АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН

СОБРАНИЕ НАУЧНЫХ ТРУДОВ

В ЧЕТЫРЕХ ТОМАХ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

И. Е. ТАММА,

Я. А. СМОРОДИНСКОГО,

Б. Г. КУЗНЕЦОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1966

АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН

СОБРАНИЕ НАУЧНЫХ ТРУДОВ

II

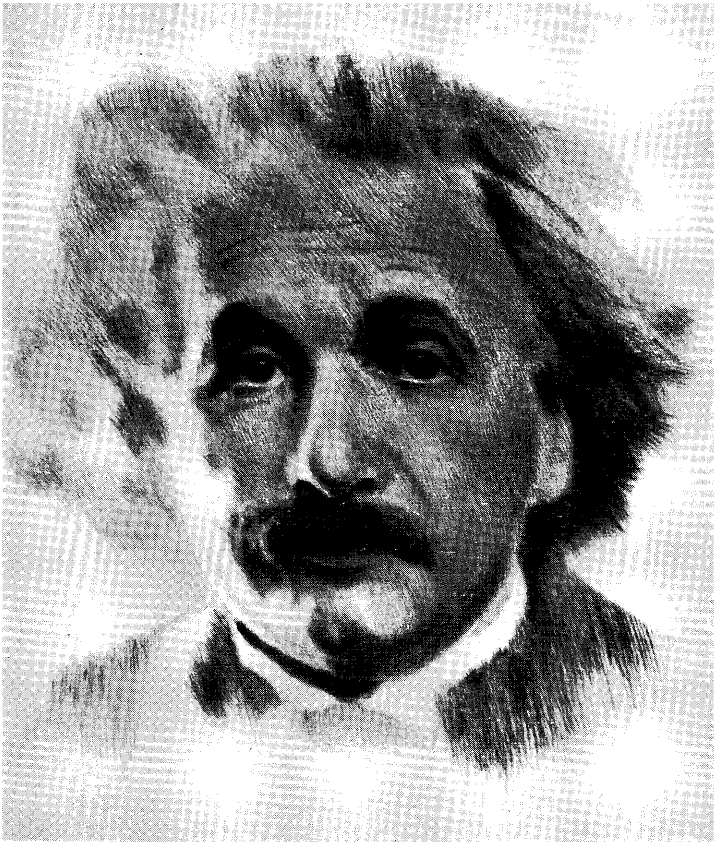
РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1921–1955

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1966

2—3—2

Подписное издание



A. Einstein

60

СУЩНОСТЬ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

Лекция I

ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ В ДОРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ФИЗИКЕ

Теория относительности теснейшим образом связана с учением о пространстве и времени. Я начну поэтому с краткого исследования происхождения наших представлений о пространстве и времени, хотя отдаю себе отчет в том, что при этом касаюсь спорного предмета. Целью всякой науки, будь то естествознание или психология, является согласование между собой наших ощущений и сведение их в логическую систему. Как связаны наши привычные представления о пространстве и времени с характером наших ощущений?

Ощущения человека предстают перед нами как некоторая последовательность событий; в этой последовательности отдельные события, возникающие в нашей памяти, представляются нам упорядоченными критериями «раньше» и «позже», которые не удается подвергнуть дальнейшему анализу. Таким образом, для индивидуума существует «свое», или субъективное время («Ich-Zeit»). Само по себе оно не поддается измерению. Я могу, конечно, сопоставить события с числами таким образом, чтобы более позднему событию соответствовало большее число, но характер такого сопоставления остается совершенно произвольным. Я могу установить такое соответствие при помощи часов, сравнивая порядок событий, устанавливаемых часами, с порядком в данной последовательности событий. Под часами мы понимаем некоторый объект, воспроизводящий последователь-

---

* *The meaning of relativity*. Princeton Univ. Press. Princeton, N. Y., 1921. (Четыре лекции [Stafford Little Lectures], прочитанные Эйнштейном в Принстонском университете в мае 1921 г. Чтобы не нарушать хронологический порядок, приложения, добавленные при последующих изданиях, помещены ниже, среди современных им работ. (Статьи 126, 141 и 146).— *Прим. ред.*).

ность событий, которые можно пересчитать, и обладающий другими свойствами, о которых будет говориться ниже.

При помощи речи различные люди могут до некоторой степени сравнивать свои ощущения. При этом выясняется, что некоторые чувственные восприятия различных индивидуумов находятся в соответствии друг с другом, тогда как для других чувственных восприятий такого соответствия установить нельзя. Мы привыкли считать реальными такие чувственные восприятия, которые совпадают у различных индивидуумов и которые являются поэтому до известной степени внеличными. С такими чувственными восприятиями имеют дело естественные науки и, в частности, наиболее фундаментальная из них — физика. Представление о физическом теле, в частности о твердом теле, является относительно устойчивым комплексом таких чувственных восприятий. Часы — тоже тело или система в указанном смысле, но они обладают тем дополнительным свойством, что последовательность отсчитываемых ими событий состоит из элементов, которые можно рассматривать как равные.

Наши понятия и системы понятий оправданы лишь постольку, поскольку они служат для выражения комплексов наших ощущений; вне этого они неправомерны. Я убежден, что философы оказали пагубное влияние на развитие научной мысли, перенеся некоторые фундаментальные понятия из области опыта, где они находятся под нашим контролем, на недосягаемые высоты априорности. Ибо, если бы даже оказалось, что мир идей нельзя вывести из опыта логическим путем, а что в определенных пределах этот мир есть порождение человеческого разума, без которого никакая наука невозможна, все же он столь же мало был бы независим от природы наших ощущений, как одежда — от формы человеческого тела. Это в особенности справедливо по отношению к понятиям пространства и времени. Под давлением фактов физики были вынуждены низвергнуть их с Олимпа априорности, чтобы довести их до состояния, пригодного для использования.

Мы подходим теперь к нашему пониманию пространства и суждения о нем. Здесь также важно обратить особое внимание на отношение опыта к нашим понятиям. Мне кажется, что Пуанкаре ясно видел перед собой истину, когда писал свою книгу «Наука и гипотеза» [1]. Среди всех изменений, которые мы можем обнаружить в твердом теле, выделяются своей простотой те, которые можно произвести обратимым образом при помощи произвольного движения тела; Пуанкаре называет их изменениями положения. При помощи простых изменений положения мы можем привести два тела в соприкосновение. Теоремы конгруентности, имеющие фунда-

[1] А. Пуанкаре. Наука и гипотеза. СПб., 1906. Перевод со 2-го, исправленного французского издания.— *Прим. ред.*

ментальное значение в геометрии, выражают законы, управляющие этими изменениями положения. Для понятия пространства, по-видимому, существенно следующее: прикладывая тела B, C,... к телу A, мы можем образовывать новые тела; мы говорим, что мы *продолжаем* тело A. Тело A можно продолжить так, что оно соприкоснется с любым другим телом X. Совокупность всех продолжений тела A мы можем назвать «пространством тела A». Тогда справедливо утверждение, что все тела находятся в «пространстве (произвольно выбранного) тела A». В этом смысле мы не вправе говорить о пространстве вообще, а только о «пространстве, относящемся к телу A». Земная кора играет настолько важную роль в нашей повседневной жизни при определении относительных положений тел, что это привело к абстрактному понятию пространства, которое, конечно, не выдерживает критики. Чтобы освободиться от этой фатальной ошибки, мы будем говорить только о «телах отсчета» или «пространстве отсчета». Как мы увидим дальше, лишь в общей теории относительности потребуется уточнение этих понятий.

Я не стану подробно останавливаться на свойствах пространства отсчета, которые приводят нас к пониманию точки как элемента пространства, а пространства — как континуума. Я не буду также пытаться глубже анализировать те свойства пространства, которые оправдывают представление о непрерывных последовательностях точек, или линиях. Если считать эти понятия и их связь с существующими твердыми телами заданными, то легко выразить, чтó мы подразумеваем под трехмерностью пространства. Каждой точке можно поставить в соответствие три числа x_1, x_2, x_3 (координаты) таким образом, чтобы это соответствие было взаимно однозначным, и x_1, x_2 и x_3 менялись бы непрерывно, когда точка пробегает непрерывную последовательность точек (линию).

В дорелятивистской физике считалось, что законы ориентации абсолютно твердых тел находятся в соответствии с эвклидовой геометрией. Смысл этого можно выразить следующим образом. Две точки, отмеченные на твердом теле, определяют *интервал*. Такой интервал можно в нашем пространстве отсчета ориентировать в состоянии покоя множеством способов. Если теперь возможно сопоставить точки пространства с координатами x_1, x_2, x_3 так, чтобы разности координат Δx_1, Δx_2, Δx_3 двух концов интервала образовали одинаковую сумму квадратов

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 \tag{1}$$

при любой ориентации интервала, то пространство отсчета называется эвклидовым, а координаты — декартовыми [2]. В действительности доста-

[2] Это соотношение должно выполняться при произвольном выборе начала координат и направления интервала (т. е. значения отношений $\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3$).

точно, чтобы это допущение было справедливо в предельном случае бесконечно малого интервала. В высказанном допущении содержится нечто более общее и фундаментальное по своему значению; на это мы должны обратить внимание читателя ввиду особой важности вопроса. Во-первых, предполагается, что абсолютно твердое тело можно перемещать произвольно. Во-вторых, принимается, что поведение абсолютно твердого тела по отношению к поворотам не зависит от вещества тела и изменений его положения в том смысле, что если два интервала однажды могли быть совмещены, то они всегда и всюду могут быть совмещены снова. Оба эти предположения, имеющие фундаментальное значение для геометрии и особенно для физических измерений, естественно, вытекают из опыта. В общей теории относительности достаточно предположить их справедливость для тел и пространств отсчета, бесконечно малых по сравнению с астрономическими размерами.

Величину s мы называем длиной интервала. Для однозначного определения этой величины необходимо зафиксировать произвольно длину какого-либо определенного интервала; например, мы можем положить ее равной 1 (единица длины). Тогда можно определить длины всех остальных интервалов. Если мы предположим, что x_ν линейно зависят от некоторого параметра λ:

$$x_\nu = a_\nu + \lambda b_\nu,$$

то получим линию, которая обладает всеми свойствами прямой линии эвклидовой геометрии. В частности, легко видеть, что, откладывая n раз, интервал s вдоль прямой линии, мы получаем интервал длиной $n \cdot s$. Длина, таким образом, означает результат измерения, выполненного вдоль прямой линии при помощи единичного измерительного стержня. Как будет видно из дальнейшего, понятие длины в той же мере не зависит от системы координат, как и понятие прямой линии.

Мы подходим теперь к цепи рассуждений, играющих похожие роли как в специальной, так и в общей теории относительности. Поставим вопрос: существуют ли, кроме декартовых координат, которыми мы пользовались, другие эквивалентные системы координат? Интервал имеет физический смысл независимо от выбора координат; то же верно и относительно сферической поверхности, которую можно получить как геометрическое место концов равных интервалов, отложенных от некоторой произвольной точки нашего пространства отсчета. Если x_ν и x'_ν ($\nu = 1, 2, 3$) являются декартовыми координатами в нашем пространстве отсчета, то сферическая поверхность будет задаваться в этих двух системах координат уравнениями:

$$\sum \Delta x_\nu^2 = \text{const}, \tag{2}$$

$$\sum \Delta x_\nu'^2 = \text{const}. \tag{2a}$$

Как должны выражаться x'_ν через x_ν, чтобы уравнения (2) и (2а) были эквивалентны? Рассматривая x'_ν как функции от x_ν, мы можем записать, согласно теореме Тейлора, для малых значений Δx_ν:

$$\Delta x'_\nu = \sum_\alpha \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\alpha} \Delta x_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'_\nu}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} \Delta x_\alpha \Delta x_\beta + \ldots$$

Если подставим это соотношение в (2а) и сравним с (1), то увидим, что x'_ν должны быть линейными функциями от x_ν. Если, поэтому, положить

$$x'_\nu = a_\nu + \sum_\alpha b_{\nu\alpha} x_\alpha \tag{3}$$

или

$$\Delta x'_\nu = \sum_\alpha b_{\nu\alpha} \Delta x_\alpha, \tag{3а}$$

то эквивалентность уравнений (2) и (2а) выразится в форме условия:

$$\sum \Delta x'^2_\nu = \lambda \sum \Delta x^2_\nu \qquad (\lambda \text{ не зависит от } \Delta x_\nu). \tag{2б}$$

Отсюда следует, что величина λ должна быть постоянной. Если мы положим $\lambda = 1$, то (2б) и (3а) приводят к условиям

$$\sum_\nu b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

где $\delta_{\alpha\beta} = 1$, если $\alpha = \beta$ и $\delta_{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha \neq \beta$. Условия (4) называются условиями ортогональности, а преобразования (3) и (4) — линейными ортогональными преобразованиями. Если мы потребуем, чтобы $s^2 = \Sigma\, \Delta x^2_\nu$ равнялось квадрату длины во всякой системе координат, и если при измерении каждый раз будем пользоваться одним и тем же единичным масштабом, то λ должно быть равно 1. По этой причине линейные ортогональные преобразования являются единственными, при помощи которых мы можем переходить в нашем пространстве отсчета от одних декартовых координат к другим. Мы видим, что при таких преобразованиях уравнения прямой переходят также в уравнения прямой. Обращая равенства (3а) путем умножения обеих частей его на $b_{\nu\beta}$ и суммирования по всем ν, получаем

$$\sum_\nu b_{\nu\beta} \Delta x'_\nu = \sum_{\nu\alpha} b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta} \Delta x_\alpha = \sum_\alpha \delta_{\alpha\beta} \Delta x_\alpha = \Delta x_\beta. \tag{5}$$

Те же самые коэффициенты b определяют также обратную подстановку Δx_ν. Геометрически $b_{\nu\alpha}$ представляет собой косинус угла между осями x'_ν и x_α.

Подводя итог, мы можем сказать, что в эвклидовой геометрии существуют (в данном пространстве отсчета) избранные системы координат, а именно: декартовы системы, которые переходят одна в другую при линейных ортогональных преобразованиях. Расстояние s между двумя точками нашего пространства отсчета, измеренное при помощи измерительного стержня, выражается в таких координатах особенно просто. Всю геометрию можно построить на основе понятия расстояния. В нашем изложении геометрия связана с реальными предметами (твердыми телами) и ее теоремы, справедливость которых можно доказать или опровергнуть, являются утверждениями относительно поведения этих предметов.

Обычно принято изучать геометрию, отвлекаясь от какой-либо связи между ее понятиями и опытом. Есть свои преимущества в выделении вещей чисто логических и независимых от опыта, который по своей природе неполон. Это вполне может удовлетворить чистого математика. Он удовлетворен, если может вывести свои теоремы из аксиом корректно, т. е. без логических ошибок. Вопрос о том, справедлива ли эвклидова геометрия или нет, его не касается. Но для наших целей необходимо связать основные понятия геометрии с объектами природы; без такой связи геометрия не имеет для физика никакой цены. Физика интересует вопрос, верны теоремы геометрии или нет? То, что эвклидова геометрия с этой точки зрения содержит нечто большее, чем простые выводы, полученные из определений логическим путем, видно из следующего простого рассуждения.

Между n точками пространства существуют $\frac{n(n-1)}{2}$ расстояний $s_{\mu\nu}$; $s_{\mu\nu}$ и $3n$ координат связаны соотношениями

$$s_{\mu\nu}^2 = (x_{1(\mu)} - x_{1(\nu)})^2 + (x_{2(\mu)} - x_{2(\nu)})^2 + \dots$$

Из этих $\frac{n(n-1)}{2}$ соотношений можно исключить $3n$ координат, и тогда для $s_{\mu\nu}$ останется, по крайней мере, $\frac{n(n-1)}{2} - 3n$ соотношений [3]. Поскольку $s_{\mu\nu}$ — измеримые величины и по определению не зависят друг от друга, эти соотношения между величинами $s_{\mu\nu}$ не являются необходимыми априори.

Из предыдущего видно, что преобразования (3), (4) имеют фундаментальное значение в эвклидовой геометрии, определяя переход от одной декартовой системы координат к другой. Декартовы координаты характеризуются тем свойством, что с их помощью измеримое расстояние между двумя точками s выражается соотношением

$$s^2 = \sum \Delta x_\nu^2.$$

[3] На самом деле останется $\frac{n(n-1)}{2} - 3n + 6$ соотношений.

Если $K_{(x_\nu)}$ и $K'_{(x'_\nu)}$ — две системы декартовых координат, то

$$\sum \Delta x_\nu^2 = \sum \Delta x_\nu'^2.$$

Правая часть этого соотношения тождественно равна левой в силу уравнений линейного ортогонального преобразования; при этом правая часть отличается от левой лишь тем, что x_ν заменены на x'_ν. Это обстоятельство выражается утверждением, что $\sum \Delta x_\nu^2$ есть инвариант по отношению к линейным ортогональным преобразованиям. Очевидно, что в эвклидовой геометрии имеют объективное значение, не зависящее от выбора декартовых координат, те и только те величины, которые можно выразить как инварианты по отношению к линейным ортогональным преобразованиям. В этом заключается причина того, что теория инвариантов, которая имеет дело с законами, управляющими видом инвариантов, имеет такое значение в аналитической геометрии.

В качестве другого примера геометрического инварианта рассмотрим объем. Он выражается формулой

$$V = \iiint dx_1 dx_2 dx_3.$$

Пользуясь теоремой Якоби, можно написать

$$\iiint dx'_1 dx'_2 dx'_3 = \iiint \frac{\partial (x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

Подынтегральное выражение в последнем интеграле есть функциональный определитель от x'_ν по x_ν, равный, согласно (3), определителю $|b_{\mu\nu}|$ из коэффициентов преобразования $b_{\nu\alpha}$. Если мы образуем определитель из $\delta_{\mu\alpha}$, то из соотношения (4), в силу теоремы об умножении определителей, получим

$$1 = |\delta_{\alpha\beta}| = \left|\sum_\nu b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta}\right| = |b_{\mu\nu}|^2; \qquad |b_{\mu\nu}| = \pm 1. \tag{6}$$

Если мы ограничимся преобразованиями с определителем, равным $+1$ (а только такие и возникают при непрерывных изменениях систем координат) [4], то V — инвариант.

---

[4] Существует, таким образом, два типа декартовых систем координат — так называемые «правые» и «левые» системы. Разница между ними хорошо знакома каждому физику и инженеру. Интересно отметить, что геометрически определить можно только различие между этими двумя типами систем, а не каждую из них саму по себе.

Инварианты, однако, не являются единственным средством, с помощью которого можно выразить независимость от частного выбора декартовых координат. Другие способы выражения дают векторы и тензоры. Попытаемся выразить тот факт, что точка с текущими координатами x_ν лежит на прямой. Мы имеем

$$x_\nu - A_\nu = \lambda B_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

Не ограничивая общности, можно положить

$$\sum B_\nu^2 = 1.$$

Если мы умножим эти уравнения на $b_{\beta\nu}$ [ср. (3а) и (5)] и просуммируем по всем ν, то получим

$$x'_\beta - A'_\beta = \lambda B'_\beta,$$

где

$$B'_\beta = \sum_\nu b_{\beta\nu} B_\nu; \qquad A'_\beta = \sum_\nu b_{\beta\nu} A_\nu.$$

Это уравнения прямой линии в другой декартовой системе K'. Форма у них та же, что и у уравнений в исходной системе координат. Очевидно поэтому, что прямые линии имеют смысл, не зависящий от системы координат. Формально это связано с тем, что величины $(x_\nu - A_\nu) - \lambda B_\nu$ преобразуются как компоненты интервала, Δx_ν. Совокупность трех величин, определенных в каждой системе декартовых координат и преобразующихся как компоненты интервала, называется вектором. Если три компоненты вектора обращаются в нуль в одной системе декартовых координат, то они будут равны нулю и во всех прочих, так как уравнения преобразований однородны. Мы можем, таким образом, придать смысл понятию вектора без ссылок на геометрические образы. Поведение уравнений прямой линии можно выразить утверждением, что они ковариантны по отношению к линейному ортогональному преобразованию.

Покажем теперь кратко, что существуют геометрические объекты, приводящие к понятию тензора. Пусть P_0 — центр поверхности второго порядка, P — любая точка этой поверхности, а ξ_ν — проекции интервала P_0P на оси координат. Тогда уравнение поверхности будет иметь вид

$$\sum_{\mu, \nu} a_{\mu\nu} \xi_\mu \xi_\nu = 1.$$

В этом и аналогичных случаях мы будем опускать знак суммирования и подразумевать, что суммирование производится по всем индексам, повторяющимся дважды. Уравнение поверхности тогда запишется в виде

$$a_{\mu\nu} \xi_\mu \xi_\nu = 1.$$

Числа $a_{\mu\nu}$ полностью определяют поверхность при заданном расположении центра по отношению к выбранной системе координат. Из известного закона преобразования (3а) величин ξ_ν при линейных ортогональных преобразованиях мы легко найдем закон преобразования для $a_{\mu\nu}$[5]:

$$a'_{\sigma\tau} = b_{\sigma\mu}b_{\tau\nu}a_{\mu\nu}.$$

Это преобразование является однородным и первой степени по $a_{\mu\nu}$. На этом основании $a_{\mu\nu}$ называются компонентами тензора второго ранга (последнее — благодаря двум индексам). Если все компоненты $a_{\mu\nu}$ тензора исчезают в какой-либо декартовой системе координат, то они исчезают и во всех других декартовых системах. Тензором (a) описываются форма и положение поверхности второго порядка.

Можно определить также аналитические тензоры высшего ранга (т. е. с большим числом индексов). Можно и это даже удобно рассматривать векторы как тензоры первого ранга, а инварианты (скаляры) как тензоры нулевого ранга. В этом отношении задачу теории инвариантов можно сформулировать так: по каким правилам можно из данных тензоров образовать новые? Мы сейчас рассмотрим эти правила, чтобы иметь возможность применять их в дальнейшем. Сначала мы будем иметь дело только со свойствами тензоров по отношению к переходам от одной декартовой системы к другой в том же пространстве отсчета путем линейных ортогональных преобразований. Поскольку эти правила совершенно не зависят от числа измерений n, сначала мы оставим это число неопределенным.

Определение. Если в n-мерном пространстве отсчета фигура определяется по отношению к каждой декартовой системе координат n^α числами $A_{\mu\nu\rho\ldots}$ (α — число индексов), то эти числа являются компонентами тензора ранга α, если они преобразуются по закону

$$A'_{\mu'\nu'\rho'\ldots} = b_{\mu'\mu}b_{\nu'\nu}b_{\rho'\rho}\ldots A_{\mu\nu\rho\ldots}. \tag{7}$$

Замечание. Из этого определения следует, что величина

$$A_{\mu\nu\rho\ldots}B_\mu C_\nu D_\rho\ldots \tag{8}$$

является инвариантом, если (B), (C), (D)...— векторы. Наоборот, если известно, что выражение (8) остается инвариантом при любом выборе векторов (B), (C) и т. д., то можно сделать вывод о тензорном характере A.

---

[5] Уравнение $a'_{\sigma\tau}\xi'_\sigma\xi'_\tau = 1$ можно, согласно (5), заменить на $a'_{\sigma\tau}b_{\mu\sigma}b_{\nu\tau}\xi_\sigma\xi_\tau = 1$, откуда немедленно следует приведенный результат.

Сложение и вычитание. При сложении и вычитании соответствующих компонент тензоров одинакового ранга получается тензор того же ранга.

$$A_{\mu\nu\rho\ldots} \pm B_{\mu\nu\rho\ldots} = C_{\mu\nu\rho\ldots}\,. \tag{9}$$

Доказательство следует из приведенного выше определения тензора.

Умножение. Из тензора ранга α и тензора ранга β можно составить тензор ранга $\alpha + \beta$, умножая каждую компоненту первого тензора на каждую компоненту второго

$$T_{\mu\nu\rho\ldots\alpha\beta\gamma\ldots} = A_{\mu\nu\rho\ldots} B_{\alpha\beta\gamma\ldots}\,. \tag{10}$$

Свертка. Из тензора ранга α можно получить тензор ранга $\alpha - 2$, полагая какие-либо два из его индексов равными и затем суммируя по ним

$$T_{\rho\ldots} = A_{\mu\mu\rho\ldots} \left(= \sum_{\mu} A_{\mu\mu\rho\ldots}\right). \tag{11}$$

Это вытекает из следующих равенств:

$$A'_{\mu\mu\rho\ldots} = b_{\mu\alpha} b_{\mu\beta} b_{\rho\gamma\ldots} A_{\alpha\beta\gamma\ldots} = \delta_{\alpha\beta} b_{\rho\gamma\ldots} A_{\alpha\beta\gamma\ldots} = b_{\rho\gamma\ldots} A_{\alpha\alpha\gamma\ldots}\,.$$

К этим простым правилам добавляется также образование тензоров путем дифференцирования («расширение»)

$$T_{\mu\nu\rho\ldots\alpha} = \frac{\partial A_{\mu\nu\rho\ldots}}{\partial x_\alpha}\,. \tag{12}$$

Согласно этим правилам, можно из одних тензоров образовывать новые тензоры относительно линейных ортогональных преобразований.

Свойства симметрии тензоров. Тензоры называются симметричными или антисимметричными по отношению к паре их индексов μ и ν, если обе компоненты, которые получаются при перестановке μ и ν, соответственно равны друг другу или отличаются только знаком.

Условие симметрии: $A_{\mu\nu\rho} = A_{\nu\mu\rho}$.

Условие антисимметрии: $A_{\mu\nu\rho} = -A_{\nu\mu\rho}$.

Теорема. Свойство симметрии или антисимметрии не зависит от выбора координат, и в этом его значение. Доказательство следует из равенства, определяющего тензор.

Частные случаи тензоров.

I. Величины $\delta_{\rho\sigma}$, определяемые равенством (4), являются компонентами тензора (фундаментальный тензор).

Для доказательства заменим $A_{\alpha\beta}$ в правой части уравнения преобразования $A'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha} b_{\nu\beta} A_{\alpha\beta}$ на величины $\delta_{\alpha\beta}$ (равные единице, если $\alpha = \beta$, или нулю, если $\alpha \neq \beta$) мы получим

$$A'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha} b_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\nu}.$$

Справедливость последнего равенства становится очевидной, если применить формулу (4) к обратной подстановке (5).

II. Существует тензор $(\delta_{\mu\nu\rho\ldots})$, антисимметричный по всем парам индексов, ранг которого равен числу измерений n, а компоненты равны $+1$ или -1 в зависимости от того, получается ли $\mu\nu\rho\ldots$ четной или нечетной подстановкой из 123...

Доказательство следует из установленной выше теоремы, согласно которой $|b_{\rho\sigma}| = 1$.

Эти несколько простых теорем составляют аппарат теории инвариантов, необходимый для построения уравнений дорелятивистской физики и специальной теории относительности.

Мы видели, что в дорелятивистской физике для установления пространственных соотношений требуются тело отсчета или пространство отсчета и вдобавок декартова система координат. Мы можем слить оба эти понятия воедино, представляя себе декартову систему координат как кубическую решетку, образованную из стержней единичной длины. Координаты узловых точек решетки — целые числа. Из основного соотношения

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 \tag{13}$$

следует, что длины всех стержней, составляющих эту пространственную решетку, равны единице. Чтобы установить временны́е соотношения, нужны, кроме того, стандартные часы, расположенные в начале нашей декартовой системы отсчета (решетки). Где бы ни произошло событие, мы можем сопоставить с ним три координаты x_ν и время t, как только мы установили, какое показание часов, находящихся в начале координат, было одновременно с событием. Мы придаем тем самым объективное значение утверждению об одновременности удаленных событий, тогда как прежде мы касались лишь одновременности двух ощущений индивидуума. Определенное таким образом время, во всяком случае, не зависит от положения системы координат в нашем пространстве отсчета и поэтому инвариантно относительно преобразований (3).

В дорелятивистской физике постулируется, что система уравнений, выражающая ее законы, ковариантна по отношению к преобразованиям (3) так же, как и соотношения эвклидовой геометрии. Этим путем выражается изотропность и однородность пространства [6]. Рассмотрим с этой точки зрения некоторые из наиболее важных уравнений физики.

---

[6] Даже если бы в пространстве существовало выделенное направление, законы физики можно было бы сформулировать ковариантно по отношению к преобразованиям (3); но в этом случае такая формулировка была бы неудобной. При наличии выделенного направления в пространстве описание явлений приро-

Уравнения движения материальной точки имеют вид

$$m \frac{d^2x_\nu}{dt^2} = X_\nu, \tag{14}$$

где (dx_ν) — вектор; dt, а следовательно, и $\frac{1}{dt}$ — инвариант, так что $\frac{dx_\nu}{dt}$ — вектор; таким же путем можно показать, что $\frac{d^2x_\nu}{dt^2}$ — вектор. Вообще дифференцирование по времени не меняет тензорных свойств. Поскольку m — инвариант (тензор ранга 0), то $m\frac{d^2x_\nu}{dt^2}$ — вектор, или тензор ранга 1 (по теореме умножения тензоров). Если сила (X_ν) обладает свойствами вектора, то этим же свойством обладает разность $\left(m\frac{d^2x_\nu}{dt^2} - X_\nu\right)$. Уравнения движения пригодны поэтому в любой другой декартовой системе координат в пространстве отсчета. Векторный характер (X_ν) легко обнаружить в случае консервативных сил. Тогда существует потенциальная энергия Φ, зависящая только от взаимных расстояний частиц и потому инвариантная. Векторный характер силы $X_\nu = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}$ здесь следует из нашей общей теоремы о производной от тензора ранга 0.

Умножая на скорость (тензор ранга 1), мы получаем тензорное уравнение

$$\left(m\frac{d^2x_\nu}{dt^2} - X_\nu\right)\frac{dx_\mu}{dt} = 0.$$

После свертки и умножения на скаляр dt мы получим соотношение для кинетической энергии

$$d\left(\frac{mq^2}{2}\right) = X_\nu dx_\nu.$$

Если через ξ_ν обозначены разности координат материальной частицы и фиксированной точки пространства, то ξ_ν обладает свойствами вектора. В силу очевидного соотношения $\frac{d^2x_\nu}{dt^2} = \frac{d^2\xi_\nu}{dt^2}$, уравнения движения частицы могут быть записаны в виде

$$m\frac{d^2\xi_\nu}{dt^2} - X_\nu = 0.$$

ды можно было бы упростить, ориентируя определенным способом систему координат в этом направлении. Вместе с тем, если выделенного направления в пространстве нет, нелогично формулировать законы природы, замалчивая эквивалентность различным образом ориентированных систем координат. Мы снова столкнемся с этой точкой зрения в специальной и общей теориях относительности.

Умножая это уравнение на ξ_μ, мы получаем тензорное уравнение

$$\left(m \frac{d^2\xi_\nu}{dt^2} - X_\nu\right) \xi_\mu = 0.$$

Свертывая этот тензор и усредняя по времени, получаем теорему вириала, на которой, однако, мы не будем останавливаться. Путем замены индексов и последующего вычитания мы приходим после простого преобразования к теореме моментов

$$\frac{d}{dt}\left[m \left(\xi_\mu \frac{d\xi_\nu}{dt} - \xi_\nu \frac{d\xi_\mu}{dt}\right)\right] = \xi_\mu X_\nu - \xi_\nu X_\mu. \qquad (15)$$

Отсюда очевидно, что момент вектора является не вектором, а тензором. В систему уравнений (15), в силу ее антисимметрии, входят не девять, а лишь три независимых уравнения. Возможность замены в трехмерном пространстве антисимметричного тензора второго ранга вектором связана с существованием вектора

$$A_\mu = \frac{1}{2} A_{\sigma\tau} \delta_{\sigma\tau\mu}.$$

Если мы умножим антисимметричный тензор второго ранга на введенный нами выше особый антисимметричный тензор δ и свернем его дважды, то получим вектор, компоненты которого численно равны компонентам тензора. Это так называемые аксиальные векторы, которые при переходе от правой системы координат к левой преобразуются иначе, чем Δx_ν. Рассмотрение антисимметричного тензора второго ранга как трехмерного вектора дает некоторое преимущество в наглядности, но сущность соответствующей величины при этом проявляется не так ясно, как при рассмотрении ее как тензора.

Рассмотрим теперь уравнения движения сплошной среды. Пусть ρ — плотность, u_ν — компоненты скорости, рассматриваемые как функции координат и времени, X_ν — объемные силы на единицу массы и $p_{\nu\sigma}$ — напряжения на поверхности, перпендикулярной к оси σ в направлении возрастания x_ν. Тогда уравнения движения, согласно закону Ньютона, имеют вид

$$\rho \frac{du_\nu}{dt} = - \frac{\partial p_{\nu\sigma}}{\partial x_\sigma} + \rho X_\nu,$$

где $\frac{\partial u_\nu}{\partial t}$ — ускорение частицы, находившейся в момент t в точке с координатами x_ν. Если мы запишем это ускорение с помощью частных производных, то после деления на ρ получим

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial t} + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\sigma} u_\sigma = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{\nu\sigma}}{\partial x_\sigma} + X_\nu. \tag{16}$$

Мы должны показать, что это уравнение выполняется независимо от конкретного выбора декартовой системы координат. Здесь u_ν — вектор, и поэтому $\frac{\partial u_\nu}{\partial t}$ тоже вектор; $\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\sigma}$ — тензор второго ранга, а $\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\sigma} u_\tau$ — тензор третьего ранга. Второй член слева получается сверткой последнего по индексам σ и τ. Векторный характер второго члена справа очевиден. Для того чтобы первый член справа также был вектором, необходимо, чтобы величина $p_{\nu\sigma}$ была тензором. Тогда при помощи дифференцирования и свертки получаем величину $\frac{\partial p_{\nu\sigma}}{\partial x_\sigma}$, которая, таким образом, является вектором и остается таковым после умножения на скаляр $1/\rho$. Тот факт, что $p_{\nu\sigma}$ — тензор и потому преобразуется согласно уравнению

$$p'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha} b_{\nu\beta} p_{\alpha\beta},$$

доказывается в механике интегрированием этого равенства по бесконечно малому тетраэдру. Там доказывается также путем применения теоремы моментов к бесконечно малому параллелепипеду, что $p_{\nu\sigma} = p_{\sigma\nu}$, т. е. что тензор напряжений является симметричным тензором. Из сказанного можно, следуя сформулированным выше правилам, найти, что это равенство ковариантно по отношению к ортогональным преобразованиям в пространстве (вращениям); правила, согласно которым должны преобразовываться величины в этом равенстве, чтобы оно было ковариантным, также становятся очевидными.

Ковариантность уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_\nu)}{\partial x_\nu} = 0 \tag{17}$$

после всего сказанного не требует особых пояснений.

Проверим также ковариантность уравнений, выражающих зависимость компонент напряжения от свойств вещества, и с помощью условия ковариантности выпишем эти уравнения для случая сжимаемой вязкой жидкости. Если пренебречь вязкостью, то давление p будет скаляром, зависящим только от плотности и температуры жидкости. Тензор напряжений тогда, очевидно, равен

$$p\delta_{\mu\nu},$$

где $\delta_{\mu\nu}$ — симметричный тензор специального вида. В случае вязкой жидкости этот член также будет присутствовать, но, кроме него, в выражении для давления будут еще члены, зависящие от пространственных производных скорости u_ν. Мы предположим, что зависимость эта линейна. Поскольку эти члены должны быть симметричными тензорами, в общее выражение может войти только комбинация

$$a\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}+\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}\right)+\beta\delta_{\mu\nu}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

$\left(\text{так как } \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \text{ — скаляр}\right)$. Из физических соображений (отсутствие скольжения) принимается, что в случае симметричного расширения по всем направлениям, т. е. когда

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \text{ и т. д.} = 0,$$

сил трения нет, откуда следует, что $\beta = -\frac{2}{3}a$[7]. Если отлична от нуля только производная $\frac{\partial u_1}{\partial x_3}$, то полагаем $p_{31} = -\eta\frac{\partial u_1}{\partial x_3}$, откуда определяется a. Таким образом, для полного тензора напряжений получается формула

$$p_{\mu\nu}=p\delta_{\mu\nu}-\eta\left[\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}+\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\delta_{\mu\nu}\right]. \tag{18}$$

Из этого примера становится ясным эвристическое значение теории инвариантов, основанной на изотропности пространства (эквивалентности всех направлений).

Рассмотрим, наконец, уравнения Максвелла в той форме, в которой они явились основой электронной теории Лоренца:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial h_3}{\partial x_2}-\frac{\partial h_2}{\partial x_3}&=\frac{1}{c}\frac{\partial e_1}{\partial t}+\frac{1}{c}j_1\\
\frac{\partial h_1}{\partial x_3}-\frac{\partial h_3}{\partial x_1}&=\frac{1}{c}\frac{\partial e_2}{\partial t}+\frac{1}{c}j_2\\
\dots&\dots\dots\dots\\
\frac{\partial e_1}{\partial x_1}+\frac{\partial e_2}{\partial x_2}+\frac{\partial e_3}{\partial x_3}&=\rho
\end{aligned}\right\}, \tag{19}$$

[7] Это условие равенства нулю так называемого «второго коэффициента вязкости», выполняющееся лишь в специальных случаях (одноатомный газ, слабо сжимаемая жидкость и т. п.).— *Прим. ред.*

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial e_3}{\partial x_2}-\dfrac{\partial e_2}{\partial x_3}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial h_1}{\partial t}\\ \dfrac{\partial e_1}{\partial x_3}-\dfrac{\partial e_3}{\partial x_1}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial h_2}{\partial t}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial h_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial h_3}{\partial x_3}=0\end{array}\right\}. \tag{20}$$

Здесь $\mathbf{j}$ — вектор, поскольку плотность тока определяется как плотность электричества, умноженная на вектор скорости электричества. Из первых трех уравнений очевидно, что $\mathbf{e}$ также следует рассматривать как вектор. Но тогда нельзя считать вектором $\mathbf{h}$ [8]. Однако эти уравнения легко интерпретировать, если рассматривать $\mathbf{h}$ как антисимметричный тензор второго ранга. В этом смысле мы будем писать h_{23}, h_{31}, h_{12} вместо h_1, h_2, h_3. В силу антисимметричности $h_{\mu\nu}$ первые три уравнения (19) и (20) можно записать в виде

$$\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{1}{c}\frac{\partial e_\mu}{\partial t}+\frac{1}{c}j_\mu, \tag{19a}$$

$$\frac{\partial e_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial e_\nu}{\partial x_\mu}=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t}. \tag{20a}$$

Вектор $\mathbf{h}$, в отличие от $\mathbf{e}$, выступает как величина того же типа симметрии, что и угловая скорость. Уравнения с дивергенцией тогда принимают вид

$$\frac{\partial e_\nu}{\partial x_\nu}=\rho, \tag{18б}$$

$$\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\rho}+\frac{\partial h_{\nu\rho}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x_\nu}=0. \tag{20б}$$

Последнее уравнение является антисимметричным тензорным равенством третьего ранга (антисимметрию выражения слева по отношению к любой паре индексов легко проверить, если учесть антисимметрию $h_{\mu\nu}$). Эти обозначения более естественны, чем обычные, поскольку, в отличие от последних, они справедливы как в правых, так и в левых декартовых системах без изменения знака.

---

[8] Эти рассуждения ознакомят читателя с тензорными операциями без специфических трудностей четырехмерной трактовки; соответствующие формулы в специальной теории относительности (интерпретация поля по Минковскому) встретят тогда меньшие затруднения.

Лекция II

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Предыдущие рассуждения, касающиеся взаимного расположения твердых тел, опирались, кроме предположения о применимости эвклидовой геометрии, на гипотезу физической эквивалентности всех направлений в пространстве или всех ориентаций декартовых систем координат. Мы можем назвать это утверждение «принципом относительности по направлениям», и мы показали, как при помощи тензорного исчисления могут быть найдены уравнения (законы природы), находящиеся в соответствии с этим принципом. Поставим теперь вопрос: существует ли относительность по отношению к состоянию движения пространства отсчета? Другими словами, существуют ли физически эквивалентные пространства отсчета, движущиеся друг относительно друга? С точки зрения механики такие эквивалентные пространства отсчета должны существовать. Действительно, опыты на Земле не дают нам никаких указаний на то, что мы движемся вокруг Солнца со скоростью около 30 *км/сек*. С другой стороны, пространства отсчета, движущиеся произвольно, вовсе не представляются физически эквивалентными: механические явления подчиняются разным законам в трясущемся железнодорожном поезде и в поезде, движущемся равномерно, с постоянной скоростью; при написании уравнений движения относительно Земли следует учитывать ее вращение. Таким образом, дело обстоит так, как если бы существовали декартовы системы координат, так называемые инерциальные системы, в которых законы механики (и вообще законы физики) принимают наиболее простой вид. Мы можем сделать заключение о справедливости следующей теоремы: если K — инерциальная система, то любая другая система K', движущаяся равномерно и без вращения относительно K, также является инерциальной; во всех инерциальных системах координат законы природы имеют одну и ту же форму. Это положение мы назовем «специальным принципом относительности». Из этого принципа «относительности по отношению к перемещениям» мы выведем некоторые следствия так же, как это было сделано для относительности по направлениям.

Чтобы иметь возможность выполнить это, мы должны сначала решить следующую задачу. Пусть нам даны декартовы координаты x_ν и время t события в одной инерциальной системе координат K; как вычислить координаты x'_ν и время t' того же события в инерциальной системе K', которая движется равномерно относительно K? В дорелятивистской физике эту задачу решали, молчаливо принимая две гипотезы.

1. Время абсолютно; время t' события в системе K' то же, что и время в системе K. Если бы на расстоянии можно было сообщаться мгновенными

сигналами и если бы было известно, что состояние движения часов не влияет на их показания, тогда это предположение было бы физически обоснованным. Ибо тогда по системам K и K' можно было бы распределить покоящиеся по отношению к ним одинаковые и одинаково выверенные часы; их показания не зависели бы от состояния движения, и время каждого события определялось бы по часам, находящимся в непосредственной близости от этого события.

2. Длина абсолютна; если покоящийся в системе K интервал имеет длину s, то он имеет ту же длину s в любой системе K', которая движется относительно K.

Если соответствующие оси систем K и K' параллельны, простое вычисление, опирающееся на эти два предположения, приводит к уравнениям преобразования:

$$\left.\begin{aligned} x'_\nu &= x_\nu - a_\nu - b_\nu t \\ t' &= t - b \end{aligned}\right\}. \tag{21}$$

Эти преобразования известны под названием «галилеевых». Дифференцируя дважды по времени, получаем

$$\frac{\partial^2 x'_\nu}{dt^2} = \frac{d^2 x_\nu}{dt^2}.$$

Далее мы получаем, что для двух одновременных событий

$$x'^{(1)}_\nu - x'^{(2)}_\nu = x^{(1)}_\nu - x^{(2)}_\nu.$$

Возведение в квадрат и сложение приводят к инвариантности расстояния между двумя точками. Отсюда легко вывести ковариантность уравнений движения Ньютона относительно преобразований Галилея (21). Таким образом, классическая механика согласуется со специальным принципом относительности, если принять две гипотезы относительно часов и масштабов.

Однако эта попытка обосновать с помощью галилеевых преобразований относительность по отношению к перемещениям терпит неудачу, когда дело касается электромагнитных явлений. Уравнения Максвелла — Лоренца не ковариантны по отношению к преобразованиям Галилея. В частности, из (21) мы видим, что световой луч, который в системе K имел скорость c, обладает другой, зависящей от его направления скоростью в системе K'. Пространство отсчета системы K выделяется поэтому своими физическими свойствами среди всех других пространств отсчета, которые движутся относительно него (неувлекаемый эфир). Но все опыты показывают, что поступательное движение Земли не влияет на электромагнитные и оптические явления по отношению к Земле как телу отсчета. Наиболее важными из этих опытов являются опыты Майкельсона и Морли, которые я предполагаю известными. Таким образом, справедливость специального принципа относительности вряд ли может вызвать сомнения.

С другой стороны, доказана применимость уравнений Максвелла — Лоренца при рассмотрении задач оптики в движущихся телах. Никакая другая теория не дает удовлетворительного объяснения аберрации, распространения света в движущихся средах (Физо) и явлений, наблюдаемых в двойных звездах (де Ситтер). По этой причине можно считать установленным, что свет, как это вытекает из уравнений Максвелла — Лоренца, распространяется в пустоте со скоростью c, по крайней мере, в определенной инерциальной системе координат K. В согласии со специальным принципом относительности мы должны считать, что этот принцип справедлив также и в любой другой инерциальной системе.

Прежде чем делать какие-либо выводы из этих двух принципов, мы должны пересмотреть физический смысл понятий «время» и «скорость». Из предыдущего следует, что координаты в инерциальной системе физически определяются путем измерений и построений, выполняемых при помощи твердых тел. Чтобы измерять время, мы вводим часы U, покоящиеся где-либо в системе K. Однако при помощи этих часов мы не можем определить время событий, расстояниями которых до часов нельзя пренебречь, ибо нет никаких «мгновенных сигналов», которые мы могли бы употребить, чтобы сравнить время события с показаниями часов. Чтобы завершить определение времени, можно воспользоваться принципом постоянства скорости света в пустоте. Предположим, что мы разместили в различных точках системы K одинаковые часы, покоящиеся относительно нее. Будем выверять их по следующей схеме. В тот момент, когда часы U_m показывают время t_m, от них посылается луч света, который распространяется в пустоте на расстояние r_{mn} до часов U_n. В тот момент, когда луч света достигает часов U_n, их устанавливают так, чтобы они показывали время [9]

$$t_n = t_m + \frac{r_{nm}}{c}.$$

Принцип постоянства скорости света утверждает, что такой способ регулировки часов не приводит к противоречиям. Пользуясь часами, выверенными таким способом, можно приписать время любому событию поблизости от них. Существенно отметить, что при этом время

[9] Строго говоря, было бы более правильным сначала определить одновременность, например, так: два события, происшедшие в точках A и B системы K, одновременны, если при наблюдении из точки M, лежащей посредине интервала AB, их замечают в один и тот же момент. Время тогда определяется как совокупность показаний одинаковых часов, покоящихся относительно K, которые одновременно имеют одинаковые показания.

определено только в инерциальной системе K, поскольку мы пользовались системой часов, покоящихся относительно K. Делавшееся в дорелятивистской физике предположение об абсолютном характере времени (т. е. о независимости времени от выбора инерциальной системы) ни коим образом не следует из нашего определения.

Теорию относительности часто критиковали за то, что она неоправданно приписывает центральную теоретическую роль явлению распространения света, основывая понятие времени на его законах. Положение дел, однако, примерно таково. Чтобы придать понятию времени физический смысл, нужны какие-то процессы, которые дали бы возможность установить связь между различными точками пространства. Вопрос о том, какого рода процессы выбираются при таком определении времени, несуществен. Для теории выгодно, конечно, выбирать только те процессы, относительно которых мы знаем что-то определенное. Распространение света *в пустоте* благодаря исследованиям Максвелла и Лоренца подходит для этой цели в гораздо большей степени, чем любой другой процесс, который мог бы стать объектом рассмотрения.

Из всего изложенного выше следует, что пространственные и временные данные имеют не фиктивное, а физически реальное значение. В частности, это относится ко всем соотношениям, в которые входят координаты и время, например к соотношениям (21). Поэтому имеет смысл спросить, справедливы ли указанные уравнения и каковы истинные уравнения преобразований, при помощи которых мы переходим от одной инерциальной системы, K, к другой, K', движущейся относительно первой. Можно показать, что на основе принципа постоянства скорости света и специального принципа относительности эта задача решается однозначно.

Теперь представим себе пространство и время определенными физически по отношению к двум инерциальным системам K и K' указанным выше способом. Пусть, далее, луч света идет в пустоте от точки P_1 к другой точке P_2 в системе K. Если r — измеренное расстояние между двумя точками, то распространение света должно удовлетворять условию

$$r = c\Delta t.$$

Возводя это уравнение в квадрат и выражая r^2 через разности координат Δx_ν, мы можем записать

$$\sum (\Delta x_\nu)^2 - c^2 \Delta t^2 = 0. \tag{22}$$

Этим соотношением формулируется принцип постоянства скорости света в системе K. Оно должно выполняться, каким бы ни было движение источника, испускающего луч света.

То же самое распространение света можно рассмотреть и в системе K'. И в этом случае должен выполняться принцип постоянства скорости света. Следовательно, в системе K' мы получаем соотношение

$$\sum(\Delta x'_\nu)^2 - c^2\Delta t'^2 = 0. \qquad (22a)$$

Соотношения (22) и (22а) должны переходить друг в друга при преобразовании координат и времени, описывающем переход от K к K'. Преобразования, удовлетворяющие этому условию, мы будем называть «преобразованиями Лоренца».

Прежде чем подробно рассматривать эти преобразования, мы сделаем несколько общих замечаний о пространстве и времени. В дорелятивистской физике пространство и время были раздельными понятиями. Время приписывалось событиям независимо от выбора пространства отсчета. Механика Ньютона обладала относительностью по отношению к пространству отсчета, так что, например, утверждение, что два неодновременных события произошли в одном и том же месте, не имело объективного (т. е. независимого от пространства отсчета) содержания. Но эта относительность не сказывалась на построении теории. О точках пространства и моментах времени говорили так, как будто они были абсолютной реальностью. Не замечалось, что истинным элементом пространственно-временно́й локализации является событие, определенное четырьмя числами x_1, x_2, x_3, t. Представление о чем-либо происходящем есть всегда представление о четырехмерном континууме, но понимание этого было затемнено абсолютным характером дорелятивистского времени. После отказа от абсолютности времени, и особенно одновременности, сразу проявилась четырехмерность пространственно-временно́го представления.

Физической реальностью обладает не точка пространства и не момент времени, когда что-либо произошло, а только само событие. Нет абсолютного (независимого от пространства отсчета) соотношения в пространстве и нет абсолютного соотношения во времени, но есть абсолютное (независимое от пространства отсчета) соотношение в пространстве и времени, как это будет видно из дальнейшего. Факт отсутствия разумного объективного способа разделить четырехмерный континуум на трехмерное пространство и одномерный временно́й континуум указывает, что законы природы примут наиболее удовлетворительный, с точки зрения логики, вид, будучи выражены как законы в четырехмерном пространственно-временно́м континууме. На этом основаны большие преимущества метода, которым теория относительности обязана Минковскому. С его точки зрения, мы должны рассматривать x_1, x_2, x_3, t как четыре координаты события в четырехмерном континууме. Наглядное представление соотношений в четырехмерном континууме удается нам гораздо меньше, чем в трехмерном эвклидовом континууме; однако следует подчеркнуть, что даже понятия и соотношения эвклидовой трехмерной геометрии являются абстракциями нашего разума, совершенно не совпадающими с теми образами, которые складываются у нас благодаря зрению и осязанию. Неразделимость четырехмерного континуума событий вовсе не означает эквивалентности пространственных координат временно́й координате. Наоборот, мы должны помнить, что временна́я координата определена физически совершенно иначе, чем пространственные координаты. Кроме того, соотношения (22) и (22а), условие совместимости которых определяет преобразования Лоренца, свидетельствуют о различной роли пространственных и временно́й координат, так как член Δt^2 входит в уравнение со знаком, противоположным знаку пространственных членов Δx_1^2, Δx_2^2, Δx_3^3.

Прежде чем подвергнуть дальнейшему анализу условия, которые определяют преобразования Лоренца, мы введем вместо времени t световое время $l=ct$, чтобы в последующие формулы постоянная c не входила в явном виде. Тогда преобразования Лоренца определяются так, чтобы соотношение

$$\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 - \Delta l^2 = 0 \tag{22б}$$

было ковариантным, т. е. так, чтобы оно выполнялось во всех инерциальных системах, если оно выполняется в той инерциальной системе, к которой мы относим два данных события (испускание и прием светового луча). Наконец, мы, следуя Минковскому, введем вместо вещественной временно́й координаты $l = ct$ мнимую

$$x_4 = il = ict \qquad (\sqrt{-1} = i).$$

Тогда соотношение, которое определяет распространение света и которое должно быть ковариантным по отношению к лоренцовым преобразованиям, запишется в виде

$$\sum_{(4)} \Delta x_\nu^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2 = 0. \tag{22в}$$

Это условие выполняется всегда, если выполняется более общее условие инвариантности величины

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2 \tag{23}$$

по отношению к преобразованиям Лоренца. Последнее выполняется только при линейных преобразованиях, т. е. при преобразованиях вида

$$x'_\mu = a_\mu + b_{\mu\alpha} x_\alpha, \tag{24}$$

где суммирование по α распространяется от $\alpha = 1$ до $\alpha = 4$. Из уравнений (23) и (24) сразу видно, что если отвлечься от числа измерений и условий вещественности, преобразования Лоренца, определенные таким образом, совпадают со сдвигами и вращениями в эвклидовой геометрии. Мы можем заключить также, что коэффициенты $b_{\mu\alpha}$ должны удовлетворять условиям

$$b_{\mu\alpha}b_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\nu} = b_{\alpha\mu}b_{\alpha\nu}. \tag{25}$$

Из формулы (24) видно, что все числа a_μ и $b_{\mu\alpha}$ вещественны, за исключением a_4, b_{41}, b_{42}, b_{43}, b_{14}, b_{24}, b_{34}, являющихся чисто мнимыми.

Преобразование Лоренца частного вида

Простейшие преобразования типа (24), (25) получатся, если преобразуются только две координаты и если все a_μ, определяющие положение нового начала координат, равны нулю. Тогда для индексов 1 и 2, в силу трех независимых условий, которые дают нам соотношения (25), получаем

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi \\ x_2' &= x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi \\ x_3' &= x_3 \\ x_4' &= x_4 \end{aligned}\right\}. \tag{26}$$

Это — простое вращение в пространстве (пространственной) системы координат вокруг оси x_3. Мы видим, что рассматривавшиеся ранее пространственные вращения (без преобразования времени) содержатся в преобразованиях Лоренца как частный случай. Аналогично для индексов 1 и 4 получаем

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\psi - x_4\sin\psi \\ x_4' &= x_1\sin\psi + x_4\cos\psi \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \end{aligned}\right\}. \tag{26a}$$

Так как координата x_4 чисто мнимая, величину ψ нужно взять мнимой. Чтобы интерпретировать физически полученные уравнения, введем вместо мнимого угла ψ вещественное световое время l и скорость v системы K' по отношению к K. Мы получим прежде всего

$$x_1' = x_1\cos\psi - il\sin\psi,$$

$$l' = -ix_1\sin\psi + l\cos\psi.$$

Поскольку для начала координат системы K', т. е. для $x_1' = 0$, мы должны получить $x_1 = vl$, из первого из этих уравнений следует

$$v = i\,\mathrm{tg}\,\psi, \tag{27}$$

а также

$$\left.\begin{aligned} \sin\psi &= -\frac{iv}{\sqrt{1-v^2}} \\ \cos\psi &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned}\right\}, \tag{28}$$

так что мы получаем

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \frac{x_1 - vl}{\sqrt{1-v^2}} \\ l' &= \frac{l - vx_1}{\sqrt{1-v^2}} \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \end{aligned}\right\}. \tag{29}$$

Эти уравнения формулируют известное частное преобразование Лоренца, которое в общей теории описывает вращение четырехмерной системы координат на мнимый угол. Если мы введем вместо светового времени l обычное время t, то в (29) мы должны будем заменить l на ct и v на v/c.

Мы должны теперь восполнить один пробел. Из принципа постоянства скорости света вытекает, что уравнение

$$\sum \Delta x_\nu^2 = 0$$

имеет смысл, не зависящий от выбора инерциальной системы, но отсюда еще вовсе не следует инвариантность величины $\Sigma\,\Delta x_\nu^2$, которая может при преобразовании приобретать численный множитель. Это связано с тем, что правую часть уравнения (29) можно умножить на коэффициент λ, не зависящий от v. Мы покажем сейчас, однако, что в силу принципа относительности этот коэффициент не может отличаться от единицы.

Пусть мы имеем твердый круговой цилиндр, движущийся в направлении своей оси. Если его радиус, измеренный в покое при помощи измерительного стержня единичной длины, равен R_0, то при движении его радиус R может отличаться от R_0, так как в теории относительности не делается предположения о независимости формы тел в пространстве отсчета от их движения относительно этого пространства отсчета. Однако все направления в пространстве должны быть эквивалентны друг другу. Поэтому радиус R может зависеть только от величины q скорости, но не от ее направления, и, следовательно, должен быть четной функцией от q. Если цилиндр покоится относительно системы K', то уравнением его боковой поверхности будет

$$x'^2 + y'^2 = R_0^2.$$

Если мы запишем последние два уравнения (29) в более общей форме

$$x_2' = \lambda x_2,$$
$$x_3' = \lambda x_3,$$

то получим, что боковая поверхность цилиндра задается в системе K уравнением

$$x^2 + y^2 = \frac{R_0^2}{\lambda^2}.$$

Множитель λ характеризует, таким образом, поперечное сокращение и, согласно предыдущему, может быть только четной функцией от v.

Если мы введем третью систему координат K'', которая движется относительно K' со скоростью v в направлении убывающих x', то получим, применяя дважды уравнения преобразования (29)

$$x_1'' = \lambda(v)\,\lambda(-v)\,x_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$l'' = \lambda(v)\,\lambda(-v)\,l.$$

Далее, поскольку $\lambda(v)$ должно совпадать с $\lambda(-v)$ и поскольку мы условились пользоваться во всех системах одним и тем же измерительным стержнем, преобразование от K'' к K должно быть тождественным преобразованием (случай $\lambda = -1$ не нуждается в рассмотрении). Для всех этих рассуждений существенно предположение о независимости свойств измерительных стержней от истории их предшествующего движения.

Движущиеся измерительные стержни и часы

В определенный момент времени в K', а именно при $l = 0$, положения точек с целочисленными координатами $x_1' = n$ даются в системе K равенством $x_1 = n\sqrt{1 - v^2}$. Этот факт следует из первого уравнения (29) и выражает собой лоренцово сокращение. Часы, покоящиеся в начале координат системы $K(x_1 = 0)$, удары которых определяются равенством $l = n$, будут бить, согласно наблюдениям из системы K', в моменты времени

$$l' = \frac{n}{\sqrt{1 - v^2}},$$

что следует из второго уравнения (29). Часы идут медленнее, чем такие же часы, покоящиеся в K'. Два этих следствия, которые выполняются (с соответствующими видоизменениями) во всех системах отсчета и не связаны с какими-либо дополнительными условиями, составляют физическое содержание преобразования Лоренца.

Теорема сложения скоростей

Если мы скомбинируем какие-либо два частные преобразования Лоренца с относительными скоростями v_1 и v_2, то скорость, соответствующая результирующему преобразованию Лоренца, заменяющему два исходных, равна, согласно (27),

$$v_{12} = i\,\mathrm{tg}\,(\psi_1 + \psi_2) = i\,\frac{\mathrm{tg}\,\psi_1 + \mathrm{tg}\,\psi_2}{1 - \mathrm{tg}\,\psi_1\,\mathrm{tg}\,\psi_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}\,. \qquad (30)$$

Общие замечания о преобразованиях Лоренца и их теория инвариантов

Вся теория инвариантов специальной теории относительности связана с инвариантом s^2 (23). В четырехмерном пространственно-временно́м континууме он играет формально ту же роль, что и инвариант $\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2$ в эвклидовой геометрии и в дорелятивистской физике. Последняя величина неинвариантна по отношению ко всем лоренцовым преобразованиям; роль такого инварианта переходит к величине s^2, определяемой равенством (23). Мы можем измерить s^2 в любой инерциальной системе координат; при заданной единице измерения s^2 является строго определенной величиной, связанной с любой парой событий.

Кроме числа измерений, s^2 отличается от соответствующего инварианта эвклидовой геометрии еще следующими особенностями. В эвклидовой геометрии величина s^2 непременно положительна. Она обращается в нуль только тогда, когда две рассматриваемые точки совпадают. Напротив, из обращения в нуль величины

$$s^2 = \sum \Delta x_\nu^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 - \Delta l^2$$

еще нельзя сделать заключения о совпадении двух пространственно-временны́х точек. Обращение в нуль величины s^2 является инвариантным условием того, что две пространственно-временны́е точки можно связать в пустоте световым сигналом. Если P — точка (событие) в четырехмерном пространстве (x_1, x_2, x_3, l), то все «точки», которые можно связать с P световым сигналом, лежат на конусе $s^2 = 0$ (рис. 1; измерение x_3 опущено). «Верхняя» половина конуса содержит «точки», в которые можно послать световой сигнал из P; «нижняя» же половина будет содержать «точки», из которых можно послать световые сигналы в P. Интервал s^2 между точкой P и точками P', лежащими внутри конической поверхности, отрицателен; согласно Минковскому, интервал PP' (так же как и $P'P$) временноподобен. Такие интервалы являются элементами возможных траекторий движений со скоростями, меньшими скорости света [10]. В этом случае, выбрав подходящее состояние движения инерциальной системы, можно направить ось l по PP'. Если P' лежит вне светового конуса, интервал PP' пространственноподобен; в этом случае подходящим выбором инерциальной системы можно Δl обратить в нуль.

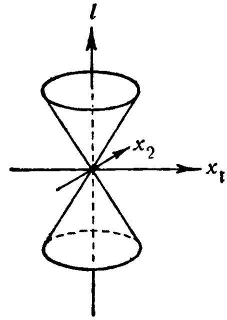


Рис. 1.

Введя мнимую временну́ю координату $x_4 = il$, Минковский сделал теорию инвариантов для четырехмерного континуума физических явлений полностью подобной теории инвариантов для трехмерного континуума эвклидова пространства. Исчисление четырехмерных тензоров специальной теории относительности отличается от тензорного исчисления в трехмерном пространстве только числом измерений и соотношениями вещественности.

Физическая величина, которая в произвольной инерциальной системе координат x_1, x_2, x_3, x_4 задается четырьмя числами A_ν, называется четырехмерным вектором (4-вектором) с компонентами A_ν, если A_ν своими соотношениями вещественности и законами преобразования соответствуют величинам Δx_ν; 4-вектор может быть временноподобным или пространственно подобным. Шестнадцать величин $A_{\mu\nu}$ составляют тензор второго ранга, если они преобразуются по закону

$$A'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha} b_{\nu\beta} A_{\alpha\beta}.$$

Отсюда ясно, что числа $A_{\mu\nu}$ ведут себя в смысле преобразований координат и соотношений вещественности как произведения компонент U_μ и V_ν двух 4-векторов (U) и (V). Все $A_{\mu\nu}$ вещественны, за исключением тех, которые содержат один раз индекс 4; последние чисто мнимы. Сходным образом можно определить тензоры третьего и четвертого рангов. Операции сложения, вычитания, умножения, свертывания и дифференцирования совершенно аналогичны соответствующим операциям над тензорами в трехмерном пространстве.

[10] Скорости материальных тел, превышающие скорости света, невозможны, что вытекает из появления радикала $\sqrt{1 - v^2}$ в формулах (29) частного преобразования Лоренца.

Преже чем использовать тензорное исчисление в четырехмерном пространственно-временно́м континууме, рассмотрим более внимательно антисимметричные тензоры. У тензора второго ранга, вообще говоря, $16=4\times4$ компонент. В случае антисимметрии компоненты с двумя равными индексами обращаются в нуль, а с двумя неравными — попарно равны по величине и противоположны по знаку. Остается только шесть независимых компонент, как и в случае электромагнитного поля. Действительно, когда мы будем рассматривать уравнения Максвелла, мы покажем, что их можно считать тензорными уравнениями, если принять электромагнитное поле за антисимметричный тензор. Ясно, далее, что антисимметричный (по всем парам индексов) тензор третьего ранга имеет только четыре назависимые компоненты, так как возможны только четыре сочетания из трех различных индексов.

Обратимся теперь к уравнениям Максвелла (19а), (19б), (20а), (20б) и введем следующие обозначения[11]:

$$\left.\begin{matrix} \varphi_{23} & \varphi_{31} & \varphi_{12} & \varphi_{14} & \varphi_{24} & \varphi_{34} \\ h_{23} & h_{31} & h_{12} & -ie_x & -ie_y & -ie_z \end{matrix}\right\}, \tag{31а}$$

$$\left.\begin{matrix} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \\ \frac{1}{c}\,j_x & \frac{1}{c}\,j_y & \frac{1}{c}\,j_z & i\rho \end{matrix}\right\} \tag{31б}$$

с условием, что $\varphi_{\mu\nu}$ должно равняться $-\varphi_{\nu\mu}$. Тогда уравнения Максвелла можно записать в виде

$$\frac{\partial\varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = J_\mu, \tag{32}$$

$$\frac{\partial\varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial\varphi_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial\varphi_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = 0, \tag{33}$$

что нетрудно проверить, используя (31а) и (31б). Уравнения носят тензорный характер и поэтому ковариантны по отношению к лоренцовым преобразованиям, если только $\varphi_{\mu\nu}$ и J_μ — тензоры, как мы и предполагаем. Тем самым однозначно определены законы преобразования этих величин от одной допустимой (инерциальной) системы координат к другой. Прогресс в методе, которым электродинамика обязана специальной теории

---

[11] Во избежание путаницы мы будем пользоваться здесь и дальше вместо индексов 1, 2, 3 индексами x, y, z для трехмерного пространства, оставляя численные индексы 1, 2, 3, 4 для четырехмерного пространственно-временно́го континуума.

относительности, заключается главным образом в уменьшении числа независимых гипотез. Если рассмотреть, например, уравнения (19а) только с точки зрения относительности по направлениям, как мы и делали выше, то мы увидим, что в него входят три логически несвязанных слагаемых. Электрическое поле входит в это уравнение так, что оно кажется совершенно независимым от того, как входит магнитное поле. Не было бы ничего удивительного, если бы вместо $\frac{\partial e_\mu}{\partial t}$ стояло, например, $\frac{\partial^2 e_\mu}{\partial t^2}$, или если бы этот член отсутствовал. В отличие от этого, в уравнение (32) входят только два независимых члена. Электромагнитное поле выступает формально как единое целое, и способ, которым электрическое поле входит в это уравнение, определяется тем, как входит в него магнитное поле. Кроме электромагнитного поля, только плотность электрического тока выступает как независимая величина. Причина этого успеха в методе заключается в том, что электрическое и магнитное поля приобретают раздельное существование лишь благодаря относительности движения. Поле, которое кажется в одной системе координат чисто электрическим, в другой инерциальной системе обладает и магнитными компонентами. В применении к электромагнитному полю, общий закон преобразований приводит в случае частного преобразования Лоренца к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} e'_x &= e_x, & h'_x &= h_x, \\ e'_y &= \frac{e_y - vh_z}{\sqrt{1-v^2}}, & h'_y &= \frac{h_y + ve_z}{\sqrt{1-v^2}}, \\ e'_z &= \frac{e_z + vh_y}{\sqrt{1-v^2}}, & h'_z &= \frac{h_z - ve_y}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Если относительно K существует только магнитное поле $\mathbf{h}$ и нет электрического поля $\mathbf{e}$, то относительно K' есть также и электрическое поле $\mathbf{e}'$, которое будет действовать на электрический заряд, покоящийся относительно K'. Наблюдатель, покоящийся относительно K, назовет эту силу силой Био-Савара или Лоренца. Дело обстоит так, как если бы эта сила оказалась объединенной в единое целое с напряженностью электрического поля.

Чтобы формально вывести это соотношение, рассмотрим выражение для силы, действующей на электрический заряд в единице объема,

$$\mathbf{k} = \rho\mathbf{e} + [\mathbf{j}, \mathbf{h}], \tag{35}$$

где $\mathbf{j}$ — вектор скорости электрического заряда; скорость света принята за единицу. Если мы введем обозначения J_μ и φ_μ, согласно (31а) и (31б), то получим для первой компоненты силы выражение

$$\varphi_{12}J_2 + \varphi_{13}J_3 + \varphi_{14}J_4.$$

Поскольку φ_{11} равно нулю в силу антисимметрии тензора (φ), компоненты $\mathbf{k}$ даются первыми тремя компонентами четырехмерного вектора

$$K_\mu = \varphi_{\mu\nu}J_\nu, \tag{36}$$

четвертая компонента которого равна

$$K_4 = \varphi_{41}J_1 + \varphi_{42}J_2 + \varphi_{43}J_3 = i\,(e_x j_x + e_y j_y + e_z j_z) = i\lambda. \tag{37}$$

Существует, следовательно, четырехмерный вектор силы, первые три компоненты которого k_1, k_2, k_3 являются составляющими пондеромоторной силы, действующей на единичный объем, а четвертая компонента есть работа, производимая полем в единичном объеме и в единицу времени, умноженная на $\sqrt{-1}$.

Сравнение выражений (35) и (36) показывает, что теория относительности формально объединяет пондеромоторную силу электрического поля $\rho\mathbf{e}$ с силой Био — Савара или Лоренца $[\mathbf{j}, \mathbf{h}]$.

Масса и энергия

Из того факта, что существует осмысленный четырехмерный вектор K_μ, можно вывести одно важное заключение. Представим себе тело, находящееся в течение некоторого времени под воздействием электромагнитного поля. На символическом рисунке (рис. 2) Ox_1 означает ось x_1 и в то

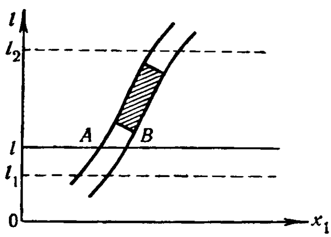


Рис. 2.

же время заменяет три пространственные оси Ox_1, Ox_2, Ox_3; Ol означает вещественную временную ось. Тело конечного размера в определенный момент времени l изображается на этой диаграмме интервалом AB; все существование тела A в пространстве и времени представляется полосой, граница которой всюду наклонена к оси l под углом, меньшим 45°. Между двумя временны́ми сечениями $l = l_1$ и $l_1 = l_2$, но не вплотную к ним, часть полосы заштрихована. Этим отмечена та часть пространственно-временно́го многообразия, в которой электромагнитное поле воздействует на тело или на содержащиеся в нем электрические заряды, передающие это воздействие на самое тело. Рассмотрим изменения, которые претерпевают импульс и энергия тела в результате такого воздействия.

Мы будем предполагать, что для тела справедливы законы сохранения импульса и энергии. Изменения импульса ΔI_x, ΔI_y, ΔI_z и изменение энергии ΔE задаются тогда выражениями

$$\Delta I_x = \int_{l_1}^{l_2} dl \int k_x dx\, dx\, dz = \frac{1}{i}\int K_1 dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4,$$

. . . .

. . . .

$$\Delta E = \int_{l_1}^{l_2} dl \int \lambda dx\, dy\, dz = \frac{1}{i}\int \frac{1}{i} K_4 dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4.$$

Поскольку элемент четырехмерного объема является инвариантом, а совокупность величин (K_1, K_2, K_3, K_4) образует 4-вектор, четырехмерный интеграл, распространенный на заштрихованную область, преобразуется как 4-вектор; то же справедливо и для интеграла в пределах от l_1 до l_2, поскольку незаштрихованная часть области интегрирования ничего не добавляет к интегралу. Отсюда следует, что ΔI_x, ΔI_y, ΔI_z, $i\,\Delta E$ образуют 4-вектор. Поскольку сами величины преобразуются так же, как и их приращения, совокупность четырех величин

$$I_x,\ I_y,\ I_z,\ iE$$

сама обладает свойствами вектора; эти величины относятся к мгновенному состоянию тела (например, ко времени $l = l_1$).

Этот 4-вектор можно выразить также через массу m и скорость тела, рассматриваемого как материальная точка. Чтобы образовать это выражение, заметим сначала, что величина

$$-ds^2 = d\tau^2 = -(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - dx_4^2 = dl^2(1 - q^2) \tag{38}$$

является инвариантом, который связан с бесконечно малым элементом четырехмерной линии, отвечающей движению материальной точки. Легко уяснить себе физический смысл инварианта $d\tau$. Если выбрать направление оси времени вдоль рассматриваемого линейного элемента, т. е., если привести материальную точку в состояние покоя, мы получим $d\tau = dl$. Эта величина будет, таким образом, измеряться проградуированными в световых секундах часами, которые покоятся относительно материальной точки и находятся в одном с ней месте. Поэтому мы называем τ собственным временем материальной точки. В отличие от dl, дифференциал $d\tau$ — инвариант; $d\tau$ практически совпадает с dl для движений со скоростями, много меньшими скорости света. Отсюда мы видим, что величина

$$u_\sigma = \frac{dx_\sigma}{d\tau}, \tag{39}$$

так же как и dx_ν, обладает векторными свойствами; мы будем называть (u_σ) четырехмерным вектором скорости. Согласно (38), его компоненты удовлетворяют условию

$$\sum u_\sigma^2 = -1. \tag{40}$$

Мы видим также, что этот 4-вектор, компоненты которого в обычных обозначениях равны

$$\frac{q_x}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \frac{q_y}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \frac{q_z}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \frac{i}{\sqrt{1-q^2}}, \tag{41}$$

является единственным 4-вектором, который можно образовать из компонент скорости материальной точки, определенных в трехмерном виде равенствами

$$q_x = \frac{dx}{dl}, \quad q_y = \frac{dy}{dl}, \quad q_z = \frac{dz}{dl}.$$

Мы видим, таким образом, что

$$\left(m\frac{dx_\mu}{d\tau}\right) \tag{42}$$

и есть тот 4-вектор, который следует приравнять 4-вектору энергии и импульса, существование которого было доказано раньше. Приравнивая соответствующие компоненты, мы получаем в трехмерных обозначениях

$$\left.\begin{array}{c} I_x = \dfrac{mq_x}{\sqrt{1-q^2}}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ E = \dfrac{m}{\sqrt{1-q^2}}. \end{array}\right\} \tag{43}$$

Мы действительно убеждаемся, что эти компоненты импульса согласуются с величинами, получаемыми в классической механике при скоростях, малых по сравнению со скоростью света. При больших скоростях импульс возрастает со скоростью быстрее, чем линейно, обращаясь в бесконечность при приближении к скорости света.

Если последнее из равенств (43) применить к покоящейся материальной точке ($p^{\cdot} = 0$), мы найдем, что энергия E тела в состоянии покоя равна его массе. Если бы мы выбрали в качестве единицы времени секунду, мы получили бы

$$E_0 = mc^2. \tag{44}$$

Таким образом, масса и энергия сходны по существу — это только различные выражения одного и того же. Масса тела не постоянна; она меняется вместе с его энергией [12]. Из последнего равенства (43) видно, что E стремится к бесконечности, когда q стремится к единице, т. е. к скорости света. Если мы разложим E по степеням q^2, то получим

$$E = m + \frac{m}{2} q^2 + \frac{3}{8} mq^4 + \cdots \tag{45}$$

Второй член разложения соответствует кинетической энергии материальной точки в классической механике.

Уравнения движения материальной точки

Дифференцируя равенства (43) по времени l, используя закон сохранения количества движения и переходя к трехмерным векторам, получаем

$$\mathbf{k} = \frac{d}{dl}\left(\frac{m\mathbf{q}}{\sqrt{1 - q^2}}\right). \tag{46}$$

Справедливость этого уравнения, впервые написанного Г. А. Лоренцом для движения электронов, была доказана с большой степенью точности в опытах с β-лучами.

---

[12] Выделение энергии в радиоактивных процессах, очевидно, связано с тем фактом, что атомные веса не являются целыми числами. Эквивалентность между массой покоя и энергией покоя, выражаемая соотношением (44), неоднократно подтверждалась за последние годы. При радиоактивном распаде сумма получающихся масс всегда меньше, чем масса распадающегося ядра. Разность проявляется как в виде кинетической энергии порожденных частиц, так и в виде высвобожденной энергии излучения.

Тензор энергии электромагнитного поля

Еще до создания теории относительности было известно, что законы сохранения энергии и импульса для электромагнитного поля можно выразить в дифференциальной форме. Четырехмерная формулировка этих законов приводит к важному понятию о тензоре энергии, которое существенно для дальнейшего развития теории относительности.

Если в формуле для четырехмерного вектора силы, действующей на единицу объема,

$$K_\mu = \varphi_{\mu\nu} J_\nu$$

выразить J_μ, используя уравнения поля (32), через напряженности поля $\varphi_{\mu\nu}$, то после некоторых преобразований и повторного применения уравнений поля (32) и (33) получится выражение

$$K_\mu = -\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}, \tag{47}$$

где введено обозначение [13]

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\varphi_{\alpha\beta}^2 \delta_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\alpha}\varphi_{\nu\alpha}. \tag{48}$$

Физический смысл уравнения (47) становится очевидным, если вместо него написать:

$$\left.\begin{array}{l} k_x = -\dfrac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \dfrac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \dfrac{\partial p_{xz}}{\partial z} - \dfrac{\partial (ib_x)}{\partial (il)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ i\lambda = -\dfrac{\partial (is_x)}{\partial x} - \dfrac{\partial (is_y)}{\partial y} - \dfrac{\partial (is_z)}{\partial z} - \dfrac{\partial (-\eta)}{\partial (il)}, \end{array}\right\} \tag{47а}$$

или, по исключении мнимой единицы,

$$\left.\begin{array}{l} k_x = -\dfrac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \dfrac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \dfrac{\partial p_{xz}}{\partial z} - \dfrac{\partial b_x}{\partial l}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda = -\dfrac{\partial s_x}{\partial x} - \dfrac{\partial s_y}{\partial y} - \dfrac{\partial s_z}{\partial z} - \dfrac{\partial \eta}{\partial l}. \end{array}\right\} \tag{47б}$$

Из последней записи мы видим, что первые три уравнения выражают закон сохранения импульса, $p_{xx}, \ldots, p_{zz}$ — максвелловы натяжения

---

[13] По α и β следует просуммировать.

электромагнитного поля, а (b_x, b_y, b_z) — вектор количества движения единицы объема поля. Последнее из уравнений (47б) выражает закон сохранения энергии; s — вектор потока энергии, а η — энергия единицы объема поля. Действительно, вводя известные из электродинамики выражения для компонент напряженности поля, мы получаем из (48)

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= -h_x h_x + \frac{1}{2}(h_x^2 + h_y^2 + h_z^2) - e_x e_x + \frac{1}{2}(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2), \\ p_{xy} &= -h_x h_y - e_x e_y, \\ p_{xz} &= -h_x h_z - e_x e_z, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_x &= s_x = e_y h_z - e_z h_y \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta &= \frac{1}{2}(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 + h_x^2 + h_y^2 + h_z^2). \end{aligned}\right\} \quad (48а)$$

Из (48) мы можем заключить, что тензор энергии электромагнитного поля симметричен; это связано с тем фактом, что количество движения единицы объема равно потоку энергии (связь между энергией и инерцией).

Из этих рассуждений мы, таким образом, заключаем, что энергия единицы объема обладает свойствами тензора. Этот факт был доказан непосредственно только для электромагнитного поля, но мы можем утверждать, что он имеет всеобщую применимость. Уравнения Максвелла определяют электромагнитное поле, когда известно распределение электрических зарядов и токов. Однако законы, управляющие этими токами и зарядами, нам неизвестны. Мы знаем, конечно, что электричество состоит из элементарных частиц (электронов, положительно заряженных ядер), но мы не можем построить из этого теорию. Нам неизвестны энергетические факторы, определяющие распределение электричества в частицах с определенным размером и зарядом, и все попытки завершить теорию в этом направлении потерпели неудачу. Поэтому, если мы вообще можем основываться на уравнениях Максвелла, тензор энергии электромагнитного поля известен нам только вне заряженных частиц [14]. В этой области, вне заря-

[14] Этот пробел в наших знаниях пытались восполнить, рассматривая заряженные частицы как некоторые сингулярности. На мой взгляд, однако, это означает отказ от действительного выяснения строения вещества. Мне кажется, что гораздо лучше сознаться в нашей нынешней несостоятельности, чем удовлетворяться кажущимся решением.

женных частиц, единственной области, где мы можем быть уверены, что располагаем полным выражением для тензора энергии, мы, согласно (47), имеем

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{47в}$$

Общие выражения для законов сохранения

Вряд ли можно обойтись без предположения, что и во всех других случаях пространственное распределение энергии задается симметричным тензором $T_{\mu\nu}$ и что этот тензор полной энергии всюду удовлетворяет соотношению (47в). Во всяком случае, мы увидим, что с помощью этого предположения мы получаем правильное выражение для интегрального закона сохранения энергии.

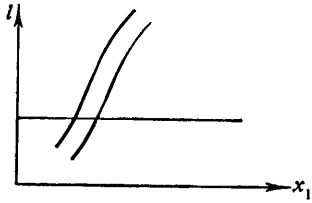


Рис. 3.

Рассмотрим ограниченную в пространстве замкнутую систему, которую на четырехмерном языке можно представить полосой, вне которой $T_{\mu\nu}$ обращается в нуль (рис. 3). Проинтегрируем соотношение (47в) по пространственной области. Поскольку вследствие равенства $T_{\mu\nu}$ нулю на пределах интегрирования интегралы от $\frac{\partial T_{\mu 1}}{\partial x_1}$, $\frac{\partial T_{\mu 2}}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial T_{\mu 3}}{\partial x_3}$ обращаются в нуль, мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial l}\left\{\int T_{\mu 4}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\right\} = 0. \tag{49}$$

Выражение в скобках содержит выражения для импульса всей системы, умноженного на i, и для энергии системы с обратным знаком, так что равенство (49) выражает законы сохранения в их интегральной форме. То, что это равенство ведет к правильному представлению об энергии и законах сохранения, станет очевидным из последующего рассмотрения.

Феноменологическое представление тензора энергии материи

Уравнения гидродинамики

Мы знаем, что вещество состоит из электрически заряженных частиц, но законы, управляющие строением этих частиц, нам неизвестны. При рассмотрении задач механики мы вынуждены поэтому пользоваться неточным описанием вещества, соответствующим классической механике. Такое описание опирается на фундаментальные понятия гидродинамического давления и плотности σ материальной субстанции.

Пусть σ_0 — плотность вещества в некоторой точке, определенная в системе координат, движущейся с веществом. Тогда σ_0 — плотность в системе покоя — является инвариантом. Если мы представим себе произвольно движущееся вещество и пренебрежем давлением (например, частицы пыли в пустоте, если пренебречь размерами частиц и температурой), то тензор энергии будет зависеть только от компонент скорости u_ν и σ_0. Тензорный характер величины $T_{\mu\nu}$ будет обеспечен, если положить

$$T_{\mu\nu} = \sigma_0 u_\mu u_\nu, \tag{50}$$

где u_μ в трехмерном представлении дается формулами (41). Действительно, из (50) следует, что при $q = 0$ мы имеем $T_{44} = -\sigma_0$ (т. е. T_{44} равно энергии единицы объема с обратным знаком), как и должно было быть, согласно теореме об эквивалентности массы и энергии и в соответствии с данной выше физической интерпретацией тензора энергии. Если на вещество действует внешняя сила (четырехмерный вектор K_μ), то по законам сохранения импульса и энергии должно выполняться уравнение

$$K_\mu = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}.$$

Покажем, что это уравнение приводит к полученному выше закону движения материальной точки. Представим себе, что вещество сосредоточено в бесконечно малой области пространства, т. е. что мы имеем четырехмерную нить. Тогда, после интегрирования вдоль всей нити по пространственным координатам x_1, x_2, x_3, мы получим

$$\int K_1 dx_1\, dx_2\, dx_3 = \int \frac{\partial T_{14}}{\partial x_4}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = -i\,\frac{d}{dl}\left\{\int \sigma_0 \frac{dx_1}{d\tau}\,\frac{dx_4}{d\tau}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\right\}.$$

Далее, $\int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ есть инвариант, так же, как и $\int \sigma_0 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$. Вычислим этот интеграл сначала в выбранной нами инерциальной системе, а затем в системе, где скорость вещества равна нулю. Интегрирование следует распространить на волокно нити, для которого σ_0 можно считать постоянной по всему сечению. Если пространственные объемы волокна в двух системах координат равны соответственно dV и dV_0, мы имеем

$$\int \sigma_0 dV\, dl = \int \sigma_0 dV_0 d\tau$$

следовательно,

$$\int \sigma_0 dV = \int \sigma_0 dV_0 \frac{d\tau}{dl} = \int dm\, i\, \frac{d\tau}{dx_4}.$$

Если мы используем это равенство для преобразования интервала, написанного выше, то, вынося $\frac{dx_1}{d\tau}$ за знак интегрирования, получаем

$$K_x = \frac{d}{dl}\left(m\frac{dx_1}{d\tau}\right) = \frac{d}{dl}\frac{mq_x}{\sqrt{1-q^2}}.$$

Мы убеждаемся, таким образом, что обобщенное понятие тензора энергии согласуется с нашим прежним результатом.

Эйлеровы уравнения для идеальной жидкости

Чтобы ближе подойти к описанию поведения реального вещества, мы должны добавить к тензору энергии член, соответствующий давлению. Простейшим случаем является случай идеальной жидкости, когда давление определяется некоторым скаляром p. Вклад в тензор энергии должен иметь вид $p\delta_{\mu\nu}$, поскольку тангенциальные напряжения p_{xy} и т. д. в этом случае обращаются в нуль. Мы должны, следовательно, положить

$$T_{\mu\nu} = \sigma u_\mu u_\nu + p\delta_{\mu\nu}. \tag{51}$$

В системе покоя плотность вещества, или энергия единицы объема, равна в этом случае не σ, а $\sigma - p$, так как

$$-T_{44} = -\sigma\frac{dx_4}{d\tau}\frac{dx_4}{d\tau} - p\delta_{44} = \sigma - p.$$

В отсутствие каких-либо сил мы имеем

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \sigma u_\nu \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + u_\mu \frac{\partial(\sigma u_\nu)}{\partial x_\nu} + \frac{\partial p}{\partial x_\mu} = 0.$$

Если мы умножим это уравнение на $u_\mu \left(= \frac{dx_\mu}{d\tau}\right)$ и просуммируем по μ, то получим, использовав (40),

$$-\frac{\partial(\sigma u_\nu)}{\partial x_\nu} + \frac{dp}{d\tau} = 0, \tag{52}$$

где мы положили

$$\frac{\partial p}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{dp}{d\tau}.$$

Это — уравнение непрерывности, которое отличается от классического членом $\frac{dp}{d\tau}$, который практически является исчезающе малым. В силу (52) закон сохранения принимает вид

$$\sigma\frac{du_\mu}{d\tau} + u_\mu\frac{dp}{d\tau} + \frac{\partial p}{\partial x_\mu} = 0. \tag{53}$$

При первых трех значениях индексов эти уравнения соответствуют эйлеровым. То обстоятельство, что уравнения (52) и (53) в первом приближении соответствуют уравнениям гидродинамики в классической механике, служит дальнейшим подтверждением обобщенного закона сохранения энергии. Плотность вещества и энергии обладает свойствами симметричного тензора.

Лекция III

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Все, что рассказывалось выше, основывалось на предположении, что для описания физических явлений все инерциальные системы эквивалентны, но что при выражении законов природы они обладают преимуществами перед пространствами отсчета, находящимися в других состояниях движения. Из всего сказанного выше следует, что мы не можем искать причины, по которым некоторые состояния движения имеют преимущество перед всеми другими, в телах, с которыми мы имеем дело, или в самом понятии движения; напротив, это преимущество следует рассматривать как независимое свойство пространственно-временнóго континуума. В частности, закон инерции, по-видимому, вынуждает нас приписать пространственно-временнóму континууму объективные свойства. Точно так же, как с ньютоновской точки зрения оказалось необходимым ввести постулаты *tempus est absolutum, spatium est absolutum*[15], так с точки зрения

[15] Время абсолютно, пространство абсолютно (лат.).— *Прим. ред.*

специальной теории относительности мы должны объявить *continuum spatii et temporis est absolutum*[16]. В этом последнем утверждении *absolutum* означает не только «физически реальный», но также «независимый по своим физическим свойствам, оказывающий физическое действие, но сам от физических условий не зависящий».

До тех пор, пока закон инерции рассматривается как краеугольный камень физики, такая точка зрения является единственно оправданной. Однако такая обычная концепция встречает два серьезных возражения. Во-первых, представление о чем-то (пространственно-временно́й континуум), что воздействует само, но на что нельзя воздействовать, противоречит присущему науке методу мышления. Именно это побудило Э. Маха сделать попытку исключить пространство как активную причину из системы механики. Согласно Маху, материальная точка при неускоренном движении движется не относительно пространства, а относительно центра всех прочих масс во Вселенной; таким путем, в противовес механике Ньютона и Галилея, замыкается причинная цепь механических явлений. Чтобы развить эту идею в рамках современной теории действия через среду, свойства пространственно-временно́го континуума, определяющие инерцию, должны рассматриваться как полевые свойства пространства, аналогично электромагнитному полю. Понятия классической механики не дают нам возможности выразить это, и по указанной причине попытка Маха потерпела в то время неудачу. Позже мы вернемся к этой точке зрения.

Во-вторых, классическая механика указывает на одно ограничение, которое непосредственно требует распространения принципа относительности и на такие пространства отсчета, которые не находятся в состоянии равномерного движения друг относительно друга. Отношение масс двух тел определяется в механике двумя принципиально различными способами: с одной стороны, через обратное отношение ускорений, которые сообщает им одна и та же ускоряющая сила (инертная масса), и, с другой стороны, через отношение сил, действующих на них в одном и том же гравитационном поле (гравитационная масса). Равенство этих двух масс, столь различно определяемых, является фактом, подтвержденным опытами с весьма большой точностью (опыты Этвеша), но классическая механика не дает никакого объяснения этому равенству. Однако ясно, что утверждение о численном равенстве двух величин становится вполне научно обоснованным лишь после того, как доказано совпадение истинной природы обоих понятий.

То, что этой цели действительно можно достичь путем расширения принципа относительности, вытекает из следующих соображений. Простое рассуждение показывает, что теорема о равенстве инертной и гравитацион-

---

[16] Пространственно-временно́й континуум абсолютен (лат.).— *Прим. ред.*

ной масс эквивалентна теореме о независимости ускорения, сообщаемого телу гравитационным полем, от природы тела. Действительно, выписанное полностью уравнение Ньютона для движения в гравитационном поле имеет вид

$$(\text{Инертная масса}) \times (\text{ускорение}) =$$
$$= (\text{напряженность гравитационного поля}) \times (\text{гравитационная масса}).$$

Только в случае численного равенства между инертной и гравитационной массами ускорение не зависит от природы тела. Пусть теперь K — некоторая инерциальная система. Массы, достаточно удаленные друг от друга и от остальных тел, будут тогда относительно K свободны от ускорения. Рассмотрим теперь те же массы в системе координат K', движущейся равномерно ускоренно относительно K. По отношению к K' все эти массы обладают равными по величине и параллельными по направлению ускорениями; они ведут себя по отношению к K' так, как если бы существовало гравитационное поле, а система K' была неускоренной. Если оставить пока в стороне вопрос о «причине» такого гравитационного поля, которым мы займемся дальше, ничто не мешает нам считать гравитационное поле реально существующим; таким образом, представление о том, что система K' находится «в состоянии покоя», но имеется гравитационное поле, мы можем считать эквивалентным представлению о том, что только система K является «дозволенной» системой координат и никакого гравитационного поля нет. Предположение о полной физической эквивалентности систем координат K и K' мы назовем «принципом эквивалентности». Этот принцип, очевидно, теснейшим образом связан с теоремой о равенстве инертной и гравитационной масс и знаменует распространение принципа относительности на системы координат, движущиеся неравномерно друг относительно друга. Действительно, такая концепция приводит нас к признанию единства природы инерции и тяготения; в зависимости от того, каким образом мы их рассматриваем, одни и те же массы могут представляться находящимися под действием только сил инерции (по отношению к K) или под совместным действием как сил инерции, так и тяготения (по отношению к K'). Возможность объяснить численное равенство между инерцией и тяготением на основе единства их природы доставляет общей теории относительности, по моему убеждению, столь большое превосходство над представлениями классической механики, что все трудности, с которыми она сталкивается в своем развитии, следует по сравнению с этим считать незначительными.

Что же оправдывает наш отказ от предпочтительности инерциальных систем перед всеми другими системами координат, от предпочтительности, которая казалась так надежно установленной опытами, основанными на принципе инерции? Уязвимым местом принципа инерции было то обстоятельство, что он содержал порочный круг: масса движется без ускорения, если она достаточно удалена от других тел; но мы знаем о ее достаточной удаленности от других тел только по ее движению без ускорения. Существуют ли вообще какие-либо инерциальные системы для весьма протяженных областей пространственно-временнóго континуума или, скажем, для всей Вселенной. Закон инерции мы можем считать установленным с большой степенью точности в пространстве нашей планетной системы, если только мы пренебрегаем возмущениями, обусловливаемыми Солнцем и планетами. Выражаясь более точно, существуют конечные области, где по отношению к выбранному должным образом пространству отсчета материальные точки движутся свободно, без ускорений, и где с замечательной точностью выполняются законы развитой выше специальной теории относительности. Такие области будем называть «галилеевыми областями». Мы начнем с рассмотрения такого рода областей как частного случая, свойства которого нам известны.

Принцип эквивалентности требует, чтобы при рассмотрении галилеевых областей в равной степени могли использоваться и неинерциальные системы, т. е. системы координат, не свободные от вращений и ускорений по отношению к инерциальным системам. Если мы, кроме того, хотим полностью снять трудный вопрос об объективных причинах, по которым определенные системы координат оказываются предпочтительными, мы должны разрешить пользоваться произвольно движущимися системами координат. Но как только мы серьезно производим эту попытку, мы вступаем в конфликт с той физической интерпретацией пространства и времени, к которой нас привела специальная теория относительности. Пусть, например, система координат K', ось z' которой совпадает с осью z системы K, вращается вокруг последней оси с постоянной угловой скоростью. Согласуется ли взаимное расположение твердых тел, покоящихся в K', с законами эвклидовой геометрии? Поскольку K' — неинерциальная система, мы, вообще говоря, не знаем непосредственно ни законов, определяющих расположение твердых тел в системе K', ни вообще законов природы в этой системе. Но эти законы нам известны в инерциальной системе K, так что мы можем определить их и в системе K'. Представим себе, что вокруг начала координат в плоскости (x', y') системы K' нарисованы окружность и ее диаметр. Представим себе далее, что в нашем распоряжении имеется большое число совершенно одинаковых жестких стержней. Допустим, что они уложены друг за другом по окружности и по диаметру этого круга и находятся в покое относительно K'. Если U — число стержней, уложенных по окружности, а D — число стержней, уложенных по диаметру, то при отсутствии вращения K' относительно K мы имели бы

$$\frac{U}{D} = \pi.$$

Но если K' вращается, мы получим другой результат. Предположим, что в некоторый момент времени t в системе K мы определили положение концов всех стержней. Все стержни, расположенные вдоль окружности, претерпевают лоренцово сокращение по отношению к K, но стержни на диаметре не испытывают этого сокращения (вдоль своих длин!)[17]. Следовательно,

$$\frac{U}{D} > \pi.$$

Таким образом, получается, что законы конфигурации твердых тел в K' не согласуются с теми законами конфигурации твердых тел, которые соответствуют эвклидовой геометрии. Далее, если мы расположим два экземпляра одинаковых часов (вращающихся вместе с K'), одни — на окружности, а другие — в ее центре, то при наблюдении из системы K часы на окружности будут идти медленнее, чем часы в центре. То же самое должно происходить с точки зрения системы K', если только мы не ввели противоестественного определения времени по отношению к K', при котором законы в K' зависели бы явно от времени. Поэтому пространство и время нельзя определить в K' так же, как они определялись в специальной теории относительности для инерциальных систем. Но, согласно принципу эквивалентности, K' также может рассматриваться как покоящаяся система, в которой есть гравитационное поле (поле центробежных сил и сил Кориолиса). Мы приходим, таким образом, к следующему результату: гравитационное поле оказывает воздействие и даже определяет метрические законы пространственно-временнóго континуума. Если выразить законы конфигурации абсолютно твердых тел на языке геометрии, то эта геометрия в присутствии гравитационного поля не будет эвклидовой.

Рассмотренный нами пример аналогичен тому, с которым мы встречаемся при двумерном описании поверхностей. В последнем случае на поверхности (например, на поверхности эллипсоида) также невозможно ввести координаты, которые имели бы простой метрический смысл, тогда как на плоскости декартовы координаты x_1, x_2 непосредственно означают длины, измеренные единичным измерительным стержнем. Гаусс преодолел эту трудность в своей теории поверхностей, введя совершенно произвольные, если не считать условия непрерывности, криволинейные координаты; впоследствии эти координаты были связаны с метрическими свойствами поверхности. Аналогичным образом и мы в общей теории относительности введем произвольные координаты x_1, x_2, x_3, x_4, которыми однозначно

[17] В этих рассуждениях предполагается, что поведение часов и стержней зависит только от скоростей, но не от ускорений, или, по крайней мере, что влияние ускорения не компенсирует влияния скорости.

пронумеруем пространственно-временные точки так, чтобы близким событиям отвечали близкие значения координат; в остальном выбор координат произволен. Мы останемся верными принципу относительности в его наиболее широком смысле, если придадим такую форму законам, что они окажутся применимыми в любой четырехмерной системе координат, т. е. если уравнения, выражающие эти законы, будут ковариантны по отношению к произвольным преобразованиям.

Наиболее важной точкой соприкосновения между гауссовой теорией поверхностей и общей теорией относительности являются метрические свойства, на которых в основном базируются понятия обеих теорий. В теории поверхностей Гаусс рассуждает следующим образом. Плоскую геометрию можно основать на понятии расстояния ds между двумя бесконечно близкими точками. Понятие такого расстояния имеет физический смысл, поскольку это расстояние можно непосредственно измерить при помощи жесткого измерительного стержня. При подходящем выборе декартовых координат это расстояние можно выразить формулой $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$. На этой величине мы можем основать понятия прямой как геодезической линии ($\delta\int ds = 0$), интервала, окружности и угла — понятия, на которых построено здание эвклидовой геометрии на плоскости. Можно построить геометрию и на другой поверхности с непрерывно изменяющейся кривизной, если заметить, что бесконечно малую часть этой поверхности можно рассматривать как плоскую, с точностью до бесконечно малых величин. Тогда на этой малой части поверхности существуют декартовы координаты X_1, X_2 и расстояние между двумя точками, измеренное измерительным стержнем, дается формулой

$$ds^2 = dX_1^1 + dX_2^2.$$

Если ввести на поверхности произвольные криволинейные координаты x_1, x_2, то dX_1, dX_2 можно будет выразить линейно через dx_1, dx_2. Тогда всюду на поверхности мы будем иметь

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1\,dx_2 + g_{22}dx_2^2,$$

где g_{11}, g_{12}, g_{22} определяются характером поверхности и выбором координат. Если известны эти величины, то известно также, как можно уложить на поверхности сетку жестких стержней. Другими словами, геометрию поверхностей можно построить на этом выражении для ds^2 точно так же, как строится на соответствующем выражении плоская геометрия.

В физическом четырехмерном пространственно-временно́м континууме существуют аналогичные соотношения. В непосредственной близости от свободно падающего в гравитационном поле наблюдателя гравитационного поля нет. Поэтому мы всегда можем рассматривать бесконечно малые области пространства как галилеевы. Тогда в такой бесконечно малой области будет существовать инерциальная система (с пространственными координатами X_1, X_2, X_3 и временно́й координатой X_4), в которой мы должны считать применимыми законы специальной теории относительности. Величина, непосредственно измеримая нашими единичными измерительными стержнями и часами,

$$dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 - dX_4^2,$$

или, с обратным знаком,

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2, \tag{54}$$

является поэтому однозначно определенным инвариантом для двух соседних событий (точек в четырехмерном континууме), если мы только используем измерительные стержни, которые, будучи поднесены друг к другу и наложены, оказываются равными, и часы, показания которых одинаковы, когда они поднесены друг к другу. Здесь существенное значение имеет физическое предположение, что относительные длины двух измерительных стержней и относительные показания двух пар часов в принципе не зависят от их предшествующей истории. Но это предположение, конечно, подтверждается опытом; если бы оно не выполнялось, то не существовало бы резких спектральных линий, так как отдельные атомы одного и того же элемента, конечно, имеют различную историю, и было бы абсурдно допускать, что существует какое-либо относительное различие в строении отдельных атомов, обусловленное их предшествующей историей, поскольку массы и частоты отдельных атомов одного и того же элемента всегда одинаковы.

Пространственно-временны́е области конечной протяженности, вообще говоря, не будут галилеевыми, так что в конечной области никаким выбором координат нельзя исключить гравитационное поле. Поэтому нет таких координат, в которых метрические соотношения специальной теории относительности выполнялись бы в конечной области. Но для двух соседних точек (событий) континуума всегда существует инвариант ds. Его можно выразить в произвольных координатах. Если заметить, что местные dX_ν всегда можно выразить линейно через дифференциалы координат dx_ν, то ds^2 можно представить в виде

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu. \tag{55}$$

Функции $g_{\mu\nu}$ описывают в произвольно выбранной системе координат как метрические соотношения в пространственно-временно́м континууме, так и гравитационное поле. Так же как и в специальной теории относительности, мы должны различать между временноподобными и пространственноподобными линейными элементами в четырехмерном континууме; благодаря произведенному изменению знака пространственноподобным линейным элементам отвечает мнимый, а временноподобным — вещественный интервал ds. Временноподобный интервал можно непосредственно измерить выбранными подходящим образом часами.

Из того, что сказано выше, ясно, что для формулировки общей теории относительности необходимо обобщение теории инвариантов и теории тензоров; возникает вопрос о форме уравнений, ковариантных по отношению к произвольному точечному преобразованию. Обобщенное тензорное исчисление было развито математиками задолго до теории относительности. Риман первый распространил цепь рассуждений Гаусса на континуумы произвольного числа измерений; он пророчески предвидел физическое значение этого обобщения эвклидовой геометрии. Затем последовало развитие теории в виде тензорного исчисления, особенно благодаря трудам Риччи и Леви-Чивиты. Здесь уместно кратко остановиться на наиболее важных математических понятиях и операциях тензорного исчисления.

Четыре величины, определенные как функции от x_ν в каждой системе координат, мы обозначим как компоненты A^ν контравариантного вектора, если они преобразуются при замене координат как дифференциалы координат dx_ν. Мы имеем, следовательно,

$$A^{\mu'} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} A^\nu. \tag{56}$$

Кроме этих контравариантных векторов, существуют также ковариантные векторы. Эти векторы преобразуются согласно правилу

$$B'_\mu = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} B_\nu, \tag{57}$$

где B_ν — компоненты ковариантного вектора. Определение ковариантного вектора выбрано так, чтобы произведение ковариантного и контравариантного векторов представляло собой скаляр по схеме

$$\varphi = B_\nu A^\nu \quad \text{(суммирование по } \nu).$$

Действительно

$$B'_\mu A^{\mu'} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\beta} B_\alpha A^\beta = B_\alpha A^\alpha.$$

В частности, производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}$ скаляра φ являются компонентами ковариантного вектора, которые вместе с дифференциалами координат образуют скаляр $\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} dx_\alpha$; мы видим на этом примере, насколько естественно определение ковариантных векторов.

Существуют также тензоры любого ранга, которые могут обладать контравариантными или ковариантными свойствами по каждому индексу; как и в случае векторов, эти свойства указываются положением индекса. A_μ^ν, например, означает тензор второго ранга, ковариантный по индексу μ и контравариантный по индексу ν. Тензорные свойства этих величин указывают на то, что уравнениями преобразования будут

$$A_\mu^{\nu'} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} A_\alpha^\beta. \tag{58}$$

Так же как в теории линейных ортогональных преобразований, можно образовывать тензоры, складывая и вычитая тензоры равного ранга и одинакового характера, например

$$A_\mu^\nu + B_\mu^\nu = C_\mu^\nu. \tag{59}$$

Доказательство тензорного характера C_μ^ν опирается на преобразование (58).

Можно образовывать тензоры путем умножения, не нарушая характера индексов, точно так же, как в теории инвариантов линейных ортогональных преобразований, например

$$A_\mu^\nu B_{\sigma\tau} = C_{\mu\sigma\tau}^\nu. \tag{60}$$

Доказательство этого равенства непосредственно следует из правила преобразования.

Тензоры можно образовывать путем свертки по двум индексам разного характера, например,

$$A_{\mu\sigma\tau}^\mu = B_{\sigma\tau}. \tag{61}$$

Тензорные свойства $A_{\mu\sigma\tau}^\mu$ определяют тензорные свойства $B_{\sigma\tau}$. Доказательство:

$$A_{\mu\sigma\tau}^{\mu'} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_s}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_t}{\partial x'_\tau} \quad A_{\alpha st}^\beta = \frac{\partial x_s}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_t}{\partial x'_\tau} A_{\alpha st}^\alpha.$$

Симметрия и антисимметрия тензора по отношению к паре индексов одинакового характера имеют тот же смысл, что и в специальной теории относительности.

Этим сказано все существенное об алгебраических свойствах тензоров.

Фундаментальный тензор. Из инвариантности ds^2 относительно произвольного выбора dx_ν и условия симметрии, совместимого с (55), следует, что $g_{\mu\nu}$ являются компонентами симметричного ковариантного тензора (фундаментальный тензор). Образуем из $g_{\mu\nu}$ определитель g, а также деленные на g миноры для каждого $g_{\mu\nu}$. Эти деленные на g миноры будут обозначаться через $g^{\mu\nu}$; их трансформационные свойства пока еще неизвестны. Мы имеем тогда

$$g_{\mu\alpha}g^{\mu\beta} = \delta_\alpha^\beta \equiv \begin{cases} 1, \text{ если } \alpha = \beta, \\ 0, \text{ если } \alpha \neq \beta. \end{cases} \qquad (62)$$

Если мы образуем бесконечно малые величины (ковариантные векторы)

$$d\xi_\mu = g_{\mu\alpha}\,dx_\alpha, \qquad (63)$$

умножим их на $g^{\mu\beta}$ и просуммируем по μ, то получим, используя (62),

$$dx_\beta = g^{\beta\mu}\,d\xi_\mu. \qquad (64)$$

Поскольку отношения $d\xi_\mu$ произвольны, а dx_β, так же как и dx_μ являются компонентами вектора, то, следовательно, $g^{\mu\nu}$ — компоненты контравариантного тензора [18] (контравариантный фундаментальный тензор). Тензорные свойства δ_α^β (смешанный фундаментальный тензор) следуют соответственно из (62). При помощи фундаментального тензора мы можем вместо тензоров с ковариантным характером индексов вводить тензоры с контравариантным характером индексов и наоборот, например

$$A^\mu = g^{\mu\alpha}A_\alpha,$$

$$A_\mu = g_{\mu\alpha}A^\alpha,$$

$$T_\mu^\sigma = g^{\sigma\nu}T_{\mu\nu}.$$

---

[18] Если мы умножим (64) на $\dfrac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}$, просуммируем по β и заменим $d\xi_\mu$ путем перехода к штрихованным координатам, то получим

$$dx'_\alpha = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}g^{\mu\beta}\,d\xi'_\sigma.$$

Отсюда следует сделанное выше утверждение, поскольку, согласно (64), справедливо также и равенство $dx'_\alpha = g'^{\sigma\alpha}\,d\xi'_\sigma$ и оба уравнения должны выполняться при любом выборе $d\xi'_\sigma$.

Инвариантный объем. Элемент объема

$$\int dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4 = dx$$

не является инвариантом. В самом деле, по теореме Якоби

$$dx' = \left|\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\right| dx. \tag{65}$$

Но мы можем дополнить элемент объема dx так, чтобы он превратился в инвариант. Составляя определители от обеих частей равенства

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} g_{\alpha\beta}$$

и дважды используя теорему об умножении определителей, получаем

$$g' = |g'_{\mu\nu}| = \left|\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\right|^2 \cdot |g_{\mu\nu}| = \left|\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\right|^{-2} g.$$

Таким образом, мы приходим к инварианту

$$\sqrt{g'}\,dx' = \sqrt{g}\,dx. \tag{66}$$

Образование тензоров путем дифференцирования. Хотя образование тензоров при помощи алгебраических операций оказалось столь же простым, как и в частном случае инвариантности по отношению к линейным ортогональным преобразованиям, тем не менее в общем случае инвариантные дифференциальные операции, к сожалению, значительно усложняются. Причина этого заключается в следующем. Если A^μ — контравариантный вектор, то его коэффициенты преобразования $\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}$ не зависят от места только для линейных преобразований, так как в этом случае компоненты вектора в соседней точке $A^\mu + \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\alpha} dx_\alpha$ преобразуются точно так же, как A^μ, откуда следует векторный характер дифференциалов векторов и тензорный характер $\frac{\partial A'^\mu}{\partial x_\alpha}$. Но если коэффициенты $\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}$ изменяются, это уже не так.

То, что, несмотря на это, и в общем случае существуют инвариантные дифференциальные операции, наиболее убедительно можно показать следующим путем, предложенным Леви-Чивитой и Вейлем. Пусть (A^μ) — контравариантный вектор с компонентами, заданными в системе координат x_ν. Пусть P_1 и P_2 — две бесконечно близкие точки континуума.

В бесконечно малой области, содержащей точку P_1, существует, согласно развитым нами представлениям, система координат X_ν (с мнимыми координатами X_4), в которой континуум становится эвклидовым. Пусть $A^\mu_{(1)}$ — координаты вектора в точке P_1. Представим себе вектор с теми же координатами, построенный в точке P_2 в локальной системе координат X_ν (параллельный вектор в точке P_2); тогда этот параллельный вектор полностью определяется вектором в P_1 и смещением. Назовем эту операцию, однозначность которой станет ясной из дальнейшего, параллельным переносом вектора (A^μ) из точки P_1 в бесконечно близкую точку P_2. Если мы составим векторную разность вектора (A^μ) в точке P_2 и вектора, полученного параллельным переносом из P_1 в P_2, то получим вектор, который можно рассматривать как дифференциал вектора (A^μ) для данного переноса (dx_ν).

Этот векторный перенос можно, конечно, рассматривать и в системе координат x_ν. Если A^ν — координаты вектора в точке P_1 и $A^\nu + \delta A^\nu$ — координаты вектора, перенесенного в точку P_2 вдоль интервала (dx_ν), то в этом случае величины δA^ν не обращаются в нуль. Относительно этих величин, не обладающих векторными свойствами, нам известно, что они должны зависеть линейно и однородно от dx_ν и A^ν. Поэтому положим

$$\delta A^\nu = -\Gamma^\nu_{\alpha\beta} A^\alpha dx_\beta. \tag{67}$$

Кроме того, можно утверждать, что символ $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ должен быть симметричен по индексам α и β, так как из представления в локальной эвклидовой системе координат мы можем заключить, что при переносе некоторого элемента $d^{(1)}x_\nu$ вдоль другого элемента $d^{(2)}x_\nu$ описывается тот же параллелограмм, что и при переносе $d^{(2)}x_\nu$ вдоль $d^{(1)}x_\nu$. Следовательно, должно выполняться соотношение

$$d^{(2)} x_\nu + (d^{(1)} x_\nu - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} d^{(1)} x_\alpha d^{(2)} x_\beta) = d^{(1)} x_\nu + (d^{(2)} x_\nu - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} d^{(2)} x_\alpha d^{(1)} x_\beta).$$

Отсюда после перестановки в правой части равенства индексов суммирования α и β и следует сделанное выше утверждение.

Поскольку величины $g_{\mu\nu}$ определяют все метрические свойства континуума, они должны определять также $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$. Рассмотрим инвариант вектора A^ν, т. е. квадрат его модуля

$$g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu.$$

Он является инвариантом и не может изменяться при параллельном переносе. Следовательно, мы имеем

$$0 = \delta (g_{\mu\nu} A^\lambda A^\nu) = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} A^\mu A^\nu dx_\alpha + g_{\mu\nu} A^\mu \delta A^\nu + g_{\mu\nu} A^\nu \delta A^\mu,$$

или, согласно (67),

$$\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - g_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} - g_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\mu\alpha}\right) A^\mu A^\nu dx_\alpha = 0.$$

В силу симметрии стоящего в скобках выражения по индексам μ и ν, это уравнение только тогда может остаться справедливым при любом выборе векторов (A^μ) и dx_ν, когда выражение в скобках обращается в нуль при всех комбинациях индексов. Путем циклической перестановки индексов μ, ν, α получается всего три соотношения, из которых, принимая во внимание свойства симметрии $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, мы получаем

$$\begin{bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{bmatrix} = g_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\mu\nu}, \tag{68}$$

где, следуя Кристоффелю, введено сокращенное обозначение

$$\begin{bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right). \tag{69}$$

Если мы умножим (68) на $g^{\sigma\alpha}$ и просуммируем по α, то получим

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right) = \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{Bmatrix}, \tag{70}$$

где $\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{Bmatrix}$ — символ Кристоффеля второго рода. Таким образом, величины Γ выведены из $g_{\mu\nu}$. Соотношения (67) и (70) послужат нам основой для последующих рассуждений.

Ковариантное дифференцирование тензоров. Если $(A^\mu + \delta A^\mu)$ — вектор, получившийся после бесконечно малого параллельного переноса из P_1 в P_2, а $(A^\mu + dA^\mu)$ — вектор A^μ в точке P_2, то их разность

$$dA^\mu - \delta A^\mu = \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha}A^\alpha\right) dx_\sigma$$

также есть вектор. Поскольку выбор dx_σ произволен, величина

$$A^\mu_{;\sigma} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha}A^\alpha \tag{71}$$

является тензором, который мы назовем ковариантной производной от тензора первого ранга (вектора). Свертывая этот тензор, мы получаем дивергенцию контравариантного вектора A^μ. При этом мы должны учесть, что согласно (70),

$$\Gamma^\sigma_{\mu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha}\frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x_\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_\mu}. \tag{72}$$

Если мы введем, далее, величину

$$A^{\mu}\sqrt{g} = \mathfrak{A}^{\mu}, \tag{73}$$

названную Вейлем контравариантной тензорной плотностью [19] первого ранга, то отсюда следует, что

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}^{\mu}}{\partial x_{\mu}} \tag{74}$$

есть скалярная плотность.

Правило параллельного переноса ковариантного вектора B_{μ} мы получим, потребовав, чтобы при таком параллельном переносе скаляр

$$\varphi = A^{\mu} B_{\mu}$$

не менялся и, следовательно, величина

$$A^{\mu}\delta B_{\mu} + B_{\mu}\delta A^{\mu}$$

была бы равна нулю при любых значениях A^{μ}. Мы получим, таким образом,

$$\delta B_{\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} B_{\alpha}\, dx_{\sigma}. \tag{75}$$

Тем же путем, который привел нас к (71), мы приходим отсюда к ковариантной производной ковариантного вектора

$$B_{\mu;\sigma} = \frac{\partial B_{\mu}}{\partial x_{\sigma}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} B_{\alpha}. \tag{76}$$

Меняя местами индексы μ и σ и вычитая, мы получаем антисимметричный тензор

$$\varphi_{\mu\sigma} = \frac{\partial B_{\mu}}{\partial x_{\sigma}} - \frac{\partial B_{\sigma}}{\partial x_{\mu}}. \tag{77}$$

Для ковариантного дифференцирования тензоров второго и высшего рангов можно использовать прием, которым выведено соотношение (75). Пусть, например, $(A_{\sigma\tau})$ — ковариантный тензор второго ранга. Тогда выражение $A_{\sigma\tau}E^{\sigma}F^{\tau}$ будет скаляром, если E и F — векторы. Оно не должно меняться при δ-переносе; выражая это математически, получаем,

[19] Это название оправдывается тем, что величина $A^{\mu}\sqrt{g}\,dx = \mathfrak{A}^{\mu}\,dx$ обладает тензорными свойствами. Каждый тензор, будучи умножен на $\sqrt{g}$, превращается в тензорную плотность. Для тензорных плотностей мы используем прописные буквы готического алфавита.

согласно (67), $\delta A_{\sigma\tau}$. откуда находим нужную нам ковариантную производную

$$A_{\sigma\tau;\,\rho}=\frac{\partial A_{\sigma\tau}}{\partial x_\rho}-\Gamma^\alpha_{\sigma\rho}A_{\alpha\tau}-\Gamma^\alpha_{\tau\rho}A_{\sigma\alpha}. \qquad (78)$$

Чтобы отчетливо выявить общее правило ковариантного дифференцирования тензоров, выпишем две выведенные сходным образом ковариантные производные

$$A^\tau_{\sigma;\,\rho}=\frac{\partial A^\tau_\sigma}{\partial x_\rho}-\Gamma^\alpha_{\sigma\rho}A^\tau_\alpha+\Gamma^\tau_{\alpha\rho}A^\alpha_\sigma, \qquad (79)$$

$$A^{\sigma\tau}_{;\,\rho}=\frac{\partial A^{\sigma\tau}}{\partial x_\rho}+\Gamma^\sigma_{\alpha\rho}A^{\alpha\tau}+\Gamma^\tau_{\alpha\rho}A^{\sigma\alpha}. \qquad (80)$$

Общее правило образования ковариантных производных становится теперь очевидным. Из этих формул можно получить и другие формулы, представляющие интерес для физических приложений теории.

Если $A_{\sigma\tau}$ — антисимметричный тензор, то путем циклических перестановок и сложения мы получаем антисимметричный по всем парам индексов тензор:

$$A_{\sigma\tau\rho}=\frac{\partial A_{\sigma\tau}}{\partial x_\rho}+\frac{\partial A_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma}+\frac{\partial A_{\rho\sigma}}{\partial x_\tau}. \qquad (81)$$

Если в (78) мы заменим $A_{\sigma\tau}$ на фундаментальный тензор $g_{\sigma\tau}$, то правая часть тождественно обратится в нуль; аналогичное утверждение справедливо для формулы (80) по отношению к $g^{\sigma\tau}$. Таким образом, ковариантные производные фундаментального тензора равны нулю. В том, что это должно быть так, мы непосредственно убеждаемся, перейдя к локальной системе координат.

В случае антисимметричного тензора $A^{\sigma\tau}$ мы получаем из (80), свертывая по τ и ρ,

$$\mathfrak{A}^\sigma=\frac{\partial\mathfrak{A}^{\sigma\tau}}{\partial x_\tau}. \qquad (82)$$

В общем случае, свертывая по индексам τ и ρ, мы получаем из (79) и (80) соотношения

$$\mathfrak{A}_\sigma=\frac{\partial\mathfrak{A}^\alpha_\sigma}{\partial x_\alpha}-\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\,\mathfrak{A}^\beta_\alpha, \qquad (83)$$

$$\mathfrak{A}^\sigma=\frac{\partial\mathfrak{A}^{\sigma\alpha}}{\partial x_\alpha}+\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\,\mathfrak{A}^{\alpha\beta}. \qquad (84)$$

Тензор Римана. Если мы имеем кривую, соединяющую точки континуума P и G, то вектор A^μ, заданный в точке P, можно перенести параллельно вдоль нашей кривой в точку G (рис. 4). В случае эвклидова континуума (или в более общем случае, если при подходящем выборе координат $g_{\mu\nu}$ оказываются постоянными) вектор, полученный в точке G

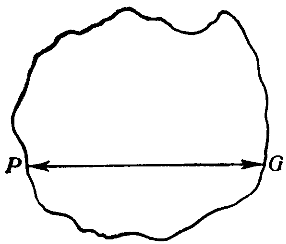


Рис. 4.

в результате этого переноса, не зависит от выбора кривой, соединяющей P и G. Однако в других случаях результат зависит от пути переноса. В этих случаях, следовательно, вектор изменяется (по направлению, но не по величине) на ΔA^{μ}, когда он из точки P, лежащей на замкнутой кривой, переносится вдоль этой кривой и возвращается обратно в P. Вычислим это изменение вектора

$$\Delta A^{\mu} = \oint \delta A^{\mu}.$$

Эту задачу можно свести к интегрированию вдоль замкнутой кривой бесконечно малых линейных размеров так же, как это делается в теореме Стокса для контурных интегралов от вектора вдоль замкнутой кривой; этим случаем мы и ограничимся.

Прежде всего, согласно (67), имеем

$$\Delta A^{\mu} = -\oint \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\alpha}\, dx_{\beta}.$$

Здесь значение $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ берется в переменной точке G пути интегрирования. Если мы положим

$$\xi^{\mu} = (x_{\mu})_G - (x_{\mu})_P$$

и обозначим значение $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ в P через $\overline{\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}}$, то с достаточной степенью точности будем иметь

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \overline{\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}} + \overline{\frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}}}\, \xi^{\nu}.$$

Пусть, далее, A^{α} получается из $\overline{A^{\alpha}}$ при параллельном переносе вдоль кривой из P в G. Тогда при помощи соотношения (67) легко доказать, что $A^\mu - \overline{A^\mu}$ — бесконечно малая первого порядка, тогда как для кривой с бесконечно малыми размерами первого порядка ΔA^μ — бесконечно малая второго порядка. Поэтому с ошибкой лишь во втором порядке можно положить

$$A^\alpha = \overline{A^\alpha} - \overline{\Gamma^\alpha_{\sigma\tau}}\ \overline{A^\sigma}\,\xi^\tau.$$

Если подставить эти значения $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ и A^α в интеграл, то, пренебрегая всеми величинами выше второго порядка малости, получаем

$$\Delta A^\mu = -\left(\frac{\partial \Gamma^\mu_{\sigma\beta}}{\partial x_\alpha} - \Gamma^\mu_{\rho\beta}\,\Gamma^\rho_{\sigma\alpha}\right) A^\sigma \oint \xi^\alpha\, d\xi^\beta. \tag{85}$$

Величины, вынесенные из-под знака интеграла, взяты в точке P. Вычитая $\frac{1}{2} d(\xi^\alpha \xi^\beta)$ из подынтегрального выражения, получаем

$$\frac{1}{2}\oint (\xi^\alpha\, d\xi^\beta - \xi^\beta\, d\xi^\alpha).$$

Этот антисимметричный тензор второго ранга $f_{\alpha\beta}$ характеризует величину и ориентацию элемента поверхности, ограниченного кривой. Если бы выражение в скобках в правой части равенства (85) было антисимметричным по индексам α и β, мы могли бы из (85) заключить о его тензорном характере. Это можно сделать, переставляя в (85) суммирование по α и β и прибавляя к (85) получившееся уравнение. Проделав это, мы получим

$$2\Delta A^\mu = -R^\mu_{\sigma\alpha\beta}\, A^\sigma f^{\alpha\beta}, \tag{86}$$

где [20]

$$R^\mu_{\sigma\alpha\beta} = -\frac{\partial \Gamma^\mu_{\sigma\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\sigma\beta}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\mu_{\rho\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\beta} - \Gamma^\mu_{\rho\beta}\,\Gamma^\rho_{\sigma\alpha}. \tag{87}$$

Тензорный характер величины $R^\mu_{\sigma\alpha\beta}$ вытекает из (86); это — тензор кривизны Римана четвертого ранга. Нам нет необходимости рассматривать его свойства симметрии. Обращение его в нуль служит достаточным условием (не считая условия вещественности выбранных координат) того, что континуум эвклидов.

Свертывая тензор Римана по индексам μ и β, получаем симметричный тензор второго ранга

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\,\Gamma^\beta_{\nu\alpha} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,\Gamma^\beta_{\alpha\beta}. \tag{88}$$

[20] Теперь в литературе определение этого тензора отличается знаком.— *Прим. ред.*

Последние два члена обращаются в нуль, если система координат выбрана так, чтобы величина g была постоянной. Из $R_{\mu\nu}$ мы можем получить скаляр

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{89}$$

Прямейшие (геодезические) линии. Можно построить линию таким образом, чтобы ее последовательные элементы получились один из другого параллельными переносами. Это естественное обобщение прямой линии эвклидовой геометрии. Для таких линий мы имеем

$$\delta\left(\frac{dx_\mu}{ds}\right) = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}dx_\beta.$$

Левую часть последнего равенства следует заменить на $\frac{d^2x_\mu}{ds^2}$ [21], так что,

$$\frac{d^2x_\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 0.$$

Ту же линию можно получить, если найти линию, вдоль которой интеграл, взятый между двумя точками,

$$\int ds, \quad \text{или} \quad \int\sqrt{g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu}$$

принимает стационарное значение (геодезическая линия).

Лекция IV

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

(продолжение)

У нас теперь есть математический аппарат, необходимый для формулировки законов общей теории относительности. Мы не преследуем цель дать систематическое и полное изложение, но из того, что нам уже известно, и из полученных результатов мы будем последовательно выводить отдельные новые результаты и указывать на открывающиеся перспективы. Такой метод изложения наилучшим образом соответствует современному незавершенному характеру наших знаний.

[21] Вектор направления в соседней точке кривой получается из вектора направления в рассматриваемой точке путем параллельного переноса его вдоль линейного элемента (dx_β).

Согласно закону инерции, материальная точка, на которую не действуют никакие силы, равномерно движется по прямой линии. В четырехмерном континууме специальной теории относительности (с вещественной временно́й координатой) это обычная прямая линия. Самым естественным, т. е. самым простым, обобщением прямой линии в системе понятий римановой общей теории инвариантов является «прямейшая», или геодезическая линия. Мы должны поэтому, в духе принципа эквивалентности, предположить, что движение материальной точки, находящейся под действием только сил инерции и тяготения, описывается уравнением

$$\frac{d^2x_\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 0. \tag{90}$$

Действительно, это уравнение превращается в уравнение прямой, если все компоненты гравитационного поля $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ обращаются в нуль.

Как связаны эти уравнения с уравнениями движения Ньютона? Согласно специальной теории относительности, как $g_{\mu\nu}$, так и $g^{\mu\nu}$ имеют в инерциальной системе координат (при условии вещественности временно́й координаты и при соответствующем выборе знака ds^2) следующие значения:

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}. \tag{91}$$

Тогда уравнения движения принимают вид

$$\frac{d^2x_\mu}{ds^2} = 0.$$

Мы будем называть это «первым приближением» для поля $g_{\mu\nu}$. При рассмотрении приближений часто бывает полезно, так же как и в специальной теории относительности, пользоваться мнимой координатой x_4, так как тогда компоненты $g_{\mu\nu}$ в первом приближении принимают значения

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right\}. \tag{91a}$$

Эти значения можно записать в форме

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}.$$

Тогда во втором приближении мы должны положить

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{92}$$

где $\gamma_{\mu\nu}$ должны рассматриваться как величины первого порядка малости.

Оба члена нашего уравнения движения будут тогда величинами первого порядка малости. Если мы пренебрегаем членами, которые по сравнению с этими являются малыми первого порядка, то мы должны положить

$$ds^2 = dx_\nu^2 = dl^2\ (1 - q^2), \tag{93}$$

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = -\delta_{\mu\sigma}\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \sigma\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\gamma_{\alpha\mu}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial\gamma_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha}\right). \tag{94}$$

Введем теперь приближение другого рода. Пусть скорость материальной точки очень мала по сравнению со скоростью света. Тогда ds совпадает с дифференциалом времени dl, а производные $\frac{dx_1}{ds}$, $\frac{dx_2}{ds}$, $\frac{dx_3}{ds}$ пренебрежимо малы по сравнению с $\frac{dx_4}{ds}$. Кроме того, мы будем предполагать, что гравитационное поле так слабо меняется с течением времени, что производными $\gamma_{\mu\nu}$ по x_4 можно пренебречь. В этом случае уравнения движения (для $\mu = 1, 2, 3$) принимают вид

$$\frac{d^2x_\mu}{dl^2} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\gamma_{44}}{2}\right). \tag{90a}$$

Это уравнение совпадает с уравнением движения Ньютона для материальной точки в гравитационном поле, если мы отождествим $(\gamma_{44}/2)$ с потенциалом гравитационного поля. Допустимо ли такое отождествление или нет, зависит, очевидно, от уравнений гравитации, т. е. от того, удовлетворяет ли эта величина в первом приближении тому же самому уравнению поля, что и потенциал тяготения в теории Ньютона. Достаточно одного взгляда на уравнения (90) и (90а), чтобы убедиться, что $\Gamma^\mu_{\beta\alpha}$ действительно играют роль напряженности гравитационного поля. Эти величины на имеют тензорного характера.

Уравнения (90) выражают влияние инерции и тяготения на материальную точку. Единство инерции и тяготения формально выражается тем фактом, что левая часть уравнения (90) в целом имеет характер тензора (по отношению к любому преобразованию координат), но каждый из двух членов, взятый в отдельности, не имеет тензорного характера. По аналогии с уравнениями Ньютона первый член должен рассматриваться как выражение для силы инерции, а второй — как выражение для гравитационной силы.

Попытаемся теперь найти законы гравитационного поля. При этом нам в качестве модели послужит уравнение Пуассона в теории Ньютона

$$\Delta\varphi = 4\pi K\rho.$$

В основе этого уравнения лежит идея, что источником гравитационного поля является плотность вещества ρ. Так же должно быть и в общей теории относительности. Но специальная теория относительности показывает, что вместо скалярной плотности вещества мы должны оперировать с тензором энергии, отнесенным к единице объема. В последний включен не только тензор энергии вещества, но и электромагнитного поля. Однако на самом деле, как мы видели, описание вещества с помощью тензора энергии, с точки зрения более точной теории, следует рассматривать только как предварительное. В действительности вещество состоит из электрически заряженных частиц и должно само рассматриваться как часть, и притом главная часть, электромагнитного поля. И только тот факт, что мы недостаточно знаем законы электромагнитного поля сконцентрированных зарядов, вынуждает нас при изложении теории оставить истинную форму этого тензора пока неопределенной. С этой точки зрения наша задача теперь состоит во введении тензора второго ранга $T_{\mu\nu}$, структура которого нам пока известна лишь приблизительно и который включает в себя плотность энергии электромагнитного поля и вещества. В дальнейшем мы будем его называть «тензором энергии материи».

Согласно нашим прежним результатам, законы сохранения энергии и импульса сводятся к требованию, чтобы дивергенция этого тензора обращалась в нуль [см. (47в)]. Мы будем предполагать, что в общей теории относительности выполняется соответствующее общековариантное уравнение. Если через $(T_{\mu\nu})$ обозначить ковариантный тензор энергии материи, а через $\mathfrak{T}_\sigma^\alpha$ — соответствующую смешанную тензорную плотность, то в соответствии с (83) мы должны потребовать, чтобы удовлетворялось уравнение

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\mathfrak{T}_\sigma^\alpha - \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \mathfrak{T}_\alpha^\beta. \qquad (95)$$

Необходимо помнить, что, кроме плотности энергии материи, должна быть задана и плотность энергии гравитационного поля, так что не может быть и речи о законах сохранения энергии и импульса одной только материи. Математическим выражением этого факта является наличие второго члена в (95), который не допускает существования интегрального уравнения типа (49). Гравитационное поле передает «материи» энергию и импульс, подвергая ее действию сил и сообщая ей энергию; это выражается вторым членом в уравнении (95).

Если в общей теории относительности существует уравнение, аналогичное уравнению Пуассона, то оно должно быть тензорным уравнением для тензора гравитационного потенциала $g_{\mu\nu}$. Правая часть его должна содержать тензор энергии материи, а левая — тензор, составленный из производных от $g_{\mu\nu}$. Мы должны найти этот дифференциальный тензор. Он полностью определяется следующими тремя условиями: 1) он не может содержать производных от $g_{\mu\nu}$ выше второго порядка; 2) он должен быть линейным и однородным относительно вторых производных от $g_{\mu\nu}$; 3) его дивергенция должна тождественно обращаться в нуль.

Первые два из этих условий естественным образом вытекают из уравнения Пуассона. Поскольку может быть доказано математически, что все такие дифференциальные тензоры могут быть образованы алгебраическим путем (т. е. без дифференцирования) из тензора Римана, наш тензор должен иметь вид

$$R_{\mu\nu} + ag_{\mu\nu}R,$$

где $R_{\mu\nu}$ и R определяются соответственно соотношениями (88) и (89). Далее можно показать, что из третьего условия вытекает, что $a = -{}^1/_2$, и поэтому для уравнения гравитационного поля получаем

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\varkappa T_{\mu\nu}. \tag{96}$$

Уравнение (95) есть следствие этого уравнения. Здесь $\varkappa$ означает постоянную, связанную с гравитационной постоянной Ньютона.

В дальнейшем я укажу на те стороны теории, которые представляют интерес с точки зрения физики; при этом я постараюсь как можно меньше пользоваться довольно сложным математическим аппаратом теории. Прежде всего должно быть показано, что дивергенция левой части действительно равна нулю. Закон сохранения энергии для материи при помощи (83) может быть выражен уравнением

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \mathfrak{T}_\sigma^\alpha - \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \mathfrak{T}_\alpha^\beta, \tag{97}$$

где

$$\mathfrak{T}_\sigma^\alpha = T_{\sigma\tau} g^{\tau\alpha} \sqrt{-g}.$$

Произведя аналогичную операцию над левой частью уравнения (96), мы получим тождественно нуль.

В окрестности любой мировой точки существуют системы координат, относительно которых (при выборе мнимой координаты x_4) в этой точке

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} -1, & \text{если } \mu = \nu \\ 0, & \text{если } \mu \neq \nu \end{cases}$$

и первые производные от $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ обращаются в нуль. Покажем, что в этой точке дивергенция левой части обращается в нуль. В этой точке компоненты $\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}$ равны нулю, так что мы должны доказать равенство нулю выражения

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left[\sqrt{-g}g^{\nu\sigma}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\right].$$

Подставляя (88) и (70) в это выражение, мы видим, что в нем остаются только члены, содержащие третьи производные от $g^{\mu\nu}$. Так как $g_{\mu\nu}$ должно быть заменено на $-\delta_{\mu\nu}$, то в результате останется всего несколько членов, которые, как легко видеть, взаимно уничтожаются. Так как образованное нами выражение имеет тензорный характер, то обращение его в нуль доказано и для всех остальных систем координат, а также, естественно, и для любой другой мировой точки. Таким образом, закон сохранения энергии (97) оказывается математическим следствием уравнений поля (96).

Чтобы выяснить, согласуются ли уравнения (96) с опытом, мы должны прежде всего исследовать, приводят ли они в качестве первого приближения к теории Ньютона. Для этого мы должны сделать в этих уравнениях ряд приближений. Мы уже знаем, что эвклидова геометрия и закон постоянства скорости света справедливы с хорошей точностью в таких больших областях, как наша солнечная система. Это значит, что если мы выберем, как в специальной теории относительности, четвертую координату мнимой, то мы должны положить

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{98}$$

где $\gamma_{\mu\nu}$ настолько малы по сравнению с единицей, что можно пренебречь как более высокими степенями $\gamma_{\mu\nu}$, так и их производными. Если мы это сделаем, мы не получим никаких сведений о структуре гравитационного поля или о метрическом пространстве космических размеров, но мы сможем изучить влияние соседних масс на физические явления.

Прежде чем вводить эти приближения, преобразуем уравнения (96). Умножим (96) на $g^{\mu\nu}$ и просуммируем по μ и ν. Учитывая соотношение

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4,$$

вытекающее из определения $g^{\mu\nu}$, мы получаем уравнение

$$R = \varkappa g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \varkappa T.$$

Подставляя это значение R в (96), получаем

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right) = -\varkappa T^{*}_{\mu\nu}. \tag{96а}$$

Вводя приближения, о которых говорилось выше, получаем для левой части уравнения

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 \gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha}\right),$$

или

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial \gamma'_{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \gamma'_{\nu\alpha}}{\partial x_\alpha}\right),$$

где мы положили

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\sigma\sigma}\delta_{\mu\nu}. \tag{99}$$

Вспомним теперь, что уравнения (96) справедливы в любой системе координат. Мы уже специализировали систему координат, выбрав ее таким образом, чтобы в изучаемой области $g_{\mu\nu}$ бесконечно мало отклонялись от постоянных значений — $\delta_{\mu\nu}$. Но это условие остается удовлетворенным при любом бесконечно малом преобразовании координат, так что мы можем наложить на $\gamma_{\mu\nu}$ еще четыре условия, если только они не меняют порядка величины $\gamma_{\mu\nu}$. Пусть система координат выбрана так, что удовлетворяются следующие четыре соотношения:

$$0 = \frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{\sigma\sigma}}{\partial x_\mu}. \tag{100}$$

Тогда (96а) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} = 2\varkappa T^{*}_{\mu\nu}. \tag{96б}$$

Эти уравнения могут быть решены обычным в электродинамике методом запаздывающих потенциалов; вводя не требующие разъяснений обозначения, мы получаем

$$\gamma_{\mu\nu} = -\frac{\varkappa}{2\pi}\int \frac{T^{*}_{\mu\nu}(x_0, y_0, z_0, t-r)}{r} dV_0. \tag{101}$$

Чтобы увидеть, в каком смысле эти уравнения содержат теорию Ньютона, мы должны более подробно рассмотреть тензор энергии материи. Феноменологически этот тензор представляет собой сумму тензоров энергии электромагнитного поля и вещества. Что касается относительной величины этих двух членов, то из результатов специальной теории относительности следует, что вклад электромагнитного поля в тензор энергии практически несуществен по сравнению с частью, соответствующей веществу. В нашей системе единиц энергия одного грамма вещества равна единице. По сравнению с ней можно пренебречь энергией электрического поля, а также энергией деформации вещества и даже химической энергией. Мы получим совершенно достаточное для наших целей приближение, если положим

$$\left.\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \sigma \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} \\ ds^2 &= g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu \end{aligned}\right\}. \tag{102}$$

Здесь σ — плотность в состоянии покоя, т. е. плотность вещества в обычном смысле слова, измеренная с помощью единичного измерительного стержня и отнесенная к галилеевой системе координат, движущейся вместе с веществом.

Заметим далее, что в выбранной нами системе координат замена $g_{\mu\nu}$ на $-\delta_{\mu\nu}$ приведет лишь к сравнительно малой ошибке. Поэтому мы примем, что

$$ds^2 = -\sum dx_\mu^2. \tag{102a}$$

Предыдущие выводы не зависят от того, с какой скоростью движутся относительно избранной нами системы квазигалилеевых координат создающие поле массы. В астрономии, однако, приходится иметь дело с массами, скорости которых относительно используемой системы координат всегда малы по сравнению со скоростью света, т. е. при нашем выборе единицы времени малы по сравнению с 1. Следовательно, мы получим достаточное почти для всех практических целей приближение, если в (101) заменим запаздывающий потенциал обычным (незапаздывающим) потенциалом, и для масс, создающих поле, положим

$$\begin{gathered} \frac{dx_1}{ds} = \frac{dx_2}{ds} = \frac{dx_3}{ds} = 0. \\ \frac{dx_4}{ds} = \frac{\sqrt{-1}\,dl}{dl} = \sqrt{-1}. \end{gathered} \tag{103}$$

Тогда для $T^{\mu\nu}$ и $T_{\mu\nu}$ мы получим значения

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma \end{matrix}\right\}. \tag{104}$$

При этом T равно σ, а компоненты $T^{\bullet}_{\mu\nu}$ равны

$$\left.\begin{matrix} \frac{\sigma}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sigma}{2} \end{matrix}\right\} . \qquad (104а)$$

Используя эти значения, из (101) получаем

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = -\frac{\varkappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}; \qquad \gamma_{44} = \frac{\varkappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}, \qquad (101а)$$

а все остальные компоненты $\gamma_{\mu\nu}$ равны нулю. Последнее из этих уравнений, совместно с уравнением (90а), содержит в себе теорию тяготения Ньютона. Если мы заменим l на ct, то получим

$$\frac{d^2x_\mu}{dt^2} = \frac{\varkappa c^2}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\int\frac{\sigma dV_0}{r}. \qquad (90б)$$

Мы видим, что ньютоновская гравитационная постоянная K связана с постоянной $\varkappa$, входящей в наши уравнения, соотношением

$$K = \frac{\varkappa c^2}{8\pi}. \qquad (105)$$

Из известного численного значения K следует, что

$$\varkappa = \frac{8\pi K}{c^2} = \frac{8\pi\cdot 6,67\cdot 10^{-8}}{9\cdot 10^{20}} = 1,86\cdot 10^{-27}. \qquad (105а)$$

Из соотношения (101) видно, что даже в первом приближении структура гравитационного поля коренным образом отличается от структуры поля, которая вытекает из теории Ньютона. Отличие заключается в том, что гравитационный потенциал является тензором, а не скаляром. Это не было обнаружено ранее, поскольку в уравнения движения материальных тел в первом приближении входит только одна компонента g_{44}.

Чтобы на основании наших результатов сделать заключение о поведении измерительных стержней и часов, необходимо обратить внимание на следующие факты. Согласно принципу эквивалентности, метрические соотношения эвклидовой геометрии остаются справедливыми относительно декартовой системы координат бесконечно малых размеров, находящейся в соответствующем состоянии движения (свободное падение без вращения). Это утверждение верно и для локальных систем координат, имеющих малое ускорение относительно последней, а следовательно, и для систем координат, покоящихся относительно избранной нами системы. Для интервала между двумя соседними событиями в такой локальной системе координат мы имеем

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dT^2 = -dS^2 + dT^2,$$

где dS непосредственно измеряется при помощи измерительного стержня, а dT — при помощи часов, покоящихся относительно этой системы; это — естественно измеренные длина и время. Поскольку, с другой стороны, для ds^2 известно выражение через координаты x_ν, используемые в конечных областях,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu,$$

мы можем получить соотношение между естественным образом измеренными длиной и временем и соответствующими разностями координат. Так как разделение на пространство и время происходит в обеих системах координат одинаково, то, приравнивая два выражения для ds^2, мы получаем два соотношения. Если, согласно (101а), положим

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{\varkappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \left(1 - \frac{\varkappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right) dl^2,$$

то с хорошим приближением получим

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2} &= \left(1 + \frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}, \\ dT &= \left(1 - \frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right) dl. \end{aligned}\right\} \qquad (106)$$

Следовательно, в избранной нами системе координат единичный измерительный стержень имеет длину

$$1 - \frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}.$$

Сделанный нами выбор системы координат гарантирует, что длина стержня зависит только от местонахождения стержня, но не от его ориентации. При другом выборе системы координат это было бы не так. Но какую бы мы ни выбрали систему координат, законы конфигурации твердых стержней не совпадут с законами эвклидовой геометрии. Другими словами, мы не можем подобрать такую систему координат, в которой разности координат Δx_1, Δx_2, Δx_3, соответствующие концам произвольно ориентированного единичного измерительного стержня, всегда бы удовлетворяли соотношению $\Delta x_1{}^2 + \Delta x_2{}^2 + \Delta x_3{}^2 = 1$. В этом смысле пространство не является эвклидовым, оно «искривлено». Из второго соотношения (106) следует, что промежутку времени между двумя ударами часов ($dT = 1$) в принятых в нашей системе координат единицах соответствует «время»

$$1 + \frac{\varkappa}{8\pi}\int \frac{\sigma dV_0}{r}.$$

В соответствии с этим часы идут тем медленнее, чем больше масса вещества, находящегося вблизи них. Отсюда мы заключаем, что спектральные линии излучения солнечной поверхности будут сдвинуты в красную сторону спектра по сравнению с соответствующими линиями земного происхождения на величину, примерно равную $2 \cdot 10^{-6}$ их длины волны. Сначала казалось, что этот важный вывод теории не согласуется с экспериментом, однако результаты последних лет делают существование этого эффекта более вероятным. Вряд ли можно сомневаться, что это следствие теории будет экспериментально подтверждено в ближайшем будущем.[22]

Другое важное следствие теории, которое может быть подвергнуто экспериментальной проверке, касается траектории светового луча. В общей теории относительности скорость распространения света тоже постоянна, если ее измерять в локальной инерциальной системе координат. При нашем естественном выборе единицы времени эта скорость равна 1. Таким образом, согласно общей теории относительности, закон распространения света в произвольной системе координат описывается уравнением

$$ds^2 = 0.$$

В используемом нами приближении в избранной системе координат скорость света характеризуется, согласно (106), уравнением

$$\left(1 + \frac{\varkappa}{4\pi}\int \frac{\sigma dV_0}{r}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) = \left(1 - \frac{\varkappa}{4\pi}\int \frac{\sigma dV_0}{r}\right) dl^2.$$

Следовательно, скорость света L в нашей системе координат получается равной

$$\frac{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}}{dl} = 1 - \frac{\varkappa}{4\pi}\int \frac{\sigma dV_0}{r}. \qquad (107)$$

Отсюда можно сделать заключение, что при прохождении вблизи большой массы луч света отклоняется от первоначального направления. Если мы вообразим себе массу Солнца M сосредоточенной в начале нашей системы координат, то луч света, распространяющийся в плоскости (x_1, x_3)

[22] Эффект красного смещения качественно подтвержден.— *Прим. ред.*

параллельно оси x_3 на расстоянии Δ от начала координат, в итоге отклонится по направлению к Солнцу на величину

$$\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{L} \frac{dL}{dx_1} dx_3.$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$\alpha = \frac{\varkappa M}{2\pi\Delta}. \tag{108}$$

Наличие этого отклонения, которое равно 1,7'' для Δ, равного радиусу Солнца, было с замечательной точностью подтверждено английской экспедицией по изучению солнечного затмения в 1919 г.; были проведены тщательные приготовления для получения более точных данных во время солнечного затмения 1922 г. Следует заметить, что и этот результат теории не зависит от выбора системы координат.

Здесь же уместно указать и на третье следствие теории, поддающееся экспериментальной проверке; оно связано с движением перигелия планеты Меркурий. Вековые изменения планетных орбит известны с такой точностью, что использовавшееся нами приближение становится недостаточным для сравнения теории с данными опыта. Нам необходимо вернуться к общим уравнениям поля (96). При решении этой проблемы я пользовался методом последовательных приближений. С тех пор, однако, проблема статического центрально-симметричного гравитационного поля была полностью решена Шварцшильдом и др.; особенно изящен вывод, данный Г. Вейлем в его книге «Пространство, время, материя»[23]. Вычисления несколько упрощаются, если исходить не из уравнения (96) непосредственно, а из вариационного принципа, эквивалентного этому уравнению. Укажем здесь лишь общий ход рассуждений, чтобы дать понятие о методе решения.

В случае статического поля ds^2 должно иметь вид

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= -d\sigma^2 + f^2\,dx_4^2 \\ d\sigma^2 &= \sum_1^3 \gamma_{\alpha\beta}\,dx_\alpha\,dx_\beta \end{aligned}\right\}, \tag{109}$$

где в последнем равенстве суммирование распространяется лишь на пространственные координаты. Центральная симметрия поля требует, чтобы $\gamma_{\mu\nu}$ имели вид

$$\gamma_{\alpha\beta} = \mu\delta_{\alpha\beta} + \lambda x_\alpha x_\beta, \tag{110}$$

[23] См. примечание на стр. 108.— *Прим. ред.*

а f^2, μ и λ были бы функциями только от $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Одна из этих трех функций может быть выбрана произвольно, так как выбор нашей системы координат a priori совершенно произволен; действительно, подстановкой

$$x_4' = x_4,$$

$$x_\alpha' = F(r)\, x_\alpha,$$

всегда можно добиться того, чтобы одна из этих трех функций была любой наперед заданной функцией r'. Поэтому без ограничения общности вместо (110) можно положить

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \lambda x_\alpha x_\beta. \tag{110a}$$

Таким образом, $g_{\mu\nu}$ выражаются через две величины λ и f. Зависимость этих величин от r определяется путем подстановки их в уравнение (96), в котором $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ вычислены с помощью соотношений (107) и (108):

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\varkappa_\sigma}{r}\frac{\lambda x_\alpha x_\beta + 2\lambda r \delta_{\alpha\beta}}{1+\lambda r^2} && (\text{при } \alpha, \beta, \sigma = 1, 2, 3), \\ &\Gamma^4_{44} = \Gamma^\alpha_{4\beta} = \Gamma^4_{\alpha\beta} = 0 && (\text{при } \alpha, \beta = 1, 2, 3), \\ &\Gamma^4_{4\alpha} = \frac{1}{2} f^{-2}\frac{\partial f^2}{\partial x_\alpha}, \quad \Gamma^\alpha_{44} = -\frac{1}{2} f^{-2}\frac{\partial f^2}{\partial x_\alpha}. \end{aligned}\right\}. \tag{108a}$$

С помощью этих соотношений из уравнений поля получается следующее решение Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{A}{r}\right) dl^2 - \left[\frac{dr^2}{1 - \frac{A}{r}} + r^2 (\sin^2\ \theta d\varphi^2 + d\theta^2)\right], \tag{109}$$

мы положили

$$\left.\begin{aligned} &x_4 = 1 \\ &x_1 = r\sin\theta\ \sin\varphi \\ &x_2 = r\sin\theta\ \cos\varphi \\ &x_3 = r\cos\theta \\ &A = \frac{\varkappa M}{\pi 4} \end{aligned}\right\}. \tag{109a}$$

Здесь M — масса Солнца, сферически-симметрично распределенная вокруг начала координат. Решение (109) справедливо только вне этой массы, где все $T_{\mu\nu}$ равны нулю. Если движение планеты происходит в плоскости (x_1, x_2), то мы должны заменить (109) на

$$ds^2 = \left(1 - \frac{A}{r}\right) dl^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{A}{r}} - r^2 d\varphi^2. \tag{109б}$$

При расчете орбиты планеты будем исходить из уравнения (90). Из первых соотношений (108а) и уравнения (90) мы получаем (для индексов 1, 2, 3)

$$\frac{d}{ds}\left(x_\alpha \frac{dx_\beta}{ds} - x_\beta \frac{dx_\alpha}{ds}\right) = 0,$$

или, после интегрирования и перехода к полярным координатам,

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \text{const}. \tag{111}$$

Для $\mu = 4$ из (90) получаем

$$0 = \frac{d^2 l}{ds^2} + \frac{1}{f^2} \frac{df^2}{dx_\alpha} \frac{dx_\alpha}{ds} = \frac{d^2 l}{ds^2} + \frac{1}{f^2} \frac{df^2}{ds}.$$

Отсюда, после умножения на f^2 и интегрирования, имеем:

$$f^2 \frac{dl}{ds} = \text{const}. \tag{112}$$

Соотношения (109б), (111) и (112) дают нам три уравнения для четырех переменных s, r, l и φ, из которых орбита планеты может быть вычислена таким же образом, как и в классической механике. Наиболее важным результатом этих вычислений является вековое вращение эллиптической орбиты планеты в направлении обращения планеты по орбите, причем угол поворота орбиты за одно обращение планеты равен

$$\frac{24\pi^3 a^2}{(1 - e^2) c^2 T^2}, \tag{113}$$

где a — большая полуось орбиты в сантиметрах, e — эксцентриситет орбиты, $c = 3 \cdot 10^{10}$ *см/сек* — скорость света в пустоте, T — период обращения планеты в секундах. Таким путем удается объяснить движение перигелия Меркурия, которое было известно еще сто лет назад (со времен Леверье), но которому теоретическая астрономия до сих пор не могла дать удовлетворительного объяснения.

Не представляет труда изложить теорию электромагнитного поля Максвелла на языке общей теории относительности. Для этого необходимо использовать правила образования тензоров (81), (82) и (77). Введем четырехмерный вектор-потенциал электромагнитного поля φ_μ, являющийся тензором первого ранга. Тензор электромагнитного поля может быть определен с помощью соотношения

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi_\mu}{dx_\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu}. \tag{114}$$

Вторая пара уравнений Максвелла записывается тогда в виде тензорного уравнения, вытекающего из (114):

$$\frac{\partial \varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial \varphi_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \varphi_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} = 0, \tag{114a}$$

а первая пара уравнений Максвелла может быть представлена с помощью тензорной плотности в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathfrak{F}^{\mu\nu} = \mathfrak{J}^\mu, \tag{115}$$

где

$$\mathfrak{F}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} \varphi_{\sigma\tau},$$

$$\mathfrak{J}^\mu = \sqrt{-g}\rho \frac{dx_\mu}{ds}.$$

Если подставить тензор энергии электромагнитного поля в правую часть уравнения (96) и взять дивергенцию от обеих частей, то получится уравнение (115) для частного случая $\mathfrak{J}^\mu = 0$. Такое включение теории электричества в схему общей теории относительности многие теоретики считали необоснованным и неудовлетворительным. Кроме того, таким путем нельзя объяснить равновесие электрических зарядов, из которых построены элементарные заряженные частицы. Более предпочтительной была бы теория, в которой гравитационное и электромагнитное поля не выступали бы как логически разобщенные понятия. Г. Вейль и недавно Т. Калуца установили в этом направлении ряд замечательных теорем, но я уверен, что они не приближают нас к действительному решению основной проблемы. Я не буду здесь входить в подробности этого вопроса, а вкратце остановлюсь на так называемой космологической проблеме, так как без этого остаются в некотором смысле неудовлетворительными соображения, приведшие нас к общей теории относительности.

Наши прежние рассуждения, основывавшиеся на уравнениях поля (96), исходили из предположения, что пространство в целом является пространством Эвклида — Галилея и что этот характер пространства нарушается только присутствием масс. Такое предположение безусловно оправдано до тех пор, пока мы имеем дело с областями пространства, с которыми обычно работают астрономы. Однако совсем другой вопрос, остаются ли квазиэвклидовыми сколь угодно большие области пространства. Чтобы пояснить это, рассмотрим пример из теории поверхностей, которым мы уже неоднократно пользовались. Если какая-то часть поверхности на глаз кажется практически плоской, то это вовсе не означает, что вся поверхность является плоскостью; эта поверхность с таким же успехом может быть сферой достаточно большого радиуса. Вопрос о том, является ли Вселенная в целом неэвклидовой, многократно обсуждался с геометрической точки зрения еще до создания теории относительности. Однако с развитием последней эта проблема вступила в новый этап, так как, согласно общей теории относительности, геометрические свойства тел не задаются сами по себе, а связаны с распределением масс.

Если бы Вселенная была квазиэвклидова, то это означало бы, что Мах был совершенно неправ, полагая, что инерция так же, как и тяготение, зависит от характера взаимодействия между телами. Действительно, в этом случае при удачном выборе системы координат $g_{\mu\nu}$ были бы постоянными на бесконечности, как это принимается в специальной теории относительности, а в конечных областях при подходящем выборе системы координат лишь немного отклонялись бы от этих постоянных значений вследствие влияния масс в этих областях. Физические свойства пространства тогда были бы в общих чертах не связаны с материей, хотя и не были бы полностью независимыми от нее, но были бы обусловлены ею в весьма слабой степени. Такая дуалистическая концепция неудовлетворительна уже сама по себе; кроме того, против нее можно выдвинуть веские физические соображения, которые мы и рассмотрим ниже.

Гипотеза, согласно которой Вселенная бесконечна и эвклидова на бесконечности, является, с точки зрения теории относительности, довольно сложной гипотезой. На языке общей теории относительности такая гипотеза требует, чтобы тензор Римана четвертого ранга R_{iklm} обращался бы в нуль на бесконечности, что дает 20 независимых условий, тогда как только 10 компонент тензора кривизны $R_{\mu\nu}$ входят в уравнения гравитационного поля. Нельзя удовлетвориться постулированием столь далеко идущего ограничения, не имея для этого каких-либо физических оснований.

Между тем теория относительности дает основания полагать, что Мах был на правильном пути, когда он высказал мысль о зависимости инерции от характера взаимодействия между телами. Ниже мы покажем, что, согласно нашим уравнениям, инертные массы действуют друг на друга в смысле относительности инерции, хотя и очень слабо. Что мы можем ожидать, если будем следовать идеям Маха?

1. Инерция тела должна возрастать по мере скопления весомых масс вблизи него.

2. Тело должно испытывать ускоряющую силу, когда близлежащие массы ускоряются; эта сила по направлению должна совпадать с направлением ускорения.

3. Вращающееся полое тело должно создавать внутри себя «поле кориолисовых сил», стремящееся отклонить движущиеся тела в направлении вращения, а также создавать радиальное поле центробежных сил.

Мы сейчас покажем, что все эти три эффекта, существование которых следует ожидать с точки зрения идей Маха, действительно существуют согласно нашей теории; величина этих эффектов так мала, что об их экспериментальном подтверждении в лабораторных условиях нечего и думать. Для этого мы вернемся к уравнениям движения материальной точки (90) и исследуем более высокие приближения, чем то, которое привело нас к уравнению (90а).

Прежде всего мы будем считать γ_{44} величиной первого порядка малости. Квадрат скорости тела, движущегося под влиянием гравитационных сил, согласно выражению для энергии, есть величина того же порядка. Поэтому логично считать скорости как рассматриваемых тел, так и тел, создающих гравитационное поле, малыми величинами порядка $^1/_2$. Уравнения, следующие из уравнений движения (90) и уравнений поля (101), мы примем в том виде, который получится, если во втором слагаемом в (90) оставить лишь члены, линейные по скоростям. Далее, мы не будем считать ds и dl равными друг другу, а, учтя дальнейшие члены разложения, положим

$$ds = \sqrt{g_{44}}\,dl = \left(1 - \frac{\gamma_{44}}{2}\right)dl.$$

Из (90) мы получаем сначала

$$\frac{d}{dl}\left[\left(1 + \frac{\gamma_{44}}{2}\right)\frac{dx_\mu}{dl}\right] = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dl}\frac{dx_\beta}{dl}\left(1 + \frac{\gamma_{44}}{2}\right). \qquad (116)$$

Из (101) в нашем приближении следует

$$\left.\begin{aligned} -\gamma_{11} = -\gamma_{22} = -\gamma_{33} = \gamma_{44} &= \frac{\varkappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}, \\ \gamma_{4\alpha} &= -\frac{i\varkappa}{2}\int\frac{\sigma\frac{dx_\alpha}{ds}dV_0}{r}, \\ \gamma_{\alpha\beta} &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (117)$$

где α и β означают только пространственные индексы.

В правой части уравнения (116) мы можем заменить $1 + (\gamma_{44}/2)$ на 1 и $-\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ на $\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{bmatrix}$. Кроме того, легко видеть, что в нашем приближении мы должны положить

$$\begin{bmatrix}44\\ \mu\end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{44}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial\gamma_{4\mu}}{\partial x_4},$$

$$\begin{bmatrix}\alpha 4\\ \mu\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_{4\mu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \gamma_{4\alpha}}{\partial x_\mu}\right),$$

$$\begin{bmatrix}\alpha \beta\\ \mu\end{bmatrix} = 0,$$

где α, β и μ обозначают только пространственные индексы. Мы получаем тогда из (116) в обычных векторных обозначениях

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dl}[(1+\bar{\sigma})\,\mathrm{v}] &= \operatorname{grad}\bar{\sigma} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial l} + [\operatorname{rot}\mathfrak{A}, \mathrm{v}],\\ \bar{\sigma} &= \frac{\varkappa}{8\pi}\int \frac{\sigma dV_0}{r},\\ \mathfrak{A} &= \frac{\varkappa}{2}\int \frac{\sigma \frac{dx_\alpha}{dl} dV_0}{r} \end{aligned}\right\}. \tag{118}$$

Из уравнений движения (118) действительно следует, что:

1. Инертная масса пропорциональна $1+\bar{\sigma}$ и поэтому возрастает по мере приближения весомых масс к нашему «пробному телу».

2. Ускоряющиеся массы оказывают индукционное действие на пробное тело в направлении ускорения, что описывается членом $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial l}$.

3. Материальная точка, движущаяся внутри полого вращающегося тела перпендикулярно оси вращения, отклоняется в направлении вращения (силы Кориолиса). Упоминавшийся выше центробежный эффект внутри вращающегося полого тела также следует из теории, как это было показано Тиррингом [24].

Хотя вследствие малости постоянной $\varkappa$ все эти эффекты нельзя наблюдать на опыте, они, несомненно, существуют. Это следует из общей теории относительности. Существование этих эффектов является сильным аргументом в пользу идей Маха об относительности всех инерциальных воздействий. Последовательно проводя эту точку зрения до конца, мы должны ожидать, что *вся* инерция, т. е. *все* поле $g_{\mu\nu}$, определяется в первую очередь распределением материи во Вселенной, а не граничными условиями на бесконечности.

Для построения удовлетворительной концепции поля $g_{\mu\nu}$ космических размеров, по-видимому, важен тот факт, что относительные скорости

[24] То, что центробежное действие неразрывно связано с существованием кориолисова поля, можно понять даже без вычислений. Для этого достаточно рассмотреть координатную систему, равномерно вращающуюся по отношению к инерциальной системе. Наши общековариантные уравнения, конечно, применимы и в такой системе координат.

звезд малы по сравнению со скоростью света. Действительно, отсюда следует, что при соответствующем выборе координатной системы, g_{44} почти постоянна во Вселенной, по крайней мере в той ее части, в которой имеется материя. Более того, кажется естественным допустить, что звезды имеются во всех частях Вселенной. Тогда можно предположить, что непостоянство g_{44} связано только с тем обстоятельством, что вещество не распределено непрерывно, а сосредоточено в отдельных небесных телах или системах тел. Если мы, желая изучить геометрические свойства Вселенной как целого, захотим пренебречь этими местными неоднородностями плотности вещества и поля $g_{\mu\nu}$, то естественно заменить фактическое распределение масс непрерывным распределением и, кроме того, приписать этому распределению постоянную плотность σ. В такой воображаемой Вселенной все пространственные точки и направления в пространстве будут геометрически эквивалентны; в своих пространственных измерениях она будет обладать постоянной кривизной и будет цилиндрической по отношению к x_4-координате. Особенно привлекательным в этой схеме является то, что Вселенная оказывается пространственно ограниченной и, согласно нашему предположению о постоянстве плотности σ, обладает постоянной кривизной, будучи сферической или эллиптической. В этом случае граничные условия на бесконечности, столь неудобные с точки зрения общей теории относительности, заменяются гораздо более естественными условиями для замкнутой поверхности [25].

Итак, согласно сказанному, положим

$$ds^2 = dx_4^2 - \gamma_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu, \tag{119}$$

где индексы μ и ν пробегают только значения от 1 до 3. Величины $\gamma_{\mu\nu}$ должны быть такими функциями x_1, x_2 и x_3, чтобы описывать трехмерный континуум с постоянной положительной кривизной. Мы должны теперь исследовать, можно ли удовлетворить такому предположению, исходя из уравнений гравитационного поля.

Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны сначала найти дифференциальные соотношения, которым удовлетворяет трехмерное многообразие постоянной кривизны. Сферическое трехмерное многообразие, погруженное в эвклидово пространство четырех измерений [26], определяется уравнениями:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2,$$
$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = ds^2.$$

[25] Ср. статью 69.— *Прим. ред.*

[26] Четвертое пространственное измерение вводится здесь, конечно, исключительно из соображений математического удобства.

Исключая из обоих уравнений x_4, получаем

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}.$$

Пренебрегая членами, содержащими x_ν в третьей и более высоких степенях, мы можем вблизи начала координат положить

$$ds^2 = \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{a^2}\right) dx_\mu \, dx_\nu.$$

Выражение в скобках дает $g_{\mu\nu}$ рассматриваемого многообразия в окрестности начала координат. Поскольку первые производные $g_{\mu\nu}$, а следовательно и $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$, обращаются в нуль в начале координат, величина $R_{\mu\nu}$ для этого многообразия может быть очень легко вычислена в начале координат при помощи формулы (88). Тогда получим

$$R_{\mu\nu} = \frac{2}{a^2} \delta_{\mu\nu} = \frac{2}{a^2} g_{\mu\nu}.$$

Поскольку равенство $R_{\mu\nu} = (2/a^2) g_{\mu\nu}$ ковариантно, а все точки нашего многообразия геометрически эквивалентны, это соотношение справедливо для любой системы координат и в любой точке многообразия. Во избежание путаницы, с четырехмерным континуумом будем в дальнейшем величины, относящиеся к трехмерному континууму, обозначать греческими буквами, соответственно чему перепишем приведенное выше равенство в виде

$$\mathrm{P}_{\mu\nu} = -\frac{2}{a^2} \gamma_{\mu\nu}. \tag{120}$$

Применим теперь уравнения поля (96) к нашему случаю. Из (119) мы получим для четырехмерного многообразия:

$$\left.\begin{aligned} &R_{\mu\nu} = \mathrm{P}_{\mu\nu} \ \text{для индексов от 1 до 3} \\ &R_{14} = R_{24} = R_{34} = R_{44} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{121}$$

Чтобы написать правую часть уравнения (96), рассмотрим тензор энергии для вещества, распределенного наподобие облака пыли. Согласно сказанному выше, мы должны положить

$$T^{\mu\nu} = \sigma \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds},$$

считая при этом, что все находится в покое. Но дополнительно мы добавим к этому выражению член, описывающий давление. Необходимость его можно физически обосновать следующим образом. Вещество состоит из электрически заряженных частиц. В рамках теории Максвелла они не могут быть описаны как свободные от особенностей электромагнитные поля. Чтобы не противоречить фактам, в выражение для энергии необходимо ввести дополнительные члены, не содержащиеся в теории Максвелла, которые обеспечили бы устойчивость электрически заряженных частиц, несмотря на взаимное отталкивание составляющих их одноименно заряженных частей. Именно в связи с этим Пуанкаре предположил, что внутри этих частиц существует давление, которое и компенсирует электростатическое отталкивание. Нельзя, однако, определенно утверждать, что это давление обращается в нуль вне частиц. Мы придем к согласию с этими представлениями, если в нашем феноменологическом рассмотрении добавим член, описывающий давление. Это давление, однако, не следует смешивать с гидродинамическим, поскольку оно служит лишь энергетическим выражением динамических связей внутри вещества. В этом смысле мы полагаем

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\sigma\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} - g_{\mu\nu}p. \tag{122}$$

В нашем частном случае мы должны, следовательно, положить

$$T_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}p \quad (\text{для } \mu \text{ и } \nu \text{ от } 1 \text{ до } 3),$$

$$T_{44} = \sigma - p,$$

$$T = -\gamma^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}p + \sigma - p = \sigma - 4p.$$

Замечая, что уравнения поля (96) можно записать в форме

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right),$$

из (96) получаем уравнения:

$$\frac{2}{a^2}\gamma_{\mu\nu} = \varkappa\left(\frac{\sigma}{2} - p\right)\gamma_{\mu\nu},$$

$$0 = -\varkappa\left(\frac{\sigma}{2} + p\right).$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} p &= -\frac{\sigma}{2} \\ a &= \sqrt{\frac{2}{\varkappa\sigma}} \end{aligned}\right\}. \tag{123}$$

Если Вселенная квазиэвклидова, и, следовательно, ее радиус кривизны бесконечен, то σ должна быть равна нулю. Однако маловероятно, чтобы средняя плотность вещества во Вселенной была бы действительно равна нулю. Это является нашим третьим аргументом против предположения, что Вселенная квазиэвклидова. Вряд ли можно также ожидать, что обращается в нуль наше гипотетическое давление, хотя физическая природа этого давления сможет быть выяснена только после того, как мы глубже поймем законы электромагнитного поля. Согласно второму из уравнений (123), радиус Вселенной a определяется через полную массу материи M с помощью соотношения

$$a = \frac{M\varkappa}{4\pi^2}. \tag{124}$$

Из этого соотношения становится совершенно ясной полная зависимость геометрических свойств от физических.

Итак, мы можем выдвинуть следующие аргументы против концепции пространственно-бесконечной Вселенной, которые в то же время являются аргументами в пользу представлений о пространственно-ограниченной Вселенной.

1. С точки зрения теории относительности условия для замкнутой поверхности гораздо проще, чем соответствующие граничные условия на бесконечности в случае квазиэвклидовой структуры Вселенной.

2. Высказанная Махом идея, что инерция определяется взаимодействием тел, содержится в первом приближении в уравнениях теории относительности; из этих уравнений следует, что инерция, по крайней мере частично, зависит от взаимодействия между массами. Поскольку кажется неудовлетворительным предположение о том, что инерция частично зависит от взаимодействия, а частично от независимых свойств пространства, идеи Маха становятся более правдоподобными. Но идеи Маха согласуются только с предположением о конечной Вселенной, ограниченной в пространстве, и не согласуются с концепцией квазиэвклидовой бесконечной Вселенной. С гносеологической точки зрения, гораздо более оправдана мысль, что механические свойства пространства полностью определяются материей, а это может быть только в случае пространственно-ограниченной Вселенной.

3. Бесконечная Вселенная возможна только, если средняя плотность материи во Вселенной равна нулю. Хотя такое предположение и возможно логически, оно менее вероятно, чем предположение о конечной средней плотности материи во Вселенной.

Книга вышла первоначально в английском переводе в издании Принстонского университета (США), где в мае 1921 г. были прочитаны лекции Эйнштейна.

Немецкое издание вышло годом позже (1922 г.) под названием: «Vier Vorlesungen über Relativitätheorie, gehalten in Mai, 1921 an der Universität Princeton» (Vieweg, Braunschweig). Во втором принстонском издании 1945 г. было добавлено приложение I (см. статью 126) «О космологической проблеме» (это издание было повторено в Англии в 1946 г.).

Третье принстонское издание (1945 г.) содержало второе приложение, посвященное единой теории поля. Это приложение было полностью переработано в четвертом принстонском издании (1953 г.), в котором еще была сделана отдельная вкладка (в таком виде приложение II напечатано как статья 140). В пятом издании приложение II полностью переработано (см. статью 145).

С четвертого издания был сделан и русский перевод (М., ИЛ, 1955). Русский перевод первого издания выходил дважды под названием «Основы теории относительности» (издательство «Сеятель», Пг., 1923 и М.— Л., ГТТИ, 1935).

В Англии выходило пять изданий. Пятое английское издание вышло в 1955 г. (Metheun, London, 1955). Оно повторяет четвертое принстонское издание.

Существуют переводы на польский язык (1923 г.), французский (1924 г.), испанский (1948 г.).

«Сущность теории относительности», кроме педагогического значения, замечательна тем, что в ней отражены этапы развития идей Эйнштейна и, в частности, его взглядов на общий принцип относительности и на связь этого принципа с вопросами космологии. В основном тексте книги Эйнштейн приходит к выводу о необходимости пространственной ограниченности мира и необходимости введения отрицательного давления — космологической постоянной.

В приложении ко второму изданию Эйнштейн рассматривает уже все решения уравнений тяготения и отбрасывает космологическую постоянную. После признания работы Фридмана (см. статью 69) Эйнштейн оставляет идею статической Вселенной. Приложение II, несколько раз переделывавшееся (см. примечание редактора после статьи 140), отражает изменяющиеся взгляды на возможность включения электромагнитных полей в геометрическую схему.

ГЕОМЕТРИЯ И ОПЫТ*

Из всех наук математика пользуется особым уважением, потому что ее теоремы абсолютно верны и неоспоримы, тогда как законы других наук в известной степени спорны и всегда существует опасность их опровержения новыми открытиями. Однако исследователю, работающему в какой-либо другой области науки, не приходится завидовать математику, так как положения математики покоятся не на реальных объектах, а исключительно на объектах нашего воображения. В самом деле, нет ничего удивительного в том, что можно прийти к логически согласованным выводам, если сначала пришли к соглашению относительно основных положений (аксиом), а также относительно тех приемов, при помощи которых из этих основных положений выводятся другие теоремы. В то же время это глубокое уважение к математике имеет и другое основание, а именно: математика является тем, что дает точным наукам известную меру уверенности; без математики они ее не могли бы достичь.

В связи с этим возникает вопрос, который волновал исследователей всех времен. Почему возможно такое превосходное соответствие математики с реальными предметами, если сама она является произведением только человеческой мысли, не связанной ни с каким опытом? Может ли человеческий разум без всякого опыта, путем только одного размышления понять свойства реальных вещей?

На мой взгляд, ответ на этот вопрос вкратце таков: если теоремы математики прилагаются к отражению реального мира, они не точны; они точны до тех пор, пока они не ссылаются на действительность. Полной ясности в этом вопросе, как мне кажется, можно достичь лишь с помощью того направления в математике, которое известно как «аксиоматика».

---

* *Geometrie und Erfahrung*. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1921, T. 1, 123—130. (Расширенное изложение доклада на торжественном заседании Прусской академии наук в Берлине 27 января 1921 г.).

Прогресс, достигнутый аксиоматикой, заключается в том, что она четко разграничила логически-формальное от его объективного или наглядного содержания. Согласно аксиоматическому подходу, только логически-формальное составляет предмет математики; но наглядное или какое-либо другое содержание математики, не связанное с логически-формальным, не имеет отношения к математике.

Рассмотрим с этой точки зрения какую-либо аксиому геометрии, например, следующую: через любые две точки в пространстве всегда можно провести одну и только одну прямую. Как истолковать эту аксиому в старом смысле и как — в более современном?

Старая интерпретация. Всякий знает, что такое прямая и что такое точка. Математику нет необходимости решать вопрос о том, откуда мы черпаем эти знания: из мощи человеческого духа или из опыта, из некоторого взаимодействия того и другого или из какого-либо иного источника. Решение этого вопроса математик предоставляет философам. Будучи основанной на этих знаниях, происходящих из всей математики, упомянутая выше аксиома (как и все другие аксиомы) очевидна; иначе говоря, она, априори, представляет выражение некоторой части этого знания.

Более современная интерпретация. Геометрия трактует объекты, обозначаемые словами: прямая, точка и т. д. При этом предполагается не знание этих объектов или представление о них, но только справедливость аксиом, таких же чисто формальных, т. е. лишенных всякого наглядного и врожденного содержания, как в приведенном выше примере. Эти аксиомы—свободные творения человеческого разума. Все остальные теоремы геометрии являются логическими следствиями этих аксиом (не имеющих реального прообраза). Аксиомы прежде всего определяют объекты, которые рассматриваются в геометрии. Поэтому Шлик в своей книге о теории познания очень метко назвал аксиомы «скрытыми определениями».

Такое понимание аксиом в современной аксиоматике очищает математику от всех не относящихся к ней элементов и устраняет тот мистический мрак, который прежде окутывал основания математики. Но такое очищенное представление делает также очевидным, что сама по себе математика ничего не может сказать о реальных объектах, или о каких-либо наглядных образах. Под точкой, прямой и т. д. в аксиоматической геометрии следует понимать только лишенные содержания понятия. То, что дает им содержание, лежит вне математики.

Однако, с другой стороны, верно и то, что математика вообще и геометрия в частности обязаны своим происхождением необходимости узнать что-либо о поведении реально существующих предметов. На это указывает даже само слово «геометрия», означающее «измерение земли». Измерение же земли имеет дело с возможными расположениями различных тел в природе, таких как части самого земного шара, измерительные ленты, измерительные стержни и т. д. Ясно, что из системы понятий аксиоматической геометрии нельзя получить никаких суждений о таких реально существующих предметах, которые мы называем практически твердыми телами. Чтобы такого рода суждения были возможны, мы должны лишить геометрию ее формально-логического характера, сопоставив пустой схеме понятий аксиоматической геометрии реальные объекты нашего опыта. Для этой цели достаточно прибавить только такое утверждение:

Твердые тела ведут себя в смысле различных возможностей взаимного расположения, как тела эвклидовой геометрии трех измерений; таким образом, теоремы эвклидовой геометрии содержат в себе утверждения, определяющие поведение практически твердых тел.

Дополненная таким утверждением геометрия становится, очевидно, естественной наукой; мы можем рассматривать ее фактически как самую древнюю ветвь физики. Ее утверждения покоятся существенным образом на выводах из опыта, а не только на логических заключениях. Будем в дальнейшем называть дополненную таким образом геометрию «практической геометрией» в отличие от «чисто аксиоматической геометрии». Вопрос о том, является ли практическая геометрия эвклидовой или нет, приобретает совершенно ясный смысл; ответ на него может дать только опыт. Всякие измерения длины в физике точно так же, как и геодезические или астрономические измерения, в этом смысле составляют предмет практической геометрии, если при этом исходить из того опытного закона, что свет распространяется по прямой линии, и именно по прямой в смысле практической геометрии.

Такому пониманию геометрии я придаю особое значение, поскольку без него я не смог бы установить теорию относительности. Именно, без нее было бы невозможно следующее соображение: в системе отсчета, которая вращается относительно некоторой инерциальной системы, законы расположения твердых тел не соответствуют правилам эвклидовой геометрии вследствие лоренцова сокращения; таким образом, допуская равноправное существование неинерциальных систем, мы должны отказаться от эвклидовой геометрии. Без такой интерпретации был бы невозможен и решительный шаг к общековариантным уравнениям. Если же отвлечься от связи между телом аксиоматической эвклидовой геометрии и реальным практически твердым телом, то мы легко приходим к точке зрения, которой придерживался такой оригинальный и глубокий мыслитель как Анри Пуанкаре: эвклидова геометрия отличается от всевозможных мыслимых аксиоматических геометрий своей простотой. А так как аксиоматическая геометрия сама по себе никаких высказываний о реальной действительности не содержит и может это делать лишь совместно с физическими законами, то представлялось бы возможным и разумным придерживаться эвклидовой геометрии, какими бы свойствами ни обладала действительность. Если же будет обнаружено противоречие между теорией и опытом, то легче согласиться с изменением физических законов, чем с изменением аксиоматической эвклидовой геометрии. Если забыть о связи между практически твердым телом и геометрией, то будет нелегко отказаться от соглашения, что эвклидову геометрию следует сохранить как простейшую.

Почему Пуанкаре и другие исследователи отклоняли напрашивающуюся эквивалентность практически твердого тела из реального опыта и геометрического тела? Просто потому, что реальные твердые тела в природе при ближайшем рассмотрении оказываются совсем не твердыми, потому что их геометрическое поведение, т. е. их возможное взаимное расположение, зависит от температуры, внешних сил и т. п. Тем самым первоначальная непосредственная связь между геометрией и физической реальностью оказывается уничтоженной и мы чувствуем себя вынужденными перейти к следующему, более общему представлению, характерному для точки зрения Пуанкаре. О поведении реальных вещей геометрия (Г) ничего не говорит; это поведение описывает только геометрия вместе с совокупностью физических законов (Ф). Выражаясь символически, мы можем сказать, что только сумма (Г) + (Ф) является предметом проверки на опыте. Таким образом, можно произвольно выбрать как (Г), так и отдельные части (Ф): все эти законы представляют собой соглашения. Во избежание противоречий необходимо оставшиеся части (Ф) выбрать так, чтобы (Г) и полная (Ф) вместе оправдывались на опыте. При таком воззрении аксиоматическая геометрия, с точки зрения теории познания, равноценна возведенной в ранг соглашения части законов природы.

По моему мнению, такое воззрение Пуанкаре с принципиальной точки зрения совершенно правильно. В реальном мире не существует объектов, в точности соответствующих понятию измерительных стержней, или связанному с ним в теории относительности понятию часов. Ясно также, что твердое тело и часы не являются первоначальными понятиями в системе понятий физики, но представляют собой понятия сложные, которые не могут играть самостоятельную роль в теоретической физике. Однако, по моему убеждению, при современном состоянии теоретической физики этими понятиями следует пользоваться как независимыми, поскольку мы пока еще далеки от такого понимания теоретических оснований атомистики, которое позволило бы построить теоретически понятия твердых тел и часов из более элементарных.

Что же касается возражения, что в природе нет абсолютно твердых тел и что приписываемые им свойства не соответствуют физической реальности, то оно никоим образом не является столь серьезным, каким оно может показаться на первый взгляд. В самом деле, нетрудно задать состояние измерительного тела достаточно точно, чтобы его поведение по отношению к другим измерительным телам было настолько определенно и что им можно было бы пользоваться как «твердым» телом. Именно такие измерительные тела надо иметь в виду, когда говорят о твердых телах.

Всякая практическая геометрия основывается на одном доступном опыту принципе, о котором полезно теперь вспомнить. Предположим, что на практически твердом теле нанесены две отметки; пару таких отметок мы будем называть отрезком. Представим себе два практически твердых тела, на каждом из которых отметим по отрезку. Эти два отрезка называются «равными друг другу», если концы одного отрезка можно длительное время совмещать с концами другого. Теперь сделаем следующее предположение.

Если два отрезка в какой-то момент времени и в каком-то месте оказались равными, то они будут равны всегда и везде.

Не только практическая эвклидова геометрия, но и ее непосредственное обобщение — практическая риманова геометрия, а вместе с ней и общая теория относительности, покоятся на этом предположении. Из опытных фактов, которые подтверждают это предположение, отмечу лишь один. Явление распространения света в пустом пространстве позволяет каждому интервалу местного времени сопоставить некоторый отрезок, а именно, путь, который проходит свет, и наоборот. Отсюда следует, что в теории относительности указанное выше предположение об отрезках должно также выполняться для промежутков времени, измеряемых часами. Тогда его можно формулировать следующим образом: если двое идеальных часов в какой-нибудь момент времени и в каком-нибудь месте идут совершенно одинаково (причем они находятся в непосредственной близости друг к другу), то они всегда будут иметь одинаковый ход, независимо от того, где и когда (в одном и том же месте) их будут сравнивать. Если бы это положение не выполнялось для часов в природе, то собственные частоты разных атомов одного и того же элемента не согласовывались бы между собой с той точностью, какую демонстрирует эксперимент. Существование спектральных линий является убедительным экспериментальным доказательством правильности упомянутого выше принципа практической геометрии. В конечном счете это и служит основанием для возможности осмысленных высказываний о метрике в смысле четырехмерного риманова пространственно-временно́го континуума.

Согласно выдвинутому здесь взгляду, вопрос о том, имеет этот континуум эвклидову, риманову или какую-либо другую структуру, является вопросом физическим, ответ на который должен дать опыт, а не вопросом соглашения о выборе на основе простой целесообразности. Риманова геометрия будет справедлива в том случае, если законы взаимного расположения практически твердых тел будут тем точнее переходить в законы эвклидовой геометрии, чем меньше размеры рассматриваемой пространственно-временно́й области.

Предложенная здесь физическая интерпретация геометрии не может быть непосредственно применена к областям пространства субмолекулярных размеров. Тем не менее, даже в вопросах строения элементарных частиц она сохраняет некоторый смысл. В самом деле, в том случае, когда мы описываем электрические элементарные частицы, составляющие материю, можно сделать попытку сохранить физический смысл за теми аспектами поля, которые использовались в физике для описания геометрического поведения тел, бóльших по сравнению с молекулами. Только успех может служить оправданием такой попытки приписать физическую реальность основным понятиям римановой геометрии вне области их физического определения. Однако может оказаться, что подобная экстраполяция имеет не больше оснований, чем распространение понятия температуры на части тела молекулярных размеров.

Менее спорным представляется экстраполяция понятий практической геометрии на пространства космических размеров. Можно, конечно, возразить, что жесткость конструкции из твердых стержней тем больше отклоняется от идеальной, чем больше их пространственное протяжение. Однако вряд ли можно считать принципиальным такое возражение. Поэтому вопрос о том, является мир пространственно конечным или нет, представляется мне особенно важным в смысле практической геометрии. Я даже считаю возможным, что в недалеком будущем астрономия даст ответ на этот вопрос. Напомним, чему учит в этом отношении общая теория относительности. Согласно этой теории, существует две возможности.

1. Мир пространственно бесконечен. Это возможно только в том случае, если в мировом пространстве средняя пространственная плотность материи, сосредоточенной в звездах, исчезающе мала, т. е., если отношение общей массы звезд к объему пространства, по которому они рассеяны, неограниченно приближается к нулю, если мы будем рассматривать все бóльшие и бóльшие объемы пространства.

2. Мир пространственно конечен. Это должно быть в том случае, если существует некоторая средняя плотность весомой материи во Вселенной, отличная от нуля. Чем меньше эта средняя плотность, тем больше объем мирового пространства.

Я должен отметить, что в пользу гипотезы конечного мира можно привести теоретические аргументы. Общая теория относительности учит, что инерция некоторого определенного тела тем больше, чем больше весомые массы, находящиеся вблизи него; поэтому представляется весьма естественным свести всю инерцию тела к взаимодействию между ним и остальными телами во Вселенной, так же как со времен Ньютона тяжесть полностью сводится к взаимодействию между телами. Из уравнений общей теории относительности можно прийти в выводу, что такое полное сведéние инерции к взаимодействию между массами — как этого требовал, например, Э. Мах — возможно только в том случае, если мир пространственно конечен.

Этот аргумент не производит никакого впечатления на многих физиков и астрономов. В конце концов, на деле только опыт может решить, какая из двух возможностей осуществляется в природе; каким образом опыт может дать ответ? Прежде всего можно думать, что среднюю плотность материи можно определить путем наблюдения доступной нашему восприятию части Вселенной. Эта надежда иллюзорна. Распределение видимых звезд крайне неравномерно, так что никоим образом нельзя считать среднюю плотность звездной материи во Вселенной равной, скажем, средней плотности в нашей Галактике. Вообще говоря, как бы велико ни было исследованное пространство, можно подозревать, что есть звезды вне этого пространства. Таким образом, оценка средней плотности кажется невозможной.

Но есть еще второй путь, который представляется мне более перспективным, хотя и он также встречает большие трудности. Именно, если мы исследуем отклонения доступных опытной проверке следствий общей теории относительности от следствий теории Ньютона, то мы прежде всего обнаружим расхождения, которые проявляются в непосредственной близости к тяготеющим массам и которые подтверждаются для планеты Меркурий. Но если мир пространственно конечен, имеется второе расхождение с теорией Ньютона, которое на языке последней можно выразить так: гравитационное поле обладает такими свойствами, как если бы кроме весомых масс оно создавалось также равномерно распределенной в пространстве плотностью массы, имеющей отрицательный знак. Так как эта фиктивная плотность массы крайне мала, то ее можно заметить только в случае очень больших гравитирующих систем.

Предположим, что мы примерно знаем статистическое распределение звезд в Галактике, а также и их массы. Тогда на основе закона Ньютона мы можем рассчитать гравитационное поле и те средние скорости звезд, которые они должны иметь для того, чтобы в Галактике не произошел коллапс вследствие взаимного притяжения звезд и она сохраняла бы свои размеры. Если бы теперь средние скорости звезд—которые могут быть измерены—оказались в действительности меньше вычисленных, мы бы имели указание на то, что на больших расстояниях реальные притяжения меньше, чем следует из закона Ньютона. Из такого расхождения можно было бы косвенным образом доказать конечность мира и даже оценить его пространственные размеры [1].

[1] Этой фразой заканчивается немецкий текст статьи, включенной в сборник «Mein Weltbild».— *Прим. ред.*

Можем ли мы отчетливо представить себе трехмерный мир, который является конечным и в то же время безграничным?

Обычно на этот вопрос отвечают отрицательно; однако это неправильный ответ. Цель последующего изложения — показать, что ответ на данный вопрос должен быть положительным. Я хочу показать, что мы без особых трудностей можем проиллюстрировать теорию конечного мира с помощью наглядной картины, к которой после некоторой практики нетрудно привыкнуть.

Прежде всего сделаем некоторое замечание гносеологического характера. Геометрико-физическую теорию невозможно описать наглядно; она представляет собой просто некоторую систему понятий. Но эти понятия служат для того, чтобы мысленно установить связи между множеством реальных или воображаемых опытов. Поэтому сделать теорию «наглядной» — это значит представить себе то множество чувственных ощущений, которые теория располагает в определенном порядке. В данном случае мы можем спросить себя: «Как можно представить себе поведение твердых тел в смысле их взаимного расположения (контакта), чтобы оно соответствовало теории конечного мира?». В том, что я должен сказать об этом, нет ничего нового; однако адресованные мне бесчисленные вопросы показывают, что любознательность тех, кто интересуется этим предметом, еще неполностью удовлетворена. Надеюсь меня простят за то, что я буду излагать давно известное.

Что мы хотим выразить, когда говорим, что наше пространство бесконечно? Ничего, кроме того, что мы можем прикладывать одно к другому любое число тел равных размеров и при этом никогда не наполним пространство. Представим себе, что мы имеем огромное множество кубических ящиков одинаковых размеров. Согласно эвклидовой геометрии, мы можем поместить их один на другой, один возле другого и один за другим и таким образом заполнить сколь угодно большую часть пространства; но такое построение никогда не может быть закончено: мы могли бы продолжать укладывать все больше и больше кубов и никогда не придем к тому, что больше места не останется. Это то, что мы хотим выразить, когда говорим о бесконечном пространстве. Лучше было бы сказать, что пространство бесконечно относительно практически твердых тел, предполагая, что законы их расположения определяются эвклидовой геометрией.

Другим примером бесконечного континуума является плоскость. На плоскости мы можем так укладывать квадраты из картона, что каждая сторона любого квадрата прилегает к стороне другого квадрата, соседнего с ним. Построение никогда не будет закончено; всегда можно продолжать укладывать новые квадраты, если только законы расположения их соответствуют законам расположения плоских фигур в эвклидовой геометрии. Таким образом, плоскость бесконечна относительно картонных квадратов. Соответственно говорят, что плоскость представляет собой бесконечный континуум двух измерений, а пространство — бесконечный континуум трех измерений. Я думаю, можно считать известным, что́ понимается здесь под числом измерений.

Теперь приведем пример двумерного континуума, который конечен, но безграничен. Представим себе поверхность большого глобуса и множество одинаковых маленьких круглых бумажных дисков. Поместим один из них где-нибудь на поверхности глобуса. Если мы будем передвигать его как угодно по поверхности глобуса, то при этом путешествии мы нигде не натолкнемся на границу. Поэтому мы говорим, что сферическая поверхность глобуса является безграничным континуумом. Кроме того, сферическая поверхность является конечным континуумом. Действительно, если наклеивать бумажные диски на глобус таким образом, чтобы нигде два диска не накладывались один на другой, то в конце концов мы так заполним поверхность глобуса, что для нового диска уже не останется места. Это и означает, что сферическая поверхность глобуса конечна относительно бумажных дисков. Далее, сферическая поверхность является неэвклидовым континуумом двух измерений; иначе говоря, законы расположения жестких фигур на этой поверхности не согласуются с теми же законами эвклидовой плоскости. Это можно показать следующим образом. Возьмем один из дисков и расположим вокруг него еще шесть других дисков, вокруг каждого из которых в свою очередь расположим еще шесть и т. д. (см. рис. 1). Если это построение делается на плоскости, то мы получим непрерываемое расположение, при котором каждый из дисков, не лежащий на краю построения, соприкасается с шестью другими. На сферической поверхности такое построение кажется вначале успешным, в тем большей степени, чем меньше радиус дисков по сравнению с радиусом сферы. Но по мере продолжения подобного построения, становится все более очевидным, что невозможно расположить диски указанным выше образом, без перерывов, как это было возможно в случае эвклидовой геометрии на плоскости. Существа, которые не могут не только покинуть сферическую поверхность, но даже и «выглянуть» из сферической поверхности в трехмерное пространство, могли бы установить путем опыта с дисками, что их двумерное «пространство» не эвклидово, а сферическое.

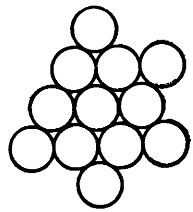


Рис. 1.

Из последних результатов теории относительности представляется вероятным, что наше трехмерное пространство также является приблизительно сферическим, т. е. что законы расположения в нем твердых тел определяются не эвклидовой геометрией, а приближенно описываются сферической геометрией, если только рассматривать области достаточно большой протяженности. В этом месте воображение отказывает читателю. «Этого не может представить себе ни один человек, — воскликнет он в раздражении.— Это можно сказать, но нельзя вообразить. Я могу достаточно хорошо представить себе сферическую поверхность, но ничего подобного ей в трех измерениях».

Мы должны попытаться мысленно преодолеть этот барьер, и терпеливый читатель увидит, что это совсем не такая трудная задача. С этой целью мы еще раз обратимся к двумерной сферической поверхности. Пусть, как изображено на рис. 2, K — сферическая поверхность, касающаяся

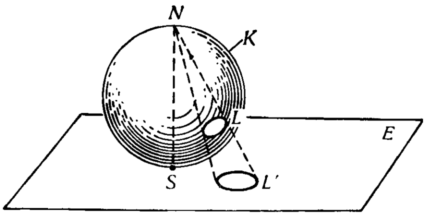


Рис. 2.

в точке S плоскости E, показанной для удобства на рисунке в виде небольшого куска поверхности. Пусть, далее, L — диск на сферической поверхности. Представим теперь, что на поверхности сферы в точке N, расположенной диаметрально противоположно точке S, помещен точечный источник света, так что диск L отбрасывает тень на плоскость E. Каждой точке на сфере соответствует тень на плоскости. Если диск на сфере K движется, то его тень L' также движется. Когда диск L находится в точке S, то он почти точно совпадает со своей тенью. Если он движется по сферической поверхности от точки S вверх, то тень L' на плоскости удаляется от точки S, причем эта тень будет становиться все больше и больше. При приближении кружка L к светящейся точке N, тень удаляется в бесконечность и становится бесконечно большой.

Теперь поставим вопрос: каковы законы расположения теней L' диска на плоскости E? Очевидно, они совершенно такие же, как и законы расположения дисков L' на сферической поверхности. В самом деле, каждой фигуре на сфере K соответствует теневая фигура на плоскости E. Если два диска на K касаются, то их тени на E также касаются. Геометрия теневых фигур на плоскости согласуется с геометрией дисков на сфере. Если мы назовем тени дисков жесткими фигурами, то по отношению к ним на плоскости E выполняется сферическая геометрия. В частности, по отношению к теням дисков плоскость конечна, так как только конечное число таких теней может уместиться на плоскости.

В этом месте кто-нибудь скажет: «Это бессмыслица; тени дисков не являются твердыми фигурами. Стоит нам только подвигать по плоскости E линейку, чтобы убедиться в том, что размеры теней непрерывно возрастают, если удаляться по плоскости от точки S к бесконечности». Но что будет, если такое же явление происходит с самим масштабом на плоскости E? Тогда невозможно было бы показать, что тени увеличиваются в размере по мере удаления от точки S; в таком случае только что высказанное утверждение теряет всякий смысл. Фактически, единственное объективное утверждение, которое можно сделать о тенях дисков, состоит как раз в том, что они ведут себя в смысле эвклидовой геометрии так же, как твердые диски на сферической поверхности.

Мы должны всегда помнить, что наше утверждение об увеличении теней дисков с удалением от точки S к бесконечности само по себе не имеет никакого объективного смысла, пока мы не можем сравнивать тени дисков с эвклидовыми твердыми телами, которые могли бы передвигаться по плоскости E. В отношении законов расположения теней L' точка S не имеет никаких особых преимуществ на плоскости, по сравнению с теми, которые у нее были на поверхности сферы.

Рассмотренная выше иллюстрация сферической геометрии на плоскости важна для нас, поскольку она позволяет распространить подобную геометрию на случай трехмерного пространства.

Представим себе некоторую точку S нашего пространства и большое число небольших сфер L', которые могут быть точно совмещены друг с другом. Но эти сферы не являются твердыми в смысле эвклидовой геометрии; их радиус (с точки зрения эвклидовой геометрии) должен возрастать, когда они движутся от точки S к бесконечности, по тому же самому закону, что и радиусы теней L' дисков на плоскости E.

После того как мы пришли к отчетливому представлению о геометрическом поведении наших сфер L', допустим, что в нашем пространстве вообще не существует твердых тел в смысле эвклидовой геометрии и есть лишь тела, которые ведут себя как наши сферы L'. Тогда мы будем иметь перед собой ясную картину трехмерного сферического пространства или, скорее, трехмерной сферической геометрии. При этом наши сферы должны называться «твердыми» сферами. Возрастание их размеров с удалением от точки S не должно обнаруживаться путем измерений с помощью масштабов, так же как нельзя этого было обнаружить в случае теней дисков на плоскости E, поскольку масштабы ведут себя так же, как и сферы. Пространство является однородным, т. е. около каждой точки возможны те же самые расположения сфер [2]. Пространство является конечным,

[2] Это станет понятным без вычислений (но только для двумерного случая), если мы еще раз вернемся к случаю дисков на поверхности сферы.

так как — вследствие «раздувания» сфер — только конечное число их вмещается в пространство.

Итак, пользуясь, как костылем, способностью мыслить и строить наглядные образы, которую воспитала в нас эвклидова геометрия, мы получили наглядную картину сферической геометрии. Мы можем без труда придать бо́льшую глубину и строгость этим представлениям, с помощью специальных воображаемых построений. Аналогичным образом нетрудно было бы также представить случай так называемой эллиптической геометрии. Сейчас нашей единственной задачей было показать, что человеческая способность мысленного представления ни в коем случае не должна капитулировать перед неэвклидовой геометрией.

«Геометрия и опыт» — изданный отдельной книжкой в Берлине в 1921 г. (Springer Verlag), дополненный вариант доклада Эйнштейна, который он сделал 27 января 1921 г. на заседании Прусской академии наук. Этим заседанием традиционно отмечался день рождения императора Фридриха II Великого (1712—1786), который считался основателем Академии.

Доклад сыграл большую роль в пропаганде идей теории относительности, так как они изложены в нем с предельной доступностью. Эйнштейн еще находится на дофридмановских позициях, считая, что конечность мира есть необходимое следствие наличия вещества.

Доклад издавался неоднократно (большей частью вместе с работой «Эфир и принцип относительности»). Существуют французское и польское (раздельные), английское и итальянское издания. На русском языке обе работы выходили под названием «О физической природе пространства» (Берлин, Изд-во «Слово», 1922) и отдельной брошюрой в «Научном книгоиздательстве» (1923). Доклад включен в сборники работ Эйнштейна: «Mein Weltbild» (Frankfurt am Main, 1955, 151; сокращенный вариант) и «Ideas and Opinions» (N. Y., 1956, 232).

ПРОСТОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНА ТЯГОТЕНИЯ НЬЮТОНА К ШАРОВОМУ СКОПЛЕНИЮ ЗВЕЗД*

Едва ли можно сомневаться в том, что закон Ньютона можно экстраполировать на расстояния, бóльшие, чем те, для которых он проверен на опыте. Этого придерживается и общая теория относительности, которая дает рациональное обоснование закона Ньютона, так что экстраполяция взаимодействия тел на большие расстояния выглядит вполне оправданной. Правда, в случае, если наш мир конечен в пространстве, общая теория относительности предсказывает значительные отклонения от закона Ньютона, но только при условии, что средняя плотность звездного вещества в исследуемом гравитирующем образовании не намного больше средней плотности звездного вещества во Вселенной вообще.

Ниже закон тяготения Ньютона применяется к так называемому шаровому скоплению звезд. При этом задача состоит в том, чтобы получить какие-нибудь следствия, проверяемые на опыте; дело в том, что наши знания о движении звезд такого скопления в действительности крайне малы. Изменения положений звезд за доступные нам промежутки времени слишком незначительны, чтобы их можно было заметить имеющимися средствами наблюдения. Кроме того, ввиду большого расстояния до звезд их свет слишком слаб, чтобы можно было изучать движение звезд в направлении луча зрения с помощью принципа Допплера. Мы видим лишь проекцию скопления звезд, образованную параллельными лучами зрения, и то только для наиболее ярких звезд скопления.

Но мы все же приближенно знаем расстояние от нас до таких шаровых скоплений, а следовательно, и их истинный радиус. Эта оценка основана на проверенной гипотезе, что звезды одинакового спектрального типа обладают приблизительно одинаковой величиной и приблизительно одина-

* *Eine einfache Anwendung des Newtonschen Gravitationsgesetzes auf die kugelformigen Sternhaufen.* Festschrift zum 10-jährigen Bestehen der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaft. Springer Verlag, 1921, 50—52.

ковой абсолютной яркостью. Сравнивая видимые яркости удаленных и ближайших к нам звезд одного спектрального типа, мы можем с помощью этой гипотезы делать заключение о расстоянии звезд от нас. Таким образом, зная расстояние до ближайших звезд, мы определяем и расстояние до звездного скопления. По видимому радиусу звездного скопления мы можем найти — по крайней мере по порядку величины — истинный радиус скопления звезд; для этого радиуса получаются значения в 100—150 световых лет.

Весьма вероятно, что яркие звезды звездного скопления приблизительно соответствуют абсолютно ярким звездам нашей Галактики в окрестности Солнца. Для последних с помощью принципа Допплера было найдено, что они движутся со средней скоростью около 26 *км/сек* относительно друг друга [1]; поэтому мы будем предполагать, что по порядку величины это соответствует средней скорости наиболее ярких звезд скопления относительно его центра тяжести; тем более, что средние скорости звезд разных спектральных типов по порядку величины совпадают.

Предположим теперь, что распределение звезд в скоплении стационарно в том смысле, что и радиус и само распределение (в статистическом смысле) существенно не меняются за время, в течение которого отдельные звезды скопления проходят (криволинейный) путь, большой по сравнению с радиусом скопления. В том, что это условие выполняется при радиально-симметричном и одинаковом для многих звездных скоплений статистическом распределении звезд, вряд ли можно сомневаться. Тогда ко всему скоплению звезд можно применить теорему вириала Клаузиуса, рассматривая отдельные звезды как материальные точки. В случае ньютоновских сил эта теорема, как впервые показал А. Пуанкаре, дает

$$L = \frac{1}{2}\Phi. \tag{1}$$

Здесь L — кинетическая энергия всех звезд скопления, Φ — их отрицательная потенциальная энергия, определенная так, что при бесконечно большом расстоянии между звездами она обращается в нуль.

Чтобы получать следствия из соотношения (1), сделаем некоторые предположения о строении скопления. Будем считать, что звезды, дающие изображения на фотопластинках при более коротких экспозициях, обладают одинаковой массой m и что общее число таких звезд в скоплении равно N. Далее, временно предположим, что менее яркие, т. е. меньшие по размерам, звезды скопления существенно не влияют на гравитационное поле, так что при вычислении L и Φ их можно не учитывать. Тогда, обозначая

[1] Точнее, относительно центра тяжести системы, к которой они принадлежат.

через v среднюю квадратичную скорость $(v = \sqrt{\overline{v^2}})$, сразу получаем

$$L = \frac{mv^2}{2}\,. \tag{2}$$

Для вычисления Ф необходимо знать пространственную плотность ρ звезд в скоплении. Как известно, она удовлетворительно представляется эмпирической формулой

$$\rho = \frac{3}{4\pi}\frac{N}{a^3}\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{5}{2}}, \tag{3}$$

где a означает длину, пропорциональную радиусу звездного скопления; тогда $2a$ — радиус, на котором плотность снижается до 2% плотности в центре. Далее, ρm есть средняя плотность звездного вещества в скоплении в определенном месте. Величину Ф можно вычислить без большой ошибки, считая, что вещество распределено с постоянной плотностью ρm. Таким образом, получаем

$$\Phi = A\frac{kN^2m^2}{a}\,, \tag{4}$$

где k — гравитационная постоянная, A — числовой коэффициент, по нашим оценкам равный примерно 0,6.

