметрии относительно координатных осей. Из (44) видно, что одновременное изменение знака каких-либо двух координат ничего не меняет в уравнении поверхности, следовательно, налицо симметрия относительно координатных осей.

3. В каких точках поверхность пересекается с координатными плоскостями и координатными осями?

Так как уравнение (44) удовлетворяется при $x=y=z=0$, то поверхность проходит через начало координат. Других точек пересечения поверхности (44) с координатными плоскостями и осями нет.

4. В каких октантах поверхность ограничена?

Из уравнения (44) видно, что при больших положительных значениях x, y и z невозможно равенство левой и правой частей уравнения в силу разницы в порядке роста. Следовательно, можно сделать вывод, что в первом октанте поверхность ограничена. В остальных трех октантах она также ограничена в силу установленной выше симметрии.

Вычисление объема удобно провести в сферической системе координат. Преобразуем уравнение (44):

$$r^6 = a^3 r \cos\theta \sin\varphi \cdot r \cdot \sin\theta \sin\varphi \cdot r \cdot \cos\varphi,$$
$$r^3 = a^3 \cos\theta \sin\theta \sin^2\varphi \cos\varphi,$$
$$r = a\sqrt[3]{\cos\theta \sin\theta \sin^2\varphi \cos\varphi}. \qquad (45)$$

В пределах первого октанта величины θ и φ изменяются от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а величина r — от 0 до значения (45). Вычисляем объем:

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta \sin\theta \sin^2\varphi \cos\varphi}} r^2\, dr =$$

$$= \frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\theta \sin\theta \sin^2\varphi \cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, \sin\theta\, d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \sin^2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{4} \sin^4\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{6}.$$

266. Найти объем тела, ограниченного поверхностью
$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz.$$

Указание. Используйте пример решения задачи 265.

267. Найти объем тела, ограниченного поверхностью
$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2 z^4.$$

268. Найти объем части конуса
$$x^2 + 4y^2 = z^2,$$
заключенной между двумя эллипсоидами
$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 1 \text{ и } x^2 + 4y^2 + z^2 = 9.$$

Указание. Используйте тот же прием, который был применен при решении задачи 253 (вспомните формулу для площади эллипса).

ОТВЕТЫ

5. $x+4y \geqslant 5$. **6.** $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 1$. **7.** $x \geqslant 4$ или $x \leqslant 2$; $y \geqslant 0$ или $y \leqslant -1$. **8.** $y \geqslant 2x^2,\ y \neq 0$. **9.** $|x| \leqslant 4,\ |y| \leqslant 5$. **10.** $x \neq y$. **11.** $y > x-6,\ y \neq 0$. **12.** $x^2+y^2+z^2 < 9$. **13.** $|x| < 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 4$. **14.** $z \neq 2$. **15.** $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{2} \leqslant 1$. **16.** $-\sqrt{3}$; $-\frac{\sqrt{6}}{6}$. **17.** $\sqrt{3}$; $\sqrt{\frac{7}{2}}$. **18.** Определена и непрерывна на всей плоскости. **19.** Имеет разрыв в начале координат (не определена в начале координат и стремится к бесконечности при любом способе приближения к нему). **20.** Определена на всей плоскости и имеет разрыв в начале координат (не существует предела функции в начале координат). **21.** Определена на всей плоскости за исключением координатных осей; имеет разрывы во всех точках обеих координатных осей (стремится к бесконечности при любом способе приближения к точкам оси Ox или оси Oy). **22.** Определена на всей плоскости за исключением прямой $y=x$; разрывы сплошь заполняют эту прямую (функция стремится к бесконечности при любом способе приближения к прямой $y=x$).

47. $15x^2+\frac{24}{y^4}$; $-\frac{96}{y^5}$, $30x$; 0. **48.** $2y(2y-1)\,x^{2y-2}$;

$$2x^{2y-1}+4y\ln x\cdot x^{2y-1};\ \mathbf{49.}\ -\frac{yx^{\frac{y}{z}-1}}{z^2}\cdot\left(1+\frac{y\ln x}{z}\right);$$

$$-\frac{x^{\frac{y}{z}-1}}{z^2}\left(1+\frac{3y\ln x}{z}+\frac{y^2\ln^2 x}{z^2}\right);\ \frac{\ln^3 x}{z^3}\cdot x^{\frac{y}{z}}.\ \mathbf{50.}\ 5760\,xy^{-7}z^{-7}.$$

61. $\left(24xy-\frac{60x^2}{y}\right)dx^3+3\left(12x^2+\frac{20x^3}{y^2}\right)dx^2\,dy-\frac{30x^4}{y^3}dx\,dy^2+\frac{6x^5}{y^4}\,dy^3$; $\frac{4x^2(3y^2+5x)}{y^2}$. **62.** $-(x\,dy+y\,dx)^3\cos xy-6\,(x\,dy+y\,dx)\sin xy\,dx\,dy$;