Из соотношения (1) с учетом формул (2) и (4) для радиуса звездного скопления получаем

$$2a = 1{,}2\frac{kNm}{v^2}\,. \tag{5}$$

Подставляя для звездного скопления в созвездии Геркулеса $N = 2000$, $m = 15$ солнечных масс, $v = 26$ *км/сек*, получаем

$$2a = 0{,}65 \cdot 10^{18}\ \textit{см} = 0{,}65\ \text{световых лет.}$$

По видимой яркости самых ярких звезд скопления мы должны считать расстояние до него настолько большим, что радиус его должен составлять не менее чем 100 световых лет. Следовательно, в нашем предположении должна содержаться ошибка.

Я имел возможность подробно обсудить изложенное здесь противоречие с моими коллегами в Астрофизическом институте в Потсдаме. При этом выяснилось, что, согласно современным астрономическим данным о массах и распределении неподвижных звезд, одно из сделанных здесь предположений в значительной мере ошибочно. В скоплении может существовать намного больше неподвижных звезд с очень малой яркостью, чем 2000 звезд, дающих изображения на фотопластинке при короткой экспозиции, и их массу нельзя считать малой по сравнению с самыми яркими звездами. По снимкам звездного скопления с большой экспозицией, а также по распределению неподвижных звезд в ближайшей окрестности Солнца можно оценить, что число неподвижных звезд в скоплении, определяющих гравитационное поле, примерно в 100 раз больше, чем мы полагали выше. Тогда мы приходим к радиусу звездного скопления, равному 65 световым годам, что не так далеко от нижнего предела, полученного другим способом.

Неполнота имеющихся в настоящее время наблюдательных данных вынуждает нас пока довольствоваться этим согласием по порядку величины. Более точные результаты требуют лучшего знания масс и скоростей звезд. Но полученное согласие по порядку величины уже позволяет сделать вывод, представляющий значительный интерес: вклад несветящих масс в полную массу по порядку величины не больше, чем вклад светящих масс.

КРАТКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

Есть нечто привлекательное в изложении эволюции идей, максимально кратком и в то же время достаточно полном, чтобы передать непрерывность их развития. Мы попытаемся изложить таким образом теорию относительности и показать, что все движение вперед слагается из небольших, почти самоочевидных шагов.

Первым и определяющим моментом развития была идея Фарадея и Максвелла, согласно которой все физические процессы характеризуются непрерывностью действия (противопоставляемого действию на расстоянии), или, выражаясь языком математики, описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Максвелл сумел успешно осуществить такое описание для электромагнитных процессов в покоящихся телах, опираясь на представление о магнитном эффекте тока смещения в вакууме и на постулат о тождестве электромагнитного поля, возникающего вследствие индукции, и электростатического поля.

Распространение электродинамики на случай движущихся тел выпало на долю многочисленных последователей Максвелла. Герц попытался решить эту проблему, приписав пустому пространству (эфиру) физические свойства, подобные тем, которыми обладает весомая материя; в частности, аналогично весомой материи эфир должен был иметь в каждой точке определенную скорость. Как и в покоящихся телах, электромагнитную или магнитоэлектрическую индукцию следовало определять скоростью изменения соответственно электрического или магнитного потока при условии, что эти скорости изменения относились к элементам поверхности, движущимся вместе с телом. Но теория Герца противоречила фундаментальному эксперименту Физо по распространению света в движущейся жидкости.

---

* *A Brief Outline of the Development of the Theory of Relativity.* Nature, 1921, 106, 782—784.

Наиболее очевидное обобщение теории Максвелла на случай движущихся тел оказалось несовместимым с результатами эксперимента.

Выход из этого положения указал Г.А.Лоренц. Ввиду своей приверженности к атомной теории вещества, Лоренц чувствовал себя неспособным рассматривать последнее как прибежище непрерывных электромагнитных полей. Поэтому он представлял себе эти поля как свойства эфира, который он считал непрерывным. Лоренц полагал эфир независимым от вещества как с механической, так и с физической точек зрения. Эфир не принимал участия в движениях вещества и связь между эфиром и веществом могла предполагаться лишь в той мере, в какой последнее рассматривалось как носитель связанных электрических зарядов. Фундаментальное значение теории Лоренца заключается в том, что всю электродинамику покоящихся и движущихся тел она сводит к уравнениям Максвелла для пустого пространства. Она превосходит теорию Герца не только с точки зрения метода; с ее помощью Г. А. Лоренц достиг выдающегося успеха в объяснении экспериментальных фактов.

Теория представлялась неудовлетворительной лишь в одном фундаментально важном пункте. Она, казалось, отдавала предпочтение некоторой системе координат, связанной с определенным состоянием движения (состоянием покоя по отношению к эфиру), по сравнению со всеми прочими системами координат, движущимися относительно этой. В данном пункте теория казалась находящейся в прямом противоречии с классической механикой, в которой все инерциальные системы, равномерно движущиеся относительно друг друга, были в равной мере пригодны в качестве систем координат (специальный принцип относительности). В этом отношении все опытные данные, в том числе в сфере электродинамики (в частности, опыт Майкельсона), подтвердили идею эквивалентности всех инерциальных систем, т. е. свидетельствовали в пользу специального принципа относительности.

Специальная теория относительности обязана своим происхождением этой трудности, которая, ввиду ее фундаментального характера, представлялась нетерпимой. Первой целью этой теории было решение вопроса: противоречит ли на самом деле специальный принцип относительности уравнениям Максвелла для пустого пространства? Ответ на этот вопрос, казалось, был утвердительным: если уравнения Максвелла справедливы в системе координат K, и мы вводим новую систему K', согласно (по-видимому без труда устанавливаемым) законам преобразования,

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t, \end{aligned} \qquad \text{(Преобразования Галилея)}$$

то уравнения Максвелла более неприменимы в новых координатах (x', y', z', t'). Но видимость обманчива. Более тщательный анализ физического смысла пространства и времени с очевидностью показал, что в основе преобразований Галилея лежат произвольные допущения, в частности утверждение, что понятие одновременности имеет смысл независимо от состояния движения используемой системы координат. Было показано, что уравнения поля в пустоте удовлетворяют специальному принципу относительности при условии, что мы используем другие уравнения преобразования:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}},$$

$$y' = y,$$

$$z' = z, \qquad \text{(Преобразования Лоренца)}$$

$$t' = \frac{t - (v/c^2)\,x}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}.$$

В этих уравнениях x, y, z представляют собой координаты, измеренные с помощью масштабов, покоящихся относительно системы координат, и t — время, измеренное надлежащим образом выбранными часами тождественного устройства, находящимися в состоянии покоя.

Чтобы специальный принцип относительности мог выполняться, необходимо, чтобы все уравнения физики не изменяли своего вида при переходе из одной инерциальной системы в другую, если использовать преобразования Лоренца для подсчета этого изменения. Говоря на языке математики, все системы уравнений, выражающие законы физики, должны быть ковариантны относительно преобразований Лоренца. Таким образом, с методологической точки зрения специальный принцип относительности можно сравнить с принципом Карно о невозможности вечного двигателя второго рода, ибо подобно последнему он дает нам общее условие, которому должны удовлетворять все законы природы.

Впоследствии Г. Минковский нашел особенно изящное и плодотворное выражение этого условия ковариантности, выражение, которое раскрывает формальную связь между эвклидовой геометрией трех измерений и пространственно-временны́м континуумом физики.

Эвклидова геометрия трех измерений	*Специальная теория относительности*
Существует численная мера (расстояние ds), которая ставится в соответствие двум соседним точкам пространства и выражается уравнением $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$.	Существует численная мера (расстояние ds), которая ставится в соответствие двум соседним точкам пространства-времени (точечным событиям) и выражается уравнением $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$.

Она не зависит от выбора системы координат и может быть измерена единичным измерительным стержнем.	Она не зависит от выбора инерциальной системы и может быть измерена единичным измерительным стержнем и стандартными часами. Здесь x_1, x_2, x_3 —прямоугольные координаты, а $x_4 = \sqrt{-1}\, ct$ — время, умноженное на мнимую единицу и на скорость света.
Допустимыми преобразованиями являются те, при которых выражение для ds^2 является инвариантом, т. е. допустимы линейные ортогональные преобразования.	Допустимыми преобразованиями являются те, при которых выражение для ds^2 является ковариантом, т. е. допустимы линейные ортогональные преобразования координат, сохраняющие вещественность x_1, x_2, x_3, x_4. Такими преобразованиями являются преобразования Лоренца.
По отношению к этим преобразованиям законы эвклидовой геометрии инвариантны.	По отношению к этим преобразованиям законы физики инвариантны.

Отсюда следует, что по своему месту в физических уравнениях, хотя и не по физическому смыслу, время эквивалентно пространственным координатам (если отвлечься от мнимости). С этой точки зрения, физика есть эвклидова геометрия четырех измерений, или точнее, статика в четырехмерном эвклидовом континууме.

Построение специальной теории относительности сводится к двум основным шагам, а именно: к приспособлению пространственно-временно́й «метрики» к уравнениям электродинамики Максвелла и к приспособлению остальной части физики к этой видоизмененной «метрике». Первый из этих этапов приводит к относительности одновременности, к учету влияния движения на измерительные стержни и часы, к модификации кинематики и, в частности, к новому правилу сложения скоростей. Второй этап дает нам видоизменение ньютоновского закона движения на случай больших скоростей, а также сведения фундаментальной важности о природе инертной массы.

Оказалось, что инерция не есть фундаментальное свойство вещества и, конечно, не является простейшей величиной, но представляет собой свойство энергии. Если сообщить телу энергию E, то его инертная масса возрастает на величину E/c^2, где c — скорость света в пустоте. Другими словами, тело с массой m можно рассматривать как сгусток энергии, равной по величине mc^2.

Более того, вскоре оказалось,что специальную теорию относительности нельзя связать с гравитацией сколько-нибудь естественным образом. В этом отношении меня поразило то, что сила тяготения обладает одним фундаментальным свойством, отличающим ее от электромагнитных сил.

Все тела падают в гравитационном поле с одинаковым ускорением, или, иначе говоря, тяготеющая и инертная массы тела численно равны друг другу. Это численное равенство наводит на мысль о тождественной природе масс. Могут ли инерция и тяготение быть тождественными? Этот вопрос ведет непосредственно к общей теории относительности. Разве нельзя рассматривать Землю как лишенную вращения, если представлять себе центробежные силы, которые действуют на все тела, покоящиеся относительно Земли, как «истинное» поле тяготения или часть такого поля? Если мы сумеем провести такую идею, то мы докажем тождественность инерции и тяготения по самой их природе, так как то же самое свойство, которое рассматривается как *инерция* с точки зрения системы, не принимающей участия во вращении, можно интерпретировать как *тяготение*, если рассматривать его по отношению к системе координат, участвующей во вращении. Согласно Ньютону, такая интерпретация невозможна, поскольку по закону Ньютона центробежное поле нельзя считать порожденным веществом и поскольку в теории Ньютона нет места для «истинного» поля типа «кориолисовых сил». Но быть может, закон поля Ньютона можно заменить другим законом, согласующимся с полем, возникающим по отношению к «вращающейся» системе координат? Мое убеждение в тождестве инертной и тяготеющей масс породило во мне чувство абсолютной уверенности в справедливости такой интерпретации. В этой связи меня ободряла следующая идея. Мы знакомы с «кажущимися» полями, которые существуют в системах координат произвольно движущихся относительно инерциальной системы. С помощью этих полей мы смогли бы изучать закон, которому подчиняются в общем случае гравитационные поля. При этом мы должны учесть то, что определяющим для возникновения полей являются весомые массы, или, согласно фундаментальному результату специальной теории относительности, плотность энергии — величина, обладающая трансформационными свойствами тензора.

С другой стороны, соображения, основанные на метрических результатах специальной теории относительности, приводят к выводу, что эвклидова метрика уже неприменима в ускоренных системах координат. Хотя это задержало развитие теории на несколько лет, возникшая трудность была смягчена знанием того факта, что эвклидова метрика справедлива для малых областей. В результате, величина ds, которая была физически определена до сих пор только в специальной теории относительности, сохранила свой смысл и в общей теории относительности. Но сами координаты потеряли свое прямое значение и выродились просто в числа, не обладающие никаким физическим смыслом, единственным назначением которых является нумерация пространственно-временных точек. Таким образом, в общей теории относительности координатам принадлежит та же функция, что и гауссовым координатам в теории поверхностей.

Необходимое условие выбора заключается в том, чтобы в таких общих координатах измеримая величина ds могла представляться в виде

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu,$$

где символы $g_{\mu\nu}$ означают функции пространственно-временных координат. Из сказанного выше следует также, что характер изменения $g_{\mu\nu}$ в пространстве и во времени определяет, с одной стороны, пространственно-временную метрику, и с другой,— гравитационное поле, управляющее механическим поведением материальных точек.

Закон гравитационного поля определяется в основном следующими условиями: во-первых, он должен быть справедлив при любом выборе системы координат; во-вторых, он должен определяться тензором энергии вещества; и, в-третьих, он не должен содержать производных от функций $g_{\mu\nu}$ выше второго порядка и должен быть линейным по этим функциям. На этом пути был найден закон, хотя и сильно отличающийся от закона Ньютона, но настолько тесно соответствующий последнему по следствиям, которые можно получить из него, что оказалось возможным найти лишь очень небольшое число критериев, по которым теория могла подвергнуться решительному испытанию на опыте.

Остался еще ряд важных вопросов, которые ждут решения в настоящее время. Действительно ли электрическое и гравитационное поля настолько различны по своей природе, что они не могут быть формально объединены? Играют ли гравитационные поля какую-либо роль в строении вещества, и следует ли рассматривать континуум внутри атомного ядра ощутимо неэвклидовским? Наконец, вопрос, имеющий отношение к космологической проблеме. Следует ли относить инерцию к взаимному влиянию отдаленных масс? И вопрос, связанный с предыдущим: является ли Вселенная пространственно ограниченной? В этом пункте я расхожусь во мнениях с Эддингтоном. Вместе с Махом я ощущаю, что положительный ответ настоятельно необходим, но доказать пока ничего нельзя. Пока не будет проведено динамическое исследование больших систем неподвижных звезд с точки зрения пределов применимости закона тяготения Ньютона для огромных областей пространства, до тех пор, по-видимому, нельзя будет получить точную основу для решения этой увлекательной задачи.

ОБ ОДНОМ ЕСТЕСТВЕННОМ ДОПОЛНЕНИИ ОСНОВ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

Как известно, Г. Вейль попытался дополнить общую теорию относительности, введя дальнейшее условие инвариантности, и создал при этом теорию, заслуживающую большого внимания, хотя бы уже в силу смелости и логичности его математической мысли. Эта теория базируется главным образом на двух соображениях.

а) В общей теории относительности, отношению компонент потенциала гравитационного поля $g_{\mu\nu}$ придается значительно большее физическое содержание, чем самим компонентам $g_{\mu\nu}$. Это объясняется тем, что совокупность мировых линий, исходящих из некоторой точки Вселенной, по которым из этой точки могут распространяться световые сигналы, или световая сфера, определяется, по-видимому, непосредственно пространственно-временным континуумом; сфера же определяется уравнением

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = 0,$$

в которое входят только отношения $g_{\mu\nu}$. Вообще, в уравнения электромагнитного поля в вакууме входят только отношения $g_{\mu\nu}$. Величина же ds, которая определяется лишь через $g_{\mu\nu}$, не выражает никаких свойств пространственно-временно́го континуума, так как для измерения этих величин требуется материальный объект (часы). Поэтому напрашивается вопрос: нельзя ли изменить теорию относительности, предположив, что инвариантной является не непосредственно величина ds как таковая, а только соотношение $ds^2 = 0$?

б) Вторая мысль Вейля относится к обобщению метрики Римана, а также к физическому истолкованию появляющихся в ней величин φ_ν. Эту мысль можно изложить в общих чертах следующим образом. Метрика

* *Eine naheliegende Ergänzung des Fundamentes der allgemeinen Relativitätstheorie.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1921, T. 1, 261—264.

предполагает перенесение отрезков (масштабов). Риманова геометрия предполагает далее, что поведение (длина) масштаба в данном месте не зависит от того пути, по которому он попал в это место; она включает, таким образом, следующие две предпосылки: 1) существование переносимых масштабов; 2) независимость их длины от пути переноса.

Данное Вейлем обобщение римановской метрики сохраняет первое условие, опуская второе. Согласно Вейлю, измеряемая длина масштаба зависит от интеграла, распространенного по пути переноса и зависящего, вообще говоря, от этого пути,

$$\int \phi_\nu dx_\nu$$

где ϕ_ν представляют собой функции пространственных координат; эти функции также определяют метрику. При физическом истолковании теории ϕ_ν отождествляются с электромагнитными потенциалами.

Отдавая должное стройности и изящности построений Вейля, я все же думаю, что они не соответствуют физической реальности. Мы не знаем в природе таких используемых для измерений предметов, относительная протяженность которых зависела бы от их предыстории. Я не вижу также непосредственного физического смысла ни во введенной Вейлем кратчайшей линии, появляющейся в этом и других уравнениях теории, ни в электрических потенциалах.

Однако изложенная в пункте «а» мысль Вейля кажется мне естественной и удачной, хотя и трудно предсказать заранее, сможет ли она привести к созданию соответствующей действительности физической теории. При таком положении вещей естественно может возникнуть вопрос: нельзя ли создать стройную теорию, заранее отказавшись не только вместе с Вейлем от предположения 2, но и от предположения 1 (о существовании переносимых масштабов и, соответственно, часов). В дальнейшем должно быть показано, что можно беспрепятственно строить теорию, исходя исключительно из ковариантности соотношения

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = 0$$

и не используя понятия расстояния ds или (применяя физическую терминологию) не используя понятия масштаба и измерительных часов.

Пытаясь создать такую теорию, я пользовался активной поддержкой коллеги Виртингера в Вене. Я спросил у него, существует ли обобщение уравнения геодезической линии, в котором имеют значение только отношения компонент $g_{\mu\nu}$. Он сообщил мне следующее: Под термином «тензор Римана» или «инвариант Римана» мы понимаем тензор или инвариант относительно произвольных точечных преобразований, инвариантный характер которых сохраняется при условии инвариантности $ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$. Под термином «тензор Вейля» или «инвариант Вейля веса n» мы понимаем тензор Римана или инвариант Римана со следующим дополнительным свойством: величина компоненты тензора или инварианта умножается на λ^n при замене $g_{\mu\nu}$ на $\lambda g_{\mu\nu}$, где λ — произвольная функция координат. Это условие может быть символически выражено уравнением

$$T(\lambda g) = \lambda^n T(g).$$

Если J — инвариант Вейля веса —1, зависящий только от компонент $g_{\mu\nu}$ и их производных, то величина

$$d\sigma^2 = J g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{1}$$

представляет собой инвариант веса 0, т. е. инвариант, зависящий только от отношений компонент $g_{\mu\nu}$. Искомое обобщение геодезической линии дается, следовательно, уравнением

$$\delta\left\{\int d\sigma\right\} = 0. \tag{2}$$

Такое решение предполагает, конечно, существование инварианта Вейля указанного вида. Исследования Вейля указывают путь к такому решению. Именно он показал, что тензор

$$H_{iklm} = R_{iklm} - \frac{1}{d-2}(g_{il}R_{km} + g_{km}R_{il} - g_{im}R_{kl} - g_{kl}R_{im}) + \\ + \frac{1}{(d-1)(d-2)}(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl})\,R \tag{3}$$

представляет собой тензор Вейля, вес которого равен 1. Здесь R_{iklm} — римановский тензор кривизны, R_{km} ($= g^{il}R_{iklm}$) — тензор второго ранга, получаемый при однократном свертывании тензора Римана, R — скаляр, получаемый при повторном свертывании последнего, а d — размерность пространства. Отсюда непосредственно следует, что

$$H = H_{iklm}H^{iklm} \tag{4}$$

представляет собою инвариант Вейля веса —2. Следовательно,

$$J = \sqrt{H} \tag{5}$$

является инвариантом Вейля веса —1. Этот результат в сочетании с (1) и (2) приводит к обобщению геодезической линии по методу Виртингера. Конечно, для вынесения суждения о значении этого и последующих выводов очень важен вопрос о том, является ли J единственным инвариантом Вейля веса —1, не содержащим производных от $g_{\mu\nu}$ выше второго порядка.

На основе изложенного выше теперь уже легко привести в соответствие каждому тензору Римана тензор Вейля и, таким образом, представить законы природы в форме дифференциальных уравнений, зависящих главным образом от соотношений между компонентами $g_{\mu\nu}$. Пусть

$$g'_{\mu\nu} = Jg_{\mu\nu};$$

тогда

$$d\sigma^2 = g'_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$$

представляет собой инвариант, зависящий только от отношений компонент $g_{\mu\nu}$. Все тензоры Римана, получаемые обычным путем из $d\sigma$ как основного инварианта, являются, если рассматривать их как функции компонент $g_{\mu\nu}$ и их производных, тензорами Вейля веса 0. Символически мы можем это представить следующим образом: если $T(g)$ — тензор Римана, который может зависеть не только от $g_{\mu\nu}$ и их производных, но и от других величин, таких, как компоненты $\phi_{\mu\nu}$ электромагнитного поля, то тензор $T(g')$, рассматриваемый как функция $g_{\mu\nu}$ и их производных, представляет собой тензор Вейля с весом 0. Следовательно, любому закону природы $T(g) = 0$ в общей теории относительности соответствует закон $T(g') = 0$, в который входят только отношения компонент $g_{\mu\nu}$.

Следующие соображения делают этот результат еще более наглядным. Так как в $g_{\mu\nu}$ один из множителей остается произвольным, его можно выбрать таким образом, чтобы всюду

$$J = J_0, \tag{6}$$

где J_0 — константа. Тогда компонента $g'_{\mu\nu}$, с точностью до постоянного коэффициента, равна компоненте $g_{\mu\nu}$, и в новой теории законы природы снова принимают вид

$$T(g) = 0.$$

Вся новизна относительно первоначальной формы общей теории относительности заключается, таким образом, в добавлении дифференциального уравнения (6), которому должны удовлетворять $g_{\mu\nu}$.

Мы задались целью изложить здесь только логическую возможность, заслуживающую опубликования, независимо от того, будет она использована в физике или нет. Это покажут дальнейшие исследования, которые должны будут также ответить на вопрос, надо ли рассматривать и другие инварианты Вейля, помимо

$$J = \sqrt{H}.$$

Поступила 17 марта 1921 г.

Теория Вейля изложена в книге Эддингтона «Теория относительности» (М.— Л., 1934) и в книге самого Вейля (H. Weil. Raum, Zeit, Materie. 5 Aufl. Berlin, 1923).

О ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

Особую радость доставляет мне возможность произнести эту речь в столице страны, в которой родились важнейшие основополагающие идеи теоретической физики. Я имею в виду теорию всемирного тяготения и теорию движения масс, подаренные нам Ньютоном, а также концепцию электромагнитного поля, которая благодаря Фарадею и Максвеллу легла в основу физики. Можно также сказать, что теория относительности, распространившая представление о поле на все явления, включая тяготение, явилась своего рода венцом великолепного создания Максвелла и Лоренца

Прежде чем перейти к существу теории относительности, мне хотелось бы подчеркнуть тот факт, что эта теория возникла не умозрительным путем, а в результате стремления как можно лучше удовлетворить данным опыта. Здесь мы имеем совсем не революционный акт, а естественное продолжение линии развития, проходящей через века. Отказ от некоторых понятий о пространстве, времени и движении, считавшихся до последнего времени фундаментальными, вовсе не был произвольным; напротив, он был обусловлен опытными данными.

Закон постоянства скорости света в пустоте, подтвержденный развитием электродинамики и оптики, вместе с равноправностью всех инерциальных систем отсчета (специальный принцип относительности), с особой резкостью подчеркнутой в известном опыте Майкельсона, привел прежде всего к тому, что понятию времени пришлось придать относительный смысл, причем каждой инерциальной системе должно соответствовать свое особое время. При развитии этой идеи выяснилось, что связь между непосредственными ощущениями, с одной стороны, и координатами и временем, с другой,— была определена недостаточно точно. Вообще

* *Über die Relativitätstheorie.* Речь в Королевском колледже (Лондон) в 1921 г.

для теории относительности характерно, что она стремится установить как можно лучшее соответствие между общими понятиями и опытными данными. Главное правило состоит в том, что то или иное физическое понятие может основываться только на ясной, недвусмысленной связи с наблюдаемыми явлениями. Согласно специальной теории относительности, пространственные координаты и время еще сохраняют абсолютный характер постольку, поскольку они поддаются непосредственному измерению твердыми масштабами и часами. Однако они относительны постольку, поскольку зависят от движения выбранной инерциальной системы отсчета. Четырехмерный континуум, образованный объединением пространства и времени (Минковский), сохраняет в специальной теории такой же абсолютный характер, какой в прежней теории имели пространство и время в отдельности. Следствием интерпретации координат и времени как результатов измерений является влияние движения (относительно системы координат) на размеры тела и ход часов, а также эквивалентность энергии и инертной массы.

Общая теория относительности обязана своим существованием прежде всего опытному факту численного равенства инертной и тяжелой массы тел, причем классическая механика не могла дать никакой интерпретации этому фундаментальному обстоятельству. Такую интерпретацию удалось получить, распространяя принцип относительности на ускоренные относительно друг друга системы отсчета. Введение систем координат, ускоренных относительно инерциальных систем, обусловливает появление гравитационных полей по отношению к последним. В связи с этим общая теория относительности, основанная на равенстве инертной и тяжелой масс, и дает теорию гравитационного поля.

Введение ускоренных относительно друг друга систем координат в качестве равноправных, подсказываемое тождественностью инерции и тяжести, в соединении с результатами специальной теории относительности, приводит к заключению, что законы, обусловливающие расположение твердых тел при наличии гравитационных полей, не соответствуют эвклидовой геометрии. Аналогичный результат получается для хода часов. Отсюда вытекает необходимость еще одного обобщения теории пространства и времени, поскольку непосредственная интерпретация пространственно-временных координат как результатов измерений, полученных с помощью масштабов и часов, теперь отпадает. Это обобщение метрики, которое было уже получено в области чистой математики в трудах Римана и Гаусса, основывается главным образом на том, что метрика специальной теории относительности сохраняется для малых областей и в общем случае.

Обрисованный здесь процесс развития лишает пространственно-временные координаты всякой самостоятельной реальности. Метрически реальное теперь дается только объединением пространственно-временных координат с математическими величинами, описывающими гравитационное поле.

Существует и вторая причина, способствовавшая созданию общей теории относительности. Еще Эрнст Мах убедительно отмечал неудовлетворительность теории Ньютона в следующем отношении. Если движение рассматривать не с причинной, а с чисто описательной точки зрения, то оно существует только как относительное движение предметов по отношению друг к другу. Однако с этой точки зрения ускорение, появляющееся в уравнениях Ньютона, оказывается непонятным. Ньютон вынужден был придумать физическое пространство, по отношению к которому должно существовать ускорение. Хотя это специально введенное понятие абсолютного пространства логически корректно, оно тем не менее кажется неудовлетворительным. Поэтому Эрнст Мах пытался изменить уравнения механики так, чтобы инерция тел сводилась к движению их не по отношению к абсолютному пространству, а по отношению к совокупности всех остальных весомых тел. При существовавшем тогда уровне знаний попытка Маха была заведомо обречена на неудачу.

Однако постановка проблемы представляется вполне разумной. С особой силой эти рассуждения звучат в общей теории относительности, так как в последней физические свойства пространства определяются весомой материей. По моему мнению, в общей теории относительности эту проблему можно удовлетворительно решить, лишь считая мир пространственно замкнутым. К этому убеждению ведут математические результаты теории, если предположить, что средняя плотность весомой материи во Вселенной имеет хотя и малую, но конечную величину.

В докладе еще раз подчеркивается уверенность в физической необходимости замкнутого мира — уверенность, от которой Эйнштейн вскоре отказывается. Впервые опубликован в «Mein Weltbild». Amsterdam, Querido Verlag, 1934. Сообщение о докладе было опубликовано в «Nation a. Athenaeum», 29, 431; «Times», 1921, London, June 14, 8 и «Nature», 1921, 107, 504).

ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТЕ ФРАНЦА СЕЛЕТИ „К КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ“ *

Следует признать, что гипотеза о «молекулярно-иерархическом» строении звездного мира с точки зрения теории Ньютона привлекательна, хотя предположение о том, что Млечный путь является спиральной туманностью, можно считать опровергнутым последними наблюдениями [1]. Эта гипотеза, естественно, объясняет фотометрический парадокс и устраняет конфликт теории Зеелигера с законом Ньютона, не рассматривая вещество как остров в пустом пространстве.

С точки зрения общей теории относительности гипотеза о молекулярно-иерархическом строении Вселенной также возможна. Но тем не менее эту гипотезу следует считать все же неудовлетворительной. Ниже это утверждение будет обосновано еще раз. Если геометрические и инерциальные свойства пространства хотя бы частично обусловлены веществом, то напрашивается мысль, что эта обусловленность должна быть полной, как и в общей теории относительности для случая, когда средняя плотность материи является конечной и мир — пространственно замкнутым. Я попытаюсь пояснить это на простейшем, хотя и грубом, гипотетическом примере.

Предположим, что мы изучаем тяготение, точно исследуя законы механики масс, имеющихся в наших лабораториях. Пусть мы не знаем, что Земля шарообразна. Тогда можно было бы построить следующую теорию. Существует прежде всего вертикальное «космическое» поле тяжести, всюду простирающееся до бесконечности. Земля тоже простирается до бесконечности вниз. Ее гравитационным действием по сравнению с космическим полем тяжести можно пренебречь [2]. Космическое поле тяжести

* *Bemerkung zu der Franz Seletyschen Arbeit «Beiträge zum kosmologischen System».* Ann. Phys., 1922, 69, 436—438.

[1] Сейчас установлено, что наша Галактика является спиральной.— *Прим. ред.*

[2] Я должен извиниться, что эта гипотеза противоречит закону Ньютона.

изменяется вследствие гравитационного воздействия масс, с которыми можно экспериментировать на поверхности Земли.

Хотя гипотетическое космическое поле тяжести удовлетворяет уравнению Пуассона совершенно так же, как и поля тяжести масс, находящихся на поверхности Земли, наша теория была бы неудовлетворительной потому, что само космическое поле, по предположению, не имеет материальной причины. Идея о том, что поле тяжести, служащее главной причиной падения тел на поверхность Земли, существует не само по себе, а обусловлено земными телами, была бы, конечно, воспринята как большое достижение.

Тот факт, что требование сведе́ния метрического и инерциального поля к физическим причинам выдвигается пока еще недостаточно настойчиво, объясняется лишь тем, что физическая реальность инерциального поля ощущается не так отчетливо, как физическая реальность «космического поля тяжести» в только что приведенном примере. Будущим поколениям, однако, эта нетребовательность покажется непонятной.

В «молекулярно-иерархическом мире», так же как и в «островном мире», не выполняется постулат Маха, согласно которому инерция отдельного тела должна быть обусловлена совокупностью всех остальных тел в том же смысле, в каком это относится к гравитации. Трудно понять, каким образом Селети сумел бы устранить этот недостаток своей системы. Этот недостаток усугубляется тем, что в общей теории относительности, даже не касаясь космологических проблем, можно показать, что тела ведут себя в первом приближении так, как этого следует ожидать в соответствии с идеей Маха. По этому поводу я сошлюсь на мои «Четыре лекции по теории относительности» (прочитанные в мае 1921 г. в Принстонском университете), которые вышли в издательстве Фивег [3].

Наконец, надо упомянуть еще один пункт, вызывающий путаницу не только в статье Селети, но часто и в специальной литературе. Согласно теории относительности, законы природы необходимо формулировать независимо от какого-либо конкретного выбора координат, так как системе координат ничто реально существующее не соответствует; о простоте гипотетического закона можно судить только по его общековариантной формулировке. Однако из этого не следует, что если при соответствующем выборе координат описание можно упростить, то это будет противоречить принципу относительности. Например, когда я апроксимирую реальный мир «цилиндрическим миром» с равномерным распределением вещества и выбираю при этом ось времени параллельной образующим «цилиндра», то это не означает введения «абсолютного времени». В этом случае по-прежнему не существует никакой системы координат, которой следовало бы

[3] Статья 54.— *Ред.*

отдать предпочтение при формулировке законов природы. Что касается реального мира, то точно определить в нем такую систему, конечно, невозможно, даже если реальный мир приближенно и можно описать таким цилиндрическим миром. Принцип относительности не утверждает, что мир можно описывать во всех системах координат одинаково простым или вообще одинаковым образом; он говорит лишь о том, что общие законы природы должны быть одинаковыми во всех системах (точнее, о простоте гипотетически возможных законов природы можно судить только по их общековариантной формулировке).

Поступила 25 сентября 1922 г.

Статья Селети (Franz Selety) была напечатана в Ann. Phys., 1922, **68**, 281. Ответ на заметку Эйнштейна был опубликован в том же журнале [1923, **72**, 58].

Селети обсуждает вопрос о возможности бесконечной Вселенной, свободной от парадокса Зеелигера, т. е. бесконечной Вселенной, в которой нет бесконечно больших градиентов потенциалов и в которой средние скорости звезд соответственно малы. Подобно тому, как галактики состоят из звезд, автор предполагает, что галактики образуют системы более высокого порядка, так что на каждой следующей ступени системы предыдущей входят как составные части. Такую модель Селети и называет молекулярной иерархией.

Плотность материи в модели Селети равна нулю, что и служит исходным пунктом критики Эйнштейна (с которой, впрочем, Селети и не соглашается). Уверенность Эйнштейна в том, что Вселенная должна быть конечна, была поколеблена лишь работами А. А. Фридмана.

ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТЕ Э. ТРЕФТЦА „СТАТИЧЕСКОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ДВУХ ТОЧЕЧНЫХ МАСС В ТЕОРИИ ЭЙНШТЕЙНА“ *

В основу своих исследований автор[1] кладет уравнения поля в вакууме

$$R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R = 0, \tag{1}$$

эквивалентные уравнениям

$$\left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) - \lambda g_{ik} = 0, \tag{1a}$$

что может быть легко доказано сверткой уравнения (1a).

Автор считает, что им найдено статическое решение, которое содержит сферическую пространственную геометрию, не имеет сингулярностей вне обеих масс и в которое не входят другие массы.

Эта задача представляет большой интерес для космологии, т. е. для рассмотрения геометрической структуры Вселенной в целом, и меня заинтересовало, доказывают ли действительно эти уравнения физическую возможность существования статической Вселенной, масса которой концентрировалась бы только в двух небесных телах. Однако при этом выяснилось, что решение Трефтца вообще не допускает такой физической интерпретации. Это будет показано ниже.

Э. Трефтц исходит из следующего выражения для (четырехмерного) линейного элемента

$$ds^2 = f_4(x)\, dt^2 - [dx^2 + f_2(x)(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)]. \tag{2}$$

Это выражение соответствует пространству, обладающему сферической симметрией относительно начальной точки.

---

* *Bemerkung zu der Abhandlung von E. Trefftz «Das statische Gravitationsfeld zweier Massenpunkte in der Einsteinschen Theorie».* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl., 1922, 448—449.

[1] E. Trefftz. Math. Ann., 1922, 86, 317.

Частный случай $f_4=\text{const.}$; $f_2=x^2$ соответствовал бы изотропному и однородному пространству Галилея — Эвклида.

В формуле (2) x представляет собой обычным способом измеренное радиальное расстояние от одной из двух точечных масс (с точностью до аддитивной постоянной, $\sqrt{f_2(x)}$) или, иначе говоря, измеренную обычным способом и деленную на 2π окружность большого круга шара, соответствующего постоянному значению x, разделяющего и концентрически охватывающего обе массы [2]. Поверхности двух шаровых масс, между которыми ($X_1 < x < X_2$) находится пустое пространство, определяются двумя уравнениями $x = X_1$ и $x = X_2$. Э. Трефтц приводит в качестве общего решения задачи:

$$\left.\begin{aligned} x &= \int \frac{dw}{\sqrt{1+\frac{A}{w}+Bw^2}}, \\ f_2 &= w^2, \\ f_4 &= C^2\left(1+\frac{A}{w}+Bw^2\right), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

причем без ограничения общности C может быть принято равным единице.

Исходя из формулы (2), можно, следовательно, написать

$$ds^2 = \left(1+\frac{A}{w}+Bw^2\right)dt^2 - \frac{dw^2}{1+\frac{A}{w}+Bw^2} - w^2\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2\right).$$

При отрицательном A и исчезающе малом B эта формула превращается в хорошо известное шварцшильдовское решение для поля материальной точки. Следовательно, для постоянной A нужно и здесь выбирать отрицательное значение в соответствии с тем фактом, что существуют лишь положительные гравитирующие массы. Константа B соответствует λ-члену уравнения (1а). Положительному λ соответствует отрицательное B и, наоборот.

Если система уравнений (3) действительно представляет поле двух шаровых масс, то Вселенная естественно должна иметь следующую метрику. Начиная с первой сферы $x = X_1$, длина окружности $x = \text{const.}$, деленная на 2π и выраженная через $w(=\sqrt{f_2})$, должна сначала увеличиваться с возрастанием x, и затем, при приближении ко второму шару, уменьшаться в том случае, если речь идет о замкнутой Вселенной, в которой справедливы соотношения сферического мира. Следовательно, где-то

[2] Предполагается, что в рассматриваемой *замкнутой* модели сфера может иметь два центра по обе стороны от ее поверхности. — *Прим. ред.*

в пустом пространстве между обеими шаровыми массами должно выполняться условие

$$\frac{dw}{dx} = \sqrt{1 + \frac{A}{w} + Bw^2} = 0.$$

Однако здесь, согласно равенствам (3), f_4 равнялось бы нулю. Согласно уравнению (2), $\sqrt{f_4}$ представляет собой скорость хода часов, отрегулированную там в состоянии покоя. Обращение f_4 в нуль означает, следовательно, истинную сингулярность поля. О том, что величины f_4 не должны обращаться в нуль, говорит и тот факт, что в дифференциальных уравнениях появляются логарифмические производные f_4'/f_4. Тем самым показано, что решение (3) не может быть распространено до этого места. Оно предполагает в действительности наличие протяженного сферически симметричного распределения масс, как уже было показано Г. Вейлем.

Поступила 21 декабря 1922 г.

ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТЕ А. ФРИДМАНА „О КРИВИЗНЕ ПРОСТРАНСТВА“ *

Результаты относительно нестационарного мира, содержащиеся в упомянутой работе [1], представляются мне подозрительными. В действительности оказывается, что указанное в ней решение не удовлетворяет уравнениям поля (A). Как известно, из этих уравнений следует, что дивергенция тензора материи T_{ik} обращается в нуль. В случае, характеризуемом предположениями (C) и (D_3), это приводит к соотношению

$$\frac{d\rho}{\partial x_4} = 0,$$

что вместе с уравнением (8) требует постоянства радиуса мира во времени. Следовательно, значение этой работы в том и состоит, что она доказывает это постоянство.

Поступила 18 сентября 1922 г.

---

* *Bemerkung zu der Arbeit von A. Friedmann. «Über die Krümmung des Raumes».* Z. Phys., 1922, 11, 326.

[1] A. Friedmann. Z. Phys., 1922, 10, 377—386.

К РАБОТЕ А. ФРИДМАНА „О КРИВИЗНЕ ПРОСТРАНСТВА“*

В предыдущей заметке [1] я подверг критике названную выше работу [2]. Однако моя критика, как я убедился из письма Фридмана, сообщенного мне г-ном Крутковым, основывалась на ошибке в вычислениях. Я считаю результаты Фридмана правильными и проливающими новый свет. Оказывается, что уравнения поля допускают наряду со статическими также и динамические (т. е. переменные относительно времени) центрально-симметричные решения для структуры пространства.

Поступила 31 мая 1923 г.

Работы А.А. Фридмана (1888—1925) вновь напечатаны в номере журнала «Успехи физических наук» (1963, 86, № 3), посвященном 75-летию со дня его рождения; там же напечатан и перевод этих заметок Эйнштейна.

Работы Фридмана оказали большое влияние на развитие наших взглядов на Вселенную. Эйнштейна, в частности, Фридман заставил отказаться от предвзятой модели стационарной Вселенной, ввел представление о расширяющейся Вселенной и показал существование открытой модели. Этим самым он доказал ошибочность представления, что Вселенная *должна* быть замкнутой. Открытие модели Фридмана сделало ненужным введение космологической постоянной λ, от которой, под влиянием Фридмана, отказался и сам Эйнштейн.

---

* *Notiz zu der Bemerkung zu der Arbeit von A. Friedmann. «Über die Krümmung des Raumes»*. Z. Phys., 1923, 16, 228.

[1] A. Einstein. Z. Phys., 1922, 11, 326. (Статья 68).
[2] A. Friedmann. Z. Phys., 1922, 10, 377.

ОСНОВНЫЕ ИДЕИ И ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

Если рассмотреть ту часть теории относительности, которую в настоящее время можно считать, в известном смысле, надежным достоянием науки, то обнаружатся два аспекта, играющие ведущую роль в этой теории.

Во-первых, в центре всего рассмотрения стоит вопрос: существуют ли в природе физически выделенные (привилегированные) состояния движения? (Физическая проблема относительности).

Во-вторых, фундаментальным оказывается следующий гносеологический постулат: понятия и суждения имеют смысл лишь постольку, поскольку им можно однозначно сопоставить наблюдаемые факты. (Требование содержательности понятий и суждений).

Оба эти аспекта можно уяснить, если применить их к частному случаю, например, к классической механике. Сначала мы видим, что в каждой точке, занятой материей, существует привилегированное состояние движения, именно: состояние движения материи в рассматриваемой точке. Однако обсуждаемая проблема по существу только начинается с вопроса: существуют ли физически выделенные состояния движения для *протяженных* областей? С точки зрения классической механики на этот вопрос следует ответить утвердительно: такими физически выделенными состояниями движения являются состояния движения инерциальных систем.

Это высказывание, как и вообще все основы механики в том виде, как ее обычно излагали до теории относительности, далеко не удовлетворяет сформулированному выше «требованию содержательности». Движение можно понимать только как относительное движение тел. В механике, говоря о движении вообще, подразумевают движение относительно системы координат. Но такое понимание не соответствует «требованию содержательности», если систему координат рассматривать просто как нечто во-

* *Grundgedanken und Probleme der Relativitätstheorie*. В кн.: «Nobelstiftelsen, Les Prix Nobel en 1921—1922». Imprimerie Royale. Stockholm, 1923.

ображаемое. Обратившись к экспериментальной физике, можно убедиться, что в ней система координат всегда представлена «практически абсолютно твердым» телом. При этом, далее, делается допущение, что такие твердые тела можно расположить в покое друг относительно друга, подобно телам эвклидовой геометрии. В той мере, в какой мы вправе считать абсолютно твердое измерительное тело существующим, удается привести в соответствие с «требованием содержательности» как понятие «системы координат», так и понятие движения материи относительно этой системы. Вместе с тем такое понимание позволяет согласовать (применительно к нуждам физики) с «требованием содержательности» и эвклидову геометрию. Таким образом, вопрос о справедливости эвклидовой геометрии приобретает физический смысл; справедливость ее предполагается как в классической физике, так и в специальной теории относительности.

Инерциальная система и время определяются в классической механике лучше всего совместно, с помощью подходящей формулировки закона инерции: оказывается возможным установить такое время и сообщить системе координат такое состояние движения (инерциальная система), чтобы по отношению к ней материальные точки, не подвергающиеся действию сил, не испытывали ускорения; кроме того, по отношению к этому времени допускается, что оно может быть измерено одинаково устроенными часами (системами с периодическим процессом), исходя из любого состояния движения, и что результаты этих измерений будут совпадать. В таком случае имеется бесконечно много инерциальных систем, движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, а следовательно, и бесконечно много физически выделенных состояний движения, равноценных между собой. Время абсолютно, т. е. не зависит от выбора конкретной инерциальной системы; оно определяется бо́льшим числом признаков, чем это логически необходимо, что, однако, как предполагается в механике, не должно приводить к противоречиям с опытом. Отметим прежде всего, что логическая слабость этого представления с точки зрения требования содержательности заключается в том, что у нас нет никакого опытного критерия для установления того, свободна ли материальная точка от действия сил, или нет; поэтому понятие «инерциальная система» остается до некоторой степени проблематичным. На этот пробел, анализ которого приводит к общей теории относительности, мы пока не будем обращать внимания.

В изложенном рассуждении об основах механики понятие абсолютно твердого тела (а равно и понятие часов) играет фундаментальную роль, которую с известным основанием можно оспаривать. Абсолютно твердые тела осуществляются в природе лишь приближенно, и притом даже не с любой степенью приближения; таким образом это понятие не удовлетворяет строго «требованию содержательности». Далее, представляется логически неоправданным предпосылать всему физическому рассмотрению понятие абсолютно твердого (или просто твердого) тела, а затем, в конечном счете, строить его (тело) на атомистической основе, исходя из первичных физических законов, которые, в свою очередь, сами построены с помощью понятия абсолютно твердого измерительного тела. Мы упоминаем об этих методологических недостатках потому, что они в таком же смысле присущи и теории относительности в том ее схематическом представлении, которое мы здесь излагаем. Разумеется, было бы логически более последовательным начать с существа самих физических законов и только к этому существу предъявить «требование содержательности», т. е. отнести на самый конец установление однозначной связи с миром опыта, вместо того, чтобы осуществлять ее в несовершенном виде уже для одной искусственно изолированной части теории, а именно: для пространственно-временнóй метрики. Однако мы еще не продвинулись достаточно далеко в установлении первичных законов природы, чтобы пойти по этому более совершенному пути, не рискуя потерять твердую почву под ногами. В конце наших рассуждений мы увидим, что в новейших исследованиях уже содержится попытка осуществления этого логически более последовательного метода, основанная на идеях Леви-Чивиты, Вейля и Эддингтона.

Из сказанного выше становится также ясно, чтó следует понимать под «привилегированными состояниями движения». Они являются привилегированными в смысле формулировки законов природы. Системы координат, находящиеся в таких состояниях движения, отличаются тем, что сформулированные в этих координатах законы природы принимают наиболее простой вид. Согласно классической механике, физически выделенными в этом смысле являются состояния движения инерциальных систем. Согласно классической механике, можно различить (абсолютно) неускоренные и ускоренные движения; далее, в классической механике существуют скорости только относительные (зависящие от выбора инерциальной системы), а ускорения и вращения — абсолютные (не зависящие от выбора инерциальной системы). Выразим это так: согласно классической механике существует «относительность скорости», но не «относительность ускорения». После этих предварительных замечаний перейдем к основному предмету нашего рассмотрения — теории относительности — и охарактеризуем принципиальную сторону ее развития вплоть до настоящего времени.

Специальная теория относительности представляет собой результат приспособления основ физики к электродинамике Максвелла — Лоренца. Из прежней физики она заимствует предположение о справедливости эвклидовой геометрии для законов пространственного расположения абсолютно твердых тел, инерциальную систему и закон инерции. Закон равноценности всех инерциальных систем с точки зрения формулирования законов природы специальная теория относительности принимает справедливым для всей физики (специальный принцип относительности). Из электродинамики Максвелла — Лоренца эта теория заимствует закон постоянства скорости света в вакууме (принцип постоянства скорости света).

Для того чтобы можно было согласовать специальный принцип относительности с принципом постоянства скорости света, необходимо отказаться от предположения о существовании абсолютного (совпадающего для всех инерциальных систем) времени. Таким образом, мы отказываемся от гипотезы, что одинаково устроенные, произвольно движущиеся и должным образом отрегулированные часы идут так, что показания любых двух из них при встрече друг с другом совпадают. Каждой инерциальной системе приписывается свое, особое время; состояние движения инерциальной системы и ее время определяются, в согласии с требованием содержательности, тем, что по отношению к ней должен выполняться принцип постоянства скорости света. Существование определенной таким образом инерциальной системы, равно как и справедливость закона инерции в этой системе, постулируются. Для каждой из инерциальных систем время измеряется покоящимися относительно этой системы и одинаково устроенными часами.

Этими определениями вместе с гипотезами, скрытыми в предположении об их непротиворечивости, однозначно устанавливаются законы преобразования пространственных координат и времени, при переходе от одной инерциальной системы к другой, так называемые преобразования Лоренца. Их непосредственный физический смысл состоит во влиянии движения относительно рассматриваемой инерциальной системы на форму абсолютно твердых тел (лоренцово сокращение) и на ход часов. Согласно специальному принципу относительности, законы природы должны быть ковариантны относительно преобразований Лоренца; таким образом, теория дает критерий, которому должны удовлетворять общие законы природы. Она приводит, в частности, к видоизмененному ньютоновскому закону движения материальной точки, в который скорость света в вакууме входит в качестве предельной скорости, а также к осознанию одинаковой природы энергии и инертной массы.

Специальная теория относительности привела к значительным успехам. Она примирила механику с электродинамикой. Она сократила число логически независимых друг от друга гипотез в электродинамике. Она сделала неизбежным методологический анализ основных понятий. Она объединила законы сохранения импульса и энергии, выявила единство массы и энергии. Однако она все же не могла нас вполне удовлетворить — даже независимо от квантовых трудностей, в действительном разрешении которых до сих пор оказывались бессильными все теории. Так же как и классическая механика, специальная теория относительности сохраняет выделение некоторых привилегированных состояний движения — состояния движения инерциальных систем — по сравнению со всеми остальными состояниями движения. С таким сохранением, собственно говоря, труднее примириться, чем даже с выделением одного единственного привилегированного состояния движения, как это делалось в теории покоящегося светоносного эфира, ибо в этой теории по крайней мере мыслилось реальное основание для такого выделения, а именно: светоносный эфир. Более удовлетворительной должна представляться теория, которая с самого начала не выделяет никакого привилегированного состояния движения. Далее, вызывает сомнение уже упомянутая выше неясность в определении инерциальной системы или в формулировке закона инерции. Эти сомнения приобретают решающее значение в свете опытного закона равенства инертной и тяжелой массы, как показывает нижеследующее рассуждение.

Пусть K — инерциальная система без поля тяжести, K' — система координат, равномерно ускоренная относительно K. Тогда поведение материальных точек по отношению к системе K' будет таким же, как если бы K' была инерциальной системой, в которой существует однородное поле тяготения. Таким образом, в свете известных из опыта свойств поля тяжести определение инерциальной системы оказывается несостоятельным. Напрашивается мысль о том, что каждая, любым образом движущаяся система отсчета, с точки зрения формулировки законов природы, равноценна любой другой и что, следовательно, для областей конечной протяженности вообще не существует физически выделенных (привилегированных) состояний движения (общий принцип относительности).

Последовательное проведение этой идеи требует еще более глубокого видоизменения геометрико-кинематических основ теории, чем специальная теория относительности. Дело в том, что вытекающее из последней лоренцово сокращение приводит к следующему результату: по отношению к системе K', произвольно движущейся относительно некоторой инерциальной системы K (свободной от поля тяготения), законы эвклидовой геометрии для пространственного расположения абсолютно твердых (покоящихся относительно K') тел несправедливы. Тем самым теряет смысл, с точки зрения требования содержательности, и декартова система координат. Аналогично обстоит дело и в отношении времени: его определение относительно системы K' на основании показаний одинаково устроенных покоящихся относительно K' часов или на основании закона распространения света уже не имеет смысла. Обобщая, приходим к следующему результату: поле тяготения и метрика представляют собой лишь различные формы проявления одного и того же физического поля.

К формальному описанию этого поля можно прийти путем следующего рассуждения. Для любой бесконечно малой окрестности точки в произвольном поле тяготения можно указать локальную систему координат в таком состоянии движения, что по отношению к этой локальной системе координат не существует поля тяготения (локальная инерциальная система). Для этой инерциальной системы и для этой бесконечно малой области результаты специальной теории относительности мы вправе считать справедливыми в первом приближении. В каждой точке пространства-времени имеется бесконечно много таких локальных инерциальных систем; они связаны между собой преобразованиями Лоренца. Последние характеризуются тем, что они оставляют инвариантным «интервал» ds между двумя бесконечно близкими событиями, определяемый равенством

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Этот интервал может быть измерен с помощью масштабов и часов, так как x, y, z, t означают координаты и время, измеренные по отношению к локальной инерциальной системе.

Для описания пространственно-временны́х областей конечной протяженности нужны произвольные координаты в четырехмерном многообразии, обеспечивающие не что иное, как однозначное обозначение каждой из точек пространства-времени четырьмя числами x_1, x_2, x_3, x_4, и отвечающие непрерывности этого четырехмерного многообразия (гауссовы координаты). Математическое выражение общего принципа относительности состоит в том, что системы уравнений, выражающие общие законы природы, имеют одинаковый вид во всех таких системах координат.

Так как дифференциалы координат локальной инерциальной системы выражаются линейно через дифференциалы dx_ν некоторой гауссовой системы координат, то при использовании последней для интервала ds между двумя событиями получается выражение вида

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \qquad (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}).$$

Величины $g_{\mu\nu}$, являющиеся непрерывными функциями координат x_ν, определяют метрику четырехмерного многообразия, поскольку ds определен как величина, измеримая с помощью масштабов и часов (абсолютная). Но именно эти величины $g_{\mu\nu}$ описывают в гауссовой системе координат также и поле тяготения, единство природы которого с физической причиной, определяющей метрику, было нами установлено ранее. Частный случай справедливости специальной теории относительности в конечной области характеризуется тем, что при подходящем выборе системы координат величины $g_{\mu\nu}$ в этой конечной области не зависят от координат x_ν.

Согласно общей теории относительности, закон движения материальной точки в чисто гравитационном поле выражается уравнением геодезической. Действительно, геодезическая является математически наиболее простой кривой, переходящей в прямую в частном случае постоянных $g_{\mu\nu}$. Таким образом, здесь мы имеем дело с переносом закона инерции Галилея в общую теорию относительности.

Установление уравнений поля сводится математически к вопросу о простейших общековариантных дифференциальных уравнениях, которым могут быть подчинены гравитационные потенциалы $g_{\mu\nu}$. Эти уравнения определены тем, что они должны содержать производные от $g_{\mu\nu}$ по x_ν не выше второго порядка, причем эти производные должны входить в уравнение только линейно. В свете этого условия, рассматриваемые уравнения оказываются естественным переносом уравнения Пуассона ньютоновской теории тяготения в общую теорию относительности.

Указанный ход рассуждений привел к теории тяготения, содержащей в качестве первого приближения теорию Ньютона и, сверх того, позволяющей рассчитать движение перигелия Меркурия, отклонение луча света в гравитационном поле Солнца и красное смещение спектральных линий, согласующиеся с результатами наблюдений [1].

Чтобы завершить построение фундамента общей теории относительности, необходимо еще ввести в нее электромагнитное поле, которое вместе с тем представляет собой, по нашему теперешнему убеждению, тот материал, из которого нам надлежит построить элементарные образования материи. Удается также без труда перенести максвелловские уравнения поля в общую теорию относительности. Такой перенос вполне однозначен, если только допустить, что эти уравнения не содержат производных $g_{\mu\nu}$ выше первого порядка и что в локальной инерциальной системе они справедливы в их обычной (максвелловской) форме. Далее, уравнения гравитационного поля легко удается дополнить электромагнитными членами таким (предписываемым уравнениями Максвелла) способом, чтобы они учитывали гравитирующее действие электромагнитного поля.

Эти уравнения поля не дали какой-либо теории материи. Поэтому, чтобы включить в теорию действие весомых масс как источников поля, пришлось (как и в классической физике) ввести в нее материю в приближенном, феноменологическом представлении.

Этим исчерпываются непосредственные следствия принципа относительности. Обратимся теперь к проблемам, примыкающим к изложенному. Уже Ньютон осознал, что закон инерции неудовлетворителен в одном отношении, о котором здесь не было до сих пор упомянуто; в нем не указывается никакой реальной причины физического выделения состояний движения инерциальных систем по сравнению со всеми другими состояниями движения. В то время как за гравитационные свойства материаль-

[1] Впрочем, для красного смещения согласие с результатами наблюдений еще не вполне надежно.

ной точки ответственными считаются наблюдаемые материальные тела, для инерционных свойств материальной точки указывается не какая-либо материальная причина,а фиктивная (абсолютное пространство, или инерциальный эфир).Это хотя и не является логически недопустимым, но оставляет чувство неудовлетворенности. По этой причине Э. Мах требовал видоизменения закона инерции в том смысле, что инерцию следовало бы понимать как сопротивление тел ускорению по отношению *друг к другу*, а не по отношению к «пространству». При таком понимании следует ожидать, что ускоренные тела одинаково ускоряюще действуют на другие тела (ускорительная индукция).

Изложенное толкование еще больше подкрепляется общей теорией относительности, которая устраняет разграничение между эффектами инерции и тяготения. Оно сводится к требованию, чтобы поле $g_{\mu\nu}$ полностью, с точностью до несущественного произвола, обусловленного свободой выбора координат, определялось материей. В пользу требования Маха говорит еще и то, что, согласно уравнениям поля тяготения, ускорительная индукция действительно существует, хотя и является столь слабым эффектом, что возможность ее прямого обнаружения с помощью механических опытов исключена.

Требованию Маха можно удовлетворить в общей теории относительности, если рассматривать мир пространственно конечным и замкнутым. Благодаря этой гипотезе оказывается также возможным считать среднюю плотность материи в мире *конечной*, в то время как в пространственно бесконечном (квазиэвклидовом) мире она должна была бы обратиться в нуль. Однако нельзя умолчать о том, что для такого выполнения постулата Маха приходится ввести в уравнения поля член, который не основан на каких-либо опытных данных и ни в коей мере не обусловлен логически остальными членами этих уравнений. По этой причине указанное решение «космологической проблемы» пока нельзя считать вполне удовлетворительным.

Теперь особенно живо волнует умы проблема единой природы гравитационного и электромагнитного полей. Мысль, стремящаяся к единству теории, не может примириться с существованием двух полей, по своей природе совершенно независимых друг от друга. Поэтому делаются попытки построить такую математически единую теорию поля, в которой гравитационное и электромагнитное поля рассматриваются лишь как различные компоненты одного и того же единого поля, причем его уравнения, по возможности, уже не состоят из логически независимых друг от друга членов.

Теория тяготения (т.е.риманова геометрия — с точки зрения математического формализма) должна быть обобщена так, чтобы она охватывала также и законы электромагнитного поля. К сожалению, при этой попытке мы не можем опереться на опытные факты, как при построении теории тяготения (равенство инертной и тяжелой массы), а вынуждены ограничиться критерием математической простоты, который не свободен от произвола. В настоящее время наиболее успешной представляется основанная на идеях Леви-Чивиты, Вейля и Эддингтона попытка заменить риманову метрическую геометрию более общей теорией аффинной связи.

Для римановой геометрии характерно предположение, что двум бесконечно близким точкам можно сопоставить «интервал» ds, квадрат которого является однородной квадратичной функцией дифференциалов координат. Отсюда следует (при выполнении некоторых условий вещественности) справедливость эвклидовой геометрии в любой бесконечно малой области. Таким образом, каждому линейному элементу (или вектору) в некоторой точке P сопоставляется параллельный и равный ему линейный элемент (или вектор) в любой заданной бесконечно близкой точке P' (аффинная связь). Риманова метрика определяет некоторую аффинную связь. Если же, наоборот, математически задана аффинная связь (закон бесконечно малого параллельного переноса), то в общем случае не существует такого римановского мероопределения, из которого ее можно было бы вывести.

Важнейшее понятие римановой геометрии, на котором основаны и уравнения тяготения,— «кривизна пространства»— в свою очередь основывается исключительно на «аффинной связи». Если задать такую аффинную связь в некотором континууме, не основываясь с самого начала на метрике, то получается обобщение римановой геометрии, в котором все же сохраняются важнейшие выведенные ранее величины. Находя наиболее простые дифференциальные уравнения, которым можно подчинить аффинную связь, мы вправе надеяться, что натолкнемся на такое обобщение уравнений тяготения, которое будет содержать в себе также и законы электромагнитного поля. Эта надежда и в самом деле оправдалась, но мы не знаем, можно ли рассматривать полученную таким образом формальную связь как действительное обогащение физики, пока из нее не будут получены какие-либо новые физические связи. В частности, теорию поля можно будет признать удовлетворительной, по моему мнению, лишь тогда, когда она позволит описать элементарные электрические частицы с помощью решений, не содержащих особенностей.

Наконец, не следует забывать, что теорию элементарных электрических образований нельзя отделять от вопросов квантовой теории. Перед лицом этой наиболее глубокой физической проблемы современности пока оказалась бессильной и теория относительности. Но если когда-нибудь в результате решения квантовой проблемы форма общих уравнений и претерпит дальнейшие глубокие изменения,— пусть даже совершенно изменятся самые величины, с помощью которых мы описываем элементарные процессы,— от принципа относительности отказываться никогда не придется; законы, выведенные с его помощью до сих пор, сохранят свое значение по меньшей мере в качестве предельных законов.

Эйнштейн не произнес традиционной речи при вручении ему Нобелевской премии. В сборниках Нобелевских докладов вместо этого включен его доклад, который он сделал в те же дни (11 июля 1923 г.) в Гётеборге на собрании естествоиспытателей северных стран. Доклад был издан и отдельной брошюрой; кроме того, его испанский перевод был издан в Аргентине (Fenix, Buenos Aires, 1924, 4, 103).

В докладе подчеркнуто отношение Эйнштейна к привилегированной системе координат — системе, в которой физические законы имеют наиболее простой вид.

Интересен и конец доклада, где Эйнштейн (еще не зная о работе Фридмана) выражает неудовлетворение космологической постоянной, введение которой, по его мнению, логически не обоснованно.

В докладе сформулирована программа единой теории поля, над которой Эйнштейн активно работал с 1923 г. до конца жизни.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕСУЩЕСТВОВАНИЯ ВСЮДУ РЕГУЛЯРНОГО ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО ПОЛЯ В ТЕОРИИ ПОЛЯ Т. КАЛУЦЫ*

(Совместно с Я. Громмером)

Пожалуй, наиболее важным в настоящее время вопросом в общей теории относительности является вопрос о единой природе гравитационного и электромагнитного полей. Хотя единая природа этих двух видов поля априори ниоткуда не следует, преодоление этого дуализма явилось бы, несомненно, большим успехом теории. Единственной попыткой в этом направлении до последнего времени была теория Вейля. Однако эта теория вызывает серьезные сомнения. Она не обеспечивает независимость состояний масштабов и часов, в том числе и атомов, от их предыстории. Кроме того, она не устраняет указанный дуализм, поскольку ее функция Гамильтона аддитивно складывается из двух логически независимых частей — электромагнитной и гравитационной. Далее эта теория приводит к дифференциальным уравнениям четвертого порядка, в то время как у нас пока нет никаких оснований выходить за рамки уравнений второго порядка.

Недавно Т. Калуца представил Академии наук в Берлине проект теории [1], которая устраняет все эти недостатки и отличается удивительной формальной простотой. Мы изложим вначале ход мыслей Калуцы и затем перейдем к поставленному нами вопросу.

Пятимерное многообразие, в котором переменные поля не зависят (при соответствующем выборе координат) от пятой координаты, эквивалентно

---

* *Beweis der Nichtexsistenz eines überall regulären zentrisch symmetrischen Feldes nach der Feld-Theorie von Th. Kaluza* (Mit J. Grommer). Scripta Universitatis atque Bibliothecae Hierosolymitanarum, Mathematica et Physica (Jerusalem), 1923, **1**, N 7.

[1] T. K a l u z a. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1921, 966. [Изложение теории Калуцы, см., например, в статье G. B e c k. Allgemeine Relativitätstheorie, Handb. Phys., 1te Auflage, Bd. 4, 381.— *Прим. ред.*].

четырехмерному континууму. Поэтому не требуется никакой новой физической гипотезы, чтобы интерпретировать четырехмерное пространственно-временнóе многообразие физического мира как такое пятимерное многообразие, которое можно назвать «цилиндрическим» относительно x_5. Так и поступает Калуца. Далее он предполагает, что физическая реальность в этом континууме характеризуется квадратом линейного элемента

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu \tag{1}$$

с коэффициентами $(g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu})$

$$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & g_{15} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & g_{25} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \,, \\ g_{51} & g_{52} & g_{53} & g_{54} & g_{55}, \end{matrix}$$

которые в соответствии со сказанным не зависят от x_5. Компоненты $g_{11}, \ldots, g_{14}$ должны описывать гравитационное поле; компоненты g_{15}, g_{25}, g_{35}, g_{45} — электромагнитные потенциалы; g_{55} — переменная поля, еще не имеющая интерпретации, но, возможно, связанная с давлением Пуанкаре, которое до сих пор представляло для теории электрона что-то вроде камня преткновения.

Существенное предположение Калуцы заключается в утверждении, что законы природы в этом пятимерном мире должны быть общековариантными. Благодаря этому электромагнитные потенциалы неизбежно входят в законы природы совершенно таким же образом, как и гравитационные потенциалы, что приводит к радикальному ограничению возможностей. Благодаря этому перед нами появляется возможность построить физическую картину мира на основе единой функции Гамильтона, не состоящей из суммы разнородных членов. Конечно, кроме величин $g_{\mu\nu}$, Т. Калуца вводит также тензор потока материи. Однако ясно, что введение этого тензора необходимо лишь для того, чтобы дать предварительное, чисто феноменологическое описание вещества, тогда как в настоящее время конечной целью является чистая теория поля, в которой переменные поля изображали бы как поле «пустого пространства», так и электрически заряженные элементарные частицы, образующие «вещество».

Разумеется, нельзя умолчать о принципиально слабом пункте идеи Калуцы. В общей теории относительности, имеющей дело с четырехмерным континуумом, форма

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

означает величину, непосредственно измеримую с помощью масштабов и часов в локальной инерциальной системе, тогда как в пятимерном континууме теории Калуцы ds^2 представляет собой чистую абстракцию, по-видимому, лишенную непосредственного метрического смысла. Поэтому с физической точки зрения требование общей ковариантности всех уравнений в пятимерном континууме представляется совершенно необоснованным. Кроме того, возникает сомнительная асимметрия, когда требованием цилиндричности одно измерение выделяется из всех других, в то время как в структуре уравнений все пять измерений должны быть равноправными.

Можно поставить вопрос, достаточно ли для описания единого поля величин $g_{\mu\nu}$. Тогда, выбрав координаты, при которых определитель $|g_{\mu\nu}| = g$ имеет значение 1, функцию Гамильтона H можно записать в виде

$$H = g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}. \tag{2}$$

При этом уравнения поля в первом приближении, т. е. в случае малых отклонений $g_{\mu\nu}$ от постоянных значений, принимают вид

$$\frac{\partial\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} = 0. \tag{3}$$

Калуца уже показал, что таким способом правильно воспроизводятся в первом приближении законы гравитации и уравнения Максвелла для пустоты.

При таком положении вещей представляется интересным узнать, допускают ли строгие уравнения, соответствующие функции Гамильтона (2), центрально-симметричные статические решения (в пространстве трех измерений), всюду свободные от сингулярностей [2] и способные представлять элементарные электрические заряды.

Центрально-симметричное решение удовлетворяет следующим условиям.

1. Для трех пространственных индексов должно выполняться соотношение:

$$g_{\alpha\beta} = \lambda\delta_{\alpha\beta} + \mu x_{\alpha}x_{\beta} \ (\delta_{\alpha\beta} = 1 \text{ или } 0, \text{ если } \alpha = \beta \text{ или } \alpha \neq \beta).$$

2. Компоненты g_{14}, g_{24}, g_{34}, g_{15}, g_{25}, g_{35} должны всюду равняться нулю.

3. Компоненты g_{44}, g_{45} и g_{55}, а также величины λ, μ должны быть функциями только $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Полагая еще для сокращения

$$\gamma = g_{44}g_{55} - g_{45}^2,$$

[2] Т. е. $g_{\mu\nu}$ нигде не должны обращаться в бесконечность, а определитель g—в нуль.

для функции Гамильтона из (2) получаем

$$r^2H = \frac{\lambda^2}{2} r^2 (g'_{44}g'_{55} - g^2_{45}) + \frac{1}{2}\gamma\lambda^{1/2}r^2 + \lambda\lambda'\gamma' r^2 - \frac{2\lambda' r}{\lambda^2} - 2\lambda\lambda'\gamma r. \tag{4}$$

Вариация интеграла действия

$$\int Hr^2 dr$$

по g_{44} дает уравнение

$$[(g_{44}\lambda^2)' r^2]' - g_{44}\lambda'^2 r^2 + 4g_{44}\lambda'\lambda r = 0. \tag{5}$$

Уравнения для g_{45} и g_{55} совершенно аналогичны. Комбинируя каждую пару этих уравнений, получаем три одинаковых по структуре уравнения типа

$$\frac{[r^2\lambda^2 (g_{44}g'_{45} - g'_{44}g_{45})]'}{r^2\lambda^2 (g_{44}g'_{45} - g'_{44}g_{45})} = -\frac{(\lambda^2)'}{\lambda^2}. \tag{6}$$

Интегрируя, получаем отсюда

$$r^2\lambda^4 (g_{44}g'_{45} - g'_{44}g_{45}) = \text{const}. \tag{7}$$

Постоянная в правой части должна равняться нулю, поскольку левая часть при $r = 0$ обращается в нуль. Поэтому из уравнения (7) после повторного интегрирования следует

$$\frac{g_{45}}{g_{44}} = \text{const}. \tag{8}$$

Аналогичным образом

$$\frac{g_{45}}{g_{55}} = \text{const}. \tag{8a}$$

В пространственной бесконечности многообразие должно быть эвклидовым, и электростатический потенциал там должен обращаться в нуль. Следовательно, уравнения (8) и (8а) требуют, чтобы $\frac{g_{45}}{g_{44}}$ и $\frac{g_{45}}{g_{55}}$ обращались в нуль. Таким образом, пространственно неоднородный электрический потенциал, а следовательно, и электрическое поле не существуют.

Тем самым доказано, что в теории Калуцы нет центрально-симметричного решения, зависящего только от $g_{\mu\nu}$, которое можно было бы отождествить с (несингулярным) электроном.

Поступила 10 января 1922 г.

К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

§ 1. Общая часть. Вывод уравнения поля

Математическое построение общей теории относительности первоначально было полностью основано на метрике, т. е. на инварианте

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu. \tag{1}$$

Величины $g_{\mu\nu}$ и их производные изображали метрическое, а также гравитационное поле. Напротив, компоненты электрического поля оставались по отношению к ним совершенно чужеродными. Желание свести гравитационное и электромагнитное поля в одно единое по своей сущности поле в последние годы владеет умами теоретиков.

Навстречу этим стремлениям идет математическое открытие, сделанное Леви-Чивитой и Вейлем: тензор кривизны Римана, имеющий фундаментальное значение для общей теории относительности, наиболее естественным путем можно получить с помощью закона «параллельного переноса» векторов («аффинная связь»):

$$\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha\, dx_\beta. \tag{2}$$

Этот закон сводится к формуле (1), если постулировать, что длина вектора при параллельном переносе не меняется; однако этот шаг не является логически необходимым. Впервые это обстоятельство обнаружил Г. Вейль, построивший на нем обобщение римановой геометрии, которое, по его мнению, содержало теорию электромагнитного поля. Вейль придает инвариантный смысл не длине линейного элемента или вектора, а только отношению длин двух линейных элементов или векторов, исходящих из одной точки. Параллельный перенос (2) должен быть таким, чтобы это от-

---

* *Zur allgemeinen Relativitätstheorie*. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1923, 32—38.

ношение сохранялось. Основу этой теории можно назвать полуметрической. По моему убеждению, таким путем нельзя прийти к теории, имеющей физический смысл. С чисто логической точки зрения также представляется более удовлетворительным основывать теорию только на равенстве (2), даже если понадобится отказаться от инварианта (1) как базиса теории.

Это сделал Эддингтон, заметивший, что, наоборот, метрический инвариант типа (1), в физическом существовании которого можно не сомневаться, сводится к уравнению (2). Именно, из равенства (2) следует существование римановского тензора четвертого ранга:

$$R^i_{k,\,lm} = -\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x_m} + \Gamma^i_{\tau l}\Gamma^\tau_{km} + \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x_l} - \Gamma^i_{\tau m}\Gamma^\tau_{kl},$$

а из него после свертывания по индексам i и m образуется римановский тензор второго ранга

$$R_{kl} = -\frac{\partial \Gamma^\alpha_{kl}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\alpha_{k\beta}\Gamma^\beta_{l\alpha} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{k\alpha}}{\partial x_l} - \Gamma^\alpha_{kl}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}, \tag{3}$$

фундаментальное значение которого в теории гравитации хорошо известно. Таким образом, выражение

$$R_{kl}dx_k dx_l$$

является линейным элементом, который Эддингтон считает метрическим инвариантом.

Величины R_{kl} при произвольно выбранных символах $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, удовлетворяющих только условию симметрии

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}, \tag{4}$$

не образуют симметричного тензора. Разлагая тензор (R_{kl}) на симметричный и антисимметричный тензоры, согласно равенству

$$R_{kl} = g_{kl} + \phi_{kl}, \tag{5}$$

где

$$\phi_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{k\alpha}}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{l\alpha}}{\partial x_k}\right), \tag{6}$$

мы можем отождествить тензор (g_{kl}) с метрическим тензором g_{kl}, а тензор (ϕ_{kl}), удовлетворяющий соотношению

$$\frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x_m} + \frac{\partial \phi_{lm}}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi_{mk}}{\partial x_l} = 0, \tag{7}$$

с тензором электромагнитного поля.

Сделаем одно замечание в пользу ограничивающего условия симметрии (4). Закон параллельного переноса ковариантного вектора следует из равенства (2) при естественном требовании, чтобы скалярное произведение контравариантного и ковариантного векторов не изменялось при параллельном переносе. Отсюда следует закон

$$\delta B_\mu = \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\, B_\alpha\, dx_\beta.$$

Исходя из этого равенства, обычным способом доказывается тензорный характер величины

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} B_\alpha.$$

Тогда, учитывая тензорный характер величины $\frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\mu}$, можно прийти к выводу о том, что выражение $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$ образует тензор. Отсюда и из сказанного выше следует, что тензорным характером обладает и величина

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} B_\alpha.$$

Следовательно, условие симметрии (4) необходимо, чтобы обеспечить однозначность ковариантной производной вектора.

В теории Эддингтона в качестве неизвестных функций координат выступают 40 величин $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, аналогично тому, как в первоначальной теории относительности имеются 14 величин $g_{\mu\nu}$ и ϕ_μ. Но проблема, не решенная Эддингтоном, заключается в том, чтобы найти уравнения, необходимые для определения этих величин. Самый удобный метод для этого связан с принципом Гамильтона. Пусть $\mathfrak{H}$ — скалярная плотность, зависящая только от величин Γ и их первых производных; тогда для каждой непрерывной вариации величин $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, исчезающей на границе области интегрирования, соблюдается принцип

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}\, d\tau\right\} = 0. \tag{8}$$

Поэтому уравнения поля, которые вследствие тензорного характера вариаций $\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ также обладают тензорным характером, гласят

$$0 = \mathfrak{H}^{\mu\nu}_\alpha = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\,\sigma}}\right), \tag{9}$$

где введено обозначение

$$\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\,\sigma}.$$

При этом предполагается, что $\mathfrak{H}$ есть некоторая (алгебраическая) функция величин $R^i_{k,lm}$. Наша главная задача заключается в выборе этой функции.

Существуют такие тензорные плотности, которые являются рациональными функциями второй степени по величинам $R^i_{k,lm}$; они могут быть получены с помощью тензорной плотности δ^{iklm}, компоненты которой равны 1 или —1, в зависимости от того, образуют индексы $iklm$ четную или нечетную перестановку цифр 1, 2, 3, 4. Такой тензорной плотностью является, например,

$$R^i_{k,lm} R^k_{i,\sigma\tau} \delta^{lm\sigma\tau}.$$

Однако я считаю правильным ограничиться такими тензорными плотностями, которые образуются из свернутого тензора R_{kl} или из величин S_{kl} и ϕ_{kl}, поскольку мы можем придавать физический смысл только этим величинам. Тогда мы должны допускать и иррациональные функции, к чему мы уже привыкли в общей теории относительности (например, $\sqrt{-g}$). Но в этом случае существуют еще различные возможности, из которых наиболее интересной нам представляется следующая:

$$\mathfrak{H} = 2\sqrt{-|R_{kl}|}. \tag{10}$$

Это выражение, являющееся аналогом тензорной плотности элемента объема, образовано из величин R_{kl} без расщепления на симметричную и антисимметричную части. Если эта функция Гамильтона окажется хорошей, то теория придет идеальным способом к объединению гравитации и электричества в одно понятие, причем не только оба вида поля будут определяться едиными величинами Г, но и функция Гамильтона будет единой, тогда как до сих пор она состояла из слагаемых, логически независимых одно от другого.

Ниже будет показано, что эта теория, по-видимому, хороша.

§ 2. Отношение новой теории к прежним результатам общей теории относительности

Сделаем одно замечание по поводу равенства (5). Выражение $g_{kl}dx_kdx_l$ представляет собой метрический инвариант для «космического» масштаба. Если инвариант $g_{kl}dx_kdx_l$ должен представлять квадрат длины для масштаба человеческих размеров, то следует положить

$$\lambda^2 R_{kl} = g_{kl} + \phi_{kl}, \tag{5a}$$

где λ — очень большое число. Поэтому в соответствии с формулой (3) имеем

$$\frac{1}{\lambda^2} g_{kl} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{kl}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{k\alpha}}{\partial x_l} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{l\alpha}}{\partial x_k}\right) + \Gamma^{\alpha}_{k\beta}\Gamma^{\beta}_{l\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{kl}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}, \tag{11}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \phi_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{k\alpha}}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{l\alpha}}{\partial x_k}\right). \tag{12}$$

Произведем теперь варьирование, указанное в уравнении (8), считая, что $\mathfrak{H}$ является пока произвольной функцией величин g_{kl} и ϕ_{kl}. Тогда имеем

$$\delta\mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_{kl}}\delta g_{kl} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \varphi_{kl}}\delta\phi_{kl} = \mathfrak{s}^{kl}\delta g_{kl} + \mathfrak{f}^{kl}\delta\phi_{kl}, \tag{13}$$

причем $\mathfrak{s}^{kl}$ — симметричная, а $\mathfrak{f}^{kl}$ — антисимметричная тензорные плотности. С учетом уравнения (11)—(13) уравнение (8) принимает вид

$$0 = \int d\tau \delta\Gamma^{\alpha}_{kl}\left\{\mathfrak{s}^{kl}_{;\alpha} - \frac{1}{2}\delta^k_\alpha \mathfrak{s}^{l\sigma}_{;\sigma} - \frac{1}{2}\delta^l_\alpha \mathfrak{s}^{k\sigma}_{;\sigma} - \frac{1}{2}\delta^k_\alpha \frac{\partial \mathfrak{f}^{l\sigma}}{\partial x_\sigma} - \frac{1}{2}\delta^l_\alpha \frac{\partial \mathfrak{f}^{k\sigma}}{\partial x_\sigma}\right\}. \tag{14}$$

Поскольку величины ϕ_{kl} мы рассматриваем как ковариантный тензор электромагнитного поля, величину $\mathfrak{f}^{kl}$ следует считать контравариантной тензорной плотностью электромагнитного поля, и выражение

$$\mathfrak{i}^l = \frac{\partial \mathfrak{f}^{l\sigma}}{\partial x_\sigma} \tag{15}$$

— плотностью тока. В равенстве (14) величина $\mathfrak{s}^{kl}_{;\alpha}$ означает ковариантную производную тензора $\mathfrak{s}^{kl}$, определяемую формулой

$$\mathfrak{s}^{kl}_{;\alpha} = \frac{\partial \mathfrak{f}^{kl}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{s}^{\sigma l}\Gamma^{k}_{\sigma\alpha} + \mathfrak{s}^{k\sigma}\Gamma^{l}_{\sigma\alpha} - \mathfrak{s}^{kl}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma}. \tag{16}$$

Из равенства (14) следует, что

$$0 = \mathfrak{s}^{kl}_{;\alpha} - \frac{1}{2}\delta^k_\alpha \mathfrak{s}^{l\sigma}_{;\sigma} - \frac{1}{2}\delta^l_\alpha \mathfrak{s}^{k\sigma}_{;\sigma} - \frac{1}{2}\delta^k_\alpha \mathfrak{i}^l - \frac{1}{2}\delta^l_\alpha \mathfrak{i}^k. \tag{17}$$

Комбинируя это равенство с соотношением, получаемым при свертывании по индексам α и l,

$$0 = 3\mathfrak{s}^{l\sigma}_{;\sigma} + 5\mathfrak{i}^l, \tag{18}$$

находим, наконец, конечный результат варьирования

$$0 = \mathfrak{s}^{kl}_{;\alpha} + \frac{1}{3}\delta^k_\alpha \mathfrak{i}^l + \frac{1}{3}\delta^l_\alpha \mathfrak{i}^k. \tag{19}$$

Мы получили 40 уравнений, из которых можно вычислить величины Г. Для этого введем тензоры s_{kl} или s^{kl}, соответствующие тензорной плотности $\mathfrak{s}^{kl}$, причем эти тензоры находятся в таком же отношении друг к другу, в каком в общей теории относительности стоят ковариантный и контравариантный фундаментальные тензоры ($g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$). Таким образом, должны существовать соотношения

$$\mathfrak{s}^{kl} = s^{kl}\sqrt{-|s_{ik}|}, \tag{20}$$

$$s_{\alpha i}s^{\beta i} = \delta_{\alpha}^{\beta}. \tag{21}$$

Далее положим

$$\mathfrak{i}^{l} = \sqrt{-|s_{ik}|}\, i^{l} = \sqrt{-s}\ i^{l}, \tag{22}$$

$$i_{l} = s_{l\sigma}i^{\sigma}. \tag{23}$$

Выполнив вычисления, известные из общей теории относительности, получим

$$\Gamma_{kl}^{\alpha} = \frac{1}{2}s^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial s_{k\beta}}{\partial x_{l}} + \frac{\partial s_{l\beta}}{\partial x_{k}} - \frac{\partial s_{kl}}{\partial x_{\beta}}\right) - \frac{1}{2}s_{kl}i^{\alpha} + \frac{1}{6}\delta_{k}^{\alpha}i_{l} + \frac{1}{6}\delta_{l}^{\alpha}i_{k}. \tag{24}$$

Эти значения величин Г следует подставлять в уравнения (11) и (12). Так как функции $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{f}$ в силу уравнения (13) можно выразить через величины g и ϕ, выбирая соответствующую функцию Гамильтона, то после указанной подстановки уравнения (11) и (12) оказываются достаточными для определения неизвестных функций. Для того чтобы физически оправдать выбор функции Гамильтона в виде уравнения (10), мы рассмотрим сначала случай, когда электромагнитное поле отсутствует. Тогда, в соответствии с уравнениями (10) и (13), имеем

$$\mathfrak{s}^{kl} = g^{kl}\sqrt{-g},$$

$$\mathfrak{f}^{kl} = 0,$$

причем g^{kl}, g и g_{kl} имеют смысл, известный из общей теории относительности. Следовательно, уравнение (24) принимает тогда известный вид

$$\Gamma_{kl}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{k\beta}}{\partial x_{l}} + \frac{\partial g_{l\beta}}{\partial x_{k}} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_{\beta}}\right), \tag{24a}$$

что вместе с уравнением (11) точно воспроизводит уравнение общей теории относительности для гравитационного поля в пустоте с учетом космологического члена, но в отсутствие электромагнитного поля. Это является сильным аргументом в пользу нашего выбора функции Гамильтона и вообще в пользу применимости теории.

Перейдем теперь к случаю, когда электромагнитное поле не равно нулю. Из уравнений (12) и (24) сначала находим:

$$\frac{1}{\lambda^2}\phi_{kl}=\frac{1}{6}\left(\frac{\partial i_k}{\partial x_l}-\frac{\partial i_l}{\partial x_k}\right). \tag{25}$$

Отсюда становится ясно, что при нулевой плотности тока электрическое поле невозможно. Но множитель $\frac{1}{\lambda^2}$ чрезвычайно мал; это приводит к тому, что конечные значения величин ϕ_{kl} возможны только при очень малых, практически равных нулю ковариантных плотностях тока. Следовательно, плотность тока всюду, за исключением сингулярных областей, обращается в нуль. Таким образом, очень грубо выполняются уравнения

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{kl}}{\partial x_l}=0,\ldots, \tag{26}$$

$$\frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x_\sigma}+\frac{\partial \phi_{l\sigma}}{\partial x_k}+\frac{\partial \phi_{\sigma k}}{\partial x_l}=0, \tag{27}$$

причем последнее уравнение с учетом равенства (12) является строгим. Соотношение между ϕ и $\mathfrak{f}$ при нашем выборе функции Гамильтона фиксируется тем, что величины

$$\mathfrak{r}^{kl}=\mathfrak{g}^{kl}+\mathfrak{f}^{kl}$$

равны минорам величин

$$r_{kl}=g_{kl}+\phi_{kl},$$

умноженным на квадратный корень из определителя r_{kl}, взятого со знаком минус. Обозначая эти нормированные миноры символом r^{kl}, имеем

$$\delta r=rr^{kl}\delta r_{kl}$$

и, следовательно,

$$\delta\mathfrak{H}=\delta(2\sqrt{-r})=\frac{1}{\sqrt{-r}}\delta(-r)=\sqrt{-r}r^{kl}\delta r_{kl}=\sqrt{-r}r^{kl}(\delta g_{kl}+\delta\phi_{kl}),$$

чем и доказывается сделанное утверждение.

Приближенное вычисление величин $\mathfrak{f}^{kl}$ оказывается простым в том важном случае, когда значения r_{kl} бесконечно мало отличаются от постоянных значений компонент δ_{kl} (1 или 0). В этом случае в первом приближении (как обычно, временна́я координата выбрана мнимой) имеем

$$\mathfrak{f}^{kl}=\phi_{kl}.$$

Этот результат в связи с формулами (26) и (27) показывает, что в первом приближении (для достаточно слабых полей) выполняются уравнения Максвелла для пустого пространства.

Охватывает ли наша теория также и электрические элементарные образования, можно решить только после строгого рассмотрения случая центрально-симметричного статического поля. Во всяком случае, уравнение (25) показывает, что конечные значения для плотности тока i^l возможны только при условии, если одновременно i_l становится малой величиной порядка $1/\lambda^2$; таким образом, не исключается существование электронов без сингулярности. Примечательно, что, согласно этой теории, положительные и отрицательные электрические заряды могут отличаться не только знаком [1].

Изложенное выше исследование показывает, что общая идея Эддингтона в соединении с принципом Гамильтона приводит к теории почти полностью свободной от произвола, отражающей наши современные знания о гравитации и электричестве и объединяющей оба вида поля по-настоящему, законченным образом.

Гаруна Мару, январь 1923 г.

[1] Ср. замечание на стр. 144, опровергающее это утверждение.— *Прим. ред.*

ЗАМЕЧАНИЕ К МОЕЙ РАБОТЕ „К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ“ *

В дальнейшем должно быть еще раз наглядно изложено формальное содержание предыдущей работы. При этом будет использовано новое гамильтоновское представление теории, делающее особенно ясной связь с общей теорией относительности в ее современной форме.

В основу теории положена аффинная связность в пространственно-временном континууме, соответствующая формуле

$$\delta A^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\alpha}\, dx_{\beta}, \tag{1}$$

которая ограничена априори только условием симметрии

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}.$$

Отсюда следует существование тензора Римана 2-го ранга

$$r_{kl} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{kl}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{k\beta}\Gamma^{\beta}_{l\alpha} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{k\alpha}}{\partial x_{l}} - \Gamma^{\alpha}_{kl}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

а также то обстоятельство, что определитель $r = |r_{kl}|$ имеет характер квадрата скалярной плотности. Отсюда следует ковариантность основного уравнения теории

$$\delta \{\int \sqrt{-r}\, d\tau\} = 0. \tag{3}$$

Здесь величины r_{kl} надо считать выраженными через Γ и варьирование ведется по Γ. Таким образом, получается 40 уравнений, которые могут

* *Bemerkung zu meiner Arbeit «Zur allgemeinen relativitätstheorie»*. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1923, 76—77. (Статья 72 опубликована в Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1923, 32.— *Прим. ред.*)

быть разрешены относительно величин Г. Тогда имеем

$$\Gamma^{\alpha}_{kl}=\frac{1}{2}s^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial s_{k\beta}}{\partial x_l}+\frac{\partial s_{l\beta}}{\partial x_k}-\frac{\partial s_{kl}}{\partial x_\beta}\right)-\frac{1}{2}s_{kl}i^{\alpha}+\frac{1}{6}\delta^{\alpha}_{k}i_l+\frac{1}{6}\delta^{\alpha}_{l}i_k. \qquad (4)$$

При этом величины s и i связаны с величинами r следующим образом: r^{kl} является нормированными минорами r_{kl}, а $\mathfrak{r}^{kl}$ представляет собой соответствующую тензорную плотность

$$\mathfrak{r}^{kl}=r^{kl}\sqrt{-r}. \qquad (5)$$

Величина $\mathfrak{r}^{kl}$ разлагается на симметричную и антисимметричную части в соответствии с формулой

$$\mathfrak{r}^{kl}=\mathfrak{s}^{kl}+\mathfrak{f}^{kl}. \qquad (6)$$

Величины s связаны с величинами $\mathfrak{s}$ соотношениями:

$$s_{\alpha\lambda}s^{\beta\lambda}=\delta^{\beta}_{\alpha}, \qquad (7)$$

$$s=|s_{kl}|, \qquad (8)$$

$$\mathfrak{s}^{kl}=s^{kl}\sqrt{-s}, \qquad (9)$$

а величины i — с величинами $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{f}$ соотношениями:

$$\mathfrak{i}^{k}=\frac{\partial\mathfrak{f}^{k\alpha}}{\partial x_\alpha}, \qquad (10)$$

$$\mathfrak{i}^{k}=i^{k}\sqrt{-s}, \qquad (11)$$

$$i_k=s_{k\alpha}i^{\alpha}. \qquad (12)$$

Подставляя выражение (4) для Г в формулу (2), получаем уравнения поля:

$$r_{kl}=R_{kl}+\frac{1}{6}\left[\left(\frac{\partial i_k}{\partial x_l}-\frac{\partial i_l}{\partial x_k}\right)+i_k i_l\right], \qquad (13)$$

которые после разложения на симметричные и антисимметричные части дают уравнения гравитационного и электромагнитного полей. Здесь R_{kl} представляет собой римановский тензор кривизны, образованный из s_{kl} как метрического фундаментального тензора.

Уравнения (13) могут быть записаны в форме принципа Гамильтона

$$\delta\left\{\int\left[-2\sqrt{-r}+\mathfrak{R}-\frac{1}{6}\mathfrak{s}^{\alpha\beta}i_\alpha i_\beta\right]d\tau\right\}=0, \qquad (14)$$

где $\mathfrak{R}$ — скалярная плотность римановской кривизны, относящейся к фундаментальному тензору s_{ik}. Вариация должна браться по $\mathfrak{g}^{kl}$ и $\mathfrak{f}^{kl}$. Из уравнения (14) видно, что — в противоположность точке зрения, высказанной в первой работе,— каждому решению соответствует второе решение, отличающееся от первого только знаком компонент электромагнитного поля. Действительно, $\mathfrak{r}$ и соответственно $|\mathfrak{r}^{k\lambda}|$ является четной функцией антисимметричной части $\mathfrak{f}^{kl}$ величины $\mathfrak{r}^{kl}$, а третий член в уравнении (14) квадратично зависит от плотности тока. Теория не может поэтому учесть различие в массах положительных и отрицательных электронов.

Чтобы сделать более ясным построение теории, мы исключили из предлагаемой статьи все доказательства и вычисления.

Поступила 15 мая 1923 г.

В статьях 72 и 73 (а также 74 и 79) дано изложение первого варианта единой теории поля. Эйнштейн в течение всей своей жизни разрабатывал разные варианты. Новый этап развития идей единой теории относится к 1928 г. (см. работу 87). Интересное обсуждение первого варианта теории имеется в статье Эддингтона, написанной для русского издания его книги (А. Эддингтон. Теория относительности, 1934, 448). Интересно замечание в конце статьи 73 о зарядовой симметрии теории (в современной терминологии); это замечание получило развитие в работе 78.

К АФФИННОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ*

Размышления последнего времени привели меня к некоторому усовершенствованию теории гравитации и электричества, изложенной в двух предыдущих сообщениях[1]. Изложим вкратце теорию в ее новой форме.

Аффинная связность задается при помощи 40 функций $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$. Римановский тензор кривизны 2-го ранга $R_{\mu\nu}$ расщепляется на симметричную часть $\gamma_{\mu\nu}$ и антисимметричную часть $\varphi_{\mu\nu}$ так, что

$$\gamma_{\mu\nu} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu}}\right) - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}, \tag{1}$$

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu}}\right). \tag{2}$$

Функция Гамильтона $\mathfrak{H}$ (скалярная плотность) будет пока неизвестной функцией величин[2] $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$. Интеграл Гамильтона должен варьироваться по $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} (= \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu})$.

Сначала получаем

$$\int (\mathfrak{g}^{\mu\nu}\delta\gamma_{\mu\nu} + \mathfrak{f}^{\mu\nu}\delta\varphi_{\mu\nu})\, d\tau = 0, \tag{3}$$

где для краткости мы положили

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} &= \mathfrak{g}^{\mu\nu}, \\ \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \varphi_{\mu\nu}} &= \mathfrak{f}^{\mu\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

---

* *Zur affinen Feldtheorie*. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1923, 137—140.

[1] Статьи 72 и 73.—*Прим. ред.*

[2] Предположение, что $\mathfrak{H}$ зависит лишь от $\gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}$ здесь будет отброшено. Отметим, что Дрост [из Лейдена] высказывал два года назад сходные соображения, но не опубликовал их.

Под величинами $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ будем понимать тензорные плотности метрического и электрического полей. Если в уравнение (3) подставить выражения (1) и (2) для $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$, то после варьирования можно получить уравнение

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{;\alpha} - \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{\mu\sigma}_{;\sigma}\delta^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{\nu\sigma}_{;\sigma}\delta^{\mu}_{\alpha} - \frac{1}{2}\mathfrak{i}^{\mu}\delta^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{2}\mathfrak{i}^{\nu}\delta^{\mu}_{\alpha} = 0, \quad (4)$$

где $\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{;\alpha}$ — ковариантная производная тензорной плотности $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, задаваемая соотношением

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{;\alpha} = \frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{g}^{\sigma\nu}\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} + \mathfrak{g}^{\mu\sigma}\Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha} - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma}, \quad (5)$$

а $\mathfrak{i}^{\mu}$ — плотность потока указанной тензорной плотности

$$\mathfrak{i}^{\mu} = \frac{\partial\mathfrak{f}^{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma}. \quad (6)$$

Введем метрический тензор $g_{\mu\nu}$ (соответственно $g^{\mu\nu}$), связанный с симметричной тензорной плотностью $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ соотношением

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\sqrt{-g} \quad (g = |g_{\sigma\tau}|),\\ g_{\mu\sigma}g^{\nu\sigma} &= \delta^{\nu}_{\mu}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Этот тензор будет употребляться, как и в римановой геометрии, для перехода от ковариантных тензорных величин к контравариантным и наоборот. В этом смысле плотности тока $\mathfrak{i}^{\mu}$ принадлежит контравариантный вектор i^{μ} и ковариантный вектор i_{μ}, плотности поля $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ — контравариантный тензор поля $f^{\mu\nu}$ и ковариантный тензор $f_{\mu\nu}$.

Посредством этих операций удается обычным путем разрешить уравнения (4) относительно $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$; при этом получается

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}i^{\alpha} + \frac{1}{6}\delta^{\alpha}_{\mu}i_{\nu} + \frac{1}{6}\delta^{\alpha}_{\nu}i_{\mu}. \quad (8)$$

Заметим далее, что, согласно уравнению (3a), $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ являются такими функциями $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$, что выражение

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}d\gamma_{\mu\nu} + \mathfrak{f}^{\mu\nu}d\varphi_{\mu\nu}$$

представляет собой полный дифференциал. Отсюда следует, что выражение

$$\gamma_{\mu\nu}\,d\mathfrak{g}^{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}\,d\mathfrak{f}^{\mu\nu}$$

также должно быть полным дифференциалом некоторой величины $\mathfrak{H}^*$

(скалярной плотности), которую мы хотим представить как функцию $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$. Таким образом, нужно положить

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{\mu\nu} &= \frac{\partial\mathfrak{H}^*}{\partial\mathfrak{g}^{\mu\nu}}, \\ \varphi_{\mu\nu} &= \frac{\partial\mathfrak{H}^*}{\partial\mathfrak{f}^{\mu\nu}},\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

причем последние уравнения могут полностью заменить уравнения (3а). Нам остается только выбрать зависимость скалярной плотности $\mathfrak{H}^*$ от $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$. В самом общем виде эта зависимость имеет вид

$$\mathfrak{H}^* = \sqrt{-g}\,\Phi(J_1, J_2), \tag{10}$$

где Φ — произвольная функция обоих известных инвариантов электромагнитного поля. Наиболее естественной, на современном уровне наших знаний, будет зависимость

$$\mathfrak{H}^* = 2\alpha\sqrt{-g} - \frac{\beta}{2} f_{\mu\nu}\mathfrak{f}^{\mu\nu}. \tag{10a}$$

Если заменить левые части уравнений (1) и (2) с помощью уравнений (9) и (10а), а правые части выразить через полевые величины с помощью уравнений (8), то получим уравнения

$$R_{\mu\nu} - \alpha g_{\mu\nu} = -\left[\beta\left(-f_{\mu\sigma}f^{\sigma}_{\nu} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}f_{\sigma\tau}f^{\sigma\tau}\right) + \frac{1}{6}i_{\mu}i_{\nu}\right], \tag{11}$$

$$-\beta f_{\mu\nu} = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial i_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial i_{\nu}}{\partial x_{\mu}}\right). \tag{12}$$

Уравнения (6), (11) и (12) являются уравнениями поля развиваемой здесь теории.

До сих пор не были выбраны определенные единицы для напряженностей метрического и электромагнитного полей. При переходе к системе единиц CGS уравнения поля принимают вид

$$R_{\mu\nu} - \alpha g_{\mu\nu} = -\varkappa\left[\left(-f_{\mu\sigma}f^{\sigma}_{\nu} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}f_{\sigma\tau}f^{\sigma\tau}\right) + \frac{1}{\beta}i_{\mu}i_{\nu}\right], \tag{11a}$$

$$-f_{\mu\nu} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial i_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial i_{\nu}}{\partial x_{\mu}}\right), \tag{12a}$$

где α и β—некоторые новые постоянные, а $\varkappa$ — гравитационная постоянная. Эти уравнения поля могут быть приведены к форме, требуемой принципом Гамильтона, в которой варьирование происходит по метрическому тензору и напряженности электромагнитного поля. В этом случае функция Гамильтона $\bar{\mathfrak{H}}$ задается выражением:

$$\bar{\mathfrak{H}} = \sqrt{-g}\left[R - 2\alpha + \varkappa\left(\frac{1}{2} f_{\sigma\tau} f^{\sigma\tau} - \frac{1}{\beta} i_\sigma i^\sigma\right)\right]. \tag{13}$$

Здесь R — скаляр тензора кривизны Римана, образованный из $g_{\mu\nu}$. Для доказательства удобнее всего выразить $\bar{\mathfrak{H}}$ через тензорные плотности $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и принадлежащие им нормированные миноры и варьировать по $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$.

Для физической интерпретации уравнений поля (11a) и (12a) наиболее удобно, конечно, ввести электромагнитный потенциал

$$-f_\mu = \frac{1}{\beta} i_\mu, \tag{14}$$

который, согласно уравнению (12a), связан с плотностью тока соотношением

$$\mathfrak{i}^\mu = -\beta \mathfrak{g}^{\mu\sigma} f_\sigma. \tag{15}$$

Теперь уравнение (11a) принимает вид

$$R_{\mu\nu} - \alpha g_{\mu\nu} = -\varkappa\left[\left(-f_{\mu\sigma} f^\sigma_\nu + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} f_{\sigma\tau} f^{\sigma\tau}\right) + \beta f_\mu f_\nu\right]. \tag{16}$$

Прежнюю теорию гравитации и электромагнитного поля при отсутствии электрических зарядов получают, полагая множитель β равным нулю. Во всяком случае, для того, чтобы не впасть в противоречие с опытом, множитель β нужно считать очень малым, так как в противном случае, согласно уравнению (15), существование электромагнитного поля в отсутствие электрических зарядов станет невозможным. В этом случае при конечных напряженностях электромагнитного и метрического полей величина i^μ должна быть все время исчезающе малой. Уравнения (15) и (16), вплоть до знака перед β, приводят к тем же результатам, что и уравнения поля, выведенные Вейлем на основе его теории из некоторого специального принципа действия. Эти уравнения не приводят к электрону как свободному от сингулярностей решению.

Поступила 28 июня 1923 г.

ТЕОРИЯ АФФИННОГО ПОЛЯ*

Теория, связывающая гравитационное и электромагнитное поля и изложенная ниже, основана на выдвинутой в последние годы идее Эддингтона о том, что «физика поля» математически должна строиться на теории аффинной связи. Сначала мы кратко рассмотрим развитие идей, связанных с именами Леви-Чивиты, Вейля и Эддингтона.

Общая теория относительности формально строится на основе геометрии Римана, все понятия которой выводятся из интервала между двумя бесконечно близкими точками, определяемого формулой[1]

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu. \tag{1}$$

Величины $g_{\mu\nu}$ определяют как свойства масштабов и часов по отношению к системе координат, так и гравитационное поле. Следовательно, мы можем утверждать, что общая теория относительности объясняет гравитационное поле. В то же время идейные основы теории не имеют отношения к электромагнитному полю.

Эти обстоятельства заставляют поставить следующий вопрос: нельзя ли обобщить математические основы теории таким образом, чтобы из них можно было бы вывести свойства не только гравитационного поля, но и электромагнитного?

Возможность обобщения математических основ теории появилась после того как Леви-Чивита указал один из элементов геометрии Римана, который можно сделать независимым от этой геометрии, а именно «аффинную связь». Согласно геометрии Римана, каждая бесконечно малая часть многообразия приближенно может быть заменена эвклидовым многообразием. Следовательно, для этой элементарной области существует

---

* *The theory of the affine field.* Nature, 1923, 112, 448—449.

[1] Как обычно, знак суммы опускается.

понятие параллелизма. Если мы подвергнем контравариантный вектор A^σ в точке x_ν параллельному переносу в бесконечно близкую точку $x_\nu + \delta x_\nu$, то результирующий вектор $A^\sigma + \delta A^\sigma$ определится с помощью формулы

$$\delta A^\sigma = -\Gamma^\sigma_{\mu\nu} A^\mu \delta x_\nu. \tag{2}$$

Величины Γ (символы Кристоффеля 2-го рода), симметричные по нижним индексам, в соответствии с геометрией Римана выражаются через величины $g_{\mu\nu}$ и их первые производные. Мы получаем эти выражения, формулируя требование, чтобы длина контравариантного вектора, образованного в соответствии с формулой (1), в результате параллельного переноса не изменялась.

Леви-Чивита показал, что римановский тензор кривизны, имеющий фундаментальное значение для теории гравитационного поля, можно получить из геометрических соображений, основанных только на законе аффинной связи, выражаемом формулой (2). При этом конкретный вид выражения величин $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ через $g_{\mu\nu}$ является несущественным. С аналогичным положением мы встречаемся в случае дифференциальных операций абсолютного дифференциального исчисления.

Эти результаты естественно ведут к обобщению геометрии Римана. Вместо того чтобы начинать с метрического соотношения (1) и получать из него коэффициенты Γ в аффинном соотношении (2), мы будем исходить из общего аффинного соотношения типа (2), не постулируя формулы (1). Тогда нахождение математических законов, соответствующих законам природы, сведется к решению вопроса, какими будут формально наиболее естественные условия, которым можно подчинить аффинное соотношение.

Первый шаг в этом направлении был сделан Г. Вейлем. Его теория использует то, что с физической точки зрения лучи света являются более простыми объектами, чем масштабы и часы, и что законом распространения света определяются только отношения величин $g_{\mu\nu}$. В соответствии с этим он придает объективный смысл не величине ds в соотношении (1), т. е. не длине вектора, а только отношению длин двух векторов (а значит, и углам). Разрешаются только такие аффинные соотношения, которые при параллельном переносе оставляют неизменными углы между всеми векторами. Таким способом была получена теория, в которой наряду с определенными (с точностью до множителя) величинами $g_{\mu\nu}$ появились еще четыре величины φ_μ, отождествленные Вейлем с электромагнитными потенциалами.

Эддингтон подошел к проблеме с более радикальных позиций. Исходя из аффинного соотношения типа (2), он старался конкретизировать его, не вводя в основы теории никаких следствий из соотношения (1), т. е. не вводя метрики. Метрика должна сама появляться из теории. Тензор

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} \tag{3}$$

симметричен лишь в частном случае геометрии Римана. В общем случае тензор $R_{\mu\nu}$ расщепляется на симметричную и антисимметричную части:

$$R_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}. \tag{4}$$

Теперь появилась возможность отождествить тензор $\gamma_{\mu\nu}$ с симметричным тензором метрического или гравитационного поля, а тензор $\varphi_{\mu\nu}$ — с антисимметричным тензором электромагнитного поля. Это и было сделано Эддингтоном. Но его теория оставалась несовершенной, так как для определения 40 неизвестных функций $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ сначала не существовало простого и естественного пути. Следующее краткое рассуждение показывает, каким образом я попытался восполнить этот пробел [2].

Если мы обозначим через $\mathfrak{H}$ скалярную плотность, зависящую только от функций $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, то принцип Гамильтона

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}\, d\tau\right\} = 0 \tag{5}$$

даст нам 40 дифференциальных уравнений для функций Γ при условии, что при варьировании функции Γ считаются независимыми друг от друга. Далее мы предположим, что функция $\mathfrak{H}$ зависит только от величин $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$, и соответственно запишем

$$\delta\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{\mu\nu}\delta\gamma_{\mu\nu} + \mathfrak{f}^{\mu\nu}\delta\varphi_{\mu\nu}, \tag{6}$$

где введены обозначения

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} &= \mathfrak{g}^{\mu\nu}, \\ \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \varphi_{\mu\nu}} &= \mathfrak{f}^{\mu\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Здесь следует заметить, что в развиваемой теории малыми готическими буквами обозначаются соответственно контравариантная тензорная плотность ($\mathfrak{g}^{\mu\nu}$) метрического тензора и контравариантная тензорная плотность ($\mathfrak{f}^{\mu\nu}$) электромагнитного поля. Таким образом, задается переход от тензорных плотностей (обозначаемых готическими буквами) к контравариантным и ковариантным тензорам (обозначаемым латинскими

[2] Дрост (Лейден) пришел к такой же идее независимо от автора этой статьи.

буквами) и вводится метрика, основанная исключительно на аффинной связи.

Выполняя варьирование, после некоторых выкладок получаем

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} i^\alpha + \frac{1}{6} \delta^\alpha_\mu i_\nu + \frac{1}{6} \delta^\alpha_\nu i_\mu, \tag{8}$$

где

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mathfrak{i}^\mu. \tag{9}$$

Соотношение (8) показывает, что наше обобщение теории, кажущееся на первый взгляд весьма широким, приводит к структуре аффинной связи, отклоняющейся от структуры геометрии Римана не больше, чем этого требует действительная структура физического поля.

Уравнения поля получим теперь следующим способом. Из формул (3) — (4) сначала находим соотношения

$$\gamma_{\mu\nu} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu}\right) - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}, \tag{10}$$

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu}\right). \tag{11}$$

В этих соотношениях величины $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ в правых частях следует выразить через величины $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ с помощью равенства (8). Кроме того, если функция $\mathfrak{H}$ известна, то с помощью равенства (7) величины $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$, т. е. левые части соотношений (10) и (11), также можно выразить через величины $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$. Это последнее вычисление можно упростить с помощью следующего приема. Соотношение (6) эквивалентно утверждению, что

$$\delta\mathfrak{H}^* = \gamma_{\mu\nu}\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}\delta\mathfrak{f}^{\mu\nu}. \tag{6a}$$

Следовательно, $\delta\mathfrak{H}^*$ является полным дифференциалом, так что если $\mathfrak{H}^*$ — неизвестная функция величин $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$, то выполняются следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}},\\ \varphi_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial \mathfrak{f}^{\mu\nu}}.\end{aligned}\right\} \tag{7a}$$

Теперь нам остается лишь определить функцию $\mathfrak{H}^*$. В простейшем случае, очевидно:

$$\mathfrak{H}^* = -\frac{\beta}{2} f_{\mu\nu}\mathfrak{f}^{\mu\nu}. \tag{12}$$

В этой связи интересно отметить, что эта функция не состоит из нескольких, логически независимых одно от другого, слагаемых, как это было в теориях, предлагавшихся до сих пор.

Таким образом, мы приходим к уравнениям поля

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa\left[\left(\frac{1}{4} g_{\mu\nu} f_{\sigma\tau} f^{\sigma\tau} - f_{\mu\sigma} f^{\sigma}_{\nu}\right) + \gamma f_{\mu} f_{\nu}\right], \tag{13}$$

где $R_{\mu\nu}$ — тензор кривизны Римана, $\varkappa$ и γ — постоянные, f_{μ} — электромагнитный потенциал, связанный с напряженностью поля соотношением

$$f_{\mu\nu} = \frac{\partial f_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial f_{\nu}}{\partial x_{\mu}}, \tag{14}$$

а с плотностью электрического тока — соотношением

$$i^{\mu} = -\gamma g^{\mu\sigma} f_{\sigma}. \tag{15}$$

Чтобы эти уравнения могли находиться в согласии с опытом, постоянная γ должна быть практически бесконечно малой, так как в противном случае поля не могли бы существовать без заметных плотностей тока.

Из теории естественным путем следуют как известные законы гравитационного и электромагнитного полей, так и связь этих двух видов поля; однако она ничего не говорит о структуре электронов.

76

ОБ ЭФИРЕ*

Когда здесь говорится об эфире, то имеется в виду, конечно, не телесный эфир механической волновой теории, который подчиняется законам механики Ньютона и отдельным точкам которого приписывается скорость. Это теоретическое представление с созданием специальной теории относительности, по-моему, окончательно сошло со сцены. Напротив, речь идет о тех мыслимых физически реальными вещах, которые наряду с весомой материей, состоящей из электрических элементарных частиц, играют роль в структуре причинных связей физики. Следовательно, вместо слова «эфир» можно с таким же успехом говорить «физические свойства пространства». При этом, разумеется, можно было бы высказать мнение, что под это понятие подпадают все объекты физики, так как согласно последовательной теории поля весомую материю или составляющие ее элементарные частицы также следовало бы рассматривать как особого рода «поля», или особые «состояния пространства». Однако приходится признать, что при современном состоянии физики такая идея является преждевременной, так как до сих пор все направленные к этой цели усилия физиков-теоретиков терпели провал. Таким образом, теперь мы фактически вынуждены различать «материю» и «поля», хотя и можем надеяться на то, что грядущие поколения преодолеют это дуалистическое представление и заменят его единым понятием, как это тщетно пыталась сделать теория поля наших дней.

Обычно думают, что физика Ньютона не знала эфира и что только волновая теория света ввела вездесущую среду, обусловливающую физические явления. Однако это не так. В указанном выше смысле механика Ньютона имела свой «эфир», который назывался, разумеется, «абсолютным пространством». Чтобы ясно осознать это и вместе с тем уточнить понятие эфира, мы должны начать несколько издалека.

* *Über den Äther*. Schweiz. naturforsch. Gesellschaft, Verhandlungen, **105**, 1924, 85—93.

Рассмотрим сначала отрасль физики, обходящуюся без эфира, а именно, геометрию Эвклида, понимая ее как учение о возможных способах приводить в соприкосновение друг с другом практически твердые тела. (Здесь мы отвлекаемся от световых лучей, которые также участвовали в возникновении понятий и законов геометрии.) Законы расположения твердых тел при исключении относительных движений, влияний температуры и деформаций в том виде, в каком они идеализируются в геометрии Эвклида, исходят из понятия твердых тел; эвклидова геометрия не знает никаких воздействий среды, существующих независимо от тел и оказывающих влияние на тела и законы их расположения. Это же относится к неэвклидовым геометриям постоянной кривизны, если их понимать как (возможные) естественные законы расположения тел. Иное дело, если бы пришлось предполагать существование геометрии с переменной кривизной; это означало бы, что возможные расположения практически твердых тел в разных случаях были бы разными, обусловленными влияниями среды. В смысле нашего изложения можно было бы сказать, что такая теория пользуется гипотезой эфира. Ее эфир был бы чем-то физически реальным, как и материя. Если бы законы расположения не подвергались влиянию таких физических факторов, как количество и состояние движения тел в данной области и т. д., и оставались незыблемыми, то этот эфир можно было бы назвать «абсолютным» (т. е. независимым от влияния каких-либо других предметов).

В той же степени, в какой эфир не требовался в эвклидовой геометрии (физически интерпретированной), он не нужен и в кинематике классической механики; ее теоремы имеют ясный физический смысл, если только предположить, что не существует влияния движения на масштабы и часы, принимаемого специальной теорией относительности.

Иначе — в динамике Галилея и Ньютона. Закон движения, «масса × × ускорение = сила», содержит не только высказывание о материальной системе, даже в тех случаях, когда, как в фундаментальном астрономическом законе Ньютона, сила выражается через расстояния, т. е. через величины, реальное определение которых можно основывать на измерениях с твердыми измерительными телами. Ибо реальное определение ускорения не может быть основано исключительно на наблюдениях над твердыми телами и часами. Оно не может быть сведено к измеряемым расстояниям между точками, составляющими механическую систему. Для его определения требуется еще система координат, или тело отсчета, с подходящим состоянием движения. Если выбрать другое состояние движения системы координат, то уравнения Ньютона перестанут выполняться по отношению к ней. В эти уравнения как будто входит неявно среда, в которой движутся тела, как реальный фактор в законе движения наряду с реальными телами и их расстояниями, определяемыми измерительными телами. В динамике Ньютона «пространство» обладает физической реальностью — в противоположность геометрии и кинематике. Мы будем называть эту физическую реальность, входящую в закон движения Ньютона наряду с наблюдаемыми весомыми телами, «эфиром механики». Появление центробежных сил при вращении тела, материальные точки которого не изменяют взаимных расстояний, показывает, что этот эфир следует понимать не только как некое воображаемое представление теории Ньютона, но что ему соответствует в природе нечто реальное.

Мы видим, что для Ньютона «пространство» было чем-то физически реальным. Это ясно понимал Мах, который первым после Ньютона подверг глубокому анализу основания механики. Он пытался избежать гипотезы об «эфире механики», сводя инерцию к непосредственному взаимодействию рассматриваемой массы со всеми остальными массами Вселенной. Хотя эта идея логически и возможна, но в наши дни она как теория взаимодействия уже не может рассматриваться всерьез. Механический эфир, названный Ньютоном «абсолютным пространством», должен оставаться для нас физически реальным. Но выражение «эфир», конечно, не следует, подобно физикам XIX в., понимать как что-то аналогичное весомой материи.

Называя пространство физики «абсолютным», Ньютон думал и о другом свойстве того, что мы назвали «эфиром». Каждый физический предмет оказывает влияние на другие и, наоборот, в общем случае подвергается сам влиянию остальных предметов. Однако последним свойством эфир механики Ньютона не обладает. В самом деле, согласно классической механике, на инерциальные свойства эфира не влияет ничто — ни конфигурация материи, ни что-либо иное; в этом отношении эти свойства можно называть «абсолютными».

То обстоятельство, что предпочтение, отдаваемое инерциальным системам по сравнению с неинерциальными, должно объясняться реальной причиной, физики поняли только в последние годы. Исторически гипотеза эфира в ее современном виде выросла путем усовершенствования механической гипотезы оптического эфира. После долгих бесплодных усилий физики пришли к убеждению, что свет не следует понимать как движение инертной, упругой среды и что электромагнитные поля теории Максвелла вообще нельзя объяснить механически. Так под давлением этих неудач электромагнитные поля постепенно стали рассматриваться как последние, несводимые к чему-либо физические реальности, как не нуждающиеся в дальнейшем объяснении состояния эфира. Единственное, что сначала еще оставалось от механической теории, это было определенное состояние движения; оно воплощало в себе в известном смысле «абсолютный покой». Если в механике Ньютона были равноправными по крайней мере все инерциальные системы, то в теории Максвелла — Лоренца состояние движения выделенной системы координат представлялось вполне определенным (покой относительно эфира). Молчаливо предполагалось, что эта выделенная система является в то же время инерциальной, что относительно эфира принцип инерции соблюдается.

Фундаментальные понятия физиков стали изменяться под влиянием теории Максвелла — Лоренца еще и в другом отношении. После того как на электромагнитные поля стали смотреть как на фундаментальные, ни к чему уже несводимые сущности, они, казалось, были призваны лишить весомые инертные массы их основной роли и в механике. Из уравнений Максвелла следует вывод, что движущийся электрический заряд окружается магнитным полем, энергия которого зависит от скорости в первом приближении квадратично. Как тут было не предположить, что **вся** кинетическая энергия является электромагнитной! Возникла надежда свести механику к электродинамике, после того как прежде не удалось свести электромагнитные явления к механическим. Эта надежда росла по мере того как увеличивалась вероятность, что вся весомая материя построена из электрических элементарных частиц. Между тем никак не удавалось справиться с двумя трудностями. Во-первых, уравнения Максвелла никак не объясняли, каким образом электрический заряд электрической элементарной частицы может существовать в равновесии, несмотря на силы электростатического отталкивания. Во-вторых, электромагнитная теория не давала сколько-нибудь удовлетворительного и естественного объяснения гравитации. И все же успехи электромагнитной теории были такими значительными, что на нее стали смотреть, как на вполне гарантированное достояние физики, даже как на наиболее обоснованное достижение последней.

Наконец, теория Максвелла — Лоренца повлияла на наше отношение к вопросам теоретического фундамента тем, что она привела к созданию специальной теории относительности. Выяснилось, что уравнения электродинамики в действительности не выделяют никакое определенное состояние движения и что согласно этим уравнениям, так же как в классической механике, существует бесконечное множество равномерно движущихся относительно друг друга равноправных систем координат, если только применять соответствующие формулы преобразования для пространственных координат и времени. Хорошо известно, что это открытие привело к глубокому изменению кинематики и динамики. Эфиру электродинамики уже нельзя было приписывать определенное состояние движения. Теперь он — как и эфир классической механики — приводил не к выделению определенного состояния **движения**, но только к привилегированности определенного состояния **ускорения**. Вследствие того, что говорить в абсолютном смысле об одновременных состояниях в разных местах эфира оказалось уже невозможным, эфир стал в известной степени четырехмерным, ибо никакого объективного упорядочения его состояний по одному только времени не существовало. В специальной теории относительности эфир также был абсолютным, так как его влияние на инерцию и распространение света считалось независимым от всех физических воздействий. В то время как в классической физике геометрия тел предполагалась независимой от состояния движения, в специальной теории относительности законы эвклидовой геометрии для расположения взаимно покоящихся тел выполняются только тогда, когда эти тела покоятся относительно инерциальной системы [1]; это легко заключить из так называемого сокращения Лоренца. Таким образом, геометрия тел, как и динамика, становится обусловленной эфиром.

Общая теория относительности устраняет еще один недостаток классической динамики: в последней инерция и тяжесть выглядят как совершенно различные, независимые одно от другого явления, хотя они обусловлены одной материальной постоянной — массой. Теория относительности преодолевает этот недостаток, устанавливая для динамического поведения электрически нейтральной материальной точки закон геодезической линии, в котором воздействия инерции и тяготения оказываются уже неотделимыми. При этом она придает эфиру переменную от точки к точке метрику и определяющие динамическое поведение материальных точек свойства, которые в свою очередь определяются физическими факторами, а именно распределением масс или энергии. Таким образом, эфир общей теории относительности отличается от эфира классической механики или специальной теории относительности тем, что он не является «абсолютным», но определяется в смысле своих переменных в пространстве свойств распределением весомого вещества. Это определение является полным в том случае, если мир будет пространственно конечным и замкнутым. То, что в общей теории относительности не существует привилегированных, однозначно связанных с метрикой пространственно-временных координат, более характерно для математической формы этой теории, чем для ее физического содержания.

Однако и с помощью формального аппарата общей теории относительности не удалось свести всю инерцию масс к электромагнитным полям и вообще к полям. На мой взгляд, и здесь мы еще не вышли за рамки внешнего включения электромагнитных сил в схему общей теории относительности. Метрический тензор, определяющий явления тяготения и инерции, с одной стороны, и тензор электромагнитного поля, с другой, как и прежде предстают в качестве существенно различных выражений состояния эфира, логическую независимость которых следовало бы, ве-

[1] Например, для тел, которые хотя и покоятся относительно друг друга, но все вместе вращаются относительно инерциальной системы, эвклидова геометрия (согласно специальной теории относительности) несправедлива.

роятно, отнести скорее на счет несовершенства нашего теоретического построения, чем на счет сложной структуры действительности.

Правда, Вейль и Эддингтон, обобщив геометрию Римана, нашли математическую систему, в которой оба вида поля рассматриваются с единой точки зрения. Однако простейшие полевые законы, даваемые этой теорией, по-моему, не ведут к прогрессу физических знаний. Вообще кажется, что мы теперь находимся намного дальше от познания элементарных законов электродинамики, чем это представлялось в начале этого столетия. Для обоснования этого мнения я укажу здесь кратко на *проблему магнитного поля Земли и Солнца*, а также на *проблему световых квантов*; эти проблемы в известной мере касаются макроструктуры и микроструктуры электромагнитного поля.

Земля и Солнце обладают магнитными полями, ориентации и полярности которых приближенно определяются направлением вращения этих небесных тел. Согласно теории Максвелла, эти поля могли бы возникнуть благодаря электрическим токам, текущим вокруг осей вращения небесных тел противоположно вращению. Солнечные пятна, которые с хорошим приближением можно считать вихрями, также обладают аналогичными очень сильными полями. Однако едва ли можно думать, что во всех этих случаях действительно существуют электрические токи проводимости или конвекционные токи достаточной силы. Скорее похоже на то, как будто магнитные поля возникают при вращательном движении нейтральных масс. Подобное порождение полей не могут предсказать ни теория Максвелла в ее первоначальном виде, ни теория Максвелла, обобщенная в смысле общей теории относительности. Здесь природа указывает нам, по-видимому, фундаментальную, пока еще не объясненную теорией закономерность [2].

Если здесь речь идет только об одном случае, не объясненном теорией поля в ее нынешнем виде, то факты и идеи, относящиеся к *квантовой тео-*

[2] В соответствии с электродинамической аналогией напрашивается соотношение вида $d\mathfrak{h} = -C\,dm\,\frac{[\mathfrak{v}\mathfrak{r}]}{r^3}$, причем dm означает массу, движущуюся со скоростью $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{r}$ или $r = |\mathfrak{r}|$ — расстояние начала координат от этой точки. (Формула во всяком случае может рассматриваться, хотя бы для вращательных движений, в качестве первого приближения.) Связь между полями Солнца и Земли получается отсюда правильной по порядку величины. Постоянная C имеет размерность (Гравитационная постоянная)$^{1/2}$/(Скорость света). Отсюда можно предположительно определить порядок величины постоянной C. Подставляя это численное значение в написанную выше формулу, мы получаем — в применении к вращающейся Земле — правильный порядок величины для магнитного поля Земли. Эта связь заслуживает рассмотрения, хотя и может основываться на случайности. (Ее, по-видимому, нет для других планет и звезд. — *Прим. ред.*)

рии, угрожают вообще взорвать здание теории поля. В самом деле, все множатся доказательства в пользу того, что световые кванты следует рассматривать как физическую реальность, что электромагнитное поле нельзя считать последней реальностью, к которой можно свести другие физические объекты. После того как теория формулы Планка уже показала, что перенос энергии и импульса излучением происходит так, как если бы последнее состояло из атомов, движущихся со скоростью света c, с энергией $h\nu$ и импульсом $h\nu/c$, Комптон экспериментами по рассеянию рентгеновых лучей веществом доказал, что существуют акты рассеяния, при которых световые кванты сталкиваются с электронами, передавая им часть своей энергии, причем энергия и направление световых квантов изменяются. Фактом является по крайней мере то, что рентгеновы лучи при рассеянии испытывают такое (предсказанное Дебаем и Комптоном) изменение частоты, какое требуется гипотезой квантов.

Далее, недавно появилась работа индийца Бозе о выводе формулы Планка, имеющая для наших теоретических представлений особое значение по следующей причине: до сих пор при всех полных выводах формулы Планка так или иначе использовалась гипотеза о волновой структуре излучения. Так, например, в известном выводе Эренфеста — Дебая множитель $\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$ в этой формуле получался путем подсчета числа собственных колебаний полости в интервале частот $d\nu$. Бозе заменяет этот основанный на представлениях теории колебаний подсчет газокинетическим, относя его к одному находящемуся в полости световому кванту, представляемому в виде некоторой молекулы. Тогда возникает вопрос, нельзя ли явления дифракции и интерференции включить в квантовую теорию таким образом, чтобы полевые понятия теории выражали лишь взаимодействие между квантами, причем полю уже не приписывалась бы самостоятельная физическая реальность.

Наши сомнения относительно реальности волнового поля усиливаются еще и тем обстоятельством, что согласно теории Бора частота испускаемого излучения не определяется электрическими массами, совершающими периодические движения с т о й ж е частотой.

Но даже если эта возможность созреет в подлинную теорию, мы не можем в теоретической физике обойтись без эфира, т. е. континуума, наделенного физическими свойствами, ибо общая теория относительности, основных идей которой физики, вероятно, будут придерживаться всегда, исключает непосредственное дальнодействие; каждая же теория близкодействия предполагает наличие непрерывных полей, а следовательно, существование «эфира».

77

ТЕОРИЯ ЭДДИНГТОНА И ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА*

А. Эддингтон и Р. Курант предложили мне снабдить немецкий перевод этой книги небольшим приложением относительно применения принципа Гамильтона в теории Эддингтона. Я охотно откликнулся на это предложение, хотя мало что могу добавить в защиту того, что здесь написано, так как дело идет о естественном рассмотрении в рамках теории Вейля — Эддингтона.

Будем исходить из основной идеи Эддингтона: все величины и соотношения между ними сводятся к закону аффинной связности, т. е. к определенным формулой (92.1)[1] величинам $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$. В § 92 уже было показано, что имеется некоторый инвариантный интеграл, подынтегральное выражение которого является тензорной плотностью $\mathfrak{H}$, зависящей только от $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ и частных производных первого порядка от этих величин. Напрашивается мысль попытаться вывести уравнения поля из вариационного принципа, варьируя некоторый интеграл подобного рода по $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ как независимым переменным. Проводя эту идею, можно попутно сформулировать связь между $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ и записанным через $g_{\mu\nu}$ метрическим полем в несколько ином виде, чем это сделал Эддингтон.

Пусть $\mathfrak{H}$ — тензорная плотность, зависящая лишь от величин $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ и их первых частных производных. Пусть далее для каждой вариации $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$, исчезающей на границе рассматриваемой области,

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H} d\tau\right\} = 0, \tag{1}$$

где $d\tau = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$.

---

* *Eddingtons Theorie und Hamiltonsches Prinzip.* Приложение к кн.: A. S. E d d i n g t o n. Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung, 1925. Berlin, Springer Verlag, Anhang, 366—371. (См. русский перевод: А. Э д д и н г т о н. Теория относительности. ГТТИ, 1934.— *Прим. ред.*).

[1] Ссылки в статье относятся к тексту книги Эддингтона; однако все можно понять и так, если только заметить, что обобщенный тензор Римана 4-го ранга обозначается через $^*B$, а соответствующий тензор 2-го ранга — через $^*G$. — *Прим. ред.*

Прежде чем получать следствия из этой аксиомы, введем некоторое логически произвольное ограничение. Скалярная плотность $\mathfrak{H}$ не должна зависеть от Γ самым общим мыслимым образом, т. е. не может быть образована произвольно из ${}^*B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}$ [см. (92.41)], а составляется исключительно из сверток ${}^*G_{\mu\nu}$ [см. (92.42)], точнее из симметричных и антисимметричных частей этого тензора:

$$\gamma_{\mu\nu} = -\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu}}\right) - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu}}\right). \tag{3}$$

Согласно этому предположению, вместо (1) сначала получаем

$$\int(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\delta\gamma_{\mu\nu} + \mathfrak{f}^{\mu\nu}\delta\varphi_{\mu\nu})\,d\tau = 0, \tag{1a}$$

где подставлено

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} = \mathfrak{g}^{\mu\nu}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\varphi_{\mu\nu}} = \mathfrak{f}^{\mu\nu}.$$

Формулы (2) и (3) позволяют выразить $\delta\gamma_{\mu\nu}$ и $\delta\varphi_{\mu\nu}$ в (1a) через $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ и $\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$. При этом, имея в виду, что 40 вариаций $\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ могут быть выбраны независимо друг от друга, мы получаем из (1a) 40 уравнений:

$$(\mathfrak{g}^{\mu\nu})_{\alpha} - \frac{1}{2}(\mathfrak{g}^{\mu\sigma})_{\sigma}\delta^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{2}(\mathfrak{g}^{\nu\sigma})_{\sigma}\delta^{\mu}_{\alpha} - \frac{1}{2}\mathfrak{i}^{\mu}\delta^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{2}\mathfrak{i}^{\nu}\delta^{\mu}_{\alpha} = 0. \tag{1б}$$

При этом введены тензорные плотности

$$(\mathfrak{g}^{\mu\nu})_{\alpha} = \frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \mathfrak{g}^{\sigma\nu}\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} + \mathfrak{g}^{\mu\sigma}\Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha} - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{i}^{\mu} = \frac{\partial\mathfrak{f}^{\mu\sigma}}{\partial x_{\sigma}}. \tag{6}$$

40 уравнений (1б) позволяют нам выразить 40 величин $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ через $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ и их производные. Чтобы проделать это, нужно перейти от контравариантной тензорной плотности к контравариантным тензорам, а от них — к ковариантным тензорам. С этой целью определим тензоры $g^{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ соотношениями

$$g^{\mu\nu}\sqrt{-g} = \mathfrak{g}^{\mu\nu},$$

$$g^{\mu\sigma}g^{\nu\sigma} = \delta^{\nu}_{\mu}, \tag{7}$$

$$g = |g_{\mu\nu}|,$$

и, кроме того, i^{μ} и i_{μ} — соотношениями

$$i^{\mu}\sqrt{-g} = \mathfrak{i}^{\mu}, \quad i_{\mu} = g_{\mu\nu} i^{\nu}; \tag{8}$$

тогда путем элементарных расчетов получим [2]

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}}\right) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} i^{\alpha} + \frac{1}{6}\delta^{\alpha}_{\mu} i_{\nu} + \frac{1}{6}\delta^{\alpha}_{\nu} i_{\mu}. \tag{1в}$$

Отсюда видно, что $g_{\mu\nu}$ нужно понимать как метрический тензор. Полученное из вариационного принципа выражение для $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ имеет много сходства с аналогичным выражением, следующим из теории Вейля, и здесь также наряду с метрическим тензором выступает 4-вектор.

Уравнения поля для $g_{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ уже содержатся в полученных результатах, как только мы примем определенное выражение для функции Гамильтона $\mathfrak{H}$. Именно, уравнения поля следуют из равенств (2) и (3), правые и левые части которых нужно выразить через $g_{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$. Для правой части это делается при помощи уравнения (1в), для левой — при помощи уравнений (4). Если только $\mathfrak{H}$ задана как функция $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$, то из (4) можно выразить $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$ через $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ и результат подставить в левые части равенств (2) и (3).

Что касается левых частей (2) и (3), то еще проще удается достигнуть цели следующим образом. Так как мы до сих пор не вводили никаких предположений относительно выбора скалярной плотности $\mathfrak{H}$ как функции γ и φ, то уравнения (4) означают только, что выражение

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}\, d\gamma_{\mu\nu} + \mathfrak{f}^{\mu\nu}\, d\varphi_{\mu\nu}$$

---

[2] Сначала путем свертывания (1б) по индексам ν и α получаем

$$(\mathfrak{g}^{\mu\nu})_{\nu} = -\frac{5}{3}\mathfrak{i}^{\mu},$$

после чего вместо (1б) имеем

$$(\mathfrak{g}^{\mu\nu})_{\alpha} + \frac{1}{3}\mathfrak{i}^{\mu}\delta^{\nu}_{\alpha} + \frac{1}{3}\mathfrak{i}^{\nu}\delta^{\mu}_{\alpha} = 0.$$

Подставим сюда $(\mathfrak{g}^{\mu\nu})_{\alpha}$ из (5). Теперь нужно перейти при помощи первого уравнения (7) к контравариантной форме

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + g^{\mu\sigma}\Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha} + g^{\nu\sigma}\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} + \frac{1}{3} i^{\mu}\delta^{\nu}_{\alpha} + \frac{1}{3} i^{\nu}\delta^{\mu}_{\alpha} + g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x_{\alpha}} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma}\right) = 0.$$

Умножая на $g_{\mu\nu}$, нетрудно видеть, что скобка в последнем члене равна $(^1/_3)\ i_{\alpha}$. Разрешая обычным образом последнее равенство относительно Γ и переходя к ковариантным индексам, получаем уравнение (1в).

является полным дифференциалом (относительно переменных $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$). Этому равносильно утверждение, что и выражение

$$\gamma_{\mu\nu}\, d\mathfrak{g}^{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}\, d\mathfrak{f}^{\mu\nu}$$

является полным дифференциалом, в котором мы, наоборот, рассматриваем $\gamma_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$ как функции $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$. Этот вывод означает, что существует некоторая функция $\mathfrak{H}$ от $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$, обладающая характером скалярной плотности и удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}, \\ \varphi_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial \mathfrak{f}^{\mu\nu}}. \end{aligned} \tag{4a}$$

Выбор функции $\mathfrak{H}^*$ полностью определяет левые части равенств (2) и (3). Функции $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}^*$ однозначно определяют друг друга, а именно

$$d\mathfrak{H} + d\mathfrak{H}^* = d\,(\gamma_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\mu\nu} + \varphi_{\mu\lambda}\mathfrak{f}^{\mu\nu}), \tag{9}$$

или, в случае, когда $\mathfrak{H}^*$ — однородная квадратичная функция от $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ и однородная функция нулевого порядка от $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$,

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^*. \tag{9a}$$

Имея в виду теорию Максвелла, напишем

$$\mathfrak{H}^* = -\frac{\beta}{2}\,\mathfrak{f}_{\alpha\beta}\mathfrak{f}^{\alpha\beta}\sqrt{-g} = -\frac{\beta}{2}\,\mathfrak{g}_{\sigma\alpha}\mathfrak{g}_{\tau\beta}\mathfrak{f}^{\sigma\tau}\mathfrak{f}^{\alpha\beta}\sqrt{-\mathfrak{g}}. \tag{10}$$

Здесь β — постоянная, $\mathfrak{g}$ — определитель $|\mathfrak{g}^{\alpha\beta}|$, $\mathfrak{g}_{\sigma\alpha}$ — нормированный минор элемента $\mathfrak{g}^{\sigma\alpha}$[3]. Отсюда в результате элементарных расчетов получаем

$$d\mathfrak{H}^* = -\beta\left[\left(\frac{1}{4}\, g_{\alpha\beta} f_{\sigma\tau} f^{\sigma\tau} - f_{\alpha\sigma} f^{\sigma}_{\beta}\right)\delta\mathfrak{g}^{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta}\,\delta\mathfrak{f}^{\alpha\beta}\right], \tag{11}$$

или, согласно (4a),

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} &= -\beta\left(\frac{1}{4}\, g_{\alpha\beta} f_{\sigma\tau} f^{\sigma\tau} - f_{\alpha\sigma}{}^{\sigma}_{\beta} f\right) = -\beta E_{\mu\nu}, \\ \varphi_{\mu\nu} &= -\beta f_{\mu\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{11a}$$

Эти равенства вместе с (2) и (3) и уравнением (1в) определяют уравнения поля. Здесь $E_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитной энергии в теории Максвелла. Следует заметить, что функция $\mathfrak{H}$ допускает возможность дополни-

[3] Из соотношений (10) и (9) нетрудно увидеть, что эта добавка приводит к выполнению уравнения (9а).

тельного аддитивного члена вида $\mathrm{const}\cdot\sqrt{-g}$, которое соответствует «космологическому» члену общей теории относительности.

Выполняя указанные преобразования, получаем уравнения поля в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= -\beta E_{\mu\nu} - \frac{1}{6}\alpha i_\mu i_\nu, \\ \beta f_{\mu\nu} &= \frac{1}{6}\left(\frac{\partial i_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial i_\nu}{\partial x_\mu}\right), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где $G_{\mu\nu}$, как и в (37.2), обозначает свернутый тензор Римана. Что касается физического смысла этих уравнений, то $f_{\mu\nu}$ нужно понимать теперь как тензор электромагнитного поля. Первое уравнение (12) в точности соответствует обычным уравнениям поля общей теории относительности, когда рассматривается задача, в которой кроме метрического поля существует только электромагнитное, так что добавляется только один энергетический член, определяемый плотностью тока. Второе уравнение (12) кажется прямо противоречащим опыту, так как оно требует, чтобы электромагнитное поле обращалось в нуль всюду, где равна нулю плотность тока.

Однако это возражение несостоятельно, так как мы не знаем, связаны ли с электромагнитными полями очень малые плотности электрического заряда. Чтобы судить о приемлемости уравнений (12), мы должны далее принять во внимание, что единица электромагнитного поля должна быть изменена, если длина будет измеряться в сантиметрах, масса и соответственно энергия — в граммах. Тогда вместо уравнений (12) мы запишем

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= -\beta^2\alpha E_{\mu\nu} - \frac{1}{6}\alpha^2 i_\mu i_\nu, \\ \beta f_{\mu\nu} &= \frac{1}{6}\left(\frac{\partial i_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial i_\nu}{\partial x_\mu}\right). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Согласно второму из этих уравнений существует векторный потенциал электромагнитного поля f_μ $\left(\text{причем } f_{\mu\nu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\right)$, определяемый уравнением

$$6\beta f_\mu = i_\mu. \tag{14}$$

Первое уравнение поля можно теперь записать также и в виде

$$G_{\mu\nu} = -\beta\alpha^2 E_{\mu\nu} - 6\beta^2\alpha^2 f_\mu f_\nu. \tag{15}$$

Существование полей, практически не связанных с током, требует, согласно (14), чтобы β была исчезающе мала. Тогда и последний член в равенстве

(15) будет исчезающе мал по сравнению с максвелловским вкладом в энергию. Тогда наше рассмотрение приводит к тем же уравнениям поля, какие были установлены первоначально общей теорией относительности без обобщения геометрических основ за пределы системы Римана.

Электрон, соответствующий свободному от сингулярности решению, во всяком случае не следует из этих уравнений поля. Далее, опыт до сих пор не дал никаких подтверждений тому выводу, что электромагнитные поля вызывают появление 4-тока в тех точках, где они существуют. К сожалению, полученный результат создает у меня впечатление, что углубление геометрических основ, предпринятое Вейлем и Эддингтоном, не смогло привести к прогрессу физических знаний; можно лишь надеяться, что будущее развитие теории покажет несправедливость этого пессимистического мнения.

ЭЛЕКТРОН И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

Нижеследующие замечания настолько просты, что я не надеюсь сказать в них что-либо новое. Но так как доказываемый тезис сам по себе был для меня новым, я надеюсь, что его изложение здесь будет полезным и для других. Этот тезис гласит:

Если справедливо предположение, что электромагнитное поле описывается антисимметричным тензором 2-го ранга ($f_{\mu\nu}$), то вообще нельзя дать таких ковариантных уравнений, которые

1) имеют решение, соответствующее отрицательному электрону,

2) не имеют *ни одного* решения, которое соответствует положительному электрону равной массы.

Доказательство. Пусть дано решение, которое соответствует электрону с электрическим зарядом ε и механической массой μ. Это решение будет характеризоваться электромагнитным ($f_{\mu\nu}$) и метрическим ($g_{\mu\nu}$) тензорами.

Если произвести такие преобразования пространства-времени, которые характеризуются уравнениями

$$\begin{aligned} x'_1 &= x' = x = x_1, \\ x'_2 &= y' = y = x_2, \\ x'_3 &= z' = z = x_3, \\ x'_4 &= t' = -t = -x_4, \end{aligned} \tag{1}$$

то получится формально новое решение, которое связано с введенными

---

* *Elektron und allgemeine Relativitätstheorie*. Physica, 1925, 5 Jaargang, 330—334.

ранее соотношениями

$$g'_{11} = g_{11}, \quad f'_{23} = f_{23}, \quad f'_{14} = -f_{14},$$
$$g'_{44} = g_{44}, \quad f'_{31} = f_{31}, \quad f'_{24} = -f_{24},$$
$$g'_{33} = g_{33}, \quad f'_{12} = f_{12}, \quad f'_{34} = -f_{34}.$$

Если f_{23}, f_{31}, f_{12} интерпретировать как компоненты напряженности магнитного, а f_{14}, f_{24}, f_{34} — как компоненты напряженности электрического полей, то f_{23} и т. д. обращаются в нуль. Компоненты напряженности электрического поля при указанном преобразовании меняют знак. Если образовать соответствующие компоненты вектора плотности электрического тока

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$$

и отдельно плотность электрического заряда

$$\frac{\partial f^{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial f^{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial f^{43}}{\partial x_3},$$

то станет ясно, что они меняют знак при упомянутом преобразовании, в то время как, согласно (2), гравитационное поле, а тем самым и (гравитирующая) масса остаются неизменными.

Итак, если существует решение, которое соответствует отрицательному электрону с массой μ и зарядом $-\varepsilon$, то существует также и решение, которому соответствуют электрон с массой μ и зарядом $+\varepsilon$.

Наши поиски удовлетворительного выхода из этой трудности были безуспешны, но, по-видимому, небезынтересно сделать здесь некоторые замечания, связанные с обсуждаемой темой.

1. В одной из наших ранних работ о гравитации и электричестве мы полагали, что упомянутую трудность можно обойти, изменив связь тензора $f_{\mu\nu}$ с электромагнитным полем, при которой мы рассматривали компоненты f_{23}, f_{31}, f_{12} как электрические, а компоненты f_{14}, f_{24}, f_{34} как магнитные векторы поля. Тогда плотность тока следует рассматривать как тензор 3-го ранга

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial f_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial f_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu},$$

а плотность электрического заряда задавать выражением

$$\frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3}.$$

Этим достигается то, что преобразование (1) не изменяет электрического поля и плотности электрического заряда. Но в этом случае к соответствующей трудности приводит преобразование:

$$t' = t,$$
$$x' = -x,$$
$$y' = y,$$
$$z' = z.$$

При этом же преобразовании знак по-новому интерпретированной плотности электрического заряда меняется на обратный, без того чтобы в центрально-симметричном электростатическом решении изменилось что-либо еще.

2. Можно предположить при этом, что допустимы не все преобразования, а только те, которые обладают положительным детерминантом, поскольку только они могут быть связаны между собой бесконечно малыми преобразованиями. Все записанные выше преобразования обладали отрицательным детерминантом.

Несущественность возражения можно увидеть из того, что при любой из фиксированных выше интерпретаций плотности электрического заряда последняя изменяет свой знак при преобразовании:

$$x' = -x,$$
$$y' = y,$$
$$z' = z,$$
$$t' = -t.$$

Однако это преобразование имеет положительный детерминант.

Добавление при корректуре. Дальнейшие размышления относительно этой трудности привели меня к возможному пути ее устранения или, по крайней мере, к более глубокому пониманию существа трудности. Известное из опыта различие положительных и отрицательных элементарных частиц не может быть получено из теории, которая пользуется в качестве переменных поля исключительно величинами $g_{\mu\nu}$ и $f_{\mu\nu}$. Это связано с тем, что скаляр плотности электрического заряда ρ не может быть однозначно выражен через переменные поля $g_{\mu\nu}$ и $f_{\mu\nu}$, а именно:

$$\rho = \sqrt{g_{\mu\nu} i^{\mu} i^{\nu}},$$

где

$$i^{\mu} = \frac{\partial f^{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}}.$$

Появляющийся здесь квадратный корень делает прежде всего невозможным обособленное выражение плотности положительного и отрицательного электрических зарядов. Пока эта неопределенность существует, нельзя сформулировать закон, который определял бы знак ρ. Скорее должна предполагаться возможность определения плотности ρ электрического заряда *вместе со знаком* из теории поля. Это можно сделать следующим образом.

В световом конусе $ds^2 = 0$ в каждой точке мира с самого начала различаются передний и задний конусы. Получается, что время обладает априори направлением течения, т. е. каждому временно-подобному линейному элементу сопоставляется стрелка (прошедшее $\rightarrow$ будущее).

Пусть a_μ — некоторый временно-подобный вектор, l^i — временно-подобный вектор, направленный в передний корпус. Теперь мы можем установить, что знак скаляра

$$a = \sqrt{g_{\mu\nu}a^\mu a^\nu}$$

должен быть таким же, как и знак

$$l^i a_i.$$

Так удается, например, однозначно выразить плотность электрического заряда (скаляр плотности) через поле. Знак этого скаляра характеризует знак плотности электрического заряда.

Теперь на основе общей теории относительности нетрудно установить закон, согласно которому электричество, положительное в некоторых конфигурациях, в равновесии ведет себя как отрицательное. Это может быть достигнуто путем введения в функцию Гамильтона члена, который является нечетной функцией скаляра плотности электрического заряда или скалярного электростатического потенциала.

Нам представляется существенным знание того, что объяснение неравнозначности обоих видов электричества возможно лишь тогда, когда времени приписано направление течения; это используется при определении важных физических величин. В этом существенное различие электромагнетизма и гравитации; поэтому попытки слить воедино электродинамику с законами гравитации представляется нам недостаточно обоснованными.

В статье за несколько лет до теории Дирака сформулирована идея зарядовой симметрии любых теорий поля, которая следует из симметрии теории относительно отражений пространства и времени. Первое упоминание о такой симметрии содержалось уже в работе 73. В статье 79 обсуждается и временна́я инвариантность теории.

ЕДИНАЯ ПОЛЕВАЯ ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ И ЭЛЕКТРИЧЕСТВА *

Физики-теоретики, занимающиеся проблемами общей теории относительности, в настоящее время едва ли могут сомневаться в том, что гравитационное и электромагнитное поля должны иметь одинаковую природу. Однако насколько нам известно, до сих пор еще не удалось установить связи между этими полями. Не дает истинного решения этой проблемы и наша опубликованная ранее в этих «Докладах» работа [1], целиком основанная на идее Эддингтона. Теперь я думаю, что после двухлетних непрерывных поисков нам удалось получить истинное решение, которое и излагается ниже.

Использованный нами метод кратко можно обрисовать следующим образом. Сначала мы отыскали простейшее с формальной точки зрения уравнение гравитационного поля в отсутствие электромагнитного поля, а также наиболее естественное обобщение этого уравнения. Оказалось, что в первом приближении оно содержит в себе теорию Максвелла. Изложим схему общей теории (§ 1) и покажем, что в ней в известном смысле содержатся законы чисто гравитационного поля (§ 2) и теория Максвелла (§ 3).

§ 1. Общая теория

Предположим, что в четырехмерном континууме задается аффинная связность, т. е. поле $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$, определяющее бесконечно малые смещения векторов соотношением

$$dA^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\alpha} dx^{\beta}. \tag{1}$$

---

* *Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1925, 414—419.

[1] Статья 72 и дополнения к ней в статьях 73, 74.—*Прим. ред.*

При этом не предполагается, что $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ симметричны по индексам α и β. Обычным способом образуем из этих величин Γ (римановы) тензоры

$$R^{\alpha}_{\mu,\nu\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\beta} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}$$

и (2)

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu,\nu\alpha} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\Gamma^{\beta}_{\nu\beta}.$$

Независимо от этой аффинной связности введем контравариантную тензорную плотность $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, свойства симметрии которой мы также оставим открытыми. Из этих двух величин образуем скалярную плотность

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{3}$$

и постулируем, что все вариации интеграла

$$\mathfrak{J} = \int \mathfrak{H}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$$

по $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ как независимым переменным (на границах не варьируемых) обращаются в нуль.

Вариация по $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ дает 16 уравнений

$$R_{\mu\nu} = 0, \tag{4}$$

а вариация по $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ дает сначала 64 уравнения

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \mathfrak{g}^{\beta\nu}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} + \mathfrak{g}^{\mu\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} - \delta^{\nu}_{\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\beta}}{\partial x_{\beta}} + \mathfrak{g}^{\sigma\beta}\Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}\right) - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} = 0. \tag{5}$$

Проведем теперь некоторые преобразования, позволяющие упростить уравнения (5). Свертывая левую часть (5) по индексам ν, α и, соответственно μ, α, получаем уравнения

$$3\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\right) + \mathfrak{g}^{\mu\alpha}(\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\nu\alpha}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\nu}}{\partial x_{\alpha}} = 0. \tag{7}$$

Вводя далее величины $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$, являющиеся нормированными минорами $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и, следовательно, удовлетворяющие соотношениям

$$\mathfrak{g}_{\mu\alpha}\mathfrak{g}^{\nu\alpha} = \mathfrak{g}_{\alpha\mu}\mathfrak{g}^{\alpha\nu} = \delta^{\nu}_{\mu},$$

и умножая уравнения (5) на $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$, получаем уравнение, которое после поднятия одного индекса можно записать в виде

$$2\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial \lg \sqrt{\mathfrak{g}}}{\partial x_\alpha}+\Gamma^\beta_{\alpha\beta}\right)+\mathfrak{g}^{\mu\alpha}(\Gamma^\beta_{\alpha\beta}-\Gamma^\beta_{\beta\alpha})+\delta^\nu_\mu\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{\beta\alpha}}{\partial x_\alpha}+\mathfrak{g}^{\sigma\beta}\Gamma^\beta_{\sigma\beta}\right)=0, \qquad (8)$$

где $\mathfrak{g}$ означает определитель $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$. Уравнения (6) и (8) запишем в виде

$$\mathfrak{f}^\mu=\frac{1}{3}\mathfrak{g}^{\mu\alpha}(\Gamma^\beta_{\alpha\beta}-\Gamma^\beta_{\beta\alpha})=-\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha}+\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\right)=-\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x_\alpha}+\Gamma^\beta_{\alpha\beta}\right), \qquad (9)$$

где $\mathfrak{f}^\mu$ означает некоторую тензорную плотность. Легко показать, что система (5) эквивалентна системе уравнений

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}+\mathfrak{g}^{\beta\nu}\Gamma^\mu_{\beta\alpha}+\mathfrak{g}^{\mu\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta}-\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}+\delta^\nu_\alpha\mathfrak{f}^\mu=0 \qquad (10)$$

в соединении с уравнениями (7). Опуская верхние индексы и учитывая соотношения

$$\mathfrak{g}_{\mu\nu}=\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}}=g_{\mu\nu}\sqrt{-\mathfrak{g}},$$

в которых $g_{\mu\nu}$ означает ковариантный тензор, получаем

$$-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}+g_{\sigma\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}+g_{\mu\sigma}\Gamma_{\alpha\nu}+g_{\mu\nu}\varphi_\alpha+g_{\mu\alpha}\varphi_\nu=0, \qquad (10a)$$

где φ_τ — ковариантный вектор. Эта система вместе с двумя указанными выше уравнениями (7) и (4) получается из вариационного принципа в простейшей форме. В этом результате бросается в глаза появление вектора φ_τ наряду с тензором $g_{\mu\nu}$ и величинами $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$. Чтобы получить согласие с уже известными законами тяготения и электричества, симметричную часть $g_{\mu\nu}$ следует рассматривать как метрический тензор, а антисимметричную часть как электромагнитное поле; при этом необходимо предполагать, что вектор φ_τ тождественно равен нулю, что мы и будем делать. Однако для дальнейших исследований (например, проблемы электрона) следует иметь в виду, что принцип Гамильтона не требует обращения φ_τ в нуль. Приравнивание φ_τ нулю ведет к переопределенности поля, поскольку для $16+$ $+64$ переменных получается $16+64+4$ алгебраически независимых дифференциальных уравнений.

§ 2. Чисто гравитационное поле как частный случай

Пусть $g_{\mu\nu}$ симметричны. Тогда уравнения (7) выполняются тождественно. Переставляя в уравнениях (10а) μ и ν и вычитая, без труда получаем

$$\Gamma_{\nu,\mu\alpha}+\Gamma_{\mu,\alpha\nu}-\Gamma_{\mu,\nu\alpha}-\Gamma_{\nu,\alpha\mu}=0. \qquad (11)$$

Обозначая через Δ антисимметричную по двум последним индексам часть Γ, перепишем (11) в виде

$$\Delta_{\nu,\mu\alpha}+\Delta_{\mu,\alpha\nu}=0,$$

или

$$\Delta_{\nu,\mu\alpha}=\Delta_{\mu,\nu\alpha}. \qquad (11a)$$

Однако свойство симметрии по двум первым индексам несовместимо с антисимметрией по двум последним индексам, как показывают следующие равенства:

$$\Delta_{\mu,\nu\alpha}=-\Delta_{\mu,\alpha\nu}=-\Delta_{\alpha,\mu\nu}=\Delta_{\alpha,\nu\mu}=\Delta_{\nu,\alpha\mu}=-\Delta_{\nu,\mu\alpha}.$$

Эти равенства в соединении с равенствами (11а) требуют, чтобы все Δ были равны нулю. Следовательно, Γ симметричны по двум последним индексам, как и в геометрии Римана.

В этом случае, решая обычным способом уравнения (10а), получаем

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right). \qquad (12)$$

Вместе с уравнениями (4) уравнение (12) дает известный закон тяготения. Если бы мы предполагали симметрию $g_{\mu\nu}$ в § 1 с самого начала, то пришли бы прямо к уравнениям (12) и (4). С нашей точки зрения, это самый простой и замкнутый вывод уравнений гравитации для пустоты. Попытка вывести законы электродинамики, обобщив именно эти рассуждения, выглядит поэтому наиболее естественной.

Если бы мы не предполагали, что $\varphi_\tau=0$, то, предполагая симметрию $g_{\mu\nu}$, мы не могли бы получить известный закон чисто гравитационного поля указанным выше способом. Напротив, предполагая симметрию $g_{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, мы доказали бы, что $\varphi_\tau=0$ вследствие уравнения (9) или уравнений (10а) и (7); тогда мы также получили бы закон чисто гравитационного поля.

§ 3. Связь с теорией Максвелла

Если имеется электромагнитное поле, т. е. если $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ или $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ содержат антисимметричную часть, то уравнения (10а) уже нельзя разрешить относительно величин $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, что значительно затрудняет исследование всей системы. Однако если ограничиться первым приближением, то это решение получить можно. Мы это и сделаем, снова предполагая, что $\varphi_\mu = 0$.

Итак, положим

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}, \tag{13}$$

где $\gamma_{\mu\nu}$ — симметричные, а $\varphi_{\mu\nu}$ — антисимметричные бесконечно малые величины первого порядка. Величинами второго и более высоких порядков мы пренебрегаем. Тогда $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ также будут бесконечно малыми первого порядка.

При этих условиях система уравнений (10а) упрощается:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu} = 0. \tag{10б}$$

При двукратной циклической перестановке индексов μ, ν, α получаются два других уравнения. Из этих трех уравнений можно, как и в симметричном случае, вычислить Γ:

$$-\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x_\alpha}\right). \tag{14}$$

Уравнение (4) сводится к первому и третьему[2] членам. Подставляя в них выражение для $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ из (14), получаем

$$-\frac{\partial^2 g_{\nu\mu}}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\nu}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = 0. \tag{15}$$

Прежде чем рассматривать (15) дальше, разложим уравнение (7). Сначала из (13) следует, что в рассматриваемом приближении

$$g^{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu} - \varphi_{\mu\nu}. \tag{16}$$

С учетом этого уравнение (7) переходит в

$$\frac{\partial \varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{17}$$

Подставляя теперь выражения (13) для $g_{\mu\nu}$ в уравнение (15) и учитывая (17), получаем

$$-\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 \gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} = 0. \tag{19}$$

[2] Ср. формулу (2). — *Прим. ред.*

Уравнения (18), которые, как известно, можно упростить подходящим выбором координат, имеют такой же вид, как и в отсутствие электромагнитного поля. В свою очередь уравнения (17) и (19) для электромагнитного поля не содержат величин $\gamma_{\mu\nu}$, определяющих гравитационное поле. Следовательно, оба вида поля в согласии с опытом в первом приближении не зависят друг от друга.

Уравнения (17) и (19) почти полностью эквивалентны уравнениям Максвелла для пустого пространства. Уравнения (17) соответствуют системе однородных уравнений Максвелла. Выражения

$$\frac{\partial\varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial\varphi_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial\varphi_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu},$$

которые, по Максвеллу, должны обращаться в нуль, необязательно равны нулю в соответствии с уравнениями (17) и (19); однако выполняются соотношения типа

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial\varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial\varphi_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial\varphi_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu}\right)=0,$$

по существу тождественные уравнениям Максвелла для пустоты.

По поводу сопоставления $\varphi_{\mu\nu}$ векторам электрического и магнитного полей $\mathfrak{e}$ или $\mathfrak{h}$ хотелось бы сделать замечание, придающее изложенной выше теории независимое значение. Согласно классической механике, имеющей дело с центральными силами, для каждого процесса движения V существует обратный процесс $\overline{V}$, в котором одни и те же конфигурации проходятся в обратном порядке. Формально этот обратный процесс $\overline{V}$ получается из первоначального процесса V также заменой

$$\begin{aligned} x' &= x,\\ y' &= y,\\ z' &= z,\\ t' &= -t. \end{aligned}$$

Согласно общей теории относительности, аналогичное положение имеет место и в случае чисто гравитационного поля. Чтобы получить из решения для V соответствующее ему решение для $\overline{V}$, следует подставить во все полевые величины $t' = -t$ и, кроме того, изменить знаки компонент поля g_{14}, g_{24}, g_{34} и компонент тензора энергии T_{14}, T_{24},T_{34}. Результат получится такой же, как и в случае применения указанного выше преобразования к первоначальному процессу V. Тогда знаки g_{12}, g_{24}, g_{34} и T_{14}, T_{24}, T_{34} изменятся сами по себе в силу закона преобразования тензоров.

Эту возможность получить обратный процесс обращением временнóй координаты ($t' = -t$) следует рассматривать как всеобщий закон, которому должны подчиняться и явления электромагнетизма. В электродинамике при инверсии движения электрона меняется знак магнитного, а не электрического поля. Поэтому электрическому полю следует поставить в соответствие компоненты φ_{23}, φ_{31}, φ_{12}, а магнитному полю — компоненты φ_{14}, φ_{24}, φ_{34}. Следует отказаться от общепринятого противоположного отождествления. Оказанное ему предпочтение объясняется, очевидно, тем, что плотность тока более удобно выражать через вектор (тензор первого ранга), а не через антисимметричный тензор третьего ранга.

Закон электромагнитной индукции в изложенной здесь теории выражается уравнением (7) или (17). Это подтверждается и отсутствием в правой части этого уравнения какого-либо выражения, которое можно было бы интерпретировать как плотность тока.

Следующий вопрос состоит теперь в том, чтобы показать, может ли объяснить развитая здесь теория существование несингулярных центрально-симметричных заряженных масс. Над этой проблемой я начал работать вместе с доктором Я. Громмером, который в последние годы помогал мне во всех вычислениях в области общей теории относительности. Я хочу выразить искреннюю благодарность ему и «Международному комитету образования», обеспечившему мне возможность длительной совместной работы с Громмером.

80

НЕЭВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ И ФИЗИКА*

Размышления об отношении неэвклидовой геометрии к физике с необходимостью приводят к вопросу о соотношении между геометрией и физикой вообще. Этот последний вопрос мы прежде всего и будем иметь в виду и при этом постараемся по возможности не касаться спорных философских вопросов.

В древнейшие времена геометрия несомненно была полуэмпирической наукой — чем-то вроде примитивной физики. За точку принималось тело, размерами которого можно пренебречь. Прямая определялась либо с помощью точек, которые можно совместить в направлении луча зрения, либо с помощью натянутой нити.

Таким образом, мы имели дело с понятиями, которые — как и всякие понятия — не взяты непосредственно из опыта, или, другими словами, логически не вытекают из опыта, но все-таки находятся в прямом отношении к объектам наших переживаний. Предложения относительно точек, прямых, равенства отрезков и углов были при таком состоянии знания в то же время и предложениями относительно известных переживаний, связанных с предметами природы.

Такая геометрия превратилась в математическую науку, как только было понято, что бо́льшая часть ее предложений может быть чисто логическим путем выведена из небольшого числа предложений, получивших название аксиом. Наука, которая занимается исключительно *логическими* отношениями между данными предметами, устанавливаемыми по заданным правилам, есть математика.

Вывод отношений занимал тогда главное место в кругу научных интересов, поскольку самостоятельное построение логической системы, независимое от ненадежных, случайных внешних опытов, всегда было неотразимо привлекательным для человеческого духа.

* Nichtenklidische Geometrie in der Physik Neue Rundschan, январь 1925 г., Berlin, S. 16—20. Испанский перевод Rev. Mat. Hisp.-Amer., 1926, ser. 2, I, 72—76.

Свидетельствами эмпирического происхождения геометрии остались в ее системе только основные понятия (точка, прямая, отрезок и т. п.) и так называемые аксиомы. Число этих логически неприводимых основных понятий и аксиом стремились свести к минимуму. Стремление извлечь всю геометрию из смутной области эмпирического незаметно привело к ошибочному заключению, которое можно уподобить превращению героев древности в богов. Мало-помалу привыкли к взгляду на основные понятия и аксиомы как на «очевидные», т. е. как на предметы и качества представления, присущие человеческому духу; согласно этому взгляду, основным понятиям геометрии соответствуют предметы интуиции, и отрицание той или иной аксиомы геометрии никоим образом не может быть осуществлено непротиворечиво. Но тогда самая возможность приложения этих основных понятий и аксиом к объектам действительности становится той самой задачей, из которой возникло кантовское понимание пространства.

Второй мотив для отказа геометрии от ее эмпирической основы дала физика. Согласно ставшему гораздо более утонченным взгляду физики на природу твердых тел и света, в природе не существует таких объектов, которые бы по своим свойствам точно соответствовали основным понятиям эвклидовой геометрии. Твердое тело не может считаться абсолютно неизменяемым, а луч света точно не воспроизводит ни прямую линию, ни даже вообще какой-либо образ одного измерения. По воззрению современной науки, геометрия, взятая в отдельности, не соответствует, строго говоря, вообще никаким опытам; она должна быть приложена к объяснению их совместно с механикой, оптикой и т. д. Так как, сверх того, геометрия должна предшествовать физике, поскольку законы последней не могут быть выражены без помощи геометрии, то геометрия и должна казаться наукой, логически предшествующей всякому опыту и всякой опытной науке.

Таковы причины, по которым не только математикам и философам, но и физикам начала XIX столетия основы эвклидовой геометрии казались абсолютно незыблемыми.

К этому можно прибавить, что в течение всего XIX столетия физику, если он не интересовался специально теорией познания, вопрос о соотношении геометрии и физики представлялся еще проще, схематичнее и категоричнее.

Точка зрения, которой он бессознательно придерживался, соответствовала двум положениям: понятия и основные теоремы эвклидовой геометрии очевидны; твердые тела со сделанными на них отметками, при соблюдении некоторых предосторожностей, реализуют геометрическое понятие отрезка, лучи света реализуют прямую линию.

Нужна была громадная работа, продолжавшаяся почти столетие, для того, чтобы это положение существенно изменилось. Замечательно, что эта работа началась с чисто математических исследований еще задолго до того, как рамки эвклидовой геометрии стали узкими для физики. В задачу математики входит обоснование геометрии при наименьшем числе аксиом. Среди аксиом Эвклида была одна, которая казалась математикам непосредственно менее очевидной, чем другие; в течение долгого времени они стремились свести ее к другим, т. е. доказать ее с их помощью. Это была так называемая аксиома о параллельных. Так как все старания доказать ее ни к чему не привели, должно было постепенно выработаться предположение, что это доказательство невозможно, т. е. что эта аксиома не сводится к другим. Это предположение могло бы считаться доказанным, если бы удалось построить логически непротиворечивую научную систему, отличающуюся от эвклидовой геометрии тем и только тем, что аксиома о параллельных заменена другой. Лобачевский, с одной стороны, и Бо́яи (отец и сын), с другой, независимо пришли к этой мысли и убедительно провели ее; в этом состоит их неоценимая заслуга.

После этого у математиков не могло не возникнуть убеждения, что наряду с эвклидовой геометрией существуют и другие, логически с нею вполне равноправные. Естественно возникал также вопрос, должна ли быть положена в основание физики именно эвклидова геометрия, а не какая-нибудь другая. Вопрос был поставлен в еще более определенной форме: какова геометрия физического мира — эвклидова или какая-нибудь другая?

Много спорили о том, имеет ли смысл этот вопрос. Для уяснения этого спора необходимо последовательно провести одну из следующих двух точек зрения. С одной стороны, можно принять, что геометрическое «тело» действительно реализуется физическими твердыми телами, если только, конечно, соблюдены известные предписания относительно температуры, механических напряжений и т. п. Такова точка зрения практического физика-экспериментатора. Тогда геометрический «отрезок» соответствует определенному объекту природы, и тем самым все предложения геометрии приобретают характер утверждений относительно реальных тел. Эта точка зрения была особенно ясно высказана Гельмгольцем; можно добавить, что без нее невозможно было бы практически подойти к теории относительности.

Но, с другой стороны, возможно и принципиальное отрицание существования предметов, соответствующих основным понятиям геометрии. Тогда одна геометрия сама по себе не может высказать никаких положений относительно реальных предметов; такие положения могут быть даны только вместе геометрией и физикой. Эта точка зрения, которая могла бы больше соответствовать систематическому изложению уже готовой физики, была особенно ясно высказана Пуанкаре. С этой точки зрения все содержание геометрии условно; решение вопроса о том, какая геометрия предпочтительнее, зависит от того, насколько «проста» та физика, которая в этом предположении окажется наиболее согласованной с опытом.

Мы примем первую точку зрения как наиболее отвечающую современному состоянию наших знаний. С этой точки зрения вопрос о применимости или неприменимости эвклидовой геометрии приобретает ясный смысл. Эвклидова геометрия, как и геометрия вообще, сохраняет характер математической науки, так как вывод ее теорем из аксиом по-прежнему остается чисто логической задачей, но в то же время она становится и физической наукой, так как ее аксиомы содержат в себе утверждения относительно объектов природы, справедливость которых может быть доказана только опытом.

Однако мы должны постоянно помнить, что та идеализация, которая состоит в утверждении, что в природе действительно существуют неизменяемые масштабы, может потом оказаться либо совсем неприменимой, либо оправдываемой только по отношению к некоторым определенным явлениям природы. Общая теория относительности уже доказала неприменимость этого понятия ко всем областям, размеры которых не могут считаться малыми с точки зрения астрономии. Быть может, теория квант будет в состоянии показать неприменимость этого понятия на расстояниях порядка размеров атомов. И то и другое считал возможным Риман.

Заслуга Римана в развитии идей о соотношении между геометрией и физикой двояка. Во-первых, он открыл сферическую (эллиптическую) геометрию, которая является антитезой гиперболической геометрии Лобачевского. Таким образом, он впервые указал на возможность геометрического пространства конечной протяженности. Эта идея была сразу воспринята и привела к постановке вопроса о конечности физического пространства. Во-вторых, Риман имел смелость создать геометрии несравненно более общие, чем геометрия Эвклида или неэвклидовы геометрии в более узком смысле. Он создал, таким образом, «риманову» геометрию, которая (как и неэвклидовы геометрии в более узком смысле) только в бесконечно малом совпадает с эвклидовой; эта геометрия является результатом применения гауссовой теории поверхностей к континууму произвольного числа измерений. Сообразно с этой более общей геометрией, метрические свойства пространства и различные возможности расположения бесконечно большого числа бесконечно малых неизменяемых тел в конечных областях не определяются исключительно аксиомами геометрии. Вместо того чтобы быть смущенным этим выводом и заключить о физической бессмысленности своей системы, Риман пришел к смелой мысли, что геометрические отношения тел могут быть обусловлены физическими причинами, т. е. силами.

Таким образом, путем чисто математических рассуждений он пришел к мысли о неотделимости геометрии от физики; эта мысль нашла свое фактическое осуществление семьдесят лет спустя в общей теории относительности, которая соединила в одно целое геометрию и теорию тяготения.

После того как геометрия Римана, благодаря введенному Леви-Чивитой понятию бесконечно малого параллельного переноса, получила более простую форму, Вейль и Эддингтон предложили дальнейшее обобщение теории Римана в надежде, что в расширенной системе понятий найдут свое место и законы электродинамики. Каковы бы ни были результаты этих стремлений, уже и теперь можно с большим основанием сказать: идеи, развившиеся из неэвклидовой геометрии, оказались в высшей степени плодотворными.

Эйнштейн прислал рукопись этой статьи на немецком языке проф. В. Ф. Кагану. С этого экземпляра и сделан перевод. На русском языке статья была опубликована в сборнике «Эйнштейн и развитие физико-математической мысли». Изд-во АН СССР, 1962.

О ФОРМАЛЬНОМ ОТНОШЕНИИ РИМАНОВСКОГО ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ К УРАВНЕНИЯМ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ*

Уравнения гравитационного поля обычно записываются в виде

$$R_{im} - \frac{1}{2} g_{im} R = -kT_{im}, \tag{1}$$

где T_{im} — тензор энергии-импульса для вещества и электромагнитного поля. Второй член в левой части этого уравнения физически обосновывается тем, что дивергенция левой части должна тождественно обращаться в нуль. Это следует из закона сохранения энергии для вещества. Кроме того, хорошо известно, что при варьировании интеграла от скалярной кривизны по $g_{\mu\nu}$ получается не тензор R_{im}, а тензор $R_{im} - \frac{1}{2} g_{im} R$. Наконец, Герглоц показал, что этот тензор имеет простой математический смысл: если (ξ^i) означает произвольное направление, то $R_{ik}\, \xi^i \xi^k$ будет скалярной кривизной трехмерного сечения четырехмерного континуума, ортогонального (ξ^i).

В то же время имеются серьезные основания полагать, что $R_{im} - \frac{1}{4} g_{im} R$ в действительности есть тензор, приобретающий фундаментальное значение при более глубоком изучении закона тяготения. Именно, при последовательном проведении основной идеи относительности пространственно-подобные сечения мира приходится предполагать конечными, что необходимо также для того, чтобы приписать миру конечную среднюю плотность вещества. Этим требованиям можно удовлетворить, вводя так называемый космологический член, так что вместо (1) получается уравнение

$$R_{im} - \frac{1}{2} g_{im} R - \frac{1}{2} g_{im} \lambda = -kT_{im}, \tag{2}$$

---

* *Über die formale Beziehung des Riemannschen Krümmungstensors zu den Feldglei chungen der Gravitation.* Math. Ann., 1926—7, 99—103.

которое после исключения λ принимает вид

$$R_{im} - \frac{1}{4} g_{im} R = -k\left(T_{im} - \frac{1}{4} g_{im} T\right).$$

Если предположить, что гравитационное и электромагнитное поля являются единственными реальными объектами физики, и ввести в уравнения (3) тензор Максвелла

$$T_{im} = \frac{1}{4} g_{im} \varphi_{\alpha\beta} \varphi^{\alpha\beta} - \varphi_{i\alpha} \varphi_m^{\alpha}, \tag{3}$$

то скаляр T тождественно обращается в нуль и уравнения поля принимают вид

$$R_{im} - \frac{1}{4} g_{im} R = -k T_{im}. \tag{2a}$$

Ясно, что в случае, когда в правой части имеется только тензор (3), уравнения (2а) следует предпочесть уравнениям (1). В самом деле, из последних вытекает уравнение $R = 0$, всеобщая применимость которого маловероятна. Кроме того, существование электронов со стационарно распределенным зарядом допускается уравнениями (2а), а не (1) [1].

Тот факт, что уравнениям (2а) пока уделялось мало внимания, объясняется двумя обстоятельствами. Во-первых, все наши стремления были направлены к тому, чтобы, следуя по предложенному Вейлем и Эддингтоном или аналогичному пути, прийти к теории, объединяющей гравитационное поле и электромагнитное поле в одну формальную схему; однако вследствие многочисленных неудач мы пришли к убеждению, что на этом пути нельзя продвинуться к истине. Во-вторых, с математической точки зрения выражение $R_{im} - \frac{1}{4} g_{im} R$ выглядит неестественно; это заблуждение мы надеемся рассеять последующими соображениями.

Как указал в интересной заметке Райнич [2], римановский тензор кривизны $R_{ik,lm}$ в четырехмерном континууме можно разложить на две части с разными свойствами симметрии. Каждому элементу поверхности (f^{ik}) в точке P соответствует ортогональный ему элемент $(\bar{f}^{ik})$. Разложим теперь тензор кривизны $R_{ik,lm}$ на два слагаемых по формуле

$$R_{ik,lm} = S_{ik,lm} + A_{ik,lm} \tag{4}$$

так, что слагаемое $S_{ik,lm}$ определяет для элементов поверхности (f^{ik}) и $(\overline{f^{ik}})$ одинаковую, а слагаемое $A_{ik,lm}$ — противоположную поверхностную кри-

[1] К сожалению, последние исследования показали, что этим способом нельзя прийти к удовлетворительной теории электронов.

[2] G. Y. Rainich. Nature, 1925, 115, 498.

визну. Это значит, что если для краткости положить

$$(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl}) f^{ik} f^{lm} = (g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl}) \overline{f^{ik}}\,\overline{f^{lm}} = 1, \tag{5а}$$

то для произвольно выбранного элемента поверхности должны выполняться уравнения

$$\begin{aligned} S_{ik,lm} f^{ik} f^{lm} &= S_{ik,lm} \overline{f^{ik}}\,\overline{f^{lm}}, \\ A_{ik,lm} f^{ik} f^{lm} &= - A_{ik,lm} \overline{f^{ik}}\,\overline{f^{lm}}. \end{aligned} \tag{5б}$$

Эти условия полностью определяют разложение.

Теперь оказывается, что «антисимметричная» часть $A_{ik,lm}$ тесно связана с тензором $R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R$ в том смысле, что равенство нулю одной из этих величин имеет следствием обращение в нуль другой, и наоборот. Именно

$$A_{ik,lm} = - \frac{1}{2} (g_{il}G_{km} + g_{km}G_{il} - g_{im}G_{kl} - g_{kl}G_{im}),$$

где для краткости введено обозначение:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R. \tag{7}$$

Для доказательства сначала введем тензор

$$\Delta_{ik}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \delta^{\alpha\beta\sigma\tau} g_{\sigma i} g_{\tau k} = \frac{1}{2} \sqrt{g}\, \delta_{ik\sigma\tau} g^{\sigma\alpha} g^{\tau\beta}, \tag{8}$$

где δ^{iklm} и δ_{iklm} равны $+1$ или -1 в зависимости от того, образуют $iklm$ четную или нечетную перестановку (1, 2, 3, 4). Тогда

$$\overline{f^{ik}} = \Delta_{\alpha\beta}^{ik} f^{\alpha\beta}, \tag{9}$$

поскольку легко показать, что при этом выполняется как уравнение (5а), так и уравнение

$$(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl}) f^{ik} \overline{f^{lm}} = 0. \tag{10}$$

Введем далее обозначение

$$R_{\overline{ik},\overline{lm}} = \Delta_{ik}^{\lambda\rho} \Delta_{lm}^{\sigma\tau} R_{\lambda\rho,\sigma\tau} \tag{11}$$

и аналогичные обозначения для тензоров $S_{ik,lm}$ и $A_{ik,lm}$. Умножая равенство (4) на $\overline{f^{ik}}\,\overline{f^{lm}}$, в силу (11) получаем

$$R_{\overline{ik},\overline{lm}} = S_{\overline{ik},\overline{lm}} + A_{\overline{ik},\overline{lm}}; \tag{12}$$

тогда соотношения (5б) на основании (9) и (11) приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} S_{ik,lm} &= S_{\overline{ik},\overline{lm}}, \\ A_{ik,lm} &= -A_{\overline{ik},\overline{lm}}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Из равенств (4), (12) и (13) получаем:

$$S_{ik,lm} = \frac{1}{2}\left(R_{ik,lm} + R_{\overline{ik},\overline{lm}}\right), \tag{14}$$

$$A_{ik,lm} = \frac{1}{2}\left(R_{ik,lm} - R_{\overline{ik},\overline{lm}}\right).$$

Для дальнейших вычислений удобно применять локальную систему координат, для которой $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ($\delta_{\mu\nu} = 1$, если $\mu = \nu$, и $\delta_{\mu\nu} = 0$, если $\mu \neq \nu$). Тогда вместо (8) получаем

$$\Delta_{ik}^{\alpha\beta} = \delta_{ik\alpha\beta}\,. \tag{8a}$$

В этой системе в соответствии с равенствами (11), (14) и (7) выполняются соотношения

$$R_{12,34} - R_{\overline{12},\overline{34}} = R_{12,34} - R_{34,12} = 0,$$

$$R_{12,23} - R_{\overline{12},\overline{23}} = R_{12,23} - R_{34,14} = R_{12,23} + R_{14,43} = R_{13} = G_{13},$$

$$R_{12,21} - R_{\overline{12},\overline{21}} = R_{\overline{12},\overline{21}} - R_{34,43} = R_{11} + R_{22} - \frac{1}{2} R = G_{11} + G_{22} \text{ и т.д.}$$

Остальные компоненты $S_{ik,lm}$ получаются отсюда перестановкой индексов. Соотношение (6) теперь оправдывается для выписанных компонент и выбранной локальной системы координат, следовательно, оно выполняется в общем случае.

Из равенства (6) легко заключить, что условия

$$A_{ik,lm} = 0$$

и

$$G_{im} = 0 = R_{im} - \frac{1}{4} g_{im} R,$$

равноценны. Таким образом, закон чисто гравитационного поля в смысле уравнений (2а) определяется условием, что образованная по Райничу антисимметричная часть римановского тензора кривизны обращается в нуль.

Но совершенно аналогичными рассуждениями можно получить и общую систему уравнений (2а) и (3). Из тензора электромагнитного поля (φ_{ik}) следует образовать тензор

$$E_{ik,lm} = \frac{2}{3}\left[\varphi_{ik}\varphi_{lm} + \frac{1}{2}\left(\varphi_{il}\varphi_{km} - \varphi_{im}\varphi_{kl}\right)\right], \tag{15}$$

обладающий такими же свойствами симметрии, как и римановский тензор кривизны. Далее следует образовать «электромагнитно дополненный тензор кривизны»

$$\overset{*}{R}_{ik,lm} = R_{ik,lm} + kE_{ik,lm} \tag{16}$$

и потребовать, чтобы антисимметричная часть $\overset{*}{A}_{ik,lm}$, образованная из $\overset{*}{R}_{ik.lm}$, по Райничу, обращалась в нуль:

$$\overset{*}{A}_{ik,lm} = \frac{1}{2}(\overset{*}{R}_{ik,lm} - \overset{*}{R}_{\overline{ik},\overline{lm}}) = 0. \tag{17}$$

Точно так же, как выше, доказывается, что это условие эквивалентно системе уравнений

$$\overset{*}{G}_{im} = \overset{*}{R}_{im} - \frac{1}{4} g_{im} R^{*} = 0, \tag{18}$$

совпадающей с уравнениями (2a) и (3).

Тем самым показано, что уравнения (2a) для гравитационного поля, подсказанные космологической проблемой и структурой электромагнитного тензора энергии, допускают простую математическую интерпретацию.

Поступила 9 января 1926 г.

82

НОВЫЕ ОПЫТЫ ПО ВЛИЯНИЮ ДВИЖЕНИЯ ЗЕМЛИ НА СКОРОСТЬ СВЕТА ОТНОСИТЕЛЬНО ЗЕМЛИ*

Хорошо известно, что интерференционный опыт Майкельсона (а также Майкельсона и Морли) послужил могучим стимулом для создания теории относительности. Отрицательный результат этого опыта показал, что относительно инерциальной системы координат свет распространяется в пустоте с постоянной скоростью, не зависящей от скорости движения этой системы. Точнее, этот опыт приводит нас к заключению, что время, необходимое свету, чтобы пройти прямой и обратный путь вдоль покоящегося относительно Земли твердого стержня, не зависит от пространственной ориентации последнего. С этим результатом связано само существование или опровержение теории относительности. Поэтому теоретики испытали сильное волнение, когда Дэйтон Миллер, профессор из Кливленда, на основе многолетних тщательных опытов, важнейшие из которых были проведены на Маунт-Вильсон, пришел к иному результату.

Именно, Миллер нашел, что время, за которое свет проходит прямой и обратный путь, зависит от пространственной ориентации этого пути по отношению к неподвижным звездам. При этом его экспериментальная установка сама по себе была более совершенной, чем у Майкельсона и Морли, так как длина сравниваемых световых путей составляла около 60 *м*. Для объяснения результатов своих опытов Миллер привлек выдвигавшееся еще до создания теории относительности предположение о том, что световой эфир частично увлекается Землей при ее поступательном движении, но что степень увлечения уменьшается с высотой над уровнем моря. Этим должен объясняться положительный результат опытов, выполненных в местности, расположенной на бо́льшей высоте над уровнем моря.

В последние месяцы опыты были повторены, независимо и с разной аппаратурой в двух местах, а именно: Р. Дж. Кеннеди в Калифорнийском технологическом институте и А. Пикаром и Э. Стахелем в Брюсселе.

---

* *Neue Experimente über den Einfluß der Erdbewegung and die Lichtgeschwindigkeit relativ zur Erde.* Forsch. und Fortschritte, 1927, 3, 36.

Еще до этого физикам стало ясно, что самая слабая сторона опытов Миллера заключалась в том, что при значительных размерах его аппаратуры невозможно добиться достаточного постоянства температуры воздуха, пронизываемого интерферирующими лучами света; локальные систематические разности температур в несколько сотых градуса могли вызвать наблюдаемый положительный эффект. Как Кеннеди, так и Пиккар устранили этот недостаток, применив аппараты значительно меньших размеров, чем Миллер, причем необходимая точность была достигнута улучшением оптических устройств, а постоянство температуры обеспечивалось особыми мерами. Кеннеди использовал световой путь длиной около 5 *м*. Оптические пути проходили внутри толстого металлического корпуса, заполненного гелием при атмосферном давлении. Опыт дал отрицательный результат с такой точностью, которая исключает существование эффекта, в четыре раза меньшего, чем обнаруженный Миллером.

В то время как опыты Кеннеди проводились в лаборатории, Пикар и Стахель с успехом осуществили смелый план, выполнив чрезвычайно тонкие эксперименты на воздушном шаре. Большая трудность, связанная с малым весом аппаратуры и малым объемом, окупалась тем преимуществом, что поворот аппарата легко производился медленным вращением всего воздушного шара с помощью двух небольших вентиляторов. Однако главная цель состояла в том, чтобы выполнить опыт на разных высотах и проверить таким образом зависимость от высоты. К сожалению, постоянство температуры, достигнутое в аппарате, было недостаточно хорошим, чтобы полностью исключить существование положительного эффекта такого порядка величины, о котором говорил Миллер. Однако оказалось, что наблюдаемый эффект не возрастал с высотой, как следовало бы ожидать в соответствии с результатами Миллера.

Несомненной заслугой проф. Миллера является то, что его опыты положили начало тщательной проверке важного эксперимента Майкельсона. Но результат Миллера опровергается опытами Кеннеди и Пикара.

К ТЕОРИИ СВЯЗИ ГРАВИТАЦИИ И ЭЛЕКТРИЧЕСТВА КАЛУЦЫ*

Со времени установления общей теории относительности теоретики непрерывно работают над тем, чтобы рассмотреть законы гравитации и электричества с общей точки зрения. Вейль и Эддингтон пытались достигнуть этого обобщением геометрии Римана, используя некоторое общее выражение для параллельного переноса вектора. Калуца, напротив, пошел принципиально другим путем [1]. Он оставил метрику Римана и воспользовался пятимерным континуумом, который он сводил до некоторой степени к четырехмерному континууму при помощи «условия цилиндричности». Я хочу сообщить здесь о точке зрения, которая существенна для теории Калуцы.

Мы исходим из пятимерного пространства (x^1, x^2, x^3, x^4, x^0). В нем существует метрика Римана с интервалом

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{1}$$

Это пространство является «цилиндрическим», т. е. существует такой бесконечно малый вектор смещения ξ_α, который переводит метрику в саму себя в следующем смысле.

Если сместить начало интервала (dx^μ) на (ξ^μ), а конец его на $(\xi^\mu)_{x+dx}$, то смещенный интервал, согласно формуле (1), имеет то же значение, что и несмещенный. Это означает, что уравнение

$$\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\xi^\beta + \gamma_{\beta\nu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x_\mu} + \gamma_{\beta\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x_\nu} = 0 \tag{2}$$

выполняется при соответствующем выборе ξ^β. Координатную систему можно выбрать таким образом, что лишь «0»-компонента ξ^β будет отлична

---

* *Zu Kaluzas Theorie des Zusammenhängs von Gravitation und Elektrizität.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1927, 23—25.

[1] Th. Kaluza. Zum Unitätsproblem der Physik. Berl. Berichte, 1921, 966.

от нуля и величина ξ^0 будет всюду одна и та же. Тогда уравнение (2) принимает вид [2]

$$\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_0} = 0. \tag{2a}$$

Примем далее, что пятимерное пространство обладает тем свойством, что бесконечно малый вектор смещения имеет всюду одну и ту же величину, т. е., что $\gamma^{\mu\nu}\,\xi^\mu\,\xi^\nu$ не зависит ни от одной переменной («усиленное условие цилиндричности»). При использовании предпочтительной для нас координатной системы это означает, что $\gamma_{00}\,\xi^0\,\xi^0$, а вместе с тем и γ_{00} постоянны. Поэтому мы можем без ограничения общности положить $\gamma_{00} = \pm 1$. Ради простоты рассмотрим здесь только случай положительного знака; отрицательный знак приводит к тем же результатам.

При использовании «предпочтительной» системы координат мы можем положить

$$\left.\begin{aligned} d\sigma^2 &= d\tau^2 + 2d\phi dx^0 + dx^{02},\\ d\tau^2 &= \gamma_{mn}dx^m dx^n,\\ d\phi &= \gamma_{0m}dx^m, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где суммирование по индексам m и n производится от 1 до 4.

Нетрудно видеть, что $d\tau^2$ и $d\phi$ инвариантны относительно преобразования координат x^1, x^2, x^3, x^4. Калуца назвал их соответственно метрическим и электрическим инвариантами в четырехмерном пространстве (R_4), что возможно благодаря уравнению (2a). Так, введя цилиндрическое пятимерное пространство (R_5), он пришел к формальному объединению обоих фундаментальных инвариантов.

Правда, это еще не накладывает никаких ограничений на законы природы по сравнению с обычным методом общей теории относительности, которая вводит $d\tau$ и $d\phi$ как самостоятельные инварианты. Калуца достигает некоторого ограничения тем, что допускает лишь такие уравнения, которые ковариантны относительно любого точечного преобразования в пространстве R_5 и зависят только от $\gamma_{\mu\nu}$. Калуца получил правильные в первом приближении уравнения гравитационного и электромагнитного полей, в которых он положил равным нулю римановский тензор кривизны в пространстве (R_5), свернутый по индексам один раз. Мы не будем вводить здесь эту далеко идущую гипотезу и ограничимся сначала получением некоторого следствия из существования метрики в пространстве (R_5) и из усиленного условия цилиндричности.

Наша координатная система допускает, помимо любого точечного

[2] Излагаемый здесь вывод на основе уравнения (2) применяется для того, чтобы проявился инвариантный характер «условия цилиндричности».

преобразования координат x^1, x^2, x^3, x^4 в пространстве R_4, еще и такое преобразование («x^0-преобразование»):

$$\left.\begin{aligned} x^m &= \bar{x}^m, \\ x^0 &= \bar{x}^0 + \Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где m означает числа 1, 2, 3, 4. Это значит, что в заданном пространстве R_5 еще можно произвольно выбрать о д н у гиперповерхность $x^0 = \mathrm{const}$ и при этом удовлетворить усиленному условию цилиндричности. Из соотношений (4) получаем

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{mn} &= \bar{\gamma}_{mn} + \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{x}_m}\bar{\gamma}_{0n} + \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{x}_n}\bar{\gamma}_{0m} + \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{x}_m}\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{x}_n}\bar{\gamma}_{00}, \\ \gamma_{0n} &= \bar{\gamma}_{0n} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_n}\bar{\gamma}_{00}, \\ \gamma_{00} &= \bar{\gamma}_{00}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Если вместо γ_{00} подставить 1 и ввести в пространстве R_4 тензор

$$g_{mn} = \gamma_{mn} - \gamma_{0m}\gamma_{0n}, \tag{6}$$

то вместо преобразований (5) получим:

$$\left.\begin{aligned} g_{mn} &= \bar{g}_{mn}, \\ \gamma_{0m} &= \bar{\gamma}_{0m} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_m}\,. \end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

Если инвариант Гамильтона в пространстве R_4 (x_1, x_2, x_3, x_4), образованный из «метрических коэффициентов» g_{mn}, «электрических потенциалов» γ_{0m} и их производных, должен быть инвариантным также и относительно x^0-преобразований (что необходимо при такой интерпретации формальной связи между гравитацией и электричеством), то этот инвариант должен содержать γ_{0m} только в комбинации

$$\phi_{mn} = \frac{\partial\gamma_{0m}}{\partial x_n} - \frac{\partial\gamma_{0n}}{\partial x_m}\,. \tag{7}$$

Это следует из второго соотношения (5а).

Идея Калуцы дает возможность глубже понять тот факт, что наряду с симметричным метрическим тензором $(g_{\mu\nu})$ имеет смысл лишь антисимметричный тензор электромагнитного поля (ϕ_{mn}) (не производимый ни от какого потенциала)[3].

---

[3] Заметим еще, как изменится наш результат, если не пользоваться усиленным условием цилиндричности. В этом случае в функцию Гамильтона (в четырехмерном пространстве) кроме симметричного и антисимметричного тензоров входит еще скаляр (γ_{00}).

К ТЕОРИИ СВЯЗИ ГРАВИТАЦИИ И ЭЛЕКТРИЧЕСТВА КАЛУЦЫ. II*

Изложим здесь результаты дальнейшего исследования, которые, как мне кажется, существенны для идей Калуцы. Отклонения от его рассуждений чисто формальны. Они связаны с тем, что Калуца для компонент метрического тензора в пространстве R_4 употреблял обозначение γ_{mn} вместо g_{mn}, так как он не обращал внимания на инвариантные свойства, вытекающие из условия цилиндричности [1].

§ 1. Интерпретация «усиленного» условия цилиндричности

Даже в том случае, когда в основу метрического пространства R_5 положено простое (неусиленное) условие цилиндричности, кроме инвариантности относительно произвольных преобразований координат (x_1, x_2, x_3, x_4) при постоянном x_0 требуется еще ковариантность соотношений (4) относительно x_0-преобразования. Таким образом, мы должны требовать ковариантности уравнений по отношению к преобразованиям (5), где γ_{00} рассматривается, однако, как функция координат x_1, ..., x_4. Из соотношений (5) вытекает инвариантность следующих величин:

$$\frac{\gamma_{mn}}{\gamma_{00}} - \frac{\gamma_{0m}}{\gamma_{00}} \frac{\gamma_{0n}}{\gamma_{00}}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\gamma_{0m}}{\gamma_{00}}\right) - \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\gamma_{0n}}{\gamma_{00}}\right), \quad \gamma_{00}.$$

Условие цилиндричности требует, чтобы функция Гамильтона содержала $\gamma_{\mu\nu}$ лишь в этих трех комбинациях.

---

* *Zu Kaluzas Theorie des Zusammenhanges von Gravitation und Elektrizität*. II. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1927, 26—30.

[1] Последующее изложение представляет собой прямое продолжение предыдущего сообщения (обозначения, нумерация формул).

Если теперь принять, что объективный смысл имеют не сами величины $\gamma_{\mu\nu}$, но только их отношения, или, другими словами, что в пространстве задана не метрика ($d\sigma^2$), а совокупность «световых конусов» ($d\sigma^2 = 0$), то функция Гамильтона будет зависеть лишь от первых двух из приведенных выше комбинаций. Это означает, что требование $\gamma_{00} = 1$ не приводит к сужению основных теоретических положений, и мы приходим к «усиленному условию цилиндричности».

§ 2. Геодезические в пространстве R_5

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} g_{mn} &= \gamma_{mn} - \gamma_{0m}\gamma_{0n}, \\ \phi_m &= \gamma_{0m}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Мы знаем теперь, что в ковариантные соотношения могут входить лишь функции g_{mn} и антисимметричные производные ϕ_m. Матрица $\gamma_{\mu\nu}$ так выражается через g_{mn} и ϕ_m:

$$\left.\begin{matrix} g_{11} + \phi_1\phi_1 & g_{12} + \phi_1\phi_2 \,.\,. & \phi_1 \\ g_{21} + \phi_2\phi_1 & g_{22} + \phi_2\phi_2 \,.\,. & \phi_2 \\ . & . & . \;.\; . \\ . & . & . \;.\; . \\ \phi_1 & \phi_2 & .\,.\; 1 \end{matrix}\right\}. \tag{9}$$

Отсюда следует, что $d\sigma^2$ принимает вид

$$(g_{mn} + \phi_m\phi_n)\, dx^m\, dx^n + 2\phi_m\, dx^m\, dx^0 + {dx^0}^2,$$

или (10)

$$d\sigma^2 = g_{mn}\, dx^m\, dx^n + (dx^0 + \phi_m\, dx^m)^2.$$

Пусть τ — произвольный параметр в пространстве R_5

и
$$W^2 = g_{mn}\frac{dx^m}{d\tau}\frac{dx^n}{d\tau} + \left(\frac{dx^0}{d\tau} + \phi_m\frac{dx^m}{d\tau}\right)^2; \tag{10a}$$

тогда геодезическая определяется обычным способом из уравнения

$$\delta\left\{\int W d\tau\right\} = 0, \tag{11}$$

т. е. из уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) = 0. \tag{11a}$$

При $\alpha = 0$ получаем

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{1}{2W}\cdot 2\,(\dot{x}^0 + \phi_m \dot{x}^m)\right] = 0.$$

Если теперь выбрать τ так, чтобы $W = \text{const}$, то это уравнение дает

$$\dot{x}_0 + \phi_m \dot{x}^m = A. \tag{12}$$

Вследствие равенства (10а), на геодезической

$$g_{mn}\frac{dx^m}{d\tau}\frac{dx^n}{d\tau} = W^2 - A^2 = \text{const}. \tag{13}$$

Эту константу можно положить равной единице; такое предположение не содержит никакого ограничения. Тогда $d\tau$ будет иметь смысл длины дуги в пространстве R_4.

Варьируя по координате x^s $(s \neq 0)$ и принимая во внимание вариации (12) и (13), приходим к уравнению

$$g_{ms}\ddot{x}^m + \begin{bmatrix} m\ n \\ s \end{bmatrix}\dot{x}^m\dot{x}^n + 2A\phi_{sn}\dot{x}^n = 0, \tag{14}$$

где

$$\phi_{sn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_s}{\partial x_n} - \frac{\partial\phi_n}{\partial x_s}\right). \tag{15}$$

Это уравнение в точности совпадает с рассматриваемым в общей теории относительности уравнением движения наэлектризованной точечной массы, в котором отношение ξ/μ заменено на $-2A$. Следует заметить, что A является инвариантом относительно x_0-преобразования.

§ 3. Функция Гамильтона для уравнений поля

Калуца перенес уравнения поля

$$R_{ik} = 0 \tag{16}$$

в пространство R_5 и показал, что таким путем можно получить уравнения гравитационного и электромагнитного полей, которые совпадают в первом приближении с уравнениями общей теории относительности, в сочетании с выведенными полуэмпирически уравнениями Максвелла. Мы покажем, что идея Калуцы приводит к этим уравнениям точно, а не в первом приближении.

Чтобы показать это, достаточно выразить функцию Гамильтона (в R_5)

$$\mathfrak{H} = \sqrt{\gamma}\,\gamma^{\mu\nu}\left(\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}\overline{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\beta} - \overline{\Gamma}^{\beta}_{\mu\alpha}\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\beta}\right) \tag{16a}$$

через функции g_{mn} и ϕ_m. Величины $\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}$ должны быть образованы в пространстве R_5; γ означает детерминант $\gamma_{\mu\nu}$. Из матрицы (9) прежде всего следует

$$\gamma = g. \tag{17}$$

Это получается, если последний столбец в (9) умножить на величину ϕ_a и вычесть из a-го столбца. Далее легко проверить, что $\gamma^{\mu\nu}$ можно представить в виде

$$\gamma^{\mu\nu} = \begin{vmatrix} g^{11}g^{12} & \cdot\ \cdot & -\phi^1 \\ g^{21}g^{22} & \cdot\ \cdot & -\phi^2 \\ \cdot\quad\cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot\quad\cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ -\phi^1-\phi^2 & \cdot\ \cdot & 1+\phi_a\phi^a \end{vmatrix}, \tag{9a}$$

причем индексы нужно понимать в связи с метрикой $g_{mn}dx^m dx^n$ в пространстве R_4.

Для получения величины $\mathfrak{H}$ понадобятся в дальнейшем следующие формулы (в которых латинские индексы будут пробегать значения от 1 до 4):

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\begin{bmatrix} m\ n \\ s \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} m\ n \\ s \end{bmatrix} + \phi_s\psi_{mn} - \phi_m\phi_{sn} + \phi_n\phi_{sm}, \\ &\overline{\begin{bmatrix} 0\ n \\ s \end{bmatrix}} = \phi_{sn}, \quad \overline{\begin{bmatrix} m\ n \\ 0 \end{bmatrix}} = \psi_{mn}, \\ &\overline{\begin{bmatrix} 0\ 0 \\ s \end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix} 0\ n \\ 0 \end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix} 0\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Здесь мы положили

$$\left.\begin{aligned} \psi_{mn} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_m}{\partial x_n} + \frac{\partial\phi_n}{\partial x_m}\right), \\ \phi_{mn} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_m}{\partial x_n} - \frac{\partial\phi_n}{\partial x_m}\right). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

При помощи формул (18) и (9а) $\overline{\Gamma}$ можно представить в виде:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\Gamma^s_{mn}} &= \Gamma^s_{mn} + \phi_m\phi^s_n + \phi_n\phi^s_m,\\
\overline{\Gamma^0_{mn}} &= -\phi_s\Gamma^s_{mn} - \phi^s(\phi_m\phi_{sn} + \phi_n\phi_{sm}),\\
\overline{\Gamma^s_{0n}} &= \phi^s_n,\\
\overline{\Gamma^{0n}_0} &= -\phi^s\phi_{sn},\\
\overline{\Gamma^s_{00}} &= \overline{\Gamma^{00}_0} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Теперь выделим в сумме (16а) члены с индексом 0. Это даст сначала уравнение

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{H}}{\sqrt{\gamma}} &= \gamma^{mn}(\Gamma^a_{mb}\Gamma^b_{na} + 2\overline{\Gamma^0_{mb}}\,\overline{\Gamma^b_{n0}} + \overline{\Gamma^0_{m0}}\,\overline{\Gamma^0_{n0}}) +\\
&+ 2\gamma^{m0}(\overline{\Gamma^a_{mb}}\,\overline{\Gamma^b_{0a}} + \overline{\Gamma^0_{mb}}\,\overline{\Gamma^b_{00}} + \overline{\Gamma^a_{m0}}\,\overline{\Gamma^0_{00}}) +\\
&+ \gamma^{00}(\overline{\Gamma^a_{0b}}\,\overline{\Gamma^b_{0a}} + 2\overline{\Gamma^0_{0b}}\,\Gamma^b_{00}) -\\
&- \overline{\Gamma^b_{ab}}(\gamma^{mn}\overline{\Gamma^a_{mn}} + 2\gamma^{m0}\overline{\Gamma^a_{m0}} + \gamma^{00}\overline{\Gamma^a_{00}}).
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Отсюда, учитывая соотношения (20) и (17), для $\mathfrak{H}$ получаем выражение

$$\mathfrak{H} = \sqrt{g}\,[g^{mn}(\Gamma^a_{mb}\Gamma^b_{na} - \Gamma^a_{mn}\Gamma^b_{ab}) - \phi^a_b\phi^b_a], \tag{22}$$

которое совпадает с обычным выражением для функции Гамильтона гравитационного и электромагнитного полей, за исключением знака при втором члене. Относительно этого знака нужно заметить, что он появился ввиду того, что мы произвольно приняли $\gamma_{00} = +1$, в то время как можно было положить $\gamma_{00} = -1$; тогда знак второго члена получился бы положительным. Такой результат может быть достигнут также путем изменения знака у g_{mn}; это означает, что вместо положительного знака квадрата временно-подобного отрезка принимается отрицательный. Оба высказывания можно объединить в одно: чтобы уравнения единого поля приняли обычную форму, «0»-направление нужно рассматривать как п р о с т р а н с т в е н н о-п о д о б н о е.

В заключение можно сказать, что идея Калуцы дает рациональное обоснование электромагнитных уравнений Максвелла в рамках общей теории относительности и объединяет их в одно формальное целое с уравнениями гравитации.

Замечание к обоим предыдущим сообщениям при корректуре

Г. Мандель сообщил мне, что изложенные здесь результаты не новы и содержатся в работах Клейна [Z. Phys., 1926, 37, 12, 895]. Ср. также работу В. А. Фока [Z. Phys., 1926, 39, 226].

Поступила 14 марта 1927 г.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ*

(Совместно с Я. Громмером)

Введение

Если рассматривать теорию гравитации Ньютона как теорию поля, то всю теорию можно разбить на две логически независимые части, а именно: во-первых, на уравнение Пуассона для поля (возможно, дополненное временны́м членом) и, во-вторых, закон движения материальной точки. Уравнение Пуассона определяет поле при заданном движении материи, уравнение же движения Ньютона — движение материи при воздействии заданного поля.

Аналогично, электродинамика Максвелла — Лоренца базируется на двух логически независимых друг от друга основных положениях, именно: во-первых, на уравнениях поля Максвелла — Лоренца, определяющих поле по движению электрически заряженной материи, и, во-вторых, на законе движения электрона под действием силы Лоренца со стороны электромагнитного поля.

На примере частного случая двух покоящихся электронов легко видеть, что оба закона теории Максвелла — Лоренца действительно не зависят друг от друга. Поле с электростатическим потенциалом

$$\phi = \frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2}$$

удовлетворяет уравнениям поля. Одного этого недостаточно для того, чтобы прийти к заключению, что оба электрона не могут находиться в состоянии покоя (но должны двигаться под влиянием их взаимодействия).

Тот факт, что из уравнений электромагнитного поля Максвелла — Лоренца ничего нельзя сказать о движении электронов, очень просто следует из линейности уравнений. Именно, произвольно движущийся электрон E_1

* *Allgemeine Relativitätstheorie und Bewegungsgesetz.* (Mit J. Grommer). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1927, 2—13.

порождает поле (f_1), определяемое уравнениями поля. Для какого-либо другого, движущегося электрона E_2, также рассматриваемого отдельно, уравнения поля определяют соответственно при произвольно заданном движении электрона поле (f_2). Если же оба рассматриваемые электрона существуют одновременно и на конечном расстоянии друг от друга и совершают прежние движения, то они определяют поле ($f_1 + f_2$), которое также удовлетворяет уравнениям поля. Последнее следует просто из линейности уравнений поля. Однако отсюда вытекает, что закон движения логически независим от уравнений поля.

Этот факт разнородности основ электродинамики особенно неприятен потому, что движение электрических частиц описывается дифференциальными уравнениями в полных производных, а поле определяется дифференциальными уравнениями в частных производных. Ми сделал попытку устранить эту нестройность теории тем, что пытался разработать континуальную теорию электрических частиц. В этой теории компоненты плотности тока рассматриваются как непрерывные функции, которые связаны с «полем» подобно компонентам самого электромагнитного поля, и благодаря дополнительным уравнениям поля такое поведение плотности тока полностью причинно определено. Хотя эта попытка пока оказалась безуспешной, она продолжает оставаться ведущей программой даже вне чисто электродинамической области (Вейль, Эддингтон.) Основная идея может быть сформулирована следующим образом. Вся физическая реальность описывается свободным от сингулярностей полем; последнее описывает не только «пустое пространство», но также и материальные частицы, и закономерности этой реальности полностью определяются дифференциальными уравнениями в частных производных. Таким путем Ми и пытался преодолеть описанный выше дуализм.

Как же выглядит общая теория относительности, если ее рассматривать с этой точки зрения? Имеется ли и здесь дуализм: «закон поля — закон движения»? Фактически дело обстоит не так просто. Мы отдельно обсудим различные способы рассмотрения.

Первый способ рассмотрения идентичен ньютоновскому подходу. Применительно к учению о гравитации он гласит.

1. Закон поля в пустом пространстве ($\mathfrak{R}_i^k = 0$).

2. Закон движения материальной точки (уравнение геодезической).

Второй способ рассмотрения дополняет закон поля введением тензора энергии материи (и электромагнитного поля) $\mathfrak{T}_i^k$:

$$(\mathfrak{R}_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k \mathfrak{R}) + \mathfrak{T}_i^k = 0.$$

Если предположить, что сингулярности существовать не могут, то в этом уравнении заложена теория, аналогичная теории Ми. Теория требует добавления, которое не может быть получено только на основе принципа относительности: тензор $\mathfrak{T}_i^k$ должен выражаться через какие-либо (непрерывные) величины поля, а поведение последних устанавливается определенными дифференциальными уравнениями. Только тогда была бы предложена готовая теория. Однако даже без упомянутого дополнения тензор $\mathfrak{T}_i^k$ не может выбираться произвольно. Так дело обстоит потому, что (ковариантная) дивергенция от выражения $\mathfrak{R}_i^k - {}^1/_2\,\delta_i^k\,\mathfrak{R}$ тождественно равна нулю. Следовательно, тензор $\mathfrak{T}_i^k$ должен удовлетворять условию, чтобы дивергенция этого тензора равнялась нулю. Если предположить, что материя расположена вдоль узких «мировых трубок», то путем элементарных рассуждений отсюда следует, что оси этих «мировых трубок» являются геодезическими линиями (в отсутствие электромагнитных полей). Это означает, что закон движения является следствием закона поля.

Так обстояло бы дело, если бы общая теория относительности уже преодолела успешно этот досадный дуализм. Это было бы так, если бы нам уже удалось представить материю в виде непрерывного поля или если бы мы по крайней мере были убеждены, что это вопрос нескольких дней. Однако об этом не может быть и речи. Все попытки последних лет объяснить элементарные частицы материи посредством непрерывного поля не удались. Подозрение, что это вообще неправильный путь к пониманию частиц материи, после очень многих тщетных попыток стало у нас настолько сильным, что нам не хочется здесь об этом говорить.

Таким образом, мы встаем на путь объяснения элементарных частиц как особых точек или сингулярных мировых линий. Этот путь подсказывается еще и тем, что как уравнения чистого гравитационного поля, так и уравнения, дополненные максвелловским электромагнитным полем ($\mathfrak{T}_i^k$ — тензор энергии Максвелла), имеют простое центрально-симметричное решение с сингулярностью. Итак, мы пришли к третьему методу рассмотрения, при котором, кроме гравитационного и электромагнитного полей, отсутствуют другие полевые переменные (отвлекаясь, возможно, от «космологического члена»), место которых, однако, занимают особые мировые линии. Если бы при этом методе рассмотрения нужно было устанавливать особые уравнения движения для сингулярностей (особенностей), логически независимые от уравнений поля, как это надо делать в теории Максвелла — Лоренца, то этот путь был бы мало привлекателен.

Однако оказывается правдоподобным, что закон движения особенностей полностью определяется уравнениями поля и характером особенностей; если бы этого не было, то были бы необходимы дополнительные предположения. Это и составляет предмет предлагаемого исследования.

Возможность того, что закон движения особенностей может содержаться в уравнениях поля, мы обдумывали уже много раньше. Однако казался непреодолимым и отпугивал следующий довод. Закон гравитационного поля может быть с большой точностью для реальных случаев апроксимирован линейным законом. Линейный же закон поля, аналогично электродинамическому, допускает произвольно движущиеся особенности. Кажется само собой разумеющимся, что от такого приближенного решения методом последовательных приближений можно было бы перейти к очень мало отличающемуся от него строгому решению. Если бы это было так, то могли бы существовать строгие уравнения соответствующего поля при произвольно заданном движении особенностей, т. е. закон движения особенностей не содержался бы в уравнениях поля. Невозможность этого следует из исследований аксиально-симметричных статических гравитационных полей, за что мы благодарны Вейлю, Леви-Чивите и Баху [1]. Это должно быть показано прежде всего; только после этого проблема может обсуждаться вообще. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением чисто гравитационного поля, хотя включение электромагнитного поля не вносит особых трудностей.

§ 1. Особенность поля (аксиально-симметричное статическое поле)

Согласно Вейлю и Леви-Чивите, при введении «канонических цилиндрических координат» линейный элемент ds^2 в аксиально-симметричном статическом поле может быть представлен в виде

$$ds^2 = f^2\,dt^2 - d\sigma^2,\quad f^2\,d\sigma^2 = r^2\,d\vartheta^2 + e^{2\gamma}(dr^2 + dz^2), \tag{1}$$

причем f и γ зависят только от r и z, так же как и функция ψ, связанная с f соотношением

$$f = e^{\psi}. \tag{2}$$

При этом ψ удовлетворяет уравнению Пуассона для потенциала в цилиндрических координатах:

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\psi_z)}{\partial z} + \frac{\partial(r\psi_r)}{\partial r}\right) = 0, \tag{3}$$

где индекс у ψ означает производную по z или по r. Если функция ψ из-

[1] H. Weyl. Ann. Phys., 1918, 54, 117—145; Ann. Phys., 1919, 59, 185—188. Levi-Civita, ds^2 einsteiniani in campi newtoniani, VIII. Note, Red. Acc. dei Lincei. 1919. R. Bach. Math. Z., 1922, 13, H. 1—2.

вестна, то γ определяется уравнением

$$d\gamma = 2r\psi_z\psi_r\, dz + r\,(\psi_r^2 - \psi_z^2)\, dr, \tag{4}$$

причем вследствие уравнения (3) $d\gamma$ всегда является полным дифференциалом.

Чтобы поле было регулярным в некоторой точке вне оси z, достаточно потребовать регулярности ψ. Чтобы метрическое поле было регулярно также и на оси z, должно выполняться, кроме того, условие $\gamma = 0$ на оси z. Если бы это было не так, то для бесконечно малой окружности, лежащей в перпендикулярной к оси плоскости, с центром на оси, отношение длины окружности к длине диаметра было бы отлично от π, что означало бы сингулярность метрики. Это легко заключить из соотношений (1).

Рассмотрим прежде всего решение

$$\psi = -\frac{m}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \tag{5}$$

удовлетворяющее уравнению (3). Хотя это решение не строго центрально-симметрично, как показал Вейль, оно тем ближе к центрально-симметричному, чем меньше m. Подстановка в уравнение (4) дает

$$\gamma = -\frac{m^2}{2}\frac{r^2}{(r^2 + z^2)^2}, \tag{6}$$

т. е. $\gamma = 0$ как на положительной, так и на отрицательной оси z, как и должно быть. На бесконечности — метрика эвклидова.

Рассмотрим теперь тот случай, когда кроме поля, которое создается рассмотренной особенностью, имеется еще «внешнее» поле. Мы выразим это, полагая

$$\psi = -\frac{m}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \bar{\psi}. \tag{5a}$$

Пусть $\bar{\psi}$, также являющаяся функцией только r и z, удовлетворяет уравнению (3) и регулярна в окрестности $z = r = 0$. Тогда из соображений аксиальной симметрии мы можем записать

$$\psi = \alpha_0 + \alpha_1 z + G, \tag{7}$$

где в G формально объединены члены вторых и высших степеней по r и z. Из уравнения (4), определяющего γ, следует, что γ постоянна вдоль оси z, пока мы находимся с о д н о й стороны особенности, лежащей при $z = 0$. Поэтому на отрицательной оси z мы можем положить $\gamma = 0$, как это требуется согласно сказанному выше. Чтобы решение было регулярным всюду, кроме точки $r = z = 0$, γ должно равняться нулю также и на положительной оси z. Это выполняется тогда и только тогда, если интеграл $\int d\gamma$, взятый по указанной на рис. 1 бесконечно малой полуокружности K ($r^2+z^2=$ const), обращается в нуль. Вычисление приводит к условию [2]

$$\alpha_1 = 0, \tag{8}$$

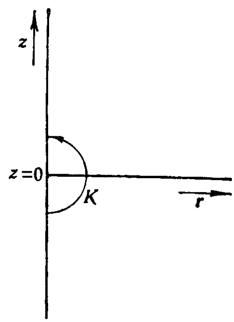


Рис. 1.

в то время как на G никаких ограничений не накладывается. Для того, чтобы при наличии внешнего поля в окрестности особой точки метрика оставалась регулярной, сама напряженность внешнего поля должна в особой точке равняться нулю. В этом смысле условие равновесия содержится в уравнениях поля. Уже на основании этого результата появляется убеждение, что вообще весь закон движения особенностей содержится в уравнениях поля. В более общем виде это будет показано ниже.

§ 2. Закон площадей, эквивалентный уравнениям поля

Общая идея, лежащая в основе дальнейших рассуждений и вычислений, заключается в следующем. Известно, что уравнения гравитационного поля соответствуют линейным дифференциальным уравнениям, решения которых очень мало отличаются от решений строгих уравнений фактически во всех существенных случаях. Однако, с другой стороны, мы видели, что не все решения приближенных уравнений соответствуют строгим решениям. Согласно приближенным уравнениям, существует, например, решение, соответствующее покоящейся точечной массе в однородном гравитационном поле; согласно строгим уравнениям, такого решения нет, по крайней мере в случае, если мы потребуем, чтобы отсутствовали особенности в метрическом поле вне точечной массы. Поэтому мы должны по дополнительным условиям найти, какие решения будут соответствовать приближенным уравнениям. Эти условия, являющиеся следствием строгих уравнений поля, должны относиться к полю в непосредственной окрестности особой мировой линии.

Прежде всего нам понадобится закон площадей, подобный установленному Гильбертом и Клейном.

---

[2] Значение γ на верхней полуплоскости равно $4\alpha_1 m$. Во всех случаях m и α_1 значительно меньше единицы. Если назвать их величинами первого «порядка», то величины, в общем случае характеризующие нарушение регулярности метрики, являются величинами второго порядка.

Будем исходить из функции Гамильтона

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{\mu\nu}\left(-\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\right) = \mathfrak{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{9}$$

и выведем из нее уравнения поля, варьируя независимо по $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$. Полученные таким образом уравнения поля имеют вид

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\mathfrak{g}^{\mu\nu}} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x_{\tau}}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\tau}}\right) = 0, \tag{11}$$

где $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\tau}$ означает производную $\dfrac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\tau}}$. Если уравнение (10) умножить на $\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, а уравнение (11) — на $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, то после простого преобразования получается уравнение

$$\delta\mathfrak{H} - \frac{\partial}{\partial x_{\tau}}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\tau}}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right) = 0. \tag{12}$$

Это равенство справедливо при произвольных вариациях $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, в том числе и при тех, которые могут быть получены только бесконечно малым преобразованием системы координат (вариация преобразования). При такой вариации $\delta\mathfrak{H} = 0$, поскольку $\mathfrak{H}/\sqrt{-g}$ представляет инвариант и поскольку, согласно уравнениям поля, $\mathfrak{H}$ всюду исчезает. Далее, следует подставить

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = -\Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\xi^{\sigma}_{,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\xi^{\sigma}_{,\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\xi^{\alpha}_{,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\sigma}\xi^{\sigma} - \xi^{\alpha}_{,\mu\nu}, \tag{13}$$

где ξ^{σ} — бесконечно малый вектор (с производными $\xi^{\tau}_{,\alpha}$ и т. д.). Согласно формуле (9), имеем

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\tau}} = -\mathfrak{g}^{\mu\nu}\delta^{\tau}_{\alpha} + \frac{1}{2}(\mathfrak{g}^{\mu\tau}\delta^{\nu}_{\alpha} + \mathfrak{g}^{\nu\tau}\delta^{\mu}_{\alpha}). \tag{14}$$

Принимая во внимание равенства (13) и (14), из (12) получаем уравнение

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left[\begin{array}{l}(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\tau} - \mathfrak{g}^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu,\tau})\xi^{\tau} - \\ -\mathfrak{g}^{\mu\nu}(-\Gamma^{\alpha}_{\tau\nu}\xi^{\tau}_{,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\tau}\xi^{\tau}_{,\nu} + \Gamma^{\tau}_{\mu\nu}\xi^{\alpha}_{,\tau} - \xi^{\alpha}_{,\mu\nu}) + \\ + \mathfrak{g}^{\mu\alpha}(-\Gamma^{\nu}_{\tau\nu}\xi^{\tau}_{,\mu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\tau}\xi^{\tau}_{,\nu} + \Gamma^{\tau}_{\mu\nu}\xi^{\nu}_{,\tau} - \xi^{\nu}_{,\mu\nu})\end{array}\right]. \tag{15}$$

Это уравнение, эквивалентное уравнениям поля и представляющее собой основу наших последующих рассуждений, мы несколько преобразуем по причинам, которые выяснятся позднее. Выразим первый из трех членов в скобках в уравнении (15) через $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha}$ и $\Gamma^{\nu}_{\mu\nu,\alpha}$. Затем эти производные от Γ при помощи соотношения $\mathfrak{H} = 0$, следующего из уравнения (9) и (10), выразим через сами величины Γ. Тогда первая из трех частей уравнения (15) после простого преобразования принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\xi^\sigma\left\{\left(-\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{,\sigma}+\Gamma^\nu_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\mu\alpha}_{,\sigma}\right)-\delta^\alpha_\sigma\left(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\tau_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\tau}-\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\tau_{\rho\tau}\right)\right\}+\right.$$

$$\left.+\xi^\alpha_{,\sigma}\left(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}-\mathfrak{g}^{\mu\sigma}\Gamma^\nu_{\mu\nu}\right)-\xi^\sigma_{,\sigma}\left(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}-\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\mu\nu}\right)\right]. \quad (16)$$

Цель этого преобразования будет ясна позднее.

Полученный результат запишем кратко в следующей форме:

$$\frac{\partial\mathfrak{A}^\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (15а)$$

$$\mathfrak{A}^\alpha = \mathfrak{t}^\alpha_\sigma\xi^\sigma + \mathfrak{B}^\alpha, \quad (15б)$$

где

$$\mathfrak{t}^\alpha_\sigma = \left(-\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\mu\nu}_\sigma+\Gamma^\nu_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\mu\alpha}_\sigma\right)-\delta^\alpha_\sigma\left(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\tau_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\tau}-\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\tau_{\rho\tau}\right) \quad (15в)$$

и $\mathfrak{B}^\alpha$ — линейная однородная функция первых и вторых производных по координатам, получаемая из (15) и (16). Величина $\mathfrak{t}^\alpha_\sigma$ называется «псевдотензором энергии» гравитационного поля. Закон сохранения энергии гравитационного поля получается из уравнения (15а), если ξ^α считать постоянной.

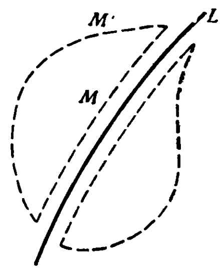


Рис. 2.

Интегрирование уравнения (15а) по свободной от особенностей области дает закон площадей. Поверхностный интеграл от $\mathfrak{A}^\alpha$ по охватывающей эту область (трехмерной) гиперповерхности обращается в нуль, поскольку вспомогательный вектор (ξ^α) может выбираться произвольно (с учетом условий непрерывности). Таким образом, можно сделать так, чтобы выражение $\mathfrak{A}^\alpha$ отличалось от нуля только на некоторой произвольно выбранной части поверхности; с этим в первую очередь связано значение закона для исследования поля в непосредственной близости особой линии.

Пусть мы имеем особую линию L (см. рис. 2). Будем представлять ее в виде конечного отрезка, охваченного бесконечно узкой «оболочкой» M и оболочкой конечной ширины M', которые соединяются по краям таким образом, что вместе они образуют оболочку двусвязного объема, по которому мы интегрируем (15а). Вектор ξ^σ мы выберем так, чтобы он вместе со своими производными не обращался на поверхности в нуль только на очень малых расстояниях от L. Тогда интеграл от $\mathfrak{A}^\alpha$, взятый по M', не обращается в нуль только на той части M', которая подходит к M. При каждом таком выборе ξ^σ можно сделать некоторые заключения о поле, непосредственно окружающем L, т. е. заключения о движении материальных точек.

§ 3. Следствия из интегрального закона

Простейшее следствие, которое можно получить из уравнения (15а), касается равновесия особых точек в стационарном гравитационном поле. Прежде всего за ось x_4 выберем сингулярную линию, для которой первая и вторая производные ξ-вектора обращаются в нуль на внутренней оболочке. Тогда легко можно сделать так, что интегрирование по конечным участкам внешней оболочки дает нуль, поскольку вклады обеих ее концов одинаковы и имеют разные знаки. Интеграл по внутренней оболочке равен нулю сам по себе, а поэтому обращается в нуль и интеграл по пространственно-подобному сечению $x_4 = \mathrm{const}$. Если обозначить через $\mathfrak{t}_\sigma^\alpha$ выражение, стоящее в (16) в фигурных скобках, то трехмерный интеграл

$$\int (\mathfrak{t}_\sigma^1 \, ds^{23} + \mathfrak{t}_\sigma^2 \, ds^{31} + \mathfrak{t}_\sigma^3 \, ds^{12}), \tag{17}$$

взятый по сечению оболочки M, равен нулю для любого σ. Это и есть то самое условие равновесия, которое также получается, если заменить особые точки областью непрерывного потока материи-энергии, как до сих пор давали исследования в общей теории относительности. Таким образом, обычное условие равновесия материальной точки в гравитационном поле остается неизменным при замене материальной точки особенностью. Легко показать, что при добавлении электромагнитных членов это также остается в силе для точечной массы, обладающей зарядом и находящейся под действием гравитационного и электромагнитного полей. Тогда к $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ в выражении (17) добавляются просто компоненты электромагнитного тензора энергии.

Чтобы найти действующую на особую точку силу, выраженную через массу и напряженность внешнего поля, нужно провести некоторые рассуждения, имеющие значение для всей проблемы. Строгие решения уравнений гравитационного поля с нашим сегодняшним аппаратом получить трудно; решения же в первом приближении, напротив, получить легко, поскольку соответствующие дифференциальные уравнения линейны. В этом приближении мы полагаем

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{18}$$

причем $\gamma_{\mu\nu}$ мало по сравнению с единицей, так что квадратами и произведениями $\gamma_{\mu\nu}$ (и ее производных) можно пренебречь; мы назовем $\gamma_{\mu\nu}$ малой величиной первого порядка. Теперь мы знаем, что далеко не все решения таких линейных дифференциальных уравнений соответствуют строгим решениям. Например, существует решение линейного уравнения, которое соответствует покоящейся точечной особенности в однородном гравитационном поле, в то время как строгое решение не имеет такого характера, поскольку нарушаются только что полученные из строгих уравнений условия равновесия. При таком положении вещей возникает вопрос: каким дополнительным условиям должны удовлетворять приближенные решения, чтобы они соответствовали строгому решению?

Во всяком случае мы должны потребовать, чтобы в эти условия не входили второе и более высокие приближения для величин $\gamma_{\mu\nu}$. В этом и заключается причина того, почему нужно было провести преобразование правой части уравнения (15) для получения пригодного условия равновесия. Именно, так как $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ и $\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\sigma}$ являются величинами первого порядка малости, то $\mathfrak{t}^{\alpha}_{\sigma}$ — величина второго порядка. Если в выражении для $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ учесть члены второго порядка, то в $\mathfrak{t}^{\alpha}_{\sigma}$ изменились бы члены третьего порядка, которыми можно пренебречь. Поэтому, несмотря на то, что уравнение (15) и выражение (16) относятся к величинам второго порядка, можно в частном случае равновесия пренебречь величинами второго порядка в $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$. Тогда для $\gamma_{\mu\nu}$ в соотношении (18) можно подставить решение (10) уравнений поля в линейном приближении. В рамках этого приближения поле ($\gamma_{\mu\nu}$) в окрестности особенности можно представить в виде аддитивных «внутренней» $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ и «внешней» $\gamma_{\mu\nu}$ частей. В особой точке $\gamma_{\mu\nu}$ регулярна. Для $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ можно подставить статическое решение, которое мы запишем в форме:

$$\bar{\gamma}_{11} = \bar{\gamma}_{22} = \bar{\gamma}_{33} = -\bar{\gamma}_{44} = -\frac{2m}{r}\left(= -\frac{2m}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right), \tag{19}$$

$$\bar{\gamma}_{\sigma\tau} = 0 \qquad (\text{для } \sigma \neq \tau).$$

При вычислении интеграла (17) следует далее учесть, что вклад могут давать только произведения величин внутреннего поля на величины внешнего поля. Именно относящиеся только к внутреннему полю члены второй степени должны обращаться в нуль из соображений симметрии; члены же, относящиеся только к внешнему полю, не дают вклада в интеграл вследствие того, что поверхность интегрирования мала.

Так как мы уже выбрали квазиэвклидовы координаты, то целесообразно взять в качестве поверхности интегрирования сферу ($r = \text{const}$); тогда интеграл (17) принимает вид

$$\int\left(\mathfrak{t}^1_{\sigma}\frac{x_1}{r} + \mathfrak{t}^2_{\sigma}\frac{x_2}{r} + \mathfrak{t}^3_{\sigma}\frac{x_3}{r}\right)dS. \tag{17a}$$

Вычисление этого интеграла дает $-8\pi m \frac{\partial \overline{\overline{\gamma}}_{44}}{\partial x_\sigma}$. Таким образом приходим к условию равновесия особой точки

$$\frac{\partial \overline{\overline{\gamma}}_{44}}{\partial x_\sigma} = 0. \tag{20}$$

Нетрудно показать, что уравнение геодезической в случае равновесия в стационарном поле в рассматриваемом приближении приводит к тому же самому условию.

Рассмотрим теперь случай, когда особая точка находится в нестационарном поле. Уравнение (15а), как и соответствующий интегральный закон, справедливо и для этого случая. Будем считать особую точку покоящейся, так что ось x_4 опять будет особенностью в четырехмерном пространстве. Далее выберем вектор ξ^α таким образом, чтобы он отличался от нуля только на небольшом участке оболочки M, а на M' всюду был равен нулю. Пусть далее в окрестности оси x_4 вектор ξ^α является постоянным. Так как ξ^α должен обращаться в нуль на пределах интегрирования по времени, то мы уже не можем выбрать его постоянным. Следовательно, $\mathfrak{B}^\alpha$ в соотношении (15б) не исчезает. С этим связаны своеобразные трудности. В то время как второе приближение для $g_{\mu\nu}$ не влияет на $\mathfrak{t}_\sigma^\alpha$, если ограничиваться в $\mathfrak{t}_\sigma^\alpha$ членами второго порядка, то для $\mathfrak{B}^\alpha$ это не так. Например, чтобы получить с учетом величин второго порядка член $\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma_{\tau\nu}^\alpha\ \xi_{,\mu}^\tau$, нужно знать $\Gamma_{\tau\nu}^\alpha$ вплоть до членов второго порядка, т. е. знать точно члены второго порядка для самого $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, поскольку $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ содержит в качестве составной части нулевой порядок ($\delta_{\mu\tau}$). Следовательно, нельзя ограничиться решениями уравнений поля в линейном приближении.

Эту трудность, по-видимому, можно преодолеть следующим образом. Положим

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \overline{\gamma}_{\mu\nu} + \overline{\overline{\gamma}}_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}.$$

При этом $\overline{\gamma}_{\mu\nu}$ снова определяется равенствами (19), а $\overline{\overline{\gamma}}_{\mu\nu}$ относится к внешнему полю и постоянна в окрестности особой точки. Пусть $\varepsilon_{\mu\nu}$ — величина второго порядка, пропорциональная «массе» и внешнему полю. Тогда оказывается, что уравнения гравитационного поля при пренебрежении членами, пропорциональными m^2, и квадратичными членами напряженности внешнего поля ($\overline{\overline{\gamma}}_{\mu\nu}$), могут быть решены во втором приближении. При этом зависимость $\varepsilon_{\mu\nu}$ от r отлична от r^{-1} (как и для $\overline{\gamma}_{\mu\nu}$) и имеет характер r^0. Отсюда следует, что член второго порядка $\varepsilon_{\mu\nu}$ не влияет на интеграл от $\mathfrak{B}^\alpha$, взятый по бесконечно узкой оболочке M.

Далее легко показать, что интеграл от $\mathfrak{B}^{\alpha}$, взятый по оболочке M, равен нулю при соответствующем выборе координат. Последнее очевидно, поскольку $\bar{\bar{\gamma}}_{\mu\nu}$ обращается в нуль на особой линии — оси x_4 (оси x_1, x_2, x_3 перпендикулярны особой линии, причем масштабы на четырех осях не одинаковы). Предположим далее, что именно для такой (неискривленной) системы координат особенность имеет центрально-симметричный характер, т. е. поле $\bar{\gamma}$ следует вычислять из равенств (19). Эта гипотеза, собственно говоря, не обязательна. Таким путем мы лишь упрощаем расчет, а гипотеза оправдывается тем, что она приводит к обращению в нуль интеграла от $\mathfrak{B}^{\alpha}$ по M при любом выборе ξ^{α}.

Ход расчета можно показать на первом члене выражения для $\mathfrak{B}^{\alpha}$:

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\tau\nu}\xi^{\tau}_{,\,\mu}.$$

Функции $g_{\mu\nu}$ и $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ (кроме членов, остающихся конечными) ведут себя в окрестности особенности как r^{-1}, величины Γ — как r^{-2}. Только пропорциональная r^{-2} часть величины Γ может давать вклад в наш интеграл. Далее, поскольку нас не интересуют члены, пропорциональные m^2 и квадратичные по $\bar{\bar{\gamma}}$, написанный выше член $\mathfrak{B}^{\alpha}$ можно заменить на

$$\bar{\bar{\mathfrak{g}}}^{\mu\nu}\bar{\bar{g}}^{\alpha\beta}\begin{bmatrix}\overline{\tau\ \nu}\\ \beta\end{bmatrix}\xi^{\tau}_{,\mu}.$$

Здесь сохранены лишь те члены, которые дают конечный вклад в интеграл по бесконечно малой сфере. Благодаря выбранной системе координат последнее выражение записывается в форме

$$\begin{bmatrix}\overline{\tau\ \mu}\\ \alpha\end{bmatrix}\xi^{\tau}_{,\mu},$$

или в развернутом виде:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{\gamma}_{\tau\alpha}}{\partial x_{\mu}}+\frac{\partial\bar{\gamma}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\tau}}-\frac{\partial\bar{\gamma}_{\tau\mu}}{\partial x_{\alpha}}\right)\xi^{\tau}_{,\mu}.$$

Это выражение нужно умножить на x_{α}/r и проинтегрировать по поверхности шара. При этом первый член дает конечную величину только при $\alpha=\tau$, $\mu=\alpha$, второй — при $\mu=\alpha$, $\tau=\alpha$, третий — при $\tau=\mu$. В результате интегрирования получаем

$$\frac{8\pi m}{3}\xi^{\alpha}_{,\alpha}-4\pi m\,(\xi^{\alpha}_{,\alpha}-\xi^{4}_{,4}),$$

причем здесь нужно просуммировать по α от 1 до 3.

Если произвести такое вычисление для всех членов $\mathfrak{B}^\alpha$, то получим

$$\int \mathfrak{B}^\alpha \frac{x_\alpha}{r} dS = 16\pi m \xi^4_{,4}.$$

Если это выражение проинтегрировать еще по x_4 в пределах, на которых ξ^α равны нулю, то интеграл полностью обращается в нуль [3]. Поэтому интеграл по внутренней оболочке M сводится в случае стационарного поля к интегралу от $t^\alpha_\sigma \xi^\sigma$. Отсюда, так же как и выше, заключаем, что движение особой точки описывается геодезической линией, определяемой во «внешнем» поле $\bar{\bar{\gamma}}_{\mu\nu}$.

Выводы

Если массы в гравитационном поле рассматривать как особенности, то закон движения полностью определяется уравнениями поля [4]. Если полное поле апроксимировать решениями линейных уравнений соответственного приближения, то законом движения является геодезическая линия. В следующей работе из уравнений поля будет выведен закон движения электрона, рассматриваемого как особая точка.

Однако известно, что в природе не встречаются электрически нейтральные атомные массы, и, следовательно, предмет нашей работы не соответствует непосредственно объектам природы. Достигнутый успех заключается, однако, в том, что впервые показано, что теория поля может содержать в себе теорию механического движения дискретных частиц вещества. Это может иметь значение для теории материи, например для квантовой теории.

Поступила 24 февраля 1927 г.

В этой работе впервые поставлен вопрос, который занимал Эйнштейна до конца его деятельности,— вопрос о связи уравнений поля и уравнений движения (геодезической).

---

[3] Последние члены второй и третьей строк правой части уравнения (15) обращаются в нуль, поскольку они вообще не дают вклад типа r^{-2} в интеграл.

[4] Правда, в настоящей работе это доказано полностью только для случая равновесия.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ*

В недавно вышедшей нашей с Я. Громмером работе [1] исследован вопрос, может ли определяться закон движения особенностей уравнениями поля общей теории относительности [2]. При этом оказалось, что закон геодезической линии, до сих пор постулировавшийся (дополненный электромагнитными силами), в статическом и стационарном случае может быть выведен из уравнений поля. Однако оказалось также, что эти выводы нельзя перенести без дополнительных гипотез на случай, когда окружающее особенность поле нестационарно. При этом о характере особенности, находящейся во внешнем поле, нужно сделать дополнительные гипотезы, которые нельзя обосновать. Этот результат представляет интерес с точки зрения общего вопроса, противоречит ли теория поля постулатам квантовой теории. Большинство физиков сейчас убеждено, что существование квантов исключает теорию поля в обычном смысле. Однако это убеждение основано на недостаточном знании следствий теории поля. Поэтому дальнейшее исследование выводов теории поля относительно движения особенностей кажется мне оправданным, несмотря на преимущество количественных результатов, полученных квантовой механикой.

Ниже будет показано, что теория поля определяет закон движения, если в первом приближении задан характер особенности. В случае статической и центрально-симметричной особенности получается закон геодезической, дополненный электромагнитными силами.

---

* *Allgemeine Relativitätstheorie und Bewegungsgesetz.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1927, 235—245.

[1] Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1927, 3—13 (Статья 85.— *Ред.*).

[2] Г. Вейль в последнем издании своей книги «Пространство, время, материя» уже раньше высказал мнение, что элементарные частицы следует рассматривать как особенности поля. Там же он пытается исследовать уравнения движения с этой точки зрения.

Правда, этот результат получен при пренебрежении величинами третьего порядка, так что нет полной уверенности в том, соответствуют ли наши возможные решения какому-нибудь точному решению. Зато применяемый метод прост и понятен.

§ 1. Основные положения и метод

За основу берутся уравнения поля общей теории относительности в форме

$$R_{i\varkappa}-\frac{1}{2}g_{i\varkappa}R+T_{i\varkappa}=0, \tag{1}$$

где $R_{i\varkappa}$ — тензор Римана второго ранга,

$$R_{i\varkappa}=-\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{i\varkappa}}{\partial x_{\alpha}}+\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{i\alpha}}{\partial x_{\varkappa}}+\Gamma^{\alpha}_{i\beta}\Gamma^{\beta}_{\varkappa\alpha}-\Gamma^{\alpha}_{i\varkappa}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

где R — скаляр, а $T_{i\varkappa}$ — максвелловский тензор энергии электромагнитного поля

$$T_{i\varkappa}=\frac{1}{4}g_{i\varkappa}\phi_{\alpha\beta}\phi^{\alpha\beta}-\phi_{i\alpha}\phi^{\varkappa\alpha}. \tag{3}$$

Эти уравнения дополняются еще максвелловскими уравнениями поля

$$\frac{\partial f^{i\varkappa}}{\partial x_{\varkappa}}=0, \tag{4}$$

являющимися, как известно, следствием уравнений (1). Так как скаляр T, определяемый выражением (3), равен нулю, то уравнение (1) можно заменить следующим:

$$R_{i\varkappa}+T_{i\varkappa}=0. \tag{1a}$$

Попытаемся найти решение этих уравнений, бесконечно близкое к центрально-симметричному статическому решению с точечной особенностью и соответствующее случаю движения электрона в слабом внешнем поле. Искомое решение должно иметь вид

$$\left.\begin{aligned} g_{i\varkappa}&=-\delta_{i\varkappa}+\lambda\overline{g}_{i\varkappa}+\lambda^2\overline{\overline{g}}_{i\varkappa}+\cdots\\ \phi_i&=\qquad\quad\ \lambda\overline{\phi}_i+\lambda^2\overline{\overline{\phi}}_i+\cdots\end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Будем предполагать сходимость такого разложения [3] и ограничимся ис-

[3] Эта форма разложения предполагает выбор мнимой координаты x_4.

следованием величин первого и второго порядков, причем величину $\delta_{i\varkappa}$, равную единице при $i=\varkappa$ и 0 — при $i\neq\varkappa$, будем рассматривать как величину нулевого порядка. Величина ϕ_i представляет собой электромагнитный потенциал, т. е.

$$\phi_{i\varkappa}=\frac{\partial\phi_i}{\partial x_\varkappa}-\frac{\partial\phi_\varkappa}{\partial x_i}.$$

Подставляя решение (5) в уравнения (1) и (4), получаем для каждого порядка величин (т. е. для каждой степени постоянной λ) систему дифференциальных уравнений. Нас интересуют только системы, соответствующие первому и второму порядкам величин. Чтобы получить их в наглядной форме, заметим прежде всего, что с точностью до величин второго порядка выражение для $\Gamma^\alpha_{i\varkappa}$ имеет вид

$$\Gamma^\alpha_{i\varkappa}=g^{\alpha\beta}\begin{bmatrix} i\varkappa \\ \beta\end{bmatrix}=(-\delta_{\alpha\beta}-\lambda\bar{g}_{\alpha\beta})\left\{\lambda\begin{bmatrix}\overline{i\varkappa}\\ \beta\end{bmatrix}+\lambda^2\begin{bmatrix}\overline{\overline{i\varkappa}}\\ \beta\end{bmatrix}\right\};$$

это выражение в том же приближении можно заменить на

$$-\lambda\begin{bmatrix}\overline{i\varkappa}\\ \alpha\end{bmatrix}-\lambda^2\left(\bar{g}_{\alpha\beta}\begin{bmatrix}\overline{i\varkappa}\\ \beta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\overline{\overline{i\varkappa}}\\ \alpha\end{bmatrix}\right),$$

где $[\overline{\ \ }]$ и $[\overline{\overline{\ \ }}]$ означают символы Кристоффеля, образованные соответственно из величин $\bar{g}_{i\varkappa}$ и $\bar{\bar{g}}_{i\varkappa}$.

С учетом этого выражение (2) для тензора Римана принимает вид

$$R_{i\varkappa}=\lambda\left\{\begin{bmatrix}\overline{i\varkappa}\\ \alpha\end{bmatrix}_\alpha-\begin{bmatrix}\overline{i\alpha}\\ \alpha\end{bmatrix}_\varkappa\right\}+\lambda^2\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\bar{g}_{\alpha\beta}\begin{bmatrix}\overline{i\varkappa}\\ \beta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\overline{\overline{i\varkappa}}\\ \alpha\end{bmatrix}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial x_\varkappa}\left(\bar{g}_{\alpha\beta}\begin{bmatrix}\overline{i\alpha}\\ \beta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\overline{\overline{i\alpha}}\\ \alpha\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}\overline{i\alpha}\\ \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\varkappa\beta}\\ \alpha\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\overline{i\varkappa}\\ \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\alpha\beta}\\ \beta\end{bmatrix}\right\},\quad (2a)$$

где индексы у квадратных скобок обозначают обычное дифференцирование по x_α (или по $x_\varkappa$). Существенно, что в это выражение $\bar{\bar{g}}_{i\varkappa}$ входит только линейно. Далее тензор $T_{i\varkappa}$ с требуемой точностью можно записать в форме

$$T_{i\varkappa}=\lambda^2\left(-\frac{1}{4}\delta_{i\varkappa}\bar{\phi}^2_{\alpha\beta}+\bar{\phi}_{i\alpha}\bar{\phi}_{\varkappa\alpha}\right).\quad (3a)$$

Из формулы (2a) видно, что в уравнении (1) линейный оператор

$$L_{i\varkappa}=\begin{bmatrix}\overline{i\varkappa}\\ \alpha\end{bmatrix}_\alpha-\begin{bmatrix}\overline{i\alpha}\\ \alpha\end{bmatrix}_\varkappa\quad (6)$$

играет двоякую роль. Принимая во внимание формулы (2а), (3а) и (6), вместо уравнения (1) получаем две системы:

$$\overline{L}_{i\varkappa} = 0, \tag{7}$$

$$\overline{\overline{L}}_{i\varkappa} + \overline{Q}_{i\varkappa} = 0. \tag{8}$$

Символы $\overline{L}_{i\varkappa}$ и $\overline{\overline{L}}_{i\varkappa}$ означают применение линейного оператора (6) к величинам $\overline{g}_{i\varkappa}$ или $\overline{\overline{g}}_{i\varkappa}$. Для оператора $\overline{Q}_{i\varkappa}$, принимая во внимание формулы (2а), (3а) и (7), получаем выражение:

$$Q_{i\varkappa} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\overline{g}_{\alpha\beta}\begin{bmatrix}\overline{i\varkappa}\\ \beta\end{bmatrix}\right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_\varkappa}\left(\overline{g}_{\alpha\beta}\begin{bmatrix}\overline{i\alpha}\\ \beta\end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix}\overline{i\alpha}\\ \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\varkappa\beta}\\ \alpha\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\overline{i\varkappa}\\ \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\alpha\beta}\\ \beta\end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{4}\delta_{i\varkappa}\overline{\varphi}^2_{\alpha\beta} + \overline{\varphi}_{i\alpha}\overline{\varphi}_{\varkappa\alpha}\right). \tag{9}$$

Уравнения Максвелла (4) в дальнейшем будут нужны нам только в первом приближении, поскольку в выражения (8) и (9) входит только $\overline{\varphi}$ (и не входит $\overline{\overline{\varphi}}$) и поскольку, как я убедился, уравнения (4) всегда выполняются во втором приближении без существенных условий, накладываемых на законы движения. Таким образом, вместо уравнений (4) можно записать

$$\left.\begin{aligned} \square\overline{\varphi}_i &= 0,\\ \frac{\partial\overline{\varphi}_i}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Проделанное до сих пор является лишь преобразованием уравнений гравитационного поля. Дальнейшее исследование основывается на уравнениях (7) и (8) и может быть охарактеризовано следующим образом. Определим величины $\overline{g}_{i\varkappa}$ и $\overline{\varphi}_i$ в соответствии с уравнениями (7) и (10), причем найдем решение с точечной, центрально-симметричной сингулярностью и внешними гравитационными и электромагнитным полями. Это решение определит также оператор $\overline{Q}_{i\varkappa}$ в уравнении (8). Главный вопрос, который возникает теперь: каким условиям должно удовлетворять решение $\overline{g}_{i\varkappa}$, $\overline{\varphi}_i$ в первом приближении, чтобы существовала величина $\overline{\overline{g}}_{i\varkappa}$, не обладающая новыми особенностями, в частности регулярная в окрестности особой точки?

Прежде чем ответить на этот вопрос, найдем решение в первом приближении и выберем для нашего рассмотрения соответствующую систему координат.

§ 2. Первое приближение

В первом приближении искомое поле с особенностью определяется системой уравнений (7) и (10). Для решений этих уравнений справедлив принцип суперпозиции. Кроме того, известно, что в этом приближении еще отсутствует взаимодействие между гравитационным (или инерционным) воздействием, с одной стороны, и электромагнитным воздействием, с другой. Это приводит прежде всего к тому, что как гравитационное, так и электромагнитное поле складывается из «внутреннего» поля электрона с особенностью и «внешнего» без особенности. При этом в отсутствие внешнего поля внутреннее поле было бы по предположению центрально-симметрично (в системе координат, движущейся с электроном). При наличии же внешнего поля следует ожидать отклонений от центральной симметрии внутреннего поля. Однако в первом приближении эти отклонения как величины второго порядка можно не принимать во внимание.

Систему координат сначала выберем так, чтобы ось x_4 постоянно двигалась вместе с особенностью и при пренебрежении внутренним гравитационным полем для этой оси было справедливо соотношение

$$dx_4 = j ds \qquad (j = \sqrt{-1}), \tag{11}$$

где ds — метрический элемент длины в отсутствие внутреннего поля.

Относительно системы координат условимся далее, что на оси x_4 должны обращаться в нуль все пространственные производные, кроме производных от g_{44}, и что все остальные компоненты на ней должны быть равны— $\delta_{\mu\nu}$ [4]. Наконец, координатная система может быть выбрана так, что в *конечной* области значения величин $g_{\mu\nu}$ только бесконечно мало отличаются от — $\delta_{\mu\nu}$.

Учитывая это, можно записать внешнее гравитационное поле,

[4] Это нетрудно показать. Пусть это условие не выполняется для некоторой системы X' [однако условие (11) выполнено]. Выполним преобразование

$$x'_\mu = c_{\mu a} x_a + c_{\mu a b} x_a x_b + \cdots; \quad x'_4 = x_4 + c_{4a} x_a + c_{4ab} x_a x_b + \cdots,$$

где a и b — только пространственные индексы (1—3). При вычислении $g_{\mu\nu}$ и $\frac{dg_{\mu\nu}}{dx_\sigma}$ на оси x_4, соответствующих штрихованным величинам, появляются (зависящие от x_4) коэффициенты c (кроме того, и сами производные по времени), т. е. 36 функций времени, которыми мы можем распоряжаться. Данное же выше координатное условие содержит $9 + 27 = 36$ требований, которые и могут быть удовлетворены соответствующим выбором коэффициентов c.

т. е. соответствующую ему часть $\overline{g}_{i\varkappa}$, в форме

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_l x_l \end{matrix}\right\}. \tag{12}$$

Здесь величины a_l ($l = 1, 2, 3$) не должны зависеть от пространственных координат; зависимость же от времени может быть произвольной. Это выражение для $\overline{g}_{i\varkappa}$ удовлетворяет уравнению (7). Оно может отличаться от реального внешнего поля лишь членами, соответствующими *неоднородности* внешнего гравитационного поля. Мы не будем исследовать влияния этой неоднородности на движение особенности.

Внутреннее гравитационное поле будем считать центрально-симметричным, что в *первом приближении* оказывается достаточно точным. Как известно, уравнению (7) удовлетворяют следующие значения $\overline{g}_{\mu\nu}$ [5]:

$$\left.\begin{matrix} -\frac{m}{4\pi\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{m}{4\pi\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m}{4\pi\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{m}{4\pi\nu} \end{matrix}\right\}. \tag{13}$$

Сумма выражений (12) и (13) с достаточной точностью представляет собой компоненты $\overline{g}_{\mu\nu}$ полного гравитационного поля вблизи особой точки, т. е. при малых x_1, x_2, x_3.

Электрическое поле в окрестности особенности, в полном согласии с уравнением (10), можно в первом приближении представить в виде

$$\left.\begin{array}{cccccc} \overline{\Phi}_{23} & \overline{\Phi}_{31} & \overline{\Phi}_{12} & \overline{\Phi}_{14} & \overline{\Phi}_{24} & \overline{\Phi}_{34} \\ \hline \mathfrak{h}_x & \mathfrak{h}_y & \mathfrak{h}_z & -je_x & -je_y & -je_z \\ 0 & 0 & 0 & -j\frac{\varepsilon x_1}{4\pi\nu^3} & -j\frac{\varepsilon x_2}{4\pi\nu^3} & -j\frac{\varepsilon x_3}{4\pi\nu^3} \end{array}\right\}, \quad (j = \sqrt{-1}), \tag{14}$$

---

[5] Единицы m и ε выбраны таким образом, что гравитационная постоянная и коэффициент при плотности тока в уравнениях Максвелла равны 1.

причем первая строчка относится к внешнему полю, а вторая — к внутреннему. Для того, чтобы внешнее поле удовлетворяло уравнениям (10), его компоненты должны соответствующим образом зависеть от координат x_1, x_2, x_3, если зависимость от четвертой координаты x_4 задана. При этом мы опять не касаемся вопроса о влиянии пространственной неоднородности внешнего поля на движение особенности.

После того как мы в первом приближении нашли полное поле в окрестности особой точки, оператор $\overline{Q}_{i\varkappa}$, входящий в уравнение (8), можно вычислить из формулы (9). При этом появляются члены трех видов:

1) квадратичные по внешнему полю,
2) квадратичные по внутреннему полю и
3) с произведениями компонент внутреннего и внешнего полей.

В соответствии с этим, выражение для $\overline{Q}_{i\varkappa}$ распадается на три слагаемых. Так как $L_{i\varkappa}$ линейно по $\overset{=}{g}_{i\varkappa}$, то и компоненты $\overset{=}{g}_{i\varkappa}$ составлены аддитивно из трех систем. Первая из этих систем соответствует случаю отсутствия внешнего поля, вторая — случаю отсутствия особенности. Только третья соответствует одновременному наличию внешнего и внутреннего полей. Только она и имеет значение для решения проблемы движения. Поэтому в выражении для $\overline{Q}_{i\varkappa}$ следует учитывать только «смешанные» члены. С учетом этого замечания из формулы (9) вместе с выражениями (12), (13), (14) следует

$$8\pi\overline{Q}_{st} = \frac{3}{2}\,\delta_{st}\frac{ma_l x_l}{r^3} - 3\frac{mx_s x_t a_l x_l}{r^5} + \frac{2\varepsilon}{r^3}(\delta_{st}\mathfrak{e}_l x_l - \mathfrak{e}_s x_t - \mathfrak{e}_t x_s), \tag{15}$$

$$8\pi\overline{Q}_{14} = j\frac{\varepsilon}{r^3}(x_2\mathfrak{h}_3 - x_3\mathfrak{h}_2),$$

$$8\pi\overline{Q}_{44} = \frac{3}{2}\frac{ma_l x_l}{r^3} - \frac{2\varepsilon}{r^3}\mathfrak{e}_l x_l.$$

Здесь индексы l, s, t принимают только *пространственные* значения. После такого предварительного рассмотрения из уравнения (8) можно получить следствия.

§ 3. Второе приближение

Если ввести сокращение

$$\overset{=}{g}_{i\varkappa} - \frac{1}{2}\delta_{i\varkappa}\overset{=}{g}_{\alpha\alpha} \equiv \overset{=}{\gamma}_{i\varkappa}, \tag{16}$$

то уравнение (8) принимает вид

$$-\Box\overset{=}{g}_{i\varkappa} + \frac{\partial}{\partial x_\varkappa}\left(\frac{\partial\overset{=}{\gamma}_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\overset{=}{\gamma}_{\varkappa\alpha}}{\partial x_\alpha}\right) = -2Q_{i\varkappa}, \tag{17}$$

где $\square$ обозначает оператор $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\right)$. Далее, если уравнения (17) выполняются, то они будут выполняться и в том случае, когда к величинам $\overline{\overline{g}}_{i\varkappa}$ прибавить выражения $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varkappa} + \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial x_i}$, где четыре функции ξ_i произвольны. Отсюда следует, что величины $\overline{\overline{g}}_{i\varkappa}$ могут быть нормированы так, чтобы выполнялось уравнение

$$\frac{\partial \overline{\overline{\gamma}}_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{18}$$

Тогда вместо уравнения (17) получим

$$\square \overline{\overline{g}}_{i\varkappa} = 2\overline{Q}_{i\varkappa}. \tag{19}$$

Это «расщепление» уравнения (17) на уравнения (18) и (19), связанное теснейшим образом с известным свойством дивергенции тензора $R_{i\varkappa} - {}^1/_2\, g_{i\varkappa}R$, имеет для нашего исследования решающее значение. В самом деле, уравнения (18) и (19) «переопределяют» величины $\overline{\overline{g}}_{i\varkappa}$ в том смысле, что из выполнения уравнения (19) еще не следует выполнение уравнения (18), так что уравнение (18) содержит некое дополнительное условие, которое выполняется отнюдь не автоматически.

Введем следующее сокращение:

$$\overline{S}_{i\varkappa} = \overline{Q}_{i\varkappa} - \frac{1}{2}\,\delta_{i\varkappa}\overline{Q}_{\alpha\alpha}. \tag{20}$$

Тогда уравнение (19) принимает вид

$$\square\, \overline{\overline{\gamma}}_{i\varkappa} = 2\overline{S}_{i\varkappa}. \tag{21}$$

Теперь вся проблема сводится к вопросу, какой должна быть величина $S_{i\varkappa}$, чтобы существовала величина $\overline{\overline{\gamma}}_{i\varkappa}$, удовлетворяющая уравнениям (21) и (18) и регулярная всюду в окрестности особой точки.

Из уравнений (18) и (21) прежде всего следует, что

$$\frac{\partial S_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa} = 0. \tag{22}$$

Это уравнение выполняется в окрестности особенности, в чем можно убедиться с помощью формулы (15). Кроме того, можно показать, что уравнение (22) всегда выполняется, если справедливы уравнения поля в первом приближении. Обозначая для краткости

$$\overline{L}_{i\varkappa} - \frac{1}{2}\,\delta_{i\varkappa}\overline{L} \text{ через } \overline{M}_{i\varkappa}, \text{ а } \overline{\overline{L}}_{i\varkappa} - \frac{1}{2}\,\delta_{i\varkappa}\overline{\overline{L}} \text{ — через } \overline{\overline{M}}_{i\varkappa},$$

с точностью до величин второго порядка получаем [6]

$$R_{i\varkappa}-\frac{1}{2}g_{i\varkappa}R+T_{i\varkappa}=\overline{M}_{i\varkappa}+\overline{\overline{M}}_{i\varkappa}+\overline{S}_{i\varkappa}.$$

Уравнения гравитационного поля в первом приближении имеют вид:

$$\overline{M}_{i\varkappa}=0.$$

Далее, уравнения электромагнитного поля выполняются в первом приближении; из этого следует равенство нулю дивергенции тензора $T_{i\varkappa}$ во втором приближении. Так как дивергенция $R_{i\varkappa}-\frac{1}{2}g_{i\varkappa}R$ равна нулю тождественно, то, следовательно, обращается в нуль (вообще говоря, ковариантная) дивергенция величины второго порядка, $\overline{\overline{M}}_{i\varkappa}+\overline{S}_{i\varkappa}$. С точностью до величин второго порядка эту дивергенцию можно заменить на $\frac{\partial(\overline{\overline{M}}_{i\varkappa}+\overline{S}_{i\varkappa})}{\partial x_\varkappa}$, или, поскольку $\frac{\partial\overline{\overline{M}}_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa}$ тождественно равна нулю, на $\frac{\partial S_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa}$. Таким образом выполнение уравнений поля в первом приближении влечет за собой обращение в нуль $\frac{\partial\overline{S}_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa}$.

Прежде чем исследовать второе приближение, мы должны остановиться на одной принципиальной трудности вычислений. Метод приближения, согласно уравнениям (8), предполагает во всяком случае конечность величин $g_{i\varkappa}$, $\overline{g}_{i\varkappa}, \ldots$ и т. д. Это условие в нашей задаче, однако, нарушено, так как в точке $x_1=x_2=x_3=0$ имеется особенность. Можно подумать, что разложение, подобное (5), вообще неприменимо для обсуждения нашей проблемы.

С этим связано следующее обстоятельство. Пусть по уравнениям (18) и (21) вычисляется второе приближение, наряду с функциями $\overline{g}_{i\varkappa}$, $\overline{\varphi}_{i\varkappa}$ и $\overline{S}_{i\varkappa}$ оно сингулярно на оси x_4. Тогда уравнения (18) и (21) определяют его не однозначно, поскольку к этому, второму приближению можно добавить выражение, удовлетворяющее уравнениям

$$\frac{\partial\overline{\overline{\gamma}}_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa}=0,\qquad \frac{\partial^2\overline{\overline{\gamma}}_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa^2}=0.$$

Поскольку такие решения существуют, мы не можем заключить, что и они имеют особенности на оси x_4. Аналогично обстоит дело и с более высокими приближениями. Следовательно, при таком методе вычисления более высокое приближение не определяется однозначно более низким.

[6] Для простоты мы положили λ равной 1.

Однако эту трудность можно обойти следующим образом. Предположим, что функции $\overline{g}_{i\varkappa}$ и $\overline{\phi}_i$ всюду регулярны; тогда можно потребовать также регулярности более высоких приближений; в частности, из уравнения (21) можно получить выражение $\overline{\overline{\gamma}}_{i\varkappa}$ в виде запаздывающего потенциала. Вообще говоря, можно было бы все время выражать следующее более высокое приближение в виде запаздывающего потенциала, т. е. в регулярном виде. В этом случае не было бы причин сомневаться в сходимости разложения (5)[7].

Найдем теперь второе приближение, исходя не из $\overline{g}_{i\varkappa}$ и $\overline{\phi}_i$, а из всюду регулярных функций $\overline{g}^*_{i\varkappa}$, $\overline{\phi}^*_i$, определяемых следующим образом.

1) Они совпадают с функциями $\overline{g}_{i\varkappa}$ и $\overline{\phi}_i$ вне поверхности сферы очень малого радиуса r_0 с центром в точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

2) Они регулярны внутри сферы и совпадают с функциями $\overline{g}_{i\varkappa}$ и $\overline{\phi}_i$ на ее поверхности.

Будем считать, что такую замену мы сделали во всех особых точках рассматриваемой системы. От величин $\overline{\overline{\gamma}}_{i\varkappa}$ мы потребуем следующее:

1. Они удовлетворяют уравнению

$$\Box \overline{\overline{\gamma}}^*_{i\varkappa} = 2\overline{S}^*_{i\varkappa} \tag{21a}$$

во всем пространстве.

2. Они удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \overline{\overline{\gamma}}^*_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa} = 0 \tag{18a}$$

вне поверхности сферы.

Если теперь перейти к пределу $r_0 = 0$, то $\overline{\gamma}^*_{i\varkappa}$ переходит в искомое $\overline{\overline{\gamma}}_{i\varkappa}$. Сначала мы получаем

$$\gamma^*_{i\varkappa} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\overline{S}^*_{i\varkappa}(t-\rho)}{\rho}\, dV, \tag{22}$$

где dV — пространственный элемент объема, ρ — пространственное расстояние от него до точки наблюдения.

Для каждой из четырех координат x_α из соотношения (22) следует

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\int \frac{\overline{S}^*_{i\varkappa}(t-\rho)}{\rho}\, dV\right\} = \frac{1}{\rho}\int \frac{\partial \overline{S}^*_{i\varkappa}}{\partial x_\alpha}(t-\rho)\, dV,$$

[7] В выборе *запаздывающего* потенциала как решения волнового уравнения имеется, впрочем, произвол (выбор *одного* знака времени). Ранее на это уже указывал Ритц. Без этого произвола, однако, теория Максвелла обойтись не может.

т. е.

$$\frac{\partial \overline{\overline{\gamma}}^*_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\left|\dfrac{\partial \overline{S}^*_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa}\right|}{\rho}\, dV, \tag{23}$$

где вертикальные линии означают, что в $\dfrac{\partial \overline{S}^*_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa}$ нужно произвести замену аргумента t на $(t-\rho)$. Теперь нужно показать, что правая часть соотношения (23) обращается в нуль вне сферы радиуса r_0. Так как вне сферы величина $\overline{S}^*_{i\varkappa}$ совпадает с $\overline{S}_{i\varkappa}$, то, поскольку подынтегральное выражение обращается в нуль, нужно интегрировать только по внутреннему объему сферы. Так как далее нам нужно знать предел при $r_0 = 0$, то ρ можно заменить на r — расстояние точки наблюдения от особенности[8]. Поэтому интеграл переходит в

$$\frac{1}{r}\int \left|\frac{\partial S^*_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa}\right| dV.$$

Мы сделаем небольшую ошибку, если будем вычислять запаздывание не по отношению к элементу интегрирования, а по отношению к центру сферы; тогда получим

$$\frac{1}{r}\left|\int \frac{\partial \overline{S}^*_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa}\, dV\right|.$$

При интегрировании по объему сферы, согласно теореме Гаусса[9], с учетом, что на поверхности сферы $\overline{S}^*_{i\varkappa} = \overline{S}_{i\varkappa}$, получаем

$$\frac{1}{r}\left|\int \overline{S}_{i\varkappa}\frac{x_\varkappa}{r}\, dS\right| = -\frac{|A_i|}{r}, \tag{24}$$

где A_i является функцией *только одного* аргумента $(t - r)$. Наконец, для окрестности рассматриваемой особой точки получаем

$$\frac{\partial \overline{\overline{\gamma}}_{i\varkappa}}{\partial x_\varkappa} = -\frac{|A_i|}{2\pi r}. \tag{25}$$

[8] Интегрирование по прочим особенностям дает для непосредственной окрестности точки $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ пренебрежимо малый вклад.

[9] Интеграл от $\dfrac{S^*_{i4}}{\partial x_4}$, согласно формулам (15) и (20), не дает вклада.

Уравнение (18) дает теперь

$$A_i = -\int S_{i\varkappa} \frac{x_\varkappa}{r} dS = 0. \tag{26}$$

В соответствии с формулами (24), (20) и (15) это означает, что

$$A_i = a_i m + e_i \varepsilon = 0. \tag{26а}$$

Эта формула в применении к особой точке показывает, что сумма пондеромоторных сил тяжести и электромагнитного поля должна равняться нулю. Ясно, что формула (26а) эквивалентна известным уравнениям движения электрона, которые в общековариантной записи имеют вид

$$A_i = m\left(g_{i\alpha}\frac{d^2x_\alpha}{ds^2} + \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ & i\end{bmatrix}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}\right) + \varepsilon\phi_{i\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds}. \tag{26б}$$

Таким образом показано, что постулировавшийся до сих пор закон движения является следствием уравнений поля, если в основу рассмотрения положить точечную особенность статического характера. Однако еще не показано, что такого вида особенности уравнений поля могут описывать *все* движения, удовлетворяющие условию (26б).

По-видимому, при рассмотрении более высоких приближений будут получены дальнейшие ограничивающие условия.

Хотя это исследование и не дает ничего для понимания квантовых явлений, достаточно важен сам результат, что закон движения особенностей и уравнения поля связаны друг с другом.

87

ГЕОМЕТРИЯ РИМАНА С СОХРАНЕНИЕМ ПОНЯТИЯ „АБСОЛЮТНОГО“ ПАРАЛЛЕЛИЗМА *

В геометрии Римана, которая дала возможность физического описания гравитационного поля в общей теории относительности, совершенно отсутствуют понятия, которые можно было бы сопоставить с электромагнитным полем. Поэтому физики-теоретики, надеясь построить логическую теорию, объединяющую с одной точки зрения все физические поля, стремятся найти такие естественные обобщения геометрии Римана, в которых содержится больше понятий, чем в последней. Эти стремления привели меня к теории, которая заслуживает опубликования независимо от попыток придать ей физический смысл, поскольку она представляет определенный интерес уже в силу естественности введенных в ней понятий.

Геометрия Римана характеризуется как тем, что в бесконечно малой окрестности всякой точки P сохраняется эвклидова метрика, так и тем, что можно сравнивать между собой длины двух линейных элементов, принадлежащих двум расположенным на конечном расстоянии точкам P и Q. В противоположность этому понятие параллельности двух таких линейных элементов отсутствует; понятия направленности для конечного расстояния не существует. Излагаемая ниже теория характеризуется тем, что в ней кроме метрики Римана вводится еще «направленность», или «равнонаправленность», или «параллелизм» для конечного расстояния. В соответствии с этим, кроме инвариантов и тензоров геометрии Римана, появляются новые инварианты и тензоры.

§ 1. Поле n-подов и метрика

Представим себе, что в каждой точке P n-мерного континуума построен ортогональный n-под из n единичных векторов, образующий локальную систему координат. Обозначим через A_a компоненты линейного

* *Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1928, 217—221.

элемента или другого вектора, отнесенные к этой локальной системе (n-поду). Для описания конечной области введем еще гауссову систему координат x^ν. Обозначая ν-компоненты вектора (A) относительно этой второй системы координат через A^ν и ν-компоненты единичных векторов, составляющих n-под, через h_a^ν, имеем [1]

$$A^\nu = h_a^\nu A_a. \tag{1}$$

Обратное соотношение, если обозначить через $h_{\nu a}$ нормированные миноры величин h_a^ν, имеет вид

$$A_a = h_{\mu a} A^\mu. \tag{1a}$$

Тогда, вследствие эвклидовости бесконечно малых областей, для длины вектора (A) справедлива формула

$$A^2 = \sum A_a^2 = h_{\mu a} h_{\nu a} A^\mu A^\nu. \tag{2}$$

Следовательно, компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ представляются в виде

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu a} h_{\nu a}, \tag{3}$$

где, конечно, по a производится суммирование. При данном a величины h_a^μ образуют контравариантный вектор. Далее выполняются соотношения

$$h_{\mu a} h_a^\nu = \delta_\mu^\nu, \tag{4}$$

$$h_{\mu a} h_b^\mu = \delta_{ab}, \tag{5}$$

причем $\delta = 1$ или $\delta = 0$ в зависимости от того, одинаковые оба индекса или разные. Справедливость соотношений (4) и (5) вытекает из приведенного выше определения $h_{\mu a}$ как нормированных миноров величин h_a^μ. Векторный характер величин $h_{\mu a}$ проще всего доказывается тем, что левая, а следовательно, и правая, части равенства (1a) инвариантны относительно произвольных преобразований координат при любом выборе вектора (A).

Поле n-подов определяют n^2 функций h_a^μ, тогда как метрику Римана определяют только $\frac{n(n+1)}{2}$ величин $g_{\mu\nu}$. В соответствии с соотношением (3) метрика определяется полем n-подов, но не наоборот.

[1] Индексы, относящиеся к координатам, мы обозначаем греческими буквами, а индексы n-подов (n-мерных ортогональных реперов.— *Ред.*) — латинскими.

§ 2. «Абсолютный» параллелизм и инвариантность относительно вращения

Поле n-подов обеспечивает сразу и существование метрики Римана и «абсолютный» («далекий») параллелизм. Действительно, если (A) и (B) — два вектора в точках P и Q (по отношению к своим локальным n-подам) — обладают одинаковыми соответственными локальными координатами (т.е. $A_a = B_a$), то они будут равными [вследствие формулы (2)] и «параллельными».

Рассматривая в качестве наиболее существенных, т. е. имеющих объективное значение, свойств только метрику и абсолютный параллелизм, мы видим, что поле n-подов определяется ими еще не полностью. В самом деле, метрика и параллелизм не изменяются, если n-поды во всех точках континуума заменяются на другие n-поды, получаемые из первоначальных n-подов вращением. Будем называть это свойство поля n-подов инвариантностью относительно вращения и дадим определение: реальный смысл могут иметь только те математические соотношения, которые будут ковариантными относительно вращения.

Таким образом, для фиксированной системы координат при заданной метрике и заданном соотношении параллельности величины h_a^μ определяются еще не полностью; возможна еще замена h_a^μ, соответствующая инвариантности относительно вращения, т. е. преобразованию

$$\overset{*}{A}_a = d_{am} A_m, \tag{6}$$

где коэффициенты d_{am} выбираются ортогональными и независимыми от координат. Пусть (A_a) — произвольный вектор, отнесенный к локальной системе, и $(\overset{*}{A}_a)$ — вектор, отнесенный к повернутой локальной системе. В соответствии с соотношением (1а) из уравнения (6) получаем

$$\overset{*}{h}_{\mu a} A^\mu = d_{am} h_{\mu m} A^\mu,$$

или

$$\overset{*}{h}_{\mu a} = d_{am} h_{\mu m}, \tag{6а}$$

причем

$$d_{am} d_{bm} = d_{ma} d_{mb} = \delta_{ab}, \tag{6б}$$

$$\frac{\partial d_{am}}{\partial x^\nu} = 0. \tag{6в}$$

Тогда, согласно постулату инвариантности относительно вращения, имеют смысл только такие соотношения, в которых величины h переходят в величины h^* того же типа, если эти величины h^* вводятся с помощью уравнений (6) и т. д. Иначе говоря, поля n-подов, получаемые при локально равномерном вращении, эквивалентны.

Закон бесконечно малого параллельного переноса вектора при переходе от точки (x^ν) к соседней точке $(x^\nu + dx^\nu)$ характеризуется, очевидно, уравнением

$$dA_a = 0, \tag{7}$$

т. е. уравнением

$$0 = d(h_{\mu a}A^\mu) = \frac{\partial h_{\mu a}}{\partial x^\sigma} A^\mu dx^\sigma + h_{\mu a} dA^\mu = 0.$$

Умножая это уравнение на h_a^ν и учитывая соотношение (5), получаем

$$dA^\nu = -\Delta^\nu_{\mu\sigma} A^\mu dx^\sigma,$$

где

$$\Delta^\nu_{\mu\sigma} = h^{\nu a} \frac{\partial h_{\mu a}}{\partial x^\sigma}. \tag{7a}$$

Этот закон параллельного переноса является ковариантным относительно вращения и несимметричным по нижним индексам коэффициентов $\Delta^\nu_{\mu\sigma}$. При переносе вектора (A) по замкнутому пути, в соответствии с этим законом, упомянутый вектор переходит сам в себя. Это значит, что образованный из коэффициентов переноса $\Delta^\nu_{\sigma\mu}$ тензор Римана

$$R^i_{k,\,lm} = -\frac{\partial \Delta^i_{kl}}{\partial x^m} + \frac{\partial \Delta^i_{km}}{\partial x^l} + \Delta^i_{\alpha l}\Delta^\alpha_{km} - \Delta^i_{\alpha m}\Delta^\alpha_{kl}$$

вследствие уравнения (7а), как легко показать, тождественно равен нулю.

Но кроме этого закона переноса существует еще (неинтегрируемый) симметричный закон переноса, принадлежащий, в соответствии с равенствами (2) и (3), метрике Римана. Как известно, он выражается соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \bar{d}A^\nu &= -\Gamma^\nu_{\mu\sigma} A^\mu dx^\sigma, \\ \Gamma^\nu_{\mu\sigma} &= \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Величины $\Gamma^\nu_{\mu\sigma}$, в силу равенства (3), выражаются через величины h поля n-подов. При этом необходимо учитывать, что

$$g^{\mu\nu} = h^\mu_a h^\nu_a; \tag{9}$$

при этом условии, вследствие равенств (4) и (5), выполняются соотношения

$$g^{\mu\lambda}g_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}_{\nu},$$

определяющие величины $g^{\mu\nu}$ по заданным $g_{\mu\nu}$. Разумеется, этот закон переноса, основанный только на метрике, также является ковариантным относительно вращения в указанном смысле.

§ 3. Инварианты и коварианты

В рассматриваемом нами многообразии, кроме тензоров и инвариантов геометрии Римана, содержащих величины h только в комбинациях, заданных равенством (3), существуют еще другие тензоры и инварианты, простейшие из которых мы теперь и обсудим.

Из некоторого вектора (A^{ν}) в точке (x^{ν}) в результате двух переносов d и $\bar{d}$ в бесконечно близкую точку $(x^{\nu}+dx^{\nu})$ получаются два вектора

$$A^{\nu}+dA^{\nu}$$

и

$$A^{\nu}+\bar{d}A^{\nu}.$$

Следовательно, разность

$$dA^{\nu}-\bar{d}A^{\nu} = (\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}-\Delta^{\nu}_{\alpha\beta})\,A^{\alpha}dx^{\beta}$$

также есть вектор. Значит, величина

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}-\Delta^{\nu}_{\alpha\beta},$$

равно как и ее антисимметричная часть

$$\frac{1}{2}\,(\Delta^{\nu}_{\alpha\beta}-\Delta^{\nu}_{\beta\alpha}) = \Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}, \qquad (10)$$

есть тензор. Фундаментальное значение этого тензора в развитой здесь теории вытекает из следующего обстоятельства: когда этот тензор равен нулю, континуум является эвклидовым. Действительно, если

$$0 = 2\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta} = h^{\nu a}\left(\frac{\partial h_{\alpha a}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial h_{\beta a}}{\partial x^{\alpha}}\right),$$

то, умножая на $h_{\nu b}$, получаем

$$0 = \frac{\partial h_{\alpha b}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial h_{\beta b}}{\partial x^{\alpha}}.$$

Поэтому можно положить

$$h_{\alpha b} = \frac{\partial \psi_b}{\partial x^\alpha}.$$

Таким образом поле выводится из n скаляров ψ_b. Выберем теперь следующие координаты:

$$\psi_b = x^b.$$

Тогда в соответствии с формулой (7a) все величины $\Delta^{\nu}_{\alpha\beta}$ обращаются в нуль, и величины $h_{\mu a}$ и $g_{\mu\nu}$ являются постоянными.

Так как тензор $\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}$ является к тому же, очевидно, простейшим с формальной точки зрения, то простейшие характерные свойства рассматриваемого континуума следует связывать именно с ним, а не с более сложным тензором кривизны Римана. Простейшими величинами, подлежащими рассмотрению в этой связи, являются вектор

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\alpha}$$

и инварианты

$$g^{\mu\nu}\Lambda^{\alpha}_{\mu\beta}\Lambda^{\beta}_{\nu\alpha} \text{ и } g_{\mu\nu}g^{\alpha\sigma}g^{\beta\tau}\Lambda^{\mu}_{\alpha\beta}\Lambda^{\nu}_{\sigma\tau}.$$

Умножая один из этих инвариантов (или их линейную комбинацию) на инвариантный элемент объема

$$hd\tau,$$

где h — определитель $|h_{\mu a}|$, $d\tau$ — произведение $dx_1, \ldots, dx_\mu$, можно образовать инвариантный интеграл J. Далее, полагая

$$\delta J = 0,$$

получаем 16 дифференциальных уравнений для 16 величин $h_{\mu a}$.

Вопрос о том, можно ли получить этим способом законы, имеющие физический смысл, требует дальнейших исследований.

Интересно сопоставить теорию Римана, ее модификацию, предложенную Вейлем, и развитую выше теорию. Для векторов, разделенных конечным расстоянием: в *теории Вейля* — невозможно сравнение ни по длине, ни по направлению; в *теории Римана* — возможно сравнение по длине, но не по направлению; в *рассмотренной здесь теории* — возможно сравнение и по длине, и по направлению.

НОВАЯ ВОЗМОЖНОСТЬ ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ ТЯГОТЕНИЯ И ЭЛЕКТРИЧЕСТВА *

В краткой статье, опубликованной несколько дней назад в этом журнале [1], я показал, каким образом можно с помощью поля n-подов построить геометрическую теорию, основанную на фундаментальных понятиях метрики Римана и «абсолютного» параллелизма. Вопрос о том, может ли эта теория служить для описания физических закономерностей, при этом оставался открытым. После этого я обнаружил, что из подобной теории совсем просто и естественно получаются, по крайней мере в первом приближении, законы поля тяготения и электродинамики. Поэтому можно думать, что эта теория вытеснит первоначальный вариант общей теории относительности.

Вследствие абсолютного параллелизма в этой теории существует нечто вроде прямой, т. е. такой линии, все элементы которой взаимно параллельны; разумеется, такая линия вовсе не тождественна геодезической. Далее, в противоположность обычной общей теории относительности, здесь существует понятие относительного покоя двух материальных точек (параллелизм двух линейных элементов), принадлежащих двум разным мировым линиям. Чтобы общую теорию в изложенной форме можно было непосредственно применять к теории поля, необходимо лишь условиться о следующем.

1. Число измерений равно 4 ($n = 4$).

2. Четвертая локальная компонента A_a ($a = 4$) вектора является чисто мнимой; следовательно, мнимыми будут четвертые компоненты

---

* *Neue Möglichkeit für eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1928, 224—227.

[1] Предыдущая статья. — *Прим. ред.*

4-пода (тетрапода), т. е. величины $h^\nu{}_4$ и $h_{\nu 4}$[2]. Тогда коэффициенты $g_{\mu\nu}\,(=h_{\mu a}h_{\nu a})$ будут, конечно, вещественными. Таким образом, квадрат длины временно-подобного вектора мы считаем отрицательным.

§ 1. Основной закон поля

Допустим, что для вариаций потенциалов поля $h_{\mu a}$ (или h_a^μ), обращающихся в нуль на границах некоторой области, равна нулю вариация интеграла Гамильтона:

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}\,d\tau\right\}=0, \tag{1}$$

$$\mathfrak{H}=hg^{\mu\nu}\cdot\Lambda^\alpha_{\mu\beta}\cdot\Lambda^\beta_{\nu\alpha}, \tag{1a}$$

где величины $h(=|h_{\mu a}|)$, $g^{\mu\nu}$ и $\Lambda^\alpha_{\mu\nu}$ определяются формулами (9) и (10) цитированной работы.

Поле h может описывать одновременно как электрическое, так и гравитационное поле. «Чисто гравитационное» поле существует только в том случае, если, кроме выполнения уравнения (1), обращаются в нуль величины

$$\phi_\mu=\Lambda^\alpha_{\mu\alpha}, \tag{2}$$

что означает условие ковариантности и инвариантности относительно вращения [3].

§ 2. Закон поля в первом приближении

В мире Минковского специальной теории относительности систему координат можно выбрать так, что $h_{11}=h_{22}=h_{33}=1$, $h_{44}=j\,(=\sqrt{-1})$, а все остальные величины $h_{\mu a}$ равны нулю. Эта система значений $h_{\mu a}$ несколько неудобна для вычислений. Поэтому мы будем считать здесь

[2] Вместо этого можно было бы определить квадрат длины локального вектора в виде $A_1^2+A_2^2+A_3^2-A_4^2$ и вместо вращений локального n-пода ввести преобразования Лоренца. Тогда все величины h были бы вещественными, но не было бы непосредственной связи с общей формулировкой теории.

[3] Здесь существует еще некоторая неопределенность, так как чисто гравитационное поле можно было бы характеризовать и условием

$$\frac{\partial\phi_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial\phi_\nu}{\partial x_\mu}=0.$$

координату x_4 чисто мнимой; в этом случае мир Минковского (отсутствие всякого поля при соответствующем выборе координат) описывается равенствами

$$h_{\mu a} = \delta_{\mu a}. \tag{3}$$

Случай бесконечно слабых полей целесообразно представить в виде

$$h_{\mu a} = \delta_{\mu a} + k_{\mu a}, \tag{4}$$

где $k_{\mu a}$ — малые величины первого порядка. Пренебрегая величинами третьего и более высоких порядков, уравнение (1a) с учетом соотношений (10) и (7a) цитированной работы можно записать в форме

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial k_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial k_{\beta\alpha}}{\partial x_\mu}\right)\left(\frac{\partial k_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial k_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\right). \tag{1б}$$

Выполняя варьирование, получаем уравнения поля в первом приближении

$$\frac{\partial^2 k_{\beta\alpha}}{\partial x_\mu^2} - \frac{\partial^2 k_{\mu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 k_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} - \frac{\partial^2 k_{\beta\mu}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} = 0. \tag{5}$$

Мы имеем здесь 16 уравнений[4] для 16 величин $k_{\alpha\beta}$. Наша задача состоит теперь в том, чтобы выяснить, содержит ли эта система уравнений известные законы гравитационного и электромагнитного полей. Для этого мы должны ввести в уравнение (5) вместо $k_{\alpha\beta}$ величины $g_{\alpha\beta}$ и ϕ_α. Пусть

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha a} h_{\beta a} = (\delta_{\alpha a} + k_{\alpha a})(\delta_{\beta a} + k_{\beta a}),$$

или с учетом только величин первого порядка

$$g_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} = \overline{g}_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta} + k_{\beta\alpha}. \tag{6}$$

Далее из равенства (2) с учетом величин первого порядка получаем

$$2\phi_\alpha = \frac{\partial k_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial k_{\mu\mu}}{\partial x_\alpha}. \tag{2a}$$

Переставляя индексы α и β в уравнении (5) и прибавляя полученные в результате перестановки уравнения к уравнению (5), получаем сначала

$$\frac{\partial^2 \overline{g}_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu^2} - \frac{\partial^2 k_{\mu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} - \frac{\partial^2 k_{\mu\beta}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} = 0.$$

---

[4] Конечно, в силу общей ковариантности уравнения поля удовлетворяют четырем тождествам. В рассматриваемом здесь первом приближении это выражается в том, что дивергенция левой части уравнения (5), взятая по индексу α, тождественно обращается в нуль.

Прибавляя к этому уравнению два следствия из уравнения (2а)

$$-\frac{\partial^2 k_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 k_{\mu\mu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = -2\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_\beta},$$

$$-\frac{\partial^2 k_{\beta\mu}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 k_{\alpha\mu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = -2\frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_\alpha},$$

с учетом уравнения (6) получаем

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 \overline{g_{\alpha\beta}}}{\partial x_\mu^2} + \frac{\partial^2 \overline{g_{\mu\alpha}}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 \overline{g_{\mu\beta}}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 \overline{g_{\mu\mu}}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right) = \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_\alpha}. \tag{7}$$

Случай, когда электромагнитное поле отсутствует, отличается тем, что вектор ϕ_μ обращается в нуль. В этом случае уравнение (7) совпадает в первом порядке с уравнением, известным из существующей общей теории относительности,

$$R_{\alpha\beta} = 0$$

($R_{\alpha\beta}$ означает однократно свернутый тензор Римана). *Тем самым показано, что из нашей новой теории правильно следует закон чисто гравитационного поля в первом приближении.*

Дифференцируя уравнение (2а) по x_α и учитывая уравнение, получаемое сверткой (5) по α и β, находим

$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{8}$$

Учитывая, что левая часть $L_{\alpha\beta}$ уравнения (7) удовлетворяет тождеству

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(L_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}L_{\sigma\sigma}\right) = 0,$$

получаем из (7)

$$\frac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial x_\beta^2} + \frac{\partial^2 \phi_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \phi_\sigma}{\partial x_\sigma}\right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial x_\beta^2} = 0. \tag{9}$$

Уравнения (8) и (9), как известно, эквивалентны уравнениям Максвелла для вакуума. *Следовательно, новая теория дает в первом приближении также уравнения Максвелла.*

Однако разделение на гравитационное и электромагнитное поля в этой теории оказывается искусственным. Ясно также, что уравнения (5) содержат больше сведений, чем уравнения (7)—(9) вместе взятые. Далее примечательно, что согласно этой теории электрическое поле входит в уравнения не квадратично.

Примечание при корректуре. Аналогичные результаты получаются, если исходить из функции Гамильтона:

$$\mathfrak{H} = h g_{\mu\nu} g^{\alpha\sigma} g^{\beta\tau} \Lambda^{\mu}_{\alpha\beta} \Lambda^{\nu}_{\sigma\tau}.$$

Таким образом, в выборе $\mathfrak{H}$ все еще существует некоторая неопределенность.

89

ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ *

Теория относительности привела к радикальному изменению в научной концепции пространства и времени, метко охарактеризованному знаменитым изречением Минковского: «Отныне пространство само по себе и время само по себе превратились просто в фикцию, и лишь своего рода союз их сохраняет независимое существование». Это объединение, называемое «пространство-время», и составляет предмет данной статьи. Поскольку содержание ее представляется весьма трудным, большинство читателей, вероятно, предпочтет сначала прочитать в качестве элементарного введения статью «Относительность» [1].

Все наши мысли и понятия обусловлены чувственными ощущениями и имеют смысл только в связи с этими чувственными ощущениями. Однако, с другой стороны, они представляют собой продукты спонтанной деятельности нашего сознания; поэтому они никоим образом не являются логическим следствием содержания этих чувственных ощущений. Если же мы хотим понять сущность комплекса абстрактных понятий, то должны изучать взаимосвязи между понятиями и высказываниями о понятиях, с одной стороны, и исследовать, как они связаны с ощущениями, с другой.

Пока речь идет о том, каким образом понятия связаны друг с другом и с ощущениями, принципиальной разницы между системами понятий науки и понятиями повседневной жизни не существует. Системы понятий науки вырастали из понятий повседневной жизни, видоизменяясь и совершенствуясь в соответствии с предметом и целью рассматриваемой науки.

Чем более универсальным является понятие, тем чаще встречается оно в нашем мышлении, чем более косвенной будет его связь с чувственными ощущениями, тем труднее нам понять его значение. В частности,

---

* *Space-time*. Encycl. Brit. (14th Edition), XXI, 1929, 105—108.

[1] Статья «Относительность» в Британской Энциклопедии написана А. Эддингтоном.— *Прим. ред.*

это относится к донаучным понятиям, которыми мы привыкли пользоваться с детства. Вспомним понятия, связанные со словами «где», «когда», «почему», «быть», выяснению которых были посвящены бесчисленные тома философских книг. В наших рассуждениях мы находимся в положении не лучшем, чем рыба, пытающаяся выяснить, что такое вода.

Пространство

В этом разделе мы рассмотрим смысл слова «где», т. е. смысл пространства. Оказывается, что в наших индивидуальных примитивных ощущениях не содержится ничего, что можно было бы считать пространственным. Скорее то, что называется пространственным, связано с чем-то вроде порядка материальных объектов опыта. Поэтому прежде понятий, относящихся к пространству, должно существовать понятие «материальный объект». Это — логически первичное понятие. В этом легко убедиться, анализируя пространственные понятия, например, «рядом», «касание» и т. д., другими словами, отыскивая их эквиваленты в опыте. Понятие «объект» представляет собой способ описания существования во времени или же способ описания факта непрерывности комплексов опыта. Таким образом, существование объектов принадлежит к сфере понятий, и смысл понятий «объекты» целиком определяется их (интуитивной) связью с группами элементарных чувственных ощущений. На этой связи основана иллюзия, будто первичные ощущения дают нам непосредственные сведения об отношении материальных тел (которые существуют в конечном счете лишь постольку, поскольку мы мыслим о них).

В указанном смысле мы располагаем (косвенно) ощущением касания двух тел. Большего, чем привлечь внимание к этому, нам не требуется, так как, выделяя индивидуальные ощущения, на которые намекает это утверждение, мы ничего не выигрываем для наших целей. Многие тела можно привести в постоянное соприкосновение друг с другом различными способами. Поэтому мы говорим об относительном расположении тел. Общие законы расположения составляют в основном предмет геометрии. Это верно, по крайней мере, в том случае, если мы не хотим ограничиваться теоремами, встречающимися в этой отрасли знаний, в виде соотношений между бессодержательными словами, построенных по определенным правилам.

Донаучное мышление. Какой же смысл имеет понятие «пространство», с которым мы сталкиваемся и в донаучном мышлении? Понятие пространства в донаучном мышлении характеризуется следующим предложением: «Мы можем мысленно убрать вещи, но не пространство, которое они занимают». Это выглядит так, как будто мы без какого-либо предварительного опыта имеем понятие, или даже представление, о пространстве и как будто с помощью этого априорного понятия мы упорядочиваем наши чувственные ощущения. С другой стороны, пространство выглядит как физическая реальность, как вещь, существующая независимо от нашего сознания, подобно материальным объектам. Под влиянием этого взгляда на пространство фундаментальные понятия геометрии — точка, прямая, плоскость — считались даже самоочевидными. Фундаментальные принципы, которым подчинялись эти понятия, считались безусловно справедливыми и в то же время обладающими объективным содержанием. Без каких-либо колебаний приписывали объективный смысл таким фразам, как «три эмпирически заданных тела (практически бесконечно малых) лежат на одной прямой», не требуя для подобных утверждений физического определения. Слепая вера в очевидность и непосредственный реальный смысл понятий и теорем геометрии была подорвана только созданием неэвклидовой геометрии.

Земля как тело отсчета. Исходя из представления о том, что все пространственные понятия связаны с ощущением соприкосновения твердых тел, легко увидеть, как возникло понятие «пространство», т. е. как появилось нечто, независящее от тел и все же воплощающее их возможные расположения. Если имеется система соприкасающихся тел, покоящихся одно относительно другого, то некоторые из них можно заменить на другие. Это свойство допускать подстановки интерпретируется как «доступность пространства». Пространство означает свойство, благодаря которому твердые тела могут занимать разные положения. Представление о том, что пространство есть нечто, находящееся в гармонии с самим собой, возникло, вероятно, потому, что в донаучном мышлении положения всех тел относились к одному телу (телу отсчета), а именно к Земле. В научном мышлении Земля заменяется системой координат. Утверждение, что можно поместить в ряд одно за другим неограниченное число тел, означает, что пространство бесконечно. В донаучном мышлении понятия «пространство», «время» и «тело отсчета» едва ли различались вообще. Место или точка в пространстве всегда понималось как материальная точка на теле отсчета.

Геометрия Эвклида. Рассматривая геометрию Эвклида, мы ясно видим, что она изучает законы, управляющие положениями твердых тел. Она использует глубокую идею — свести все соотношения между телами и их взаимными положениями к очень простому понятию «отрезка». Отрезок предполагает наличие твердого тела, на котором взяты две материальных точки (метки). Понятие равенства отрезков (и углов) сводится к опытам, включающим совмещения; это же относится к теоремам конгруэнтности. Но эвклидова геометрия в том виде, в каком она была сформулирована Эвклидом, использует фундаментальные понятия «прямая», «плоскость», по-видимому, не связанные (во всяком случае столь непосредственно) с ощущениями, относящимися к положению твердых тел. (При этом следует заметить, что понятие прямой можно свести к понятию отрезка. Намек на это содержится в теореме: «Прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками». Эта теорема прекрасно служила определением прямой линии, хотя в логической структуре выводов это определение не играло роли). Кроме того, геометры интересовались больше логическим выводом геометрических теорем из нескольких положенных в основу аксиом, чем выяснением связи своих фундаментальных понятий с ощущениями.

Рассмотрим кратко, как можно вывести основания эвклидовой геометрии из понятия отрезка. Будем исходить из равенства отрезков (точнее, из аксиомы равенства отрезков). Предположим, что из двух неравных отрезков один всегда больше другого. Для неравенства отрезков должны выполняться такие же аксиомы, как для неравенства чисел. Три отрезка $\overline{AB'}$, $\overline{BC'}$, $\overline{CA'}$ при соответствующем выборе $\overline{CA}'$ можно расположить так, что при совпадении их меток B и B', C и C', A и A' получится треугольник ABC. Величина отрезка CA имеет верхний предел, когда это построение все еще возможно. Тогда точки A, (BB') и C будут лежать на одной «прямой» (определение). Это ведет к понятиям: построить отрезок, равный себе, разделить отрезок на равные части, измерить отрезок числом с помощью измерительной линейки (определение пространственного интервала между двумя точками).

Когда таким образом получено понятие интервала между двумя точками, или длины отрезка, нам для построения геометрии Эвклида аналитическим путем необходима лишь следующая аксиома (теорема Пифагора). Каждой точке пространства (тела отсчета) можно приписать три числа (координаты): x, y, z, и обратно; таким образом, что для каждой пары точек A (x_1, y_1, z_1) и B (x_2, y_2, z_2) выполняется теорема:

$$\text{число, измеряющее } AB, = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

На этой основе можно затем строить строго логическим путем все остальные понятия и теоремы геометрии Эвклида, в том числе и теоремы о прямой и плоскости. Эти замечания, разумеется, не предназначаются для того, чтобы заменить строго аксиоматическое построение эвклидовой геометрии. Мы хотели лишь показать, каким образом все понятия геометрии сводятся к понятию отрезка. Мы могли бы с таким же успехом считать, что весь базис геометрии Эвклида в сжатом виде заключается в упомянутой выше теореме. Связь с эмпирическими основами устанавливалась бы тогда с помощью дополнительной теоремы. Координаты можно и дóлжно выбрать так, что две пары точек, разделенные равными интервалами, вычисленными по теореме Пифагора, могут совмещаться на одном соответствующим образом выбранном отрезке (на твердом теле). Понятия и теоремы эвклидовой геометрии можно получить из теоремы Пифагора, не вводя представления о твердых телах. Но тогда эти понятия и теоремы не будут обладать содержанием, допускающим опытную проверку. Они будут не «истинными», а всего лишь логически правильными теоремами с чисто формальным содержанием.

Трудности. Серьезная трудность в изложенной выше интерпретации геометрии заключается в том, что твердое тело в нашем опыте не соответствует точно геометрическому телу. На нем не существует абсолютно определенных меток; к тому же температура, давление и другие условия изменяют законы, связанные с положением. Следует также напомнить, что структурные составляющие материи (например, атомы и электроны), изучаемые физикой, в принципе не тождественны твердым телам, но тем не менее к ним и их частям применяются понятия геометрии. По этой причине последовательные мыслители не были склонны придавать фактическое реальное содержание одной только геометрии. Они полагали, что предпочтительнее придавать эмпирическое содержание геометрии и физике вместе.

Это представление, конечно, менее уязвимо, чем изложенное выше. В атомной теории оно является единственным последовательным представлением. Тем не менее было бы неразумно отказываться от первого представления, на котором строится геометрия. Это утверждение существенно основывается на том, что идеально твердое тело является абстракцией, прочно укоренившейся в формулировках законов природы.

Основания геометрии. Перейдем теперь к вопросу: что́ является *априори* несомненным, или необходимым, соответственно в геометрии (доктрина пространства) или в ее основаниях? Прежде мы думали — все; теперь мы думаем—ничто. Уже понятие «отрезок» является логически произвольным; вовсе не обязаны существовать вещи, соответствующие ему даже приближенно. Аналогичное замечание можно сделать о понятиях прямой, плоскости, о трехмерности пространства и о справедливости теоремы Пифагора. Даже доктрина континуума никоим образом не дана нам в природе человеческого мышления, так что с точки зрения теории познания чисто топологическим соотношениям нельзя придавать большего значения, чем другим соотношениям.

Ранние физические понятия. Мы должны еще остановиться на изменениях в понятии пространства, сопровождавших появление теории относительности. Для этого мы рассмотрим понятие пространства в ранней физике с точки зрения, отличающейся от изложенной выше. Применительно к бесконечно близким точкам теорема Пифагора гласит:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

где ds означает измеримый интервал между ними. Для эмпирически заданного интервала ds это соотношение определяет систему координат еще не полностью. Кроме трансляции, систему координат можно также подвергнуть вращению. Аналитически это означает, что соотношения эвклидовой геометрии являются ковариантными относительно линейных ортогональных преобразований координат.

При использовании эвклидовой геометрии в дорелятивистской механике возникает еще одна неопределенность в выборе системы координат: состояние движения системы координат до известной степени является произвольным, а именно оказываются возможными преобразования координат вида

$$x' = x - vt,$$
$$y' = y,$$
$$z' = z.$$

Однако в старой механике не разрешалось применять системы координат, состояние движения которых отличалось бы от состояния движения, выражаемого этими уравнениями. В этом смысле мы говорим об «инерциальных системах». В этих привилегированных инерциальных системах мы сталкиваемся с новым свойством пространства, относящимся к геометрии. Точнее, это свойство не собственно пространства, а четырехмерного континуума, объединяющего время и пространство.

Появление времени. Здесь впервые в явном виде в наше рассмотрение входит время. На практике пространство (место) и время всегда встречаются вместе. Всякое событие, происходящее в мире, определяется пространственными координатами x, y, z и временной координатой t. Таким образом, физическое описание было четырехмерным с самого начала. Однако этот четырехмерный континуум казался разделенным на трехмерный пространственный и одномерный временной континуумы. Это кажущееся разделение обязано своим происхождением иллюзии, будто понятие «одновременность» имеет самоочевидный смысл, а эта иллюзия возникает потому, что мы получаем сведения о близких событиях почти мгновенно, с помощью световых сигналов.

Эта вера в абсолютный смысл одновременности была разрушена законом распространения света или, другими словами, электродинамикой Максвелла — Лоренца. Две бесконечно близкие точки могут быть связаны световым сигналом, если для них выполняется соотношение

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0.$$

Далее оказывается, что величина интервала ds для двух произвольно взятых бесконечно близких пространственно-временных точек не зависит от конкретного выбора инерциальной системы координат. В согласии с этим для перехода от одной инерциальной системы к другой мы находим линейные уравнения преобразования, не оставляющие вообще говоря значения времени событий неизменными. Таким образом стало очевидным, что существует произвол в разбиении четырехмерного пространственно-временнóго континуума на временнóй и пространственный континуумы. Инвариантная величина ds может быть измерена с помощью измерительных линеек и часов.

Четырехмерная геометрия. На базе инварианта ds можно построить четырехмерную геометрию, в значительной степени аналогичную эвклидовой геометрии трех измерений. Таким образом, физика становится чем-то вроде статики в четырехмерном континууме. Кроме различия в числе измерений, этот континуум отличается от пространства эвклидовой геометрии тем, что ds^2 может быть больше или меньше нуля. В соответствии с этим мы различаем временноподобные и пространственноподобные интервалы. Границей между ними служит «световой конус» $ds^2 = 0$ с вершиной в произвольной точке. Рассматривая только элементы, принадлежащие одному значению времени, мы имеем

$$-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Эти элементы ds могут быть представлены в виде покоящихся отрезков и для них, как и прежде, сохраняется эвклидова геометрия.

Влияние специальной и общей теории относительности. В этом и заключалось изменение, вносимое специальной теорией относительности в концепцию пространства и времени. Концепция пространства и времени видоизменяется еще больше в общей теории относительности, так как эта теория отрицает, что пространственное сечение пространственно-временнóго континуума является эвклидовым. Следовательно, она утверждает, что для относительных положений тел, постоянно находящихся в соприкосновении, эвклидова геометрия несправедлива.

Эмпирический закон равенства инертной и гравитационной массы позволяет нам интерпретировать гравитационное поле как состояние континуума, отнесенное к неинерциальной системе, и считать неинерциальные системы эквивалентными инерциальным системам. В такой неинерциальной системе, связанной с инерциальной системой, нелинейным преобразованием координат, метрический инвариант ds^2 принимает вид

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu,$$

где величины $g_{\mu\nu}$ являются функциями координат, а суммирование производится по индексам во всех комбинациях 11, 12,..., 44. Зависимость величин $g_{\mu\nu}$ от координат эквивалентна наличию гравитационного поля. Если гравитационное поле является достаточно общим, то вообще невозможно найти инерциальную систему, т. е. такую систему координат, в которой ds^2 выражается в простом виде, указанном выше:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Однако и в этом случае в бесконечно малой окрестности пространственно-временно́й точки все же существует локальная система отсчета, в которой интервал ds выражается в только что указанном простом виде. Это положение вещей приводит к геометрии, которая была создана гением Римана более чем за полвека до появления общей теории относительности. Риман предсказывал этой геометрии большое значение для физики.

Геометрия Римана. Геометрия Римана в n-мерном пространстве относится к геометрии Эвклида в n-мерном пространстве так же, как геометрия кривых поверхностей к геометрии плоскости. Для бесконечно малой окрестности точки на кривой поверхности существует локальная система координат, в которой расстояние ds между двумя бесконечно близкими точками определяется формулой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Однако для всякой произвольной (гауссовой) системы координат в конечной области искривленной поверхности справедлива формула вида

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2.$$

Если заданы величины $g_{\mu\nu}$ как функции x_1 и x_2, то поверхность оказывается вполне определенной геометрически, ибо по этой формуле для каждой пары бесконечно близких точек на поверхности можно вычислить длину ds малого стержня, соединяющего их. С помощью этой формулы можно вычислить все сетки на поверхности, которые строятся из таких малых стержней. В частности, можно вычислить «кривизну» в каждой точке поверхности. Кривизна есть величина, выражающая, в какой степени и каким образом законы расположения малых стержней в непосредственной окрестности рассматриваемой точки отклоняются от соответствующих законов плоской геометрии.

Теория поверхностей Гаусса была обобщена Риманом на случай континуума с произвольным числом измерений и, таким образом, проложила путь общей теории относительности. В самом деле, выше было показано, что для двух бесконечно близких пространственно-временны́х точек существует величина ds, полученная измерением с помощью твердых измерительных стержней и часов (в случае временно-подобных элементов, разумеется, с помощью одних часов). Эта величина в математической теории занимает место длины малых стержней в трехмерной геометрии. Кривые, для которых $\int ds$ имеет стационарное значение, определяют траектории материальных точек и лучей света в гравитационном поле, и «кривизна» пространства зависит от распределения вещества в пространстве.

Совершенно так же, как в геометрии Эвклида, понятие пространства соответствует возможным расположениям твердых тел; в общей теории относительности понятие пространства-времени соответствует свойствам твердых тел и часов. Однако пространственно-временнóй континуум отличается от пространственного континуума тем, что законы, управляющие поведением этих объектов (часов и измерительных стержней), зависят от их местонахождения. Континуум (или величины, описывающие его) входит в законы природы явно, и, наоборот, свойства континуума определяются физическими факторами. Соотношения, связывающие пространство и время, уже нельзя считать чем-то отличающимся от самой физики. Ничего определенного неизвестно о том, какими свойствами может обладать пространственно-временнóй континуум как целое. Однако общая теория относительности делает более вероятным, что континуум является бесконечным в своей временноподобной части, но конечным в пространственноподобной части.

Время

Физическое понятие времени отвечает понятию, присущему интуитивному мышлению. Но такое понятие восходит к порядку во времени ощущений индивидуума, и этот порядок мы должны принимать как нечто первично данное. Некто ощущает момент «теперь» или, выражаясь точнее, чувственное ощущение в данный момент, соединенное с воспоминанием о (прежних) чувственных ощущениях. Это и есть причина того, что чувственные ощущения, по-видимому, образуют временны́е ряды ощущений, основанные на оценках «раньше» и «позже». Эти ряды могут повторяться, и тогда они могут быть опознаны. Они могут также повторяться неточно, с заменой некоторого числа событий другими, причем характер повторения для нас не утрачивается. Таким образом, мы приходим к представлению времени в виде некоего одномерного каркаса, который можно заполнить ощущениями разными способами. Одни и те же ряды ощущений отвечают тем же субъективным интервалам времени.

Переход от этого «субъективного» времени («Ich-Zeit») к понятию времени донаучного мышления связывается с возникновением идеи о существовании реального внешнего мира, независимого от субъекта. В этом смысле (объективное) событие ставится в соответствие с субъективным ощущением. В таком же смысле «субъективное» время ощущения сопоставляется с «временем» соответствующего «объективного» события. В противоположность ощущениям внешние события и их порядок во времени претендуют на справедливость для всех субъектов.

Этот процесс объективизации не представлял бы никаких затруднений, если бы временнóй порядок ощущений, соответствующих рядам внешних событий, был одинаковым для всех индивидуумов. В случае непосредственных зрительных восприятий в нашей повседневной жизни это соответствие является точным. Именно поэтому идея о существовании объективного порядка во времени стала столь широко распространенной. При более подробном рассмотрении идеи объективного мира внешних событий оказалось необходимым установить более сложную зависимость между событиями и ощущениями. Впервые это было сделано с помощью инстинктивных правил мышления, в которых особенно важную роль играет понятие пространства. Процесс усложнения понятий ведет в конечном счете к естественным наукам.

Измерение времени производится с помощью часов. Часы — это такой прибор, который автоматически проходит последовательно через (практически) одинаковые ряды событий (период). Число пройденных периодов (время по часам) служит мерой времени. Смысл этого определения совершенно ясен, если событие происходит в непосредственной пространственной окрестности часов; тогда все наблюдатели независимо от своего положения (зрительным путем) отметят одинаковое время по часам одновременно с событием. До создания теории относительности предполагалось, что понятие одновременности имеет абсолютный объективный смысл также и для событий, разделенных в пространстве.

Это предположение было опровергнуто открытием закона распространения света. В самом деле, если скорость света в пустоте оказывается величиной, не зависящей от выбора (или, другими словами, от состояния движения) инерциальной системы, к которой она относится, то нельзя придавать никакого абсолютного смысла понятию одновременности событий, разделенных пространственным расстоянием. Более того, в каждой инерциальной системе должно быть определено свое особое время. Если же для отсчета не используется никакая система координат (инерциальная система), то не имеет смысла и утверждать, что события в разных точках пространства происходят одновременно. Именно вследствие этого пространство и время сливаются в единый четырехмерный континуум.

В речи, похожей по содержанию на эту статью в Британской Энциклопедии и произнесенной в Ноттингеме 7 июня 1930 года, Эйнштейн сделал любопытное замечание о единой теории поля:

«Мы приходим к странному выводу: сейчас нам начинает казаться, что первичную роль играет пространство; материя же должна быть получена из пространства, так сказать, на следующем этапе. Пространство поглощает материю. Мы всегда рассматривали материю первичной, а пространство вторичным. Пространство, образно говоря, берет сейчас реванш и «съедает» материю. Однако все это остается пока лишь сокровенной мечтой».

Содержание речи изложено в статье: «Prof. Einstein's Adress at the University of Nottingham» (Science, 71, 1930, 608—609).

О СОВРЕМЕННОМ СОСТОЯНИИ ТЕОРИИ ПОЛЯ*

Теория поля, представляющая, с моей точки зрения, наиболее глубокую концепцию теоретической физики со времени основания последней Ньютоном, зародилась в уме Фарадея. Как просто выглядит эта идея теперь и все же насколько она величественна! Вместо того, чтобы думать: «Электрическая частица e_1 действует на другую электрическую частицу e_2 через пространство и вызывает появление действующей на последнюю движущей силы», Фарадей мыслил: «Электрическая частица уже самим своим существованием порождает изменение состояния пространства в своей непосредственной окрестности (электрическое поле). Пространственное распределение и изменение во времени этого поля подчиняются законам, присущим пространству. В силу этих законов поле, порождаемое частицей e_1, доходит до частицы e_2 и действует там на нее». Вскоре из этой идеи выросли замечательные законы электромагнитного поля Максвелла. Герц окончательно показал, что эта теория имеет преимущество перед ньютоновой теорией дальнодействия, а вслед затем Г. А. Лоренц доказал, что это поле присутствует в пустоте всюду, в том числе и внутри вещества, так как элементарные кирпичики вещества — по крайней мере с точки зрения электродинамики — представляют собой не что иное, как источники электрического поля. Таким было состояние теории к концу столетия.

Прежде чем рассматривать дальнейшее развитие теории поля, я хочу сделать краткое замечание о целях и путях теоретического исследования вообще. Теория преследует две цели.

1. Охватить по возможности все явления и их взаимосвязи (полнота).

2. Добиваться этого, взяв за основу как можно меньше логически взаимно независимых понятий и произвольно установленных соотношений

---

* *Über den gegenwärtigen Stand der Feld-Theorie.* Festschrift Prof. Dr. A. Stodola zum 70. Geburtstag, Füssli Verlag, Zürich u. Leipzig, 1929, 126—132.

между ними (основных законов или аксиом). Эту цель я буду называть «логической единственностью».

Если говорить, честно, второе пожелание можно выразить также следующим образом: мы хотим не только знать, *как* устроена природа (и *как* происходят природные явления), но и по возможности достичь цели, может быть, утопической и дерзкой на вид,— узнать, почему природа является именно такой, а не другой. В этом ученые находят наивысшее удовлетворение.

Например, из представлений молекулярно-кинетической теории теплоты выводится определенное количественное соотношение между давлением, объемом и температурой (уравнение состояния) одноатомного газа, с одной стороны, и его теплоемкостью —с другой; аналогичное количественное соотношение выводится между вязкостью и теплопроводностью таких газов. Во всех подобных случаях речь идет о том, чтобы понять эмпирическую закономерность как логическую необходимость. Приняв однажды основную гипотезу молекулярно-кинетической теории теплоты, исследователь ощущает до известной степени, что сам бог не мог бы изменить, эти взаимосвязи в том виде, в каком они существуют, как не мог бы он превратить число 4 в простое [1]. В этом состоит прометеевский элемент научного творчества, который выше был назван школьным выражением «логическая единственность». Для меня в этом и заключается постоянное очарование научного мышления; это образует, так сказать, религиозный базис научных изысканий.

Вернемся после этого отступления к теории поля, дальнейшие шаги которой следуют логике. Из равноправности всех инерциальных систем, доказанной на опыте, в сочетании с опытным законом постоянства скорости света, нашедшим концентрированное выражение в электродинамике Максвелла — Лоренца, выросла специальная теория относительности. Она принесла нам далеко идущее объединение самостоятельных до того теоретических понятий; в единые сущности слились, с одной стороны, электрическое и магнитное поля, с другой — инертная масса и энергия. Этими достижениями мы также обязаны теории поля.

Следующей ступенью на пути к объединению была общая теория относительности. Она внесла логическое единство в раздельные до того понятия инерции и тяготения, эмпирическая связь между которыми уже давно была установлена понятием массы. Однако величайшее изящество этой теории заключается в том, что, исходя из совершенно общих логических принципов (равноправие всех состояний движения), она позволила вывести логическим путем сложный закон гравитационного поля. Этот закон получился в ответ на вопрос: каковы простейшие законы, которым

[1] Понятно, что эти предложения не претендуют на теоретико-познавательную мудрость, а только иллюстрируют определенные переживания исследователя.

можно подчинить четырехмерный континуум, обладающий метрикой Римана? Удача этой попытки вывести законы природы чисто умозрительным путем, основываясь на убеждении в формальной простоте действительности, поощряет к дальнейшему движению по этому пути, опасности которого отчетливо должен представлять себе каждый, кто отважится вступить на него [2].

Отвлекаясь теперь от квантовой загадки, разрешение которой, несмотря на столь многообещающие начинания, по-моему, дело далекого будущего, мы можем считать теорию поля удовлетворительной только в том случае, если она будет рассматривать электрическое и гравитационное поля как проявление единой структуры четырехмерного пространственно-временно́го континуума. Для решения этой проблемы опыт, по-видимому, не дает нам ничего; однако можно надеяться, что среди результатов готовой, полученной умозрительным путем теории найдутся и такие, которые допускают проверку на опыте.

Для решения упомянутой проблемы существует теоретическая идея Г. Вейля, впоследствии обобщенная А. Эддингтоном, а также вторая идея, которую я исследую в последние годы. В дальнейшем я попытаюсь изложить лишь сущность метрических структур четырехмерного континуума, положенных в основу этих теорий, и несколько подробнее познакомить с рассматриваемой мной теорией.

Общим для всех теорий является следующее. Мир понимается как четырехмерный континуум, отдельные точки которого P сопоставляются с пространственно-временными непротяженными точечными событиями физического бытия. Каждой такой точке ставится в соответствие четверка координат (x_1, x_2, x_3, x_4) таким образом, что «близким пространственно-временным» событиям соответствуют близкие значения координат. В каждой точке имеется бесконечно малый конус (световой конус), точки P' на поверхности которого характеризуются тем, что в них можно посылать световые сигналы из P. В бесконечно малой локальной системе координат этот конус описывается уравнением

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2 = 0 \qquad (1)$$

или в произвольной системе кординат $(x_1, \ldots, x_4)$ уравнением

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0. \qquad (2)$$

В этом смысле пространственные функции $g_{\mu\nu}$, определенные, в соответствии со сказанным, лишь с точностью до множителя, выражают физиче-

[2] Сравнение Мейерсона с гегелевской постановкой цели, конечно, до известной степени оправдано; оно ярко освещает подчеркиваемую здесь опасность.

ски реальное свойство пространства — законы распространения световых сигналов.

Согласно теории Вейля, все физические сущности, например гравитационное и электромагнитное поля, свойства масштабов и часов (метрическое поле), должны сводиться только к одной этой структуре. В самом деле, эта теория наряду с описанием тяготения дает также описание электромагнитного поля, поскольку она, естественно, приводит к существованию четырех величин φ_μ, антисимметричные производные которых имеют тензорный характер. Слабость этой теории с самого начала заключалась в том, что она противоречила элементарному свойству метрики, согласно которому поведение масштабов или часов не зависит от их предыстории.

Чисто формально основы этой теории можно описать следующим образом. Если мы проведем из одной точки P континуума два линейных элемента (или элементарных вектора) PP' и PP'' с координатами ($d'x^1$, $d'x^2$, $d'x^3$, $d'x^4$) и ($d''x^1, \ldots, d''x^4$), то их численное отношение должно иметь объективное значение и его можно вычислить из квадратичной формы (2). Эта квадратичная форма, определенная с точностью до множителя λ, задает также относительное направление (угол) для двух векторов, исходящих из одной точки. Напротив, ни отношению двух линейных элементов (т. е. отношению величин), ни отношению векторов, начинающихся в двух разделенных конечным расстоянием точках континуума (т. е. отношению направлений), нельзя приписывать никакого реального смысла. Удивительно, что для этого континуума, столь бедного структурными свойствами, все-таки можно построить инвариантную теорию, наделенную такими формальными свойствами, что ее можно попытаться использовать для изображения физических свойств пространства.

Следующий континуум, более богатый метрическими свойствами, это — континуум Римана. В этом континууме реальное значение приписывается отношению величин не только двух векторов, исходящих из одной точки, но и двух векторов, исходящих из точек P и P', разделенных конечным расстоянием. Математически это следует из того, что величина

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{3}$$

для каждого линейного элемента имеет определенное значение (с точностью до несущественного множителя, не зависящего от x^ν). То обстоятельство, что математики обратили внимание сначала на континуум, обладающий такой структурой, понятно с исторической точки зрения. Всякая поверхность, вложенная в трехмерное эвклидово пространство, есть двумерный континуум Римана. Как известно, с этой точки зрения Гаусс рассматривал теорию поверхностей; затем Риман обобщил ее, поняв, что вложение поверхностей в эвклидово пространство является несущественным и что существенные элементы теории можно распространить на произвольное число измерений. Как известно, уже Риман думал, что континуум нашего пространственного эмпирического мира, возможно, обладает подобной метрической структурой.

Уравнения гравитационного поля общей теории относительности являются простейшими ковариантными относительно преобразований координат дифференциальными уравнениями, которым можно подчинить величины $g_{\mu\nu}$ риманова континуума; при этом сами функции $g_{\mu\nu}$ (или величина ds) описывают как метрические соотношения в пространственно-временно́м континууме, так и гравитационное поле. С точки зрения логического единства общая теория относительности была бы совершенной теорией, если бы величины $g_{\mu\nu}$ в ней описывали также электромагнитное поле. То, что это не так, было ясно с самого начала; в теорию пришлось ввести логически самостоятельную линейную форму $\varphi_i dx^i$, причем величины φ^i играли роль электромагнитного потенциала. Однако кажется невероятным, чтобы гравитационные и электрические поля в пространстве имели различную природу (хотя между ними и существует причинная связь). Теория Римана еще не позволяет объяснить единство сил природы, сомневаться в котором для инстинкта теоретика абсолютно невозможно.

После двенадцати лет поисков, полных разочарований, я открыл теперь метрическую структуру континуума, промежуточную между римановой и эвклидовой, исследование которой ведет к действительно единой теории поля. Это видно из следующего рассуждения. Геометрия Эвклида отличается от геометрии Римана в широком смысле тем, что в ней два разделенных конечным расстоянием линейных элемента, или вектора, можно сравнивать не только по величине, но и по направлению. Но эвклидов континуум представляет собой не единственный частный случай риманова континуума, в котором возможно это сравнение; существуют континуумы более общего вида с «абсолютным (далеким) параллелизмом» векторов. Новую структуру пространства математически можно описать следующим образом.

Наличие метрики Римана гарантирует, что в каждой области n-мерного континуума существует ортогональный n-под (n-репер). Если принять его в качестве локальной системы координат, то величина линейного элемента в такой системе будет задаваться формулой [3]

$$ds^2 = \sum ({}^a ds)^2. \tag{4}$$

Предположим, что в общей системе координат величины ${}_a h^\nu$ означают n компонент оси a этого n-пода. Тогда компоненты линейного элемента dx^ν будут выражаться формулой

$$dx^\nu = {}_a h^\nu \, {}^a dx. \tag{5}$$

[3] По предположению Вейценбека, отнесение к оси локального n-пода выражается левым индексом.

Обратные соотношения имеют имеют вид

$$^{a}dx = {}^{a}h_{\nu}dx^{\nu}, \tag{6}$$

где коэффициентами являются нормированные миноры величины h. Из соотношений (4) и (5) следует

$$ds^2 = {}^{a}h_{\mu}\,{}^{a}h_{\nu}\,dx^{\mu}\,dx^{\nu},$$

так что коэффициенты метрики Римана $g_{\mu\nu}$ выражаются через величины h формулой

$$g_{\mu\nu} = {}^{a}h_{\mu}\,{}^{a}h_{\nu}. \tag{7}$$

В этой теории величины h являются элементарными переменными поля, через которые выражаются метрические функции g.

Покажем теперь существование абсолютного параллелизма. В *одной* точке P_0 ориентацию локального ортогонального n-пода можно выбрать произвольно. Но для других точек она уже будет определяться однозначно условием, чтобы все соответственные оси локальных n-подов были взаимно параллельными. Тогда параллельные векторы будут иметь одинаковые локальные компоненты. Таким образом, для параллельного переноса вектора A из точки P в бесконечно близкую точку P' выполняется формула

$$\delta^{a}A = 0 \tag{8}$$

или, в силу соотношений (5), (6) и (8),

$$\delta A^{\nu} = \delta\left({}_{a}h^{\nu}\,{}^{a}A\right) = \frac{\partial_{a}h^{\nu}}{\partial x^{\tau}}\,{}^{a}A\delta x^{\tau} = \frac{\partial_{a}h^{\nu}}{\partial x^{\tau}}\,{}^{a}h_{\sigma}A^{\sigma}\delta x^{\tau} =$$

$$= {}^{a}h_{\sigma}\,\frac{\partial_{a}h^{\nu}}{\partial x^{\tau}}\,A^{\sigma}\delta x^{\tau} = -\,{}_{a}h^{\nu}\,\frac{\partial^{a}h_{\sigma}}{\partial x^{\tau}}\,A^{\sigma}\delta x^{\tau}.$$

Полагая

$$\Delta^{\nu}_{\sigma\tau} = {}_{a}h^{\nu}\,{}^{a}h_{\sigma,\tau}\left(= {}_{a}h^{\nu}\,\frac{\delta^{a}h_{\sigma}}{\delta x^{\tau}}\right), \tag{9}$$

перепишем закон параллельного переноса в виде

$$\delta A^{\nu} = -\,\Delta^{\nu}_{\sigma\tau}A^{\sigma}\delta x^{\tau}. \tag{10}$$

Здесь величины Δ в известном смысле аналогичны символам Кристоффеля $\Gamma^{\nu}_{\sigma\tau}$ в геометрии Римана, поскольку они являются коэффициентами в соотношении, выражающем закон параллельного переноса. Однако именно в этих величинах проявляется противоположность двух структур. Величины Γ в геометрии Римана симметричны по нижним индексам, но выраженный через них закон переноса неинтегрируем. Величины Δ, напротив, несимметричны, но выражаемый через них закон переноса интегрируем. Величины Δ, как и образованные из них антисимметричные выражения

$$\Lambda^{\nu}_{\sigma\tau} = \Delta^{\nu}_{\sigma\tau} - \Delta^{\nu}_{\tau\sigma}, \tag{11}$$

обладают тензорным характером. Свертыванием этого тензора получается вектор $\varphi_\sigma = \Lambda^{\alpha}_{\sigma\alpha}$, играющий в физических приложениях теории роль электромагнитного потенциала. Существование тензора $\Lambda^{\nu}_{\sigma\tau}$ обусловливает наличие инвариантов, образованных из величин h и их первых производных. Простейшие законы, которым подчиняется такой континуум, находятся следующим образом. Образуем линейную комбинацию

$$J = AJ_1 + BJ_2 + CJ_3 \tag{12}$$

трех инвариантов:

$$\begin{aligned} J_1 &= g^{\mu\nu}\Lambda^{\alpha}_{\mu\beta}\Lambda^{\beta}_{\nu\alpha}, \\ J_2 &= g^{\mu\nu}\Lambda^{\alpha}_{\mu\alpha}\Lambda^{\beta}_{\nu\beta}, \\ J_3 &= g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}g_{\lambda\xi}\Lambda^{\lambda}_{\mu\nu}\Lambda^{\xi}_{\sigma\tau}. \end{aligned} \tag{12a}$$

Далее, выбирая функцию Гамильтона

$$\mathfrak{H} = |{}^{\mu}h_{\nu}|\,J = hJ, \tag{13}$$

запишем вариационный принцип

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}\,d\tau\right\} = 0 \tag{14}$$

для таких вариаций величин ${}^{\mu}h_{\nu}$, которые обращаются в нуль на пределах интегрирования. Тогда получаются 16 уравнений для 16 полевых переменных h.

Разработка и физическая интерпретация теории затрудняется по той причине, что для выбора соотношений между постоянными A, B и C априори не существует никаких оснований. Оказывается, что при выборе постоянных

$$\begin{aligned} B &= -A, \\ C &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

получаются уравнения поля, в первом приближении согласующиеся с известными законами гравитационного и электромагнитного полей. Вычисления, проведенные совместно с Г. Мюнцем, показали даже, что поле материальной точки без электрического заряда в развитой здесь теории в точности совпадает с полем, которое дает первоначальная общая теория относительности.

Вывод и обсуждение уравнений поля будут приведены в другом месте. Следует лишь упомянуть, что специальный выбор постоянных (15) [4] должен быть сделан только в уравнениях поля, а отнюдь не в уравнении (14); в противном случае будут теряться уравнения электромагнитного поля.

Благодаря полученным до сих пор результатам я почти не сомневаюсь, что указанное здесь соединение метрики Римана с постулатом о существовании абсолютного параллелизма дает естественное описание физических свойств пространства в рамках теории поля.

Между тем более глубокий анализ общих свойств структур описанного выше рода привел меня к убеждению, что наиболее естественные выражения для уравнений поля следует получать не из принципа Гамильтона, а другим путем. [Ср. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1929, 2—7. (Статья 91.— *Ред.*)]

Хотя эта статья не является первой, в которой Эйнштейн обсуждает идеи единой теории поля (ср. статьи 72—75, 79, посвященные старому варианту, и особенно 87 и 88), она интересна как наиболее ясное изложение идей нового, второго, варианта теории, на которую Эйнштейн возлагал большие надежды. Математическое изложение теории дано в статье 97.

[4] По крайней мере, соотношение $B = -A$.

К ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ*

В двух недавно опубликованных работах [1] я старался показать, что к единой теории тяготения и электричества можно прийти, приписывая четырехмерному континууму, кроме метрики Римана, также свойство «абсолютного параллелизма». В действительности удалось также придать единый смысл гравитационному и электромагнитному полям. Напротив, попытки вывода уравнений поля из принципа Гамильтона не привели меня к простому и однозначному пути. Однако с того времени мне удалось отыскать удовлетворительный способ вывода уравнений, который излагается ниже.

§ 1. Формальное введение

Воспользуемся обозначениями, предложенными недавно Вейценбеком в его работе [2]. Компонента ν s-й оси n-пода обозначается через ${}_sh^\nu$, а соответствующие нормированные миноры — через ${}^sh_\nu$. Локальные n-поды все установлены «параллельно». Параллельными и равными называются такие векторы, которые — каждый по отношению к своему локальному n-поду — обладают одинаковыми координатами. Параллельный перенос вектора определяется соотношением

$$\delta A^\mu = -\Delta^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha \delta x^\beta = -{}_sh^\mu\, {}^sh_{\alpha,\beta} A^\alpha \delta x^\beta,$$

где запятая в индексе у символа ${}^sh_{\alpha,\beta}$ указывает на дифференцирование в обычном смысле по x^β. «Тензор кривизны Римана» (несимметричный по индексам α и β), образованный из величин $\Delta^\mu_{\alpha\beta}$, тождественно равен нулю.

---

* *Zur einheitlichen Feldtheorie.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1929, 2—7.

[1] Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1928, 217, 224. (Статьи 87 и 88.)
[2] Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1928, 426.

«Ковариантное дифференцирование» мы будем производить только с помощью величин Δ. Вслед за итальянскими математиками будем обозначать его точкой с запятой перед соответствующим индексом, например

$$A_{\mu;\sigma} \equiv A_{\mu,\sigma} - A_\alpha \Delta^\alpha_{\mu\sigma},$$

$$A^\lambda_{;\,\sigma} \equiv A^\mu_{,\,\sigma} + A^\alpha \Delta^\mu_{\alpha\sigma}.$$

Поскольку ковариантные производные величин ${}^s h_\nu$, а также $g_{\mu\nu} (\equiv {}^s h_\mu\, {}^s h_\nu)$ и $g^{\mu\nu}$ обращаются в нуль, то эти величины можно записывать в качестве сомножителей как до, так и после оператора ковариантного дифференцирования.

В отличие от прежних обозначений я определяю тензор Λ (опуская множитель $^1/_2$) соотношением

$$\Lambda^\alpha_{\mu\nu} \equiv \Delta^\alpha_{\mu\nu} - \Delta^\alpha_{\nu\mu}.$$

Главное отличие новых формул от известных формул абсолютного дифференциального исчисления, приводящих к несимметричному закону переноса, заключается в образовании дивергенции. Пусть символ $T^{\cdot\cdot\sigma}$ означает произвольный тензор с верхним индексом σ. Его ковариантная производная, если мы запишем только дополнительный член, соответствующий индексу σ, равна

$$T^{\cdots\sigma}_{\cdot\cdot;\tau} \equiv \frac{\partial T^{\cdot\cdot\sigma}_{\cdot\cdot}}{\partial x_\sigma} + \cdots + T^{\cdot\cdot\alpha}_{\cdot\cdot} \Delta^\sigma_{\alpha,\tau}.$$

Умножая это уравнение после свертывания по индексам σ и τ на определитель h и вводя в правой части тензорную плотность $\mathfrak{T}$, получаем

$$hT^{\cdot\cdot\sigma}_{\cdot\cdot;\tau} \equiv \frac{\partial \mathfrak{T}^{\cdot\cdot\sigma}_{\cdot\cdot}}{\partial x^\sigma} + \cdots + \mathfrak{T}^{\cdot\cdot\alpha}_{\cdot\cdot} \Lambda^\sigma_{\alpha\sigma}.$$

Если закон переноса симметричен, то последний член в правой части отсутствует. Он представляет собой некоторую тензорную плотность, так же как и все остальные члены в правой части, которые в согласии с обычными обозначениями мы будем называть дивергенцией тензорной плотности $\mathfrak{T}$ и записывать в виде[3]

$$\mathfrak{T}^{\cdot\cdot\sigma}_{\cdot\cdot|\sigma}.$$

Тогда получим

$$hT^{\cdot\cdot\sigma}_{\cdot\cdot;\sigma} \equiv \mathfrak{T}^{\cdot\cdot\sigma}_{\cdot\cdot|\sigma} + \mathfrak{T}^{\cdot\cdot\alpha}_{\cdot\cdot} \Lambda^\sigma_{\alpha\sigma}.$$

---

[3] Ср., однако, работу 99, § 1.— *Прим. ред.*

Наконец, введем еще одно обозначение, которое, как мне кажется, улучшит обозримость формул. Поднятие или опускание индекса я буду иногда указывать, подчеркивая соответствующий индекс. Например, символ $(\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\nu}})$ означает чисто контравариантный тензор, соответствующий тензору $(\Lambda^{\sigma}_{\mu\nu})$, а символ $(\Lambda^{\underline{\sigma}}_{\mu\nu})$ — чисто ковариантный тензор, соответствующий тензору $(\Lambda^{\sigma}_{\mu\nu})$.

§ 2. Вывод некоторых тождеств

Тождество

$$0 \equiv -\Delta^{i}_{kl,m} + \Delta^{i}_{km,l} + \Delta^{i}_{\sigma l}\Delta^{\sigma}_{km} - \Delta^{i}_{\sigma m}\Delta^{\sigma}_{kl} \tag{2}$$

означает, что «кривизна» обращается в нуль. Мы воспользуемся этим тождеством для вывода некоторого условия, которому удовлетворяет тензор Λ. Образуем из уравнения (1) путем циклической перестановки индексов k, l, m два уравнения и сложим все три уравнения. Тогда после соответствующих перегруппировок непосредственно получаем тождество

$$0 \equiv (\Lambda^{i}_{kl,m} + \Lambda^{i}_{lm,k} + \Lambda^{i}_{mk,l}) + (\Delta^{i}_{\sigma k}\Lambda^{\sigma}_{lm} + \Delta^{i}_{\sigma l}\Lambda^{\sigma}_{mk} + \Delta^{i}_{\sigma m}\Lambda^{\sigma}_{kl}).$$

Преобразуем это соотношение, вводя вместо обычных производных тензора Λ ковариантные. После перегруппировки членов без труда получим тождество

$$0 \equiv (\Lambda^{i}_{kl;m} + \Lambda^{i}_{lm;k} + \Lambda^{i}_{mk;l}) + (\Lambda^{i}_{k\alpha}\Lambda^{\alpha}_{lm} + \Lambda^{i}_{l\alpha}\Lambda^{\alpha}_{mk} + \Lambda^{i}_{m\alpha}\Lambda^{\alpha}_{kl}). \tag{3}$$

Это и есть условие того, что тензор Λ выражается указанным способом через h.

Однократным свертыванием уравнения (3), полагая для краткости $\Lambda^{\alpha}_{\mu\alpha} = \varphi_{\mu}$, получаем следующее, важное для дальнейшего тождество

$$0 \equiv \Lambda^{\alpha}_{kl;\alpha} + \varphi_{l;k} - \varphi_{k;l} - \varphi_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{kl}. \tag{3a}$$

Преобразуем это тождество, введя тензорную плотность антисимметричную по k и l,

$$\mathfrak{V}^{\alpha}_{kl} = h\,(\Lambda^{\alpha}_{kl} + \varphi_{l}\delta^{\alpha} - \varphi_{k}\delta^{\alpha}_{l}). \tag{4}$$

Тогда тождество (3a) принимает простой вид

$$(\mathfrak{V}^{\alpha}_{kl})_{|\alpha} \equiv 0. \tag{3б}$$

Тензорная плотность $\mathfrak{V}^{\alpha}_{kl}$ удовлетворяет еще одному тождеству, представляющему интерес для дальнейшего. Для вывода этого тождества мы будем опираться на следующее правило перестановки при образовании дивергенции тензорных плотностей произвольного ранга

$$\mathfrak{A}^{\cdot ik}_{\cdot|i|k} - \mathfrak{A}^{\cdot ik}_{\cdot|k|i} \equiv -(\mathfrak{A}^{\cdot ik}_{\cdot}\Lambda^{\sigma}_{ik})_{|\sigma}. \tag{5}$$

Точками у $\mathfrak{A}$ обозначены произвольные индексы, одинаковые во всех трех членах уравнения, а именно те индексы, которые не участвуют в образовании дивергенции.

Доказательство правила (5) основывается, кроме определяющей формулы

$$\mathfrak{A}^{\sigma\cdot\cdot i}_{\tau\cdot\cdot|i} = \mathfrak{A}^{\sigma\cdot\cdot i}_{\tau\cdot\cdot,i} + \mathfrak{A}^{\alpha\cdot\cdot i}_{\tau\cdot\cdot}\Delta^{\sigma}_{\alpha i} \cdots - \mathfrak{A}^{\sigma\cdot\cdot i}_{\alpha\cdot\cdot}\Delta^{\alpha}_{\tau i}\cdots, \tag{6}$$

в особенности на тождестве (2). Соотношение (5) тесно связано с правилом перестановки ковариантного дифференцирования, которое я также приведу для полноты. Если T — произвольный тензор, индексы которого я для удобства опускаю, то справедливо равенство

$$T_{;i;k} - T_{;k;i} \equiv -T_{;\sigma}\Lambda^{\sigma}_{ik}. \tag{7}$$

Применим теперь соотношение (5) к тензорной плотности $\mathfrak{B}^{\alpha}_{\underline{kl}}$,

$$\mathfrak{B}^{\alpha}_{\underline{kl}|l|\alpha} - \mathfrak{B}^{\alpha}_{\underline{kl}|\alpha|l} \equiv -(\mathfrak{B}^{\alpha}_{\underline{kl}}\Lambda^{\sigma}_{l\alpha})_{|\sigma},$$

нижние индексы в которой мы будем считать поднятыми. Тогда мы найдем единственное нетривиальное тождество, которое с учетом тождества (3б) можно привести к виду

$$(\mathfrak{B}^{\alpha}_{\underline{kl}|l} - \mathfrak{B}^{\sigma}_{\underline{k\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau})_{|\alpha} \equiv 0. \tag{8}$$

§ 3. Уравнения поля

После того как я открыл тождество (3б), стало ясно, что при естественном ограничении многообразия рассматриваемого нами вида должна играть важную роль тензорная плотность $\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl}$. Поскольку ее дивергенция $\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl|\alpha}$ тождественно равна нулю, сразу напрашивается мысль выдвинуть требование (уравнения поля), чтобы другая дивергенция $\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl|l}$ также обращалась в нуль. Таким способом на самом деле получаются уравнения, в первом приближении переходящие в уравнения гравитационного поля в пустоте и известные из существующей общей теории относительности.

Напротив, для φ_α этим способом не получается векторного условия, такого, чтобы все φ_α с нулевой дивергенцией были совместными с найденными уравнениями поля. Это связано с тем, что в первом приближении (в силу возможности перестановки при обычном дифференцировании) существует тождество

$$\mathfrak{B}^{\alpha}_{\underline{kl}|l|\alpha} \equiv \mathfrak{B}^{\alpha}_{\underline{kl}|\alpha|l},$$

в котором правая часть, в силу равенства (3б), тождественно равна нулю. Поэтому четыре уравнения системы $\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl|\alpha} = 0$ отпадают.

Однако я обнаружил, что этот недостаток можно легко устранить, постулируя вместо обращения в нуль $\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl|\alpha}$ уравнение

$$\overline{\mathfrak{B}}^{\alpha}_{kl|l} = 0,$$

в котором $\overline{\mathfrak{B}}^{\alpha}_{kl}$ означает тензор, бесконечно мало отличающийся от $\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl}$: [4]

$$\overline{\mathfrak{B}}^{\alpha}_{kl} = \mathfrak{B}^{\alpha}_{kl} - \varepsilon h (\varphi_l \delta^{\alpha}_k - \varphi_k \delta^{\alpha}_l). \tag{9}$$

Тогда сразу получаются уравнения Максвелла (все в первом приближении), если мы образуем дивергенцию (по индексу α) уравнений поля. Кроме того, переходя к пределу $\varepsilon = 0$, получаем, как и прежде, уравнения $\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl/l} = 0$, дающие в первом приближении правильные уравнения гравитационного поля.

Уравнения поля для электричества и гравитации, таким образом, правильно выражаются в первом приближении уравнением

$$\overline{\mathfrak{B}}^{\alpha}_{kl|l} = 0$$

с тем дополнительным условием, что необходимо перейти к пределу $\varepsilon = 0$. При этом существование тождества (справедливого в первом приближении)

$$\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl|l|\alpha} \equiv 0 \tag{8a}$$

приводит к тому, что в уравнениях поля в первом приближении законы гравитации, с одной стороны, и электромагнетизма — с другой, разделены. А ведь такое разделение представляется столь характерной особенностью природы.

Теперь для строгого рассмотрения необходимо использовать результаты, полученные в первом приближении. Ясно, что и здесь мы должны исходить из тождества, соответствующего тождеству (8а). Очевидно, таким тождеством является тождество (8), поскольку оба тождества основываются на одном правиле перестановки операций дифференцирования, а также на тождестве (3б).

Таким образом, мы имеем следующие уравнения поля

$$\overline{\mathfrak{B}}^{\alpha}_{\underline{kl}|l} - \overline{\mathfrak{B}}^{\sigma}_{\underline{k\tau}} \Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = 0 \tag{10}$$

....

[4] Это тот же метод, который всегда применяется, если необходимо устранить вырождение, появляющееся при наличии особенностей.

с условием последующего (т. е. после выполнения операции «$|\alpha$» перехода к пределу $\varepsilon = 0$. Обозначая левую часть уравнения (10) символом $\mathfrak{G}^{k\alpha}$, мы получаем этим способом уравнения поля

$$\mathfrak{G}^{k\alpha} = 0, \tag{10а}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\overline{\mathfrak{G}}^{kl}_{|l} = 0. \tag{10б}$$

Уравнение (10б) с учетом равенств (8) и (9) дает

$$\{[h(\varphi_{\underline{k}}\delta_l^\alpha - \varphi_{\underline{l}}\delta_k^\alpha)]_{|l} - h(\varphi_{\underline{k}}\delta_\tau^\sigma - \varphi_{\underline{\tau}}\delta_k^\sigma)\Lambda^\alpha_{\sigma\tau}\}|_\alpha = 0.$$

Введем временно для кратности тензорную плотность

$$\mathfrak{W}^\alpha_{kl} = h(\varphi_k\delta_l^\alpha - \varphi_l\delta_k^\alpha).$$

Согласно соотношению (5) имеем

$$\mathfrak{W}^\alpha_{\underline{kl}|l|\alpha} = \mathfrak{W}^\alpha_{\underline{kl}|\alpha|l} - (\mathfrak{W}^\alpha_{\underline{kl}}\Lambda^\sigma_{l\alpha})_{|\sigma},$$

так что искомое уравнение можно записать также в виде

$$(\mathfrak{W}^l_{\underline{k\alpha}|l} - \mathfrak{W}^\sigma_{\underline{kl}}\Lambda^\alpha_{l\sigma} - \mathfrak{W}^\sigma_{k\tau}\Lambda^\alpha_{\sigma\tau})_{|\alpha} = 0,$$

где два последних члена обращаются в нуль. Непосредственное вычисление дает

$$\mathfrak{W}^l_{\underline{k\alpha}|l} \equiv h(\varphi_{\underline{k};\underline{\alpha}} - \varphi_{\underline{\alpha};\underline{k}}).$$

Таким образом, преобразованные уравнения (10) принимают вид

$$[h(\varphi_{\underline{k};\underline{\alpha}} - \varphi_{\underline{\alpha};\underline{k}})]_{|\alpha} = 0. \tag{11}$$

Эта система уравнений вместе с уравнением

$$\mathfrak{V}^\alpha_{\underline{kl}|l} - \mathfrak{V}^\sigma_{\underline{k\tau}}\Lambda^\alpha_{\sigma\tau} = 0 \tag{10а}$$

образует полную систему уравнений поля.

Если бы мы исходили не из уравнения (10а), а прямо из уравнения (10), то не получили бы уравнений (11) электромагнитного поля. Кроме того, мы не смогли бы гарантировать, что системы уравнений (11) и (10а) совместны. При нашем же способе рассуждений, по-видимому, обеспечивается выполнение условия, что эти уравнения совместны, поскольку исходные уравнения (10) образуют шестнадцать условий для шестнадцати величин ${}^s h_\alpha$. Между этими шестнадцатью уравнениями (10), в силу общей ковариантности этих уравнений, с необходимостью существуют четыре тождества [5]. Следовательно, между 20 уравнениями поля (11) и (10а)

[5] Ср., однако, работу 99, § 1.— *Прим. ред.*

существует всего 8 тождественных соотношений, из которых мы указали в явном виде только 4.

О том, что уравнения (10а) в первом приближении содержат уравнения гравитационного поля, а уравнения (11) (в связи с существованием векторного потенциала) дают уравнения Максвелла для пустоты, было уже сказано. Я хотел бы также показать, что, наоборот, для каждого решения этих уравнений существует h-поле, удовлетворяющее уравнениям (10а)[6]. Свертывая уравнения (10а) по двум индексам, получаем условие типа дивергенции для электрического потенциала

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{f}^{l}_{\ |l} - \frac{1}{2}\mathfrak{B}^{\sigma}_{\underline{k\tau}}\Lambda^{k}_{\sigma\tau} = 0, \\ (2\mathfrak{f}^{l} = \mathfrak{B}^{\alpha}_{\alpha\underline{l}} = 2h\varphi^{l}). \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Более глубокое исследование следствий уравнений поля (11), (10а) должно показать, действительно ли метрика Римана в соединении с абсолютным параллелизмом дает адекватное понимание физических свойств пространства. Согласно нашему исследованию, это не кажется невероятным.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность д-ру Г. Мюнцу за трудоемкое строгое решение центрально-симметричной задачи на основе принципа Гамильтона; результаты этого исследования помогли мне найти описанный здесь путь. Благодарю также «Физический фонд», позволивший мне иметь в течение последних лет такого помощника в исследованиях, как д-р Громмер.

Дополнение к корректуре. Предложенные в этой работе уравнения поля, в отличие от других возможных уравнений, формально можно охарактеризовать следующим образом. С помощью тождества (8) удалось добиться, чтобы 16 величин ${}^{s}h_{\nu}$ удовлетворяли не 16, а 20 независимым дифференциальным уравнениям. Слово «независимые» понимается в том смысле, что ни одно из этих уравнений не является следствием других, даже если между ними существуют 8 тождественных (дифференциальных) соотношений.

Поступила 30 января 1929 г.

В связи с опубликованием этой работы в газете Daily Chronicle (London) 26 января 1929 г. было напечатано интервью Эйнштейна. Выдержка из этого интервью, взятая нами из журнала Nature (том 123, 1929, стр. 175), показывает, какие надежды возлагались автором на единую теорию поля:

....

[6] Это справедливо только до тех пор, пока речь идет о линейных уравнениях первого приближения.

«В течение многих лет моей величайшей целью было превращение дуализма законов природы в их единство. Сущность дуализма состоит в том, что физики до сих пор были вынуждены постулировать существование законов двух типов: законов, управляющих гравитацией, и законов, управляющих электрическими и магнитными явлениями. Многие физики подозревали, что оба типа законов в действительности основаны на одном общем законе; однако ни теория, ни опыт не привели до сих пор к формулировке такого закона. Я придумал некоторую особую теорию, отличающуюся определенными условиями как от моей общей теории относительности, так и от других теорий четырехмерного пространства.

Благодаря этим условиям, одни и те же математические уравнения дают законы, которые управляют электромагнитным полем, и законы, которые управляют полем тяготения. Теория относительности сводит в одну формулу все законы, которые управляют пространством, временем и тяготением и поэтому отвечают требованию простоты наших физических понятий.

Задачей моей работы является дальнейшее упрощение теории и, в частности, сведение к одной формуле, объединение поля тяготения и электромагнитного поля. Поэтому я назвал работу исследованием «единой теории поля»... Теперь и лишь только теперь мы знаем, что силы, которые движут электроны по эллипсам вокруг ядер в атомах, — те же, что и силы, движущие Землю в ее годичном пути вокруг Солнца, и те же, которые приносят к нам лучи света и тепло, делающее возможным жизнь на нашей планете».

Перевод этой статьи без дополнения при корректуре опубликован также в журнале Revue génerale del'électricite (1929, 25, 645—648), как вторая часть статьи «Sur la theorie synthetique des champs», первая часть которой — «Введение» — написана М. Т. де Дондером.

Некоторые результаты этой работы Эйнштейн исправляет в работе 99.

НОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ. I*

МАТЕРИЯ И ПРОСТРАНСТВО

Пока физика развивалась исключительно по пути, проложенному Ньютоном, господствовала следующая концепция физической реальности. Материя реальна, она претерпевает лишь такие изменения, которые мы воспринимаем как перемещение в пространстве. Движение, пространство, а также время являются реальными. Всякая попытка отрицать их физическую реальность терпела крах, наталкиваясь на закон инерции. В самом деле, если ускорение считается реальным, то и пространство, в котором, по нашему представлению, тела ускоряются, также должно быть реальным. Ньютон видел это совершенно ясно и поэтому называл пространство «абсолютным». В его теоретическую систему входила еще одна независимая реальность — движущие силы, действующие между материальными частицами, причем эти силы зависели только от положения частиц. Эти силы взаимодействия между частицами считались безусловно связанными с самими частицами и распределенными в пространстве по неизменному закону.

Физики XIX столетия полагали, что существуют два вида материи: весомая материя и электричество. Частицы весомой материи, по предположению, взаимодействовали посредством сил притяжения по закону Ньютона, частицы электрической материи взаимодействовали по закону Кулона, так что все эти силы были обратно пропорциональными квадрату расстояния. Определенных взглядов на природу сил, действующих между частицами весомой материи и электричества, тогда не существовало.

Само пустое пространство не признавалось активным носителем физических явлений и процессов. Оно было, так сказать, только ареной, на которой разыгрывалась драма материальных событий. Поэтому тот факт,

* *The New Field Theory. I.* Observatory, 1929, 52, 82—87. (Напечатана ранее в газете «Times» от 4 февраля 1929 г.— *Прим. ред.*)

что свет распространяется в пустоте, Ньютон объяснял гипотезой, что свет также состоит из материальных частиц, взаимодействующих с весомой материей посредством особых сил. Таким образом, здесь мировоззрение Ньютона вводило материальные частицы третьего типа, хотя они, конечно, обладали свойствами, резко отличающимися от свойств других форм материи. Прежде всего, частицы света могли рождаться и исчезать. Кроме того, даже в XVIII веке опыт уже показал, что свет распространяется в пустоте с определенной скоростью — факт, который, очевидно, плохо увязывался с теоретической системой Ньютона. Действительно, что же запрещает частицам света двигаться в пространстве с любой произвольной скоростью?

Преемники Ньютона

Неудивительно поэтому, что теоретическая система, построенная могучим интеллектом Ньютона, была побеждена именно теорией света. Победу одержала волновая теория света Гюйгенса — Юнга — Френеля, которая преодолела сопротивление физиков, объяснив явления интерференции и дифракции. Широкий круг явлений, вычисляемых и предсказываемых этой теорией до мельчайших подробностей, вызывал восхищение физиков и привел к появлению множества толстых научных книг. Неудивительно, что ученые не сумели заметить, что из-за этой теории в их вечном идоле появилась трещина. Эта теория в действительности опровергала мнение, что все реальное можно рассматривать как движение частиц в пространстве. Ведь световые волны представляли собой не что иное, как колебательные состояния пустого пространства, и, следовательно, последнее теряло свою пассивную роль простой арены физических явлений. Гипотеза эфира кое-как замазала эту трещину и сделала ее невидимой. Был изобретен эфир, проникающий повсюду, заполняющий все пространство; он был признан новым видом материи. Однако не было замечено, что при этом оживает само пространство. Ясно, что именно это и произошло, когда эфир стали рассматривать как род материи, которую никуда нельзя удалить. Следовательно, эфир был до некоторой степени тождествен самому пространству, т. е. представлял собою нечто, обязательно данное вместе с пространством. Таким образом, на свет стали смотреть как на динамический процесс, реально происходящий с самим пространством. Тем самым возникла теория поля как незаконная дочь ньютонианской физики, дочь, которую все вначале «мудро» считали законной.

Полностью осознать эту перемену во взглядах мог только в высшей степени оригинальный ум, чья интуиция могла сразу охватывать существо дела и чей ум не увяз бы в формулах. Таким исключительным умом обладал Фарадей. Он питал инстинктивное отвращение к идее дальнодействующих сил, которая, очевидно, противоречила элементарным наблюдениям. Когда одно наэлектризованное тело притягивает или отталкивает другое тело, полагал Фарадей, то это происходит не путем прямого действия первого тела на второе, но посредством некоторого промежуточного процесса. Первое тело приводит пространство в непосредственной близости от себя в особое состояние, которое распространяется на более удаленные части пространства в соответствии с определенным пространственно-временным законом распространения. Это состояние пространства называется «электрическим полем». Второе тело испытывает действие силы потому, что оно находится в поле, созданном первым телом, и наоборот. Таким образом, «поле» обеспечивает систему понятий, исключающую идею дальнодействия. Фарадею принадлежит также смелая мысль о том, что в соответствующих условиях поля могут отрываться от порождающих их тел, распространяясь в пространстве в виде свободных полей; в этом заключалась его интерпретация света. Максвелл впоследствии открыл замечательную систему уравнений, кажущихся нам теперь такими простыми, которая окончательно перебросила мост между теорией электромагнитного поля и теорией света. Оказалось, что свет образуют быстропеременные электромагнитные поля.

Революция в физике

После того как в 80-х годах прошлого столетия Герц подтвердил существование электромагнитных волн и своими блестящими опытами показал их тождество со светом, в физике постепенно началась великая идейная революция. Люди медленно привыкали к идее о том, что физическое состояние самого пространства представляет собой физическую реальность, особенно после того, как Лоренц в своих проницательных теоретических исследованиях показал, что даже внутри весомых тел электромагнитные поля надо рассматривать не как состояния материи, а как состояния пустого пространства, в котором свободно располагаются материальные атомы.

В конце столетия физики начали высказывать недовольство двойственностью теории, признающей два типа фундаментальной физической реальности: поле, с одной стороны, и материальные частицы — с другой. Предпринимались попытки представить материальные частицы как структуры в поле, т. е. как области, где поля сконцентрированы особым образом. Всякое такое представление частиц на основе теории поля было бы большим достижением, но, несмотря на все попытки, наука еще не пришла к нему. Следует даже признать, что эта двойственность в наши дни стала острее и тревожнее, чем десять лет назад. Этот факт связан с последними стремительными успехами квантовой теории, в которой борются за победу теория континуума (теория поля) и существенно дискретная природа элементарных частиц и процессов.

Мы не будем обсуждать здесь вопросы, связанные с молекулярно-кинетической теорией, но остановимся на успехах, достигнутых в теории поля в этом столетии. Все эти успехи связаны с теорией относительности, вступившей шесть месяцев назад в третью стадию своего развития. Рассмотрим кратко главные идеи, относящиеся к этим трем стадиям, и их отношение к теории поля.

Первая стадия — специальная теория относительности —обязана своим происхождением главным образом теории электромагнитного поля Максвелла. Из этой теории, объединенной с тем эмпирическим фактом, что не существует никакого физически различимого состояния движения, которое можно было бы назвать «абсолютным покоем», выросла новая теория пространства и времени. Известно, что эта теория покончила с абсолютным характером понятия одновременности двух пространственно разделенных событий. Известна также смелость, вызванная отчаянием, с которой некоторые философы все еще защищаются от этой простой теории, расточая гордые, но пустые слова. С другой стороны, менее известны те услуги, которые оказаны специальной теорией относительности своей родительнице — теории электромагнитного поля Максвелла. До того времени электрическое и магнитное поля считали существующими независимо, хотя между этими двумя видами поля благодаря уравнениям Максвелла и устанавливалась тесная причинная связь. Но специальная теория относительности показала, что эта причинная связь есть проявление тождественной сущности двух видов поля. Действительно, состояние пространства, которое в одной системе координат выглядит как чисто магнитное поле, в другой системе координат, совершающей относительное движение, будет выглядеть как электрическое поле, и наоборот. Соотношения подобного рода, которые, вскрывая тождественность разных понятий, уменьшают тем самым число независимых гипотез и выясняют их логическую замкнутость, представляют характерную черту теории относительности. Например, специальная теория относительности указывает также на тождество сущности таких понятий, как инертная масса и энергия. Это все общеизвестно и упоминается здесь, чтобы подчеркнуть ту тенденцию к единству, которая преобладает во всем развитии теории.

Теория гравитации

Обратимся теперь ко второй стадии в развитии теории относительности, к так называемой общей теории относительности. Эта теория также исходит из опытного факта, до того не получившего удовлетворительной интерпретации, из факта равенства инертной и тяжелой масс, или, другими словами, из факта, известного со времен Галилея и Ньютона, что все тела падают в поле тяготения Земли с одинаковым ускорением. Теория в качестве своей основы использует специальную теорию относительности, в то же время видоизменяя ее. Исходным пунктом теории служит утверждение, что не существует физически выделенного состояния движения, т. е. не только скорость, но и ускорение не имеет абсолютного смысла. Это внесло затем существенно более глубокие изменения в понятия пространства и времени, чем в случае специальной теории относительности. В самом деле, хотя специальная теория относительности заставила слить пространство и время в один неделимый четырехмерный континуум, эвклидов характер континуума сохранялся в этой теории без изменений. В общей теории относительности пришлось отвергнуть и гипотезу об эвклидовом характере нашего пространственно-временно́го континуума: континуум приобрел структуру так называемого пространства Римана. Прежде чем мы попытаемся понять, что означают эти слова, напомним, чего достигла эта теория.

Общая теория относительности дала точную теорию гравитационного поля и установила совершенно определенную связь тяготения с метрическими свойствами континуума. Теория гравитации, которая оставалась неизменной со времен Ньютона, была, таким образом, введена в русло полевой концепции Фарадея совершенно естественно, т. е. без какого-либо произвола в выборе законов поля. В то же время гравитация и инерция были слиты в единое целое. Подтверждения этой теории в последние годы при измерении отклонения света в гравитационном поле и при спектроскопическом исследовании двойных звезд хорошо известны.

НОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ. II *

СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Характерными чертами, отличающими общую теорию относительности и еще больше третью стадию теории — единую теорию поля — от других физических теорий, являются меньшая степень произвола в формальных рассуждениях, узость эмпирических основ, радикальный характер теоретических построений и, наконец, уверенность в единстве тайн природы и в способности интеллекта познать их. В этом и заключается та особенность, которая физикам, склонным к реализму или позитивизму, кажется слабостью; но рассуждающему интеллекту математика представляется чертой, весьма привлекательной и даже очаровывающей. В своих блестящих исследованиях по теории познания Мейерсон дает отличное сопоставление интеллектуальных позиций теоретика-релятивиста и Декарта или даже Гегеля, не допуская при этом осуждения, которое физик, естественно, захотел бы в них найти.

Однако в конечном счете единственным компетентным судьей остается опыт. Между тем в защиту теории все-таки можно сказать одно. Прогресс научных знаний должен приводить к тому, что формальное упрощение может достигаться только ценой увеличения разрыва между фундаментальными гипотезами теории, с одной стороны, и непосредственно наблюдаемыми фактами — с другой. Теория должна переходить все больше и больше от индуктивного метода к дедуктивному, хотя самое важное для всякой научной теории—требование, чтобы она соответствовала фактам — будет сохраняться всегда.

....

* *The New Field Theory. II.* Observatory, 1929, 52, 114—118. (Напечатана ранее в газете «Times» от 5 февраля 1929 г. — *Прим. ред.*)

Поиски простоты

Мы подошли теперь к трудной задаче — дать читателю понятие о методах, применяемых в математических построениях, ведущих к общей теории относительности и к новой единой теории поля. Общая проблема заключается в следующем: какие простейшие формальные образования можно приписать четырехмерному континууму и каким простейшим законам эти образования должны подчиняться? Затем мы ищем математическое выражение для физических полей через эти формальные образования и для законов физики поля, уже известных в некотором приближении из прежних исследований, через простейшие законы, управляющие этими образованиями.

Понятия, которые при этом используются, можно объяснить на примере двумерного континуума (поверхности) не хуже, чем на примере четырехмерного континуума пространства и времени. Представим себе лист миллиметровой бумаги. Что означает мое утверждение о двумерности поверхности с миллиметровой сеткой? Для всякой точки P, нанесенной на бумагу, можно определить положение с помощью двух чисел. Именно, начиная с левого нижнего угла, будем вести указку направо, пока не достигнем нижнего конца вертикали, проходящей через точку P. Предположим, что при этом мы достигнем нижнего конца вертикальной линии x миллиметровой сетки. Затем будем двигать указку по этой вертикальной линии вверх до точки P, пересекая y горизонтальных линий. Тогда точка P будет, очевидно, описываться числами x, y (координатами). Если вместо хорошей миллиметровой бумаги мы будем пользоваться листом с растянутой или искаженной сеткой, то положение точки все-таки можно определять тем же способом, но в этом случае сетка уже не будет состоять из горизонталей и вертикалей или даже из прямых линий. Та же самая точка даст, конечно, другие числа, но возможность определять положение точки двумя числами (гауссовыми координатами) все еще сохранится. Более того, если две точки P и Q будут находиться очень близко друг к другу, то их координаты будут отличаться очень мало. Когда точка описывается указанным способом двумя числами, мы говорим о двумерном континууме (поверхности).

Рассмотрим теперь две близких точки P и Q на поверхности и несколько поодаль две других точки P', Q'. Что означает высказывание о том, что расстояние PQ равно расстоянию $P'Q'$? Это утверждение имеет ясный смысл только в том случае, если мы имеем небольшую измерительную линейку, которую можно переносить от одной пары точек к другой, и если результат измерения не зависит от того, какую именно линейку мы применим. Если это так, то длины отрезков PQ и $P'Q'$ можно сравнивать. Если континуум обладает этим свойством, то говорят, что он имеет метрику. Разумеется, расстояние между двумя точками должно зависеть от разностей их координат (dx, dy). Но вид этой зависимости априори неизвестен. Если эта зависимость имеет вид

$$ds^2 = g_{11}dx^2 + 2g_{12}\,dx\,dy + g_{22}dy^2,$$

то она называется метрикой Римана. Если можно выбрать координаты так, что это выражение приобретает вид

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \qquad \text{(теорема Пифагора)},$$

то континуум называется эвклидовым (плоским). Ясно, что эвклидов континуум есть частный случай риманова континуума. Наоборот, риманов континуум — это метрический континуум, который является эвклидовым в бесконечно малых, но не в конечных областях. Величины g_{11}, g_{12}, g_{22} описывают метрические свойства поверхности, т. е. метрическое поле.

Используя известные из опыта свойства пространства, в частности закон распространения света, можно показать, что пространственно-временной континуум обладает метрикой Римана. Величины g_{11} и т. д., относящиеся к этому континууму, определяют не только его метрику, но и гравитационное поле. Закон гравитационного поля возникает при ответе на вопрос, каковы простейшие математические законы, которым может подчиняться метрика (т. е. величины g_{11} и др.). Ответ был дан в полевых законах гравитации, которые оказались более точными, чем закон Ньютона.

Этот беглый очерк должен дать лишь общее понятие об «умозрительных» методах общей теории относительности.

Два поля как одно

Теория, объединившая метрику и тяготение, была бы вполне удовлетворительной, если бы в мире существовали только гравитационные поля и не было электромагнитных полей. Правда, последние можно включить в рамки общей теории, взяв и соответствующим образом видоизменив уравнения Максвелла для электромагнитного поля; но, в отличие от гравитационных полей, они будут выглядеть не как структурные свойства пространственно-временно́го континуума, а как логически самостоятельные образования. В этой теории два вида поля оказываются причинно связанными, но еще не сливаются в нечто единое. Однако вряд ли можно вообразить, что пустое пространство обладает состояниями двух существенно различных видов, и, естественно, возникает подозрение, что нам это только кажется, поскольку структура физического континуума не вполне описывается метрикой Римана.

Новая единая теория поля устраняет этот недостаток, рассматривая оба вида поля как проявление пространственной структуры одного всеобъемлющего типа в пространственно-временно́м континууме. Стимулом для новой теории послужило открытие, что существует структура, промежуточная между структурами пространств Римана и Эвклида, более богатая формальными свойствами, чем первая, но более бедная, чем вторая. Рассмотрим двумерное пространство Римана типа поверхности куриного яйца. Поскольку эта поверхность вложена в наше (с высокой

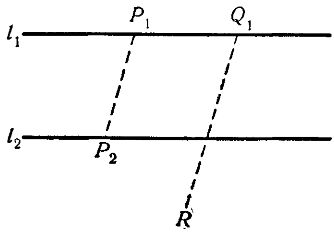


Рис. 1

степенью точности) эвклидово пространство, она обладает метрикой Римана. Действительно, имеет вполне определенный смысл говорить о расстоянии между двумя близкими точками (P, Q) на поверхности. Аналогично можно для двух пар точек((PQ) и ($P'Q'$) в разных местах поверхности яйца говорить, что расстояние PQ равно расстоянию $P'Q'$. С другой стороны, теперь уже нельзя сравнивать *направление* PQ с направлением $P'Q'$. В частности, не имеет смысла требовать, чтобы отрезок $P'Q'$ был параллелен PQ. В соответствующей эвклидовой геометрии двух измерений — эвклидовой геометрии на плоскости — направления можно сравнивать, и параллельность линий может существовать в областях плоскости, расположенных на любом расстоянии друг от друга (абсолютный параллелизм). В этом отношении эвклидов континуум имеет больше свойств, чем риманов континуум.

Новая единая теория поля основана на следующем математическом открытии: существуют континуумы с метрикой Римана и абсолютным параллелизмом и которые тем не менее не являются эвклидовыми. Легко показать, например, в случае трехмерного пространства, в чем заключается отличие такого континуума от эвклидова.

Прежде всего в таком континууме существуют линии, все части которых параллельны одна другой. Мы будем называть эти линии «прямыми». Имеет также определенный смысл говорить о двух параллельных прямых, как в случае геометрии Эвклида. Возьмем теперь две таких параллельных прямых l_1 и l_2 и отметим на каждой из них по точке (P_1 и P_2) (см. рис. 1). На прямой l_1 возьмем еще точку Q_1. Если мы теперь проведем через Q_1 прямую Q_1R, параллельную прямой P_1P_2, то в эвклидовой геометрии прямая Q_1R пересечет прямую l_2; в геометрии, которую мы теперь применяем, линия Q_1R и линия l_2 в общем случае не пересекаются. В этом смысле применяемая нами геометрия является не только конкретизацией геометрии Римана, но и обобщением геометрии Эвклида. На мой взгляд, наш пространственно-временно́й континуум обладает структурой именно такого типа.

Математическая проблема, решение которой, по-моему, приведет к правильным законам поля, формулируется следующим образом: каковы простейшие и наиболее естественные условия, которым можно подчинить континуум указанного типа? Ответ на этот вопрос, который я попытаюсь дать в новой статье, приводит к законам единого поля для гравитации и электромагнетизма [1].

[1] Ср. статью 97.— *Прим. ред.*

ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ И ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА*

В недавно опубликованной работе [1] я получил уравнения единой теории поля, не опираясь на вариационный принцип. Доказательство этих уравнений основывалось на предположении о совместности 16 уравнений поля [2]. Поскольку для этих уравнений не удалось получить четырех тождественных соотношений, Ланчос и Мюнц высказали обоснованное сомнение по поводу допустимости указанных там уравнений поля, и ясного ответа на это сомнение пока не существовало. Между тем я обнаружил, что эту задачу можно решить вполне удовлетворительным способом, опираясь на принцип Гамильтона, причем совместность уравнений обеспечивается заранее. Тождества, полученные в предыдущих работах, а также применявшиеся там обозначения будут использованы здесь без изменений.

§ 1. Общие сведения о принципе Гамильтона в применении к континууму с метрикой Римана и абсолютным параллелизмом

Пусть $\mathfrak{H}$ — скалярная плотность, выражаемая алгебраически через величины $g_{\mu\nu}$ и $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$. Тогда принципу Гамильтона

$$\delta\{\int \mathfrak{H}\, d\tau\} = 0, \tag{1}$$

где варьирование производится по ${}^{s}h_{\nu}$, удовлетворяют уравнения поля

$$\mathfrak{G}^{\mu\nu} = \mathfrak{H}^{\mu\nu} - (\mathfrak{H}^{\mu\nu}_{\underline{\alpha}})_{|\nu} = 0, \tag{2}$$

* *Einheitliche Feldtheorie und Hamiltonsches Prinzip.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1929, 156—159.

[1] Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1929, 2—7. (Статья 91.)

[2] Ср. уравнение (10) цитированной статьи.— *Прим. ред.*

причем величины $\mathfrak{H}^{\mu\alpha}$ и $\mathfrak{H}^{\mu\alpha}_{\alpha}$ определяются равенствами

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{H}^{\mu\nu} &= \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial g_{\mu\nu}},\\ \mathfrak{H}^{\mu\nu}_{\alpha} &= \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}}.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Это непосредственно следует из уравнения (1) с учетом определяющего равенства

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} = {}_{s}h^{\alpha}\,({}^{s}h_{\mu,\nu} - {}^{s}h_{\nu,\mu});\tag{4}$$

здесь запятая перед индексом означает обычное дифференцирование.

То обстоятельство, что вариационный принцип (1) выполняется сам собой для таких (исчезающих на границах) вариаций ${}^{s}h_{\nu}$, которые могут порождаться только инфинитезимальными преобразованиями координат, приводит, как и в современной теории относительности, к четырехмерному тождеству

$$D_{\mu}(\mathfrak{G}^{\underline{\mu}\alpha}) = \mathfrak{H}^{\mu\alpha}_{|\mu} + \mathfrak{H}^{\mu\beta}\Lambda^{\beta}_{\underline{\alpha}\mu} \equiv 0.\tag{5}$$

При этом D_{μ} означает дифференциальный оператор типа дивергенции, определенный равенством (5). Тождество типа (5) всегда выполняется для тензорной плотности $\mathfrak{G}^{\mu\alpha}$, которая является гамильтоновой производной скалярной плотности $\mathfrak{B}$, зависящей в свою очередь только от величин ${}^{s}h_{\nu}$ и их производных.

§ 2. Выбор функции Гамильтона

В простейшем случае выберем функцию Гамильтона $\mathfrak{H}$ в виде функции второй степени относительно тензоров $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$. Это следует из того, что функция $\mathfrak{H}$ представляет собой линейную комбинацию величин

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{J}_1 &= h\Lambda^{\alpha}_{\mu\beta}\Lambda^{\beta}_{\underline{\mu}\alpha},\\ \mathfrak{J}_2 &= h\Lambda^{\alpha}_{\mu\beta}\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\beta}},\\ \mathfrak{J}_3 &= h\Lambda^{\alpha}_{\mu\alpha}\Lambda^{\beta}_{\underline{\mu}\beta}.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Но из всех возможных линейных комбинаций лишь одна отличается тем, что соответствующие тензоры $\mathfrak{G}^{\mu\alpha}$ становятся симметричными:

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2}\mathfrak{J}_1 + \frac{1}{4}\mathfrak{J}_2 - \mathfrak{J}_3.\tag{7}$$

Доказательство этого основывается на симметрии $\mathfrak{H}^{\mu\alpha}$, а также на тождестве, выведенном в цитированной работе

$$\mathfrak{B}^{\alpha}_{\mu\nu|\alpha} = [h(\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} + \varphi_\nu \delta^{\alpha}_{\mu} - \varphi_\mu \delta^{\alpha}_{\nu})]_{|\alpha} \equiv 0. \tag{8}$$

Выполняя варьирование, получаем 10 уравнений

$$\mathfrak{G}^{\mu\alpha} = 0, \tag{9}$$

которые в первом приближении согласуются с уравнениями гравитационного поля, основанными на геометрии Римана.

Недостающие уравнения поля мы получим, выбирая вместо функции Гамильтона (7) некоторую линейную комбинацию $\overline{\mathfrak{H}}$ функций $\mathfrak{J}$, бесконечно мало отличающуюся от $\mathfrak{H}$. Для краткости запишем ее в виде

$$\overline{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} + \varepsilon_1 \mathfrak{H}^* + \varepsilon_2 \mathfrak{H}^{**}, \tag{10}$$

где

$$\mathfrak{H}^* = \frac{1}{2}\mathfrak{J}_1 - \frac{1}{4}\mathfrak{J}_2, \tag{11}$$

$$\mathfrak{H}^{**} = \mathfrak{J}_3. \tag{12}$$

Вычисление дает

$$\mathfrak{H}^* = -\frac{1}{2} h S^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} S_{\alpha}^{\underline{\mu\nu}}; \tag{11a}$$

здесь введена величина, антисимметричная по всем трем индексам:

$$S^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} = \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} + \Lambda^{\nu}_{\underline{\alpha\mu}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\nu\alpha}}. \tag{13}$$

Выполняя варьирование $\mathfrak{H}$ и расщепляя полученное таким образом тензорное уравнение на симметричную и антисимметричную части, наряду с (9), получаем уравнения

$$(\mathfrak{G}^{*\mu\alpha} - \mathfrak{G}^{*\alpha\mu}) + \sigma(\mathfrak{G}^{**\mu\alpha} - \mathfrak{G}^{**\alpha\mu}) = 0, \tag{14}$$

причем σ означает отношение бесконечно малых величин ε_1 и ε_2. Эти уравнения можно записать также в виде

$$(\mathfrak{H}^{*\mu\nu}_{\underline{\alpha}} - \mathfrak{H}^{*\alpha\nu}_{\underline{\mu}})_{|\nu} + \sigma(\mathfrak{H}^{**\mu\nu}_{\underline{\alpha}} - \mathfrak{H}^{**\alpha\nu}_{\underline{\mu}})_{|\nu} = 0. \tag{14a}$$

В результате вычислений получим

$$\mathfrak{H}^{*\mu\nu}_{\underline{\alpha}} - \mathfrak{H}^{*\alpha\nu}_{\underline{\mu}} = -hS^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} = -\mathfrak{S}^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}, \tag{15}$$

$$\mathfrak{H}^{**\mu\nu}_{\underline{\alpha}} - \mathfrak{H}^{**\alpha\nu}_{\underline{\mu}} = h(\varphi^{\mu} g^{\alpha\nu} - \varphi^{\alpha} g^{\mu\nu}), \tag{16}$$

и, после выполнения операции «$|\nu$», из уравнения (14а) будем иметь

$$\mathfrak{S}^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}|\nu} - \sigma\,[h\,(\varphi_{\underline{\mu};\underline{\alpha}} - \varphi_{\underline{\alpha};\underline{\mu}})] = 0, \qquad (17)$$

или, после введения контравариантной тензорной плотности $\mathfrak{f}^{\mu\alpha}$,

$$\mathfrak{S}^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}|\nu} - \sigma\mathfrak{f}^{\mu\alpha} = 0. \qquad (17a)$$

Нетрудно видеть, что эти уравнения содержат в первом приближении теорию Максвелла. Во-первых, зависимость «напряженностей поля» $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ от «потенциалов» φ_μ в первом приближении совершенно такая же, как в теории Максвелла. Во-вторых, поскольку символ «$|\nu$» в первом приближении означает обычное дифференцирование, в силу антисимметрии $\mathfrak{S}$, производные по α, $\mathfrak{f}^{\mu\alpha}_{\ |\alpha}$, обращаются в нуль.

Однако, чтобы оправдать существование электрических зарядов, необходимо перейти к пределу $\sigma = 0$.

§ 3. Предельный случай $\sigma = 0$

Для осуществления рассматриваемого предельного перехода требуется некоторая подготовка. Запишем тензор $\mathfrak{G}^{*\mu\alpha}$ в виде

$$\mathfrak{G}^{*\mu\alpha} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{S}^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}|\nu} + \mathfrak{H}^{*\mu\alpha}. \qquad (18)$$

Из равенств (3) и (11а) следует, что $\mathfrak{H}^{*\mu\alpha}$ является однородной квадратичной функцией величин $S^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}}$[3]. Далее, величины $\mathfrak{G}^{*\mu\alpha}$ удовлетворяют тождеству

$$D_\mu\,(\mathfrak{G}^{*\mu\alpha}) \equiv 0. \qquad (5a)$$

Теперь предельный переход к случаю $\sigma = 0$ в соответствии с уравнением (17а) непосредственно приводит к уравнению

$$\mathfrak{S}^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}|\nu} = 0. \qquad (19)$$

Эти шесть уравнений — если отвлечься от особых случаев — имеют следствием обращение в нуль четырех величин $\mathfrak{S}^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}}$. Кроме того, в дальнейшем я буду предполагать, что при переходе к пределу $\sigma = 0$ величины $\mathfrak{S}^{\alpha}_{\mu\nu}$ стремятся к нулю, как σ; пока я не смог найти доказательство этого утверждения.

Исключая величины $\mathfrak{S}^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}|\nu}$ из соотношений (18) и (17а), получаем

[3] Ср., однако, статью 99, § 1.— *Прим. ред.*

уравнение

$$2\left(\mathfrak{G}^{*\mu\alpha}-\mathfrak{H}^{*\mu\alpha}\right)-\sigma\mathfrak{f}^{\mu\alpha}=0,$$

или после выполнения операции D_μ, в силу (5а),

$$D_\nu\left(\mathfrak{f}^{\mu\alpha}+2\,\frac{\mathfrak{H}^{*\mu\alpha}}{\sigma}\right)=0. \tag{20}$$

При предельном переходе к случаю $\sigma=0$ обращается в нуль второй член, числитель которого стремится к нулю как $(\mathfrak{S}^{\alpha}_{\mu\nu})^2$, т. е., согласно только что сделанному предположению, как σ^2. Таким образом получаем

$$D_\mu\left(\mathfrak{f}^{\mu\alpha}\right)=0. \tag{21}$$

Это уравнение вместе с равенством

$$S^{\alpha}_{\underline{\mu}\,\underline{\nu}}=0 \tag{22}$$

и есть результат предельного перехода.

Таким образом, конечным результатом нашего исследования является совокупность систем уравнений (9), (21) и (22), причем вывод уравнения (21) остается не вполне строгим.

Следует еще заметить, что равенства (22) приводят к тому, что вместо функции Гамильтона (7) для получения уравнений (9) можно использовать также функцию Гамильтона

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{J}_1-\mathfrak{J}_3. \tag{7a}$$

Поступила 23 апреля 1929 г.

Вывод уравнений (21) в этой работе содержит ошибку, которая исправляется в статье 99.

95

ПРОБЛЕМА ПРОСТРАНСТВА, ЭФИРА И ПОЛЯ В ФИЗИКЕ*

Научное мышление — это продолжение донаучного. Поскольку в последнем понятие пространства уже играет фундаментальную роль, мы должны начать с понятия пространства в донаучном мышлении. Существуют два способа рассмотрения понятий, и оба они необходимы для понимания. Первый способ — логически-аналитический — отвечает на вопрос, каким образом понятия и суждения зависят друг от друга. Отвечая на этот вопрос, мы остаемся на сравнительно надежной основе. Это та надежность, которая внушает нам такое уважение к математике. Но надежность эта покупается ценой отказа от содержания. Ведь понятия приобретают содержание только благодаря тому, что они связываются — хотя бы даже косвенно — с чувственными ощущениями. Однако эту связь нельзя вскрыть логическим исследованием; ее можно только ощущать. Эта-то связь и определяет познавательную ценность логических систем.

Пример. Предположим, что археолог позднейшей культуры нашел учебник эвклидовой геометрии без чертежей. Он узнает, как применяются в теоремах слова: «точка», «прямая», «плоскость». Он также поймет, как теоремы выводятся одна из другой. Он даже сможет сам установить новые теоремы по известным правилам. Но образное содержание теорем будет оставаться для него пустой игрой слов до тех пор, пока он не «сумеет представить себе в каком-нибудь виде» слова: «точка», «прямая», «плоскость» и т. д. Только в этом случае геометрия получит для него осмысленное содержание. Аналогичная ситуация будет существовать для него также в связи с аналитической механикой и вообще в связи с представлениями дедуктивных наук.

* *Raum-, Äther- und Feld-problem der Physik.* Forum Philosophicum, 1930, I, 173—180.

Что же значит «уметь представить себе в каком-нибудь виде» слова: «точка», «прямая», «пересечение» и т. д.? Это означает указать чувственные ощущения, к которым относятся эти слова. Эта проблема, выходящая за пределы логики, представляет собой проблему сущности, которую археолог сможет решить только интуитивно, обращаясь к своим ощущениям и просматривая, нельзя ли найти среди них нечто, соответствующее этим первичным понятиям и связывающим их аксиомам. Только в этом смысле и можно разумно ставить вопрос о сущности вещей, представленных в виде понятий.

По отношению к нашему мышлению мы находимся почти в положении нашего археолога. Мы, так сказать, забыли, какие черты мира ощущений побудили нас образовать то или иное понятие, и нам очень трудно смотреть на мир ощущений иначе, чем через очки издавна привычной абстрактной интерпретации. Кроме того, трудность состоит и в том, что в нашем языке мы должны пользоваться словами, неразрывно связанными с этими первоначальными понятиями. Эти препятствия также преграждают нам путь, когда мы собираемся излагать сущность донаучного понятия пространства.

Прежде чем обратиться к проблеме пространства, сделаем замечание о понятиях вообще: понятия связаны с чувственными ощущениями, но никогда не выводятся логически из последних. По этой причине я никогда не мог понять вопрос об априорности в смысле Канта. В вопросах сущности можно всегда говорить только о том, чтобы отыскивать те характеристики комплексов чувственных ощущений, к которым относятся понятия.

Что касается понятия пространства, то, очевидно, ему должно предшествовать понятие телесного объекта. Свойства комплексов чувственных ощущений, породивших это понятие, излагались много раз. Соответствие определенным зрительным и осязательным ощущениям, непрерывная наблюдаемость во времени, повторяемость ощущений в любое время (при прикосновении, взгляде) суть некоторые из этих свойств. Если на основе указанных ощущений уже образовалось понятие телесного объекта — а это понятие вовсе не предполагает понятий пространства или пространственного отношения,— то потребность мысленно постичь связи таких телесных объектов друг с другом должна с необходимостью привести к понятиям, соответствующим их пространственным отношениям. Два телесных объекта могут либо касаться, либо находиться на расстоянии один от другого. В последнем случае можно, ничего не меняя, поместить между ними третье тело, в первом же случае это невозможно. Эти пространственные отношения, очевидно, реальны в таком же смысле, как и сами тела. Если два тела равноценны для заполнения этого промежутка, то они будут равноценны и при заполнении других промежутков. Таким образом, промежуток оказывается независимым от выбора заполняющего его тела; то же самое справедливо в совершенно общем случае пространственных отношений. Тот факт, что эта независимость, составляющая главнейшую предпосылку образования чисто геометрических понятий, априори отнюдь не обязательна, представляется очевидным. По-моему, понятие промежутка, не зависящее от особого выбора заполняющего его тела, служит отправным пунктом для понятия пространства вообще.

Следовательно, с точки зрения чувственных ощущений развитие понятия пространства можно кратко изобразить следующей схемой: телесный объект — отношения положения телесных объектов — пространственный промежуток — пространство. Таким образом, пространство выступает как нечто столь же реальное, как и телесные объекты.

Ясно, что в мире естественнонаучных понятий понятие пространства как реального объекта существовало уже давно. Однако геометрия Эвклида не пользовалась этим понятием как таковым и ограничивалась только понятием объекта и отношениями положения между объектами. Точка, плоскость, прямая, отрезок — все это идеализированные телесные объекты. Все отношения положения сводились к соприкосновению (пересечения прямых, плоскостей, положения точек на прямых и т. д.). Пространство как континуум вообще не входило в геометрию. Это понятие впервые было введено Декартом в его описании пространственной точки координатами. Только здесь появились геометрические образы, в известной степени выглядевшие как части бесконечного пространства, под которым понимается трехмерный континуум.

Большое преимущество описания пространства Декартом состоит отнюдь не только в том, что оно ставит анализ на службу геометрии. Главное заключается скорее в следующем. Геометрия греков выделяет при геометрическом описании особые образы (прямые, плоскости); другие объекты (например эллипсы) доступны ей лишь постольку, поскольку они строятся (или определяются) с помощью образов точки, прямой и плоскости. В противоположность этому в декартовском описании, например, все поверхности в принципе равноценны, и нет произвольного выделения роли линейных объектов при построении геометрии.

Поскольку геометрия понимается как учение о закономерностях взаимного расположения практически твердых тел, ее можно рассматривать как древнейшую отрасль физики. Это учение, как уже отмечалось, могло исходить только из идеальных телесных объектов — точки, прямой, плоскости, отрезка, не нуждаясь в понятиии пространства самого по себе. Напротив, для физики Ньютона пространство как целое в смысле Декарта было безусловно необходимым. В самом деле, исходным понятием динамики является материальная точка, а не переменное во времени расстояние между материальными точками.

Фундаментальную роль в уравнениях движения Ньютона играет понятие ускорения, которое не может быть определено одними лишь переменными во времени расстояниями. Ускорение в смысле Ньютона следует понимать (или определять) как ускорение по отношению к пространству в целом. Таким образом, к геометрической реальности пространства прибавилась новая его функция — определять инерцию. Когда Ньютон объявил пространство абсолютным, он, несомненно, имел в виду именно этот реальный смысл пространства, который заставил его приписать пространству вполне определенное состояние движения, но определяемое не одними только явлениями механики. Пространство это было абсолютным и в другом смысле: свойство определять инерцию считалось независимым от воздействия каких-либо физических условий, пространство само влияло на массы, но обратного воздействия от них не получало.

Довольно долго пространство оставалось в сознании физиков лишь пассивным хранилищем бытия, не принимавшим никакого участия в физических процессах. Новый поворот в развитии понятия пространства наступил лишь с появлением волновой теории света и теории электромагнитного поля Фарадея—Максвелла. Выяснилось, что в пространстве, свободном от материальных тел, существуют состояния, распространяющиеся в виде волн, а также локализованные поля, способные оказывать силовое воздействие на помещенные в них электрические заряды или магнитные полюса. Поскольку физикам XIX столетия казалось совершенно абсурдным приписывать физические функции или состояния самому пространству, то по образцу весомой материи была придумана пронизывающая все пространство среда — эфир, предполагаемый носитель электромагнитных и световых процессов. Состояния этой среды, которые должны были отвечать электромагнитному полю, строились сначала чисто механически по образцу упругих деформаций в твердых телах. Однако полностью построить механическую теорию эфира не удавалось, и постепенно все привыкли отказываться от выяснения природы эфирных полей. Так эфир превратился в субстанцию, обладавшую единственной функцией, — служить носителем электрических полей, природа которых не поддавалась дальнейшему анализу. Возникла следующая картина: пространство заполняется эфиром, в котором плавают материальные частицы или атомы весомой материи; атомистическая структура последнего уже была с достоверностью установлена наукой как раз к концу века.

Поскольку взаимодействие между телами должно передаваться через поля, то пришлось поместить в эфир и гравитационное поле, законы которого в то время были еще не вполне ясны. Эфир служил только для локализации сил, действующих в пространстве. С тех пор как выяснилось, что движущийся электрический заряд создает магнитное поле, энергия которого явилась аналогом инерции, природа инерции стала также сводиться к полю, локализованному в эфире.

Непонятными были прежде всего механические свойства эфира. Но пришли великие идеи Г. А. Лоренца. Все известные в то время явления электромагнетизма можно было объяснить на основе двух предположений. Эфир жестко связан с пространством, т. е. он вообще не может двигаться. Электричество жестко связано с подвижными элементарными частицами. В наши дни эту концепцию можно изложить так: физическое пространство и эфир — это лишь различные выражения для одной и той же вещи; поля суть физические состояния пространства. В самом деле, если эфиру нельзя придать любое состояние движения, то, очевидно, нет никаких оснований вводить эфир наряду с пространством как особую сущность. Однако такой способ рассуждений был еще чужд физикам. Ведь, как и прежде, они смотрели на пространство как на нечто застывшее, однородное и неизменное, не имеющее никаких состояний. Только гений Римана, непонятый в свое время и одинокий, возвысился уже в середине прошлого века до нового понятия пространства, согласно которому пространство переставало быть неподвижным и бездейственным и могло принимать участие в физических процессах. Это достижение научной мысли тем более удивительно, что оно предшествовало полевой теории электричества Фарадея—Максвелла. Затем появилась специальная теория относительности со своим утверждением о физической равноценности всех инерциальных систем. В связи с электродинамикой или с законом распространения света проявилась неотделимость пространства от времени. До этого же времени молчаливо предполагалось, что четырехмерный континуум можно объективно расщепить на время и пространство, т. е., что «теперь» имеет абсолютное значение. Утверждением об относительности одновременности пространство и время были связаны в единый континуум, подобно тому, как прежде в единый континуум были слиты три пространственных измерения. Таким образом, физическое пространство расширилось до четырехмерного пространства, которое содержит в себе и временное измерение. Четырехмерное пространство специальной теории относительности является таким же жестким и абсолютным, как и пространство Ньютона.

Теория относительности являет собой прекрасный пример современного пути развития фундаментальной теории. Исходные гипотезы становятся все более абстрактными, все более далекими от ощущений. Но зато мы все ближе подходим к важнейшей цели науки — из наименьшего числа гипотез или аксиом логически получить дедуктивным путем максимум реальных результатов. При этом мысленный путь от аксиом к ощущаемым результатам или проверяемым следствиям становится все длиннее, все утонченнее. Теоретику все больше приходится руководствоватся при поисках теорий чисто математическими, формальными соображениями, поскольку физический опыт экспериментатора не дает возможности подняться прямо к сферам высочайшей абстракции. Место преимущественно индуктивных методов, присущих юношескому периоду науки, занимает поисковая дедукция. К тому же надо далеко продвинуться в построении такого теоретического здания, чтобы прийти к следствиям, которые можно сравнить с опытом. Конечно, опыт и здесь остается всемогущим судьей. Но его приговор может последовать только после большой и трудной умственной работы, перебрасывающей мост через пропасть между аксиомами и следствиями. Эту гигантскую работу теоретик должен проделать, ясно сознавая, что она, быть может, лишь подготовит смертный приговор его теории. И теоретика, занимающегося этим, не следует с упреком называть фантастом. Нет, лучше одобрить его фантазии, поскольку другого пути к цели для него вообще не существует. Это вовсе не беспредметные фантазии, а поиски логически простейших возможностей и их следствий. Этот призыв к снисхождению был необходим для того, чтобы слушатель или читатель проявил бóльшую склонность с интересом следовать излагаемому ниже ходу развития идей; это тот самый ход мыслей, который привел от специальной теории относительности к общей теории относительности и затем к ее последнему отпрыску — единой теории поля. Однако в этом изложении нельзя совсем уклониться от применения математических символов.

Начнем со специальной теории относительности. Она основывается еще непосредственно на эмпирическом законе постоянства скорости света. Пусть P и P' — точки в пустоте, находящиеся на бесконечно малом расстоянии $d\sigma$. В момент времени t из P выходит световой сигнал, достигающий точки P' в момент $t + dt$. Тогда

$$d\sigma^2 = c^2 dt^2.$$

Если обозначить через dx_1, dx_2, dx_3 проекции $d\sigma$ на оси прямоугольной системы координат, то упомянутый закон постоянства скорости света принимает вид

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = 0.$$

Поскольку эта формула выражает реальное свойство вещей, величине ds можно приписывать реальный смысл даже в том случае, когда соседние точки четырехмерного континуума выбираются так, что соответствующая величина ds отлична от нуля. Иначе говоря, четырехмерное пространство (с мнимой временнóй координатой) специальной теории относительности обладает эвклидовóй метрикой.

Называя эту метрику эвклидовой, мы подразумеваем под этим следующее: роль подобной метрики в трехмерном континууме полностью эквивалентна роли аксиом эвклидовой геометрии. При этом уравнение, определяющее метрику, есть просто теорема Пифагора, примененная к дифференциалам координат.

В специальной теории относительности разрешаются только такие изменения координат (преобразования), что и в новых координатах величина ds^2 (фундаментальный инвариант) имеет вид суммы квадратов дифференциалов новых координат. Такие преобразования называются преобразованиями Лоренца.

Эвристический метод специальной теории относительности отличается тем, что для выражения законов природы допускаются только такие уравнения, которые не изменяют своей формы при замене координат в соответствии с преобразованием Лоренца (ковариантность уравнений по отношению к преобразованиям Лоренца).

Этот метод позволил вскрыть внутреннюю связь между энергией и импульсом, электрическим и магнитным полями, электростатическими и электродинамическими силами, инертной массой и энергией; в результате число независимых понятий и фундаментальных уравнений физики уменьшилось.

Этот метод привел к вопросу: правда ли, что уравнения, выражающие законы природы, ковариантны только относительно преобразований Лоренца, а относительно других преобразваний не ковариантны? Однако сформулированный таким образом вопрос по существу является бессмысленным, поскольку каждую систему уравнений, конечно, можно записать в произвольных координатах. Следует спросить, устроены ли законы природы так, что их нельзя сколько-нибудь существенно упростить, если выбрать какие-нибудь особые координаты.

О том, что обнаруженный на опыте закон равенства инертной и тяжелой массы побуждает нас ответить «да» на этот вопрос, мы упомянем лишь вкратце. Возводя в принцип эквивалентность координатных систем для формулировки законов природы, мы приходим к общей теории относительности, сохраняя положение о постоянстве скорости света или гипотезу об объективном значении эвклидовой метрики для бесконечно малых областей четырехмерного пространства.

Это значит, что для конечных областей пространства предполагается (физически осмысленное) существование общей римановой метрики, выражаемой формулой

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

где суммирование следует проводить по всем сочетаниям индексов от 11 до 44.

Структура такого пространства принципиально отличается от структуры эвклидова пространства в одном отношении. Именно, коэффициентами

$g_{\mu\nu}$ могут быть произвольные функции координат $x_1, \ldots, x_4$, и структура пространства в действительности определена только тогда, когда известны эти функци $g_{\mu\nu}$. Можно также сказать, что структура такого пространства сама по себе абсолютно не определена. Она становится более определенной только в том случае, если известны законы, которым подчиняется метрическое поле $g_{\mu\nu}$. При этом из физических соображений возникает убеждение, что метрическое поле является вместе с тем и гравитационным.

Поскольку гравитационное поле определяется конфигурацией масс и изменяется вместе с ней, то и геометрическая структура этого пространства зависит от физических факторов. Следовательно, согласно этой теории, пространство, как и подозревал Риман, уже не является абсолютным, и структура пространства зависит от физических условий. Геометрия (физическая) — это уже не изолированная наука, замкнутая в себе, как геометрия Эвклида.

Проблема гравитации, таким образом, была сведена к математической проблеме: требуется найти простейшие метрические соотношения, ковариантные относительно произвольных преобразований координат. Это четко ограниченная задача, вполне доступная для решения.

О подтверждении этой теории на опыте я не буду здесь говорить, но сразу же объясню, почему этим успехом теории нельзя удовлетвориться до конца. Хотя гравитация сводится к структуре пространства, кроме гравитационного поля существует ведь и электромагнитное поле. Пока что оно должно вводиться в теорию как нечто независимое от гравитации. В уравнения поля приходится добавлять аддитивные члены, обеспечивающие существование электромагнитного поля. Однако мысль о том, что существуют две независимые структуры пространства, именно метрически-гравитационная и электромагнитная, противоречит духу теории. Напрашивается убеждение, что оба вида поля должны отвечать единой структуре пространства.

Статья в несколько измененном виде включена в сборник «Mein Weltbild» (стр. 176—185), по тексту которого и сделан перевод. В этом издании опущен последний абзац, посвященный варианту единой теории поля. Так как это было сделано по просьбе самого Эйнштейна («развитая там теория мною давно отвергнута и заменена теорией несимметричных полей, вполне последовательной с формально-логической точки зрения»), то мы не восстановили его и в переводе, оставив статью несколько незаконченной по форме. Английский перевод статьи опубликован в «Ideas and Opinions» и в «Out of My later Years».

ПРОБЛЕМА ПРОСТРАНСТВА, ПОЛЯ И ЭФИРА В ФИЗИКЕ*

Понятия и системы понятий существуют всегда для того, чтобы упорядочивать, «осмысливать» наши ощущения. Поэтому, если мы хотим выяснить роль и значение понятий, далеко не достаточно указать на их логические взаимосвязи; надо указать еще те ощущения, к которым относятся понятия.

Все это совершенно очевидно для понятий, достаточно близких к сфере чувственных ощущений, в противоположность так называемым абстрактным понятиям, к которым принадлежит понятие пространства. Абстрактные понятия часто кажутся порождением разума, оторванным от материнской почвы — мира ощущений. Такая точка зрения, по-моему, всегда неправильна. Исходя из нее, можно заключить, что понятие пространства предшествует понятию телесного предмета. Вслед за этим понятием выступают как особенно простые те комплексы ощущений, которые мы связываем с понятием «положение телесных объектов». Ясно, что отношения положения тел реальны в том же смысле, в каком реальны сами тела.

Эвклидова геометрия античных греков представляет собой не что иное, как единую дедуктивную систему, пытающуюся включить в себя эти отношения положения. Вначале вместо тел разнообразной формы выступают в качестве элементов такие идеализированные образы, как точка, прямая, плоскость, затем их свойства положения задаются так называемыми аксиомами, а все остальные формы и отношения положения для них выводятся отсюда строго логическим путем. Все отношения расположения можно свести к касанию.

Раз зашла речь о пространственных отношениях, то уже недалеко отсюда стоит и понятие «пространство» в эвклидовой геометрии, строго говоря, не существующее вообще. Ведь вместо отношений касания тел между собой

* *Das Raum-, Feld- und Ätherproblem in der Physik.* Die Koralle, 1930, 5, 486—487.

можно изучать отношения касания всех тел с одним воображаемым универсальным телом, которое и является пространством. Для геометра пространство имеет такой же смысл, как квазитвердая поверхность Земли для геометрического рассмотрения в повседневной жизни или как лист чертежной бумаги для тех, кто хочет наглядно изобразить взаимоотношения плоских фигур.

Только в аналитической геометрии, основанной Декартом, пространство (трехмерное) превращается в фундаментальное понятие. Введение понятия координатного пространства чрезвычайно упростило логическую систему геометрии. В самом деле, здесь достаточно взять за основу теорему о том, что измеряемое масштабной линейкой расстояние между двумя бесконечно близкими точками вычисляется по разностям их координат согласно теореме Пифагора (как корень квадратный из суммы квадратов). Другими словами, если взять за основу «метрику Эвклида», то из нее можно вывести все понятия и теоремы геометрии.

В соответствии со сказанным выше, физически реальными были именно пространственные отношения, а не само пространство. Но в механике Ньютона пространство приобретает физическую реальность. В качестве фундаментального понятия в закон движения входит здесь ускорение. При этом ускорение мыслится как состояние движения по отношению к пространству, не сводимое к одному лишь понятию относительного расположения.

Таким образом, согласно механике Ньютона, метрика и инерция являются самыми существенными свойствами пространства. В классической теории оно абсолютно. Это означает: свойства расположения (абсолютно твердых) тел, а также инерциальные свойства тел не изменяются никакими физическими причинами, действующими вблизи этих тел.

Кроме понятий пространства, времени, материи, Фарадеем и Максвеллом было введено в физику новое понятие — понятие поля, которое скоро разорвало рамки механического понимания природы. Поля — это непрерывные образования, которые могут находиться в пустом пространстве. Различают электромагнитное и гравитационное поля; поле, образующее свет, оказывается электромагнитным. Сначала преобладало стремление понимать поле как механическое состояние некоей материи, существующей всюду,—эфира. Когда это стремление потерпело неудачу, то хотя эфир и продолжал еще считаться особым веществом, состояния которого должны образовывать поле, однако механическая интерпретация его состояний была отброшена. К концу прошлого столетия Г. А. Лоренц показал, что эфиру нельзя приписать никакого движения относительно пространства, если стремиться к правильному количественному описанию электромагнитных явлений. Конечно, к этому времени уже можно было бы отождествить пространство с эфиром, если бы не бессознательное предубеждение, что пространство должно быть абсолютным, т. е., что оно само не подвержено никаким изменениям.

Это предубеждение было устранено только общей теорией относительности, после того как закон распространения света заставил объединить трехмерный континуум пространства и одномерный континуум времени в единое четырехмерное пространство (континуум). Действительно, общая теория относительности показала, что эмпирический закон равенства инертной и тяжелой массы можно объяснить естественно только предположив, что в присутствии гравитационного поля метрика пространства будет неэвклидовой. Отклонение от эвклидовой метрики, с одной стороны, и гравитационное поле — с другой, являются лишь разными формами проявления (метрической) структуры пространства.

Тем самым пространство потеряло свой абсолютный характер. Оно оказалось способным изменять свое состояние, так что оно само смогло взять на себя функции эфира и, поскольку это относится к гравитационному полю, действительно взяло их на себя. Неясным оставался еще формальный смысл электромагнитного поля, которое не могло быть объяснено одной только метрической структурой пространства. Однако со времени создания общей теории относительности нельзя уже серьезно сомневаться в том, что гравитационное и электромагнитное поля должны объясняться некоей единой структурой (четырехмерного) пространства.

Недавно созданная «единая теория поля» является попыткой в этом направлении. В ее основу положена такая структура пространства, при которой любые два линейных элемента имеет смысл сравнивать не только по величине, но и по направлению. В этом отношении подобная структура пространства приближается к структуре эвклидова пространства в большей мере, чем изучавшиеся до сих пор неэвклидовы геометрии.

Отыскание законов природы как математическая проблема приводит к задаче: требуется найти логически наиболее простые законы, которым можно подчинить структуру рассматриваемого вида.

Видно, что теоретическое исследование вдохновляется верой в гармонию или в простоту природы. Однако эта вера не слепая; теория всегда проверяется верховным судьей — опытом.

Аналогичная статья под тем же названием была опубликована в Trans. Second World Power Conf. (Berlin), 1930, XIX, 1—5.

ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКОГО ПОЛЯ*

1. Задача «единой теории физического поля» заключается в том, чтобы обновить общую теорию относительности на основе объединения теорий электромагнитного и гравитационного полей.

В настоящее время новая теория представляет собой не более чем математическое построение, весьма слабо связанное с физической реальностью. Она была выдвинута на основе совершенно абстрактных соображений; ее математические выводы еще не достаточно развиты, чтобы их можно было проверить экспериментально. Но мне эта попытка построения теории представляется весьма интересной сама по себе, в особенности в связи с обнадеживающими перспективами ее дальнейшего развития. Именно в надежде заинтересовать ею математиков я и позволил себе изложить и проанализировать указанную теорию в настоящей статье.

2. С точки зрения математики основная идея общей теории относительности такова. Четырехмерное пространство, в котором происходят все события, не аморфно; оно имеет некоторую структуру, наличие которой выражается в существовании *римановой метрики* этого пространства.

С точки зрения физики смысл этого утверждения заключается в том, что фундаментальная квадратичная форма

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

характеризует пространство, выражая его метрику, и, будучи приравнена нулю,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0,$$

определяет закон распространения света в этом пространстве. Значит, указанная квадратичная форма имеет отношение к физической реальности, и введение ее не есть результат игры воображения. Использование этой

* *Théorie unitaire de champ physique*. Ann. Inst. H. Poincare, 1930, 1, 1—24.

квадратичной формы оправдывается тем соответствием, которое можно установить между ее коэффициентами $g_{\mu\nu}$ и известным кругом явлений, а именно явлениями гравитации.

Поскольку фундаментальная квадратичная форма выражает структуру пространства, возникает следующий вопрос: каков тот *простейший* закон, которому могут подчиняться коэффициенты $g_{\mu\nu}$? Ответ дает тензорная теория Римана. Из коэффициентов $g_{\mu\nu}$ и их производных можно составить тензор R^{i}_{klm}, носящий название тензора кривизны Римана. Путем *свертывания* этого тензора по индексам i и m из него можно получить другой тензор второго ранга R_{kl}. Простейший закон, которому могут подчиняться $g_{\mu\nu}$, выражается простым уравнением:

$$R_{kl} = 0.$$

Основанная на этом равенстве теория могла бы рассматриваться как идеальная физическая теория, будь она способна полностью описать реально существующее в природе силовое поле, т. е. совокупность электромагнитного и гравитационного полей. Однако уравнение $R_{kl} = 0$, которое, по всей видимости, позволило бы описать гравитационные явления, совершенно не учитывает электромагнитных процессов. Для описания всей совокупности явлений одной только метрики недостаточно.

Для полного описания пространства была сделана попытка ввести, помимо фундаментальной квадратичной формы $g_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu}$, еще и линейную комбинацию $\varphi_{\mu} dx^{\mu}$, где в качестве коэффициентов φ_{μ} выступали бы компоненты электромагнитного вектор-потенциала. В этом случае полные уравнения поля имели бы следующий вид:

$$R_{kl} + T_{kl} = 0.$$

Здесь T_{kl} — член, зависящий от потенциалов (это может быть, например, электромагнитный тензор Максвелла или нечто подобное ему). Но и такой путь построения теории является неудовлетворительным. Ведь уравнение $R_{kl} + T_{kl} = 0$ содержит два *независимых* члена, и логически не исключена возможность варьировать один из них, оставляя другой неизменным. При этом в теорию вводятся два независимых элемента, как бы представляющих *два* «состояния» пространства. Это свидетельствует об отсутствии в природе единства, во что наш разум совершенно отказывается поверить. Более правдоподобно, что этот недостаток следует отнести за счет несовершенства теории. Поэтому нужно искать пути обобщения и углубления теории для обеспечения того единства, которого неодолимо требует наш рассудок.

Итак, отправным пунктом единой теории поля является тот факт, что одной лишь метрики для описания всех явлений недостаточно. Но метрика, по крайней мере частично, отражает истину и, несомненно, имеет физический смысл. Поэтому возникает проблема отыскания такого элемента теории, который, будучи добавлен к метрике, позволил бы, наконец, выразить структуру пространства, не оставляя ничего без внимания.

3. Имея это в виду, выясним, в чем смысл понятия римановой метрики и как ее можно представить. Рассмотрим n-мерный континуум, обладающий римановой структурой. Подобный континуум должен отличаться тем свойством, что в бесконечно малой окрестности любой точки справедлива эвклидова геометрия. Кроме того, если A и B — две точки, находящиеся на конечном расстоянии друг от друга, то имеется возможность сравнения *длин* двух линейных элементов, относящихся соответственно к A и B. Однако сравнить их направления нельзя, поскольку в римановой геометрии нет понятия параллельности на расстоянии (абсолютного параллелизма).

4. Представим себе в некоторой точке этого пространства декартову систему координат, т. е. систему из n взаимно перпендикулярных осей, вдоль каждой из которых направлен свой единичный вектор. Назовем такую систему осей n-подом (n-репером). Бесконечно малая эвклидова окрестность любой точки описывается заданием n-пода в этой точке. Если заданы n-поды во всех точках пространства, то известна и метрика этого пространства. Однако обратное утверждение было бы неверно. Знания метрики риманового пространства еще недостаточно для однозначного задания n-пода в каждой его точке. Действительно, метрика пространства не изменится, если подвергнуть все n-поды повороту на произвольный угол. Итак, если задана только метрика, ориентации n-подов неизвестны, и в определении структуры пространства еще остается некоторый произвол. Поэтому очевидно, что описание пространств посредством n-подов является в известном смысле более содержательным, чем описание с помощью фундаментальной квадратичной формы. Возникает мысль, что именно в произволе, связанном с этим способом описания, кроются искомые связи между структурой пространства и причиной электромагнетизма, которые до сих пор ускользали от теории.

Подобного рода пространства рассматриваются не впервые; с чисто математической точки зрения они уже были исследованы ранее. Последовательные стадии разработки соответствующих формальных представлений описаны в заметке в «Mathematische Annalen», любезно отредактированной Картаном [1].

Пусть в точке A задан n-под. Структура пространства будет вполне задана, если и для всякой другой его точки указать некий n-под, который по определению будем считать параллельным первому. Так между двумя точками пространства можно установить не только соотношение

[1] Статья 98.— *Ред.*

масштабов, но и соотношение направлений. Понятие абсолютного параллелизма теперь приобретает точный смысл, которого в теории Римана оно не могло иметь. Два вектора, взятые в двух точках пространства, удаленных друг от друга на конечное расстояние, будут параллельны, если имеются одинаковые составляющие по соответствующим осям своих локальных систем координат. Когда структуру пространства характеризуют посредством задания поля n-подов, то тем самым подразумевают, что существует риманова метрика и одновременно имеет место абсолютный параллелизм. Это значит, что для любых двух бесконечно малых пространственных элементов можно установить не только отношение длин, что связано с метрикой, но и соотношение направлений, отражаемое ориентацией n-подов.