$-y^2x\cos xy - 2y\sin xy$. **63.** $336x^5y^8\,dx^3 + 1344x^6y^7\,dx^2\,dy + 1344x^7y^6\,dx^2\,dy + 336x^8y^5\,dy^3$; $448x^7y^6$; **64.** $6\,dx\,dy\,dz$. **65.** $48xy\,dz^3\,dx + 24x^2\,dz^3\,dy + 72yz\,dz^2\,dx^2 + 144xz\,dz^2\,dx\,dy + 72z^2\,dz\,dx^2\,dy$. **66.** $\frac{2y\,dx^2}{zx^3} + \frac{2y\,dz^2}{xz^3} - \frac{2\,dx\,dy}{x^2z} + \frac{2y\,dx\,dz}{x^2z^2} - \frac{2\,dy\,dz}{xz^2}$; $\frac{y}{x^2z^2}$. **67.** $\frac{dz}{dt}(3\,dx + 2\,dy)$; $\frac{d^2z}{dt^2}(3\,dx + 2\,dy)^2$; $t = 3x+2y$.

68. $\frac{dz}{dt}(3x^2\,dx - dy)$; $\frac{d^2z}{dt^2}(3x^2\,dx - dy)^2 + 6\frac{dz}{dt}\cdot x\,dx^2$; $t = x^3 - y$.

69. $\frac{dz}{dt}(x\,dy + y\,dx)$; $\frac{d^2z}{dt^2}(x\,dy + y\,dx)^2 + 2\frac{dz}{dt}\,dx\,dy$; $t = xy$.

70. $\frac{dz}{dt}\cdot\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$; $\frac{d^2z}{dt^2}\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}\right)^2 + 2\frac{dz}{dt}\cdot\frac{y\,dx^2 - x\,dx\,dy}{x^3}$; $t = \frac{y}{x}$. **71.** $\frac{dz}{dt}\cdot\frac{2xy\,dx - x^2dy}{y^2}$; $\frac{d^2z}{dt^2}\left(\frac{2xy\,dx - x^2\,dy}{y^2}\right)^2 + 2\frac{dz}{dt}\cdot\frac{y^2dx^2 - 2xy\,dx\,dy + x^2dy^2}{y^3}$; $t = \frac{x^2}{y}$. **72.** $\frac{\partial z}{\partial x}(ds + dt) + \frac{\partial z}{\partial y}(ds - dt)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(ds + dt)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(\partial s^2 - \partial t^2) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(ds - \partial t)^2$.

73. $\left(2t\frac{\partial z}{\partial x} + 3t^2\frac{\partial z}{\partial y}\right)\partial t$; $\left(4t^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 12t^3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + 9t^4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial z}{\partial x} + 6t\frac{\partial z}{\partial y}\right)dt^2$. **74.** $\left(2st^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2s\frac{\partial z}{\partial y}\right)ds + \left(2ts^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2t\frac{\partial z}{\partial y}\right)dt$; $\left(2t^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} + 4s^2t^4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8s^2t^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + 4s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)ds^2 + 2\left(4st\frac{\partial z}{\partial x} + 4s^3t^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4s^3t\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + 4st^3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + 4st\frac{\partial^2 z}{\partial y}\right)ds\,dt + \left(2s^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} + 4t^2s^4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8t^2s^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + 4t^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dt^2$. **75.** 0,0005. **76.** 0,97.

77. 1,979. **78.** 0,04 *м*^{3}. **79.** Погрешность меньше 4,5 *см*^{2}. **85.** $\frac{ay - x}{y^2 - ax}$.

86. $\frac{3x^2 - y^3}{3y^2x - 4y^3 - 1}$. **87.** $\frac{2y^2 + 2}{y^2 + 2}$. **88.** $\frac{\sqrt{y}(1+y)(2x+y^3)}{1 - 3xy^2\sqrt{y}(1+y)}$.

89. $\frac{2y - 8xy}{y - 2x + 4x^2}$. **90.** $\frac{y\cos x + \sin(x - y)}{\sin(x - y) - \sin x}$. **91.** $\frac{35x^4y^2 - y^3 - 8}{3y^2x - 14x^5y}$.

92. $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$. **93.** $1 + 4e + 2e^2$. **94.** 1; 8. **95.** $\frac{z}{1 - z}\operatorname{tg}(x + y)(\partial x + \partial y)$.

96. $\frac{2 - x}{z + 1}dx - \frac{2y}{z + 1}dy$. **97.** $\frac{\cos y - z\sin x}{y\sin z - \cos x}dx + \frac{\cos z - x\sin y}{y\sin z - \cos x}dy$.