Итак, единственная новая гипотеза, необходимая для перехода к более сложной геометрии, чем геометрия Римана, сводится к существованию в пространстве «направлений» и соотношений между этими направлениями. Этого понятия «направления» не содержит в себе ни понятие континуума, ни понятие пространства. Поэтому для предположения о наличии в пространстве каких-то соотношений направлений, выражаемых существованием параллельности на конечном удалении, и потребовалась дополнительная гипотеза.

Однако нетрудно видеть, что даже в случае одновременного принятия гипотезы о существовании абсолютного параллелизма и гипотезы о наличии римановой метрики поле n-подов определяется только с точностью до поворота на произвольный угол (одинаковый для всех n-подов).

5. Введем обобщенную систему гауссовых координат и рассмотрим n-под с началом отсчета в точке P. Пусть h_s^ν — проекции единичных векторов n-пода на оси системы гауссовых координат. В дальнейшем все греческие индексы будем относить к координатам, а все латинские — к n-подам. В таком случае h_s^ν обозначает ν-ю проекцию единичного вектора, направленного вдоль s-й оси n-пода. В четырехмерном пространстве ($n = 4$) имеется очевидно 16 величин h_s^ν, которые полностью описывают структуру пространства.

Если эти величины известны, то можно выразить составляющие любого вектора A в локальной системе координат через его составляющие в системе гауссовых координат. Имеем

$$A^\nu = h_s^\nu A_s \tag{1}$$

и, обратно,

$$A_s = h_{s\nu} A^\nu, \tag{2}$$

где $h_{s\nu}$ — миноры детерминанта $h = |h_s^\nu|$, деленные на h. Как обычно, по индексам, встречающимся дважды, следует провести суммирование.

Чтобы найти метрику этого пространства, вычислим длину произвольного вектора A. В локальной системе координат (в предположении справедливости эвклидовой геометрии) имеем

$$A^2 = \sum A_s^2 = \sum h_{s\mu} h_{s\nu} A^\mu A^\nu. \tag{3}$$

Коэффициенты фундаментальной метрической формы $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, очевидно, определяются равенством

$$g_{\mu\nu} = h_{s\mu} h_{s\nu}. \tag{4}$$

Так мы убеждаемся, что поле n-подов (h_s^ν) полностью определяет метрику $g_{\mu\nu}$; однако обратное утверждение неверно.

Величины h_s^ν составляют фундаментальный тензор, аналогичный тензору $g_{\mu\nu}$ старой теории; теперь в случае $n = 4$ имеется 16 величин h_s^ν по сравнению с 10 величинами $g_{\mu\nu}$.

Понятие тензора в этой теории обобщается. Действительно, мы должны рассматривать здесь не только преобразования, изменяющие систему координат, но и преобразования, которые изменяют ориентацию n-подов. Поскольку n-поды определены лишь с точностью до произвольного поворота, единственно допустимыми являются соотношения, ковариантные относительно такого вращения. В качестве примера изменим одновременно систему координат и ориентацию локальных систем. Если вращение характеризуется не зависящими от координат постоянными коэффициентами α_{st}, такими, что

$$\alpha_{s\mu}\alpha_{s\nu} = \alpha_{\mu s}\alpha_{\nu s} = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \ (\text{при } \mu = \nu) \\ 0 \ (\text{при } \mu \neq \nu) \end{cases}, \tag{5}$$

то

$$h_s^{\nu'} = \alpha_{st} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\rho} h_t^\rho. \tag{6}$$

Каждому локальному (латинскому) индексу соответствует преобразование α, а всякому греческому индексу — обычное преобразование.

6. Алгебраические законы, которым подчиняются эти тензоры, почти такие же, как и для тензоров абсолютного дифференциального исчисления. Можно определить сумму и разность двух тензоров T и S, имеющих одинаковые индексы. Произведение двух тензоров подчиняется тому же закону преобразования, что и тензор более высокого ранга. Может применяться также операция свертывания, как по греческим, так и по латинским индексам. Для первых верхний индекс следует всегда приравнивать нижнему. Возможна также перестановка индексов; в частности с помощью фундаментального тензора h_s^ν можно заменить латинский ин-

декс на греческий. Пусть, например, имеется тензор $T_{.s}^{\cdot\lambda}$. Тогда

$$h_s^{\tau} T_{.s}^{\cdot\lambda} = T^{\tau\lambda}. \tag{7}$$

Возможен также переход от составляющих тензора в локальной системе отсчета к составляющим того же тензора в гауссовой системе и наоборот.

Наконец, вычислим в этой новой теории элемент объема. Эта важная величина дается в общей теории относительности выражением

$$d\Omega = \sqrt{g}\, d\tau,$$

где

$$g = |g_{\mu\nu}| \quad \text{и} \quad d\tau = dx^1\, dx^2 dx^3 dx^4.$$

Между тем имеем

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu s}\, h_{\nu s} \quad \text{и} \quad g = h^2 .$$

Следовательно,

$$d\Omega = h d\tau. \tag{8}$$

Исчезновение иррациональных выражений является еще одним преимуществом новой теории.

7. Рассмотрим теперь параллельный перенос вектора A^μ. В римановом многообразии этот перенос дается формулой

$$\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha \delta x^\beta.$$

Коэффициенты $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ — это символы Кристоффеля, которые должны удовлетворять следующим двум условиям.

1°. При определяемом ими параллельном переносе метрика должна сохраняться неизменной, т. е. должна оставаться инвариантной длина рассматриваемых векторов.

2°. $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ должны быть симметричны по α и β:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\alpha}.$$

В римановой геометрии параллельный перенос неинтегрируем. Если произвести перенос по замкнутому пути, то окончательное направление вектора не совпадает с первоначальным, причем мерой соответствующей разности будет тензор Римана $R^i_{k,\,lm}$.

В новой теории дело обстоит иначе. Параллельный перенос вектора A дается аналогичной формулой

$$\delta A^\mu = \Delta^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha \delta x^\beta. \tag{9}$$

Но здесь перенос интегрируем: если вектор переносить по замкнутому пути, то первоначальное направление вектора всегда совпадает с окончательным. Тензор Римана, составленный из $\Delta^{\mu}_{\alpha\beta}$, будет, следовательно, тождественно равен нулю. Сверх того, $\Delta^{\mu}_{\alpha\beta}$ теперь несимметричны по α и β. Эти результаты легко проверить, выразив $\Delta^{\mu}_{\alpha\beta}$ через h.

Пусть x^{β} и $x^{\beta}+dx^{\beta}$ — две соседние точки и их n-поды «параллельны». Векторы A_s и $A_s+\delta A_s$ будут параллельны, если они имеют одинаковые составляющие в соответствующих двух n-подах. Следовательно, условие параллельного переноса из x^{β} в $x^{\beta}+dx^{\beta}$ будет $\delta A_s=0$.

Выражая A_s через составляющие A в гауссовой системе координат

$$A_s = h_{s\mu}A^{\mu},$$

имеем

$$\delta\,(h_{s\mu}A^{\mu}) = 0. \tag{10}$$

Умножая на h^{σ}_{s}, получаем

$$0 = h^{\sigma}_{s}\left\{h_{s\mu}\delta A^{\mu} + A^{\alpha}\frac{\partial h_{s\alpha}}{\partial x^{\beta}}\,\delta x^{\beta}\right\} \tag{11}$$

или, обозначив запятой перед соответствующим индексом операцию обычного дифференцирования, будем иметь

$$\Delta^{\mu}_{\alpha\beta} = h^{\mu}_{s}h_{s\alpha,\,\beta}, \tag{12}$$

а также

$$\Delta^{\mu}_{\alpha\beta} = -\,h_{s\alpha}h^{\mu}_{s,\,\beta}. \tag{13}$$

Таким же способом, как это делается в абсолютном дифференциальном исчислении, можно составить из $\Delta^{\mu}_{\alpha\beta}$ оператор ковариантного дифференцирования. Обозначая его точкой с запятой перед соответствующим индексом, будем иметь для контравариантного тензора первого ранга

$$A^{\mu}_{;\,\sigma} = A^{\mu}{}_{,\,\sigma} - A^{\alpha}\Delta^{\mu}_{\alpha\sigma} \tag{14}$$

и для ковариантного тензора первого ранга

$$A_{\mu;\,\sigma} = A^{\mu}{}_{,\,\sigma} - A^{\alpha}\Delta^{\mu}_{\alpha\sigma}. \tag{15}$$

Аналогичные формулы могут быть получены и для тензоров более высоких рангов. Они, подобны формулам абсолютного дифференциального исчисления, зависят только от метрики и выводятся таким же образом.

Легко убедиться, что ковариантная производная фундаментального тензора тождественно равна нулю:

$$h^{\nu}_{s;\,\tau} = h_{s\nu;\,\tau} = g_{\sigma\tau;\,\rho} = g^{\sigma\tau}_{;\,\rho} \equiv 0. \tag{16}$$

Действительно,

$$h^{\nu}_{s;\tau} = h^{\nu}_{s,\tau} + h^{\alpha}_{s}\Delta^{\nu}_{\alpha\tau} = \delta_{st}\,(h^{\nu}_{t,\,\tau} + h^{\alpha}_{t}\Delta^{\nu}_{\alpha\tau}) = h^{\alpha}_{s}\,(h_{t\alpha}h^{\nu}_{t\tau} + \Delta^{\nu}_{\alpha\tau}) \equiv 0.$$

Ковариантную производную произведения двух тензоров находят по обычному правилу дифференциального исчисления. Если мы имеем, например, два тензора любого ранга $T^{\cdot}_{\cdot}$ и $S^{\cdot}_{\cdot}$, то

$$(T^{\cdot}_{\cdot}S^{\cdot}_{\cdot})_{;\,\tau} = T^{\cdot}_{\cdot;\,\tau}S^{\cdot}_{\cdot} + T^{\cdot}_{\cdot}S^{\cdot}_{\cdot;\,\tau}. \tag{17}$$

Две операции дифференцирования не перестановочны, т. е. порядок дифференцирования не безразличен. Пусть имеется произвольный тензор $T^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}$. Найдем результаты его последовательного дифференцирования сначала в порядке σ, τ, а затем в порядке τ, σ и определим их разность. Тогда получим фундаментальную формулу

$$T^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot;\,\sigma;\,\tau} - T^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot;\,\tau;\,\sigma} \equiv - T^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot;\,\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}, \tag{18}$$

где

$$\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = \Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} - \Delta^{\alpha}_{\tau\sigma}.$$

Эту формулу легко вывести на простых примерах. Допустим сначала, что $T^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}$ есть всего лишь скаляр ψ. В этом случае ковариантная производная не отличается от обычной производной

$$\psi_{;\,\sigma} = \psi_{,\,\sigma}$$

и соответственно

$$\psi_{;\,\sigma;\,\tau} = \psi_{,\,\sigma,\,\tau} - \psi_{,\,\alpha}\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau},$$

$$\psi_{;\,\tau;\,\sigma} = \psi_{,\,\tau,\,\sigma} - \psi_{,\,\alpha}\Delta^{\alpha}_{\tau\sigma},$$

$$\psi_{;\,\sigma;\,\tau} - \psi_{;\,\tau;\,\sigma} = -\psi_{,\,\alpha}\,(\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} - \Delta^{\alpha}_{\tau\sigma}) = -\psi_{;\,\alpha}\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau}.$$

Разность имеет как раз требуемый вид. Легко убедиться, что $\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}$ представляет собой тензор

Случай вектора $T^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot} = A^{\mu}$ сводится к предыдущему, если учесть, что в теории существует абсолютный параллелизм. Существование такого параллелизма в действительности приводит к возможности существования однородного векторного поля, т. е. в каждой точке можно себе представить вектор того же направления, что и заданный.

Рассмотрим такое однородное поле *произвольных* векторов a_{μ}. Легко показать, что $a_{\mu;\,\sigma} = a^{\nu}_{;\,\sigma} = 0$. Образуем из заданного вектора A_{μ} скаляр

$$\psi = A^{\mu}\cdot a_{\mu}.$$

К этому скаляру можно применить формулу, выведенную выше для разности D. Далее, учитывая правило дифференцирования произведения, имеем

$$(A^{\mu}a_{\mu})_{;\sigma} = a_{\mu}A^{\mu}_{;\sigma}.$$

Произвольные величины a^{μ} выступают в качестве множителя и сокращаются, так что окончательно получается соотношение искомого вида

$$A^{\mu}_{;\sigma;\tau} - A^{\mu}_{;\tau;\sigma} \equiv - A^{\mu}_{;\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau},$$

которое легко можно обобщить на случай тензора любого ранга.

8. Заслуживает серьезного внимания одно важное отличие излагаемой здесь теории от теории Римана. В теории Римана нет такого тензора, который мог бы быть выражен через одни лишь первые производные фундаментального тензора. В нашей же теории разность

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} = \Delta^{\alpha}_{\mu\nu} - \Delta^{\alpha}_{\nu\mu} \tag{19}$$

является тензором, который содержит только первые производные. Этот тензор замечателен тем, что он представляет собой в некотором смысле аналог тензора Римана: если Λ обращается в нуль, континуум является эвклидовым. Этот результат нетрудно доказать.

Из формулы для $\Delta^{\alpha}_{\mu\nu}$ имеем

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} = h^{\alpha}_{s}(h_{s\mu,\,\nu} - h_{s\nu,\,\mu}) = 0.$$

Умножая на h^{α}_{t} и учитывая, что $h^{\alpha}_{s}h_{t\alpha} = \delta_{st}$, получаем

$$h_{t\mu,\,\nu} - h_{t\nu,\,\mu} = 0.$$

Следовательно, $h_{t\nu}$ имеет вид

$$h_{t\mu} = \frac{\partial\psi_t}{\partial x^{\mu}}.$$

Если ψ_t принять за гауссовы координаты, что вполне возможно, то $\psi_t = x^t$ и

$$h_{t\mu} = \delta_{t\mu} = \begin{cases} 1 & t = \mu \\ 0 & t \neq \mu \end{cases}$$

будут постоянными коэффициентами. Из них можно составить таблицу, в которой диагональные члены равны 1, а остальные обращаются в нуль. Поскольку $h_{s\mu}$ и $g_{\mu\nu}$ постоянны, континуум является эвклидовым.

9. Рассмотрим величину Λ, которая в новой теории будет играть весьма существенную роль. Всего может быть $6 \times 4 = 24$ величин Λ,

функций же h имеется только 16. Следовательно, между различными Λ существуют соотношения, которые должны выполняться тождественно. Чтобы найти их, будем исходить из выражения для Λ. Так как параллельный перенос является интегрируемым, тензор «кривизны», аналогичный тензору Римана, тождественно равен нулю. Следовательно, мы будем иметь

$$\Delta^i_{\varkappa\lambda,\,\mu} - \Delta^i_{\varkappa\mu,\,\lambda} - \Delta^i_{\sigma\lambda}\Delta^\sigma_{\varkappa\mu} + \Delta^i_{\sigma\mu}\Delta^\sigma_{\varkappa\lambda} \equiv 0. \tag{20}$$

Произведем круговую перестановку индексов $\varkappa$, λ, μ и просуммируем; затем вместо обычных производных введем ковариантные. Тогда получится следующее тождество для Λ:

$$(\Lambda^i_{\varkappa\lambda;\,\mu} + \Lambda^i_{\lambda\mu;\,\varkappa} + \Lambda^i_{\mu\varkappa;\,\lambda}) + (\Lambda^i_{\varkappa\alpha}\Lambda^\alpha_{\lambda\mu} + \Lambda^i_{\lambda\alpha}\Lambda^\alpha_{\mu\varkappa} + \Lambda^i_{\mu\alpha}\Lambda^\alpha_{\varkappa\lambda}) \equiv 0. \tag{21}$$

Свертывая один раз по i и μ и полагая, что $\Lambda^\alpha_{\mu\alpha} = \varphi_\mu$, находим другое важное тождество

$$\Lambda^\alpha_{\mu\nu;\,\alpha} - \left(\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x^\mu}\right) \equiv 0. \tag{22}$$

Для получения из него еще одного тождества нужно воспользоваться правилом перестановки для ковариантного дифференцирования:

$$T^{\cdot}_{\cdot;\,\sigma;\,\tau} - T^{\cdot}_{\cdot;\,\tau;\,\sigma} = -T^{\cdot}_{\cdot;\,\alpha}\Lambda^\alpha_{\sigma\tau}.$$

Введем новые обозначения; условимся, что подчеркнутый индекс — это переставленный, т. е. опущенный или поднятый индекс. Например, $\Lambda^\alpha_{\underline{\mu\nu}}$ означает, что взяты контравариантные компоненты $\Lambda^\alpha_{\mu\nu}$:

$$\Lambda^\alpha_{\underline{\mu\nu}} = \Lambda^\alpha_{\sigma\tau}g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}.$$

Учитывая это, применим предыдущее правило к $\Lambda^\alpha_{\underline{\mu\nu}}$, продифференцировав эту величину по ν и по α. Тогда будем иметь:

$$\Lambda^\alpha_{\underline{\mu\nu};\,\nu;\,\alpha} - \Lambda^\alpha_{\underline{\mu\nu};\,\alpha;\,\nu} \equiv -\Lambda^\alpha_{\underline{\mu\nu};\,\sigma}\Lambda^\sigma_{\nu\alpha}.$$

Правую часть можно записать в виде

$$-\Lambda^\alpha_{\underline{\mu\nu};\,\sigma}\Lambda^\sigma_{\nu\alpha} \equiv -(\Lambda^\alpha_{\underline{\mu\nu}}\Lambda^\sigma_{\nu\alpha})_{;\,\sigma} + \Lambda^\alpha_{\underline{\mu\nu}}\Lambda^\sigma_{\nu\alpha;\,\sigma}.$$

В первом слагаемом правой части заменим немые индексы σ, α и ν на α, σ и τ. Тогда получим

$$-(\Lambda^\sigma_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^\alpha_{\tau\sigma})_{;\,\alpha} \equiv +(\Lambda^\sigma_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^\alpha_{\sigma\tau})_{;\,\alpha}.$$

Следовательно,

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\nu;\,\alpha} - (\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau})_{;\,\alpha} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\alpha;\,\nu} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha;\,\sigma} \equiv 0$$

или

$$(\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau})_{;\,\alpha} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\alpha;\,\nu} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha;\,\sigma} \equiv 0. \tag{23}$$

Это и есть искомое тождество. Введем обозначения

$$G^{\mu\alpha} \equiv \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau},$$

$$F^{\mu\nu} \equiv \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\alpha}.$$

Тогда тождество (23) запишется следующим образом:

$$G^{\mu\alpha}_{;\,\alpha} - F^{\mu\alpha}_{;\,\alpha} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}F_{\nu\alpha} \equiv 0. \tag{24}$$

10. После того как введен способ математического описания структуры пространства, займемся основной проблемой теории, которая заключается в установлении уравнений поля. Как и в общей теории относительности, эта проблема сводится к отысканию простейших условий, которым могут подчиняться элементы, определяющие структуру пространства, т. е. величины h^{ν}_{s}. Речь идет, следовательно, о выборе между различными возможностями. Трудность этого выбора связана с отсутствием каких-либо опорных пунктов, которые могли бы подсказать нам решение. Прежде чем выписывать окончательные уравнения поля, мне кажется интересным воспроизвести ход рассуждений, приведший к их открытию.

Отправным пунктом мне послужили тождественные соотношения, которым удовлетворяют величины $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$. В общем случае обнаружение определенных тождественных соотношений может явиться большим подспорьем в выборе уравнений поля, подсказывая возможный характер искомых уравнений. Исследование равенств должно, следовательно, логически предшествовать выбору системы уравнений. Но *априори* неизвестны величины, между которыми следует искать соотношения.

Кажется, что можно руководствоваться следующим соображением: искомые соотношения должны, по всей вероятности, содержать тензор $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$ и его производные, поскольку это единственный тензор, который может быть выражен через одни только первые производные фундаментального тензора.

Самым простым возможным условием явилось бы

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} = 0.$$

Очевидно, это условие слишком жесткое: оно означало бы, что пространство эвклидово. Кроме того, оно содержит только первые производные, а уравнения, описывающие явления природы, по всей видимости, второго порядка, как, например, уравнение Пуассона.

Попытаемся теперь потребовать выполнения условия

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\,\sigma} = 0.$$

Это соотношение также неприемлемо, поскольку оно почти эквивалентно первому. Однако оно полезно в том отношении, что подсказывает приравнять нулю дивергенции, которые можно составить на основе $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\sigma}$. Будем исходить из этой ковариантной производной и выполним свертывание ее всеми возможными способами (при этом возникает дивергенция). У нас есть две возможности: либо

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\,\alpha} = 0, \tag{25}$$

либо

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\,\nu} = 0. \tag{26}$$

Сразу видно, что совокупность этих систем не может нас удовлетворить, поскольку число уравнений нельзя выбрать произвольным. Ведь без специального исследования нельзя гарантировать совместности этих уравнений. Между тем необходимо, чтобы выбранная система уравнений была совместной.

11. В общем случае n-мерного пространства имеется n^2 переменных h^{ν}_{s}. Но в общековариантной теории при произвольном выборе системы координат n переменных из числа n^2 могут быть выбраны произвольно. Вследствие этого число независимых уравнений будет n^2-n. Число уравнений может оказаться даже больше, чем $n^2 - n$, при условии, что они связаны некоторым числом тождественных соотношений, делающих систему совместной. Во всяком случае система должна удовлетворять следующему правилу: *избыток числа уравнений над числом тождественных соотношений должен равняться числу переменных минус n.*

Рассмотрим, например, уравнения общей теории относительности. Мы имеем 10 неизвестных функций $g_{\mu\nu}$. Благодаря произволу в выборе системы координат каким-либо четырем функциям $g_{\mu\nu}$ могут быть приданы любые значения. Итак, шесть переменных должны удовлетворять 10 уравнениям. Но, как известно, одновременно имеется четыре тождества

$$\left(R^{ik} - \frac{1}{2}\, g^{ik} R\right)_{;\,k} \equiv 0,$$

которые восстанавливают совместность [2].

....

[2] Символ «;» используется здесь в старом, хорошо известном смысле, отличном от того, в каком он используется в остальных соотношениях настоящей статьи.

Можно указать и другие случаи, когда число уравнений превосходит число неизвестных, но уравнения не являются несовместными. Например, существует восемь уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = 0,$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0,$$

для шести неизвестных, однако эта система совместна, так как уравнения связаны двумя известными тождествами.

В чем глубокий смысл превышения числа уравнений над числом переменных?

В выбранном примере два векторных уравнения Максвелла канонически определяют задачу. Достаточно задать поля $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ в момент t, чтобы все остальное можно было определить. Но остающиеся еще скалярные соотношения приводят к тому, что начальные условия не могут быть произвольными. Следовательно, превышение числа уравнений над числом неизвестных (при наличии, однако, тождественных соотношений, делающих уравнения совместными) частично снимает в данном случае произвол в выборе начальных условий. Между тем ясно, что теория, согласующаяся с опытом, тем более удовлетворительна, чем полнее она исключает этот произвол.

Теперь вернемся к нашей проблеме.

12. Для четырехмерного пространства ($n = 4$) мы имеем 16 неизвестных h_s^ν, из которых четыре могут быть произвольными, так что только 12 должны будут определяться уравнениями поля. Число уравнений, образующих на первый взгляд надлежащую систему, составляло 22, а именно: 6 уравнений (25) и 16 уравнений (26). Но нам бы потребовалось иметь 10 тождеств, которые в этом случае отсутствуют. Так становится понятным, каким образом условие совместности позволяет нам эффективно ограничить произвол в выборе уравнений поля.

Исследуем теперь тождество (24). Оно подсказывает нам возможность выбора в качестве уравнений поля системы

$$G^{\mu\alpha} = 0, \tag{27}$$

$$F^{\mu\alpha} = 0 \tag{28}$$

или в явном виде

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu}\tau}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = 0, \tag{27a}$$

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\alpha} = 0. \tag{28a}$$

Эта система, мало отличающаяся от системы уравнений (25) и (26), состоит по-прежнему из 22 уравнений, которые, однако, выбраны так, что удовлетворяют четырем тождествам (24). Тем не менее разность $22-4=18$ все-таки превышает разность $16-4=12$. Для совместности новой системы уравнений требуется, чтобы между этими уравнениями существовало еще 6 дополнительных тождественных соотношений. Докажем, что эти необходимые тождества существуют. Для этого сначала придадим уравнениям (28) другую форму, эквивалентную первоначальной. Будем руководствоваться тождеством (22):

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\,\alpha} - (\varphi_{\mu,\,\nu} - \varphi_{\nu,\,\mu}) \equiv 0. \tag{22}$$

Мы положили $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\,\alpha} = 0$. Тогда из (22) следует

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x^\mu} = 0.$$

Следовательно, φ_μ является скалярной производной некоторого скаляра, который удобно обозначить как $\ln\psi$:

$$\varphi_\mu = \frac{\partial \ln\psi}{\partial x^\mu}.$$

Положим далее

$$F_\mu = \varphi_\mu - \frac{\partial \ln\psi}{\partial x^\mu}.$$

Имеем $F_\mu \equiv 0$. Тогда уравнения

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\alpha} = 0$$

можно заменить уравнениями $F_\mu = 0$, и нашу систему уравнений записать в виде

$$G^{\mu\alpha} = 0, \tag{29}$$

$$F_\mu = 0 \tag{30}$$

или

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = 0, \tag{29a}$$

$$\varphi_\mu - \frac{\partial \ln\psi}{\partial x^\mu} = 0. \tag{30a}$$

Теперь мы имеем 16 уравнений (29) и 4 уравнения (30), т. е. всего 20 уравнений. Мы ввели еще одну новую переменную — скаляр ψ; значит всего имеется $16+1=17$ неизвестных, из которых 4 произвольны. Чтобы система была совместной, между компонентами $G^{\mu\alpha}$ и F_μ должно существовать

$$20 - (17 - 4) = 7$$

тождеств. Четыре из них мы уже нашли; это — тождества (24). Но существуют и другие тождественные соотношения между рассматриваемыми величинами и (это можно считать чудом!) их как раз три. Я не могу сказать, каковы глубокие причины их существования. Однако данный тип пространства изучался до меня математиками, в частности Вейценбеком, Эйзенхартом и Картаном. Я надеюсь, что они помогут выяснить скрытые первопричины этих новых тождеств. Как бы то ни было, эти тождества существуют. Сейчас я укажу, как к ним можно прийти.

Разложим тензор $G^{\mu\alpha}$ на симметричную часть $\underline{\underline{G}}^{\mu\alpha}$ и антисимметричную часть $\underline{G}^{\mu\alpha}$. Имеем

$$2\underline{G}^{\mu\alpha} = (\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} - \Lambda^{\mu}_{\underline{\alpha\nu}})_{;\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} + \Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} =$$

$$= (\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\nu\alpha}})_{;\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}} + \Lambda^{\sigma}_{\alpha\tau}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau},$$

поскольку $\Lambda^{\mu}_{\underline{\alpha\nu}}$ антисимметричны по α и ν. Можно выразить $2\underline{G}^{\mu\alpha}$ через $F^{\mu\alpha} = \Lambda^{\nu}_{\mu\alpha;\,\nu}$ и некоторый тензор, антисимметричный по отношению к любой паре индексов α, μ, ν,

$$S^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} = \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} + \Lambda^{\nu}_{\underline{\alpha\mu}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\nu\alpha}}. \tag{31}$$

Очевидно,

$$2\underline{G}^{\mu\alpha} = S^{\nu}_{\underline{\alpha\mu};\,\nu} + F^{\mu\alpha} + C.$$

Дополнительный член C задается равенством.

$$C = \Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}.$$

Для его определения заметим, что, переставив немые индексы σ и τ, получим

$$\Lambda_{\underline{\alpha\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} = \Lambda^{\tau}_{\underline{\alpha\sigma}}\Lambda^{\mu}_{\tau\sigma} = -\Lambda^{\tau}_{\underline{\alpha\sigma}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}$$

и

$$\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = \Lambda^{\tau}_{\underline{\mu\sigma}}\Lambda^{\alpha}_{\tau\sigma} = -\Lambda^{\tau}_{\underline{\mu\sigma}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}.$$

С другой стороны, имеем равенство

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\tau\sigma}}\Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}} = \Lambda^{\alpha}_{\tau\sigma}\Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}$$

благодаря тому, что

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\tau\sigma}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} = \Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}\, g^{\beta\tau} g^{\gamma\sigma}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} = \Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}\Lambda^{\mu}_{\gamma\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\tau\sigma}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}.$$

Следовательно,

$$-C = \Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\alpha}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\mu}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}\left(\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\alpha}} + \Lambda^{\tau}_{\underline{\alpha\sigma}} + \Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\right)\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} - \\ - \frac{1}{2}\left(\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\mu}} + \Lambda^{\tau}_{\underline{\mu\sigma}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}\right)\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau},$$

т. е.

$$-C = \frac{1}{2}S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} - \frac{1}{2}S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}.$$

Окончательно имеем

$$2\underline{G}^{\mu\alpha} = -S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha};\,\nu} + \frac{1}{2}S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} - \frac{1}{2}S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} + F^{\mu\alpha}. \tag{32}$$

Запишем ковариантную производную в явном виде (подчеркнутые индексы контрвариантны). Имеем

$$-S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha};\,\nu} = S^{\tau}_{\underline{\alpha\mu};\,\tau} = S^{\tau}_{\alpha\mu,\,\tau} + S^{\sigma}_{\underline{\alpha\mu}}\Delta^{\tau}_{\sigma\tau} + S^{\tau}_{\underline{\sigma\mu}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} + S^{\tau}_{\underline{\alpha\sigma}}\Delta^{\mu}_{\sigma\tau},$$

или, переставляя σ и τ местами,

$$S^{\tau}_{\underline{\sigma\mu}}\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} = S^{\sigma}_{\underline{\tau\mu}}\Delta^{\alpha}_{\tau\sigma} = \frac{1}{2}\left(S^{\tau}_{\underline{\sigma\mu}}\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} + S^{\sigma}_{\underline{\tau\mu}}\Delta^{\alpha}_{\tau\sigma}\right) = \\ = \frac{1}{2}S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}\left(\Delta^{\alpha}_{\tau\sigma} - \Delta^{\alpha}_{\sigma\tau}\right) = -\frac{1}{2}S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau},$$

поскольку

$$S^{\tau}_{\underline{\sigma\mu}} = S^{\mu}_{\underline{\tau\sigma}} = S^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}};$$

кроме того,

$$S^{\tau}_{\underline{\alpha\sigma}}\Delta^{\mu}_{\sigma\tau} = S^{\sigma}_{\underline{\alpha\tau}}\Delta^{\mu}_{\tau\sigma} = \frac{1}{2}S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\left(\Delta^{\mu}_{\sigma\tau} - \Delta^{\mu}_{\tau\sigma}\right) = \frac{1}{2}S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}.$$

Следовательно,

$$-S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha};\,\nu} = -S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha},\,\nu} + \frac{1}{2}S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} - \frac{1}{2}S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} - S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}\Delta^{\nu}_{\sigma\nu}$$

и тогда

$$2\underline{G}^{\mu\alpha} = -S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha},\,\nu} - S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}\Delta^{\nu}_{\sigma\nu} + F^{\mu\alpha}. \tag{33}$$

Вычислим член $\Delta^{\nu}_{\sigma\nu}$, воспользовавшись его определением. Имеем

$$\Lambda^{\tau}_{\sigma\tau} = \Delta^{\tau}_{\sigma\tau} - \Delta^{\tau}_{\tau\sigma}.$$

Но по определению

$$\Delta^{\mu}_{\alpha\beta} = h^{\mu}_{s}\,h_{s\alpha,\,\beta}, \qquad \Delta^{\tau}_{\tau\sigma} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x^{\sigma}} = \frac{\partial \ln h}{\partial x^{\sigma}}.$$

С другой стороны, мы положили

$$\Lambda^{\tau}_{\sigma\tau} = \varphi_{\sigma}$$

и

$$F_{\sigma} = \varphi_{\sigma} - \frac{\partial \ln \psi}{\partial x^{\sigma}} .$$

Значит,

$$\Delta^{\tau}_{\sigma\tau} = \varphi_{\sigma} + \frac{\partial \ln h}{\partial x^{\sigma}} = F_{\sigma} + \frac{\partial \ln (\psi h)}{\partial x^{\sigma}} .$$

Подставим это в предыдущее уравнение, умножив его на ψh:

$$\psi h (2\underline{G}^{\mu\alpha} - F^{\mu\alpha}) = \psi h S^{\sigma}_{\underline{\alpha\mu}, \sigma} - \psi h F_{\sigma} S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}} - \psi h \frac{\partial \ln (\psi h)}{\partial x^{\sigma}} S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}.$$

Перенося второй член правой части уравнения в левую часть, получаем

$$\psi h (2\underline{G}^{\mu\alpha} - F^{\mu\alpha} + S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}} F_{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} (\psi h S^{\sigma}_{\underline{\alpha\mu}}).$$

Теперь продифференцируем последнее равенство по α. Тогда правая часть равенства обратится в нуль и мы получим тождества

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left[\psi h \ (2\underline{G}^{\mu\alpha} - F^{\mu\alpha} + S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}} F_{\sigma}) \right] \equiv 0. \tag{34}$$

Действительно, правую часть равенства можно переписать с заменой немых индексов в следующем виде:

$$(h\psi S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}})_{, \sigma, \alpha} = (h\psi S^{\alpha}_{\underline{\mu\sigma}})_{, \alpha, \sigma} = -(h\psi S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}})_{, \alpha, \sigma},$$

так как

$$S^{\alpha}_{\mu\sigma} = - S^{\sigma}_{\mu\alpha}.$$

Существует только 3 независимых тождества (34). Если $A^{\mu\alpha}$ — антисимметричный тензор,

$$A^{\mu\alpha} = - A^{\alpha\mu},$$

обладающий свойством

$$(A^{\mu\alpha})_{, \alpha} \equiv 0,$$

то

$$(A^{\mu\alpha})_{, \alpha, \mu} = (A^{\alpha\mu})_{, \mu, \alpha} = -(A^{\mu\alpha})_{, \mu, \alpha} \equiv 0.$$

Это справедливо для любого антисимметричного тензора $A^{\mu\alpha}$. Если принять за $A^{\mu\alpha}$ первый член тождества (34), то получим соотношение, не зависящее от значений, принимаемых $G^{\mu\alpha}$ и F_{σ}. Это уменьшает число независимых тождеств на 1. Окончательное число этих тождеств составляет $4 + 3 = 7$, число уравнений 20, а число неизвестных 17. Очевидно, $20 - 7 = 17 - 4$ и система совместна.

13. Можно попытаться непосредственно проверить совместность предлагаемой системы уравнений. Для этого допустим, что *все* уравнения

$$G^{\mu\alpha} = 0, \qquad F_\sigma = 0$$

удовлетворяются для пространственного сечения $x^4 = \text{const} = a$. Разделим их на две группы: пусть первая группа состоит из 13 уравнений [3]:

$$\begin{array}{llll} F_1 = 0, & F_2 = 0, & F_3 = 0, & F_4 = 0, \\ G^{11} = 0, & G^{12} = 0, & G^{13} = 0, & \\ G^{21} = 0, & G^{22} = 0, & G^{23} = 0, & \\ G^{31} = 0, & G^{32} = 0, & G^{33} = 0, & \end{array}$$

а вторая группа — из остальных 7 уравнений. Легко доказать справедливость следующего утверждения. *Если все уравнения удовлетворяются для сечения $x^4 = 0$ и если 13 уравнений первой группы удовлетворяются во всем четырехмерном пространстве, то и уравнения второй группы также автоматически удовлетворяются во всем этом пространстве.*

Действительно,

$$F_{\mu\alpha} = F_{\mu,\,\alpha} - F_{\alpha,\,\mu}.$$

Если F_μ всюду обращается в нуль, то будет равен нулю и $F_{\mu\alpha}$. В сечении $x^4 = 0$ имеем

$$\frac{\partial G^{\mu 4}}{\partial x^4} = 0,$$

как это следует из тождества

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[h\psi\ (2\underline{G}^{\mu\alpha} - F^{\mu\alpha} + S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}} F_\sigma)\right] \equiv 0. \tag{34}$$

Рассмотрим бесконечно близкое сечение $x^4 = a + da$. Поскольку $F^{\mu\alpha}$ и F_σ всюду равны нулю, то из предыдущего равенства для $\alpha = 4$ следует, что $G^{\mu\alpha}$ будут равны нулю также и в этом сечении. Аналогичное рассуждение, использующее тождество

$$G^{\mu\alpha}_{;\,\alpha} - F^{\mu\nu}_{;\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu}\tau} F_{\tau\sigma} \equiv 0, \tag{24}$$

показывает, что симметричная часть $G^{\mu\alpha}$, обозначенная через $\underline{G}^{\mu\alpha}$, будет

[3] Совместность этих 13 уравнений не вызывает сомнений.

также равна нулю для $\alpha = 4$ в бесконечно близком сечении $x^4 = a + da$. Следовательно, наш вывод справедлив для

$$G^{\mu\alpha} = \underline{G}^{\mu\alpha} + \underline{\underline{G}}^{\mu\alpha}$$

в сечении $x^4 = a + da$ и может быть распространен на все пространство.

14. Займемся теперь, насколько это окажется возможным, физической интерпретацией теории. Очень трудно дать физическую интерпретацию уравнениям во всей их общности. Придется ограничиться первым приближением.

Для этого рассмотрим пространство, лишь бесконечно мало отличающееся от эвклидова. Поскольку последнее характеризуется значениями $h_{s\nu}$, равными $\delta_{s\nu}$ ($= 1$ или 0, x^4 — мнимо), наше допущение сведется к тому, что

$$h_{s\nu} = \delta_{s\nu} + \overline{h}_{s\nu}. \tag{35а}$$

Тогда следует положить

$$h_s^{\nu} = \delta_{s\nu} - \overline{h}_{\nu s}. \tag{35б}$$

Итак, подставим указанные выражения для $h_{s\nu}$ и h_s^{ν} во все данные уравнения и сохраним только члены первого порядка малости. Тогда получим

$$\Delta^{\mu}_{\alpha\beta} = h_s^{\mu} h_{s\alpha, \beta} = \overline{h}_{\mu\alpha, \beta},$$

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha\beta} = \overline{h}_{\mu\alpha, \beta} - \overline{h}_{\mu\beta, \alpha}.$$

Уравнения поля будут иметь вид

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{h}_{\alpha\mu, \nu, \nu} - \overline{h}_{\alpha\nu, \mu, \nu} = 0, \\ \overline{h}_{\alpha\mu, \nu, \alpha} - \overline{h}_{\alpha\nu, \mu, \alpha} = 0, \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{l} \overline{h}_{\alpha\mu, \nu, \nu} - \overline{h}_{\alpha\nu, \nu, \mu} = 0, \qquad (36) \\ \overline{h}_{\alpha\mu, \alpha, \nu} - \overline{h}_{\alpha\nu, \alpha, \mu} = 0. \qquad (37) \end{array}\right.$$

Второе уравнение просто означает, что можно положить

$$\overline{h}_{\alpha\mu, \alpha} = \frac{\partial \chi}{\partial x^{\mu}}, \tag{38}$$

так что система сводится к

$$\overline{h}_{\alpha\mu, \nu, \nu} - \overline{h}_{\alpha\nu, \nu, \mu} = 0, \tag{39}$$

$$\overline{h}_{\alpha\mu, \alpha} - \chi_{, \mu} = 0. \tag{40}$$

Однако эта форма уравнений не совсем удовлетворительна, поскольку она не дает с первого взгляда достаточно ясных сведений о рассматриваемом поле. Чтобы прийти к более легко интерпретируемой форме уравнений, вспомним, что система координат выбрана до известной степени произвольно, и произведем ее бесконечно малое преобразование:

$$x^{\mu'} = x^{\mu} - \xi^{\mu}. \tag{41}$$

Здесь ξ^{μ} — бесконечно малые величины первого порядка. Выберем их такими, чтобы система приняла более простой вид.

Применение бесконечно малого преобразования эквивалентно замене $h_{\mu\nu}$ на

$$\overline{h}'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \xi^{\mu}_{,\nu} \tag{42}$$

(уравнение, следующее из правила преобразования тензоров). Следовательно,

$$\overline{h}'_{\alpha\nu,\nu} = \overline{h}_{\alpha\nu,\nu} + \xi^{\alpha}_{,\nu,\nu},$$
$$\overline{h}'_{\alpha\nu,\alpha} = \overline{h}_{\alpha\nu,\alpha} + \xi^{\alpha}_{,\nu,\alpha}.$$

Выберем коэффициенты ξ^{μ} так, чтобы эти две величины в новой системе координат обратились в нуль. Я утверждаю, что для этого достаточно принять

$$\xi^{\alpha}_{,\nu,\nu} = -\overline{h}_{\alpha\nu,\nu}, \tag{43}$$

$$\xi^{\alpha}_{,\alpha} = -\chi. \tag{44}$$

Действительно, во-первых,

$$\xi^{\alpha}_{,\nu,\alpha} = \xi^{\alpha}_{,\alpha,\nu} = -\chi_{,\nu} = -\overline{h}_{\alpha\nu,\alpha},$$

во-вторых, система уравнений (43) и (44) совместна, хотя и состоит из 5 уравнений для 4-х неизвестных, поскольку существует тождество

$$(-\chi)_{,\nu,\nu} - (-\overline{h}_{\alpha\nu,\nu})_{,\alpha} \equiv 0.$$

Следовательно, решение данной системы уравнений даст такие значения ξ^{μ}, что они обеспечат выполнение равенств

$$\overline{h}'_{\alpha\nu,\nu} = 0, \tag{45}$$

$$\overline{h}'_{\alpha\nu,\alpha} = 0. \tag{46}$$

Итак, в результате указанного преобразования координат наши уравнения принимают вид (штрихи опущены)

$$\left\{\begin{aligned} \overline{h}_{\alpha\mu,\nu,\nu} &= 0, \\ \overline{h}_{\alpha\mu,\alpha} &= 0, \\ \overline{h}_{\alpha\mu,\mu} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{47}$$

Если все $\overline{h}_{\alpha\mu}$ разложить на симметричную часть $S_{\alpha\mu}$ и антисимметричную часть $A_{\alpha\mu}$, то система распадется на две системы, каждая из которых состоит только из симметричных или только из антисимметричных членов:

$$\begin{cases} S_{\alpha\mu,\,\nu,\,\nu} = 0, \\ S_{\alpha\mu,\,\mu} = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} A_{\alpha\mu,\,\mu,\,\nu} = 0, \\ A_{\alpha\mu,\,\mu} = 0. \end{cases} \tag{48}$$

Итак, мы пришли к двум группам уравнений. *Группа симметричных уравнений выражает законы гравитационного поля, совместные с законом Ньютона—Пуассона*; при этом результат не вполне идентичен результату теории, основанной на геометрии Римана. *Группа антисимметричных уравнений выражает уравнения Максвелла в обобщенной форме.* Я действительно верю, что группа антисимметричных уравнений должна интерпретироваться как система, дающая общие уравнения электромагнитного поля (в первом приближении).

Следовательно, в данном случае происходит четкое разделение законов электромагнетизма, с одной стороны, и законов гравитации, с другой. Но это разделение наблюдается *только в первом приближении*; оно не происходит в общем случае; поле подчиняется единому закону. Однако при современном состоянии теории невозможно судить о том, верна ли *интерпретация* величин, представляющих поле. Поле в действительности определяется в первую очередь своим пондеромоторным воздействием на частицы. Однако закон этого воздействия еще не известен. Для его открытия потребовалось бы проинтегрировать уравнения поля, что до сих пор сделать не удалось.

15. В заключение, резюмируя полученные результаты, можно сказать следующее.

Частный вид структуры пространства, который мы приняли в качестве основной гипотезы, привел нас к определенным общим уравнениям поля, которые в первом приближении приводятся к хорошо известным уравнениям гравитации и электромагнетизма. Однако полученные до сих пор результаты не дают возможности экспериментальной проверки предсказаний теории. Дело в том, что до сих пор не удалось проинтегрировать полученные уравнения и найти законы строения частиц и их движения в поле.

Первая трудность, с преодоления которой должно будет начаться развитие теории, заключается в нахождении лишенных особенностей интегралов, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям поля и способных дать правильное решение проблемы частиц и их движения. Только после этого сравнение с экспериментом станет возможным.

Эта работа содержит наиболее полное изложение второго варианта единой теории поля, намеченного в работах 87 и 88. Новый вариант призван заменить старую аффинную теорию Вейля и Эддингтона (статьи 72—75, 79). От этого нового варианта Эйнштейн отказывается уже через год и переходит к исследованию обобщений пятимерных теорий (ср. статьи 103,106,107).

ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ, ОСНОВАННАЯ НА МЕТРИКЕ РИМАНА И АБСОЛЮТНОМ ПАРАЛЛЕЛИЗМЕ *

В последние годы мною была развита теория, которую можно изложить в форме, легко понятной каждому, кто знает общую теорию относительности. Изложение это необходимо потому, что после того, как недавно были найдены новые закономерности и теория была усовершенствована, чтение старых работ означало бы лишь потерю времени. В этой работе теория излагается, на мой взгляд, в наиболее целесообразном для быстрого усвоения виде. От Вейценбека и Картана, в частности, я узнал, что теория континуумов рассматриваемого здесь рода сама по себе не является новой. Картан любезно взял на себя труд составить исторический обзор соответствующего раздела математики, который дополняет мою работу; он напечатан в этом же журнале непосредственно вслед за моей статьей. Я выражаю искреннюю благодарность Картану за его ценный вклад. Самым важным и во всяком случае новым в моей работе является получение простейших законов поля, которым может подчиняться риманово многообразие с абсолютным параллелизмом. При этом вопрос о физическом смысле теории будет рассмотрен лишь кратко.

§ 1. Структура континуума

Поскольку в последующих рассуждениях число измерений не играет никакой роли, мы будем рассматривать n-мерный континуум. Чтобы учесть гравитацию, предположим, что существует риманова метрика. Однако в природе существуют также электромагнитные поля, которые не могут описываться римановой метрикой. Возникает вопрос: каким логически наиболее естественным образом приписать нашему риманову пространству такую структуру, чтобы теория приобрела единый характер?

* *Auf die Riemann-Metrik und den Fern-Parallelismus gegründete einheitliche Feldtheorie*. Math. Ann., 1930, 102, 685—697.

Пусть в окрестности каждой точки P континуум (псевдо-)эвклидов. В каждой точке существует локальная декартова система координат (или ортогональный n-под), в которой выполняется теорема Пифагора. Ориентация этого n-пода в римановом пространстве не играет роли. Предположим теперь, что между этими окрестностями (эвклидовыми пространствами) существует также связь по направлениям. Будем предполагать, что в силу структуры пространства можно, как и в эвклидовой геометрии, говорить о параллельной ориентации всех локальных n-подов (что имеет смысл *только* в пространстве с метрической структурой). В дальнейшем мы будем всегда считать, что n-поды ориентированы параллельно. Тогда произвольная ориентация локального n-пода в *одной* точке P однозначно определяет ориентацию локальных n-подов во всех точках континуума.

Наша задача теперь состоит в том, чтобы описать этот континуум математически так, чтобы можно было найти простейшие ограничения, которые могут быть наложены на такой континуум.Мы делаем это в надежде найти таким способом законы природы, аналогично тому, как это было сделано в общей теории относительности, основанной только на метрической структуре пространства.

§ 2. Математическое описание структуры пространства

Локальный n-под состоит из n взаимно-перпендикулярных единичных векторов с компонентами h_s^ν в произвольной гауссовой системе координат. Здесь, как и везде, нижний латинский индекс означает принадлежность к определенному n-поду, греческий индекс вверху или внизу — контравариантный или ковариантный характер преобразования соответствующей величины относительно преобразований гауссовой системы координат.

Общее свойство преобразования h_s^ν состоит в следующем. Если все локальные системы, или n-поды, повернуть одинаковым образом (что разрешается) и затем ввести новую гауссову систему координат, то новые и старые h_s^ν будут связаны законом преобразования

$$h_s^{\nu'} = \alpha_{st} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha} h_t^\alpha, \tag{1}$$

где постоянные коэффициенты α_{st} образуют ортогональную систему

$$\alpha_{sa}\alpha_{bs} = \delta_{ab} = \begin{cases} 1 \text{ при } a = b \\ 0 \text{ при } a \neq b. \end{cases} \tag{2}$$

Закон преобразования (1) без труда обобщается на величины, компоненты которых содержат сколь угодно большое число локальных и координатных индексов. Такие величины мы называем тензорами. Отсюда непосредственно получаются законы алгебраических операций с тензорами (сложение, умножение, свертывание по латинским и греческим индексам).

Величины h_s^ν назовем компонентами фундаментального тензора. Если вектор имеет в локальной системе составляющие A_s, а в гауссовой системе — координаты A^ν, то по определению h_s^ν имеем:

$$A^\nu = h_s^\nu A_s, \tag{3}$$

или, разрешая относительно A_s,

$$A_s = h_{s\nu} A^\nu. \tag{4}$$

Тензорный характер нормированных миноров $h_{s\nu}$ величин h_s^ν следует из соотношения (4). Величины $h_{s\nu}$ представляют собой ковариантные составляющие фундаментального тензора. Между $h_{s\nu}$ и h_s^ν существуют следующие соотношения:

$$h_{s\mu} h_s^\nu = \delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1 \text{ при } \mu = \nu, \\ 0 \text{ при } \mu \neq \nu, \end{cases} \tag{5}$$

$$h_{s\mu} h_t^\mu = \delta_{st}. \tag{6}$$

В силу ортогональности локальной системы абсолютная величина вектора определяется равенством

$$A^2 = A_s^2 = h_{s\mu} h_{s\nu} A^\mu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu; \tag{6'}$$

следовательно,

$$g_{\mu\nu} = h_{s\mu} h_{s\nu} \tag{7}$$

представляют собой метрические коэффициенты.

Фундаментальный тензор позволяет [см. соотношения (3) и (4)] переводить локальные индексы в координатные и наоборот (умножением и свертыванием), так что вопрос о применении тензоров с индексами различного характера становится чисто формальным.

Ясно, что выполняются также соотношения

$$A_\nu = h_{s\nu} A_s, \tag{3a}$$

$$A_s = h_s^\nu A_\nu. \tag{4a}$$

Кроме того, выполняется соотношение между определителями

$$g = |g_{\sigma\tau}| = |h_{\alpha\sigma}|^2 = h^2, \tag{8}$$

так что инвариантный элементарный объем $\sqrt{g}d\tau$ принимает вид $hd\tau$.

Особый характер времени в нашей 4-мерной модели пространства и времени удобнее всего учитывать, полагая координату x^4 чисто мнимой (как локальную, так и общую), равно как и все составляющие тензоров с нечетным числом индексов 4.

§ 3. Дифференциальные соотношения

Обозначая через δ приращение, получаемое компонентами вектора или тензора при «параллельном переносе» в смысле Леви-Чивиты при переходе к бесконечно близкой точке континуума, имеем в соответствии с изложенным выше

$$0 = \delta A_s = \delta(h_{s\alpha}A^\alpha) = \delta(h_s^\alpha A_\alpha). \tag{9}$$

Раскрывая скобки, получаем

$$h_{s\alpha}\delta A^\alpha + A^\alpha h_{s\alpha,\,\beta}\delta x^\beta = 0,$$

$$h_s^\alpha \delta A_\alpha + A_\alpha h_{s,\,\beta}^\alpha \delta x^\beta = 0,$$

причем запятая во втором члене означает, как обычно, дифференцирование по x^β. Разрешая эти уравнения относительно δA^σ и δA_σ, находим

$$\delta A^\sigma = -A^\alpha \Delta_{\alpha\beta}^\sigma \delta x^\beta, \tag{10}$$

$$\delta A_\sigma = A_\alpha \Delta_{\sigma\beta}^\alpha \delta x^\beta, \tag{11}$$

где мы ввели следующее обозначение:

$$\Delta_{\alpha\beta}^\sigma = h_s^\sigma h_{s\alpha,\,\beta} = -h_{s\alpha} h_{s,\,\beta}^\sigma. \tag{12}$$

[Последнее преобразование основывается на соотношении (5).]

В противоположность геометрии Римана этот закон параллельного переноса несимметричен. Если он симметричен, то существует эвклидова геометрия, поскольку в таком случае

$$\Delta_{\alpha\beta}^\sigma - \Delta_{\beta\alpha}^\sigma = 0,$$

или

$$h_{s\alpha,\beta} - h_{s\beta,\,\alpha} = 0;$$

но тогда

$$h_{s\alpha} = \frac{\partial \psi_s}{\partial x_\alpha}.$$

Выбирая ψ_s в качестве новых переменных x'_s, имеем

$$h_{s\alpha} = \delta_{s\alpha}, \tag{13}$$

что и доказывает утверждение.

Ковариантное дифференцирование. Локальные компоненты A_s вектора инвариантны относительно произвольного преобразования координат. Отсюда немедленно следует тензорный характер производных

$$A_{s,\,\alpha}. \tag{14}$$

Заменяя (14) с помощью соотношения (4а) выражением

$$(h_s^\sigma A_\sigma)_{,\,\alpha},$$

доказываем тензорный характер суммы

$$h_s^\sigma A_{\sigma,\,\alpha} + A_\sigma h^\sigma_{s,\,\alpha},$$

а следовательно (после умножения на $h_{s\tau}$), суммы

$$A_{\tau,\,\alpha} + A_\sigma h^\sigma_{s,\,\alpha} h_{s\tau},$$

разности

$$A_{\tau,\,\alpha} - A_\sigma h^\sigma_s h_{s\tau,\,\alpha},$$

а также, согласно (12), и величины

$$A_{\tau,\,\alpha} - A_\sigma \Delta^\sigma_{\tau\alpha}.$$

Это выражение называется ковариантной производной ($A_{\tau;\,\alpha}$) вектора A_τ.

Итак, мы получили правило ковариантного дифференцирования

$$A_{\sigma;\,\tau} = A_{\sigma,\,\tau} - A_\alpha \Delta^\alpha_{\sigma\tau}. \tag{15}$$

Аналогично из соотношения (3) следует также формула

$$A^\sigma_{;\,\tau} = A^\sigma_{,\,\tau} + A^\alpha \Delta^\sigma_{\alpha\tau}. \tag{16}$$

Правила ковариантного дифференцирования тензора получаются теперь аналогичным образом. Поясним на примере:

$$A^\sigma_{\alpha\tau;\,\rho} = A^\sigma_{\alpha\tau,\,\rho} + A^\nu_{\alpha\tau} \Delta^\sigma_{\nu\rho} - A^\sigma_{\alpha\nu} \Delta^\nu_{\tau\rho}. \tag{17}$$

Поскольку с помощью фундаментального тензора h^{α}_{s} локальные (латинские) индексы можно переводить в координатные (греческие), то вопрос о том, какими индексами — локальными или координатными — предпочтительнее пользоваться при формулировании каких-либо тензорных соотношений, остается открытым. Локальные индексы предпочитали применять итальянские авторы (Леви-Чивита, Палатини), тогда как я пользовался преимущественно координатными индексами.

Дивергенция. Свертывая ковариантные производные, получаем дивергенцию как и в абсолютном дифференциальном исчислении, основанном только на метрике. Например, свертывая (17) по индексам σ и ρ, получаем тензор

$$A_{\alpha\tau} = A^{\sigma}_{\alpha\tau;\,\sigma}.$$

В предыдущих работах мы вводили еще и другие операции дивергенции, но теперь не считаем необходимым приписывать этим операторам особый смысл.

Ковариантные производные фундаментального тензора. Из выведенных формул нетрудно найти, что ковариантные производные и дивергенции фундаментального тензора обращаются в нуль. Например,

$$h^{\nu}_{s;\,\tau} \equiv h^{\nu}_{s,\,\tau} + h^{\alpha}_{s}\Delta^{\nu}_{\alpha\tau} \equiv \delta_{st}\,(h^{\nu}_{t,\,\tau} + h^{\alpha}_{t}\Delta^{\nu}_{\alpha,\,\tau}) \equiv h^{\alpha}_{s}\,(h_{t\alpha}h^{\nu}_{t,\tau} + \Delta^{\nu}_{\alpha\tau}) =$$
$$= h^{\alpha}_{s}\,(-\Delta^{\nu}_{\alpha\tau} + \Delta^{\nu}_{\alpha\tau}) \equiv 0. \quad (18)$$

Аналогично

$$h^{\nu}_{s;\,\tau} \equiv g^{\mu\nu}_{;\,\tau} \equiv g_{\mu\nu;\,\tau} \equiv 0. \quad (18a)$$

Также обращаются в нуль дивергенции $h^{\nu}_{s;\nu}$ и $g^{\mu\nu}_{;\,\nu}$.

Дифференцирование произведений тензоров. Как и в обычном дифференциальном исчислении, ковариантную производную произведения тензоров можно выразить через производные сомножителей. Если $S^{\cdot}_{\cdot}$ и $T^{\cdot}_{\cdot}$ — тензоры с произвольным характером индексов, то

$$(S^{\cdot}_{\cdot}T^{\cdot}_{\cdot})_{;\,\alpha} = S^{\cdot}_{\cdot;\,\alpha}T^{\cdot}_{\cdot} + T^{\cdot}_{\cdot;\,\alpha}S^{\cdot}_{\cdot}. \quad (19)$$

Отсюда, а также из равенства нулю ковариантных производных фундаментального тензора следует, что фундаментальный тензор можно по желанию вносить или выносить из-под знака ковариантного дифференцирования (;).

«Кривизна». Из гипотезы «абсолютного параллелизма» или из соотношения (9) следует интегрируемость закона параллельного переноса (10) или (11). Отсюда следует

$$0 = -\Delta^{\iota}_{\varkappa\lambda;\mu} \equiv -\Delta^{\iota}_{\varkappa\lambda,\mu} + \Delta^{\iota}_{\varkappa\mu,\lambda} + \Delta^{\sigma}_{\varkappa\mu}\Delta^{\iota}_{\sigma\lambda} - \Delta^{\iota}_{\sigma\mu}\Delta^{\sigma}_{\varkappa\lambda}. \tag{20}$$

Этим условиям должны удовлетворять Δ, если они выражаются через величины h. Из равенства (20) видно, что характерные свойства рассматриваемого здесь многообразия должны в корне отличаться от свойств их в прежней теории. Именно, согласно новой теории, существуют все тензоры старой теории, в частности и риманов тензор кривизны, образованный из символов Кристоффеля. Однако в новой теории существуют также более простые и понятные тензорные величины, которые будут использованы для формулирования законов поля.

Тензор Λ. Дважды выполняя ковариантное дифференцирование скаляра φ, в соответствии с формулой (15), получаем тензор

$$\varphi_{,\sigma,\tau} - \varphi_{,\alpha}\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau}.$$

Переставляя индексы σ и τ и вычитая полученный таким образом тензор из первого, получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}(\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} - \Delta^{\alpha}_{\tau\sigma}).$$

Отсюда немедленно следует, что разность

$$\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = \Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} - \Delta^{\alpha}_{\tau\sigma} \tag{21}$$

есть тензор. Следовательно, согласно этой теории, существует тензор, содержащий только компоненты $h_{s\alpha}$ фундаментального тензора и их первые производные. Тот факт, что обращение этого тензора в нуль приводит к эвклидовой метрике, был уже доказан раньше [ср. (13)]. Таким образом, естественное определение континуума формулируется условиями, накладываемыми на этот тензор.

Свертывая тензор Λ, получаем вектор

$$\varphi_\sigma = \Lambda^{\alpha}_{\sigma\alpha}, \tag{22}$$

который, как я предполагал раньше, должен играть в этой теории роль потенциала электромагнитного поля. Однако недавно я отказался от этого предположения.

Правило перестановки при дифференцировании. Если дважды выполнить ковариантное дифференцирование произвольного тензора T, то получим важное правило перестановки

$$T^{\cdot}_{\cdot;\sigma;\tau} - T^{\cdot}_{\cdot;\tau;\sigma} \equiv -T^{\cdot}_{\cdot;\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}. \tag{23}$$

Доказательство. Если T скаляр (тензор без греческого индекса), то правило перестановки (23) является непосредственным следствием соотношения (15). На этом частном случае мы будем основывать общее доказательство теоремы.

Заметим сначала, что в рассматриваемой теории существуют однородные векторные поля. Они образуются из векторов с одинаковыми компонентами во всех локальных системах. Если (a^α) или (a_α) означает такое векторное поле, то оно, как легко показать, удовлетворяет условию

$$a^\alpha_{;\,\sigma} = 0 \text{ или } a_{\alpha;\,\sigma} = 0.$$

Для простоты будем проводить доказательство для тензора T^λ с единственным индексом. Если φ — скаляр, то из определений (16) и (21) прежде всего следует соотношение

$$\varphi_{;\,\sigma;\,\tau} - \varphi_{;\,\tau;\,\sigma} \equiv -\varphi_{;\,\alpha}\Lambda^\alpha_{\sigma\tau}.$$

Подставляя сюда вместо φ скаляр $a_\lambda T^\lambda$, где a_λ означает однородное векторное поле, можно при каждом ковариантном дифференцировании менять местами a_λ и символ дифференцирования, так что a_λ во все члены входит в виде множителя. Таким образом получаем

$$[T^\lambda_{;\,\sigma;\,\tau} - T^\lambda_{;\,\tau;\,\sigma} + T^\lambda_{;\alpha}\Lambda^\alpha_{\sigma\tau}]\, a_\lambda \equiv 0.$$

Поскольку это тождество должно выполняться при произвольном выборе a_λ, то выражение в квадратных скобках должно обращаться в нуль; тем самым теорема доказана. Обобщение на тензоры с произвольным числом греческих индексов очевидно.

Тождества для тензора Λ. Складывая три тождества, получаемые из (20) путем циклической перестановки индексов $\varkappa$, λ, μ, и объединяя соответствующие члены с учетом равенства (21), получаем

$$0 \equiv (\Lambda^\iota_{\varkappa\lambda,\,\mu} + \Lambda^\iota_{\lambda\mu,\,\varkappa} + \Lambda^\iota_{\mu\varkappa,\,\lambda}) + (\Delta^\iota_{\sigma\varkappa}\Lambda^\sigma_{\lambda\mu} + \Delta^\iota_{\sigma\lambda}\Lambda^\sigma_{\mu\varkappa} + \Delta^\iota_{\sigma\mu}\Lambda^\sigma_{\varkappa\lambda}).$$

Преобразуем это тождество, вводя вместо обычных производных тензора Λ ковариантные [по формуле (17)]; в результате получим

$$0 \equiv (\Lambda^\iota_{\varkappa\lambda;\,\mu} + \Lambda^\iota_{\lambda\mu;\,\varkappa} + \Lambda^\iota_{\lambda\varkappa;\,\lambda}) + (\Lambda^\iota_{\varkappa\alpha}\Lambda^\alpha_{\lambda\mu} + \Lambda^\iota_{\lambda\alpha}\Lambda^\alpha_{\mu\varkappa} + \Lambda^\iota_{\mu\alpha}\Lambda^\alpha_{\varkappa\lambda}). \qquad (24)$$

Это тождество представляет собой условие, с помощью которого Λ выражаются через h.

Свертывая это тождество по индексам ι и μ, получаем тождество

$$0 \equiv \Lambda^\alpha_{\varkappa\lambda;\,\alpha} + \varphi_{\lambda;\,\varkappa} - \varphi_{\varkappa;\,\lambda} - \varphi_\alpha\Lambda^\alpha_{\varkappa\lambda},$$

или

$$\Lambda^{\alpha}_{\varkappa\lambda;\,\alpha} \equiv \varphi_{\varkappa,\,\lambda} - \varphi_{\lambda,\,\varkappa}, \tag{25}$$

где через φ_λ обозначена величина $\Lambda^{\alpha}_{\lambda\alpha}$ [см. равенство (22)].

§ 4. Уравнения поля

Искомые простейшие уравнения поля представляют собой условия, которым должен удовлетворять тензор $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$. Поскольку число компонент h равно n^2, причем n из них, в силу общей ковариантности, должны оставаться неопределенными, то число независимых уравнений поля должно быть $n^2 - n$. С другой стороны, ясно, что теория тем лучше, чем больше возможностей она исключает (не вступая в противоречие с опытом). Следовательно, число уравнений поля Z должно быть как можно больше. Если через $\bar{Z}$ обозначить число тождественных соотношений между уравнениями поля, то разность $Z - \bar{Z}$ должна быть равна $n^2 - n$.

В соответствии с правилом перестановки дифференцирования,

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu};\,\nu;\,\alpha} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu};\,\alpha;\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu}\underline{\tau};\,\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} \equiv 0. \tag{26}$$

При этом черта под индексом означает «поднятие» или «опускание» индекса, например,

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}} \equiv \Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma} g^{\mu\beta} g^{\nu\gamma},$$

$$\Lambda^{\underline{\alpha}}_{\mu\nu} \equiv \Lambda^{\beta}_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}.$$

Перепишем теперь тождество (26) в виде

$$G^{\mu\alpha}_{;\,\alpha} - F^{\mu\nu}_{;\,\nu} + \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu}\underline{\tau}} F_{\sigma\tau} \equiv 0, \tag{26a}$$

где

$$G^{\mu\alpha} \equiv \Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\mu\tau}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}, \tag{27}$$

$$F^{\mu\nu} \equiv \Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\,\alpha}. \tag{28}$$

Предположим теперь, что уравнения поля выбраны так:

$$G^{\mu\alpha} = 0, \tag{29}$$

$$F^{\mu\alpha} = 0. \tag{30}$$

На первый взгляд в этих уравнениях содержится незаконная переопределенность. Ведь их число равно $n^2 + \frac{n(n-1)}{2}$, а число тождеств (26а) для них, как нам известно, равно n. Однако из тождества (25) и уравнения (30) следует, что $\varphi_\varkappa$ можно свести к потенциалу. В соответствии с этим положим

$$F_\varkappa \equiv \varphi_\varkappa - \frac{\partial \ln \psi}{\partial x^\varkappa} = 0. \tag{31}$$

Это уравнение полностью эквивалентно (30). Уравнение (29) и соотношение (31) вместе образуют $n^2 + n$ уравнений для $n^2 + 1$ функций $h_{s\nu}$ и ψ. Однако между этими уравнениями существует, кроме (26а), еще одна система тождеств, которую мы сейчас найдем.

Обозначая через $\underline{G}^{\mu\alpha}$ антисимметричную часть $G^{\mu\alpha}$, непосредственным вычислением из (27) получаем

$$2\underline{G}^{\mu\alpha} \equiv -S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha};\,\nu} + \frac{1}{2} S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} - \frac{1}{2} S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} + F^{\mu\alpha}, \tag{32}$$

где для краткости введен антисимметричный по всем индексам тензор

$$S^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} = \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} + \Lambda^{\nu}_{\underline{\alpha\mu}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\nu\alpha}}. \tag{33}$$

Вычисляя первый член в (32), находим

$$2\underline{G}^{\mu\alpha} \equiv -S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha},\,\nu} - S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}\Lambda^{\nu}_{\sigma\nu} + F^{\mu\alpha}. \tag{34}$$

Однако теперь, учитывая соотношение (31), которое является определением $F_\varkappa$, получаем

$$\Delta^{\nu}_{\sigma\nu} - \Delta^{\nu}_{\nu\sigma} \equiv \Lambda^{\nu}_{\sigma\nu} \equiv \varphi_\sigma \equiv F_\sigma = \frac{\partial \ln \psi}{\partial x^\sigma},$$

или

$$\Delta^{\nu}_{\sigma\nu} = \frac{\partial \ln \psi h}{\partial x^\sigma} + F_\sigma. \tag{35}$$

Поэтому формула (34) принимает вид

$$h\psi\left(2\underline{G}^{\mu\alpha} - F^{\mu\alpha} + S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}F_\sigma\right) = -\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(h\psi S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}\right). \tag{34б}$$

Отсюда, в силу антисимметрии, следует искомая система тождеств:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[h\psi\left(2\underline{G}^{\mu\alpha} - F^{\mu\alpha} + S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}F_\sigma\right)\right] \equiv 0. \tag{36}$$

Она состоит из n тождеств, из которых независимы только $n-1$, поскольку, в силу антисимметрии, $[\quad]_{,\alpha,\mu} \equiv 0$ независимо от конкретного вида функций $G^{\mu\alpha}$ и F_μ.

В тождествах (26а) и (36) подразумевается, что величина $F^{\mu\alpha}$ выражена через F_μ в соответствии с соотношением, вытекающим из уравнения (31)

$$F_{\mu\alpha} \equiv F_{\mu,\alpha} - F_{\alpha,\mu}. \tag{31a}$$

Теперь мы можем доказать совместность уравнений поля (29) и (30), или (29) и (31).

Сначала следует показать, что число уравнений поля, уменьшенное на число (независимых) тождеств, на n меньше числа переменных поля. В самом деле, так как

число уравнений (29) и (31) равно $n^2 + n$,

число (независимых) тождеств равно $n + n - 1$,

число переменных поля равно $n^2 + 1$,

то

$$n^2 + n - (n + n - 1) = (n^2 + 1) - n.$$

Следовательно, число тождеств как раз такое, какое нам нужно. Однако мы не удовлетворимся этим и докажем следующую теорему.

Если в сечении $x^n = \text{const}$ удовлетворяются все дифференциальные уравнения и, кроме того, $(n^2 + 1) - n$ соответствующим образом выбранных из них уравнений удовлетворяются всюду, то и все $n^2 + n$ уравнений будут выполняться всюду.

Доказательство. Пусть все уравнения выполняются в сечении $x^n = a$ и, кроме того, всюду выполняются уравнения, получающиеся путем приравнивания нулю выражений

$$\begin{array}{lll} F_1 & \ldots F_{n-1} & F_n, \\ G^{11} & \ldots G^{1\,n-1} & \\ \ldots & \ldots\ldots & \\ G^{n-1\,1} & \ldots G^{n-1\,n-1}. & \end{array}$$

Из соотношения (31а) прежде всего следует, что $F^{\mu\alpha}$ также всюду обращаются в нуль. Теперь из тождеств (36) следует, что в соседнем сечении $x^n = a + da$ должны обращаться в нуль и антисимметричные выражения $\underline{G}^{\mu\alpha}$ для $\alpha = n$[1]. Далее, аналогичным образом из тождества (26а) следует, что симметричные выражения $G^{\mu\alpha}$ для $\alpha = n$ должны обращаться в нуль и в бесконечно близком сечении $x^n = a + da$. Повторяя эти рассуждения, нетрудно доказать теорему.

§ 5. Первое приближение

Рассмотрим теперь поле, бесконечно мало отличающееся от эвклидова с обыкновенным параллелизмом. Для этого поля можно положить

$$h_{s\nu} = \delta_{s\nu} + \overline{h}_{s\nu}, \tag{37}$$

где $\overline{h}_{s\nu}$ — бесконечно малые величины первого порядка, а величины более высоких порядков малости опущены. Тогда, в соответствии с соотношениями (5) или (6), можно положить

$$h_s^\nu = \delta_{s\nu} - \overline{h}_{s\nu}. \tag{38}$$

Уравнения поля (29) и (30) в первом приближении имеют вид

$$\overline{h}_{\alpha\mu,\,\nu,\,\nu} - \overline{h}_{\alpha\nu,\,\nu,\,\mu} = 0, \tag{39}$$

$$\overline{h}_{\alpha\mu,\,\alpha,\,\nu} - \overline{h}_{\alpha\nu,\,\alpha,\,\mu} = 0. \tag{40}$$

Уравнение (40) заменим следующим:

$$\overline{h}_{\alpha\nu,\,\alpha} = \chi_{,\nu}. \tag{40a}$$

Теперь мы утверждаем, что из инфинитезимального преобразования координат $x^{\nu'} = x^\nu - \xi^\nu$ следует, какие из величин $\overline{h}_{\alpha\nu,\nu}$ и $\overline{h}_{\alpha\nu,\,\alpha}$ должны обращаться в нуль.

Доказательство. Сначала напишем, что

$$\overline{h}'_{\mu\nu} = \overline{h}_{\mu\nu} + \xi^\mu_{,\,\nu}. \tag{41}$$

Отсюда

$$\overline{h}'_{\alpha\nu,\alpha} = h_{\alpha\nu,\nu} + \xi^\alpha_{,\,\nu,\,\nu'}.$$

$$\overline{h}'_{\alpha\nu,\alpha} = h_{\alpha\nu,\alpha} + \xi^\alpha_{,\alpha,\,\nu}\,.$$

Правые части с учетом уравнения (40а) равны нулю, если выполняются

[1] Для $x^n = a$ величины $\dfrac{\partial \underline{G}^{\mu n}}{\partial x^n}$ равны нулю.

уравнения

$$\xi^{\alpha}_{,\nu,\nu} = -\overline{h}_{\alpha\nu,\nu}, \qquad\qquad (42)$$

$$\xi^{\alpha}_{,\alpha} = -\chi.$$

Но эти $n+1$ уравнений для n величин ξ^{α} совместны, поскольку в соответствии с уравнением (40а)

$$(-h_{\alpha\nu,\nu})_{,\alpha} - (-\chi)_{,\nu,\nu} = 0. \qquad (43)$$

При новом выборе координат уравнения поля имеют вид

$$\overline{h}_{\alpha\mu,\nu} = 0,$$

$$\overline{h}_{\alpha\mu,\alpha} = 0,$$

$$\overline{h}_{\alpha\mu,\mu} = 0.$$

Разобьем теперь выражение $\overline{h}_{\alpha\mu}$ на две части:

$$\overline{h}_{\alpha\mu} + \overline{h}_{\mu\alpha} = \overline{g}_{\alpha\mu},$$

$$h_{\alpha\mu} - \overline{h}_{\mu\alpha} = a_{\alpha\mu},$$

причем $\delta_{\alpha\mu} + \overline{g}_{\alpha\mu} (= g_{\mu\nu})$ определяют в первом приближении метрику, так что уравнения поля принимают вид

$$\overline{g}_{\alpha\mu,\sigma,\sigma} = 0, \qquad (44)$$

$$\overline{g}_{\alpha\mu,\mu} = 0, \qquad (45)$$

$$a_{\alpha\mu,\sigma,\sigma} = 0, \qquad (46)$$

$$a_{\alpha\mu,\mu} = 0. \qquad (47)$$

Напрашивается утверждение, что в первом приближении $\overline{g}_{\alpha\mu}$ определяют гравитационное поле, а $a_{\alpha\mu}$ — электромагнитное поле. Уравнения (44) и (45) соответствуют уравнению Пуассона, а уравнения (46) и (47) — уравнениям Максвелла для пустоты. Интересно, что уравнения для гравитационного поля оказываются в этом приближении независимыми от законов электромагнитного поля, что соответствует опытному факту независимости обоих видов поля. Однако в строгом смысле независимости этих полей в рассматриваемой теории не существует.

Относительно ковариантности уравнений (44) — (47) справедливо следующее. Величины $h_{s\mu}$ в общем случае преобразуются по формуле

$$h'_{s\mu} = \alpha_{st} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\mu'}} h_{t\sigma}.$$

Выбирая преобразования координат линейными и ортогональными, а вращение локальных систем конформным, т. е.

$$x^{\mu'} = \alpha_{\mu\sigma} x^\sigma, \tag{48}$$

получаем закон преобразования

$$h'_{s\mu} = \alpha_{st} \alpha_{\mu\sigma} h_{t\sigma}, \tag{49}$$

в точности совпадающий с законом преобразования тензоров в специальной теории относительности. Поскольку в силу преобразования (48) этот же закон выполняется для $\delta_{s\mu}$, то он выполняется и для величин $\bar{h}_{\alpha\mu}$, $\bar{g}_{\alpha\mu}$ и $a_{\alpha\mu}$. Относительно этих преобразований уравнения (44)—(47) ковариантны.

Заключение

Очарование изложенной здесь теории для меня заключается в ее единстве и большой (но разрешенной) степени переопределенности переменных поля. К тому же я показал, что уравнения поля в первом приближении приводят к уравнениям, соответствующим теории Ньютона — Пуассона для гравитационного поля и теории Максвелла — для электромагнитного. Несмотря на это, я далек от мысли, что полученные уравнения на самом деле физически выполняются. Причина этого заключается в том, что мне еще не удалось вывести законы движения для частиц.

Поступила 19 августа 1929 г.

СОВМЕСТНОСТЬ УРАВНЕНИЙ ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ*

Несколько месяцев назад я изложил математические основы единой теории поля в обзорной статье, опубликованной в «Mathematische Annalen» [1]. В настоящей работе я хочу кратко изложить самое существенное и одновременно указать, в каких пунктах выводы моих прежних работ[2] нуждались в улучшениях. Доказательство совместности здесь несколько упрощено благодаря использованию предложения г-на Картана, за которое я благодарен ему.

§ 1. Критические замечания к моим прежним работам

Введение в работе [1] операции образования дивергенции из тензорной плотности оказалось нецелесообразным. Лучше сохранить определение дивергенции как свертки производной тензора, поскольку лишь при таком определении дивергенция фундаментального тензора тождественно обращается в нуль.

Тождество (3а) или (3б) упомянутой работы в этом случае принимает вид

$$\Lambda^{\alpha}_{\varkappa\iota;\,\alpha} - (\varphi_{\varkappa,\,\iota} - \varphi_{\iota,\,\varkappa}) \equiv 0, \tag{1}$$

где введено обозначение

$$\varphi_{\varkappa} = \Lambda^{\sigma}_{\varkappa\sigma}. \tag{1a}$$

* *Die Kompatibilität der Feldgleichungen in der einheitlichen Feldtheorie.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1930, 18—23.

[1] Math. Ann., 1930, 102, 685. (Статья 98).

[2] [1] «К единой теории поля». Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1929, 2—7 (Статья 91); [2] «Единая теория поля и принцип Гамильтона», Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1929, 156—159. (Статья 94).

Как уже указывалось ранее, доказательство совместности уравнений поля в работе [1] основывается на неправильном предположении, что среди уравнений (10) этой работы существуют четыре тождества.

Вторая из упомянутых работ содержит злосчастную ошибку. В самом деле, неверно, что величины $G^{*\mu\alpha}$ являются однородными квадратичными функциями тензоров $S^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}$. Поэтому вывод уравнения (21) работы [2], отождествленного там с уравнением электромагнитного поля, оказывается недостаточно обоснованным.

§ 2. Обзор математического аппарата теории

Структура пространства или поля описывается гауссовыми компонентами h_s^{ν} локального ортогонального 4-пода (ν-я компонента s-го пода). Закон преобразования при замене гауссовой системы координат и одинаковом повороте всех локальных 4-подов гласит:

$$h_s^{\nu'} = \alpha_{st} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\sigma}} h_t^{\sigma}, \tag{2}$$

причем постоянные α_{st} образуют ортогональную систему.

Нормированные миноры $h_{s\nu}$ величин h подчиняются закону преобразования

$$h'_{s\nu} = \alpha_{st} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu'}} h_{t\sigma}. \tag{3}$$

Системы величин, отличающиеся от h в своих трансформационных свойствах только числом индексов, называются тензорами. Величины $(h_{s\nu})$ или (h_s^{ν}) образуют фундаментальный тензор.

Сложение, вычитание и умножение определяются так же, как в обычном тензорном исчислении. Свертывание может производиться только по двум локальным (латинским) или двум координатным (греческим) индексам разного характера.

Поднятие или опускание индексов тензора производится посредством умножения на фундаментальный тензор и последующего свертывания, например,

$$A_s = h_{s\nu} A^{\nu}.$$

Так как длина вектора (A) должна определяться произведением $A_s A_s$, то коэффициенты римановой метрики $g_{\mu\nu}$ задаются квадратичной формой

$$g_{\mu\nu} = h_{s\mu} h_{s\nu}. \tag{4}$$

Из определения параллельности локальных 4-подов следует закон (интегрируемого) элементарного параллельного переноса

$$\left.\begin{aligned} \delta A^{\mu} &= -\Delta^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\alpha} \delta x^{\beta}, \\ \Delta^{\mu}_{\alpha\beta} &= h^{\mu}_{s} h_{s\alpha,\,\beta}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

причем запятая перед индексом означает обыкновенное дифференцирование. Отсюда следует закон (абсолютного) дифференцирования

$$A^{\mu}{}_{;\,\sigma} = A^{\mu}{}_{,\,\sigma} + A^{\alpha} \Delta^{\mu}_{\alpha\tau}, \tag{6}$$

$$A_{\mu;\,\sigma} = A_{\mu,\,\sigma} - A_{\alpha} \Delta^{\alpha}_{\mu\sigma}. \tag{7}$$

В случае тензоров с несколькими греческими или латинскими индексами соответствующий член появляется для каждого греческого индекса.

Образуя тензор $\Phi_{;\,\sigma;\,\tau}$ двукратным дифференцированием скаляра Φ, а также разность тензоров $(\Phi_{;\,\sigma;\,\tau} - \Phi_{;\,\tau;\,\sigma})$, легко доказать, что величина

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} = \Delta^{\alpha}_{\mu\nu} - \Delta^{\alpha}_{\nu\mu} \tag{8}$$

обладает тензорным характером. Обращение в нуль всех величин $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$ является условием эвклидовости континуума.

Вследствие интегрируемости закона параллельного переноса для величин Δ (или благодаря тому, что его можно выразить через величины h) тензор (Λ) удовлетворяет тождеству

$$(\Lambda^{\iota}_{\varkappa\lambda;\,\mu} + \Lambda^{\iota}_{\lambda\mu;\,\varkappa} + \Lambda^{\iota}_{\mu\varkappa;\,\lambda}) + (\Lambda^{\iota}_{\varkappa\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\lambda\mu} + \Lambda^{\iota}_{\lambda\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\mu\varkappa} + \Lambda^{\iota}_{\mu\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\varkappa\lambda}) \equiv 0, \tag{9}$$

откуда свертыванием получается тождество (1).

Для абсолютного дифференцирования справедливо правило дифференцирования произведения. Ковариантные производные величин h, так же как и величин $g_{\mu\nu}$ (или $g^{\mu\nu}$), тождественно равны нулю. Следовательно, фундаментальный тензор как сомножитель может взаимно переставляться с операцией абсолютного дифференцирования.

Для двукратного абсолютного дифференцирования произвольного тензора $T^{\cdot}$ (точки означают произвольные индексы) справедливо правило перестановки дифференцирования

$$T^{\cdot}{}_{\cdot;\,\sigma;\,\tau} - T^{\cdot}{}_{\cdot;\,\tau;\,\sigma} \equiv - T^{\cdot}{}_{\cdot;\,\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}. \tag{10}$$

Если тензор T не имеет греческих индексов (скалярный характер), это правило легко доказывается непосредственно; для произвольных тензоров доказательство основывается на том, что при умножении их на параллельные векторы (обладающие всюду нулевой абсолютной производной) получаются скаляры

Если рассматриваемый тензор $T^{\cdot}_{\cdot}$ имеет два контравариантных индекса, то его можно свертывать по этим индексам и по σ или τ; тогда из формулы (10) получается правило перестановки для дивергенции.

Особый характер четырехмерного физического континуума выражается условием, что координата x^4 является чисто мнимой (как и четвертая локальная координата), остальные координаты вещественны. Компоненты тензора чисто мнимы, если они имеют нечетное число индексов 4; в противном случае эти компоненты вещественны.

Наконец, формальное правило: изменение положения греческого индекса («поднятие» или «опускание») может обозначаться также подчеркиванием соответствующего индекса.

§ 3. Уравнения поля и их совместность

Уравнения поля должны быть, конечно, ковариантными; предполагается также, что они являются уравнениями второго порядка и линейными относительно тех переменных поля, которые дважды дифференцируются по координатам. В то время как в прежней общей теории относительности эти требования оказываются достаточными для определения хотя бы уравнений гравитационного поля в пустоте, в излагаемой теории это уже не так. Именно, вследствие тензорного характера величины Λ здесь имеется существенно большее разнообразие тензоров, чем в пределах схемы Римана.

Вследствие общей ковариантности, четыре переменных поля должны оставаться произвольными. Таким образом, на 16 величин h можно налагать только 12 независимых условий. Если же число уравнений поля N больше 12, то между ними должно существовать по меньшей мере $N—12$ тождественных соотношений.

Простой возможности вывести ковариантную систему только из 12 уравнений не существует. Следовательно, необходимо искать уравнения, между которыми имеются тождественные соотношения. Чем больше число уравнений (и, стало быть, число тождественных соотношений между ними), тем более определенные выводы вытекают в теории из требования детерминизма, а следовательно, тем более ценной будет сама теория, если она совместима также с данными опыта [3]. Требование существования «переопределенной» системы уравнений с необходимым числом тождественных соотношений дает нам в руки средство для отыскания уравнений поля.

[3] В прежней теории гравитации, например, для 10 переменных поля существуют 10 уравнений, между которыми имеются четыре тождественных соотношения.

В качестве уравнений поля я предлагаю две системы уравнений:

$$G^{\mu\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = 0, \tag{11}$$

$$F_{\mu\alpha} = \Lambda^{\sigma}_{\mu\alpha;\,\sigma} = 0; \tag{12}$$

всего 16 + 6 уравнений для 16 переменных поля $h_{s\nu}$. К этим уравнениям я пришел, применяя к тензору $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$ правило перестановки для дивергенции. В самом деле, имеем

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\nu;\,\alpha} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\alpha;\,\nu} \equiv - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha}.$$

Правую часть можно записать так:

$$-(\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha})_{;\,\sigma} + \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha;\,\sigma}.$$

Учитывая это и вводя соответствующие обозначения для «немых» индексов, последнее тождество можно привести к виду:

$$G^{\mu\alpha}_{;\,\alpha} - F^{\mu\alpha}_{;\,\alpha} + \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}F_{\sigma\tau} \equiv 0. \tag{13}$$

Это и есть 4 тождественных соотношения между величинами, входящими в уравнения (11) и (12), которые послужили основанием для составления последних.

Уравнения (12) в сочетании с тождеством (1) приводят далее к тождеству:

$$F_{\mu\nu,\,\rho} + F_{\nu\rho,\,\mu} + F_{\rho\mu,\,\nu} \equiv 0. \tag{14}$$

Заметим, что уравнения (12) также можно заменить на

$$F_{\mu\alpha} \equiv \varphi_{\mu,\,\alpha} - \varphi_{\alpha,\,\mu} = 0, \tag{12а}$$

или на

$$F_{\mu} \equiv \varphi_{\mu} - \frac{\partial \ln \psi}{\partial x^{\mu}} = 0, \tag{12б}$$

где ψ — скаляр. Далее величины $F_{\mu\nu}$ можно выразить через F_{μ} благодаря соотношению

$$F_{\mu\nu} \equiv F_{\mu,\,\nu} - F_{\nu,\,\mu}. \tag{15}$$

Третью систему тождеств мы получаем, образуя $G^{\mu\alpha}_{;\,\mu}$. Сначала из уравнений (11) получаем

$$G^{\mu\alpha}_{;\,\mu} \equiv \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\nu;\,\mu} - \Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\mu};\,\mu}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau;\,\mu}.$$

Применяя правило перестановки для дивергенции к тензору $\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}$ относительно индексов ν и μ, получаем

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\nu;\,\mu} \equiv -\frac{1}{2}\,\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\nu\mu}.$$

Заменяя, согласно этому соотношению, первый член в правой части предыдущего тождества, запишем первый и третий члены вместе в следующем виде:

$$-\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\left(\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau;\,\mu} + \frac{1}{2}\,\Lambda^{\alpha}_{\tau\mu;\,\sigma}\right),$$

или

$$-\frac{1}{2}\,\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\left(\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau;\,\mu} + \Lambda^{\alpha}_{\tau\mu;\,\sigma} + \Lambda^{\alpha}_{\mu\sigma;\,\tau}\right).$$

Однако учитывая уравнение (9), можно выразить скобку через сами тензоры Λ, так что получаем

$$+\frac{1}{2}\,\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\left(\Lambda^{\alpha}_{\sigma\lambda}\Lambda^{\lambda}_{\tau\mu} + \Lambda^{\alpha}_{\tau\lambda}\Lambda^{\lambda}_{\mu\sigma} + \Lambda^{\alpha}_{\mu\lambda}\Lambda^{\lambda}_{\sigma\tau}\right),$$

или, опуская первый член в скобках и объединяя два других,

$$\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\lambda}_{\sigma\tau}\Lambda^{\alpha}_{\mu\lambda}.$$

Поэтому получается

$$G^{\mu\alpha}_{;\,\mu} \equiv -\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}\left(\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\mu};\,\mu} - \Lambda^{\rho}_{\underline{\sigma\lambda}}\Lambda^{\tau}_{\rho\lambda}\right),$$

или, окончательно,

$$G^{\mu\alpha}_{;\,\mu} + \Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}G^{\sigma\tau} \equiv 0. \tag{16}$$

Равенства (13), (14) и (16) образуют тождества, следующие из уравнений поля (11) и (12).

То, что эти тождества в самом деле удовлетворяют условию совместности уравнений (11) и (12), видно из следующего рассуждения. Можно добиться того, чтобы все уравнения (11) и (12) выполнялись для сечения $x^4 = a$. Равным образом можно добиться того, чтобы выполнялись во всем пространстве те уравнения, которые получаются путем приравнивания нулю величин

$$\begin{matrix} G^{11} & G^{12} & G^{23} \\ G^{21} & G^{22} & G^{23} \\ G^{31} & G^{32} & G^{33} \\ F_{14} & F_{24} & F_{34} \end{matrix}$$

Далее для этих последних уравнений можно так выбрать решение, чтобы оно было непрерывным продолжением решения, заданного для сечения $x^4 = a$. Тогда мы утверждаем, что это решение всюду будет удовлетворять так же уравнениям, которые получаются приравниванием нулю величин

$$G^{14}\ G^{24}\ G^{34}\ G^{41}\ G^{42}\ G^{43}\ G^{44}\ F_{23}\ F_{31}\ F_{12}.$$

Отсюда прежде всего следует, что компоненты F_{14}, F_{24}, F_{34} всюду обращаются в нуль и что с учетом тождества (14) и производные $\frac{\partial F_{23}}{\partial x^4}$, $\frac{\partial F_{31}}{\partial x^4}$, $\frac{\partial F_{12}}{\partial x^4}$ всюду равны нулю. Однако, так как F_{23}, F_{31}, F_{12} равны нулю в сечении $x^4 = a$, то они равны нулю всюду. Далее из тождеств (13) и (16) следует, что в сечении $x^4 = a$ обращаются в нуль производные по x^4 величин G^{14}, G^{41} . . . G^{44}; таким образом эти величины, а тем самым и все $G^{\mu\alpha}$ обращаются в нуль в бесконечно близком сечении $x^4 = a + da$. Повторяя эти рассуждения, находим, наконец, что все величины $G^{\mu\alpha}$ также обращаются в нуль всюду. Тем самым получено доказательство совместности уравнений поля (11) и (12).

Первое приближение. Исследуем поля, которые лишь бесконечно мало отличаются от эвклидова частного случая:

$$h_{s\nu} = \delta_{s\nu} + \overline{h}_{s\nu}. \tag{17}$$

При этом величина $\delta_{s\nu}$ равна 1 или 0 соответственно при $s = \nu$ или $s \neq \nu$; величины $\overline{h}_{s\nu}$ представляют собой бесконечно малые (по сравнению с 1). Пренебрегая квадратичными по $\overline{h}$ членами (второго порядка малости), уравнения поля (11) и (12) можно заменить уравнениями

$$\overline{h}_{\alpha\mu,\nu,\nu} - \overline{h}_{\alpha\nu,\nu,\mu} = 0, \tag{11a}$$

$$\overline{h}_{\alpha\mu,\alpha,\nu} - \overline{h}_{\alpha\nu,\alpha,\mu} = 0. \tag{12a}$$

Условие (17) все еще допускает бесконечно малое преобразование гауссовых координат. Теперь можно показать, что вследствие уравнений (12a) возможен выбор координат, при котором выполняются уравнения

$$\overline{h}_{\mu\alpha,\alpha} = \overline{h}_{\alpha\mu,\alpha} = 0, \tag{18}$$

причем из уравнений поля остаются только следующие:

$$\overline{h}_{\alpha\mu,\nu,\nu} = 0. \tag{11б}$$

Обозначая символом $\overline{g}_{\alpha\mu}$ симметричную, а символом $a_{\alpha\mu}$ — антисим метричную часть тензора $\overline{h}_{\alpha\mu}$, можно разбить уравнения поля на две системы:

$$\left.\begin{aligned} \overline{g}_{\alpha\mu,\,\nu,\,\nu} &= 0, \\ \overline{g}_{\alpha\mu,\,\mu} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

и

$$\left.\begin{aligned} a_{\alpha\mu,\,\nu,\,\nu} &= 0, \\ a_{\alpha\mu,\,\mu} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

По-моему, уравнения (19) описывают гравитационное поле, а уравнения (20) — электромагнитное поле, причем величины $a_{\alpha\mu}$ выполняют роль напряженностей электромагнитного поля. При строгом рассмотрении расщепление поля на гравитационное и электромагнитное поле невозможно. Более подробные сведения можно найти в цитированной обзорной статье [4].

Важнейшим вопросом, связанным с уравнениями поля (строгими), является вопрос о несингулярных решениях, которые могли бы изображать электроны и протоны.

Поступила 6 февраля 1930 г.

---

[4] Статья 98.— *Ред.*

ДВА СТРОГИХ СТАТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ *

(Совместно с В. Майером)

Ниже рассматриваются два частных случая:

а) Сферически симметричное пространство, обладающее одновременно зеркальной симметрией. С физической точки зрения это соответствует внешнему полю электрически заряженного шара с ненулевой массой.

б) Статическое решение, соответствующее произвольному числу покоящихся электрически нейтральных материальных точек.

Примечание. Изложение в § 1 вплоть до равенств (27) содержит строгое математическое доказательство того, что в случае сферической и зеркальной симметрии пространства величины h_s^α при соответствующем выборе координат принимают вид, указанный равенствами (27).

§ 1. Случай сферической симметрии пространства

Мы ищем самый общий трехмерный континуум

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ h_s^\alpha(x_1, x_2, x_3), \quad s, \alpha = 1, 2, 3,$$

обладающий свойством симметрии относительно вращения, т. е. инвариантный относительно группы преобразований:

$$\bar{x}_\alpha = a_{\alpha\beta} x_\beta, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где $\| a_{\alpha\beta} \|$ — ортогональная матрица.

* *Zwei strenge statische Lösungen der Feldgleichungen der einheitlichen Feldtheorie.* (Mit W. Mayer). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1930, 110—120.

Подстановка (1) переводит точку P (x_1, x_2, x_3) в точку $\overline{P}$ $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ и нормированный трипод h_s^α (x) точки P в трипод точки $\overline{P}$

$$\overline{h}_s^\alpha(\overline{x}) = a_{\alpha\beta} h_s^\beta(x), \qquad s, \alpha, \beta = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Необходимым и достаточным условием симметрии относительно вращения является существование одинакового для всех точек пространства R_3 «локального вращения» (вращения локальных триподов), переводящего трипод $\overline{h}_s^\alpha(\overline{x})$ в первоначальный трипод $h_s^\alpha(\overline{x})$:

$$\overline{h}_s^\alpha(\overline{x}) = A_{st} h_t^\alpha(\overline{x}), \qquad s, t, \alpha = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Пусть пространство R_3 является эвклидовым на бесконечности, т. е. значения x_1, x_2, x_3 (или по крайней мере значения одной из трех координат) бесконечно возрастают, так что $h_s^\alpha(x)$ стремятся в пределе к $\delta_{s\alpha}$. Для краткости будем писать $h_s^\alpha(\infty) = \delta_{s\alpha}$.

В соответствии с соотношением (2), для бесконечности имеем $\overline{h}_s^\alpha(\overline{x}) = a_{\alpha s}$ и далее, вследствие соотношения (3), $a_{\alpha s} = A_{s\alpha}$. Тогда вместо (3) выполняется соотношение

$$\overline{h}_s^\alpha(\overline{x}) = a_{ts} h_t^\alpha(\overline{x}), \qquad s, t, \alpha = 1, 2, 3, \tag{3'}$$

откуда, сравнивая с соотношением (2), получаем функциональное уравнение для искомых составляющих трипода

$$a_{\alpha\beta} h_s^\beta(x_1, x_2, x_3) = a_{ts} h_t^\alpha(a_{1j}x_j, a_{2j}x_j, a_{3j}x_j), \qquad \alpha, \beta, t, s = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Соотношения (4) переходят в тождества, связывающие величины x_1, x_2, x_3, $a_{\alpha\beta}$, как только матрица $\|a_{\alpha\beta}\|$ становится ортогональной.

Рассмотрим теперь точку $P(x_1, x_2, x_3)$ и выберем для $a_{\alpha\beta}$ трипод

$$a_{\alpha\beta} = {}_{(\alpha)}\xi_\beta, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \tag{5}$$

который вследствие соотношений $a_{\alpha\beta}a_{\alpha\gamma} = {}_{(\alpha)}\xi_\beta \; {}_{(\alpha)}\xi_\gamma = \delta_{\beta\gamma}$ обладает эвклидовой нормировкой. При этом здесь введено обозначение

$${}_{(1)}\xi_\alpha = \frac{x_\alpha}{s}, \qquad s^2 = x_\alpha x_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3.$$

При таком выборе матрицы $\|a_{\alpha\beta}\|$ из уравнения (4) получается

$${}_{(\alpha)}\xi_\beta h_s^\beta(x_1, x_2, x_3) = {}_{(t)}\xi_s h_t^\alpha(s, 0, 0), \qquad s, t, \alpha = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Умножая уравнение (6) на ${}_{(\alpha)}\xi_\gamma$, получаем

$$h_s^\gamma(x_1, x_2, x_3) = {}_{(t)}\xi_s\, {}_{(\alpha)}\xi_\gamma h_t^\alpha(s) =$$
$$= {}_{(1)}\xi_s\, {}_{(1)}\xi_\gamma h_1^1(s) + {}_{(1)}\xi_s\, {}_{(\alpha)}\xi_\gamma h_1^\alpha(s) + {}_{(1)}\xi_\gamma\, {}_{(t)}\xi_s h_t^1(s) + {}_{(t)}\xi_s\, {}_{(\alpha)}\xi_\gamma h_t^\alpha(s) \qquad (7)$$

(во второй строке суммирование производится только по индексам 2 и 3). Для $h_t^\alpha(s, 0, 0)$ мы ввели обозначение $h_t^\alpha(s)$. Вследствие равенств (5) уравнение (7) можно записать в виде

$$h_s^\gamma(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_s x_\gamma}{s^2} h_1^1(s) + \frac{x_s}{s}\, {}_{(\alpha)}\xi_\gamma h_1^\alpha(s) +$$
$$+ \frac{x_\gamma}{s}\, {}_{(t)}\xi_s h_t^1(s) + {}_{(t)}\xi_s\, {}_{(\alpha)}\xi_\gamma h_t^\alpha(s). \qquad (8)$$

Воспользуемся теперь тем, что векторы ${}_{(2)}\xi_\alpha$, ${}_{(3)}\xi_\alpha$, которые должны образовать с вектором ${}_{(1)}\xi_\alpha$ трипод с эвклидовой нормировкой, не определены. Если мы вместо выбранного бипода ${}_{(2)}\xi_\alpha$, ${}_{(3)}\xi_\alpha$ введем в соответствии с уравнениями

$$\left.\begin{aligned} {}_{(2)}\xi_\alpha &= \cos\varphi\, {}_{(2)}\eta_\alpha + \sin\varphi\, {}_{(3)}\eta_\alpha, \\ {}_{(3)}\xi_\alpha &= -\sin\varphi\, {}_{(2)}\eta_\alpha + \cos\varphi\, {}_{(3)}\eta_\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

повернутый на угол φ бипод ${}_{(2)}\eta_\alpha$, ${}_{(3)}\eta_\alpha$, то получим новое представление трипода $h_s^\gamma(x_1, x_2, x_3)$, в которое входит произвольный угол φ. Это представление имеет вид

$$h_s^\gamma(x_1, x_2, x_3) = P_{(s\gamma)} + Q_{(s\gamma)}\sin\varphi + R_{(s\gamma)}\cos\varphi +$$
$$+ S_{(s\gamma)}\cos^2\varphi + T_{(s\gamma)}\sin\varphi\cos\varphi. \qquad (10)$$

Так как соотношение (10) выполняется для произвольного φ, получаем

$$h_s^\gamma(x_1, x_2, x_3) = P_{(s\gamma)}, \quad Q_{(s\gamma)} = R_{(s\gamma)} = S_{(s\gamma)} = T_{(s\gamma)} = 0. \qquad (11)$$

Выполняя эти простые вычисления, из $Q_{(s\gamma)} = 0$, $R_{(s\gamma)} = 0$ получаем

$$h_2^1(s) = h_3^1(s) = h_1^2(s) = h_1^3(s) = 0. \qquad (12)$$

Из равенств $S_{(s\gamma)} = 0$, $T_{(s\gamma)} = 0$ снова следует

$$h_2^2(s) = h_3^3(s), \qquad h_2^3(s) = -h_3^2(s). \qquad (13)$$

Вследствие равенств (12) и (13) уравнение (8) принимает вид

$$h_s^\gamma(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_s x_\gamma}{s^2} h_1^1(s) + h_2^2(s)\,[{}_{(2)}\xi_s\, {}_{(2)}\xi_\gamma + {}_{(3)}\xi_s\, {}_{(3)}\xi_\gamma] +$$
$$+ h_2^3(s)\,[{}_{(2)}\xi_s\, {}_{(3)}\xi_\gamma - {}_{(3)}\xi_s\, {}_{(2)}\xi_\gamma]. \qquad (14)$$

Теперь сумма ${}_{(2)}\xi_s\,{}_{(2)}\xi_\gamma + {}_{(3)}\xi_s\,{}_{(3)}\xi_\gamma = \delta_{(s\gamma)} - {}_{(1)}\xi_s\,{}_{(1)}\xi_\gamma$ не зависит от выбора нормированного бипода ${}_{(2)}\xi_s$, ${}_{(3)}\xi_s$. Напротив, величина ${}_{(2)}\xi_s\,{}_{(3)}\xi_\gamma - {}_{(3)}\xi_s\,{}_{(2)}\xi_\gamma$ при перестановке векторов ${}_{(2)}\xi_s$ и ${}_{(3)}\xi_s$ меняет знак.

Если же теперь мы допускаем только преобразования (1), для которых определитель матрицы $\|a_{ik}\|$ равен $+1$, то величина ${}_{(2)}\xi_s\,{}_{(3)}\xi_\gamma - {}_{(3)}\xi_s\,{}_{(2)}\xi_\gamma$ также не будет зависеть от выбора бипода. [В этом случае должно выполняться равенство $|{}_{(\alpha)}\xi_\beta| = 1$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, благодаря чему фиксируется нумерация векторов $({}_{(2)}\xi_\alpha, {}_{(3)}\xi_\alpha)$]. Такие преобразования мы будем называть собственным вращением.

Если мы введем антисимметричный единичный тензор $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$, причем $\varepsilon_{123} = 1$, то будет выполняться равенство

$${}_{(2)}\xi_s\,{}_{(3)}\xi_\gamma - {}_{(3)}\xi_s\,{}_{(2)}\xi_\gamma = \varepsilon_{s\gamma\tau}\,{}_{(1)}\xi_\tau,$$

и вместо уравнения (14) можно написать

$$h_s^\gamma(x_1, x_2, x_3) = x_s x_\gamma A(s) + \delta_{s\gamma} B(s) + \varepsilon_{s\gamma\tau} x_\tau C(s), \tag{15}$$

причем величины

$$A(s) = \frac{1}{s^2}\left(h_1^1(s) - h_2^2(s)\right), \qquad B(s) = h_2^2(s), \qquad C(s) = h_2^3(s)\cdot\frac{1}{s} \tag{15'}$$

являются произвольными функциями s, удовлетворяющими лишь условию

$$h_s^\gamma(\infty) = \delta_{s\gamma}.$$

Эта необходимая форма (15) компонент трипода, как показывает простое вычисление, является также достаточной для вращательной симметрии пространства R_3.

Разумеется, следует положить $C(s) = 0$, если допускаются также несобственные вращения (1) ($|a_{\alpha\beta}| = -1$, «отражения»).

Только этот случай мы и будем рассматривать дальше, так что уравнение (15) при условии $C(s) = 0$ будет представлять самую общую форму компонент пода.

Дополним наш континуум $x_1, x_2, x_2, h_s^\alpha(x_1, x_2, x_3)$ до четырехмерного, сопоставляя точке x_1, x_2, x_3, x_4 тетрапод $h_s^\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $s, \alpha = 1, \ldots, 4$ так, что

$$h_s^\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) = h_s^\alpha(x_1, x_2, x_3), \quad s, \alpha = 1, 2, 3. \tag{16}$$

Остальные компоненты векторов, также зависящие только от x_1, x_2, x_3, следует определить таким образом, чтобы пространство R_4 было инвариантным относительно группы

$$\bar{x}_\alpha = a_{\alpha\beta} x_\beta, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \qquad \bar{x}_4 = x_4. \tag{17}$$

При этом пространство R_4 будет иметь псевдориманову структуру, т. е. метрический тензор $g^{\alpha\beta}$ будет выражаться через нормированный тетрапод $h_s^\alpha(x_1, \ldots, x_4)$ следующим образом [1]:

$$g^{\alpha\beta} = h_1^\alpha h_1^\beta + h_2^\alpha h_2^\beta + h_3^\alpha h_3^\beta - h_4^\alpha h_4^\beta, \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, 4. \tag{18}$$

На бесконечности снова имеем

$$h_s^\alpha(\infty) = \delta_{s\alpha}.$$

Преобразование (17) переводит тетрапод $h_s^\alpha(x)$ точки $P(x_1, \ldots, x_4)$ в тетрапод

$$\overline{h}_s^\alpha(\overline{x}) = a_{\alpha\beta} h_s^\beta(x), \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \qquad \overline{h}_s^4(\overline{x}) = h_s^4(x), \qquad s = 1, \ldots, 4. \tag{19}$$

Теперь необходимо произвести обратный поворот, чтобы выполнялось равенство

$$\overline{h}_s^\alpha(\overline{x}) = B_{st} h_t^\alpha(\overline{x}), \qquad s, t, \alpha = 1, 2, 3, 4, \tag{20}$$

причем величины B_{st} являются постоянными.

Из поведения уравнения (19) на бесконечности следует

$$\overline{h}_s^\alpha(\infty) = a_{\alpha s}, \qquad \alpha, s = 1, 2, 3, \qquad \overline{h}_4^\alpha(\infty) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$\overline{h}_s^4(\infty) = h_s^4(\infty) = \delta_{s4}.$$

Подставляя это в уравнение (20), получаем

$$a_{\alpha s} = B_{s\alpha}, \qquad s, \alpha = 1, 2, 3, \qquad B_{4\alpha} = 0, \qquad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$\delta_{s4} = B_{s4}.$$

Вследствие выбора тетрапода (16) уравнения (19), (20) выполняются, если

$$\overline{h}_s^4(\overline{x}) = h_s^4(x) = a_{ts} h_t^4(\overline{x}), \qquad s, t = 1, 2, 3, \tag{21}$$

$$\overline{h}_4^4(\overline{x}) = h_4^4(x) = h_4^4(\overline{x}), \tag{21'}$$

$$\overline{h}_4^\alpha(\overline{x}) = a_{\alpha\beta} h_4^\beta(x) = h_4^\alpha(\overline{x}), \qquad \alpha = 1, 2, 3. \tag{21''}$$

Эти уравнения служат функциональными уравнениями для остальных компонент тетрапода.

---

[1] Здесь мы отказываемся от введения мнимых величин, необходимых для получения дефинитного метрического тензора.

Уравнения решаются методом, примененным к уравнению (6); в результате получим

$$h_s^4(x_1, x_2, x_3) = D(s)\,x_s, \qquad s = 1, 2, 3, \tag{22}$$

$$h_4^\alpha(x_1, x_2, x_3) = E(s)\,x_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{22'}$$

$$h_4^4(x_1, x_2, x_3) = F(s). \tag{22''}$$

Так как на бесконечности выполняется равенство $h_s^\alpha(\infty) = \delta_{s\alpha}$, то функции, входящие в уравнения (15) и (22), вблизи $s = \infty$ можно разложить в ряды

$$\begin{aligned} &A(s) = \frac{K}{s^a}(1 + (\cdot)), \qquad a > 2, \qquad B = 1 + (\cdot), \\ &F = 1 + (\cdot), \qquad C, D, E = \frac{K}{s^b}(1 + (\cdot)), \qquad b > 1, \end{aligned} \tag{23}$$

причем скобки $(\cdot)$ содержат множитель $\frac{1}{s}$.

В системе координат

$$\overline{x}_i = \varphi(s)\,x_i, \qquad i = 1, 2, 3, \qquad \overline{x}_4 = x_4, \tag{24}$$

в которой трипод $x_1, x_2, x_3, h_\alpha^s(x_1, x_2, x_3)$, $\alpha = 1, 2, 3$, также обладает вращательной симметрией при соответствующем выборе функции φ:

$$\varphi = e^{-\int \frac{A s ds}{B + A s^2}}, \tag{25}$$

можно добиться, чтобы в уравнении (15) член с функцией A обращался в нуль. Так как на бесконечности φ стремится к конечному значению, то для новых значений $\overline{B}(s)$, $\overline{F}(s)$, $\overline{C}(s)$, $\overline{D}(s)$, $\overline{E}(s)$, как показывает простое вычисление, выполняются условия (23).

Дальнейшим преобразованием координат

$$\overline{x}_4 = x_4 + \psi(s), \tag{26}$$

снова можно обратить в нуль функцию $D(s)$ в уравнении (22); в новой системе координат по-прежнему выполняются соотношения (23). Другими словами, не нарушая общности, можно предположить, что $A(s) = D(s) = 0$.

Далее мы предполагали, что наш трипод $x_1, x_2, x_3, h_s^\alpha(x_1, x_2, x_3)$ инвариантен также и относительно зеркального отражения; с этим связано обращение в нуль функции $C(s)$ в уравнении (15). В результате тетрапод (15), (22) приобретает следующий наиболее общий вид:

$$\begin{aligned} &h_s^\alpha = \lambda(s)\,\delta_{s\alpha}, \quad \alpha, s = 1, 2, 3, \quad h_s^4 = 0, \quad s = 1, 2, 3,\\ &h_4^\alpha = \tau(s)\,x_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad h_4^4 = \mu(s), \end{aligned} \tag{27}$$

причем мы для оставшихся функций ввели новые обозначения.

Будем теперь искать решения уравнений $G^{\mu\alpha} = 0$, $F^{\mu\alpha} = 0$ единой теории поля вида (27).

Обозначим через $k_{s\beta}$, $s, \beta = 1, 2, 3, 4$ ковариантный тетрапод, сопряженный тетраподу h_s^α и определенный системой

$$h_s^\alpha k_{s\beta} = \delta_\beta^\alpha, \quad s, \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4 \tag{28}$$

(при этом $k_{s\alpha} = h_{s\alpha}$, $s = 1, 2, 3$, $k_{4\alpha} = -h_{4\alpha}$). Тогда в соответствии с уравнением (27) этот тетрапод будет иметь компоненты

$$\begin{aligned} &k_{s\alpha} = \frac{1}{\lambda}\delta_{s\alpha}, \quad \alpha, s = 1, 2, 3, \quad k_{s4} = -\frac{\tau}{\mu\lambda}x_s, \quad s = 1, 2, 3,\\ &k_{4\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad k_{44} = \frac{1}{\mu}. \end{aligned} \tag{29}$$

Теперь выпишем необходимые нам в дальнейшем формулы. Величины

$$\Delta_{ik}^l = -\sum_{s=1}^{3}\frac{\partial h_s^l}{\partial x_k}k_{si} - \frac{\partial h_4^l}{\partial x_k}k_{4i}$$

вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\Delta_{i4}^l = 0, \quad i, l = 1, \ldots 4,\\ &\Delta_{ik}^l = -\frac{\partial \ln\lambda}{\partial x_k}\delta_{il}, \quad i, k, l = 1, \ldots 3, \quad \Delta_{ik}^4 = 0, \quad i, k = 1, \ldots 3,\\ &\Delta_{4k}^l = -\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\tau}{\lambda}x_l\right) = -\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\tau}{\lambda}x_k\right), \quad k, l = 1, \ldots 3,\\ &\Delta_{4k}^4 = -\frac{\partial \ln\mu}{\partial x_k}, \quad k = 1, \ldots 3. \end{aligned} \tag{30}$$

Отсюда для величин $\Lambda_{ik}^l = \Delta_{ik}^l - \Delta_{ki}^l$, $i, k, l = 1, \ldots 4$ получаются выражения

$$\begin{aligned} &\Lambda_{ik}^l = \frac{\partial \ln\lambda}{\partial x_i}\delta_{kl} - \frac{\partial \ln\lambda}{\partial x_k}\delta_{il}, \quad i, k, l = 1, \ldots 3,\\ &\Lambda_{i4}^l = \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\tau}{\lambda}x_l\right), \quad i, l = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &\Lambda^4_{ik} = 0, && i, k = 1, 2, 3, \\ &\Lambda^4_{4k} = -\frac{\partial \ln \mu}{\partial x_k}, && k = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{31}$$

Далее нам необходим контравариантный метрический тензор, компоненты которого имеют вид

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= \lambda^2 \delta_{\alpha\beta} - \tau^2 x_\alpha x_\beta, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \\ g^{4\alpha} &= -\mu\tau x_\alpha, \\ g^{44} &= -\mu^2. \end{aligned} \tag{32}$$

Решим сначала систему уравнений поля $F^{\mu\nu} \equiv \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}; \alpha} = 0$, или $\varphi_{\mu, \nu} - \varphi_{\nu, \mu} = 0$, где введено обозначение $\varphi_\mu = \Lambda^\alpha_{\mu\alpha}$. Вследствие равенств (31) имеем

$$\varphi_i = \Lambda^\alpha_{i\alpha} = \xi_i \left(\frac{\mu'}{\mu} + 2 \frac{\lambda'}{\lambda} \right), \qquad \xi_i = \frac{x_i}{s}, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{33}$$

$$\varphi_4 = \Lambda^\alpha_{4\alpha} = -\frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\tau}{\lambda} x_\alpha \right), \qquad \alpha = 1, 2, 3. \tag{33'}$$

Система $\varphi_{i, k} - \varphi_{k, i} = 0$, $i, k = 1, 2, 3$ удовлетворяется тождественно, и остается только уравнение $\varphi_{4, i} - \varphi_{i, 4} = 0$, или, так как $\varphi_{i, 4} = 0$, то $\varphi_{4, i} = 0$, т. е.

$$\varphi_4 = \text{const}. \tag{34}$$

В соответствии с равенствами (33′) это приводит к уравнению

$$\frac{\lambda}{\mu} \left[\left(\frac{\tau}{\lambda} \right)' s + 3 \frac{\tau}{\lambda} \right] = k, \qquad k = \text{const}, \tag{35}$$

которое можно также записать в виде

$$\left(\frac{\tau}{\lambda} s^3 \right)' = k \frac{\mu}{\lambda} s^2, \tag{36}$$

или после интегрирования:

$$\frac{\tau}{\lambda} s^3 = k \int \frac{\mu}{\lambda} s^2 \, ds + k_1, \qquad k_1 = \text{const}. \tag{36'}$$

На бесконечности величины λ, μ, τ можно разложить в ряды $\lambda = 1 + (\cdot)$, $\mu = 1 + (\cdot)$, $\tau = \frac{c}{s^b}(1 + (\cdot))$, $b > 1$, откуда, согласно уравнению (36′), следует $k = 0$ или (после замены $k_1 = e$)

$$\tau = e \frac{\lambda}{s^3}, \qquad e = \text{const}. \tag{37}$$

Итак, система $F^{\mu\nu} = 0$ исчерпана.

Рассмотрим теперь другую систему уравнений поля:

$$G^{\mu\alpha} \equiv \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\,\underline{\nu};\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu}\,\underline{\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = 0, \tag{38}$$

которой простым преобразованием мы придадим вид

$$0 = G^{\alpha}_{\sigma} \equiv g^{\nu\rho}\left[\frac{\partial\Lambda^{\alpha}_{\sigma\rho}}{\partial x_{\nu}} - \Delta^{j}_{\sigma\nu}\Lambda^{\alpha}_{j\rho} - \Delta^{j}_{\rho\nu}\Lambda^{\alpha}_{\sigma j} + \Delta^{\alpha}_{\nu j}\Lambda^{j}_{\sigma\rho}\right], \quad \alpha, \sigma = 1, \dots 4. \tag{39}$$

Сначала мы рассмотрим подсистему $\alpha = 4$, $\sigma \neq 4$, для которой из уравнений (39) получим

$$0 = g^{4\rho}\left[\frac{\partial\Lambda^{4}_{\sigma 4}}{\partial x_{\rho}} - \Delta^{j}_{\sigma\rho}\Lambda^{4}_{j4} - \Delta^{4}_{\sigma 4}\Lambda^{4}_{\rho 4} + \Delta^{4}_{4j}\Lambda^{j}_{\sigma\rho}\right] + g^{44}\Delta^{4}_{4j}\Lambda^{j}_{\sigma 4}. \tag{40}$$

Выполняя вычисления в соответствии с равенствами (31) и (32), получаем

$$\tau\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)' s + s\,\frac{\lambda'\mu'}{\lambda\mu}\tau - \frac{\mu'\lambda}{\mu}\left[\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)' s + \frac{\tau}{\lambda}\right] + \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{2} s\tau = 0. \tag{41}$$

В соответствии с уравнением (35) ($k = 0$!) имеем

$$\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)' s + \frac{\tau}{\lambda} = -\frac{2\tau}{\lambda}.$$

Для $\tau = 0$ уравнение (41) выполняется, и поэтому, полагая $\tau \neq 0$, мы можем сократить на τ уравнение (41); тогда получим

$$\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)' s + s\,\frac{\lambda'\mu'}{\lambda\mu} + 2\,\frac{\mu'}{\mu} + s\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{2} = 0, \tag{41'}$$

что непосредственно ведет к соотношению

$$\mu'\lambda s^{2} = \mathrm{const} \tag{42}$$

и далее к формуле

$$\mu = k\int\frac{ds}{\lambda s^{2}} + k_{1}. \tag{43}$$

Так как на бесконечности λ и μ стремятся к единице, то $k_1 = 1$ и, следовательно,

$$\mu = 1 + m\int\frac{ds}{\lambda s^{2}}, \qquad m = \mathrm{const}. \tag{44}$$

Найдем теперь решение подсистемы $\alpha \neq 4$, $\sigma = 4$ уравнений (39). Для этой подсистемы имеем

$$g^{\nu\rho}\left[\frac{\partial\Lambda^{\alpha}_{4\rho}}{\partial x_{\nu}} - \Delta^{j}_{4\nu}\Lambda^{\alpha}_{j\rho} - \Delta^{j}_{\rho\nu}\Lambda^{\alpha}_{4j} + \Delta^{\alpha}_{\nu j}\Lambda^{j}_{4\rho}\right] + g^{4\rho}\left[\Delta^{\alpha}_{4j}\Lambda^{j}_{4\rho}\right] = 0. \tag{45}$$

Выполняя вычисления, получаем

$$\left(1-\frac{e^2}{s^4}\right)\left[2\lambda^2 e\left(\frac{\lambda}{\mu s^3}\right)'+2\frac{\mu'\lambda^3 e}{\mu^2 s^3}\right]+\frac{6\lambda^3 e}{\mu s^4}-\frac{4e^3\lambda^3}{\mu s^8}=0. \tag{46}$$

Вследствие равенства

$$\frac{6\lambda^3 e}{\mu s^4}-\frac{4e^3\lambda^3}{\mu s^8}=\frac{2\lambda^3 e}{\mu s^4}+\frac{4\lambda^3 e}{\mu s^4}\left(1-\frac{e^2}{s^4}\right),$$

из уравнения (46) получаем

$$\left(1-\frac{e^2}{s^4}\right)\left[\lambda^2\left(\frac{\lambda}{\mu s^3}\right)'+\frac{\mu'\lambda^3}{\mu^2 s^3}+\frac{2\lambda^3}{\mu s^4}\right]+\frac{\lambda^3}{\mu s^4}=0. \tag{47}$$

Мы сократили это уравнение на $2e$; условие $e=0$ удовлетворяет уже уравнению (46).

Элементарное вычисление дает

$$\left(1-\frac{e^2}{s^4}\right)\left(\ln\frac{\lambda}{s}\right)'+\frac{1}{s}=0, \tag{48}$$

следовательно,

$$\ln\frac{\lambda}{s}=-\int\frac{ds}{s\left(1-\frac{e^2}{s^4}\right)}+k=-\ln\sqrt[4]{s^4-e^2}+k,$$

или, наконец,

$$\lambda=c\,\frac{s}{\sqrt[4]{s^4-e^2}}. \tag{49}$$

Так как на бесконечности $\lambda=1$, то следует положить $c=1$. Тогда окончательно получаем

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt[4]{1-\frac{e^2}{s^4}}}. \tag{50}$$

В соответствии с равенствами (37), (44) и (50) функции λ, μ, τ, характеризующие случай вращательной симметрии, нам уже известны.

Функции (37), (44) и (50) должны тождественно удовлетворять также и не рассмотренным нами уравнениям (39) при $\alpha=\sigma=4$ и $\alpha,\ \sigma\neq 4$.

Для $\alpha=\sigma=4$ уравнение (39) принимает вид

$$g^{\nu\rho}\left[\frac{\partial\Lambda^4_{4\rho}}{\partial x_\nu}-\Delta^4_{4\nu}\Lambda^4_{4\rho}-\Delta^j_{\rho\nu}\Lambda^4_{4j}\right]+g^{4\rho}\Delta^4_{4j}\Lambda^j_{4\rho}=0, \tag{51}$$

или

$$(\lambda^2\delta_{\nu\rho} - \tau^2 x_\nu x_\rho)\left[-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\mu'}{\mu}\xi_\rho\right) - \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2\xi_\nu\xi_\rho - \frac{\lambda'\mu'}{\lambda\mu}\xi_\nu\xi_\rho\right] -$$

$$- \tau\mu x_\rho \frac{\lambda\mu'}{\mu^2}\xi_j \frac{\partial}{\partial x_\rho}\left(\frac{\tau}{\lambda}x_j\right) = 0. \qquad (51')$$

Этому уравнению действительно удовлетворяют функции (37), (44) и (50).

При $\alpha, \sigma \neq 4$ уравнение (39) имеет вид

$$(\lambda^2\delta_{\nu\rho} - \tau^2 x_\nu x_\rho)\left[\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\lambda'}{\lambda}(\xi_\sigma\delta_{\rho\alpha} - \xi_\rho\delta_{\sigma\alpha})\right) + \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2\xi_\nu\delta_{j\sigma}(\xi_j\delta_{\rho\alpha} - \xi_\rho\delta_{j\alpha}) +\right.$$

$$+ \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2\xi_\nu\delta_{j\rho}(\xi_\sigma\delta_{j\alpha} - \xi_j\delta_{\sigma\alpha}) - \left.\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2\xi_j\delta_{\nu\alpha}(\xi_\sigma\delta_{j\rho} - \xi_\rho\delta_{j\sigma})\right] +$$

$$+ \lambda'\tau x_\rho \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\tau}{\lambda}x_\alpha\right)(\xi_\sigma\delta_{j\rho} - \xi_\rho\delta_{j\sigma}) - \mu\tau x_\nu\left[\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\frac{\tau}{\lambda}x_\alpha\right)\right) +\right.$$

$$+ \frac{\lambda'}{\mu}\xi_\nu\delta_{j\sigma}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\tau}{\lambda}x_\alpha\right) + \frac{\lambda'}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\tau}{\lambda}x_j\right)\left(\xi_\sigma\delta_{j\alpha} - \xi_j\delta_{\sigma\alpha}\right) +$$

$$+ \frac{\mu'}{\mu}\xi_\nu\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\frac{\tau}{\lambda}x_\alpha\right) - \left.\frac{\lambda'}{\mu}\xi_j\delta_{\nu\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\frac{\tau}{\lambda}x_j\right)\right] +$$

$$+ \lambda^2\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\tau}{\lambda}x_\alpha\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\tau}{\lambda}x_\sigma\right) = 0. \qquad (52)$$

Этому уравнению также удовлетворяют функции (37), (44) и (50). Это вычисление, требующее только некоторой внимательности, предлагаем выполнить читателю.

Отметим результат: тетрапод

$$\left.\begin{aligned} h_s^\alpha &= \frac{\delta_{s\alpha}}{\sqrt[4]{1-\dfrac{e^2}{s^4}}}, \qquad \alpha, s = 1, 2, 3, \qquad h_s^4 = 0, \\ h_4^\alpha &= \frac{e}{\sqrt[4]{1-\dfrac{e^2}{s^4}}}\frac{x_\alpha}{s^3}, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \qquad h_4^4 = 1 + m\int\sqrt[4]{1-\frac{e^2}{s^4}}\frac{ds}{s^2} \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

представляет собой наиболее общее решение для случая центральной симметрии (зеркальной симметрии). Что касается физической интерпретации, то, по нашему мнению, под e следует понимать электрический заряд и под m — пондеромоторную массу. Эта интерпретация сама по себе произвольна, несмотря на то, что она соответствует смыслу поля, проявляющемуся при рассмотрении уравнений поля в первом приближении. Примечательно, что при этом появляются две и только две постоянные, которые должны быть получены из опыта.

§ 2. Статическое чисто гравитационное поле

Из уравнений (53) следует, что для нулевого заряда e все величины h_s^α, кроме h_4^4, становятся постоянными, в то время как $h_4^4 = 1 - \frac{m}{s}$. Этот результат заставляет предполагать, что он соответствует статическим решениям общего вида, для которых переменной является только величина h_4^4. Поэтому, полагая

$$h_s^\alpha = \delta_{s\alpha}, \qquad s = 1, 2, 3, \qquad h_4^\alpha = \delta_{4\alpha}\cdot\sigma(x_1, x_2, x_3), \tag{1}$$

находим, что все величины $\Delta_{\alpha\beta}^\gamma$ равны нулю, кроме

$$\Delta_{4\beta}^4 = \Lambda_{4\beta}^4 = -k_{44}\, h_{4,\beta}^4 = -\frac{\partial \ln \sigma}{\partial x_\beta}. \tag{2}$$

Тогда тождественно выполняются все уравнения поля, кроме

$$G_4^4 = g^{\nu\rho}\left[\frac{\partial \Lambda_{4\rho}^4}{\partial x_\nu} - \Delta_{4\nu}^4 \Lambda_{4\rho}^4\right] = 0, \tag{3}$$

или

$$0 = \sum_\rho \left(\frac{\partial \Lambda_{4\rho}^4}{\partial x_\rho} - \Delta_{4\rho}^4 \Delta_{4\rho}^4\right) = \sum_\rho \left(\frac{\partial^2 \ln \sigma}{\partial x_\rho^2} + \frac{\partial \ln \sigma}{\partial x_\rho}\frac{\partial \ln \sigma}{\partial x_\rho}\right). \tag{3$'$}$$

Отсюда для σ получаем

$$\sum_\rho \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_\rho^2} = 0, \tag{4}$$

т. е. σ является потенциалом.

Так как на бесконечности σ стремится к единице, то решение (в случае конечного числа материальных точек) будет

$$\sigma = 1 + \sum_j \frac{m_j}{r_j}, \qquad m_j = \mathrm{const}. \tag{5}$$

Этот строгий результат имеет важное значение, в связи с физической интерпретацией теории, по следующей причине. Формула (5) показывает, что существует строгое решение, соответствующее случаю, когда две (или больше) несвязанные электрически нейтральные массы покоятся на произвольном расстоянии друг от друга. Такому случаю в природе ничто не соответствует. Отсюда можно сделать вывод, что теория не отвечает опыту. Это было бы действительно верно, если бы из уравнений поля можно вывести закон движения сингулярных точек, как это было в первоначальном варианте теории. Однако в излагаемой теории, по-видимому, этого сделать нельзя [2].

Таким образом, существование рассмотренного статического решения не может быть аргументом в пользу физической применимости теории. Однако легко видеть, что в новой теории следует требовать регулярности тех решений, которые должны изображать элементарные частицы вещества.

До тех пор, пока такие решения не найдены, вывести закон движения частиц из уравнений поля, вероятно, невозможно.

Поступила 11 марта 1930 г.

[2] Возможность вывести закон движения в прежнем варианте теории обусловлена тем, что там в уравнение поля входят симметричные тензоры, дивергенция которых равна нулю. Однако в излагаемой теории это условие не выполняется.

К ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ С РИМАНОВОЙ МЕТРИКОЙ И АБСОЛЮТНЫМ ПАРАЛЛЕЛИЗМОМ*

Ниже излагается одно общее свойство пространств с римановой метрикой и абсолютным параллелизмом, причем вопрос о их физическом смысле пока не рассматривается[1].

Пусть $(T^{\mu\nu})$ — тензор, который кроме контравариантных индексов μ и ν может иметь и другие индексы. В этом случае всегда справедливо правило перестановки при дифференцировании:

$$T^{\mu\nu}_{;\sigma;\tau} - T^{\mu\nu}_{;\tau;\sigma} \equiv -T^{\mu\nu}_{;\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}. \tag{1}$$

Отсюда после свертывания получаем

$$T^{\mu\nu}_{;\nu;\mu} - T^{\mu\nu}_{;\mu;\nu} \equiv T^{\mu\nu}_{;\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}. \tag{1a}$$

После простого преобразования отсюда следует тождество

$$[(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu})_{;\nu} - T^{\sigma\tau}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}]_{;\mu} + T^{\sigma\tau}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau;\alpha} = 0. \tag{2}$$

В тождество (2) входит только антисимметричная часть тензора T. Поэтому без ограничения общности можно предположить, что тензор T относительно рассматриваемых индексов является антисимметричным. Тогда тождество (2) принимает вид

$$\left[T^{\mu\nu}_{;\nu} - \frac{1}{2}T^{\sigma\tau}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}\right]_{;\mu} + \frac{1}{2}T^{\sigma\tau}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau;\mu} = 0. \tag{2a}$$

Это соотношение можно преобразовать дальше, используя тождество,

---

* *Zur Theorie der Räume mit Riemann-Metrik und Fernparallelismus.* Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1930, 401—402

[1] Здесь предполагается известным содержание работы «Совместность уравнений единой теории поля» (этот же журнал, стр. 18—23). (Статья 99.— *Ред.*).

следующее из интегрируемости параллельного переноса:

$$\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau;\,\mu} \equiv \varphi_{\sigma,\,\tau} - \varphi_{\tau,\,\sigma} \quad (\varphi_\sigma = \Lambda^{\alpha}_{\sigma\alpha}), \tag{3}$$

или

$$\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau;\,\mu} \equiv \varphi_{\sigma;\,\tau} - \varphi_{\tau;\,\sigma} + \varphi_\mu \Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}. \tag{3a}$$

С помощью (3а) получаем

$$\frac{1}{2} T^{\sigma\tau} \Lambda^{\mu}_{\sigma\tau;\,\mu} \equiv (T^{\sigma\tau}\varphi_\sigma)_{;\,\tau} - \varphi_\sigma T^{\sigma\tau}_{\ \ ;\,\tau} + \frac{1}{2}\varphi_\mu T^{\sigma\tau}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}.$$

Подставляя правую часть этого тождества в (2а) и вводя символ дивергенции

$$A^{\nu}_{\ |\,\nu} = A^{\nu}_{\ ;\,\nu} - \varphi_\nu A^\nu, \tag{4}$$

где A^ν — тензор произвольного ранга с контравариантным индексом ν, получаем

$$\left.\begin{aligned} &U^{\mu}_{\ |\,\mu} \equiv 0,\\ &U^\mu = T^{\mu\nu}_{\ \ |\,\nu} - \frac{1}{2} T^{\sigma\tau}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Таким образом, применяя линейную дифференциальную операцию, можно из любого тензора T с антисимметричной парой индексов $\mu\nu$ получить тензор U^μ ранга, меньшего на единицу с дивергенцией, тождественно равной нулю.

Так, например, из тензора

$$L^{\alpha}_{\underline{\mu}\,\underline{\nu}} = \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\,\underline{\nu}} + a\,(\varphi_{\underline{\mu}} g^{\nu\alpha} - \varphi_{\nu} g^{\mu\alpha}) + bS^{\alpha}_{\underline{\mu}\,\underline{\nu}}, \tag{6}$$

где a, b — произвольные постоянные и

$$S^{\alpha}_{\underline{\mu}\,\underline{\nu}} = \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\,\underline{\nu}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\nu}\,\underline{\alpha}} + \Lambda^{\nu}_{\underline{\alpha}\,\underline{\mu}}, \tag{7}$$

можно получить тензор

$$G^{\mu\alpha} = L^{\alpha}_{\underline{\mu}\,\underline{\nu}\,|\,\nu} - \frac{1}{2} L^{\alpha}_{\underline{\sigma}\,\underline{\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}, \tag{8}$$

дивергенция которого по μ тождественно обращается в нуль:

$$G^{\mu\alpha}_{\ \ |\,\mu} \equiv 0. \tag{8a}$$

Отсюда следует, что система уравнений

$$G^{\mu\alpha} = 0 \tag{9}$$

является совместной системой для величин h^{ν}_{s}, которые могут, вообще говоря, быть просто постоянными a и b.

О СОВРЕМЕННОМ СОСТОЯНИИ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

§ 1. Принципы

В основе общей теории относительности лежат следующие идеи.

1. Как и в прежних теориях, ставится цель построить модель реальности в виде четырехмерного континуума, которую мы будем кратко называть «пространством».

2. В противоположность прежней физике выдвигается требование, чтобы функции координат, предназначенные для описания реальности, удовлетворяли законам, как можно более простым *с точки зрения общей теории относительности.*

Последний пункт выражает общий принцип относительности. Она представляет собой чисто формальную точку зрения, а не какую-то определенную гипотезу о природе. Ибо всякую систему законов, вообще имеющую смысл, можно выразить в общековариантной форме. Тем не менее этот принцип имеет большое эвристическое значение. Ибо в общем случае нерелятивистские теории, кажущиеся простыми при использовании определенной системы координат, выглядят в высшей степени сложными и неестественными, если их уравнения переводятся в общековариантную форму. Это относится, например, к ньютоновской теории тяготения и закону движения. С другой стороны, очевидно, что этот принцип представляет собой методическое достижение. Ибо нерелятивистская теория содержит не только высказывания об *объектах*, но и высказывания, относящиеся к объектам *и к координатным системам*, служащим для их описания. Следовательно, с логической точки зрения такая теория менее удовлетворительна, чем релятивистская, высказывания которой не зависят от выбора координат.

---

* *Über den gegenwärtigen Stand der allgemeinen Relativitätstheorie.* Yale University Library Gazette, VI, 1930, 3—6.

По поводу пункта 1 замечу, что он не согласуется с программой квантовой механики в ее современной форме; ведь квантовая механика отказывается конструировать модель реальности на таком пути. Входящие в ее уравнения переменные описывают только вероятности, а не действительные состояния.

Из сказанного уже следует, что *один только* общий принцип относительности не может быть достаточной формальной основой теории. Современная общая теория относительности основывается, кроме того, на следующих посылках.

3. В (четырехмерном) пространстве имеет объективный смысл определенная метрика Римана:

$$ds^2 = g_{uv} dx^u dx^v. \tag{1}$$

Эта аксиома основывается в первую очередь на уже известном из специальной теории относительности «принципе постоянства скорости света» ($ds = 0$). Но она соответствует также характеру природы, в которой, по-видимому, осуществляется *подобие* в бесконечно малом. (Независимость элементарных тел, а также равенства масштабов от их предыстории.)

4. Существует вопрос, можно ли считать функции, входящие в уравнения, всюду регулярными или же материальные точки, к примеру, должны выражаться через сингулярности. Это — вопрос открытый. Однако я придерживаюсь мнения, что сингулярности следует исключить.

§ 2. Критика существовавшей до сих пор формы общей теории относительности

Предположим, что переменные g_{uv} описывают метрику пространства (физически выражаемую как совокупность измерений с помощью масштабных линеек и часов), а также гравитационное поле. Для описания электромагнитного поля необходимы новые переменные φ_i, которые проще всего ввести с помощью линейной формы

$$\varphi_i dx^i. \tag{2}$$

В качестве уравнений поля наряду с релятивистскими обобщенными уравнениями Максвелла появляются «уравнения гравитации»:

$$R_{ik}' = T_{ik}. \tag{3}$$

В левой части этого уравнения стоит «тензор кривизны» определяемый только величинами g_{ik}, в правой — тензор энергии Максвелла. Не говоря о преимуществах этой теории, я сразу перейду к рассмотрению ее недостатков.

1. Обобщенные уравнения Максвелла,

$$\frac{\partial f^{uv}}{\partial x^{v}} = 0, \tag{4}$$

равно как и тесно связанные с ними уравнения (3), исключают существование несингулярных заряженных частиц, как вытекает из уравнения (4), на основании интегральной теоремы Гаусса.

2. Полевые переменные не отвечают единой концепции о структуре континуума.

3. Левая и правая части уравнений поля (3) взаимосвязываются произвольным образом (т. е. без логической необходимости).

Поэтому следует искать такие пространственные структуры, которые наряду с метрикой Римана содержат и другие структурные элементы. Далее будет дана характеристика структуры такого рода, разрабатываемая мной в настоящее время.

§ 3. Метрика Римана с абсолютным параллелизмом

Континуум с метрикой Римана можно охарактеризовать следующим образом: в каждой точке существует локальный ортогональный n-под (n — число измерений), относительно которого в бесконечно малом выполняется теорема Пифагора. Эти n-поды независимо друг от друга могут поворачиваться на произвольные углы, не изменяя при этом описываемой ими метрики Римана. Но предположим теперь дополнительно, что каждому направлению в точке P взаимно однозначно соответствует определенное направление в произвольной точке Q этого континуума, так что ортогональным направлениям в P соответствуют ортогональные направления в Q.

Тогда можно выбрать локальные ортогональные n-поды таким образом, чтобы соответственные n-поды во всех точках пространства были взаимно параллельны. Такую структуру пространства можно описывать проекциями n-подов на гауссову систему координат (h_s^v — v-компонента s-го пода). Если h_{sv} суть принадлежащие h_s^v нормированные миноры, то метрика Римана выражается соотношением

$$g_{uv} = h_{su} h_{sv}. \tag{5}$$

Математическая проблема заключается в следующем: каковы формально самые естественные законы, которым можно подчинить h-поле? Имеют ли эти законы какое-нибудь отношение к законам физического пространства?

Декабрь 1930

ГРАВИТАЦИОННОЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЯ *

С тех пор как в 1915 г. была сформулирована общая теория относительности, теоретики настойчиво пытались найти общую основу для законов гравитационного и электромагнитного полей. Трудно было думать, что эти поля соответствуют двум пространственным структурам, между которыми нет фундаментальной связи. Отсюда возникли теории Вейля и Эддингтона, от которых, однако, авторы отказались, теория Калуцы и теория абсолютного параллелизма. После того как мы проработали около года над дальнейшим развитием последней теории, мы пришли к заключению, что избрали неверный путь, и теория Калуцы, хотя и неприемлема, все же ближе к истине, чем другие теоретические построения.

Теория Калуцы основана на предположении, что физический пространственно-временный континуум является пятимерным (а не четырехмерным), причем взятая из опыта четырехмерность физического континуума может быть выведена из гипотезы о независимости физических переменных от координаты x_5. Вводя в пятимерном пространстве риманову метрику, Калуца получает уравнения поля, которые в первом приближении совпадают с известными уравнениями гравитационного и электромагнитного полей.

Среди соображений, которые заставляют усомниться в этой теории, на первом месте стоит следующее: вряд ли разумно заменять четырехмерный континуум на пятимерный и затем искусственно налагать ограничение на одно из этих пяти измерений с тем, чтобы объяснить, почему оно не проявляет себя физически.

Нам удалось сформулировать теорию, которая формально близка к теории Калуцы, но свободна от упомянутого возражения. Это достигается

* *Gravitational and Electrical Fields.* Science. 1930, 74, 438—439. (Предварительное краткое сообщение для фонда Дж. Мейси, мл., о работах 106 и 107, выполненных с В. Майером.— *Прим. ред.*)

путем введения совершенно нового математического понятия, которое можно охарактеризовать следующим образом.

До сих пор считалось, что в пространстве n измерений можно ввести векторы или векторные поля с числом компонент, совпадающим с размерностью пространства. Оказывается, однако, что это ограничение не является обязательным. Оно возникает вследствие «наглядности» характера тех векторов, на которых основана сама формулировка понятия вектора. Нам удалось ввести в n-мерном пространстве R_n векторы $a^i (i = 1, \ldots, m)$ с m компонентами и построить исчисление таких векторов и тензоров, которое по существу не сложнее, чем известное абсолютное тензорное исчисление.

Наша теория возникает естественным образом при рассмотрении 5-векторов (пятикомпонентных векторов) в четырехмерном континууме. Строится «пятимерная кривизна» пространства, которая аналогична римановой кривизне и связана с уравнениями единого поля таким же образом, как риманова кривизна с релятивистскими уравнениями для одного гравитационного поля.

В этой теории еще не содержатся результаты квантовой теории. Она указывает, однако, путь к естественному развитию, от которого мы можем ожидать дальнейших результатов в этом направлении. Во всяком случае, полученные до сих пор результаты представляют определенный шаг вперед в познании структуры физического пространства.

Поступила 30 октября 1930 г.

В этой заметке впервые изложена идея нового (третьего) варианта единой теории поля. Этим вариантом Эйнштейн занимался до 1945 г. (статьи 105, 106).

104

К КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

Под космологической проблемой понимается задача о свойствах пространства и о распределении вещества в больших масштабах, причем вещество звезд и звездных систем для простоты заменяется непрерывно распределенным веществом. С тех пор как вскоре после создания общей теории относительности я рассматривал эту задачу, по этому вопросу появились не только многочисленные теоретические работы, но и исследования Хэббла о доплеровском смещении и распределении внегалактических туманностей, открывающие новые пути для теории.

В своем первоначальном исследовании я исходил из следующих предпосылок.

1. Все части Вселенной равноценны, в частности, локальная средняя плотность звездного вещества должна быть также всюду одинаковой.

2. Пространственная структура и плотность вещества должны быть постоянными во времени.

В то время я показал, что эти два предположения можно совместить с отличной от нуля средней плотностью ρ, если ввести в уравнения поля общей теории относительности так называемый космологический член, так что эти уравнения принимают вид

$$\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)+\lambda g_{ik}=-kT_{ik}. \tag{1}$$

Этим уравнениям удовлетворяет пространственно сферический статический мир с радиусом $P=\sqrt{\frac{2}{\varkappa\rho}}$, где ρ — средняя плотность вещества (в отсутствие давления).

Но после того как из результатов Хэббла стало ясно, что внегалактические туманности распределены в пространстве равномерно и что они

* *Zum kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie*. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1931, 235—237.

разбегаются (по крайней мере, если их систематические красные смещения объяснять эффектом Доплера), предположение (2) о статической природе пространства уже не оправдывается и возникает вопрос, может ли объяснить эти результаты общая теория относительности.

Различными исследователями предпринимались попытки связать новые факты со сферическим пространством, радиус которого P зависит от времени. Первым, причем независимо от наблюдаемых фактов, вступил на этот путь А. Фридман [1]. В последующих рассуждениях я использую результаты его вычислений. Фридман исходит из линейного элемента вида

$$ds^2 = -P^2(dx_1^2 + \sin^2 x_1\, dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2\, dx_3^2) + c^2 dx_4^2,$$

где P — функция лишь одной вещественной временно́й переменной x_4. Для определения P и связи этой величины с (переменной) плотностью ρ он получает из уравнений (1) два дифференциальных уравнения:

$$\frac{P'^2}{P^2} + \frac{2P''}{P} + \frac{c^2}{P^2} - \lambda = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{3P'^2}{P^2} + \frac{3c^2}{P^2} - \lambda = \varkappa c^2 \rho. \qquad (3)$$

Мое старое решение получается из этих уравнений, если считать, что величина P постоянна во времени. Однако с помощью этих уравнений можно показать, что это решение неустойчиво, т. е. что всякое решение, в некоторый момент времени мало отличающееся от такого статического решения, с течением времени будет все больше отклоняться от него. Уже по одной этой причине, даже не говоря о результатах наблюдений Хэббла, я не считаю больше возможным приписывать физический смысл своему прежнему решению.

При этих обстоятельствах следует задать вопрос, можно ли описать опытные факты, не вводя λ-член, явно неудовлетворительный с теоретической точки зрения. Посмотрим, в какой степени это возможно; при этом мы, как и Фридман, будем пренебрегать влиянием излучения. Как показал Фридман, из уравнения (2) в результате интегрирования получается (для $\lambda = 0$)

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)^2 = c^2\,\frac{P_0 - P}{P}, \qquad (2a)$$

где P_0 — постоянная интегрирования. Это означает наличие верхней гра-

[1] Z. Phys., 1922, 10, 377. [Работы Фридмана опубликованы повторно в УФН, 1963, 80, 447, 453.— *Прим. ред.*]

ницы, которую радиус мира не может никогда превзойти. Здесь производная $\frac{dP}{dt}$ должна менять знак [2]. Из уравнения (3) следует, что плотность ρ (для $\lambda = 0$) во всяком случае остается положительной, как и должно быть.

Результаты Хэббла показывают, что в настоящее время следует принять $\frac{dP}{dt} > 0$ и что величина доплеровского смещения, поделенная на расстояние, не зависит от расстояния; с достаточной для нас точностью она выражается формулой

$$D = \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} \cdot \frac{1}{c}\,.$$

Вместо уравнения (2а) можно написать

$$D^2 = \frac{1}{P^2}\frac{P_0 - P}{P} \qquad (2б)$$

и вместо уравнения (3) —

$$D^2 = \frac{1}{3}\varkappa\rho\frac{P_0 - P}{P}\,. \qquad (3а)$$

Уравнение (2а) описывает следующий процесс. При малых значениях радиуса P (для строго предельного случая $P = 0$ наша идеализация несправедлива) его величина возрастает очень быстро. Затем скорость изменения P, т. е. производная $\frac{dP}{dt}$, при возрастании P все более уменьшается и обращается в нуль, когда достигается предельное значение $P = P_0$, после чего весь процесс протекает в обратном порядке (т. е. при все более быстром уменьшении P).

Если сравнивать наши формулы с опытными фактами, то необходимо предположить, что мы находимся где-то в фазе возрастающей плотности ρ. Тогда для грубой ориентировки разумно предположить, что разность $P - P_0$ имеет такой же порядок величины, как и P_0, так что по порядку величины выполняется соотношение

$$D^2 \sim \varkappa\rho.$$

Отсюда для ρ получаем по порядку величины 10^{-26}, что, по-видимому, примерно соответствует оценкам астрономов. Аналогично, в соответствии с уравнением (2б), радиус мира в настоящее время определяется по

....

[2] В соответствии с уравнением (2а) P не может превзойти P_0, а согласно уравнению (2), P не может принять постоянное значение P_0.

порядку величины соотношением

$$P \sim \frac{1}{D},$$

что дает лишь около 10^8 световых лет.

Но самая большая трудность, как известно, заключается в том, что состояние мира с $P = 0$ соответствовало, согласно уравнению (2а), времени лишь около 10^{10} лет назад. Эту трудность можно было бы обойти, сославшись на то, что наше приближенное рассмотрение становится незаконным ввиду неоднородного распределения звездного вещества. Кроме того, теория, объясняющая на основе эффекта Доплера найденные Хэбблом огромные смещения спектральных линий, вряд ли может устранить эту трудность сколько-нибудь простым способом.

Во всяком случае эта теория достаточно проста для того, чтобы можно было удобно сравнивать ее с астрономическими наблюдениями. Она говорит также о том, что при экстраполяции на большие промежутки времени в астрономии надо соблюдать осторожность. Более всего примечательно, что общая теория относительности, по-видимому, естественно (т. е. без λ-члена) согласуется скорее с новыми наблюдениями Хэббла, чем с постулатом о квазистатической природе пространства, отброшенным теперь под влиянием опытных фактов.

Эта работа представляет собой полное признание работ Фридмана (уместно вспомнить письма—статьи 68 и 69). В них четко сформулировано отношение Эйнштейна к статической модели и к введению космологического члена в уравнения тяготения. Существование особенности в решении (около 10^{10} лет назад) представляется автору трудностью теории. Современные данные дают для времени особенности бóльшую величину (около 10^{11} лет). Эта оценка, по-видимому, уже не противоречит данным о возрасте галактик.

СИСТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОВМЕСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ, ВОЗМОЖНЫХ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С АБСОЛЮТНЫМ ПАРАЛЛЕЛИЗМОМ *

(Совместно с В. Майером)

В ранее опубликованных исследованиях уравнений поля, возможных в римановом пространстве с абсолютным параллелизмом, всегда делалось предположение о совместности уравнений, оправдывающее их вывод. Однако до сих пор у нас не было систематического метода, который дал бы уверенность в том, что мы рассмотрели все существующие возможности. Этот пробел мы восполняем в настоящем исследовании. При этом выясняется, что действительно существует не рассмотренная ранее форма уравнений, которая дает нетривиальное обобщение первоначальных уравнений поля тяготения.

Мы исследовали особо, методом, аналогичным излагаемому ниже, такие системы уравнений, которые удовлетворяют д в у м четырехмерным тождествам. Однако мы нашли достаточно убедительные основания для того, чтобы считать их непригодными для физического описания пространства, а потому мы ограничимся здесь исследованием таких систем уравнений, которые удовлетворяют о д н о м у четырехмерному тождеству. Это тем более оправдано, что первые системы уравнений содержатся в последних как частный случай.

Как обычно, искомые уравнения должны быть линейными по вторым производным переменных поля $h_{s\nu}$ и квадратичными по их первым производным. Тождества, которым удовлетворяют левые части $G^{\mu\alpha}$ уравнений поля, должны быть линейными выражениями по первым производным величин $h_{s\nu}$ и должны содержать в явном виде величины $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$ только линейно. Обозначения, применявшиеся нами в прежних работах, будут использованы здесь без изменений.

* *Systematische Untersuchung über kompatible Feldgleichungen, welche in einem Riemannschen Raume mit Fernparallelismus gesetzt werden können.* (Mit W. Mayer). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1931, 257—265.

§ 1. Метод исследования

Рассмотрим уравнения поля вида

$$0 = G^{\mu\alpha} = p\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu};\nu} + q\Lambda^{\mu}_{\alpha\underline{\nu};\nu} + a_1\varphi_{\alpha;\underline{\mu}} + a_2\varphi_{\underline{\mu};\underline{\alpha}} + a_3 g^{\mu\alpha}\varphi_{\underline{\nu};\nu} + R^{\mu\alpha}, \tag{1}$$

где $R^{\mu\alpha}$ — совокупность остаточных членов, квадратичных по Λ. Постоянные p, q, a_1, a_2, a_3, а также величины $R^{\mu\alpha}$ следует определить так, чтобы величина $G^{\mu\alpha}$ удовлетворяла дифференциальному тождеству

$$0 \equiv G^{\mu\alpha}_{;\mu} + AG^{\alpha\mu}_{;\mu} + G^{\sigma\tau}(c_1\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} + c_2\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma}\underline{\alpha}} + c_3\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau}\alpha}) + c_4 G^{\alpha\sigma}\varphi_\sigma + c_5 G^{\sigma\alpha}\varphi_\sigma + c_6 G^{\underline{\sigma}\sigma}\varphi_{\underline{\alpha}} + BG^{\underline{\sigma}\sigma}_{;\underline{\alpha}}. \tag{2}$$

Постоянные $A, B, c_1 \ldots c_6$ в свою очередь следует определить так, чтобы тождеству (2) удовлетворяли сами уравнения (1).

Вводя в левую часть уравнений (1) вместо $G^{\mu\alpha}$ выражения

$$\tilde{G}^{\mu\alpha} = G^{\mu\alpha} + sG^{\alpha\mu} + tg^{\alpha\mu}G^{\underline{\sigma}\sigma}$$

(где s и t — соответственно определенные постоянные), в общем случае можно получить уравнения того же вида, но с нулевыми значениями постоянных A и B. Постоянную B нельзя обратить в нуль только тогда когда $B = -\frac{1+A}{4}$. Этот частный случай мы не будем исследовать дальше так как он не дает никаких интересных для нас результатов. Постоянную A этим преобразованием нельзя обратить в нуль лишь в том случае, если $A = \pm 1$. Этот особый случай мы также не будем рассматривать, а положим сначала

$$A = B = 0. \tag{2a}$$

Соотношения (1) и (2) — если отвлечься от некоторых, возможных в случае четырех измерений, но не очень естественных членов — являются самыми общими уравнениями для нашей проблемы с учетом наложенных нами ограничительных условий.

Теперь мы должны подставить уравнения (1) в тождество (2) и определить произвольные постоянные и остаточные члены так, чтобы тождество было выполнено. При этом логично было бы написать с неопределенными коэффициентами также и квадратичные члены $R^{\mu\alpha}$, выразить всё через величины $h_{s\nu}$ и их производные и затем приравнять нулю коэффициенты при алгебраически независимых членах. Однако этот практически неосуществимый ввиду своей сложности путь можно заменить более простым.

Должно существовать тождество, содержащее Λ, которое вытекает только из дифференциальных тождеств, связанных с возможностью выражения Λ через величины h и с правилами перестановки при дифференцировании (так как в тождество входят вторые производные величин Λ). Вместе с ним необходимо использовать и другие тождества, известные из прежних исследований:

$$T^{\cdot}_{\cdot;\sigma;\tau} - T^{\cdot}_{\cdot;\tau;\sigma} \equiv -\Lambda^{\rho}_{\sigma\tau} T^{\cdot}_{\cdot;\rho}, \tag{3}$$

$$0 \equiv \Lambda^{\iota}_{\varkappa\lambda;\mu} + \Lambda^{\iota}_{\lambda\mu;\varkappa} + \Lambda^{\iota}_{\mu\varkappa;\lambda} + \Lambda^{\iota}_{\varkappa\rho}\Lambda^{\rho}_{\lambda\mu} + \Lambda^{\iota}_{\lambda\rho}\Lambda^{\rho}_{\mu\varkappa} + \Lambda^{\iota}_{\mu\rho}\Lambda^{\rho}_{\varkappa\lambda}, \tag{4}$$

$$\Lambda^{\sigma}_{\varkappa\lambda;\sigma} (\equiv F_{\varkappa\lambda}) \equiv \varphi_{\varkappa,\lambda} - \varphi_{\lambda,\varkappa}. \tag{5}$$

При этом тождество (5) является непосредственным следствием уравнения (4).

Второе упрощение метода заключается в следующем. Вместо того, чтобы вводить члены, квадратичные по $R^{\mu\alpha}$, с неопределенными коэффициентами, подставим сначала в тождество само $R^{\mu\alpha}$; вместе с ним войдет и $R^{\mu\alpha}_{;\alpha}$. Преобразование остальных членов будем проводить так, чтобы возникало как можно меньше членов, отличных от $U^{\mu\alpha}_{;\mu}$; при этом $U^{\mu\alpha}$ означает величину, квадратичную по Λ. Обозначая символом $U^{\mu\alpha}_{;\mu}$ *совокупность* всех таких членов, потребуем, чтобы сумма $U^{\mu\alpha} + R^{\mu\alpha}$ обращалась в нуль; величина $R^{\mu\alpha}$ выразится при этом через Λ. *Это, конечно, возможно лишь в том случае, если преобразованное тождество содержит только линейно независимые члены.* Так определяются $R^{\mu\alpha}$ и таким же способом находятся введенные выше численные коэффициенты.

§ 2. Преобразование тождества

После подстановки уравнений (1) тождество (2) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} 0 \equiv\ & p\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu};\nu;\mu} + q\Lambda^{\mu}_{\underline{\alpha}\underline{\nu};\nu;\mu} + a_1\varphi_{\mu;\underline{\alpha};\mu} + a_2\varphi_{\underline{\alpha};\underline{\mu};\mu} + a_3\varphi_{\underline{\nu};\nu;\alpha} + R\ + \\ & + (p\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma}\underline{\nu};\nu} + q\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau}\underline{\nu};\nu} + a_1\varphi_{\sigma;\underline{\tau}} + a_2\varphi_{\tau;\underline{\sigma}} + a_3 g^{\sigma\tau}\varphi_{\underline{\nu};\nu})(c_1\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} + c_2\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma}\alpha} + \\ & + c_3\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau}\underline{\alpha}}) + c_4(p\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha}\underline{\nu};\nu}\varphi_\sigma + q\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma}\underline{\nu}}\varphi_\sigma + a_1\varphi_{\underline{\alpha};\underline{\sigma}}\varphi_\sigma + a_2\varphi_{\underline{\sigma};\underline{\alpha}}\varphi_\sigma + \\ & + a_3\varphi_{\underline{\nu};\nu}\varphi_{\underline{\alpha}}) + c_5(p\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma}\underline{\nu};\nu}\varphi_\sigma + q\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha}\underline{\nu};\nu}\varphi_\sigma + a_1\varphi_{\sigma;\underline{\alpha}}\varphi_\sigma + a_2\varphi_{\underline{\alpha};\underline{\sigma}}\varphi_\sigma + \\ & + a_3\varphi_{\underline{\nu};\nu}\varphi_\alpha) + c_6[-(p+q) + a_1 + a_2 + 4a_3]\,\varphi_{\underline{\nu};\nu}\varphi_{\underline{\alpha}} + D^{\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где D^α — совокупность членов, содержащих третьи степени величин Λ, которые будут учтены позднее. Линейная независимость членов, входящих в тождество (6), достигается с помощью следующих преобразований, без особых трудностей выводимых из тождеств (3) — (5):

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\nu;\mu} \equiv \frac{1}{2}(\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\nu}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\nu})_{;\mu} - \frac{1}{2}\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}F_{\mu\nu}, \tag{7а}$$

$$\Lambda^{\mu}_{\underline{\alpha\nu};\nu;\mu} \equiv -(\Lambda^{\mu}_{\nu\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\nu}})_{;\mu} + F_{\underline{\alpha\nu};\nu} + F_{\nu\mu}\Lambda^{\mu}_{\underline{\alpha\nu}}, \tag{7б}$$

$$\varphi_{\underline{\mu};\underline{\alpha};\mu} \equiv -(\varphi_\sigma\Lambda^{\mu}_{\underline{\alpha\sigma}})_{;\mu} + \varphi_{\underline{\mu};\mu;\underline{\alpha}} + F_{\alpha\underline{\mu}}\varphi_\mu, \tag{7в}$$

$$\varphi_{\underline{\alpha};\underline{\mu};\mu} \equiv -(\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\mu}}\varphi_\sigma + \Lambda^{\mu}_{\underline{\alpha}\sigma}\varphi_\sigma)_{;\mu} + \varphi_{\underline{\mu};\mu;\underline{\alpha}} + F_{\underline{\alpha\mu}}\varphi_\mu + F_{\underline{\alpha\mu};\mu}, \tag{7г}$$

$$2\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\nu};\nu}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} \equiv [(\Lambda^{\sigma}_{\underline{\sigma\mu}} + \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\tau\sigma}})\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}]_{;\mu} + F_{\underline{\sigma\nu}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\nu} + \\ + \Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\nu}}(\Lambda^{\alpha}_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}_{\tau\nu} + \Lambda^{\alpha}_{\tau\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu\sigma} + \Lambda^{\alpha}_{\nu\rho}\Lambda^{\rho}_{\sigma\tau}), \tag{7д}$$

$$\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\nu};\nu}\Lambda^{\underline{\tau}}_{\sigma\underline{\alpha}} \equiv \left[\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\mu}}\Lambda^{\underline{\tau}}_{\sigma\underline{\alpha}} - \frac{1}{4}g^{\alpha\mu}\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\nu}}\Lambda^{\underline{\tau}}_{\sigma\nu}\right]_{;\mu} + \frac{1}{2}\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\nu}}(\Lambda^{\underline{\tau}}_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}_{\underline{\alpha}\nu} + \\ + \Lambda^{\underline{\tau}}_{\underline{\alpha}\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu\sigma} + \Lambda^{\underline{\tau}}_{\nu\rho}\Lambda^{\rho}_{\sigma\underline{\alpha}}), \tag{7е}$$

$$\Lambda^{\tau}_{\sigma\underline{\nu};\nu}\Lambda^{\sigma}_{\tau\underline{\alpha}} \equiv \left(\Lambda^{\nu}_{\sigma\underline{\mu}}\Lambda^{\sigma}_{\nu\underline{\alpha}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\nu}\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\nu\underline{\alpha}} - \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\Lambda^{\tau}_{\nu\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\underline{\nu}\tau}\right)_{;\mu} - \\ - F_{\sigma\nu}\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\nu}} + \Lambda^{\tau}_{\sigma\underline{\nu}}(\Lambda^{\sigma}_{\tau\rho}\Lambda^{\rho}_{\underline{\alpha}\nu} + \Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha}\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu\tau} + \Lambda^{\sigma}_{\nu\rho}\Lambda^{\rho}_{\tau\underline{\alpha}}), \tag{7ж}$$

$$\varphi_{\underline{\sigma};\underline{\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} \equiv \frac{1}{2}F_{\sigma\tau}\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}} - \frac{1}{2}\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\rho}_{\sigma\tau}\varphi_\rho, \tag{7з}$$

$$\varphi_{\underline{\sigma};\tau}\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\alpha}} \equiv (\varphi_\sigma\Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma\alpha}})_{;\mu} - \varphi_\sigma F_{\underline{\sigma\alpha}}, \tag{7и}$$

$$\varphi_{\sigma;\tau}\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\alpha}} \equiv (\varphi_\sigma\Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma\alpha}})_{;\mu} - F_{\underline{\sigma\alpha}}\varphi_\sigma + F_{\sigma\tau}\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\alpha}} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\alpha}}\Lambda^{\rho}_{\sigma\tau}\varphi_\rho, \tag{7к}$$

$$g^{\sigma\tau}\Lambda^{\underline{\tau}}_{\sigma\underline{\alpha}}\varphi_{\underline{\nu};\nu}\ (\equiv -\varphi_{\underline{\alpha}}\varphi_{\underline{\nu};\nu}) \equiv F_{\underline{\alpha\sigma}}\varphi_\sigma - \left(\varphi_{\underline{\alpha}}\varphi_{\underline{\mu}} - \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}\varphi_{\underline{\sigma}}\varphi_\sigma\right)_{;\mu} - \\ - \Lambda^{\rho}_{\underline{\alpha\sigma}}\varphi_\rho\varphi_\sigma, \tag{7л}$$

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\nu};\nu}\varphi_\sigma \equiv (\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\mu}}\varphi_\sigma)_{;\mu} - \frac{1}{2}\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\nu}}F_{\sigma\nu} + \frac{1}{2}\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\nu}}\Lambda^{\rho}_{\sigma\nu}\varphi_\rho, \tag{7м}$$

$$\varphi_{\underline{\alpha};\underline{\sigma}}\varphi_\sigma \equiv F_{\underline{\alpha\sigma}}\varphi_\sigma + \frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}\varphi_{\underline{\sigma}}\varphi_\sigma)_{;\mu} - \Lambda^{\rho}_{\underline{\alpha\sigma}}\varphi_\rho\varphi_\sigma, \tag{7н}$$

$$\varphi_{\underline{\sigma};\underline{\alpha}}\varphi_\sigma \equiv \frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}\varphi_{\underline{\sigma}}\varphi_\sigma)_{;\mu}, \tag{7о}$$

$$\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\nu};\nu}\varphi_\sigma \equiv (\varphi_\sigma\Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma\alpha}} + \varphi_\sigma\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\mu}})_{;\mu} + F_{\sigma\tau}\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\alpha}} + F_{\underline{\alpha\sigma}}\varphi_\sigma - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\alpha}}\Lambda^{\rho}_{\sigma\tau}\varphi_\rho. \tag{7п}$$

После того, как в тождестве (6) члены, соответствующие левым частям уравнений (7), будут заменены согласно этим уравнениям, указанное тождество будет содержать только линейно независимые члены. Это представляется справедливым даже без особого доказательства. Можно убедиться в том, что уравнения (3) — (5) делают невозможным дальнейшее упрощение тождества. Приравнивая нулю коэффициенты при каждом члене. получаем:

Коэффициент при	Дает уравнение
$\varphi_{\underline{\nu};\,\nu;\,\alpha}$	$a_1 + a_2 + a_3 = 0,$ [1]
$F_{\underline{\alpha\nu};\,\nu}$	$a_2 + q = 0,$ [2]
$F_{\sigma\nu}\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\nu}}$	$-p + pc_1 + a_1c_1 + a_2c_4 - c_5p = 0,$ [3]
$F_{\nu\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\nu}}$	$q(1 + c_5) + p(c_3 + c_4) + a_1c_3 = 0,$ [4]
$F_{\underline{\alpha\mu}}\varphi_{\mu}$	$-a_3 + c_4(p + a_1 - a_3) - a_3c_5 + c_6(p + q - 3a_3) = 0.$ [5]

Далее для $R^{\mu\alpha}$ мы получаем

$$\left.\begin{aligned} -R^{\mu\alpha} \equiv {} & \frac{1}{2}(p - pc_1 + qc_1)\,\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\nu}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\nu} + (p - q)c_1\Lambda^{\alpha}_{\nu\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\underline{\nu\mu}} + \\ & + (pc_3 + qc_2 + q)\,\Lambda^{\mu}_{\nu\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\nu\underline{\alpha}} + (pc_3 + qc_2)\,\Lambda^{\nu}_{\sigma\underline{\mu}}\Lambda^{\sigma}_{\nu\underline{\alpha}} + \\ & + (pc_2 + qc_3)\left(\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\mu}}\Lambda^{\tau}_{\sigma\underline{\alpha}} - \frac{1}{4}g^{\mu\alpha}\Lambda^{\tau}_{\sigma\nu}\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\nu}}\right) - \frac{1}{2}(pc_3 + qc_2)\,g^{\alpha\mu}\Lambda^{\tau}_{\sigma\nu}\Lambda^{\sigma}_{\tau\underline{\nu}} + \\ & + [(a_1 + a_2)(1 + c_2 + c_3) + c_4p + c_5q]\,\Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma\alpha}}\varphi_{\sigma} + \\ & + [-a_2 + c_4p + c_5q]\,\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\mu}}\varphi_{\sigma} + (c_4q + c_5p)\,\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\mu}}\varphi_{\sigma} + M\varphi_{\underline{\alpha}}\varphi_{\underline{\mu}} + \\ & + Ng^{\alpha\mu}\varphi_{\underline{\sigma}}\varphi_{\sigma}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$M = -a_3(c_2 + c_3) + a_3(c_4 + c_5) + c_6(-p - q + 3a_3), \qquad (8а)$$

$$2N = -M - a_3(c_4 + c_5). \qquad (8б)$$

Дальнейшие условия для коэффициентов, введенных в соотношения (1) и (2), получаем, приравнивая нулю члены третьей степени по Λ. Этим способом получаем тождество

$$
\left.
\begin{aligned}
0 \equiv {} & R^{\sigma\tau}\left(c_1\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} + c_2\Lambda^{\underline{\tau}}_{\sigma\underline{\alpha}} + c_3\Lambda^{\sigma}_{\tau\underline{\alpha}}\right) + c_4R^{\alpha\sigma}\varphi_\sigma + c_5R^{\sigma\alpha}\varphi_\sigma + \\
& + c_6\varphi_{\underline{\alpha}}R^{\underline{\sigma}\sigma} + \frac{p-q}{2}c_1\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\nu}}\left(2\Lambda^{\alpha}_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}_{\tau\nu} + \Lambda^{\alpha}_{\tau\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu\sigma}\right) + \\
& + \frac{pc_2+qc_3}{2}\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\nu}}\left(2\Lambda^{\underline{\tau}}_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}_{\underline{\alpha}\nu} + \Lambda^{\underline{\tau}}_{\underline{\alpha}\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu\sigma}\right) + (pc_3+qc_2)\Lambda^{\tau}_{\sigma\underline{\nu}}\left(\Lambda^{\sigma}_{\tau\rho}\Lambda^{\rho}_{\underline{\alpha}\nu} + \right. \\
& \left. + \Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha}\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu\tau} + \Lambda^{\sigma}_{\nu\rho}\Lambda^{\rho}_{\tau\underline{\alpha}}\right) - \frac{(a_1-a_2)c_1}{2}\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\rho}_{\sigma\tau}\varphi_\rho - (a_1c_3+a_2c_2)\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\tau}}\Lambda^{\rho}_{\sigma\tau}\varphi_\rho - \\
& - a_3(c_2+c_3)\Lambda^{\rho}_{\underline{\alpha\sigma}}\varphi_\rho\varphi_\sigma - (pc_4+qc_5)\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\tau}}\Lambda^{\rho}_{\tau\sigma}\varphi_\rho + \frac{c_4q+c_5p}{2}\Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\nu}}\Lambda^{\rho}_{\sigma\nu}\varphi_\rho - \\
& - (c_4a_1+c_5a_2)\Lambda^{\rho}_{\underline{\alpha\sigma}}\varphi_\rho\varphi_\sigma + (c_4+c_5)a_3\Lambda^{\rho}_{\underline{\alpha\sigma}}\varphi_\rho\varphi_\sigma + \\
& + c_6(-p-q+3\grave{a}_3)c_6\Lambda^{\rho}_{\underline{\alpha\sigma}}\varphi_\rho\varphi_\sigma.
\end{aligned}
\right\} \qquad (9)
$$

Совместно с уравнениями (8) тождество (9) дает для определения коэффициентов следующие алгебраические уравнения:

Коэффициент при	Дает уравнение
$\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}\left(\Lambda^{\tau}_{\nu\rho}\Lambda^{\rho}_{\underline{\nu\sigma}} - \Lambda^{\sigma}_{\nu\rho}\Lambda^{\rho}_{\underline{\nu\tau}}\right)$	$[(p-q)(c_1-1) - pc_3 - q(c_2+1)]c_1 = 0,$ [6]
$\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}\left(\Lambda^{\sigma}_{\underline{\nu\tau}} - \Lambda^{\tau}_{\underline{\nu\sigma}}\right)\varphi_\nu$	$c_1a_3(1+c_2+c_3) - c_4(pc_3+qc_2+q) - c_1c_4(p-q) = 0,$ [7]
$\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}\Lambda^{\nu}_{\underline{\tau\sigma}}\varphi_\nu$	$(a_1+a_2)c_1 + c_1c_4(-3p+q) - c_1c_5(p+q) + c_4(p-q) = 0,$ [8]
$\Lambda^{\underline{\tau}}_{\sigma\underline{\alpha}}\Lambda^{\rho}_{\underline{\sigma}\nu}\Lambda^{\underline{\rho}}_{\underline{\nu\tau}}$	$(pc_2+qc_3)(1+c_2+c_3) = 0,$ [9]
$\Lambda^{\underline{\tau}}_{\sigma\underline{\alpha}}\Lambda^{\tau}_{\rho\nu}\Lambda^{\sigma}_{\underline{\rho\nu}}$	$(p-q)[c_3 - c_1(c_2+c_3)] = 0,$ [10]
$\Lambda^{\underline{\tau}}_{\sigma\underline{\alpha}}\Lambda^{\rho}_{\nu\underline{\sigma}}\Lambda^{\nu}_{\rho\underline{\tau}}$	$(pc_3+qc_2)(1+c_2+c_3) = 0,$ [11]
$\Lambda^{\underline{\tau}}_{\sigma\underline{\alpha}}\Lambda^{\tau}_{\nu\rho}\Lambda^{\rho}_{\underline{\nu\sigma}}$	$c_1c_2(p-q) + c_3(pc_3+qc_2+q) = 0,$ [12]
$\Lambda^{\underline{\tau}}_{\sigma\underline{\alpha}}\Lambda^{\sigma}_{\nu\rho}\Lambda^{\rho}_{\underline{\nu\tau}}$	$c_1c_3(p-q) + c_2(pc_3+qc_2+q) = 0,$ [13]
$\Lambda^{\underline{\tau}}_{\underline{\sigma}\alpha}\Lambda^{\rho}_{\sigma\tau}\varphi_\rho$	$p[c_4(1+c_2-c_3-c_1) - c_3c_5] + q(c_1c_4 - c_3c_5) + (a_1+a_2)c = 0,$ [14]
$\Lambda^{\underline{\tau}}_{\sigma\underline{\alpha}}\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\rho}}\varphi_\rho$	$c_2(a_1+a_2)(1+c_2+c_3) + c_4(p-q)(c_2-c_3) = 0,$ [15]

$$\Lambda^{\tau}_{\sigma\underline{\alpha}}\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma\rho}}\varphi_{\rho} \qquad c_3(a_1+a_2)(1+c_2+c_3)-c_4(p-q)(c_2-c_3)=0, \quad [16]$$

$$\Lambda^{\tau}_{\underline{\sigma}\alpha}\varphi_{\underline{\sigma}}\varphi_{\underline{\tau}} \qquad M(1+c_2+c_3)=c_4[a_1+a_2-(c_4+c_5)(p+q)]-$$
$$-c_5(a_1+a_2)(1+c_2+c_3)=0, \quad [17]$$

$$\varphi_{\underline{\alpha}}\Lambda^{\rho}_{\underline{\mu\nu}}\Lambda^{\rho}_{\mu\nu} \qquad (pc_2+qc_3)(c_4+c_5-c_2-c_3)-2c_6(p-pc_1+qc_1)=0, \quad [18]$$

$$\varphi_{\underline{\alpha}}\Lambda^{\rho}_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\rho\underline{\alpha}} \qquad (pc_3+qc_2)(c_4+c_5-c_2-c_3)-2c_6(q-qc_1+pc_1)=0, \quad [19]$$

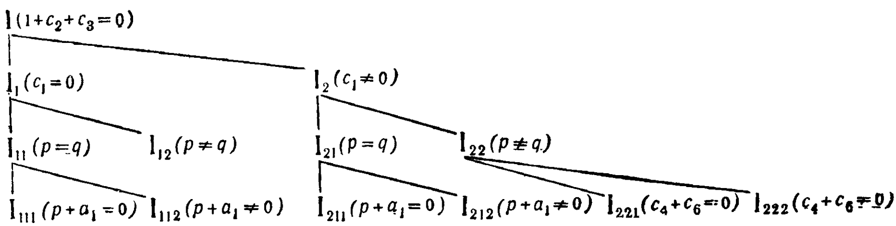
$$\varphi_{\underline{\alpha}}\varphi_{\underline{\nu}}\varphi_{\nu} \qquad (c_2+c_3)N-(c_4+c_5)(M+N)-c_6[(a_1+a_2)(1+$$
$$+c_2+c_3)+(c_4+c_5)(p+q)+M+4N]=0. \quad [20]$$

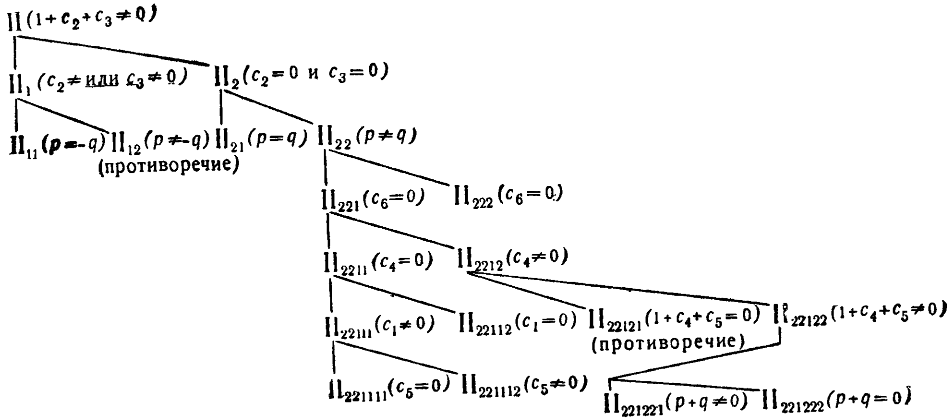
§ 3. Решение алгебраических уравнений

Мы свели задачу нахождения дифференциальных уравнений с тождеством к определению 11 постоянных p, q, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, из которых — как непосредственно следует из уравнений (1) — одну можно выбрать произвольно, так как в постоянные p, q, a_1, a_2, a_3 входит общий произвольный числовой множитель. Таким образом, для определения 10 постоянных мы имеем 20 уравнений [1] — [20].

Решение этой системы уравнений сильно облегчается тем обстоятельством, что она повторно расщепляется вследствие появления уравнений типа $P\cdot Q=0$. Вместо того, чтобы описывать здесь весь процесс решения, приведем схему этих расщеплений, поскольку она удовлетворит всех, кто захочет проконтролировать исследование.

Прежде всего из уравнений [9] и [11] видно, что существуют два главных случая (I и II), в зависимости от того, равна или не равна нулю сумма $1+c_2+c_3$. Для этих двух главных случаев вычисление проводится по следующей схеме расщеплений:





Из двух приведенных схем решения получаются следующие системы коэффициентов (причем сделана подстановка $p = 1$) (см. таблицу на стр. 362—363).

Буквы в таблице означают (произвольные) численные параметры.

По поводу главного случая I следует заметить следующее: симметричное уравнение для I_{111} и I_{211} можно выразить только через величины $g_{\mu\nu}$, и оно согласуется с уравнениями чисто гравитационного поля, основанными только на метрике Римана. Так как здесь четырехмерному тождеству удовлетворяет лишь о д н о симметричное уравнение, то антисимметричное уравнение можно выбирать произвольно. Этот случай, очевидно, не представляет интереса для физических приложений. Поэтому мы не будем на нем останавливаться.

Ввиду отсутствия симметричного уравнения случай I_{222} не рассматривается. Решение I_{112} содержится в I_{12} в качестве частного случая. Далее решение I_{212} представляет собой частный случай решения I_{221}. Итак, от главного случая I остаются только два решения I_{12} и I_{221}, содержащие по два произвольных численных параметра.

Самым общим случаем, выводимым из принципа Гамильтона, является решение I_{12}. Он может быть охарактеризован, например, следующим образом. Допустим, что

$$J = J_1 + \alpha J_2 + \beta J_3,$$

где J_1— скалярная риманова кривизна (непосредственно выражаемая через величины h),

$$J_2 = \varphi_\alpha \varphi^\alpha,$$

и

$$J_3 = S^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}} S^{\alpha}_{\mu\nu} \qquad (S^{\alpha}_{\mu\nu} = \Lambda^{\underline{\alpha}}_{\mu\nu} + \Lambda^{\underline{\mu}}_{\nu\alpha} + \Lambda^{\underline{\nu}}_{\alpha\mu}).$$

Тогда I_{12} получаются из вариационного принципа

$$\delta \left\{ \int hJd\tau \right\} = 0. \tag{10}$$

Случай I_{221} до сих пор был неизвестен. Его симметричное уравнение при $a_1 = -1$ согласуется с уравнениями гравитационного поля общей теории относительности. Следовательно, этот случай, как и I_{12}, является обобщением, но не коренным изменением уравнений первоначальной теории.

После введения тензора Римана

$$P_{\mu\alpha} = R_{\mu\alpha} - \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} R,$$

где величины $R_{\mu\alpha}$ определяются равенством

$$R_{\mu\alpha} = -\Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha,\,\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma,\,\alpha} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\tau}\Gamma^{\tau}_{\alpha\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha}\Gamma^{\tau}_{\sigma\tau},$$

наши уравнения поля (деленные на $1 + q$) после отделения симметричной и антисимметричной частей принимают вид (коэффициенты σ и τ являются численными параметрами)

$$0 = 2S^{\mu\alpha} = 2P_{\underline{\mu}\underline{\alpha}} + \sigma \Big[\varphi_{\underline{\mu};\underline{\alpha}} + \varphi_{\underline{\alpha};\underline{\mu}} - 2g^{\mu\alpha}\varphi_{\underline{\nu};\nu} - (\Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma}\underline{\alpha}} + \Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma}\underline{\mu}})\varphi_\sigma -$$

$$- \sigma\varphi_{\underline{\alpha}}\varphi_{\underline{\mu}} + \left(2 - \frac{\sigma}{2}\right) g^{\alpha\mu}\varphi_{\underline{\nu}}\varphi_\nu \Big], \tag{11}$$

$$0 = 2A^{\mu\alpha} = \tau \frac{1}{h} (hS^{\nu}_{\underline{\alpha}\underline{\mu}})_{,\,\nu} - \sigma (\varphi_{\underline{\alpha},\,\underline{\mu}} - \varphi_{\underline{\mu},\,\underline{\alpha}}). \tag{11a}$$

Они удовлетворяют тождеству

$$0 \equiv S^{\mu\alpha}_{;\,\mu} - S^{\alpha\sigma}\varphi^\sigma - S^{\sigma\tau}\Lambda^{\underline{\tau}}_{\sigma\underline{\alpha}} + \sigma\left(S^{\alpha\sigma}\varphi_\sigma - \frac{1}{2}S^{\sigma\sigma}\varphi_{\underline{\alpha}}\right) + \frac{1}{h}(hA^{\mu\alpha})_{,\,\mu}. \tag{12}$$

Если ввести ковариантные производные геометрии Римана по формулам

$$A^{\mu}_{;\,\sigma} = A^{\mu}_{,\,\sigma} + A^{\alpha}\Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma},$$

причем выполняется соотношение $2\Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} \equiv (\Delta^{\mu}_{\alpha\sigma} + \Delta^{\mu}_{\sigma\alpha}) + (\Lambda^{\underline{\alpha}}_{\underline{\mu}\sigma} + \Lambda^{\underline{\sigma}}_{\underline{\mu}\alpha})$, *Таблица*

Обозначение решения	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	a_1	a_2	a_3	q	Примечания
					Решение I						
I_{111}	0	c_2	$-1-c_2$	c_4	$-1-c_4$	0	-1	-1	2	1	симметричное уравнение содержит только $g^{\mu\nu}$
I_{112}	0	-1	0	0	-1	0	a_1	-1	$1-a_1$	1	частный случай I_{12}
I_{12}	0	-1	0	0	-1	0	a_1	$-q$	$q-a_1$	q	общий случай принципа Гамильтона
I_{211}	c_1	c_2	$-1-c_2$	c_4	$-1-c_4$	0	-1	-1	2	1	содержит I_{111}
I_{212}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{a_1+1}{4}$	$\frac{a_1-3}{4}$	$-\frac{a_1+1}{4}$	a_1	-1	$-a_1+1$	1	
I_{221}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{a_1+1}{2(1+q)}$	$\frac{a_1-1-2q}{2(1+q)}$	$-\frac{a_1+1}{2(1+q)}$	a_1	$-q$	$-a_1+q$	q	
I_{222}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	c_4	c_4-1	c_6	-1	1	0	-1	симметричное уравнение отсутствует

Обозначение решения	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	a_1	a_2	a_3	q	Примечания
					Решение II						
II_{11}	$\frac{1}{2}$	c_2	c_2	1	0	c_6	-1	1	0	-1	симметричное уравнение отсутствует
II_{21}	0	0	0	0	-1	0	a_1	-1	$-a_1+1$	1	частный случай II_{22112}
II_{221111}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	частный случай II_{221221}
II_{221112}	$\frac{1}{2}$	0	0	0	-1	0	-1	1	0	-1	симметричное уравнение отсутствует
II_{22112}	0	0	0	0	-1	0	a_1	$-q$	$-a_1+q$	q	
II_{221221}	$\frac{1}{1-q}$	0	0	$\frac{q}{(2q-1)(1-q)}$	$\frac{q(2q-3)}{(2q-1)(1-q)}$	0	$\frac{q(q-2)}{2q-1}$	$-q$	$\frac{q(1+q)}{2q-1}$	q	
II_{221222}	$\frac{1}{2}$	0	0	c_4	c_4-1	0	-1	1	0	-1	симметричное уравнение отсутствует
II_{222}	$\frac{1}{2}$	0	0	c_4	c_4-1	c_6	-1	1	0	-1	симметричное уравнение отсутствует

то уравнения (11) и тождество (12) принимают более обозримую форму:

$$0 = 2S^{\mu\alpha} = 2P^{\mu\alpha} + \tag{11'}$$

$$+ \sigma\left[\varphi_{\underline{\alpha};\underline{\mu}} + \varphi_{\underline{\mu};\underline{\alpha}} - 2g^{\mu\alpha}\varphi_{\nu;\underline{\nu}} - \sigma\left(\varphi_{\underline{\alpha}}\varphi_{\underline{\mu}} + \frac{1}{2}\, g^{\alpha\mu}\varphi_{\underline{\nu}}\varphi_{\nu}\right)\right],$$

$$0 = 2A^{\mu\alpha} = \tau\frac{1}{h}(hS^{\nu}_{\underline{\alpha\mu}}),_{\nu} - \sigma(\varphi_{\underline{\alpha},\,\underline{\mu}} - \varphi_{\underline{\mu},\,\underline{\alpha}}), \tag{11a'}$$

$$0 \equiv S^{\mu\alpha}_{;\mu} + \sigma\left(S^{\alpha\sigma}\varphi_{\sigma} - \frac{1}{2}S^{\underline{\sigma}\sigma}\varphi_{\underline{\alpha}}\right) + \frac{1}{h}(hA^{\mu\alpha}),_{\mu}. \tag{12'}$$

Что касается главного случая II, то по причинам, указанным в примечании к таблице, в нем остаются только два решения: II_{22112} и II_{221221}. Первое из них содержит два численных параметра и было получено раньше из правила перестановки при дифференцировании. Этому решению можно придать более наглядный вид.

Пусть

$$L^{\alpha}_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} + \alpha(\varphi_{\mu}\delta^{\alpha}_{\nu} - \varphi_{\nu}\delta^{\alpha}_{\mu}) + \beta S^{\alpha}_{\mu\nu},$$

где коэффициенты α и β представляют собой численные параметры. Тогда уравнения поля с соответствующим тождеством имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &G^{\mu\alpha} \equiv L^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}|\nu} - \frac{1}{2}L^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} = 0,\\ &G^{\mu\alpha}_{|\mu} \equiv 0,\\ &(T^{\cdot\mu}_{\cdot|\mu} \equiv T^{\cdot\mu}_{\cdot;\mu} - T^{\cdot\mu}_{\cdot}\varphi_{\mu}), \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

или, после введения тензоров с локальными (латинскими) и координатными (греческими) индексами и тензорных плотностей ($\mathfrak{G}$ или $\mathfrak{L}$),

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{G}^{\mu}_{s} \equiv \mathfrak{L}^{s}_{\underline{\mu\nu},\,\nu} = 0,\\ &\mathfrak{G}^{\mu}_{s,\,\mu} \equiv 0. \end{aligned}\right\} \tag{13a}$$

Случай II_{221221} во всей своей общности еще не был известен. Ранее подробному исследованию подвергался только частный случай II_{221111} ($q = 0$), полученный из правила перестановки при дифференцировании. Этот случай отличается тем, что к нему можно присоединить уравнение $F_{\mu\nu} = 0$.

Что касается нашей первоначальной специализации, выражаемой уравнением (2a), то с помощью вычислений, аналогичных изложенным выше, мы убедились, что единственный заслуживающий рассмотрения случай $A = \pm 1$ не приводит к уравнениям нового типа.

Таким образом, результат всего исследования заключается в следующем. В пространстве с метрикой Римана и абсолютным параллелизмом вида, определяемого соотношениями (1)—(2), существует всего четыре (нетривиальных) различных типа (совместных) уравнений поля. Из них два являются (нетривиальными) обобщениями первоначальных уравнений гравитационного поля, причем в свою очередь один тип уже был известен как следствие принципа Гамильтона [ср. уравнения (10)—(11)]. Два остальных типа описываются в настоящей работе уравнениями (13) и обозначаются как II_{221221}.

Поступила 30 мая 1931 г.

ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ И ЭЛЕКТРИЧЕСТВА*

(Совместно с В. Майером)

До сих пор общая теория относительности была, в первую очередь, рациональной теорией гравитации и метрических свойств пространства. При рассмотрении же электромагнитных явлений она должна была довольствоваться лишь формальным присоединением максвелловской теории к релятивистской схеме. Наряду с квадратичной метрической формой гравитационного поля необходимо было вводить логически независимую от нее линейную форму, коэффициенты которой интерпретируются как потенциалы электромагнитного поля. В тензорных уравнениях гравитационного поля к тензору кривизны без логического обоснования добавлялся со знаком плюс ковариантно записанный максвелловский тензор электромагнитного поля. Это вызывало тем большее сожаление, что теория Максвелла основывается на весьма обширном эмпирическом материале только как полевая теория первого приближения; нельзя упускать из вида, что линейность уравнений Максвелла может не соответствовать действительности и что истинные уравнения электромагнетизма для сильных полей могут отличаться от максвелловских.

Поэтому с появлением общей теории относительности теоретики пытаются построить логически единую теорию полного поля. Нельзя, однако, утверждать, что приложенные до сих пор большие усилия к решению этой проблемы привели к успеху. С появлением квантовой механики от этих попыток в общем отказались, предпологая, что проблема вообще не разрешима в рамках теории поля в существовавшем до сих пор смысле этого слова. В противоположность этому мнению мы изложим здесь теорию, которая представляет, как мы уверены, совершенно удовлетворительное решение, не связанное с квантовыми проблемами. Старые форму-

---

* *Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität.* (Mit W. Mayer). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. phys.-math. Kl., 1931, 541—557.

лы гравитации и электричества удается получить новым единым путем. Оказывается, что уравнения Максвелла, вводимые в общую теорию относительности, должны рассматриваться в качестве строгих уравнений в том же самом смысле, как и гравитационные уравнения для пустого пространства.

Представленная здесь теория психологически связана с известной теорией Калуцы; однако она избегает дополнения физического континуума до континуума пяти измерений. Калуца описывает полное поле в пятимерном пространстве посредством пятимерного метрического тензора $g_{\mu\alpha}$, причем компоненты $g_{11}, \ldots, g_{44}$ с физической точки зрения играют роль гравитационных потенциалов, в то время как компоненты $g_{15}, \ldots, g_{45}$ означают электромагнитные потенциалы, а физический смысл g_{55} не определен. Чтобы оправдать четырехмерность пространственно-временного континуума в соответствии с опытом, континуум рассматривается как «цилиндрический» относительно координаты x^5 $\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^5} = 0\right)$. Естественным путем Калуце удалось получить уравнения, совпадающие в первом приближении с известными уравнениями гравитационного поля и максвелловскими уравнениями электромагнитного поля. При этом он рассматривал в пятимерном пространстве уравнения, полностью аналогичные чисто гравитационному полю общей теории относительности. Уравнения геодезической в пятимерном пространстве должны представлять собой уравнения движения электрически заряженной точечной массы.

Неудовлетворительность теории Калуцы прежде всего в предположении пятимерного континуума, тогда как наблюдаемый нами мир является четырехмерным. Далее, с точки зрения релятивистской пятимерной теории, условие цилиндричности не является естественным даже формально. В этой теории также не удается вычислить константу связи электрической и весомой масс движущейся материальной точки. Наконец, не удается физически истолковать компоненту g_{55} метрического тензора.

Все эти трудности обходятся в предлагаемой ниже теории благодаря тому, что, хотя континуум остается четырехмерным, в нем вводятся векторы с пятью компонентами и соответствующие им тензоры, индексы которых пробегают значения от 1 до 5. Ниже объясняется, как это можно сделать. Если преодолеть формальные трудности, то полная теория получается путем, совершенно аналогичным пути вывода закона чисто гравитационного поля в первоначальной теории относительности или пути получения общего закона поля в теории Калуцы.

§ 1. 4-векторы и 5-векторы

В каждой точке четырехмерного риманова пространства наряду с четырехмерным векторным пространством V_4, образованным из контравариантных и ковариантных векторов, задано еще пятимерное линейное векторное пространство V_5. Компоненты контравариантного вектора в этом последнем пространстве будем обозначать, например, так:

$$a^\iota \ (\iota = 1, \ldots, 5).$$

Ниже символами с греческими индексами будут обозначаться компоненты 5-вектора, а с латинскими — компоненты 4-вектора. Координаты риманова пространства обозначим через x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Пятимерное (линейное) векторное пространство означает, что всякий его (контравариантный) вектор задается пятью числами a^ι и что для этих чисел a^ι определены, во-первых сложение, и, во-вторых, умножение на обычное число (скаляр). Иначе говоря, выражения $\alpha a^\iota + \beta b^\iota$ (α и β — обычные числа) должны быть компонентами некоторого вектора в векторном пространстве V_5, если a^ι и b^ι — векторы. Вектор, все компоненты которого равны нулю, называется нулевым вектором.

Преобразование координат в пространстве V_5 соответствует равенству вида:

$$a^\iota = M^\iota_\tau a^\tau, \tag{1}$$

причем

$$|M^\iota_\tau| \neq 0. \tag{2}$$

При этом M^ι_τ в общем случае является функцией координат x_i. Вследствие однородности и линейности этого преобразования операции суммирования 5-векторов или умножения на скаляр не зависят от конкретного выбора координат.

Величины b_ι, изменяющиеся при преобразовании (1) таким образом, что для любого a^ι произведение

$$b_\iota a^\iota \tag{3}$$

остается инвариантным, называются компонентами ковариантного 5-вектора. Для ковариантных 5-векторов сохраняют смысл операции суммирования и умножения на скаляр. Так же как и в пространстве V_4, где задан метрический тензор,

$$g_{ik} \text{ или } g^{ik} \qquad (g^k_i = \delta^k_i),$$

в пространстве 5-векторов a^ι, b_ι существует метрический тензор (не вырожденный симметричный тензор)

$$g_{\iota\varkappa} \text{ или } g^{\iota\varkappa} \qquad (g^\varkappa_\iota = \delta^\varkappa_\iota),$$

и мы будем говорить просто о 5-векторе «a» в контравариантной записи (a^ι) или ковариантной записи (a_ι), причем

$$\left.\begin{aligned} a_\iota &= g_{\iota\varkappa}a^\varkappa \\ a^\iota &= g^{\iota\varkappa}a_\varkappa \end{aligned}\right\} . \tag{4}$$

До сих пор между 5-векторами (a^ι) в пространстве V_5 и 4-векторами (a^i) в пространстве V_4 не было связи. Теперь мы установим такую связь, вводя «смешанный» тензор

$$\gamma_\iota^k, \tag{5}$$

который вектору (a^ι) в пространстве V_5 сопоставляет вектор (a^k) в пространстве V_4 и, обратно,

$$a^k = \gamma_\iota^k a^\iota, \tag{6}$$

$$b_\iota = \gamma_\iota^k b_k. \tag{7}$$

С помощью метрических тензоров в V_4 и V_5 тензор (5) мы можем записать в следующих эквивалентных формах:

$$\gamma_\iota^k, \ \gamma_{\iota k}, \ \gamma^{\iota k}, \ \gamma_k^\iota. \tag{8}$$

Например,

$$\gamma_k^\iota = g^{\iota\sigma}g_{kl}\gamma_\sigma^l.$$

Рассмотрим сопоставление, определенное формулами (6) и (7), несколько подробнее. Прежде всего находим, что ранг матрицы

$$\| \gamma_\iota^k \|$$

равен четырем. Тогда $\gamma_\iota^k v_k$ (v_k — произвольный вектор) задает четырехмерное векторное пространство в пространстве V_5 — «выделенную плоскость A».

Уравнение

$$\gamma_\iota^k v_k = 0 \tag{9}$$

имеет единственное решение $v_k = 0$, уравнение же

$$\gamma_\iota^k A^\iota = 0 \tag{10}$$

имеет в качестве единственного решения определенный с точностью до множителя вектор A^ι, нормальный к выделенной плоскости A [поскольку для любого v_k произведение $\gamma_\iota^k v_k A^\iota$ обращается в нуль в силу уравнения (10)]. Назовем A^ι «выделенным направлением пространства V_5»

и нормируем его согласно условию[1]

$$g_{\iota\varkappa}A^{\iota}A^{\varkappa}=1. \tag{11}$$

Выделенному направлению A^{ι}, согласно уравнению (10) и равенству (6), в пространстве V_4 сопоставляется нулевой вектор, а вследствие (7) каждому вектору (b_k) в пространстве V_4 сопоставляется вектор выделенной плоскости в пространстве V_5.

5-тензор $(g_{\iota\varkappa})$ вместе со смешанным тензором (γ^{k}_{ι}) определяет 4-тензор $(g_{\iota\varkappa}\cdot\gamma^{\iota}_{i}\gamma^{\varkappa}_{k})$. Мы предположим, что он идентичен метрическому тензору g_{ik} пространства V_4. Тогда получаем соотношение[2]:

$$g_{\iota\varkappa}\gamma^{\iota}_{i}\gamma^{\varkappa}_{k}=g_{ik}\,. \tag{12}$$

Соотношение (12) идентично соотношениям:

$$\gamma_{\varkappa p}\gamma^{\varkappa}_{q}=g_{pq}, \tag{12а}$$

$$\gamma^{p}_{\varkappa}\gamma^{\varkappa}_{q}=\delta^{p}_{q}, \tag{12б}$$

$$g^{\iota\varkappa}\gamma^{p}_{\iota}\gamma^{q}_{\varkappa}=g^{pq}. \tag{12в}$$ и т. д.

Вычислим еще величину

$$\gamma^{p}_{\varkappa}\gamma^{\iota}_{p}=\Sigma^{\iota}_{\varkappa}. \tag{13}$$

После умножения на $\gamma^{\varkappa}_{q}$ в силу (12б) получим

$$\gamma^{\iota}_{q}=\gamma^{\varkappa}_{q}\Sigma^{\iota}_{\varkappa}$$

или

$$\gamma^{\varkappa}_{q}\,(\delta^{\iota}_{\varkappa}-\Sigma^{\iota}_{\varkappa})=0.$$

Далее справедливо соотношение

$$\delta^{\iota}_{\varkappa}-\Sigma^{\iota}_{\varkappa}=\rho^{\iota}A_{\varkappa}. \tag{14}$$

---

[1] Однако это определение заключает в себе некоторое предположение относительно характера метрики пространства V_5.

[2] Если тензор $g_{\varkappa\iota}$ не вырожден, а ранг матрицы $\|\gamma^{\iota}_{p}\|$ равен 4, то g_{pq} также не вырожден.

Доказательство: Покажем, что из соотношения

$$g_{pq}\sigma^{p}=0\ (\alpha)$$

следует $\sigma^{p}=0$. Именно, из (α) в силу (12) имеем

$$0=g_{\varkappa\iota}\gamma^{\varkappa}_{q}\sigma^{\iota}=\sigma_{k}\gamma^{\varkappa}_{q},$$

где мы положили $\sigma^{\iota}=\gamma^{\iota}_{p}\sigma^{p}$. Отсюда следует, что $\sigma_{\varkappa}=\rho A_{\varkappa}$, т. е. $\sigma^{\iota}=\rho A^{\iota}$. Из сравнения обоих выражений для σ^{ι} имеем $\rho A^{\iota}=\gamma^{\iota}_{p}\cdot\sigma^{p}$, откуда после умножения на A_{ι}, согласно уравнению (10), следует $\rho=0$ и далее, согласно (9), — обращение в нуль σ^{p}.

Из равенства (13) после умножения на $A^\varkappa$ находим

$$\Sigma^\iota_\varkappa A^\varkappa = 0.$$

Поэтому после умножения на $A^\varkappa$ соотношение (14) дает

$$A^\iota = \rho^\iota,$$

благодаря чему (14) принимает вид

$$\Sigma^\iota_\varkappa = \delta^\iota_\varkappa - A^\iota A_\varkappa.$$

Следовательно, равенство (13) будет:

$$\gamma^p_\varkappa \gamma^\iota_p = \delta^\iota_\varkappa - A_\varkappa A^\iota, \tag{13а}$$

или, опуская индекс ι,

$$g_{pq}\gamma^p_\varkappa \gamma^q_\iota + A_\varkappa A_\iota = g_{\varkappa\iota}. \tag{13б}$$

В уравнениях (12) и (13б) получены соотношения, связывающие друг с другом метрики пространств V_4 и V_5.

Задаваемая уравнением (7) связь между вектором (b_k) в V_4 и вектором b_ι в V_5 не взаимно однозначна. В самом деле, умножая (7) на γ^ι_r, вследствие соотношения (12б) получаем

$$b_r = \gamma^\iota_r b_\iota,$$

т. е. полностью определенный вектор b_r в пространстве V_4.

Напротив, умножая равенство (6) на γ^σ_k, получаем вследствие (13а)

$$\gamma^\sigma_k a^k = (\delta^\sigma_\iota - A_\iota A^\sigma)\, a^\iota = a^\sigma - \rho A^\sigma, \qquad (\rho = A_\iota a^\iota),$$

т. е.

$$a^\sigma = \gamma^\sigma_k a^k + \rho A^\sigma.$$

Таким образом, 5-вектор (a^σ) определяется 4-вектором (a^k) только с точностью до слагаемого, пропорционального (A^σ).

Тензоры произвольного ранга в V_5 можно определять совершенно аналогично, как и в V_4, учитывая лишь их ковариантность по отношению к преобразованиям типа (1). Таким же образом можно образовать смешанные тензоры с латинскими и греческими индексами. Примером этого может служить сам тензор γ^ι_k. Что касается образования тензоров из тензоров путем сложения, умножения и «свертывания», то пояснений не требуется. Последняя операция может, конечно, относиться только к двум индексам одинакового вида (обоим греческим или обоим латинским).