99. $\frac{4}{15}d(x^2+dy^2)$. **100.** $-\frac{5}{18}$; $\frac{1}{18}$. **101.** $-\frac{6}{25}dx^2$. **102.** $1; -\frac{2}{3}; 0; -\frac{2}{3}$.

103. $-\frac{4x}{5y}$; $-\frac{20y^2+16x^2}{25y^3}$; $\frac{x}{5z}$; $\frac{5z^2-x^2}{25z^3}$. **104.** -1; $-\frac{4}{5}$; 0; $\frac{4}{5}$.

105. $\frac{17}{22}$; $-\frac{10}{11}$. **114.** Максимум в $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ **115.** Минимум в $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$. **116.** Минимум в $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$. **117.** Максимум в (a, b). **118.** Минимум в $\left(\frac{1}{2}, -3\right)$. **119.** Экстремумов нет. **120.** Наибольшее значение $z=17$ в $(1,1)$ и в $(0,1)$; наименьшее значение $z=-\frac{17}{4}$ в $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

121. Наибольшее значение $z=128$ в $(4,4)$; наименьшее значение $z=-4$ в $(0,0)$. **122.** Наибольшее значение $z=-1$ в $(-1,1)$; наименьшее значение $z=-11$ в $(-1, 1)$. **123.** Наибольшее значение $z=8$ в $(2, 0)$; наименьшее значение $z=-\frac{1}{16}$ в $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

124. Наибольшее значение $z=\frac{2}{9}$ в $\left(1, \frac{4}{3}\right)$; наименьшее значение $z=0$ на всей границе. **125.** Наибольшее значение $z=\frac{2}{9}$ в $\left(1, \frac{4}{3}\right)$; наименьшее значение $z=-6$ в $(3, 4)$. **126.** Наибольшее значение $z=1$ в $(1, 1)$; наименьшее значение $z=-\frac{1}{64}$ в $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. **127.** Наибольшее значение $z=3$ в $(1, 0)$ и $(0, 1)$; наименьшее значение $z=\frac{4}{3}$ в $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. **128.** Наибольшее значение $z=1$ в $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$ и $(\pi; \pi)$; наименьшее значение $z=-\frac{1}{8}$ в $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ и $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$

129. Куб. **130.** Куб. **131.** $x=y=z=\frac{a}{3}$. **132.** Равносторонний треугольник. **133.** Стороны треугольника равны $a\sqrt{2}$ и $b\sqrt{2}$. **134.** Все множители равны между собой. **135.** $\left(\frac{21}{12}, \frac{27}{12}, 2\right)$. **136.** Тетраэдр.

137. $C\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$. **138.** $\left(\frac{25}{\sqrt{41}}, \frac{8}{\sqrt{41}}\right)$, $\left(-\frac{25}{\sqrt{41}}, -\frac{8}{\sqrt{41}}\right)$.

139. $\left(-\frac{5}{9}, -\frac{1}{9}\right)$. **145.** $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{4x}} f(x,y)\,dy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}}^4 f(x,y)\,dx.$

146. $\int\limits_{-2}^{6} dx \int\limits_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x,y)\,dy = \int\limits_{-7}^{1} dy \int\limits_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x,y)\,dx.$

147. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^4 f(x,y)\,dy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx.$

148. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)\,dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy +$

$+ \int\limits_1^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)\,dy.$ **149.** $\int\limits_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} dx \int\limits_x^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy =$

$$= \int\limits_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} dy \int\limits_0^y f(x,y)\,dx + \int\limits_{\frac{3}{\sqrt{2}}}^{3} dy \int\limits_0^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

150. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_y^{y+2} f(x,y)\,dx = \int\limits_1^2 dx \int\limits_1^x f(x,y)\,dy +$

$+ \int\limits_2^3 dx \int\limits_1^2 f(x,y)\,dy + \int\limits_3^4 dx \int\limits_{x-2}^2 f(x,y)\,dy.$ **151.** $\int\limits_1^3 dx \int\limits_x^{4x} f(x,y)\,dy =$

$$= \int\limits_1^3 dy \int\limits_1^y f(x,y)\,dx + \int\limits_3^4 dy \int\limits_1^3 f(x,y)\,dx + \int\limits_4^{12} dy \int\limits_{\frac{y}{4}}^3 f(x,y)\,dx.$$

152. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dx.$ **153.** $\int\limits_3^7 dy \int\limits_{\frac{9}{y}}^3 f(x,y)\,dx + \int\limits_7^9 dy \int\limits_{\frac{9}{y}}^{10-y} f(x,y)\,dx.$

154. $\int\limits_{-3}^0 dx \int\limits_{-x}^3 f(x,y)\,dy + \int\limits_0^3 dx \int\limits_x^3 f(x,y)\,dy.$

155. $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int\limits_{-x}^{y} f(x, y)\, dy + \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy.$

156. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{3\sqrt{x}} f(x, y)\, dy.$ 161. $\frac{197}{630}$. 162. $\frac{7}{8}$. 163. -2.