§ 2. Абсолютное дифференциальное исчисление

Абсолютный дифференциал и абсолютная производная 5-вектора. Преобразование (1)

$$a^\iota = M^\iota_\tau \bar{a}^\tau$$

теряет смысл, если вместо a^ι взять $da^\iota \, (= a^\iota (x^i + dx^i) - a^\iota (x^i))$, поскольку в общем случае M^ι_τ является функцией x^i. Вводя величины с тремя значками, $\Gamma^\iota_{\pi q}$ (ι и π принимают значения от 1 до 5, а q — от 1 до 4), определяем абсолютный дифференциал следующим образом:

$$\mathfrak{d} a^\iota = da^\iota + \Gamma^\iota_{\pi q} a^\pi dx^q; \tag{15}$$

при этом должны выполняться соотношения:

$$\mathfrak{d} a^\iota = M^\iota_\tau \mathfrak{d} \bar{a}^\tau,$$

$$\mathfrak{d} \bar{a}^\tau = d\bar{a}^\tau + \bar{\Gamma}^\tau_{\pi q} \bar{a}^\pi dx^q.$$

Отсюда получаем закон преобразования для Γ:

$$M^\pi_\sigma \Gamma^\iota_{\pi q} = M^\iota_\tau \bar{\Gamma}^\tau_{\sigma q} - M^\iota_{\sigma,\, q}, \qquad \left(M^\iota_{\sigma,\, q} = \frac{\partial}{\partial x^q} M^\iota_\sigma\right). \tag{16}$$

Точно так же определим абсолютный дифференциал ковариантного вектора

$$\mathfrak{d} b_\iota = db_\iota - \Gamma^\pi_{\iota q} b_\pi, \tag{17}$$

причем это определение выбрано так, что

$$d (b_\iota a^\iota) = b_\iota \mathfrak{d} a^\iota_k + a^\iota \mathfrak{d} b_\iota. \tag{18}$$

Тогда обычным способом можно образовать абсолютный дифференциал 5-тензора любого порядка. Абсолютный дифференциал некоторого 5-тензора является 5-тензором того же вида.

Обозначим коэффициент перед dx^q в $\mathfrak{d} a^\iota$ через $a^\iota_{;\, q}$. Тогда будем иметь:

$$a^\iota_{;\, q} = a^\iota_{,\, q} + \Gamma^\iota_{\pi q} a^\pi. \tag{15a}$$

Коэффициент $a^\iota_{;\, q}$ ведет себя при преобразовании координат (x^i), как ковариантный 4-вектор. Поэтому $a^\iota_{;\, q}$ представляет собой смешанный тензор, такой, как, например, γ^ι_q. Таким образом при дифференцировании 5-тензора получается смешанный тензор.

Абсолютное дифференцирование 4-вектора. Если (τ^i) представляет собой некоторый вектор в V_4, то мы будем определять абсолютную производную, как и в геометрии Римана, равенством

$$\tau^i_{;\,q} = \tau^i_{,\,q} + \left\{ {i \atop pq} \right\} \tau^p, \tag{19}$$

где $\left\{ {i \atop pq} \right\}$ — символ Кристоффеля, образованный из метрического тензора g_{ik} пространства V_4. Точно так же $T^{\cdot\cdot}_{\cdot;\,q}$ совпадает с соответствующей производной Риччи, если $T^{\cdot}_{\cdot\cdot}$ имеет только латинские индексы.

Если же $S^{\cdot\cdot}_{\cdot}$ — смешанный тензор, то мы определим

$$S^{\cdot\cdot}_{\cdot;\,q} = S^{\cdot\cdot}_{\cdot,\,q} + \sum (\cdot), \tag{20}$$

где сумма имеет столько же слагаемых, сколько индексов имеет тензор, а именно:

Каждому греческому индексу у $S^{\cdot\cdot\,\tau}_{\cdot\cdot}$ соответствует слагаемое $+\Gamma^{\tau}_{\sigma q} S^{\cdot\cdot\,\sigma}_{\cdot\cdot}$

» » » » $S^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\pi}$ » » $-\Gamma^{\sigma}_{\pi q} S^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\sigma}$

Каждому латинскому индексу у $S^{\cdot\cdot i}_{\cdot\cdot}$ » » $+\left\{ {i \atop pq} \right\} S^{\cdot\cdot d}_{\cdot\cdot}$

» » » » $S^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot p}$ » » $-\left\{ {r \atop pq} \right\} S^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot r}$

Это обобщение абсолютного дифференциального исчисления, введенное впервые Варденом и Бартолотти в формально аналогичном случае, выбрано таким образом, что выполняются следующие правила:

$$\begin{gathered} (A^{\cdot\cdot} B^{\cdot})_{;\,q} = A^{\cdot\cdot}_{;\,q} B^{\cdot} + B^{\cdot}_{;\,q} A^{\cdot\cdot}, \\ (A^{\cdot\cdot} + B^{\cdot\cdot})_{;\,q} = A^{\cdot\cdot}_{;\,q} + B^{\cdot\cdot}_{;\,q}, \\ \rho_{;\,q} = \rho_{,\,q} \qquad (\rho = \text{скаляр}). \end{gathered} \tag{21}$$

Как и в обычном исчислении Риччи, здесь так же имеются равенства

$$0 = g_{ik;\,q} = g^{ik}_{;\,q} = \delta^k_{i;\,q}. \tag{22}$$

Если 5-вектор a^{ι}, определенный вдоль отрезка кривой в пространстве x^i, удовлетворяет условию

$$\delta a^{\iota} = 0 = da^{\iota} + \Gamma^{\iota}_{\pi q} a^{\pi} dx^q,$$

то мы будем называть его вектором, параллельно сдвинутым вдоль отрезка кривой. Тогда 5-вектор изменяется вдоль кривой согласно равенству

$$da^\iota = -\Gamma^\iota_{\pi q} a^\pi dx^q. \tag{23}$$

Далее формула

$$da^i = -\left\{ {i \atop pq} \right\} a^p \, dx^q \tag{24}$$

определяет параллельный перенос 4-вектора (a^i) вдоль кривой.

§ 3. Определение символа $\Gamma^\iota_{\pi q}$

Прежде всего следует считать, что многообразие задано, если заданы тензоры $g_{\iota\varkappa}$ и γ^k_ι, которые одновременно определяют, согласно (12в), и четырехмерный метрический тензор g_{pq}. При заданной гауссовой системе координат тензоры $(g_{\iota\varkappa})$ и (γ^k_ι) произвольны в той степени, в какой это допускается произвольным выбором координат в V_5. Поэтому из 15 + 20 компонент этих тензоров можно произвольно выбирать, согласно (1), 25 компонент, так что при заданной гауссовой системе координат, как и в случае старой теории гравитации, остается только 10 компонент для полного описания многообразия. Последнее можно считать полностью заданным только тогда, когда определены величины $\Gamma^\iota_{\pi q}$, что мы теперь и сделаем. Для этого введем три определения.

Если (a^ι) или (a_ι) — 5-вектор, то имеется соотношение

$$a_\iota = g_{\iota\varkappa} \, a^\varkappa.$$

Образуя абсолютный дифференциал, получаем

$$\mathfrak{d}a_\iota = g_{\iota\varkappa} \, \mathfrak{d}a^\varkappa + a^\varkappa \mathfrak{d}g_{\iota\varkappa}.$$

Из $\mathfrak{d}a_\iota = 0$ только тогда следует $\mathfrak{d}a^\varkappa = 0$ (и обратно), если положить, что $\mathfrak{d}g_{\iota\varkappa}$ обращается в нуль, т. е. что [3]

$$g_{\iota\varkappa;\,q} = 0. \tag{I}$$

Только в силу этого определения (I) имеет смысл высказывание, что абсолютный дифференциал 5-вектора (в определенном направлении) может обращаться в нуль. Это определение можно также заменить равнозначным, а именно: при параллельном переносе двух 5-векторов (a^ι)

[3] Ср. следующую работу (статья 107).— *Прим. ред.*

и $(b^\varkappa)$ остается неизменной форма

$$g_{\iota\varkappa}a^\iota b^\varkappa.$$

Определение (I) дает 60 уравнений для определения 100 величин $\Gamma^\iota_{\pi q}$.

Между вектором (a^ι) выделенной плоскости и сопоставленным ему вектором (a^k) в V_4 имеется одно однозначное соотношение

$$a^\iota = \gamma^\iota_k a^k.$$

Если (a^k) перенести каким-либо образом (не параллельно) вдоль отрезка кривой C четырехмерного пространства, то в соответствии с этим соотношением перенос вектора a^ι выделенной плоскости A будет осуществляться совершенно определенным образом, а именно так, что выполняется равенство

$$\mathfrak{d}a^\iota = \gamma^\iota_k \mathfrak{d}a^k + a^k \mathfrak{d}\gamma^\iota_k. \tag{25}$$

Наше второе определение будет следующим: *при параллельном переносе* (a^k) (*т. е.* $\mathfrak{d}a^k = 0$) *абсолютный дифференциал одновременно переносимого вектора в выделенном направлении* A^ι *должен уменьшаться.* Это означает, что в равенстве (25) для $\mathfrak{d}a^k = 0$ дифференциал $\mathfrak{d}a^\iota$ должен быть пропорционален A^ι или что (при произвольных a^k, dx_q) выражение

$$a^k dx^q \gamma^\iota_{k;\,q}$$

должно быть пропорциональным A^ι. Следовательно, должно выполняться соотношение

$$\gamma^\iota_{k;\,q} = A^\iota F_{kq}, \tag{II}$$

где F_{kq} — 4-тензор второго ранга.

Наше третье определение уточняет второе: ***если производится перенос вектора*** (a^k) ***параллельно самому себе в его собственном направлении*** $(dx^q = \rho a^q)$, *то соответствующий ему в выделенной плоскости вектор* (a^ι) *также претерпевает параллельный перенос* $(\mathfrak{d}a^\iota = 0)$. Это дает условие

$$0 = \gamma^\iota_{k;\,q} \cdot a^k a^q = A^\iota F_{kq} a^k a^q,$$

или, поскольку a^k является произвольным 4-вектором,

$$F_{kq} = -F_{qk}. \tag{III}$$

Совместность условий (I)—(III) будет показана позднее.

Если соотношение (II) умножить на A_ι, то вследствие (11) и (10) получим

$$F_{kq} = A_\iota \gamma^\iota_{k;\,q} = -\gamma^\iota_k A_{\iota;\,q}. \tag{26}$$

Умножая полученное соотношение на γ_σ^k, в силу (13а) имеем

$$\gamma_\sigma^k F_{kq} = -(\delta_\sigma^\iota - A_\sigma A^\iota) A_{\iota;\, q} = -A_{\sigma;\, q} + A_\sigma A^\iota A_{\iota;\, q},$$

или вследствие обращения в нуль выражения $A^\iota A_{\iota;\, q}\left(= \frac{1}{2}(A^\iota A_\iota)_{;\, q}\right)$

$$A_{\sigma;\, q} = \gamma_\sigma^k F_{qk}. \tag{27}$$

Главный результат этого параграфа заключается в следующем. Если Г подчинить очевидным по своей простоте условиям (I) — (III), то они определяются при заданных $g_{\iota\varkappa}$ и γ_ι^k не полностью, а только с точностью до антисимметричного тензора F_{kq}, который остается еще произвольным. Оказывается, что этот тензор вместе с метрическим тензором Римана g_{ik} полностью определяет свойства рассматриваемого многообразия.

Поучительно, что рассматриваемая здесь проблема связана с проблемой вложения одного риманова пространства R_m в другое риманово пространство R_n более высокой размерности. В этой проблеме в каждой точке пространства R_m также существуют две метрики, из которых одна относится к R_m, а другая — к R_n. Пространство R_m соответствует четырехмерному пространству, в то время как роль R_n в нашем случае играет сопоставленное каждой точке пространства R_m векторное пространство $n = 5$ измерений. Далее $x^\iota = x^\iota(y^1 \ldots y^m)$ $(\iota = 1, \ldots, n)$ представляет собой аналитическое представление подпространства. Каждой точке R_m соответствует метрика $g_{pq}dy^p dy^q$ в R_m и метрика $g_{\iota\varkappa}dx^\iota dx^\varkappa$ в R_n. Здесь величина $\frac{\partial x^\iota}{\partial y^p} = \gamma_p^\iota$ является тензором сопоставления. Вектор A^ι, определенный соотношением $\frac{\partial x^\iota}{\partial y^p} A_\iota = 0$, представляет собой нормаль к R_m в рассматриваемой точке. В этом случае так же справедливы соотношения (I) и (II). Тензор F_{kq} в этой проблеме с и м м е т р и ч е н и известен для случая $n = m + 1$ как «вторая основная форма». Таким образом, рассматриваемая нами пространственная структура отличается от рассматриваемой в проблеме вложения многообразий только определением (III). Именно в этом заключается отличие развиваемой нами теории от теории Калуцы.

§ 4. Линия, прямейшая по отношению к V_5

Если производить параллельный перенос вектора (a^ι) пространства V_5 в сопоставленном ему в пространстве V_4 направлении $a^k = \gamma_\iota^k a^\iota$, то этим самым в координатном пространстве будет определена некоторая кривая, к установлению уравнения которой мы теперь и переходим.

При соответствующем выборе параметра t можно положить

$$a^k = \gamma^k_\iota a^\iota = \frac{dx^k}{dt}.$$

Тогда, дифференцируя равенство

$$a^k = \gamma^k_\iota a^\iota$$

и учитывая, что $\delta a^\iota = 0$, получаем

$$\delta a^k = \gamma^k_{\iota;\, r} a^\iota a^r dt,$$

или в силу соотношения (II)

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \left\{ {k \atop pq} \right\} \frac{dx^p}{dt} \frac{dx^q}{dt} = A_\iota a^\iota F^k_r \frac{dx^r}{dt}. \tag{28}$$

Далее имеем

$$\frac{\delta (A_\iota a^\iota)}{\delta t} = A_{\iota;\, p} a^p a^\iota + A_\iota \frac{\delta a^\iota}{\delta t},$$

где второй член в правой части обращается в нуль вследствие равенства $\delta a^\iota = 0$. Но первый член в правой части так же обращается в нуль, поскольку в силу соотношения (27)

$$A_{\iota;\, p} a^p a^\iota = \gamma^k_\iota F_{pk} a^p a^\iota = F_{pk} a^p a^k = 0.$$

Следовательно, величина $A_\iota a^\iota = \rho$ постоянна на кривой, так что уравнение (28) можно записать в виде

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \left\{ {k \atop pq} \right\} \frac{dx^p}{dt} \cdot \frac{dx^q}{dt} = \rho F^k_r \frac{dx^r}{dt} \quad (\rho = \text{const}). \tag{28a}$$

Что касается параметра t. то вдоль кривой $\delta (g_{\iota\varkappa} a^\iota a^\varkappa) = 0$, т. е. $g_{\iota\varkappa} \cdot a^\iota a^\varkappa = \text{const}$, или вследствие равенства (13б)

$$g_{pq} \frac{dx^p}{dt} \cdot \frac{dx^q}{dt} + \rho^2 = \text{const},$$

или

$$g_{pq} \frac{dx^p}{dt} \cdot \frac{dx^q}{dt} = \text{const}.$$

Поэтому, ограничиваясь временно-подобной кривой в уравнении (28а), мы можем ввести в качестве параметра длину дуги, определяемую равенством

$$ds^2 = - g_{pq} dx^p dx^q.$$

Этим также фиксируется входящая в (28а) постоянная ρ.

Уравнение (28a) соответствует релятивистскому уравнению движения электрически заряженной точечной массы точно, а не приближенно, как в теории Калуцы. Особенно замечательно, что отношение ρ электрического заряда к весомой массе является строго постоянным.

§ 5. Кривизна относительно V_5

Условие интегрируемости относительно параллельного переноса

$$\mathfrak{d}a^\sigma = 0,$$

или

$$da^\sigma = -\Gamma^\sigma_{\iota p} a^\iota dx^p,$$

гласит:

$$P^\sigma_{\iota q p} a^\iota = 0, \tag{29}$$

где

$$P^\sigma_{\iota p q} = -\Gamma^\sigma_{\iota q,\, p} + \Gamma^\sigma_{\iota p,\, q} + \Gamma^\sigma_{\tau q}\Gamma^\tau_{\iota p} - \Gamma^\sigma_{\tau p}\Gamma^\tau_{\iota q}. \tag{30}$$

Из равенства (29) следует, что обращение в нуль (30) имеет инвариантный характер. Доказательство того, что $P^\sigma_{\iota p q}$ является смешанным тензором, можно провести следующим образом. Рассмотрим двумерное многообразие $x^q = x^q(u, v)$, в котором в каждой точке определены два направления $\frac{\partial x^i}{\partial u}$, $\frac{\partial x^i}{\partial v}$. Если в рассматриваемой точке и в ее окрестности задать 5-вектор a^ι, то получим

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}v}\left(\frac{\mathfrak{d}a^\iota}{\mathfrak{d}u}\right) - \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}u}\left(\frac{\mathfrak{d}a^\iota}{\mathfrak{d}v}\right).$$

Имеем

$$\frac{\mathfrak{d}a^\iota}{\mathfrak{d}u} = \frac{\partial a^\iota}{\partial u} + \Gamma^\iota_{\pi q} a^\pi \frac{\partial x^q}{\partial u}$$

и далее

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}v}\left(\frac{\mathfrak{d}a^\iota}{\mathfrak{d}u}\right) = \left(\frac{\partial a^\iota}{\partial u} + \Gamma^\iota_{\pi q} a^\pi \frac{\partial x^q}{\partial u}\right)_{,\, v} + \Gamma^\iota_{\sigma p}\left(\frac{\partial a^\sigma}{\partial u} + \Gamma^\sigma_{\pi q} a^\pi \frac{\partial x^q}{\partial u}\right)\frac{\partial x^p}{\partial v}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}v}\left(\frac{\mathfrak{d}a^\iota}{\mathfrak{d}u}\right) - \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}u}\left(\frac{\mathfrak{d}a^\iota}{\mathfrak{d}v}\right) = P^\iota_{\pi p q} a^\pi \frac{\partial x^p}{\partial v} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial u}, \tag{31}$$

откуда виден тензорный характер $P^\iota_{\pi p q}$.

Конечно, в рамках исследуемой нами пространственной структуры существует образованная обычным образом из g_{ik} риманова кривизна, так же как и определяемые g_{ik} геодезические линии. Однако новый результат, полученный здесь, в том и состоит, что физические законы связаны с метрикой, которая возникает при параллельном переносе 5-векторов, определяемом величинами Г.

С другой стороны, ясно, что полученные таким образом математические образы могут входить в физические законы лишь постольку, поскольку они относятся к четырехмерному пространству, или касательному пространству V_4. Это связано с тем, что окончательное выражение может быть выражено только через 4-тензоры g_{ik} и F_{ik}, так что в результат не могут входить γ^ι_k и $g_{\iota\varkappa}$ [см., например, уравнение (28a)]; это будет подробнее пояснено в следующем параграфе.

По этим причинам целесообразно попытаться найти соотношение, возникающее между 5-кривизной (30) и (римановой) 4-кривизной. Будем исходить из соотношений (II) и (27) [4]

$$\gamma_{\iota k;\,q} = A_\iota F_{kq}, \tag{II}$$

$$A_{\iota;\,p} = \gamma_{\iota k} F^k_p. \tag{27}$$

Еще раз беря ковариантную производную, получаем

$$\gamma_{\iota k;\,q;\,p} = F_{kq;\,p} A_\iota + F_{kq} F^r_p \gamma_{\iota r}, \tag{IIa}$$

$$A_{\iota;\,p;\,q} = F_{kq} F^k_p A_\iota + \gamma_{\iota k} F^k_{p;\,q}, \tag{27a}$$

откуда

$$\gamma_{\iota k;\,q;\,p} - \gamma_{\iota k;\,p;\,q} = A_\iota (F_{kq;\,p} - F_{kp;\,q}) + \gamma_{\iota r} (F_{kq} F^r_p - F_{kp} F^r_q), \tag{IIб}$$

$$A_{\iota;\,p;\,q} - A_{\iota;\,q;\,p} = \gamma_{\iota k} (F^k_{p;\,q} - F^k_{q;\,p}). \tag{27б}$$

После некоторых вычислений для левых частей последних уравнений получаем

$$\gamma_{\iota k;\,q;\,p} - \gamma_{\iota k;\,p;\,q} = P^\sigma_{\iota q p} \gamma_{\sigma k} - R^r_{kpq} \gamma_{\iota r}, \tag{32}$$

$$A_{\iota;\,p;\,q} - A_{\iota;\,q;\,p} = P^\sigma_{\iota p q} A_\sigma, \tag{33}$$

где R — риманова 4-кривизна:

$$R^r_{kqp} = -\left\{ {r \atop kq} \right\}_{,\,p} + \left\{ {r \atop kp} \right\}_{,\,q} + \left\{ {r \atop tq} \right\} \left\{ {t \atop kp} \right\} - \left\{ {r \atop tp} \right\} \left\{ {t \atop kq} \right\}. \tag{34}$$

[4] Из соотношений (II) и (27) однозначно определяется Г. Если $F_{pq} + F_{qp} = 0$, то, как легко видеть, выполняются (I) и (III), чем доказывается их совместность. Следует доказать лишь справедливость соотношения (I), что легко выполнить с помощью равенства (13б).

Из уравнений (IIб), (27б), (32) и (33) получаем искомые соотношения

$$P^{\sigma}_{\iota qp}\gamma_{\sigma k} = A_{\iota}(F_{kq;\,p} - F_{kp;\,q}) + \gamma_{\iota r}\{R^{r}_{kpq} + F_{kq}F^{r}_{p} - F_{kp}F^{r}_{q}\}, \qquad (35)$$

$$P^{\sigma}_{\iota qp}A_{\sigma} = \gamma_{\iota r}(F^{r}_{q;\,p} - F^{r}_{p;\,q}). \qquad (36)$$

Умножая соотношение (35) на $\gamma^{\tau k}$, принимая во внимание соотношение (36) и равенства

$$\gamma_{\sigma k}\gamma^{\tau k} = \gamma^{k}_{\sigma}\gamma^{\tau}_{k} = \delta^{\tau}_{\sigma} - A_{\sigma}A^{\tau},$$

получаем

$$P^{\tau}_{\iota qp} = -\gamma_{\iota r}A^{\tau}(F^{r}_{p;\,q} - F^{r}_{q;\,p}) + \gamma^{\tau k}A_{\iota}(F_{kq;\,p} - F_{kp;\,q}) + \\ + \gamma_{\iota r}\gamma^{\tau k}(R^{r}_{kpq} + F_{kq}F^{r}_{p} - F_{kp}F^{r}_{q}). \qquad (37)$$

Следует еще заметить, что для 5-тензора кривизны справедливо также тождество (Бианки)

$$P^{\tau}_{\iota pq;\,r} + P^{\tau}_{\iota qr;\,p} + P^{\tau}_{\iota rpq} \equiv 0. \qquad (38)$$

Наиболее просто это доказывается, если в рассматриваемой точке символ $\left\{\begin{matrix} r \\ pq \end{matrix}\right\}$ обратить в нуль с помощью преобразования координат (x^{i}) и преобразования (1) 5-координат $\Gamma^{\tau}_{\sigma q}$, что возможно в силу соотношения (16).

Далее из (37) свертыванием получаем

$$P_{\iota p} = \gamma^{q}_{\tau}P^{\tau}_{\iota qp} = A_{\iota}F^{k}_{p;\,k} + \gamma_{\iota r}(R^{r}_{p} - F_{kp}\cdot F^{kr}), \qquad (39)$$

$$P = \gamma^{\iota p}P_{\iota p} = R - F_{kp}F^{kp} \qquad (40)$$

и

$$U_{\iota p} = P_{\iota p} - \frac{1}{4}\gamma_{\iota p}(P + R) = A_{\iota}F^{k}_{p;\,k} + \gamma^{r}_{\iota}\left\{\left(R_{rp} - \frac{1}{2}g_{rp}R\right) - \\ - \left(F_{kr}F^{k}_{p} - \frac{1}{4}g_{rp}F_{kl}F^{kl}\right)\right\}. \qquad (41)^{5}$$

Наконец, умножая (37) на $-A_{\tau}\gamma^{\iota}_{i}$, совершая циклическую перестановку индексов ipq и беря полусумму, получаем антисимметричный тензор

$$N_{piq} = F_{pi;\,q} + F_{iq;\,p} + F_{qp;\,i} = F_{pi,\,q} + F_{iq,\,p} + F_{qp,\,i}. \qquad (42)$$

[5] В определение (41) введен риманов тензор R, хотя его и нельзя получить путем алгебраических операций из тензора 5-кривизны. Оправдание этому дает тождество (45), в котором производная от R выражена (неявно) через 5-тензоры.

§ 6. Уравнения поля

Ниже мы будем пользоваться обоими известными тождествами

$$\left(R_r^p - \frac{1}{2}\delta_r^p R\right)_{;\,p} \equiv 0, \tag{43}$$

$$\left(F_{kr}F^{kp} - \frac{1}{4}\delta_r^p F_{kl}F^{kl}\right)_{;\,p} \equiv F_{kr}F^{kp}_{;\,p} + \frac{1}{2}\left(F_{pk;\,r} + F_{kr;\,p} + F_{rp;\,k}\right)F^{kp}, \tag{44}$$

первое из которых проще всего получить из тождества Бианки для обычного тензора кривизны двукратным свертыванием, а второе легко проверяется непосредственно. С помощью тождеств (43) и (44), а также соотношений (II) и (27) получаем из (41), беря дивергенцию по индексу p,

$$U^p_{\iota;\,p} - \frac{1}{2}\gamma^r_\iota N_{rkp}F^{kp} \equiv 0. \tag{45}$$

Если в качестве уравнений поля взять

$$U_{\iota p} = 0, \tag{46}$$

$$N_{rkp} = 0 = F_{rk,\,p} + F_{kp,\,r} + F_{pr,\,k}, \tag{47}$$

то они будут связаны тождеством (45). Умножая (41), с одной стороны, на γ^ι_q, а с другой стороны — на A^ι, видим, что уравнение (46) распадается на уравнения

$$\left(R_{qp} - \frac{1}{2}g_{qp}R\right) - \left(F_{kq}F^k_p - \frac{1}{4}g_{qp}F_{kl}F^{kl}\right) = 0, \tag{46а}$$

$$F^{pk}_{;\,k} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}F^{pk}\right) = 0, \tag{46б}$$

которые, так же как уравнение (47), содержат только g_{ik} и F_{ik}. Таким образом мы приходим к тем самым уравнениям, которые до сих пор рассматривались в общей теории относительности как законы гравитационного и электрического полей. Благодаря уравнению (46) уравнения гравитационного поля и первая группа уравнений Максвелла объединены в единую систему уравнений, и все три группы уравнений связаны с «кривизной». Корпускулы в этой теории отсутствуют или (как это следует из тех же уравнений) они описываются как сингулярности.

§ 7. Введение специальных координат в пространстве V_5

Среди всех возможных координат в V_5 наиболее естественными представляются те, которые связаны со специальным выбором γ^{ι}_{p} и A^{ι} — заменой соответственно на δ^{ι}_{p} и δ^{ι}_{5} (δ^{ι}_{p} равно 1 при $\iota = p$ и 0 при $\iota \neq p$; δ^{ι}_{5} равно 1 при $\iota = 5$ и 0 при $\iota \neq 5$).

Если новые 5-координаты преобразуются по закону

$$a^{\iota} = M^{\iota}_{\tau}\overline{a}^{\tau},$$

то

$$\gamma^{\iota}_{p} = M^{\iota}_{\tau}\overline{\gamma}^{\tau}_{p}.$$

$$A^{\iota} = M^{\iota}_{\tau}\overline{A}^{\tau}.$$

Если мы хотим получить $\overline{\gamma}^{\tau}_{p} = \delta^{\tau}_{p}$, $\overline{A}^{\tau} = \delta^{\tau}_{5}$, то нам необходимо лишь выбрать

$$M^{\iota}_{p} = \gamma^{\iota}_{p},$$

$$M^{\iota}_{5} = A^{\iota}.$$

Тогда из соотношения

$$\overline{b}_{\varkappa} = M^{\iota}_{\varkappa} b_{\iota}$$

следуют также равенства

$$\overline{\gamma}^{p}_{\varkappa} = \delta^{p}_{\varkappa} = \begin{cases} 1 & \text{при } \varkappa = p, \\ 0 & \text{при } \varkappa \neq p, \end{cases}$$

$$\overline{A}_{\varkappa} = \delta^{5}_{\varkappa} = \begin{cases} 1 & \text{при } \varkappa = 5, \\ 0 & \text{при } \varkappa \neq 5. \end{cases}$$

Опуская после преобразования штрихи, имеем

$$\gamma^{\iota}_{p} = \delta^{\iota}_{p},\ \gamma^{p}_{\iota} = \delta^{p}_{\iota},\ A^{\iota} = \delta^{\iota}_{5},\ A_{\iota} = \delta^{5}_{\iota}. \qquad (48)$$

Если теперь произведем преобразование пространственных координат x^{ι}, то для сохранения равенств (48) необходимо преобразовать одновременно 5-координаты таким образом, чтобы a^{ι} (или a_{ι}) ($\iota = 1, 2, 3, 4$) вели себя как компоненты контравариантного (или ковариантного) вектора, в то время как a^5 (или a_5) — как инвариант.

Однако было бы ошибочным заключить, что 5-вектор есть не что иное как некоторая «сумма» 4-вектора и скаляра. Две величины только тогда равны, когда они дают одинаковый результат при всех операциях. Однако абсолютный дифференциал 5-вектора отличается от абсолютного дифференциала равной ему «суммы» 4-вектора и скаляра.

В новой системе координат сам способ описания может привести к недоразумению, если мы не будем отличать четыре первые компоненты 5-вектора a^ι от численно равных им компонент сопоставленного ему 4-вектора $a^k = \gamma^k_\iota a^\iota$. Обозначим через $a^{\underline{k}}$ четыре первые компоненты 5-вектора a^k. Тогда справедливо численное равенство

$$a^{\underline{k}} = a^k, \tag{49}$$

заменяющее соотношение

$$\gamma^k_\iota a^\iota = a^k.$$

Аналогично будем пользоваться обозначением $T^{\cdot}_{\cdot\cdot\cdot\underline{k}}$, если речь будет идти о четырех первых компонентах тензора (по индексу k) $T^{\cdot}_{\cdot\cdot k}$.

В нашей системе координат уравнение выделенной плоскости A имеет вид $a^5 = a_5 = 0$. Из равенств $A_\iota a^\iota = g_{\iota\varkappa} a^\iota a^\varkappa = 0$ для векторов плоскости A получаем

$$g_{5\varkappa} = 0, \tag{50}$$

а из равенства $g_{\iota\varkappa} A^\iota A^\varkappa = 1$ находим

$$g_{55} = 1. \tag{51}$$

Равенство (12) принимает здесь вид

$$g_{\underline{i}\underline{k}} = g_{ik}. \tag{52}$$

Рассмотрим параллельный перенос 5-вектора, характеризуемый величиной Г. Из определения (I) ($g_{\iota\varkappa;\,q} = 0$) с учетом равенств (50) — (52) имеем

$$\begin{aligned} g_{jk,\,q} - \Gamma^s_{\underline{j}q} g_{sk} - \Gamma^s_{\underline{k}q} g_{js} &= 0, \\ -\Gamma^s_{5q} g_{sk} - \Gamma^5_{\underline{k}q} &= 0, \\ -\Gamma^5_{5q} &= 0. \end{aligned} \tag{53}$$

Из определения (II) следует, что при параллельном переносе 4-вектора a^i инвариантное приращение $\mathfrak{d}a^\iota$ сопоставленного ему в выделенной плоскости A вектора $a^\iota = \gamma^\iota_k a^k$ лежит в направлении A^ι, т. е. что при нашем выборе координат дифференциал $\mathfrak{d}a^{\underline{i}}$ должен обращаться в нуль.

Таким образом, из уравнения

$$da^{\underline{i}} + \left\{ {i \atop pq} \right\} a^p\, dx^q = 0$$

должно следовать

$$da^{\underline{i}}+\Gamma^{\underline{i}}_{\underline{p}q}a^{\underline{p}}dx^{q}=0 \qquad (a^5=0),$$

или, ввиду равенства $a^{\underline{i}}=a^i$,

$$\Gamma^{\underline{i}}_{\underline{p}q}=\left\{ {i \atop pq} \right\}. \tag{54}$$

Определение (III) гласит: если вектор a^k переносится параллельно самому себе, то инвариантное приращение $\mathfrak{d}a^{\iota}$ сопоставленного ему в плоскости A вектора $a^{\iota}=\gamma^{\iota}_{k}a^k$ обращается в нуль. Таким образом, наряду с обращением в нуль $\mathfrak{d}a^{\underline{i}}$ должно равняться нулю также и $\mathfrak{d}a^5$:

$$\mathfrak{d}a^5=da^5+\Gamma^5_{\underline{p}q}a^{\underline{p}}a^q=0,$$

откуда вследствие $a^5=0$ (и $da^5=0$) и $a^{\underline{p}}=a^p$ имеем

$$\Gamma^5_{\underline{p}q}=-\Gamma^5_{\underline{q}p}, \tag{55}$$

т. е. $\Gamma^5_{\underline{p}q}$ представляет собой величину, обозначенную нами через F_{pq} (напряженность электромагнитного поля). Соотношения (53), (54) и (55) показывают, что Γ полностью определяется через g_{ik} и F_{ik} (при фиксированной системе координат в пространстве V_5).

Использование специальных координат имеет то преимущество, что исключение лишних переменных поля позволяет записать уравнения проще. Однако для этого нужно выделять индекс «5», благодаря чему число уравнений увеличивается и внесение естественных формальных связей затрудняется. Поэтому в нашем рассуждении мы с самого начала пользовались общими координатами в V_5. Но следует заметить, что вся теория возникла благодаря рассуждениям, подобным проведенным в этом параграфе. Мы не будем повторять всех рассуждений и результатов в специальной системе координат.

§ 8. Уравнения поля и закон движения

Следует еще показать, что постулированные в § 6 уравнения поля находятся в естественной связи с установленным независимо от них в § 4 законом движения. При этом следует принять во внимание, что теория еще не включает материальных частиц, которые должны поэтому рассматриваться как сингулярные точки. Однако вместо этого можно для простоты ввести в уравнения фиктивный член, который задает плотность материи; благодаря этому при рассуждениях можно пользоваться непрерывными функциями, что проще с точки зрения вычислений.

Предположим, что всюду, в том числе и там, где имеется налицо «материя», справедливо уравнение (47) (отсутствие магнитных полюсов). Тогда из уравнения (45) следует, что всюду выполняется уравнение

$$U^{p}_{\iota;p} = 0. \tag{56}$$

В правую же часть уравнения (46) мы должны ввести фиктивный смешанный тензор материи. По аналогии с первоначальной формулой, которая представляла в старой теории гравитации (пылевидную) материю при давлении, равном нулю, вместо уравнения (46) подставим

$$U^{\iota p} = \mu \xi^{\iota} \xi^{p}. \tag{57}$$

Величина (ξ^{ι}) представляет собой 5-вектор, которому сопоставлен 4-вектор ($\gamma^{p}_{\iota}\xi^{\iota}$) или ($\xi^{p}$). В силу (56) имеем

$$(\mu \xi^{p})_{;p}\, \xi^{\iota} + \mu \xi^{\iota}_{;p} \xi^{p} = 0. \tag{58}$$

Из соотношения (57) следует, что μ определено лишь тогда, когда нормировкой определена «величина» ξ^{ι}, т. е. если, например, положить

$$\xi^{\iota}\xi_{\iota} = \text{const}. \tag{59}$$

Тогда из уравнения (58) после умножения на ξ_{ι} и с учетом равенств $\xi_{\iota}\xi^{\iota}_{;p} = \frac{1}{2}(\xi_{\iota}\xi^{\iota})_{;p} = 0$ имеем

$$(\mu \xi^{p})_{;p} = 0, \tag{60}$$

благодаря чему (58) принимает вид

$$\xi^{\iota}_{;p}\xi^{p} = 0. \tag{61}$$

Рассмотрим теперь те кривые в координатном пространстве, которые «касательны» полю ξ^{p}. При соответствующем выборе параметра t система

$$\frac{dx_p}{dt} = \xi^{p}(x_1, \ldots, x_4) \tag{62}$$

является системой дифференциальных уравнений, определяющих эти кривые.

Тогда из уравнения (61) следует, что вдоль такой кривой $\delta\xi^{\iota} = 0$, т. е. ξ^{ι} переносится параллельно сопоставленному ему направлению ($\xi^{p} = \gamma^{p}_{\iota}\xi^{\iota}$).

Появляющиеся при этом переносе кривые (62) рассмотрены в § 4 и удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} k \\ pq \end{matrix} \right\} \frac{dx^p}{dt} \frac{dx^q}{dt} = \rho F^k_r \frac{dx^r}{dt} \quad (\rho = \text{const}). \tag{63}$$

Из уравнения (60) можно теперь показать, что эти кривые представляют собой «траектории материи». Именно, если рассмотреть один из пучков таких кривых, то из уравнения (60) (уравнение непрерывности) следует, что равенство нулю или отличие от нуля плотности μ сохраняется вдоль пучка или, точнее, что вдоль такого пучка «масса» постоянна, что, по существу, эквивалентно высказанному утверждению.

Изложенная здесь теория приводит единым путем к уравнениям гравитационного и электромагнитного полей. Однако она ничего не дает для понимания природы корпускул, как и для понимания установленных в квантовой механике результатов.

Поступила 2 декабря 1931 г.

107

ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ И ЭЛЕКТРИЧЕСТВА. II*

(Совместно с В. Майером)

В работе, появившейся в прошлом году [1], мы показали, что благодаря введению 5-векторов в четырехмерном пространстве возникает пространственная структура, естественно ведущая к единой теории гравитации и электричества. Получаемые при этом уравнения электромагнитного поля совпадают с записанными в релятивистской форме уравнениями Максвелла для пустого пространства. Эти уравнения не допускают отличных от нуля плотностей электрического заряда и тока; поэтому они непригодны внутри электрических корпускул. В такой теории электрические корпускулы могут фигурировать только как сингулярности поля. Однако, по-нашему мнению, удовлетворительная теория поля должна избегать введения сингулярностей при описании полного поля, т. е. должна включать в себя и поля внутри корпускул.

Поэтому мы поставили вопрос, не допускает ли рассмотренная нами пространственная структура обобщения, приводящего к уравнениям электромагнитного поля с отличной от нуля плотностью электрического заряда. Ниже будет показано, что имеется совершенно естественное обобщение такого рода, которое позволяет получить совместную систему уравнений поля. Вопрос пригодности этой системы уравнений для описания действительности здесь еще не рассматривается.

Единственное изменение по сравнению с ранее рассмотренной пространственной структурой состоит в том, что отпадает фигурирующая в § 3 цитированной выше работы гипотеза (II). Оказывается, что установление совместных уравнений поля для этой пространственной структуры связано с четырехмерностью континуума.

---

* *Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität. II.* (Mit W. Mayer). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1932, 130—137.

1 Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1931, 541. (Статья 106.— *Ред.*)

§ 1. Пространственная структура

В цитированной работе следует оставить без изменения §§ 1 и 2, так же как и гипотезу (I) из § 3, которая утверждает:

$$g_{\iota\varkappa;\,q} = 0. \tag{I}$$

Вместо же остальной части § 3 цитированной работы следует сказать следующее.

Производная $\gamma^{\iota}_{k;\,q}$ должна всегда представляться в форме

$$\gamma^{\iota}_{k;\,q} = A^{\iota} F_{kq} + \gamma^{\iota r} V_{rkq}, \tag{1}$$

где F_{kq}, V_{rkq} — тензоры с заранее неизвестными свойствами симметрии. Из этого равенства вследствие обращения в нуль $\gamma^{\iota}_{k} A_{\iota}$, а также $(\gamma^{\iota}_{k} A_{\iota})_{;q}$, следует

$$A_{\iota;\,q} = -\gamma^{k}_{\iota} F_{kq}. \tag{2}$$

Равенство нулю $g_{lk;q} \equiv (\gamma_{\iota l}\gamma^{\iota}_{k})_{;\,q}$ требует, с учетом формулы (1), антисимметрии V_{rkq} по первым двум индексам. Этим обеспечивается также обращение в нуль ковариантной производной $g^{\iota\varkappa} (\equiv A^{\iota} A^{\varkappa} + \gamma^{\iota}_{k}\gamma^{\varkappa k})$, что необходимо потребовать в силу (I).

Теперь рассмотрим 4-вектор a^k и сопоставленный ему в «выделенной плоскости» 5-вектор

$$a^{\iota} = \gamma^{\iota}_{k} a^{k}.$$

Если произвести перенос a^k вдоль некоторой кривой, то a^{ι} также переносится и появляется соотношение

$$\delta a^{\iota} = \gamma^{\iota}_{k} \delta a^{k} + (A^{\iota} F_{kq} + \gamma^{\iota r} V_{rkq})\, a^{k}\, dx_{q}.$$

Согласно нашей гипотезе (III) [гипотеза (II) здесь отпадает], дифференциал δa^{ι} должен обращаться в нуль, если a^k переносится параллельно самому себе, т. е. если δa^k обращается в нуль и dx_q пропорционален a^q. Поэтому должны выполняться соотношения

$$F_{kq} = -F_{qk},$$

$$V_{rkq} = -V_{rqk}.$$

Так как тензор V_{rkq} антисимметричен также по первым двум индексам, то он вообще антисимметричен.

Следует заметить, что вывод § 4 цитированной работы о том, что линия, характеризующаяся параллельным переносом 5-вектора в сопоставленном ему направлении, дает классическое уравнение движения электрически заряженной точечной массы, остается здесь в силе.

§ 2. Кривизна и уравнения поля

Если для этой обобщенной структуры найти 5-кривизну, то с помощью изложенного в § 5 цитированной работы методу получим

$$P_{\sigma\iota qp} = (\gamma^k_\sigma A_\iota - \gamma^k_\iota A_\sigma)(F_{kq;\,p} - F_{kp;\,q} + V_{rkq}F^r_p - V_{rkp}F^r_q) +$$
$$+ \gamma^k_\sigma \gamma^r_\iota (R_{krqp} - F_{kq}F_{rp} + F_{kp}F_{rq} - V_{tkq}V^t_{rp} + V_{tkp}V^t_{rq} - V_{krq;\,p} + V_{krp;\,q}). \tag{3}$$

Умножение на $\gamma^{\sigma q}$ (однократное свертывание) приводит к

$$P_{\iota p} = \gamma^r_\iota (R_{rp} - F_{rq}F^q_p - V_{t_q r}V^{tq}_p + V^q_{rp;\,q} + A_\iota (F^q_{p;\,q} - V_{prq}F^{rq}). \tag{4}$$

Выполняя еще раз свертывание, получаем

$$P = R - F_{rq}F^{rq} - V_{rqp}V^{rqp}. \tag{5}$$

Перейдем теперь к установлению уравнений поля. Они не могут выбираться произвольно, например приравниванием нулю простейшего выражения, полученного алгебраически из 5-кривизны. Выбираемая система уравнений должна удовлетворять по крайней мере условиям совместности: переменные должны быть определены полностью, но так, чтобы любое решение в некотором сечении (например, $x_4 = \text{const}$) можно было продолжить в согласии с системой уравнений.

Следуя цитированной работе, прежде всего положим, что должна выполняться система уравнений

$$G_{\iota p} \equiv P_{\iota p} - {}^1/_4 \gamma_{\iota p} P = 0. \tag{6}$$

Тогда, в частности, антисимметричная часть выражения $\gamma^\iota_q G_{\iota p}$, которое мы назовем H_{qp}, должна обращаться в нуль:

$$0 = V^{rpq}_{\ \ \ ;\,q} \ (\equiv H^{rp}). \tag{7}$$

Из уравнения (7) можно заключить, что тензор V может быть выражен через скаляр. Используя известный антисимметричный псевдоскаляр

$$\eta^{lrpq} \ (\equiv (-g)^{-1/2}\delta^{lrpq})$$

(здесь $\delta^{lrpq} = \pm 1$ в зависимости от того, четным или нечетным числом перестановок получено $lrpq$ из 1 2 3 4), можно положить

$$V^{rpq} = \eta^{lrpq}\varphi_l.$$

Поскольку ковариантная производная от η обращается в нуль, то

$$V^{rpq}_{;q} = \eta^{lrpq}\varphi_{l;q},$$

что равно нулю, только если

$$0 = \varphi_{l;q} - \varphi_{q;l} = \varphi_{l,q} - \varphi_{q,l} = 0.$$

Следовательно, φ_l имеет вид $\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}$. Таким образом, полевые переменные первоначальной теории описываются фактически только одной переменной.

Теперь разобьем уравнение (6) на две системы уравнений:

$$0 = A^{\iota}G_{\iota p} = G_p = F^q_{p;q} - V_{prq}F^{rq}, \tag{6а}$$

$$0 = \gamma^{\iota}_r G_{\iota p} = G_{qp} = \left(R_{qp} - \frac{1}{4} g_{qp}R\right) - (F_{sq}F^s_p - {}^1/_4 g_{qp}F_{st}F^{st}) - \\ - \left(V_{stq}V^{st}_p - \frac{1}{4} g_{qp}V_{str}V^{str}\right). \tag{6б}$$

Уравнение (6а) соответствует первой группе уравнений Максвелла, где второй член играет роль плотности электрического тока. Уравнение (6б) соответствует уравнениям гравитационного поля, но без соответствующего скалярного уравнения, так как свертка (6б) дает тождественный нуль.

Чтобы получить вторую группу уравнений Максвелла, построим из $-A^{\sigma}\gamma^{\iota}_r P_{\sigma\iota qp} (= 2P_{rqp})$ путем циклической перестановки индексов антисимметричное выражение

$$G_{rqp} = P_{rqp} + P_{qpr} + P_{prq}$$

(или, следуя введенному Схоутеном сокращенному способу записи, $P_{[rqp]}$) и положим его равным нулю. Тогда при аналогичной записи получим [2]

$$0 = G_{rqp} = F_{[rq;p]} + V_{s[rq}F^s_{p]}. \tag{8}$$

[2] Существует также совместная система уравнений, в которой вместо (8) полагается

$$0 = F_{[rq;p]} + \beta V_{s[rq}F^s_{p]} \equiv G_{rqp},$$

где β — постоянная. В этом варианте формально выделен случай $\beta = 0$. Именно тогда вместо вывода второй группы Максвелла из тензора кривизны появляется возможность введения 4-потенциала и можно избежать появления магнитного 4-тока. В настоящей работе этот случай из физических соображений не рассматривается.

У нас еще отсутствует как скалярное уравнение гравитационного поля, так и уравнение, определяющее аналитическое продолжение для φ. Эти отсутствующие уравнения вытекают из условия совместности полной системы уравнений, которая в свою очередь основывается на существовании некоторых тождеств, как это будет показано позднее.

Из уравнения (6а) следует

$$G^{p}_{;\,p} \equiv F^{pq}_{;\,q;\,p} - V^{prq}_{;\,p} F_{rq} - V^{prq} F_{rq;\,p}.$$

Первый член в правой части тождественно обращается в нуль. Второй член в силу (7) можно записать как $-F_{rq}H^{rq}$; третий можно записать в виде $-\frac{1}{3} V^{prq} F_{[pr;\,q]}$ и ввиду соотношения (8) — в виде $-\frac{1}{3} V^{prq} G_{prq} + V^{prq} V_{spr} F^{s}_{q}$, где последний член обращается в нуль из соображений симметрии. Таким образом получаем тождество

$$G^{p}_{;\,p} + H^{rq} F_{rq} + \frac{1}{3} G^{prq} V_{prq} \equiv 0. \tag{9}$$

Аналогичное рассмотрение второй группы уравнений Максвелла (8) также приводит к тождеству. Введем сначала удобный для вычисления способ записи. Любой несимметричный по индексам ковариантный или контравариантный тензор $A_{ik\ldots}$ имеет антисимметричную часть $\{A_{ik\ldots}\}$, определяющуюся следующим образом. Образуем из всех тензоров, получающихся перестановкой индексов, многочлен, взяв каждый тензор со знаком «+» или «—» в зависимости от того, четна или нечетна соответствующая перестановка. Применяя этот способ записи, получаем

$$\{G_{rqp;\,t}\} \equiv 3\{F_{rq;\,p;\,t}\} + 3\{V_{srq;\,t} F^{s}_{p}\} + 3\{V_{srq} F^{s}_{p;\,t}\}.$$

Первый член в правой части обращается в нуль в силу антисимметрии тензора F. Второй член, который может быть записан в виде $3\{V^{s}_{rq;t} F_{sp}\}$, мы вычислим в некоторой точке пространства сначала для локальной системы координат, в которой $g_{ik} = \delta_{ik}$. Тогда при суммировании по s ввиду антисимметрии тензоров следует принимать во внимание только члены с $s = t$, так что можно записать в (первой) форме $3\{V^{s}_{rq;\,s} F_{tp}\}$ $(s = t)$. Однако согласно определению $\{\ \ \}$, их можно также записать в виде $-3\{V^{s}_{rq;\,p} F_{st}\}$ или $3\{V^{s}_{rq;\,p} F_{ts}\}$, где мы приняли во внимание лишь члены с $s = p$. Поэтому способ записи $3\{V^{s}_{rq;\,s} F_{tp}\}$ $(s = p)$ (вторая форма) правилен. Соединение обоих форм дает $(^3/_2)\{V^{s}_{rq;\,s} F_{tp}\}$, причем теперь на индекс суммирования s не накладывается никаких ограничений. Это может быть записано [ср. (8)] также в виде

$(^3/_2)\{H_{rq}F_{tp}\}$. Этот способ записи не зависит, конечно, от выбора координат.

Аналогично поступим и с третьим членом, опять вводя локальную систему координат. Сначала имеем

$$\{V_{srq}F^s_{p;\,t}\} + \{V_{sqt}F^s_{p;\,r}\} + \{V_{str}F^s_{p;\,q}\},$$

причем в первом слагаемом s может иметь значение только t, во втором — только r, в третьем — только q. Поэтому третий член можно записать в виде

$$\{V_{trq}F^s_{p;\,s}\},$$

не накладывая ограничений на индекс s. Согласно уравнению (6а), можно записать

$$\{V_{trq}G_p\} + \{V_{trq}V_{plm}F^{lm}\}.$$

Второй член этого выражения равен нулю по соображениям симметрии. Заменим его на выражение

$$2\,[\{V_{trq}V_{prq}F^{rq}\} + \{V_{trq}V_{pqt}F^{qt}\} + \{V_{trq}V_{ptr}F^{tr}\}].$$

Здесь каждое слагаемое обращается в нуль; например, первое — вследствие симметрии $V_{trq}V_{prq}$ по индексам p и t. Таким образом рассматриваемое тождество принимает вид:

$$0 \equiv \{G_{rqp;\,t}\} + \frac{3}{2}\{H_{rq}F_{pt}\} - \{G_rV_{qpt}\}. \tag{10}$$

Оказывается, что совместность полной системы требует еще одного 4-тождества, которое получается в результате вычисления дивергенции от (6б). Принимая во внимание тождества (43) и (44) цитированной работы, получаем

$$G^p_{q;\,p} \equiv \frac{1}{4}\,R_{,\,q} - F^{kp}_{;\,p}F_{kq} + \frac{1}{2}\,F_{[kp;\,q]}F^{kp} - V^{stp}_{;\,p}V_{stq} - V_{stq;\,p}V^{stp} + \frac{1}{4}\,V_{,\,q},$$

где для краткости мы положили

$$V \equiv V_{stp}V^{stp}.$$

Все члены справа, кроме первого и последнего, преобразуются, согласно (6а) и (8), к виду

$$-F^{kp}_{;\,p}F_{kq} \equiv -G^kF_{kq} - V^{krt}F_{rt}F_{kq}.$$

Нетрудно видеть, что $V^{krt}F_{rt}F_{kq} \equiv \frac{1}{3}\,V^{krt}F_{[rt}F_{k]q}$, но тензор $F_{[rt}F_{k]q}$

антисимметричен по всем индексам, так что он тождественно равен $\frac{1}{8}\{F_{rt}F_{kq}\}$. Поэтому справедливо тождество

$$-F^{kp}_{;p}F_{kq} \equiv -G^k F_{kq} - \frac{1}{24} V^{krt}\{F_{rt}F_{kq}\}.$$

В силу соотношения (8), получаем

$$+\frac{1}{2} F_{[kp;\,q]}F^{kp} \equiv +\frac{1}{2} G_{kpq}F^{kp} - \frac{1}{2} V_{s[kp}F^s_{q]}F^{kp}.$$

При раскрытии символа Схоутена во втором члене в правой части два члена оказываются равными нулю по соображениям симметрии, так что остается лишь слагаемое $-\frac{1}{2} V_{skp}F^s_qF^{kp}$ или $-\frac{1}{2} V^{skp}F_{sq}F_{kp}$. Но это выражение, согласно сказанному выше, тождественно равно $-\frac{1}{48} V^{skp}\{F_{sq}F_{kp}\}$, так что имеем

$$+\frac{1}{2} F_{[kp;\,q]}F^{kp} \equiv \frac{1}{2} G_{kpq}F^{kp} - \frac{1}{48} V^{skp}\{F_{sq}F_{kp}\}.$$

Четвертый член записанного выше тождества, согласно уравнению (7), будет

$$-V^{stp}_{;\,p}V_{stq} \equiv -H^{st}V_{stq}.$$

С целью преобразования пятого члена рассмотрим выражение $-V^{stp}\{V_{stq;\,p}\}$. Те 18 перестановок индексов в $\{\ \}$, в которых q стоит перед значком дифференцирования, дают значение искомого пятого члена; шесть комбинаций индексов, при которых q стоит после значка дифференцирования, дают значение шестого члена $+\frac{1}{2}V_{,\,q}$. Следовательно:

$$-V_{stq;\,p}V^{stp} \equiv -\frac{1}{18} V^{stp}\{V_{stq;\,p}\} - \frac{1}{6} V_{,\,q}.$$

Учитывая все эти преобразования, получаем искомое тождество в виде

$$G^p_{q;\,p} + G^kF_{kq} - \frac{1}{2} G_{kpq}F^{kp} + H^{st}V_{stq} \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{4}\left(R + \frac{1}{3} V\right)_{,\,q} - \frac{1}{18} V^{skp}\left\{V_{qsk;\,p} - \frac{9}{8} F_{qs}F_{kp}\right\}.$$

Это тождество показывает, что если к уже установленным уравнениям поля надо добавить следующие два:

$$G \equiv R + \frac{1}{3} V_{pqr}V^{pqr} - \lambda = 0, \tag{11}$$

где λ — универсальная постоянная, и

$$G_{qskp} \equiv \left\{V_{qsk;\,p} - \frac{9}{8} F_{qs}F_{kp}\right\} = 0. \tag{12}$$

Это уравнение нетрудно привести к виду

$$(V_{1\,2\,3;\,4} - V_{2\,3\,4;\,1} + V_{3\,4\,1;\,2} - V_{4\,1\,2;\,3}) - \frac{3}{2}\,(F_{1\,2}F_{3\,4} + F_{1\,3}F_{4\,2} + F_{1\,4}F_{2\,3}) = 0,$$

или короче

$$V_{[1\,2\,3;\,4]} - \frac{3}{2} F_{1[2}F_{3\,4]} = 0.$$

Тогда написанное выше тождество принимает вид

$$G^{p}_{q;\,p} + G^{k}F_{kq} - \frac{1}{2} G_{kpq}F^{kp} + H^{st}V_{stq} - \frac{1}{4} G_{,\,q} + \frac{1}{18} G_{qskp}V^{skp} \equiv 0. \tag{13}$$

Наконец, еще следует указать, что уравнения поля (7) удовлетворяют тождеству

$$H^{rp}_{;\,p} \equiv 0. \tag{14}$$

§ 3. Совместность уравнений поля

Имеем установленные уравнения поля:

$$G_{qp} \equiv \left(R_{qp} - \frac{1}{4}\; g_{qp}R\right) - \left(F_{sq}F^{s}_{p} - \frac{1}{4}\, g_{qp}F_{st}F^{st}\right) -$$

$$- \left(V_{stq}V^{st}_{p} - \frac{1}{4}\, g_{qp}V_{rst}\, V^{str}\right) = 0, \tag{6б}$$

$$G_p \equiv F^{q}_{p;\,q} - V_{prq}F^{rq} = 0, \tag{6а}$$

$$G_{rqp} \equiv F_{[rq;\,p]} + V_{s[rq}F^{s}_{p]} = 0, \tag{8}$$

$$G \equiv R + \frac{1}{3}\, V_{prq}V^{prq} - \lambda = 0, \tag{11}$$

$$G_{qskp} \equiv \left\{V_{qsk;\,p} - \frac{9}{8} F_{qs}F_{kp}\right\} = 0, \tag{12}$$

$$H^{qp} \equiv V^{qpr}_{;\,r} = 0. \tag{7}$$

Они связаны следующими тождествами:

$$G^p_{q;\,p} - \frac{1}{4} G_{,\,q} + G^k F_{kq} - \frac{1}{2} G_{kpq} F^{kp} + \frac{1}{18} G_{qskp} V^{skp} + H^{sk} V_{skq} \equiv 0, \qquad (13)$$

$$G^p_{;\,p} + H^{rq} F_{rq} + \frac{1}{3} G^{prq} V_{prq} \equiv 0, \qquad (9)$$

$$\{G_{rqp;\,t}\} + \frac{3}{2} \{H_{rq} F_{pt}\} - \{G_r V_{qpt}\} \equiv 0, \qquad (10)$$

$$H^{rp}_{;\,p} \equiv 0. \qquad (14)$$

Число зависимых функций равно $10 + 6 + 4 = 20$. Число независимых друг от друга дифференциальных уравнений, необходимых для их (релятивистского) определения, равно $20 - 4 = 16$. Число установленных нами дифференциальных уравнений равно $9 + 4 + 4 + 1 + 1 + 6 = 25$; необходимо, следовательно, доказать их совместность. Для этого доказательства целесообразно, как показывает структура тождества (13), объединить уравнения (6б) и (11) в одно уравнение

$$\overline{G}_{qp} \equiv G_{qp} - \frac{1}{4} g_{qp} G = 0.$$

Отберем 9 уравнений:

$$\overline{G}^{14},\ \overline{G}^{24},\ \overline{G}^{34},\ \overline{G}^{44},\ G^4,\ G_{1\,2\,3},\ H^{14},\ H^{24},\ H^{34}$$

и назовем их W-уравнениями, а все остальные — B-уравнениями, число которых равно $25 - 9 = 16$.

Рассмотрение тождеств показывает следующее. Если 16 B-уравнений выполняются во всем пространстве (что, конечно, достижимо) и, кроме того, выполняются W-уравнения в некотором сечении $x_4 = \overline{x}_4 = \mathrm{const}$, то W-уравнения выполняются также и в «бесконечно близком» сечении $x_4 = \overline{x}_4 + dx_4$. Отсюда, согласно известным методам, следует совместность представленной системы уравнений.

Отметим, что Э. Картан в общем и исчерпывающем исследовании[3] глубоко проанализировал те свойства систем дифференциальных уравнений, которые мы назвали в этой и в более ранних работах «совместностью».

Наконец, пользуюсь случаем, чтобы поблагодарить фонд Дж. Мейси в Нью-Йорке за присуждение стипендии одному из нас, что позволило продлить нашу совместную работу в этом году.

Поступила 30 апреля 1932 г.]

[3] E. Cartan. Bulletin de la Societe Mathematique de France. Paris, 1931. «Теория систем в инволюции и ее приложение к теории относительности».

О СВЯЗИ МЕЖДУ РАСШИРЕНИЕМ И СРЕДНЕЙ ПЛОТНОСТЬЮ ВСЕЛЕННОЙ*

(Совместно с У. де Ситтером)

В недавней заметке в «Göttinger Nachrichten» доктор О. Хекман указал на то, что нестатические решения уравнений поля общей теории относительности, отвечающие постоянной плотности, не обязательно приводят к положительной кривизне трехмерного пространства и что эта кривизна может быть отрицательной или равной нулю.

Сейчас нет прямых экспериментальных указаний на существование кривизны, и единственными непосредственно наблюдаемыми величинами являются средняя плотность и расширение. Последнее доказывает, что в действительности Вселенной отвечает нестатический случай. Поэтому ясно, что из результатов прямых наблюдений мы не можем получить ни знака, ни абсолютной величины кривизны, и возникает вопрос, возможно ли описание опытных данных вообще без введения кривизны.

Исторически член, содержащий «космологическую постоянную» λ, был введен в уравнения поля с целью теоретически объяснить существование конечной средней плотности в статической Вселенной. Однако теперь ясно, что в динамическом случае этой цели можно достичь, не вводя λ.

Если мы предположим, что кривизна равна нулю, то квадрат линейного элемента имеет вид

$$ds^2 = -R^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) + c^2\,dt^2, \qquad (1)$$

где R — функция только от t, а c — скорость света. Если для простоты пренебречь давлением [1] p, то уравнения поля без λ-члена приводят к двум

* *On the Relation between the Expansion and the Mean Density of the Universe.* (With W. de Sitter). Proc. Nat. Acad. Sci., 1932, 18, 213—214.

[1] По-видимому, можно считать твердо установленным, что давлением p в реальной Вселенной можно пренебречь по сравнению с плотностью вещества ρ_0. Однако те же самые рассуждения остаются справедливыми, если и не пренебрегать давлением p.

дифференциальным уравнениям, из которых нам понадобится только одно, сводящееся в случае нулевой кривизны к уравнению

$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{c\,dt}\right)^2 = \frac{1}{3}k\rho. \tag{2}$$

Наблюдения дают нам коэффициент расширения и среднюю плотность:

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{dR}{c\,dt} = h = \frac{1}{R_B}, \qquad \rho = \frac{2}{kR_A^2}.$$

Поэтому из уравнения (2) мы получаем теоретическое соотношение

$$h^2 = \frac{1}{3}k\rho \tag{3}$$

или

$$R_A^2/R_B^2 = 2/3. \tag{3'}$$

Взяв для коэффициента расширения h значение 500 *км/сек* на 10^6 *парсек*, или

$$R_B = 2\cdot 10^{27}\ см, \tag{4}$$

находим

$$R_A = 1{,}63\cdot 10^{27}\ см$$

или

$$\rho = 4\cdot 10^{-28}\ г\cdot см^{-3}, \tag{5}$$

что в точности совпадает с верхним пределом плотности, принятым одним из нас [2].

Определение коэффициента расширения h зависит от измеряемого красного смещения, что не вносит никаких существенных неточностей, и от расстояния до внегалактических туманностей, данные о которых пока очень неопределенны. Плотность зависит от предполагаемых масс этих туманностей и от шкалы расстояний. Кроме того, оценка плотности включает предположение, что вся масса вещества во Вселенной сосредоточена в туманностях. Кажется маловероятным, что последнее предположение вносит сколько-нибудь значительную неточность. Принимая это предположение, мы приходим к выводу, что получаемые из опыта отношения h^2/ρ или R_A^2/R_B^2 становятся пропорциональными Δ/M, где Δ — сторона куба, содержащего в среднем одну туманность, а M — средняя масса туманности. Принятые выше значения величин соответствуют значениям $\Delta = 10^6$ световых лет и $M = 2\cdot 10^{11}\odot$, что почти совпадает с оценкой массы нашей Галактики, полученной доктором Оортом. Поэтому,

....

[2] De Sitter. Bull. Astron. Inst. Netherlands, Haarlem, 6, 1931, 142.

хотя значение плотности (5), соответствующее предположению о нулевой кривизне и значению (4) коэффициента расширения, является, возможно, завышенным, оно наверняка имеет правильный порядок величины, и мы должны заключить, что в настоящее время можно описывать факты, не предполагая трехмерное пространство искривленным. Однако кривизну в принципе можно измерить, и повышение точности получаемых из опыта данных позволит в будущем определить ее знак и величину.

Представлена Обсерваторией Маунт-Вильсон 27 января 1932 г.

Сейчас нет основания считать кривизну трехмерного пространства равной нулю. Пересмотр шкалы расстояния привел к уменьшению постоянной Хэббла h. Современные значения $h \sim 170$ *км/сек* на 10^6 *парсек* и $\rho \sim 2 \cdot 10^{-29}$ *г·см*$^{-3}$. Это, вероятно, несколько больше, чем плотность видимого вещества; однако возможно, что учет вклада нейтрино увеличивает действительную плотность вещества.

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

Положение людей науки отягощается тем, что различие языков тормозит их взаимопонимание. Жажда познания *космических связей*, воспринимаемых нами в виде символов, которые доставляются нашими несовершенными чувствами, сглаживает эти трудности. Никогда еще стремление к познанию истины не было таким сильным, как теперь, и пока оно будет существовать, можно смотреть в будущее с надеждой. Такая точка зрения помогает смягчить страдания человечества, а также является *существенной для преодоления современного кризисного периода.*

I

В физической науке существовали единые понятия. *Ныне они расщепились на две ветви*, одна из которых принадлежит *квантовой теории*, вторая — (*релятивистской*) *теории поля.* Их объединение желательно, но еще не достигнуто. Вторая ветвь могла бы развиваться на основе идей Фарадея—Максвелла о замене понятия массы понятием электромагнитного поля. Идею, что вещество можно рассматривать как места особого сгущения поля, реализовать пока не удалось. *Однако сохраняется стремление к тому, чтобы многообразие явлений сводилось в чисто теоретическую систему из как можно меньшего числа элементов.*

Так возникли *специальная теория относительности и общая теория относительности.* Задача последней заключается в однозначном описании движения точки в пространстве и времени без использования вспомогательного понятия отклоняющей силы. Необходимо найти с и с т е м у к о о р д и н а т, в которой движение точки выглядит прямолинейным

---

* *Der gegenwärtige Stand der Relativitätstheorie.* Die Quelle (Pädagogischer Führer), 82, 1932, 440—442. (По лекции, прочитанной 14 октября 1931 г. в Физическом институте Венского университета).

и равномерным. Это представляется несколько нелогичным. Мах ясно понимал это и искал формулировку, описывающую движение без ссылки на систему координат. *Теория относительности не исключает систему координат, но выбирает из них одну, соответствующую некоторым условиям*, и пытается найти законы движения, независимые от выбора системы координат.

Без введения Фарадеем и Максвеллом *понятия электромагнитного поля* теория относительности была бы невозможна. Это понятие ведет к понятию гравитационного поля, которое объясняет явления тяготения, но не включает в себя электромагнитные явления. Правда, хотя их и удалось уложить в рамки теории относительности, но в архитектурном построении теории отсутствовало логическое единство.

II

Представив себе мысленно, с целью получить возможно более простые математические формулировки, что вещество во Вселенной распределяется всюду равномерно с некоторой средней плотностью, можно считать, что оно находится внутри большого шара, количество вещества в котором пропорционально третьей степени радиуса, а поверхность — второй степени радиуса. В центре шара напряженность гравитационного поля равна нулю, но возрастает вдоль радиуса к внешней поверхности пропорционально радиусу шара. Следовательно, гравитационное поле усиливается в направлении к перефирии. Однако такой мир не мог бы существовать, если сохраняется закон тяготения Ньютона. Эту трудность можно преодолеть, добавляя в формулы новый член. Из уравнений следует, что *пространство* должно быть не *эвклидовым*, т. е. определяемым с помощью прямолинейной прямоугольной системы координат, а сферическим. Между радиусом этого сферического мира и средней плотностью существует определенное соотношение. *Чем меньше плотность массы, тем больше радиус.* Зная среднюю плотность массы, можно было бы определить и размеры мира.

III

Астрономия заключает из опыта, что чем дальше находятся от нас небесные светила, тем меньше их яркость и далее, что они движутся от нас тем быстрее, чем дальше они расположены. Это нашло свое выражение в сдвиге спектральных линий по сравнению с их положением в спектре, получаемом на Земле. Открытие и спектроскопическое изучение туманности вне Млечного Пути наблюдателями обсерватории Маунт-Вильсон подтвердило это предположение. Это привело одного русского математика[1] к мысли, что *видимая материя* находится в состоянии *расширения*. Наблюдения де Ситтера и других показали, что это движение расширения вполне вероятно. Тогда возникла мысль, нельзя ли *объяснить* его, *применяя старое уравнение гравитации без прибавления каких-либо новых членов*. Оказалось, что тогда можно сразу вычислить расширение, предполагая, что сдвиг спектральных линий действительно соответствует движению небесного тела.

При этом *значение радиуса мира по порядку величины* исчисляется *сотнями миллионов световых лет*. Этот порядок величины приблизительно соответствует значениям, доступным нам с нашими инструментами, а средняя плотность изображается дробью, в числителе которой стоит единица, а в знаменателе единица с 26 или 27 нулями. Если мир расширяется, то его *объем* должен был начаться с *нуля*. Однако это кажется невозможным. Для достижения современных размеров тогда потребовалось бы от *одного до десяти миллиардов лет*. Возраст же Земли, определенный по *радиевому методу*, составляет около 800 миллионов лет[2]. Следовательно, Земля должна была образоваться тогда, когда начиналось расширение. А будущее? Уравнения предсказывают, что расширение на определенной стадии кончится и тогда должно начаться *сжатие, которое будет продолжаться до нулевого объема*.

IV

Попытки найти единые законы материи, породнить теорию поля и квантовую теорию не прекращались. Речь идет о том, чтобы найти структуру пространства, удовлетворяющую условиям, выдвигаемым обеими теориями. Результатом оказалось *кладбище погребенных надежд*. Я также с 1928 года пытался найти решение, но снова отказался от этого пути. В противовес этому удалось построение теории на основе идеи, выдвинутой наполовину мной, наполовину моим сотрудником профессором доктором Майером. Уже десять лет назад один француз высказал интересную мысль — рассматривать мир как *пятимерное пространство*. В этом случае получается теория, в которой находят свое место и электромагнитные явления, причем архитектурное единство теории не нарушается. Однако я и Майер полагаем, что пятое измерение не должно появляться. Оно используется только математически для построения компонент, при-

....

[1] А. А. Фридман. И это было сделано *до* открытия красного смещения на опыте. Ср. также примеч. на стр. 398. — *Прим. ред.*

[2] Около 5 млрд. лет по современным оценкам.— *Прим. ред.*

менение которых дает уравнения для электромагнитных явлений, совершенно аналогичные тем, которые получаются в теории относительности для закона тяготения. При этом, конечно, выясняется одна трудность, которая, однако, преодолевается *новым математическим построением*, посредством которого можно ввести *соотношение* между гипотетическим *пятимерным пространством* и *четырехмерным пространством*. Таким образом удалось *охватить логическим единством и гравитационное* и *электромагнитное поля*.

Однако надежда не сбылась. Я полагал, что если бы удалось найти этот закон, то получилась бы теория, применимая к квантам и материи. Но это не так. Построенная теория, по-видимому, разбивается о проблему материи и квантов. Между обеими идеями все еще сохраняется пропасть.

110

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ВОЗНИКНОВЕНИИ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

Я охотно принял предложение рассказать об истории своей научной деятельности. Разумеется не потому, что мне хотелось бы восхвалять свой труд! Ведь чтобы писать об истории работы другого человека, требуется понимание процесса его мышления; этого гораздо легче добиться профессиональным историкам. Объяснить же ход своих собственных мыслей прежних лет, конечно, намного легче. Здесь автор находится в несравненно более выгодном положении, чем кто-либо другой; упускать такую возможность вовсе не значит проявлять скромность.

Когда в 1905 году специальная теория относительности провозгласила равноправие всех так называемых инерциальных систем для формулировки законов природы, со всей остротой встал вопрос: не существует ли и более всеобъемлющее равноправие систем координат? Иными словами: если понятие скорости может иметь только относительный смысл, то почему ускорение, несмотря на это, должно оставаться абсолютным понятием? Ведь с чисто кинематической точки зрения относительность любого движения не вызывает сомнения; с физической же точки зрения инерциальные системы находятся в привилегированном положении, что делает искусственным использование иначе движущихся систем координат.

Конечно, мне была известна мысль Маха, что инерция представляет собой сопротивление не столько ускорению самому по себе, сколько ускорению по отношению к массам всех остальных тел, существующих во Вселенной. Эта мысль казалась мне привлекательной, но для новой теории она не предлагала никакой приемлемой основы.

* *Einiges über die Entstehung der allgemeinen Relativitätstheorie.* George A. Gibson Foundation Lecture, Glasgow [20 th June 1933. Glasgow-Jackson. [Гибсонова лекция, прочитанная в Университете Глазго. (Перевод выполнен по перепечатке в «Mein Weltbild». Frankfurt am Main, 1955, 170—175. Франц. перевод в сб. «Comment je vous les monde», Flammarion, Paris, 1937. — *Прим. ред.*)]

Первый шаг на пути решения этой задачи я впервые сделал, пытаясь рассматривать закон тяготения в рамках специальной теории относительности. Как и большинство других исследователей того времени, я старался отыскать *полевой закон* тяготения, так как ввиду отказа от понятия абсолютной одновременности уже невозможно было бы сколько-нибудь естественным образом ввести непосредственное действие на расстоянии.

Конечно, проще всего было сохранить лапласов скалярный потенциал тяготения и дополнить уравнение Пуассона производной по времени так, чтобы удовлетворить требованиям специальной теории относительности. Следовало также привести в соответствие со специальной теорией относительности и закон движения материальной точки в гравитационном поле. Путь к этому был не столь очевиден, поскольку инертная масса тела могла зависеть от гравитационного потенциала. Этого даже следовало ожидать в силу закона инерции энергии.

Однако эти исследования привели к результату, который вызывал у меня глубокое недоверие. Согласно классической механике, ускорение тела в вертикальном поле тяготения не зависит от горизонтальной составляющей скорости. С этим связано то обстоятельство, что ускорение механической системы (или ее центра тяжести) в подобном поле тяготения не зависит от ее внутренней кинетической энергии. Согласно же разрабатывавшейся мною теории, ускорение падения зависело от горизонтальной скорости и, следовательно, от внутренней энергии системы.

Это противоречило давно известному опытному факту, что все тела падают в поле тяжести с одинаковым ускорением. Этот закон, который иначе можно сформулировать как закон равенства инертной и тяжелой масс, представлялся мне имеющим глубокий смысл. Я крайне удивился, что этот закон существует, и предположил, что он и даст ключ к более глубокому пониманию инерции и тяготения. В том, что этот закон выполняется строго, я не сомневался, даже не зная результатов изящных опытов Этвеша, которые — если я правильно вспоминаю — стали мне известны позже. Тогда я отказался от попытки рассматривать упомянутым выше образом проблему гравитации в рамках специальной теории относительности. Эта попытка, конечно, оказалась несостоятельной, поскольку не принималось во внимание наиболее фундаментальное свойство гравитации. Закон равенства инертной и тяжелой масс можно сформулировать очень наглядно следующим образом: в однородном гравитационном поле все движения происходят точно так же, как в равномерно ускоренной системе координат в отсутствие поля тяготения. Если бы этот закон выполнялся для любых явлений («принцип эквивалентности»), то это указывало бы на то, что принцип относительности должен быть распространен на неравномерно движущиеся системы координат, если стремиться к естественной теории гравитационного поля. Подобные размышления занимали меня с 1908 по 1911 год, и я старался вывести из них конкретные следствия, о которых я не предполагал говорить здесь. Важно было прежде всего понять, что разумную теорию гравитации можно построить лишь в результате обобщения принципа относительности.

Следовательно, необходимо было построить теорию, уравнения которой сохраняют форму при нелинейных преобразованиях координат. Удовлетворяют ли этому условию совершенно произвольные (непрерывные) или только некоторые преобразования координат, заранее я не знал.

Скоро я увидел, что при нелинейных преобразованиях, требуемых принципом эквивалентности, утрачивается простая физическая интерпретация координат, т. е. что больше уже нельзя требовать, чтобы разности координат были непосредственными результатами измерений с помощью идеальных линеек или часов. Уяснение этого обстоятельства доставило мне много беспокойства, так как я долго не мог понять, что же вообще должны означать координаты в физике. Решение этой дилеммы было найдено лишь в 1912 году, причем благодаря следующему рассуждению.

Требовалось все-таки найти новую формулировку закона инерции, которая в отсутствие истинного «гравитационного поля в инерциальной системе координат» переходила бы в галилееву формулировку принципа инерции. Согласно последней, материальная точка, на которую не действуют никакие силы, изображается в четырехмерном пространстве прямой линией, т. е. кратчайшей или, более точно, экстремальной линией. Это понятие предполагает существование длины линейного элемента, т. е. метрики. В специальной теории относительности — как показал Г. Минковский — эта метрика была квазиэвклидовой, т. е. квадрат «длины» ds линейного элемента представлял собой определенную квадратичную функцию дифференциалов координат.

Если же вводятся другие координаты с помощью нелинейного преобразования, то ds^2 остается однородной функцией дифференциалов координат, но коэффициенты этой функции ($g_{\mu\nu}$) будут уже не постоянными, а некоторыми функциями координат. Математически это означает, что физическое (четырехмерное) пространство обладает римановой метрикой. Временно-подобные экстремальные линии этой метрики определяют движение материальной точки, на которую не действуют другие силы, кроме гравитационных. Коэффициенты ($g_{\mu\nu}$) этой метрики одновременно описывают гравитационное поле по отношению к выбранной системе координат. Тем самым была найдена естественная формулировка принципа эквивалентности, распространение которой на произвольные гравитационные поля представлялось весьма естественным.

Таким образом, указанная выше дилемма разрешилась следующим образом: реальный физический смысл имеют не дифференциалы координат, а только соответствующая им риманова метрика. Тем самым были заложены основы общей теории относительности. Однако остались нерешенными еще две проблемы.

1. Если уравнения поля выражены в терминах специальной теории относительности, то как перенести их на случай римановой метрики?

2. Каковы дифференциальные уравнения, определяющие саму риманову метрику (т. е. $g_{\mu\nu}$)?

Над этими вопросами я работал с 1912 до 1914 года вместе с моим другом Марселем Гроссманом. Мы обнаружили, что математические методы для решения первой проблемы уже существовали в готовом виде в абсолютном дифференциальном исчислении Риччи и Леви-Чивиты.

Что касается второй проблемы, то для ее решения, очевидно, требовались дифференциальные выражения второго порядка из $g_{\mu\nu}$. Мы скоро увидели, что эти выражения уже были составлены Риманом (тензор кривизны). Еще за два года до опубликования общей теории относительности мы изучали правильные уравнения гравитационного поля, но не были убеждены в их физической применимости. Напротив, я даже полагал, что они не могут подтвердиться на опыте. К тому же мне еще казалось, будто из весьма общих соображений можно показать, что закон тяготения, инвариантный относительно произвольных преобразований координат, несовместим с принципом причинности. Это заблуждение стоило мне двух лет чрезвычайно тяжелой работы, пока я, наконец, не убедился в этом в конце 1915 года и нашел связь теории с данными астрономических наблюдений, после чего я с раскаянием вернулся к римановой кривизне.

В свете уже достигнутых результатов счастливо найденное кажется почти само собой разумеющимся, и любой толковый студент усваивает теорию без большого труда. Позади остались долгие годы поисков в темноте, полных предчувствий, напряженное ожидание, чередование надежд и изнеможения и, наконец, прорыв к ясности. Но это поймет только тот, кто пережил все сам.

О КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ПРОСТРАНСТВА *

Когда мы называем пространство и время дорелятивистской физики «абсолютными», то в это надо вкладывать следующий смысл. Прежде всего пространство и время и, следовательно, система отсчета там реальны в том же смысле, что и, например, масса. Выбранным системам отсчета непосредственно соответствуют результаты измерений [1]. В силу этого постулаты геометрии и кинематики приобретают значение связей между измерениями, имеющих определенный физический смысл, который может быть истинным или ложным. Инерциальная система обладает физической реальностью постольку, поскольку выбором такой системы определяется закон инерции. Физическая реальность, которая обозначается словами пространство + время, независима по своим законам от поведения остальных физических реальностей, например от поведения тел. Совокупность связей между результатами измерений, которые могут быть получены с помощью одних только линеек и часов, не зависит, согласно классической теории, от распределения и движения тел, так же как и инерциальная система. Пространство мыслится как нечто физическое, но не испытывает никакого физического влияния.

Некоторые приверженцы теории относительности, ссылаясь на эти факты, ошибочно объявили, что классическая механика логически несостоятельна. Однако подобная теория ни коим образом не является логически несостоятельной, но она мало удовлетворительна с теоретико-познавательной точки зрения. Пространство и время в ней играют в

---

* *Sur la Structure cosmologique de l'Espace*. Из сборника статей Эйнштейна, изданного в Париже (Hermann et Cie Editeurs, 1933, 99—109. (Статья написана специально для сборника статей Эйнштейна, переведенных на французский язык М. Соловиным; сборник содержит также переводы статей 38 — том I — и 106. — *Прим. ред.*).

[1] Это верно, если по крайней мере в принципе можно иметь идеальные часы и линейки.

некоторой степени роль априорной реальности, в отличие от реальности тел (и полей), которые выступают как реальности, так сказать, вторичные. Это разделение физической реальности на две различные части порождает именно ту неудовлетворенность, которой в общей теории относительности удается избежать. С точки зрения систематичности построения системы — это ее главное достоинство. Она позволила соединить в едином понятии как вес, так и инерцию. Употребление обобщенных гауссовых координат, сделавшее возможным простую непрерывную нумерацию точек пространства-времени без всякого обращения к метрике, является в связи с вышесказанным не более чем средством (конечно, необходимым), позволяющим связать метрические свойства континуума с его другими свойствами (гравитационное поле, электромагнитное поле, закон движения)[2].

Итак, примем, что, согласно общей теории относительности, метрические свойства пространства-времени причинно не зависят от того, чем это пространство-время наполнено, но определены этим последним. Это придает континууму метрический неэвклидов характер и приводит к проблемам, чуждым классической теории. Действительно, так как можно предположить, что всюду во Вселенной звезды распределены с конечной средней плотностью, т. е. что существует некоторая отличная от нуля средняя плотность материи, то возникает вопрос о том, какое влияние оказывает эта средняя плотность на (метрическую) структуру пространства в целом. Это и есть так называемая космологическая проблема, которой мы займемся в этой короткой заметке. Из соображений простоты мы хотим отвлечься от того факта, что материя сконцентрирована в звездах и системах звезд, отделенных друг от друга пустым пространством, и будем рассматривать ее так, как если бы оно было непрерывно распределено на больших астрономических пространствах.

Предположение об отличной от нуля средней плотности материи, впрочем, приводит — как это уже с давних пор известно астрономам — к трудностям, даже с точки зрения ньютоновской теории. Действительно, по теореме Гаусса, число силовых гравитационных линий, пересекающих замкнутую поверхность с точностью до постоянного множителя, равно тяготеющей массе, заключенной внутри поверхности. Если эта материя обладает постоянной плотностью ρ, число силовых линий, пересекающих

[2] Это хорошо видно, если использовать обобщенные координаты в классической механике. Нужно положить риманов тензор четвертого ранга $R_{ik\,lm}$ равным нулю. Тогда определяются все компоненты метрического поля $g_{\mu\nu}$, так что они не будут зависеть от других физических величин. Именно в этом, с точки зрения релятивистского описания, находит свое выражение абсолютный характер времени и пространства классической теории.

сферу радиуса P пропорционально P^3. Поток напряженности поля через единицу поверхности сферы также пропорционален ее радиусу P и, следовательно, тем больше, чем больше радиус рассматриваемой сферы. Таким образом, материя, распределенная с постоянной средней плотностью, согласно теории Ньютона, не может находиться в равновесии. Чтобы избежать вытекающих отсюда трудностей, астроном Зеелигер предложил изменить ньютоновский закон тяготения на больших расстояниях. Но этот вопрос, естественно, не имел ничего общего с проблемой пространства.

Проблема, относящаяся к общей теории относительности, приводит к следующему вопросу: как может существовать пространство, в котором материя имеет постоянную пространственную плотность и находится в состоянии относительного покоя? Такое пространство следует рассматривать как очень грубую идеализацию, сделанную для того, чтобы как-то теоретически подступить к вопросу о реальном пространственно-временном континууме.

В соответствии с общей теорией относительности метрическое, или гравитационное, поле, описываемое с помощью $g_{\mu\nu}$, связано с тензором энергии $T_{\mu\nu}$, или, что то же самое, с тензором плотности энергии, уравнениями

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-\varkappa T_{\mu\nu}. \tag{1}$$

Здесь $R_{\mu\nu}$ — свернутый один раз риманов тензор кривизны:

$$R_{\mu\nu}=-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\,\alpha}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\,\nu}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}, \tag{1a}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}=\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}=g^{\alpha\beta}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \beta\end{bmatrix}=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(g_{\mu\beta,\,\nu}+g_{\nu\beta,\,\mu}-g_{\mu\nu,\,\beta}\right),$$

где обычное дифференцирование обозначено запятой перед соответствующим индексом.

Если «материю» можно считать свободной от всякого давления и если пренебречь действием других сил, кроме сил тяготения, необходимо положить

$$T^{\mu\nu}=\rho u^{\mu}u^{\nu}, \tag{2}$$

где u^{μ} — контравариантный 4-вектор скорости[3] $\frac{dx_{\mu}}{d\tau}$ и ρ — скаляр плотности материи.

Здесь, естественно, предполагается, что плотность энергии весомой материи настолько превышает плотность энергии излучения, что этой

[3] Величина $d\tau$ есть элемент собственного времени. Следовательно, если перед пространственными компонентами ds^2 ставить знак плюс [как в формуле (3)], то $d\tau^2=-ds^2$.

последней можно пренебречь. Конечно, это предположение не совсем точно, но вносимая таким образом погрешность в дальнейших рассмотрениях и результатах ничего существенно не меняет.

Во-первых, очевидно, что Вселенная, обладающая отличной от нуля средней плотностью массы, не может быть эвклидовой. Этот случай в специальной теории относительности характеризуется фундаментальным инвариантом

$$g_{\mu\nu}\,dx^{\mu}\,dx^{\nu} = ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2\,dt^2, \qquad (3)$$

т. е. постоянными значениями $g_{\mu\nu}$. Итак, $R_{\mu\nu}$ и R, а следовательно, и первый член уравнения (1) обращаются в нуль. Второй член уравнения (1) должен соответственно тоже быть равным нулю, а следовательно, обращается в нуль и ρ, что противоречит нашему предположению.

Наиболее простой возможной структурой пространства после эвклидовой структуры должна быть статическая структура (все компоненты $g_{\mu\nu}$ не зависят от t) с постоянной кривизной в «пространственных» сечениях (t = const).

Трехмерное пространство постоянной положительной кривизны (в частности, «сферическое» пространство) характеризуется, как известно, квадратом линейного элемента $d\sigma^2$ вида[4]

---

[4] Эта формула наиболее просто получается, если рассмотреть трехмерную сферу в четырехмерном эвклидовом пространстве с декартовыми координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 и центром 0, 0, 0, $-P$. Тогда уравнение сферы будет $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + (\xi_4 + P)^2 = P^2$ и элемент длины на ней —

$$d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2 = d\sigma^2.$$

Одна из четырех координат или их дифференциалов может быть исключена с помощью уравнения сферы. (Введение трех координат на сфере вместо четырех координат $\xi_1, \ldots, \xi_4$.)

К этому легче всего прийти (если мы хотим избежать квадратных корней) с помощью стереографической проекции точек сферы на гиперповерхность $\xi_4 = -2P$, как это показано на рис. 1.

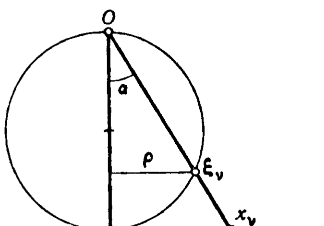


Рис. 1.

$$d\sigma^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{\left(1 + \frac{r^2}{(2P)^2}\right)^2} \qquad (r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

где точка $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ только кажется выделенной.

С пространственной точки зрения статический сферический мир описывается линейным элементом

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{\left(1 + \frac{r^2}{(2P)^2}\right)^2} - c^2\, dt^2. \tag{3a}$$

Априори представляется правдоподобным (с точки зрения свойств симметрии), что в таком мире материя может находиться в состоянии покоя ($u^1 = u^2 = u^3 = 0$) при постоянной плотности в пространстве и времени. С другой стороны, имеем:

$$u^4 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{c},$$

так что $u_4 = g_{44}u^4 = c$.

Следовательно, приходится во втором члене уравнения (1) положить равными нулю все компоненты $T_{\mu\nu}$ кроме T_{44}. Только $T_{44} = \rho u_4 u_4 = \rho c^2$ отлично от нуля.

Из формулы (3a), согласно (1a), для $R_{\mu\nu}\,(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ получаем значения

$$\begin{matrix} -\frac{2}{P^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{P^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{P^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\;;$$

....

Вместо ξ_ν вводятся x_ν, удовлетворяющие соотношению

$$\frac{x_\nu}{\xi_\nu} = \frac{r}{\rho} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = 1 + \frac{r^2}{(2P)^2} \qquad (\nu = 1, \ldots, 4).$$

Это дает $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ ($\xi_4 = -2P$) как функции x_ν ($\nu = 1, 2, 3$), откуда диффеpенцированием получаются $d\xi$ и, следовательно, $d\sigma^2$ как функция x_ν и dx_ν в соответствии с формулой, указанной в тексте.

для $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ — значения

$$\begin{matrix} \frac{1}{P^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{P^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{P^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3c^2}{P^2} \end{matrix};$$

а для $-\varkappa T$ — значения

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varkappa\rho c^2. \end{matrix}$$

Таким образом из уравнений (1) вытекают два взаимно противоречивых уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P^2} &= 0, \\ \frac{3c^2}{P^2} &= \varkappa\rho c^2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Следовательно, уравнения (1) исключают возможность Вселенной с постоянной отличной от нуля плотностью материи. В этом заключается реальная трудность общей теории относительности, если исходить из того, что нельзя представить себе других пространственных структур, независимых от времени, кроме тех, которые даются линейным элементом (3а) (с положительным или отрицательным P^2).

Чтобы выйти из этого затруднения, я сначала нашел следующее средство. Постулат относительности позволяет добавить в левую часть уравнений (1) член вида $\lambda\, g_{\mu\nu}$, где λ — универсальная постоянная (космологическая постоянная), которая должна быть достаточно малой, чтобы добавленный член был практически несущественным при расчетах гравитационного поля Солнца и движения планет. Дополненные таким членом уравнения имеют вид

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right) + \lambda g_{\mu\nu} = \varkappa T_{\mu\nu}. \tag{1б}$$

Теперь вместо уравнений (4) получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P^2} &= \lambda, \\ \frac{3c^2}{P^2} &= -\lambda c^2 + \varkappa\rho\tau^2. \end{aligned}\right\} \qquad (4a)$$

Эти уравнения согласуются между собой и для «космического» радиуса дают значение

$$P = \frac{2}{\sqrt{\varkappa\rho}} = \frac{c}{\sqrt{2\pi K\rho}}, \qquad (5)$$

где K — гравитационная постоянная в обычной системе единиц.

Но исследования Фридмана и Леметра показали впоследствии, что этот выход из трудности неудовлетворителен по следующим причинам.

Эти авторы также взяли за основу уравнение (1б). Но они обобщили формулу (3а) так, что ввели вместо постоянного «космического» радиуса P (и плотности ρ) функцию времени. Тогда уравнения (1б) показали, что решение уравнений (4а), (5) имеет неустойчивый характер. Это значит, что в решениях, которые в некоторый момент очень мало отличаются от (4а), P не колеблется вокруг величины, заданной выражением (5), но постепенно все больше и больше отклоняется от нее как для бóльших, так и для меньших значений времени. При переходе к этим «динамическим» решениям задачи остается неопределенной величина λ и ее знак, а также знак $\frac{1}{P^2}$, так что кажутся в равной степени возможными отрицательные значения пространственной кривизны [5]. Таким образом концепция пространственно замкнутого мира вновь теряет свою базу.

Если же теория приводит нас к динамическим решениям для структуры пространства, то исчезает необходимость введения универсальной константы λ, так как уравнения (1) имеют динамические решения типа (3а), для которых $\lambda = 0$.

В последнее время решение проблемы получило сильный толчок благодаря экспериментальным результатам в астрофизике. Измерения доплеровского смещения (в особенности измерения Хэббла), проведенные для внегалактических туманностей, похожих на Млечный Путь, показали, что эти туманности отдаляются от нас со скоростью тем бóльшей, чем больше расстояние до них. Исследования Хэббла кроме всего прочего показали, что эти объекты распределены в пространстве статистически равномерно. Таким образом, предположение теории о равномерной сред-

[5] Первым, кто обратил внимание на этот момент, был Хекман. (Как указывает А. А. Фридман, на это еще раньше обратил внимание Я. Д. Тамаркин.— *Прим. ред.*)

ней плотности материи получает экспериментальное подтверждение. Открытие разбегания внегалактических туманностей оправдывает переход к динамическим решениям для структуры пространства, что ранее должно было казаться лишь следствием неудовлетворительного положения в теории.

Итак, без введения члена с λ можно теоретически объяснить на основе уравнений (1) существование конечной (средней) плотности материи ρ, считая в формуле (3а) P (и ρ) зависящими от времени. Следует отметить, что постоянными во времени остаются не координаты частицы x_1, x_2, x_3, а величины

$$\frac{x_1}{P}, \quad \frac{x_2}{P}, \quad \frac{x_3}{P},$$

в чем нетрудно убедиться из простого геометрического рассмотрения. Мы все же введем в качестве новых координат не эти величины, а величины

$$P_0\frac{x_1}{P}, \quad P_0\frac{x_2}{P}, \quad P_0\frac{x_3}{P},$$

где P_0 означает длину порядка «космического радиуса». Мы положили также, что разности координат имеют тот же порядок величины, что и длины, измеряемые линейкой[6].

Используя теперь новые координаты x_1, x_2, x_3 и полагая в новой системе $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, находим, что соотношение (3а) приобретает вид

$$ds^2 = \left(\frac{P}{P_0}\right)^2 \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{\left(1 + \frac{r^2}{(2P_0)^2}\right)^2} - c^2\,dt^2. \qquad (3б)$$

Мы можем рассматривать P_0 как космический радиус P в определенный момент t_0. Единственной переменной во времени величиной остается «коэффициент расширения» P/P_0 $(= A)$.

Мы уже отмечали, что нельзя согласовать равномерную плотность материи ρ, сделав предположение о кривизне пространства при A, постоянном во времени, т. е. без «расширения» пространства. Напротив, будет видно, что конечная плотность ρ не требует с необходимостью существования кривизны пространства (трехмерного). Иначе говоря, соотношение (3б) мы заменяем на

$$ds^2 = A^2\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - c^2\,dt^2, \qquad (3в)$$

где единственной функцией времени t $(= x_4)$ является A. Действительно,

....

[6] Исследование проблемы в целом, так же как и различных частных случаев, было выполнено Толменом, который использовал весьма сложный выбор координат. Де Ситтеру принадлежит ясное и исчерпывающее обсуждение всех возможных случаев.

подставляя это выражение в уравнения (1), получаем

$$2A\frac{d^2A}{dt^2}+\left(\frac{dA}{dt}\right)^2=0, \tag{6}$$

$$3\left(\frac{1}{A}\frac{dA}{dt}\right)^2=\varkappa\rho c^2. \tag{7}$$

Уравнение (6) дает

$$A=c\,(t-t_0)^{2/3}. \tag{6a}$$

Если l есть расстояние $\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\Delta x_3^2}$ между двумя массами, измеренное в координатной мере и независимое от времени, то Al является, согласно соотношению (3в), расстоянием D между этими материальными точками, измеренным линейкой. Следовательно, соотношение (6а) выражает расширение, которое начинается в определенный момент t_0. Из уравнения (7) вытекает, что в этот момент плотность бесконечна. Измерения, выполненные Хэбблом для внегалактических туманностей, показали, что величина

$$\frac{1}{D}\frac{dD}{dt}\left(=\frac{1}{A}\frac{dA}{dt}\right)$$

оказывается в настоящее время постоянной (h). Считая, что t отвечает настоящему моменту, согласно соотношению (6а), имеем

$$t-t_0=\frac{2}{3h}. \tag{8}$$

Это время достигает примерно 10^{10} лет. Естественно, что плотность в момент t_0 не должна была быть на самом деле бесконечно большой. Лауэ справедливо заметил, что для этого момента времени наше грубое приближение, основанное на независимости плотности ρ, неверно.

Применение уравнения (7) к настоящему времени дает

$$3h^2=\varkappa\rho c^2\,(=8\pi K\rho). \tag{9}$$

Эта формула устанавливает соотношение между константой Хэббла h, полученной на основе эффекта Доплера, и средней плотностью ρ. Численно это уравнение дает для ρ значение порядка 10^{-28}, что хорошо согласуется с оценкой астрономов.

Из приведенных соображений следует, что при современном состоянии наших знаний отличие плотности материи от нуля не должно теоретически связываться с пространственной кривизной, а должно связываться с расширением пространства. Мы, естественно, не хотим сказать этим, что такая кривизна (положительная или отрицательная) не существует. В настоящее время у нас нет никаких указаний на ее существование. Во всяком случае она должно быть значительно меньше, чем это следовало из примитивной теории [см. формулу (5)].

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ВЫВОД ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МАССЫ И ЭНЕРГИИ*

Специальная теория относительности возникла из максвелловых уравнений электромагнитного поля. Так уж случилось, что даже при выводе основных законов и понятий механики существенную роль сыграли законы электромагнитного поля. Вопрос о независимости этих законов является совершенно естественным, так как преобразования Лоренца, фактически являющиеся базисом специальной теории относительности, сами по себе не связаны непосредственно с теорией Максвелла и так как мы не знаем, в какой степени понятие энергии в теории Максвелла не изменится под влиянием молекулярной физики. В приведенных ниже рассуждениях мы будем основываться, помимо преобразований Лоренца, лишь на законах сохранения энергии и импульса.

Мы начнем с попытки обосновать выражения для энергии и импульса материальной частицы хорошо известным путем. Фундаментальным инвариантом преобразований Лоренца является

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

или

$$ds = dt\,(1 - u^2)^{1/2},$$

где

$$u^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.$$

* *Elementary Derivation of the Equivalence of Mass and Energy*. Bull. Amer. Math. Soc., 1935, 61, N 4, 223—230. (Одиннадцатая гибсонова лекция, прочитанная 28 декабря 1934 г. в Питтсбурге на совместном заседании Американского математического общества, Американского физического общества и секции А Американского общества развития науки [AAAS]).

Если компоненты контравариантного вектора (dt, dx, dy, dz) разделить на ds, то получается вектор

$$\frac{1}{(1-u^2)^{1/2}}, \quad \frac{u_1}{(1-u^2)^{1/2}}, \quad \frac{u_2}{(1-u^2)^{1/2}}, \quad \frac{u_3}{(1-u^2)^{1/2}}.$$

Пусть вектор (dt, dx, dy, dz) направлен вдоль мировой линии частицы с массой m. Мы получим связанный с ее движением вектор, если умножим на m 4-вектор скорости, который мы только что выписали. Таким образом получаем

$$(\eta^\sigma) = \left(\frac{m}{(1-u^2)^{1/2}}, \frac{mu_i}{(1-u^2)^{1/2}}\right),$$

где индекс i пробегает значения от 1 до 3.

Пренебрегая третьей степенью скорости, мы можем выразить компоненты этого вектора следующим образом:

$$(\eta^\sigma) = \left(m + \frac{1}{2} mu^2, mu_i\right).$$

Пространственные компоненты (η^σ) в этом приближении совпадают с компонентами импульса в классической механике, а временна́я компонента, с точностью до аддитивной постоянной m, совпадает с кинетической энергией материальной точки.

Снова возвращаясь к точному выражению для (η^σ), естественно рассматривать

$$\frac{mu_i}{(1-u^2)^{1/2}}$$

как импульс, а

$$m\left(\frac{1}{(1-u^2)^{1/2}} - 1\right)$$

как кинетическую энергию частицы. Но как следует интерпретировать временну́ю компоненту $\frac{m}{(1-u^2)^{1/2}}$, выражение для которой имеет вполне реальный смысл? Здесь естественно прямо придать ей смысл энергии и, таким образом, приписать покоящейся частице *энергию покоя* m (mc^2 в обычных единицах).

Этот вывод, конечно, нельзя рассматривать как доказательство, так как ниоткуда не следует, что при взаимодействии нескольких одинаковых частиц друг с другом именно этот импульс удовлетворяет закону сохранения импульса, а эта энергия — закону сохранения энергии; априори могло бы случиться, что в законы сохранения входят другие выражения для скорости.

Кроме того, не так уж ясно, что следует понимать под *энергией покоя*, так как энергия определена лишь с точностью до неопределенной аддитивной постоянной; в этой связи, однако, следует заметить следующее. Любую систему можно рассматривать как материальную точку, пока мы не имеем дела ни с какими другими процессами, кроме изменения скорости трансляции ее как целого. Однако совершенно четкий смысл имеет рассмотрение изменения энергии покоя в случае процессов, не сводящихся к простому изменению скорости трансляции. Тогда приведенная выше интерпретация требует, чтобы при таких процессах инертная масса материальной точки менялась как энергия покоя; это требование, конечно, нуждается в доказательстве.

Сейчас мы покажем, что если законы сохранения энергии и импульса справедливы во всех системах координат, связанных друг с другом преобразованиями Лоренца, то энергия и импульс действительно определяются приведенными выше формулами и предполагаемая эквивалентность массы и энергии покоя также существует.

Начнем с простых кинематических следствий преобразований Лоренца:

$$t = \frac{t' + vx'}{(1-v^2)^{1/2}}, \qquad x = \frac{x' + vt'}{(1-v^2)^{1/2}}, \qquad y = y', \qquad z = z',$$

где v — относительная скорость координатных систем K и K'. Те же самые соотношения выполняются и для дифференциалов dx и т. д. Производя соответствующие вычисления, легко получить закон преобразования компонент скорости:

$$u_1 = \frac{u_1' + v}{1 + u_1' v}, \qquad u_2 = \frac{u_2'(1-v^2)^{1/2}}{1 + u_1' v}, \qquad u_3 = \frac{u_3'(1-v^2)^{1/2}}{1 + u_1' v}.$$

Отсюда следует

$$u^2 = \frac{u'^2 + 2u_1' v + v^2 - u_2'^2 v^2 - u_3'^2 v^2}{(1 + u_1' v)^2}$$

и

$$\frac{1}{(1-u^2)^{1/2}} = \frac{1 + u_1' v}{(1-u'^2)^{1/2}(1-v^2)^{1/2}},$$

равно как и

$$\frac{u_1}{(1-u^2)^{1/2}} = \frac{u_1' + v}{(1-u'^2)^{1/2}(1-v^2)^{1/2}},$$

$$\frac{u_2}{(1-u^2)^{1/2}} = \frac{u_2'}{(1-u'^2)^{1/2}}, \quad \frac{u_3}{(1-u^2)^{1/2}} = \frac{u_3'}{(1-u'^2)^{1/2}}.$$

Для дальнейшего нам понадобится понятие *пары частиц*. Под парой частиц мы будем понимать две материальные точки, скорости которых в системе K' равны по величине и противоположны по направлению (дальше мы будем рассматривать случай частиц равной массы). Две частицы пары мы будем обозначать индексами «+» и «—». Итак, $u'_+ = u'_-$; $u'_{1+} = -u'_{1-}$ и т. д. Применяя к ним наши преобразования, мы получаем после сложения:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(1-u_+^2)^{1/2}} + \frac{1}{(1-u_-^2)^{1/2}} = \frac{2}{(1-u'^2)^{1/2}(1-v^2)^{1/2}}, \\
&\frac{u_{1+}}{(1-u_+^2)^{1/2}} + \frac{u_{1-}}{(1-u_-^2)^{1/2}} = \frac{2v}{(1-u'^2)^{1/2}(1-v^2)^{1/2}}, \\
&\frac{u_{2+}}{(1-u_+^2)^{1/2}} + \frac{u_{2-}}{(1-u_-^2)^{1/2}} = 0, \\
&\frac{u_{3+}}{(1-u_+^2)^{1/2}} + \frac{u_{3-}}{(1-u_-^2)^{1/2}} = 0.
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Суммы в левых частях этих уравнений зависят только от скорости пары u' по отношению к избранной нами системе K' и от относительной скорости v систем K' и K, но не от направления движения частиц.

Отметим, что уравнения (1) можно вывести более простым способом, рассматривая непосредственно преобразования для суммы 4-векторов скоростей частиц пары. Однако я выбрал другой путь, так как законы сохранения подсказывают именно такую трехмерную систему записи.

Перейдем теперь к сути дела. Предположим, что импульс и энергия материальной точки даются выражениями вида

$$I_\nu = mu_\nu F(u), \qquad E = E_0 + mG(u) \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

где F и G — универсальные четные функции скорости u, обращающиеся в нуль при $u = 0$. Тогда $mG(u)$ будет представлять собой кинетическую энергию, E_0 — *энергию покоя* материальной точки, а m — *массу покоя*, или просто массу. Здесь предположено, что импульс и энергия *точечной массы* не зависят от направления движения и от ориентации *точечной массы* относительно ее скорости. Далее предполагается, что в выражения для импульса и энергии входит *одна и та же* постоянная масса m. Позднее мы найдем этому частичное обоснование.

Рассмотрим теперь упругое нецентральное соударение двух частиц одинаковой массы. Всегда можно выбрать систему координат K' так, чтобы по отношению к ней скорости масс перед столкновением были бы равны друг другу по величине и противоположны по направлению. Каковы скорости частиц после столкновения по отношению к системе K'? Если бы скорости после соударения не были, как и раньше, равны и противоположны, то это противоречило бы закону сохранения импульса. Если бы по величине равные скорости обеих масс после столкновения не равнялись бы соответствующим скоростям до столкновения, то в случае упругого столкновения это противоречило бы закону сохранения энергии. Эти заключения совершенно не зависят от конкретного вида зависимости импульса и энергии от скорости. Таким образом соударение лишь изменяет направление движения двух точечных масс по отношению к системе K'. Коротко это можно выразить так: пара частиц перед соударением преобразуется после соударения в пару частиц с той же самой скоростью u'.

Итак, правая часть уравнений (1) при столкновении не изменяется. Из уравнений (1) далее следует, что по отношению к системе K мы имеем следующие уравнения для состояний до и после столкновения:

$$\begin{gathered}\frac{1}{(1-u_+^2)^{1/2}}+\frac{1}{(1-u_-^2)^{1/2}}=\frac{1}{(1-\bar{u}_+^2)^{1/2}}+\frac{1}{(1-\bar{u}_-^2)^{1/2}},\\ \frac{u_{i+}}{(1-u_+^2)^{1/2}}+\frac{u_{i-}}{(1-u_-^2)^{1/2}}=\frac{\bar{u}_{i+}}{(1-\bar{u}_+^2)^{1/2}}+\frac{\bar{u}_{i-}}{(1-\bar{u}_-^2)^{1/2}}.\end{gathered}\tag{2}$$

Величины, над символами которых стоит черта, относятся к состоянию после столкновения. Эти уравнения, справедливые для общего случая упругих соударений равных масс, имеют форму законов сохранения; поэтому можно считать доказанным, что не существует никаких других симметричных или антисимметричных функций от компонент скорости, которые в рассматриваемом случае упругих столкновений двух одинаковых точечных масс давали бы похожие соотношения. В соответствии с этим мы должны рассматривать

$$\frac{mu_i}{(1-u^2)^{1/2}}\tag{3}$$

как импульс и

$$m\left(\frac{1}{(1-u^2)^{1/2}}-1\right)\tag{4}$$

как кинетическую энергию частицы [1].

....

[1] Это выражение, естественно, должно обращаться в нуль при $u=0$; вследствие этого оно определяется как энергия, которую необходимо сообщить (без внутренних изменений) первоначально покоящейся частице для достижения скорости u.

Перейдем теперь к доказательству того, что масса равна *энергии покоя*. Для полной энергии E движущейся частицы мы должны взять выражение

$$E = E_0 + m\left(\frac{1}{(1-u^2)^{1/2}} - 1\right), \tag{4a}$$

причем мы будем предполагать, что E_0 (энергия покоя) и m могут изменяться в случае, если взаимодействие точечных масс не является *упругим*.

Теперь рассмотрим неупругое соударение двух частиц с одинаковыми массами и энергиями покоя, которые перед соударением образовывали *пару частиц* по отношению к системе K' (скорости равны и противоположны). Далее мы предположим для простоты, что частицы при соударении претерпевают одинаковые внутренние изменения. Из закона сохранения импульса следует, что в системе K' конечные скорости частиц должны быть одинаковы по величине и противоположны по направлению ($\overline{u'_+} = -\overline{u'_-}$). Закон сохранения энергии в системах K' и K соответственно дает

$$2E_0 + 2m\left(\frac{1}{(1-u^2)^{1/2}} - 1\right) = 2\bar{E}_0 + 2\bar{m}\left(\frac{1}{(1-\bar{u}^2)^{1/2}} - 1\right),$$

$$2E_0 + m\left(\frac{1}{(1-u_+^2)^{1/2}} - 1\right) + m\left(\frac{1}{(1-u_-^2)^{1/2}} - 1\right) =$$

$$= 2\bar{E}_0 + \bar{m}\left(\frac{1}{(1-\bar{u}_+^2)^{1/2}} - 1\right) + \bar{m}\left(\frac{1}{(1-\bar{u}_-^2)^{1/2}} - 1\right).$$

Поскольку частицы составляли пару до и после соударения, последнее уравнение можно с помощью равенств (1) переписать в следующем виде:

$$E_0 - m + \frac{m}{(1-u^2)^{1/2}(1-v^2)^{1/2}} = \bar{E}_0 - \bar{m} + \frac{\bar{m}}{(1-\bar{u}^2)^{1/2}(1-v^2)^{1/2}}.$$

Аналогичным образом преобразуем первое уравнение:

$$E_0 - m + \frac{m}{(1-u^2)^{1/2}} = \bar{E}_0 - \bar{m} + \frac{\bar{m}}{(1-\bar{u}^2)^{1/2}}. \tag{5}$$

Умножая последнее уравнение на $1/(1-v^2)^{1/2}$ и вычитая результат из предыдущего уравнения, получаем

$$[(\bar{E}_0 - E_0) - (\bar{m} - m)]\left[\frac{1}{(1-v^2)^{1/2}} - 1\right] = 0,$$

или
$$\bar{E}_0 - E_0 = \bar{m} - m_0. \tag{6}$$

Таким образом энергия покоя при неупругом соударении изменяется аддитивно, так же как масса. Что касается энергии покоя, то она определяется, как это следует из самого понятия энергии, лишь с точностью до аддитивной постоянной, и мы можем наложить условие, чтобы E_0 обращалось в нуль вместе с m. При этом
$$E_0 = m,$$
что и является доказательством принципа эквивалентности инертной массы и энергии покоя.

Из закона сохранения x-компоненты импульса следует (для неупругого столкновения):
$$m\frac{u_{+1}}{(1-u_+^2)^{1/2}} + m\frac{u_{-1}}{(1-u_-^2)^{1/2}} = \bar{m}\frac{\bar{u}_{+1}}{(1-\bar{u}_+^2)^{1/2}} + \bar{m}\frac{\bar{u}_{-1}}{(1-\bar{u}_-^2)^{1/2}},$$
что после применения второго из уравнений (1) дает для состояний до и после соударения
$$\frac{m}{(1-u^2)^{1/2}} = \frac{\bar{m}}{(1-\bar{u}^2)^{1/2}}.$$

Это же соотношение следует также из уравнений (5) и (6), полученных из закона сохранения энергии. Если бы мы с самого начала приняли, что в выражение для импульса входит постоянная масса, отличная от той, которая входит в выражение для энергии, то с помощью аналогичных соображений можно было бы показать, что при неупругом столкновении «импульсная масса» изменяется точно так же, как «энергетическая масса». Это является частичным обоснованием принятого равенства друг другу обеих масс.

Наши результаты можно резюмировать следующим образом. Если при столкновении точечных масс законы сохранения выполняются во всех (лоренцовых) системах координат, то из одного этого следуют известные выражения для импульса и энергии, равно как и справедливость принципа эквивалентности массы и энергии покоя.

Профессор Биркхоф обратил мое внимание на то, что в его книге «Relativity and Modern Physics», написанной совместно с профессором Лэнджером, приведены сходные соображения относительно столкновений частиц, а также относительно энергии и импульса. Несмотря на это, мне кажется, что приведенный выше вывод представляет определенный интерес.

Так, в только что упомянутой книге существенно используется понятие *силы*, которая в релятивистской теории не имеет такого непосредственного смысла, как в классической механике. Это связано с тем фактом, что в последней силу следует рассматривать как заданную функцию координат всех частиц, что, очевидно, невозможно в релятивистской теории. Поэтому я не ввел понятие силы.

Кроме того, я избегал делать какие бы то ни было предположения о трансформационных свойствах энергии и импульса по отношению к преобразованиям Лоренца.

ПРОБЛЕМА ЧАСТИЦ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

(Совместно с Н. Розеном)

Несмотря на большие успехи в различных областях, современная теоретическая физика еще далека от единой системы, которая позволяла бы теоретически рассматривать все явления. Существует релятивистская теория макроскопических явлений, которая, однако, пока не может объяснить атомистическую структуру вещества и квантовые эффекты; кроме того, существует квантовая теория, удовлетворительно описывающая большой класс атомных и квантовых явлений, но, в силу своей природы, плохо согласующаяся с принципом относительности. При таком положении вещей кажется не лишним поднять вопрос о том, в какой степени метод общей теории относительности открывает новые пути для объяснения атомных явлений. В этой работе мы хотим привлечь внимание к существованию такого пути, хотя мы и не можем сейчас решить вопрос, способна ли эта теория описать квантовые эффекты. Тем не менее мы считаем, что публикация этого теоретического метода оправдана, поскольку он дает четкую процедуру при минимуме предположений, следование которой наталкивается лишь на математические трудности.

Вопрос, о котором идет речь, может быть сформулирован следующим образом: можно ли считать приемлемой такую атомистическую теорию вещества и электричества, которая не содержит особенности поля, и использует только переменные гравитационного поля ($g_{\mu\nu}$) и переменные электромагнитного поля в смысле Максвелла (векторный потенциал φ_μ)?

На этот вопрос хочется дать отрицательный ответ, основываясь на том, что решение Шварцшильда для сферически симметричного статического гравитационного поля и обобщение этого решения Рейснером на случай электростатического поля имеют сингулярности. Кроме того, последнее из уравнений Максвелла, выражающее равенство нулю диверген-

* *The Particle Problem in the General Theory of Relativity.* (With N. Rosen). Phys. Rev., 1935, 48, 73—77.

ции (контравариантной) плотности электрического поля, по-видимому, вообще исключает существование плотности заряда и, стало быть, электрически заряженных частиц.

Исходя из этих соображений, различные авторы иногда отмечали, что существует возможность описания материальных частиц как сингулярностей поля. С такой точкой зрения мы, однако, никак не можем согласиться. Дело в том, что сингулярности приводят к такому произволу в теории, который делает ее бессодержательной. Хорошее подтверждение этого содержалось в письме Зильберштейна к одному из авторов [1]. Как известно, Леви-Чивита и Вейль дали общий метод отыскания аксиально симметричных статических решений уравнений гравитационного поля. Пользуясь этим методом, можно без труда получить решение, эвклидово на бесконечности и регулярное всюду, кроме двух (особых) точек на оси симметрии. Если считать теперь, что особенности соответствуют частицам, то этот пример отвечает случаю двух частиц, не ускоряемых их гравитационным взаимодействием, что, конечно, недопустимо с точки зрения физики. Поэтому мы думаем, что любая теория поля должна оставаться верной основному принципу отсутствия особенностей. Ниже мы покажем, что существует естественная возможность прийти к утвердительному ответу на поставленный нами вопрос.

§ 1. Специальный класс сингулярностей и их исключение

Первым шагом к общей теории относительности явился так называемый принцип эквивалентности: если в свободном от гравитационного поля пространстве равномерно ускорять какую-либо систему отсчета, то эта система отсчета может рассматриваться как «покоящаяся», при условии, что состояние пространства по отношению к ней можно интерпретировать как однородное гравитационное поле. Известно, что последнее точно описывается метрическим полем [2]

$$ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + \alpha^2 x_1^2 \, dx_4^2. \tag{1}$$

---

[1] Ср. Silberstein. Phys. Rev., 1936, 49, 268, а также статью 114.— *Прим. ред.*

[2] Следует отметить, что это метрическое поле охватывает не все пространство Минковского, а только часть его. Так, например, преобразование, превращающее $ds^2 = -d\xi_1^2 - d\xi_2^2 - d\xi_3^2 + d\xi_4^2$ в соотношение (1), имеет вид $\xi_1 = x_1 \mathrm{ch}\, h\alpha x_4$, $\xi_2 = x_2$, $\xi_3 = x_3$, $\xi_4 = x_1 \mathrm{sh}\, h\alpha x_4$. Отсюда следует, что только те точки, в которых $\xi_1^2 \geqslant \xi_4^2$, соответствуют точкам, для которых соотношение (1) представляет собой определение метрики.

Компоненты $g_{\mu\nu}$ этого поля удовлетворяют в общем случае уравнению

$$R^i_{klm} = 0, \tag{2}$$

и, следовательно, уравнениям

$$R_{kl} = R^m_{klm} = 0. \tag{3}$$

Компоненты $g_{\mu\nu}$, соответствующие (1), регулярны во всех конечных точках пространства-времени. Тем не менее нельзя утверждать, что уравнению (3) удовлетворяет решение (1) для *всех* конечных значений $x_1, \ldots, x_4$. Это связано с тем фактом, что определитель g, составленный из величин $g_{\mu\nu}$, обращается в нуль при $x_1 = 0$. Поэтому контравариантные тензоры $g^{\mu\nu}$ становятся бесконечными, а тензоры R^i_{klm} и R_{kl} принимают вид 0/0. Поэтому уравнение (3) на гиперплоскости $x_1 = 0$ имеет особенность.

Теперь мы задаемся вопросом, нельзя ли естественным образом и без значительных изменений сформулировать закон гравитационного поля (а позже и закон гравитационного и электрического полей) так, чтобы решение (1) удовлетворяло уравнениям поля во всех конечных точках, т. е. и при $x_1 = 0$. В. Майер обратил наше внимание на тот факт, что тензоры R^i_{klm} и R_{kl} можно путем их умножения на соответствующие степени g превратить в рациональные функции компонент $g_{\mu\nu}$ и их двух первых производных. Легко показать, что знаменатель выражения $g^2 R_{kl}$ не больше единицы. Поэтому, если мы заменим уравнения (3) на

$$\overset{*}{R}_{kl} = g^2 R_{kl} = 0, \tag{3a}$$

то эта система уравнений удовлетворяется решением (1) во всех конечных точках. Таким образом, исключение знаменателей сводится к замене тензора $g^{\mu\nu}$ произведением величин $g_{\mu\nu}$ в g. Поэтому вместо тензоров приходится оперировать с тензорными плотностями соответствующего веса. Таким путем удается избежать особенностей этого специального класса, характеризуемых обращением в нуль определителя g.

Решение (1), естественно, не имеет более глубокого физического смысла, поскольку дело касается пространственной бесконечности. Однако оно позволяет увидеть, в какой степени регуляризация гиперповерхностей $g = 0$ приводит к теоретическому описанию вещества, рассматриваемого с точки зрения первоначальной теории. В рамках первоначальной теории уравнения гравитационного поля имели вид

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -T_{ik}, \tag{4}$$

где T_{ik} — тензор плотности массы или энергии. Для интерпретации соотношения (1) с точки зрения этой теории мы должны аппроксимировать линейный элемент каким-либо другим выражением, не имеющим особенности при $g=0$. Соответственно этому мы вводим малую постоянную σ и полагаем

$$ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + (\alpha^2 x_1^2 + \sigma)\, dx_4^2. \tag{1a}$$

Чем меньше выбрана величина σ (>0), тем меньше будет разница между этим гравитационным полем и полем, соответствующим линейному элементу (1).

Если теперь вычислить (фиктивный) тензор энергии T_{ik}, то для отличных от нуля компонент его получим

$$T_{22} = T_{23} = \frac{\alpha^2/\sigma}{(1+\alpha^2 x_1^2/\sigma)^2}.$$

Отсюда видно, что чем меньше постоянная σ, тем сильнее этот тензор сконцентрирован в окрестности гиперповерхности $x_1=0$. В первоначальной теории решение (1) содержит сингулярность, соответствующую энергии или массе, сосредоточенной на поверхности $x_1=0$; однако в видоизмененной теории соотношение (1) представляет собой решение уравнения (3а), свободное от особенностей и описывающее массы, создающие поле; при этом не требуется введения новых переменных поля.

Ясно, что все дифференциальные уравнения могут быть записаны в форме, в которой отсутствуют знаменатели и где тензоры заменены тензорными плотностями соответствующих весов.

Следует заметить, что в случае решения (1) все поле состоит из двух равных частей, разделяемых такой поверхностью симметрии $x_1=0$, что для соответствующих точек (x_1, x_2, x_3, x_4) и $(-x_1, x_2, x_3, x_4)$ величины g_{ik} равны. В результате мы нашли, что определитель g, хотя и может обращаться в нуль (для $x_1=0$), тем не менее изменения знака g и вообще изменения сигнатуры квадратичной формы (1) при этом не происходит. Эти результаты имеют фундаментальное значение для физической интерпретации теории и мы с этим еще столкнемся при обсуждении рассматриваемых ниже решений.

§ 2. Решение Шварцшильда

Как известно, Шварцшильд нашел сферически симметричное статическое решение уравнений гравитационного поля:

$$ds^2 = -\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}\, dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + \left(1-\frac{2m}{r}\right) dt^2, \tag{5}$$

($r > 2m$, θ меняется от 0 до π, а φ — от 0 до 2π); вместо переменных x_1, x_2, x_3, x_4 здесь введены переменные r, θ, φ, t. Обращение в нуль при $\theta = 0$ определителя, составленного из величин $g_{\mu\nu}$, несущественно, так как соответствующее (пространственное) направление ничем не выделено. С другой стороны, величина g_{11} при $r = 2m$ обращается в бесконечность и, следовательно, здесь возникает особенность.

Если вместо r ввести новую переменную в соответствии с равенством

$$u^2 = r - 2m,$$

то для ds^2 получается выражение

$$ds^2 = -4(u^2 + 2m)\,du^2 - (u^2 + 2m)^2\,(d\theta^2 + \sin\theta\,d\varphi^2) + \frac{u^2}{u^2 + 2m}\,dt^2. \quad (5a)$$

Полученные таким образом новые величины $g_{\mu\nu}$ оказываются регулярными функциями при всех значениях переменных. Однако при $u = 0$ величина g_{44}, а следовательно и определитель g, обращаются в нуль. Это не противоречит тому, что уравнения поля (3а), не имеющие знаменателей, удовлетворяются при всех значениях независимых переменных. Таким образом мы имеем дело с решением (новых) уравнений поля, которое не имеет особенностей на конечном расстоянии. Гиперповерхность $u = 0$ (в первоначальных переменных $r = 2m$) играет здесь ту же роль, что и гиперповерхность $x_1 = 0$ в предыдущем примере.

Когда u меняется от $-\infty$ до $+\infty$, переменная r изменяется от $+\infty$ до $2m$ и затем снова от $2m$ до $+\infty$. Попытка интерпретации регулярного решения (5а) в пространстве r, θ, φ, t приводит к следующему результату. Четырехмерное пространство математически описывается двумя конгруэнтными областями или «листами», соответствующими значениям $u > 0$ и $u < 0$, которые соединяются гиперплоскостью $r = 2m$ или $u = 0$, на которой g обращается в нуль [3]. Такое соединение двух листов мы назовем «мостом».

Решение, свободное от сингулярностей, мы можем теперь рассматривать как математическое описание элементарной частицы (нейтрона или нейтрино). Характерной чертой развиваемой нами теории является то, что она описывает пространство с помощью двух листов. Пространственно конечный «мост», соединяющий эти листы, описывает электрически нейтральную элементарную частицу. С помощью этой концепции мы получаем возможность описывать элементарную частицу, используя лишь уравнения поля, без введения новых переменных для описания плотности

[3] Вследствие симметрии относительно гиперповерхности $u = 0$ знак g на этой поверхности не меняется.

вещества. Такой подход позволяет понять атомистический характер материи, так же как и понять, почему не могут существовать частицы с отрицательной массой. Последнее становится ясным из следующих соображений. Если мы будем исходить из решения Шварцшильда с отрицательным m, то мы не сможем получить регулярное решение, вводя вместо r новую переменную u; иначе говоря, для частицы с отрицательной массой «моста» не существует.

Если мы рассмотрим еще раз решение (1) с точки зрения той информации, которую мы получили из решения Шварцшильда, то увидим, что две конгруэнтные области для $x_1 > 0$ и $x_1 < 0$ опять могут быть истолкованы как два листа, соответствующие одному и тому же физическому пространству. Гравитационное поле в этом примере представляет собой не зависящее от x_2 и x_3 поле, кончающееся на плоскости с конечной плотностью массы, образующей границу пространства. В этом примере, так же как и в случае Шварцшильда, можно построить решение, свободное от особенностей на конечных расстояниях, если ввести видоизмененные уравнения гравитационного поля (3а).

Основной смысл приведенных нами рассуждений состоит в том, что они указывают путь к удовлетворительной трактовке движения в гравитационном поле. Одним из недостатков первоначальной релятивистской теории гравитации являлось то, что она как полевая теория была неполной; она вводила независимый постулат, согласно которому закон движения частицы задавался уравнением геодезической [4]. Полная полевая теория может включать в себя только поле, но не частицы и величины, характеризующие их движения. Последние не могут существовать независимо от поля, а должны рассматриваться как его часть. На основе описания частицы без особенностей можно дать логически более удовлетворительное решение этой проблемы: при этом проблемы поля и движения совпадают.

Если имеется несколько частиц, то этот случай соответствует отысканию такого свободного от особенностей решения видоизмененных уравнений (3а), которое описывает пространство в виде двух листов, соединенных несколькими «мостами». Каждое такое решение является одновременно решением проблемы поля и проблемы движения.

В этом случае невозможно с помощью одной координатной системы описать все поле, не вводя при этом особенностей. Наиболее простым способом выбора системы координат оказывается следующий.

[4] Ради справедливости следует отметить, что в первоначальной теории относительности эта трудность формально обходилась путем введения тензора энергии в уравнения поля. Однако с самого начала было ясно, что это было лишь феноменологическим описанием, которое не могло быть окончательным.

1. Одна система координат описывает один из листов. По отношению к этой системе поле будет иметь особенность на каждом из мостов.

2. Каждому из мостов отвечает особая система координат, не имеющая особенностей поля на мосте и в его окрестностях.

Вне гиперповерхности $g = 0$ между координатами системы, описывающей лист, и координатами систем, описывающих поле на мостах, должно существовать регулярное преобразование координат с отличным от нуля определителем.

§ 3. Объединенное поле. Электромагнетизм

Наиболее простой метод включения электромагнетизма в рамки концепций общей теории относительности основан на следующих соображениях. Если кроме чисто гравитационного поля присутствуют также и другие переменные поля, то гравитационные уравнения имеют вид

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -T_{ik}, \tag{4}$$

где T_{ik} — тензор энергии вещества, т. е. та часть математического выражения энергии, которая зависит не только от $g_{\mu\nu}$. При феноменологическом описании вещества — если его рассматривать как пылевидную материю, т. е. пренебречь давлением — следует положить

$$T^{ik} = \rho \frac{dx^i}{ds} \cdot \frac{dx^k}{ds},$$

где ρ — это скалярная плотность, $\frac{dx^i}{ds}$ — вектор скорости вещества. Следует отметить, что компонента T_4^4 оказывается при этом положительной величиной.

Дополнительные переменные поля в принципе удовлетворяют таким дифференциальным уравнениям, вследствие которых дивергенция $T_{ik,m}g^{km}$ обращается в нуль. Поскольку дивергенция левой части уравнения (4) тождественно обращается в нуль, это означает, что между величинами, входящими во все уравнения поля, существует четыре тождественных соотношения, необходимые для совместности этих уравнений. Благодаря этому условию в некоторых случаях удается определить структуру тензора T_{ik}, но не его знак. Представляется естественным выбрать этот знак так, чтобы компонента T_4^4 (в случае специальной теории относительности) всегда была положительной.

Как известно, электромагнитное поле Максвелла описывается антисимметричным тензором $\varphi_{\mu\nu}(\equiv \partial\varphi_\mu/dx^\nu - \partial\varphi_\nu/dx^\mu)$, который удовлетворяет уравнениям поля

$$\varphi_{\mu\nu;\,\sigma}\, g^{\nu\sigma} = 0. \tag{6}$$

Из этих уравнений вытекает известное следствие, что дивергенция тензора

$$T_{ik} = \frac{1}{4}\, g_{ik}\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta} - \varphi_{i\alpha}\varphi^{\alpha}_{k} \tag{7}$$

обращается в нуль. Здесь знак выбран так, что компонента T^4_4 оказывается положительной в случае специальной теории относительности. Если подставить это выражение для T_{ik} в уравнения гравитационного поля (4), то последние вместе с уравнениями (6) и (7) составляют систему уравнений теории гравитации и электромагнетизма.

Чтобы оказалось возможным получить статическое сферически симметричное решение этих уравнений, не имеющее особенностей и описывающее заряженные частицы, необходимо подставить в уравнения гравитационного поля тензор T_{ik} с обратным знаком. Делая эту замену знака, получаем решение

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0, \quad \varphi_4 = \varepsilon/r, \\ &ds^2 = -\frac{1}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{\varepsilon^2}{2r^2}}\, dr^2 - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\varepsilon^2}{2r^2}\right) dt^2. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Здесь m, очевидно, имеет смысл тяготеющей массы, а ε — электрического заряда.

Оказывается, что и в этом случае не представляет труда построить свободное от особенностей решение, соответствующее приведенному выше решению [5]. Любопытно, что масса m при этом не определяется электрическим зарядом ε и что m и ε оказываются независимыми постоянными интегрирования. Кроме того, для устранения особенностей вовсе не обязательно считать тяготеющую массу m положительной. Действительно, как мы сейчас увидим, существует свободное от особенностей решение, в котором масса m равна нулю. Поскольку мы считаем, что это решение с нулевой массой представляет физический интерес, рассмотрим случай $m = 0$.

Уравнения поля без знаменателей могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_{\mu\nu} = \varphi_{\mu,\,\nu} - \varphi_{\nu,\,\mu}, \qquad g^2\varphi_{\mu\nu;\,\sigma}\, g^{\nu\sigma} = 0, \\ &g^2\left(R_{ik} + \varphi_{i\alpha}\varphi^{\alpha}_{k} - \frac{1}{4}\, g_{ik}\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta}\right) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

[5] Если для T_{ik} принять обычный знак, то решение будет содержать $+\,\varepsilon^2$ вместо $-\,\varepsilon^2$. В этом случае с помощью преобразования координат оказывается невозможным получить свободное от сингулярностей решение.

При этом в последнем уравнении член с R опущен, так как он обращается в нуль вследствие соотношения (7), согласно которому компоненты T^α_α равны нулю.

Если в соотношении (8) (при $m = 0$) переменную r заменить на u, согласно равенству

$$u^2 = r^2 - \varepsilon^2/2,$$

то получается

$$\begin{gathered}\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0, \quad \varphi_4 = \varepsilon\Big/\left(u^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)^{1/2}, \\ ds^2 = -du^2 - (u^2 + \varepsilon^2/2)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + [2u^2/(2u^2 + \varepsilon^2)]\, dt.\end{gathered} \tag{8a}$$

Это решение не имеет особенностей на конечном расстоянии в пространстве, состоящем из двух листов, и заряду опять соответствует мост между листами. Таково описание элементарной электрически заряженной частицы с нулевой массой.

§ 4. Заключение и общие замечания

Если решить уравнения общей теории относительности для статического сферически симметричного случая, то независимо от того, присутствует электрическое поле или нет, решение будет содержать особенности. При незначительной модификации уравнений, при которой отбрасываются знаменатели, оказывается возможным получить регулярное решение, если физическое пространство рассматривать состоящим из двух листов. Нейтральная, так же как и электрически заряженная, частица, есть не что иное, как часть пространства (мост), соединяющая эти два листа. На соединяющей два листа гиперповерхности определитель, составленный из величин $g_{\mu\nu}$, обращается в нуль.

Можно ожидать, что процесс, в котором принимают участие несколько элементарных частиц, соответствует регулярному решению уравнений поля с несколькими мостами между двумя эквивалентными листами, соответствующими физическому пространству. Только исследование этих решений может показать, насколько эта теория соответствует фактам. Пока мы даже не знаем, существуют ли вообще регулярные решения, которые имеют более чем один мост.

Оказывается, что наиболее простой электрической частицей в этой теории является частица без тяготеющей массы. Проблема электрона или протона представляет собой проблему двух мостов.

В пользу теории говорит то, что она объясняет атомистический характер вещества, а также и то, что в ней не существует нейтральных частиц с отрицательной массой. Кроме того, теория не вводит никаких новых переменных, кроме $g_{\mu\nu}$ и φ_μ, и в принципе может претендовать на полноту (или замкнутость). С другой стороны, априори не видно, включает ли она и теорию квантовых явлений. Тем не менее априори нельзя исключать возможность, что теория их содержит. Так, может оказаться, что существуют только такие регулярные решения с многими мостами, для которых «заряды» электрических мостов численно равны друг другу, а для «масс» мостов возможны только два значения, и для которых стационарные «движения» подчинены ограничениям, аналогичным тем, с которыми мы сталкиваемся в квантовой теории.

Во всяком случае здесь мы встречаемся с возможностью построения общей релятивистской теории вещества, которая с точки зрения логики является совершенно удовлетворительной и которая не содержит никаких новых гипотез.

Поступила 8 мая 1935 г.

ПРОБЛЕМА ДВУХ ТЕЛ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

(Совместно с Н. Розеном)

В недавней работе Зильберштейн [1] пытался доказать несправедливость общей теории относительности. Он рассуждал следующим образом:

а) Я построил статическое решение гравитационных уравнений, которое имеет две особые точки и не имеет других особенностей.

б) Представляемые этими точками частицы не ускоряют друг друга своими гравитационными полями, что противоречит опыту. Следовательно, гравитационные уравнения общей теории относительности неверны.

Мы хотим указать на следующее. Даже если утверждение «а» действительно справедливо, заключение «б» необоснованно. Дело в том, что в теории поля приемлемым является только такое описание масс, которое свободно от особенностей, поскольку в особых точках законы поля нарушаются. Однако даже утверждение «а» неверно. Мы покажем, что решение Зильберштейна имеет особенности и вне этих двух точек. Мы не отметили этого в нашей предыдущей работе [2], где мы ссылались на решение Зильберштейна, сообщенное перед этим одному из нас.

Чтобы линейный элемент вида (1) (см. работу Зильберштейна) представлял собою регулярное гравитационное поле вне двух частиц, необходима не только непрерывность функций ν и λ и их первых производных, но функция λ, кроме того, должна обращаться в нуль при $x_1 = 0$ всюду, за исключением двух точек, в которых расположены массы. Последнее условие необходимо для того, чтобы бесконечно малая окружность в плоскости $x_2 = \text{const}$, $x_4 = \text{const}$ с центром в точке $x_1 = 0$ имела бы отношение длины окружности к диаметру, в естественных единицах (интеграл от ds)

* *Two-body Problem in General Theory of Relativity* (With N. Rosen). Phys. Rev., 1936, 49, 404—405.

[1] Silberstein, Phys. Rev., 1936, 49, 268.
[2] A. Einstein, N. Rosen, Phys. Rev., 1935, 48, 73 (Статья 113).

равное π. Можно показать, что рассматриваемое нами решение, насколько это касается функции λ, не удовлетворяет этому условию.

Для этого мы перепишем соотношение (10) в более удобном виде, вводя угол α между двумя радиус-векторами r_1 и r_2. Этот угол удовлетворяет соотношению

$$r_1 r_2 \cdot \sin\alpha = Dx_1.$$

В формуле (10) член в скобках можно теперь записать в виде:

$$[\ ] = \pm\cos\alpha - 1,$$

где двойной знак получается при извлечении квадратного корня. Согласно Зильберштейну, квадратный корень всегда должен быть положительным, и поэтому следует писать

$$[\ ] = |\cos\alpha| - 1.$$

Это очевидным образом ведет, в противоречии с условием регулярности, к разрывности производной функции λ на поверхности $\alpha = \pi/2$.

Более подробное исследование показывает, что на самом деле все вычисления можно провести, не вводя квадратного корня и сопутствующей ему неопределенности в знаке. При этом в правильное решение входит

$$[\ ] = \cos\alpha - 1.$$

Однако это также не удовлетворяет условиям регулярности, так как λ не обращается в нуль на оси ($x_1 = 0$) между двумя точками, в которых расположены точечные массы.

Мы хотим отметить, что в письме к одному из нас профессор Ланчос из университета в Пардю также обнаружил эту ошибку в работе Зильберштейна.

Принстон, 17 февраля 1936 г.

Уравнение (1) в статье Зильберштейна, на которую ссылается Эйнштейн, определяет аксиально-симметричную метрику

$$ds^2 = e^{2\nu}dx_4^2 - e^{-2\nu}\left[e^{2\lambda}\left(dx_1^2 + dx_2^2\right) + x_1^2 dx_3^2\right],$$

где ν и λ — функции координат.

Располагая частицы на оси x_2 на расстоянии D друг от друга и обозначая через r_1 и r_2 расстояния точки до обеих частиц и через L_1 и L_2 две постоянные, Зильберштейн получает

$$\nu = -\frac{L_1}{r_1} - \frac{L_2}{r_2},$$

$$\lambda = -\frac{x_1^2}{2} + \left(\frac{L_1^2}{r_1^4} + \frac{L_2^2}{r_2^4}\right) + \frac{2L_1L_2}{D}\left[\left(1 - \frac{D^2x_1^2}{r_1^2r_2^2}\right)^{1/2} - 1\right].$$

Это и есть формула (10).

ЛИНЗОПОДОБНОЕ ДЕЙСТВИЕ ЗВЕЗДЫ ПРИ ОТКЛОНЕНИИ СВЕТА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ*

Некоторое время тому назад меня навестил Р. Мандл и попросил опубликовать результаты небольшого расчета, который я провел по его просьбе. Уступая его желанию, я решил опубликовать эту заметку.

Свет, идущий из звезды A, проходит через гравитационное поле другой звезды B, радиус которой равен R_0. Пусть наблюдатель находится на расстоянии D от B и на расстоянии x, малом по сравнению с D, от продолжения линии $\overline{AB}$, соединяющей центры звезд A и B. Обозначим через α_0 величину получаемого в общей теории относительности отклонения светового луча, проходящего мимо звезды B на расстоянии R_0 от ее центра. Ради простоты предположим, что $\overline{AB}$ велико по сравнению с расстоянием наблюдателя от «отклоняющей» звезды B. Будем пренебрегать также эффектом перекрытия (геометрическое затемнение) звездой B, который действительно ничтожен во всех практически важных случаях. Для этого необходимо, чтобы D намного превышало радиус R_0 «отклоняющей» звезды.

Из закона отклонения следует, что наблюдатель, расположенный точно на продолжении линии $\overline{AB}$, увидит вместо точечной звезды A светящийся круг с угловым радиусом β вокруг центра B. Здесь

$$\beta = \sqrt{\alpha \cdot \frac{R_0}{D}}.$$

Следует заметить, что этот радиус β уменьшается с увеличением расстояния D не как $\frac{1}{D}$, а как $\frac{1}{\sqrt{D}}$.

* *Lens-like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field.* Science, 1936, 84, 506—507.

Конечно, нельзя надеяться на то, что удастся прямо наблюдать это явление. Во-первых, едва ли мы когда-нибудь приблизимся достаточно близко к такой линии центров. Во-вторых, угол β слишком мал по сравнению с разрешающей силой наших инструментов. Действительно, отклонение α_0 по порядку величины равно одной секунде, угол R_0/D, под которым видна «отклоняющая» звезда,— много меньше. Поэтому свет, идущий из светящегося круга, не может быть отделен наблюдателем от света, испускаемого звездой B; возрастет лишь кажущаяся яркость звезды B.

Похожее явление будет иметь место, если наблюдатель расположен на малом расстоянии x от линии центров $\overline{AB}$. Однако в этом случае наблюдатель увидит вместо A два точечных источника света, отклоненных приблизительно на угол β от истинного геометрического положения A.

Кажущаяся яркость звезды A увеличивается в q раз благодаря линзоподобному действию гравитационного поля звезды B. Величина q значительно больше единицы только в том случае, если x настолько мало, что наблюдаемые положения A и B совпадают в пределах разрешающей силы наших инструментов. Простое геометрическое рассмотрение приводит к выражению

$$q=\frac{l}{x}\cdot\frac{1+\frac{x^2}{2l^2}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4l^2}}},$$

где

$$l=\sqrt{\alpha_0 D R_0}.$$

Если нас интересует случай $q \gg 1$, то формула

$$q=\frac{l}{x}$$

является достаточно хорошим приближением, так как величиной x^2/l^2 можно пренебречь. Даже в наиболее благоприятных случаях длина l равна нескольким световым секундам и расстояние x должно быть мало по сравнению с этой величиной, если мы хотим, чтобы благодаря линзоподобному действию B видимая яркость A значительно увеличилась.

Следовательно, у нас мало шансов наблюдать это явление, даже если пренебречь ослепляющим действием света намного более близкой звезды B. Кажущееся увеличение q вследствие линзоподобного действия звезды B представляет собой чрезвычайно любопытный эффект не только потому, что q стремится к бесконечности с уменьшением x, но и потому, что с увеличением расстояния до наблюдателя эффект не уменьшается, но даже растет пропорционально $\sqrt{D}$.

О ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛНАХ *

(Совместно с Н. Розеном)

В статье дается строгое решение для цилиндрических гравитационных волн. Для удобства читателя в первой части статьи излагается уже известная в основном теория гравитационных волн и их излучения. После того как были получены соотношения, вызывающие сомнение в существовании *строгих* решений для волнообразных гравитационных полей, строго исследуется случай цилиндрических гравитационных волн. При этом оказывается, что строгие решения существуют и что задача сводится к обычным цилиндрическим волнам в эвклидовом пространстве.

I. Приближенное решение задачи о плоских волнах и излучение гравитационных волн

Хорошо известно, что применение приближенного метода интегрирования уравнений гравитационного поля общей теории относительности обнаруживает существование гравитационных волн. Упомянутый метод состоит в следующем. Исходим из уравнений поля

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-T_{\mu\nu}; \tag{1}$$

заменим величины $g_{\mu\nu}$ выражениями:

$$g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+\gamma_{\mu\nu}, \tag{2}$$

где

$$\delta_{\mu\nu}=\begin{cases}1 \text{ при } \mu=\nu,\\ 0 \text{ при } \mu\neq\nu,\end{cases}$$

если временнáя координата взята мнимой, как это было сделано Минковским. Предполагается, что величины $\gamma_{\mu\nu}$ малы, т. е. что гравитационное

* *On Gravitational Waves.* (With N. Rosen). J. Franklin Inst., 1937, 223, 43—54.

поле слабое. В уравнениях поля величины $\gamma_{\mu\nu}$ и их производные будут встречаться в различных степенях. Если $\gamma_{\mu\nu}$ всюду достаточно малы по сравнению с единицей, можно получить решение уравнений в первом приближении, пренебрегая в уравнениях (1) более высокими степенями величин $\gamma_{\mu\nu}$ (и их производных) по сравнению с низшими. Если, далее, ввести $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ вместо $\gamma_{\mu\nu}$ с помощью соотношений

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\alpha},$$

то уравнения (1) принимают вид

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu,\alpha\alpha} - \bar{\gamma}_{\mu\alpha,\alpha\nu} - \bar{\gamma}_{\nu\alpha,\alpha\mu} + \bar{\gamma}_{\alpha\alpha,\mu\nu} = -2T_{\mu\nu}. \tag{3}$$

Специализация вида $g_{\mu\nu}$, содержащаяся в соотношении (2), сохраняется при бесконечно малом преобразовании координат

$$x'_\mu = x_\mu + \xi^\mu, \tag{4}$$

где ξ^μ — произвольные бесконечно малые функции. Поэтому можно задать четыре значения $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ или четыре условия, которым должны удовлетворять $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ наряду с уравнениями (3); это сводится к специальному выбору системы координат, в которой описывается поле. Выберем систему координат обычным образом — с помощью требования

$$\bar{\gamma}_{\mu\alpha,\alpha} = 0. \tag{5}$$

Легко убедиться в том, что эти четыре условия совместны с приближенными уравнениями гравитационного поля, если дивергенция $T_{\mu\alpha,\alpha}$ тензора $T_{\mu\nu}$ равна нулю, что необходимо предположить согласно специальной теории относительности.

Однако оказывается, что эти условия неполностью определяют систему координат. Если $\gamma_{\mu\nu}$ — решения уравнений (2) и (5), то $\gamma'_{\mu\nu}$, после преобразования типа (4),

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \xi^\mu_{,\nu} + \xi^\nu_{,\mu}, \tag{6}$$

также являются решениями, если ξ^μ удовлетворяют условиям

$$\left[\xi^\mu_{,\nu} + \xi^\nu_{,\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(\xi^\alpha_{,\alpha} + \xi^\alpha_{,\alpha})\right]_{,\nu} = 0,$$

или

$$\xi^\mu_{,\alpha\alpha} = 0. \tag{7}$$

Если можно добиться обращения γ-поля в нуль добавлением членов, подобных входящим в соотношение (6), т. е. посредством бесконечно малого преобразования, то описываемое гравитационное поле является лишь фиктивным.

Принимая во внимание соотношения (2), можно записать уравнения гравитационного поля для пустого пространства в виде

$$\left.\begin{aligned}\bar{\gamma}_{\mu\nu,\alpha\alpha} &= 0,\\ \gamma_{\mu\alpha,\alpha} &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Плоские гравитационные волны, распространяющиеся в направлении положительной оси x_1, получаются, если взять $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ в виде $\varphi(x_1+ix_4)$ $(=\varphi(x_1-t))$, причем эти $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ должны удовлетворять условиям:

$$\left.\begin{aligned}\bar{\gamma}_{11}+i\bar{\gamma}_{14} &= 0,\\ \bar{\gamma}_{41}+i\bar{\gamma}_{44} &= 0,\\ \bar{\gamma}_{21}+i\bar{\gamma}_{24} &= 0,\\ \bar{\gamma}_{31}+i\bar{\gamma}_{34} &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Соответственно (бегущие) плоские гравитационные волны наиболее общего вида можно подразделить на три типа:

а) чисто продольные волны:

только $\bar{\gamma}_{11}$, $\bar{\gamma}_{14}$, $\bar{\gamma}_{44}$ отличны от нуля;

б) полупродольные, полупоперечные волны:

только $\bar{\gamma}_{21}$ и $\bar{\gamma}_{24}$, или только $\bar{\gamma}_{31}$ и $\bar{\gamma}_{34}$ отличны от нуля;

в) чисто поперечные волны:

только $\bar{\gamma}_{22}$, $\bar{\gamma}_{23}$, $\bar{\gamma}_{33}$ отличны от нуля.

На основе предыдущих замечаний можно, далее, показать, что любая волна типа «а» или типа «б» представляет собой фиктивное поле, т. е. поле, которое может быть получено посредством бесконечно малого преобразования из эвклидова поля ($\bar{\gamma}_{\mu\nu}=\gamma_{\mu\nu}=0$).

Проведем доказательство на примере волны типа «а». Если φ — соответствующая функция аргумента x_1+ix_4, то, согласно условиям (9), следует положить

$$\bar{\gamma}_{11}=\varphi,\quad \bar{\gamma}_{14}=i\varphi,\quad \bar{\gamma}_{44}=-\varphi,$$

и, следовательно, также

$$\gamma_{11}=\varphi,\quad \gamma_{14}=i\varphi,\quad \gamma_{44}=-\varphi.$$

Если теперь выбрать ξ^1 и ξ^4 (при $\xi^2 = \xi^3 = 0$) так, что

$$\xi^1 = \chi(x_1 + ix_4), \qquad \xi^4 = i\chi(x_1 + ix_4),$$

то получим

$$\xi^{1} + \xi^4_{,1} = 2\chi', \qquad \xi^1_{,4} + \xi^4_{,1} = 2i\chi', \qquad \xi^4_{,4} + \xi^4_{,4} = -2\chi'.$$

Это согласуется со значениями, приведенными выше для γ_{11}, γ_{14}, γ_{44}, если выбрать $\chi' = \frac{1}{2}\varphi$. Тем самым показано, что эти волны являются фиктивными. Аналогичное доказательство может быть проведено для волн типа «б».

Далее, мы хотим показать, что тип «в» также содержит фиктивные поля, а именно, те, у которых $\bar{\gamma}_{22} = \bar{\gamma}_{33} \neq 0$, $\bar{\gamma}_{23} = 0$. Соответствующими значениями $\gamma_{\mu\nu}$ являются $\gamma_{11} = \gamma_{44} \neq 0$, все остальные компоненты равны нулю. Такую волну можно получить, положив $\xi' = \chi$, $\xi^4 = -i\chi$, т. е. посредством бесконечно малого преобразования эвклидова пространства. Соответственно, в качестве реальных волн остаются только оба типа чисто поперечных волн, неисчезающими компонентами которых являются

$$\gamma_{22} = -\gamma_{33} \tag{в$_1$}$$

или

$$\gamma_{23}. \tag{в$_2$}$$

Однако из закона преобразования тензоров следует, что оба эти типа волн могут быть преобразованы один в другой путем пространственного вращения системы координат вокруг оси x_1 на угол $\frac{\pi}{4}$. Они представляют просто разложение на составляющие чисто поперечной волны (единственной, имеющей реальный смысл). Тип (в$_1$) характеризуется тем, что его компоненты не изменяются при преобразованиях

$$x_2' = -x_2, \qquad x_1' = x_1, \qquad x_3' = x_3, \qquad x_4' = x_4$$

или

$$x_3' = -x_3, \qquad x_1' = x_1, \qquad x_2' = x_2, \qquad x_4' = x_4,$$

в противоположность типу (в$_2$), т. е. волны типа (в$_1$) симметричны относительно плоскостей x_1x_2 и x_1x_3.

Исследуем теперь излучение волн в рамках приближенных (линеаризованных) уравнений гравитационного поля. Система уравнений, которую надо проинтегрировать, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\mu\nu,\alpha\alpha} &= -2T_{\mu\nu}, \\ \bar{\gamma}_{\mu\alpha,\alpha} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Предположим, что физическая система, описываемая тензором $T_{\mu\nu}$, находится вблизи от начала координат. Тогда поле определяется формально так же, как электромагнитное поле определяется системой электромагнитных токов. Обычным решением является решение в виде запаздывающих потенциалов

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{[T_{\mu\nu}]_{(t-r)}}{r}\,dv. \tag{11}$$

Здесь r означает пространственное расстояние рассматриваемой точки от элемента объема, $t = x_4/i$ — рассматриваемый момент времени.

Если рассматривать материальную систему, находящуюся в объеме с размерами, малыми по сравнению с r_0 — расстоянием рассматриваемой точки от начала координат, а также малыми по сравнению с длинами излучаемых волн, то можно заменить r на r_0, что дает

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi r_0}\int [T_{\mu\nu}]_{(t-r_0)}\,dv,$$

или

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi r_0}\left[\int T_{\mu\nu}\,dv\right]_{(t-r_0)}. \tag{12}$$

Компоненты $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ тем точнее аппроксимируются плоской волной, чем больше выбранное значение r_0. Если рассматриваемую точку выбрать вблизи от оси x_1, то нормаль волны параллельна направлению x_1, и только компоненты $\bar{\gamma}_{22}$, $\bar{\gamma}_{23}$, $\bar{\gamma}_{33}$ отвечают, согласно предыдущему, истинной гравитационной волне. Соответствующие интегралы (12) для излучающей системы, состоящей из движущихся друг относительно друга масс, не имеют, взятые сами по себе, простого смысла. Заметим, однако, что T имеет смысл взятой с обратным знаком плотности энергии, которая в случае медленного движения практически совпадает с плотностью массы в смысле обычной механики. Как будет показано, интегралы (12) могут быть выражены через эту величину. Это можно сделать благодаря существованию закона сохранения энергии-импульса физической системы

$$T_{\mu\alpha,\alpha} = 0. \tag{13}$$

Умножая второе из этих уравнений на x_2, а четвертое — на $\frac{1}{2}x_2^2$ и интегрируя по всей системе, получаем два интегральных соотношения, которые вместе дают

$$\int T_{22}dv = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\int x_2^2 T_{44}dv. \tag{13a}$$

Аналогично получаем

$$\int T_{33} dv = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \int x_3^2 T_{44} dv,$$

$$\int T_{23} dv = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \int x_2 x_3 T_{44} dv.$$

Отсюда видно, что производные по времени от моментов инерции определяют излучение гравитационных волн, если весь метод приближенных уравнений оправдан. В частности, видно также, что случай волн, симметричных относительно плоскостей x_1x_2 и x_1x_4, мог бы быть реализован с помощью упругих колебаний материальной системы, обладающей теми же свойствами симметрии. Примером могут служить две равные массы, соединенные пружиной и колеблющиеся навстречу друг другу в направлении, параллельном оси x_3.

Из закона сохранения энергии следует, что система, излучающая гравитационные волны, должна излучать и энергию, что приводит к затуханию движения. Тем не менее можно представить себе и случай незатухающих колебаний, если предположить, что кроме волн, излучаемых системой, имеется еще второе концентрическое волновое поле, распространяющееся внутрь, которое сообщает системе столько же энергии, сколько уносят расходящиеся волны. Тогда будет существовать незатухающий механический процесс, происходящий внутри системы стоячих волн.

Математически это связано со следующим обстоятельством, выясненным в свое время Ритцем и Тетроде. Интегрирование волнового уравнения

$$\Box \varphi = -4\pi\rho$$

с помощью *запаздывающего* потенциала

$$\varphi = \int \frac{[\rho]_{(t-r)}}{r} dv$$

математически не является единственной возможностью. Можно провести это интегрирование также с помощью «опережающего» потенциала

$$\varphi = \int \frac{[\rho]_{(t+r)}}{r} dv,$$

или же с помощью наложения решений обоих типов, например

$$\varphi = \frac{1}{2} \int \frac{[\rho]_{(t+r)} + [\rho]_{(t-r)}}{r} dv.$$

Последняя возможность соответствует отсутствию затухания — случаю стоячей волны.

Следует отметить, что можно получить волны, генерируемые описанным выше образом, сколь угодно точно аппроксимирующие плоские волны. Их можно получить, например, путем предельного перехода, предполагая, что источник волн все более и более удаляется от рассматриваемой точки, причем переменный момент инерции тела должен одновременно пропорционально возрастать.

II. Строгое решение для цилиндрических волн

Выберем координаты x_1, x_2 в меридиональной плоскости так, чтобы через $x_1 = 0$ проходила ось вращения, а x_2 изменялась от 0 до бесконечности. Пусть x_3 — угловая координата, определяющая положение меридиональной плоскости. Пусть также поле симметрично относительно каждой плоскости $x_2 = \text{const}$ и относительно каждой меридиональной плоскости. Требуемая симметрия приводит к обращению в нуль всех компонент $g_{\mu\nu}$, содержащих один, и только один, индекс 2; то же справедливо и для индекса 3. В таком гравитационном поле только компоненты

$$g_{11},\ g_{22},\ g_{33},\ g_{44},\ g_{14}$$

могут быть отличны от нуля. Для удобства выберем все координаты вещественными. Далее можно преобразовать координаты x_1, x_4 так, чтобы удовлетворить еще двум условиям. В качестве этих условий возьмем

$$\left.\begin{aligned} g_{14} &= 0, \\ g_{11} &= -g_{44}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Легко показать, что это можно сделать, не вводя никаких особенностей.

Положим теперь

$$\left.\begin{aligned} -g_{11} = g_{44} &= A, \\ -g_{22} &= B, \\ -g_{33} &= C, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где $A, B, C > 0$.

В этих обозначениях вычисление дает

$$\left.\begin{aligned}
2\left(R_{11}-\frac{1}{2}g_{11}R\right) &= \frac{B_{44}}{B}+\frac{C_{44}}{C}-\frac{1}{2}\Big[\frac{B_4^2}{B^2}+\frac{C_4^2}{C^2}-\frac{B_4C_4}{BC}+\\
&\quad+\frac{A_4}{A}\left(\frac{B_4}{B}+\frac{C_4}{C}\right)+\frac{B_1C_1}{BC}+\frac{A_1}{A}\left(\frac{B_1}{B}+\frac{C_1}{C}\right)\Big],\\
\frac{2A}{B}\left(R_{22}-\frac{1}{2}g_{22}R\right) &= \frac{A_{44}}{A}+\frac{C_{44}}{C}-\frac{A_{11}}{A}-\frac{C_{11}}{C}+\\
&\quad+\frac{1}{2}\left[\frac{C_1^2}{C^2}-\frac{C_4^2}{C^2}+\frac{2A_1^2}{A^2}-\frac{2A_4^2}{A^2}\right],\\
\frac{2A}{C}\left(R_{33}-\frac{1}{2}g_{33}R\right) &= \frac{A_{44}}{A}+\frac{B_{44}}{B}-\frac{A_{11}}{A}-\frac{B_{11}}{B}+\\
&\quad+\frac{1}{2}\left[\frac{2A_1^2}{A^2}-\frac{2A_4^2}{A^2}+\frac{B_1^2}{B^2}-\frac{B_4^2}{B^2}\right],\\
2\left(R_{44}-\frac{1}{2}g_{44}R\right) &= \frac{B_{11}}{B}+\frac{C_{11}}{C}-\frac{1}{2}\Big[\frac{B_1^2}{B^2}+\frac{C_1^2}{C^2}-\frac{B_1C_1}{BC}+\\
&\quad+\frac{A_1}{A}\left(\frac{B_1}{B}+\frac{C_1}{C}\right)+\frac{B_4C_4}{BC}+\frac{A_4}{A}\left(\frac{B_4}{B}+\frac{C_4}{C}\right)\Big],\\
2R_{14} &= \frac{B_{14}}{B}+\frac{C_{14}}{C}-\frac{1}{2}\Big[\frac{B_1B_4}{B^2}+\frac{C_1C_4}{C^2}+\\
&\quad+\frac{A_4}{A}\left(\frac{B_1}{B}+\frac{C_1}{C}\right)+\frac{A_1}{A}\left(\frac{B_4}{B}+\frac{C_4}{C}\right)\Big],
\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

где индексами у членов в правой части обозначено дифференцирование. Если взять в качестве уравнений поля эти выражения, приравненные нулю, заменить второе и третье их суммой и разностью, и ввести в качестве новых переменных

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \ln A,\\
\beta &= \frac{1}{2}\ln(B/C),\\
\gamma &= \frac{1}{2}\ln(BC),
\end{aligned}\right\}\qquad(15\text{a})$$

то получим:

$$2\gamma_{44}+\frac{1}{2}[\beta_4^2+3\gamma_4^2+\beta_1^2-\gamma_1^2-2\alpha_1\gamma_1-2\alpha_4\gamma_4]=0,\qquad(17)$$

$$2(\alpha_{11}-\alpha_{44})+2\gamma_{11}-2\gamma_{44}+[\beta_1^2+\gamma_1^2-\beta_4^2-\gamma_4^2]=0,\qquad(18)$$

$$\beta_{11} - \beta_{44} + [\beta_1\gamma_1 + \beta_4\gamma_4] = 0, \tag{19}$$

$$2\gamma_{11} + \frac{1}{2}[\beta_1^2 + 3\gamma_1^2 + \beta_4^2 - \gamma_4^2 - 2\alpha_1\gamma_1 - 2\alpha_4\gamma_4] = 0, \tag{20}$$

$$2\gamma_{14} + [\beta_1\beta_4 + \gamma_1\gamma_4 - 2\alpha_1\gamma_4 - 2\alpha_4\gamma_1] = 0. \tag{21}$$

Первое и четвертое уравнения этой группы дают

$$\gamma_{11} - \gamma_{44} + (\gamma_1^2 - \gamma_4^2) = 0. \tag{22}$$

Подстановка

$$\gamma = \ln\sigma, \qquad \sigma = (BC)^{1/2} \tag{23}$$

приводит к волновому уравнению

$$\sigma_{11} - \sigma_{44} = 0, \tag{24}$$

имеющему решение

$$\sigma = f(x_1 + x_4) + g(x_1 - x_4), \tag{25}$$

где f и g — произвольные функции. Уравнение (18) сводится к уравнению:

$$\alpha_{11} - \alpha_{44} + \frac{1}{2}(\beta_1^2 - \beta_4^2 + \gamma_4^2 - \gamma_1^2) = 0. \tag{18a}$$

Тогда из уравнения (17) видно, что γ не может всюду обращаться в нуль.

Теперь необходимо выяснить, существуют ли волнообразные процессы, для которых γ не равно нулю. Заметим, что такой волнообразный процесс представляется в первом приближении «волнообразной» функцией β, т. е. β-функцией, зависимость которой от x_1 и x_4 обнаруживает максимумы и минимумы; того же следует ожидать и для строгого решения. В отношении γ известно, что $e^\gamma = \sigma$ удовлетворяет волновому уравнению (24) и потому принимает вид (25). Однако из этого не следует с необходимостью «волнообразный» характер этой величины. Действительно, мы покажем, что γ не может иметь минимумов.

Наличие такого минимума означало бы существование минимумов у функций f и g из (25). В точке минимума (x_1, x_4) должно было бы быть $\gamma_1 = \gamma_4 = 0$, $\gamma_{11} \geqq 0$, $\gamma_{44} \geqq 0$. Но, согласно соотношениям (17) и (20), это невозможно. Следовательно, γ не имеет минимумов, т. е. не имеет волнообразного характера, а изменяется (по крайней мере, в области пространства, произвольно протяженной в одном направлении) монотонно. Рассмотрим теперь такую область пространства.

Полезно установить, при каких преобразованиях координат x_1 и x_4 система уравнений (14) остается инвариантной. Для этой инвариантности необходимо и достаточно, чтобы преобразование удовлетворяло уравнениям

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_4},\\ \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_4} &= \frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_1}.\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Следовательно, мы можем произвольно выбрать $\bar{x}_1(x_1, x_4)$ так, чтобы удовлетворялось уравнение

$$\frac{\partial^2 \bar{x}_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_4^2} = 0, \tag{26a}$$

и тогда система (26) определит соответствующее $\bar{x}_4$. Поскольку e^γ инвариантно относительно этого преобразования и также удовлетворяет волновому уравнению, существует такое преобразование, при котором $\bar{x}_1$ соответственно равно или пропорционально e^γ. В новой системе координат имеем

$$e^\gamma = a x_1$$

или

$$\gamma = \ln a + \ln x_1. \tag{27}$$

Если вместо γ подставить в (17) — (27) это выражение для γ, то уравнения приводятся к эквивалентной системе:

$$\beta_{11} - \beta_{44} + \frac{1}{x_1}\beta_1 = 0, \tag{28}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} x_1 (\beta_1^2 + \beta_4^2) - \frac{1}{2x_1} \tag{29}$$

и

$$\alpha_4 = x_1 \beta_1 \beta_4. \tag{30}$$

Уравнение (28) представляет собой уравнение для цилиндрических волн в трехмерном пространстве, если под x_1 понимать расстояние от оси вращения. При заданном β уравнения (29) и (30) определяют функцию α с точностью до (произвольной) аддитивной постоянной, в то время как γ уже определено равенством (27).

Чтобы волны можно было считать волнами в эвклидовом пространстве, решения, отвечающие эвклидову пространству в случае поля, не зависящего от x_4, должны удовлетворять этим уравнениям. Такое поле описывается равенствами

$$A = 1, \qquad B = 1, \qquad C = x_1^2,$$

если обозначить через x_3 угол поворота вокруг оси вращения. Эти значения дают

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\ln x_1, \quad \gamma = \ln x_1,$$

откуда и видно, что уравнения (27) — (30) действительно удовлетворяются.

Мы должны еще исследовать, существуют ли *стационарные* волны, т. е. волны, чисто периодические во времени.

Непосредственно ясно, что для β такие решения существуют. Хотя такое ограничение несущественно, мы рассмотрим случай, когда изменение β во времени синусоидально. Пусть β имеет вид

$$\beta = X_0 + X_1 \sin \omega x_4 + X_2 \cos \omega x_4,$$

где X_0, X_1, X_2 — функции только x_1. Тогда из уравнения (30) следует, что α периодично в том и только в том случае, когда интеграл

$$\int \beta_1 \beta_4 dx_4,$$

взятый по целому числу периодов, обращается в нуль.

В случае стационарного колебания, описываемого функцией

$$\beta = X_0 + X_1 \sin \omega x_4,$$

это условие действительно выполняется, поскольку

$$\int \beta_1 \beta_4 dx_4 = \int (X_0' + X_1' \sin \omega x_4)\, \omega X_1 \cos \omega x_4 dx_4 = 0.$$

С другой стороны, в общем случае, включающем случай бегущих волн, для этого интеграла получается значение

$$\frac{1}{2}(X_1 X_2' - X_2 X_1')\, \omega T,$$

где T — промежуток времени, по которому берется интеграл. Это значение, вообще говоря, не равно нулю. На расстояниях x_1 от $x_1 = 0$, больших по сравнению с длинами волн, и в области, содержащей большое число волн, бегущая волна с хорошим приближением может быть представлена в виде

$$\beta = X_0 + a \sin \omega (x_4 - x_1),$$

где a — постоянная (происходящая от функции, слабо зависящей от x_1). В этом случае $X_1 = a \cos \omega x_1$, $X_2 = -a \sin \omega x_1$, так что интеграл может быть (приблизительно) представлен в виде: $-\frac{1}{2} a\omega^2 T$. Таким образом, он не может обращаться в нуль и имеет всегда один и тот же знак. Следовательно, бегущие волны вызывают вековое изменение метрики.

Это явление обусловлено переносом энергии волнами, связанным с непрерывным изменением во времени гравитирующей массы, локализованной на оси $x_1 = 0$.

Примечание. Вторая часть настоящей статьи была значительно изменена мной после отъезда Н. Розена в Россию, поскольку мы вначале ошибочно интерпретировали наши формальные результаты. Я хочу поблагодарить моего коллегу проф. Робертсона за его дружескую помощь в выяснении первоначальной ошибки. Я благодарю также Гоффмана за любезную помощь при переводе.

А. Эйнштейн.

ГРАВИТАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРОБЛЕМА ДВИЖЕНИЯ*

(Совместно с Л. Инфельдом и Б. Гоффманом)

Введение

В этой статье мы исследуем наиболее простой вопрос о том, в какой степени релятивистские уравнения гравитационного поля определяют движение весомых тел.

Предыдущие попытки решения этой проблемы [1] были основаны на гравитационных уравнениях, в которые входил некоторый специальный тензор энергии-импульса для материи. Однако такие тензоры энергии-импульса следует рассматривать как чисто временные и более или менее феноменологические способы представления структуры материи, и их присутствие в уравнениях делает невозможным определение того, насколько полученные результаты не зависят от специального предположения относительно состава материи.

В действительности, единственными уравнениями гравитационного поля, которые бесспорно следуют из основных предположений общей теории относительности, являются уравнения для пустого пространства, и важно знать, способны ли они *одни* определить движение тел. Ответ на этот вопрос вовсе не очевиден. В классической физике можно найти примеры, ведущие к обоим ответам: да и нет. Например, в обычных уравнениях Максвелла для пустого пространства, в которых электрические частицы рассматриваются как точечные сингулярности поля, движение этих сингулярностей не определяется линейными уравнениями поля. С другой стороны, известная теория Гельмгольца о движении вихрей в невязкой

* *Gravitational Equations and Problems of Motion* (With L. Infeld and B. Hoffmann). Ann. Math., 1938, 39, 65—100.

[1] Droste. Ac. van Wet. Amsterdam, 1916, 19, 447; De Sitter. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1916, 67, 155; Mathisson. Z. Phys., 1931, 67, 270, 826; 1931, 69, 389; Levi-Civita. Amer. J. Math., 1937, 3, 225.

жидкости представляет собой пример того, как движение линейных сингулярностей в действительности определяется только дифференциальными уравнениями в частных производных, которые в этом случае являются нелинейными.

В этой статье мы покажем, что гравитационных уравнений для пустого пространства фактически достаточно для определения движения материи, представленной в виде точечных сингулярностей поля. Гравитационные уравнения нелинейны и, вследствие необходимой свободы в выборе координатной системы, таковы, что между ними существует четыре дифференциальных соотношения, так что они образуют переопределенную систему уравнений. Переопределение ответственно за существование уравнений движения, а нелинейный характер — за существование членов, выражающих взаимодействие движущихся тел.

К определению движения ведут два существенных шага. 1. Посредством нового метода приближения, специально приспособленного для рассмотрения квазистационарных полей, определяется гравитационное поле, обусловленное движущимися частицами. 2. Показывается, что для двумерных пространственных поверхностей, содержащих сингулярности, справедливы некоторые условия в виде поверхностных интегралов, определяющие движение.

Во второй части статьи мы фактически вычисляем первые два нетривиальные приближения. В первом из них уравнения движения принимают форму Ньютона. Во втором приближении уравнения движения, которые мы вычисляем только для случая двух массивных частиц, принимают более сложный вид, но не включают третьих и более высоких производных по времени.

В принципе такой метод применим для приближения любого порядка, причем на каждом этапе задача сводится к вычислению определенных интегралов; но мы не доказали, что производные по времени выше второй в конечном счете не могут появиться в уравнениях движения.

Для определения поля и уравнений движения необходимо исключить из уравнений поля негалилеевы величины на бесконечности и сингулярности типа диполей, квадруполей и высших мультиполей с тем, чтобы решение было единственным.

Существенно, что наши уравнения движения не ограничивают движение сингулярностей сильнее, чем уравнения Ньютона; но это, возможно, связано с нашим упрощающим предположением о том, что материя представляется сингулярностями, и этого могло не быть, если бы мы могли описывать материю в рамках полевой теории, из которой сингулярности исключены. Представление материи посредством сингулярностей дает возможность фиксировать знак массы с помощью уравнений поля так, что, поскольку это касается настоящей теории, лишь условно взаимодействие двух тел всегда является притяжением, а не отталкиванием. Возможный ответ на вопрос, почему масса должна быть положительной, можно ожидать только из теории, которая дает представление материи, свободное от сингулярностей [2].

Наш метод может быть применен к случаю, когда в уравнения поля включен максвелловский тензор энергии-импульса, и как показано во второй части настоящей работы, это ведет к определению силы Лоренца.

В электродинамике Максвелла — Лоренца, так же как и в прежнем приближенном методе решения гравитационных уравнений, задача определения поля, создаваемого движущимися телами, решается путем интегрирования волновых уравнений с помощью запаздывающих потенциалов. Знак (направление) времени играет при этом решающую роль, поскольку, в известном смысле, поле разлагается только по тем волнам, которые расходятся в бесконечности. Однако в нашей теории уравнения, которые необходимо решать на каждой ступени приближения, являются не волновыми уравнениями, а всего лишь уравнениями для пространственного потенциала. Поскольку такие уравнения, как уравнения гравитационного и электромагнитного полей, в действительности инвариантны относительно обращения времени, может оказаться, что излагаемый здесь метод является естественным для их решения. Наш метод, в котором направление времени не выделено, соответствует введению стоячих волн, и он не может привести к заключению, что при круговом движении двух точечных масс энергия излучается в бесконечность в форме волн.

I. Общая теория

1. *Уравнения поля и координатные условия.* Поскольку существенной частью работы является то, что мы будем различать пространство и время, условимся, что латинские индексы принимают только пространственные значения 1, 2, 3, тогда как греческие индексы относятся к пространству и времени, пробегая значения 0, 1, 2, 3.

Как указано во введении, мы обсудим только гравитационные уравнения для пустого пространства, рассматривая источники поля как сингулярности. Если обычную производную величины обозначить соответствующим индексом, следующим за вертикальной чертой

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \to g_{\mu\nu|\sigma}, \qquad \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} \to g_{\mu\nu|\sigma\rho}, \tag{1.1}$$

....

[2] A. Einstein, N. Rosen, Phys. Rev., 48, 1935, 73 (Статья 113).

то уравнения поля можно записать в виде

$$R_{\mu\nu}=-\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}_{|\lambda}+\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\lambda\end{matrix}\right\}_{|\nu}+\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\sigma\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \lambda\nu\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \lambda\sigma\end{matrix}\right\}=0. \quad (1.2)$$

Пусть символы $\eta_{\mu\nu}$, $\eta^{\mu\nu}$, определяемые матрицей

$$\eta_{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}=\begin{bmatrix}+1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

представляют метрику пустого пространства-времени. Тогда если ввести величины $h_{\mu\nu}$ и $h^{\mu\nu}$ с помощью соотношений

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}, \qquad g^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}+h^{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

эти величины $h_{\mu\nu}$ и $h^{\mu\nu}$ будут представлять отклонение пространства-времени от плоского случая. Величины $h^{\mu\nu}$, как функция $h_{\mu\nu}$, можно вычислить с помощью соотношений

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma}=\delta^{\sigma}_{\mu}. \quad (1.5)$$

В общем случае $h_{\mu\nu}$ малы по сравнению с единицей, но здесь мы не делаем предположений относительно их порядка величины.

С помощью соотношений (1.4) и (1.5) компоненты $R_{\mu\nu}$ можно выразить через $h_{\mu\nu}$, и по причинам, которые станут ясными, когда мы перейдем к используемому в настоящей работе методу приближения, полученные таким образом разные члены мы разделим на две группы следующим образом. Прежде всего члены, линейные по h, отделим от квадратичных и членов более высокой степени. На этой ступени разделения уравнения поля имеют вид

$$R_{00}=\frac{1}{2}\{-h_{00|ss}+2h_{0s|0s}-h_{ss|00}\}+L'_{00}=0, \quad (1.6)$$

$$R_{0n}=\frac{1}{2}\{-h_{0n|ss}+h_{0s|ns}+h_{ns|0s}-h_{ss|n0}\}+L'_{0n}=0, \quad (1.7)$$

$$R_{mn}=\frac{1}{2}\{-h_{mn|ss}+h_{ms|ns}+h_{ns|ms}-h_{ss|mn}+h_{mn|00}-h_{m0|n0}-$$
$$-h_{n0|m0}+h_{00|mn}\}+L'_{mn}=0, \quad (1.8)$$

где тензор $L'_{\mu\nu}$ представляет нелинейные члены. Возьмем теперь

из выражения для R_{00} члены $h_{0s|0s}-\frac{1}{2}h_{ss|00}$, (1.9) из выражения для R_{0n} — ни одного члена, (1.10)

из выражения для R_{mn} члены $-\frac{1}{2} h_{0m|0n} - \frac{1}{2} h_{0n|0m} + \frac{1}{2} h_{mn|00}$, (1.11)

и прибавим их к нелинейным членам. Обозначая нелинейные члены $L'_{\mu\nu}$ вместе с этими добавлениями символом $L_{\mu\nu}$, мы можем переписать уравнения поля в разделенном виде:

$$R_{00} = -\frac{1}{2} h_{00|ss} + L_{00} = 0, \tag{1.12}$$

$$R_{0n} = -\frac{1}{2} h_{0n|ss} + \frac{1}{2}\left(h_{ns} - \frac{1}{2}\delta_{ns} h_{ll} + \frac{1}{2}\delta_{ns} h_{00}\right)_{|0s} - \\ -\frac{1}{4}(h_{00} + h_{ss})_{|0n} + \frac{1}{2} h_{0s|ns} + L_{0n} = 0, \tag{1.13}$$

$$R_{mn} = -\frac{1}{2} h_{mn|ss} + \frac{1}{2}\left(h_{ms} - \frac{1}{2}\delta_{ms} h_{ll} + \frac{1}{2}\delta_{ms} h_{00}\right)_{|ns} + \\ + \frac{1}{2}\left(h_{ns} - \frac{1}{2}\delta_{ns} h_{ll} + \frac{1}{2}\delta_{ns} h_{00}\right)_{|ms} + L_{mn} = 0, \tag{1.14}$$

где элементы L в явном виде выражаются формулами:

$$L_{00} = h_{0s|0s} - \frac{1}{2} h_{ss|00} - (h^{\lambda\sigma}[00, \sigma])_{|\lambda} + (h^{\lambda\sigma}[0\lambda, \sigma])_{|0} + \\ + \left\{ {\lambda \atop 0\sigma} \right\}\left\{ {\sigma \atop \lambda 0} \right\} - \left\{ {\lambda \atop 00} \right\}\left\{ {\sigma \atop \lambda\sigma} \right\}, \tag{1.15}$$

$$L_{0n} = -(h^{\lambda\sigma}[0n, \sigma])_{|\lambda} + (h^{\lambda\sigma}[n\lambda, \sigma])_{|0} + \left\{ {\lambda \atop n\sigma} \right\}\left\{ {\sigma \atop \lambda 0} \right\} - \left\{ {\lambda \atop n0} \right\}\left\{ {\sigma \atop \lambda\sigma} \right\}, \tag{1.16}$$

$$L_{mn} = -\frac{1}{2} h_{0m|0n} - \frac{1}{2} h_{0n|0m} + \frac{1}{2} h_{mn|00} - (h^{\lambda\sigma}[mn, \sigma])_{|\lambda} + \\ + (h^{\lambda\sigma}[m\lambda, \sigma])_{|n} + \left\{ {\lambda \atop m\sigma} \right\}\left\{ {\sigma \atop \lambda n} \right\} - \left\{ {\lambda \atop mn} \right\}\left\{ {\sigma \atop \lambda\sigma} \right\}. \tag{1.17}$$

Если ввести величины $\gamma_{\mu\nu}$, определяемые равенством

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\sigma\rho} h_{\sigma\rho}, \tag{1.18}$$

или, в подробной записи,

$$\gamma_{00} = \frac{1}{2} h_{00} + \frac{1}{2} h_{ll}, \tag{1.19}$$

$$\gamma_{0n} = h_{0n}, \tag{1.20}$$

$$\gamma_{mn} = h_{mn} - \frac{1}{2}\delta_{mn} h_{ll} + \frac{1}{2}\delta_{mn} h_{00}, \tag{1.21}$$

то уравнения поля (1.12) — (1.14) можно записать в виде:

$$R_{00} = -\frac{1}{2} h_{00|ss} + L_{00} = 0, \tag{1.22}$$

$$R_{0n} = -\frac{1}{2} h_{0n|ss} + \frac{1}{2} \gamma_{ns|0s} + \frac{1}{2} (\gamma_{0s|s} - \gamma_{00|0})_{|n} + L_{0n} = 0, \tag{1.23}$$

$$R_{mn} = -\frac{1}{2} h_{mn|ss} + \frac{1}{2} \gamma_{ms|sn} + \frac{1}{2} \gamma_{ns|sm} + L_{mn} = 0. \tag{1.24}$$

Поскольку между этими уравнениями поля существуют четыре тождественных соотношения, мы можем наложить четыре координатных условия в форме четырех нетензорных уравнений, включающих гравитационные потенциалы, тем самым ограничив произвол в решении. Оказывается, что проще всего использовать координатные условия, которые включают только величины, входящие в выписанные в явном виде части уравнений поля (1.23) и (1.24). Действительно, эти уравнения позволяют нам в качестве координатных условий [3] принять соотношения

$$\gamma_{0s|s} - \gamma_{00|0} = 0, \tag{1.25}$$

$$\gamma_{ms|s} = 0. \tag{1.26}$$

С этими координатными условиями уравнения поля принимают вид

$$h_{00|ss} = 2L_{00}, \tag{1.27}$$

$$h_{0n|ss} = 2L_{0n}, \tag{1.28}$$

$$h_{mn|ss} = 2L_{mn}. \tag{1.29}$$

Для дальнейшего рассуждения необходимо записать эти уравнения таким образом, чтобы вместо лапласианов γ в них входили лапласианы h. С этой целью заменим приведенные выше уравнения эквивалентными:

$$\gamma_{00,ss} = 2\Lambda_{00}, \tag{1.30}$$

$$\gamma_{0n,ss} = 2\Lambda_{0n}, \tag{1.31}$$

$$\gamma_{mn,ss} = 2\Lambda_{mn}, \tag{1.32}$$

[3] Выбор координатных условий в большой степени произволен, и может показаться более естественным использовать инвариантные относительно преобразований Лоренца условия

$$\eta^{\nu\mu}\gamma_{\alpha\nu|\mu} = 0.$$

Однако, как оказывается, вычисления проще, если использовать координатные условия, приведенные в тексте; поэтому мы и используем их в общей теории.

где матрица Λ связана с матрицей L точно так же, как γ связана с h:

$$\Lambda_{00} = \frac{1}{2} L_{00} + \frac{1}{2} L_{ll}, \tag{1.33}$$

$$\Lambda_{0n} = L_{0n}, \tag{1.34}$$

$$\Lambda_{mn} = L_{mn} - \frac{1}{2} \delta_{mn} L_{ll} + \frac{1}{2} \delta_{mn} L_{00}. \tag{1.35}$$

Эти уравнения поля (1.33) — (1.35) вместе с координатными условиями (1.25) и (1.26) будут положены в основу нашего дальнейшего рассмотрения.

2. *Основные интегральные свойства поля.* Рассмотрим три функции A_n ($n = 1, 2, 3$). Они не обязательно должны быть тензорами. Из этих функций можно образовать следующие три функции

$$(A_{n|s} - A_{s|n})_{|s}, \tag{2.1}$$

которые в явном виде можно записать так:

$$\begin{aligned} &\{(A_{1|2} - A_{2|2})_{|2} - (A_{3|1} - A_{1|3})_{|3}\}, \\ &\{(A_{2|3} - A_{3|2})_{|3} - (A_{1|2} - A_{2|1})_{|1}\}, \\ &\{(A_{3|1} - A_{1|3})_{|1} - (A_{2|3} - A_{3|2})_{|2}\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Таким образом, эти три функции составляют ротор трех функций

$$(A_{2|3} - A_{3|2}), \quad (A_{3|1} - A_{1|3}), \quad (A_{1|2} - A_{2|1}). \tag{2.3}$$

Рассмотрим любую поверхность S, не проходящую через сингулярности поля. Поскольку выражение (2.1) является ротором вектора (2.3), из теоремы Стокса следует, что интеграл по S от «нормальной»[4] составляющей выражения (2.1) равен линейному интегралу от тангенциальной составляющей вектора (2.3), взятому по контуру, ограничивающему S. Если S — замкнутая поверхность, то длина ограничивающего контура равна нулю, и этот последний интеграл обращается в нуль. Следовательно, мы имеем следующую теорему: если S — любая замкнутая поверхность, не проходящая через сингулярности поля, то

$$\int (A_{n|s} - A_{s|n})_{|s} \cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N})\, dS = 0, \tag{2.4}$$

[4] Слова «нормаль», «угол», «сфера» и т. д. употребляются здесь в чисто условном смысле, обозначая соответствующие функции координат x^m и соотношения, которые подразумеваются под этими терминами в эвклидовой геометрии. Содержание этого параграфа не зависит от какой-либо специальной метрики, и мы используем термины эвклидовой геометрии только потому, что они удобны.

где $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})$ означает «угол» между направлением x^n и «нормалью» к поверхности S, а к n применяется условие суммирования. Эта теорема справедлива независимо от того, содержатся внутри поверхности S сингулярности или нет, и мы применим ее сейчас к нашей задаче.

Из координатных условий (1.25), (1.26) и уравнений поля (1.31), (1.32) имеем

$$(\gamma_{0n|s}-\gamma_{0s|n})_{|s}=2\Lambda_{0n}-\gamma_{00|0n}, \tag{2.5}$$

$$(\gamma_{mn|s}-\gamma_{ms|n})_{|s}=2\Lambda_{mn}. \tag{2.6}$$

Мы видим, что левые части уравнений (2.5) и (2.6) образуют четыре величины вида (2.1), причем одна из них вытекает из соотношения (2.5), а три остальные — из (2.6) для $m=1, 2, 3$. Из соотношения (2.4) следует, что если S — поверхность, не проходящая через сингулярности поля, то

$$\int(\gamma_{00|0n}-2\Lambda_{0n})\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS=0, \tag{2.7}$$

$$\int 2\Lambda_{mn}\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS=0. \tag{2.8}$$

Из уравнений (2.5), (2.6) видно, что в тех местах, где сингулярности отсутствуют,

$$(\gamma_{00|0n}-2\Lambda_{0n})_{|n}=0, \tag{2.9}$$

$$(2\Lambda_{mn})_{|n}=0. \tag{2.10}$$

Следовательно, теорема Гаусса показывает, что если две замкнутые поверхности S и S' таковы, что на них или между ними нет сингулярностей, то интегралы по поверхностям S и S' дают одинаковый результат. Однако справедливость интегральных условий для поверхностей, которые окружают сингулярности или, в более общем случае, замыкают области, где не выполняются уравнения поля для пустого пространства, можно показать только с помощью теоремы Стокса.

Мы рассматриваем материю как сингулярности поля. Предположим, что существует p тел, каждое из которых представлено точечной сингулярностью. Координаты каждой такой сингулярности будут функциями только времени. Поскольку соотношения (2.7) и (2.8) справедливы для любой поверхности S, если только она не проходит через сингулярность, мы можем выбрать p таких поверхностей, что каждая из них окружает лишь одну из p сингулярностей, и получим таким образом $4p$ интегральных условий. Каждое из них, будучи теперь независимым от формы поверхности S, даст соотношение между координатами сингулярностей и их производными по времени; позднее мы увидим, что интегральные условия действительно определяют *уравнения движения* сингулярностей. Эти уравнения выводятся здесь только из уравнений поля и координатных условий без каких-либо добавочных предположений.

Если вместо интегрирования вокруг одной сингулярности мы возьмем интеграл по поверхности, содержащей все сингулярности, то мы получим законы сохранения энергии и импульса для всей системы. Эти законы, конечно, являются просто следствиями законов движения отдельных частиц, но благодаря серии упрощений они принимают сравнительно простой вид.

3. *Метод приближения.* До сих пор в теории относительности использовался следующий метод приближения. Предположим, что в соотношении

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{3.1}$$

величины $h_{\mu\nu}$ непрерывно зависят от положительного параметра таким образом, что они обращаются в нуль при $\lambda = 0$, т. е. при $\lambda = 0$ пространство-время становится галилеевым. Следовательно, предположим, что величины $h_{\mu\nu}$ можно разложить в степенные ряды [5] по λ:

$$h_{\mu\nu} = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^l \underset{l}{h}_{\mu\nu}. \tag{3.2}$$

Это разложение подставляется в уравнения поля, которые после группирования членов по различным степеням λ принимают вид

$$0 = R_{\mu\nu} = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^l \underset{l}{R}_{\mu\nu}. \tag{3.3}$$

Чтобы набор величин $h_{\mu\nu}$, зависящих от параметра λ, мог быть решением уравнений поля, с необходимостью должно удовлетворяться каждое из уравнений

$$\underset{l}{R}_{\mu\nu} = 0. \tag{3.4}$$

Наиболее известной иллюстрацией этого метода является его применение к первому приближению.

Покажем теперь, почему этот метод приближения непригоден для рассмотрения квазистационарных полей. Если мы введем тензор энергии для материи, которая порождает поле, то в первом приближении, пользуясь мнимым временем, получим известные уравнения

$$\gamma_{\mu\nu|\sigma\sigma} = -2T_{\mu\nu}, \tag{3.5}$$

---

[5] В выражении λ^l число l будет всегда показателем степени, а не контравариантным индексом!

причем система координат определяется соотношениями

$$\gamma_{\mu\sigma|\sigma} = 0. \tag{3.6}$$

В простейшем случае пылевидного вещества, которое порождает поле, $T_{\mu\nu}$ имеет вид

$$T_{\mu\nu} = \rho \frac{d\xi^{\mu}}{ds} \frac{d\xi^{\nu}}{ds}, \tag{3.7}$$

где величины $d\xi^{\mu}/ds$ являются компонентами скорости, измеренными в шкале собственного времени s. Если мы имеем дело с квазистатическим случаем, то компонента $d\xi^0/ds$ по порядку величины равняется единице, в то время как компоненты $d\xi^m/ds$ относительно малы. Таким образом, в этом случае получим

$$|T_{00}| \gg |T_{0n}| \gg |T_{mn}|, \tag{3.8}$$

и из уравнений (3.5) мы должны получить соответственно

$$|\gamma_{00}| \gg |\gamma_{0n}| \gg |\gamma_{mn}|. \tag{3.9}$$

Обычный метод приближения не принимает этого во внимание, так как в нем все компоненты γ рассматриваются как величины одного порядка, хотя в квазистатическом случае компонента γ_{00} значительно больше других компонент $\gamma_{\mu\nu}$. Действительно хороший метод приближения для квазистатического случая должен существенным образом использовать соотношения (3.9).

Наиболее просто мы приходим к нашему новому методу, рассматривая задачу построения приближения, пригодного для решения приближенных уравнений поля (3.5) в квазистатическом случае. Получаемый таким путем метод оказывается применимым и для решения строгих гравитационных уравнений даже в случаях, не являющихся квазистатическими.

Первый шаг заключается в том, чтобы явно выразить то обстоятельство, что производная от составляющих поля по времени мала по сравнению с самой величиной поля и ее пространственными производными. Для этого введем вспомогательную временную координату

$$\tau = \lambda x^0 \tag{3.10}$$

и предположим, что каждая переменная поля является функцией координат (τ, x^1, x^2, x^3) вместо (x^0, x^1, x^2, x^3). Если такой переменной является φ, то мы предположим теперь, что φ, $\varphi_{|m}$ и $\partial\varphi/\partial\tau$ имеют одинаковый порядок величины, так что $\varphi_{|0}$ есть величина порядка $\lambda\varphi$.

Отсюда мы заключаем, что если компонента T_{00}, определяемая равенством (3.7), имеет порядок величины λ^q, то компоненты T_{0n} будут порядка λ^{q+1}, а компоненты T_{mn} — порядка λ^{q+2}.

Далее из известных рассуждений, касающихся первого приближения (сохранение энергии при движении точки), следует, что величина γ_{00}, т. е. потенциальная энергия единицы массы, по порядку величины равна квадрату скорости и, таким образом, в наших обозначениях оказывается порядка λ^2. Отсюда для компонент γ по порядку величины имеем

$$\gamma_{00} \sim \lambda^2, \qquad \gamma_{0n} \sim \lambda^3, \qquad \gamma_{mn} \sim \lambda^4. \tag{3.11}$$

Если разложить компоненты γ в степенные ряды по λ, то мы должны взять наименьшие степени разложений, чтобы получить порядки, указанные в соотношениях (3.11). Тот факт, что в уравнения (3.5) входят только вторые производные компонент γ по времени, показывает, что степени λ в последовательных членах разложений компонент γ могут отличаться на две единицы [6]. Таким образом, мы приходим к простому предположению, что

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{00} &= \lambda^2 \underset{2}{\gamma}_{00} + \lambda^4 \underset{4}{\gamma}_{00} + \lambda^6 \underset{6}{\gamma}_{00} + \ldots, \\
\gamma_{0n} &= \lambda^3 \underset{3}{\gamma}_{0n} + \lambda^5 \underset{5}{\gamma}_{0n} + \ldots, \\
\gamma_{mn} &= \lambda^4 \underset{4}{\gamma}_{mn} + \lambda^6 \underset{6}{\gamma}_{mn} + \ldots.
\end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

Мы не можем обсуждать вопрос о сходимости в общем случае, но интересно показать, что новый метод приближения может дать сходящиеся результаты даже в тех случаях, когда с первого взгляда этого нельзя ожидать. Рассмотрим случай одномерного волнового уравнения в его простейшей форме

$$f_{xx} - f_{tt} = 0. \tag{3.13}$$

Если, в соответствии с основной идеей нового метода приближения, мы запишем

$$\left.\begin{aligned}
f &= \underset{0}{f} + \lambda^2 \underset{2}{f} + \lambda^4 \underset{4}{f} + \ldots, \\
f_{xx} &= \underset{0}{f}_{xx} + \lambda^2 \underset{2}{f}_{xx} + \lambda^4 \underset{4}{f}_{xx} + \ldots, \\
f_{tt} &= \lambda^2 f_{\tau\tau} = \lambda^2 \underset{0}{f}_{\tau\tau} + \lambda^4 \underset{2}{f}_{\tau\tau} + \lambda^6 \underset{4}{f}_{\tau\tau} + \ldots,
\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

---

[6] Пренебрежение членами с ${}^{2l+1}$ в выражениях для компонент γ_{00}, γ_{mn} и членов с λ^{2l} в выражениях для компонент γ_{0m} возможно и естественно, хотя логически не является строго необходимым. Добавление опущенных членов в соотношения (3.12) можно было бы провести таким образом, чтобы оно соответствовало введению запаздывающего потенциала (расходящейся волны). Однако такая процедура была бы искусственной, хотя, как будет показано позднее, и не повлияла бы на уравнения движения, полученные во второй части работы.

то из уравнения (3.13) получим последовательно уравнения:

$$\underset{0}{f}_{xx} = 0, \tag{3.15а}$$

$$\underset{2}{f}_{xx} - \underset{0}{f}_{\tau\tau} = 0, \tag{3.15б}$$

$$\underset{4}{f}_{xx} - \underset{2}{f}_{\tau\tau} = 0. \tag{3.15в}$$

Из этих уравнений можно найти общее решение волнового уравнения (3.13) в виде разложения в степенной ряд по λ. Для простоты рассмотрим случай синусоидальной волны, т. е. из множества решений уравнения (3.15а),

$$\underset{0}{f} = A(\tau) + xB(\tau), \tag{3.16}$$

выберем частное решение [7]

$$\underset{0}{f} = \sin\tau \tag{3.17а}$$

и на каждой последующей ступени процедуры будем пренебрегать всеми произвольными функциями, которые могут встретиться. Таким образом, из уравнений (3.15б) и (3.15в) находим:

$$\underset{2}{f} = -\frac{x^2}{2!}\sin\tau, \tag{3.17б}$$

$$\underset{4}{f} = \frac{x^4}{4!}\sin\tau, \tag{3.17в}$$

так что решение принимает вид

$$f = \sin\tau\left\{1 - \frac{(x\lambda)^2}{2!} + \frac{(x\lambda)^4}{4!} - \dots\right\} = \cos(\lambda x)\sin\tau.$$

Заменяя τ на λt, получаем точное решение уравнения (3.13)

$$f = \cos(\lambda x)\sin(\lambda t). \tag{3.18}$$

4. *Свойства переменных поля по отношению к разложению в ряд.* В этом разделе мы покажем, что существует простое общее правило, определяющее типы разложений, которые будут встречаться в процессе рассмотрения гравитационных уравнений нашим методом. Это правило гласит:

---

[7] Нетрудно увидеть, что включение решения $\underset{0}{f} = x\sin\tau$ также ведет к синусоидальным волнам.

Любая составляющая с нечетным числом нулевых индексов будет иметь в своем разложении только нечетные степени λ, тогда как в разложении любой составляющей, имеющей четное число таких индексов, будут присутствовать только четные степени λ.

Основные уравнения (3.12) показывают, что компоненты $\gamma_{\mu\nu}$ согласуются с этим правилом. Соотношения (1.19) — (1.21) между компонентами тензоров $\gamma_{\mu\nu}$ и $h_{\mu\nu}$ имеют обратные соотношения точно такого же вида с взаимно замененными компонентами γ и h, а именно:

$$h_{00} = \frac{1}{2}\gamma_{00} + \frac{1}{2}\gamma_{ll}, \tag{4.1}$$

$$h_{0n} = \gamma_{0n}, \tag{4.2}$$

$$h_{mn} = \gamma_{mn} - \frac{1}{2}\delta_{mn}\gamma_{ll} + \frac{1}{2}\delta_{mn}\gamma_{00}. \tag{4.3}$$

Из соотношений (3.12) следует, что разложения компонент h по степеням λ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} h_{00} &= \lambda^2 \underset{2}{h_{00}} + \lambda^4 \underset{4}{h_{00}} + \lambda^6 \underset{6}{h_{00}} + \ldots, \\ h_{0n} &= \lambda^3 \underset{3}{h_{0n}} + \lambda^5 \underset{5}{h_{0n}} + \ldots, \\ h_{mn} &= \lambda^2 \underset{2}{h_{mn}} + \lambda^4 \underset{4}{h_{mn}} + \lambda^6 \underset{6}{h_{mn}} + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

откуда видно, что компоненты h также согласуются с общим правилом.

Далее, поскольку компоненты $\eta_{\mu\nu}$ находятся в тривиальном согласии с этим правилом в силу обращения в нуль компонент η_{0n}, из соотношений (1.4) следует, что компоненты $g_{\mu\nu}$ также согласуются с ним.

Соотношение

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} = \delta^{\sigma}_{\mu} \tag{4.5}$$

можно записать в виде

$$g_{\mu n}g^{n\sigma} + g_{\mu 0}g^{0\sigma} = \delta^{\sigma}_{\mu}. \tag{4.6}$$

Две группы членов в левой части отличаются четным числом нулевых индексов. Поэтому ввиду тривиального согласия тензора δ^{σ}_{μ} с общим правилом мы получим в каждом приближении достаточное число уравнений для нахождения разложений компонент $g^{\mu\nu}$, если предположим, что общее правило справедливо также и для этих компонент. Однако величины $g^{\mu\nu}$ единственным образом определены через $g_{\mu\nu}$ соотношением (4.5), так что, согласно общему правилу, разложения будут давать единственное решение и коэффициенты при лишней степени λ с необходимостью будут равны нулю. Таким образом, это правило применимо к компонентам $g^{\mu\nu}$, а следовательно, и к компонентам $h^{\mu\nu}$.

Рассмотрим теперь символы Кристоффеля обоих родов. Мы имеем

$$[\mu\nu, \sigma] = \frac{1}{2}(g_{\nu\sigma|\mu} + g_{\sigma\mu|\nu} - g_{\mu\nu|\sigma}). \tag{4.7}$$

Поскольку операция «$_{|0}$» вводит множитель λ, в то время как операции «$_{|m}$» оставляют порядок величины неизменным, и так как компоненты $g_{\mu\nu}$ подчиняются общему правилу, то величины $[\mu\nu, \sigma]$ также подчиняются ему.

Символы Кристоффеля второго рода определяются равенством

$$\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} = g^{\lambda\sigma}[\mu\nu, \sigma]. \tag{4.8}$$

Так как при наличии немого индекса у нас или не будет лишних нулевых индексов или будет два таких индекса, входящих в любой член подразумеваемого суммирования, то тот факт, что компоненты $g^{\lambda\sigma}$ и $[\mu\nu, \sigma]$ по отдельности подтверждают общее правило, показывает, что оно справедливо и для компонент символа $\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$.

В изложенном выше рассмотрении мы показали, что общее правило не нарушается ни наличием немых индексов, ни операциями «$_{|m}$», «$_{|0}$». Следовательно, если мы, пользуясь только этими операциями, образуем новые величины из величин, которые согласуются с этим правилом, то эти новые величины также должны подчиняться общему правилу. Примером этого служит наше обсуждение символов Кристоффеля; поскольку все величины, с которыми мы будем иметь дело, например

$$R\,(\equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}), \qquad \Lambda_{\mu\nu} \text{ и т. д.},$$

являются новыми величинами того же типа, мы видим, что все они будут разлагаться в ряды по степеням λ, общий характер которых зафиксирован утверждением, приведенным в начале этого раздела.

5. *Другая форма уравнений в отсутствие сингулярностей.* В этом и следующем разделах мы рассмотрим случай, когда поле не имеет сингулярностей. Разумеется, с физической точки зрения этот случай тривиален, поскольку он соответствует полному отсутствию вещества; действительно, согласно нашему методу, он приводит к галилееву решению. Тем не менее обсуждение этого случая будет небесполезным, поскольку оно поможет выявить общий механизм теории и послужит удобным введением к дальнейшему, более сложному рассмотрению случая с сингулярностями.

Резюмируем некоторые из полученных нами результатов. На поле накладывается два ограничения:

(I) уравнения гравитационного поля,

(II) координатные условия, из которых мы нашли

(III) интегральные условия на поверхности.

Иначе говоря, если принять координатные условия

$$\gamma_{00|0} - \gamma_{0n|n} = 0, \tag{1.25}$$

$$\gamma_{nm|n} = 0, \tag{1.26}$$

то уравнения поля будут иметь вид

$$\gamma_{00|ss} = 2\Lambda_{00}, \tag{1.30}$$

$$\gamma_{0n|ss} = 2\Lambda_{0n}, \tag{1.31}$$

$$\gamma_{mn|ss} = 2\Lambda_{mn}; \tag{1.32}$$

из этих двух групп уравнений мы получаем интегральные условия на поверхности

$$\int (\gamma_{00|0n} - 2\Lambda_{0n}) \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = 0, \tag{2.7}$$

$$\int 2\Lambda_{mn} \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = 0, \tag{2.8}$$

а также соотношения

$$(\gamma_{00|0n} - 2\Lambda_{0n})_{|n} = 2\Lambda_{00|0} - 2\Lambda_{0n|n} = 0, \tag{2.9}$$

$$2\Lambda_{mn|n} = 0, \tag{2.10}$$

которые существенны при оценке интегральных условий на произвольных поверхностях.

Покажем теперь, что в отсутствие сингулярностей следующие два ряда уравнений (5.1) и (5.2) эквивалентны:

$\gamma_{00\|ss} = 2\Lambda_{00}$,	(5.1а)	$\gamma_{00\|ss} = 2\Lambda_{00}$,	(5.2а)
$\gamma_{0n\|ss} = 2\Lambda_{0n}$,	(5.1б)	$\gamma_{0n\|ss} = 2\Lambda_{0n}$,	(5.2б)
$\gamma_{00\|0} - \gamma_{0n\|n} = 0$,	(5.1в)	$\Lambda_{00\|0} - \Lambda_{0n\|n} = 0$,	(5.2в′)
$\gamma_{mn\|ss} = 2\Lambda_{mn}$,	(5.1г)	$\int (\gamma_{00\|0n} - 2\Lambda_{0n}) \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = 0$,	(5.2в″)
$\gamma_{mn\|n} = 0$.	(5.1д)	$\gamma_{mn\|ss} = 2\Lambda_{mn}$,	(5.2г)
		$\Lambda_{mn\|n} = 0$,	(5.2д′)
		$\int 2\Lambda_{mn} \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = 0$.	(5.2д″)

В уравнениях (5.1) содержатся только уравнения поля и координатные условия, и мы покажем, что координатные условия можно, по существу, заменить интегральными условиями на поверхности [8] и условиями (2.9) и (2.10). В рассматриваемом случае доказательство тривиально. Так как мы уже показали, что из уравнений (5.1) следуют уравнения (5.2), то обратное немедленно доказывается из следующих соображений.

Из уравнений (5.2а), (5.2б) и (5.2в) имеем

$$(\gamma_{00|0}-\gamma_{0n|n})_{|ss}=2\Lambda_{00|0}-2\Lambda_{0n|n}=0;$$

поскольку поле не имеет сингулярностей и компоненты γ должны обращаться в нуль на бесконечности, в результате получаем уравнение (5.1в)

$$\gamma_{00|0}-\gamma_{0n|n}=0.$$

Доказательство для компонент γ_{mn} аналогично.

6. *Расщепление гравитационных уравнений в отсутствие сингулярностей.* В первом разделе мы дали способ разделения членов в каждом из уравнений поля на две определенные группы. В настоящем разделе мы рассмотрим расщепление гравитационных уравнений по степеням λ и покажем, почему именно этот метод разделения применяется в нашем методе.

Прежде всего необходимо ввести некоторые обозначения. Рассмотрим величину

$$h_{mn|0s}. \tag{6.1}$$

При разложении h_{mn} по степеням λ получаем

$$h_{mn}=\lambda^2\underset{2}{h_{mn}}+\lambda^4\underset{4}{h_{mn}}+\ldots+\lambda^{2l}\underset{2l}{h_{mn}}+\ldots, \tag{6.2}$$

где числа под буквой h в правой части последнего равенства имеют двоякое назначение — различать в правой части разные функции h и показывать, с какой степенью λ каждая из них связана в разложении.

Фундаментальное предположение нашего метода приближения теперь требует, чтобы величины h_{mn} были такими функциями $(\lambda x^0, x^1, x^2, x^3)$, что

$$h_{mn|s}=\frac{\partial h_{mn}}{\partial s},$$

но

$$h_{mn|0}=\frac{\partial h_{mn}}{\partial x^0}=\lambda\frac{\partial h_{mn}}{\partial \tau}.$$

[8] В отсутствие сингулярностей уравнения (5.2в′) и (5.2в″), а также (5.2д′) и (5.2д″) эквивалентны, однако мы приводим их здесь все, чтобы облегчить сравнение с соответствующими уравнениями в случае наличия сингулярностей.

Чтобы различать однократное дифференцирование по (x^0, x^1, x^2, x^3) и однократное дифференцирование по (τ, x^1, x^2, x^3), мы будем обозначать последнее запятой перед соответствующим индексом:

$$h_{mn|s} = \frac{\partial h_{mn}}{\partial x^s} = h_{mn,s}\,, \tag{6.3}$$

$$h_{mn|0} = \frac{\partial h_{mn}}{\partial x^0} = \lambda\,\frac{\partial h_{mn}}{\partial \tau} = \lambda h_{mn,0}. \tag{6.4}$$

Таким образом функции h_{mn}, $h_{mn,s}$ и $h_{mn,0}$ — все одного порядка по λ, но функция $h_{mn|0}$ принадлежит на единицу большей степени λ.

С этим условием разложение (6.1) можно записать в виде

$$h_{mn|0s} = \lambda h_{mn,0s} = \lambda^3 \underset{2}{h}_{mn,0s} + \lambda^5 \underset{4}{h}_{mn,0s} + \ldots + \lambda^{2l+1} \underset{2l}{h}_{mn,0s} + \ldots \tag{6.5}$$

Однако здесь число под буквой h в правой части больше не указывает непосредственно степень λ, с которой она связана. Поэтому мы будем писать единицу под каждым нулевым индексом, следующим за запятой, для каждой функции h, под символом которой стоит число; тогда разложение (6.5) запишется так:

$$h_{mn|0s} = \lambda^3 \underset{2}{h}_{mn,\underset{1}{0}s} + \lambda^5 \underset{4}{h}_{mn,\underset{1}{0}s} + \ldots + \lambda^{2l+1} \underset{2l}{h}_{mn,\underset{1}{0}s} + \ldots. \tag{6.6}$$

Таким образом, сумма чисел под каждой функцией h дает степень λ, с которой она связана, тогда как первое из этих чисел указывает на ту функцию h, которую мы рассматриваем. В этом случае обозначение согласуется с естественным обозначением для произведения функций h.

Посмотрим теперь, что происходит, когда мы подставляем в уравнения (1.27) — (1.29) разложения функций h в степенные ряды. Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем:

$$\underset{2l}{h}_{00,ss} = 2\underset{2l}{L}_{00}, \tag{6.7}$$

$$\underset{2l+1}{h}_{0n,ss} = 2\underset{2l+1}{L}_{0n}, \tag{6.8}$$

$$\underset{2l}{h}_{mn,ss} = 2\underset{2l}{L}_{mn}. \tag{6.9}$$

Самыми низшими являются функции $\underset{2}{h}_{00}$, $\underset{3}{h}_{0n}$ и $\underset{2}{h}_{mn}$, которые, следовательно, будут определяться в первом приближении. Они соответствуют $l = 1$ в системе уравнений (6.7) — (6.9). Таким образом, на каждой ступени (например, l-ой) неизвестными величинами будут функции $\underset{2l}{h_{00}}$, $\underset{2l+1}{h_{0n}}$, $\underset{2l}{h_{mn}}$, а величинами, известными из решений в предыдущих приближениях, будут функции h с меньшими числами внизу.

Однако если мы посмотрим на формы компонент L, приведенные в формулах (1.15) — (1.17), то увидим, что на каждой стадии l у нас будут квадратичные или линейные члены, содержащие дифференцирование по x^0. Квадратичные члены могут содержать лишь функции h порядка, более низкого чем l, а линейные члены можно записать в виде:

$$\underset{2l-1}{h_{0s,}}\underset{1}{{}_{0s}} - \frac{1}{2}\underset{2l-2}{h_{ss,}}\underset{11}{{}_{00}} \qquad \text{в } \underset{2l}{L_{00}}, \tag{6.10}$$

$$\text{нет} \qquad \text{в } \underset{2l+1}{L_{0n}}, \tag{6.11}$$

$$\frac{1}{2}\underset{2l-2}{h_{mn,}}\underset{11}{{}_{00}} - \frac{1}{2}\underset{2l-1}{h_{0m,}}\underset{1}{{}_{0n}} - \frac{1}{2}\underset{2l-1}{h_{0n,}}\underset{1}{{}_{0m}} \qquad \text{в } \underset{2l}{L_{mn}}. \tag{6.12}$$

Это — функции, известные из предыдущих приближений. Следовательно, $\underset{2l}{L_{00}}, \underset{2l+1}{L_{0n}}, \underset{2l}{L_{mn}}$ для данного l в целом известны из решений в предыдущих приближениях. Это лежит в основе описанного в первом разделе специального метода разделения уравнений поля на две группы. После того, как такое разделение будет проведено и разложения величин h в степенные ряды будут подставлены в уравнения (1.27)—(1.29), коэффициенты при каждой степени λ автоматически группируются в такие величины, которые входят в рассматриваемое приближение в первый раз, и в такие, которые уже известны, по крайней мере в принципе, из предыдущих приближений. Эти две группы в точности соответствуют левой и правой частям уравнений (1.27) — (1.29).

Прежде чем мы сможем решить приближенные уравнения, необходимо произвести соответствующее расщепление координатных условий (1.25) и (1.26) и соотношений между компонентами h и γ. Оказывается, что на каждой ступени можно принять

$$\underset{2l}{\gamma_{00,\,ss}} = 2\underset{2l}{\Lambda_{00}}, \quad \underset{2l+1}{\gamma_{0n,\,ss}} = 2\underset{2l+1}{\Lambda_{0n}}, \quad \underset{2l}{\gamma_{00,}}\underset{1}{{}_{0}} - \underset{2l+1}{\gamma_{0n,\,n}} = 0, \tag{6.13}$$

$$\underset{2l}{\gamma_{mn,\,ss}} = 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}}, \quad \underset{2l}{\gamma_{mn,\,n}} = 0, \tag{6.14}$$

причем компоненты Λ известны из решений в предыдущих приближениях.

Можно также расщепить альтернативные уравнения (5.2) и вместо них использовать на каждой ступени соотношения:

$$\underset{2l}{\gamma}_{00,ss} = 2\underset{2l}{\Lambda}_{00}, \qquad \underset{2l+1}{\gamma}_{0n,ss} = 2\underset{2l+1}{\Lambda}_{0n}, \qquad \underset{2l}{\Lambda}_{00,\underset{1}{0}} - \underset{2l+1}{\Lambda}_{0n,n} = 0,$$

$$\int (\underset{2l}{\gamma}_{00,\underset{1}{0n}} - 2\underset{2l+1}{\Lambda}_{0n}) \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = 0; \tag{6.15}$$

$$\underset{2l}{\gamma}_{mn,ss} = 2\underset{2l}{\Lambda}_{mn}, \qquad 2\underset{2l}{\Lambda}_{mn,n} = 0, \qquad \int 2\underset{2l}{\Lambda}_{mn} \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = 0. \tag{6.16}$$

Как и в случае нерасщепленных уравнений, интегральные условия на поверхности являются, в силу отсутствия сингулярностей, следствием других условий, в этом случае расщепление в целом не представляет принципиальных затруднений.

7. *Общая теория при наличии сингулярностей.* Существование сингулярностей поля приводит к тому, что теория становится непохожей на теорию, развитую для случая отсутствия сингулярностей. В самом деле, хотя уравнения поля в сингулярных точках не определены, их справедливость в регулярной области оказывается достаточной для определения движения этих сингулярностей. Малейшее изменение положения сингулярности вызывает сколь угодно большое изменение для точки, достаточно близкой к сингулярности, и поэтому, развивая наш метод приближения, мы не имеем права применять приближенные выражения для уравнений движения. Этот факт ведет к новому затруднению, на котором следует остановиться более подробно.

Пусть поле создается p частицами. Их положение в любой момент времени можно представить пространственными координатами $\overset{\varkappa}{\xi}{}^m(\tau)$, где $\varkappa = 1, 2, \ldots, p$. В точках, где находятся частицы, поле имеет сингулярность, но каждую из этих сингулярностей можно окружить малой поверхностью[9]; тогда в области, внешней по отношению к этим p поверхностям, поле будет регулярным.

Хотя уравнения (5.1) и (5.2) в сингулярных точках не определены, они имеют смысл в такой области, и мы покажем, что их еще можно считать в некотором смысле эквивалентными. Рассуждения можно разделить на две части, в одной из которых рассматриваются уравнения (5.1а) — (5.1в) и (5.2а) — (5.2в), включающие нулевой индекс, а во второй — остальные уравнения, имеющие только пространственные индексы. Рассмотрим последние. Существенное в структуре уравнений (5.1г), (5.1д) и

---

[9] Для доказательства мы предполагаем, что положение задано в некоторый определенный момент времени τ, считая его постоянным при проведении доказательства.

(5.2г), (5.2д) сохраняется, если опустить индекс m и для всего поля написать:

$$\gamma_{n|ss} = 2\Lambda_n, \qquad (7.1г) \qquad\qquad \gamma_{n|ss} = 2\Lambda_n, \qquad (7.2г)$$

$$\gamma_{n|n} = 0, \qquad (7.2д) \qquad\qquad \Lambda_{n|n} = 0, \qquad (7.2д')$$

$$\int 2\Lambda_n \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = 0. \qquad (7.2д'')$$

Доказательство того, что уравнения (7.1) имеют следствием уравнения (7.2), в сущности уже было дано в разделе 2. Докажем обратное. Для этого сначала из уравнения (7.2г) получим уравнение

$$\gamma_{n|nss} = 2\Lambda_{n|n}, \tag{7.3}$$

которое справедливо вне поверхностей, окружающих сингулярности. Для решения этого уравнения аналитически продолжим функции Λ_n внутрь этих поверхностей таким образом, чтобы величина $\Lambda_{n|n}$ всюду была равна нулю. Это, разумеется, возможно вследствие справедливости уравнения (7.2д''). Таким образом уравнение (7.3) переходит в

$$\gamma_{n|nss} = 0.$$

Это уравнение, выполняющееся всюду, имеет единственное решение

$$\gamma_{n|n} = 0,$$

т. е. (7.1д).

Таким образом, мы показали, что если произвести аналитическое продолжение функций Λ_n так, чтобы уравнение (7.1д') было всюду справедливым, то совокупности уравнений (7.1) и (7.2) вне поверхностей, окружающих сингулярности, эквивалентны.

Из доказательства ясно, что результат справедлив для любых поверхностей, окружающих сингулярности.

Аналогичное доказательство можно также дать для уравнений (5.1а) — (5.1в) и (5.2а) — (5.2в). В этом случае необходимо аналитически продолжить функции Λ_{00} и Λ_{0n} так, чтобы уравнение (5.2в') выполнялось всюду, что возможно в силу уравнения (5.2в''). Детали этой части доказательства того, что уравнения (5.1) и (5.2) можно считать эквивалентными даже при наличии сингулярностей, мы опустим и будем полагать доказательство завершенным.

Чтобы увидеть трудность, вносимую использованием нашего метода приближения, рассмотрим теперь только уравнения (7.2г) и (7.2д'), опуская поверхностный интеграл (7.2д''). Эти уравнения определяют поле на каждой ступени приближения, если задано движение сингулярностей. В таком случае движение частиц произвольно, как, например, в электродинамической задаче, и поле определяется на каждой ступени приближения уравнениями:

$$\underset{2l}{\gamma}_{n,\,ss} = 0,$$

$$\underset{2l}{\Lambda}_{n,\,n} = 0.$$

Мы придем к очевидному противоречию, если попытаемся прибавить к этим уравнениям условие на поверхности, расщепленное в соответствии с нашим методом приближения. Тогда получим добавочное уравнение

$$\overset{\varkappa}{\int} 2\underset{2l}{\Lambda}_n \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = 0, \tag{7.4}$$

где индекс $\varkappa$ у символа интеграла означает, что поверхность интегрирования окружает только $\varkappa$-ую сингулярность. В интеграле (7.4) мы имеем бесконечный ряд уравнений, содержащих функции $\overset{\varkappa}{\xi}$ и их производные по времени. Эти уравнения не могут быть удовлетворены произвольно заданными функциями $\overset{\varkappa}{\xi}$, характеризующими движение.

Это показывает также, каким образом можно избежать этих трудностей. Вместо совокупностей уравнений (5.1) или (5.2) мы должны рассмотреть более общий ряд условий, налагаемых на поле, в которых эти уравнения содержатся как частный случай. Поскольку трудности вызываются именно интегральными условиями на поверхности, мы удалим уравнения (5.2в'') и (5.2д'') из совокупности уравнений (5.2) и рассмотрим смысл оставшихся.

Проводя это обобщение, мы, конечно, вышли за пределы гравитационных уравнений и пришли к другим, которые содержат гравитационные уравнения как частный случай, и теперь должны обсудить, какие изменения внесены в совокупности уравнений (5.1) этим обобщением.

Так как поверхностные интегралы не зависят от поверхностей, то они будут зависеть от времени только через ξ и их производные. Поэтому без ограничения общности эти интегралы, взятые по p поверхностям, окружающим разные сингулярности, можно обозначить через $4\pi\overset{\varkappa}{C}_0(\tau)$ и $4\pi\overset{\varkappa}{C}_m(\tau)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{4\pi}\overset{\varkappa}{\int}(\gamma_{00|0} - 2\Lambda_{0n})\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS &= \overset{\varkappa}{C}_0(\tau), \\ \frac{1}{4\pi}\overset{\varkappa}{\int} 2\Lambda_{mn}\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS &= \overset{\varkappa}{C}_m(\tau). \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

Мы должны доказать, что следующие два ряда уравнений (7.6) и (7.7) эквивалентны:

$$\gamma_{00|ss} = 2\Lambda_{00}, \quad (7.6а) \qquad \gamma_{00|ss} = 2\Lambda_{00}, \quad (7.7а)$$

$$\gamma_{0n|ss} = 2\Lambda_{0n}, \quad (7.6б) \qquad \gamma_{0n|ss} = 2\Lambda_{0n}, \quad (7.7б)$$

$$\gamma_{00|0} - \gamma_{0n|n} = -\sum_{\varkappa=1}^{p} \{\overset{\varkappa}{C}_0/\overset{\varkappa}{r}\}, \quad (7.6в) \qquad \Lambda_{00|0} - \Lambda_{0n|n} = 0, \quad (7.7в')$$

$$\gamma_{mn|ss} = 2\Lambda_{mn}, \quad (7.6г) \qquad \gamma_{mn|ss} = 2\Lambda_{mn}, \quad (7.7г)$$

$$\gamma_{mn|n} = -\sum_{\varkappa=1}^{p} \{\overset{\varkappa}{C}_m/\overset{\varkappa}{r}\}, \quad (7.6д) \qquad \Lambda_{mn|n} = 0. \quad (7.7д')$$

Здесь $\overset{\varkappa}{r}$ означает «расстояние» от x^n до $\varkappa$-й сингулярности:

$$\overset{\varkappa}{r} = [(x^s - \overset{\varkappa}{\xi}{}^s)(x^s - \overset{\varkappa}{\xi}{}^s)]^{1/2}, \tag{7.8}$$

Как и прежде, мы можем ввести поверхности, окружающие сингулярности, и эти уравнения, разумеется, будут иметь смысл вне этих поверхностей. Доказательство эквивалентности записанных выше совокупностей уравнений также можно разбить на две части, и мы докажем лишь эквивалентность для уравнений (7.6г), (7.6д) и (7.7г), (7.7д'). Опуская, как и раньше, индекс m, получаем:

$$\gamma_{n|ss} = 2\Lambda_n, \quad (7.9г) \qquad \gamma_{n|ss} = 2\Lambda_n, \quad (7.10г)$$

$$\gamma_{n|n} = -\sum_{\varkappa=1}^{p} \{\overset{\varkappa}{C}/\overset{\varkappa}{r}\}, \quad (7.9д) \qquad \Lambda_{n|n} = 0, \quad (7.10д')$$

где введено обозначение

$$\frac{1}{4\pi}\overset{\varkappa}{\int} 2\Lambda_n \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = \overset{\varkappa}{C}(\tau). \tag{7.11}$$

Начнем с доказательства того, что при определенных условиях аналитическое продолжение уравнений (7.10) имеет следствием уравнения (7.9). Теперь уже нельзя осуществлять аналитическое продолжение Λ_n таким образом, чтобы уравнение (7.10д') всюду удовлетворялось, поскольку отсюда следовало бы, что поверхностный интеграл обращается в нуль.

Действительно, из равенства (7.11) в силу теоремы Гаусса видно, что аналитическое продолжение должно быть таким, чтобы

$$\frac{1}{4\pi}\overset{\varkappa}{\int} 2\Lambda_{n|n} dv = \frac{1}{4\pi}\overset{\varkappa}{\int} 2\Lambda_n \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = \overset{\varkappa}{C}(\tau). \tag{7.12}$$

Для наших целей аналитическое продолжение проще всего осуществить таким образом, чтобы функции Λ_n и $\Lambda_{n|n}$ были непрерывны на поверхностях, а $\Lambda_{n|n}$ имела постоянный знак внутри каждой поверхности и удовлетворяла соотношению (7.12).

Такое продолжение возможно для любых поверхностей, окружающих сингулярности, и оно может быть проведено так, чтобы при стягивании этих поверхностей в точку функция $\Lambda_{n|n}$ переходила в сумму δ-функций Дирака:

$$\Lambda_{n|n} \to 4\pi \sum_{\varkappa=1}^{p} \overset{\varkappa}{C}(\tau)\cdot\delta(x^1 - \overset{\varkappa}{\xi}{}^1)\,\delta(x^2 - \overset{\varkappa}{\xi}{}^2)\,\delta(x^3 - \overset{\varkappa}{\xi}{}^3). \tag{7.13}$$

Теперь из уравнения (7.10г) мы получаем

$$\gamma_{n|nss} = 2\Lambda_{n|n},$$

так что

$$\gamma_{n|n}(x) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\Lambda_{n|n}(x')}{r(x, x')}\, dv', \tag{7.14}$$

где интеграл должен быть взят по всей области x^n, а $r(x, x')$ — «расстояние» от x^n до x'^n:

$$r(x, x') = [(x^s - x'^s)(x^s - x'^s)]^{1/2}. \tag{7.15}$$

В силу уравнения (7.10д'), вне поверхностей соотношение (7.14) можно записать в виде

$$\gamma_{n|n}(x) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\varkappa=1}^{p}\overset{\varkappa}{\int} \frac{2\Lambda_{n|n}(x')}{r(x, x')}\, dv'; \tag{7.16}$$

здесь интегралы берутся только по областям внутри поверхностей. При стягивании этих поверхностей в точку мы можем считать $r(x, x')$ постоянными во всех областях интегрирования и записать

$$\gamma_{n|n}(x) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\varkappa=1}^{p}\frac{1}{\overset{\varkappa}{r}(x)}\overset{\varkappa}{\int} 2\Lambda_{n|n} dv,$$

а согласно равенству (7.12), это представляет собой

$$\gamma_{n|n} = -\sum_{\varkappa=1}^{p} \{\overset{\varkappa}{C}(\tau)/\overset{\varkappa}{r}\},$$

т. е. уравнение (7.9д).

Таким образом, мы показали, что с использованным выше аналитическим продолжением из уравнений (7.10) следуют уравнения (7.9).

Для доказательства обратного образуем из уравнений (7.9) соотношение

$$(\gamma_{n|s} - \gamma_{n|n})_{|s} = 2\Lambda_n + \sum_{\varkappa=1}^{p} \left\{ \overset{\varkappa}{C}(\tau) \Big/ \overset{\varkappa}{r} \right\}_{|n}. \tag{7.17}$$

Если теперь образовать поверхностные интегралы от «нормальных» составляющих обеих частей этого уравнения по очереди для каждой из поверхностей, окружающих сингулярности, то левая часть даст нуль, как показано в разделе 2, и в результате получим

$$\overset{\varkappa}{\int} 2\Lambda_n \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, nS = -\overset{\varkappa}{\int} \left\{ \overset{\varkappa}{C} \Big/ \overset{\varkappa}{r} \right\}_{|n} \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS =$$

$$= -\overset{\varkappa}{C} \overset{\varkappa}{\int} \left\{ 1/\overset{\varkappa}{r} \right\} \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\, dS = 4\pi \overset{\varkappa}{C}(\tau),$$

т. е. равенство (7.11).

Тот факт, что справедливость уравнения (7.10д′) для регулярной области следует из уравнений (7.9), тривиален, а эквивалентность уравнений (7.6г, д) и (7.7г, д′), следовательно, доказана.

Доказательство эквивалентности для остальных уравнений (7.6) и (7.7), содержащих индекс нуль, не представляет ничего существенно нового и здесь опущено.

Суть нашей сложной процедуры выписывания всех уравнений поля в двух эквивалентных формах теперь ясна, поскольку наше обобщение уравнений (5.1), которое привело к уравнениям (7.6), не могло быть проведено убедительным образом без использования аналогии с уравнениями (5.2) и (7.7).

Благодаря отсутствию в уравнениях (7.7) интегральных условий на поверхности больше не существует никаких возражений против применения нашего метода приближения для решения этого ряда уравнений. Точно так же, как и раньше, за исключением отсутствия интегральных условий, на поверхности выполняется расщепление уравнений по степеням параметра λ. Однако на каждой ступени приближения можно написать:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{4\pi}\overset{\varkappa}{\int}(\underset{2l}{\gamma}{}_{00,0n}-2\underset{1}{}\underset{2l+1}{\Lambda_{0n}})\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS &= \underset{2l+1}{\overset{\varkappa}{C}}(\tau),\\ \frac{1}{4\pi}\overset{\varkappa}{\int}2\underset{2l}{\Lambda_{mn}}\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS &= \underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}{}_m(\tau). \end{aligned}\right\} \tag{7.18}$$

В этих обозначениях мы получим, точно так же, как для уравнений (7.6) и (7.7), что для каждой ступени приближения эквивалентны следующие системы уравнений:

$$\underset{2l}{\gamma_{00,ss}} = 2\underset{2l}{\Lambda_{00}}, \qquad (7.19а) \qquad\qquad \underset{2l}{\gamma_{00,ss}} = 2\underset{2l}{\Lambda_{00}}, \qquad (7.20а')$$

$$\underset{2l+1}{\gamma_{0n,ss}} = 2\underset{2l+1}{\Lambda_{0n}}, \qquad (7.19б) \qquad\qquad \underset{2l+1}{\gamma_{0n,ss}} = 2\underset{2l+1}{\Lambda_{0n}}, \qquad (7.20б')$$

$$\underset{2l}{\gamma}{}_{00,\underset{1}{0}} - \underset{2l+1}{\gamma_{0n,n}} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\left\{\underset{2l+1}{\overset{\varkappa}{C}}(\tau)/\overset{\varkappa}{r}\right\}, \quad (7.19в) \qquad \underset{2l}{\Lambda}{}_{00,\underset{1}{0}} - \underset{2l+1}{\Lambda_{0n,n}} = 0, \qquad (7.20в')$$

$$\underset{2l}{\gamma_{mn,ss}} = 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}}, \qquad (7.19г) \qquad\qquad \underset{2l}{\gamma_{mn,ss}} = 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}}, \qquad (7.20г)$$

$$\underset{2l}{\gamma_{mn,n}} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\left\{\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}{}_m(\tau)\Big/\overset{\varkappa}{r}\right\}, \quad (7.19д) \qquad\qquad \underset{2l}{\Lambda_{mn,n}} = 0. \qquad (7.20д')$$

При фактическом решении уравнений проще работать с системой (7.19), чем с системой (7.20). На каждой ступени мы должны решать уравнения типа $\gamma_{,ss} = 2\Lambda$.

Чтобы сделать решение в целом непротиворечивым, мы должны наложить условия, что поле должно быть галилеевым на бесконечности и что к частным решениям нельзя добавить гармонических функций более высокого порядка, чем с простыми полюсами, если только их добавление не вынуждается координатными условиями (7.19в) и (7.19д). Предположим, что мы в состоянии найти все последовательные приближения. Тогда величины $\overset{\varkappa}{C}_0(\tau)$, $\overset{\varkappa}{C}_m(\tau)$ будут иметь вид

$$\overset{\varkappa}{C}_0(\tau) = \sum_{l=1}^{\infty}\lambda^{2l+1}\underset{2l+1}{\overset{\varkappa}{C}}{}_0(\tau), \tag{7.21}$$

$$\overset{\varkappa}{C}_m(\tau) = \sum_{l=1}^{\infty}\lambda^{2l}\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}{}_m(\tau). \tag{7.22}$$

Вообще говоря, наше решение не будет решением гравитационных уравнений, поскольку системы уравнений (7.6) и (7.7) являются более общими, чем гравитационные уравнения. Однако, если теперь положить

$$\overset{\times}{C}_0(\tau) = 0, \qquad \overset{\times}{C}_m(\tau) = 0, \tag{7.23}$$

то на движение сингулярностей накладываются такие условия, что наши решения действительно станут искомыми решениями гравитационных уравнений.

Дифференциальные уравнения (7.23) для функций ξ в действительности не зависят от λ, поскольку они должны быть выражены не через вспомогательное время τ, а через истинное время x^0; когда это будет проделано, λ с необходимостью исчезнет.

На практике, разумеется, невозможно продвинуться в вычислениях дальше нескольких первых ступеней. Предположим, однако, что мы смогли найти последовательные приближения до некоторой ступени $l = q$.

В этом случае, если положить

$$\sum_{2=l}^{q} \lambda^{2l+1} \underset{2l+1}{\overset{\times}{C}_0}(\tau) = 0, \qquad \sum_{l=1}^{q} \lambda^{2l} \underset{2l}{\overset{\times}{C}_m}(\tau) = 0, \tag{7.24}$$

мы получим решения гравитационных уравнений с точностью до членов порядка $(2q + 1)$, и уравнения (7.24) дадут приближенные уравнения движения с точностью до членов этого порядка.

8. *Нулевое координатное условие.* В этом разделе мы покажем, что решение наших уравнений всегда можно построить так, что

$$\underset{2l+1}{\overset{\times}{C}_0}(\tau) = 0; \tag{8.1}$$

отсюда следует, что условия

$$\overset{\times}{C}_0(\tau) = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^{2l+1} \underset{2l+1}{\overset{\times}{C}_0}(\tau) \tag{7.21}$$

не налагают никаких ограничений на движение сингулярностей. Этот результат существен потому, что одних лишь условий (7.22) достаточно для полного описания движения и любое добавление условий привело бы к переопределенности движения.

В действительности мы используем уравнения (8.1) как условия нормировки для каждой ступени приближения; они существенны для обеспечения единственности решения.

Для нашего рассуждения существенны следующие уравнения:

$$\underset{2l}{\gamma_{00,ss}} = 2\underset{2l}{\Lambda_{00}}, \tag{7.19а}$$

$$\underset{2l+1}{\gamma_{0n,ss}} = 2\underset{2l+1}{\Lambda_{0n}}, \tag{7.19б}$$

$$\underset{2l}{\gamma}{}_{00,\underset{1}{0}} - \underset{2l+1}{\gamma_{0n,n}} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\left\{\underset{2l+1}{\overset{\varkappa}{C}_0}(\tau)\Big/\overset{\varkappa}{r}\right\}, \tag{7.19в}$$

причем функции Λ известны из решений предыдущих приближений (мы предположим, что нашли эти решения). Если ввести величины $\overset{\varkappa}{\Gamma}(\tau)$ с помощью равенств

$$\underset{2l}{\overset{\varkappa}{\Gamma}}{}_{,\underset{1}{0}}(\tau) = \underset{2l+1}{\overset{\varkappa}{C}_0}(\tau), \tag{8.2}$$

то уравнение (7.19в) можно записать в виде

$$\underset{2l}{\gamma}{}_{00,\underset{1}{0}} - \underset{2l+1}{\gamma_{0n,n}} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\left\{\left(\overset{\varkappa}{\Gamma}\Big/r\right)_{,\underset{1}{0}} - \underset{2l}{\overset{\varkappa}{\Gamma}}\left(1\Big/\overset{\varkappa}{r}\right)_{,\underset{1}{0}}\right\} =$$

$$= -\sum_{\varkappa=1}^{p}\left\{\left(\underset{2l}{\overset{\varkappa}{\Gamma}}\Big/\overset{\varkappa}{r}\right)_{,\underset{1}{0}} + \left(\underset{2l}{\overset{\varkappa}{\Gamma}}\,\underset{1}{\overset{\varkappa}{\dot\xi}{}^{n}}\Big/\overset{\varkappa}{r}\right)_{,n}\right\}, \tag{8.3}$$

где $\dot\xi = d\xi/dr$.

Из уравнений (7.19а) и (7.19б) видно, что величины $\underset{2l}{\gamma_{00}}$ и $\underset{2l+1}{\gamma_{0}}$ произвольны с точностью до аддитивных гармонических функций, и поэтому к ним можно добавить простые полюса, образовав новые величины:

$$\underset{2l}{\gamma'_{00}} = \underset{2l}{\gamma_{00}} + \sum_{\varkappa=1}^{p}\left\{\underset{2l}{\overset{\varkappa}{\Gamma}}\Big/\overset{\varkappa}{r}\right\}, \tag{8.4}$$

$$\gamma'_{0n} = \underset{2l+1}{\gamma_{0n}} - \sum_{\varkappa=1}^{p}\left\{\underset{2l}{\overset{\varkappa}{\Gamma}}\,\underset{1}{\overset{\varkappa}{\dot\xi}{}^{n}}\Big/\overset{\varkappa}{r}\right\}. \tag{8.5}$$

Однако эти новые функции γ', по-прежнему удовлетворяя уравнениям (7.19а) и (7.19б), будут такими, что

$$\underset{2l}{\gamma'}{}_{00,\underset{1}{0}} - \underset{2l+1}{\gamma'_{0n,n}} = 0. \tag{8.6}$$

Поскольку теперь величины C_0 равны нулю, поверхностные интегралы также обращаются в нуль; следовательно, нулевое координатное условие не оказывает влияния на уравнение движения. Эта теорема и наши предыдущие результаты показывают, что уравнения, которые должны лечь в основу фактического вычисления поля, и уравнения движения сингулярностей имеют вид:

$$\underset{2l}{\gamma_{00,ss}} = 2\underset{2l}{\Lambda_{00}}, \tag{8.7а}$$

$$\underset{2l+1}{\gamma_{0n,ss}} = 2\underset{2l+1}{\Lambda_{0n}}, \tag{8.7б}$$

$$\underset{2l}{\gamma_{00,\underset{1}{0}}} - \underset{2l+1}{\gamma_{0n,n}} = 0; \tag{8.7в}$$

$$\underset{2l}{\gamma_{mn,ss}} = 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}} \tag{8.7г}$$

и

$$\underset{2l}{\gamma_{mn,n}} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\left\{\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_m}(\tau) \Big/ \overset{\varkappa}{r}\right\}, \tag{8.7д}$$

причем

$$\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_m}(\tau) = \frac{1}{4\pi}\overset{\varkappa}{\int} 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}}\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS. \tag{8.8}$$

Приближенными уравнениями движения для ступени $l = q$ будут

$$\sum_{\varkappa=1}^{q}\lambda^{2l}\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_m}(\tau) = 0. \tag{8.9}$$

II. Приложение общей теории

Замечание. В первой части настоящей работы мы развили общую теорию нового метода решения гравитационных уравнений последовательными приближениями и получения уравнений движения, в принципе с любой желаемой степенью точности. В этой части работы мы применим этот метод, проводя вычисления до такой ступени, когда определится главное отклонение от ньютоновых законов движения.

К сожалению, вычисления становятся все более громоздкими и включают большое количество технических деталей, которые сами по себе не могут представлять интереса. Приводить здесь все эти вычисления в явном виде нецелесообразно, и мы решили ограничиться изложением общих идей работы и просто привести окончательные результаты. Все вычисления этой части нашей работы хранятся в институте и доступны для всех, кого могут заинтересовать детали вычислений[10].

9. *Приближение* $l = 1$. Приближение $l = 0$ тривиально и приводит к галилееву решению, так что мы сразу перейдем к следующему приближению $l = 1$.

Поскольку величины $\underset{2}{\Lambda}_{00}$, $\underset{3}{\Lambda}_{0n}$ и $\underset{2}{\Lambda}_{mn}$ все равны нулю и, как показано в разделе 3, функции $\underset{2}{\gamma}_{mn}$ также равны нулю, из всех уравнений (8.7) у нас останутся лишь

$$\underset{2}{\gamma}_{00,ss} = 0, \tag{9.1}$$

$$\underset{3}{\gamma}_{0n,ss} = 0, \tag{9.2}$$

$$\underset{2}{\gamma}_{00,\underset{1}{0}} - \underset{3}{\gamma}_{0n,n} = 0. \tag{9.3}$$

Характер всего нашего решения существенно зависит от выбора гармонической функции, взятой в качестве решения уравнения (9.1). Предположим, что рассматриваемые частицы обладают сферической симметрией и что в бесконечности поле галилеево. В этом случае решение уравнения (9.1) единственно, поскольку каждая сингулярность функции $\underset{2}{\gamma}_{00}$ должна быть теперь простым полюсом, согласно уравнению (9.1). Следовательно, для функции $\underset{2}{\gamma}_{00}$ мы имеем решение

$$\underset{2}{\gamma}_{00} = 2\varphi, \qquad \varphi = \sum_{\varkappa=1}^{2p} \left\{-2\overset{\varkappa}{m}/\overset{\varkappa}{r}\right\}, \qquad \overset{\varkappa}{r} = \left[(x^s - \overset{\varkappa}{\xi}{}^s)(x^s - \overset{\varkappa}{\xi}{}^s)\right]^{1/2}, \tag{9.4}$$

причем p величин $\overset{\varkappa}{m}$ не зависят от пространственных координат x^s и могут зависеть лишь от времени.

Из уравнения (9.2) мы видим, что функция $\underset{3}{\gamma}_{0n}$ также является гармонической, и для более точного ее определения мы должны использовать координаты (9.3). Из уравнений (9.3) и (9.4) имеем

$$\underset{3}{\gamma}_{0n,n} = \underset{2}{\gamma}_{00,\underset{1}{0}} = \sum_{\varkappa=1}^{p} (-4\overset{\varkappa}{m}/\overset{\varkappa}{r})_{,0} =$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{p} \left\{(4\overset{\varkappa}{m}/\overset{\varkappa}{r})\,\dot{\overset{\varkappa}{\xi}}{}^n\right\}_{,n} - \sum_{\varkappa=1}^{p} (-4\dot{\overset{\varkappa}{m}}/\overset{\varkappa}{r}).$$

---

[10] c/o Secretary of the School of Mathematics, Institute for Advanced Study, Princeton, N. J. (U.S.A.).

Это уравнение можно решить, не вводя новые сингулярности, лишь в случае $\overset{\varkappa}{\dot m} = 0$. Другими словами, величины $\overset{\varkappa}{m}$, которые в действительности представляют собой массы точечных сингулярностей, с необходимостью являются постоянными. Теперь очевидно, что при наших общих ограничивающих условиях функция $\underset{3}{\gamma}_{0n}$ определена единственным образом

$$\underset{3}{\gamma}_{0n} = \sum_{\varkappa=1}^{p} \left\{ (4\overset{\varkappa}{m}/\overset{\varkappa}{r})\, \overset{\varkappa}{\dot\xi}{}^{n} \right\}. \tag{9.5}$$

В дальнейшем мы ограничим наше рассмотрение случаем только двух частиц. Это не приведет к существенным ограничениям результатов до конца раздела 15, поскольку обобщение на случай p частиц тривиально, и позволяет упростить довольно неудобные обозначения, используемые в общем случае.

В случае двух частиц запишем

$$-2\overset{1}{m}/\overset{1}{r} = \psi, \qquad -2\overset{2}{m}/\overset{2}{r} = \chi; \tag{9.6а}$$

$$\varphi = \psi + \chi; \tag{9.6б}$$

$$\overset{1}{\xi}{}^{s} = \eta^{s}, \quad \overset{2}{\xi}{}^{s} = \zeta^{s}. \tag{9.6в}$$

В результате равенства (9.4) и (9.5) можно представить в виде

$$\underset{2}{\gamma}_{00} = 2\varphi = 2\psi + 2\chi, \tag{9.7а}$$

$$\underset{3}{\gamma}_{0n} = -2\psi\dot\eta^{n} - 2\chi\dot\zeta^{n}. \tag{9.7б}$$

Из равенства (1.18) имеем также

$$\underset{2}{h}_{00} = \varphi = \psi + \chi, \tag{9.8а}$$

$$\underset{3}{h}_{0n} = -2\psi\dot\eta^{n} - 2\chi\dot\zeta^{n}, \tag{9.8б}$$

$$\underset{2}{h}_{mn} = \delta_{mn}\varphi = \delta_{mn}(\varphi + \chi). \tag{9.8в}$$

Это показывает, что приближение $l = 1$ имеет ньютонов характер, но благодаря обращению в нуль $\underset{2}{\overset{\varkappa}{C}}_{m}$ не налагает никаких ограничений на движение.

10. *Вычисление функций* Λ *для* $l = 2$. Первым шагом в вычислении функций Λ для $l = 2$ является определение компонент $h_{\mu\nu}$.

С помощью метода, изложенного в разделе 4, мы можем вычислить разложения компонент $h^{\mu\nu}$ в любом желаемом приближении. Для $l = 1$ находим:

$$\underset{2}{h}^{00} = -\underset{2}{h}_{00} = -\varphi, \tag{10.1}$$

$$\underset{3}{h}^{0n} = \underset{3}{h}_{0n} = \underset{3}{\gamma}_{0n}, \tag{10.2}$$

$$\underset{2}{h}^{mn} = -\underset{2}{h}_{mn} = -\delta_{mn}\varphi. \tag{10.3}$$

Далее, нам необходимо вычислить для $l = 2$ величины $2L_{\mu\nu}$, определенные в формулах (1.15) — (1.17). Линейные члены в выражении для $2\underset{4}{L}_{00}$ дают

$$\varphi_{,00}.$$

Из нелинейных членов дают вклад только три, а именно

$$-2\{\underset{2}{h}^{sr}[\underset{2}{00}, r]\}_{,s} = -\varphi_{,s}\varphi_{,s} \quad (\text{поскольку } \varphi_{,ss} = 0),$$

$$-2[\underset{2}{00}, s][\underset{2}{0s}, 0] = \frac{1}{2}\varphi_{,s}\varphi_{,s},$$

$$-2[\underset{2}{00}, r][\underset{2}{rs}, s] = \frac{3}{2}\varphi_{,s}\varphi_{,s},$$

где $[r, s, p]$ — символы Кристоффеля. Следовательно,

$$2\underset{4}{L}_{00} = \varphi_{,00} + \varphi_{,s}\varphi_{,s}. \tag{10.4}$$

Аналогичные, но довольно утомительные вычисления приводят к следующим результатам:

$$2\underset{5}{L}_{0n} = \varphi_{,s}\underset{3}{h}_{0s,n} - \varphi_{,sn}\underset{3}{h}_{0s} - 3\varphi_{,0}\varphi_{,n}, \tag{10.5}$$

$$2\underset{4}{L}_{mn} = -\underset{3}{h}_{0m,0n} - \underset{3}{h}_{0n,0m} + \delta_{mn}\varphi_{,00} - 2\varphi\varphi_{,mn} - \varphi_{,m}\varphi_{,n} - \delta_{mn}\varphi_{,s}\varphi_{,s}. \tag{10.6}$$

Поэтому, в соответствии с уравнениями (1.30) — (1.35) имеем:

$$\underset{4}{\gamma}_{00,ss} = 2\underset{4}{\Lambda}_{00} = -\frac{3}{2}\varphi_{,s}\varphi_{,s}, \tag{10.7а}$$

$$\underset{5}{\gamma}_{0n,ss} = 2\underset{5}{\Lambda}_{0n} = \varphi_{,s}\underset{3}{\gamma}_{0s,n} - \varphi_{,sn}\underset{3}{\gamma}_{0s} - 3\varphi_{,0}\varphi_{,n}, \tag{10.7б}$$

$$\underset{4}{\gamma}_{mn,ss} = 2\underset{4}{\Lambda}_{mn} = -\underset{3}{\gamma}_{0m,0n} - \underset{3}{\gamma}_{0n,0m} + 2\delta_{mn}\varphi_{,00} - \\ - 2\varphi\varphi_{,mn} - \varphi_{,m}\varphi_{,n} + \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}\varphi_{,s}. \tag{10.7в}$$

Как указывалось в разделах 7 и 8, эти уравнения (10.7), вместе с соответствующими координатными условиями:

$$\underset{4}{\gamma}_{00,0} + \underset{5}{\gamma}_{0n,n} = 0, \tag{10.8а}$$

$$\underset{4}{\gamma}_{mn,n} = -(\overset{1}{\underset{4}{C}}_m/r)^{\overset{1}{}} - (\overset{2}{\underset{4}{C}}_m/r)^{\overset{2}{}}, \tag{10.8б}$$

составляют уравнения, определяющие поле в следующем приближении.

11. *Ньютоновы уравнения движения.* Теперь нам необходимо вычислить поверхностные интегралы

$$\overset{\varkappa}{\underset{4}{C}}_m(\tau) = \frac{1}{4\pi}\overset{\varkappa}{\int} 2\underset{4}{\Lambda}_{mn}\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS, \qquad \varkappa = 1,2. \tag{11.1}$$

Согласно общей теории, изложенной в первой части настоящей работы, эти интегралы не будут зависеть от конкретных форм поверхностей интегрирования, так как дивергенция их подынтегральных выражений должна обращаться в нуль вследствие уравнений поля в предыдущем приближении. Покажем теперь прямым вычислением, что это выполняется для величин, приведенных в формуле (10.7в).

Поскольку функции φ и $\underset{3}{\gamma}_{0n}$ — гармонические, имеем

$$2\underset{4}{\Lambda}_{mn,n} = -\underset{3}{\gamma}_{0n,mn} + 2\varphi_{,00m},$$

что обращается в нуль, как легко видеть из уравнений (9.3) и (9.7а).

При фактическом вычислении поверхностных интегралов мы оценим отдельные вклады разных членов в величину $2\underset{4}{\Lambda}_{mn}$. Так как значение всего интеграла не зависит от формы поверхности интегрирования, то, взяв эту поверхность конечных размеров и всегда на конечном расстоянии от ее сингулярности, мы видим, что весь интеграл не может быть бесконечным. Однако отдельные члены в выражении для $2\underset{4}{\Lambda}_{mn}$ не обладают тем свойством, что их дивергенция обращается в нуль, и поэтому, прежде чем начать вычисления, мы должны выбрать поверхности интегрирования определенным образом. Наиболее удобно взять определенные бесконечно малые сферы, центры которых лежат в сингулярных точках; но в этом случае в значениях отдельных интегралов могут встретиться бесконечности типа

$$\lim_{r\to 0} \mathrm{const}/r^n,$$

где n — положительное целое число. Однако, поскольку они должны взаимно уничтожаться в окончательном результате, мы можем просто пренебрегать ими в ходе всего вычисления поверхностных интегралов.

Рассмотрим интеграл по поверхности, окружающей первую сингулярность. Благодаря бесконечно малым размерам поверхности интегрирования, единственными членами, которые могут дать вклад, отличный от нуля или от бесконечности, являются члены порядка $(1/\overset{1}{r}{}^2)$.

Первым слагаемым величины $2\underset{4}{\Lambda}_{mn}$ является функция $-\underset{3}{\gamma}_{0m,0n}$, которая в соответствии с уравнением (8.7б) может быть записана в виде

$$-\underset{3}{\gamma}_{0m,0n} = -2\psi_{,ns}\dot{\eta}^m\dot{\eta}^s + 2\psi_{,n}\ddot{\eta}^m - 2\chi_{,ns}\dot{\zeta}^m\dot{\zeta}^s + 2\chi_{,n}\ddot{\zeta}^m.$$

Таким образом, нам необходимо рассматривать лишь второе слагаемое; тогда будем иметь:

$$\frac{1}{4\pi}\overset{1}{\int}(-\underset{3}{\gamma}_{0m,0n})\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS = \frac{1}{4\pi}\overset{1}{\int}2\psi_{,n}\ddot{\eta}^m\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS =$$

$$= (4\overset{1}{m}\ddot{\eta}^m)\,\frac{1}{4\pi}\overset{1}{\int}\{(x^n-\eta^n)(x^n-\eta^n)/\overset{1}{r}{}^2\}\,dS =$$

$$= (4\overset{1}{m}\ddot{\eta}^m)\,\frac{1}{4\pi}\overset{1}{\int}\{1/\overset{1}{r}{}^2\}\,dS = 4\overset{1}{m}\ddot{\eta}^m. \tag{11.2}$$

Подобным же образом находим, что

$$\frac{1}{4\pi}\overset{1}{\int}(-\underset{3}{\gamma}_{0n,0m})\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS = \frac{4}{3}\overset{1}{m}\ddot{\eta}^m. \tag{11.3}$$

Четвертый член $(-2\varphi_{,}\varphi_{,m})$ требует несколько отличного рассмотрения. При этом интерес может представлять лишь часть

$$-2\psi_{,mn}\chi.$$

Чтобы вычислить соответствующий вклад в поверхностный интеграл, мы должны разложить функцию χ в степенной ряд в окрестности первой сингулярности

$$\chi = \tilde{\chi} + (\chi^s - \eta^s)\,\tilde{\chi}_{,s} + \ldots, \tag{11.4}$$

где

$$\tilde{\chi} = \chi(\eta^n), \qquad \tilde{\chi}_{,s} = \chi_{,s}(\eta^n) \text{ и т. д.} \tag{11.5}$$

Подставляя это разложение для χ, мы видим, что единственным членом в подынтегральном выражении, который может дать конечный вклад, является член

$$-2\psi_{,mn}(x^s - \eta^s)\,\tilde{\chi}_{,s}. \tag{11.6}$$

Для определения поверхностного интеграла от этого члена необходимо вычислить интеграл

$$\int\limits^{1} (x^s - \eta^s)\,\psi_{,mn}\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS.$$

Имеем

$$(x^s - \eta^s)\,\psi_{,mn}\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N}) =$$

$$= 2\overset{1}{m}(x^s - \eta^s)\{-3(x^m - \eta^m)(x^n - \eta^n)/\overset{1}{r^3} + \delta_{mn}/\overset{1}{r^3}\}(x^n - \eta^n)/\overset{1}{r} =$$

$$= -4\overset{1}{m}(x^s - \eta^s)(x^m - \eta^m)/\overset{1}{r^4}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{4\pi}\int (x^s - \eta^s)\,\psi_{,mn}\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS =$$

$$= -\frac{4\overset{1}{m}}{4\pi}\int (x^s - \eta^s)(x^m - \eta^m)/\overset{1}{r^4}\,dS = -\frac{4}{3}\overset{1}{m}\delta_{ms}, \tag{11.7}$$

и, следовательно, поверхностный интеграл от члена (11.6) равен

$$+\frac{8\overset{1}{m}}{3}\tilde{\chi}_{,m}, \tag{11.8}$$

что является также значением поверхностного интеграла от всего члена $(-\varphi\varphi_{,mn})$.

Для поверхностных интегралов от оставшихся членов аналогичным путем получаем значения:

$$\left.\begin{aligned} 2\delta_{mn}\varphi_{,00} &\rightarrow -\frac{4\overset{1}{m}}{3}\ddot{\eta}^m, \\ -\varphi_{,m}\varphi_{,n} &\rightarrow -\frac{8\overset{1}{m}}{3}\widetilde{\chi}_{,m}, \\ \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}\varphi_{,s} &\rightarrow 2\overset{1}{m}\widetilde{\chi}_{,m}. \end{aligned}\right\} \tag{11.9}$$

Отсюда имеем

$$\underset{4}{\overset{1}{C}}_m(\tau) = \frac{1}{4\pi}\int \underset{4}{\overset{1}{2\Lambda}}_{mn}\cos(\mathrm{n}\cdot\mathrm{N})\,dS = 4\overset{1}{m}\left\{\ddot{\eta}^m + \frac{1}{2}\chi_{,m}\right\}. \tag{11.10}$$

Предположим, что мы не собираемся вычислять следующее приближение. В этом случае наши приближенные уравнения для каждой частицы будут иметь вид

$$\lambda^4\left\{\ddot{\eta}^m + \frac{1}{2}\widetilde{\chi}_{,m}\right\} = 0. \tag{11.11}$$

Интересно отметить, что уравнения движения в этой форме на самом деле не зависят от переменных x^s, поскольку, согласно формулам (11.5) и (9.6),

$$\chi_{,s} = \chi_{,s}(\eta^n), \qquad \chi = -2\overset{2}{m}/\overset{2}{r}. \tag{11.12}$$

Для доказательства мы можем взять в качестве функции χ любую функцию $\overset{2}{r}$. Соотношения (11.12) показывают, что для получения $\widetilde{\chi}_{,s}$ необходимо прежде всего дифференцировать функцию χ по координате x^s и затем заменить аргумент x^s на η^s. Но результат не изменится, если сначала заменить x^s на η^s, а потом продифференцировать по η^s или по $(-\zeta^s)$. Следовательно,

$$\widetilde{\chi}_{,s} = \frac{\partial\chi(r)}{\partial\eta^s} = -\frac{\partial\chi(r)}{\partial\zeta^s}, \tag{11.13}$$

где r — «расстояние» между точками с координатами η^s и ζ^s:

$$r = [(\eta^s - \zeta^s)(\eta^s - \zeta^s)]^{1/2}. \tag{11.14}$$

Поэтому мы можем считать, что наши уравнения движения включают дифференцирование функций, зависящих только от положений сингулярностей, что характерно для теорий, основанных на концепции дальнодействия.

Записав уравнение (11.11) в векторной форме,

$$\overset{1}{m}\ddot{\eta} = \nabla\,(\overset{1}{m}\overset{2}{m}/r), \tag{11.15}$$

мы видим, что уравнение (11.11) дает в точности ньютоновы законы движения [11].

Таким образом, мы получили уравнения механики Ньютона только из уравнений поля, без дополнительного предположения, которое до сих пор считалось необходимым, в виде закона геодезических или специального выбора тензора энергии-импульса.

Из приведенного выше вывода ньютоновых уравнений движения становится очевидным общий механизм, с помощью которого можно получить лоренцовы уравнения движения электрических частиц. В этом случае мы должны рассматривать гравитационные уравнения, в правой части которых стоит максвеллов тензор энергии-импульса, а также уравнения поля Максвелла, и затем применить наш метод приближения ко всей системе уравнений. Однако теперь каждой сингулярности помимо ее массы m необходимо приписывать электрический заряд e. В новых уравнениях поля мы можем заведомо пренебречь вкладом от произведений гравитационных потенциалов. Это пренебрежение имеет следствием обращение в нуль второго члена в уравнении (11.11), в то время как включение тензора Максвелла приводит к появлению в правой части уравнений (11.11) соответствующего поверхностного интеграла, который дает электростатическую силу, действующую на частицу. В следующем приближении мы получим полную силу Лоренца вместе с релятивистской поправкой к массе.

Пока мы имеем дело с сингулярностями, мы не имеем оснований, в рамках теории, исключать отрицательные массы, иными словами, исключать гравитационное отталкивание между частицами. Однако, если мы решим считать массу всегда положительной, то знак максвеллова тензора энергии-импульса в уравнении определяет, должны ли одинаковые заряды притягиваться или отталкиваться. Это также вскрывает ограниченность любой теории, основанной на существовании сингулярностей.

12. *Нормировка величины* $\underset{4}{\gamma_{00}}$. Значение величины $\underset{4}{\gamma_{00}}$, полученное из уравнения (10.7а), определено с точностью до аддитивной гармонической функции, и эту функцию следует найти из соотношений (8.4), (8.2) вместе с нашим основным требованием о том, что следует избегать, насколько это возможно, гармонических функций более высокого порядка, чем функции с простыми полюсами.

---

[11] Уравнения (11.11) и (11.15) записаны через вспомогательное время и вспомогательные массы. К этому вопросу мы вернемся в разделе 17.

Из уравнения (10.7а) и факта гармоничности функции φ немедленно получаем

$$\underset{4}{\gamma_{00}} = -\frac{3}{4}\varphi\varphi + \alpha_{00}\psi + \beta_{00}\chi, \tag{12.1}$$

где мы записали аддитивные функции (8.4) в другой форме, более соответствующей нашим обозначениям в последних разделах; при этом α_{00} и β_{00} зависят только от времени τ через η и ζ и их производные. Величины α_{00} и β_{00} можно определить из условия, что

$$\frac{1}{4\pi}\int \{\underset{4}{\gamma_{00,0n}} - 2\underset{5}{\Lambda_{0n}}\}\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS = 0. \tag{12.2}$$

Значение величины α_{00} можно найти, беря этот интеграл по малой сфере с центром в первой сингулярности. Проводя вычисления, аналогичные вычислениям в разделе 3, после использования уравнений движения первого порядка находим

$$\alpha_{00} = \left\{\dot{\eta}^s\dot{\eta}^s + \frac{1}{2}\widetilde{\chi}\right\}; \tag{12.3}$$

аналогично, интегрируя по малой сфере с центром во второй сингулярности, находим

$$\beta_{00} = \left\{\dot{\zeta}^s\dot{\zeta}^s + \frac{1}{2}\widetilde{\psi}\right\}. \tag{12.4}$$

Здесь

$$\widetilde{\chi} = \chi(\eta^s), \qquad \widetilde{\psi} = \psi(\zeta^s). \tag{12.5}$$

Эти результаты ясно показывают физический смысл специальной нормировки, требуемой условиями (8.4) и (8.2). Теперь мы имеем

$$\lambda^2\underset{2}{\gamma_{00}} + \lambda^4\underset{4}{\gamma_{00}} = \lambda^2\left\{\left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2\alpha_{00}\right)2\psi + \left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2\beta_{00}\right)2\chi - \frac{3}{4}\lambda^2\varphi\varphi\right\}, \tag{12.6}$$

и из формул (12.3) и (12.4) видно, что выражения $\overset{1}{m}\left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2\alpha_{00}\right)$ и $\overset{2}{m}\left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2\beta_{00}\right)$ включают в себя первые релятивистские поправки к массам.

Вычисления до этой стадии соответствуют вычислениям Дросте, де Ситтера и Леви-Чивиты, цитированным во Введении.

13. *Решение уравнений поля для $l = 2$.* Поскольку наша конечная цель состоит в определении уравнений движения в следующих приближениях, мы интересуемся только теми выражениями, которые дают вклад в соответствующие поверхностные интегралы. Перечислим, что необхо-

димо для этих вычислений, поскольку обоснование нашего утверждения не может быть дано без указания деталей вычислений.

1. Вычисление величин $\underset{4}{\gamma}_{mn}$ и $\underset{5}{\gamma}_{0m}$ в окрестности сингулярностей. Мы можем не учитывать в $\underset{4}{\gamma}_{mn}$ те члены, которые стремятся к бесконечности при $\overset{1}{r} \to 0$.

2. Вычисление величин $\underset{4}{\gamma}_{33}$ во всем пространстве. Выражение $2\underset{4}{\Lambda}_{mn}$ в уравнениях (10.7) можно разделить на две части, одна из которых содержит линейные члены вместе со всеми другими членами, не включающими взаимодействие между двумя частицами, а другая содержит все члены, описывающие взаимодействие. Обозначим эти две группы членов соответственно через X_{mn} и Y_{mn}. Интегрирование уравнений

$$\underset{4}{\gamma'}_{mn,ss} = X_{mn} \tag{13.1}$$

не представляет каких-либо трудностей, но уравнения

$$\underset{4}{\gamma''}_{mn,ss} = Y_{mn}, \tag{13.2}$$

очевидно, не интегрируются элементарно, и мы должны ввести упрощение. Поскольку значения величин $\underset{4}{\gamma}_{mn}$ нам необходимы главным образом для вычисления интегралов $\underset{6}{C}_m$ по поверхности, окружающей, например, первую частицу, мы можем ввести разложение величины $\underset{4}{\gamma}_{mn}$ в степенной ряд в окрестности этой точки и получить таким образом решение для $\underset{4}{\gamma}_{mn}$ также в виде разложения. Действительно, из уравнений (13.1) и (13.2) мы находим для величин $\underset{4}{\gamma'}_{mn}$ и γ''_{mn} следующие выражения:

$$\begin{aligned}\underset{4}{\gamma'}_{mn} = {} & \{\psi\,[(x^n-\eta^n)\,\dot{\eta}^m + (x^m-\eta^m)\,\dot{\eta}^n - \delta_{mn}\,(x^s-\eta^s)\,\dot{\eta}^s]\}_{,0} + \\ & + \{\psi\,[(x^n-\zeta^n)\,\dot{\zeta}^m + (x^m-\zeta^m)\,\dot{\zeta}^n - \delta_{mn}\,(x^s-\zeta^s)\,\dot{\zeta}^s]\}_{,0} + \\ & + \frac{7}{4}\,\overset{1}{r}{}^2\psi_{,m}\psi_{,n} + \frac{7}{4}\,\overset{2}{r}{}^2\chi_{,m}\chi_{,n},\end{aligned} \tag{13.3}$$

и

$$\underset{4}{\gamma''}_{mn} = -\,\psi_{,m}\,(x^n-\eta^n)\,\widetilde{\chi}, \tag{13.4}$$

причем в уравнение (13.4) включены только те члены, которые важны для окончательного вычисления поверхностных интегралов $\underset{6}{\overset{1}{C}}_m$.

Величины $\underset{4}{\gamma}_{mn}$ определяются выражением

$$\underset{4}{\gamma}_{mn} = \underset{4}{\gamma}{}'_{mn} + \underset{4}{\gamma}{}''_{mn} + \alpha_{mn}\psi, \tag{13.5}$$

где α_{mn} — функции времени, которые определяются из координатных условий.

Аналогичным образом значения величин $\underset{5}{\gamma}_{0n}$ можно вычислить в два приема. Включая лишь члены, существенные для поверхностных интегралов $\underset{6}{\overset{1}{C}}_m$, в подынтегральные выражения которых $\underset{5}{\gamma}_{0n}$ входят только линейно, находим:

$$\underset{5}{\gamma}{}'_{0m} = -\frac{7}{4}\overset{1}{r}{}^2\psi_{,m}\psi_{,s}\dot{\eta}^s + \frac{3}{4}\psi\psi\dot{\eta}^m; \tag{13.6}$$

$$\begin{aligned}\underset{5}{\gamma}{}''_{0m} = {} & -\frac{3}{2}(x^s-\eta^s)\psi\tilde{\chi}_{,m}\dot{\zeta}^s - (x^m-\eta^m)\psi\tilde{\chi}_{,s}\dot{\eta}^s + \\ & + \frac{1}{2}\psi_{,m}(x^s-\eta^s)(x^l-\eta^l)\tilde{\chi}_{,l}\dot{\zeta}^s + (x^m-\eta^m)\psi\tilde{\chi}_{,s}\dot{\zeta}^s + \\ & + \frac{1}{2}(x^s-\eta^s)\psi\tilde{\chi}_{,s}\dot{\zeta}^m + \frac{3}{2}(x^s-\eta^s)\psi\tilde{\chi}_{,m}\dot{\eta}^s + \\ & + (x^s-\eta^s)\psi_{,m}\tilde{\chi}\dot{\zeta}^s.\end{aligned} \tag{13.7}$$

Величины $\underset{5}{\gamma}_{0n}$ определяются суммой

$$\underset{5}{\gamma}_{0n} = \underset{5}{\gamma}{}'_{0n} + \underset{5}{\gamma}{}''_{0n} + \alpha_{0n}\psi, \tag{13.8}$$

где α_{0n} — функция времени, которую следует определить из условия нормировки.

Остается лишь вычислить величину $\underset{4}{\gamma}_{rr}$ во всем пространстве. Из уравнения (10.7в) имеем

$$\underset{4}{\gamma}_{rr,ss} = 2\varphi_{,00} + \frac{7}{2}\varphi_{,s}\varphi_{,s}, \tag{13.9}$$

откуда

$$\underset{4}{\gamma}_{rr} = -2\overset{1}{m}\overset{1}{r}_{,00} - 2\overset{2}{m}\overset{2}{r}_{,00} + \frac{7}{4}\varphi^2 + \alpha\psi + \beta\chi, \tag{13.10}$$

где α и β представляют собой функции времени, которые следует определить таким образом, чтобы вблизи сингулярностей выражение (13.10) для $\underset{4}{\gamma}_{rr}$ совпадало с выражением (13.5).

14. *Определение величин* α_{mn} *и* α_{0n}. Для определения α_{mn} и α_{0n} из условий (8.7д) и (8.7в) необходимо воспользоваться значениями $\underset{4}{\overset{1}{C}}_{mn}$,

найденными в разделе 3. В результате с точностью до желаемого порядка получаем

$$\alpha_{mn} = \{2\dot{\eta}^m\dot{\eta}^n + \delta_{mn}\widetilde{\chi}\} \tag{14.1}$$

и

$$\alpha_{0n} = -\dot{\eta}^s\dot{\eta}^s\dot{\eta}^n + \widetilde{\chi}\dot{\eta}^n - \widetilde{\chi\dot{\zeta}}^n. \tag{14.2}$$

Наконец, из нашего последнего замечания в разделе 13 следует:

$$\alpha = 2\dot{\eta}^s\dot{\eta}^s + \frac{1}{2}\widetilde{\chi}, \quad \beta = 2\dot{\varphi}^s\dot{\varphi}^s + \frac{1}{2}\widetilde{\varphi}. \tag{14.3}$$

15. *Вычисление величин* $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$. Как мы теперь покажем, при вычислении величин $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$ для наших целей можно предположить, что поверхностный интеграл $\underset{6}{C}_m$ обращается в нуль. После вычисления поверхностных интегралов $\underset{4}{C}_m$ приближенные уравнения движения можно записать в виде

$$\lambda^4\underset{4}{C}_m + \lambda^6\underset{6}{C}_m = 0. \tag{15.1}$$

Но это показывает, что если движение происходит в соответствии с уравнениями (15.1), то $-\lambda^4\underset{4}{C}_m$ и $\lambda^6\underset{6}{C}_m$ будут величинами одного порядка. Очевидно, что $\lambda^4\underset{4}{C}_m$ может входить в $\lambda^6\underset{6}{\Lambda}_{mn}$ только в комбинации с величиной типа $\lambda^2\underset{2}{\theta}$. Поэтому $\lambda^4\underset{4}{C}_m$ будет входить фактически только в члены порядка λ^8 и выше, и поскольку при вычислении уравнений движения мы не намерены выходить за пределы порядка λ^6, то можно пренебречь всеми членами в $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$, содержащими $\underset{4}{C}_m$. Однако даже если учесть это обстоятельство, вычисления остаются все еще очень утомительными, и в разложении $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$ имеются фактически члены 41 типа. Находим:

$$\begin{aligned}
2\underset{6}{\Lambda}_{mn} = &-\underset{5}{\gamma}_{0m,0n} - \underset{5}{\gamma}_{0n,0m} + \delta_{mn}\underset{4}{\gamma}_{00,00} + \underset{4}{\gamma}_{mn,00} - \varphi\underset{4}{\gamma}_{00,mn} - \\
&-\varphi\underset{4}{\gamma}_{ss,mn} - \varphi_{,mn}\underset{4}{\gamma}_{00} - \varphi_{,mn}\underset{4}{\gamma}_{ss} + \varphi_{,ms}\underset{4}{\gamma}_{ns} + \varphi_{,ns}\underset{4}{\gamma}_{ms} - \delta_{mn}\varphi_{,sr}\underset{4}{\gamma}_{sr} - 2\varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{mn,s} + \\
&+\varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{ms,n} + \varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{ns,m} - \frac{1}{2}\varphi_{,m}\underset{4}{\gamma}_{ss,n} - \frac{1}{2}\varphi_{,n}\underset{4}{\gamma}_{ss,m} - \frac{1}{2}\varphi_{,n}\underset{4}{\gamma}_{00,m} - \\
&-\frac{1}{2}\varphi_{,m}\underset{4}{\gamma}_{00,n} + \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{rr,s} + \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{00,s} - \underset{3}{\gamma}_{0s}\underset{3}{\gamma}_{0n,ms} - \underset{3}{\gamma}_{0s}\underset{3}{\gamma}_{0m,ns} +
\end{aligned}$$

$$+2\underset{3}{\gamma}_{0s}\underset{3}{\gamma}_{0s,mn}+\frac{1}{2}\delta_{mn}\underset{3}{\gamma}_{0s,r}\underset{3}{\gamma}_{0r,s}-\frac{3}{2}\delta_{mn}\underset{3}{\gamma}_{0s,r}\underset{3}{\gamma}_{0s,r}+\underset{3}{\gamma}_{0s,m}\underset{3}{\gamma}_{0s,n}+\underset{3}{\gamma}_{0m,s}\underset{3}{\gamma}_{0,ns}-$$
$$-\varphi_{,0n}\underset{3}{\gamma}_{0m}-\varphi_{,0m}\underset{3}{\gamma}_{0n}+2\delta_{mn}\varphi_{,0s}\underset{3}{\gamma}_{0s}-\psi_{,0}\underset{3}{\gamma}_{0m,n}-\varphi_{,0}\underset{3}{\gamma}_{0n,m}-\varphi_{,n}\underset{3}{\gamma}_{0m,0}-\varphi_{,m}\underset{3}{\gamma}_{0n,0}+$$
$$+2\varphi\underset{3}{\gamma}_{0m,0n}+2\varphi\underset{3}{\gamma}_{0n,0m}-2\delta_{mn}\varphi\varphi_{,00}+2\varphi\varphi\varphi_{,mn}-\varphi\varphi_{,m}\varphi_{,n}+$$
$$+\frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi\varphi_{,s}\varphi_{,s}+\frac{1}{2}\delta_{mn}\varphi_{,0}\varphi_{,0}. \quad (15.2)$$

Условие обращения величин $\Lambda_{mn,n}$ в нуль требует дополнительной проверки правильности этой формулы. Мы вычислили дивергенцию величины $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$, исходя из формулы (15.2), и нашли, что она действительно обращается в нуль.

16. *Поверхностные интегралы для* $l=3$. Для нахождения главных отклонений от ньютоновых законов движения осталось, по существу, вычислить значения поверхностных интегралов $\underset{6}{C}_m$. Для этого мы должны прежде всего подставить в формулу (15.2) найденные ранее значения $\underset{4}{\gamma}_{00}$, $\underset{4}{\gamma}_{mn}$ и $\underset{5}{\gamma}_{0n}$, а затем вычислить один за другим вклады от получившихся членов и сложить полученные выражения. Общая процедура похожа на ту, которая была использована в разделе 11 при вычислении величин $\underset{4}{C}_{mn}$, но значительно сложнее последней.

Пользуясь тем, что величину $\underset{4}{C}_m$ можно считать равной нулю, мы можем выразить результат в следующей форме:

$$\overset{1}{\underset{6}{C}}_m=\frac{1}{4}\int^{1}2\underset{6}{\Lambda}_{mn}\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\,dS=-4\overset{1}{m}\overset{2}{m}\Big\{\Big[\dot{\eta}^s\dot{\eta}^s+$$
$$+\frac{3}{2}\dot{\zeta}^s\dot{\zeta}^s-4\dot{\eta}^s\dot{\zeta}^s-4\,\frac{\overset{2}{m}}{r}-5\,\frac{\overset{1}{m}}{r}\Big]\frac{\partial}{\partial\eta^m}\left(\frac{1}{r}\right)\times[4\dot{\eta}^s(\dot{\zeta}^m-$$
$$-\dot{\eta}^m)+3\dot{\eta}^m\dot{\zeta}^s-4\dot{\zeta}^s\dot{\zeta}^m]\frac{\partial}{\partial\eta^s}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 r}{\partial\eta^s\,\partial\eta^r\,\partial\eta^m}\dot{\zeta}^s\dot{\zeta}^r. \quad (16.1)$$

17. *Главное отклонение от ньютоновых законов движения.* Для получения уравнений движения, соответствующих этой ступени нашего приближения, следует написать:

$$\lambda^4\overset{\varkappa}{\underset{4}{C}}_m+\lambda^6\overset{\varkappa}{\underset{6}{C}}_m=0,\qquad \varkappa=1,2, \quad (17.1)$$

и затем исключить λ, переходя от вспомогательного времени $\tau=\lambda x^0$ к обычному времени x^0 и вводя массу M вместо m, где $M=\lambda^2 m$. Для новых величин можно сохранить старые обозначения, не внося какой-либо путаницы, так что теперь $\dot{\xi}$ будет равна $d\xi/dx^0$ вместо $d\xi/d\tau$, а для новой массы M можно ввести прежнее обозначение m. Тогда уравнения движения (17.1) можно с учетом соотношений (11.10) и (16.1) записать в виде:

$$\ddot{\eta}^m - m^2 \frac{\partial (1/r)}{\partial \dot{\eta}^m} = \overset{2}{m} \left\{ \left[\dot{\eta}^s \dot{\eta}^s + \frac{3}{2} \dot{\zeta}^s \dot{\zeta}^s - 4 \dot{\eta}^s \dot{\zeta}^s - 4 \frac{\overset{2}{m}}{r} - 5 \frac{\overset{1}{m}}{r} \right] \frac{\partial}{\partial \dot{\eta}^m} (1/r) + \right.$$

$$\left. + \left[4 \dot{\eta}^s (\dot{\zeta}^m - \dot{\eta}^m) + 3 \dot{\eta}^m \dot{\zeta}^s - 4 \dot{\zeta}^s \dot{\zeta}^m \right] \frac{\partial}{\partial \eta^s} (1/r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 r}{\partial \eta^s \partial \eta^r \partial \eta^m} \dot{\zeta}^s \dot{\zeta}^r \right\}. \quad (17.2)$$

Уравнения движения для второй частицы получаются путем замены символов $\overset{1}{m}$, $\overset{2}{m}$, η, ζ на $\overset{2}{m}$, $\overset{1}{m}$, ζ, η, соответственно.

С точки зрения практических приложений эти уравнения, описывающие в релятивистском приближении движение двух тяжелых гравитирующих тел, составляют главный результат наших вычислений.

Эти уравнения были затем проинтегрированы Г. П. Робертсоном; его результаты приведены в статье «Задача двух тел в общей теории относительности» в этом же журнале [12].

Мы выражаем благодарность проф. Робертсону за проявленный интерес к этой проблеме и помощь.

Поступила 16 июня 1937 г.

Постановка задачи о получении уравнений движения источников поля в форме движения сингулярностей не удовлетворяла Эйнштейна (ср. статью 110). Однако в нескольких статьях (статьи 120, 136) задача была подробно исследована. В частности, в статье 120 показано, что задача может быть изложена значительно компактнее, чем это сделано в настоящей работе. Дальнейшее упрощение и развитие это направление получило в работах Л. Инфельда [ср. книгу: Л. Инфельд и И. Плебанский. Движение и относительность. ИЛ, 1962].

Уравнение движения пылевидной материи было изучено В. А. Фоком [ср. книгу. В. А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. Изд. 2, М., 1960].

А. Эддингтон и Дж. Кларк [A. Eddington a. G. Clark. Proc. Roy. Soc., 166, 465 (1938)] получили эти уравнения непосредственно из вариационного принципа.

[12] G. P. Robertson. Math. Ann. 1938, 39, 101.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА КАЛУЦЫ*

(Совместно с П. Бергманом)

Введение

До сих пор были сделаны две довольно простые и естественные попытки связать гравитацию и электричество с помощью единой теории поля: одна — Вейлем, другая — Калуцой. Кроме того, предпринимались попытки формально воспроизвести теорию Калуцы таким образом, чтобы избежать введения пятого измерения в физический континуум. Излагаемая здесь теория отличается от теории Калуцы в одном существенном пункте: мы приписываем пятому измерению физическую реальность, тогда как в теорию Калуцы пятое измерение вводится лишь с целью получить новые компоненты метрического тензора, описывающие электромагнитное поле. Выбирая соответствующую систему координат, Калуца предполагает, что переменные по́ля зависят от четырех координат x^1, x^2, x^3, x^4, но не от пятой x^0. Это отражает тот факт, что физический континуум, согласно нашему опыту, является четырехмерным. Однако мы покажем, что пятому измерению можно придать некоторый смысл, не вступая в противоречие с четырехмерным характером физического континуума.

Чтобы облегчить чтение, изложим в первой части настоящей работы первоначальную теорию Калуцы, а во второй — ее новое обобщение. В Приложении мы упростим вывод уравнений поля путем обобщения тензорного исчисления на случай тензорных плотностей.

* *Generalisation of Kaluza's Theory of Electricity.* (With P. Bergmann). Ann. Math., ser. 2, 1938, 39, 683—701.

I. ТЕОРИЯ КАЛУЦЫ[1]

1. Рассмотрим пятимерное пространство ($4+1$ измерение) с метрикой

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu. \tag{1}$$

2. Предположим, что пространство «цилиндрическое» по отношению к определенному векторному полю. Аналитически это означает следующее. Существует контравариантный вектор A^ν, такой что если τ — бесконечно малая постоянная, то

$$\delta x^\nu = \tau A^\nu \tag{2}$$

есть бесконечно малое смещение точек пространства. Линейный элемент не должен менять своей длины, определенной формулой (1), если его концы смещаются согласно соотношению (2). Это условие выражается уравнением

$$\gamma_{\mu\nu,\sigma} A^\sigma + \gamma_{\mu\sigma} A^\sigma_{,\nu} + \gamma_{\nu\sigma} A^\sigma_{,\mu} = 0. \tag{3а}$$

Нетрудно показать инвариантный характер этого уравнения. Полагая

$$\gamma_{\mu\sigma} A^\sigma = A_\mu, \tag{3б}$$

получаем

$$A_{\mu,\nu} = A_{\nu,\mu} - A^\sigma \{\gamma_{\mu\sigma,\nu} + \gamma_{\nu\sigma,\mu} - \gamma_{\mu\nu,\sigma}\} = 0, \tag{3в}$$

или

$$\{A_{\mu,\nu} - A_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\} + \{A_{\nu,\mu} + A_\sigma \Gamma^\sigma_{\nu\mu}\} = 0, \tag{3г}$$

где $\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa}$ — символы Кристоффеля второго рода. В терминах абсолютного тензорного исчисления уравнение (3г) имеет вид[2]

$$A_{\mu;\nu} + A_{\nu;\mu} = 0. \tag{3}$$

Из уравнения (3) следует, что $\gamma_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$, т. е. норма A^μ постоянна вдоль линий, к которым A^μ является касательным. Умножая уравнение (3) на $A^\mu A^\nu$, получаем

$$A^\nu A^\mu A_{\mu;\nu} + A^\mu A^\nu A_{\nu;\mu} = A^\nu (A^\mu A_\mu)_{,\nu} = 0. \tag{4}$$

[1] Изложение теории Калуцы см. в работах O. K l e i n. Zeischr. Phys., 1926, 37, 895—906; A. E i n s t e i n. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1927, 23. (Статья 83).

[2] Уравнение Киллинга.

3. Теория Калуцы налагает на векторное поле A^μ другое ограничение, помимо выраженного в уравнении (3): линии, к которым поле A^μ является касательным («A-линии»), должны быть геодезическими. Аналитически это означает, что линии, определенные уравнением

$$\frac{dx^\nu}{d\sigma} = \lambda A^\nu \tag{5}$$

(где $1/\lambda^2$ равно норме A), удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2x^\nu}{d\sigma^2} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma} = 0 \tag{6а}$$

или, согласно (5),

$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial x^\alpha} A^\alpha A^\nu + A^\alpha A^\nu_{;\,\alpha} = 0. \tag{6б}$$

Первый член этого уравнения благодаря соотношению (4) обращается в нуль $\left(\frac{\partial \ln \lambda}{\partial x^\alpha} A^\alpha\right.$ — производная функции от нормы A по направлению A). Поэтому

$$A^\alpha A^\nu_{;\,\alpha} = 0 \tag{6в}$$

или

$$A^\alpha A_{\nu;\,\alpha} = 0. \tag{6г}$$

Из уравнения (3) следует

$$A^\alpha A_{\alpha;\,\nu} = \frac{1}{2}(A^\alpha A_\alpha)_{,\,\nu} = 0. \tag{6}$$

Это значит, что норма A постоянна не только вдоль A-линий, но и во всем пространстве. Таким способом мы характеризуем структуру пространства в теории Калуцы.

Замечание. Из «цилиндрического» характера пространства следует существование вектора A, *симметричные* производные которого обращаются в нуль. Но остаются *антисимметричные* производные A_μ, которые в теории Калуцы представляют электромагнитное поле.

Специальная система координат

Рассмотрим четырехмерную поверхность, пересекающую каждую из A-линий один и только один раз. Введем на этой поверхности четыре координаты x^a ($a = 1 \ldots 4$) и положим, что координата x^0 равна нулю на этой поверхности. Через каждую точку поверхности проходит A-линия, на которой одно из двух направлений выбирается в качестве положительного; этот выбор должен быть одинаков на всех A-линиях. В качестве координаты x^0 мы выбираем расстояние вдоль A-линии, вычисленное с помощью формулы (1), отправляясь от начальной четырехмерной поверхности $x^0=0$; знак определяется по выбранному направлению. Поэтому на x^0-линии

$$x^0 = \int_0^{x^0} \sqrt{\gamma_{00}}\, dx^0; \tag{7a}$$

в силу последнего соотношения во всем пространстве

$$\gamma_{00} = 1. \tag{7}$$

Так как абсолютное значение A всегда равно единице, мы имеем

$$\gamma_{00} A^0 A^0 = 1, \tag{8a}$$

или

$$A^0 = 1, \tag{8}$$

поскольку благодаря выбору нашей системы координат $A^1 = A^2 = A^3 = A^4 = 0$.

Отсюда и из уравнения (3a) получаем условие цилиндричности

$$\gamma_{\mu\nu,0} = 0. \tag{9}$$

Поскольку вообще

$$A_\mu = \gamma_{\mu\nu} A^\nu,$$

в специальной системе координат имеем

$$A_m = \gamma_{0m}, \qquad A_0 = \gamma_{00} = 1. \tag{10}$$

Ни одна из компонент A_μ, в силу соотношения (9), не зависит от x^0. Поэтому в антисимметричных производных

$$A_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$$

все компоненты с одним из индексов, равным нулю, тождественно обращаются в нуль.

В нашей специальной системе координат структура пространства описывается десятью функциями γ_{mn} и четырьмя функциями γ_{0m} $(=A_m)$, которые не зависят от x^0. (Здесь и далее латинские индексы меняются в пределах только от 1 до 4.) Поэтому настоящее описание пространства является четырехмерным. Но, как скоро будет показано, введенные переменные не являются с точки зрения нашего описания наиболее естественными.

Возникает вопрос, какие преобразования координат еще разрешены при сохранении нашей специальной системы координат.

а. Координаты x^a были выбраны произвольно на четырехмерной поверхности ($x^0 = 0$). Поэтому еще допустимы следующие преобразования:

$$\bar{x}^a = \bar{x}^a (x^1 \ldots x^4),$$
$$\bar{x}^0 = x^0. \tag{11}$$

Мы назовем их *4-преобразованиями*.

б. Четырехмерная поверхность была выбрана произвольно. Ее можно заменить на другую поверхность, не меняя координат x^a, отвечающих A-линиям. Соответствующее преобразование будет

$$\begin{aligned} \bar{x}^a &= x^a, \\ \bar{x}^0 &= x^0 + f(x^1 \ldots x^4). \end{aligned} \tag{12}$$

Мы назовем его *0-преобразованием*.

Величины γ_{mn} ведут себя при 4-преобразовании как четырехмерный тензор, а A_n ($= \gamma_{0n}$) — как 4-вектор. При 0-преобразовании получаем

$$\bar{A}_m = A_m - \frac{\partial f}{\partial x^m}, \tag{13}$$

$$\bar{\gamma}_{mn} = \gamma_{mn} = \gamma_{m0} \frac{\partial f}{\partial x^n} - \gamma_{n0} \frac{\partial f}{\partial x^m} + \frac{\partial f}{\partial x^m} \frac{\partial f}{\partial x^n}. \tag{14}$$

Вместо величин γ_{mn}, которые не инвариантны относительно 0-преобразования [согласно (14)], мы введем новые величины g_{mn}, рассуждая следующим образом. Пусть две бесконечно близкие A-линии L и L' проходят через две бесконечно близкие точки P и P'. Между L и L' существует экстремальное расстояние благодаря существованию метрики. Это расстояние определяется формулой

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - A_\mu A_\nu. \tag{15}$$

Определенные таким образом величины $g_{\mu\nu}$ являются компонентами пятимерного тензора. В специальной системе координат не обращаются в нуль лишь те его компоненты, у которых нет нулевого индекса, т. е. его компонентами являются лишь g_{mn}. Компоненты g_{mn} ведут себя как четырехмерный тензор при 4-преобразовании и инвариантны относительно 0-преобразования.

Поэтому весьма естественно выбрать в качестве переменных поля в специальной системе координат g_{mn} и A_m; g_{mn} — компоненты физического метрического тензора. Относительно 0-преобразования инвариантны антисимметричные производные от A_m (т. е. $A_{m,n} - A_{n,m}$), но не сами компоненты A_m. Это отвечает тому факту, что электромагнитные потенциалы определены лишь с точностью до аддитивных членов — градиентов произвольной функции.

Этот результат можно резюмировать следующим образом: пятимерное пространство эквивалентно четырехмерному с метрическим тензором (g_{mn}) и векторным полем (A_m), определенными с точностью только до аддитивных градиентов произвольных функций.

Введенный в теории Калуцы пятимерный континуум позволяет рассматривать гравитационные и электромагнитные поля как единую структуру пространства. Этот результат существен. На первый взгляд здесь можно было бы возразить: будет ли на самом деле шагом вперед введение пятимерной метрики и 5-векторов, на которые налагаются какие-то произвольные ограничения, вместо четырехмерной метрики и 4-векторов? Чтобы правильно судить о теории Калуцы, следует иметь в виду, что действительно произвольный шаг был сделан только при введении пятимерного описания четырехмерного пространства. Однако если это сделано, то введение 5-вектора является лишь необходимым следствием четырехмерного характера реального пространства. Описание электромагнитного поля векторным потенциалом, достигнутое этим путем, не является, конечно, тривиальным результатом.

Если же отвлечься от этого пункта, то результат оказывается весьма неутешительным. Цель Калуцы несомненно заключалась в том, чтобы прийти к новому физическому взгляду на гравитацию и электричество путем введения единой структуры пространства. Однако эта цель не была достигнута.

Уравнения поля в данной теории можно вывести, например, из вариационного принципа. Это подразумевает выбор функции действия $\mathfrak{H}$, которая должна быть скалярной плотностью, т. е. $\frac{1}{\sqrt{g}}\mathfrak{H}$ должно быть инвариантом по отношению к 4- и 0-преобразованиям. Поэтому в нашей специальной системе координат инвариант следует составлять из g_{mn} и A_m, а также из тех производных этих величин, которые не меняются при замене A_m на $A_m - \partial f/\partial x^m$. Поэтому мы заключаем, что A_m могут входить в функцию действия только через их антисимметричные производные. Если функция Гамильтона $\mathfrak{H}$ должна содержать только вторые производные от потенциалов g_{mn}, A_m или выражения второй степени, содержащие только первые производные, то наиболее общая функция действия должна иметь вид

$$\mathfrak{H} = \sqrt{g}\,(R + cM), \tag{16}$$

где R — инвариант кривизны и M — максвелловский инвариант. Однако многочисленные бесплодные попытки найти, исходя из этой теории, полевое описание материи, свободное от сингулярностей, убедили нас, что такого решения не существует [3].

II. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ КАЛУЦЫ

Общие замечания о структуре пространства

Если попытка Калуцы и является реальным шагом вперед, то лишь ценой введения пятимерного пространства. Было много попыток удержать существенные формальные результаты, полученные Калуцой, не принося в жертву четырехмерный характер физического пространства. Это показывает, как сопротивляется наша интуиция введению пятого измерения. Но рассматривая и сравнивая все эти попытки, приходим к заключению, что все старания не исправили дела. Представляется невозможным формулировать идею Калуцы простым путем, не вводя пятого измерения.

Поэтому мы вынуждены принимать пятое измерение всерьез, хотя прямой опыт и не побуждает нас к этому. Если структура пространства вынуждает нас принять пятимерную теорию, то, хотим мы того или нет, следует задать вопрос, будет ли ощутимо предположение о строгой сводимости к четырехмерному пространству. Мы думаем, что ответ на этот вопрос должен быть отрицательным, учитывая, что можно понять квазичетырехмерный характер физического пространства из пятимерного континуума, упростив тем самым основные геометрические предположения.

Чтобы пояснить лежащие в основе теории идеи, рассмотрим двумерное пространство (вместо пятимерного), т. е. квазиодномерный континуум (вместо четырехмерного) (см. рис. 1).

Рассматриваемое пространство образует узкую полоску, ограниченную линиями ST и $S'T'$. Координатами в этом пространстве будут x^0 и x'. Для простоты пространство взято эвклидовым. Представим себе, что полоска свернута в трубку так, чтобы линия ST совпала с $S'T'$. При этом каждая точка P на линии ST совпадает с некоторой точкой P' на $S'T'$, так что образуется небольшая цилиндрическая поверхность. Если ширина полоски (обозначенная через b), т. е. длина окружности цилиндра,

[3] Мы пытались найти строгое решение гравитационных уравнений, свободное от сингулярностей, учтя электромагнитное поле. Мы думали, что симметричное относительно вращений решение, вероятно, могло бы описывать элементарную частицу. Наши исследования были основаны на теории «мостов». [См. A. Einstein, N. Rosen. Phys. Rev., 1935 48, 73. (Статья 113.—*Ред.*).] Однако мы убеждены, что решения с такими свойствами не существует.

мала и если задана непрерывная медленно меняющаяся функция $\varphi(x^0, x^1)$, т. е. если выражение $b\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}$ мало по сравнению с φ, то значения φ в точках, принадлежащих сегменту PP', очень мало отличаются друг от друга и φ можно рассматривать приближенно как функцию только x^1.

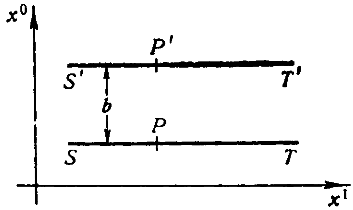


Рис. 1.

Уменьшение числа измерений пространства достигнуто потому, что пространство замкнуто в измерении x^0 и «ширина» его очень мала. Однако пространство не будет иметь квазиодномерного характера, если функция φ меняется слишком быстро.

Предположение об эвклидовости пространства, конечно, несущественно в наших рассуждениях. Существенным для наших доводов может оказаться выбор метрики такого рода, что можно говорить об окружности в направлении x^0; во всяком случае мы интересуемся лишь пространствами с римановой метрикой.

В дальнейшем более удобно рассматривать вместо «замкнутых» в направлении x^0 пространств [4] пространства «периодические» в направлении x^0. «Периодические» и «замкнутые» пространства эквивалентны, если соответствующие точки P, P', P'',... рассматриваются как «одна и та же» точка.

Вводя в нашу картину четырехмерный континуум $x^1 \dots x^4$ вместо одномерного континуума x^1, мы приходим к модели физического пространства, которая послужит основой для наших последующих рассуждений.

Наиболее существенным пунктом нашей теории является замена предположения «2» о строгой цилиндричности предположением о замкнутости (или периодичности) пространства в направлении x^0.

---

[4] Это выражение имеет не вполне ясный смысл; им, однако, можно пользоваться, если иметь в виду только наглядное описание свойств пространства.

Структура пространства

Мы будем характеризовать пространство в соответствии с нашими предыдущими замечаниями о видоизмененной форме теории Калуцы.

1. Мы рассматриваем пятимерное пространство с метрикой (1).

2. Пространство замкнуто в одном измерении. Замкнутое пространство заменяется пространством открытым, но периодическим по этому измерению. Поэтому точка P физического пространства будет представлена бесконечным числом точек P, P', P'',...

Замечание. Этот постулат заменяет условие цилиндричности в теории Калуцы.

3. Через каждую точку пространства проходит геодезическая, замкнутая на себя и свободная от сингулярностей. Или, для «периодического» пространства: если две точки P, P', соответствующие друг другу, но в остальном произвольные, связаны геодезической [5], то эта линия проходит через все остальные точки, соответствующие P, т. е. через точки P'', P''' и т. д.

Эта аксиома соответствует аксиоме 3 первоначальной теории Калуцы. Введенные здесь геодезические соответствуют A-линиям в теории Калуцы и мы снова назовем их A-линиями.

Мы снова вводим специальную систему координат. Рассматриваем четырехмерную поверхность $x^0 = 0$, пересекающую все A-линии один и только один раз. Четыре координаты $x^1 \ldots x^4$ на этой поверхности определяют точку на ней, а также A-линию, проходящую через эту точку. Любая точка P на этой A-линии определяется расстоянием, измеренным вдоль этой линии с помощью формулы (1), между $\overset{0}{P}$ (точка пересечения A-линии и поверхности $x^0 = 0$) и P. Для точек с «положительной» стороны поверхности $x^0 = 0$ имеем:

$$x^0 = \frac{1}{b}\int\limits_{\overset{0}{P}}^{P} d\sigma, \tag{17}$$

где

$$b = \int\limits_{P}^{P'} d\sigma. \tag{17a}$$

Здесь P, P' — последовательные соответственные точки на A-линии. Поэтому b зависит только от $x^1, \ldots, x^4$. При таком соглашении разность x^0-координат двух последовательных соответственных точек (лежащих, конечно, на одной x^0-линии) равна 1.

[5] Мы рассматриваем случай, когда существует лишь одна геодезическая.

При сделанных предположениях каждой точке пространства соответствуют пять координат $x^0, x^1, \ldots, x^4$.

Линии с постоянными $x^1, \ldots, x^4$ являются геодезическими. На этих линиях

$$\frac{dx^1}{d\sigma} = \frac{dx^2}{d\sigma} = \frac{dx^3}{d\sigma} = \frac{dx^4}{d\sigma} = 0, \qquad \frac{dx^0}{d\sigma} = b \quad \frac{d^2x^0}{d\sigma^2} = 0. \tag{18а}$$

Поэтому уравнение геодезической дает

$$\Gamma^0_{00} = 0. \tag{18б}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{bmatrix} & \alpha & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} = 0, \tag{18в}$$

или

$$\gamma_{00,0} = 0 \tag{18г}$$

и

$$2\gamma_{a0,0} - \gamma_{0,0a} = 0. \tag{18}$$

Уравнение (18г) не содержит ничего нового, поскольку на A-линиях

$$d\sigma^2 = b^2\, dx^{02} \tag{19а}$$

и

$$\gamma_{00} = b^2. \tag{19}$$

Проинтегрируем (18) по одному периоду вдоль A-линии. Интеграл от первого члена в левой части (18) дает нуль вследствие периодического характера пространства. С учетом соотношений (17) и (19) мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^a} \int\limits_{P'}^{P''} \gamma_{00} dx_0 = \frac{\partial}{\partial x^a} \left\{ b \int\limits_{P'}^{P''} d\sigma \right\} = \frac{\partial}{\partial x^a} (b^2) = 0. \tag{20}$$

Поэтому b и γ_{00} не зависят также от $x^1, \ldots, x^4$, т. е. постоянны во всем пространстве. Мы можем положить

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{00} &= 1, \\ b &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Строго говоря, наш выбор значения для γ_{00} не оправдан, так как мы уже выбрали разность Δx^0 координат последовательных соответственных точек равной 1. Принимая во внимание этот факт, положим разность Δx^0 равной не единице, а некоторой малой величине λ. Тогда, в силу равенств (21), λ одновременно представляет собой метрическое расстояние $P'P''$.

Далее, из (18) благодаря (21) следует

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\gamma_{a0} = 0. \tag{22}$$

Поэтому в обобщенной теории γ_{0a} (но не γ_{ab}) также не зависят от x^0. Мы можем ввести в обобщенную теорию так же, как и раньше, поле контравариантных единичных векторов A^μ, компоненты которых в специальной системе координат равны 0, 0, 0, 0, 1. Поэтому снова имеем

$$A_a = A^\beta \gamma_{\beta a} = \gamma_{0a}. \tag{22a}$$

Мы можем ввести также вместо

$$g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} - A_\alpha A_\beta, \tag{23}$$

метрический тензор, у которого не обращаются в нуль лишь компоненты без индекса нуль. Здесь также существует в этом смысле четырехмерный метрический тензор g_{ab}. *Однако его компоненты, вообще говоря, являются периодическими функциями* x^0. Все различие между новой теорией и теорией Калуцы лежит именно в этом факте. (A_m в обеих теориях не зависит от x^0.)

Охарактеризовав структуру пространства, после некоторого математического введения мы обратимся к формулировке уравнений поля, которые можно вывести из вариационного принципа в рассматриваемом пространстве. Мы снова потребуем, чтобы гамильтониан состоял из слагаемых, в которые входят либо вторые производные (линейно), либо произведения двух первых производных.

Тензорный анализ в специальной системе координат

Из нашего определения специальной системы координат следует, что снова существует свобода в «4-преобразованиях» и «0-преобразованиях». Чтобы избежать формальных трудностей, связанных с общими системами координат, мы должны исследовать трансформационные свойства построенных величин относительно 4- и 0-преобразований. Определим контравариантный 4-вектор: четыре величины a^s (функции $x^0, x^1, \ldots, x^4$) образуют контравариантный вектор, если при 4-преобразованиях выполняется следующий закон преобразования:

$$\bar{a}^s = \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^t} a^t, \tag{24}$$

и если величины a^s инвариантны относительно 0-преобразований. Определение ковариантного вектора совершенно аналогично. Отсюда также следует определение тензора.

В силу этого g_{mn} является тензором. Однако A_m ($= \gamma_{0m}$) не вектор, поскольку его компоненты преобразуются при 0-преобразованиях согласно соотношению (13). В то же время величины $A_{mn} = A_{m,n} - A_{n,m}$ являются компонентами тензора.

Тензорная алгебра совпадает с обычной четырехмерной и здесь нет нужды воспроизводить ее.

Теперь обратим наше внимание на образование новых тензоров путем дифференцирования.

1. Как для 4-, так и для 0-преобразований мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^0} = \frac{\partial}{\partial x^0}. \tag{25}$$

Поэтому из каждого тензора можно образовать новый путем дифференцирования по x^0.

2. Ковариантное дифференцирование по x^a: если ψ — скаляр, то при 0-преобразованиях

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}^a} = \frac{\partial \psi}{\partial x^a} - \frac{\partial \psi}{\partial x^0} f_{,a}. \tag{26a}$$

Из этого соотношения и из соотношения (13), исключая $f_{,a}$, находим, что выражение

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^a} - A_a \frac{\partial \psi}{\partial x^0}$$

инвариантно относительно 0-преобразований. Поэтому оператор

$$\frac{\partial}{\partial x^a} - A_a \frac{\partial}{\partial x^0}, \tag{26}$$

действующий на тензор, оставляет его компоненты инвариантными при 0-преобразованиях.

С другой стороны, из абсолютного дифференциального исчисления мы знаем, что выражение

$$B_{s,a} - \frac{1}{2} B_l g^{lm} (g_{ms,a} + g_{am,s} - g_{as,m}) \tag{27a}$$

(B_s — произвольный ковариантный вектор) обладает тензорными свойствами по отношению к 4-преобразованию (но не к 0-преобразованию). Заменяя всюду в этом выражении $\frac{\partial}{\partial x^a}$ на оператор (26), мы добавляем новые члены, которые снова обладают тензорными свойствами по отношению к 4-преобразованиям, что справедливо для $B_{s,0}$, $g_{mn,0}$ и A_s. Полученное таким образом выражение, конечно, обладает тензорными свойствами по отношению к 4-преобразованиям. Поскольку оно также инвариантно относительно 0-преобразования, оно удовлетворяет нашему определению тензора.

Поэтому мы можем определить ковариантное дифференцирование следующим образом:

$$B_{s;\,a} = B_{s,\,a} - A_a B_{s,\,0} - B_l \Gamma^l_{sa}, \tag{27}$$

где

$$\Gamma^l_{sa} = \frac{1}{2} g^{lm} [(g_{ms,\,a} - A_a g_{ms,\,0}) + (g_{m0,\,s} - A_s g_{ma,\,0}) - (g_{as,\,m} - A_m g_{as,\,0})]. \tag{27б}$$

Для контравариантного вектора с тем же Γ^l_{sa} аналогичным образом получаем

$$B^s_{;\,a} = B^s_{,\,a} - A_a B^s_{,\,0} + B^l \Gamma^s_{la}. \tag{28}$$

Отсюда сразу следует соответствующее правило для более общих тензоров. Определенное нами абсолютное дифференцирование удовлетворяет правилу дифференцирования произведений. Прямым подсчетом получается

$$g_{mn;\,a} = g^{mn}_{;\,a} = 0. \tag{29}$$

3. Тензор кривизны. Путем непосредственного вычисления мы находим [6]

$$B_{s;\,a;\,b} - B_{s;\,b;\,a} = -B_l R^l_{\cdot sab} - B_{s,\,0} A_{ab}, \tag{30}$$

где

$$R^l_{\cdot sab} = (\Gamma^l_{sa,\,b} - A_b \Gamma^l_{sa,\,0}) - (\Gamma^l_{sb,\,a} - A_a \Gamma^l_{sb,\,0}) - \Gamma^l_{am}\Gamma^m_{sb} + \Gamma^l_{bm}\Gamma^m_{sa}. \tag{30а}$$

Из соотношения (30), благодаря тензорному характеру последнего члена, следует, что $R^l_{\cdot sab}$ — тензор (тензор кривизны), антисимметричный по двум своим последним индексам.

4. Правило перестановки операторов «$,_0$» и «$;_a$» имеет вид

$$(u_{m,\,0})_{;\,a} - (u_{m;\,a})_{,\,0} = u_s \Gamma^s_{am,\,0}. \tag{31}$$

Следовательно, производные от Γ^s_{am} по x^0 обладают тензорными свойствами.

---

[6] Здесь $A_{ab} = A_{a,\,b} - A_{b,\,a}$.

Вариационный принцип и уравнения поля

С помощью развитого здесь формализма сформулируем наиболее общие уравнения поля, удовлетворяющие следующим условиям:

1. Уравнения поля должны получаться из вариационного принципа.

2. Функция действия должна состоять исключительно из членов, в которые линейно входят вторые производные или произведения двух первых производных.

Тензорами, из которых можно было бы алгебраически построить такую функцию действия, являются:

$$R^{i}_{\cdot klm},\quad A_{mn},\quad g_{mn},\quad g_{mn,0},\quad g_{mn,00},\quad A_{mn,0},\quad A_{mn;s}.$$

Некоторые инварианты, образованные из этих тензоров, можно свести к остальным путем интегрирования по частям. Остаются только следующие инварианты, независимые в этом смысле друг от друга:

$$\begin{aligned} H_1 &= R^{i}_{\cdot klm}\delta^{l}_{i}g^{km} = R_{km}g^{km} = R,\\ H_2 &= A_{mn}A_{st}g^{ms}g^{nt} = A_{mn}A^{mn}, \qquad (32)\\ H_3 &= g^{mn}_{,0}g_{mn,0},\qquad H_4 = g^{mn}g_{mn,0}g^{rs}g_{rs,0}. \end{aligned}$$

Поэтому наиболее общий вариационный принцип, который удовлетворяет нашим условиям, сформулированным выше, имеет вид

$$\delta\int \mathfrak{H}\,dx^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3\,dx^4 = 0, \qquad (33)$$

где

$$\mathfrak{H} = \sqrt{-g}\,(\underset{1}{\alpha}\underset{1}{H} + \underset{2}{\alpha}\underset{2}{H} + \underset{3}{\alpha}\underset{3}{H} + \underset{4}{\alpha}\underset{4}{H});$$

здесь $\underset{1}{\alpha}, \ldots, \underset{4}{\alpha}$ — произвольные постоянные. Варьирование должно производиться по g^{mn} и A_s. Интеграл следует брать по произвольной мировой области координат $x^1, \ldots, x^4$ и по одному периоду координаты x'. Последнее ограничение необходимо, поскольку δA_s должно выбираться независимым от x^0. [Ср. (22).] Поэтому вклады от границ области не входят в обычные операции, производимые над функцией действия, если только интеграл берется точно по одному периоду координаты x^0.

Выкладки, которые можно произвести с помощью методов, изложенных в Приложении, дают:

$$\left.\begin{aligned}
\delta\int \underset{1}{\mathfrak{H}}\, dx^0 \ldots dx^4 &= \int\Big\{\Big[\frac{1}{2}R_{kl} + \frac{1}{2}R_{lk} - \frac{1}{2}g_{kl}R\Big]\delta g^{kl} + \\
&\quad + [g^{mn}\Gamma^s_{mn,0} - g^{ms}\Gamma^n_{mn,0}]\,\delta A_s \sqrt{-g}\, dx^0 \ldots dx^4, \\
\delta\int \underset{2}{\mathfrak{H}}\, dx^0 \ldots dx^4 &= \int\Big\{\Big[2A_{km}A_l^m - \frac{1}{2}g_{kl}A_{mn}A^{mn}\Big]\delta g^{kl} - \\
&\quad - [4A^{st}_{;t}]\,\delta A_s\Big\}\sqrt{-g}\, dx^0 \ldots dx^4, \\
\delta\int \underset{3}{\mathfrak{H}}\, dx^0 \ldots dx^4 &= \int [-2g_{kl,00} + 2g^{ls}g_{kl,0}g_{ls,0} - g^{rs}g_{rs,0}g_{kl,0} - \\
&\quad - \frac{1}{2}g^{rs}_{,0}g_{rs,0}g_{kl}\Big]\delta g^{kl}\sqrt{-g}\, dx^0 \ldots dx^4, \\
\delta\int \underset{4}{\mathfrak{H}}\, dx^0 \ldots dx^4 &= \int g_{kl}\Big[\frac{1}{2}(g^{mn}g_{mn,0})^2 + 2g^{mn}g_{mn,00} + \\
&\quad + 2g^{mn}_{,0}g_{mn,0}]\,\delta g^{kl}\sqrt{-g}\, dx^0 \ldots dx^4.
\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Здесь δg^{kl} — произвольные функции координат $x^0, \ldots, x^4$. Поэтому сумма коэффициентов при δg^{kl}, умноженных на соответствующую постоянную α, должна обращаться в нуль. Однако, как мы упоминали раньше, δA_s являются функциями только $x^1, \ldots, x^4$ и не зависят от x^0. Поэтому в данном случае обращается в нуль только интеграл от суммы коэффициентов при δA_s (умноженных на свои $\underset{i}{\alpha}$), взятый по одному периоду x^0.

Четырнадцать уравнений поля, выведенных таким образом из вариационного принципа (33), принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{1}{\alpha}\Big(\frac{1}{2}R_{kl} + \frac{1}{2}R_{lk} - \frac{1}{2}g_{kl}R\Big) + \underset{2}{\alpha}\Big(2A_{km}A_l^m - \frac{1}{2}g_{kl}A_{mn}A^{mn}\Big) + \\
&\quad + \underset{3}{\alpha}(-2g_{kl,00} + 2g^{rs}g_{kr,0}g_{ls,0} - g^{rs}g_{rs,0}g_{kl,0} - \frac{1}{2}g^{rs}_{,0}g_{rs,0}g_{kl} + \\
&+ \underset{4}{\alpha}g_{kl}\Big[\frac{1}{2}(g^{mn}g_{mn,0})^2 + 2g^{mn}g_{mn\,00} + 2g^{mn}_{,0}g_{mn,0}\Big] = 0 = \frac{1}{\sqrt{-g}}\mathfrak{G}_{kl},
\end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

$$\int\{\underset{1}{\alpha}(g^{mn}\Gamma^s_{mn,0} - g^{ms}\Gamma^n_{mn,0}) - 4\underset{2}{\alpha}A^{st}_{;t}\}\sqrt{-g}\, dx^0 = 0 = \int \mathfrak{J}^s dx^0. \qquad (36)$$

Наконец, мы выведем тождества, которым удовлетворяют уравнения поля. Как обычно эти тождества мы найдем, выражая аналитически инвариантность интеграла от гамильтониана по отношению к бесконечно малым преобразованиям координат. Если мы введем вариации δg^{mn} и δA_s, вызванные бесконечно малыми преобразованиями координат, то вариация интеграла обращается в нуль. Следует заметить, что варьирование нужно производить не при фиксированных точках пространства, а при фиксированных значениях координат. Обозначая бесконечно малые преобразования координат через

$$\begin{aligned} x^a &= \bar{x}^a + \xi^a (\bar{x}^1 \dots \bar{x}^4), \\ x^0 &= \bar{x}^0 + \xi^0 (\bar{x}^1 \dots \bar{x}^4), \end{aligned} \tag{37a}$$

для δg^{mn} и δA_s получаем:

$$\begin{aligned} \delta g^{kl} &= -g^{sl}\xi^k_{,s} - g^{sk}\xi^l_{,s} + g^{kl}_{,s}\xi^s + g^{kl}_{,0}\xi^0, \\ \delta A_s &= A_r\xi^r_{,s} + \xi^0_{,s} + A_{s,r}\xi^r. \end{aligned} \tag{37б}$$

Эти выражения легко привести к виду, более ясно обнаруживающему их тензорный характер:

$$\begin{aligned} \delta g^{kl} &= -g^{sl}\xi^k_{;s} - g^{sk}\xi^l_{;s} + g^{kl}_{,0}(A_r\xi^r + \xi^0), \\ \delta A_s &= (A_r\xi^r + \xi^0)_{;s} + A_{sr}\xi^r. \end{aligned} \tag{37в}$$

Выражение $(A_r\xi^r + \xi^0)$ представляет собой скалярное произведение двух пятимерных векторов. После выполнения некоторых интегрирований по частям (с помощью методов, изложенных в Приложении) мы получаем

$$\delta \int \mathfrak{H}\, dx^\alpha = \int \{[\mathfrak{G}^s_{k\cdot;s} + A_{sk}\mathfrak{J}^s]\,\xi^k + [\mathfrak{G}_{rs}g^{rs}_{,0} - \mathfrak{J}^s_{;s}]\,(A_r\xi^r + \xi^0)\}\, dx^\alpha = 0. \tag{37г}$$

Поскольку ξ^k, ξ^0 — произвольные функции $x^1, \dots, x^4$ и не зависят от x^0, интеграл (37г) тождественно обращается в нуль в том и только в том случае, если интегралы от выражений в квадратных скобках по одному периоду x^0 равны нулю:

$$\begin{aligned} &2\int \mathfrak{G}^s_{k\cdot;s}\, dx^0 + A_{sk}\int \mathfrak{J}^s dx^0 = 0, \\ &\int \mathfrak{G}_{rs}g^{rs}_{,0}\, dx^0 - \left\{\int \mathfrak{J}^s dx^0\right\}_{;s} = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Это и есть тождества для уравнений поля (35), (36).

В теорию входят четыре универсальные постоянные: $\underset{2}{\alpha}/\underset{1}{\alpha}$, $\underset{3}{\alpha}/\underset{1}{\alpha}$, $\underset{4}{\alpha}/\underset{1}{\alpha}$ и λ. Постоянная $\underset{2}{\alpha}/\underset{1}{\alpha}$ соответствует гравитационной постоянной, связывающей (произвольные) единицы длины и массы. Одна из остальных постоянных, например λ, зависит от единицы длины. Остальные две являются «истинными» универсальными постоянными, которые не могут быть исключены из теории.

Резюме

Пятимерная теория физического пространства, предложенная Калуцой, приводит к единому описанию гравитации и электромагнетизма. Если ее последовательно интерпретировать как пятимерную теорию, из нее следует существование вектора A, симметричные ковариантные производные которого обращаются в нуль во всем пространстве. Это предположение, если отвлечься от его физического смысла, кажется искусственным. Кроме того, описание чисто четырехмерного континуума с помощью пятимерного представляется недостаточно оправданным.

В предлагаемом в данной работе обобщении мы пытались устранить эти недостатки. Гипотеза цилиндричности (т. е. существования вектора A с обращающимися в нуль симметричными производными) была заменена на предположение, что пространство замкнуто по пятой координате. В результате этой замены основные предположения теории значительно упрощаются. Кроме того, пятое измерение вводится не формально, а ему приписывается некоторый физический смысл. При этом не возникает противоречия с эмпирическим четырехмерным характером физического пространства.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Анализ тензорных плотностей

Помимо понятия тензора, важную роль в релятивистских исследованиях играет тензорная плотность. Хотя понятие тензорной плотности легко свести к понятию тензора, все же весь формализм и особенно вывод уравнений поля из вариационного принципа значительно упрощается, если ввести тензорные плотности независимо. Хотя аналитические свойства тензорных плотностей уже полностью исследованы [7], но чтобы облегчить чтение, мы сделаем несколько замечаний по этому поводу.

Тензорная плотность отличается от тензора множителем (общим для всех компонент), обладающим трансформационными свойствами скаляр-

[7] V. Hlavatý. Ann. mat., V, Ser. IV (1927/28): Théorie des densités dans les displacement général.

ной плотности. Скалярная плотность $\underset{(n)}{\rho}$ с «весом» n есть величина со следующим законом преобразования:

$$\underset{(n)}{\bar{\rho}} = \underset{(n)}{\rho} \left| \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \right|^{n}. \tag{A1}$$

Существуют, соответственно, скалярные плотности с различными весами. (Обычные тензоры представляют собой скалярные плотности с весом нуль.) Перемножая две тензорные плотности с весами m и n, мы получаем тензорную плотность с весом $(m + n)$. Алгебра тензорных плотностей непосредственно следует из тензорной алгебры и нет нужды выводить ее правила здесь.

Ради простоты мы рассмотрим здесь только величины в четырехмерном континууме; однако результаты не зависят от числа измерений.

В любом четырехмерном пространстве существуют две тензорные плотности Леви-Чивиты:

$$\underset{(-1)}{\delta_{iklm}}$$

и

$$\underset{(+1)}{\delta_{iklm}},$$

антисимметричные по всем индексам, компоненты которых равны $+1$ или -1 в зависимости от того, является ли $(iklm)$ четной или нечетной перестановкой цифр (1234). Характер этих тензорных плотностей следует непосредственно из закона преобразования тензорных плотностей. Из тензорных плотностей Леви-Чивиты можно получить известный тензор Кронекера $\delta_m^{m'}$ (с компонентами, равными 1 при $m = m'$ и 0 при $m \neq m'$):

$$\delta_m^{m'} = \frac{1}{6} \underset{(-1)}{\delta_{iklm}} \underset{(+1)}{\delta^{iklm'}}. \tag{A2}$$

Предположим, что в рассматриваемом пространстве существуют симметричные компоненты параллельного переноса (функции $\Gamma_{ik}^{l} = \Gamma_{ki}^{l}$), с помощью которых ковариантные производные тензора определяются обычным способом:

$$B^{k\ldots}_{i\ldots;s} = B^{k\ldots}_{i\ldots,s} + B^{l\ldots}_{i\ldots}\Gamma^{k}_{ls} + \ldots - B^{k\ldots}_{l\ldots}\Gamma^{l}_{is} - \ldots \tag{A3}$$

Такое определение ковариантного дифференцирования обладает двумя важными свойствами:

1) оно удовлетворяет правилу дифференцирования произведений в обычном анализе

$$(AB)_{;s} = AB_{;s} + BA_{;s};$$

2) ковариантная производная от тензора Кронекера тождественно обращается в нуль

$$\delta^k_{i;\,s} = 0.$$

Мы определим теперь ковариантную производную тензорной плотности так, чтобы 1) сохранилось правило дифференцирования произведений и 2) тождественно обращались в нуль абсолютные производные от ковариантных и контравариантных тензорных плотностей Леви-Чивиты.

Непосредственным расчетом мы убеждаемся, что эти требования удовлетворяются при следующем определении:

$$\underset{(n)}{B^{k\ldots}_{i\ldots;\,s}} = \underset{(n)}{B^{k\ldots}_{i\ldots,\,s}} + \underset{(n)}{B^{l\ldots}_{i\ldots}}\Gamma^k_{ls} + \ldots - \underset{(n)}{B^{k\ldots}_{l\ldots}}\Gamma^l_{is} - \ldots - n\underset{(n)}{B^{k\ldots}_{i\ldots}}\Gamma^r_{sr}\,. \tag{A4}$$

Это и есть правило дифференцирования тензорных плотностей с весом n.

Далее, если мы требуем, чтобы пространство было римановым, то компоненты параллельного переноса определяются равенством

$$\Gamma^s_{mn} = \frac{1}{2}g^{sl}\left(g_{ml,\,n} + g_{nl,\,m} - g_{mn,\,l}\right) \tag{A5}$$

и, следовательно,

$$\Gamma^n_{sn} = \frac{1}{2}\frac{g_{,\,s}}{g}\,, \qquad g = |g_{ik}|\,. \tag{A6}$$

Определитель g представляет собой скалярную плотность с весом 2. Используя соотношение (A4), мы получаем

$$\underset{(2)}{g_{;\,s}} = g_{,\,s} - 2g\left(\frac{1}{2}\frac{g_{,\,s}}{g}\right) = 0. \tag{A7}$$

Поэтому ковариантная производная от $\sqrt{g}$ и, в силу правила дифференцирования произведений, ковариантные производные от $g^{mn}\sqrt{g}$ и $g_{mn}\sqrt{g}$ также обращаются в нуль.

Теперь мы покажем, как пользоваться тензорными плотностями при варьировании.

1. *Вывод уравнений гравитации путем варьирования риманова тензора кривизны*

$$\left.\begin{aligned} &\delta\int \underset{(1)}{\mathfrak{H}}\,d\tau = 0,\\ &\underset{(1)}{\mathfrak{H}} = \sqrt{-g}\,g^{km}\delta^l_i R^i_{\cdot klm}\,. \end{aligned}\right\} \tag{A8}$$

Палатини показал, что варьирование по g^{km} можно упростить, если учесть соотношение

$$\delta R^{i}_{\cdot klm} = (\delta\Gamma^{i}_{kl})_{;m} - (\delta\Gamma^{i}_{km})_{;l}, \tag{A9}$$

которое нетрудно проверить (заметим, что $\delta\Gamma^{i}_{kl}$ — тензор!). Тогда в силу соотношения

$$\delta(\sqrt{-g}g^{km}) = \sqrt{-g}\left(\delta g^{km} - \frac{1}{2}g^{km}g_{al}\cdot\delta g^{al}\right) \tag{A10a}$$

мы получаем

$$\delta\int \underset{(1)}{\mathfrak{H}}\,d\tau = \int\sqrt{-g}\left(R_{km} - \frac{1}{2}g_{km}R\right)\delta g^{km}\,d\tau +$$
$$+\int\sqrt{-g}g^{km}\left[(\delta\Gamma^{l}_{kl})_{;m} - (\delta\Gamma^{l}_{km})_{;l}\right]d\tau. \tag{A10б}$$

Поскольку $(g^{km}\sqrt{-g})_{;l}$ обращается в нуль, подынтегральное выражение во втором интеграле можно переписать в виде

$$[\sqrt{-g}(g^{kl}\delta\Gamma^{m}_{km} - g^{km}\delta\Gamma^{l}_{km})]_{;l}, \tag{A10в}$$

где выражение в квадратных скобках (которое обозначим через $\underset{(1)}{K}{}^{l}$) — векторная плотность с весом 1. Поэтому из соотношения (A4) следует, что $\underset{(1)}{K}{}^{l}_{;l}$ можно заменить на $\underset{(1)}{K}{}^{l}_{,l}$. Согласно теореме Гаусса, этот интеграл равен нулю, если вариации g_{ik} и Γ^{l}_{ik} обращаются в нуль на границе области интегрирования. В уравнении (A10б) остается только первый интеграл, так что в результате находим

$$R_{km} - \frac{1}{2}g_{km}R = 0. \tag{A10}$$

2. *Тензорные плотности в пространстве обобщенной теории Калуцы.* В таком пространстве, в специальной системе координат скалярную плотность с весом n можно определить законом преобразования:

$$\left.\begin{aligned} \underset{(n)}{\bar\rho} &= \underset{(n)}{\rho}\left|\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial\bar{x}^{\beta}}\right|^{n} && \text{для 4-преобразований,}\\ \bar\rho_{(n)} &= \rho_{(n)} && \text{для 0-преобразований.}\end{aligned}\right\} \tag{A11}$$

Закон преобразования тензорных плотностей также задается этим определением, т. е. сводится к закону преобразования тензоров.

Ковариантное дифференцирование тензорных плотностей. Благодаря соотношениям (A4), (27) и (28) можно ожидать, что правило дифференцирования выражается следующей формулой:

$$\underset{(n)}{B^{k\ldots}_{i\ldots;\,s}} = B^{k\ldots}_{i\ldots,\,s} - A_s B^{k\ldots}_{i\ldots,\,0} + B^{l\ldots}_{i\ldots}\Gamma^k_{ls} + \ldots -$$

$$- B^{k\ldots}_{l\ldots}\Gamma^l_{is} - \ldots - nB^{k\ldots}_{i\ldots}\Gamma^l_{sl}\,; \qquad \text{(A12)}$$

$\underset{(1)}{\delta_{iklm}}$ — тензорная плотность по отношению к 4-преобразованиям и инвариант по отношению к 0-преобразованиям. Поэтому, в силу нашего определения, она является тензорной плотностью. Ковариантная производная от этой тензорной плотности, определенная формулой (A12), обращается в нуль. Нетрудно видеть также, что формула (A12) сохраняет в силе правило дифференцирования произведений.

Из нашего определения следует, что $\underset{(2)}{g} = |g_{mn}|$ является скалярной плотностью с весом 2, а его ковариантные производные [в силу соотношения (27б)]

$$\underset{(2)}{g_{;\,s}} = g_{,\,s} - A_s g_{,\,0} - 2g\Gamma^l_{sl} = 0. \qquad \text{(A13)}$$

Далее выполняется уравнение

$$g_{mn,\,s} = 0. \qquad \text{(A14)}$$

Образуем дивергенцию $\underset{(1)}{B^s_{;\,s}}$ векторной плотности $\underset{(1)}{B^s}$ с весом 1. Согласно формуле (A12), мы имеем

$$\underset{(1)}{B^s_{;\,s}} = \underset{(1)}{B^s_{,\,s}} - A_s \underset{(1)}{B^s_{,\,0}} \qquad \text{(A15a)}$$

и, поскольку A_s не зависит от x^0,

$$\underset{(1)}{B^s_{;\,s}} = \underset{(1)}{B^s_{,\,s}} - (A_s B^s)_{,\,s}. \qquad \text{(A15)}$$

Существенно отметить, что оба члена в правой части последнего равенства имеют вид обычных производных.

Теперь мы должны, как и в теории гравитации, образовать вариацию интеграла [ср. (32) и (33)]:

$$\int \sqrt{-g}\,g^{km}\delta^l_i R^i_{.klm}\,d\tau. \qquad \text{(A16a)}$$

Однако этот интеграл следует брать по области переменных $x^0, x^1, \ldots, x^4$, содержащей в точности один период по координате x^0 и произвольной по координатам $x^1, \ldots, x^4$. Тензор $R^i_{.klm}$ определен формулой (30а). Вариация этой величины имеет вид

$$\delta R^i_{.klm} = (\delta\Gamma^i_{kl})_{,\,m} - (\delta\Gamma^i_{km})_{;\,l} - \delta A_m \Gamma^i_{kl,\,0} + \delta A_l \Gamma^i_{km,\,0}\,. \qquad \text{(A16б)}$$

Поскольку нас интересует вариация выражения $\sqrt{-g}g^{km}$, варьирование этого интеграла дает

$$\int \sqrt{-g}\,(g^{km}\Gamma^{l}_{km,\,0} - g^{kl}\Gamma^{m}_{km,\,0})\,\delta A_l\,d\tau. \qquad \text{(A16в)}$$

Варьирование $R^{i}_{.klm}$, благодаря двум последним членам в (А16б), дает

$$\int \sqrt{-g}\,(g^{km}\Gamma^{l}_{km,\,0} - g^{kl}\Gamma^{m}_{km,\,0})\,\delta A_l\,d\tau. \qquad \text{(A16г)}$$

Первые два члена в правой части (А16б) не дают, однако, какого-либо вклада. Поскольку доказательство этого одинаково для обоих членов, мы покажем это лишь для первого. Подынтегральное выражение

$$\sqrt{-g}g^{km}(\delta\Gamma^{l}_{kl})_{;\,m},$$

благодаря соотношению

$$(\sqrt{-g}g^{km})_{;\,m} = 0$$

[что следует из формул (А13) и (А14)], можно привести к виду

$$\underset{(1)}{B}{}^{m}_{;\,m}.$$

Но такой интеграл равен нулю в силу (А15). Это следует частично из обращения в нуль вариаций на x^a-границе, а частично из периодичности B^m по координате x^0. Окончательный результат варьирования таков:

$$\int \sqrt{-g}\left\{\left(\frac{1}{2}R_{km} + \frac{1}{2}R_{mk} - \frac{1}{2}g_{km}R\right)\delta g^{km} + \right.$$
$$\left. + (g^{km}\Gamma^{l}_{km,\,0} - g^{kl}\Gamma^{m}_{km,\,0})\,\delta A_l\right\} d\tau, \qquad \text{(A16)}$$

где δg^{km} произвольно зависят от x^a и x^0, а δA_s — только от x^a.

Выкладки при выводе тождеств совершенно аналогичны.

Поступила 8 апреля 1938 г.

Больше Эйнштейн не возвращался к пятимерной теории (ср., однако, статью 123). Следующим вариантом единой теории поля явилась теория бивекторных полей (статьи 123, 124).— *Прим. ред.*

119

О СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ, СОСТОЯЩИХ ИЗ МНОГИХ ГРАВИТИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ И ОБЛАДАЮЩИХ СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ *

Рассматривая решение Шварцшильда для статического гравитационного поля, обладающего сферической симметрией,

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{\mu}{2r}\right)^4 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \left(\frac{1 - \frac{\mu}{2r}}{1 + \frac{\mu}{2r}}\right)^2 dt^2, \qquad (1)$$

можно заметить, что

$$g_{44} = \left(\frac{1 - \frac{\mu}{2r}}{1 + \frac{\mu}{2r}}\right)^2$$

обращается в нуль при $r = \mu/2$. Это означает, что находящиеся в этих точках часы могут идти с нулевой скоростью. Далее легко показать, что и лучу света, и материальной частице понадобится бесконечно долгое время (измеренное в единицах «координатного времени»), чтобы достичь точки $r = \mu/2$, если они начали свой путь в точке $r > \mu/2$. В этом смысле сфера $r = \mu/2$ образует геометрическое место точек, где поле сингулярно (μ — гравитационная масса).

Возникает вопрос, можно ли действительно построить поле, обладающее такой сингулярностью, с помощью гравитирующих масс или такие области с обращающейся в нуль компонентой g_{44} в реальных случаях не осуществляются? Шварцшильд сам исследовал гравитационное поле, создаваемое несжимаемой жидкостью. Он нашел, что и здесь появляются области с обращающейся в нуль компонентой g_{44}, если только при данной

* *On a Stationary System with Spherical Symmetry Consisting of many Gravitating Masses.* Ann. Math., 1939, 40, 922—936.

плотности жидкости радиус сферы, создающей поле, выбран достаточно большим.

Однако этот аргумент не является убедительным; концепция несжимаемой жидкости не совместима с теорией относительности, ибо упругие волны в этом случае распространялись бы с бесконечной скоростью. Поэтому необходимо рассматривать сжимаемую жидкость, уравнение состояния которой исключает возможность распространения звуковых сигналов со скоростью, превышающей скорость света. Но рассмотрение любой такой проблемы представляет чрезвычайно сложную задачу. Кроме того, выбор соответствующего уравнения состояния является в широких пределах произвольным. В результате нельзя быть уверенным, что при этом не было сделано физически неоправданных предположений.

Таким образом, возникает вопрос, нельзя ли ввести в теорию вещество так, чтобы с самого начала исключить сомнительные предположения. Фактически это можно сделать, выбрав в качестве массы, создающей поле, большое число малых гравитирующих частиц, свободно движущихся под действием поля, которое они все порождают. Эта система напоминает сферическое скопление звезд. Следовательно, мы можем далее действовать так, как если бы поле, в котором движутся частицы, создавалось непрерывным распределением масс, обладающим сферической симметрией и соответствующим всей совокупности частиц.

Мы можем далее упростить наше рассмотрение, предположив, что все частицы движутся по круговым траекториям вокруг центра симметрии скопления. Но и в этом случае еще остается возможность произвольного выбора радиального распределения плотности массы. Результатом последующего рассмотрения является вывод, что компонента g_{44} нигде не может обращаться в нуль и что полная гравитирующая масса частиц, распределенных в пределах заданного радиуса, всегда остается меньше некоторой определенной величины.

1. О траекториях частиц и их пространственном распределении

С помощью соответствующего выбора радиальной координаты гравитационное поле сферически симметричного скопления может быть задано следующей формой:

$$ds^2 = -a\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + b\,dt^2, \tag{2}$$

где a и b являются функциями $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$.

Исследуем сначала круговое движение частиц вокруг центра симметрии. Предположим, например, что это движение происходит в плоскости

$x_3 = 0$. После введения полярных координат

$$x_3 = r \cdot \cos \vartheta, \quad x_1 = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \vartheta \cdot \sin \varphi$$

соотношение (2) принимает вид

$$ds^2 = -a\,[dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)] + bdt^2. \tag{2a}$$

Это гравитационное поле характеризуется следующими значениями:

$$g_{11} = -a, \qquad g_{33} = -ar^2 \sin^2 \vartheta,$$
$$g_{22} = -ar^2, \qquad g_{44} = b,$$

а все остальные компоненты $g_{\mu\nu}$ равны нулю. Движение рассматриваемой частицы описывается уравнением

$$\frac{d^2 x_\nu}{ds^2} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{ds} \cdot \frac{dx_\beta}{ds} = 0. \tag{3}$$

Кроме того, имеются дополнительные условия:

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{dr}{ds} = 0, \quad \frac{d^2 x_3}{ds^2} = \frac{d^2 \varphi}{ds^2} = 0, \quad x_2 = \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d^2 x_4}{ds^2} = \frac{d^2 t}{ds^2} = 0.$$

Оказывается, что уравнение (3) удовлетворяется, если

$$\Gamma^1_{33} \frac{dx_3}{ds} \cdot \frac{dx_3}{ds} + \Gamma^1_{44} \frac{dx_4}{ds} \cdot \frac{dx_4}{ds} = 0,$$

или

$$-(ar^2)' \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + b = 0. \tag{4}$$

Из соотношения (2a) следует

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -ar^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + b. \tag{5}$$

Таким образом, величины $\frac{d\varphi}{dt}$ и $\frac{ds}{dt}$ определяются, как только задано поле.

Поскольку значение ds^2 положительно, для мировой линии движущейся частицы получаем

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = b - ar^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = b - ar^2 \frac{b'}{(ar^2)'} > 0,$$

или

$$1 - \frac{b'/b}{(ar^2)'/ar^2} > 0. \tag{6}$$

Применение этого условия к полю Шварцшильда (1) дает

$$r > \frac{\mu}{2}(2+\sqrt{3}). \tag{6a}$$

Отсюда следует, что в случае поля Шварцшильда частица должна двигаться по траектории, радиус которой в $(2+\sqrt{3})$ раза превышает радиус сингулярности этого поля. Этот факт имеет важное значение для всего последующего исследования; во внешних частях нашего скопления частиц и за его пределами гравитационное поле описывается уравнением (1). Поэтому полная гравитирующая масса скопления определяет нижний предел его радиуса. Этот радиус (в координатной мере) не менее чем в $(2+\sqrt{3})$ раза превышает радиус сингулярности поля Шварцшильда, который определяется полем в пустом пространстве вне скопления.

Нормаль к плоскости, в которой движется рассматриваемая частица, направлена по оси x_3. Если предположить, что нормали к бесконечному числу таких плоскостей и фазовые углы траекторий распределены случайно, то мы получим сферически симметричное скопление частиц, траектории которых имеют радиус r. Ниже мы ограничимся рассмотрением только таких скоплений более общего типа, которые состоят из бесконечного числа скоплений этого специального типа, соответствующих всем значениям r. (Следует помнить, что скопление состоит, разумеется, из конечного числа частиц, так что создаваемое им поле является лишь приближенно сферически симметричным.)

Чтобы сформулировать условия динамического равновесия скопления под влиянием его собственного гравитационного поля, сначала вычислим тензор энергии этого скопления. При этом для простоты предположим, что массы всех частиц одинаковы и равны m.

2. Тензор энергии материи для скопления

Мы рассматриваем движение частиц внутри элемента объема по оси x_3. Векторы скоростей имеют одинаковую величину, перпендикулярны направлению x_3 и с равной вероятностью имеют все направления в плоскости x_1x_2. Мы знаем далее, что тензор энергии материи зависит также от плотности частиц и от гравитационного потенциала, но не от производных последнего. Следовательно, этот тензор можно получить прямыми вычислениями.

Сначала мы рассмотрим частицы с массой m и плотностью n_0 частиц на единицу объема, покоящиеся относительно координатной системы специальной теории относительности. В этом случае отлична от нуля только одна компонента T^{44} тензора энергии

$$T^{44} = mn_0 \frac{dx_4}{ds} \cdot \frac{dx_4}{ds}.$$

В системе координат, движущейся в направлении x_1, мы имеем

$$T^{11} = mn_0 \frac{dx_1}{ds} \cdot \frac{dx_1}{ds}, \qquad T^{44} = mn_0 \frac{dx_4}{ds} \frac{dx_4}{ds}, \qquad T^{14} = mn_0 \frac{dx_1}{ds} \cdot \frac{dx_4}{ds}.$$

Плотность частиц n относительно этой новой системы координат определяется равенствами

$$n_0 V_0 = nV, \qquad V_0\, ds = V\, dt,$$

где V_0 и V — соответственно покоящийся объем и объем в новой системе. Поэтому выполняется соотношение

$$n_0 = n \frac{ds}{dx_4}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда вектор скорости частицы составляет угол α с осью x_1 и перпендикулярен оси x_3. Используя полученные выше равенства и вводя обозначение

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2,$$

находим

$$T^{11} = mn \frac{ds}{dx_4} \left(\frac{dl}{ds}\right)^2 \cos^2\alpha, \qquad T^{12} = mn \frac{ds}{dx_4} \left(\frac{dl}{ds}\right)^2 \cos\alpha \sin\alpha,$$

$$T^{22} = mn \frac{ds}{dx_4} \left(\frac{dl}{ds}\right)^2 \sin^2\alpha, \qquad T^{14} = mn \frac{ds}{dx_4} \frac{dl}{ds} \cdot \frac{dx_4}{ds} \cos\alpha,$$

$$T^{44} = mn \frac{ds}{dx_4} \left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2, \qquad T^{24} = mn \frac{ds}{dx_4} \frac{dl}{ds} \frac{dx_4}{ds} \sin\alpha,$$

а все остальные компоненты тензора энергии равны нулю. Для случайного распределения векторов скорости по углам α получаем

$$T^{11} = T^{22} = \frac{1}{2} mn \frac{ds}{dx_4} \left(\frac{dl}{ds}\right)^2 = T_{11} = T_{22},$$

$$T^{44} = mn \frac{dx_4}{ds} = T_{44}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -a$, а $g_{44} = b$. Компоненты тензора энергии в этом случае можно получить, применяя закон преобразования тензоров и вводя новые координаты

$$dx_a = a^{1/2}\, d\bar{x}_a, \qquad dx_4 = b^{1/2}\, d\bar{x}_4.$$

Тогда получаем

$$\bar{T}_{11} = \left(\frac{dx_a}{d\bar{x}_a}\right)^2 T_{11} = aT_{11},$$

$$\bar{T}_{44} = \left(\frac{ax_4}{d\bar{x}_4}\right)^2 T_{44} = bT_{44},$$

причем dl и dx_4, входящие в компоненты T_{11} и T_{44}, надо заменить соответственно на $a^{1/2}d\bar{l}$ и $b^{1/2}d\bar{x}_4$. Далее мы должны ввести плотность $\bar{n}$ частиц относительно новых координат, согласно равенству

$$n dx_1 dx_2 dx_3 = \bar{n} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3,$$

или

$$n = \bar{n} a^{-3/2}.$$

Выполняя все эти преобразования и подстановки и опуская черту, которой мы обозначали величины в новой системе координат, получаем

$$\begin{aligned} T_{11} = T_{22} &= \frac{1}{2} mna^{1/2} b^{-1/2} \frac{ds}{dx_4} \left(\frac{dl}{ds}\right)^2, \\ T_{44} &= mna^{-3/2} b^{3/2} \frac{dx_4}{ds}. \end{aligned} \tag{7}$$

В этих равенствах ds/dx_4 и dl/ds следует заменить выражениями, получаемыми из соотношений (4) и (5), которые были выведены из уравнений геодезической. Далее мы пишем dt вместо dx_4 и $rd\varphi$ вместо dl. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} T_{11} = T_{22} &= \frac{1}{2} mna^{-1/2} \beta' / \alpha' \left(\frac{\alpha'}{\alpha' - \beta'}\right)^{1/2}, \\ \frac{a}{b} T_{44} &= mna^{-1/2} \left(\frac{\alpha'}{\alpha' - \beta'}\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{7a}$$

где α и β имеют следующий смысл:

$$\begin{aligned} \alpha &= \ln (ar^2), \\ \beta &= \ln b. \end{aligned} \tag{7б}$$

3. Дифференциальные уравнения гравитационного поля

Дифференциальное уравнение гравитационного поля, связанного с тензором энергии материи, имеет вид

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + kT_{\mu\nu} = 0. \tag{8}$$

Мы должны написать эти уравнения для частного случая статического поля типа (2). Прямые вычисления приводят к следующим уравнениям для точки на оси x_3:

$$-G_{33} = \frac{a'}{ra} + \frac{b'}{rb} + \frac{1}{4}\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{a'}{a}\frac{b'}{b} = 0, \tag{9}$$

$$G_{11} = -\frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{b'}{b}\right)' - \frac{1}{2}\frac{a'}{ra} - \frac{1}{2}\frac{b'}{rb} - \frac{1}{4}\left(\frac{b'}{b}\right)^2 + kT_{11} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{a}{b}G_{44} = \left(\frac{a'}{a}\right)' + 2\frac{a'}{ra} + \frac{1}{4}\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + kT_{44}\frac{a}{b} = 0. \tag{11}$$

Вместо T_{11} и T_{44} мы должны подставить их выражения (7а) и (7б). Поскольку m следует рассматривать как заданную константу, функциями координат в этих уравнениях являются лишь величины n, a и b. Прежде всего следует ожидать, что n, т. е. радиальное распределение материи, не определяется этими уравнениями. Поэтому с необходимостью должно существовать тождественное соотношение между уравнениями (9)—(11). Такое тождественное соотношение действительно существует. Оно имеет вид

$$0 \equiv G'_{33} + \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{2}\frac{b'}{b}\right)G_{33} - \left(\frac{2}{r} + \frac{a'}{a}\right)G_{11} + \frac{1}{2}\frac{b'}{b}G_{44}. \tag{12}$$

Получить его можно следующим образом. Мы сконструировали $T_{\mu\nu}$, рассматривая частицы, подчиняющиеся уравнениям движения в гравитационном поле. Поэтому ковариантная дивергенция этого тензора должна тождественно обращаться в нуль. С другой стороны, дивергенция разности $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ тождественно равна нулю вследствие тождеств Бианки. Из этих четырех уравнений, имеющих форму дивергенции, только одно уравнение с индексом 3 дает выражение, которое уже не равно нулю тождественно относительно $G_{\mu\nu}$; это и есть соотношение (12). Из формы соотношения (12) следует, что уравнение (10) является следствием уравнений (9) и (11). Таким образом задача сводится к решению уравнений (9) и (11) и, как и следовало ожидать, плотность частиц остается при этом неопределенной.

Этот результат делает возможным дальнейшее упрощение задачи. Если в уравнение (9) ввести величины $\alpha = \ln(ar^2)$ и $\beta = \ln b$, то получается уравнение

$$-\frac{2}{r^2} + \frac{1}{2}\alpha'^2 + \alpha'\beta' = 0. \tag{13}$$

Уравнение (11) с помощью (13) и (7а) приводится к виду

$$\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} + \frac{1}{4}\alpha'^2 - \frac{1}{r^2} + \varkappa m n a^{-1/2}\left(\frac{\alpha'^2}{{}^3/_2\alpha'^2 - \frac{2}{r^2}}\right)^{1/2} = 0. \qquad (14)$$

Это дифференциальное уравнение содержит только a. Когда a известно, получить b можно простым интегрированием выражения

$$\beta' = \frac{1}{\alpha'}\left(\frac{2}{r^2} - \frac{1}{2}\alpha'^2\right). \qquad (13а)$$

4. Локализация частиц в тонком сферическом слое

Вне скопления гравитационное поле описывается решением Шварцшильда, которое при нашем выборе системы координат задается равенством (1). Внутри скопления поле определяется уравнением (14). Поэтому функция n должна рассматриваться как заданная. Однако n не является полностью произвольной, так как полный радиус скопления ограничен снизу условием (6а).

Уравнение (14) задает сложное соотношение между плотностью частиц n и функцией a, описывающей гравитационное поле. Однако предельный случай, когда гравитирующие частицы сконцентрированы внутри бесконечно тонкого сферического слоя, ограниченного сферами с радиусами $r = r_0 - \Delta$ и $r = r_0$, является сравнительно простым. Этот случай, конечно, может реализовываться, только если собственный объем каждой частицы равен нулю, чего на самом деле нет. Однако эта идеализация представляет определенный интерес в качестве предельного случая радиального распределения частиц.

Разделим все пространство на три области, каждую из которых будем рассматривать отдельно: область O, включающая пространство вне слоя, $r \geqslant r_0$, область I, включающая пространство внутри слоя, $r \leqslant r_0 - \Delta$, и область S, включающая сам слой, $r_0 - \Delta \leqslant r \leqslant r_0$. В области O гравитационное поле задается соотношением (1), в области I — соотношением (2) с постоянными значениями величин a и b. Отсюда следует, что a' (и α') должны изменяться в области S тем быстрее, чем меньше выбранное нами Δ. Однако поскольку a' остается конечной в S, само a меняется внутри S на бесконечно малую величину. Поэтому в области S можно пренебречь α' по сравнению с α''. Тогда уравнение (14) внутри S заменяется уравнением

$$\alpha'' + \varkappa m n a^{-1/2}\left(\frac{\alpha''}{\frac{3}{2}\alpha'^2 - \frac{2}{r^2}}\right)^{1/2} = 0, \qquad (14а)$$

где a и r следует рассматривать при интегрировании как постоянные. Вводя новую переменную

$$z^2 = \frac{3}{4} r^2 \alpha'^2 - 1$$

и «постоянную»

$$C = \varkappa m a^{-1/2} \frac{r}{\sqrt{2}},$$

мы получаем уравнение

$$\left(1 - \frac{1}{1+z^2}\right) dz = Cn\, dr, \tag{14б}$$

которое определяет зависимость z от r в области S, если n задана как функция r. Производя интегрирование в пределах от $r_0 - \Delta$ до r_0, получаем

$$\left| z - \operatorname{arc\,tg} z \right|_{r_0}^{r_0-\Delta} = \frac{C}{4\pi r_0^2} N = \frac{\varkappa}{8\pi} \sqrt{2} a^{-1/2} \frac{mN}{r_0}, \tag{15}$$

где N — полное число частиц в области S. Из соотношения (1) следует, что при $r = r_0$

$$z_{r_0} = \sqrt{2} \frac{(1 - 4\sigma + \sigma^2)^{1/2}}{1+\sigma}, \quad \text{где } \sigma = \frac{\mu}{2r_0}, \tag{15а}$$

а из соотношения (2), поскольку a и b постоянны в области I, находим, что в области I

$$z_{r_0-\Delta} = \sqrt{2}. \tag{15б}$$

Вследствие (6а) мы имеем неравенство

$$\sigma < \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Оказывается, что это неравенство совпадает с условием вещественности числителя в выражении для z_{r_0}. Соотношение (15) для каждого возможного значения r_0 задает соотношение между суммой масс частиц mN и полной гравитирующей массой μ скопления. Для больших значений r_0 при фиксированном μ получаем в пределе

$$\mu = \frac{\varkappa}{8\pi} mN. \tag{16}$$

Множитель $\varkappa/8\pi$ обусловлен тем, что m измеряется в граммах, а μ — в гравитационных единицах. Поэтому равенство (16) просто выражает тот факт, что в этом предельном случае гравитационная масса скопления равна сумме масс частиц.

Наиболее наглядный путь выражения этого результата следующий. Вне слоя ($r \geqslant r_0$) гравитационное поле описывается соотношением

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{\mu}{2r}\right)^4 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \left(\frac{1 - \frac{\mu}{2r}}{1 + \frac{\mu}{2r}}\right)^2 dt^2.$$

Внутри слоя поле описывается этим же соотношением с той лишь разницей, что r заменено на постоянную r_0, вследствие чего должно выполняться неравенство

$$r_0 > \frac{\mu}{2}(2 + \sqrt{3}).$$

Число N частиц с массой m, образующих слой, можно определить из следующих соображений. Вводя обозначения

$$\Sigma = \frac{\varkappa}{8\pi}\frac{mN}{2r_0} = \frac{M}{2r_0}, \qquad \sigma = \frac{\mu}{2r_0},$$

получаем

$$\Sigma = \varphi(\sigma) = \frac{[(\sqrt{2} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}) - (z_{r_0} - \operatorname{arc\,tg} z_{r_0})]}{\sqrt{8}}(1 + \sigma)^2,$$

где

$$z_{r_0} = \sqrt{2}\,\frac{(1 - 4\sigma + \sigma^2)^{1/2}}{1 + \sigma},$$

а σ может принимать значения между нулем и $2 - \sqrt{3}$ ($\approx 0{,}27$). Величина

$$\frac{\Sigma - \sigma}{\sigma}$$

очень близка к нулю во всей области изменения σ. Несколько типичных значений этой величины приведено в следующей таблице.

σ	$\frac{\Sigma-\sigma}{\sigma}$
0,05	0,042
0,14	0,06
0,2	0,055
0,23	0,013
0,27	−0,022

Это приводит к весьма интересному следствию: прежде всего ясно, что выражение $(\Sigma - \sigma)/\sigma$ можно с хорошей точностью заменить на $(\Sigma - \sigma)/\Sigma$, а это, в свою очередь, на $(M - \mu)/M$. Последнее выражение равно относительному уменьшению энергии скопления при его сжатии от бесконечного радиуса до r_0. Таблица показывает, что максимум энергии такого сжатия находится около $\sigma = 0{,}15$ и при бо́льших или меньших значениях σ она уменьшается. Физическая причина этого эффекта состоит в том, что при уменьшении r_0 потенциальная энергия скопления уменьшается, но зато растет его кинетическая энергия. При достаточно малых значениях r_0 последний эффект превалирует над первым.

Поэтому ясно, что уменьшение радиуса с уменьшением энергии прекращается где-то вблизи значения $\sigma = 0{,}15$, т. е. при значении радиуса, равном примерно 6,7 $(\mu/2r_0)$, тогда как нижняя граница радиуса, определяемая скоростью света, равна $(2+\sqrt{3})\,(\mu/2r_0)$. Величина r_0, соответствующая минимуму энергии, ограничивает сверху тангенциальную скорость частиц значением, равным примерно 0,65 c, где c — скорость света.

5. Качественное обсуждение случая произвольного радиального распределения масс

Рассмотрим случай заданных массы μ и радиуса слоя r_0, удовлетворяющих неравенству (6а). Когда число частиц N, помещенных в этот слой, определяется уравнением (15), внешнее гравитационное поле полностью экранируется от внутренней области I, так что поле в этой области будет эвклидовым. Это означает, что линейный элемент в области I характеризуется постоянными величинами a и b, причем b не может быть равным своему нижнему пределу $1/\sqrt{3}$.

Однако если число частиц в области S меньше, чем это следует из соотношения (15), то поле не будет экранировано полностью (μ считается заданным). Мы можем тогда формально удовлетворить требованиям теории, заменяя эвклидово выражение для линейного элемента в области I шварцшильдовским выражением вида

$$a = A\left(1 + \frac{\mu_1}{2r}\right)^4, \qquad b = B\left(\frac{1 - \mu_1/2r}{1 + \mu_1/2r}\right)^2,$$

где A, B и μ_1 — постоянные. Величина μ_1 меньше, чем величина μ, которая характеризует поле вне слоя. Внутреннее поле имеет сингулярность шварцшильдовского типа ($b = 0$) при $r = \mu_1/2$.

Однако эту сингулярность можно удалить, вводя внутри S второй слой S_1, такой, чтобы поле внутри него было эвклидовым. Таким образом, все скопление будет состоять из двух слоев S и S_1 и уже не будет иметь шварцшильдовской сингулярности.

Эту систему опять можно видоизменить, уменьшая число частиц в S_1 так, чтобы слой S_1 не экранировал полностью *свое* внешнее поле (между S

и S_1). Тогда можно ввести третий слой S_2 еще меньшего радиуса так, чтобы область внутри него была полностью экранированной от *его* внешнего поля.

Это рассуждение можно продолжать до тех пор, пока мы не достигнем центра скопления. Таким образом получаются скопления с самыми различными радиальными распределениями массы. Возможны различные стационарные распределения, но b нигде не может обращаться в нуль. Радиус скопления будет во всех случаях больше предельного радиуса $\frac{1}{2}\mu(2+\sqrt{3})$, так что концентрация материи скопления с произвольной плотностью около его центра невозможна.

6. Случай непрерывной плотности частиц

Приведенные в разделе 5 настоящей статьи соображения позволяют построить решение для непрерывного распределения плотности частиц. Разделим интервал $0 \leqslant r \leqslant r_0$ на бесконечное число равных частей dr. Представим себе, что в центре каждой части dr существует двумерный слой того типа, о котором речь шла в разделе 4. Эти слои можно выбрать так, чтобы они были эквивалентны некоторому непрерывному распределению массы. Между двумя любыми слоями существует гравитационное поле шварцшильдовского типа:

$$ds^2 = -A\left(1+\frac{\tau}{2r}\right)^4 (dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2) + B\left(\frac{1-\tau/2r}{1+\tau/2r}\right)^2 dt^2, \tag{17}$$

где A, B и τ — постоянные, бесконечно мало изменяющиеся при переходе между двумя соседними областями. Гравитационное поле внутри скопления равно сумме всех этих частных решений. Нашей задачей является определение A, B и τ как функций r.

Рассмотрим два соседних шварцшильдовских решения, соответствующих областям от $r-\frac{1}{2}dr$ до $r+\frac{1}{2}dr$ и от $r+\frac{1}{2}dr$ до $r+\frac{3}{2}dr$. В первой области величины A, B и τ соответствуют радиусу r, во второй области — радиусу $r+dr$. Используя введенные соотношением (2) величины, мы можем записать эти два локальных решения в форме

$$a(r;\ A, \tau) \qquad a(r;\ A+dA,\ \tau+d\tau)$$

и

$$b(r;\ B, \tau) \qquad b(r;\ B+dB,\ \tau+d\tau),$$

где a и b, в соответствии с формулой (17), являются функциями r. Эти два решения предполагают, что a и b принимают одинаковые значения в точке $r + \frac{1}{2} dr$. Поэтому величины a и b не должны меняться при переходе через заполненный частицами слой. Отсюда с точностью до величин первого порядка следует

$$\frac{\partial a}{\partial A} dA + \frac{\partial a}{\partial \tau} d\tau = 0,$$

$$\frac{\partial b}{\partial B} dB + \frac{\partial b}{\partial \tau} d\tau = 0,$$

или, в соответствии с (17),

$$\begin{gathered}\frac{dA}{A} + \frac{4}{r} \frac{r\,d\sigma + \sigma\,dr}{1+\sigma} = 0, \\ \frac{dB}{B} - \frac{4}{r} \frac{r\,d\sigma + \sigma\,dr}{(1+\sigma)(1-\sigma)} = 0,\end{gathered} \tag{18}$$

где σ означает $\tau/2r$.

Если известна зависимость σ или τ от r, то из этих уравнений можно определить A и B как функции r. Оказывается, что значения α и β, вычисленные из решений (A и B) уравнения (18), являются параметрическими решениями уравнения (13) (параметром служит функция σ). Функция τ в широких пределах остается произвольной, поскольку она тесно связана с распределением масс. С другой стороны, A, B и τ должны удовлетворять тому условию, чтобы соотношение (17) допускало круговые орбиты частиц при всех значениях r. Поэтому величины a и b должны удовлетворять неравенству (6). Используя соотношение (17), мы получаем неравенство

$$1 - \frac{B'/B - 4\dfrac{\sigma'}{(1+\sigma)(1-\sigma)}}{A'/A + 2/r + 4\dfrac{\sigma'}{1+\sigma}} > 0. \tag{19}$$

Соотношения (18) и (19) полностью определяют решение задачи внутри скопления. На функцию σ накладывается только одно условие: найденные из уравнений (18) функции A и B должны удовлетворять неравенству (19).

При $r \geqslant r_0$ мы имеем, конечно, $A = B = 1$, $\tau = \text{const} = \mu$.

Используя уравнения (18), мы можем переписать неравенство (19) в виде

$$1 - \frac{4\dfrac{\sigma}{(1+\sigma)(1-\sigma)}}{2 - 4\dfrac{\sigma}{1+\sigma}} > 0,$$

или после некоторых преобразований

$$\frac{(\sigma-2+\sqrt{3})(\sigma-2-\sqrt{3})}{(1-\sigma)^2}>0. \tag{19а}$$

Это неравенство должно выполняться как вне, так и внутри скопления. При бесконечно больших значениях r величина σ обращается в нуль. Далее σ должна быть положительной, так как отрицательные массы исключены. Поскольку в (19а) величина σ стоит в знаменателе, то она нигде не может превышать единицы. Поэтому числитель в левой части неравенства должен быть положителен. Поскольку второй множитель в числителе всегда отрицателен, первый множитель также должен быть меньше нуля. Отсюда получаем

$$\sigma<2-\sqrt{3}. \tag{19б}$$

Это условие является обобщением условия (6а), так как последнее было доказано только для области вне скопления.

Величина τ определяет массу, заключенную в сфере радиуса r. Для исключения отрицательных масс необходимо, чтобы всюду выполнялось условие

$$\frac{d\tau}{dr}\geqslant 0. \tag{20}$$

Необходимо далее, чтобы τ обращалась в нуль при $r=0$. За исключением этих условий, на τ не накладывается никаких других ограничений, если только σ удовлетворяет неравенству (19б). Когда τ, а следовательно, и σ заданы, задача нахождения гравитационного поля вида (17) сводится, согласно уравнениям (18), к двум квадратурам.

Уравнения (18) позволяют проинтегрировать уравнения (13) в случае произвольного распределения плотности массы, задаваемого функцией τ или σ. Уравнение (14) определяет соответствующую плотность частиц n. Выразим n через σ. Мы имеем

$$0=\frac{2}{r}\left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\right)'-\frac{4}{r^2}\frac{\sigma}{(1+\sigma)^2}+\varkappa m n a^{-1/2}\frac{1-\sigma}{\sqrt{1-4\sigma+\sigma^2}}; \tag{21}$$

кроме того, имеем

$$a=A(1+\sigma)^4, \qquad A'/A=-\frac{4}{r}\cdot\frac{r\sigma'+\sigma}{1+\sigma}. \tag{22}$$

Следовательно, когда σ как функция r задана, мы получаем плотность n, выполнив только одну интеграцию.

Функция σ положительна и всегда меньше, чем $2-\sqrt{3}$. Поэтому квадратный корень в знаменателе последнего члена в уравнении (21) всегда положителен. Далее мы имеем $\tau/2r$, где τ — гравитационная масса, содержащаяся в сфере радиуса r. Вследствие этого τ монотонно увеличивается с ростом r. Если плотность массы должна оставаться конечной в окрестности $r = 0$, то τ должна уменьшаться в этой окрестности не медленнее, чем r^3, а σ — не медленнее, чем r^2. При этих условиях первые два члена в уравнении (21), как и $\frac{A'}{A}$, A и a всюду конечны. Поэтому уравнение (21) дает для n конечное значение. Пользуясь свойствами τ, нетрудно показать, что сумма двух первых членов уравнения (21) всюду отрицательна.

Продолжая эти рассуждения, легко убедиться, что a и b конечны и нигде не обращаются в нуль.

Комбинируя равенства (2), (4), (17) и (18), можно показать, что отношение V скорости частиц к скорости света (в направлении движения частиц) равно

$$V^2 = \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{2\sigma}{(1-\sigma)^2}. \tag{23}$$

Если σ не превышает своего предельного значения, то V также не превышает определенного предела.

7. Частный случай непрерывного распределения масс

Представляет интерес исследовать случай, когда σ внутри скопления постоянна и равна некоторому значению σ_0. Строго говоря, этот случай не удовлетворяет поставленным выше условиям, так как для того, чтобы плотность в окрестности центра скопления оставалась конечной, σ должна уменьшаться при $r \to 0$ по крайней мере, как r^2. Мы можем удовлетворить этому условию, выбрав для σ, например, следующее выражение:

$$\sigma = \sigma_0 (1 - e^{-cr^2}), \tag{24}$$

где c — произвольная постоянная. В дальнейшем мы сразу будем рассматривать предельный случай, соответствующий $c = \infty$. Этот частный случай рассматривается здесь для того, чтобы дополнить рассуждения раздела 4. В рассмотренном в разделе 4 случае вся масса была сосредоточена максимально далеко (в пределах радиуса r_0) от центра; здесь же мы имеем сильную концентрацию массы вблизи центра скопления.

Так как τ представляет собой гравитационную массу, содержащуюся в сфере радиуса r, то $d\tau/4\pi r^2 dr$ равняется средней плотности гравитационной массы в точке r. Поскольку $\tau = 2\sigma_0 r$, то для этой средней плотности мы получаем выражение $\sigma_0/2\pi r^2$, т. е. с приближением к границе скопления $r = r_0$ плотность уменьшается, как $1/r^2$.

Из уравнений (18), в согласии с формулой (24) (в предельном случае обращения в нуль экспоненциального члена), мы получаем

$$\frac{dA}{A} = -\frac{4\sigma_0}{1+\sigma_0}\frac{dr}{r},$$
$$\frac{dB}{B} = \frac{4\sigma_0}{1-\sigma_0^2}\frac{dr}{r}, \tag{18а}$$

и, поскольку при $r = r_0$ A и B, по предположению, равны 1,

$$A = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-4\sigma_0/(1+\sigma_0)},$$
$$B = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{4\sigma_0/(1-\sigma_0^2)}. \tag{18б}$$

При $r = 0$ мы получаем $a = \infty$ и $b = 0$. Эту сингулярность, однако, не следует принимать во внимание, так как она исключается, если учесть экспоненциальный член в формуле (24). Следует заметить, что при соответствующем выборе распределения масс можно, хотя и не достигнуть, но достаточно близко подойти к этой сингулярности.

Для определения соотношения, существующего между суммой M масс покоя частиц

$$M = \frac{\varkappa}{8\pi} m \int_0^{r_0} n 4\pi r^2 \, dr,$$

и полной гравитационной массой скопления μ, мы воспользуемся уравнением (21). Можно показать, что первый член в уравнении (21) для случая бесконечно больших значений c не дает никакого вклада в распределение масс. Это следует из того факта, что $\left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\right)'$ обращается в нуль везде, где становится несущественным влияние экспоненциального члена в формуле (24). Мы вычислили вклад от второго члена в уравнении (21), с самого начала опуская экспоненциальный член. После несложных выкладок получается окончательный результат:

$$M = \mu (1 - 4\sigma_0 + \sigma_0^2)^{1/2} \frac{1+\sigma_0}{(1-\sigma_0)^2}, \tag{25}$$

где $\mu = 2r_0\sigma_0$. Сопоставляя эту формулу с равенством $\mu = 2r_0\sigma_0$, нетрудно получить основные свойства скоплений такого типа.

Прежде всего, легко видеть, что особенно простые соотношения получаются, когда мы изменяем M, фиксируя σ_0 $(0 < \sigma_0 < 2 - \sqrt{3})$ и тем самым тангенциальную скорость частиц, измеренную в единицах скорости света. При умножении M на z гравитационная масса становится равной $z\mu$, а диаметр скопления — равным $z \cdot 2r$. При этом средняя плотность умножится на $1/z^2$.

Чтобы не упустить ни одной из возможностей, достаточно фиксировать число частиц в скоплении, а следовательно, и M, меняя σ_0, диаметр $2r_0$ и гравитационную массу μ. Для $M = 1$ мы получаем

$$\mu = \frac{(1-\sigma_0)^2}{(1+\sigma_0)} (1 - 4\sigma_0 + \sigma_0^2)^{-1/2}.$$

В нижеследующей таблице для случая $M = 1$ приведены приближенные значения μ и $2r_0$ как функций σ_0:

σ_0	μ	$2r_0$
0	1	∞
0,05	0,988	19,76
0,1	0,948	9,48
0,15	0,97	6,56
0,2	1,13	5,65
0,23	1,32	5,63
0,25	1,82	7,40
0,26	2,63	10,1
0,268	∞	∞

Когда скопление сжимается, начиная с бесконечно большого диаметра, его масса уменьшается не больше, чем примерно на 5%. Эта минимальная масса достигается при диаметре $2r_0$, приблизительно равном 9. Диаметр можно еще уменьшить до величины примерно 5,6 путем колоссального увеличения энергии скопления. Однако дальше сжать скопление уже невозможно, не меняя при этом выбранного нами распределения масс. Дальнейшее увеличение энергии приведет лишь к увеличению диаметра. Таким образом энергия, т. е. гравитационная масса скопления, может произвольно увеличиваться без разрушения скопления. Каждому значению диаметра (при заданном числе частиц) отвечают два скопления, отличающиеся скоростями частиц.

В реальном, физическом мире, конечно, нет таких объектов, в которых осуществлялись бы эти парадоксальные явления. Лишь ветвь, соответствующая малым значениям σ_0 и значениям диаметра от ∞ до $9M$, содержит случаи, в какой-то степени напоминающие реальные звезды.

Скопления оболочечного типа, рассмотренные ранее в настоящей работе, ведут себя точно так же, несмотря на совершенно различные распределения масс. Однако в скоплениях оболочечного типа при данном M значение μ не может быть бесконечным.

Основным результатом проведенного исследования является четкое понимание того, что в реальном мире отсутствуют «шварцшильдовские сингулярности». Хотя приведенная теория рассматривает только такие скопления, в которых частицы движутся по круговым траекториям, вряд ли следует сомневаться в том, что рассмотрение и самого общего случая приведет к тем же результатам. Шварцшильдовская сингулярность отсутствует, так как вещество нельзя концентрировать произвольным образом; в противном случае частицы, образующие скопление, достигнут скорости света.

Настоящее исследование возникло из дискуссий автора с профессором Робертсоном и с докторами В. Баргманом и П. Бергманом о математическом и физическом смысле шварцшильдовской сингулярности. Эта проблема совершенно естественно привела к вопросу о том, допускают ли физические модели существование такой сингулярности. Настоящая работа отвечает на этот вопрос отрицательно.

Поступила 10 мая 1939 г.

120

ГРАВИТАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРОБЛЕМА ДВИЖЕНИЯ. II*

(Совместно с Л. Инфельдом)

Введение

Настоящая работа содержит обобщение и существенное упрощение теории, касающейся проблемы движения в общей теории относительности, которая рассмотрена в нашей предыдущей работе по этому вопросу [1]. Используемый там метод заключался в выделении некоторой специальной координатной системы, в представлении вещества сингулярностями и, наконец, в использовании нового метода приближения, особенно удобного для рассмотрения квазистационарных полей. Введенное здесь изменение состоит в том, что о координатной системе заранее не делается никаких предположений, кроме того, что она галилеева на бесконечности.

Оказывается возможным развить всю теорию без каких-либо специальных уравнений, выражающих выбор координатной системы. Данное ниже представление оказывается не только более общим, но и более простым, чем в работе I. Прежний случай с его явно сформулированными координатными условиями получается из наших более общих рассуждений как частный случай, отличающийся естественным характером принятых координатных условий.

1. Уравнение поля

Выпишем уравнения гравитационного поля, разделяя линейные выражения:

$$-\gamma_{mn|ss}+\gamma_{ms|ns}+\gamma_{ns|ms}-\delta_{mn}\gamma_{ls|ls}-\gamma_{0m|0n}-$$
$$-\gamma_{0n|0m}+2\delta_{mn}\gamma_{0s|0s}+\gamma_{mn|00}-\delta_{mn}\gamma_{00|00}+2\Lambda'_{mn}=0, \qquad (1.1)$$

* *Gravitational Equations and the Problems of Motion II.* (With L. Infeld). Ann. Math., 1940, 41, 455—464.

[1] Ann. Math., 1938, 39, 66. (Статья 117. Далее цитируется как «I».— *Ред.*)

$$\gamma_{00\,|\,ss} + \gamma_{ls\,|\,ls} + 2\Lambda'_{00} = 0, \tag{1.2}$$

$$-\gamma_{0n\,|\,ss} + \gamma_{0s\,|\,sn} + \gamma_{ns\,|\,s0} - \gamma_{00\,|\,0n} + 2\Lambda'_{0n} = 0. \tag{1.3}$$

В выписанных здесь уравнениях (1.1) — (1.3) мы воспользовались теми же обозначениями и условиями, что и в работе I, т. е. латинские индексы принимают значения от 1 до 3; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование; черточки перед индексом означают обычное дифференцирование; величины $\gamma_{\mu\nu}$ (греческие индексы пробегают значения от 0 до 3) определяются равенством:

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\sigma\rho}h_{\sigma\rho},$$

где

$$\eta_{mn} = -\delta_{mn} \qquad (\delta_{mn}\text{ — символы Кронекера}),$$

$$\eta_{0n} = 0, \quad \eta_{00} = 1$$

и

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}.$$

В $\Lambda'_{\mu\nu}$ входят нелинейные по $h_{\mu\nu}$ члены. Мы не пишем их в явном виде, поскольку не будем ими пользоваться. Все вычисления, приводящие к уравнениям (1.1) — (1.3), представляют собой лишь небольшое видоизменение вычислений в работе I (стр. 68, 69)[2]. Единственная разница состоит в том, что здесь мы не предполагаем координатных условий

$$\gamma_{ls\,|\,s} = 0, \qquad \gamma_{0s\,|\,s} - \gamma_{00\,|\,0} = 0,$$

и, следовательно, уравнения (1.1) — (1.3) отличаются от соответствующих уравнений в работе I некоторыми новыми дополнительными линейными выражениями.

Перепишем уравнение (1.1) — (1.3) в виде

$$\Phi_{mn} + 2\Lambda_{mn} = 0, \tag{1.4}$$

$$\Phi_{00} + 2\Lambda_{00} = 0, \tag{1.5}$$

$$\Phi_{0m} + 2\Lambda_{0m} = 0, \tag{1.6}$$

где

$$\Phi_{mn} = -\gamma_{mn\,|\,ss} + \gamma_{ms\,|\,ns} + \gamma_{ns\,|\,ms} - \delta_{mn}\gamma_{ls\,|\,ls}, \tag{1.7}$$

$$\Phi_{00} = -\gamma_{00\,|\,ss} + \gamma_{ls\,|\,ls}, \tag{1.8}$$

$$\Phi_{0n} = -\gamma_{0n\,|\,ss} + \gamma_{0s\,|\,sn}, \tag{1.9}$$

[2] Стр. 454—455 этого тома.— *Ред.*

и, следовательно,

$$2\Lambda_{mn} = -\gamma_{0m\,|\,0n} - \gamma_{0n\,|\,0m} + 2\delta_{mn}\gamma_{0s\,|\,0s} + \gamma_{mn\,|\,00} - \delta_{mn}\gamma_{00\,|\,00} + 2\Lambda'_{mn}, \quad (1.10)$$

$$2\Lambda_{00} = 2\Lambda'_{00}, \quad (1.11)$$

$$2\Lambda_{0n} = \gamma_{ns\,|\,s0} - \gamma_{00\,|\,n0} + 2\Lambda'_{0n}. \quad (1.12)$$

Причина объединения некоторых из линейных выражений в $\Phi_{\mu\nu}$, а других — с нелинейными выражениями Λ' станет ясной позднее.

2. Лемма

Рассмотрим систему функций

$$F_{ab\ldots kl},$$

антисимметричных по индексам k, l и произвольных по всем другим индексам. Образуем интеграл

$$\int\limits_{(S)} F_{ab\ldots kl\,|\,l} \cos(x^k, \mathrm{N})\, dS, \quad (2.1)$$

по любой замкнутой поверхности S, не проходящей через сингулярность поля. Здесь (x^k, N) означает «угол» между направлением x^k и «нормалью» к S.

Полагая

$$F_{ab\ldots 23} = A_1, \quad F_{ab\ldots 31} = A_2, \quad F_{ab\ldots 12} = A_3,$$

интеграл (2.1) можно написать в виде

$$\int\limits_{(S)} \mathrm{rot}_n \mathbf{A}\, dS; \quad (2.2)$$

последний интеграл тождественно обращается в нуль, поскольку он по теореме Стокса может быть преобразован в линейный интеграл по контуру, ограничивающему поверхность (при этом, если поверхность замкнута, интеграл равен нулю). Этот результат не зависит от того, окружает данная поверхность сингулярность или нет. Следовательно, мы доказали, что интеграл (2.1) обращается в нуль.

3. Уравнения движения

Как и в работе I, мы рассматриваем вещество как сингулярности поля. Предположим, что имеется p тел, каждое из которых представляется точечной сингулярностью. Пространственные координаты каждой такой сингулярности будут функциями только времени. Положения сингулярностей в любой момент времени можно представить их пространственными координатами $\overset{\varkappa}{\xi}{}^m(x^0)$, $\varkappa = 1 \ldots p$. Индекс $\varkappa$ над ξ^m означает, что ξ^m относится к $\varkappa$-й сингулярности.

Запишем определенные равенствами (1.7) — (1.9) функции $\Phi_{\mu\nu}$ следующим образом:

$$\Phi_{mk} = (-\gamma_{mk|l} + \gamma_{ml|k} - \delta_{mk}\gamma_{ls|s} + \delta_{ml}\gamma_{ks|s})_{|l}, \tag{3.1}$$

$$\Phi_{0k} = (-\gamma_{0k|l} + \gamma_{0l|k})_{|l}. \tag{3.2}$$

Выражения в скобках в (3.1) и (3.2) антисимметричны по индексам k, l и, следовательно, к ним можно применить лемму раздела 2. Отсюда

$$\overset{\varkappa}{\int}\Phi_{mk}\cos(x^k, \mathrm{N})\,dS = 0, \qquad \overset{\varkappa}{\int}\Phi_{0k}\cos(x^k, \mathrm{N})\,dS = 0. \tag{3.3}$$

Здесь индекс $\varkappa$ вверху у символа интеграла означает, что интеграл берется по поверхности, окружающей $\varkappa$-ю сингулярность. Из последних равенств и из уравнений (1.4) – (1.6) следует:

$$2\Lambda_{mn|n} = 0, \qquad 2\Lambda_{0n|n} = 0, \tag{3.4}$$

$$\overset{\varkappa}{\int}2\Lambda_{mn}\cos(x^n, \mathrm{N})\,dS = 0, \qquad \overset{\varkappa}{\int}2\Lambda_{0n}\cos(x^n, \mathrm{N})\,dS = 0. \tag{3.5}$$

Уравнения (3.4) указывают на то, что интегралы (3.5) не могут зависеть от формы поверхности, пока она окружает одну и ту же сингулярность. Однако уравнение (3.5), полученное с помощью нашей леммы, утверждает большее: поверхностные интегралы обращаются в нуль.

Каждый из поверхностных интегралов, будучи независим от формы поверхности, может дать лишь связь между координатами сингулярностей и их производными по времени. Уравнения (3.5) содержат систему $4p$ дифференциальных уравнений, которые мы будем называть «*уравнениями движения p частиц*».

4. Применение нового метода приближения

В новом методе приближения, более полно изложенном в работе I, мы вводим вспомогательную временную координату $\tau = \lambda x^0$ и считаем каждую полевую величину функцией (τ, x^1, x^2, x^3). Далее, мы предполагаем, что производные каждой полевой величины по x^0 малы по сравнению с пространственными производными; иначе говоря, мы предполагаем, что производные по τ и по пространственным координатам одного порядка величины. Мы предполагаем также следующие разложения для γ:

$$\begin{aligned}
\gamma_{mn} &= \lambda^4\underset{4}{\gamma_{mn}} + \lambda^6\underset{6}{\gamma_{mn}} + \lambda^8\underset{8}{\gamma_{mn}} + \ldots,\\
\gamma_{00} &= \lambda^2\underset{2}{\gamma_{00}} + \lambda^4\underset{4}{\gamma_{00}} + \lambda^6\underset{6}{\gamma_{00}} + \ldots,\\
\gamma_{0n} &= \lambda^3\underset{3}{\gamma_{0n}} + \lambda^5\underset{5}{\gamma_{0n}} + \lambda^7\underset{7}{\gamma_{0n}} + \ldots .
\end{aligned}\tag{4.1}$$

Величина l в λ^l означает показатель степени, а не индекс. Числа, написанные внизу под буквой γ, указывают степень λ, с которой связана в разложении каждая компонента γ. Дифференцирование по (τ, x^1, x^2, x^3) обозначается запятой перед индексом, т. е.

$$\gamma_{mn|s} = \gamma_{mn,s}, \text{ но } \gamma_{mn|0} = \lambda\gamma_{mn,0}.$$

Обозначаемое чертой дифференцирование по нулевому индексу можно заменять обозначаемым запятой дифференцированием по нулевому индексу, если одновременно увеличивать на единицу степень λ, с которой эта величина связана. Чтобы найти явное выражение этого условия, мы воспользуемся числами под нулевыми индексами, написанными после запятой, т. е.

$$\lambda^{2l}\underset{2l}{\gamma_{mn|0}} = \lambda^{2l+1}\underset{2l}{\gamma}_{mn,\underset{1}{0}}, \quad \lambda^{2l}\underset{2l}{\gamma_{mn|00}} = \lambda^{2l+2}\underset{2l}{\gamma}_{mn,\underset{2}{00}} \text{ и т. д.}$$

Далее, мы можем показать, что наше предположение (4.1) вводит следующее простое общее правило разложения [3].

Любая компонента, имеющая нечетное число нулевых индексов, будет иметь в своем разложении только нечетные степени λ и, наоборот, любая составляющая, имеющая четное число нулевых значков, будет иметь в своем разложении только четные степени λ.

Мы хотим найти решение уравнений поля (1.4) — (1.6), применяя этот метод приближения. Для этого, казалось бы, надо расщепить их в соответствии с нашим методом на следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\underset{2l}{\Phi_{mn}} + 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}} &= 0,\\
\underset{2l}{\Phi_{00}} + 2\underset{2l}{\Lambda_{00}} &= 0,\\
\underset{2l+1}{\Phi_{0n}} + 2\underset{2l+1}{\Lambda_{0n}} &= 0.
\end{aligned}\tag{4.2}$$

Однако такая процедура вообще возможна лишь при отсутствии сингулярностей. В случае, когда «уравнениям движения», выраженным соотношением (3.5), не удовлетворяют произвольные функции $\overset{\times}{\xi}{}^m(\tau)$,

[3] См. I, стр. 78. (Статья 117, стр. 465.— *Ред.*)

эта процедура недопустима. Это можно видеть из следующих соображений. Разложим, например, первое уравнение (3.5) по параметру λ:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \lambda^{2l} \int\limits^{\times} 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}} \cos(x^n, \mathbf{N})\, dS = 0, \quad \varkappa = 1, \dots p,$$

или, полагая

$$\int\limits^{\times} 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}} \cos(x^n, \mathbf{N})\, dS = 4\pi \underset{2l}{\overset{\times}{C}_m},$$

получаем

$$\sum_{l=1}^{\infty} \lambda^{2l} \underset{2l}{\overset{\times}{C}_m} = 0, \tag{4.3}$$

где $\underset{2l}{\overset{\times}{C}_m}$ зависят от τ через $\overset{\times}{\xi}{}^m$ и их производные. Уравнения (4.3) образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в которую λ входит в качестве параметра. Решение этой системы дает движение сингулярностей. Из уравнений (4.3) мы не должны заключать, что

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits^{\times} 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}} \cos(x^n, \mathbf{N})\, dS = \underset{2l}{\overset{\times}{C}_m} = 0, \tag{4.4}$$

поскольку это может дать нам, в общем случае, бесконечное число уравнений; удовлетворить же последним какой-либо системой функций $\overset{\times}{\xi}{}^m$ может оказаться невозможным. Однако разложение уравнений поля способом, основанным на уравнениях (4.2), ведет к неправильным уравнениям (4.4); точно так же, рассуждение, которое прежде приводило к уравнениям (3.5), теперь ведет к (4.4). На каждой ступени приближения мы можем получить разные уравнения, описывающие движения сингулярностей, несовместимые друг с другом. Поэтому мы должны отказаться от применения метода приближения, который дают уравнения (4.2).

Чтобы избежать этой трудности, мы должны, следовательно, идти другим путем. Поскольку этот пункт является существенным, сформулируем общую идею наших рассуждений, прежде чем переходить к деталям. Они состоят из двух этапов.

1. Вместо гравитационных уравнений мы вводим новые уравнения, которые для краткости будем называть «обобщенными уравнениями». Гравитационные уравнения имеют вид

$$\Phi_{\mu\nu} + 2\Lambda_{\mu\nu} = 0, \tag{4.5}$$

тогда как обобщенные уравнения будут

$$\Phi_{\mu\nu} + 2\Lambda_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}, \tag{4.6}$$

где $C_{\mu\nu}$ — некоторые специально выбранные функции τ, x^s и λ. Функции $C_{\mu\nu}$ должны быть выбраны таким образом, чтобы уравнения (4.6) можно было разложить по параметру λ и чтобы можно было применить к ним прямой метод приближения, не сталкиваясь с трудностями, которые только что были указаны.

2. Поскольку нашим методом мы решаем обобщенные, а не гравитационные уравнения, мы должны иметь возможность так специализировать наше решение, чтобы при определенных значениях λ получилось решение нашей системы (4.5), т. е. решение наших гравитационных уравнений.

Следовательно, наш метод заключается в обобщении уравнений (4.5), в использовании нашего метода приближения и, наконец, в специализации нашего решения (ограничением λ) так, чтобы оно удовлетворяло уравнениям (4.5).

Приведем здесь без доказательств наш выбор $C_{\mu\nu}$; это будет доказано позднее, когда мы покажем, что наш метод приближения можно провести без всяких затруднений принципиального характера. Возьмем

$$C_{mn} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\{(\overset{\varkappa}{C}_m/\overset{\varkappa}{r})_{,n} + (\overset{\varkappa}{C}_n/\overset{\varkappa}{r})_{,m} - \delta_{mn}(\overset{\varkappa}{C}_s/\overset{\varkappa}{r})_{,s}\}, \tag{4.7}$$

$$C_{00} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}(\overset{\varkappa}{C}_s/\overset{\varkappa}{r})_{,s}, \tag{4.8}$$

$$C_{0n} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\{(\overset{\varkappa}{C}_0/\overset{\varkappa}{r})_{,n} + (\overset{\varkappa}{C}_n/\overset{\varkappa}{r})_{,0}\}. \tag{4.9}$$

В правых частях последних равенств стоят величины $\underset{r}{r}$, определяемые как

$$\overset{\varkappa}{r}{}^2 = (x^1 - \overset{\varkappa}{\xi}{}^1)^2 + (x^2 - \overset{\varkappa}{\xi}{}^2)^2 + (x^3 - \overset{\varkappa}{\xi}{}^3)^2,$$

т. е. как квадрат «расстояния» точки поля от $\varkappa$-й сингулярности. Функции $\overset{\varkappa}{C}$ зависят от τ и λ и могут быть разложены в ряды по параметру λ:

$$\overset{\varkappa}{C}_m = \sum_{l=1}^{\infty}\lambda^{2l}\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_m}, \tag{4.10}$$

$$\overset{\varkappa}{C}_0 = \sum_{l=1}^{\infty}\lambda^{2l+1}\underset{2l+1}{\overset{\varkappa}{C}_0}. \tag{4.11}$$

Здесь $\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_m}$, $\underset{2l+1}{\overset{\varkappa}{C}_0}$ — функции только τ, которые мы определим позднее.

Теперь мы можем расщепить уравнения (4.6). Применение нашего метода приближения приводит к следующей системе уравнений:

$$\underset{2l}{\Phi_{mn}} + 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\{(\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_m}/\overset{\varkappa}{r})_{,n} + (\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_n}/\overset{\varkappa}{r})_{,m} - \delta_{mn}(\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_s}/\overset{\varkappa}{r})_{,s}\}, \tag{4.12}$$

$$\underset{2l}{\Phi_{00}} + 2\underset{2l}{\Lambda_{00}} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\{(\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_s}/\overset{\varkappa}{r})_{,s}\}, \tag{4.13}$$

$$\underset{2l+1}{\Phi_{0n}} + 2\underset{2l+1}{\Lambda_{0n}} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\{(\underset{2l+1}{\overset{\varkappa}{C}_0}/\overset{\varkappa}{r})_{,n} + (\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_n}/\overset{\varkappa}{r})_{\underset{1}{,0}}\}. \tag{4.14}$$

Обсуждение этих уравнений начнем с уравнений (4.12). В левой части последних, как следует из (1.7) и (1.10), имеем

$$\underset{2l}{\Phi_{mn}} = -\underset{2l}{\gamma_{mn,ss}} + \underset{2l}{\gamma_{ms,ns}} + \underset{2l}{\gamma_{ns,ms}} - \delta_{mn}\underset{2l}{\gamma_{ls,ls}}, \tag{4.15}$$

$$2\underset{2l}{\Lambda_{mn}} = -\underset{2l-1}{\gamma}_{0m,\underset{1}{0n}} - \underset{2l-1}{\gamma}_{0n,\underset{1}{0m}} + 2\delta_{mn}\underset{2l-1}{\gamma}_{0l,\underset{1}{0l}} + \underset{2l-2}{\gamma}_{mn,\underset{2}{00}} - \delta_{mn}\underset{2l-2}{\gamma}_{00,\underset{2}{00}} + 2\underset{2l}{\Lambda'_{mn}}. \tag{4.16}$$

Неизвестные функции $\underset{2l}{\gamma_{mn}}$, которые нужно определить из уравнений (4.12), содержатся только в $\underset{2l}{\Phi_{mn}}$. Все γ в Λ_{mn}, как видно из равенства (4.16), уже известны из предшествующих ступеней приближения, если учесть, что Λ'_{mn} не содержит линейных выражений. Это и было причиной нашего разделения уравнений поля на Φ и Λ. Теперь мы можем дать недостающее определение величин $\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_m}$. Они определяются таким образом, чтобы поверхностные условия выполнялись на каждой ступени приближения тождественно и не налагали ограничений на движение. Мы покажем теперь, что всегда можно выбрать $\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_m}$ так, чтобы движение не было ограничено. Образуя наши поверхностные интегралы, из уравнений (4.12) получаем

$$\overset{\varkappa}{\int} 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}}\cos(x^n, \mathrm{N})\,dS = 4\pi\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_m}, \tag{4.17}$$

поскольку

$$\overset{\varkappa}{\int}(1/\overset{\varkappa}{r})_{,n}\cos(x^n, \mathrm{N})\,dS = -4\pi,$$

если выбрать поверхность в виде малой сферы, окружающей $\varkappa$-ю сингулярность. Однако Λ_{mn} можно определить из предыдущих ступеней приближения. Следовательно, функции $\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_m}$ известны, если известны $\underset{l'}{\gamma}$ для $l'<2l$. В уравнениях (4.12) правая часть и Λ_{mn} известны и $\underset{2l}{\gamma_{mn}}$ можно вычислить без каких-либо затруднений с поверхностными интегралами.

В соответствии с соотношениями (1.8) и (1.11) уравнение (4.13) в явном виде имеет вид

$$\underset{2l}{\gamma_{00,ss}}=\underset{2l}{\gamma_{ls,ls}}+2\underset{2l}{\Lambda'_{00}}+\sum_{\varkappa=1}^{p}(\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_s}/\overset{\varkappa}{r})_{,s}, \tag{4.18}$$

где $\underset{2l}{\gamma_{ls}}$, $\underset{2l}{\Lambda'_{00}}$, $\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_s}$ — известны. Если в $\underset{2l}{\gamma_{00}}$ исключить полюса высшего порядка, все еще остается возможность прибавить к $\underset{2l}{\gamma_{00}}$ произвольную гармоническую функцию типа простого полюса. К этому вопросу мы вернемся позднее.

Наконец, имеется уравнение (4.14), в котором, как следует из соотношений (1.9) и (1.12),

$$\underset{2l+1}{\Phi_{0n}}=-\underset{2l+1}{\gamma_{0n,ss}}+\underset{2l+1}{\gamma_{0s,ns}}, \tag{4.19}$$

$$2\underset{2l+1}{\Lambda_{0n}}=-\underset{2l}{\gamma_{00,}}\underset{1}{{}_{n0}}+\underset{2l}{\gamma_{ns,}}\underset{1}{{}_{0s}}+2\underset{2l+1}{\Lambda'_{0n}}, \tag{4.20}$$

а величина $\underset{2l+1}{\overset{\varkappa}{C}_0}$ определяется, как прежде $\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_m}$, путем вычисления поверхностного интеграла. Единственными неизвестными функциями опять являются $\underset{2l+1}{\gamma_{0n}}$ в $\underset{2l+1}{\Phi_{0m}}$.

В этом случае обобщенных уравнений поверхностные интегралы, вместо (3.5), равны

$$\overset{\varkappa}{\int}2\Lambda_{mn}\cos(x^n,\ \mathrm{N})\,dS=4\pi\overset{\varkappa}{C}_m, \tag{4.21}$$

$$\overset{\varkappa}{\int}2\Lambda_{0n}\cos(x^n,\ \mathrm{N})\,dS=4\pi\left\{\overset{\varkappa}{C}_0-\frac{1}{3}\overset{\varkappa}{C}_s\dot{\overset{\varkappa}{\xi}}{}^s\right\}. \tag{4.22}$$

Чтобы получить решения наших гравитационных уравнений, мы должны предположить:

$$\sum_{l=1}^{\infty}\lambda^{2l}\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}_m}=\overset{\varkappa}{C}_m=0,$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \lambda^{2l+l} \underset{2l+1}{\overset{\times}{C}_0} = \overset{\times}{C}_0 = 0; \tag{4.23}$$

это и есть $4p$ *уравнений движения.*

Следовательно, на каждой ступени приближения мы действуем так, как будто нашей целью является решение не гравитационных уравнений (4.5), а более общих уравнений (4.6), которые не ограничивают движение. Заканчивая нашу процедуру приближения, мы возвращаемся к гравитационным уравнениям, ограничивая движение посредством условий (4.23).

5. Условие $\overset{\times}{C}_0 = 0$.

В соотношениях (4.23) мы имеем $4p$ уравнений для определения $3p$ функций $\overset{\times}{\xi}{}^m(\tau)$. Можно показать, что движение переопределено, поскольку $\underset{2l+1}{\overset{\times}{C}_0}$ могут быть выбраны произвольно, так что можно положить

$$\underset{2l+1}{\overset{\times}{C}_0} \equiv 0, \qquad \overset{\times}{C}_0 \equiv 0. \tag{5.1}$$

Предположение (5.1) совместимо с уравнениями поля и ограничивает свободное добавление полюсов к $\underset{2l}{\gamma}{}_{00}$, упомянутое в разделе 4.

Замена

$$\underset{2l}{\gamma}{}_{00} \text{ на } \underset{2l}{\gamma}{}_{00} = \underset{2l}{\gamma'}{}_{00} + \sum_{\varkappa=1}^{p} \underset{2l}{\overset{\times}{\sigma}{}_0}/\overset{\times}{r}, \qquad \overset{\times}{\sigma}{}_0 = \overset{\times}{\sigma}{}_0(\tau) \tag{5.2}$$

не изменит уравнения (4.18). Кроме этого, заменим

$$\underset{2l+1}{\gamma}{}_{0m} \text{ на } \underset{2l+1}{\gamma}{}_{0m} = \underset{2l+1}{\gamma'}{}_{0m} - \sum_{\varkappa=1}^{p} (\underset{2l}{\overset{\times}{\sigma}{}_0/\overset{\times}{r}}) \underset{1}{\dot{\overset{\times}{\xi}}{}^m}. \tag{5.3}$$

Единственное изменение, которое может быть внесено в уравнение (4.14), как показывает сравнение с равенствами (4.19) и (4.20), возникает из выражения

$$(\underset{2l+1}{\gamma}{}_{0s,s} - \underset{2l}{\gamma}{}_{00,\underset{1}{0}})_{,n}. \tag{5.4}$$

Выражение (5.4) после замен (5.2) и (5.3) переходит в

$$\underset{2l+1}{\gamma'}{}_{0s,s} - \underset{2l}{\gamma'}{}_{00,\underset{1}{0}} - \sum_{\varkappa=1}^{p} (\underset{2l+1}{\dot{\overset{\times}{\sigma}}{}_0/\overset{\times}{r}})_{,n}. \tag{5.5}$$

Сравнение с уравнением (4.14) показывает, что всегда можно положить $\underset{2l+1}{\overset{\times}{C}_0} \equiv 0$, определяя соответствующим образом функции $\underset{2l+1}{\overset{\times}{\sigma}{}_0}$ в (5.2) и (5.3).

Следовательно, уравнения поля и уравнения движения имеют вид:

$$\underset{2l}{\Phi_{mn}} + 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\{(\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}{}_m/\overset{\varkappa}{r})_{,n} + (\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}{}_n/\overset{\varkappa}{r})_{,m} - \delta_{mn}(\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}{}_s/\overset{\varkappa}{r})_{,s}\}, \tag{5.6}$$

$$\underset{2l}{\Phi_{00}} + 2\underset{2l}{\Lambda_{00}} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\{(\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}{}_s/\overset{\varkappa}{r})_{,s}\}, \tag{5.7}$$

$$\underset{2l+1}{\Phi_{0n}} + 2\underset{2l+1}{\Lambda_{0n}} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\{(\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}{}_n/\overset{\varkappa}{r})_{\underset{1}{,0}}\}, \tag{5.8}$$

$$\overset{\varkappa}{C}_m = \sum_{l=1}^{\infty}\lambda^{2l}\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}{}_m = 0. \tag{5.9}$$

Эти уравнения и представляют результат наших рассмотрений и обобщения теории, развитой в работе I.

Действительно, можно показать, что уравнения поля в работе I являются частным случаем уравнений (5.6) — (5.9).

Выбирем координатные условия, принятые в работе I:

$$\underset{2l}{\gamma_{rs,s}} = -\sum_{\varkappa=1}^{p}\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}{}_r/\overset{\varkappa}{r}, \tag{5.10}$$

$$\underset{2l+1}{\gamma_{0s,s}} - \underset{2l}{\gamma_{00}}{}_{\underset{1}{,0}} = 0. \tag{5.11}$$

Вследствие соотношений (1.7) — (1.9) уравнения поля (5.6) — (5.9) принимают вид

$$\underset{2l}{\gamma_{mn,ss}} = 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}}, \tag{5.12}$$

$$\underset{2l}{\gamma_{00,ss}} = 2\underset{2l}{\Lambda_{00}}, \tag{5.13}$$

$$\underset{2l+1}{\gamma_{0m,ss}} = 2\underset{2l+1}{\Lambda_{0m}}, \tag{5.14}$$

и поверхностные интегралы равны

$$\overset{\varkappa}{\int} 2\Lambda_{mn}\cos(x^n, \mathrm{N})\,dS = 4\pi\underset{2l}{\overset{\varkappa}{C}}{}_m, \tag{5.15}$$

$$\overset{\varkappa}{\int}(2\underset{2l+1}{\Lambda'_{0n}} - \underset{2l}{\gamma_{00}}{}_{\underset{1}{,n0}})\cos(x^n, \mathrm{N})\,dS = 0, \tag{5.16}$$

точно так же, как в работе 1.

Поступила 29 мая 1939 г.

121

О ПЯТИМЕРНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГРАВИТАЦИИ И ЭЛЕКТРИЧЕСТВА*

(Совместно с В. Баргманом и П. Бергманом)

В ранее опубликованной работе мы рассмотрели уравнения поля для переменных, определенных в пятимерном римановом пространстве частного вида. Четыре из этих уравнений были интегродифференциальными. В настоящей работе показано, что можно найти систему уравнений поля, в которую входят только дифференциальные уравнения, не меняя при этом геометрической структуры пространства. Такая система однозначно определяется путем наложения некоторых условий однородности.

Введение

В 1921 году Калуца построил единую полевую теорию гравитации и электричества. Он рассматривал компоненты четырехмерного метрического тензора и 4-потенциала электромагнитного поля как компоненты одной геометрической величины, а именно метрического тензора $\gamma_{\mu\nu}$ в пятимерном римановом пространстве, описываемом переменными $x^0, \ldots, x^4$.

Поскольку физический континуум имеет только четыре измерения, Калуца предполагает, что в должным образом выбранной системе координат все переменные пóля не зависят от x^0 (условие «цилиндричности»). Кроме того, он вынужден был предположить, что в этой системе координат $\gamma_{00} = 1$, так как гравитационное и электромагнитное поля описываются $10+4$ переменными, тогда как число компонент тензора $\gamma_{\mu\nu}$ равно 15. Вследствие этого он строит свою теорию на основе только 14 уравнений поля.

С точки зрения пятимерной римановой геометрии предположения Калуцы представляются искусственными. Введение специальной системы координат, в которой переменные пóля не зависят от x^0, отвечает введению в пятимерном пространстве поля единичных векторов $A^\mu(x)$, которое легко

* *On Five-dimentional Representation of Gravitation and Electricity* (With V. Bargmann and P. Bergmann). Theodore von Karman Anniversary Volume, Pasadena, Calif. Inst. Technol., 1941, 212—225.

описать с помощью ковариантных уравнений. (В специальной системе координат компоненты A^μ равны 1, 0, 0, 0, 0.)

В нашей предыдущей работе [1] было показано, что более общие предположения приводят к введению более простого векторного поля. Основные результаты этой работы приведены в следующем разделе.

Сводка основных результатов предыдущей работы

Наша система аксиом такова.

1. Многообразие, с которым мы имеем дело, является пятимерным римановым пространством.

2. Пространство является замкнутым в одном из измерений. Оно может быть представлено как пространство открытое и периодическое в этом измерении, такое что точке P замкнутого пространства отвечает бесконечное число соответственных точек, P, P', P'',..., периодического пространства.

3. Через каждую точку пространства проходит замкнутая и лишенная сингулярностей геодезическая. Иными словами, на языке «периодического пространства», геодезическая, проходящая через любые две соответственные точки P и P', проходит также через все остальные точки P', P'',..., отвечающие точке P.

Третья аксиома определяет поле единичных векторов $A^\mu(x)$, касательных к замкнутым геодезическим. Можно показать, что расстояние по геодезической между двумя точками P и P' не зависит от P; оно является постоянной, которая характеризует наше пространство.

В специальной системе координат, в которой геодезические являются линиями $x^a = \text{const}$ $(a = 1,.., 4)$ [2], компоненты векторов A^μ равны 1, 0, 0, 0, 0 и можно показать, что [3]

$$\gamma_{00} = 1, \gamma_{a0,0} = 0 \qquad (a = 1, \ldots, 4). \tag{1}$$

Остальные компоненты метрического тензора, однако, зависят (периодически) от x^0. Поэтому уравнения поля, которые будут рассматриваться ниже, отличаются от уравнений теории Калуцы.

---

[1] A. Einstein, P. Bergmann. Ann. Math., 1938, 39, 683. (Статья 118. Далее цитируется как I.— *Прим. ред.*).

[2] Латинские индексы всегда пробегают значения от 1 до 4, а греческие — от 0 до 4.

[3] Дифференцирование мы обозначаем запятой перед соответствующим индексом:

$$f_{,\rho} \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\rho}.$$

Уравнения (1) эквивалентны следующим соотношениям:

$$\gamma_{00} = 1, \quad \underset{(5)}{\Gamma^{\lambda}_{00}} = 0, \tag{2}$$

а также соотношениям:

$$\gamma_{00} = 1 \quad \underset{(5)}{\Gamma^{l}_{00}} = 0 \qquad (l = 1, \ldots, 4), \tag{3}$$

если через $\underset{(5)}{\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}$ обозначить символы Кристоффеля для пятимерной римановой геометрии. Из уравнений (1) с очевидностью следуют уравнения (2) и (3), но справедливо и обратное утверждение. Действительно, из соотношения $\gamma_{00} = 1$ следует, что

$$\underset{(5)}{\Gamma^{l}_{00}} = \gamma^{lm}\gamma_{m0,0} = 0,$$

т. е. $\gamma_{m0,0} = 0$. (Определитель γ^{lm} равен γ_{00}/γ и, следовательно, отличен от нуля.)

Специальная система координат определяется замкнутыми геодезическими неоднозначно. Мы можем еще произвести «4-преобразование»:

$$\begin{aligned} \bar{x}^a &= \bar{x}^a(x^1, \ldots, x^4), \\ \bar{x}^0 &= x^0, \end{aligned} \tag{4}$$

и «0-преобразование»:

$$\begin{aligned} \bar{x}^a &= x^a, \\ \bar{x}^0 &= x^0 + f(x^1, \ldots, x^4). \end{aligned} \tag{5}$$

Эти преобразования порождают группу, которую мы назовем «специальной группой» в отличие от группы всех пятимерных преобразований координат.

Тензорный анализ по отношению к специальной группе был развит в работе I. Напомним следующие результаты.

Метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ можно представить в виде суммы двух независимых геометрических величин

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + A_{\mu}A_{\nu}, \tag{6}$$

и, следовательно, заменить на тензор $g_{\mu\nu}$ и вектор A_{μ}. В специальной системе координат отличны от нуля только компоненты $g_{\mu\nu}$:

$$g_{mn} = \gamma_{mn} - A_m A_n. \tag{7}$$

Компоненты же A_{μ} будут:

$$A_m = \gamma_{m0} \tag{8}$$

и

$$A_0 = \gamma_{00} = 1.$$

Относительно специальной группы векторы, тензоры и т. д. определены как величины (с индексами, пробегающими значения от 1 до 4), которые преобразуются по обычным законам при 4-преобразованиях и остаются инвариантными при 0-преобразованиях.

Согласно этому определению, g_{mn} являются компонентами тензора. Величины A_m преобразуются как компоненты ковариантного вектора при 4-преобразованиях, но не остаются инвариантными относительно 0-преобразований. Для последних мы получаем

$$\overline{A}_m = A_m - \frac{\partial f}{\partial x^m}. \tag{9}$$

Антисимметричные производные

$$A_{mn} = A_{m,n} - A_{n,m} \tag{10}$$

образуют антисимметричный тензор.

Производная тензора по x^0 является тензором того же ранга. Однако дифференцирование по x^a не является инвариантным относительно 0-преобразования и должно быть заменено операцией

$$\frac{\partial}{\partial x^a} - A_a \frac{\partial}{\partial x^0}. \tag{11}$$

Ковариантные производные определяются таким образом, чтобы производные от метрического тензора g_{mn} обращались в нуль. Это определение отличается от обычного только тем, что дифференцирование по x^a должно быть заменено на 0-инвариантную операцию (11). Например, для произвольного вектора B_s мы получаем

$$B_{s;a} \equiv (B_{s,a} - A_a B_{s,0}) - B_t \Gamma^t_{sa}, \tag{12}$$

где

$$\Gamma^t_{sa} = \frac{1}{2} g^{tn} [(g_{ns,a} - A_a g_{ns,0}) + (g_{na,s} - A_s g_{na,0}) - (g_{as,n} - A_n g_{as,0})]. \tag{13}$$

Тензор кривизны определяется коммутацией ковариантных производных вектора B_s:

$$B_{s;a;b} - B_{s;b;a} = -B_t R^t_{\cdot sab} - A_{ab} B_{s,0}, \tag{14}$$

причем

$$R^t_{\cdot sab} = (\Gamma^t_{sa,b} - A_b \Gamma^t_{sa,0}) - (\Gamma^t_{sb,a} - A_a \Gamma^t_{sb,0}) - \Gamma^t_{an}\Gamma^n_{sb} + \Gamma^t_{bn}\Gamma^n_{sa}. \tag{15}$$

Приведем еще несколько соотношений, которые не были выписаны в работе I.

1. Производная от Γ^t_{sa} по x^0 является тензором и может быть выражена через ковариантные производные величины $g_{mn,0}$:

$$\Gamma^t_{sa,0} = \frac{1}{2} g^{tn} (g_{ns,0;a} + g_{na,0;s} - g_{sa,0;n}). \tag{16}$$

2. Из соотношений (14) при помощи обычной для римановой геометрии процедуры получаются тождества Бианки:

$$R^{s}_{\cdot tkl;m} + R^{s}_{\cdot tlm;k} + R^{s}_{\cdot tmk;l} + \Gamma^{s}_{tk,0}A_{lm} + \Gamma^{s}_{tl,0}A_{mk} + \Gamma^{s}_{tm,0}A_{kl} \equiv 0. \tag{17}$$

3. Как и в частном случае (А16б) работы I, мы получаем соотношения

$$R^{i}_{\cdot klm;0} = \Gamma^{i}_{kl,0;m} - \Gamma^{i}_{km,0;l}. \tag{18}$$

В работе I мы выводили уравнения поля из вариационного принципа. Переменные поля определены в пятимерном пространстве. Величины g_{mn}, соответствующие гравитационному полю, зависят от пяти переменных; величины A_l, соответствующие 4-потенциалу электромагнитного поля, зависят только от четырех переменных x^a. Поэтому 10 уравнений из нашей системы (возникающих при варьировании по g_{mn}) являются *дифференциальными уравнениями*; остающиеся четыре уравнения (получающиеся при варьировании по A_l) оказываются *интегродифференциальными*. Интегралы берутся по периоду координаты x^0.

Различие между нашей теорией и теорией Калуцы связано с тем, что g_{mn} зависит от x^0. Это, в частности, приводит к существованию 4-вектора плотности тока. Если мы положим $g_{mn,0} = 0$, то теория сведется к теории Калуцы.

Мы требуем, чтобы лагранжиан в нашем вариационном принципе был однородной функцией с «весом» 2 по отношению к производным от переменных по́ля. Произведение производных m-го, n-го и т. д. порядков имеет «вес» $m + n + \ldots$. (Этот вес, конечно, не имеет никакого отношения к весу тензорной плотности.) Каждый лагранжиан, удовлетворяющий этому условию однородности, представляет собой линейную комбинацию (с постоянными коэффициентами) четырех скалярных плотностей. Как указывалось в работе I, не все четыре коэффициента являются существенными; остаются два существенных параметра, которые нельзя определить только из соображений инвариантности.

Существование и однозначность ковариантных уравнений поля в дифференциальной форме

Мы видели, что вариационный принцип дает не только дифференциальные уравнения, так как переменные по́ля A_l не зависят от x^0. Рассмотрим вопрос о том, можно ли построить систему уравнений поля, ковариантных относительно специальной группы (4), (5), состоящую только из *дифференциальных уравнений*, если мы откажемся от вывода уравнений из вариационного принципа. Если да, то будет ли такая система однозначно определенной?

Мы не можем пользоваться любой системой ковариантных дифференциальных уравнений для 14 переменных γ_{ab} и γ_{a0}. Так как должны выполняться также четыре уравнения $\underset{(5)}{\Gamma^l_{00}} = 0$ [ср. уравнения (3)], то для наших 14 переменных будет существовать $14 + 4$ уравнений. Поэтому мы должны предположить, что эти 18 уравнений связаны *четырьмя тождественными соотношениями*.