164. 24π. 170. $\frac{2\pi R^3}{3} - \frac{8}{9}R^3$. 171. 4π. 172. 2. 173. $\frac{40}{3}$.

174. $\frac{40}{3}$. 175. $\frac{1}{12}$. 176. $\frac{16}{3}R^3$. 177. $\frac{128}{21}$. 178. $\frac{81}{4}$. 179. $\frac{3\pi}{32}$.

180. $\frac{35}{3}$. 181. $\frac{189}{16}$. 182. $\frac{\pi}{2}$. 183. $\frac{16}{9}$. 184. $\frac{\pi}{6}$. 185. $\frac{3^7 \cdot \pi}{32}$.

186. 39π. 187. $\frac{243\pi}{16}$. 188. $\frac{5\pi}{2}$. 193. $3\ln\frac{5}{2}$. 194. $\frac{112 - 24\sqrt{3}}{81}$

195. $\frac{35}{4}$. 196. $\frac{3}{8}$. 197. $\frac{7\pi\sqrt{2}}{2^{14}}$. 198. $\frac{9\pi\sqrt{3}}{2^8}$. 199. $\frac{2}{9}\pi + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

200. $\frac{27\pi}{2\sqrt{5}}$. 204. $8\pi(2 - \sqrt{3})$. 205. $2\pi - 8\sqrt{2} + 8$.

206. $4R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$. 207. $2\pi R^2$. 208. $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{8} - 1)$.

209. $2a^2\pi\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$. 210. $\frac{9\pi\sqrt{2}}{2}$. 211. $\frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3} - 1)$

212. $\frac{56\sqrt{2}}{3}$. 217. $\left(1, \frac{12}{5}\right)$. 218. $\left(\frac{23}{50}; \frac{2}{5}\right)$.

219. $\left(\frac{13}{8}, \frac{39}{10}\right)$ (ордината вычислена приближенно).

220. 1. $\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right)$; 2. $\left(\frac{7}{10}, 0, 1\right)$, 3. $\left(\frac{6}{5}, 0, \frac{3}{10}\right)$

(некоторые координаты вычислены приближенно).

221. $m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3}\right)$. 222. $\frac{4}{3}a^2$. 223. $2\pi r(R - r)$.

224. $\frac{\pi R^2 H^2}{4}$. 233. а) 1; б) 1. 234. $16\sqrt[3]{2} - 1$. 235. 4.

236. $\frac{\pi ab(4 - a^2)}{16}$. 237. $\frac{9}{2}\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} - \frac{7}{2}$. 238. $\frac{x^2 - y^2}{y^3} + C$.

239. $x^2\sqrt{3-y}+8yx\sqrt{y}-2x+C$. **240.** $8x^3\sin 2y-$ $-\dfrac{4\sqrt{y^2+1}}{x+1}-5y^2+C$. **241.** Не является полным дифференциалом. **242.** $5x^2y-\dfrac{\sqrt{y}}{(x-1)^3}+C$. **243.** $\dfrac{e^{xy}}{x^2}+C$. **244.** $\dfrac{3\pi a^2}{8}$.

245. $\dfrac{1}{1260}$. **246.** $\dfrac{1}{60}$. **247.** FR. **248.** а) $\dfrac{4}{3}$; б) $\dfrac{17}{12}$. **249.** 0.

250. $\dfrac{k\sqrt{14}}{3}\ln 2$, где k — коэффициент пропорциональности.

256. 9. **257.** $197\dfrac{1}{3}$. **258.** $\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$. **259.** $\dfrac{\pi}{3}(6\sqrt{3}-5)$.

260. $\dfrac{2\pi R^3hk}{3}$. **261.** Центр тяжести расположен на оси конуса на одной четверти высоты от основания. **262.** $\dfrac{16}{9}a^2$. **263.** $\dfrac{65\pi}{8}$.

264. $\dfrac{4\pi}{15}(R^5-r^5)$. **266.** $\dfrac{a^3}{360}$. **267.** $\dfrac{4\pi a^3}{21}$. **268.** $13\pi(2-\sqrt{2})$.

СОДЕРЖАНИЕ

Ирина Александровна Егорова

ЗАДАЧНИК—ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Редактор *В. Г. Долгополов*

Технический редактор *Т. В. Карпова*

Корректор *М. В. Голубева*

Сдано в набор 24/VIII 1961 г. Подписано к печати 4/I 1962 г. $84 \times 108^1/_{32}$. Печ. л. 6,5 (5,33). Уч.-изд. л. 4,98. Тираж 3[illegible] тыс. экз. Заказ 2878

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Полиграфкомбинат Саратовского совнархоза г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Цена 15 коп.