Мы покажем в явном виде, что такого рода система действительно существует. Затем мы докажем, что если сами уравнения и тождественные соотношения удовлетворяют определенным условиям однородности, то система является *однозначно определенной*.

Нам удобно исходить из тождеств Бианки в пятимерной римановой геометрии. Как известно, путем свертывания получаются пять тождеств [4]:

$$\underset{(5)}{\mathfrak{M}^\lambda} \equiv \underset{(5)}{\mathfrak{S}^{\lambda\mu}_{;\mu}} \equiv 0, \tag{19}$$

где

$$\underset{(5)}{\mathfrak{S}^{\lambda\mu}} \equiv \sqrt{-\gamma}\left(\underset{(5)}{R^{\lambda\mu}} - \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\mu}\underset{(5)}{R}\right). \tag{20}$$

[В соотношениях (19) используются ковариантные производные пятимерной римановой геометрии, а не производные, определенные соотношениями (12) и (13)].

Пользуясь пятимерными символами Кристоффеля $\underset{(5)}{\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}$, мы запишем тождества (19) в более явном виде:

$$\underset{(5)}{\mathfrak{M}^\lambda} \equiv \underset{(5)}{\mathfrak{S}^{\lambda\mu}_{,\mu}} + \underset{(5)}{\Gamma^\lambda_{\rho\sigma}}\underset{(5)}{\mathfrak{S}^{\rho\sigma}} \equiv 0. \tag{21}$$

Чтобы приспособить эти формулы к специальной группе, отделим индекс 0 от остальных индексов. Тогда для $\lambda = 1, \ldots, 4$ получим

$$\underset{(5)}{\mathfrak{M}^l} \equiv \underset{(5)}{\mathfrak{S}^{lm}_{,m}} + \underset{(5)}{\mathfrak{S}^{l0}_{,0}} + \underset{(5)}{\Gamma^l_{mn}}\underset{(5)}{\mathfrak{S}^{mn}} + 2\underset{(5)}{\Gamma^l_{m0}}\underset{(5)}{\mathfrak{S}^{m0}} + \underset{(5)}{\Gamma^l_{00}}\underset{(5)}{\mathfrak{S}^{00}} \equiv 0, \tag{22}$$

а для $\lambda = 0$:

$$\underset{(5)}{\mathfrak{S}^{0m}_{,m}} + \underset{(5)}{\Gamma^0_{mm}} + 2\underset{(5)}{\Gamma^0_{m0}}\underset{(5)}{\mathfrak{S}^{m0}} + \Gamma^0_{00}\mathfrak{S}^{00} \equiv -\mathfrak{S}^{00}_{,0}. \tag{23}$$

Соотношения (22) являются тождественными соотношениями между

---

[4] J. A. Schouten. Der Ricci Kalkül. Berlin, 1923, 91.

следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \underset{(5)}{\Gamma^l_{00}} &= 0 \\ \underset{(5)}{\mathfrak{G}^{lm}} &= 0 \\ \underset{(5)}{\mathfrak{G}^{l0}} &= 0 \end{aligned}\right\} (l, m = 1, \ldots, 4). \qquad \begin{aligned}(24)\\(25)\\(26)\end{aligned}$$

Кроме того, эта система из 18 уравнений, в которые не входят ни $\underset{(5)}{\mathfrak{G}^{00}}$, ни $\underset{(5)}{\Gamma^0_{00}}$, является ковариантной относительно специальной группы. Действительно, из уравнений (4) мы получаем для 4-преобразований

$$\begin{gathered} \underset{(5)}{\bar{\Gamma}^i_{00}} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \underset{(5)}{\Gamma^k_{00}}, \\ \underset{(5)}{\bar{\mathfrak{G}}^{ik}} = \det\left(\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^b}\right) \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^s} \underset{(5)}{\mathfrak{G}^{rs}}, \quad \underset{(5)}{\bar{\mathfrak{G}}^{i0}} = \det\left(\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^b}\right) \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \underset{(5)}{\mathfrak{G}^{r0}}, \end{gathered} \tag{27}$$

и для 0-преобразования:

$$\begin{gathered} \underset{(5)}{\bar{\Gamma}^i_{00}} = \underset{(5)}{\Gamma^i_{00}}, \qquad \underset{(5)}{\bar{\mathfrak{G}}^{ik}} = \underset{(5)}{\mathfrak{G}^{ik}}, \\ \underset{(5)}{\bar{\mathfrak{G}}^{i0}} = \underset{(5)}{\mathfrak{G}^{i0}} + \frac{\partial f}{\partial x^r} \underset{(5)}{\mathfrak{G}^{ir}}. \end{gathered} \tag{28}$$

Отсюда следует, что соотношения (24) — (26) можно выбрать в качестве уравнений поля, поскольку они обладают необходимыми свойствами инвариантности и удовлетворяют четырем тождественным соотношениям (22). Так как из соотношений $\gamma_{00} = 1$ и $\underset{(5)}{\Gamma^l_{00}} = 0$ следует $\underset{(5)}{\Gamma^0_{00}} = 0$ [ср. уравнения (3)], то из уравнений (23) мы видим, что $\underset{(5)}{\mathfrak{G}^{00}}$ не зависит от x^0, если выполняются соотношения (24) — (26). Однако сама величина $\underset{(5)}{\mathfrak{G}^{00}}$, вообще говоря, не равна нулю.

Показав, что система уравнений существует, докажем теперь, что при определенных условиях однородности она является единственно возможной. Наша цель состоит в нахождении системы уравнений:

$$G^{ik} = 0 \tag{29}$$

и

$$G^i = 0, \tag{30}$$

таких, что G^{ik} является тензором, а G^i — вектором по отношению к специальной группе. Как G^{ik}, так и G^i должны быть однородны с весом 2 относительно производных от переменных по́ля. [Мы с самого начала предполагаем здесь, что $A_{l,0} = 0$, так что уравнения (24) тождественно выполняются.]

Если мы снова перейдем к обозначениям четырехмерного тензорного анализа специальной группы, то наиболее общее выражение, удовлетворяющее нашим условиям, можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} G^{ik} = \frac{1}{2}(R^{ik}+R^{ki}-\gamma_1 g^{ik}R) + \gamma_2 g^{ik}A^{rs}A_{rs}+\gamma_3 A^{is}A^k_s+\gamma_4[g^{ir}A^{ks}+g^{kr}A^{is}]g_{rs,0}+ \\ +\gamma_5 g^{ik}g^{mr}g^{ns}g_{mn,0}g_{rs,0}+\gamma_6 g^{ir}g^{ks}g^{mn}g_{rm,0}g_{sn,0}+\gamma_7 g^{ik}(g^{mn}g_{mn,0})^2+ \\ +\gamma_8 g^{im}g^{kn}g_{mn,0}g^{rs}g_{rs,0}+\gamma_9 g^{ir}g^{ks}g_{rs,00}+\gamma_{10}g^{ik}g^{mn}g_{mn,00} \end{aligned} \tag{31}$$

и

$$G^i = A^{im}_{;m} + \varepsilon_1 g^{im}g^{rs}g_{mr,0;s} + \varepsilon_2 g^{im}g^{rs}g_{rs,0;m}, \tag{32}$$

где γ_n и ε_n — постоянные.

Потребуем, чтобы существовала ковариантная система из *четырех тождественных соотношений* $B^i = 0$ между уравнениями, линейных и однородных по G^{ik} и G^i и однородных с весом 3 по производным от уравнений поля. Это требование приводит к соотношениям

$$B^i \equiv G^{im}_{;m} + \beta_1 G^i_{,0} + (\beta_2 g^{il}g_{ml,0} + \beta_3 A^i_m)G^m + \beta_4 g^{mn}g_{mn,0}G^i \equiv 0. \tag{33}$$

Используя соотношения (16) — (18), можно показать путем простых, но довольно длинных выкладок, что такого рода тождества существуют лишь при следующем выборе постоянных:

$$\left.\begin{array}{lllll} \beta_1=\beta_2=\frac{1}{2} & \beta_3=\frac{a}{2} & \beta_4=\frac{1}{4} & \varepsilon_1=-\frac{1}{a} & \varepsilon_2=\frac{1}{a} \\ \gamma_1=1 & \gamma_2=-\frac{a}{8} & \gamma_3=\frac{a}{2} & \gamma_4=0 & \gamma_5=\frac{3}{8a} \\ \gamma_6=-\frac{1}{2a} & \gamma_7=-\frac{1}{8a} & \gamma_8=\frac{1}{4a} & \gamma_9=\frac{1}{2a} & \gamma_{10}=-\frac{1}{2a} \end{array}\right\}. \tag{34}$$

Здесь a — произвольное число. Его можно исключить, если ввести новые переменные

$$A'_k = \tau A_k \tag{35}$$

и одновременно заменить координату x^0 на

$$x'^0 = \tau x^0, \tag{36}$$

где $\tau^2 = \pm a$. В новой системе a оказывается равным ± 1. Значение $a = -1$ следует исключить, поскольку γ_3 соответствует коэффициенту $\varkappa$ в электромагнитном члене в уравнениях поля общей теории относительности, если A_{mn} интерпретировать как компоненты напряженности электромагнитного поля. По этой причине a должно быть положительным.

При $a = 1$ после перестановки некоторых членов мы окончательно получаем

$$G^{ik} \equiv \frac{1}{2}(R^{ik} + R^{ki} - g^{ik}R) + \frac{1}{2}\left(A^{is}A_s^k - \frac{1}{4}g^{ik}A^{rs}A_{rs}\right) - \\ - g^{ik}\left[\frac{3}{8}g^{rs}_{,0}g_{rs,0} + \frac{1}{8}(g^{rs}g_{rs,0})^2\right] + \frac{1}{2}g^{im}_{,0}g^{ks}g_{sm,0} - \\ - \frac{1}{4}g^{ik}_{,0}(g^{rs}g_{rs,0}) + \frac{1}{2}(g^{ir}g^{ks} - g^{ik}g^{rs})g_{rs;00} = 0 \quad (37)$$

и

$$G^i \equiv A^{im}_{;m} - g^{im}g^{rs}g_{mr,0;s} + g^{im}g^{rs}g_{rs,0;m}. \quad (38)$$

Из соотношений (33) мы получаем тождества

$$\sqrt{-g}B_i \equiv \mathfrak{A}_i + \frac{1}{2}(\sqrt{-g}G_i)_{,0} \equiv 0, \quad (39)$$

где

$$\mathfrak{A}_i = (\sqrt{-g}G_i^k)_{;k} + \frac{1}{2}A_{ik}\sqrt{-g}G^k.$$

Уравнения (24) — (26) также приводят к $a = +1$, если метрический тензор выбрать так, чтобы $\gamma_{44} < 0$ и пространственные компоненты γ_{11}, γ_{22}, γ_{33} были положительны. Выражения $\mathfrak{G}^{lm}$ и $\mathfrak{G}^{l0}$ являются линейными комбинациями G^{ik} и G^i. Используя теперь уравнения (37) и (38), находим

$$\underset{(5)}{\mathfrak{G}^{ik}} = \sqrt{-g}G^{ik}, \\ \underset{(5)}{\mathfrak{G}^{i0}} = \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}G^i - A_kG^{ik}\right). \quad (40)$$

Аналогичное соотношение выполняется для тождеств. В соответствии с тождеством (21) мы получаем

$$\sqrt{-g}B^i \equiv \underset{(5)}{\mathfrak{M}^i}, \\ \sqrt{-g}B_i = (\underset{(5)}{\mathfrak{M}}_{,i} - A_i\underset{(5)}{\mathfrak{M}_0}). \quad (41)$$

Тождество $\underset{(5)}{2\mathfrak{M}_0} \equiv 0$ приводит к следующему соотношению:

$$\mathfrak{N} \equiv (\sqrt{-g}G^m)_{;\,m} + \sqrt{-g}g^{lm}_{,\,0}G_{lm} \equiv -2\underset{(5)}{\mathfrak{S}}_{00,0}. \tag{42}$$

Оно не является тождеством обычного рода. Выражение $\mathfrak{N}$, линейное и однородное по G^{ik} и G^i, равно производной по x^0 некоторой функции от переменных пóля, однако оно не обращается в нуль.

Если все переменные периодически зависят от x^0, то мы получаем как следствие уравнений (24) соотношение

$$\int \mathfrak{N}\, dx^0 \equiv 0, \tag{43}$$

где интеграл берется по периоду переменной x^0. По этой причине соотношение типа (42) мы называем «интегральным тождеством».

Некоторые свойства новых уравнений поля

1. В предыдущем разделе мы вывели уравнения поля и тождественные соотношения между ними, не пользуясь тем обстоятельством, что имеем дело с замкнутым пространством, или, иначе говоря, что наши переменные пóля являются периодическими по переменной x^0. Рассмотрение было основано только на уравнениях (1) и на требовании ковариантности уравнений поля относительно специальной группы.

Условие периодичности естественным образом приводит к уравнениям (1). Но эти уравнения с таким же успехом можно взять в качестве исходных, не выводя их из других предположений. Поэтому можно отказаться от условия периодичности и допустить более общие решения наших уравнений поля (37) и (38). Это связано с тем, что в уравнения не входят интегралы. Для теории, развитой в работе I, где интегралы играют важную роль, условие периодичности является существенным.

2. Уравнения (39) и (40) тесно связаны с уравнениями нашей предыдущей теории лишь в том случае, если постоянным α, входящим в уравнения (35) и (36) работы I, придать значения

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = -\frac{1}{4}. \tag{44}$$

Тогда эти уравнения приводятся к следующему виду:

$$G^{ik} = 0, \tag{45}$$

$$\int \sqrt{-g}G^i\, dx^0 = 0. \tag{46}$$ [5]

[5] Мы имеем $\mathfrak{J}^k = -\sqrt{-g}G^k$.

Отсюда следует, что каждое периодическое решение уравнений (37) и (38) является a fortiori решением этих уравнений. Хотя выбор постоянных α не может быть ограничен соображениями инвариантности, набор (44) оказывается выделенным, поскольку лишь в этом случае на переменные пóля можно наложить более сильные требования: $G^i = 0$ вместо уравнений (46). Уравнения (35) и (36) работы I, вообще говоря, могут быть связаны только интегральными тождествами вида

$$\int \mathfrak{A}_i \, dx^0 \equiv 0. \tag{47}$$

Однако в случае, когда выполняются соотношения (44), уравнения связаны более сильным тождеством

$$\mathfrak{A}_i + (\sqrt{-g}G_i)_{,0} \equiv 0,$$

обычного типа [ср. тождество (39)]. Пятое тождество, выражающее закон сохранения электрического заряда, остается интегральным. Оно совпадает с уравнением (42).

3. Как известно из общей теории относительности (в обычной четырехмерной формулировке), каждая ковариантная система уравнений допускает четыре тождества. Поскольку преобразования координат, оставляющие уравнения поля инвариантными, содержат четыре произвольных функции от четырех переменных, на переменные пóля можно наложить четыре произвольных условия. Следовательно, к исходной системе уравнений можно присоединить еще четыре уравнения, которые не являются ковариантными. Расширенная система, содержащая больше уравнений, чем переменных, должна все же иметь решение. Отсюда следует существование четырех тождественных соотношений между уравнениями поля.

В случае системы уравнений, ковариантной относительно специальной группы, допустимые преобразования координат (4) и (5) содержат пять произвольных функций. Эти функции зависят лишь от четырех переменных. Мы все еще можем наложить пять условий на переменные пóля; правда эти условия являются более слабыми, чем если бы мы имели дело с полной группой всех пятимерных преобразований координат. Этим и объясняется тот факт, что мы, вообще говоря, получаем только интегральные тождества.

Эти соображения применимы лишь тогда, когда число уравнений не превышает числа переменных. В случае уравнений (24)—(26) тождества должны быть более сильными [тождество (22)]. Мы уже указывали, что более слабые тождества предыдущей теории содержатся в них [при специальном выборе (44) постоянных α].

Наконец, мы хотим более подробно рассмотреть вопрос о том, как из существования тождеств (39) можно доказать совместность уравнений поля

(37) и (38). Уравнения $G^{ik} = 0$ можно разрешить относительно вторых производных g_{mn} по x^0. Поэтому они допускают единственное решение при произвольном выборе поля $A_l(x^a)$ и при заданных начальных условиях (например, во всех точках многообразия $x^0 = 0$) для g_{mn} и $g_{mn,0}$. Величины G^i содержат только первые производные от g_{mn} по x^0. Следовательно, при заданном поле $A^l(x^a)$ уравнения $G^i = 0$ ограничивают выбор начальных значений для g_{mn} и $g_{mn,0}$ при $x^0 = 0$. Но если уравнения $G^i = 0$ выполняются при $x^0 = 0$, то они выполняются при всех значениях x^0. Это следует непосредственно из тождеств (39). Поскольку уравнения $G^{ik} = 0$ уже удовлетворены, уравнения $B_i = 0$ являются линейными однородными уравнениями первого порядка для G^k и допускают единственное решение $G^k = 0$, если начальные условия при $x^0 = 0$ имеют вид $G^k = 0$. Это доказывает совместность уравнений поля.

Заключение

В настоящей работе мы показали, что в рамках геометрии, постулированной в работе I, можно построить систему уравнений поля, состоящую только из дифференциальных уравнений. Требования ковариантности и однородности определяют эту систему однозначно. В этом определенное преимущество настоящей теории по сравнению с предшествующей, которая содержала произвольные постоянные.

Но именно однозначная определенность системы приводит к серьезным трудностям в физической интерпретации теории. Описание частиц несингулярными решениями уравнений поля представляется невозможным. Поскольку в уравнениях не содержится произвольных постоянных, теория должна приводить к электромагнитному и гравитационному полям одного порядка величины. Поэтому невозможно объяснить тот эмпирический факт, что электростатические силы, действующие между двумя частицами, намного превышают гравитационные. Это означает, что, основываясь на полученных уравнениях, нельзя построить непротиворечивую теорию материи.

Тем не менее представляется вполне вероятным, что формальные соотношения, полученные в настоящей работе, сохранят свое значение, даже несмотря на то, что их нельзя интерпретировать в прямом теоретикополевом смысле.

ДЕМОНСТРАЦИЯ НЕСУЩЕСТВОВАНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ С НЕИСЧЕЗАЮЩЕЙ МАССОЙ, СВОБОДНЫХ ОТ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ*

Как известно, решение Шварцшильда для гравитационного поля становится сингулярным вблизи начала координат. Обычно считают невероятным, что в рамках обобщенной теории относительности чисто гравитационного поля может существовать решение, которое отвечало бы частице с конечной отличной от нуля полной массой и не имело бы сингулярностей.

Мы ограничимся здесь случаем таких решений в эвклидовом пространстве.

§ 1. Теорема о бесконечно близких решениях

Пусть g_{ik} представляет собой произвольное всюду регулярное поле, а $g_{ik} + \delta g_{ik}$ — другое поле, бесконечно мало отличающееся от первого. Пусть R_{ik} — один раз свернутый риманов тензор кривизны. Согласно Палатини, δR_{ik} можно записать в виде

$$\delta R_{ik} = -(\delta\Gamma^s_{ik})_{;s} + (\delta\Gamma^\alpha_{i\alpha})_{;k},$$

или

$$\delta R_{ik} = U^s_{ik;s}, \tag{1}$$

где

$$U^s_{ik} = -\delta\Gamma^s_{ik} + \frac{1}{2}(\delta\Gamma^b_{ib}\delta^s_k + \delta\Gamma^b_{kb}\delta^s_i) \tag{1a}$$

представляет собой тензор.

Из равенства (1) после свертывания с помощью метрического тензора и умножения на $\sqrt{-g}$ следует

$$\sqrt{-g}g^{ik}\delta R_{ik} = \sqrt{-g}g^{ik}U^s_{ik;s}. \tag{2}$$

---

* *Demonstration of the Non-existence of Gravitational Fields with a Non-vanishing Total Mass free Singularities.* Revista Univ. nac. Tucuman, ser. A, 1941, 2, N 1—2, 11—15.

Поскольку абсолютная производная метрического тензора (а также и производная его тензорной плотности) равна нулю, правая часть равенства (2) может быть записана в форме

$$(\sqrt{-g}g^{ik}U^s_{ik})_{;s}.$$

Так как даже выражение в скобках представляет собой тензорную плотность, то абсолютное дифференцирование может быть заменено обычным

$$\begin{gathered}\sqrt{-g}g^{ik}\delta R_{ik} = \mathfrak{U}^s_{,s},\\ \mathfrak{U}^s = \sqrt{-g}g^{ik}U^s_{ik}.\end{gathered} \tag{3}$$

Если теперь как исходное, так и варьированное поля удовлетворяют уравнениям гравитации

$$R_{ik} = 0,$$

то вариация δR_{ik} в (3) обращается в нуль. Следовательно, в этом случае мы получаем уравнение

$$\left.\begin{aligned}&\mathfrak{U}^s_{,s} = 0,\\ &\mathfrak{U}^s = \sqrt{-g}g^{ik}\left[-\delta\Gamma^s_{ik} + \frac{1}{2}(\delta\Gamma^b_{ib}\delta^s_k + \delta\Gamma^b_{kb}\delta^s_i)\right]\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

§ 2. Применение доказанной теоремы к решениям с конечной полной массой, свободным от сингулярностей

Рассмотрим теперь свободное от сингулярностей решение гравитационных уравнений в эвклидовом пространстве (или пространстве Минковского). Будем предполагать, что решение либо не зависит от x_4, либо является периодическим (или квазипериодическим) относительно x_4. Такое решение представляет собой теоретическое представление тела (или системы тел), которое в среднем покоится относительно координатной системы.

На большом расстоянии от начала координат поле такой системы можно всегда заменить полем покоящейся массы, если только можно пренебречь волнами, излучаемыми системой. Такое асимптотическое представление оправдано, так как все члены в решении, не обладающие сферической симметрией (и не описывающие вóлны), убывают с расстоянием быстрее, чем члены, отвечающие полной массе.

Поэтому, такое асимптотическое поле можно описать с достаточной точностью с помощью соответствующего решения линеаризованных уравнений поля.

Если метрика пространства в отсутствие поля задается тензором

$$\eta_{ik} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

то для этого асимптотического решения мы можем положить

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \gamma_{ik}$$

и пренебречь в уравнениях поля членами, квадратичными по γ. Решение этих уравнений будет иметь вид

$$\gamma_{st} = -\frac{2m}{r}\delta_{st}, \quad \gamma_{44} = -\frac{2m}{r} \tag{6}$$

(s, $t = 1, 2, 3$; δ — символ Кронекера). Это и есть искомое асимптотическое решение, в котором $m \neq 0$.

Для этого асимптотического решения мы получаем из (4) и (6), ограничиваясь членами, линейными по m:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{U}^s &= -2\delta m \left(\frac{1}{r}\right)_{,s}, \\ \mathfrak{U}^4 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

Эти уравнения справедливы для бесконечно близких асимптотических решений. Однако уравнения (4) справедливы строго во всей области.

Проинтегрируем теперь уравнения (4) по четырехмерной области, ограниченной в пространстве трехмерной сферой с очень большим радиусом R и во времени заданными значениями 0 и T. С четырехмерной точки зрения эта область представляет собой цилиндр, основания которого задаются уравнениями: $x_4 = 0$ и $x_4 = T$. Поэтому интеграл преобразуется по теореме Гаусса в интеграл по 3-мерной поверхности цилиндра от векторной плотности $\mathfrak{U}$.

Рассмотрим сначала вклады, которые вносят в интеграл «основания» $x_4 = 0$ и $x_4 = T$. Если решение, статическое во всем пространстве (либо, соответственно, стационарное или периодическое с периодом T), то эти вклады в точности компенсируют друг друга. Если решение квазипериодично, то вклад оснований цилиндра будет лишь осциллировать квазипериодично с T, но не будет возрастать с T неограниченно.

Теперь рассмотрим интеграл по боковой поверхности цилиндра. При вычислении этой части мы должны будем использовать асимптотическое решение и, следовательно, формулы (4a). Интегрирование дает

$$8\pi\delta m T.$$

Эта часть растет с T неограниченно: поэтому, чем больше T, до которого мы интегрируем, тем более оправдывается пренебрежение вкладом оснований по сравнению с вкладом от боковой поверхности. Так как интеграл, согласно уравнениям (4), равен нулю, то отсюда следует

$$\delta m = 0. \tag{7}$$

Результат: два бесконечно близкие решения без сингулярностей имеют обязательно одну и ту же полную массу m.

§ 3. Бесконечно близкие подобные решения

Дифференциальные уравнения

$$R_{ik} = 0$$

состоят из членов, линейных по вторым производным от переменных по́ля или членов, квадратичных по первым производным. Отсюда следует эта теорема.

Если поле $g_{ik}(x_s)$ является решением дифференциальных уравнений, то $g_{ik}(cx_s)$, где c — постоянная, также есть решение («подобные решения»). Это справедливо, в частности, и для асимптотических решений.

Поэтому, если (6) есть решение, отвечающее первому полю, то существует и второе решение, которое асимптотически будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \gamma^*_{st} &= -\frac{2m}{cr}\,\delta_{st}, \\ \gamma^*_{44} &= -\frac{2m}{cr}. \end{aligned}\right\} \tag{6a}$$

Это тоже есть асимптотическое решение типа (6), но отвечающее массе всей системы, равной m/c. Если исходное решение было свободно от сингулярностей, то и любое подобное решение будет от них свободно.

Если мы выберем c бесконечно мало отличающимся от 1, то предыдущее утверждение сводится к следующему: для каждого решения, в частности для решения с массой m, свободного от сингулярностей, существует бесконечно близкое (подобное) решение, свободное от сингулярностей, с бесконечно мало отличающейся массой

$$\delta m \neq 0. \tag{7a}$$

§ 4. Заключение

Предполагая существование решения рассматриваемого типа, свободного от сингулярностей, мы пришли к противоречию.

Согласно (7), для такого решения не может существовать другого решения, бесконечно близкого и отвечающего другой массе. Согласно (7a), всегда должно существовать близкое решение (подобное исходному) с отличной массой.

Это противоречие могло возникнуть только из-за того, что была принята гипотеза о существовании решения, свободного от сингулярностей и принадлежащего массе, отличной от нуля.

Наблюдение. Противоречие исчезает, если мы отбросим гипотезу о несуществовании сингулярностей. Действительно, в этом случае уравнение (4) уже несправедливо всюду, и поэтому мы не можем заключить, что интеграл по поверхности обращается в нуль.

Кроме следующей, 123-й статьи, см. также кн.: A. Lichnerowicz. Theories Relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnetisme. Paris, 1955.

123

НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКИХ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ*

(Совместно с В. Паули)

Показано, что уравнения поля релятивистской теории тяготения и ее пятимерного обобщения не допускают существования никакого регулярного стационарного решения, которое описывало бы поле отличной от нуля полной массы или заряда.

Введение

Некоторое время тому назад один из нас доказал [1], что не существует решений уравнений гравитационного поля $R_{ik} = 0$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) поле стационарно (т. е. компоненты g_{ik} не зависят от x^4);

2) оно не имеет особых точек;

3) оно «погружено» в эвклидово пространство (типа Минковского) и при больших значениях r (r — расстояние от начала пространственной системы координат) g_{44} имеет асимптотический вид:

$$g_{44} = -1 + \frac{\mu}{r},$$

где $\mu \neq 0$.

Третье условие означает, что полная гравитирующая масса поля отлична от нуля.

Следующие ниже соображения побудили нас вновь проанализировать это доказательство и обобщить на случай бо́льшего числа измерений.

При попытке построить единую теорию гравитационного и электромагнитного полей нельзя не увидеть некоторой доли истины в пятимерной теории Калуцы. Однако ее обоснование неудовлетворительно постольку, поскольку в группе допустимых преобразований координат пятая, про-

* *Non-existence of Regular Stationary Solutions of Relativistic Field Equations.* (With W. Pauli). Ann. Math., 1943, 44, 131—137. (Перепечатано в W. Pauli. Coll. Sci. Paper, v. 2, 1964.— *Ред.*)

[1] A. Einstein. Rev. Univ. nac. Tucuman, 1941, A 2, 11. (Статья 122).

странственноподобная координата преобразуется совсем иначе, чем остальные. Следовательно, компоненты электромагнитного поля преобразуются независимо от компонент гравитационного поля, и оба поля оказываются объединенными лишь кажущимся образом. Возникает вопрос, можно ли построить теорию на основе полной группы пятимерных точечных преобразований, не жертвуя ее главными достоинствами.

Это может показаться невозможным, так как, согласно всему нашему опыту, физический континуум имеет $3+1$, а не $4+1$ измерений, поскольку его объекты имеют три, а не четыре пространственных измерения. Однако можно представить себе, что эта трудность могла бы быть преодолена следующим образом. Предположим, что в такой теории поля, соответствующие несингулярным решениям, определяют не в точках, а на линиях четырехмерного пространства. Тогда геометрическая конфигурация нескольких сосуществующих полей такого типа более или менее напоминала бы конфигурацию объектов трехмерного пространства.

В связи с этим мы должны исследовать вопрос о том, будут ли в пятимерном метрическом континууме (с сигнатурой 1) уравнения

$$R_{ik}=0$$

допускать несингулярные стационарные решения с полем g_{ik}, имеющим асимптотический вид:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & D \\ 0 & 0 & 0 & D & C \end{bmatrix},$$

где по крайней мере одна из величин A, B, C, D имеет вид

$$\pm 1+\frac{\text{const}}{r}$$

с отличной от нуля постоянной. Это асимптотический вид поля, описывающего частицу, у которой по крайней мере одна из двух масс, электрическая или весомая, отлична от нуля.

При обсуждении уравнений поля В. Баргман [2] показал, что не существует *сферически симметричных* решений такого типа. Ниже мы докажем, что регулярные решения требуемого вида вообще не существуют вне зависимости от каких-либо предположений о характере симметрии поля (в областях с конечной напряженностью поля).

[2] V. Bargmann. Частное сообщение.

Это доказательство показывает, почему всегда возникают особенности при попытке описывать материальные частицы решениями уравнений поля, основанных на тензоре Римана.

1. Согласно Палатини, вариация свернутого риманова тензора кривизны [3]

$$R_{IK} = \Gamma^S_{IS,K} - \Gamma^S_{IK,S} + \Gamma^R_{SI}\Gamma^S_{RK} - \Gamma^R_{IK}\Gamma^S_{RS} \tag{1}$$

может быть записана в виде

$$\delta R_{IK} = (\delta\Gamma^S_{IS})_{;K} - (\delta\Gamma^S_{IK})_{;S}, \tag{2}$$

или

$$\delta R_{IK} = U^S_{IK;S}, \tag{3}$$

где

$$U^S_{IK} = -\delta\Gamma^S_{IK} + \frac{1}{2}(\delta\Gamma^A_{IA}\delta^S_K + \delta\Gamma^A_{KA}\delta^S_I). \tag{4}$$

Это приводит к равенству

$$\sqrt{|g|}\, g^{IK}\delta R_{IK} = \sqrt{|g|}\, g^{IK}U^S_{IK;S}, \tag{5}$$

где $|g|$ — абсолютное значение определителя ковариантного метрического тензора. Поскольку ковариантные производные метрического тензора и его плотности равны нулю, мы можем записать правую часть в виде

$$(\sqrt{|g|}\, g^{IK}U^S_{IK})_{;S}$$

и, наконец, заменить ковариантное дифференцирование обычным; при этом выражение в скобках остается контравариантной векторной плотностью.

Отсюда получаем

$$\sqrt{|g|}\, g^{IK}\delta R_{IK} = -\mathfrak{A}^S_{,S}, \tag{6}$$

где

$$\mathfrak{A}^S = \sqrt{|g|}\,(g^{IK}\delta\Gamma^S_{IK} - g^{AS}\delta\Gamma^B_{AB}). \tag{7}$$

Если как первоначальное, так и проварьированное поля удовлетворяют гравитационным уравнениям $R_{IK} = 0$, то величины δR_{IK} в соотношении (6) обращаются в нуль, и мы получаем

$$\mathfrak{A}^S_{,S} = 0. \tag{6a}$$

....

[3] Индексы, обозначенные прописными латинскими буквами, принимают все значения $1, \ldots, n$, где n—число измерений рассматриваемого пространства. Обычное дифференцирование обозначается запятой перед соответствующим индексом, а ковариантное дифференцирование — точкой с запятой.

Это справедливо всегда, когда варьирование поля обусловлено бесконечно малым изменением системы координат. Производя такое варьирование, мы должны сравнивать значения Γ или R не в одной и той же мировой точке, а должны *сместить* эту мировую точку так, чтобы скомпенсировать вариацию ее координат, обусловленную изменением системы координат. Только тогда можно поменять местами варьирование и дифференцирование, так что мы получим, например,

$$(\delta\Gamma^S_{IK})_{,L} = \delta\,(\Gamma^S_{IK,L}).$$

Для вариации, обусловленной преобразованием координат,

$$x^{I'} = x^I + \xi^I(x),$$

мы получим, сохраняя только члены первого порядка относительно ξ^I,

$$\delta\Gamma^4_{IK} = -\,\xi^4_{,IK} + \xi^4_{,R}\Gamma^R_{IK} - \xi^R_{,I}\Gamma^4_{RK} - \xi^R_{,K}\Gamma^4_{RI} - \xi^R\Gamma^4_{IK,R}. \tag{8}$$

Если подставить выражение (8) для $\delta\Gamma$ в соотношение (7), то, как следует из уравнений поля $R_{IK} = 0$, соотношения (6а) должны оставаться справедливыми для произвольных функций ξ^I.

2. Разложим теперь n-мерный континуум координат x^I на обычное трехмерное пространство координат x^i (здесь латинские индексы принимают значения 1, 2, 3) и на подпространство остальных координат x^ρ (греческие индексы принимают значения 4,..., n). Будем считать, что величины g_{IK} не зависят от координат x^ρ:

$$\frac{\partial g_{IK}}{\partial x^\rho} = 0. \tag{9}$$

В физической интерпретации этого формализма x^4 означает временную координату, а x^5 — пятую координату, введенную в теории *Калуцы* (в которой метрика пространственноподобна относительно этой пятой координаты). Однако для последующих математических рассуждений более удобно не ограничивать ни число измерений пространства, ни сигнатуру его метрики, за исключением допущения, что метрика трехмерного пространства положительно определенна.

Рассмотрим теперь выводы из соотношений (6а) для тех вариаций (8), которые не нарушают условия (9) (условия цилиндричности). Тогда в соотношениях (6а) должны быть сохранены только члены с $S = i$. Пользуясь теоремой Гаусса, мы заключаем из равенства $\mathfrak{A}^i_{\ ,i} = 0$, что

$$\oint \mathfrak{A}^i n_i\, df = 0, \tag{10}$$

если интеграл берется по замкнутой двумерной поверхности, не охватывающей никаких особых точек поля. Здесь n_i — ковариантные компоненты единичного вектора, нормального к этой поверхности. В том случае, когда существуют особые точки метрического тензора, мы рассматриваем две различных замкнутых поверхности F_1 и F_2 в качестве внутренней и внешней границ трехмерной области, не имеющей особых точек. Тогда из теоремы Гаусса следует

$$\oint_{F_1} \mathfrak{A}^i n_i \, df = \oint_{F_2} \mathfrak{A}^i n_i \, df. \tag{10a}$$

Существуют два различных типа бесконечно малых преобразований координат, оставляющих инвариантным условие стационарности поля [условие (9)]. Преобразования *первого типа* характеризуются функциями ξ^I, которые *не зависят* от x^ρ, но могут зависеть произвольным образом от x^i. В этом случае мы можем выбрать ξ^I вместе с их первыми и вторыми производными равными нулю на внутренней поверхности F_1, так что $\mathfrak{A}^i$ также обращаются в нуль на F_1. Следовательно, для этого типа вариаций более сильное соотношение (10) справедливо даже тогда, когда поверхность охватывает особые точки поля, если только на самой поверхности нет особых точек.

Преобразования *второго типа*, не нарушающие стационарного характера поля, приводят к интегральной теореме, которая отбирает *регулярные* решения уравнений поля $R_{IK} = 0$. Эти преобразования определяются формулами

$$\xi^i = 0, \qquad \xi^\rho = c^\rho_\sigma x^\sigma \tag{11}$$

с постоянными коэффициентами c^ρ_σ. Тогда из соотношений (8) и (9) следует, что

$$\left.\begin{aligned} &\delta\Gamma^l_{ik} = 0, \qquad \delta\Gamma^B_{iB} = \delta\Gamma^\rho_{i\rho} = 0, \qquad \delta\Gamma^B_{\rho B} = \delta\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} = 0, \\ &\delta\Gamma^i_{\rho\sigma} = -(c^\tau_\rho \Gamma^i_{\tau\sigma} + c^\tau_\sigma \Gamma^i_{\rho\tau}), \qquad \delta\Gamma^l_{i\rho} = -c^\tau_\rho \Gamma^l_{i\tau}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Подставляя эти выражения в формулу (7), получаем

$$\mathfrak{A}^i = -2c^\tau_\rho \sqrt{|g|}\, g^{\rho A} \Gamma^i_{A\tau}.$$

Поскольку коэффициенты c^τ_ρ могут быть выбраны произвольно, уравнение (6а), с учетом уравнений поля и стационарного характера решения, означает, что

$$(\sqrt{|g|}\, g^{\rho A} \Gamma^i_{A\sigma})_{,i} = 0 \tag{13}$$

для всех значений ρ и σ. Для *несингулярных* решений это приводит к равенству

$$\oint \sqrt{|g|}\, g^{\rho A}\Gamma^i_{A\sigma} n_i\, df = 0 \tag{13a}$$

по аналогии с (10), тогда как сингулярные решения удовлетворяют только более слабому условию типа (10а).

3. Чтобы использовать эту теорему, сделаем допущение, что рассматриваемое поле g_{IK} асимптотически стремится к полю эвклидова пространства. Поэтому на больших расстояниях от начала координат мы можем положить

$$g_{IK} = \overset{\circ}{g}_{IK} + \gamma_{IK}. \tag{14}$$

Здесь постоянные $\overset{\circ}{g}_{IK}$ могут быть приведены к виду $\delta_{IK}\varepsilon_I$ (суммирования нет!), причем $\varepsilon_i = +1$, $\varepsilon_\rho = \pm 1$; величины γ_{IK} считаются малыми первого порядка. Тогда определитель g равен

$$g = \left(\prod_I \varepsilon_I\right) \cdot (1 + \gamma), \tag{15}$$

где

$$\gamma = \overset{\circ}{g}{}^{IK}\gamma_{IK} = \sum_I \varepsilon_I \gamma_{II}. \tag{15a}$$

Сохраняя только члены первого порядка, из формулы (1), в силу стационарного характера поля, заключаем, что уравнения $R_{IK} = 0$ принимают вид

$$\gamma_{IK,\,ss} - \gamma_{Is,\,sK} - \gamma_{Ks,\,sI} + \gamma_{,\,IK} = 0, \tag{16}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{ik,\,ss} - \gamma_{is,\,sk} - \gamma_{ks,\,si} + \gamma_{,ik} &= 0, \\ \gamma_{i\rho,\,ss} - \gamma_{\rho s,\,si} = 0, \qquad \gamma_{\rho\sigma,\,ss} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{16a}$$

Как известно, систему координат всегда можно выбрать таким образом, что

$$\gamma_{Is,s} - \frac{1}{2}\gamma_{,I} = 0, \tag{17}$$

или

$$\gamma_{is,\,s} - \frac{1}{2}\gamma_{,\,i} = 0, \qquad \gamma_{\rho s,\,s} = 0. \tag{17a}$$

Тогда уравнение (16) сводится к уравнению Лапласа

$$\gamma_{IK,\,ss} = 0. \tag{18}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только те члены, которые на бесконечности убывают не быстрее, чем r^{-1}, где $r^2 = \Sigma_i (x^i)^2$. Следовательно, мы имеем

$$\gamma_{IK} = \frac{m_{IK}}{r}. \tag{19}$$

Так как

$$\gamma = \frac{(\sum_l \varepsilon_l m_{ll})}{r} = \frac{(\sum_i m_{ii} + \sum_\rho \varepsilon_\rho m_{\rho\rho})}{r},$$

то из соотношения (17а) мы заключаем, что

$$m_{ik} = \frac{1}{2}\delta_{ik}\Big(\sum_j m_{jj} + \sum_\rho \varepsilon_\rho m_{\rho\rho}\Big), \qquad m_{i\rho} = 0,$$

или

$$m_{i\rho} = 0, \qquad m_{ik} = m\delta_{ik}, \qquad m + \sum_\rho \varepsilon_\rho m_{\rho\rho} = 0. \tag{20}$$

Отсюда, пренебрегая членами порядка выше первого, имеем

$$g_{ik} = \delta_{ik}\Big(1 + \frac{m}{r}\Big), \qquad g_{i\rho} = 0, \qquad g_{\rho\sigma} = \varepsilon_\rho \delta_{\rho\sigma} + \frac{m_{\rho\sigma}}{r}, \tag{21}$$

где m удовлетворяет последнему из уравнений (20). С помощью этого результата можно вычислить интеграл (13а) для достаточно большой сферы. Поскольку на поверхности сферы можно положить

$$\Gamma^i_{\rho\sigma} = \Gamma_{i,\rho\sigma} = -\frac{1}{2}\gamma_{\rho\sigma,i} = -\frac{1}{2}m_{\rho\sigma}\Big(\frac{1}{r}\Big)_{,i} = \frac{1}{2}m_{\rho\sigma}\frac{x^i}{r^3} = \frac{1}{2}m_{\rho\sigma}\frac{n_i}{r^2},$$

окончательно получаем

$$\oint \sqrt{|g|}\, g^{\rho A}\Gamma^i_{A\sigma} n_i\, df = 2\pi\varepsilon_\rho m_{\rho\sigma}. \tag{22}$$

Согласно этому равенству, интегральные теоремы (13а) означают, что

$$m_{\rho\sigma} = 0 \quad \text{при всех } \rho \text{ и } \sigma \tag{23}$$

для любого решения, не зависящего от x^ρ, всюду регулярного и асимптотически стремящегося к эвклидовой метрике. Кроме того, из уравнений (20) получается

$$m = 0. \tag{23a}$$

Это показывает, что для такого регулярного решения уравнений поля $R_{IK} = 0$ отклонения компонент g_{IK} от эвклидовых (типа Минковского) $\overset{\circ}{g}_{IK}$ должны убывать быстрее чем $\frac{1}{r}$ для всех значений I и K. Если бы вообще существовало решение, отличное от решения с эвклидовой метрикой, то оно не могло бы описывать частицы с *отличной от нуля массой или зарядом*, что и утверждалось во Введении.

Дополнение

В частном случае четырехмерного континуума Р. Серини[4] показал (правда, при ограничивающем предположении, что компоненты g_{44} всюду равны нулю), что, за исключением случая эвклидовой метрики, не существует регулярного решения требуемого вида. Его доказательство основано на том, что при указанном предположении для равенства (13) мы получаем

$$(\sqrt{|g|}\, g^{44} g^{ik} g_{44,\,k})_{,\,i} = 0.$$

Умножая это равенство на $-g_{44}$, интегрируя по трехмерной области и учитывая, что $g^{44} g_{44} = -1$, находим

$$\int \sqrt{|g|}\, g^{44} g^{ik} g_{44,i} g_{44,\,k}\, d^3x + \oint \sqrt{|g|}\, g^{ik} g_{44,\,k} n_i\, df = 0.$$

Согласно равенству (13а), интеграл по поверхности стремится к 0 при удалении поверхности на бесконечность, так как при этом $g_{44} \to -1$, $g_{ik} \to \delta_{ik}$. Поскольку $g^{44} \neq 0$, $g \neq 0$ и форма $g^{ik} x_i x_k$ положительно определенна, обращение в нуль интеграла по объему (распространенного на все пространство) означает, что $g_{44} = \text{const}$. Однако для трехмерного пространства уравнения поля $R_{ik} = 0$ эквивалентны требованию обращения в нуль несвернутого риманова тензора кривизны. Следовательно, они означают, что пространство эвклидово. Что же касается тех стационарных решений уравнений поля, для которых величины γ_{IK} (т. е. отклонения компонент g_{IK} от постоянных значений $\overset{\circ}{g}_{IK}$) убывают быстрее, чем $\frac{1}{r}$, то не представляется возможным рассмотреть их с помощью методов настоящей статьи, т. е. с помощью интегральных теорем и линеаризованных уравнений поля. Для исследования этих решений необходимо подробнее рассмотреть более высокие приближения или точные уравнения поля.

Поступила 4 января 1943 г.

---

[4] R. Serini. Atti Acad. Lincei (5), 1918, 27^1, 235.

БИВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ. I*

(Совместно с В. Баргманом)

Введение

С тех пор как была создана общая теория относительности, стоит задача найти единую теорию физического поля путем некоторого обобщения релятивистской теории гравитации. Множество попыток достичь этой цели при помощи небольшого изменения в основах теории (как, например, заменой пространственно-временнóго континуума на пространство более высокой размерности) казались безуспешными. Это, по-видимому, указывает на неизбежность решительного видоизменения основных понятий.

Теория гравитации определяется следующими формальными элементами:

1) четырехмерный пространственно-временнóй континуум;

2) ковариантность уравнений поля по отношению ко всем непрерывным преобразованиям координат;

3) существование римановой метрики (т. е. симметричного тензора 2-го ранга g_{ik}), которая определяет строение физического континуума.

При этом гравитационные уравнения являются простейшими условиями для функций g_{ik}, ограничивающими их в достаточной степени.

Мы пытались сохранить элементы 1 и 2, но описывать строение пространства при помощи математического аппарата, отличного от элемента 3, хотя и напоминающего в некоторых отношениях g_{ik}. По ходу исследования мы нашли новые понятия и соотношения, которые с логической точки зрения кажутся достаточно простыми и естественными, чтобы представлять интерес даже вне рамок той физической задачи, которую мы имели в виду.

....

* *Bivector Fields.* I. (With V. Bargmann). Ann. Math., 45, 1944, 1—14.

Достигли ли мы успеха в решении этой физической задачи, остается еще неясным. Ответ на этот вопрос зависит, кроме всего прочего, от математической задачи, которую мы еще не смогли решить.

§ 1. Тензоры и бивекторы

Тензоры. Пусть A_i и B_k — два ковариантных векторных поля в четырехмерном континууме. Функции

$$T_{ik} = A_i(x^1, \ldots, x^4) \cdot B_k(x^1, \ldots, x^4) \tag{1}$$

определяют ковариантный тензор 2-го ранга (частного вида) с законом преобразования

$$\overset{*}{T}_{ik} = \frac{\partial x^l}{\partial \overset{*}{x}{}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \overset{*}{x}{}^k} T_{lm}. \tag{2}$$

Складывая тензоры вида (1), мы можем получить наиболее общие ковариантные тензоры 2-го ранга, характеризуемые законом преобразования (2).

Бивекторы. Рассмотрим теперь, исходя из тех же векторных полей A_i и B_k, произведения:

$$\underset{12}{T_{ik}} \equiv T_{ik}(\underset{1}{x}\,\underset{2}{x}) = A_i(\underset{1}{x})\, B_k(\underset{2}{x}),$$

где через $\underset{1}{x}$ и $\underset{2}{x}$ обозначены координаты точек P_1 и P_2, которые, вообще говоря, отличаются одна от другой. В сокращенных обозначениях последнее равенство будет иметь вид

$$\underset{12}{T_{ik}} = \underset{1}{A_i}\underset{2}{B_k}. \tag{1a}$$

Общее бивекторное поле определяется законом преобразования

$$\underset{12}{\overset{*}{T}_{ik}} = \frac{\partial \overset{l}{x}{}^1}{\partial \overset{*i}{x}{}^1} \frac{\partial \overset{m}{x}{}^2}{\partial \overset{*k}{x}{}^2} \underset{12}{T_{lm}}. \tag{2a}$$

[Ясно, что любое бивекторное поле можно получить, складывая поля частного вида (1a)].

В дальнейшем мы предполагаем, что геометрическая структура нашего пространства определяется бивекторным полем $\underset{12}{g_{ik}}$ (а не римановым тензором g_{ik}). Нашей основной задачей будет отыскание простейших или наиболее естественных ковариантных уравнений таких полей.

Предыдущее построение удобно обобщить, введя *два* четырехмерных пространства $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ вместо одного пространства $\mathfrak{R}$. Предположим, что векторное поле A_i определено в $\mathfrak{R}_1$, а поле B_k в $\mathfrak{R}_2$. Тогда (1а) можно интерпретировать как определение специального бивекторного поля в $\{\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2\}$ и аналогично (2а) — как определение закона преобразования бивекторов в $\{\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2\}$. Наложением полей вида (1а) можно снова получить каждое бивекторное поле в $\{\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2\}$].

Это обобщенное построение (*двойное пространство*) отличается от предыдущего (*единичное пространство*) тем, что системы координат и, следовательно, преобразования координат в $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ независимы друг от друга. Двойное пространство допускает меньше инвариантных операций, благодаря чему с бивекторными полями в $\{\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2\}$ проще обращаться. Рассмотрев их, мы вернемся к теории в едином пространстве.

Контравариантный фундаментальный бивектор. Контравариантный метрический тензор играет важную роль в римановой геометрии, поскольку он позволяет преобразовывать ковариантные тензоры в контравариантные, подобно тому как g_{ik} можно использовать, чтобы преобразовать контравариантные тензоры в ковариантные. По аналогии мы можем определить контравариантный бивектор $\overset{kl}{g^{21}}$ при помощи соотношений

$$\underset{12}{g_{ik}}\overset{kl}{g^{21}} = \underset{1}{\overset{l}{\delta_i{}^1}} = \delta_i^l, \tag{3}$$

где δ_i^l — известные символы Кронекера, которые определяют тензор в одном из двух пространств. Закон преобразования для контравариантных бивекторов имеет вид

$$\overset{*ki}{T^{21}} = \frac{\partial \overset{*k}{x^2}}{\partial \overset{m}{x^2}} \frac{\partial \overset{*i}{x^1}}{\partial \overset{l}{x^1}} \overset{ml}{T^{2\,1}}; \tag{2б}$$

нетрудно убедиться в том, что соотношения (3) ковариантны, т. е., что

$$\underset{12}{\overset{*}{g}_{ik}}\overset{*kl}{g^{21}} = \underset{1}{\overset{l}{\delta_i{}^1}}$$

также выполняется, если $\overset{*}{g}_{ik}$ определено законом преобразования (2а), а $\overset{*kl}{g^{21}}$ — законом преобразования (2б). Используя соотношение (3), имеем

$$\overset{kl}{g^{21}}\underset{12i}{g_l} = \underset{1}{\overset{k}{\delta^2{}_i}}. \tag{3а}$$

Ввиду сходства фундаментального бивектора с метрическим тензором римановой геометрии можно было бы попытаться сначала составить из него ковариантные величины, подобно тому как это делается в римановой геометрии, и получить уравнения поля, полагая эти величины равными нулю. В нашем случае это оказывается невозможным, так как существует слишком много ковариантных выражений и трудно выбрать какое-либо из них, избежав неоднозначности. Причина отказа от ковариантных величин заключается главным образом в следующем: в то время как в римановой геометрии невозможно получить ковариантные уравнения, содержащие производные только *первого порядка*, здесь мы имеем ковариантные величины

$$\gamma_{\underset{122}{ikl}} \equiv g_{\underset{122}{ik,l}} - g_{\underset{122}{il,k}}$$

(и соответствующие величины с переставленными индексами 1 и 2), которые преобразуются как компоненты вектора (антисимметричного тензора) по отношению к преобразованиям координат в $\mathfrak{R}_1$ ($\mathfrak{R}_2$).

Поэтому, чтобы получить хорошо определенные уравнения поля, связанные с нашей геометрической структурой (так же как в римановой геометрии), мы должны потребовать их ковариантности относительно более широкой группы преобразований.

§ 2. Инвариантность по отношению к операции «окаймления»

Замечание об обозначениях. Будем всюду обозначать ковариантный бивектор $g_{\underset{\alpha\beta}{ik}}$ таким образом, чтобы два левых индекса i, α относились к $\mathfrak{R}_1$, а два правых k, β — к $\mathfrak{R}_2$. С помощью i, k мы нумеруем компоненты бивектора, с помощью α, β две точки (в $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ соответственно), координаты которых являются аргументами функций g. Для контравариантных бивекторов этот порядок будет обращен, так что левые индексы будут относиться к $\mathfrak{R}_2$, а правые — к $\mathfrak{R}_1$. В других случаях смысл встречающихся величин будет ясен из текста. Рассмотрим, например, закон преобразования

$$\overset{*}{g}_{\underset{\alpha\beta}{ik}} = \frac{\partial \overset{l}{x^\alpha}}{\partial \overset{*i}{x^\alpha}} \frac{\partial \overset{m}{x^\beta}}{\partial \overset{*k}{x^\beta}} g_{\underset{\alpha\beta}{lm}}. \tag{4}$$

Мы не указываем явно, что $\partial \overset{l}{x^\alpha} / \partial \overset{*i}{x^\alpha}$ следует брать для точки в $\mathfrak{R}_1$. Однако это следует из того, что α — левый индекс как у g, так и у $\overset{*}{g}$.

Окаймление. Не меняя системы координат в $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$, сопоставим $\underset{\alpha\beta}{g_{ik}}$ новый бивектор

$$\overset{*}{\underset{\alpha\beta}{g_{i\,k}}} = \underset{\alpha}{\overset{l}{\omega_i}}{}^{\alpha} \underset{\alpha\beta}{g_{lm}} \underset{\beta}{\overset{m}{\hat{\omega}_k}}{}^{\beta}, \tag{5}$$

где ω — тензор в $\mathfrak{R}_1$, компоненты которого зависят только от точки в $\mathfrak{R}_1$; аналогично, $\hat{\omega}$ — тензор в $\mathfrak{R}_2$, зависящий от точки в $\mathfrak{R}_2$. Предполагается, что определители тензоров ω и $\hat{\omega}$ не обращаются в нуль. В остальном они выбираются произвольно (независимо друг от друга). Мы будем говорить, что $\overset{*}{g}$ получается из g операцией *окаймления.*

Соответственно, окаймление контравариантного тензора определяется соотношением

$$\overset{*}{g}{}^{\overset{kl}{\beta\alpha}} = \underset{\beta}{\overset{k}{\hat{\sigma}_r}}{}^{\beta} g^{\overset{rs}{\beta\alpha}} \underset{\alpha}{\overset{l}{\sigma_s}}{}^{\alpha}. \tag{6}$$

Мы требуем, чтобы фундаментальные соотношения (3) и (3а) между ковариантными и контравариантными бивекторами оставались неизменными при преобразованиях (5) и (6). Это эквивалентно предположениям, что

$$\underset{\alpha}{\overset{k}{\sigma_i}}{}^{\alpha} \underset{\alpha}{\overset{l}{\omega_k}}{}^{\alpha} = \underset{\alpha}{\overset{k}{\omega_i}}{}^{\alpha} \underset{\alpha}{\overset{l}{\sigma_k}}{}^{\alpha} = \delta_i^l \tag{7}$$

и

$$\underset{\beta}{\overset{k}{\hat{\sigma}_i}}{}^{\beta} \underset{\beta}{\overset{l}{\hat{\omega}_k}}{}^{\beta} = \underset{\beta}{\overset{k}{\hat{\omega}_i}}{}^{\beta} \underset{\beta}{\overset{l}{\hat{\sigma}_k}}{}^{\beta} = \delta_i^l, \tag{7a}$$

т. е.

$$\sigma_\alpha = \omega_\alpha^{-1}, \quad \hat{\sigma}_\beta = \hat{\omega}_\beta^{-1}.$$

Все те $\overset{*}{g}$, которые получаются операцией окаймления данного g (произвольными ω и $\hat{\omega}$), будут рассматриваться как различные представления одного и того же поля. Таким образом, более широкая группа преобразований, упомянутая в конце § 1, будет состоять из преобразований (5) и (6). Следовательно, мы будем допускать лишь уравнения, ковариантные по отношению к этой группе.

Поскольку преобразования (2а) бивекторов (связанные с переходом к новым координатам в $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$) являются частным случаем преобразований (4), преобразования координат можно скомбинировать с операцией окаймления таким образом, чтобы компоненты бивектора оставались неизменными, т. е. вели себя как *скаляры* при результирующем преобразовании. Мы воспользуемся этим упрощением.

§ 3. Уравнения поля для двойного пространства

Выражения

$$\underset{\alpha}{U_i}{}^{\overset{l}{\;}\gamma} \equiv \underset{\alpha\beta}{g_{ik}}\overset{kl}{g}{}^{\beta\gamma} \tag{8}$$

определяют смешанный тензор по отношению к $\mathfrak{R}_1$, который сверх того зависит от точки β в $\mathfrak{R}_2$. Если α и γ совпадают, то U_i^l равняется δ_i^l [ср. соотношение (3)]. Комбинируя два тензора такого рода, мы получаем

$$\underset{\alpha}{Z_i}{}^{\overset{n}{\;}\varepsilon} \equiv \underset{\alpha\beta}{g_{ik}}\overset{kl}{g}{}^{\beta\gamma}\underset{\gamma\delta}{g_{lm}}\overset{mn}{g}{}^{\delta\varepsilon}, \tag{9}$$

где α, γ, ε и β, δ — точки в $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ соответственно. Мы можем сделать это наглядным при помощи следующей схемы:

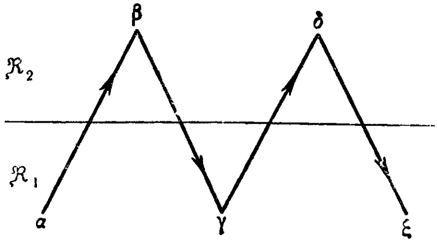


Рис. 1.

Если α и ε совпадают, то Z_i^n сводится к четырехточечным выражениям

$$\underset{\alpha}{V_i}{}^{\overset{n}{\;}\alpha} \equiv \underset{\alpha\beta}{g_{ik}}\overset{kl}{g}{}^{\beta\gamma}\underset{\gamma\delta}{g_{lm}}\overset{mn}{g}{}^{\delta\alpha}, \tag{10}$$

которые отвечают схеме

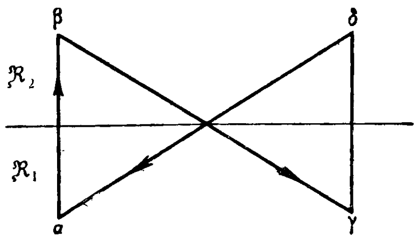


Рис. 2.

В формуле (10) $\underset{\alpha}{V_i}{}^{\overset{n}{\alpha}}$ — смешанный тензор по отношению к точке α и скаляр по отношению к β, γ и δ. При операции окаймления $\underset{\alpha}{V_i}{}^{\overset{n}{\alpha}}$ преобразуется в

$$\underset{\alpha}{\overset{*}{V}_i}{}^{\overset{n}{\alpha}} = \underset{\alpha}{\omega_i}{}^{\overset{k}{\alpha}} \underset{\alpha}{V_k}{}^{\overset{l}{\alpha}} \underset{\alpha}{\sigma_l}{}^{\overset{n}{\alpha}}.$$

Отсюда, в силу (7), следует, что уравнение $\underset{\alpha}{V_k}{}^{\overset{l}{\alpha}} = \delta_k{}^l$ влечет за собой $\underset{\alpha}{\overset{*}{V}_k}{}^{\overset{l}{\alpha}} = \delta_k{}^l$. Следовательно, мы получаем инвариантное условие для нашего многообразия, когда требуем, чтобы

$$\underset{\alpha}{V_i}{}^{\overset{n}{\alpha}} \equiv \underset{\alpha\beta}{g_{ik}} g^{\overset{kl}{\beta\gamma}} \underset{\gamma\delta}{g_{lm}} g^{\overset{mn}{\delta\alpha}} = \delta_i^n \tag{11}$$

для любых четырех точек α, β, γ, δ. Эти соотношения будем называть *тензорными четырехточечными уравнениями*. Свертка уравнений (11) ведет к *скалярному четырехточечному уравнению*

$$\underset{\alpha}{V_i}{}^{\overset{i}{\alpha}} = \underset{\alpha\beta}{g_{ik}} g^{\overset{kl}{\beta\gamma}} \underset{\gamma\delta}{g_{lm}} g^{\overset{mi}{\delta\alpha}} = 4. \tag{11a}$$

Аналогично можно образовать более высокие тензорные или скалярные *полигональные уравнения* для последовательностей (полигонов) из 6, 8,... (вместо четырех) точек. В силу фундаментальных соотношений между ковариантными и контравариантными бивекторами [см. соотношение (3)], тензорное или скалярное $(2n)$-точечное уравнение сводится к $(2n-2)$-точечному, если k-я и $(k+2)$-я точки совпадают, как, например, точки α и γ в уравнениях (11) и (11a). Затем по индукции находим, что $(2n)$-точечные уравнения содержат все низшие [т. е. все $(2n')$-точечные уравнения с $n' < n$].

Тензорные четырехточечные уравнения. Рассмотрим уравнение (11) при произвольных переменных точках γ и δ и двух фиксированных точках α и β. Тогда уравнение можно записать в виде

$$\underset{\gamma}{\omega_i}{}^{\overset{l}{\gamma}} \underset{\gamma\delta}{g_{lm}} \underset{\delta}{\hat{\omega}_n}{}^{\overset{m}{\delta}} = \delta_{in}, \tag{12}$$

где

$$\overset{l}{\underset{\gamma}{\omega_i}}{}^{\gamma} = \underset{\gamma\beta}{g_{ik}}\,\overset{kl}{g}{}^{\beta\gamma}, \quad \overset{m}{\underset{\alpha}{\hat{\omega}_n}}{}^{\delta} = \overset{mn}{g}{}^{\delta\alpha}.$$

Поскольку ω зависит только от точки γ, а $\hat{\omega}$ — только от δ, уравнения (12) определяют операцию окаймления, которая переводит $\underset{\gamma\delta}{g_{lm}}$ в δ_{lm} (*«плоское пространство»*). Наоборот, всякое поле, которое можно привести к такому виду, удовлетворяет (11), откуда видно, что эти тензорные четырехточечные уравнения характеризуют плоское пространство. То же выполняется для всех более высоких тензорных уравнений, так как в предыдущем параграфе было доказано, что четырехточечные уравнения содержатся в них и, очевидно, им всем удовлетворяет бивекторное поле, описывающее плоское пространство. Следовательно, все тензорные $(2n)$-точечные уравнения (с $n \geqslant 2$) эквивалентны друг другу.

Скалярное четырехточечное уравнение. Для скалярного случая мы не смогли найти общее решение, но отыскали частный класс решений. Рассмотрим бивекторное поле вида

$$\underset{\alpha\beta}{g_{ik}} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ 0 & 1 & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где γ_{lm} $(l < m)$—произвольные функции α и β. Поскольку $\overset{kl}{g}{}^{\beta\gamma}$, $\underset{\alpha\beta}{g_{ik}}$, $\overset{kl}{g}{}^{\beta\gamma}\ldots$ и т. д. имеют одинаковый вид, ясно, что каждое бивекторное поле типа (13) удовлетворяет скалярному четырехточечному уравнению. Однако тензорные четырехточечные уравнения не будут, вообще говоря, удовлетворяться такими полями.

Бивекторные поля типа (13) *вырождены* в том смысле, что они удовлетворяют также всем высшим скалярным уравнениям. Мы не смогли решить представляющийся нам чрезвычайно интересным вопрос, допускает ли скалярное четырехточечное уравнение какое-либо невырожденное решение.

§ 4. Бивекторное поле в едином пространстве

Если бы мы начали наше обсуждение в § 1 с предположения, что B и A — одинаковые векторные поля, мы бы пришли к *симметричному* тензору

$$T_{ik} = A_i A_k, \tag{14}$$

взяв произведение двух компонент A в той же точке $\mathfrak{R}$. Перемножение двух компонент A в двух различных точках привело бы к тензору

$$T_{\substack{ik\\ \alpha\beta}} = A_{\substack{i\\ \alpha}} A_{\substack{k\\ \beta}}. \tag{14a}$$

Этот частного вида бивектор (а также каждая сумма бивекторов такого типа) удовлетворяет условию симметрии

$$T_{\substack{ik\\ \alpha\beta}} = T_{\substack{ki\\ \beta\alpha}}. \tag{15}$$

(Только в *едином* пространстве это условие симметрии инвариантно. В силу нашего соглашения относительно $\{\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2\}$ левый индекс относится к $\mathfrak{R}_1$, правый — к $\mathfrak{R}_2$, но между точками $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ не существует инвариантных связей.)

Если мы преобразуем $T_{\substack{ik\\ \alpha\beta}}$ с помощью операций окаймления, то получим:

$$\overset{*}{T}_{\substack{ik\\ \alpha\beta}} = \omega_{\substack{i\\ \alpha}}{}^{\overset{l}{\alpha}} T_{\substack{lm\\ \alpha\beta}} \hat{\omega}_{\substack{k\\ \beta}}{}^{\overset{m}{\beta}} \tag{16}$$

и

$$\overset{*}{T}_{\substack{ki\\ \beta\alpha}} = \omega_{\substack{k\\ \beta}}{}^{\overset{m}{\beta}} T_{\substack{ml\\ \beta\alpha}} \hat{\omega}_{\substack{i\\ \alpha}}{}^{\overset{l}{\alpha}}, \tag{16a}$$

где ω и $\hat{\omega}$ относятся соответственно к первой и второй точкам. Условие симметрии (15) остается при этом преобразовании неизменным, если

$$\omega_i^k = \hat{\omega}_i^k, \tag{16б}$$

что и будет приниматься впредь.

Пусть в едином пространстве определен фундаментальный бивектор, удовлетворяющий условию

$$g_{\substack{ik\\ \alpha\beta}} = g_{\substack{ki\\ \beta\alpha}}. \tag{17}$$

Поскольку соотношения, обсуждавшиеся в предыдущих параграфах, инвариантны относительно *всех* преобразований окаймления (5), они заведомо инвариантны относительно более узкой группы, определенной соотношениями (16) и (16б). Это выполняется, в частности, для соотношений (3) и (3а) между ковариантными и контравариантными бивекторами.

Однако в едином пространстве полигональные уравнения допускают различные специализации. Рассмотрим сначала бивектор, когда α и β совпадают. Соответствующей операцией окаймления $g_{\substack{ik\\ \alpha\alpha}}$ можно преобразовать в

$$\overset{*}{g}_{\underset{\alpha\alpha}{ik}} \equiv \underset{\alpha}{\omega_{i}}{}^{\overset{l}{\alpha}} \underset{\alpha\alpha}{g_{lm}} \underset{\alpha}{\omega_{k}}{}^{\overset{m}{\alpha}} = \eta_{ik}, \tag{18}$$

где η_{ik} постоянны всюду в $\mathfrak{R}$. В частности, тензор η_{ik} можно выбрать в диагональной форме с диагональными элементами, равными ± 1. Как известно, число положительных и отрицательных элементов зависит только от $\underset{\alpha\alpha}{g_{lm}}$, так что поле $\underset{\alpha\alpha}{g_{lm}}$ обладает хорошо определенной *сигнатурой*, как и метрический тензор в теории относительности. Последующие рассмотрения справедливы при любом выборе η_{ik}.

Если тензор η_{ik} выбран, мы предполагаем, что бивекторное поле удовлетворяет уравнению:

$$\underset{\alpha\alpha}{g_{ik}} = \eta_{ik}. \tag{19}$$

Следовательно, мы допускаем лишь те операции окаймления, которые оставляют уравнение (19) неизменным, так что мы получаем

$$\eta_{ik} = \underset{\alpha}{\omega_{i}}{}^{\overset{l}{\alpha}} \eta_{lm} \underset{\alpha}{\omega_{k}}{}^{\overset{m}{\alpha}}$$

или

$$\underset{\alpha}{\omega}{}^{\overset{i}{\alpha}}{}_{m} \underset{\alpha}{\omega_{k}}{}^{\overset{m}{\alpha}} = \delta^{i}{}_{k}, \tag{20}$$

где

$$\underset{\alpha}{\omega}{}^{\overset{i}{\alpha}}{}_{m} = \eta^{ij} \underset{\alpha}{\omega_{j}}{}^{\overset{l}{\alpha}} \eta_{lm}, \qquad \eta^{ij}\eta_{jk} = \delta^{i}_{k}.$$

Из соотношения (20) следует, что $\underset{\alpha}{\omega}{}^{\overset{i}{\alpha}}{}_{m}$ — матрица *псевдоортогонального преобразования* (определенного тензором η_{ik}), которая еще может зависеть от α. Как и в предыдущем параграфе, мы полагаем, что по отношению к преобразованиям координат $\underset{\alpha\beta}{g_{ik}}$ ведут себя как скаляры.

Удобно пользоваться *смешанными* бивекторами, определенными равенствами

$$\underset{\beta}{g}{}^{\overset{i}{\alpha}}{}_{k} \equiv \eta^{il} \underset{\alpha\beta}{g_{lk}}, \qquad \underset{\alpha}{g_{i}}{}^{\overset{k}{\beta}} \equiv \eta^{kl} \underset{\alpha\beta}{g_{il}}. \tag{21}$$

Тогда условие симметрии (17) эквивалентно требованию

$$\underset{\beta}{g}{}^{\overset{i}{\alpha}}{}_{k} = \underset{\beta}{g_{k}}{}^{\overset{i}{\alpha}}, \tag{22}$$

в то время как операция окаймления задается равенствами

$$\overset{*}{g}{}^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{k}} = \omega^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\alpha}{l}}\, g^{\overset{l}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{m}}\, \omega_{\underset{\beta}{k}}{}^{\overset{m}{\beta}}. \tag{23}$$

Для двух совпадающих точек мы находим

$$g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\alpha}{k}} = \delta^{i}{}_{k}. \tag{21a}$$

Полигональные уравнения. Рассмотрим тензорные четырехточечные уравнения (11) для последовательности $\alpha\beta\gamma\delta\alpha$. Они выполняются тождественно, если α совпадает с γ или β совпадает с δ [ср. соотношение (3)]. В едином пространстве мы также можем отождествить две *следующие друг за другом* точки, например β и γ, δ и α. Это приводит к самым слабым условиям, содержащимся в тензорных четырехточечных уравнениях, а именно

$$\underset{\alpha\beta}{g_{ik}}\,\eta^{kl}\,\underset{\beta\alpha}{g_{lm}}\,\eta^{mn} = \delta_{i}^{n}. \tag{24}$$

Мы требуем, чтобы эти *двухточечные уравнения* выполнялись для фундаментального бивекторного поля. С помощью смешанного бивектора их можно записать в виде

$$\underset{\alpha}{g_{i}}{}^{\overset{l}{\beta}}\,\underset{\beta}{g_{l}}{}^{\overset{k}{\alpha}} = \delta_{i}{}^{k}, \quad g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{l}}\, g^{\overset{l}{\beta}}{}_{\underset{\alpha}{k}} = \delta^{i}{}_{k}, \tag{24a}$$

откуда видно, что матрица $(g^{\overset{i}{\beta}}{}_{\underset{\alpha}{k}})$ обратна матрице $(g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{k}})$. Из соотношения (24) мы находим для контравариантного бивектора, определенного соотношением (3),

$$g^{\overset{kl}{\beta\alpha}} = \eta^{ki}\eta^{lm}\underset{\beta\alpha}{g_{im}}. \tag{24б}$$

Условия симметрии (22) и двухточечные уравнения требуют

$$g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{l}}\,\underset{\alpha}{g_{k}}{}^{\overset{l}{\beta}} = \delta^{i}{}_{k}. \tag{25}$$

Обратно, условия симметрии следуют из (25) и (24а). Согласно соотношению (25), $g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{k}}$ представляет собой матрицу псевдоортогонального преобразования, элементы которой зависят от точек α и β.

Если в тензорных четырехточечных уравнениях совпадают только точки δ и α, мы получим более сильные условия, которые можно назвать *тензорными трехточечными уравнениями*:

$$W_i^n \equiv \underset{\alpha\beta}{g_{ik}}\, \overset{kl}{g^{\beta\gamma}}\, \underset{\gamma\alpha}{g_{lm}}\, \eta^{mn} = \delta_i^n. \tag{26}$$

Вместо этого можно написать, использовав уравнения (24б),

$$W^i{}_m \equiv \overset{i}{\underset{\beta}{g^{\alpha}{}_k}}\, \overset{k}{\underset{\gamma}{g^{\beta}{}_l}}\, \overset{l}{\underset{\alpha}{g^{\gamma}{}_m}} = \delta^i{}_m$$

$$(W^i{}_m = \eta^{ik}\eta_{ml} W_k{}^l). \tag{26a}$$

Покажем снова, что тензорные трехточечные уравнения характеризуют *плоское пространство*. Рассмотрим уравнения (26) для *фиксированного* α и произвольных β и γ. Тогда мы будем иметь

$$\overset{i}{\underset{\beta}{\omega^{\beta}{}_k}}\, \overset{k}{\underset{\gamma}{g^{\beta}{}_l}}\, \overset{l}{\underset{\gamma}{\omega_m{}^{\gamma}}} = \delta^i{}_m, \tag{27}$$

где

$$\overset{i}{\underset{\beta}{\omega^{\beta}{}_k}} = \overset{i}{\underset{\beta}{g^{\alpha}{}_k}} = \overset{i}{\underset{\beta}{g_k{}^{\alpha}}}, \qquad \overset{i}{\underset{\beta}{\omega^{\beta}{}_m}}\, \overset{m}{\underset{\beta}{\omega_k{}^{\beta}}} = \delta^i{}_k.$$

Следовательно, уравнения (27) определяют допустимый оператор окаймления [ср. соотношения (20)], который преобразует $\overset{k}{\underset{\beta}{g^{\alpha}{}_l}}$ в δ_l^k и $\underset{\alpha\beta}{g_{kl}}$ — в постоянный бивектор η_{kl}.

Очевидно, все высшие тензорные уравнения тогда тоже удовлетворяются.

Как и в случае двойного пространства, мы получаем, свертывая W_k^i, более слабое условие — *скалярное трехточечное уравнение*

$$W^i{}_i \equiv \overset{i}{\underset{\beta}{g^{\alpha}{}_k}}\, \overset{k}{\underset{\gamma}{g^{\beta}{}_l}}\, \overset{l}{\underset{\alpha}{g^{\gamma}{}_i}} = 4, \tag{28}$$

которое мы предположим выполненным в случае бивекторного поля. Высшие скалярные уравнения, очевидно, содержат уравнение (28). Но, как показал Зигель [1], уравнение (28) допускает решения, которые не удовлетворяют высшим уравнениям.

[1] C. L. Siegel. Частное сообщение.

Прежде чем более подробно обсуждать уравнение (28), сведем вместе уравнения поля в едином пространстве. При постоянных η_{ik} и с определениями

$$g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{k}} = \eta^{il} g_{\underset{\alpha\beta}{lk}}, \qquad g_{\underset{\alpha}{i}}{}^{\overset{k}{\beta}} = \eta^{kl} g_{\underset{\alpha\beta}{il}}$$

и

$$W^i_m = g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{k}}\, g^{\overset{k}{\beta}}{}_{\underset{\gamma}{l}}\, g^{\overset{l}{\gamma}}{}_{\underset{\alpha}{m}}, \tag{29}$$

мы имеем

$$g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\alpha}{k}} = \delta^i_k, \tag{I}$$

$$g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{k}} = g_{\underset{\beta}{k}}{}^{\overset{i}{\alpha}}, \tag{II}$$

$$g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{k}}\, g^{\overset{k}{\beta}}{}_{\underset{\alpha}{l}} = \delta^i{}_l, \tag{III}$$

$$W^i_i \equiv g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{k}}\, g^{\overset{k}{\beta}}{}_{\underset{\gamma}{l}}\, g^{\overset{l}{\gamma}}{}_{\underset{\alpha}{i}} = 4. \tag{IV}$$

(Уравнение I — это только удобная нормировка поля). Мы замечаем, что уравнение II можно заменить на

$$g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{k}}\, g_{\underset{\alpha}{l}}{}^{\overset{k}{\beta}} = \delta^i_l. \tag{IIa}$$

Хотя эти уравнения имеют мало общего с дифференциальными уравнениями гравитационного поля, они точно так же получены путем ослабления условий для «плоского» пространства ($g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{k}} = \delta^i{}_k$ в соответствующем представлении).

§ 5. Обсуждение уравнений поля. Уравнения в спинорной форме

1. Уравнения поля следует рассматривать раздельно для разных сигнатур η_{ik}.

Рассмотрим сначала *положительно определенный* тензор η_{ik}, т. е. $\eta_{ik} = \delta_{ik}$. В этом случае $g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{k}}$, а также W^i_k, — ортогональные матрицы.

Поскольку единственной ортогональной вещественной матрицей со следом, равным 4, является единичная матрица, в условии $W^i_i = 4$ содержится $W^i_k = \delta^i_k$. Другими словами, *скалярное* трехточечное уравнение содержит *тензорные* трехточечные уравнения, у которых, как мы показали, есть только тривиальные решения ($\underset{\alpha\beta}{g_{ik}}$ эквивалентно η_{ik}).

2. *Неопределенный тензор* η_{ik}. Будет рассматриваться подробно только η_{ik}, который является тензором *типа Минковского*:

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1, \qquad \eta_{44} = -1, \qquad \eta_{lm} = 0 \text{ при } l \neq m.$$

Остающийся случай рассматривается совершенно аналогичным образом и будет кратко обсужден в конце настоящей работы.

Поскольку в том случае, когда η_{ik} — тензор типа Минковского, $\overset{i}{\underset{\beta}{g^{\alpha}{}_k}}$ являются матрицами преобразований Лоренца, мы можем использовать спинорное исчисление. Оно основано на следующем. Допустим, что

$$\xi'^i = l^i_k \xi^k \tag{30}$$

представляет собой преобразование Лоренца, тогда

$$\eta_{ik}\xi'^i\xi'^k = \eta_{ik}\xi^i\xi^k.$$

Если мы введем комплексные координаты

$$\zeta^1 = \xi^4 + \xi^3, \qquad \zeta^2 = \xi^1 + i\xi^2, \qquad \zeta^3 = \xi^1 - i\xi^2, \qquad \zeta^4 = \xi^4 - \xi^3, \tag{31}$$

то найдем

$$\eta_{ik}\xi^i\xi^k = -(\zeta^1\zeta^4 - \zeta^2\zeta^3). \tag{31a}$$

Мы замечаем, что преобразованиям (31) соответствует *комплексная* операция окаймления с постоянной матрицей ω, которая приводит к отличному тензору η, определенному правой частью (31a). Хотя в предыдущих параграфах мы предполагали все величины вещественными, ясно, что все алгебраические соотношения останутся неизменными относительно этой комплексной операции окаймления.

Итак, мы заменим четыре координаты ζ^1, ζ^2, ζ^3, ζ^4 соответственно на ζ^{11}, ζ^{12}, ζ^{21}, ζ^{22}. Из равенств (31) следует, что

$$\zeta^{ml} = \overline{\zeta^{lm}} \qquad (l, m = 1, 2). \tag{31б}$$

Следовательно, ζ^{lm} определяет *эрмитову* матрицу Z 2-го ранга, определитель которой равен $(-\eta_{ik}\,\xi^i\xi^k)$ [ср. соотношение (31а)]. Поэтому каждое линейное преобразование ζ^{lm}, которое сохраняет эрмитов характер Z и оставляет ее определитель неизменным, является *вещественным* преобразованием Лоренца переменных ξ^m. Такого рода преобразование задается равенством

$$Z' = \Lambda Z \Lambda^+, \tag{32}$$

где Λ — *комплексная* матрица с определителем, равным единице, и Λ^+ — матрица, эрмитово-сопряженная ей. (Ясно, что преобразованием (32) эрмитова матрица Z переводится в эрмитову матрицу Z′ с тем же определителем.) Известно, что каждое преобразование Лоренца с определителем, равным $+1$, сохраняющее направление временноподобной координаты ξ^4, т. е. каждое *собственное* преобразование Лоренца, можно представить в виде (32). Поскольку $\underset{\alpha}{\overset{i}{g}}{}^{\alpha}{}_{k} = \delta^i_k$ и $\underset{\beta}{\overset{i}{g}}{}^{\alpha}{}_{k}$ — непрерывны, никаких преобразований Лоренца, кроме собственных, не встретится.

Преобразованию Лоренца (30) соответствует преобразование

$$\zeta^{lm} = L^{lm}{}_{rs}\,\zeta^{rs} \tag{33}$$

переменных ζ^{lm}. При преобразованиях типа (32) мы, кроме того, имеем

$$L^{lm}{}_{rs} = \lambda^l{}_r \overline{\lambda^m{}_r}, \tag{33a}$$

где $\lambda^l{}_r\,(l, r = 1, 2)$ — матричные элементы Λ.

Чтобы использовать эти соотношения в наших уравнениях поля, мы должны подставить $\underset{\beta}{\overset{i}{g}}{}^{\alpha}{}_{k}$ в $l^i{}_k$. Согласно (33а), заданное преобразование Лоренца не определяет однозначно спинорную матрицу Λ, поскольку как Λ, так и $(-\Lambda)$ удовлетворяют всем необходимым требованиям. Предположим теперь, что бивектор g непрерывным образом зависит от α и β и что пространство $\mathfrak{R}$ односвязно. Тогда матрица Λ определена однозначно, если мы требуем, чтобы она также непрерывно зависела от α и β и сводилась к единичной матрице при $\alpha = \beta$ (поскольку $\underset{\alpha}{\overset{i}{g}}{}^{\alpha}{}_{k} = \delta^i{}_k$).

Из соотношения (33а) мы заключаем, что

а) произведению матриц L отвечает произведение связанных с ними матриц Λ (в том же порядке);

б) операция окаймления задается соотношением

$$\overset{*}{\underset{\alpha\beta}{\Lambda}} = \underset{\alpha}{\Omega}\underset{\alpha\beta}{\Lambda}\underset{\beta}{\Omega^{-1}};$$

в) след матриц L равен квадрату модуля следа Λ. В самом деле,

$$l_i^i = L_{lm}^{lm} = \lambda_l^l \overline{\lambda}_m^m = |\lambda_1^1 + \lambda_2^2|^2 = |\operatorname{tr}\Lambda|^2. \tag{34}$$

Мы можем переписать теперь уравнения поля I—IV в спинорных обозначениях. Введя спинорные матрицы, мы уже удовлетворили уравнению IIa. Поэтому остается рассмотреть лишь уравнения I, III и IV. Если мы обозначим через $\underset{\alpha\beta}{\Lambda}$ спинорную матрицу, отвечающую $\overset{\alpha}{\underset{\beta}{g}}{}^i{}_k$, то найдем для W_k^i спинорную матрицу [см. (29)]

$$\Phi = \underset{\alpha\beta}{\Lambda}\underset{\beta\gamma}{\Lambda}\underset{\gamma\alpha}{\Lambda}. \tag{35}$$

Следовательно, вместо уравнений I, III, IV мы получаем

$$\det \underset{\alpha\beta}{\Lambda} = 1, \tag*{0*}$$

$$\underset{\alpha\alpha}{\Lambda} = 1, \tag*{I*}$$

$$\underset{\alpha\beta}{\Lambda}\underset{\beta\alpha}{\Lambda} = 1, \tag*{III*}$$

$$|\operatorname{tr}(\underset{\alpha\beta}{\Lambda}\underset{\beta\gamma}{\Lambda}\underset{\gamma\alpha}{\Lambda})| = 2. \tag*{IV*}$$

Уравнение IV* следует из равенств (34) и (35).

Мы можем заменить уравнение III* на условие симметрии для матричных элементов $\underset{\alpha\beta}{\Lambda}$. Положим

$$\underset{\alpha\beta}{\Lambda} = \begin{pmatrix} a_{\alpha\beta} & b_{\alpha\beta} \\ c_{\alpha\beta} & d_{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det \Lambda = 1$, мы получаем

$$\underset{\alpha\beta}{\Lambda^{-1}} = \begin{pmatrix} d_{\alpha\beta} & -b_{\alpha\beta} \\ -c_{\alpha\beta} & a_{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$

Согласно III*, $\underset{\beta\alpha}{\Lambda} = \underset{\alpha\beta}{\Lambda^{-1}}$, следовательно,

$$d_{\beta\alpha} = a_{\alpha\beta}, \quad b_{\beta\alpha} = -b_{\alpha\beta}, \quad c_{\beta\alpha} = -c_{\alpha\beta}. \tag{36}$$

Очень просто построить решения уравнений 0*, I*, II*, III*, IV*. Мы поступим таким же образом, как и в § 3 [ср. (13)], и положим

$$\underset{\alpha\beta}{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & b_{\alpha\beta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

где $b_{\beta\alpha} = -b_{\alpha\beta}$, согласно (36). При надлежащем выборе $b_{\alpha\beta}$ тензорные трехточечные уравнения $\underset{\alpha\beta}{\Lambda}\,\underset{\beta\gamma}{\Lambda}\,\underset{\gamma\alpha}{\Lambda} = 1$ не будут удовлетворены. Снова решение (37) вырождено, поскольку оно удовлетворяет всем высшим скалярным уравнениям.

Кроме того, видно, что не только абсолютная величина $\operatorname{tr}\Phi$, но сам $\operatorname{tr}\Phi$ равен 2. Следовательно, решение (37) удовлетворяет более сильному условию

$$\operatorname{tr}(\underset{\alpha\beta}{\Lambda}\,\underset{\beta\gamma}{\Lambda}\,\underset{\gamma\alpha}{\Lambda}) = 2. \tag{V*}$$

Можно показать, что условие V* соответствует в наших прежних обозначениях уравнению IV и дополнительному условию

$$W^i_k W^k_i = 4.$$

Зигель[2] нашел общее решение системы I—V (или эквивалентных уравнений 0*, I*, II*, III*, V*) в предположении, что матричные элементы Λ являются аналитическими функциями координат. Среди них есть невырожденные решения, которые не удовлетворяют ни одному из высших скалярных уравнений.

Бивекторные поля, которые удовлетворяли бы уравнениям I—IV, но не удовлетворяли условию V, еще не известны.

3. Последний случай выделен равенствами $\eta_{11} = \eta_{33} = 1$, $\eta_{22} = \eta_{44} = -1$, $\eta_{lm} = 0$ при $l \neq m$. Его также можно изучать методами спинорного исчисления. Введем *вещественные* координаты

$$\zeta' = \xi^4 + \xi^3, \qquad \zeta^2 = \xi^1 + \xi^2, \qquad \zeta^3 = \xi^1 - \xi^2, \qquad \zeta^4 = \xi^4 - \xi^3. \tag{38}$$

Уравнение (31a) остается пригодным, но элементы матрицы Z теперь *вещественны* и не удовлетворяют каким-либо условиям симметрии. Следовательно, псевдоортогональное преобразование переменных ξ соответствует преобразованиям

$$Z' = \Lambda Z \widetilde{M} \quad (\det \Lambda = \det M = 1)$$

[2] Не опубликовано. Мы благодарны проф. Зигелю за сообщение нам своих результатов.

с вещественными матрицами Λ и M (здесь $\widetilde{M}$ — транспонированная матрица). Вместо равенства (33a) мы имеем теперь

$$L_{rs}^{lm} = \lambda_r^l \mu_s^m,$$

и уравнения поля будут иметь вид

$$\det \underset{\alpha\beta}{\Lambda} = \det \underset{\alpha\beta}{M} = 1, \tag{0**}$$

$$\underset{\alpha\alpha}{\Lambda} = 1; \qquad \underset{\alpha\alpha}{M} = 1, \tag{I**}$$

$$\underset{\alpha\beta}{\Lambda}\,\underset{\beta\alpha}{\Lambda} = 1;\, \underset{\alpha\beta}{M}\,\underset{\beta\alpha}{M} = 1, \tag{III**}$$

$$\operatorname{tr}(\underset{\alpha\beta}{\Lambda}\,\underset{\beta\gamma}{\Lambda}\,\underset{\gamma\alpha}{\Lambda}) \cdot \operatorname{tr}(\underset{\alpha\beta}{M}\,\underset{\beta\gamma}{M}\,\underset{\gamma\alpha}{M}) = 4. \tag{IV**}$$

Выбирая для $\underset{\alpha\beta}{\Lambda}$ и $\underset{\alpha\beta}{M}$ матрицы вида (37), мы найдем вырожденное решение, которое, кроме того, удовлетворяет условию

$$\operatorname{tr}(\underset{\alpha\beta}{\Lambda}\,\underset{\beta\gamma}{\Lambda}\,\underset{\gamma\alpha}{\Lambda}) = \operatorname{tr}(\underset{\alpha\beta}{M}\,\underset{\beta\gamma}{M}\,\underset{\gamma\alpha}{M}) = 2. \tag{V**}$$

Подставляя *вещественные* решения Зигеля как для Λ, так и для M, мы получаем общие невырожденные решения уравнений I—V.

Поступила 23 августа 1943 г.

БИВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ. II*

В предыдущей работе, совместно с В. Баргманом[1], я развил теорию симметричных бивекторов. Эта теория во многом аналогична теории римановой метрики. Основное отличие заключается в том, что фундаментальные переменные поля $\underset{\alpha\beta}{g_{ik}}$, в отличие от римановых g_{ik}, зависят от координат двух точек.

В настоящей работе показано, что совершенно так же, как в случае инфинитезимальной теории, эту теорию можно сильно упростить, если понятия и соотношения этой теории разделить на понятия и соотношения, которые основаны исключительно на аффинной связи, и те, для которых аффинная связь задается гипотезами о структуре поля.

§ 1. Аффинная связь

Пусть $\overset{i}{A}{}^{\alpha}$ — произвольный контравариантный вектор в точке α. Мы сопоставляем этому вектору вектор $\overset{k}{A}{}^{\beta}$ в точке β (для любых β) при помощи следующего уравнения:

$$\overset{k}{A}{}^{\beta} = g^{\overset{k}{\beta}}{}_{\underset{\alpha}{i}}\, \overset{i}{A}{}^{\alpha}, \tag{1}$$

где $g^{\overset{k}{\beta}}{}_{\underset{\alpha}{i}}$ — (смешанный) бивектор, который характеризует (не инфинитезимальную) аффинную связь.

* *Bivector Fields.* Ann. Math., 45, 1944, 15—23.

[1] A. Einstein, V. Bargmann. Ann. Math., 45, 1944, 1. (Статья 124.— *Ред.*).

Предположим, что аналогичным образом линейно связаны и ковариантные векторы:

$$A_{\underset{\beta}{k}} = A_{\underset{\alpha}{i}} h^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{k}}. \tag{2}$$

Естественно задать эти соотношения априори следующими условиями.

1. Если β совпадает с α, то смещенный вектор совпадает с первоначальным. Согласно соотношениям (1) и (2), это выражается уравнениями

$$g^{\overset{k}{\alpha}}{}_{\underset{\alpha}{i}} = \delta^{k}{}_{i}, \tag{1a}$$

$$h^{\overset{k}{\alpha}}{}_{\underset{\alpha}{i}} = \delta^{k}{}_{i}. \tag{2a}$$

2. Вектор не меняется, если он переносится из точки α в точку β и затем обратно из β в α. Это приводит к соотношениям

$$g^{\overset{k}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{l}}\; g^{\overset{l}{\beta}}{}_{\underset{\alpha}{i}} = \delta^{k}{}_{i}, \tag{1б}$$

$$h^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{k}}\; h^{\overset{k}{\beta}}{}_{\underset{\alpha}{l}} = \delta^{i}{}_{l}. \tag{2б}$$

3. Скалярное произведение ковариантного и контравариантного векторов является инвариантом относительно аффинной связи. Из соотношений (1) и (2) мы получаем

$$A^{\overset{k}{\beta}} B_{\underset{\beta}{k}} = h^{\overset{l}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{k}}\; g^{\overset{k}{\beta}}{}_{\underset{\alpha}{i}}\; A^{\overset{i}{\alpha}} B_{\underset{\alpha}{l}}.$$

Следовательно, необходимым и достаточным условием выполнения условия 3 будет соотношение

$$h^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{k}}\; g^{\overset{k}{\beta}}{}_{\underset{\alpha}{l}} = \delta^{i}{}_{l}. \tag{3}$$

Если мы умножим обе части равенства (3) на $g^{\overset{l}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{m}}$, то из соотношения (1а) получим

$$h^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{m}} = g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{m}}. \tag{4}$$

Собирая вместе предыдущие уравнения, мы можем характеризовать аффинную связь следующими соотношениями:

$$\overset{k}{A}{}^{\beta} = \overset{k}{g}{}^{\beta}{}_{\underset{\alpha}{i}} \overset{i}{A}{}^{\alpha}, \tag{1}$$

$$A_{\underset{\beta}{k}} = A_{\underset{\alpha}{i}} \overset{i}{g}{}^{\alpha}{}_{\underset{\beta}{k}}, \tag{2в}$$

где $\overset{i}{g}{}^{\alpha}{}_{\underset{\beta}{k}}$ удовлетворяет условиям

$$\overset{l}{g}{}^{\alpha}{}_{\underset{\alpha}{i}} = \delta^l{}_i \tag{1а}$$

$$\overset{l}{g}{}^{\alpha}{}_{\underset{\beta}{k}} \overset{k}{g}{}^{\beta}{}_{\underset{\alpha}{i}} = \delta^l{}_i, \tag{1б}$$

или, в матричной форме,

$$\underset{\alpha\alpha}{g} = 1, \tag{1а$'$}$$

$$\underset{\alpha\beta}{g}\,\underset{\beta\alpha}{g} = 1, \tag{1б$'$}$$

Инвариантность по отношению к «окаймлению». Полученные алгебраические соотношения кроме инвариантности относительно группы непрерывных преобразований обладают инвариантностью относительно операции *«окаймления»*. Пусть $\overset{k}{\omega}{}^{\alpha}{}_{\underset{\alpha}{i}}$ — произвольный смешанный тензор с отличным от нуля определителем $|\overset{k}{\omega}{}^{\alpha}{}_{\underset{\alpha}{i}}|$. С помощью $\overset{k}{\omega}{}^{\alpha}{}_{\underset{\alpha}{i}}$ мы можем сопоставить нашему векторному полю $\overset{i}{A}{}^{\alpha}$ другое векторное поле $\overset{*i}{A}{}^{\alpha}$, определенное равенством

$$\overset{*k}{A}{}^{\alpha} = \overset{k}{\omega}{}^{\alpha}{}_{\underset{\alpha}{i}} \overset{i}{A}{}^{\alpha}, \qquad |\overset{k}{\omega}{}^{\alpha}{}_{\underset{\alpha}{i}}| \neq 0. \tag{5}$$

Аналогично, для ковариантного вектора будем иметь

$$\overset{*}{A}_{\underset{\alpha}{k}} = A_{\underset{\alpha}{l}} \overset{l}{\hat{\omega}}{}^{\alpha}{}_{\underset{\alpha}{k}}, \qquad |\overset{l}{\hat{\omega}}{}^{\alpha}{}_{\underset{\alpha}{k}}| \neq 0.$$

Сходным образом бивектору $\overset{i}{g}{}^{\alpha}{}_{\underset{\beta}{k}}$ мы сопоставляем бивектор

$$\overset{*l}{g}{}^{\alpha}{}_{\underset{\beta}{m}} = \overset{l}{\omega}{}^{\alpha}{}_{\underset{\alpha}{k}} \overset{k}{g}{}^{\alpha}{}_{\underset{\beta}{i}} \overset{i}{\hat{\omega}}{}^{\beta}{}_{\underset{\beta}{m}}. \tag{6}$$

Эту процедуру мы называем *«окаймлением»*. Уравнение (1а) требует, чтобы δ^k_i не менялось при окаймлении (т. е. было инвариантом относительно окаймления):

$$\omega^{\overset{l}{\alpha}}{}_{\underset{\alpha}{i}}\,\hat{\omega}^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\alpha}{m}} = \delta^{l}{}_{m}. \tag{7}$$

Из уравнений (5) — (7) следует, что уравнения (1), (2в), (1а) и (1б) не меняются при окаймлении. С этого момента мы будем допускать лишь уравнения, не меняющиеся при окаймлении. Если одно поле можно получить из другого с помощью операции окаймления, мы рассматриваем их как различные описания одного и того же поля. Как было показано в предыдущей работе, мы можем сочетать каждое преобразование координат с окаймлением так, чтобы $g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{k}}$ преобразовывались как скаляры. То же самое справедливо для любого тензора и бивектора.

Выражение

$$g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{k}}\, g^{\overset{k}{\beta}}{}_{\underset{\gamma}{l}}\, g^{\overset{l}{\gamma}}{}_{\underset{\alpha}{m}}$$

преобразуется путем окаймления [по (7)] в

$$\omega^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\alpha}{l}}\, g^{\overset{l}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{m}}\, g^{\overset{m}{\beta}}{}_{\underset{\gamma}{n}}\, g^{\overset{n}{\gamma}}{}_{\underset{\alpha}{p}}\, \hat{\omega}^{\overset{p}{\alpha}}{}_{\underset{\alpha}{m}}.$$

Отсюда видно, что мы можем сформулировать здесь также *тензорные* и *скалярные трехточечные уравнения* (в матричной форме)

$$\underset{\alpha\beta}{g}\,\underset{\beta\gamma}{g}\,\underset{\gamma\alpha}{g} - 1 = 0 \tag{8}$$

и

$$\mathrm{tr}\,(\underset{\alpha\beta}{g}\,\underset{\beta\gamma}{g}\,\underset{\gamma\alpha}{g}) - N = 0 \tag{9}$$

как инвариантные условия для поля (N — число измерений). Так же как и в предыдущей работе, условие (8) заключает в себе условие того, что пространство плоское. Это значит, что окаймлением мы можем привести $g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{k}}$ к виду δ^i_k. Ослабляя условия (1а), (1б) и (8), которые определяют плоское пространство, можно выбрать уравнения (1а), (1б) и (9). Эти уравнения можно рассматривать как возможный выбор законов поля для бивекторного поля.

§ 2. Поля с симметрией

Конечная аффинная связь характеризуется *смешанным* бивектором. Последний не обладает инвариантными симметричными свойствами. С другой стороны, для ковариантного (или контравариантного) бивектора условие симметрии

$$g_{\substack{ik\\ \alpha\beta}} = \pm g_{\substack{ki\\ \beta\alpha}}$$

инвариантно. Всякий раз, когда смешанному бивектору можно однозначно сопоставить ковариантный бивектор, на поле можно наложить условие симметрии. Теперь мы хотим показать, что такое соответствие всегда существует.

Мы определяем вместе с симметричным бивектором ковариантный и контравариантный бивекторы, которые связаны соотношением

$$g_{\substack{ik\\ \alpha\beta}}\, g^{\substack{kl\\ \beta\alpha}} = \delta^{l}_{i}. \tag{10}$$

Определим отношение этих бивекторов к аффинной связи $g^{\substack{i\\ \alpha}}_{\substack{k\\ \beta}}$ условиями

$$g^{\substack{i\\ \alpha}}_{\substack{k\\ \beta}} = g^{\substack{il\\ \alpha\alpha}}\, g_{\substack{lk\\ \alpha\beta}} = g^{\substack{il\\ \alpha\beta}}\, g_{\substack{lk\\ \beta\beta}} \tag{11}$$

и обратными соотношениями

$$\left.\begin{aligned} g_{\substack{ik\\ \alpha\beta}} &= g_{\substack{il\\ \alpha\alpha}}\, g^{\substack{l\\ \alpha}}_{\substack{k\\ \beta}},\\ g^{\substack{ik\\ \alpha\beta}} &= g^{\substack{i\\ \alpha}}_{\substack{l\\ \beta}}\, g^{\substack{lk\\ \beta\beta}}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Теперь мы должны показать, что уравнения (10)—(12) совместны. Возьмем сначала $g_{\substack{ik\\ \alpha\alpha}}$ произвольным, а $g^{\substack{ik\\ \alpha\alpha}}$ из соотношения $g_{\substack{il\\ \alpha\alpha}}\, g^{\substack{lk\\ \alpha\alpha}} = \delta^{i}_{k}$. Тогда уравнения (12) определяют бивекторы $g_{\substack{ik\\ \alpha\beta}}$ и $g^{\substack{ik\\ \alpha\beta}}$, и мы должны лишь показать, что они удовлетворяют уравнениям (10) и (11). Подставив правую часть (12) в (10), мы видим из соотношения (1б), что уравнение (10) выполняется. Умножая первое из уравнений (12) на $g^{\substack{mi\\ \alpha\alpha}}$, мы получаем первое из уравнений (11). Таким же образом получаем второе уравнение (11) из второго уравнения (12).

После определения этих несмешанных бивекторов мы можем ограничить поле инвариантным условием симметрии

$$g_{\substack{ik\\ \alpha\beta}} = \pm g_{\substack{ki\\ \beta\alpha}}.$$

В соответствии с этим можно предположить, что поле описывается приведенным способом при помощи ковариантного симметричного (соответственно, антисимметричного) бивектора.

Этому добавочному условию для поля соответствует в теории Римана условие, чтобы коэффициенты Кристоффеля Г в аффинной связи могли выражаться через симметричный тензор и его первые производные.

В обоих случаях симметрии мы можем путем окаймления сделать $\underset{\alpha\alpha}{g_{ik}}$ независящим от координат. Выразим это, полагая

$$\left.\begin{aligned} \underset{\alpha\alpha}{g_{ik}} &= \eta_{ik}, \\ \overset{ik}{g^{\alpha\alpha}} &= \eta^{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

В выборе η у нас есть значительная свобода. Естественно выбрать окаймления таким образом, чтобы η_{ik} оставалось неизменным. Два по-разному выбранных постоянных тензора η приводят к двум различным теориям, если только их нельзя получить друг из друга путем окаймления.

Два типа симметрии $\underset{\alpha\beta}{g_{ik}}$ дают две разные теории; в предыдущей работе мы рассмотрели только одну из них.

Случай 1. $\underset{\alpha\beta}{g_{ik}} = \underset{\beta\alpha}{g_{ki}}$ (и следовательно, $\eta_{ik} = \eta_{ki}$). Тензоры $\underset{\alpha\alpha}{g_{ik}}$ и η_{ik} определяют вместе с вектором a^i не меняющиеся при окаймлении квадратичные формы

$$\underset{\alpha\alpha}{g_{ik}} \overset{i}{a^{\alpha}} \overset{k}{a^{\alpha}}$$

и

$$\eta_{ik} a^i a^k$$

соответственно.

Отсюда следует, что сигнатура η_{ik} не меняется при окаймлении и это (если не считать симметрии) единственное инвариантное относительно окаймления свойство η_{ik}. Поэтому мы можем положить, не ограничивая теорию,

$$\eta_{ik} (= \eta^{ik}) = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

В соответствии с этим мы должны ограничиться такими окаймлениями, которые оставляют (14) неизменным. Это — *псевдоортогональные преобразования*, 6 параметров которых произвольным образом, но непрерывно зависят от координат.

Случай 2. $\underset{\alpha\beta}{g_{ik}} = -\underset{\beta\alpha}{g_{ki}}$ (и следовательно, $\eta_{ik} = -\eta_{ki}$). В этом случае любой антисимметричный тензор η можно преобразовать путем окаймления с надлежащим ω в любой другой антисимметричный тензор. По этой причине мы без ограничения общности можем написать (в четырехмерном случае)

$$\eta_{ik} (= \eta^{ki}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Здесь мы должны сделать одно замечание. Уже в случае релятивистской теории гравитации мы можем задать вопрос, должны ли мы требовать инвариантности наших уравнений только относительно преобразований. которые можно построить из инфинитезимальных преобразований, или же мы должны допускать также преобразования с отрицательным якобианом, т. е. *отражения*

$$\overset{*}{x}{}^1 = -x^1, \quad \overset{*}{x}{}^2 = x^2, \quad \overset{*}{x}{}^3 = x^3, \quad \overset{*}{x}{}^4 = x^4,$$

которые нельзя построить из инфинитезимальных преобразований. В случае релятивистской теории гравитации этот вопрос несуществен, поскольку все уравнения в последней инвариантны относительно отражений. Однако в нашем случае, когда мы рассматриваем антисимметричное поле, этот вопрос становится важным. Причина этого заключается в том, что неинвариантный относительно отражений тензор η_{ik} входит явно в уравнения. Другими словами, должны ли мы допускать преобразования и окаймления с отрицательным определителем? Благодаря нашему способу рассмотрения преобразований координат достаточно рассмотреть только окаймления.

Рассмотрим два случая:

$$\eta_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \eta_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Эти тензоры можно преобразовать друг в друга окаймлением:

$$\overset{\circ}{\omega}{}^i_k = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Это окаймление нельзя получить из бесконечно малых окаймлений $(\delta^i_k + o^i_k)$.

Только в том случае, если допустить окаймления с отрицательным определителем, будет выполнено сделанное ранее утверждение, что тензор (15) описывает общий случай.

Уравнения теории при фиксированном η не инвариантны относительно отражений.

Из уравнения (1б) и свойства антисимметрии [2] получаем

$$\delta^i{}_l = \overset{i}{g}{}^{\alpha}{}_{\underset{\beta}{k}}\, \overset{k}{g}{}^{\beta}{}_{\underset{\alpha}{l}} = \overset{i}{g}{}^{\alpha}{}_{\underset{\beta}{k}}\, \eta^{kk'} \overset{k'l}{g}{}^{\beta\alpha} = -\overset{i}{g}{}^{\alpha}{}_{\underset{\beta}{k}}\, \eta^{kk'} \underset{\alpha\beta}{g_{lk'}} = -\overset{i}{g}{}^{\alpha}{}_{\underset{\beta}{k}}\, \eta^{kk'} \eta_{ll'}\, \overset{l'}{g}{}^{\alpha}{}_{\underset{\beta}{k'}},$$

или эквивалентные уравнения

$$\eta^{il} = \overset{i}{g}{}^{\alpha}{}_{\underset{\beta}{k}}\, \overset{l}{g}{}^{\alpha}{}_{\underset{\beta}{k'}}\, \eta^{kk'}.$$

Матрица окаймления удовлетворяет уравнениям того же вида. В силу этих шести уравнений лишь *десять* компонент $\overset{i}{g}{}^{\alpha}{}_{\underset{\beta}{k}}$ независимы и, соответственно, группа операторов окаймления зависит от 10 параметров.

Этой структуре поля соответствует инфинитезимальная геометрия, в которой в качестве фундаментальной величины, описывающей поле, вводится антисимметричный тензор (вместо симметричного метрического тензора g_{ik}).

§ 3. Уравнения полей, удовлетворяющих условию симметрии

Мы можем уточнить условия, выраженные уравнениями поля (1а), (1б) и (9), введя новое условие, чтобы бивекторное поле удовлетворяло одному из условий симметрии, сформулированных в § 2.

Это достигается, если вместе с соответствующими ограничениями на группу окаймлений положить

$$\underset{\alpha\beta}{g_{ik}} = \eta_{il}\, \overset{l}{g}{}^{\alpha}{}_{\underset{\beta}{k}}$$

и

случай 1	случай 2
$\underset{\alpha\beta}{g_{ik}} = +\underset{\beta\alpha}{g_{ki}}$,	$\underset{\alpha\beta}{g_{ik}} = -\underset{\beta\alpha}{g_{ki}}$

[2] Рассматривая определители, мы найдем ниже, что в антисимметричном случае пространство должно иметь четное число измерений.

$$\eta_{ik}=\begin{bmatrix} \pm1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm1 \end{bmatrix}, \quad \eta_{ik}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В случае 1, как и в теории Римана, выбор сигнатуры остается свободным.

§ 4. Обобщенная структура пространства

Всю излагавшуюся до сих пор теорию можно обобщить следующим образом. В § 1 мы ограничили аффинную связь тремя условиями. Третье из них, выражающее инвариантность скалярного произведения контравариантного тензора на ковариантный по отношению к смещениям, мы сохраним. Но попробуем опустить второе и (для пробы) первое условие. Мы увидим, что это можно сделать, не нарушая по существу формальных связей.

При этом уравнения (1) и (2), а с ними уравнение (3) останутся неизменными. Однако от уравнений (1а), (2а), (1б), (2б) и (4) следует отказаться. Уравнения, определяющие окаймление, так же как и уравнения (6) и (7), еще выполняются. Что же будет с уравнениями (8) и (9)? Уравнение

$$\overset{i}{\underset{\beta}{g}}{}^{\alpha}{}_{k}\,\overset{k}{\underset{\gamma}{g}}{}^{\beta}{}_{l}-\overset{i}{\underset{\gamma}{g}}{}^{\alpha}{}_{l}=0 \tag{8а}$$

ковариантно. Умножая это уравнение на $\overset{l}{\underset{\alpha}{h}}{}^{\gamma}_{m}$ и используя условие (3), получаем

$$\overset{i}{\underset{\beta}{g}}{}^{\alpha}{}_{k}\,\overset{k}{\underset{\gamma}{g}}{}^{\beta}{}_{l}\,\overset{l}{\underset{\alpha}{h}}{}^{\gamma}{}_{m}=\delta^{i}{}_{m}. \tag{8б}$$

Это уравнение, взятое в фиксированной точке α, показывает, что бивектор $\overset{k}{\underset{\gamma}{g}}{}^{\beta}{}_{l}$ можно преобразовать в $\delta^{i}{}_{m}$ окаймлением. Это означает, что уравнение (8а), или (8б), характеризует «плоское» пространство. Взяв след, мы получим из уравнения (8б)

$$\overset{i}{\underset{\beta}{g}}{}^{\alpha}{}_{k}\,\overset{k}{\underset{\gamma}{g}}{}^{\beta}{}_{l}\,\overset{l}{\underset{\alpha}{h}}{}^{\gamma}{}_{i}-N=0. \tag{9а}$$

Чтобы стало возможным ввести условие симметрии для поля, мы выразим смешанный бивектор $\underset{\beta}{\overset{i}{g^{\alpha}{}_{k}}}$ через несмешанные бивекторы $\underset{\alpha\beta}{g_{ik}}$, $\overset{ik}{g^{\alpha\beta}}$, связанные друг с другом уравнением

$$\overset{il}{g^{\alpha\beta}}\,\underset{\beta\alpha}{g_{lk}} = \delta^{i}_{k}. \tag{10a}$$

Выражение для $\underset{\beta}{\overset{i}{g^{\alpha}{}_{k}}}$ и $\underset{\beta}{\overset{i}{h^{\alpha}{}_{k}}}$ можно записать в следующем виде:

$$\underset{\beta}{\overset{i}{g^{\alpha}{}_{k}}} = \overset{il}{g^{\alpha\alpha}}\,\underset{\alpha\beta}{g_{lk}}, \qquad \underset{\beta}{\overset{i}{g^{\alpha}{}_{k}}} = \overset{il}{g^{\alpha\beta}}\,\underset{\beta\beta}{g_{lk}}. \tag{11a}$$

Нетрудно проверить, что эти уравнения согласуются с соотношением (3).

В частном случае совпадения α и β из уравнений (11a) и (10a) следует, что

$$\underset{\alpha}{\overset{i}{g^{\alpha}{}_{k}}} = \delta^{i}{}_{k}. \tag{1a}$$

Это означает, что условие 1 § 1 мы должны сохранить.

Упомянутое условие симметрии можно ввести на основе уравнений (10a) и (11a).

Как показано в этом параграфе, уравнение (9a) является обобщением (ослаблением) требования, чтобы пространство было плоским; это требование обходит условие 2 [уравнение (1б)]. Однако это является формальным доводом против выбора (9a) [или (9)] в качестве уравнения поля. Переменные по́ля g обладают двумя индексами и зависят от координат двух точек пространства, тогда как левая часть (9) является скаляром и зависит от координат трех точек пространства. Можно ли найти уравнение поля, левая часть которого была бы бивектором и которое было бы обобщением (8a)? В следующем параграфе будет показано, что такое уравнение существует.

§ 5. Инвариантный объем. Уравнение поля

Величина

$$\sqrt{\pm\,|\underset{\alpha\alpha}{g_{ik}}|}\,dx^1\,dx^2\,dx^3\,dx^4\ (= d\tau)$$

инвариантна по отношению ко всем преобразованиям координат, но по отношению к операциям окаймления — только с определителем ± 1. Ограничимся только такими операциями. Тогда группа определяется $d\tau$ как своим инвариантом. Это ограничение не требует существенного видоизменения формализма, изложенного в предыдущем параграфе.

Однако таким ограничением группы мы достигаем возможности получить из уравнения (8а) ковариантное уравнение желаемого характера (путем интегрирования по $\underset{\beta}{x}$). Область интегрирования G нужно определить инвариантным образом. Тогда мы получим уравнение

$$\int\limits_G \left(g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{k}}\, g^{\overset{k}{\beta}}{}_{\underset{\gamma}{l}} - g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\gamma}{l}} \right) d\underset{\beta}{\tau} = 0. \tag{16}$$

В случае конечного пространства нам следует распространить интегрирование на все пространство — это единственный инвариантный выбор. В случае бесконечного пространства мы должны интегрировать по всему пространству, что включает в себя переход к пределу.

В уравнении (16) смешанный тензор g определяется через несмешанные тензоры g, согласно уравнениям (10а) или (11а). Эти несмешанные тензоры g удовлетворяют условию симметрии.

Нормировка $\underset{\alpha\alpha}{g_{ik}}$, согласно § 3, еще возможна, но не только путем окаимления.

Добавление при корректуре. В. Паули и В. Баргман (не опубликовано.— *Ред.*) недавно показали, что уравнение (16) также допускает решения лишь для «плоского пространства». Поэтому кажется более естественным вместо уравнения (16) рассматривать уравнение поля:

$$\int\limits_G g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\beta}{k}}\, g^{\overset{k}{\beta}}{}_{\underset{\gamma}{l}}\, d\underset{\beta}{\tau} - g^{\overset{i}{\alpha}}{}_{\underset{\gamma}{l}} = 0.$$

Это уравнение не упоминалось в настоящей работе, поскольку ему не удовлетворяют «плоские» поля.

В настоящее время автор совместно с В. Паули пытается выяснить, имеет ли это уравнение нетривиальные решения.

Поступила 23 августа 1943 г.

Больше работ на эту тему опубликовано не было. В новом варианте единой теории рассматривался комплексный метрический тензор (статья 127).

126

О „КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ“*

Дополнение ко второму изданию работы «Сущность теории относительности»

С момента первого издания этой небольшой книжки в теории относительности были получены некоторые новые результаты. На нескольких из них мы здесь кратко остановимся.

Первым шагом вперед явилось окончательное доказательство существования красного смещения спектральных линий, вызываемого (отрицательным) гравитационным потенциалом в месте возникновения лучей (см. стр. 64). Доказательство стало возможным после открытия так называемых «звезд-карликов», средняя плотность которых превышает плотность воды примерно в 10^4 раз. Для таких звезд (например, темный спутник Сириуса), масса и радиус которых могут быть определены [1], теория предсказывает красное смещение примерно в 20 раз большее, чем у Солнца. И действительно, было показано, что оно имеет ожидаемый порядок величины.

Второе достижение, о котором мы здесь упомянем, связано с законами движения гравитирующего тела. В первоначальной формулировке теории закон движения такого тела вводился как независимое предположение в дополнение к законам гравитационного поля; согласно этому предположению, гравитирующая частица движется по геодезической линии [см. уравнение (90)]. Такой результат следовал из предполагаемой справедливости закона инерции Галилея в случае существования «истинного» гравитационного поля. Теперь показано, что этот закон движения, обобщен-

* *On the «Cosmologic Problem».* The Meaning of Relativity, 2 nd Edition, Princeton, 1945. (См. статью 60. Второе издание „The Meaning of Relativity“ опубликовано в 1945 г.; в нем это дополнение помещено как Приложение I. — *Прим. ред.*)

[1] Масса определяется спектроскопическими методами из данных о движении Сириуса, на который его спутник действует согласно закону Ньютона. Радиус определяется из яркости и из интенсивности излучения на единицу площади, которая может быть определена по температуре его излучения.

ный на случай произвольно большой гравитирующей массы, может быть выведен уже из одних уравнений поля для пустого пространства. Согласно этому выводу, закон движения определяется условием, что поле не может обращаться в бесконечность в точках, лежащих вне масс, создающих поле.

Третье достижение теории связано с так называемой «космологической проблемой». Ввиду важности этого вопроса, а также ввиду того, что дискуссия по этому вопросу ни в коей мере еще не завершена, мы разберем его подробно. К более детальному обсуждению этого вопроса меня побуждает также и то, что в современной его трактовке, как мне кажется, недостаточно подчеркивают наиболее важные узловые моменты этой проблемы.

Грубо сформулировать проблему можно следующим образом. Судя по нашим наблюдениям над неподвижными звездами, мы в достаточной степени уверены, что систему неподвижных звезд, вообще говоря, нельзя рассматривать как некий остров, плавающий в бесконечном пустом пространстве, и что нет чего-либо подобного центру тяжести всего существующего вещества. Более того, мы склоняемся к убеждению, что в пространстве средняя плотность вещества не равна нулю.

Следовательно, возникает вопрос: можно ли эту подсказываемую опытом гипотезу согласовать с общей теорией относительности?

Сначала мы должны сформулировать проблему более точно. Рассмотрим конечную, но настолько большую часть Вселенной, что средняя плотность содержащегося в ней вещества может быть представлена приближенно непрерывной функцией от (x_1, x_2, x_3, x_4). Такое подпространство можно приближенно рассматривать как инерциальную систему (пространство Минковского), к которой мы и будем относить движение звезд. Ее всегда можно выбрать так, чтобы средняя скорость вещества по отношению к этой системе во всех направлениях была равна нулю. Остается (почти беспорядочное) движение отдельных звезд, подобное движению молекул газа. Существенно, что скорости звезд, как это известно из опыта, весьма малы по сравнению со скоростью света. Поэтому можно временно совершенно отвлечься от этого относительного движения и рассматривать звездную материю как облако пыли, в котором нет (беспорядочного) движения частиц друг относительно друга.

Перечисленные условия ни в коей мере не достаточны для того, чтобы сделать задачу вполне определенной. Наиболее радикальным, но простым предположением будет условие, что (естественным образом измеренная) плотность вещества ρ постоянна всюду в (четырехмерном) пространстве, а метрика при соответствующем выборе координат не зависит от x_4 и однородна и изотропна по отношению к x_1, x_2, x_3.

Именно этот случай я сначала считал наиболее естественным для приближенного описания физического пространства в целом, и он рассмотрен на стр. 71 — 74 этой книги. Возражением против такого решения является то, что приходится вводить отрицательное давление, для чего нет никаких физических оснований. Чтобы сделать это решение возможным, я сначала ввел в уравнения вместо указанного давления новый член, разрешенный с точки зрения теории относительности. Измененные таким образом уравнения гравитации записывались следующим образом:

$$\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)+\Lambda g_{ik}+\varkappa T_{ik}=0, \qquad (1)$$

где Λ — универсальная постоянная («космологическая постоянная»). Введение этого добавочного члена усложняло теорию и, таким образом, сильно вредило логической простоте. Это могло быть оправдано только трудностью, связанной с почти неизбежным введением конечной средней плотности вещества. Следует заметить, кстати, что и в теории Ньютона существует та же самая трудность.

Выход из этой дилеммы был найден математиком Фридманом[2]. Его результат затем получил неожиданное подтверждение в открытом Хэбблом расширении звездной системы (красное смещение спектральных линий, которое растет линейно с расстоянием). Последующее изложение представляет собой не что иное, как изложение идеи Фридмана.

Четырехмерное пространство, изотропное по отношению к трем измерениям

Наши наблюдения показывают, что видимые нами системы звезд распределены примерно с одинаковой плотностью по всем направлениям. Это приводит нас к предположению, что *пространственная* изотропия системы имеет место для всех наблюдателей и для любого места и времени, лишь бы наблюдатель находился в состоянии покоя относительно окружающего его вещества. С другой стороны, мы более не делаем предположения, что для наблюдателя, находящегося в состоянии покоя относительно окружающего его вещества, плотность вещества остается постоянной во времени. Тем самым мы отказываемся от предположения, что метрика не зависит от времени.

Нам надо теперь найти математическую формулировку условия, что Вселенная всюду изотропна (*в пространственном смысле*). Через каждую точку (четырехмерного) пространства P проходит траектория какой-нибудь частицы (в дальнейшем мы ее для краткости будем называть «геодезической»). Пусть P и Q — две бесконечно близкие точки такой геодези-

[2] Он показал, что из уравнений поля можно получить конечное значение плотности во всем (трехмерном) пространстве, не изменяя этих уравнений *ad hoc*; см. Z. Phys., 1922, 10, 377. (Работа перепечатана в УФН, 80, 447, 1963.—*Прим. ред.*)

ческой. Мы должны тогда потребовать, чтобы выражение для поля было инвариантным относительно любого вращения системы координат, оставляющего неподвижными точки P и Q. Это должно выполняться для произвольного элемента любой геодезической[3].

Приведенное выше условие инвариантности подразумевает, что вся геодезическая лежит на оси вращения и что ее точки остаются на месте при вращении системы координат. Это означает, что решение должно быть инвариантным относительно всех вращений системы координат вокруг ∞^3 геодезических.

Ради краткости мы не будем останавливаться на дедуктивном выводе решения этой задачи. Однако для трехмерного пространства интуитивно кажется очевидным, что метрика, инвариантная относительно вращений вокруг двумерного континуума линий, должна обладать центральной симметрией (при подходящем выборе координат). Здесь оси вращения — радиально расходящиеся прямые, которые из соображений симметрии должны быть геодезическими. Поверхности постоянного радиуса будут тогда поверхностями постоянной (положительной) кривизны, которые всюду перпендикулярны (радиальным) геодезическим. Таким образом, мы на инвариантном языке получаем следующий результат.

Существует семейство поверхностей, ортогональных геодезическим. Каждая из этих поверхностей является поверхностью постоянной кривизны. Отрезки всех геодезических, заключенные между любыми двумя поверхностями семейства, равны.

Замечание. Интуитивно полученный нами результат не является общим, так как поверхности семейства могут обладать постоянной отрицательной кривизной или быть эвклидовыми (нулевая кривизна).

Четырехмерный случай, интересующий нас, совершенно аналогичен. Более того, нет существенной разницы и тогда, когда метрика пространства имеет вид $(-+++)$; необходимо только выбирать радиальные направления временноподобными и, соответственно, направления на поверхностях семейства — пространственноподобными. Оси локальных световых конусов во всех точках лежат на радиальных линиях.

Выбор координат

Вместо четырех координат, в которых пространственная изотропия Вселенной проявляется наиболее ясно, теперь выберем другие координаты, более удобные с точки зрения их физической интерпретации.

[3] Это условие не только накладывает определенные ограничения на метрику, но и требует, чтобы для каждой геодезической существовала такая система координат, в которой поле было бы инвариантно относительно вращений вокруг геодезической.

В качестве временноподобных линий, на которых x_1, x_2 и x_3 постоянны, а меняется только x_4, возьмем геодезические траектории частицы, которыми в случае сферической симметрии являются прямые линии, проходящие через центр. Пусть, далее, x_4 равно метрическому расстоянию от центра. В таких координатах метрика имеет вид

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= dx_4^2 - d\sigma^2 \\ d\sigma^2 &= \gamma_{ik}\,dx_i\,dx_k \qquad (i, k = 1, 2, 3) \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Величина $d\sigma^2$ определяет метрику на одной из сферических гиперповерхностей. Величины γ_{ik}, принадлежащие различным поверхностям, должны тогда (в силу центральной симметрии) иметь одну и ту же форму на всех гиперповерхностях и отличаться лишь положительным множителем, зависящим только от x_4:

$$\gamma_{ik} = \underset{0}{\gamma_{ik}} G^2, \tag{2а}$$

где $\underset{0}{\gamma}$ зависят только от x_1, x_2 и x_3, а G есть функция только x_4. Тогда

$$\underset{0}{d\sigma^2} = \underset{0}{\gamma_{ik}} dx_i dx_k \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{2б}$$

задает в пространстве трех измерений определенную метрику постоянной кривизны — одну и ту же для всех G.

Такая метрика характеризуется соотношением

$$\underset{0}{R_{iklm}} - B\,(\underset{0}{\gamma_{il}}\underset{0}{\gamma_{km}} - \underset{0}{\gamma_{im}}\underset{0}{\gamma_{kl}}) = 0. \tag{2в}$$

Мы можем выбрать систему координат (x_1, x_2, x_3) так, что элемент длины станет конформно эвклидовым:

$$\underset{0}{d\sigma^2} = A^2\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \text{ т. е. } \underset{0}{\gamma_{ik}} = A^2\delta_{ik}. \tag{2г}$$

Здесь A — положительная функция, зависящая только от $r\,(r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. Путем подстановки в уравнения мы получаем для A два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{r}\left(\frac{A'}{Ar}\right)' + \left(\frac{A'}{Ar}\right)^2 &= 0 \\ -\frac{2A'}{Ar} - \left(\frac{A'}{A}\right)^2 - BA^2 &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Первому уравнению удовлетворяет значение

$$A = \frac{c_1}{c_2 + c_3 r^2}, \tag{3а}$$

где постоянные пока произвольны. Второе уравнение тогда дает

$$B = 4\frac{c_2 c_3}{c_1^2}. \tag{3б}$$

Относительно постоянных c мы получаем следующее: если A при $r = 0$ должно быть положительным, то c_1 и c_2 имеют один и тот же знак. Так как изменение знака всех трех постоянных не меняет A, мы можем считать c_1 и c_2 положительными. Можно также положить $c_2 = 1$. Более того, так как положительный множитель всегда можно включить в G^2, можно, не нарушая общности, считать, что $c_1 = 1$. Итак, мы можем положить

$$A = \frac{1}{1 + cr^2}; \quad B = 4c. \tag{3в}$$

Теперь возможны три случая:

$c > 0$ (сферическое пространство),

$c < 0$ (псевдосферическое пространство),

$c = 0$ (эвклидово пространство).

При помощи преобразования подобия ($x_i' = ax_i$, де a — постоянная) мы можем далее получить $c = 1/4$ для первого случая и $c = -1/4$ для второго. Тогда для наших трех случаев соответственно имеем:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{1 + \frac{r^2}{4}}; & B &= 1 \\ A &= \frac{1}{1 - \frac{r^2}{4}}; & B &= -1 \\ A &= 1; & B &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3г}$$

В сферическом случае «длина окружности» единичного пространства ($G = 1$) равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dr}{1 + \frac{r^2}{4}} = 2\pi;$$

«радиус» единичного пространства равен 1. Во всех трех случаях функция времени G есть мера изменения со временем расстояния между двумя точками вещества (измеренного в пространственном сечении). В сферическом случае G равно радиусу пространства в момент времени x_4.

Резюме. Гипотеза о *пространственной* изотропии нашей идеализированной Вселенной приводит к следующей метрике:

$$ds^2 = dx_4^2 - G^2A^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \tag{2}$$

где G зависит только от x_4, а A — только от r^2 $(r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ и где

$$A = \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{4} r^2}, \tag{3}$$

а различные случаи характеризуются значениями $\zeta = 1$, $\zeta = -1$ и $\zeta = 0$ соответственно.

Уравнения поля

Мы должны теперь удовлетворить уравнениям поля тяготения, т. е. уравнениям поля без «космологического члена», введенного нами ранее *ad hoc*:

$$\left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) + \varkappa T_{ik} = 0. \tag{4}$$

Подставляя выражение для метрики, основанное на предположении о пространственной изотропии, мы получаем после вычисления:

$$\left.\begin{aligned} R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R &= \left(\frac{\zeta}{G^2} + \frac{G'^2}{G^2} + 2\frac{G''}{G}\right) GA\delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3) \\ R_{44} - \frac{1}{2} g_{44} R &= -3\left(\frac{\zeta}{G^2} + \frac{G'^2}{G^2}\right) \\ R_{i4} - \frac{1}{2} g_{i4} R &= 0 \qquad\qquad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}\right\}. \tag{4а}$$

Далее, тензор энергии «пылевидного» вещества записывается в виде

$$T^{ik} = \rho \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds}. \tag{4б}$$

Геодезические, вдоль которых движется вещество, представляют собой линии, на которых меняется только x_4; на них $dx_4 = ds$. Для единственной отличной от нуля компоненты мы получаем

$$T^{44} = \rho. \tag{4в}$$

Опуская индексы, мы получаем единственную не равную нулю компоненту T_{ik}

$$T_{44} = \rho. \tag{4г}$$

С учетом этого уравнения поля приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{\zeta}{G^2} + \frac{G'^2}{G^2} + 2\frac{G''}{G} = 0 \\ \frac{\zeta}{G^2} + \frac{G'^2}{G^2} - \frac{1}{3}\varkappa\rho = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

где ζ/G^2 равно кривизне в пространственном сечении $x_4 = \mathrm{const}$. Так как G во всех случаях является относительной мерой метрического расстояния между двумя материальными точками как функции времени, то G'/G описывает хэббловское расширение. A из уравнений выпадает, как это и должно быть, если решения уравнений гравитации имеют требуемую симметрию. Вычитая одно уравнение из другого, получаем

$$\frac{G''}{G} + \frac{1}{6}\varkappa\rho = 0. \tag{5a}$$

Так как G и ρ должны быть всюду положительны, G'' везде отрицательна для ρ, отличных от нуля. Поэтому $G(x_4)$ не может иметь ни минимума, ни точки перегиба; кроме того, не существует решения, при котором G было бы постоянно.

Случай нулевой пространственной кривизны ($\zeta = 0$)

Простейшим случаем не равной нулю плотности ρ является случай $\zeta = 0$, когда сечения $x_4 = \mathrm{const}$ не искривлены. Если мы положим $G'/G = h$, то уравнения поля для этого случая запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} 2h' + 3h^2 = 0 \\ 3h^2 = \varkappa\rho \end{aligned}\right\}. \tag{5б}$$

Содержащееся во втором уравнении соотношение между постоянной Хэббла h и средней плотностью ρ может быть, по крайней мере по порядку величины, сравнено с экспериментальным. Скорость расширения равна 432 *км/сек* на расстоянии 10^6 *парсек*[4]. Если перевести это число в используемую нами систему единиц (единица длины — 1 *см*, единица времени — время прохождения лучом света расстояния в 1 *см*), то мы получаем

$$h = \frac{432\cdot 10^5}{3{,}25\cdot 10^6\cdot 365\cdot 24\cdot 60\cdot 60}\left(\frac{1}{3\cdot 10^{10}}\right)^2 = 4{,}71\cdot 10^{-28}\ \textit{см}^{-1}.$$

[4] По новым данным эта постоянная равна ~ 75 *км/сек* на 10^6 *парсек* или $0{,}8\cdot 10^{-28}$ *см*$^{-1}$ и соответственно плотность, отвечающая случаю нулевой кривизны, стала равна $\sim 2\cdot 10^{-29}$ *г/см*^{3}. Ср. прим. на стр. 398.— *Прим. ред.*

Поскольку, далее [см. формулу (105а)], $\varkappa = 1{,}86 \cdot 10^{-27}$, то второе из уравнений (5б) дает

$$\rho = \frac{3h^2}{\varkappa} = 3{,}5 \cdot 10^{-28}\ г/см^3.$$

Это значение по порядку величины согласуется с оценками астрономов (сделанными на основании масс и параллаксов видимых звезд и звездных систем). В качестве примера я цитирую здесь Мак-Витти [5]: «Средняя плотность наверняка не превышает 10^{-27} *г/см*^{3}, а наиболее вероятное ее значение — порядка 10^{-29} *г/см*^{3}».

Вследствие больших трудностей определения этой величины такое согласие для настоящего времени нам представляется удовлетворительным. Поскольку величина h определена с большей точностью, чем ρ, по-видимому, не будет преувеличением утверждать, что определение структуры наблюдаемого нами пространства всецело зависит от более точного определения ρ. Действительно, согласно второму из уравнений (5), пространственная кривизна в общем случае равна

$$\zeta G^{-2} = \frac{1}{3}\varkappa\rho - h^2. \tag{5в}$$

Отсюда следует, что если правая часть этого уравнения положительна, то пространство имеет положительную кривизну; ее величина может быть определена с точностью, с которой известна эта разность. Если правая часть отрицательна, пространство бесконечно. В настоящее время точность определения ρ недостаточна, чтобы из этого соотношения можно было заключить о том, что средняя кривизна пространства (сечение $x_4 = \text{const}$) отлична от нуля.

В случае, когда мы пренебрегаем пространственной кривизной, первое из уравнений (5в) после соответствующего выбора начала отсчета x_4 принимает вид

$$h = \frac{2}{3}\frac{1}{x_4}. \tag{6}$$

Это уравнение имеет особенность при $x_4 = 0$, так что такое пространство либо сжимается и время ограничено сверху величиной $x_4 = 0$, либо оно расширяется и возникает в момент $x_4 = 0$. Последний случай отвечает тому, что реализуется в природе.

Из измеренной величины h мы получаем для продолжительности существования мира величину $1{,}5 \cdot 10^9$ лет [6]. Этот возраст почти совпадает с возрастом земной коры, получаемым из данных о распаде урана. Этот пара-

[5] G. C. McVittie. Proc. Phys. Soc., 1939, 51, 537.

[6] По современным данным —$13 \cdot 10^{10}$ лет, так что никакого парадокса не возникает. — *Прим. ред.*

доксальный результат по многим причинам вызвал сомнения в справедливости теории.

Возникает вопрос: может ли эта трудность, возникшая из предположения о практически пренебрежимой пространственной кривизне, быть обойдена введением соответствующей пространственной кривизны? В связи с этим следует обратиться к первому из уравнений (5), которое определяет временну́ю зависимость G.

Решение уравнений в случае неравной нулю пространственной кривизны

Для исследования пространственной кривизны пространственного сечения ($x_4 = \text{const}$) необходимо обратиться к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \zeta G^{-2} + \left[2\,\frac{G''}{G} + \left(\frac{G'}{G}\right)^2\right] = 0 \\ \zeta G^{-2} + \left(\frac{G'}{G}\right)^2 - \frac{1}{3}\,\varkappa\rho = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Кривизна положительна, если $\zeta = +1$, и отрицательна, если $\zeta = -1$. Первое из этих уравнений можно проинтегрировать. Сначала запишем его в следующей форме:

$$\zeta + 2GG'' + G'^2 = 0. \tag{5г}$$

Рассматривая $x_4\ (= t)$ как функцию G, можем написать

$$G' = \frac{1}{t'}\,; \qquad G'' = \left(\frac{1}{t'}\right)'\frac{1}{t'}\,.$$

Обозначив $1/t'$ через $u\,(G)$, получим

$$\zeta + 2Guu' + u^2 = 0 \tag{5д}$$

или

$$\zeta + (Gu^2)' = 0. \tag{5е}$$

Отсюда простым интегрированием получаем

$$\zeta G + Gu^2 = G_0, \tag{5ж}$$

или, так как $u = 1/(dt/dG) = dG/dt$,

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 = \frac{G_0 - \zeta G}{G}\,, \tag{5з}$$

где G_0 — постоянная. Эта постоянная не может быть отрицательной, что становится очевидным, если мы продифференцируем (5з) и учтем, что G'' в соответствии с (5а) отрицательно.

а) *Пространство положительной кривизны.* G все время остается в интервале $0 \leqslant G \leqslant G_0$. Вид функции G схематически приведен на рис. 1. Радиус G возрастает от 0 до G_0 и затем опять постепенно уменьшается до нуля. Пространственное сечение конечно (сферической формы):

$$\frac{1}{3}\varkappa\rho - h^2 > 0. \tag{5в}$$

б) *Пространство отрицательной кривизны.*

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 = \frac{G_0 + G}{G}.$$

G растет с течением времени от $G = 0$ до $G = +\infty$ (или убывает от $G = \infty$ до $G = 0$). Следовательно, $\frac{dG}{dt}$ монотонно уменьшается от $+\infty$

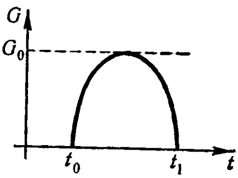


Рис. 1.

Рис. 2.

до 1, как это изображено на рис. 2. Таким образом, этот случай отвечает непрерывному расширению без сжатия. Пространственное сечение бесконечно и мы имеем

$$\frac{1}{3}\varkappa\rho - h^2 < 0. \tag{5в}$$

Случай плоского пространственного сечения, рассматривавшийся в предыдущем параграфе, является, согласно уравнению (5з), промежуточным между этими случаями:

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 = \frac{G_0}{G}. \tag{5з}$$

Замечание. Случай отрицательной кривизны содержит в качестве предельного случай $\rho = 0$. Для этого случая $\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 = 1$ (см. рис. 2). Поскольку тензор кривизны, как показывают вычисления, обращается при этом в нуль, это—случай эвклидовой метрики.

Случай отрицательной кривизны с отличной от нуля плотностью ρ приближается к этому предельному случаю все ближе и ближе, так что с течением времени структура пространства все в меньшей и меньшей степени определяется содержащейся в нем материей.

Из приведенного исследования случая не равной нулю кривизны вытекают следующие выводы. В случае произвольной не равной нулю («пространственной») кривизны, так же как и в случае нулевой кривизны, существует начальное состояние с $G = 0$, соответствующее началу расширения. В этом сечении, следовательно, плотность бесконечна и поле имеет сингулярность. Введение такого рода сингулярности проблематично уже само по себе [7].

Далее оказывается, что введение пространственной кривизны почти не влияет на интервал времени между началом расширения и моментом достижения некоего фиксированного значения $h = G'/G$. Этот промежуток времени можно получить из (5з) с помощью элементарных вычислений, которых мы здесь не приводим. Ограничимся рассмотрением случая расширяющегося пространства с равным нулю ρ. Как отмечалось ранее, это является частным случаем отрицательной пространственной кривизны. Из второго уравнения (5) мы получаем (учитывая обратный знак первого члена)

$$G' = 1.$$

Следовательно (при соответствующем выборе начала отсчета),

$$G = x_4,$$

$$h = \frac{G'}{G} = \frac{1}{x_4}. \qquad (6а)$$

Таким образом, этот предельный случай дает для продолжительности расширения с точностью до множителя порядка 1 тот же самый результат, что и случай равной нулю пространственной кривизны [см. соотношение (6)].

Поэтому введение пространственной кривизны не устраняет трудности, о которой говорилось в связи с соотношением (6), а именно то, что отводится слишком короткое время на развитие наблюдаемых в настоящее время звезд и звездных систем.

....

[7] Необходимо, однако, заметить следующее: существующая релятивистская теория гравитации основывается на разделении понятий «гравитационного поля» и «материи». Поэтому возможно, что эта теория неверна при очень больших плотностях материи, и в единой теории никакой сингулярности не появится.

Распространение метода на случай более общего состояния вещества

Во всех полученных до сих пор решениях существует состояние системы с сингулярной метрикой ($G = 0$) и бесконечной плотностью ρ. Возникает вопрос: не связано ли возникновение сингулярности с тем, что мы рассматриваем вещество в виде облака пыли, которое никак не противодействует конденсации. Не пренебрегли ли мы без всякого на то основания влиянием хаотического движения отдельных звезд?

Можно, например, заменить облако пыли, в котором частицы покоятся друг относительно друга, облаком, частицы которого хаотически движутся друг относительно друга наподобие молекул газа. Такое облако будет сопротивляться адиабатической конденсации, и сопротивление будет возрастать с ростом конденсации. Не будет ли это препятствовать безграничной конденсации? Ниже мы покажем, что такое изменение в описании вещества не изменяет основных черт полученных выше решений.

«Газ частиц», рассматриваемый согласно специальной теории относительности

Рассмотрим рой параллельно движущихся частиц массы m. Сделав надлежащее преобразование, мы можем рассматривать этот рой покоящимся. Пространственная плотность частиц σ тогда инвариантна в смысле специальной теории относительности. По отношению к произвольной лоренцовой системе тензор

$$T^{uv} = m\sigma \frac{dx^u}{ds} \frac{dx^v}{ds} \tag{7}$$

имеет одинаковый смысл (тензор энергии роя). Если таких роев много, то суммированием получаем

$$T^{uv} = m \sum_p \sigma_p \left(\frac{dx^u}{ds}\right)_p \left(\frac{dx^v}{ds}\right)_p . \tag{7a}$$

Мы можем выбрать ось времени лоренцовой системы координат так, чтобы выполнялось условие $T^{14} = T^{24} = T^{34} = 0$. Кроме того, с помощью пространственного вращения можно получить $T^{12} = T^{23} = T^{31} = 0$. Пусть, далее, газ частиц является изотропным. Это означает, что $T^{11} = T^{22} = T^{33} = p$. Эти компоненты, равно как и $T^{44} = u$, — инварианты. Таким образом, инвариант

$$\mathfrak{J} = T^{uv} g_{uv} = T^{44} - (T^{11} + T^{22} + T^{33}) = u - 3p \tag{7б}$$

выражается через u и p.

Из выражения для $T^{\mu\nu}$ следует, что T^{11}, T^{22}, T^{33} и T^{44} положительны; то же самое, следовательно, справедливо и для T_{11}, T_{22}, T_{33} и T_{44}.

Уравнения гравитации записываются теперь в виде

$$\left.\begin{aligned} 1 + 2GG'' + G^2 + \varkappa T_{11} = 0 \\ -3G^{-2}(1 + G'^2) + \varkappa T_{44} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Из первого уравнения следует, что и здесь (так как $T_{11} > 0$) G'' всегда отрицательна, причем член с T_{11} при данных G и G' может только уменьшить величину G''.

Отсюда мы видим, что учет хаотического движения частиц друг относительно друга не меняет существенно наших результатов.

Резюме и некоторые замечания

1. Введение в уравнения гравитации «космологического члена» хотя и возможно с точки зрения теории относительности, но не является необходимым логически. Как впервые показал Фридман, конечную всюду плотность материи можно согласовать с первоначальной формой уравнений гравитации, если допустить, что метрическое расстояние между двумя материальными точками меняется со временем [8].

2. Одно уже требование *пространственной* изотропии Вселенной приводит к схеме Фридмана. Не вызывает поэтому никаких сомнений, что это наиболее общая схема, дающая решение космологической проблемы.

3. Пренебрегая влиянием пространственной кривизны, можно получить соотношение между средней плотностью и хэббловским расширением, которое, по порядку величины, подтверждается на опыте.

Для промежутка времени между началом расширения и настоящим временем получается значение порядка 10^9 лет. Малая величина этого времени не согласуется с теориями эволюции неподвижных звезд.

4. Последний результат не меняется с введением пространственной кривизны; на него не влияет также учет хаотического движения звезд и звездных систем друг относительно друга.

5. Делались попытки объяснить хэббловское смещение спектральных линий при помощи механизма, отличного от допплер-эффекта. Известные физические факты, однако, не подтверждают такое объяснение. Согласно этим гипотезам, можно было бы две звезды S_1 и S_2 соединить твердым

[8] Если бы хэбловское расширение было открыто во время создания общей теории относительности, космологический член никогда бы не был введен. Его введение в уравнения поля сейчас кажется столь необоснованным потому, что исчезло его единственное оправдание, состоявшее в том, что с его помощью получалось естественное решение космологической проблемы.

стержнем. Монохроматический свет, посланный из S_1 в S_2 и отраженный обратно к S_1, мог бы вернуться с другой частотой (измеренной с помощью часов на S_1), если число длин волн вдоль стержня по пути менялось бы со временем. Это означало бы, что измеренная в локальной системе координат скорость света зависит от времени — результат, противоречащий даже специальной теории относительности. Далее, следует заметить, что световой сигнал, распространяющийся между S_1 и S_2, являлся бы «часами», не находящимися в постоянной связи с часами (например, атомными) на S_1. Это означало бы отсутствие метрики в смысле теории относительности, но такая точка зрения не согласуется и с тем фактом, что в некоторых атомных явлениях проявляется не только «подобие», но и «конгруэнтность» (существование резких спектральных линий, атомных объемов и т. д.).

Приведенные выше рассуждения основаны, впрочем, на волновой теории, и некоторые сторонники упоминавшихся гипотез могут рассматривать процесс изменения частоты света не по волновой теории, а наподобие эффекта Комптона. Предположение о существовании такого процесса без рассеяния представляет собой гипотезу, которая ничем не обоснована с точки зрения современных данных. При этом не удается также объяснить независимость относительного смещения частоты от самой частоты. Поэтому открытое Хэбблом явление нельзя рассматривать иначе, как расширение звездной системы.

6. Предположение о том, что «начало мира» (начало расширения) было всего около 10^9 лет назад, вызывает сомнения как с экспериментальной, так и с теоретической точек зрения. Астрономы склоняются к тому, чтобы рассматривать звезды различных спектральных типов как звезды различных возрастных классов в едином процессе развития. Такой процесс требует гораздо больше времени, чем 10^9 лет, и поэтому эти представления противоречат полученным выше следствиям релятивистских уравнений. Мне кажется, однако, что «теория эволюции» звезд основывается на менее прочном фундаменте, чем уравнения поля.

Теоретические сомнения основываются на том, что в момент, соответствующий началу расширения, метрика сингулярна и плотность ρ бесконечна. В связи с этим следует заметить следующее: современная теория относительности основана на разделении физической реальности на метрическое поле (гравитацию), с одной стороны, и на электромагнитное поле и вещество — с другой. В действительности пространство, вероятно, должно быть единым по своему характеру, и современную теорию следует рассматривать лишь как некий предельный случай. При больших плотностях поля и вещества уравнения поля и даже входящие в них переменные должны терять смысл. Поэтому мы не можем предположить, что уравнения поля остаются справедливыми при больших плотностях поля и материи, и не можем заключить, что «начало расширения» должно означать сингулярность в математическом смысле. Поэтому мы должны иметь в виду, что, может быть, и нельзя распространять уравнения на такие области.

Эти соображения, однако, не меняют вывода, что, с точки зрения развития ныне существующих звезд и звездных систем, «начало мира» действительно соответствует некоторому началу, когда эти звезды и звездные системы еще не существовали как отдельные образования.

7. Однако имеются некоторые наблюдательные данные, говорящие *в пользу* требуемой теорией динамической картины пространства. Почему уран до сих пор существует, несмотря на сравнительно быстрый его распад и несмотря на то, что пока не найдено возможностей его вторичного образования? Почему пространство не заполнено излучением настолько, чтобы сделать ночное небо похожим на раскаленную поверхность? Это старый вопрос, до сих пор еще не нашедший удовлетворительного объяснения с точки зрения стационарной модели Вселенной. Но разбор этих вопросов завел бы нас слишком далеко.

8. Приведенные соображения позволяют думать, что, несмотря на короткое «время жизни», идею расширяющейся Вселенной следует рассматривать серьезно. В этом случае главным становится вопрос, имеет ли пространство положительную или отрицательную кривизну. В связи с этим заметим следующее.

С точки зрения эксперимента, ответ зависит от того, положительно ли выражение $\frac{1}{3}\varkappa\rho - h^2$ (сферический случай) или отрицательно (псевдосферический случай). Это представляется мне наиболее важным вопросом. Экспериментальное его решение при современном состоянии астрономии не представляется невозможным. Поскольку h (постоянная Хэббла) сравнительно хорошо известна, все зависит от возможно более точного определения ρ.

Можно представить себе, что будет доказана сферичность мира (трудно представить себе, что может быть дано доказательство псевдосферичности мира). Это связано с тем, что всегда можно дать нижнюю границу для ρ, но отнюдь не верхнюю. Причина этого кроется в трудности оценки той части ρ, которая связана с астрономически ненаблюдаемой (неизлучающей) материей. Этот вопрос мы разберем более подробно.

Нижнюю границу для ρ (ρ_s) можно определить, учитывая массы только светящихся звезд. Если окажется, что $\rho_s > 3h^2/\varkappa$, то вопрос будет решен в пользу сферического пространства. Если же окажется, что $\rho_s < 3h^2/\varkappa$, то необходимо определить долю неизлучающей материи ρ_d. Мы постараемся показать, что можно определить нижнюю границу для ρ_d/ρ_s.

Рассмотрим астрономический объект, состоящий из большого количества звезд, который с достаточной точностью можно рассматривать как стационарную систему; это может быть, например, шаровое скопление (с известным параллаксом). Из спектроскопически наблюдаемых скоростей можно (при правдоподобных предположениях) определить поле гравитации, а тем самым и массу, которая создает это поле. Вычисленную таким путем массу можно сравнить с массой видимых звезд скопления и найти по крайней мере грубую оценку того, насколько создающие поле массы превышают массу видимых звезд нашего скопления. Таким образом можно оценить ρ_d/ρ_s для каждого звездного скопления.

Так как неизлучающие звезды в среднем меньше излучающих, то вследствие их взаимодействия со звездами скопления они в среднем обладают бо́льшими скоростями, чем более крупные звезды. Следовательно, они будут «испаряться» из звездного скопления быстрее, чем более тяжелые звезды. Поэтому следует ожидать, что относительное количество малых небесных тел внутри звездного скопления будет меньше, чем вне его. Следовательно, мы получаем, что $(\rho_d/\rho_s)_k$ (отношение плотностей внутри звездного скопления) дает нижнюю границу отношения ρ_d/ρ_s для всего пространства. Поэтому для нижней границы полной средней плотности в пространстве мы получаем значение

$$\rho_s\left[1+\left(\frac{\rho_d}{\rho_s}\right)\right].$$

Если эта величина больше, чем $3h^2/\varkappa$, то мы можем заключить, что пространство имеет сферический характер. Что же касается верхней границы ρ, то я не вижу реальных путей для ее определения.

9. Последний, но не менее важный вопрос. Возраст Вселенной в принятом нами смысле наверняка должен превышать возраст земной коры, определяемый из данных о радиоактивных минералах. Поскольку определение возраста по этим минералам со всех точек зрения является достоверным, то предложенная здесь космологическая теория будет опровергнута, если обнаружится, что она противоречит полученным таким методом результатам. В этом случае я не вижу никакого разумного решения.

Приложение II к „Сущности теории относительности" см. статьи 141 (4-е издание) и 146 (5-е издание). „Сущность теории относительности" с двумя приложениями издавалось в Англии (6-е издание Methuen, 1956), в США (5-е издание Princeton University Press, 1956) и в Германии (4-е издание Vieweg & Sohn, 1960).

ОБОБЩЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ *

Любая попытка создания единой теории поля, по моему мнению, должна исходить из группы преобразований, не менее общей, чем группа непрерывных преобразований четырех координат. Мы вряд ли сможем расширять группу в теории, основанной на более узкой группе. Кроме этого, разумно пытаться установить единую теорию путем обобщения релятивистской теории гравитации. Такого рода обобщение, неизвестное, по-видимому, до сих пор, описано ниже.

Когда мы говорим о единой теории, у нас есть две возможных точки зрения, различие между которыми существенно для дальнейшего.

1. Поле выступает как единая ковариантная величина. Приведу в качестве примера объединение электрического и магнитного полей специальной теорией относительности. Это объединение состоит в описании всего рассматриваемого поля как антисимметричного тензора. Группа преобразований Лоренца не позволяет нам разделить это поле на электрическое и магнитное независимо от системы координат.

2. Ни уравнения поля, ни функция Гамильтона не выражаются как сумма нескольких инвариантных частей, но образуют формально единые величины. В нашем примере описания специальной теорией относительности уравнений Максвелла также выполняется (хотя и слабее) этот критерий однородности.

Теория, которую мы будем излагать, является единой в смысле критерия 2, но не критерия 1. Такую теорию следует рассматривать как единую только в некотором ограниченном смысле.

---

* *Generalisation of the Relativistic Theory of Gravitation.* Ann. Math., 46, 1945, 578—584. (Второй частью работы является статья 130.— *Прим. ред.*)

Структура поля и группы

Поле описывается тензором g_{ik} с комплексными компонентами. Эти компоненты должны удовлетворять условию симметрии, которое является естественным обобщением на комплексную область условия симметрии для метрического поля в теории гравитации. Мы назовем это условие «эрмитовой симметрией»:

$$g_{ik} = \overline{g}_{ki}. \tag{1}$$

Компоненты g_{ik} являются непрерывными функциями четырех вещественных координат $x_1, \ldots, x_4$. Из соотношения (1) следует, что g_{ik} расщепляется по формуле

$$g_{ik} = s_{ik} + i a_{ik},$$

где s_{ik} и a_{ik} удовлетворяют условиям

$$s_{ik} = s_{ki},$$

$$a_{ik} = -a_{ki}.$$

Группой преобразований, как и в теории гравитации, остается группа вещественных непрерывных преобразований координат. Относительно этой группы s_{ik} и a_{ik} являются независимыми тензорами. Следовательно, поле в условии (1) нельзя считать единым в смысле критерия (1). С другой стороны, мы увидим, что поле (1) возникает весьма естественным путем. Это, так же как и близость к релятивистской теории гравитации, формально оправдывает, на мой взгляд, теорию поля, излагаемую ниже.

С ковариантным тензором g_{ik} мы можем однозначно связать контравариантный тензор g^{ik} с помощью условия

$$g_{ki} g^{kl} = g_{ik} g^{lk} = \delta_i^l, \tag{2}$$

где δ_i^l — тензор Кронекера. В силу соотношения (1), определитель

$$g = |g_{ik}|$$

веществен, ибо $\overline{g} = |\overline{g}_{ik}| = |g_{ki}| = |g_{ik}|$. Так же, как в теории гравитации, выберем $g < 0$ вследствие особого характера временноподобной координаты.

Бесконечно малый параллельный перенос

Введем теперь комплексную величину Γ_{ik}^l, которая преобразуется подобно соответствующим величинам в римановой геометрии. По аналогии с соответствующими величинами в римановой геометрии, Γ_{ik}^l должна быть эрмитовой по нижним индексам:

$$\Gamma^l_{ik} = \overline{\Gamma}^l_{ki}. \tag{3}$$

Замечания: $\Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki}$ — (чисто мнимый) тензор. Законы преобразования тензоров Γ^l_{ki} и Γ^l_{ik} одинаковы [это верно и для тензора $^1/_2(\Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{ki})$]. Свертывая тензор $^1/_2(\Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki})$, получаем вектор

$$\Gamma_i = \frac{1}{2}(\Gamma^b_{ib} - \Gamma^b_{bi}). \tag{4}$$

Из фундаментальных законов следует, что здесь параллельный перенос комплексного вектора не является однозначной операцией при заданных Г. Поэтому введем следующие символы, чтобы устранить неопределенность:

$$\begin{aligned} \delta A^{\overset{i}{+}} &= -\Gamma^i_{st} A^s dx_t, \\ \delta A^{\overset{i}{-}} &= -\Gamma^i_{ts} A^s dx_t, \\ \delta A^{\overset{i}{0}} &= -\frac{1}{2}(\Gamma^i_{st} + \Gamma^i_{ts}) A^s dx_t. \end{aligned} \tag{5}$$

Соответствующие символы вводятся для бесконечно малого параллельного переноса ковариантных тензоров, а также для ковариантного дифференцирования. Например,

$$A^{\overset{i}{+}}_{;k} = A^i_{,k} + A^s \Gamma^i_{sk},$$

$$A_{\underset{-}{i};k} = A_{i,k} - A_s \Gamma^s_{ki}$$

и т. д.

Теперь мы должны определить Г, относящееся к данному полю g_{ik}. Мы полагаем

$$0 = g_{ik;l} = g_{\underset{+-}{ik};l} = g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\Gamma^s_{lk}. \tag{6}$$

Для дальнейшего существенно ясно представлять себе, что правая часть в уравнении (6) имеет тензорный характер, даже если уравнение (6) не удовлетворяется. Для тензора Кронекера получим

$$\delta^{\overset{k}{+}}_{\underset{-}{i};l} = \delta^s_i \Gamma^k_{sl} - \delta^k_s \Gamma^s_{il} = 0 = \delta^{\overset{k}{-}}_{\underset{-}{i};l} = \delta^{\overset{k}{0}}_{\underset{0}{i};l}.$$

С другой стороны,

$$\delta^{\overset{k}{+}}_{\underset{-}{i};l} = \Gamma^k_{li} - \Gamma^k_{il} = -\delta^{\overset{k}{-}}_{\underset{+}{i};l} \neq 0.$$

Поэтому при свертывании тензоров под знаком дифференцирования надо внимательно следить за характером индексов. Только для индексов одинакового характера можно переставлять операции свертки и абсолютного дифференцирования.

Специальный выбор свойств симметрии Γ и дифференцирования в уравнении (6) оправдывается следующим. Если образовать выражение, эрмитово-сопряженное правой части уравнения (6) (иначе говоря, переставить местами индексы i и k, а затем перейти к комплексно-сопряженному выражению), то получим

$$\bar{g}_{ki,l} - \bar{g}_{si}\bar{\Gamma}^s_{kl} - \bar{g}_{ks}\bar{\Gamma}^s_{li}$$

или

$$g_{ik,l} - g_{is}\Gamma^s_{lk} - g_{sk}\Gamma^s_{il},$$

т. е. уравнение (6) (или, скорее, его правая часть) совпадает со своей эрмитово-сопряженной формой. Это необходимо для того, чтобы для заданного поля величины Γ были определены однозначно (но не переопределены).

Если уравнение (6) умножить на g_{ik} и свернуть, то с учетом равенств (2) получим

$$\frac{g_{,\,l}}{g} - (\Gamma^i_{il} + \Gamma^i_{li}) = 0. \qquad (7)$$

Левая часть уравнения (7) обладает векторными свойствами, независимо от того, удовлетворяется уравнение (7) или нет.

Если уравнение (6) умножить на $-g^{it}g^{sk}$ и просуммировать по i и k, то, благодаря равенству

$$g^{it}g_{ik,\,l} + g^{it}_{,\,l}g_{ik} = 0,$$

вытекающему из (2), получим

$$0 = g^{st}_{,\,l} + g^{bt}\Gamma^s_{bl} + g^{sb}\Gamma^t_{lb} = g^{\overset{s}{+}\overset{t}{-}}_{;\,l}. \qquad (6a)$$

Основное отличие обобщенной теории от чистой теории гравитации в смысле определения Γ заключается в том, что уравнения, которые определяют Γ через поле g, нельзя решить простым способом.

Кроме понятия тензора существенно понятие тензорной плотности. Если, например, A^i — тензор (1-го ранга), то

$$\mathfrak{A}^i = \sqrt{-g}A^i$$

представляет собой тензорную плотность с соответствующим законом преобразования.

В результате дифференцирования мы получаем, например,

$$A^{\overset{i}{+}}_{;k} = A^{i}_{,k} + A^{a}\Gamma^{i}_{ak}.$$

Если это равенство умножить на $\sqrt{-g}$, то получим, что

$$(\mathfrak{A}^{\overset{i}{+}}_{;k}) \equiv \mathfrak{A}^{i}_{,k} + \mathfrak{A}^{a}\Gamma^{i}_{ak} - \frac{1}{2}\mathfrak{A}^{i}\frac{g_{,k}}{g} \tag{6б}$$

является тензорной плотностью, которую мы определили как ковариантную производную $\mathfrak{A}^{\overset{i}{+}}_{;n}$ от $\mathfrak{A}^{i}$. В последнем члене этого равенства принимается во внимание свойство плотности $\mathfrak{A}^{i}$. Аналогичное выражение справедливо при дифференцировании всех тензорных плотностей. В частности, для скалярной плотности $\mathfrak{r}$:

$$\mathfrak{r}_{;l} = \mathfrak{r}_{,l} - \frac{1}{2}\mathfrak{r}\frac{g_{,l}}{g}.$$

Если мы положим $\mathfrak{r} = \sqrt{-g}$, то ковариантная производная обращается в нуль. Если же положить $\mathfrak{g}^{ik} = \sqrt{-g}g^{ik}$, то

$$\mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}_{;l} = \mathfrak{g}^{ik}_{,l} + \mathfrak{g}^{ak}\Gamma_{ak} + \mathfrak{g}^{ia}\Gamma^{k}_{la} - \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{ik}\frac{g_{,l}}{g} = 0, \tag{6в}$$

где равенство (6в) следует из (6б) и из определения тензорной плотности.

Кривизна

Начнем с выражения для параллельного переноса, отвечающего, например, первому из уравнений (5). Путем переноса комплексного вектора вдоль границы бесконечно малого (плоского) элемента поверхности получается (комплексный) тензор кривизны, как и в теории вещественных полей.

Таким образом получается комплексный тензор кривизны

$$\Gamma^{i}_{kl,m} - \Gamma^{i}_{km,l} - \Gamma^{i}_{al}\Gamma^{a}_{km} + \Gamma^{i}_{am}\Gamma^{a}_{kl}. \tag{8}$$

Свертывая его по индексам i и m, мы получаем тензор

$$\Gamma^{a}_{kl,a} - \Gamma^{a}_{kl}\Gamma^{l}_{al} - \Gamma^{a}_{ka,l} + \Gamma^{a}_{kl}\Gamma^{b}_{ab}. \tag{9}$$

Взяв среднее значение этого тензора и подвергнув его эрмитову сопряжению, мы получим эрмитов тензор

$$R_{ik} = \Gamma^{a}_{ik,a} - \Gamma^{a}_{ib}\Gamma^{b}_{ak} - \frac{1}{2}(\Gamma^{a}_{ia,k} + \Gamma^{a}_{ak,i}) + \frac{1}{2}(\Gamma^{b}_{ab} + \Gamma^{b}_{ba})\Gamma^{a}_{ik}. \tag{10}$$

Вывод уравнений поля

Теперь нашей целью является получение уравнений поля, совместимых с нашими определениями (6). Мы найдем их, используя метод, уже известный из теории гравитации. Введем на время g_{ik} и Γ^l_{ik} в качестве независимых переменных поля, не предполагая, что они связаны уравнением (6). Из этих величин и их производных мы построим плотность функции Гамильтона $\mathfrak{H}$, интеграл от которой будет варьироваться независимо от g и Γ. $\mathfrak{H}$ выбирается так, чтобы варьирование по Γ приводило к уравнению (6). Тогда варьирование по g даст собственно уравнения поля.

Функция Гамильтона

Построим сначала новый тензор, вычитая некоторый тензор S_{ik} из R_{ik}. Согласно уравнению (7),

$$S_i = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x_i} - \frac{1}{2}(\Gamma^a_{ia} + \Gamma^a_{ai})$$

является вектором. Из него мы построим тензор $S_{\underset{+}{i};k} (= S_{ik})$, полагая

$$S_{ik} = [(\ln \sqrt{-g})_{,i,k} - (\ln \sqrt{-g})_{,a}\Gamma^a_{ik}] - \\ - \left[\frac{1}{2}(\Gamma^a_{ia} + \Gamma^a_{ai})_{,k} - \frac{1}{2}(\Gamma^b_{ab} + \Gamma^b_{ba})\,\Gamma^a_{ik}\right]. \quad (11)$$

Мы получим

$$\overset{*}{R}_{ik} = R_{ik} - S_{ik} = \Gamma^a_{ik,a} - \Gamma^a_{ib}\Gamma^b_{ak} - (\ln \sqrt{-g})_{,i,k} + (\ln \sqrt{-g})_a\,\Gamma^a_{ik}. \quad (12)$$

Отсюда, умножая на тензорную плотность $\mathfrak{g}^{ik}$, получаем плотность функции Гамильтона

$$\mathfrak{H} = \overset{*}{R}_{ik}\mathfrak{g}^{ik}. \quad (13)$$

Уравнения поля

Варьирование интеграла от $\mathfrak{H}$ по Γ^a_{ik} и $\mathfrak{g}^{ik}$ после интегрирования по частям дает

$$\delta \int \mathfrak{H} d\tau = \int [(-\mathfrak{A}^{ik}_a)\,\delta\Gamma^a_{ik} + G_{ik}\delta\,\mathfrak{g}^{ik}]\,d\tau. \quad (14)$$

Для $\mathfrak{U}_a^{ik}$, в силу равенств (12) и (13), мы получим

$$\mathfrak{U}_a^{ik} = \mathfrak{g}^{ik}_{,a} + \mathfrak{g}^{bk}\Gamma^i_{ba} + \mathfrak{g}^{ib}\Gamma^k_{ab} - \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{ik}\frac{g_{,a}}{g} = \mathfrak{g}^{ik}_{;a}. \tag{14a}$$

Варьирование по $\mathfrak{g}^{ik}$ приводит сначала к выражению

$$\overset{*}{R}_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik} - [\mathfrak{g}^{rs}_{,r,s} + (\Gamma^a_{rs}\mathfrak{g}^{rs})_{,a}]\,\delta(\ln\sqrt{-g}),$$

где

$$\frac{\delta g}{g} \equiv g^{ik}\delta g_{ik} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\mathfrak{g}^{ik}\delta g_{ik} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}[\delta(4\sqrt{-g}) - g_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik}]$$

или

$$\frac{\delta g}{g} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}g_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik} \equiv 2\delta(\ln\sqrt{-g}).$$

Используя это выражение, получаем в качестве результата варьирования по g

$$G_{ik} \equiv \overset{*}{R}_{ik} - \frac{1}{2\sqrt{-g}}[\mathfrak{g}^{rs}_{,r,s} + (\Gamma^a_{rs}\mathfrak{g}^{rs})_{,a}]\,g_{ik}. \tag{14б}$$

Тогда уравнения поля, следующие из нашего вариационного принципа, таковы:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{U}_a^{ik} &= 0,\\ G_{ik} &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Первая система эквивалентна уравнению (6). Вторую систему можно преобразовать, используя первую. Именно, из уравнения (6) получаем

$$\mathfrak{g}^{as}_{;s} = 0 = \mathfrak{g}^{as}_{,s} + \mathfrak{g}^{bs}\Gamma^a_{bs} + \mathfrak{g}^{ab}\Gamma^s_{sb} - \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{as}\frac{g_{,s}}{g}$$

или, в силу уравнения (7),

$$\mathfrak{g}^{as}_{,s} + \mathfrak{g}^{bs}\Gamma^a_{bs} - \mathfrak{g}^{ab}\Gamma_b = 0$$

[здесь Γ_b имеет тот же смысл, что и в уравнении (4)]. Точно так же из уравнения

$$\mathfrak{g}^{sa}_{;s} = 0 = \mathfrak{g}^{sa}_{,s} + \mathfrak{g}^{ba}\Gamma^s_{bs} + \mathfrak{g}^{sb}\Gamma_{sb} - \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{sa}\frac{g_{,s}}{g}$$

следует

$$\mathfrak{g}^{sa}_{,s} + \mathfrak{g}^{sb}\Gamma^a_{sb} + \mathfrak{g}^{ba}\Gamma_b = 0.$$

Поэтому мы получаем

$$\mathfrak{g}^{rs}_{,rs} + (\Gamma^a_{rs}\mathfrak{g}^{rs})_{,a} = (\mathfrak{g}^{ab}\Gamma_b)_{,a} = -(\mathfrak{g}^{ba}\Gamma_b)_{,a} = (\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ab}}\Gamma_b)_{,a}, \tag{16}$$

где $\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ab}}$ означает антисимметричную (мнимую) часть $\mathfrak{g}^{ab}$. Следовательно, мы можем написать

$$G_{ik} = \overset{*}{R}_{ik} - \frac{1}{2\sqrt{-g}} (\mathfrak{g}^{ab}\Gamma_b)_{,a} g_{ik}. \tag{14в}$$

Уравнения поля, таким образом, можно выписать в явном виде:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= g_{\underset{+-}{ik};\, l} = g_{ik,\, l} - g_{ak}\Gamma^a_{il} - g_{ia}\Gamma^a_{lk}, \\ 0 &= G_{ik} = \Gamma^a_{ik,\, a} - \Gamma^a_{ib}\Gamma^b_{ak} - (\ln\sqrt{-g})_{,\, i,\, k} + (\ln\sqrt{-g})_{,\, a}\Gamma^a_{i,\, k} - \\ &\qquad - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{-g}} (\mathfrak{g}^{ab}\Gamma_b)_{,\, a} g_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{15б}$$

Последний член в выражении для G_{ik} обращается в нуль в случае вещественного поля. Остаток тождествен с однократно свернутым тензором кривизны.

Уравнения совместны, поскольку они выведены из принципа Гамильтона; они связаны четырьмя (вещественными) тождествами, которые можно вывести известным методом.

На вопрос, имеют ли эти уравнения физический смысл, ответить трудно. Можно было бы считать, что антисимметричная часть g_{ik} связана с электромагнитным полем, хотя бы для бесконечно малых полей. Однако исследование уравнений первого приближения показывает, что они слабее, чем уравнения Максвелла. Для того чтобы задать эти поля, достаточно лишь потребовать их регулярности во всем пространстве. Физическая проверка теории зависит от построения точных решений (если среди них есть регулярные). Это — трудная задача. Однако теория кажется достаточно естественной, чтобы оправдать даже бóльшие усилия.

Добавление при корректуре

Рассмотрение полученных уравнений поля наводит на мысль о введении четырех уравнений:

$$\gamma_s = 0.$$

Это можно сделать, если существуют четыре добавочных тождества между этими уравнениями и уравнениями поля (15б), выведенными из функции Гамильтона. В этом случае однократно свернутая кривизна (9) обладает эрмитовой симметрией, последний член во втором уравнении (15б) обращается в нуль и правая часть этих уравнений поля становится тождественной с однократно свернутой кривизной (9). Я действительно смог установить такие тождества. Однако пояснения этого пункта откладываются до отдельной статьи, поскольку их смысл связан с новым методом вывода уравнений поля.

Поступила 19 июня 1945 г

В этой статье изложен новый (четвертый) вариант единой теории поля. К предыдущим вариантам (теория Вейля с неинтегрируемой длиной, пятимерная теория Калуцы, абсолютный параллелизм) Эйнштейн больше не возвращался. Все последние его надежды связываются с обобщением свойств метрического тензора g_{ik}, которые занимают его до последних работ (статьи 144—146).

ВЛИЯНИЕ РАСШИРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА НА ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ, ОКРУЖАЮЩИЕ ОТДЕЛЬНЫЕ ЗВЕЗДЫ *

(Совместно с Э. Страусом)

Постановка задачи

В теории относительности гравитационное поле вблизи отдельной звезды обычно описывается центрально-симметричным статическим решением уравнений поля, которое впервые было установлено Шварцшильдом. Эти поля с увеличением расстояния от порождающих их масс асимптотически переходят в пространство Эвклида (или, точнее, Минковского). Они, так сказать, вложены в «плоское» пространство. С другой стороны, мы знаем, что реальное пространство расширяется и что при существовании отличной от нуля средней плотности материи уравнения поля должны содержать такое расширение.

Таким образом, граничные условия, на которых основано решение Шварцшильда, непригодны для реальной звезды. В частности, граничные условия, пригодные для расширяющегося пространства, зависят от времени. Поэтому априори можно ожидать, что поле, окружающее одиночную звезду, существенно зависит от времени.

Задача о временно́й зависимости поля представляет особый интерес, так как такое зависящее от времени поведение могло бы играть существенную роль в теории материи. В этой связи высказывались предположения, что могут существовать соотношения, связывающие космические и атомные константы.

Исследование, проведенное ниже, показало, что расширение пространства не влияет на структуру гравитационного поля отдельной звезды и что поле является статическим, хотя и в ограниченной окрестности.

* *Influence of the Expansion of Space on the Gravitation Fields, Surrounding the Individual Stars* (With E. Straus). Rev. Modern Phys., 17, 1945, 120—124. (В текст внесены поправки в соответствии со статьей 129.— *Прим. ред.*)

Метод

Как обычно в космологических решениях, исходим из пространственно постоянной плотности материи (в отсутствие давления). Метрика тогда имеет вид

$$ds^2 = \frac{-T^2}{(1+rz/2)^2}\delta_{ik}dx_i dx_k + dt^2, \tag{A}$$

где

$$r = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2);$$

T — функция только времени t. Сферический случай соответствует $z = 1$, псевдосферический — $z = -1$, пространственно плоский — $z = 0$. Рис. 1 иллюстрирует сферический случай $z = 1$; каждая из двух окружностей заменяет трехмерное пространственное сечение четырехмерного континуума. Частица, в момент t_1 находившаяся в точке P_1, а в момент t_2 — в точке P_2, всегда находится на одной и той же радиальной линии на нашем рисунке. Пространственные координаты в соотношении (A) выбраны так, чтобы для фиксированной частицы они не зависели от времени t («космические координаты»). В конформно эвклидовом представлении началом пространственных координат служит произвольно выбранная точка.

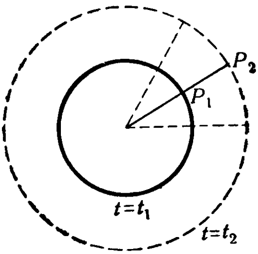


Рис. 1.

Мы рассмотрим теперь область G, вырезанную из континуума следующим образом. Рассмотрим все (двумерные) сферы с постоянным радиусом P, не зависящим от времени (в «космических координатах»), построенные вокруг начала координат в каждом временно́м сечении. Внутренность всех этих сфер образует четырехмерную область G. Рассмотрим метрическое поле в этой области G, заменяя его на поле, источник которого (описываемый сингулярностью метрического поля) сосредоточен в (пространственном) начале координат $x_1=x_2=x_3=0$. Вне сингулярности это поле должно удовлетворять уравнениям для пустого пространства: $R_{ik} = 0$. При $r = P$ это поле должно непрерывно переходить в первоначальное поле (A). При этом переходе компоненты g_{ik} и их первые производные должны оставаться непрерывными.

Решение этой задачи дает поле во всем континууме; внутри области G оно порождается сосредоточенной массой, вне области G — равномерно распределенной материей. Кроме того, ясно, что в остальных сферических областях вне G поле можно тем же методом заменить на поле, порождаемое точечной массой. Продолжая этот процесс замены, можно получить такое поле, что вся метрика будет порождена точечными массами, а не непрерывным распределением материи.

Возможность получения строгого решения этим методом достигается той ценой, что во избежание математических осложнений мы не допускаем, чтобы вырезанные области перекрывались. Это требует введения бесконечного числа точечных масс со все меньшими массами, чтобы можно было заменить весь континуум полем, порожденным дискретными точечными массами.

Однако этот недостаток нас мало беспокоит. Мы можем ограничиться рассмотрением лишь того случая, когда внутренняя часть области G заменена полем, порожденным точечной массой, расположенной в пространственном центре области, и сшить это решение непрерывно (при всех значениях t) с решением, порожденным непрерывно распределенным веществом на границе области G.

I. Уравнения поля внутри области G и граничные условия для перехода в остальное пространство с однородной плотностью материи

Общее центрально-симметричное поле можно привести к (конформно-эвклидовой, необязательно статической) форме [1]

$$ds^2 = -e^{\mu}\delta_{ik}dx_i dx_k + e^{\nu}dt^2 \qquad i, k = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где μ и ν — функции r и t. Теперь уравнения поля $R_{ik} = 0$ $(i, k=1, 2, 3, 4)$ принимают вид

$$\mu_{rr} + \nu_{rr} - \frac{1}{2}(\mu_r^2 - \nu_r^2) - \mu_r\nu_r = 0, \tag{2.1}$$

$$r\left(\mu_{rr} + \frac{1}{2}\mu_r^2 + \frac{1}{2}\mu_r\nu_r\right) + \\ + \left(2\mu_r + \frac{1}{2}\nu_r\right) - \frac{1}{2}e^{\mu-\nu}\left(\mu_{tt} + \frac{3}{2}\mu_t^2 - \frac{1}{2}\mu_t\nu_t\right) = 0, \tag{2.2}$$

$$2\mu_{rt} - \mu_t\nu_r = 0, \tag{2.3}$$

$$r\left(\nu_{rr} + \frac{1}{2}\nu_r^2 + \frac{1}{2}\mu_r\nu_r\right) + \frac{3}{2}\nu_r - \frac{3}{2}e^{\mu-\nu}\left(\mu_{tt} + \frac{1}{2}\mu_t^2 - \frac{1}{2}\mu_t\nu_t\right) = 0; \tag{2.4}$$

здесь индексы обозначают дифференцирование.

[1] В дальнейшем индексы всегда будут принимать значения 1, 2, 3.

Как установлено выше, остальная часть пространства с однородным распределением вещества является полем с постоянной пространственной кривизной, которое в конформно эвклидовом представлении описывается соотношением

$$ds^2 = \frac{-T^2}{(1+zr/2)^2}\delta_{ik}dx_i dx_k + dt^2,$$

где z и T имеют тот же смысл, что и ранее.

Наши граничные условия заключаются теперь в том, что поле (1) при $r = P$ должно непрерывно, вместе с первой производной переходить в поле (3) [2]; иначе говоря, при $r = P$

$$e^{\mu} = T^2/(1+zr/2)^2, \tag{4.1}$$

$$\mu_r e^{\mu} = -zT^2/(1+zr/2)^3, \tag{4.2}$$

$$e^{\nu} = 1, \tag{4.3}$$

$$\nu_r e^{\nu} = 0. \tag{4.4}$$

Из этих уравнений можно найти значения μ, ν, μ_r, ν_r, μ_t, ν_t, μ_{rt} и μ_{tt}, при $r = P$. Если подставить эти значения в уравнения (2), то получим (при $r = P$)

$$\mu_{rr} + \nu_{rr} - \frac{z^2}{2c^2} = 0, \tag{2.1.1}$$

$$r\left(\mu_{rr} + \frac{z^2}{2c}\right) - \frac{2z}{c} - \frac{1}{c^2}(TT'' + 2T'^2) = 0, \tag{2.2.1}$$

$$r\nu_{rr} - (3/c^2)\,TT'' = 0, \tag{2.4.1}$$

где $c = 1 + \frac{1}{2}zr$. [Уравнение (2.3) выполняется тождественно.] Если исключить μ_{rr} и ν_{rr} из этих уравнений, то получим

$$TT'' + \frac{1}{2}T'^2 = -z/2. \tag{5}$$

Путем дифференцирования получается

$$2T'T'' + TT''' = 0. \tag{5.1}$$

Интегрируя это, получаем

$$T^2T'' = -k/2. \tag{5.2}$$

---

[2] Эти граничные условия всегда достаточны, но не всегда *необходимы*, так как может случиться, что разрывность функций g_{ik} или их первых производных обусловлена разрывностью соответствующих систем координат, а не разрывностью полей. В нашем случае такая возможность устранена применением конформно-эвклидового представления для обоих полей.

Подставляя это выражение для T^2T'' в уравнение (5), получаем

$$T'^2 = (k - zT)/T.$$

Этот результат согласуется с решением уравнений поля в случае постоянной в пространстве плотности материи (космологическая проблема).

II. Приближенное решение уравнений поля и граничные условия для области, достаточно близкой к границе G

В качестве первого приближения в области, близкой к границе области G, мы положим

$$e^{-\mu} = -T^{*2} + \sigma,$$

$$e^{\nu} = 1 + \tau,$$

где $\sigma = a_1 r^{-1/2} + a_2 r$; $\tau = b_0 + b_1 r^{-1/2} + b_2 r$; a_i, b_i и T^* — функции времени t. Здесь σ и τ — малые первого порядка. Далее мы примем, что дифференцирование по t увеличивает порядок малости на $^1/_2$.

В этих формулах, помимо члена, который не зависит от r, содержится член, пропорциональный $r^{-1/2}$ и соответствующий полю точечной массы, вложенному в эвклидово пространство. Кроме того, формулы содержат член, пропорциональный r, который соответствует регулярной части поля. Этот член появляется благодаря тому, что в данном случае в эвклидово пространство ничего не вкладывалось.

Теперь, если пренебречь членами более высокого порядка, уравнения поля (2) примут следующий вид:

$$\sigma_{rr} - T^{*2}\tau_{rr} = 0, \tag{2.1.2}$$

$$2r\sigma_{rr} + 4\sigma_r - T^{*2}\tau_r + 2T^{*2}(2T^{*\prime 2} + T^{*}T^{*\prime\prime}) = 0, \tag{2.2.2}$$

$$\frac{T^{*\prime}}{T^{*}}(T^{*2}\tau_r - 2\sigma_r) + \sigma_{rt} = 0, \tag{2.3.2}$$

$$r\tau_{rr} + \frac{3}{2}\tau_r - 3T^{*}T^{*\prime\prime} = 0. \tag{2.4.2}$$

Выделяя члены с одинаковыми степенями r, получаем

$$a_1 = T^{*2}, \tag{6.1}$$

$$4a_2 - T^{*}b_2 + 2T^{*2}(2T^{*\prime 2} + T^{*\prime}T^{*\prime}) = 0, \tag{6.2}$$

$$\frac{T^{*\prime}}{T^{*}}(T^{*2}b_1-2a_1)+a_1'=0, \tag{6.3}$$

$$\frac{T^{*\prime}}{T^{*}}(T^{*2}b_2-2a_2)+a_2'=0, \tag{6.4}$$

$$b_2-2T^{*}T^{*\prime\prime}=0 \tag{6.5}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} a_1 &= k_1T^{*}, \\ a_2 &= -T^{*2}T^{*\prime 2}, \\ b_1 &= k_1T^{*-1}, \\ b_2 &= 2T^{*}T^{*\prime\prime}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Если пренебречь высшими степенями P, то граничные условия (4) принимают вид

$$T^{*2}-k_1T^{*}P^{-1/2}+T^{*2}T^{*\prime 2}P=T^2-zT^2P, \tag{4.1.1}$$

$$\frac{1}{2}k_1T^{*}P^{-3/2}+T^{*2}T^{*\prime 2}=-zT^2, \tag{4.2.1}$$

$$b_0+k_1T^{*-1}P^{-1/2}+2T^{*}T^{*\prime\prime}P=0, \tag{4.3.1}$$

$$-\frac{1}{2}k_1T^{*-1}P^{-3/2}+2T^{*}T^{*\prime\prime}=0. \tag{4.3.2}$$

Отсюда следует, что T^* отличается от T только членами первого порядка и что постоянная k в уравнении (5.3) в первом приближении дается формулой $k=(-k_1/2)\,P^{-3/2}$. В этом случае уравнения (4) удовлетворяются.

Наше поле описывается так:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (-T^{*2}+k_1T^{*}r^{-1/2}-T^{*2}T^{*\prime 2}r)\,\delta_{ik}\,dx_idx_k + \\ &\quad + (1+b_0+k_1T^{*-1}r^{-1/2}+2T^{*}T^{*\prime\prime}r)\,dt^2 = [-T^{*2}+k_1T^{*}r^{-1/2}- \\ &\quad - T^{*}(k-zT^{*})\,r]\,\delta_{ik}dx_idx_k+[1+b_0+k_1T^{*-1}r^{-1/2}-kT^{*-1}r]\,dt^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим это решение для бесконечно малого интервала времени вблизи $t=t_0$ и преобразуем его так, чтобы оно осталось конформно-эвклидовым, а коэффициент при $\delta_{ik}dx_idx_k$ стал равным -1 с точностью до бесконечно малых членов («локальные координаты»). Тогда мы приходим (пренебрегая меньшими членами) к соотношению

$$ds^2 = (-1 + k_1 r'^{-1/2})\,\delta_{ik}dx_i dx_k + (1 + k_1 r'^{-1/2})\,dt'^2. \tag{7.1}$$

Этот результат заслуживает внимания, так как он полностью описывает статическое поле, тождественное в первом приближении полю Шварцшильда.

Этот результат подтверждает, что поле внутри области G точно совпадает с полем Шварцшильда.

III. Доказательство того, что решение внутри области G можно преобразовать в статическое поле Шварцшильда

Статическое поле Шварцшильда в его конформно-эвклидовой форме задается соотношением

$$ds^2 = -a^4\delta_{ik}dx'_i\,dx'_k + \frac{b^2}{a^2}\,dt'^2, \tag{8}$$

где

$$a = 1 + \frac{m}{r'^{1/2}}, \qquad b = 1 - \frac{m}{r'^{1/2}}.$$

Общее преобразование, оставляющее это поле центрально-симметричным, будет

$$x'_i = Ux_i, \qquad t' = Vt, \tag{9}$$

где U, V — функции r, t.

Поле, описываемое соотношением (8), принимает теперь вид

$$ds^2 = -a^4U^2\delta_{ik}dx_idx_k + \left[-2a^4U_r(U + rU_r) + \frac{b^2}{a^2}V_r^2\right]x_ix_kdx_idx_k +$$
$$+\left[-a^4U_t(U + 2rU_r) + \frac{b^2}{a^2}V_rV_t\right]x_idx_idt + \left[-2ra^4U_t^2 + \frac{b^2}{a^2}V_t^2\right]dt^2, \tag{8.1}$$

где

$$a = 1 + \frac{m}{r^{1/2}U}, \qquad b = 1 - \frac{m}{r^{1/2}U}.$$

Наша цель теперь — показать, что можно подобрать такие функции U и V, что соотношение (8.1) примет вид (1) и граничные условия (4) будут удовлетворены. Когда мы докажем это, то будем знать, что поле Шварцшильда можно преобразовать в решение нашей задачи, если не выходить за пределы области G, и, поскольку граничные условия обеспечивают единственность решения, наша теорема будет доказана.

Чтобы наше поле описывалось линейным элементом вида (1), должны выполняться уравнения

$$-2a^4U_r(U+rU_r)+(b^2/a^2)V_r^2=0, \tag{10.1}$$

$$-a^4U_t(U+2rU_r)+(b^2/a^2)V_rV_t=0. \tag{10.2}$$

Тогда поле Шварцшильда описывается линейным элементом вида

$$ds^2=-a^4U^2\delta_{ik}dx_idx_k+[-2ra^4U_t^2+(b^2/a^2)V_t^2]\,dt^2. \tag{8.2}$$

Граничными условиями при $r=P$ будут

$$a^4U^2=T^2/c^2, \tag{4.1.2}$$

$$\partial/\partial r\,(a^2U)=(\partial/\partial r)\,(T/c), \tag{4.2.2}$$

$$-2ra^4U_t^2+(b^2/a^2)V_t^2=1, \tag{4.3.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}[-2ra^4U_t^2+(b/a^2)V_t^2]=0, \tag{4.4.2}$$

где для сокращения введены обозначения: $c=1+zr/2$ и $a=1-zr/2$.

Эти соотношения образуют четыре граничных условия для уравнений (10). Из теорем существования для дифференциальных уравнений известно, что уравнения (10) вместе с граничными условиями (4.1.2) и (4.3.2) имеют единственное [3] решение. Чтобы доказать существование функций U и V, удовлетворяющих всем уравнениям (10) и условиям (4), мы должны показать, что условия (4.2.2) и (4.4.2) следуют из уравнений (10) и условий (4.1.2), (4.3.2).

Из (10.2) следует

$$V_r=\frac{a^6}{b^2}\frac{U_t}{V_t}(U+2rU_r); \tag{10.3}$$

подставляя это выражение для V_r в уравнение (10.1), получаем

$$-2U_r(U+rU_r)+\frac{a^6}{b^2}\cdot\frac{U_t^2}{V_t^2}(U+2rU_r)^2=0. \tag{10.4}$$

Граничные условия (4) требуют при $r=P$

$$T=a^2cU; \tag{11.1}$$

$$U_t=\frac{T'}{abc},\qquad U_t^2=\frac{k-za^2cU}{a^4b^2c^3U}; \tag{11.2}$$

[3] Не считая того, что в значение V на границе входит произвольная постоянная.

$$U_r = \frac{2mr^{-3/2} - zU}{2bc},$$

$$U + rU_r = (2U - zmr^{1/2})/2bc, \qquad U + 2rU_r = \frac{adU}{bc}; \tag{11.3}$$

$$V_t^2 = \frac{a^2}{b^2}(1 + 2ra^4U_t^2) = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{2rk + cU\,(b^2c^2 - 2zra^2)}{b^2c^3U}; \tag{11.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(V_t^2) = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{a^2}{b^2}(1 + 2ra^4U_t^2)\right]. \tag{11.5}$$

Если уравнения (11.2) — (11.4) подставить в уравнение (10.4), то получим выражение, которое обращается в нуль тождественно по U, если

$$k = 2m\left(1 + \frac{zP}{2}\right)^3 P^{-3/2}. \tag{12}$$

Таким образом, в этом случае уравнение (4.2.2) следует из уравнений (10) и условий (4.1.2) и (4.3.2).

Если затем уравнения (10.3) и (11.5) подставить в уравнение

$$V_r\frac{\partial}{\partial r}(V_t^2) - V_t\frac{\partial}{\partial t}(V_r^2) = 0 \tag{13}$$

то, приняв во внимание значение k в (12), получим (при $r = P$)

$$\frac{a^7\,dU}{b^3c}\,\frac{U_t}{V_t}\,\frac{\partial}{\partial r}(V_t^2) - V_t\frac{\partial}{\partial U}(V_r^2)\,U_t = 0,$$

или

$$\frac{a^7\,dU}{b^3c}\,\frac{\partial}{\partial r}(\ln V_t^2) - \frac{\partial}{\partial U}(V_r^2)^2 = 0,$$

что снова является тождеством относительно U. Следовательно, условие (4.4.2) также является следствием уравнений (10) и условий (4.1.2) и (4.3.2). Наше предположение, таким образом, подтвердилось.

Заключение

Поле точечной массы внутри области G, вложенное в расширяющееся пространство, является, если рассматривать его в «локальных координатах», статическим полем, задаваемым решением Шварцшильда. Зависимость от времени, вводимая расширением, не нарушает независимости решения от времени. Зависящей от времени становится граница области G, где поле Шварцшильда переходит в поле, порожденное однородно распределенной материей.

ПОПРАВКИ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К НАШЕЙ РАБОТЕ „ВЛИЯНИЕ РАСШИРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА НА ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ, ОКРУЖАЮЩИЕ ОТДЕЛЬНЫЕ ЗВЕЗДЫ“ *

(Совместно с Э. Страусом)

Макс Уаймен обратил наше внимание на несколько ошибок в формулах во второй части нашей работы [1]. Эти ошибки произошли вследствие изменения обозначений при окончательной подготовке рукописи. Это объясняет, почему они не повлияли на окончательные результаты.

Исправления, которые необходимо сделать, таковы. На стр. 627 на строке 10 вместо e^{μ} должно быть $e^{-\mu}$; на строке 12 — вместо $\tau = b_1 r^{-1/2} + \ldots$ должно быть $\tau = b_0 + b_1 r^{-1/2} + \ldots$. В уравнении (2.4.2) вместо $-\,^3/_2\,\tau_r$ должно стоять $+\,^3/_2\tau_r$; в уравнении (4.3.1) вместо $k_1 T^{*-1} P^{-1/2}$ должно стоять $b_0 + k_1 T^{*-1} P^{-1/2}$; в уравнении (7) к коэффициенту при dt^2 должен быть добавлен член b_0. На стр. 628, на строке 2 снизу вместо $+1$ следует читать -1.

Мак-Витти обратил наше внимание на работы его и Иернфельта [2], которые, к сожалению, нам были неизвестны. Они уже пришли к заключению, что расширение и кривизна пространства не влияют на поле вблизи отдельной звезды.

Однако мы думаем, что наша работа не была лишней, так как рассмотрение задачи в ней значительно проще и можно яснее увидеть ее смысл. Упрощение достигнуто следующим приемом: вместо введения неравномерного распределения материи во всем пространстве мы заменили лишь пылевидную материю внутри пространственной области G со сферической

* *Corrections and additional Remarks to our Paper: «The Influence of the Expansion of Space on the gravitational Fields surrounding the individual Stars»* (With E. Straus). Rev. Modern Phys., 18, 1946, 148—149.

[1] В переводе работы (статья 128) эти ошибки исправлены.— *Прим. ред.*

[2] McVittie. M. N. R. A. S., 1932, 92, 499—518; 1933, 93, 325—339; G. Järnefelt. Ann. Acad. Sci., Fenn., A1, 1942, 12, 3—38; Ann. Acad. Sci. Fenn., A40, 1940, 3; Ark. mat. astron. phys., 27A, 1940, 15.

границей массой, расположенной в центре этой сферы, или, скорее, сингулярностью, описывающей эту массу.

Из доказательства того, что полученное таким путем поле можно преобразовать в поле Шварцшильда, следует, что внутри звезды и в некоторой ее окрестности все свойства таковы, как если бы звезда была вложена в нерасширяющееся пространство, лишенное кривизны.

После публикации нашей работы нам стало ясно, что всякое нестатическое центрально-симметричное решение уравнений поля можно преобразовать в решение Шварцшильда. Ниже мы дадим набросок доказательства [3].

Покажем сначала, что если μ не зависит от времени при каком-либо значении $r (r = \rho)$, то это решение можно преобразовать в статическое решение. Из уравнения (2.3) мы видим, что $\mu_{rt} = 0$ при $r = \rho$.

Дифференцируя уравнение (2.3) последовательно по r, мы видим, что при $r = \rho$ и при всех n

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^n}{\partial r^n} \mu = 0.$$

Следовательно, $\mu_t \equiv 0$ при всех r.

С учетом этого уравнение (2.2) принимает вид

$$r\left(\mu_{rr} + \frac{1}{2}\mu_r^2 + \frac{1}{2}\mu_r\nu_r\right) + \left(2\mu_r + \frac{1}{2}\nu_r\right) = 0,$$

или

$$\nu_r = -(4\mu_r + 2r\mu_{rr} + r\mu_r^3) / (1 + r\mu_r).$$

Следовательно, ν_r не зависит от t, и ν имеет вид

$$\nu = F(r) + \varphi(t).$$

Теперь наше решение будет

$$ds^2 = -e^{\mu(r)}\delta_{ik}\,dx_i\,dx_k + e^{F(r)}e^{\varphi(t)}\,dt^2.$$

Если новую временную координату выбрать такой, чтобы $dt' = e^{\varphi/2}dt$, то решение примет вид

$$ds^2 = -e^{\mu(r)}\delta_{ik}\,dx_i\,dx_k + e^{F(r)}\,dt'^2.$$

Это решение является статическим. Поскольку известно, что единственным центрально-симметричным решением является поле Шварцшильда, то мы к нему и приходим.

....

[3] Впоследствии мы заметили, что эта теорема уже была доказана Биркгофом в его книге «Theory of Relativity and Modern Physics», Cambridge, 1923, 253—256.

Теперь мы должны показать, что заданное решение уравнений поля (2) можно преобразовать таким образом, чтобы μ при фиксированном r ($r = \rho$) было независимым от t. Из преобразования (9) мы видим, что

$$\exp[\mu^*(r, t)] = \exp[\mu(U^2 r, V)]\, U^2$$

с новым коэффициентом при $-\delta_{ik}\, dx_i\, dx_k$. Мы хотим выбрать U и V так, чтобы уравнение (10) удовлетворялось и чтобы при $r = \rho$ выполнялось уравнение

$$\mu_t^*(\rho, t) = 0$$

или

$$\mu(U^2\rho, V) + 2\ln U = c. \tag{A}$$

Это — функциональное уравнение с двумя переменными U и V, которое, вообще говоря, имеет бесконечно много решений.

Мы должны показать, что уравнения (10) совместны с этим граничным условием. Уравнение (10.4) можно записать в виде

$$U_r^2\left(-2r + 4r^2 e^{(\mu-\nu)}\frac{U_r^2}{V_t^2}\right) + U_r\left(-2U + 4rUe^{(\mu-\nu)}\frac{U_t^2}{V_t^2}\right) + e^{(\mu-\nu)}U\frac{U_t^2}{V_t^2} = 0$$

или

$$\left(U_r + \frac{1}{2r}U\right)^2 + \frac{U^2}{4r^2}\left(-1 + 2re^{(\mu-\nu)}\frac{U_t^2}{V_t^2}\right)^{-1} = 0. \tag{Б}$$

Это уравнение можно разрешить относительно U_r, если

$$-1 + 2re^{\mu-\nu}\frac{U_t^2}{V_t^2} < 0. \tag{В}$$

Но из уравнения (8.2) мы имеем

$$e^{\nu^*} = -2re^{\mu}U_t^2 + e^{\nu}V_t^2 = -e^{\nu}V_t^2\left(-1 + 2re^{\mu-\nu}\frac{U_t^2}{V_t^2}\right).$$

Поэтому неравенство (В) удовлетворяется, и уравнение (Б) можно разрешить относительно U_r. Мы знаем теперь, что после того, как мы определили $U(\rho, t)$ и $V(\rho, t)$ так, чтобы удовлетворялось граничное условие (А), можно найти $U_r(\rho, t)$ из уравнения (Б) и $\partial^n U/\partial r^n(\rho, t)$ путем дифференцирования уравнения (Б) и исключения V_{rt} с помощью уравнений (10.1) и (10.2).

Определив U, мы сразу определяем V из уравнения (10.1) и граничного условия (А). Таким образом показано, что каждое центрально-симметричное решение описывает поле Шварцшильда.

Мы опустили, конечно, какое-либо обсуждение вопроса о существовании истинных решений при граничных условиях (А) или о сходимости разложения U в ряд Тейлора, которое мы получили из уравнения (Б).

З а к л ю ч и т е л ь н о е з а м е ч а н и е. В космологической теории до сих пор принималось, что звездное вещество можно заменять непрерывно распределенной «пылевидной» материей. Исследования Мак-Витти, Иернфельта и наши оправдывают это предположение. Если его считать верным, то теорема о тождестве каждого динамического центрально-симметричного решения с решением Шварцшильда уже ведет к заключению, что свойства мира планет такие же, как если бы не существовало ни космического расширения, ни кривизны.

ОБОБЩЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ. II*

(Совместно с Э. Страусом)

В предыдущей работе [1] один из нас развил общерелятивистскую теорию; в этой теории:

1. Используется группа вещественных преобразований четырех координат $(x_1,\ldots,x_4)$.

2. Зависимыми переменными служат компоненты тензора g_{ik}, который принят комплексным и эрмитово-симметричным. В. Паули заметил, что в развитой на этой основе теории ограничение случаем эрмитово-симметричного g_{ik} не является необходимым.

3. Как было отмечено в добавлении при корректуре, представляется естественным принять, что поле удовлетворяет уравнениям

$$\Gamma_i = \frac{1}{2}(\Gamma^a_{ia} - \Gamma^a_{ai}) = 0. \tag{1}$$

Утверждалось, но не доказывалось, что существуют тождества, позволяющие присоединить эти уравнения, не делая систему переопределенной. Однако это утверждение было основано на ошибке. Введение уравнения (1) требует другого вывода уравнений поля из первоначальных уравнений и (небольшого) изменения новых уравнений по сравнению с уравнениями поля, полученными в первой работе.

Здесь сохраняется математический формализм теории за исключением изменения правил абсолютного дифференцирования тензорных плотностей. Предполагается, что в остальном формализм известен.

* *Generalization of the relativistic Theory of Gravitation. II* (With E. Straus). Ann. Math., 47, 1946, 731—741.

[1] A. Einstein. Ann. Math., 1945, 46, 578. (Статья 127.— *Ред.*)

§ 1. Бесконечно малый параллельный перенос фундаментального тензора. Абсолютное дифференцирование плотностей

Для теории характерна связь между g_{ik} и Γ^a_{ik}. Она задается соотношением

$$(g_{\underset{+}{i}\underset{-}{k};a}\equiv)\, g_{ik,a}-g_{sk}\Gamma^s_{ia}-g_{is}\Gamma^s_{ak}=0. \tag{2}$$

Это определение Γ через g обладает следующим свойством: если тензору g_{ik} соответствует параллельный перенос Γ^a_{ik}, согласно соотношению (2), то тензору $\tilde{g}_{ik}=g_{ki}$ соответствует $\tilde{\Gamma}^a_{ik}=\Gamma^a_{ki}$.

Доказательство. Если образовать левую часть соотношения (2) для $\tilde{g}_{ik}$ и $\tilde{\Gamma}^a_{ik}$, то получим

$$\tilde{g}_{ik,a}-\tilde{g}_{sk}\tilde{\Gamma}^s_{ia}-\tilde{g}_{is}\tilde{\Gamma}^s_{ak}.$$

Если ввести здесь g и Γ в соответствии с приведенным определением и переставить последние два члена, то получим

$$g_{ki,a}-g_{si}\Gamma^s_{ka}-g_{ks}\Gamma^s_{ai}.$$

Это выражение, согласно нашему предположению, обращается в нуль, поскольку оно превращается в левую часть равенства (2), если мы переставим свободные индексы i и k.

Замечание. Только что установленное свойство не имеет ничего общего с предположением, что g_{ik} и Γ^a_{ik} эрмитовы по индексам i и k. Эти величины можно считать вещественными, но несимметричными; тогда число независимых компонент g и Γ равно числу компонент в случае эрмитовой симметрии. Таким способом приходим к теории, которая отличается от ранее развитой лишь знаками некоторых членов.

Абсолютное дифференцирование тензорных плотностей

Если левую часть соотношения (2) умножить на $\frac{1}{2}g^{ik}$, то получим [2] вектор

$$\frac{(\sqrt{-g})_{,a}}{\sqrt{-g}}-\frac{1}{2}(\Gamma^s_{as}+\Gamma^s_{sa}). \tag{2.1}$$

[2] См. цитированную выше работу.

Умножив последнее выражение на $\sqrt{-g}$, мы получаем векторную плотность

$$(\sqrt{-g})_{,a}-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,(\Gamma^s_{as}+\Gamma^s_{sa}).$$

Мы определяем ее как ковариантную производную $(\sqrt{-g})_{;a}$ от скалярной плотности $\sqrt{-g}$. Соответственно мы определяем ковариантную производную от каждой скалярной плотности ρ:

$$\rho_{;a}=\rho_{,a}-\rho\frac{1}{2}(\Gamma^s_{as}+\Gamma^s_{sa}). \tag{3}$$

Отсюда известным способом получаются правила дифференцирования для всех тензорных плотностей, например,

$$\overset{ik}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;a}=\mathfrak{g}^{ik}_{,a}+\mathfrak{g}^{sk}\Gamma^i_{sa}+\mathfrak{g}^{is}\Gamma^k_{as}-\mathfrak{g}^{ik}\frac{1}{2}(\Gamma^s_{as}+\Gamma^s_{sa}). \tag{3.1}$$

Можно легко показать, что уравнения

$$\overset{ik}{g}{}^{+-}_{;l}=0,\qquad \overset{ki}{g}{}^{-+}_{;l}=0,\qquad \overset{ik}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;l}=0$$

здесь также эквивалентны.

Когда соотношение (2) удовлетворяется, правило дифференцирования тензорных плотностей соответствует определенному раньше. Для контравариантной тензорной плотности мы получаем

$$\overset{i}{\mathfrak{A}}{}^{+}_{;a}=\mathfrak{A}^i_{,a}+\mathfrak{A}^s\Gamma^i_{sa}-\mathfrak{A}^i\frac{1}{2}(\Gamma^s_{as}+\Gamma^s_{sa})$$

и для дивергенции

$$\overset{a}{\mathfrak{A}}{}^{+}_{;a}=\mathfrak{A}^a_{,a}+\mathfrak{A}^a\Gamma_a, \tag{3.2}$$

а также

$$\overset{a}{\mathfrak{A}}{}^{-}_{;a}=\mathfrak{A}^a_{,a}-\mathfrak{A}^a\Gamma_a. \tag{3.3}$$

Здесь мы видим, насколько естественно ограничивать поле уравнением (1). В самом деле, в правых частях равенств (3.2) и (3.3) каждый член имеет тензорный характер; согласно же уравнению (1), остается лишь один член.

Есть и другие формальные поводы для постулирования уравнений (1), которые следует упомянуть здесь. Как и в теории с симметричным метрическим тензором g_{ik}, свернутый один раз тензор кривизны играет важную роль. Свертка тензора кривизны

$$R^i_{klm} \equiv \Gamma^i_{kl,\,m} - \Gamma^i_{al}\Gamma^a_{km} - \Gamma^i_{km,\,l} + \Gamma^i_{am}\Gamma^a_{kl}$$

по индексам i и k обращается в нуль тождественно в первоначальной теории гравитации.

Здесь же мы получаем тензор

$$R^a_{alm} = \Gamma^a_{al,\,m} - \Gamma^a_{am,\,l},$$

который, вообще говоря, не обращается в нуль, даже если соотношение (2) удовлетворено. Именно, если мы преобразуем правую часть этого равенства, используя вытекающее из (2.1) соотношение

$$(\Gamma^a_{al} + \Gamma^a_{la})_{,\,m} - (\Gamma^a_{am} + \Gamma^a_{ma})_{,\,l} \equiv 0, \tag{2.2}$$

то получим

$$R^a_{alm} \equiv -(\Gamma_{l,\,m} - \Gamma_{m,\,l}).$$

Этот тензор, вообще говоря, отличен от нуля, но он обратится в нуль, когда поле будет удовлетворять уравнению (1). Если мы свернем тензор кривизны R^i_{klm} по индексам i и m, то получим тензор

$$R_{kl} \equiv R^a_{kla} \equiv \Gamma^a_{kl,\,a} - \Gamma^a_{kl}\Gamma^l_{al} - \Gamma^a_{ka,\,l} + \Gamma^a_{kl}\Gamma^l_{al}.$$

Последний тензор, вообще говоря, неэрмитов, т. е. он не переходит сам в себя при замене Γ на $\widetilde{\Gamma}$ и перестановке индексов k и l. (В дальнейшем мы будем пользоваться термином «эрмитов» в этом смысле.) Для антиэрмитовой части мы получим

$$2R^*_{kl} = -\Gamma_{ka,}{}^{a}_{l} + \Gamma^a_{al,\,k} + 2\Gamma^a_{kl}\Gamma_a;$$

это выражение с учетом соотношения (2.2) принимает вид

$$R^*_{kl} = -\frac{1}{2}(\Gamma_{\underset{+}{k};\,l} + \Gamma_{\underset{-}{l};\,k}).$$

Следовательно, антиэрмитова часть R_{kl} обращается в нуль, когда удовлетворены соотношения (1) и (2).

Нетрудно было бы привести дополнительные доводы, чтобы показать, что уравнения (1) соответствуют используемой структуре пространства. Однако сказанного достаточно. Теперь наша задача — найти совместные уравнения поля (на основе вариационного принципа) таким образом, чтобы в их число входили уравнения (1) и соотношения (2).

Сначала сделаем другое формальное замечание, чтобы подготовить вывод уравнений поля. Если из выражения (3.1) мы вычислим свертки

$\mathfrak{g}^{\overset{i a}{+-}}_{;a}$ и $\mathfrak{g}^{\overset{a i}{+-}}_{;a}$, то после вычитания будем иметь

$$\frac{1}{2}\left(\mathfrak{g}^{\overset{i a}{+-}}_{;a}-\mathfrak{g}^{\overset{a i}{+-}}_{;a}\right)\equiv\mathfrak{g}^{\overset{ia}{\vee}}_{,a}-\mathfrak{g}^{\overset{ia}{-}}\Gamma_a, \tag{3.4}$$

где $\mathfrak{g}^{\overset{ia}{-}}$ — симметричная и $\mathfrak{g}^{\overset{ia}{\vee}}$ — антисимметричная части $\mathfrak{g}^{ia}$. Следовательно, если соотношение (2) удовлетворено, мы получим тождество

$$\left(\mathfrak{g}^{\overset{ia}{-}}\Gamma_a\right)_{,i}\equiv 0. \tag{3.5}$$

Поэтому, уравнения (1) удовлетворяют благодаря (2) скалярному тождеству. Из (3.4) мы видим, что соотношения (1) и (2) включают в себя уравнение

$$\mathfrak{g}^{\overset{ia}{\vee}}_{;a}=0. \tag{3.6}$$

§ 2. Гамильтониан. Уравнения поля

Выберем теперь гамильтониан

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{g}^{ik}P_{ik}+\mathfrak{A}^i\Gamma_i+b_i\mathfrak{g}^{\overset{ia}{\vee}}_{,a},$$

где P_{ik} — симметризованный тензор кривизны:

$$P_{ik}=\Gamma^a_{ik,\,a}-\frac{1}{2}\left(\Gamma^a_{ia,\,k}+\Gamma^a_{ak,\,i}\right)-\Gamma^a_{ib}\Gamma^b_{ak}+\Gamma^a_{ik}\Gamma^b_{\underline{ab}}.$$

Варьирование производится по переменным $\mathfrak{g}^{ik}$, Γ^a_{ik}, $\mathfrak{A}^i$, b_i, которые играют роль независимых переменных поля, причем две последние (чисто мнимые) величины играют роль лагранжевых множителей. [Выполнение соотношений (1) и (2) заранее не предполагается.]

Варьирование по $\mathfrak{A}^i$ и b_i приводит к уравнениям:

$$\Gamma_i=0, \tag{4}$$

$$\mathfrak{g}^{\overset{ia}{\vee}}_{,a}=0. \tag{5}$$

Для варьирования по Γ мы используем метод, предложенный Палатини для случая симметричных g и Γ. Легко проверить, рассматривая варьирование по Γ интеграла от $\mathfrak{H}$ (при $\delta\Gamma$, обращающейся в нуль на пределах интегрирования), что

$$\delta P_{ik}=\left(\delta\Gamma^{\overset{a}{0}}_{\underset{+\,-}{i,\,k}}\right)_{;\,a}-\frac{1}{2}\left(\delta\Gamma^a_{\underset{+}{ia}}\right)_{;\,k}-\frac{1}{2}\left(\delta\Gamma^a_{\underset{-}{ak}}\right)_{;\,i}.$$

Имеем

$$0 = -\overset{ik}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;a} + \frac{1}{2}\,\overset{is}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;s}\,\delta^k_a + \frac{1}{2}\,\overset{sk}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;s}\delta^i_a +$$
$$+ \frac{1}{2}\,\mathfrak{g}^{is}\Gamma_s\delta^k_a - \frac{1}{2}\,\mathfrak{g}^{sk}\Gamma_s\delta^i_a + \frac{1}{2}\,\mathfrak{A}^i\delta^k_a - \frac{1}{2}\,\mathfrak{A}^k\delta^i_a.$$

Вторая строка в уравнении (6) равна нулю в силу (4). Если мы свернем уравнение (6) сначала по k и a, затем по i и a, то получим два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \overset{is}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;s} + \frac{1}{2}\,\overset{si}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;s} + \frac{3}{2}\,\mathfrak{A}^i = 0, \\ \overset{si}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;s} + \frac{1}{2}\,\overset{is}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;s} - \frac{3}{2}\,\mathfrak{A}^i = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

Складывая эти два уравнения, получаем

$$\overset{is}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;s} + \overset{si}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;s} = 0. \tag{6.2}$$

Уравнение (3.4), которое основано на определении ковариантной производной, приводит с учетом (4) и (5) к уравнению

$$\overset{is}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;s} - \overset{si}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;s} = 0. \tag{3.7}$$

Следовательно, $\overset{is}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{s}$ и $\overset{si}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;s}$ обращаются в нуль, и поэтому уравнение (6.1) включает в себе обращение $\mathfrak{A}^i$ в нуль. Поэтому уравнение (6) сводится к уравнению

$$\overset{ik}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;a} = 0. \tag{6.3}$$

Согласно (3.4), уравнение (5) содержится в уравнениях (4) и (6.3).

Варьирование по $\mathfrak{g}^{ik}$ интеграла от $\mathfrak{H}$ дает

$$P_{ik} - \frac{1}{2}(b_{i,k} - b_{k,i}) = 0, \tag{7}$$

или отдельно для членов одинаковой симметрии:

$$P_{\underline{ik}} = 0, \tag{7.1}$$

$$P_{\underset{\vee}{ik}} - \frac{1}{2}(b_{i,k} - b_{k,i}) = 0, \tag{7.2}$$

или, после исключения вспомогательных переменных b,

$$P_{\underset{\vee}{i}k,\,l}+P_{\underset{\vee}{k}l,\,i}+P_{\underset{\vee}{l}i,\,k}=0. \tag{7.3}$$

Собирая результаты варьирования, мы получаем уравнения поля [которые несколько отличаются от уравнений (15б) первой работы]:

$$\mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}_{;\,a}=0, \tag{8.1}$$

$$\Gamma_i=0, \tag{8.2}$$

$$P_{\underline{ik}}=0, \tag{8.3}$$

$$P_{\underset{\vee}{i}k,\,l}+P_{\underset{\vee}{k}l,\,i}+P_{\underset{\vee}{l}i,\,k}=0. \tag{8.4}$$

Вывод этих уравнений из вариационного принципа (с вещественным $\mathfrak{H}$) гарантирует их совместность.

Если мы сравним эту систему уравнений с системой уравнений предыдущей работы, то увидим, что уравнение (8.2) вводится ценой ослабления уравнений, которые получены из тензора кривизны. Из уравнений (8.4) только три независимы, тогда как в первоначальной формулировке теории было шесть независимых уравнений. Кроме того, порядок производных в последнем уравнении возрос на единицу. Введение последнего члена в гамильтониан, приведшее к этому возрастанию порядка производной, необходимо для выполнения уравнения (8.1), которое является единственным разумным определением Γ через g.

При рассмотрении уравнений (8) возникает вопрос, нельзя ли заменить уравнения (8.3) и (8.4) более сильными:

$$P_{ik}=0. \tag{9}$$

Вопрос о справедливости такого уравнения доставил нам много беспокойства. Это уравнение было бы, очевидно, справедливо, если уравнения (9), (8.1) и (8.2) удовлетворяли бы трем независимым тождествам. Предположение о существовании таких тождеств подкрепляется тем фактом, что для бесконечно слабых полей такие добавочные тождества существуют.

Именно, если положить (пренебрегая особыми свойствами времени), что

$$g_{ik}=\delta_{ik}+\gamma_{ik},$$

и пренебречь квадратом γ по сравнению с единицей, то уравнения (8.1), (8.2) и (9) можно заменить на линеаризованные уравнения:

$$\gamma_{ik,\,a}-\Gamma^k_{ia}-\Gamma^i_{ak}=0,$$

$$\frac{1}{2}\left(\Gamma^s_{is}-\Gamma^s_{si}\right)=0,$$

$$\Gamma^s_{ik,\,s}-\frac{1}{2}\,\Gamma^s_{is,\,k}-\frac{1}{2}\,\Gamma^s_{sk,\,i}=0.$$

Первое уравнение разрешим относительно Г:

$$\Gamma^{a}_{ik} = \frac{1}{2}\left(-\gamma_{ki,a} + \gamma_{ia,k} + \gamma_{ak,i}\right);$$

тогда второе уравнение даст

$$(G_i \equiv)\, \gamma_{\underset{\vee}{i}a,\, a} = 0,$$

а третье, с учетом последнего,—

$$(G_{ik} \equiv\,) - \gamma_{ki,\, aa} + \gamma_{ia,\, ak} + \gamma_{ak,\, ai} - \gamma_{aa,\, ik} = 0.$$

Последнее антисимметризованное уравнение, в силу уравнения $G_i = 0$, можно заменить на

$$(U_{\underset{\vee}{i}k} \equiv)\, \gamma_{\underset{\vee}{i}k,\, aa} = 0.$$

У нас теперь имеется тождество

$$U_{\underset{\vee}{i}k,\, k} - G_{i,\, kk} \equiv 0.$$

Если бы этому тождеству, справедливому для уравнений бесконечно слабых полей, соответствовало и тождество для строгих уравнений, то введение более сильного уравнения (9) было бы оправдано. Систематическое исследование показало, что такого строгого тождества не существует.

Возникает вопрос, нельзя ли, несмотря на отсутствие такого тождества, рассмотреть все же уравнение (9). На это также следует ответить отрицательно по соображениям, которые можно использовать и в других случаях.

Допустим, что у нас есть система уравнений $G = 0$, для которой существует *строгое* тождество, линейное и однородное по G. Это тождество символически можно записать в виде

$$L\ (G) \equiv 0,$$

где L — оператор, линейный и однородный по G. Теперь L и G можно разложить по степеням переменных поля и их производных:

$$(L_0 + L_1 + \ldots)(G_1 + G_2 + \ldots) \equiv 0;$$

после этого тождество распадается на тождества по степеням переменных пóля. Первые два тождества будут

$$L_0\,(G_1) \equiv 0,$$

$$L_0\,(G_2) + L_1\,(G_1) \equiv 0.$$

Предположим теперь, что нам известно параметрическое решение для G в переменных пóля g:

$$G\,(\varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \ldots) = 0,$$

или

$$(G_1 + G_2 \ldots)(\varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \ldots) = 0,$$

или

$$G_1\,(\varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \ldots) + G_2\,(\varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \ldots) + \ldots = 0.$$

Эти уравнения должны удовлетворяться тождественно относительно ε. Это дает два первые уравнения:

$$G_1(\varepsilon g_1) = 0 \qquad \text{или} \quad G_2(g_1) = 0$$

(линейное по g) и

$$G_1(\varepsilon^2 g_2) + G_2(\varepsilon g_1) = 0 \text{ или } G_1(g_2) + G_2(g_1) = 0.$$

Используем теперь наше тождество. Так как $L_0(G_1) \equiv 0$, то, применяя оператор L_0 ко второму уравнению, получаем

$$L_0(G_2(g_1)) = 0. \tag{а}$$

Это — уравнение второй степени по g. Поскольку мы видели ранее, что

$$L_0(G_2) + L_1(G_1) \equiv 0, \tag{б}$$

мы знаем, что это квадратное уравнение следует из линейных уравнений

$$G_1(g_1) = 0.$$

Если в первом приближении существует линейное тождество, которому не соответствует строгого тождества (как в случае наших уравнений), то мы выводим уравнения (а) как и раньше. Однако поскольку тождество (б), вообще говоря, не выполняется, это уравнение (а) не будет больше следствием линеаризованных уравнений поля $G_1(g_1) = 0$. Поэтому существуют добавочные уравнения для первого приближения. В случае рассматриваемых нами уравнений поля они построены так, что каждый их член представляет собой произведение симметричных и антисимметричных величин $g(\gamma_{ik})$ (или производных этих величин).

Если мы интерпретируем симметричные $\gamma_{\underline{ik}}$ как выражения, описывающие гравитационное поле, а $\gamma_{\underset{\vee}{ik}}$ — как выражения, описывающие электромагнитное поле, то в первом приближении для поля получим зависимость электрического поля от гравитационного, которую нельзя согласовать с нашими физическими факторами. Поэтому рассматривавшееся усиление уравнений (8) принять нельзя.

Линеаризованные уравнения, которым, согласно (8), удовлетворяет антисимметричное (электромагнитное) поле, имеют вид

$$\gamma_{\underset{\vee}{ik},\, k} = 0,$$

$$(\gamma_{\underset{\vee}{ik},\, l} + \gamma_{\underset{\vee}{kl},\, i} + \gamma_{\underset{\vee}{li},\, k})_{,\, ss} = 0.$$

Если бы во втором уравнении выражение в скобках само обращалось в нуль, то мы получили бы уравнения Максвелла в пустом пространстве, решения которых удовлетворяют нашим уравнениям. Последние кажутся слишком слабыми. Это, однако, не является возражением против теории, поскольку мы не знаем, каким решениям линеаризованных уравнений соответствуют строгие решения, регулярные во всем пространстве. С самого начала ясно, что в непротиворечивой теории поля, которая претендует на полноту (в противоположность, например, чисто гравитационной теории), должны рассматриваться лишь те решения, которые регулярны во всем пространстве. Вопрос о существовании таких (нетривиальных) решений еще не ясен.

§ 3. Условия для g_{ik}, вытекающие из уравнения (2)

Мы хотим теперь исследовать, каким условиям должны удовлетворять величины g_{ik}, чтобы уравнения (2) определяли Γ однозначно и без особенностей.

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями: $g_{\underline{ik}} = s_{ik}$, $g_{\overset{\vee}{ik}} = a_{ik}$. Мы можем преобразовать координаты так, чтобы $s_{ik} = s_i\delta_{ik}$ (по индексу i суммирования нет). Тогда уравнение (2) принимает вид

$$a_{sk}\Gamma^s_{ia} + a_{is}\Gamma^s_{ak} + s_k\Gamma^k_{ia} + s_i\Gamma^i_{ak} = g_{ik,\,a} \tag{2.3}$$

(по i, k суммирование не производится). Если положить $i = a = k$, то получим

$$2s_i\Gamma^i_{ii} = g_{ii,\,i}. \tag{2.4}$$

Следовательно, должно выполняться условие

$$s_i \neq 0, \tag{10}$$

или, другими словами, в каждой точке для определителя $|s_{ik}|$ выполняется неравенство

$$|s_{ik}| \neq 0. \tag{10.1}$$

Этот результат важен, так как из него следует существование светового конуса с одинаковой всюду сигнатурой. Тем самым разделение линейных элементов на временноподобные и пространственноподобные всегда выполнимо.

Если сигнатура выбрана, как обычно, в теории относительности, то систему координат можно далее специализировать так, чтобы

$$s_{ik} = s\eta_{ik} \quad \left(s > 0 \text{ и } \eta_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik} & \text{при } i = 1,\, 2,\, 3 \\ -\delta_{ik} & \text{при } i = 4 \end{cases}\right).$$

С помощью преобразования Лоренца мы можем также добиться равенства нулю в выбранной точке всех a_{ik}, за исключением $a_{12} = -a_{21}$ и $a_{34} = -a_{43}$. Введем обозначения: $a_{12} = a_1\varepsilon_{12}$, $a_{34} = a_2\varepsilon_{34}$; примем также, что индексы, обозначаемые большими латинскими буквами, принимают значения 1, 2, а греческие индексы — значения 3, 4.

Рассмотрим сначала уравнения:

$$a_1(\varepsilon_{SK}\Gamma^S_{IA} + \varepsilon_{IS}\Gamma^S_{AK}) + s(\Gamma^K_{IA} + \Gamma^I_{AK}) = g_{IK,\,A}, \tag{2.5}$$

где все индексы равны 1, 2 и не все A, I, K совпадают. Мы получим тогда шесть уравнений с шестью неизвестными [исключая компоненты Γ^A_{AA}, которые мы взяли из соотношения (2.2)] с определителем:

$$\begin{array}{rr|cccccc} & \Gamma = & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} & \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{21} \\ \hline (A, I, K) = & (1,1,2) & s & 0 & 0 & s & a_1 & 0 \\ & (1,2,1) & 0 & s & 0 & s & 0 & -a_1 \\ & (1,2,2) & -a_1 & a_1 & 0 & 0 & s & s \\ & (2,1,1) & s & s & 0 & 0 & -a_1 & a_1 \\ & (2,1,2) & a_1 & 0 & s & 0 & s & 0 \\ & (2,2,1) & 0 & -a_1 & s & 0 & 0 & s \end{array} = -4s^2 (s^2 + a_1^2)^2.$$

Аналогичным образом определитель уравнений

$$a_2 (\varepsilon_{\sigma\varkappa} \Gamma^\sigma_{\iota\alpha} + \varepsilon_{\iota\sigma} \Gamma^\sigma_{\alpha\varkappa}) + s (\eta_{\sigma\varkappa} \Gamma^\sigma_{\iota\alpha} + \eta_{\sigma\iota} \Gamma^\sigma_{\alpha\varkappa}) = g_{\iota\varkappa,\, \alpha}$$

равен

$$4s^2 (-s^2 + a_2^2)^2.$$

Следовательно,

$$(s^2 + a_1^2)(-s^2 + a_2^2) \neq 0 \tag{11}$$

или

$$g = |g_{ik}| \neq 0. \tag{11.1}$$

Мы знаем теперь, что g^{ik} существует (факт, который до сих пор мы молчаливо предполагали). В самом деле,

$$\begin{aligned} g^{IK} &= \frac{1}{s^2 + a_1^2} (s\delta_{IK} + a_1 \varepsilon_{IK}), \\ g^{\iota\varkappa} &= \frac{1}{-s^2 + a_2^2} (-s\eta_{\iota\varkappa} + a_2 \varepsilon_{\iota\varkappa}). \end{aligned} \tag{12}$$

Тогда, если в трех уравнениях

$$g_{sk} \Gamma^s_{il} + g_{is} \Gamma^s_{lk} = g_{ik,\, l},$$

$$g_{sl} \Gamma^s_{ki} + g_{ks} \Gamma^s_{il} = g_{kl,\, i},$$

$$g_{si} \Gamma^s_{lk} + g_{ls} \Gamma^s_{ki} = g_{li,\, k}$$

мы умножим первое на $g^{ml}g^{ak}$, второе — на $-g^{ka}g^{ml}$ и третье — на $g^{lm}g^{ka}$ и сложим, то получим

$$(g^{ak}g^{ml}g_{is}+g^{ka}g^{lm}g_{si})\,\Gamma^{s}_{lk}=g^{ml}g^{ak}g_{ik,\,l}+g^{lm}g^{ka}g_{li,\,k}-g^{ml}g^{ka}g_{kl,\,i}. \quad (2.7)$$

Рассмотрим сначала случай

$$s=\sigma,\quad l=L,\quad k=K,\quad i=\iota,\quad m=M,\quad a=A.$$

Используя формулы (12), приводим левую часть равенства (2.7) к следующему виду:

$$\frac{2s}{(s^2+a_1^2)^2}\,[(s^2\delta_{AK}\delta_{ML}+a_1^2\varepsilon_{AK}\varepsilon_{ML})\,\eta_{\iota\sigma}+a_1a_2\,(\delta_{AK}\varepsilon_{ML}+\delta_{ML}\varepsilon_{AK})\,\varepsilon_{\iota\sigma}]\,\Gamma^{\sigma}_{LK}. \quad (2.8)$$

Тогда

$\Gamma =$	Γ^3_{11}	Γ^3_{12}	Γ^3_{21}	Γ^3_{22}	Γ^4_{11}	Γ^4_{12}	Γ^4_{21}	Γ^4_{22}	
$(i, A, M)=(3, 1, 1)$	s^2	0	0	a_1^2	0	a_1a_2	a_1a_2	0	
$(3, 1, 2)$	0	s^2	$-a_1^2$	0	$-a_1a_2$	0	0	a_1a_2	
$(3, 2, 1)$	0	$-a_1^2$	s^2	0	$-a_1a_2$	0	0	a_1a_2	
$(3, 2, 2)$	a_1^2	0	0	s^2	0	$-a_1a_2$	$-a_1a_2$	0	$\times$
$(4, 1, 1)$	0	$-a_1a_2$	$-a_1a_2$	0	$-s^2$	0	0	$-a_1^2$	
$(4, 1, 2)$	a_1a_2	0	0	$-a_1a_2$	0	$-s^2$	a_1^2	0	
$(4, 2, 1)$	a_1a_2	0	0	$-a_1a_2$	0	a_1^2	$-s^2$	0	
$(4, 2, 2)$	0	a_1a_2	a_1a_2	0	$-a_1^2$	0	0	$-s^2$	

$$\times\frac{(2s)^8}{(s^2+a_1^2)^{16}}=\begin{vmatrix} s^2 & a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_2\\ a_1^2 & s^2 & -a_1a_2 & -a_1a_2\\ a_1a_2 & -a_1a_2 & -s^2 & a_1^2\\ a_1a_2 & -a_1a_2 & a_1^2 & -s^2\end{vmatrix}^2\cdot\frac{(2s)^8}{(s^2+a_1^2)^{16}}=$$

$$=\frac{(2s)^8}{(s^2+a_1^2)^{16}}\,[(s^2-a_1^2)^2+4a_1^2a_2^2]^2,$$

что дает нам условие

$$(s^2 - a_1^2)^2 + 4a_1^2 a_2^2 \neq 0; \tag{13}$$

иными словами, одновременно не могут выполняться равенства

$$a_1 = \pm s \text{ и } a_2 = 0.$$

Мы сразу видим, что определители уравнений для $\Gamma^s_{\lambda K}$ и $\Gamma^s_{L\varkappa}$ равны

$$\frac{(2s)^8}{(s^2 + a_1^2)^4 (-s^2 + a_2^2)^8} [(s^2 - a_1^2)^2 + 4a_1^2 a_2^2]^2,$$

и по этой причине они не приводят к новым неравенствам.

Аналогично, определитель уравнений для $\Gamma^s_{\lambda\varkappa}$ равен

$$\frac{(2s)^8}{(-s^2 + a_2^2)^{12}} [(s^2 + a_2^2)^2 + 4a_1^2 a_2^2]^2,$$

что дает нам условие

$$(s^2 + a_2^2)^2 + 4a_1^2 a^2 \neq 0; \tag{14}$$

иначе говоря, одновременно не могут выполняться равенства

$$a_2 = \pm is \text{ и } a_1 = 0.$$

Соответственно, определители уравнений для $\Gamma^\sigma_{\lambda K}$ и $\Gamma^\sigma_{L\varkappa}$ равны

$$\frac{(2s)^8}{(-s^2 + a_2^2)^4 (s^2 + a_1^2)^8} [(s^2 + a_2^2)^2 + 4a_1^2 a_2^2]^2,$$

что опять не приводит к новым условиям.

Если ввести ковариантные выражения (скалярные плотности)

$$I_1 = |s_{ik}|,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijkl} \varepsilon^{i'j'k'l'} s_{ii'} s_{jj'} a_{kk'} a_{ll'},$$

$$I_3 = |a_{ik}|,$$

то мы сможем объединить условия (10), (11), (13) и (14) следующим образом.

Необходимыми и достаточными условиями существования единственного и не имеющего особенностей решения уравнений (2) являются

$$I_1 \neq 0, \tag{А}$$

$$g = I_1 + I_2 + I_3 \neq 0, \tag{Б}$$

$$(I_1 - I_2)^2 + I_3 \neq 0. \tag{В}$$

Из условий (А) и (Б) в случае, имеющем физический смысл, следуют неравенства:

$$|g_{ik}| < 0 \text{ и } |s_{ik}| < 0,$$

где последнее обеспечивает существование невырожденного «светового конуса» в каждой точке. Условие (В) констатирует, что равенства $I_1 = I_2$ и $I_3 = 0$ ни в одной точке не могут одновременно выполняться. Чтобы не допустить этого, достаточно, например, всюду в пространстве ограничить антисимметричное поле неравенством

$$|I_1| > |I_2|$$

($||$ означает абсолютную величину).

Поступила 24 января 1946 г.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ВЫВОД ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МАССЫ И ЭНЕРГИИ*

Излагаемый здесь вывод закона эквивалентности, который ранее не был опубликован, имеет два преимущества. Несмотря на то, что приходится пользоваться специальным принципом относительности, этот вывод не требует применения формального аппарата теории, а лишь опирается на три ранее известных закона.

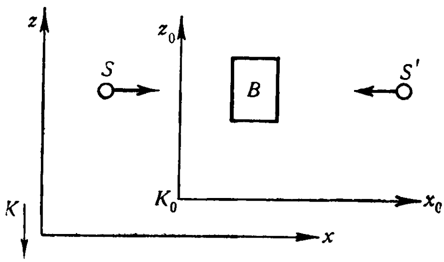


Рис. 1.

(1) Закон сохранения импульса.

(2) Выражение для давления излучения, т. е. для импульса волнового пакета, движущегося в заданном направлении.

(3) Известное выражение для аберрации света (влияние движения Земли на видимое положение неподвижных звезд — закон Брэдли).

Рассмотрим теперь следующую систему. Пусть тело B покоится сво-

* *Elementary Derivation of the Equivalence of Mass and Energy*. Techn. J. (Haifa), 1946, V, 16—17. [Статья опубликована также в Sci. Publ. Hebrew Techn. Coll., 1947, 2 (на еврейском языке — иврите) и в сборнике Conceptions scientifiques, morales et sociales, Paris, 1952 (на французском языке). — *Ред.*].

бодно в пространстве относительно системы отсчета K_0. Два волновых пакета S, S', с энергией $E/2$ каждый, движутся соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси x_0 и поглощаются телом B. В результате этого поглощения энергия тела B возрастает на E. При этом тело B остается в покое по отношению к системе K_0 вследствие симметрии.

Теперь мы рассмотрим этот же процесс относительно системы отсчета K, движущейся по отношению к системе K_0 с постоянной скоростью v в отрицательном направлении оси z_0. По отношению к системе K этот процесс описывается следующим образом: тело B движется в положительном направлении оси z со скоростью v. Направления двух волновых

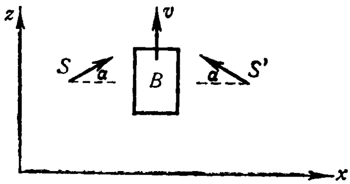


Рис. 2.

пакетов составляют в системе K угол α с осью x. Согласно закону аберрации, в первом приближении $\alpha = \frac{v}{c}$, где c — скорость света. Из рассмотрения процесса в системе K_0 мы знаем, что скорость тела B остается неизменной при поглощении волновых пакетов S и S'.

Применим теперь закон сохранения импульса нашей системы относительно направления z в системе отсчета K.

I. Пусть M — масса тела B *до поглощения*; тогда Mv представляет собой выражение для импульса тела B (согласно классической механике). Каждый волновой пакет имеет энергию $E/2$ и, следовательно, согласно известному следствию из теории Максвелла, импульс $E/2c$. Строго говоря, это импульс волнового пакета S по отношению к системе отсчета K_0. Однако, когда скорость v мала по сравнению с c, импульс по отношению к системе K остается тем же, с точностью до величины второго порядка малости ($\frac{v^2}{c^2}$ по сравнению с 1). Составляющая этого импульса по оси z равна $\frac{E}{2c}\sin\alpha$, или с достаточной точностью (если пренебречь величинами более высоких порядков малости) $\frac{E}{2c}\alpha$, или $\frac{E}{2}\frac{v}{c^2}$. Поэтому составляющие по оси z импульса волновых пакетов S и S', вместе взятых, равны

$E\frac{v}{c^2}$. Таким образом полный импульс системы до поглощения равен

$$Mv + \frac{E}{c^2}\cdot v.$$

II. Пусть M' — масса тела B *после поглощения.* Мы заранее учитываем здесь возможность увеличения массы при поглощении энергии E (это необходимо для того, чтобы окончательный результат наших вычислений был непротиворечивым). Тогда импульс системы после поглощения будет равен

$$M'v.$$

Применим, наконец, закон сохранения импульса к направлению оси z. Это дает соотношение

$$Mv + \frac{E}{c^2}v = M'v$$

или

$$M' - M = \frac{E}{c^2}.$$

Это соотношение выражает закон эквивалентности энергии и массы. Увеличение энергии на E связано с увеличением массы на $\frac{E}{c^2}$. Поскольку энергия обычно определяется с точностью до аддитивной постоянной, мы можем выбрать последнюю так, что

$$E = Mc^2.$$

$E = mc^2$: НАСТОЯТЕЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА НАШЕГО ВРЕМЕНИ *

Чтобы понять принцип эквивалентности массы и энергии, мы должны обратиться к двум законам сохранения (или «баланса»), игравшим независимо один от другого выдающуюся роль в дорелятивистской физике. Мы имеем в виду законы сохранения энергии и импульса. Первый из них, выдвинутый Лейбницем еще в XVII в., рассматривался в XIX в. по существу как следствие принципов механики.

Рассмотрим, например, маятник, который качается между точками A и B. В этих точках его масса m расположена выше наиболее низкой точки траектории C на величину h (см. рис. 1). С другой стороны, в точке

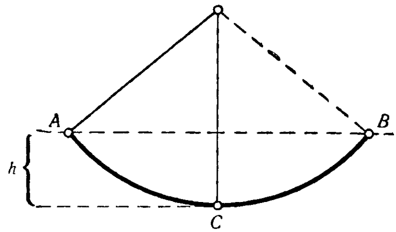


Рис. 1.

C разность высот исчезает, но вместо этого масса приобретает скорость v. Дело обстоит так, как если бы разность высот могла бы целиком превращаться в скорость, и наоборот. Точное соотношение должно иметь вид

* $E=mc^2$: *The most urgent Problem of our Time*. Sci. Illustr., I, 1946, 16—17 (Перевод выполнен по перепечатке этой статьи в сб.: A. Einstein. «Out of my later years». Французский перевод опубликован в сб. Conceptions scientifiques, morales et sociales, Paris, 1952. — *Прим. ред.*).

$mgh = \frac{m}{2} v^2$, где g — ускорение силы земного тяготения. Интересно, что это соотношение не зависит ни от длины маятника, ни от пути, по которому движется масса.

Значение этого факта заключается в том, что в процессе колебания нечто сохраняется и это нечто есть энергия. В точках A и B это энергия положения, или «потенциальная» энергия; в точке C это энергия движения, или «кинетическая» энергия. Если такой взгляд справедлив, то сумма $mgh + m\frac{v^2}{2}$ должна иметь одно и то же значение при любом положении маятника, если под h понимать высоту массы m над C, а под v — скорость в этой же точке траектории маятника. И эта сумма действительно сохраняется. Обобщение этого принципа приводит нас к закону сохранения механической энергии. Но что происходит, когда трение останавливает маятник?

Ответ дает изучение тепловых явлений. Анализ этих явлений, основанный на предположении, что тепло есть неуничтожаемая субстанция, перетекающая из более горячего тела в более холодное, приводит нас казалось бы к закону «сохранения тепла». С другой стороны, с незапамятных времен было известно, что тепло может создаваться трением, как, например, при добывании огня трением палочек у индейцев. Физики долго не могли объяснить этот способ «добывания» тепла. Их трудности были преодолены лишь тогда, когда было установлено, что на создание любого заданного количества тепла нужно затратить в точности пропорциональное количество механической энергии. Таким образом мы приходим к принципу «эквивалентности работы и тепла». В нашем маятнике, например, механическая энергия благодаря трению постепенно превращается в тепло.

Таким образом, законы сохранения механической и тепловой энергии слились в единый закон. Это привело физиков к мысли о возможности дальнейшего расширения закона сохранения энергии — применительно к химическим и электромагнитным процессам и вообще ко всем процессам. Оказалось, что в нашей физической системе именно полная сумма энергий остается постоянной независимо от характера возможных превращений.

Теперь о принципе сохранения массы. Масса определяется как противодействие тела ускорению (инертная масса). Она измеряется также весом тела (тяжелая масса). То обстоятельство, что два столь различные определения приводят к одному и тому же значению массы тела, само по себе является поразительным. Согласно принципу сохранения (а именно, масса остается неизменной при любых физических или химических превращениях), масса является существенной (ввиду своей неизменности) характеристикой материи. Нагревание, плавление, испарение, образование химических соединений не должны изменять полной массы.

Физики считали этот принцип справедливым еще несколько десятилетий тому назад. Однако он оказался несостоятельным перед лицом специальной теории относительности. Поэтому он слился с законом сохранения энергии, подобно тому, как примерно шестьюдесятью годами раньше закон сохранения механической энергии объединился с законом сохранения тепла. Мы могли бы сказать, что закон сохранения энергии, поглотив ранее закон сохранения тепла, включил теперь в себя и принцип сохранения массы и управляет всем единолично.

Эквивалентность массы и энергии принято выражать (хотя это и не совсем точно) формулой $E = mc^2$, где c — скорость света, составляющая около 186 000 *миль/сек*, E — энергия, содержащаяся в покоящемся теле, m — его масса. Энергия, соответствующая массе m, равна этой массе, умноженной на квадрат чудовищно большой скорости света, т. е. на единицу массы приходится огромное количество энергии.

Но если каждый грамм вещества содержит столь большое количество энергии, то почему это обстоятельство так долго оставалось незамеченным? Ответ достаточно прост: до тех пор пока энергия не выходит наружу, она остается незамеченной. Дело обстоит так же, как со сказочно богатым человеком, который никогда не тратит ни цента: никто не может сказать, насколько он богат.

Мы можем теперь разрешить это соотношение относительно m и сказать, что увеличение энергии тела на величину E должно сопровождаться увеличением его массы на величину E/c^2. Я легко могу сообщить некоторому телу энергию, нагрев, например, его на десять градусов. Так почему же никогда не замечалось увеличения массы, или увеличения веса, связанного с этим изменением? Дело в том, что в приращении массы огромный множитель c^2 входит в знаменатель дроби. Увеличение массы слишком мало, чтобы его можно было измерить непосредственно даже самыми чувствительными весами.

Чтобы увеличение массы было измеримым, изменение энергии, приходящееся на единицу массы, должно быть невероятно большим. Нам известно только одно явление, где освобождается такого порядка количество энергии в расчете на единицу массы; это — радиоактивный распад. Схематически процесс идет следующим образом: атом с массой M расщепляется на два атома с массами M' и M'', которые разлетаются с огромной кинетической энергией. Если мы остановим эти атомы, т. е. заберем у них энергию движения, то они в совокупности будут обладать гораздо меньшей энергией, чем исходный атом. Согласно принципу эквивалентности, суммарная масса $M' + M''$ продуктов распада должна быть несколько меньше, чем первоначальная масса M распадающегося атома, что противоречит старому принципу сохранения массы. Относительная разность этих масс составляет примерно десятую долю процента.

Сейчас мы не можем реально измерять вес отдельного атома. Однако существуют косвенные методы, позволяющие точно измерить веса атомов. Мы можем также определить кинетические энергии, передаваемые продуктам распада M' и M''. Таким образом, оказалось возможным провести проверку и подтвердить соотношение эквивалентности. Кроме того, этот принцип позволяет нам рассчитать заранее по известным с большой точностью атомным весам, какое именно количество энергии должно выделиться при любом интересующем нас атомном распаде. Конечно, этот принцип ничего не говорит о том, когда (или каким образом) произойдет распад.

Происходящие события можно проиллюстрировать на нашем примере с богачом. Атом M — это богатый скупец, который при жизни не расстается с деньгами (с энергией). Но по завещанию он передает свое состояние сыновьям M' и M'' при условии, что они выделят для общества некую малую часть, меньшую одной тысячной всего имущества (энергии или массы). Сыновья владеют вместе несколько меньшим состоянием, чем владел отец (суммарная масса $M' + M''$ немного меньше, чем масса M радиоактивного атома). Но часть, переданная обществу, хотя и относительно мала, все же настолько огромна (если рассматривать ее как кинетическую энергию), что несет с собой большую угрозу зла. Предотвращение этой угрозы стало настоятельной проблемой современности.

133

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ: СУЩНОСТЬ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

Математика оперирует исключительно с отношениями между понятиями, не принимая во внимание их связь с опытом. Физика также имеет дело с математическими понятиями, однако эти понятия приобретают физическое содержание лишь в том случае, когда их связь с объектами опыта четко определена. Так, в частности, обстоит дело с понятиями движения, пространства, времени.

Теория относительности — это физическая теория, основанная на последовательной физической интерпретации трех указанных понятий. Название «теория относительности» связано с тем, что движение, с точки зрения возможного опыта, всегда представляется как движение одного тела относительно другого (например, автомобиля относительно дороги или Земли относительно Солнца и неподвижных звезд). Движение никогда не наблюдается как «движение по отношению к пространству», иначе говоря, как «абсолютное движение». «Принцип относительности» в наиболее широком смысле состоит в следующем утверждении: все физические явления имеют такой характер, что не дают основания вводить понятие «абсолютного движения», или, более коротко, но менее точно, «абсолютного движения не существует».

Казалось бы мы мало что можем почерпнуть из такого рода отрицательного утверждения. Однако в действительности оно сильно ограничивает круг (мыслимых) законов природы. В этом смысле можно провести аналогию между теорией относительности и термодинамикой. Последняя также основана на отрицательном утверждении: «вечный двигатель невозможен».

* *Relativity: Essence of the Theory of Relativity.* Amer. People Encycl., 1949, XVI, Chicago.

Построение теории относительности включает в себя два этапа: построение «специальной теории относительности» и «общей теории относительности». Последняя предполагает справедливость первой в предельном случае и является ее последовательным обобщением.

А. Специальная теория относительности

Физическая интерпретация пространства и времени в классической механике. Геометрия, с физической точки зрения, представляет собой совокупность законов, согласно которым взаимно покоящиеся твердые тела можно располагать друг относительно друга (например, треугольник состоит из трех стержней, концы которых постоянно соприкасаются). Предполагается, что при такой интерпретации аксиомы Эвклида справедливы. «Пространство» в этом понимании представляет собой бесконечное твердое тело (или решетку), к которому отнесены положения всех прочих тел (тело отсчета). Аналитическая геометрия (Декарта) использует в качестве тела отсчета, представляющего пространство, три взаимно-перпендикулярных жестких стержня, вдоль которых измеряются каким-то способом «координаты» (x, y, z) точек пространства, определяемые как ортогональные проекции (с помощью жесткого масштаба).

Одновременность. Физика имеет дело с «событиями» в пространстве и времени. Каждому событию помимо трех пространственных координат x, y, z принадлежит временна́я координата t. Предполагается, что последняя измеряется часами (идеальным периодическим процессом) пренебрежимо малых размеров. Эти часы C следует считать покоящимися в одной из точек системы координат, например в начале координат ($x = y = z = 0$). Тогда время события, происшедшего в точке $P(x, y, z)$, определяется как показание часов, одновременное с событием. Здесь понятие «одновременности» предполагалось имеющим физический смысл без специального определения. Это — неточность, и она кажется безобидной лишь потому, что с помощью света (скорость которого практически бесконечна с точки зрения повседневного опыта) одновременность пространственно разделенных событий, казалось бы, можно установить непосредственно.

Специальная теория относительности устраняет эту неточность, вводя физическое определение одновременности с помощью световых сигналов. Время t события P есть показание часов C в момент прибытия светового сигнала, пришедшего от события, за вычетом времени, необходимого световому сигналу для преодоления расстояния до часов. Введение такой поправки основано на предположении (постулате) о постоянстве скорости света.

Это определение сводит понятие одновременности пространственно удаленных событий к понятию одновременности событий, происходящих в одном и том же месте (совпадение событий), а именно: к одновременности прибытия светового сигнала в C и отсчета времени часами C.

Инерциальные системы и принцип постоянства скорости света. Классическая механика основана на принципе Галилея: тело находится в состоянии равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока другие тела не воздействуют на него. Это утверждение не может быть справедливо для произвольно движущихся систем координат. Оно может претендовать на справедливость только для так называемых «инерциальных систем». Инерциальные системы движутся прямолинейно и равномерно друг относительно друга. Классическая физика претендует на справедливость своих законов лишь относительно всех инерциальных систем (специальный принцип относительности).

Теперь легко понять дилемму, которая привела к специальной теории относительности. Опыт и теория постепенно создали убеждение, что свет в пустом пространстве всегда распространяется с одной и той же скоростью и независимо от своего цвета и состояния движения источника света (принцип постоянства скорости света — в дальнейшем мы будем называть его «L-принципом»). Элементарные интуитивные соображения казалось бы говорят, что один и тот же луч света не может двигаться с одной и той же скоростью c по отношению ко всем системам координат. Казалось бы L-принцип противоречит специальному принципу относительности.

Однако это противоречие оказывается лишь кажущимся и основано на заблуждении относительно абсолютного характера времени или, скорее, одновременности удаленных событий. Мы видим, что координаты события x, y, z и t можно в данный момент определить лишь по отношению к некоторой избранной системе координат (инерциальной системе). Преобразование координат события x, y, z, t, которое следует выполнить при переходе от одной инерциальной системы к другой, нельзя осуществить, не пользуясь определенными физическими предположениями. Однако нижеследующий постулат оказывается достаточным для решения этой проблемы: L-принцип выполняется во всех инерциальных системах (приложение специального принципа относительности к L-принципу). Определенные таким образом и линейные по x, y, z, t преобразования называются преобразованиями Лоренца. Эти преобразования формально характеризуются требованием, чтобы выражение $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$, составленное из разностей координат dx, dy, dz, dt двух бесконечно близких событий, было инвариантом (т. е., чтобы при преобразованиях оно переходило в то же самое выражение, образованное из разностей координат в новой системе).

С помощью преобразований Лоренца специальный принцип относительности может быть сформулирован следующим образом: законы природы инвариантны относительно преобразований Лоренца (т. е. закон природы не должен измениться, если отнести его к новой инерциальной системе при помощи преобразования Лоренца для x, y, z, t).

Основные результаты специальной теории относительности. Специальная теория относительности привела к ясным физическим представлениям о пространстве и времени и в связи с этим к выяснению того, как ведут себя движущиеся масштабы и часы. Она устранила понятие абсолютной одновременности, а также понятие мгновенного действия на расстоянии в смысле Ньютона. Она показала, как нужно изменить уравнения движения при рассмотрении движений со скоростью, не очень малой по сравнению со скоростью света. Она разъяснила формально структуру уравнений Максвелла для электромагнитного поля; в частности, она позволила понять внутреннее единство электрического и магнитного полей. Она объединила законы сохранения импульса и энергии в единый закон и продемонстрировала эквивалентность массы и энергии. С формальной точки зрения, то, что было достигнуто специальной теорией относительности, можно охарактеризовать следующим образом. Она в общем виде указала роль, которую играет мировая постоянная c (скорость света) в законах природы, и продемонстрировала существование тесной связи между тем, как в эти законы входят пространственные координаты, с одной стороны, и время — с другой.

Б. Общая теория относительности

В одном фундаментальном пункте специальная теория относительности осталась верна основам классической механики; а именно, она сохранила утверждение, что законы природы справедливы только по отношению к инерциальным системам. Круг «допустимых» (т. е. оставляющих форму законов природы неизменной) преобразований координат ограничивается исключительно (линейными) преобразованиями Лоренца. Действительно ли это ограничение основано на физических фактах? Нижеследующие соображения убедительно говорят об обратном.

Принцип эквивалентности. Тело обладает инертной массой (противодействующей ускорению) и тяжелой массой (определяющей вес тела в заданном гравитационном поле; например, на поверхности Земли). Эти две величины, столь существенно различные по их определению, как показывает эксперимент, измеряются одним и тем же числом. Должна существовать более глубокая причина этого обстоятельства. Этот факт можно описать иначе: в гравитационном поле ускорения различных масс одинаковы. Или, наконец, можно сказать так: в гравитационном поле тела ведут себя так же, как и в его отсутствие, если в последнем случае в качестве системы отсчета используется равномерно ускоренная система координат (а не инерциальная система).

В последнем случае, по-видимому, нет оснований отказываться от следующей интерпретации. Система рассматривается как «покоящаяся» и «кажущееся» гравитационное поле в ней рассматривается как «истинное». Такое гравитационное поле, «порожденное» ускорением системы координат, было бы, очевидно, бесконечно протяженным и не могло бы создаваться гравитирующими массами, сосредоточенными в конечном объеме. Однако если нашей целью является построение теории полевого типа, это обстоятельство не может помешать нам. При такой интерпретации инерциальные системы теряют свое особое значение и мы находим «объяснение» равенству тяжелой и инертной масс (одно и то же свойство материи проявляется либо как вес, либо как инерция, в зависимости от способа описания).

Если рассуждать формально, то, допуская системы координат, движущиеся ускоренно по отношению к исходным «инерциальным» системам, мы допускаем нелинейные преобразования координат и, следовательно, существенно расширяем идею инвариантности, т. е. принцип относительности.

Тщательный анализ с учетом результатов специальной теории относительности показывает, что при таком обобщении координаты нельзя уже интерпретировать как результаты измерений. Лишь разности координат в совокупности с полевыми величинами, описывающими гравитационное поле, определяют измеримые расстояния между событиями.

Коль скоро пришлось принять нелинейные преобразования координат как переход между двумя эквивалентными системами, то проще всего, по-видимому, требовать допустимости всех непрерывных преобразований координат (они образуют группу), т. е. считать допустимыми произвольные криволинейные системы координат, в которых поля описываются регулярными функциями (общий принцип относительности).

Гравитация в общей теории относительности. Теперь нетрудно понять, почему общий принцип относительности (на основе принципа эквивалентности) привел к теории тяготения. Существует частный случай пространства, физическую структуру которого (поле) мы можем предполагать точно известной, основываясь на специальной теории относительности. Это случай пустого пространства, в котором нет ни электромагнитных полей, ни вещества. Оно полностью определяется своим «метрическим» свойством: пусть dx_0, dy_0, dz_0, dt_0 — разности координат двух бесконечно близких точек (событий); тогда величина

$$ds^2 = dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2 - dt_0^2 \qquad (1)$$

может быть измерена и ее значение не зависит от конкретного выбора инерциальной системы. Если в этом пространстве ввести новые координаты x_1, x_2, x_3, x_4 посредством преобразования общего вида, то величина ds^2 для этой же пары точек будет иметь вид

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k \qquad (2)$$

(здесь подразумевается суммирование по i и k от 1 до 4), причем $g_{ik} = g_{ki}$. Тогда величины g_{ik}, которые образуют «симметричный тензор» и являются непрерывными функциями $x_1, \ldots, x_4$, описывают, согласно «принципу эквивалентности», частный случай гравитационного поля [а именно, поле, которое можно вновь преобразовать к виду (1)]. Если воспользоваться работами Римана по метрическим пространствам, то свойства такого рода поля g_{ik} можно точно охарактеризовать («условием Римана»).

Однако мы ищем условия, которым удовлетворяют гравитационные поля «общего» вида. Естественно предположить, что их так же можно описать, как тензорные поля типа g_{ik}, которые, вообще говоря, не допускают преобразования линейного элемента к виду (1), т. е. удовлетворяют не условию Римана, а более слабым условиям, также не зависящим, подобно условию Римана, от выбора координат (т. е. инвариантным относительно преобразования общего вида). Простые формальные соображения приводят к более слабым условиям, которые тесно связаны с условием Римана. Эти условия и являются искомыми уравнениями для чисто гравитационного поля (в отсутствие вещества и электромагнитных полей).

Экспериментальные подтверждения общей теории относительности. Уравнения небесной механики Ньютона могут быть получены из этих уравнений как приближенные и, кроме того, можно найти малые поправки, которые описывают некоторые наблюдавшиеся на опыте эффекты (отклонение луча света гравитационным полем звезды, влияние гравитационного потенциала на частоту испущенного света, медленное вращение эллиптических орбит планет — смещение перигелия Меркурия). Кроме того, эти уравнения объясняют «разбегание» галактических систем, которое проявляется в красном смещении света, испускаемого этими системами.

Общая теория относительности пока еще неполна в том смысле, что общий принцип относительности может быть применен удовлетворительным образом только к гравитационным полям, но не ко всему полю. Нам до сих пор неизвестно, какой математический аппарат следует применять для описания всего поля в пространстве и каковы те общие инвариантные законы, которым подчиняется это поле. По-видимому, можно быть уверенным в одном: общий принцип относительности окажется необходимым и эффективным орудием в решении проблемы единого поля.

134

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ*

В этой статье мы дадим новое изложение обобщенной теории тяготения, более ясное, чем то, которое было дано ранее [1]. Нашей целью является получение теории полного поля путем обобщения понятий и методов релятивистской теории тяготения.

1. Структура поля

В теории тяготения поле описывается симметричным тензором g_{ik}, т. е. $g_{ik} = g_{ki}$ $(i, k = 1, \ldots, 4)$, где g_{ik} — вещественные функции $x_1, \ldots, x_4$.

В обобщенной теории полное поле описывается эрмитовым тензором. Свойство симметрии (комплексного) тензора g_{ik} можно записать в виде

$$g_{ik} = \bar{g}_{ki}.$$

Если g_{ik} разложить на его вещественную и мнимую части, то первая будет представлять собой симметричный тензор $(\underline{g}_{ik})$, а вторая — антисимметричный тензор $(\underset{\vee}{g}_{ik})$. Величины g_{ik} по-прежнему являются функциями вещественных переменных $x_1, \ldots, x_4$.

Естественность, с формальной стороны, такого обобщения симметричного тензора хорошо видна в следующем рассуждении: из ковариантного вектора A_i можно образовать путем умножения симметричный ковариантный тензор $A_i A_k$. Произвольный симметричный тензор 2-го ранга может быть получен из таких тензоров, если составить их сумму

* *Generalized Theory of Gravitation.* Rev. Mod. Phys., 1948, 20, 35—39.

[1] A. Einstein. Ann. Math., 1945, 46, 578; A. Einstein a. E. Straus. Ann. Math., 1946, 47, 731. (Статьи 127 и 130. — *Ред.*)

с вещественными коэффициентами

$$g_{ik} = \sum_{\alpha} \underset{\alpha}{c} \underset{\alpha}{A_i} \underset{\alpha}{A_k}.$$

Аналогичным образом из комплексного вектора A_i можно образовать эрмитов тензор $A_i\overline{A}_k$ (он остается неизменным при перестановке i и k и одновременном комплексном сопряжении). Тогда мы получим представление для произвольного эрмитова тензора 2-го ранга

$$g_{ik} = \sum_{\alpha} \underset{\alpha}{c} \underset{\alpha}{A_i} \underset{\alpha}{\overline{A}_k},$$

где $\underset{\alpha}{c}$ — как и прежде, вещественные постоянные.

Определитель $g = | g_{ik} |$ $(\neq 0)$ вещественен.

Доказательство:

$$| g_{ik} | = | g_{ki} | = | \overline{g}_{ik} | = \overline{| g_{ik} |}.$$

Как и в случае вещественных полей, мы можем сопоставить ковариантному тензору g_{ik} контравариантный тензор g^{ik}, полагая

$$g_{is}g^{ls} = \delta_i^l \text{ (или } g_{si}g^{sl} = \delta_i^l),$$

где δ_i^l — тензор Кронекера. Здесь существен порядок индексов, так как $g_{is}g^{sl}$ не равно δ_i^l. В дальнейшем важную роль играет тензорная плотность $\mathfrak{g}^{ik} = g^{ik}(g)^{\frac{1}{2}}$.

С точки зрения теории групп, введение эрмитова тензора несколько произвольно, поскольку каждая из аддитивных компонент $\underline{g}_{ik}$ и $\check{g}_{ik}$ имеет тензорный характер. Однако этот произвол до некоторой степени оправдывается тем, что, как и в случае вещественных полей, здесь существует естественный способ сопоставления параллельных переносов эрмитову тензору g_{ik}; это и оправдывает утверждение о естественности введения эрмитова тензора g_{ik}.

2. Бесконечно малые параллельные переносы, абсолютное дифференцирование и кривизна

В теории вещественных полей мы задаем бесконечно малый параллельный перенос вектора A^i или A_i в виде

$$\left.\begin{aligned} \delta A^i &= -\Gamma^i_{st}A^s dx^t, \\ \delta A_i &= \Gamma^s_{it}A_s dx_t \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

соответствующим образом вводятся бесконечно малые параллельные переносы также и для тензоров более высокого ранга.

Второе из равенств (1) связано с условием

$$0 = \delta(\delta_i^k) = (\delta_i^s \Gamma_{sl}^k - \delta_s^k \Gamma_{il}^s)\, dx^l.$$

Из равенств (1) обычным путем мы получаем тензорные свойства величины

$$dA^i - \delta A^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x_t} + A^s \Gamma_{st}^i\right) dx^t,$$

что приводит к определению ковариантного дифференцирования:

$$A^i_{;\,t} = \frac{\partial A^i}{\partial x_t} + A^s \Gamma_{st}^i,$$

$$A_{i;\,t} = \frac{\partial A^i}{\partial x_t} - A_s \Gamma_{it}^s. \qquad (2)$$

Чтобы получить ковариантную производную тензора g_{ik}, напишем

$$A_{i;\,l} = \frac{\partial A_i}{\partial x_l} - A_s \Gamma_{il}^s,$$

$$A_{k;\,l} = \frac{\partial A_k}{\partial x_l} - A_s \Gamma_{kl}^s;$$

умножая первое равенство на A_k, а второе — на A_i и складывая их, получаем

$$A_i A_{k;\,l} + A_k A_{i;\,l} = (A_i A_k)_{;\,l} = (A_i A_k)_{,\,l} - (A_s A_k)\,\Gamma_{il}^s - (A_i A_s)\,\Gamma_{kl}^s.$$

Поскольку тензор g_{ik} может быть представлен в виде суммы таких тензоров, то

$$g_{ik;\,l} = g_{ik,\,l} - g_{sk}\Gamma_{il}^s - g_{is}\Gamma_{kl}^s.$$

Компоненты Г, в свою очередь, определяются компонентами g и их первыми производными из требования равенства нулю ковариантной производной от g_{ik}:

$$0 = g_{ik,\,l} - g_{sk}\Gamma_{il}^s - g_{is}\Gamma_{kl}^s. \qquad (3)$$

Так как g_{ik} симметричен, то эти соотношения представляют собой лишь 40 уравнений для 64 компонент Г. Для полного определения Г следует использовать единственно возможное инвариантное алгебраическое условие, а именно, условие симметрии:

$$\Gamma^l_{ik} = \Gamma^l_{ki}. \tag{4}$$

Теперь мы обобщим это рассмотрение на случай комплексных величин, сохраняя определение параллельного переноса (1). Однако в связи с этим возникает некоторое осложнение. Если в уравнении, определяющем параллельный перенос комплексного вектора,

$$\delta A^i = \Gamma^s_{it} A_s \, dx^t$$

(где, в общем случае, компоненты Г тоже комплексны), перейти к комплексно сопряженным величинам:

$$\overline{\delta A_i} = \overline{\Gamma^s_{it}}\, \overline{A_s}\, dx^t,$$

то мы получаем уравнение, также определяющее параллельный перенос; однако этот последний может отличаться от первого параллельного переноса. В соответствии с этим мы определим два вида параллельных переносов:

$$\left.\begin{aligned} \delta A^i_+ &= -\Gamma^i_{st} A^s \, dx^t, \\ \delta A_{\underset{+}{i}} &= \Gamma^s_{it} A_s \, dx^t \end{aligned}\right\} \tag{1а}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \delta A^i_- &= -\overline{\Gamma^i_{st}} A^s \, dx^t, \\ \delta A_{\underset{-}{i}} &= \overline{\Gamma^s_{it}} A_s \, dx^t \end{aligned}\right\} \tag{1б}$$

и соответственно, два вида ковариантного дифференцирования: $A^{\overset{i}{+}}_{;t}$, $A_{\underset{+}{i};t}$ и $A^{\overset{i}{-}}_{;t}$, $A_{\underset{-}{i};t}$, по формулам (2). Из (1а) и (1б) получаем

$$\overline{\delta A^{\overset{i}{-}}} = \delta A^{\overset{i}{+}} \text{ и } \overline{\delta A^{\overset{i}{+}}} = \delta A^{\overset{i}{-}}.$$

Для того чтобы сопряженные векторы имели сопряженные переносы и производные, необходимо при переходе к сопряженным векторам изменить характер переноса или дифференцирования, т. е. перейти к сопряженному Г. Для получения ковариантной производной от эрмитова тензора запишем по аналогии со случаем вещественных величин

$$A_{\underset{+}{i};\, l} = \frac{\partial A_i}{\partial x_l} - A_s \Gamma^s_{il},$$

$$\overline{A}_{k;\, l} = \frac{\partial \overline{A}_k}{\partial x_l} - \overline{A}_s \overline{\Gamma^s_{kl}}.$$

Отсюда, как и ранее, получаем

$$A_i \overline{A}_{\underset{-}{k};\, l} + \overline{A}_k A_{\underset{+}{i};\, l} = (A_{\underset{+}{i}} A_{\underset{-}{k}})_{;\, l} = (A_i A_k)_{,\, l} - (A_s \overline{A}_k) \Gamma^s_{il} - (A_i \overline{A}_s) \overline{\Gamma^s_{kl}},$$

и, поскольку тензор g_{ik} может быть представлен в виде суммы таких тензоров, находим

$$g_{\underset{+-}{ik};\, l} = g_{ik,\, l} - g_{sk} \Gamma^s_{il} - g_{is} \overline{\Gamma^s_{kl}}.$$

Аналогом требования (3) является требование обращения в нуль этой ковариантной производной:

$$0 = g_{\underset{+-}{ik};\, l} = g_{ik,\, l} - g_{sk} \Gamma^s_{il} - g_{is} \overline{\Gamma^s_{kl}}. \tag{3а}$$

Эти уравнения эрмитовы по индексам i, k (т. е. переходят сами в себя при перестановке индексов i и k и комплексном сопряжении) и потому их недостаточно для определения комплексных Г. По аналогии с условием (4) мы имеем единственное инвариантное алгебраическое условие эрмитовости:

$$\Gamma^l_{ik} = \overline{\Gamma^l_{ki}}. \tag{4а}$$

Поэтому вместо (3а) мы можем написать равенство

$$0 = g_{\underset{+-}{ik};\, l} = g_{ik,\, l} - g_{sk} \Gamma^s_{il} - g_{is} \Gamma^s_{lk}, \tag{3б}$$

содержащее как (3а), так и (4а).

Абсолютное дифференцирование векторных плотностей. Если равенство (3б) умножить на $\frac{1}{2} g^{ik}$ и просуммировать по i и k, то получим векторное уравнение

$$\frac{1}{(g)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial (g)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_l} - \frac{1}{2} (\Gamma^a_{al} + \Gamma^a_{la}) = 0,$$

или, короче,

$$\frac{\partial (g)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_l} - (g)^{\frac{1}{2}} \Gamma^a_{\underline{la}} = 0. \tag{3в}$$

Величина $(g)^{\frac{1}{2}}$ представляет собой скалярную плотность, а левая часть равенства (3в) — векторную плотность. Последнее справедливо также и в том случае, если заменить $(g)^{\frac{1}{2}}$ произвольной скалярной плотностью ρ. Поэтому мы введем в качестве ковариантной производной скалярной плотности ρ величину:

$$\rho_{;\,l} = \rho_{,\,l} - \rho \Gamma^a_{\underline{la}}. \tag{5}$$

Это позволяет ввести абсолютное дифференцирование тензорных плотностей.

Пример. Если умножить правую часть равенства

$$A^i_{+;\,l} = A^i_{,\,l} + A^s \Gamma^i_{sl}$$

на скалярную плотность ρ, то получается тензорная плотность.

$$(\rho A^i)_{,\,l} + (\rho A^s)\,\Gamma^i_{sl} - A^i \rho_{,\,l};$$

вводя векторную плотность $\mathfrak{A}^i = \rho A^i$, последнее выражение можно записать в виде

$$\mathfrak{A}^i_{,\,l} + \mathfrak{A}^s \Gamma^i_{sl} - \mathfrak{A}^i \frac{\rho_{,\,l}}{\rho},$$

или, согласно формуле (5),

$$(\mathfrak{A}^i_{,\,l} + \mathfrak{A}^s \Gamma^i_{sl} - \mathfrak{A}^i \Gamma^a_{\underline{la}}) - \mathfrak{A}^i \rho_{;\,l}.$$

Поскольку последний член в этом выражении представляет собой тензорную плотность, выражение в скобках также является тензорной плотностью, которую мы можем определить, как ковариантную производную $\overset{i}{\mathfrak{A}}{}^{+}_{;\,l}$ векторной плотности $\mathfrak{A}^i$

$$\overset{i}{\mathfrak{A}}{}^{+}_{;\,l} = \mathfrak{A}^i_{,\,l} + \mathfrak{A}^s \Gamma^i_{sl} - \mathfrak{A}^i \Gamma^a_{\underline{la}}. \tag{6}$$

Аналогичным образом можно определить ковариантные производные произвольных тензорных плотностей. Они отличаются от ковариантной производной тензора последним членом типа $-\mathfrak{A}^i\,\Gamma^a_{\underline{la}}$.

Точно так же, как и в случае вещественных полей, выражение (3а) можно привести к контравариантному виду; следует, однако, проявлять осторожность в отношении порядка индексов. Мы получаем эквивалентные уравнения

$$0 = g^{\overset{i\,k}{+-}}{}_{;\,l} = g^{ik}{}_{,\,l} + g^{sk}\Gamma^{i}_{sl} + g^{is}\Gamma^{k}_{ls} \tag{3г}$$

или, после введения контравариантной тензорной плотности $\mathfrak{g}^{ik} = g^{ik}(g)^{\frac{1}{2}}$,

$$0 = \mathfrak{g}^{\overset{i\,k}{+-}}{}_{;\,l} = \mathfrak{g}^{ik}{}_{,\,l} + \mathfrak{g}^{sk}\Gamma^{i}_{sl} + \mathfrak{g}^{is}\Gamma^{k}_{ls} - \mathfrak{g}^{ik}\Gamma^{s}_{\underline{ls}}. \tag{3д}$$

Уравнения (3а), (3г) и (3д) эквивалентны.

Кривизна. Изменение, которое претерпевает вектор при параллельном переносе вдоль границы бесконечно малого элемента площади, имеет векторный характер. Это приводит к тензору кривизны также и в случае нашего обобщенного поля. Мы стоим здесь перед выбором: использовать «+»-перенос или «—»-перенос; результаты обоих видов переносов, впрочем, являются комплексно сопряженными, так что достаточно рассмотреть перенос *одного* из этих видов.

Мы получаем тензор

$$R^{i}_{klm} = \Gamma^{i}_{kl,\,m} - \Gamma^{i}_{km,\,l} - \Gamma^{i}_{al}\Gamma^{a}_{km} + \Gamma^{i}_{am}\Gamma^{a}_{kl} \tag{7}$$

и соответствующий свернутый (по индексам i и m) тензор

$$\overset{*}{R}_{kl} = \Gamma^{a}_{kl,\,a} - \Gamma^{a}_{ka,\,l} - \Gamma^{a}_{kb}\Gamma^{b}_{al} + \Gamma^{a}_{kl}\Gamma^{b}_{ab}. \tag{8}$$

Существует также отличная от нуля свертка по i и k, дающая тензор

$$\Gamma^{a}_{al,\,m} - \Gamma^{a}_{am,\,l}. \tag{9}$$

Однако мы не будем пользоваться этим тензором. Тензор $\overset{*}{R}_{kl}$ неэрмитов. Образуем эрмитов тензор $R_{ik} = \frac{1}{2}(\overset{*}{R}_{ik} + \overline{\overset{*}{R}_{ki}})$. При этом мы получаем

$$R_{ik} = \Gamma^{a}_{ik,\,a} - \frac{1}{2}(\Gamma^{a}_{ia,\,k} + \Gamma^{a}_{ak,\,i}) - \Gamma^{a}_{ib}\Gamma^{b}_{ak} + \Gamma^{a}_{ik}\Gamma^{b}_{\underline{ab}}. \tag{8а}$$

3. Принцип Гамильтона. Уравнение поля

В случае вещественного симметричного поля уравнения поля получаются проще всего следующим образом. В качестве функции Гамильтона используем скалярную плотность

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} R_{ik}. \tag{10}$$

Если варьировать объемный интеграл от $\mathfrak{H}$ независимо по Γ и $\mathfrak{g}$, то (в случае вещественных полей) варьирование по Γ дает уравнения (3), а варьирование по $\mathfrak{g}$ — уравнения $R_{ik} = 0$. Если применить тот же метод к рассматриваемому случаю комплексного поля (где плотность $\mathfrak{H}$ по-прежнему вещественна), то возникает осложнение, поскольку варьирование по Γ не дает непосредственно уравнений (3a), которые мы в любом случае хотим сохранить. Варьирование по Γ дает

$$\begin{aligned} &-\{\mathfrak{g}^{ik}_{,a} + \mathfrak{g}^{sk}\Gamma^{i}_{sa} + \mathfrak{g}^{is}\Gamma^{k}_{as} - \mathfrak{g}^{ik}\Gamma^{b}_{\underline{ab}}\} + \frac{1}{2}\{\mathfrak{g}^{is}_{,s} + \mathfrak{g}^{st}\Gamma^{i}_{st} - \mathfrak{g}^{is}\Gamma^{a}_{\underset{\vee}{sa}}\}\delta^{k}_{a} + \\ &\qquad + \frac{1}{2}\{\mathfrak{g}^{sk}_{,s} + \mathfrak{g}^{st}\Gamma^{k}_{st} + \mathfrak{g}^{sk}\Gamma^{a}_{\underset{\vee}{sa}}\}\delta^{i}_{a} + \frac{1}{2}\{\mathfrak{g}^{is}\Gamma^{a}_{\underset{\vee}{sa}}\delta^{k}_{a} - \mathfrak{g}^{sk}\Gamma^{a}_{\underset{\vee}{sa}}\delta^{i}_{a}\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Первая скобка представляет собой $\mathfrak{g}^{ik}_{\underset{;a}{+-}}$; вторая и третья скобки являются свертками этой величины. Если бы не было четвертой скобки, то уравнение (11) означало бы обращение $\mathfrak{g}^{ik}_{\underset{;a}{+-}}$ в нуль, т. е. выполнение уравнения (3a). Это повлекло бы, однако, обращение в нуль величины $\Gamma^{a}_{\underset{\vee}{sa}}$, для чего в настоящее время нет оснований. Затруднение можно разрешить следующим образом. Выделим мнимую часть уравнения (11):

$$\begin{aligned} &-\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ik}}_{,a} - \mathfrak{g}^{\underset{-}{sk}}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{sa}} - \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{sk}}\Gamma^{i}_{\underline{sa}} - \mathfrak{g}^{\underset{-}{is}}\Gamma^{k}_{\underset{\vee}{as}} - \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}\Gamma^{k}_{\underline{as}} + \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ik}}\Gamma^{b}_{\underline{ab}} + \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{2}\,\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s}\delta^{k}_{a} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{sk}}_{,s}\delta^{i}_{a} = 0. \end{aligned}$$

Свертывая это уравнение по k и a, получаем

$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s} + \mathfrak{g}^{\underset{-}{is}}\Gamma^{a}_{\underset{\vee}{sa}} = 0. \tag{11a}$$

Отсюда мы можем заключить, что необходимым и достаточным [2] усло-

---

[2] Это справедливо для всех точек, если мы потребуем, чтобы компоненты Γ были непрерывными и однозначно определялись уравнениями (3б), ибо в этом случае определитель $|\mathfrak{g}^{is}|$ нигде не может обратиться в нуль.

вием обращения в нуль величины $\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{as}}$ является обращение в нуль $\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s}$. Чтобы это условие удовлетворялось *тождественно*, достаточно принять

$$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}} = \mathfrak{g}^{ist}_{,t}, \tag{12}$$

где $\mathfrak{g}^{ist}$ — тензорная плотность, антисимметричная по всем трем индексам. Это равносильно требованию, чтобы тензорная плотность $\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}$ выводилась из «векторного потенциала». Поэтому подставим в функцию Гамильтона тензорную плотность

$$\mathfrak{g}^{ik} = \mathfrak{g}^{\underline{ik}} + \mathfrak{g}^{ikl}_{,l} \tag{13}$$

и проварьируем независимо по компонентам Γ, $\mathfrak{g}^{\underline{ik}}$ и $\mathfrak{g}^{ikl}$. При этом варьирование по Γ дает уравнения (3а), как было показано ранее. Варьирование по другим величинам дает уравнения

$$R_{\underline{ik}} = 0, \tag{14}$$

$$R_{\underset{\vee}{ik},l} + R_{\underset{\vee}{kl},i} + R_{\underset{\vee}{li},k} = 0. \tag{15}$$

Кроме того, имеем уравнения

$$\mathfrak{g}^{\overset{+-}{ik}}_{;l} = 0 \qquad \text{или} \quad \mathfrak{g}_{\underset{+-}{ik};l} = 0, \tag{3а}$$

$$\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{is}} = 0, \tag{16}$$

$$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s} = 0 \qquad \text{или} \quad \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}} = \mathfrak{g}^{ist}_{,t}. \tag{17}$$

Как следует из (3а), обе системы (16) и (17) тождественны; для доказательства этого достаточно убедиться, что из (3а) следует равенство

$$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s} - \mathfrak{g}^{\underline{is}}\Gamma^{t}_{\underset{\vee}{st}} = 0.$$

Поэтому система уравнений поля не ослабляется, если отбросить уравнение (17).

Это замечание существенно по следующей причине. В то время, как в приведенном выводе уравнений особое внимание уделялось плотности $\mathfrak{g}^{ik}$, а не тензору g_{ik} (или g^{ik}), в окончательной результирующей системе уравнений можно не проводить различия между этими величинами.

Мы видим, далее, что в силу уравнений (16) тензор (9) сводится к выражению $\Gamma^{a}_{\underline{al},m} - \Gamma^{a}_{\underline{am},l}$, которое равно нулю в силу (3в).

Изложенный здесь вывод обладает, по сравнению с предыдущим, тем преимуществом, что в нем использован принцип Гамильтона без краевых условий. Такой же характер носит вывод уравнений Максвелла из вариационного принципа в специальной теории относительности, где (с мнимой временно́й координатой) функцией Гамильтона является $\mathfrak{H} = \varphi_{\underset{\vee}{ik}}\varphi_{\underset{\vee}{ik}}$. Если положить $\varphi_{\underset{\vee}{ik}} = \varphi_{i,k} - \varphi_{k,i}$ и проварьировать по φ_i, то одна система уравнений $(\varphi_{\underset{\vee}{ik},k} = 0)$ получится непосредственно, а другая — путем исключения φ_i. Этот метод соответствует использованному выше. Однако можно избежать введения потенциала φ_i, добавив вместо этого систему уравнений

$$\varphi_{\underset{\vee}{ik},l} + \varphi_{\underset{\vee}{kl},i} + \varphi_{\underset{\vee}{li},k} = 0$$

в качестве краевых условий для $\varphi_{\underset{\vee}{ik}}$ при варьировании. Это соответствует использованию в предыдущей статье соотношения $\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s} = 0$ в качестве краевого условия при варьировании. Введенное там краевое условие $\Gamma^s_{\underset{\vee}{is}} = 0$ можно было опустить.

Замечания

Для сохранения специального характера локальных пространственноподобных и временноподобных направлений существенно, чтобы индекс инерции величины $g_{\underline{ik}}dx^i dx^k$ был всюду одинаков, т. е. чтобы определитель $|g_{\underline{ik}}|$ нигде не обращался в нуль. Действительно, это может быть выведено из требования, чтобы Г-поле было конечным и всюду определялось уравнениями (3а). Мой ассистент дал следующее простое доказательство этого утверждения.

Если бы определитель $|g_{\underline{ik}}|$ обращался в нуль в точке P, то существовал бы отличный от нуля вектор ξ^s такой, что $g_{\underline{is}}\xi^s = 0$.

Рассмотрим теперь вещественную часть уравнения (3а):

$$g_{\underline{ik},l} - g_{\underline{sk}}\Gamma^s_{\underline{il}} - g_{\underline{is}}\Gamma^s_{\underline{lk}} - g_{\underset{\vee}{sk}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{il}} - g_{\underset{\vee}{is}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{lk}} = 0.$$

Если это уравнение (в точке P) умножить на $\xi^i\xi^k\xi^l$ и просуммировать по i, k, l, то второй и третий члены обратятся в нуль по определению вектора ξ, а четвертый и пятый — в силу антисимметричности величины Г. Поэтому существует линейная комбинация уравнений (3а), не содержащая компонент Г. Следовательно, в такой точке компоненты Г становятся либо бесконечными, либо не вполне определенными, что противоречит нашему требованию.

Относительно физической интерпретации величин заметим, что антисимметричная плотность $\mathfrak{g}^{ikl}$ играет роль электромагнитного векторного потенциала, а тензор $g_{\underset{\vee}{ik},l} + g_{\underset{\vee}{kl},i} + g_{\underset{\vee}{li},k}$ — роль плотности тока. Последняя величина является «дополнением» контравариантной векторной плотности с (тождественно) равной нулю дивергенцией.

Выше мы рассматривали комплексные поля. Однако существует теоретическая возможность, что величины g_{ik} и Γ^l_{ik} вещественны, хотя и несимметричны. Таким образом, можно получить теорию, окончательные формулы которой соответствуют формулам развитой выше теории. Э. Шредингер также положил в основу своей аффинной теории (т. е. теории, основанной на компонентах Γ как на фундаментальных величинах поля) вещественные поля. Поэтому здесь я хочу привести некоторые формальные соображения в пользу комплексных полей.

Эрмитов тензор g_{ik} может быть образован из векторов согласно схеме $g_{ik} = \underset{\alpha}{\Sigma}\, \underset{\alpha}{c}\, \underset{\alpha}{A_i}\, \underset{\alpha}{\overline{A}_k}$. Существенным здесь является то обстоятельство, что, используя *один* комплексный вектор A_i, можно составить эрмитов тензор $A_i\overline{A}_k$, что является близкой аналогией случая симметричных вещественных полей. Однако нельзя составить из векторов несимметричный вещественный тензор, который был бы столь же похож на комплексный.

Рассмотрим теперь величины Γ^l_{ik}, несимметричные по нижним индексам. Для них мы получаем как в вещественном, так и в комплексном случае присоединенные («сопряженные») величины $\widetilde{\Gamma}^l_{ik} = \Gamma^l_{ki}$. В комплексном случае мы сопоставляли параллельному переносу вектора

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{st} A^s dx^t$$

параллельный перенос комплексно сопряженного ему вектора

$$\delta\overline{A^i} = -\overline{\Gamma^i_{st}}\,\overline{A^s}\, dx^t .$$

Следовательно, в случае комплексных полей присоединенный перенос соответствует присоединенным объектам, тогда как в случае вещественных полей такого присоединенного объекта не существует.

О ДВИЖЕНИИ ЧАСТИЦ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

(Совместно с Л. Инфельдом)

1. **Введение**. Гравитационное поле проявляется в движении. Поэтому проблема определения движения тел только из уравнений поля имеет фундаментальное значение. Эта задача была впервые решена около десяти лет назад; тогда были выведены уравнения движения для двух частиц [1]. Вскоре после этого было предложено более общее и простое решение этой проблемы [2].

Льюисон указал нам, что из нашего приближенного метода не следует, что уравнения поля могут быть разрешены в произвольно высоком приближении. Это в самом деле так. Мы считаем, что настоящая работа не только снимает эту трудность, но и дает новое и более глубокое понимание проблемы движения. С логической точки зрения настоящая теория значительно проще и яснее старой. Но, как всегда, мы должны платить за эти логические упрощения более громоздкими вычислениями.

Обсуждаемый вопрос изложен здесь с самого начала, так что знание предыдущих работ не предполагается. Чтобы облегчить чтение настоящей работы тем, кто изучал предыдущие статьи, мы используем здесь в основном те же обозначения, что и прежде.

Начнем с некоторых общих замечаний.

Все попытки представить материю тензором энергии-импульса неудовлетворительны, и мы хотим освободить нашу теорию от специального выбора такого тензора. Поэтому мы будем иметь дело здесь только с гравитационными уравнениями в пустом пространстве, а материя будет представлена сингулярностями гравитационного поля.

* *On the Motion of Particles in General Relativity Theory* (With L. Infeld). Canad. J. Math., 1949, 1, 209—241.

[1] A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann. Ann. Math., 1938, 39, 65 (Статья 117.— *Ред.*)

[2] A. Einstein, L. Infeld. Ann. Math., 1940, 41, 455. (Статья 120.— *Ред.*)

В механике Ньютона частицы изображаются как сингулярности скалярного поля φ, которое удовлетворяет уравнению Лапласа всюду вне сингулярностей. Ввиду того, что классическое уравнение линейно, поле может быть разложено на парциальные поля, каждое из которых создается одной частицей. Каждая частица *находится* в поле всех других частиц. Построение теории завершается установлением уравнения движения, которое выражает пропорциональность ускорения градиенту поля, взятому со знаком минус; коэффициент пропорциональности является универсальной константой. Таким образом классическая физика постулирует уравнения движения независимо от уравнений поля. Массы источников поля предполагаются независящими от времени. Законы движения предполагаются справедливыми в инерциальной системе. Поэтому пространство-время выступает как независимая физическая реальность. Слабость концепции такого пространственно-временно́го фона в классической теории была отмечена уже Ньютоном.

Если сравнить эту ситуацию с той, которую мы находим в общей теории относительности в ее первоначальной формулировке, то обнаружим поразительные сходства и различия. Уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0$$

заменяется гравитационным уравнением:

$$R_{kl} = 0,$$

которое, однако, в противоположность классическому уравнению удовлетворяет общему принципу относительности. Классический принцип инерции становится в релятивистской теории принципом геодезической, справедливым для частицы с бесконечно малой массой. Хотя трудность, связанная с введением инерциальной системы, исчезает в релятивистской теории, так же как и исчезает независимое пространство-время, тем не менее уравнения движения все еще вводятся независимо от уравнений поля.

Наша цель — исследовать, в какой мере уравнения поля сами по себе содержат уравнения движения частиц, а также развить метод, который позволил бы нам найти эти уравнения движения в любом приближении.

Начнем с простого замечания: *линейный* закон всегда означает, что движение сингулярностей произвольно. Если поле $F_{(1)}$ связано с мировой линией сингулярности с массой m_1, а поле $F_{(2)}$ — с мировой линией сингулярности с массой m_2, то суперпозиция этих двух полей $F_{(1)} + F_{(2)}$ также является решением линейных уравнений поля. При таком решении те же самые две мировые линии появятся вместе, как раньше появлялись отдельно. Поэтому поле, удовлетворяющее линейным уравнениям, не может заключать в себе взаимодействия между сингулярностями. Таким образом, только нелинейные уравнения поля могут дать нам уравнения движения, поскольку лишь нелинейность может выразить взаимодействие между сингулярностями.

Обратное же утверждение несправедливо. Нелинейность необходима, но не достаточна для того, чтобы уравнения движения следовали из уравнений поля.

Причина того, что уравнения гравитационного поля дают нам уравнения движения, лежит не только в их нелинейности, но также в том, что эти уравнения не являются независимыми друг от друга. В самом деле, среди десяти компонент четыре произвольны, что обусловлено свободой выбора координатной системы. Десять уравнений определяют, так сказать, только шесть независимых функций. Они были бы несовместны, если бы не было четырех тождеств (Бианки), которым они удовлетворяют. Это должно быть справедливо для любой релятивистской системы уравнений, полученных из вариационного принципа. Эти тождества (кроме нелинейности) являются причиной того, что *уравнения движения определяются уравнениями поля.*

Идеи, приводящие к уравнениям движения, далеко не просты и переплетаются друг с другом.

Одной из основных идей настоящей работы является исследование гравитационных уравнений новым приближенным методом. При этом мы разделяем пространство и время. Изменения поля во времени мы считаем малыми по сравнению с изменениями в пространстве. Только после этого мы приходим к согласованной, поддающейся решению системе уравнений, которую можно решить шаг за шагом. Эта мысль не нова, она содержалась и в предыдущих работах.

Другая важная идея состоит в выводе уравнений движения, которые являются *обыкновенными* дифференциальными уравнениями, из уравнений поля, представляющих собой *уравнения в частных производных*. Эта идея, разработанная здесь иначе, чем в предыдущих работах, приводит к использованию интегралов, взятых по поверхностям, окружающим сингулярности поля. Эти поверхностные интегралы зависят только от движения сингулярностей, но не от формы поверхности интегрирования.

Эти и другие вопросы будут подробно рассмотрены в настоящей работе. Для ясности мы решили поместить все наиболее утомительные вычисления в приложения. (Если мы ссылаемся, например, на А.4, то это означает приложение, относящееся к § 4.) Но даже и в этом случае многие непосредственные, но длинные вычисления пришлось опустить. Это особенно относится к вычислениям, которые ведут к поправкам к ньютоновским уравнениям движения. Небольшой параграф по этому вопросу мы включили только для полноты. Но, как и в работе [3], мы вынуждены отослать тех, кто хотел бы найти подробности вычислений, к рукописи, которая хранится в Принстоне (Institute for Advanced Study).

В заключение мы хотели бы поблагодарить Льюисона за его критическое изучение наших предыдущих работ и Шильда за внимательное и критическое чтение настоящей работы в рукописи.

2. Обозначения. Гравитационные уравнения. Так как в большей части нашей работы мы отделяем пространство и время, то мы не будем использовать обычные четырехмерные обозначения. Условимся, что латинские индексы принимают значение 1, 2, 3 и относятся только к пространственным координатам. Греческие индексы относятся и к пространству, и к времени, пробегая значения 0, 1, 2, 3. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Выражение $g_{\mu\nu|\sigma}$ и т. п. означает $\dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}$ и т. п. (2.1)

На бесконечности гравитационное поле принимает галилеевы значения $\eta_{\mu\nu}$, так что

$$\eta_{mn} = -\delta_{mn}, \qquad \eta_{0m} = 0, \qquad \eta_{00} = 1. \tag{2.2}$$

Мы будем писать:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}, \tag{2.3}$$

где величины $h_{\mu\nu}$ представляют собой отклонение метрики пространства-времени от пустого пространства и не предполагаются малыми.

Величины $h^{\mu\nu}$ могут быть получены как функции величин $h_{\mu\nu}$ при помощи соотношения

$$g_{\mu\sigma} g^{\mu\nu} = \delta^\nu_\sigma. \tag{2.4}$$

Оказывается удобным заменить величины h величинами γ, которые являются их линейными комбинациями:

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\sigma\rho}h_{\sigma\rho}, \tag{2.5}$$

или более подробно:

$$\gamma_{00} = \frac{1}{2}h_{00} - \frac{1}{2}h_{ss}, \tag{2.6}$$

$$\gamma_{0n} = h_{0n}, \tag{2.7}$$

$$\gamma_{mn} = h_{mn} - \frac{1}{2}\delta_{mn}h_{ss} + \frac{1}{2}\delta_{mn}h_{00}. \tag{2.8}$$

---

[3] A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann, Ann. Math., 1938, 39, 65. (Статья 117.— *Ред.*)

Эта замена, конечно, не очень существенна, но она упрощает вычисления.

Таким образом мы можем всюду заменить величины h величинами γ. Уравнения гравитационного поля для пустого пространства

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{2.9}$$

могут быть записаны (см. А.2) следующим образом:

$$\Phi_{00} + 2\Lambda_{00} = 0, \tag{2.10}$$

$$\Phi_{0n} + 2\Lambda_{0n} = 0, \tag{2.11}$$

$$\Phi_{mn} + 2\Lambda_{mn} = 0, \tag{2.12}$$

где

$$\Phi_{00} = -\gamma_{00|ss}\,, \tag{2.13}$$

$$\Phi_{0m} = -\gamma_{0m|ss} + \gamma_{0s|sm}, \tag{2.14}$$

$$\Phi_{mn} = -\gamma_{mn|ss} + \gamma_{ms|ns} + \gamma_{ns|ms} - \delta_{mn}\gamma_{rs|rs} \tag{2.15}$$

и

$$2\Lambda_{00} = \gamma_{sr|sr} + 2\Lambda'_{00}, \tag{2.16}$$

$$2\Lambda_{0m} = \gamma_{ms|s0} - \gamma_{00|m0} + 2\Lambda'_{0m}, \tag{2.17}$$

$$2\Lambda_{mn} = -\gamma_{0m|0n} - \gamma_{0n|0m} + 2\delta_{mn}\gamma_{0s|0s} + \gamma_{mn|00} - \delta_{mn}\gamma_{00|00} + 2\Lambda'_{mn}. \tag{2.18}$$

В этих формулах все линейные члены выписаны в явном виде, в то время как все нелинейные по γ члены обозначены через $\Lambda'_{\mu\nu}$. Разделение линейных членов на члены, относящиеся к $\Phi_{\mu\nu}$ и относящиеся к $\Lambda_{\mu\nu}$, может казаться в настоящий момент искусственным. Забегая вперед, заметим здесь, что в том методе приближения, которым мы будем решать гравитационные уравнения, линейные члены, собранные в $\Lambda_{\mu\nu}$, ведут себя подобно нелинейным.

3. Лемма. Во Введении мы упомянули, что дифференциальные уравнения движения будут получены путем образования поверхностных интегралов. Техника вычисления подобных поверхностных интегралов будет неоднократно использоваться в настоящей работе; она основывается на одном утверждении, на которое мы будем ссылаться в дальнейшем как на *лемму*. Здесь мы дадим ее формулировку и доказательство.

Мы имеем некоторую систему функций

$$F_{(aa\ldots)kl}\,. \tag{3.1}$$

При этом несущественно, имеют ли эти функции от x^μ тензорный характер или нет. Индексы в скобках могут быть греческими либо латинскими; они не будут играть роли в нашем доказательстве. Но мы делаем предположение, что эти функции антисимметричны по индексам k, l:

$$F_{(\ldots)kl} = -F_{(\ldots)lk}. \tag{3.2}$$

Теперь образуем интеграл

$$\int_{(S_2)} F_{(\ldots)kl|l}\, n_k\, dS \tag{3.3}$$

по *произвольной замкнутой двумерной* поверхности, которая не проходит через сингулярности поля. В выражении (3.3) величины

$$n_k = \cos(x^k, \vec{n}) \tag{3.4}$$

являются компонентами «нормального единичного» вектора к поверхности. Слова «нормальный» и «единичный» имеют обычный смысл и обозначают соответствующие функции координат, которые применяются в эвклидовой геометрии. Они никак не связаны ни с каким специальным выбором метрики.

Наша лемма утверждает, что

$$\int_{(S_2)} F_{(\ldots)kl|l}\, n_k\, dS = 0. \tag{3.5}$$

Мы видим, что интеграл (3.3), в силу теоремы Грина и благодаря соотношению

$$F_{(\ldots)kl|lk} = 0, \tag{3.6}$$

не зависит от формы поверхности. Интеграл (3.3) мы можем записать также в форме

$$\int_{(S_2)} \operatorname{rot}_n \vec{A}\, dS, \tag{3.7}$$

где

$$F_{(\ldots)23} = A_1, \quad F_{(\ldots)31} = A_2, \quad F_{(\ldots)12} = A_3.$$

Но интеграл (3.7) и, следовательно, интеграл (3.3) могут быть преобразованы по теореме Стокса в контурный интеграл по границе поверхности. Если поверхность замкнута, граница имеет нулевую длину. Следовательно, наша лемма, выраженная соотношением (3.5), доказана.

4. Поверхностные интегралы. Мы рассматриваем частицы вещества как сингулярности поля. Пусть имеется p частиц, мировые линии которых известны. Обозначим через

$$\overset{s}{\xi}{}^k(x^0), \qquad s = 1, 2, 3, \ldots, p, \tag{4.1}$$

мировую линию s-й сингулярности. Здесь и в дальнейшем индекс, написанный сверху, будет всегда относиться к некоторой сингулярности.

Гравитационное поле, т. е. набор величин γ, будет зависеть от координат x^μ, а также и от величин ξ и их производных по времени. Величины γ удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_{\mu\nu} + 2\Lambda_{\mu\nu} = 0. \tag{4.2}$$

В произвольный момент времени x^0 окружим одну только s-ю сингулярность замкнутой поверхностью. Тогда

$$\int^s (\Phi_{\mu k} + 2\Lambda_{\mu k})\, n_k\, dS = 0, \tag{4.3}$$

где s над интегралом означает здесь и в дальнейшем, что интеграл берется по двумерной поверхности, окружающей лишь s-ю сингулярность.

Покажем, что

$$\int^s \Phi_{\mu k} n_k\, dS = 0. \tag{4.4}$$

В самом деле, из выражений (2.14) и (2.15) для величин $\Phi_{\mu k}$ следует, что последние могут быть записаны в виде

$$\Phi_{\mu k} = F_{(\mu)kl|l}, \tag{4.5}$$

$$F_{(\mu)kl} = \gamma_{\mu l|k} - \gamma_{\mu k|l} - \delta_{\mu k}\gamma_{lr|r} + \delta_{\mu l}\gamma_{kr|r}. \tag{4.6}$$

Но $F_{(\mu)kl}$ антисимметричен по k, l. Поэтому соотношение (4.4) выполнено. Отсюда и из соотношения (4.3) мы получаем

$$\int^s 2\Lambda_{\mu k} n_k\, dS = 0. \tag{4.7}$$

Из структуры $\Phi_{\mu k}$ легко проверить, что

$$\Phi_{\mu n|n} = 0, \tag{4.8}$$

и поэтому также

$$\Lambda_{\mu n|n} = 0. \tag{4.9}$$

Уравнение (4.9) показывает, что поверхностный интеграл вида (4.7) не зависит от формы поверхности. Но уравнение (4.7) говорит нам больше, а именно, что такой интеграл обращается в нуль.

Так как форма поверхности совершенно произвольна, то $4p$ поверхностных интегралов в (4.7) не могут дать нам соотношения между пространственными координатами поля. Они могут дать нам только соотношения между координатами сингулярностей и их производными по времени. Таким образом, мы можем иметь самое большее $4p$ дифференциальных уравнений. Забегая вперед, мы можем заметить здесь, что эти уравнения будут определять $3p$ функций времени:

$$\overset{s}{\xi}{}^k (x^0),$$

т. е. движение сингулярностей.

5. Метод приближения. Задача, стоящая перед нами, заключается в том, чтобы решить наши уравнения поля и вывести уравнения движения. Для этого мы используем новый приближенный метод. Предположим, что функция $\varphi(x^\mu, \lambda)$ разложена в ряд по степеням параметра λ (для малых λ):

$$\varphi(x^\mu, \lambda) = \lambda^0 \underset{0}{\varphi} + \lambda^1 \underset{1}{\varphi} + \lambda^2 \underset{2}{\varphi} + \ldots = \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l \underset{l}{\varphi}. \tag{5.1}$$

Индекс снизу означает *порядок приближения* (l в выражении λ^l всегда обозначает степень, но не индекс).

Если функция φ быстро меняется в пространстве, но медленно с изменением x^0, то мы не можем считать разные производные величинами одного порядка малости. Производные по x^0 будут величинами более высокого порядка, чем пространственные производные. Мы введем *вспомогательное время* τ,

$$\tau = x^0 \lambda, \tag{5.2}$$

и будем считать производные по τ равноправными с пространственными производными:

$$\varphi_{|0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \lambda = \lambda \varphi_{,0}. \tag{5.3}$$

Дифференцирование с чертой по x^0 некоторой величины можно заменять дифференцированием с запятой по τ, если при этом степень λ, на которую эта величина умножена, соответственно увеличить на единицу. Чтобы выразить это яснее, мы будем писать цифры под индексами «0», стоящими после запятой, например.

$$\lambda^{2l} \underset{2l}{\gamma}{}_{mn|0} = \lambda^{2l+1} \underset{2l}{\gamma}{}_{mn,\underset{1}{0}} \text{ или: } \lambda^{2l} \underset{2l}{\gamma}{}_{mn|00} = \lambda^{2l+2} \underset{2l}{\gamma}{}_{mn,\underset{2}{00}}. \tag{5.4}$$

С этого момента все производные будут браться по (τ, x^1, x^2, x^3) и будут обозначаться запятыми перед соответствующими индексами

$$\gamma_{\ldots|s} = \gamma_{\ldots,s}, \qquad \gamma_{\ldots|0} = \lambda \gamma_{\ldots,\underset{1}{0}}. \tag{5.5}$$

Таким образом, все функции, которые появляются в уравнениях поля, мы будем разлагать в ряды по степеням λ. Начнем с функций γ:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{00} &= \lambda^2 \underset{2}{\gamma_{00}} + \lambda^4 \underset{4}{\gamma_{00}} + \lambda^6 \underset{6}{\gamma_{00}} + \ldots, \\ \gamma_{0m} &= \qquad\quad \lambda^3 \underset{3}{\gamma_{0m}} + \lambda^5 \underset{5}{\gamma_{0m}} + \ldots, \\ \gamma_{mn} &= \qquad\quad \lambda^4 \underset{4}{\gamma_{mn}} + \lambda^6 \underset{6}{\gamma_{mn}} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Почему эти разложения начинаются с различных степеней λ? Это является предположением, но оно может быть оправдано. Используя временно обычный тензор энергии-импульса материи, мы приближенно имеем для квазистационарного поля:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\gamma_{00} &= -2\rho, \\ \Delta\gamma_{0m} &= -2\rho \frac{dx^m}{d\tau} \lambda, \\ \Delta\gamma_{mn} &= -2\rho \frac{dx^m}{d\tau} \frac{dx^n}{d\tau} \lambda^2; \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

поэтому

$$\gamma_{mn} \sim \lambda\gamma_{0m} \sim \lambda^2\gamma_{00}, \tag{5.8}$$

а то, что мы начинаем с λ^2 в разложении для γ_{00}, является чисто условным.

В связи с разложениями (5.6) возникает и другой вопрос: почему мы опускаем нечетные степени λ в разложениях для γ_{00}, γ_{mn} и четные в разложении для γ_{0m}? В самом деле, мы могли бы ввести все степени в разложения (5.6). Как показывает более тщательное исследование, наш выбор разложений для γ означает, что мы имеем здесь дело со случаем, аналогичным той процедуре в электродинамике, когда выбирают не запаздывающие потенциалы, а полусумму запаздывающих и опережающих потенциалов [4].

Все функции, которые появятся ниже, получаются из функций γ суммированием, умножением, дифференцированием. Таким образом, к каждой компоненте всюду применяется следующее правило: в разложении любой компоненты, имеющей $\left\{\begin{matrix}\text{нечетное}\\ \text{четное}\end{matrix}\right\}$ число нулевых индексов, будут только $\left\{\begin{matrix}\text{четные}\\ \text{нечетные}\end{matrix}\right\}$ степени λ.

---

[4] L. Infeld. Phys. Rev., 1938, 53, 836.

6. Уравнения поля и приближенный метод. Возвратимся к уравнениям поля

$$\Phi_{\mu\nu} + 2\Lambda_{\mu\nu} = 0, \tag{6.1}$$

в которые мы подставим разложения γ в степенные ряды. Таким образом, уравнение для индексов (00) в системе (6.1) можно записать в виде

$$\sum_l \lambda^{2l} (\underset{2l}{\Phi_{00}} + 2\underset{2l}{\Lambda_{00}}) = 0. \tag{6.2}$$

Теперь перепишем уравнение (6.2) и другие уравнения поля в виде отдельных уравнений для каждого шага приближения. Мы запишем их в следующей форме:

$$\underset{2l-2}{\Phi_{00}} + 2\underset{2l-2}{\Lambda_{00}} = 0, \tag{6.3а}$$

$$\underset{2l-1}{\Phi_{0m}} + 2\underset{2l-l}{\Lambda_{0m}} = 0, \tag{6.3б}$$

$$\underset{2l}{\Phi_{mn}} + 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}} = 0. \tag{6.3в}$$

Проанализируем структуру уравнений (6.3) более внимательно. Вспоминая формулы (2.13) — (2.15), мы можем записать более подробно:

$$\underset{2l-2}{\Phi_{00}} = -\underset{2l-2}{\gamma_{00,rr}}, \tag{6.4а}$$

$$\underset{2l-1}{\Phi_{0m}} = -\underset{2l-1}{\gamma_{0m,rr}} + \underset{2l-1}{\gamma_{0r,mr}}, \tag{6.4б}$$

$$\underset{2l}{\Phi_{mn}} = -\underset{2l}{\gamma_{mn,rr}} + \underset{2l}{\gamma_{mr,nr}} + \underset{2l}{\gamma_{nr,mr}} - \delta_{mn}\underset{2l}{\gamma_{rs,rs}} \tag{6.4в}$$

и

$$2\underset{2l-2}{\Lambda_{00}} = \underset{2l-2}{\gamma_{rs,rs}} + 2\underset{2l-2}{\Lambda'_{00}}, \tag{6.5а}$$

$$2\underset{2l-1}{\Lambda_{0m}} = -\underset{2l-2}{\gamma}_{00,\underset{1}{0}m} + \underset{2l-2}{\gamma}_{mr,\underset{1}{0}r} + 2\underset{2l-1}{\Lambda'_{0m}}, \tag{6.5б}$$

$$2\underset{2l}{\Lambda_{mn}} = -\underset{2l-1}{\gamma}_{0m,\underset{1}{0}n} - \underset{2l-1}{\gamma}_{0n,\underset{1}{0}m} + 2\delta_{mn}\underset{2l-1}{\gamma}_{0r,\underset{1}{0}r} + \underset{2l-2}{\gamma}_{mn,\underset{2}{00}} - \delta_{mn}\underset{2l-2}{\gamma}_{00,\underset{2}{00}} + 2\underset{2l}{\Lambda'_{mn}}. \tag{6.5в}$$

Теперь предположим, что все функции,

$$\underset{2}{\gamma_{00}} \cdots \underset{2l-4}{\gamma_{00}}, \tag{6.6а}$$

$$\underset{3}{\gamma_{0m}} \cdots \underset{2l-3}{\gamma_{0m}}, \tag{6.6б}$$

$$\underset{4}{\gamma_{mn}} \cdots \underset{2l-2}{\gamma_{mn}}, \tag{6.6в}$$

известны. Тогда значение функции $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$ может быть найдено из уравнения (6.3а). Действительно, $\underset{2l-2}{\Lambda_{00}}$ содержит только уже известные члены, так как функции $\underset{2l-2}{\gamma_{mn}}$ известны, а $\underset{2l-2}{\Lambda'_{00}}$ нелинейна и поэтому может зависеть только от известных функций γ. То же самое справедливо и для уравнений (6.3б) и (6.3в). Неизвестные функции содержатся в Φ, известные функции — в Λ. Функция $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$, уже найденная из уравнения (6.3а), появляется как известная функция в выражении для $\underset{2l-1}{\Lambda_{0m}}$. Подобно этому, функция $\underset{2l-1}{\gamma_{0m}}$, найденная из уравнения (6.3б), появляется как известная в выражении для $\underset{2l}{\Lambda_{mn}}$. В самом деле, мы теперь видим целесообразность нашего разделения линейных членов.

Таким образом, наши уравнения (6.3), если их решить, дают

$$\underset{2l-2}{\gamma_{00}}, \quad \underset{2l-1}{\gamma_{0m}}, \quad \underset{2l}{\gamma_{mn}}, \tag{6.7}$$

и, если эта процедура сходится, мы можем определить поле в любом желаемом приближении.

Важный вопрос заключается в следующем: всегда ли уравнения (6.3) разрешимы?

7. Условие дивергенции. Вернемся к нашим уравнениям (6.3). Первое из них, т. е.

$$\underset{2l-2}{\Phi_{00}} + 2\underset{2l-2}{\Lambda_{00}} = 0, \tag{7.1}$$

в силу (6.4а) и (6.5а), является уравнением Пуассона, где величина $\underset{2l-2}{\Lambda_{00}}$ известна. Это уравнение нетрудно проинтегрировать и найти $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$. Далее из уравнения (6.3б), принимая во внимание формулу (6.4б), получаем

$$\underset{2l-1}{\Phi_{0m,\,m}} = 0. \tag{7.2}$$

Поэтому следующие три уравнения могут быть проинтегрированы, только если

$$\underset{2l-1}{\Lambda_{0m,\,m}} = 0. \tag{7.3}$$

Но выражение $\underset{2l-1}{\Lambda_{0m}}$ уже известно. Поэтому мы должны быть уверены, что наша процедура приводит нас к выражению для $\underset{2l-1}{\Lambda_{0m}}$, удовлетворяющему условию (7.3). Подобным образом последние шесть уравнений

(6.3в) приводят нас вследствие того, что

$$\underset{2l}{\Phi}_{mn,\,n} = 0, \tag{7.4}$$

к условию интегрируемости

$$\underset{2l}{\Lambda}_{mn,\,n} = 0. \tag{7.5}$$

Докажем, что условия (7.3) и (7.5) выполняются, если уравнения поля удовлетворены *во всех предыдущих* приближениях.

Тензор

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{7.6}$$

удовлетворяет тождеству Бианки

$$G^{\mu}_{\nu|\mu} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha\ \beta \end{Bmatrix} G^{\beta}_{\nu} - \begin{Bmatrix} \beta \\ \nu\ \alpha \end{Bmatrix} G^{\alpha}_{\beta} = 0. \tag{7.7}$$

Мы предполагаем, что удовлетворены все уравнения вплоть до порядка $(2l-2)$, т. е. включая уравнение

$$\underset{2l-2}{\Phi}_{00} + 2\underset{2l-2}{\Lambda}_{00} = 0.$$

Мы знаем, что $\Phi_{\mu\nu} + 2\Lambda_{\mu\nu} = 0$ эквивалентно уравнению $R_{\mu\nu} = 0$. Из приложения А.2 следует соотношение

$$\Phi_{\mu\nu} + 2\Lambda_{\mu\nu} = -2\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\right), \tag{7.8}$$

которое означает, что наше выражение $\Phi_{\mu\nu} + 2\Lambda_{\mu\nu}$ является линейной комбинацией из компонент $R_{\mu\nu}$. Таким образом, если наши уравнения поля удовлетворены, то мы имеем

$$\left.\begin{aligned} \underset{2}{G}_{00} &= \underset{4}{G}_{00} = \ldots = \underset{2l-2}{G}_{00} = 0, \\ \underset{3}{G}_{0m} &= \underset{5}{G}_{0m} = \ldots = \underset{2l-3}{G}_{0m} = 0, \\ \underset{2}{G}_{mn} &= \underset{4}{G}_{mn} = \ldots = \underset{2l-2}{G}_{mn} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

Запишем нулевое тождество Бианки порядка $(2l-1)$. Из левой части тождества (7.7), полагая $\nu = 0$, получаем следующие линейные члены:

$$-\underset{2l-1}{G}_{0m,\,m} + \underset{2l-2}{G}_{00,\,\underset{1}{0}}. \tag{7.10}$$

Нелинейная часть содержит произведения величин G и γ. Но в силу равенств (7.9), как нелинейная часть тождества Бианки, так и второе выражение в (7.10), обращаются в нуль. Поэтому *нулевое* тождество Бианки вместе с уравнениями поля дает

$$\underset{2l-1}{G}_{0m,\,m} = 0. \tag{7.11}$$

Вследствие равенств (7.8), (7.6) и (7.2)

$$\underset{2l-1}{\Lambda}_{0m,\,m} = 0. \tag{7.12}$$

Переходя к следующему приближению, предположим, что кроме равенств (7.9) мы имеем также

$$\underset{2l-1}{G}_{0m} = 0. \tag{7.13}$$

Полагая в тождестве Бианки (7.7) $\nu = m$, в силу равенств (7.9) и (7.13), в порядке $2l$ получаем

$$\underset{2l}{G}_{mn,\,n} = 0, \tag{7.14}$$

и поэтому, ввиду равенств (7.4) и (7.8),

$$\underset{2l}{\Lambda}_{mn,\,n} = 0. \tag{7.15}$$

Таким образом, условия дивергенции удовлетворены на каждом этапе приближения, хотя и не тождественно. Они удовлетворены благодаря тождествам Бианки и благодаря предшествующим приближениям уравнений поля.

8. **Условие на поверхности и уравнения движения.** Мы теперь приближаемся к наиболее существенной части нашего доказательства. Перед нами стоит задача решения следующей системы уравнений:

$$\underset{2l-2}{\Phi}_{00} + 2\underset{2l-2}{\Lambda}_{00} = 0, \tag{8.1а}$$

$$\underset{2l-1}{\Phi}_{0m} + 2\underset{2l-1}{\Lambda}_{0m} = 0, \tag{8.1б}$$

$$\underset{2l}{\Phi}_{mn} + 2\underset{2l}{\Lambda}_{mn} = 0. \tag{8.1в}$$

Мы знаем, что вследствие тождеств Бианки и в силу того, что (как мы предполагаем) подобные уравнения были решены в предыдущих приближениях, мы имеем

$$\underset{2l-1}{\Lambda}_{0m,\,m} = 0, \qquad \underset{2l}{\Lambda}_{mn,\,n} = 0. \tag{8.2}$$

Вспомним также, что нетрудно решить уравнение (8.1а), которое является уравнением Пуассона. Но что можно сказать об уравнениях (8.1б) и (8.1в)?

Прежде чем вернуться к этому фундаментальному вопросу, мы хотим обсудить *исходный пункт* нашего метода последовательных приближений, который определяет характер вычислений.

В уравнениях (8.1) мы положим $l = 2$ и подробно выпишем первые два уравнения:

$$\underset{2}{\gamma}_{00,\,ss} = 0, \tag{8.3a}$$

$$-\underset{3}{\gamma}_{0m,\,ss} + \underset{3}{\gamma}_{0s,\,ms} = \underset{2}{\gamma}_{00,\,\underset{1}{0}m}. \tag{8.3б}$$

Характер полного решения будет зависеть от выбора гармонической функции, которую мы возьмем как решение уравнения (8.3а). Поскольку мы заинтересованы в решениях, представляющих частицы, мы запишем:

$$\left.\begin{aligned} &\underset{2}{\gamma}_{00} = 2\varphi, \quad \varphi = \sum_{s=1}^{p} \{-2\underset{2}{\overset{s}{m}}\overset{s}{\psi}\}, \\ &\overset{s}{\psi} = [(x^k - \overset{s}{\xi}{}^k)(x^k - \overset{s}{\xi}{}^k)]^{-\frac{1}{2}} = (\overset{s}{r})^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

Здесь $\overset{s}{r}$ — «расстояние» в пространстве от точки до s-й сингулярности.

Временно оставим открытым вопрос о том, является ли $\underset{2}{\overset{s}{m}}$ функцией времени или она постоянна. Теперь подставим это выражение для $\underset{2}{\gamma}_{00}$ в уравнение (8.3б) и опять получим три уравнения для трех функций $\underset{3}{\gamma}_{0m}$.

Но всегда ли уравнения (8.3б) разрешимы? Правда, дивергенции от обеих частей этих уравнений обращаются в нуль. Но этого недостаточно. Поверхностный интеграл от левой части уравнения (8.3б) обращается в нуль, как следует из леммы. Но тогда поверхностный интеграл от правой части (8.3б) также должен быть равен нулю. Если мы вычислим интеграл по поверхности, окружающей каждую сингулярность, то найдем (см. А.4), что он обращается в нуль лишь в том случае, если

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underset{2}{\overset{s}{m}}\right) = \underset{2}{\overset{s}{m}}_{,\,\underset{1}{0}} = \underset{3}{\dot{\overset{s}{m}}} = 0, \tag{8.5}$$

т. е. если величины $\underset{2}{m}$ не зависят от времени. Это происходит потому, что

$$\overset{s}{\psi}_{,\,0} = -\overset{s}{\psi}_{,\,k}\dot{\overset{s}{\xi}}{}^k, \qquad \left(\dot{\xi}^k = \frac{d\xi^k}{d\tau}\right), \tag{8.6}$$

и благодаря тому, что только выражения, пропорциональные r^{-2}, могут давать вклад в поверхностные интегралы. Таким образом, возвращаясь к (8.4), мы должны предположить, что величины

$$\underset{2}{\overset{1}{m}},\ \underset{2}{\overset{2}{m}},\ \underset{2}{\overset{3}{m}},\ \ldots,\ \underset{2}{\overset{p}{m}} \tag{8.7}$$

постоянны.

Эти постоянные (8.7) могут быть либо положительными, либо отрицательными. Мы будем предполагать, что величины $\underset{2}{\overset{s}{m}}$ положительны. В самом деле, взяв первую частицу и удалив все остальные, мы видим, что $\underset{2}{\overset{1}{m}}$ является ее *гравитационной массой*, поскольку при больших r поле совпадает с полем частицы с гравитационной массой $\underset{2}{\overset{1}{m}}$. Это — та же самая константа интегрирования, которая появляется в решении Шварцшильда, так как наше поле для одной частицы совпадает с полем сингулярности Шварцшильда, когда r велико. *Итак, мы должны исключить из наших решений отрицательные гравитационные массы. Но тогда мы должны также исключить диполи и полюса более высокого порядка.*

Тем не менее, если мы попытаемся решить уравнения (8.1), то увидим (детали будут обсуждены позже), что не можем сделать этого без добавления к $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$ определенных полюсов и диполей. Это мы должны сделать для того, чтобы обеспечить интегрируемость уравнений (8.1) в каждом приближении. Но тогда решения для полного поля будут содержать диполи, которые недопустимы, так как они представляют физически бессмысленные решения. Мы должны будем устранить их *после того*, как будет найдено полное поле. Это может быть сделано, если мы *ограничим движение частиц*. Иначе говоря, условие, что дипольное поле должно обращаться в нуль, даст нам $3p$ обыкновенных дифференциальных уравнений движения p частиц. Таким образом, движение в процедуре последовательных приближений остается неопределенным. Оно становится определенным только после того, как процедура последовательных приближений заканчивается и исключаются дипольные поля.

Практически мы находим решения как для поля, так и для уравнений движения лишь в определенном приближении, скажем, в приближении порядка $2n$. Мы получим уравнения движения в приближении порядка $2n$, исключив все дипольные поля в таком приближении.

Хотя мы разложили наши уравнения поля по произвольному параметру λ, это λ может быть исключено из окончательных уравнений движения путем изменения масштабов величин $\overset{s}{\underset{2}{m}}$ и τ, так что параметр λ не будет входить в уравнения в окончательной форме.

Мы дали общий набросок наших рассуждений. Возвращаясь к деталям, посмотрим, почему уравнения (8.1) в общем случае неинтегрируемы. Из содержания раздела 4, в частности из равенства (4.4), мы знаем, что поверхностные интегралы от функций Φ обращаются в нуль. Хотя это утверждение было доказано для полного поля, оно в равной степени справедливо на каждом этапе приближения, так как при доказательстве использована только структура функции Φ, которая остается той же самой и для полного поля, и для поля в каждом приближении. Таким образом, мы имеем

$$\overset{s}{\int} \underset{2l-1}{\Phi_{0r}} n_r dS = 0, \qquad \overset{s}{\int} \underset{2l}{\Phi_{mr}} n_r dS = 0. \tag{8.8}$$

Но тогда наши уравнения (8.1) могут быть самосогласованы, только если мы имеем

$$\overset{s}{\int} 2\underset{2l-1}{\Lambda_{0r}} n_r dS = 0, \qquad \overset{s}{\int} 2\underset{2l}{\Lambda_{mr}} n_r dS = 0. \tag{8.9}$$

Но функции Λ в уравнениях (8.1) уже известны; это функции *известного* поля, вычисленного на предыдущем этапе приближения. Поэтому мы можем вычислить интегралы (8.9) и выяснить, обращаются они в нуль или нет.

В этом месте удобно ввести новые обозначения. Ввиду равенств (8.2) поверхностные интегралы (8.9) будут зависеть не от формы поверхности, а только от сингулярностей и их движения. Таким образом поверхностные интегралы, даже если они не обращаются в нуль, могут быть функциями лишь τ.

Мы пишем:

$$\frac{1}{4\pi}\overset{s}{\int} 2\underset{2l-1}{\Lambda_{0r}} n_r dS = \overset{s}{\underset{2l-1}{C}}{}_0(\tau) = \overset{s}{\underset{2l-1}{C}}{}_0, \tag{8.10}$$

$$\frac{1}{4\pi}\overset{s}{\int} 2\underset{2l}{\Lambda_{mr}} n_r dS = \overset{s}{\underset{2l}{C}}{}_m(\tau) = \overset{s}{\underset{2l}{C}}{}_m \tag{8.11}$$

и предполагаем, что мы уже вычислили величины C. Если они обращаются в нуль тождественно и если они обращаются в нуль на каждом этапе приближения, то наши уравнения самосогласованы.

Предположим, однако, что величины C в соотношениях (8.10) и (8.11) *не равны нулю*. Тогда уравнения (8.1б, в) не могут быть решены. При решении уравнений (8.1а) затруднения отсутствуют. Это уравнение имеет вид

$$\underset{2l-2}{\gamma_{00,\,rr}} = 2\underset{2l-2}{\Lambda_{00}}, \tag{8.12}$$

где правая часть известна. Мы видим, что решение этого уравнения определяется лишь с точностью до произвольной гармонической функции. Таким образом, мы можем добавить к любому решению либо изолированные полюса, либо полюса и диполи.

Добавляя полюса, мы можем обеспечить интегрируемость уравнения (8.1б). Затем, добавляя диполи, мы можем обеспечить интегрируемость уравнения (8.1в). Все это можно сделать *одновременно*, добавляя полюса и диполи, но для простоты изложения мы сделаем это в два этапа.

Найдя $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$ из уравнения (8.12), мы вычислим величину $\underset{2l-1}{\overset{s}{C_0}}$ и, вообще говоря, найдем, что $\underset{2l-1}{\overset{s}{C_0}} \neq 0$. Тогда мы заменим в уравнении (8.1б)

$$\underset{2l-2}{\gamma_{00}} \text{ на } \underset{2l-2}{\gamma_{00}} - \sum_s 4 \underset{2l-1}{\overset{s}{m}\overset{s}{\psi}}, \tag{8.13}$$

где $\underset{2l-2}{\overset{s}{m}}$ — некоторые функции времени, которые мы скоро определим, а ψ — функции, определенные в (8.4). Конечно, это изменение величин $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$ изменяет $\underset{2l-1}{\overset{s}{C_0}}$. В самом деле,

$$\left.\begin{aligned} &2\underset{2l-1}{\Lambda_{0m}} \text{ переходит теперь в} \\ &2\underset{2l-1}{\Lambda_{0m}} + \sum_s \big(4\underset{2l-2}{\overset{s}{m}}\overset{s}{\psi}\big)_{\underset{1}{,\,0m}}, \end{aligned}\right\} \tag{8.14}$$

что следует из уравнения (6.5б), поскольку величина $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$ появляется в $\underset{2l-1}{\Lambda_{0m}}$ только как $-\underset{2l-2}{\gamma_{00,\,}}\underset{1}{{}_{m0}}$. Теперь очевидно, что прежний поверхностный интеграл

$$\frac{1}{4\pi}\overset{s}{\int} 2\underset{2l-1}{\Lambda_{0r}} n_r\, dS = \underset{2l-1}{\overset{s}{C_0}} \tag{8.15}$$

переходит в (см. А.4)

$$\underset{2l-1}{\overset{s}{C_0}} - 4\underset{2l-1}{\overset{s}{\dot{m}}}. \tag{8.16}$$

Поэтому его можно сделать равным нулю, выбирая

$$4\overset{s}{\underset{2l-1}{\dot{m}}} = \overset{s}{\underset{2l-1}{C_0}}. \tag{8.17}$$

Таким образом, добавляя полюс, мы можем обеспечить интегрируемость уравнений (8.1б). Следующий шаг состоит в том, чтобы обеспечить интегрируемость уравнений (8.1в). Итак, мы предположим, что величины $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$, $\underset{2l-1}{\gamma_{0m}}$ известны, что уравнения (8.1б) интегрируемы, и мы должны еще раз возвратиться к $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$, чтобы найти другое решение уравнения (8.1а), обеспечивающее интегрируемость уравнений (8.1в), не нарушая интегрируемости (8.1б).

Заменим теперь нашу величину $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$ (содержащую дополнительные полюса) на

$$\underset{2l-2}{\gamma_{00}} - \sum_{s=1}^{p} \overset{s}{\underset{2l-2}{S_r}}\, \overset{s}{\psi}_{,r}. \tag{8.18}$$

Это — дополнительные *дипольные* решения, и мы предположим, что в $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$ не содержится других дипольных выражений. Снова S_r являются функциями только τ, определяемыми позже. Величины $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$ теперь содержат решения с изолированными полюсами, чтобы выполнялось условие интегрируемости уравнений (8.1б). Нетрудно видеть, что при изменении выражения (8.18) изменяется $\underset{2l-1}{\gamma_{0m}}$ так, что выражение для $\underset{2l-1}{\gamma_{0m}}$ принимает вид

$$\underset{2l-1}{\gamma_{0m}} - \sum_{s} (\overset{s}{\underset{2l-2}{S_m}}\overset{s}{\psi})_{,\underset{1}{0}}. \tag{8.19}$$

В самом деле, если старые $\underset{2l-1}{\gamma_{0m}}$ удовлетворяли первоначальным уравнениям (8.1б),

$$\underset{2l-1}{\gamma_{0m,ss}} - \underset{2l-1}{\gamma_{0s,ms}} = \underset{2l-2}{\gamma_{ms,\underset{1}{0}s}} - \underset{2l-2}{\gamma_{00,m\underset{1}{0}}} + 2\underset{2l-1}{\Lambda'_{0m}}, \tag{8.20}$$

то величины $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$, $\underset{2l-1}{\gamma_{0m}}$ *вместе* с дополнительными выражениями, выписанными в (8.18) и (8.19), также удовлетворяют этим уравнениям. Это происходит потому, что величины $2\underset{2l-1}{\Lambda'_{0m}}$, будучи нелинейными, не могут содержать ни $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$, ни $\underset{2l-1}{\gamma_{0m}}$. Поэтому добавление дипольных членов не влияет на интегрируемость уравнений (8.1б).

Теперь последний и решающий шаг: мы заменяем в (8.1в) выражения для $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$, $\underset{2l-1}{\gamma_{0m}}$ новыми выражениями, согласно (8.18) и (8.19), и подбираем величины S так, чтобы поверхностные интегралы обращались в нуль тождественно. Это требует несколько более длинных вычислений.

Выпишем подробно уравнение (8.1в):

$$\underset{2l}{\gamma}_{mn,ss} - \underset{2l}{\gamma}_{ms,ns} - \underset{2l}{\gamma}_{ns,ms} + \delta_{mn}\underset{2l}{\gamma}_{rs,rs} = -\underset{2l-1}{\gamma}_{0m,\underset{1}{0}n} - \underset{2l-1}{\gamma}_{0n,\underset{1}{0}m} + 2\delta_{mn}\underset{2l-1}{\gamma}_{0r,\underset{1}{0}r} +$$
$$+ \underset{2l-2}{\gamma}_{mn,\underset{2}{00}} - \delta_{mn}\underset{2l-2}{\gamma}_{00,\underset{2}{00}} + 2\underset{2l}{\Lambda'_{mn}} = 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}}. \qquad (8.21)$$

Подставим в уравнение (8.21) вместо старых $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$, $\underset{2l-1}{\gamma_{0m}}$ соответственно

$$\underset{2l-2}{\gamma_{00}} - \sum_s \underset{2l-2}{\overset{s}{S}_r}\overset{s}{\psi}_{,r}, \qquad (8.22)$$

$$\underset{2l-1}{\gamma_{0m}} - \sum_s (\underset{2l-2}{\overset{s}{S}_m}\overset{s}{\psi})_{,\underset{1}{0}}. \qquad (8.23)$$

Теперь мы получим новые выражения, которые надо добавить к старым $\underset{2l}{\Lambda_{mn}}$. Трудность заключается в том, что теперь вклад вносят не только линейные выражения, но и Λ'_{mn}, которые содержат члены типа $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}\underset{2}{\gamma_{00}}$. Результат вычислений приводится в А.8 и содержит много выражений, из которых мы выпишем лишь первые три, состоящие из линейных членов (остальные, как мы увидим, несущественны). Вместо старого выражения $2\underset{2l}{\Lambda_{mn}}$ мы имеем

$$2\underset{2l}{\Lambda_{mn}} + \sum_s (\underset{2l}{\overset{s}{\ddot{S}}_m}\overset{s}{\psi}_{,n} + \underset{2l}{\overset{s}{\ddot{S}}_n}\overset{s}{\psi}_{,m} - \delta_{mn}\underset{2l}{\overset{s}{\ddot{S}}_r}\overset{s}{\psi}_{,r}) + \ldots, \qquad (8.24)$$

где точки в конце обозначают опущенные выражения. Поскольку мы здесь обсуждаем вопрос о поверхностных интегралах, мы можем опустить их, потому что они не дают вклада в последние. Мы видим также, что выписанные нами здесь выражения имеют исчезающую дивергенцию. Это справедливо также для опущенных членов. Вычисляя поверхностные интегралы (приложение А.4), мы находим, что старый поверхностный интеграл

$$\frac{1}{4\pi}\int^{s} 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}}n_n dS = \underset{2l}{\overset{s}{C}_m} \qquad (8.25)$$

переходит в

$$\underset{2l}{\overset{s}{C}}{}_m - \underset{2l}{\overset{s}{\ddot{S}}}{}_m. \tag{8.26}$$

Поэтому его можно сделать равным нулю, выбирая

$$\underset{2l}{\overset{s}{\ddot{S}}}{}_m = \underset{2l}{\overset{s}{C}}{}_m. \tag{8.27}$$

Таким образом, добавляя дипольные решения в $\underset{2l-2}{\gamma_{00}}$, мы всегда можем сделать поверхностные интегралы тождественно равными нулю.

Продолжая в этом духе, мы накопляем полюса и диполи, и дополнительные выражения в γ_{00} будут иметь вид

$$-\sum_{l} \lambda^{2l-2} \sum_{s=1}^{p} \left(4 \underset{2l-2}{\overset{s}{m}} \overset{s}{\psi} + \underset{2l-2}{\overset{s}{S}}{}_r \overset{s}{\psi}{}_{,r}\right). \tag{8.28}$$

Мы нарушили наше правило не включать диполи. Однако это сделано только для γ_{00}. Мы можем в конце процесса последовательных приближений устранить все эти дополнительные дипольные выражения, положив

$$\sum_{l} \lambda^{2l-2} \underset{2l-2}{\overset{s}{S}}{}_r = 0. \tag{8.29}$$

Дифференцируя это равенство дважды и учитывая (8.27), мы получаем

$$\sum_{l} \lambda^{2l} \underset{2l}{\overset{s}{\ddot{S}}}{}_m = \sum_{l} \lambda^{2l} \underset{2l}{\overset{s}{C}}{}_m = 0. \tag{8.30}$$

Это и есть 3p уравнений движения. Таким образом, уравнения движения определены, если отброшены дипольные решения.

С другой стороны, величины m могут быть вычислены из величин C_0, согласно соотношениям (8.17). Обозначая полный коэффициент при $\overset{s}{\psi}$ через $-4\overset{s}{M}$, мы имеем

$$\overset{s}{M} = \lambda^2 \underset{2}{\overset{s}{m}} + \lambda^4 \underset{4}{\overset{s}{m}} + \lambda^6 \underset{6}{\overset{s}{m}} + \ldots, \tag{8.31}$$

где $\underset{4}{\overset{s}{m}}, \underset{6}{\overset{s}{m}}, \ldots$ — функции первоначальных констант $\underset{2}{\overset{s}{m}}$ и известных функций времени.

Соотношения (8.30) и (8.31) будут содержать только конечное число членов, которое зависит от порядка, в котором мы желаем выполнить наши вычисления.

9. О выборе системы координат. Теперь мы увидим, что наши уравнения можно упростить надлежащим выбором системы координат. Предположим, что

$$\underset{2l-2}{\gamma^*_{00}},\quad \underset{2l-1}{\gamma^*_{0m}},\quad \underset{2l}{\gamma^*_{mn}} \tag{9.1}$$

—решения нашей системы (6.3), где функции Φ и Λ определены формулами (6.4) и (6.5). Тогда мы можем показать, что любые

$$\begin{aligned} &\underset{2l-2}{\gamma_{00}} = \underset{2l-2}{\gamma^*_{00}},\\ &\underset{2l-1}{\gamma_{0m}} = \underset{2l-1}{\gamma^*_{0m}} + \underset{2l-1}{a_{0,m}},\\ &\underset{2l}{\gamma_{mn}} = \underset{2l}{\gamma^*_{mn}} + \underset{2l}{a_{m,n}} + \underset{2l}{a_{n,m}} - \delta_{mn}\underset{2l}{a_{r,r}} + \delta_{mn}\,\underset{2l-1}{a_{0,}}\underset{1}{{}_{0}} \end{aligned} \tag{9.2}$$

с *произвольными* функциями $\underset{2l-1}{a_0}$, $\underset{2l}{a_m}$ являются также решениями наших уравнений. Это можно показать хотя бы непосредственной подстановкой в соотношения (6.4). Простое вычисление показывает, что все функции a выпадают из этих соотношений. Таким образом, мы можем на каждом этапе приближения наложить на поле четыре условия. Выберем, как обычно, следующие четыре координатных условия:

$$\underset{2l-2}{\gamma_{00,}}\underset{1}{{}_{0}} - \underset{2l-1}{\gamma_{0r,\,r}} = 0, \tag{9.3а}$$

$$\underset{2l-1}{\gamma_{0m,}}\underset{1}{{}_{0}} - \underset{2l}{\gamma_{mr,\,r}} = 0. \tag{9.3б}$$

Действительно, если γ^* не удовлетворяют таким условиям, то можно подобрать такие a, чтобы обеспечить это требование. Функции a удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\underset{2l-1}{a_{0,\,rr}} = \underset{2l-2}{\gamma^*_{00,}}\underset{1}{{}_{0}} - \underset{2l-1}{\gamma^*_{0r,\,r}}, \tag{9.4а}$$

$$\underset{2l}{a_{m,\,rr}} = \underset{2l-1}{\gamma^*_{0m,}}\underset{1}{{}_{0}} - \underset{2l}{\gamma^*_{mr,\,r}}. \tag{9.4б}$$

Координатные условия (9.3) значительно упрощают нашу систему уравнений. Уравнения (6.3) теперь приобретают вид

$$\underset{2l-2}{\gamma_{00,\,rr}} = \underset{2l-4}{\gamma_{00,}}\underset{2}{{}_{00}} + 2\underset{2l-2}{\Lambda'_{00}}, \tag{9.5а}$$

$$\underset{2l-1}{\gamma_{0m,\,rr}} = \underset{2l-3}{\gamma_{0m,}}\underset{2}{{}_{00}} + 2\underset{2l-1}{\Lambda'_{0m}}, \tag{9.5б}$$

$$\underset{2l}{\gamma_{mn,\,rr}} = \underset{2l-2}{\gamma_{mn,}}\underset{2}{{}_{00}} + 2\underset{2l}{\Lambda'_{mn}}; \tag{9.5в}$$

они вместе с координатными условиями

$$\underset{2l-2}{\gamma_{00,}}\underset{1}{{}_{0}} - \underset{2l-1}{\gamma_{0r,\,r}} = 0, \tag{9.6а}$$

$$\underset{2l-1}{\gamma_{0m,}}\underset{1}{{}_{0}} - \underset{2l}{\gamma_{mr,\,r}} = 0 \tag{9.6б}$$

образуют симметричную систему уравнений, причем в системе (9.5) все известные функции в правой части, по крайней мере, на два порядка ниже, чем в левой.

Поверхностные интегралы, которые должны обращаться в нуль и которые дают уравнения движения, имеют вид

$$\int^{s} \Big(\underset{2l-3}{\gamma_{0m,}}\underset{2}{{}_{00}} - \underset{2l-2}{\gamma_{00,}}\underset{1}{{}_{0m}} + 2\underset{2l-1}{\Lambda'_{0m}}\Big) n_m dS = 0; \tag{9.7а}$$

$$\int^{s} \Big(\underset{2l-2}{\gamma_{nm,}}\underset{2}{{}_{00}} - \underset{2l-1}{\gamma_{n0,}}\underset{1}{{}_{0m}} + 2\underset{2l}{\Lambda'_{nm}}\Big) n_m dS = 0. \tag{9.7б}$$

Мы можем получить их из наших старых формул, используя лемму или непосредственно дифференцируя равенство (9.6), добавляя к (9.5) и используя лемму.

Если теперь, как и в разделе 8, мы введем диполи, чтобы удовлетворить уравнению (9.7б), то условия (9.6а) не нарушим.

Иногда более удобно использовать другие координатные условия. Например, в настоящей работе в вычислениях применялись условия

$$\underset{2l-2}{\gamma_{00,}}\underset{1}{{}_{0}} - \underset{2l-1}{\gamma_{0s,\,s}} = 0, \tag{9.8а}$$

$$\underset{2l}{\gamma_{mn,\,n}} = 0. \tag{9.8б}$$

Уравнения в этом случае принимают вид

$$\underset{2l-2}{\gamma_{00,\,rr}} = 2\underset{2l-2}{\Lambda'_{00}}, \tag{9.9а}$$

$$\underset{2l-1}{\gamma}_{0m,\,rr} = 2\underset{2l-1}{\Lambda'_{0m}}, \tag{9.9б}$$

$$\underset{2l}{\gamma}_{mn,\,rr} = -\underset{2l-1}{\gamma}_{0m,\,\underset{1}{0n}} - \underset{2l-1}{\gamma}_{0n,\,\underset{1}{0m}} + \delta_{mn}\underset{2l-2}{\gamma}_{00,\,\underset{2}{00}} + \underset{2l-2}{\gamma}_{mn,\,\underset{2}{00}} + 2\underset{2l}{\Lambda'_{mn}} = 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}}. \tag{9.9в}$$

Условия на поверхности будут

$$\int^{s}\left(2\underset{2l-1}{\Lambda'_{0m}} - \underset{2l-2}{\gamma}_{00,\,\underset{1}{0m}}\right) n_m dS = 0, \tag{9.10а}$$

$$\int^{s} 2\underset{2l}{\Lambda_{mn}} n_m dS = 0. \tag{9.10б}$$

Возникает вопрос: в какой степени координатные условия влияют на уравнения движения? Мы вернемся к этому вопросу в последнем разделе настоящей работы, и там покажем, что уравнения движения до шестого порядка не зависят от выбора координатной системы.

10. Ньютоновское приближение. Теперь мы рассмотрим первые три уравнения для $l = 2$. Эти уравнения имеют вид

$$\underset{2}{\gamma}_{00,\,rr} = 0, \tag{10.1}$$

$$\underset{3}{\gamma}_{0m,\,rr} = 0, \tag{10.2}$$

$$\underset{4}{\gamma}_{nm,\,rr} = 2\underset{4}{\Lambda_{nm}}. \tag{10.3}$$

Мы выбираем координатные условия

$$\underset{3}{\gamma}_{0r,\,r} - \underset{2}{\gamma}_{00,\,\underset{1}{0}} = 0, \tag{10.4}$$

$$\underset{4}{\gamma}_{mr,\,r} = 0. \tag{10.5}$$

Явное выражение для $\underset{4}{\Lambda_{mn}}$ дано в А.10.

Характер нашего полного решения будет существенно зависеть от выбора гармонической функции, которую мы берем в качестве решения уравнения (10.1). Поскольку нас интересуют решения, представляющие частицы, мы напишем:

$$\underset{2}{\gamma}_{00} = 2\varphi, \qquad \varphi = \sum_{s=1}^{p}\{-2\overset{s}{m}\underset{2}{\overset{s}{\psi}}\},$$

$$\overset{s}{\psi} = [(x^r - \overset{s}{\xi^r})(x^r - \overset{s}{\xi^r})]^{-\frac{1}{2}} = (\overset{s}{r})^{-1}. \tag{10.6}$$

Из уравнения (10.2) мы видим, что $\underset{3}{\gamma}_{0m}$ также является гармонической функцией, которая должна, однако, удовлетворять, кроме того, координатным условиям. Из условия (10.4) мы имеем

$$\underset{3}{\gamma}_{0r,\,r} = \underset{2}{\gamma}_{00,\,\underset{1}{0}} = -\sum_s \{4\overset{s}{\underset{2}{m}}\overset{s}{\psi}_{,\,r}\overset{s}{\underset{1}{\dot{\xi}}}{}^r\}. \tag{10.7}$$

Константы $\overset{s}{\underset{2}{m}}$, которые мы отождествляем с гравитационной массой частиц, предполагаются положительными. Поэтому исключение диполей, вместе с уравнениями поля и координатными условиями, однозначно определяет величины $\underset{3}{\gamma}_{0n}$:

$$\underset{3}{\gamma}_{0n} = \sum_s 4\overset{s}{\underset{2}{m}}\overset{s}{\psi}\overset{s}{\underset{1}{\dot{\xi}}}{}^n. \tag{10.8}$$

К этому выражению для $\underset{3}{\gamma}_{0n}$ можно добавить, согласно равенствам (9.2), градиент произвольной функции. Этим путем мы получим общее решение. Но поскольку наш метод последовательных приближений использует только рациональные функции от $(x^r - \overset{s}{\xi}{}^r)$, то любое такое добавление ввело бы новые сингулярности (не типа изолированного полюса) или негалилеево поле на бесконечности. Таким образом, величины $\underset{3}{\gamma}_{0n}$ в выражении (10.8) следует рассматривать как характеризующие задачу описания частиц, безотносительно к тому, вводим мы координатные условия (10.4) или нет.

Ограничимся ради простоты случаем двух частиц и напишем (опуская индексы внизу у $\overset{s}{m}$, φ, f, g):

$$\left.\begin{aligned} &\varphi = f + g, \\ &f = -2\overset{1}{m}\overset{1}{\psi}, \qquad g = -2\overset{2}{m}\overset{2}{\psi}, \\ &\overset{1}{\xi}{}^r = \eta^r, \qquad \overset{2}{\xi}{}^r = \zeta^r. \end{aligned}\right\} \tag{10.9}$$

Так как поверхностный интеграл (9.10а) обращается в нуль для случая $l = 3$ вследствие того, что

$$\overset{s}{\int} (2\underset{3}{\Lambda}'_{0m} - \underset{2}{\gamma}_{00,\,\underset{1}{0m}})\, n_m dS = -\overset{s}{\int} \underset{2}{\gamma}_{00,\,\underset{1}{0m}} n_m dS = 0, \tag{10.10}$$

то следующим шагом мы определяем:

$$\left.\begin{aligned}\overset{1}{\underset{4}{C}}_m &= \frac{1}{4\pi}\overset{1}{\int} 2\underset{4}{\Lambda}_{mr} n_r dS,\\ \overset{2}{\underset{4}{C}}_m &= \frac{1}{4\pi}\overset{2}{\int} 2\underset{4}{\Lambda}_{mr} n_r dS.\end{aligned}\right\} \qquad (10.11)$$

Если мы хотим оборвать процесс последовательных приближений в этом месте, то уравнения с точностью до величин четвертого порядка, или, как мы будем говорить, уравнения в ньютоновском приближении, будут

$$\overset{1}{\underset{4}{C}}_m = 0, \qquad \overset{2}{\underset{4}{C}}_m = 0. \qquad (10.12)$$

Нам теперь остается лишь вычислить поверхностные интегралы методом, изложенным в общих чертах в **А.4.** Результаты этих вычислений приведены в **А.10.** Они имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\overset{1}{\underset{4}{C}}_m(\tau) &= 4\overset{1}{m}\left\{\ddot{\eta}^m + \frac{1}{2}\tilde{g}_{,m}\right\} = 0,\\ \overset{2}{\underset{4}{C}}_m(\tau) &= 4\overset{2}{m}\left\{\ddot{\zeta}^m + \frac{1}{2}\tilde{f}_{,m}\right\} = 0,\\ \tilde{g}_{,m} &= g_{,m} \ \text{при}\ x^s = \eta^s,\\ \tilde{f}_{,m} &= f_{,m} \ \text{при}\ x^s = \zeta^s.\end{aligned}\right\} \qquad (10.13)$$

Уравнения (10.13) фактически не зависят от переменных x^s. В последних уравнениях мы видим, что, например, величины $\tilde{g}_{,m}$ получены путем дифференцирования g по x^s и последующей заменой x^s на η^s. Но результат будет тот же самый, если мы *сначала* заменим x^s на η^s, а *затем* продифференцируем по η^s или ζ^s. Итак,

$$\begin{gathered}\tilde{g}_{,s} = \frac{\partial g(r)}{\partial \eta^s} = -\frac{\partial g(r)}{\partial \zeta^s},\\ g(r) = -\frac{2\overset{2}{m}}{r}; \qquad r^2 = (\eta^s - \zeta^s)(\eta^s - \zeta^s).\end{gathered} \qquad (10.14)$$

Следовательно, мы можем рассматривать наши уравнения движения как включающие дифференцирование функций, зависящих только от положения сингулярностей, что характерно для теории, которая базируется на концепции дальнодействия. Действительно, мы видим, что наши уравнения являются точно ньютоновскими уравнениями движения, полученными здесь в качестве первого приближения из уравнений поля. Рассмотрение p частиц (вместо двух) не добавляет каких-либо новых трудностей, пока мы имеем дело только с ньютоновским приближением.

11. Переход к следующему приближению. Мы хотим теперь идти дальше ньютоновского приближения. Но тогда мы должны вычислить величины $\underset{4}{\gamma}_{mn}$, так как от $\underset{4}{\gamma}_{mn}$ зависят функции $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$. Характерная особенность этого метода состоит в том, что вообще, если мы желаем найти уравнения движения в $2l$-приближении (включительно), нам не нужно вычислять величины $\underset{2l}{\gamma}_{mn}$, поскольку $\underset{2l}{C}_m$ их не содержит. Но теперь, чтобы сделать еще один шаг вперед, мы должны найти $\underset{4}{\gamma}_{mn}$, которые определяются уравнениями

$$\underset{4}{\gamma}_{mn,\,rr} = 2\underset{4}{\Lambda}_{mn}. \tag{11.1}$$

Это — переходный шаг, который мы должны сделать, прежде чем перейти к следующему приближению. Эти уравнения интегрируемы только в том случае, если мы *предположим* ньютоновское движение. В противном случае нам пришлось бы добавлять диполи. Тем не менее, если мы хотим получить *только* следующее приближение, мы можем предположить ньютоновское движение, и добавочные выражения, обязанные дипольным полям, не будут необходимы.

Если в уравнениях (11.1) мы предположим ньютоновское движение, то эти уравнения можно проинтегрировать, поскольку тогда поверхностный интеграл от $\underset{4}{\Lambda}_{mn}$ обращается в нуль. Но сделав это, мы введем ньютоновское движение в $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$. Это допустимо ввиду того, что $\underset{6}{\Lambda}$, вычисленное таким путем, и $\underset{6}{\Lambda}$, вычисленное для реального движения, отличаются на величину порядка $\underset{8}{\Lambda}$. Таким образом, ввиду того, что мы не собираемся идти дальше $\underset{6}{\Lambda}$, можно игнорировать дополнительные дипольные поля. Именно по этой причине предыдущие конкретные вычисления, выполненные в работе [5], были правильны, хотя общая теория была ошибочна.

Решим теперь уравнения

$$\underset{4}{\gamma}_{mn,\,rr} = 2\underset{4}{\Lambda}_{mn} = -\underset{3}{\gamma}_{0m,\,\underset{1}{0}n} - \underset{3}{\gamma}_{0n,\,\underset{1}{0}m} + 2\delta_{mn}\varphi_{,\,00} - 2\varphi\varphi_{,\,mn} - \varphi_{,\,m}\varphi_{,\,n} + \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,\,s}\varphi_{,\,s}, \tag{11.2}$$

---

[5] A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann, Ann. Math., 1938, 39, 65. (Статья 117.— *Ред.*)

предполагая справедливыми ньютоновские уравнения движения, т. е. уравнения (10.13).

Мы можем игнорировать дипольные выражения, поскольку нас интересуют только уравнения движения в следующем приближении. Но по той же самой причине мы интересуемся только теми выражениями в $\underset{4}{\gamma}_{mn}$, которые дают вклад в соответствующий поверхностный интеграл от $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$.

Исследование вида функции $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$ (приложение **А.12**) показывает, что нам нужно знать $\underset{4}{\gamma}_{mn}$ только в окрестности сингулярностей, и мы можем опустить в нем члены, которые не обращаются в бесконечность при $\overset{s}{r} \to 0$, так как поверхностный интеграл от этих членов должен обращаться в нуль (см. **А.12**). С другой стороны, величину $\underset{4}{\gamma}_{ss}$, которая также появляется в $\underset{6}{\Lambda}$, нужно вычислять, что и будет сделано, во всем пространстве.

В правой части уравнения (11.2) мы имеем «перекрестные произведения», т. е. произведения, принадлежащие различным сингулярностям. Благодаря этому уравнения (11.2) можно проинтегрировать только в окрестности, скажем, первой сингулярности. Выражения, возникающие от второй сингулярности, могут быть разложены вблизи первой сингулярности в степенные ряды. Оставляя все выражения, которые могут дать вклад в поверхностный интеграл, и только их, мы получим в окрестности *первой* сингулярности

$$\begin{aligned}\underset{4}{\gamma}_{mn} = {} & \{f\,[(x^n-\eta^n)\,\dot\eta^m+(x^m-\eta^m)\,\dot\eta^n-\delta_{mn}\,(x^s-\eta^s)\,\dot\eta^s]\}_{,\,0}+\\ & +\{g\,[(x^n-\zeta^n)\,\dot\zeta^m+(x^m-\zeta^m)\,\dot\zeta^n-\delta_{mn}\,(x^s-\zeta^s)\,\dot\zeta^s]\}_{,\,0}+\\ & +\frac{7}{4}\overset{1}{r}{}^2 f_{,\,m}f_{,\,n}+\frac{7}{4}\overset{2}{r}{}^2 g_{,\,m}g_{,\,n}-f_{,\,m}\,(x^n-\eta^n)\,\tilde g+\alpha_{mn}f+\beta_{mn}g. \qquad (11.3)\end{aligned}$$

Здесь от перекрестных произведений осталось только выражение

$$-f_{,\,m}\,(x^n-\eta^n)\,\tilde g; \qquad \tilde g = g \text{ при } x^s = \eta^s.$$

Два последних выражения представляют собой дополнительные гармонические функции (диполи исключены); они определяются координатными условиями

$$\underset{4}{\gamma}_{mr,\,r} = 0. \qquad (11.4)$$

В результате имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{mn} = 2\dot{\eta}^m\dot{\eta}^n + \delta_{mn}\tilde{g},\\
&\beta_{mn} = 2\dot{\zeta}^m\dot{\zeta}^n + \delta_{mn}\tilde{f},\\
&\tilde{f} = f(r), \quad \tilde{g} = g(r), \quad r^2 = (\eta^s - \zeta^s)(\eta^s - \zeta^s).
\end{aligned}\right\} \tag{11.5}$$

Но отметим еще раз, что все это справедливо только в том случае, если принято, что движение ньютоновское.

Наконец, как мы заметили раньше, величина $\underset{4}{\gamma}_{rr}$ может быть вычислена точно. В результате получим

$$\underset{4}{\gamma}_{rr} = -2\overset{1}{m}\overset{1}{r}_{,00} - 2\overset{2}{m}\overset{2}{r}_{,00} + \frac{7}{4}\varphi^2 + \alpha f + \beta g. \tag{11.6}$$

Здесь α и β должны быть определены так, чтобы вблизи сингулярности выражение (11.6) совпадало с (11.3) при $m = n = r$. В результате имеем

$$\begin{aligned}
&\alpha = 2\dot{\eta}^s\dot{\eta}^s + \frac{1}{2}\tilde{g},\\
&\beta = 2\dot{\zeta}^s\dot{\zeta}^s + \frac{1}{2}\tilde{f}.
\end{aligned} \tag{11.7}$$

Таким образом подготовительный промежуточный этап завершен.

12. Постньютоновское приближение. Выпишем следующие уравнения движения:

$$\underset{4}{\gamma}_{00,rr} = 2\underset{4}{\Lambda}_{00} = -\frac{3}{2}\varphi_{,r}\varphi_{,r}, \tag{12.1а}$$

$$\underset{5}{\gamma}_{0m,rr} = 2\underset{5}{\Lambda}'_{0m} = \varphi_{,s}\gamma_{0s,m} - \varphi_{,sm}\gamma_{0s} - 3\varphi_{,0}\varphi_{,m}, \tag{12.1б}$$

$$\underset{6}{\gamma}_{mn,rr} = 2\underset{6}{\Lambda}_{mn}. \tag{12.1в}$$

Явное выражение для $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$ приведено в **А.12**. Решение уравнения (12.1а) имеет простой вид:

$$\underset{4}{\gamma}_{00} = -\frac{3}{4}\varphi^2 - 4\overset{1}{m}\underset{4}{\overset{1}{\psi}} - 4\overset{2}{m}\underset{4}{\overset{2}{\psi}}. \tag{12.2}$$

Как известно из общей теории, произвольные гармонические функции должны быть определены таким образом, чтобы уравнения (12.1б) были совместными, т. е. соответствующие поверхностные интегралы должны обращаться в нуль.

Координатные условия здесь те же, что и раньше:

$$\underset{5}{\gamma}_{0r,\,r}-\underset{4}{\gamma}_{00,\,\underset{1}{0}}=0, \tag{12.3а}$$

$$\underset{6}{\gamma}_{mr,\,r}=0. \tag{12.3б}$$

Отсюда условия разрешимости уравнений (12.1б, в) будут

$$\frac{1}{4\pi}\overset{s}{\int}\left\{2\underset{5}{\Lambda'_{0m}}-\underset{4}{\gamma}_{00,\,\underset{1}{0}m}\right\}n_m\,dS=0, \tag{12.4а}$$

$$\frac{1}{4\pi}\overset{s}{\int}2\underset{6}{\Lambda_{mr}}n_r\,dS=0. \tag{12.4б}$$

Из соотношений (12.4а) мы определяем m. В результате вычисления поверхностных интегралов в (12.4а) (см. А.12) имеем

$$\left.\begin{aligned}
\underset{4}{\overset{1}{m}}&=\frac{1}{2}\overset{1}{m}\left\{\dot\eta^s\dot\eta^s+\frac{1}{2}\tilde g\right\}=\frac{1}{2}\left(\overset{1}{m}\dot\eta^s\dot\eta^s-\overset{1}{m}\overset{2}{m}\frac{1}{r}\right),\\
\underset{4}{\overset{2}{m}}&=\frac{1}{2}\overset{2}{m}\left\{\dot\zeta^s\dot\zeta^s+\frac{1}{2}\tilde f\right\}=\frac{1}{2}\left(\overset{2}{m}\dot\zeta^s\dot\zeta^s-\overset{1}{m}\overset{2}{m}\frac{1}{r}\right),\\
\overset{1}{m}&=\underset{2}{\overset{1}{m}},\qquad \overset{2}{m}=\underset{2}{\overset{2}{m}},\qquad r^2=(\eta^s-\zeta^s)(\eta^s-\zeta^s).
\end{aligned}\right\} \tag{12.5}$$

После того как совместность уравнений (12.1б) обеспечена, нужно вычислить величины $\underset{5}{\gamma}_{0s}$. Они необходимы нам потому, что входят в последующий поверхностный интеграл. Выписывая существенные члены, которые могут влиять на величину поверхностного интеграла, находим вблизи первой сингулярности

$$\begin{aligned}
\underset{5}{\gamma}_{0m}={}&-\frac{7}{4}\overset{1}{r}f_{,m}f_{,r}\dot\eta^r+\frac{3}{4}f^2\dot\eta^m+\frac{3}{2}(x^s-\eta^s)(\dot\eta^s-\dot\zeta^s)f\tilde g_{,m}-\\
&-(x^m-\eta^m)f\tilde g_{,s}(\dot\eta^s-\dot\zeta^s)+\frac{1}{2}(x^s-\eta^s)f_{,m}\dot\zeta^s\{\tilde g+\tilde g_{,r}(x^r-\eta^r)\}+\\
&+\frac{1}{2}(x^s-\eta^s)\{f\tilde g_{,s}\dot\zeta^m+f_{,m}\tilde g\dot\zeta^s\}+\alpha_{0m}f.
\end{aligned} \tag{12.6}$$

Снова определим величину α_{0m} из координатных условий (12.3а). В результате получим

$$\alpha_{0m}=-\dot\eta^s\dot\eta^s\dot\eta^m+\tilde g\dot\eta^m-\tilde g\dot\zeta^m. \tag{12.7}$$

Теперь на сцену выступают последние и наиболее трудные вычисления:

$$\underset{6}{\overset{1}{C}}_m = \frac{1}{4\pi} \overset{1}{\int} 2 \underset{6}{\Lambda}_{mn} n_m \, dS. \tag{12.8}$$

В **А.12** сделаны несколько замечаний по поводу их вычислений и приведены некоторые результаты. Мы получаем

$$\begin{aligned} \underset{6}{\overset{1}{C}}_m = &-4 \overset{1}{m}\overset{2}{m} \left\{ \left[\dot{\eta}^s \dot{\eta}^s + \frac{3}{2} \dot{\zeta}^s \dot{\zeta}^s - 4 \dot{\eta}^s \dot{\zeta}^s - 4 \frac{\overset{2}{m}}{r} - 5 \frac{\overset{1}{m}}{r} \right] \frac{\partial}{\partial \eta^m} \left(\frac{1}{r} \right) + \right. \\ &\left. + \left[4 \dot{\eta}^s (\dot{\zeta}^m - \dot{\eta}^m) + 3 \dot{\eta}^m \dot{\zeta}^s - 4 \dot{\zeta}^s \dot{\zeta}^m \right] \frac{\partial}{\partial \eta^s} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 r}{\partial \eta^s \partial \eta^r \partial \eta^m} \dot{\zeta}^s \dot{\zeta}^r \right\}. \end{aligned} \tag{12.9}$$

Таким образом, уравнения движения на этой стадии приближения имеют вид

$$\lambda^4 \underset{4}{\overset{1}{C}}_m + \lambda^6 \underset{6}{\overset{1}{C}}_m = 0. \tag{12.10}$$

Мы можем теперь избавиться от λ, вводя новые единицы измерения τ и $\overset{1}{m}, \overset{2}{m}$:

$$\text{Старое } \tau = \lambda \cdot (\text{Новое } \tau).$$

$$\text{Старая масса} = \lambda^{-2} \cdot (\text{Новая масса}).$$

Сохраняя старые обозначения для величин в новых единицах, мы получаем следующее уравнение движения для первой частицы:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}^m - \overset{2}{m} \frac{\partial}{\partial \eta^m} \left(\frac{1}{r} \right) = &\overset{2}{m} \left\{ \left[\dot{\eta}^s \dot{\eta}^s + \frac{3}{2} \dot{\zeta}^s \dot{\zeta}^s - 4 \dot{\eta}^s \dot{\zeta}^s - 4 \frac{\overset{2}{m}}{r} - 5 \frac{\overset{1}{m}}{r} \right] \frac{\partial}{\partial \eta^m} \left(\frac{1}{r} \right) + \right. \\ &\left. + \left[4 \dot{\eta}^s (\dot{\zeta}^m - \dot{\eta}^m) + 3 \dot{\eta}^m \dot{\zeta}^s - 4 \dot{\zeta}^s \dot{\zeta}^m \right] \frac{\partial}{\partial \eta^s} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 r}{\partial \eta^s \partial \eta^r \partial \eta^m} \dot{\zeta}^s \dot{\zeta}^r \right\}. \end{aligned} \tag{12.11}$$

Уравнения движения для другой частицы получаются путем замены

$$\overset{1}{m}, \overset{2}{m}, \eta, \zeta \text{ на } \overset{2}{m}, \overset{1}{m}, \zeta, \eta$$

соответственно.

Это — уравнения движения двух частиц. Они могут быть проинтегрированы, и из них можно получить заключения о движении перигелия двойной звезды[6]. Общий метод может быть приспособлен к случаю движения заряженной частицы в электромагнитном поле[7].

[6] H. P. Robertson. Ann. Math., 1938, 39, 101.
[7] L. Infeld, P. R. Wallace. Phys. Rev., 1940, 57, 797.

13. Уравнения движения и координатные условия. Последние три раздела не содержат ничего нового. Однако их изложение отличается от изложения в работах [8] и [9], так как оно приспособлено к новой теории. Есть и еще один вопрос, на который мы хотели бы ответить и который не был рассмотрен раньше. Это стало возможным только теперь, когда общая теория усовершенствована. Мы спрашиваем: в какой мере уравнения движения, сформулированные в виде (12.11), зависят от специального выбора координатной системы?

Мы отказываемся от любого специального выбора системы координат и записываем первые два уравнения:

$$\underset{2}{\Phi}_{00} + 2\underset{2}{\Lambda}_{00} = -\underset{2}{\gamma}_{00\,rr} = 0, \tag{13.1}$$

$$\underset{3}{\Phi}_{0m} + 2\underset{3}{\Lambda}_{0m} = -\underset{3}{\gamma}_{0m,rr} + \underset{3}{\gamma}_{0r,mr} - \underset{2}{\gamma}_{00,\underset{1}{m0}} = 0. \tag{13.2}$$

Предположим, что мы начинаем наш процесс последовательных приближений с тех же самых функций $\underset{2}{\gamma}_{00}$ и $\underset{3}{\gamma}_{0m}$, *как и раньше*. Но после этого, имея дело с теми же самыми уравнениями, мы будем искать *общие* решения, не ограничивая себя никакими дополнительными координатными условиями.

Итак, мы хотим рассмотреть следующие уравнения:

$$\underset{4}{\Phi}_{mn} + 2\underset{4}{\Lambda}_{mn} = 0, \tag{13.3а}$$

$$\underset{4}{\Phi}_{00} + 2\underset{4}{\Lambda}_{00} = 0, \tag{13.3б}$$

$$\underset{5}{\Phi}_{0m} + 2\underset{5}{\Lambda}_{0m} = 0. \tag{13.3в}$$

В последних трех разделах мы решали эти уравнения, используя специальные координатные условия. Обозначим теперь специальные решения, полученные там, через

$$\underset{4}{\overset{*}{\gamma}}_{mn}, \quad \underset{4}{\overset{*}{\gamma}}_{00}, \quad \underset{5}{\overset{*}{\gamma}}_{0m}. \tag{13.4}$$

Зная их, мы можем найти общее решение уравнений (13.3). Процедура отыскания общего решения подобна той, которая была намечена в раз-

---

[8] A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann. Ann. Math., 1938, 39, 65. (Статья 117.— *Ред.*)

[9] A. Einstein, L. Infeld. Ann. Math., 1940, 41, 455. (Статья 120.— *Ред.*)

деле 9, с той лишь разницей, что теперь мы имеем систему уравнений порядка $(2l)$, $(2l)$ и $(2l + 1)$, в то время как раньше имели систему уравнений порядка $(2l - 2)$, $(2l - 1)$ и $(2l)$. Непосредственная подстановка показывает, что благодаря линейным выражениям в уравнениях (13.3) (а только они одни играют роль) общее решение уравнений (13.3) будет:

$$\underset{4}{\gamma}_{mn} = \overset{*}{\underset{4}{\gamma}}_{mn} + \underset{4}{a}_{m,n} + \underset{4}{a}_{n,m} - \delta_{mn}\underset{4}{a}_{r,r}, \tag{13.5\text{а}}$$

$$\underset{4}{\gamma}_{00} = \overset{*}{\underset{4}{\gamma}}_{00} + \underset{4}{a}_{r,r}, \tag{13.5\text{б}}$$

$$\underset{5}{\gamma}_{0m} = \overset{*}{\underset{5}{\gamma}}_{0m} + \underset{5}{a}_{0,m} + \underset{4}{a}_{m,\underset{1}{0}}, \tag{13.5\text{в}}$$

где a_μ — произвольны. Тогда вопрос заключается в следующем. Если мы подставим эти новые выражения в Λ, то изменятся ли при этом интегралы

$$\int \Lambda_{mr} n_r dS, \qquad \int \underset{5}{\Lambda}_{0r} n_r\, dS, \qquad \int \underset{6}{\Lambda}_{mr} n_r dS? \tag{13.6}$$

В отношении первых двух интегралов ответ прост: $\underset{4}{\Lambda}$ не изменяются; в $\underset{5}{\Lambda}$ существенны только линейные выражения, но поверхностный интеграл от дополнительных выражений, согласно лемме, обращается в нуль. Иначе обстоит дело с третьим поверхностным интегралом. В $\underset{6}{\Lambda}$ появляются новые члены, содержащие величины a. Они входят как в линейные, так и в нелинейные выражения. Но эти дополнительные выражения — они выписаны в последнем приложении — таковы, что поверхностные интегралы от них обращаются в нуль. Таким образом, уравнения движения не зависят в указанном здесь смысле от выбора системы координат. Эта зависимость могла бы появиться, вероятно, в следующем приближении $(\underset{8}{\Lambda})$, но они не входят в поверхностный интеграл от $\underset{6}{\Lambda}$. Это представляется удовлетворительным результатом, поскольку трудно понять смысл наших координатных условий,

$$\begin{gathered} \underset{4}{\gamma}_{mr,r} = 0, \\ \underset{5}{\gamma}_{0r,r} - \underset{4}{\gamma}_{00,\underset{1}{0}} = 0, \\ \underset{6}{\gamma}_{mr,r} = 0, \end{gathered} \tag{13.7}$$

и полезно убедиться в том, что наши уравнения не зависят от них. Это — общий результат. Если мы имеем систему уравнений:

$$\underset{2l}{\Phi}_{mn} + 2\underset{2l}{\Lambda}_{mn} = 0,$$
$$\underset{2l}{\Phi}_{00} + 2\underset{2l}{\Lambda}_{00} = 0, \qquad (13.8)$$
$$\underset{2l+1}{\Phi}_{0m} + 2\underset{2l+1}{\Lambda}_{0m} = 0,$$

то поверхностный интеграл от $\underset{2l+2}{\Lambda}_{mn}$ не зависит от координатных условий, введенных на этом этапе приближения. Это происходит благодаря тому, что величины $\underset{2l}{a}$ комбинируются с величинами φ одинаковым образом на каждом этапе приближения.

ПРИЛОЖЕНИЯ

А.2

Уравнения поля имеют вид

$$R_{\mu\nu} = -\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}_{|\rho} + \left\{ {\rho \atop \mu\rho} \right\}_{|\nu} + \left\{ {\rho \atop \mu\sigma} \right\}\left\{ {\sigma \atop \rho\nu} \right\} - \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}\left\{ {\sigma \atop \rho\sigma} \right\}. \qquad (\text{A.2.1})$$

Вводя функции h, определенные равенствами (2 3), и выделяя в (А.2.1) линейные и нелинейные члены, получаем

$$R_{00} = -\frac{1}{2} h_{00|ss} + h_{0s|0s} - \frac{1}{2} h_{ss|00} + L'_{00}, \qquad (\text{A.2.2a})$$

$$R_{0n} = -\frac{1}{2} h_{0n|ss} + \frac{1}{2} h_{0s|ns} + \frac{1}{2} h_{ns|0s} - \frac{1}{2} h_{ss|n0} + L'_{0n}, \qquad (\text{A.2.2б})$$

$$R_{mn} = -\frac{1}{2} h_{mn|ss} + \frac{1}{2} h_{ms|ns} + \frac{1}{2} h_{ns|ms} - \frac{1}{2} h_{ss|mn} +$$
$$+ \frac{1}{2} h_{mn|00} - \frac{1}{2} h_{m0|n0} - \frac{1}{2} h_{n0|m0} + \frac{1}{2} h_{00|mn} + L'_{mn}. \qquad (\text{A.2.2в})$$

Здесь $L'_{\mu\nu}$ — нелинейные выражения. Образуем теперь

$$-2\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\right) = 0. \qquad (\text{A.2.3})$$

Подставляя функции h вместо γ, мы видим, что (A.2.3), записанные подробно, совпадают с формулами (2.10) — (2.18), где

$$\Lambda'_{\mu\nu} = L'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta}. \tag{A.2.4}$$

A.4

При вычислении поверхностных интегралов необходимо учитывать только те выражения, которые ведут себя на бесконечности как r^{-2}, потому что лишь такие выражения дадут конечный вклад. Поскольку все функции поля конечны (за исключением сингулярностей) и поскольку этот вклад не зависит от формы поверхности, постольку мы можем игнорировать все другие выражения. Но нам придется фиксировать форму поверхности ввиду того, что в наших вычислениях сложное выражение, поверхностный интеграл от которого не зависит от формы поверхности, разделяется на части с отличной от нуля дивергенцией. Поэтому в наших вычислениях поверхность всегда будет выбираться в виде двумерной «сферы» с радиусом, стремящимся к нулю. Предположим для простоты, что пространственные координаты сингулярности есть (0, 0, 0). Сначала мы дадим несколько примеров поверхностных интегралов, взятых вокруг такой сингулярности.

Пример 1. Вычисляя

$$\int\limits^{0} \psi_{,s}n_s\,dS, \qquad \text{где } \psi = r^{-1}, \qquad r^2 = x^s x^s,$$

получаем

$$\int\limits^{0} \psi_{,s}n_s\,dS = -\int\limits^{0} \frac{x^s x^s}{r^4}\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = -4\pi.$$

Пример 2. Вычисляем

$$\int\limits^{0} \psi_{,s}n_r\,dS = -\int\limits^{0} \frac{x^s x^r}{r^4}\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = -\frac{4\pi}{3}\delta_{sr}.$$

Пример 3. Вычислим

$$\int\limits^{0} \psi_{,mn}n_n\chi(r)\,dS.$$

Чтобы найти подобный поверхностный интеграл, выразим $\chi(r)$ в виде степенного ряда в окрестности сингулярности:

$$\chi = \chi(0) + \chi_{,s}(0)\,x_s + \ldots .$$

Вклад дает только второй член, т. е. мы должны вычислить

$$\chi_{,s}(0)\int\limits^{0}\psi_{,mn}n_n x^s dS = -\chi_{,s}(0)\int\limits^{0}\frac{x^m x^s}{r^4} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi +$$

$$+3\chi_{,s}(0)\int\limits^{0}\frac{x^m x^s}{r^4} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{8\pi}{3}\chi_{,m}(0).$$

В ходе наших вычислений мы должны будем найти более сложные поверхностные интегралы; при этом будет полезна следующая таблица

Таблица поверхностных интегралов

I. $\frac{1}{4\pi}\int\limits^{0}\psi_{,n}n_n\, dS = -1.$

II. $\frac{1}{4\pi}\int\limits^{0}\psi_{,s}n_n\, dS = -\frac{1}{3}\delta_{sn}.$

III. $\frac{1}{4\pi}\int\limits^{0}x^r\psi_{,ns}n_n\, dS = \frac{2}{3}\delta_{rs}.$

IV. $\frac{1}{4\pi}\int\limits^{0}x^r\psi_{,ms}n_n\, dS = -\frac{1}{15}\{2\delta_{rn}\delta_{ms} - 3\delta_{rm}\delta_{ns} - 3\delta_{rs}\delta_{mn}\}.$

V. $\frac{1}{4\pi}\int\limits^{0}x^r\psi_{,rs}n_n\, dS = \frac{2}{3}\delta_{ns}.$

VI. $\frac{1}{4\pi}\int\limits^{0}x^n\psi_{,ms}n_n\, dS = 0.$

VII. $\frac{1}{4\pi}\int\limits^{0}x^n x^s\psi_{,mrl}n_n\, dS = 0.$

VIII. $\frac{1}{4\pi}\int\limits^{0}x^m x^s\psi_{,nrl}n_n\, dS = \frac{2}{5}\delta_{ms}\delta_{lr} - \frac{3}{5}(\delta_{ml}\delta_{rs} + \delta_{mr}\delta_{ls}).$

A.8

Линейные члены в выражении (8.26) дают следующий вклад в $2\underset{2l}{\Lambda}_{mn}$:

$$\sum_{s=1}^{p}\left\{\underset{2l-2}{\overset{s}{S}_m}\overset{s}{\dot\psi}_{,n} + \underset{2l-2}{\overset{s}{S}_n}\overset{s}{\dot\psi}_{,m} - \delta_{mn}\underset{2l-2}{\overset{s}{S}_r}\overset{s}{\dot\psi}_{,r}\right\}_{,\underset{2}{00}}. \qquad (A.8.1)$$

Нелинейные члены могут быть найдены следующим путем. Исследуя члены в выражении (A.12.3) для $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$, мы обнаруживаем произведения $\underset{4}{\gamma}_{00}$ и $\underset{2}{\gamma}_{00}$ или, как они называются там, 2φ. Поэтому, если мы в (A.12.3) подставим выражение (8.18) вместо γ_{00} и напишем для краткости

$$(S_r\psi) = \sum_s^4 \overset{s}{S_r} \underset{2l-2}{\overset{s}{\psi}}, \tag{A.8.2}$$

то получим пять новых членов. Таким образом, используя обозначение (A.8.2), мы будем иметь в *каждом* приближении следующие дополнительные члены:

$$\left.\begin{aligned} &\{(S_m\psi)_{,n} + (S_n\psi)_{,m} - \delta_{mn}(S_r\psi)_{,r}\}_{,00} + \varphi(S_r\psi)_{,rmn} + \\ &\qquad + \frac{1}{2}\varphi_{,n}(S_r\psi)_{,rm} + \frac{1}{2}\varphi_{,m}(S_r\psi)_{,rn} - \\ &\qquad\qquad - \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}(S_r\psi)_{,rs} + \varphi_{,mn}(S_r\psi)_{,r}. \end{aligned}\right\} \tag{A.8.3}$$

В поверхностный интеграл дают вклад только три линейных члена. Труднее увидеть, что нелинейные члены не дают вклада, так как это требует некоторого умения обращаться с поверхностными интегралами, которые приведены в A.4. Нелинейные члены в (A.8.3) мы можем записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\{\varphi_{,mn}(S_r\psi)\}_{,r} - \{\varphi_{,mr}(S_n\psi)\}_{,r} + \varphi_{,mn}(S_n\psi)_{,r} + \frac{1}{2}\{\varphi_{,n}(S_r\psi)_{,m}\}_{,r} - \\ &\qquad - \frac{1}{2}\{\varphi_{,r}(S_n\psi)_{,m}\}_{,r} + \frac{3}{2}\varphi_{,r}(S_n\psi)_{,mr} - \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,r}(S_s\psi)_{,sr}. \end{aligned} \tag{A.8.4}$$

Это — нелинейное выражение и их дивергенция обращается в нуль благодаря тому, что φ является гармонической функцией. Слагаемые, записанные парами в выражении (A.8.4), не дают вклада в поверхностные интегралы в силу нашей леммы в разделе 3. Таким образом, вклад могут вносить только члены

$$\frac{3}{2}\varphi_{,s}S_n\psi_{,ms} - \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}S_r\psi_{,rs}. \tag{A.8.5}$$

Здесь только «перекрестные произведения» могут давать вклад, и мы находим с помощью таблицы поверхностных интегралов в A.4, что в результате получается нуль.

A.10

В приближении $l = 2$ имеем

$$\left.\begin{aligned}
\underset{2}{\gamma_{00}} &= 2\varphi = 2f + 2g,\\
\underset{3}{\gamma_{0n}} &= -2f\dot{\eta}^n - 2g\dot{\zeta}^n = \underset{3}{h_{0n}},\\
\underset{2}{h_{00}} &= \varphi = f + g,\\
\underset{2}{h^{00}} &= -h_{00} = -\varphi,\\
\underset{3}{h^{0n}} &= \underset{3}{h_{0n}} = \underset{3}{\gamma_{0n}},\\
\underset{2}{h_{mn}} &= -\underset{2}{h^{mn}} = \delta_{mn}\varphi.
\end{aligned}\right\} \qquad (A.10.1)$$

Непосредственное вычисление дает

$$\left.\begin{aligned}
2\underset{2}{\Lambda_{00}} &= 0,\\
2\underset{3}{\Lambda_{0m}} &= -\underset{2}{\gamma_{00}}{}_{,m\underset{1}{0}},\\
2\underset{4}{\Lambda_{mn}} &= -\underset{3}{\gamma_{0m}}{}_{,\underset{1}{0}n} - \underset{3}{\gamma_{0n}}{}_{,\underset{1}{0}m} + 2\delta_{mn}\underset{2}{\varphi_{,00}} -\\
&\quad - 2\varphi\varphi_{,mn} - \varphi_{,m}\varphi_{,n} + \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}\varphi_{,s}.
\end{aligned}\right\} \qquad (A.10.2)$$

Вклады в поверхностные интегралы (для первой сингулярности) будут:

$$-\gamma_{0m,0n} \to 4\overset{1}{m}\ddot{\eta}^m \cdot 4\pi,$$

$$-\gamma_{0n,0m} \to \frac{4}{3}\overset{1}{m}\ddot{\eta}^m \cdot 4\pi,$$

$$2\delta_{mn}\varphi_{,00} \to -\frac{4}{3}\overset{1}{m}\ddot{\eta}^m \cdot 4\pi,$$

$$-2\varphi\varphi_{,mn} \to \frac{8}{3}\overset{1}{m}\tilde{g}_{,m} \cdot 4\pi,$$

$$-\varphi_{,m}\varphi_{,n} \to -\frac{8}{3}\overset{1}{m}\tilde{g}_{,m} \cdot 4\pi,$$

$$\frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}\varphi_{,s} \to 2\overset{1}{m}\tilde{g}_{,m} \cdot 4\pi,$$

$$\left(\overset{1}{m} = \underset{2}{\overset{1}{m}}\right).$$

А.12

Непосредственное вычисление $\underset{4}{\Lambda}, \underset{5}{\Lambda}, \underset{6}{\Lambda}$ дает

$$2\underset{4}{\Lambda}_{00} = -\frac{3}{2}\varphi_{,s}\varphi_{,s}, \tag{A.12.1}$$

$$2\underset{5}{\Lambda}'_{0m} = \varphi_{,s}\underset{3}{\gamma}_{0s,m} - \varphi_{,sm}\underset{3}{\gamma}_{0s} - 3\varphi_{,0}\varphi_{,m}, \tag{A.12.2}$$

$$\begin{aligned}
2\underset{6}{\Lambda}_{mn} = &- \underset{5}{\gamma}_{0m,0n} - \underset{5}{\gamma}_{0n,0m} + \delta_{mn}\underset{4}{\gamma}_{00,00} + \underset{4}{\gamma}_{mn,00} - \varphi\underset{4}{\gamma}_{00,mn} - \varphi\underset{4}{\gamma}_{ss,mn} - \\
&- \varphi_{,mn}\underset{4}{\gamma}_{00} - \varphi_{,mn}\underset{4}{\gamma}_{ss} + \varphi_{,ms}\underset{4}{\gamma}_{ns} + \varphi_{,ns}\underset{4}{\gamma}_{ms} - \delta_{mn}\varphi_{,sr}\underset{4}{\gamma}_{sr} - 2\varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{mn,s} + \varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{ms,n} + \\
&+ \varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{ns,m} - \frac{1}{2}\varphi_{,m}\underset{4}{\gamma}_{ss,n} - \frac{1}{2}\varphi_{,n}\underset{4}{\gamma}_{ss,m} - \frac{1}{2}\varphi_{,n}\underset{4}{\gamma}_{00,m} - \frac{1}{2}\varphi_{,m}\underset{4}{\gamma}_{00,n} + \\
&+ \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{rr,s} + \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{00,s} - \underset{3}{\gamma}_{0s}\underset{3}{\gamma}_{0n,ms} - \underset{3}{\gamma}_{0s}\underset{3}{\gamma}_{0m,ns} + 2\underset{3}{\gamma}_{0s}\underset{3}{\gamma}_{0s,mn} + \\
&+ \frac{1}{2}\delta_{mn}\underset{3}{\gamma}_{0s,r}\underset{3}{\gamma}_{0r,s} - \frac{3}{2}\delta_{mn}\underset{3}{\gamma}_{0s,r}\underset{3}{\gamma}_{0s,r} + \underset{3}{\gamma}_{0s,m}\underset{3}{\gamma}_{0s,n} + \underset{3}{\gamma}_{0m,s}\underset{3}{\gamma}_{0n,s} - \varphi_{,0n}\underset{3}{\gamma}_{0m} - \\
&- \varphi_{,0m}\underset{3}{\gamma}_{0n} + 2\delta_{mn}\underset{3}{\gamma}_{0s}\varphi_{,0s} - \varphi_{,0}\underset{3}{\gamma}_{0m,n} - \varphi_{,0}\underset{3}{\gamma}_{0n,m} - \varphi_{,n}\underset{3}{\gamma}_{0m,0} - \varphi_{,m}\underset{3}{\gamma}_{0n,0} + \\
&+ 2\varphi\underset{3}{\gamma}_{0m,0n} + 2\varphi\underset{3}{\gamma}_{0n,0m} - 2\delta_{mn}\varphi\varphi_{,00} + 2\varphi\varphi\varphi_{,mn} - \varphi\varphi_{,m}\varphi_{,n} + \\
&+ \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi\varphi_{,s}\varphi_{,s} + \frac{1}{2}\delta_{mn}\varphi_{,0}\varphi_{,0}.
\end{aligned} \tag{A.12.3}$$

Поверхностный интеграл (12.4а) для $s = 1$, с учетом равенств (12.2) и (12.1б), принимает вид

$$\frac{1}{4\pi}\int\left(\varphi_{,r}\underset{3}{\gamma}_{0r,m} - \varphi_{,rm}\underset{3}{\gamma}_{0n} - \frac{3}{2}\varphi_{,0}\varphi_{,m} + \frac{3}{2}\varphi\varphi_{,0m} + 4\left(\overset{1}{\underset{4}{m}}\psi\right)_{,0m}\right)n_m dS = 0.$$

Вклады этих пяти выражений соответственно будут:

$$(1) \to -\frac{4\overset{1}{m}}{3}\tilde{g}_{,s}\dot{\zeta}^s - 4\overset{1}{m}\tilde{g}_{,s}\dot{\eta}^s,$$

$$(2) \to -\frac{8\overset{1}{m}}{3}\tilde{g}_{,s}\dot{\zeta}^s,$$

$$(3) \to 3\overset{1}{m}\tilde{g}_{,s}\dot{\zeta}^s + \overset{1}{m}\tilde{g}_{,s}\dot{\eta}^s,$$

$$(4) \to 2\overset{1}{m}\tilde{g}_{,s}\dot{\eta}^s,$$

$$(5) \to -4\overset{1}{\underset{4}{\dot{m}}}.$$

Поэтому

$$-4\underset{4}{\overset{1}{\dot{m}}} = \overset{1}{m}\tilde{g}_{,s}\dot{\zeta}^s + \overset{1}{m}\tilde{g}_{,s}\dot{\eta}^s = 2\overset{1}{m}\tilde{g}_{,s}\dot{\eta}^s - \overset{1}{m}\tilde{g}_{,s}\dot{\eta}^s + \overset{1}{m}\tilde{g}_{,s}\dot{\zeta}^s = -\overset{1}{m}\,(2\dot{\eta}^s\dot{\eta}^s + \tilde{g})_{,0}.$$

Из последнего соотношения немедленно следует равенство (12.5).

Последним шагом будет вычисление поверхностных интегралов, связанных с $\underset{6}{\Lambda}$. Здесь искусное использование леммы может избавить нас от вычисления многих поверхностных интегралов. В самом деле, $2\underset{6}{\Lambda}_{mn}$ может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned}
2\underset{6}{\Lambda}_{mn} = {} & (\varphi_{,n}\underset{4}{\gamma}_{sm} - \varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{nm})_{,s} + (\varphi\underset{4}{\gamma}_{ms,n} - \varphi\underset{4}{\gamma}_{mn,s})_{,s} + \\
& + (\delta_{ms}\varphi_{,r}\underset{4}{\gamma}_{rn} - \delta_{mn}\varphi_{,r}\underset{4}{\gamma}_{rs})_{,s} + (\delta_{mn}\varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{rr} - \delta_{ms}\varphi_{,n}\underset{4}{\gamma}_{rr})_{,s} + \\
& + \frac{1}{2}(\delta_{mn}\varphi\underset{4}{\gamma}_{rr,s} - \delta_{ms}\varphi\underset{4}{\gamma}_{rr,n})_{,s} + (\delta_{mn}\underset{5}{\gamma}_{0s,0} - \delta_{ms}\underset{5}{\gamma}_{0n,0})_{,s} + \\
& + \frac{1}{2}(\underset{3}{\gamma}_{0s,m}\underset{3}{\gamma}_{0n} - \underset{3}{\gamma}_{0n,m}\underset{3}{\gamma}_{0s})_{,s} + (\delta_{mn}\varphi_{,0}\underset{3}{\gamma}_{0s} - \delta_{ms}\varphi_{,0}\underset{3}{\gamma}_{0n})_{,s} + \\
& + (\underset{3}{\gamma}_{0n}\underset{3}{\gamma}_{0m,s} - \underset{3}{\gamma}_{0s}\underset{3}{\gamma}_{0m,n})_{,s} + \frac{1}{2}(\delta_{mn}\underset{3}{\gamma}_{0s,r}\underset{3}{\gamma}_{0r} - \delta_{ms}\underset{3}{\gamma}_{0n,r}\underset{3}{\gamma}_{0r})_{,s} + \\
& + (\delta_{ms}\underset{3}{\gamma}_{0r,n}\underset{3}{\gamma}_{0r} - \delta_{mn}\underset{3}{\gamma}_{0r,s}\underset{3}{\gamma}_{0r})_{,s} - \\
& - \underset{5}{\gamma}_{0m,0n} + \underset{4}{\gamma}_{mn,00} + \underset{3}{\gamma}_{0s}\underset{3}{\gamma}_{0s,mn} - \qquad [\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3] \\
& - \frac{1}{2}\delta_{mn}\underset{3}{\gamma}_{0s,r}\underset{3}{\gamma}_{0s,r} - (\varphi_{,n}\underset{3}{\gamma}_{0m})_{,0} - \qquad [\alpha_4 + \alpha_5] \\
& - (\varphi_{,m}\underset{3}{\gamma}_{0n})_{,0} + (\varphi\underset{3}{\gamma}_{0m,n})_{,0} + (\varphi\underset{3}{\gamma}_{0n,m})_{,0} - \qquad [\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8] \\
& - \frac{3}{2}\delta_{mn}\varphi_{,0}\varphi_{,0} - \frac{1}{2}\varphi\underset{4}{\gamma}_{ss,mn} + \qquad [\alpha_9 + \alpha_{10}] \\
& + \frac{1}{2}\varphi_{,n}\underset{4}{\gamma}_{ss,m} + \frac{1}{2}\varphi_{,n}\underset{4}{\gamma}_{00,m} + \qquad [\alpha_{11} + \alpha_{12}] \\
& + \frac{1}{2}\varphi_{,m}\underset{4}{\gamma}_{00,n} - \frac{1}{2}\delta_{mn}\varphi_{,s}\underset{4}{\gamma}_{00,s} - \qquad [\alpha_{13} + \alpha_{14}] \\
& - \varphi\varphi_{,00}\delta_{mn} - 2\varphi\varphi_{,m}\varphi_{,n} + \qquad [\alpha_{15} + \alpha_{16}] \\
& + \frac{11}{4}\varphi\varphi_{,s}\varphi_{,s}\delta_{mn}. \qquad [\alpha_{17}]
\end{aligned}$$

Таблица

Поверхностные интегралы для вычисления $\int\limits_{6}^{1} \Lambda_{ms} n_s \, dS$

№	Выражение	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	α_{16}	α_{17}	Результат	Примечания
1	$\overset{1}{m} g_{,s}\dot{\eta}^s\dot{\eta}^m$	$-\frac{16}{3}$				$-\frac{4}{3}$		$-\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{15}$		$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{15}$				$\frac{4}{5}$			-8	$\tilde{g}_{,s}=-2\overset{2}{m}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta^s}$
2	$\overset{1}{m}\tilde{g}\ddot{\eta}^m$	-2						-4	$-\frac{4}{3}$			$-\frac{29}{3}$	3	$\frac{11}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{32}{3}$	$-\frac{22}{3}$	-8	$\tilde{g}=-\frac{2\overset{2}{m}}{r}$; $\ddot{\eta}^m=-\frac{1}{2}\tilde{g}_{,m}$
3	$\overset{1}{m}\tilde{g}_{,m}\dot{\eta}^s\dot{\eta}^s$	1					$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{5}$			$\frac{8}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{15}$			2	$\tilde{g}_{,m}=-2\overset{1}{m}\ddot{\eta}^m$
4	$\overset{1}{m}\tilde{g}_{,m}\dot{\zeta}^s\dot{\zeta}^s$											2	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$				3	
5	$\overset{1}{m}\tilde{g}_{,m}\tilde{f}$	$\frac{4}{3}$				-2	$\frac{2}{3}$					$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$				5	$\tilde{g}_{,m}\tilde{f}=-\tilde{g}\tilde{f}_{,m}$; $\tilde{f}=-\frac{2\overset{1}{m}}{r}$
6	$\overset{1}{m}\overset{2}{m}\tilde{r}_{,00m}$											-2							-2	$\tilde{r}_{,00m}=\overset{2}{(r_{,00m})}$ для $x^s=\eta^{s*}$
7	$\overset{1}{m}\tilde{g}_{,s}\dot{\zeta}^m\dot{\eta}^s$	$\frac{16}{5}$				$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{3}$											8	
8	$\overset{1}{m}\tilde{g}_{,s}\dot{\zeta}^s\dot{\eta}^m$	$\frac{16}{5}$					$-\frac{8}{15}$	4	$\frac{4}{3}$	-2									6	
9	$\overset{1}{m}\tilde{g}_{,m}\dot{\eta}^s\dot{\zeta}^s$	$-\frac{32}{15}$		$-\frac{16}{3}$	$-\frac{8}{3}$		$\frac{4}{5}$		$\frac{4}{3}$										-8	
10	$\overset{1}{m}\tilde{g}_{,s}\dot{\zeta}^s\dot{\zeta}^m$	$-\frac{8}{3}$				-4	$-\frac{4}{3}$												-8	

* $\tilde{r}_{,00m}=\frac{\partial^3 r}{\partial\eta^s\,\partial\eta^r\,\partial\eta^m}\dot{\zeta}^s\dot{\zeta}^r$, так как $\frac{\partial^2 r}{\partial\eta^s\,\partial\eta^m}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta^s}=0$.

Теперь благодаря лемме нам остается найти поверхностные интегралы только от 17 выражений, обозначенных соответственно через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_{17}$. Результат этих вычислений суммирован в таблице. В конечном счете оказалось только десять типов выражений (или эквивалентных им). В таблице даны вклады каждого из выражений α в окончательный результат. Единственным α, которое не дает вклада, оказалось $\alpha_2 = \underset{6}{\gamma}_{mn,\,00}$.

А.13

Отказ от координатных условий приводит к следующим дополнительным выражениям в $\underset{6}{\Lambda}_{mn}$:

$$2\,(\delta_{mn}a_{0,r0} - \delta_{mr}a_{0,n0})_{,r} + (\varphi_{,m}a_{n,r} - \varphi_{,m}a_{r,n})_{,r} + (\varphi_{,n}a_{m,r} - \varphi_{,r}a_{m,n})_{,r} +$$
$$+ (\varphi_{,n}a_{s,m} - \varphi_{,s}a_{n,m})_{,s} - 2\,(\delta_{mn}\varphi_{,s}a_{s,r} - \delta_{mr}\varphi_{,s}a_{s,n})_{,r} + 2\,(\delta_{mn}\varphi_{,s}a_{r,r} - \delta_{ms}\varphi_{,n}a_{r,r})_{,s}.$$

Они выписаны в таком порядке, что обращение в нуль каждой строки в силу леммы, очевидно.

Поступила 12 февраля 1949 г.

136

ВРЕМЯ, ПРОСТРАНСТВО И ТЯГОТЕНИЕ*

В физике есть несколько типов теорий. Большинство из них являются конструктивными, т. е. их задачей является построение картины сложных явлений на основе некоторых относительно простых предположений. Кинетическая теория газов, например, ставит перед собой цель свести к молекулярным движениям механические, тепловые и кинетические свойства газов. Когда мы говорим, что понимаем какой-либо круг явлений природы, это означает, что мы построили конструктивную теорию, охватывающую этот круг явлений.

Фундаментальные теории. Однако, помимо этой многочисленной группы теорий существуют другие теории, которые я называю фундаментальными. В них используется не синтетический, а аналитический метод. Их исходным пунктом и основой являются не гипотетические предположения, а извлеченные из опыта общие свойства явлений, принципы, из которых выводятся математические формулы, имеющие всеобщую приложимость. Термодинамика, например, исходит из того факта, что вечный двигатель никогда не встречается в повседневном опыте, и пытается вывести отсюда некоторым аналитическим рассмотрением теорию, которая применима во всех случаях. К достоинствам конструктивных теорий относятся их простота, гибкость и ясность; достоинством фундаментальных теорий является их логическое совершенство, надежность исходных положений.

Теория относительности является фундаментальной теорией. Чтобы понять ее, нужно понять принцип, на котором она основана. Но прежде

* *Times, Space and Gravitation.* (Опубликована впервые в сб. «Out of my later Years», N. Y., 1950, в котором она датирована 1948-м годом. Однако эта статья очень близка по тексту к статье 56 (том 1), опубликованной в 1919 году. Французский перевод опубликован в сб. «Conceptions scientifiques, morales et sociales», Paris, 1952. — *Ред.*)

чем излагать его, надо указать, что теория относительности подобна древней династии с двумя родословными; она слагается из специальной теории относительности и общей теории относительности.

С античных времен известно, что при описании движения тела мы должны относить его к другому телу. Движение железнодорожного поезда описывается по отношению к полотну дороги, движение планет — по отношению ко всей совокупности видимых неподвижных звезд. В физике тела̀, к которым относят движения, называются системами координат. Законы механики Галилея и Ньютона можно сформулировать, только используя некоторую систему координат.

Состояние движения системы координат нельзя выбрать произвольно, если предположить, что законы механики выполняются (система не должна вращаться и ускоряться). Системы координат, используемые в механике, называются инерциальными. Состояние движения инерциальной системы, по крайней мере поскольку это касается механики, не задается природой единственным образом. Достаточно, чтобы выполнялось условие, сформулированное в следующем утверждении: система координат, движущаяся в том же направлении и с той же скоростью, что и инерциальная система, сама является инерциальной. Поэтому специальная теория относительности представляет собой приложение ко всем процессам природы следующего положения:

«Каждый закон природы, который выполняется по отношению к некоторой системе координат K, должен также выполняться в любой другой системе K', при условии, что K и K' движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно.

Другой принцип, на котором основана специальная теория относительности, — это принцип постоянства скорости света в пустоте. Свет в пустоте распространяется с определенной постоянной скоростью, не зависящей от скорости источника. Свое убеждение в справедливости этого принципа физики почерпнули из электродинамики Максвелла — Лоренца.

Хотя оба упомянутые мной принципа хорошо подтверждены экспериментом, они не кажутся логически совместимыми. Специальная теория относительности сумела их примирить ценой видоизменения кинематики или, иначе говоря, ценой изменения физических представлений о пространстве и времени. Стало очевидным, что утверждение о совпадении двух событий может иметь смысл только в связи с определенной системой координат и что масса тел, а также ход часов должны зависеть от их состояния движения по отношению к системе координат.

Старая физика. Но старая физика, в том числе законы движения Галилея и Ньютона, противоречила релятивистской кинематике. Последняя приводила к некоторым обобщенным математическим условиям, с которыми должны были согласоваться законы природы, если потребовать совместности двух фундаментальных принципов. Физику необходимо было видоизменить. Самым заметным изменением было введение нового закона движения для (очень быстро) движущихся материальных точек, который вскоре удалось проверить для случая электрически заряженных частиц. Наиболее важный результат специальной теории относительности касался инертной массы материальной системы. Стало очевидным, что инертная масса системы должна зависеть от содержащейся в ней энергии, и мы пришли таким образом к убеждению, что инертная масса является не чем иным, как скрытой энергией. Принцип сохранения массы потерял свою независимость и оказался составной частью закона сохранения энергии.

Специальная теория относительности, которая была простым обобщением электродинамики Максвелла — Лоренца, имела последствия, выходящие далеко за ее рамки. Должна ли зависимость физических законов от выбора системы координат ограничиваться только системами координат, движущимися друг относительно друга прямолинейно и равномерно? Какое отношение имеет природа к вводимым нами системам координат и их движению? Хотя для нашего описания природы может оказаться необходимым использование систем координат, выбранных нами произвольно, выбор систем не должен быть ничем ограничен в той мере, в какой это касается их движения (общая теория относительности). Выводы общей теории относительности оказались в противоречии с хорошо известным экспериментом, согласно которому вес и инерция тела зависят от одних и тех же констант (тождество инертной и тяготеющей масс). Рассмотрим случай системы координат, которая предполагается равномерно вращающейся по отношению к инерциальной (в ньютоновском смысле) системе. Силы, являющиеся центробежными относительно этой системы, должны быть, по Ньютону, приписаны инерции. Но эти центробежные силы, подобно гравитационным, пропорциональны массе тел. Нельзя ли в таком случае рассматривать нашу систему координат как покоящуюся и центробежные силы как гравитационные? Такая интерпретация кажется почти очевидной; однако классическая механика ее запрещает.

Эти беглые замечания указывают, каким образом законы тяготения должны войти в общую теорию относительности; действительное развитие этих представлений оправдало все надежды. Путь, однако, оказался труднее, чем ожидалось сначала, поскольку пришлось вступить в противоречие с эвклидовой геометрией. Другими словами, законы расположения материальных тел в пространстве не совпадают в точности с законами пространства, предписываемыми эвклидовой геометрией твердых тел. Именно это имеется в виду, когда говорят об «искривлении пространства». Фундаментальные понятия «прямой», «плоский» и т. д. потеряли свой точный смысл в физике.

В общей теории относительности представления о пространстве и времени, а также кинематика уже не являются более абсолютными основами общей физики. Геометрическое состояние тел и ход часов зависят прежде всего от гравитационных полей, которые в свою очередь определяются рассматриваемыми материальными системами.

Таким образом, новая теория гравитации существенно отличается в своих основных положениях от ньютоновской. Но практически они совпадают столь близко, что трудно было найти хотя бы несколько случаев, в которых различие между теориями поддавалось бы наблюдению. До сих пор были отмечены только следующие явления:

1. Искажение эллиптических орбит планет солнечной системы (подтверждено для Меркурия).

2. Отклонение световых лучей в гравитационном поле (было подтверждено английской астрономической экспедицией во время полного солнечного затмения 1919 г.).

3. Красное смещение спектральных линий для света, приходящего от звезд, обладающих большой массой (еще не подтверждено опытом)[1].

Привлекательной стороной этой теории является ее логическая завершенность. Если какой-либо ее вывод окажется неверным, то от теории нужно будет отказаться. Частичное видоизменение, не нарушающее целого, представляется невозможным.

Не следует думать, что великое творение Ньютона можно ниспровергнуть в сколько-нибудь реальном смысле слова этой или иной теорией. Его ясные и всеобъемлющие идеи навсегда сохранят свое значение, как основа, на которой построено здание современной физики.

---

[1] Теперь это подтверждено наблюдениями. См. примечание автора к английскому изданию статьи 56.—*Прим. ред.*

ОБ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ*

Редакция *Scientific American* попросила меня написать о моей недавно опубликованной работе. Эта работа представляет собой математическое исследование, касающееся основ полевой физики.

Некоторые читатели, быть может, удивятся: разве мы не узнали еще в школе все об основах физики? Ответ будет «да» или «нет» в зависимости от подхода. Мы познакомились с понятиями и общими соотношениями, которые позволили нам понять огромный круг опытных фактов и допускают их математическую трактовку. В каком-то смысле эти понятия и соотношения являются, по-видимому, окончательными. Это справедливо, например, для законов преломления света, соотношений классической термодинамики в той мере, в какой они основаны на понятиях давления, объема, теплоты и работы и для гипотезы о несуществовании вечного двигателя.

Что же, в таком случае, побуждает нас изобретать теорию за теорией? Почему мы вообще изобретаем теории? Ответ на последний вопрос прост: потому что мы наслаждаемся «постижением», т. е. сведéнием явлений с помощью логических процессов к чему-то уже известному или (по-видимому) очевидному. Новые теории необходимы прежде всего тогда, когда мы сталкиваемся с новыми фактами, которые нельзя объяснить в рамках существующих теорий. Но эта побуждающая причина для создания новых теорий является в каком-то смысле тривиальной, привносимой извне. Существует иная, более тонкая причина, играющая не меньшую роль, а именно,— стремление к единству и простоте предпосылок теории как

* *On the Generalized Theory of Gravitation*. Sci. Amer., 1950, 182, 13—17. (Статья имеет подзаголовок: «Рассказ о недавно опубликованном обобщении общей теории относительности с историческими и философскими замечаниями». Французский перевод опубликован в сб. Conceptions scientifiques, morales et sociales, Paris, 1952.—*Ред.*)

целого (т. е. принцип экономии Маха, интерпретируемый как логический принцип).

Существует страсть к постижению, как существует страсть к музыке. Она довольно обычна в детях, но взрослые большей частью ее утрачивают. Без этой страсти не было бы ни математики, ни естественных наук. Время и опять-таки страсть к пониманию создали иллюзию, что человек способен постичь объективный мир умозрительно, чистым мышлением, без всякой эмпирической основы, короче, метафизически. Мне кажется, что каждый истинный теоретик является чем-то вроде половинчатого метафизика, независимо от того, насколько чистым «позитивистом» он себя воображает. Метафизик верит, что логически простое — синоним реального. Половинчатый метафизик верит, что не все логически простое воплощено в ощущаемую реальность, но что совокупность всех чувственных восприятий можно «постичь» на основе системы понятий, построенной из предпосылок максимальной простоты. Скептик скажет, что это — «вера в чудеса». Пусть так, но развитие науки поразительным образом поддержало эту веру в чудеса.

Хороший тому пример — возникновение атомизма. Как мог Левкипп прийти к этой смелой идее? Когда вода замерзает, то превращается в лед, казалось бы, совершенно непохожий на воду, почему же при таянии льда образуется нечто, кажущееся неотличимым от той воды, которая была сначала. Левкипп озадачен и ищет «объяснения». Он приходит к заключению, что в этих превращениях «сущность» предмета не меняется вообще. Быть может, предмет состоит из неизменных частиц и все изменение сводится только к изменению их расположения в пространстве? И разве не может эта идея оказаться справедливой для всех материальных объектов, которые возникают снова и снова с почти тождественными свойствами?

Эта идея не была полностью утрачена за время долгой спячки западной цивилизации. Через две тысячи лет после Левкиппа Бернулли размышляет, почему газ оказывает давление на стенки сосуда. Следует ли объяснять это взаимным отталкиванием частей газа в смысле механики Ньютона? Эта идея представляется абсурдной, ибо давление газа при прочих равных условиях зависит от температуры. Предположение о зависимости ньютоновских сил взаимодействия от температуры противоречит духу механики Ньютона. Зная атомистическую концепцию, Бернулли обязан был заключить, что атомы (или молекулы) сталкиваются со стенками сосуда и таким образом создают давление. В конце концов, предположение о том, что атомы движутся, неизбежно, ибо как еще можно объяснить переменную температуру газов?

Простые механические соображения показывают, что это давление зависит только от кинетической энергии частиц и их плотности в пространстве. Отсюда физики того времени пришли к выводу, что теплота заключается в беспорядочном движении атомов. Если бы они приняли этот вывод настолько серьезно, насколько он этого заслуживает, то развитие теории тепла и, в частности, открытие эквивалентности тепловой и механической энергии значительно облегчилось бы.

Приведенный пример иллюстрирует два обстоятельства. Теоретические идеи (в данном случае атомизм) не возникают отдельно от опыта и независимо от него; их также нельзя вывести из опыта чисто логическим путем. Их возникновение есть творческий акт. Коль скоро теоретическая идея возникла, ее следует строго придерживаться до тех пор, пока она не приведет к противоречию.

* * *

Что касается моей последней теоретической работы, то мне кажется неоправданным рассказывать о ней широкому кругу читателей, интересующихся наукой. Так следует поступать лишь по отношению к теориям, которые получили должное подтверждение на опыте. Пока в пользу обсуждаемой здесь теории говорит лишь простота ее предпосылок и ее тесная связь с тем, что уже известно (именно, с законами чисто гравитационного поля). Однако для широкого круга читателей может представлять интерес знакомство с той последовательностью идей, которая привела к построениям столь явно спекулятивного характера. Кроме того, я расскажу о встречающихся трудностях и о том, в каком смысле их удается преодолеть.

В ньютоновской физике элементарным теоретическим понятием, на котором основано описание материальных тел, является понятие материальной точки или частицы. Таким образом, вещество априори считается дискретным. Отсюда возникает необходимость рассматривать взаимодействие между материальными точками как «действие на расстоянии». Поскольку такое представление кажется несогласующимся с повседневной практикой, то нет ничего удивительного в том, что современники Ньютона — и, конечно, сам Ньютон — находили его трудным для восприятия. Однако благодаря почти фантастическому успеху системы Ньютона последующие поколения физиков постепенно привыкли к идее действия на расстоянии. Все сомнения были надолго похоронены.

Но когда во второй половине XIX в. стали известны законы электродинамики, то оказалось, что они не укладываются сколько-нибудь удовлетворительно в ньютоновскую схему. Интересно пофантазировать: сумел бы Фарадей открыть закон электромагнитной индукции, если б он получил обычное образование в колледже? Не обремененный традиционными путями мышления, он чувствовал, что введение «поля» как независимого элемента реальности помогает ему связать воедино экспериментальные факты. Уделом Максвелла было окончательное осознание роли, которую играет понятие поля; ему принадлежит фундаментальное открытие, что законы электродинамики находят свое естественное выражение в дифференциальных уравнениях для электрического и магнитного полей.

Из этих уравнений следовало существование волн, свойства которых отвечали свойствам света, в той мере, в какой последние были известны в то время.

Слияние оптики с теорией электромагнетизма явилось одним из величайших триумфов в стремлении к единству в основах физики; Максвелл пришел к этому единству чисто теоретическим путем, задолго до того, как оно было подтверждено экспериментами Герца. Новый взгляд позволил отказаться от гипотезы действия на расстоянии по крайней мере в мире электромагнитных явлений; поле теперь выступает как единственный носитель электромагнитного взаимодействия между телами и поведение поля полностью определяется процессами в соседних точках, описываемыми с помощью дифференциальных уравнений.

Но тогда возникает вопрос: поскольку поле существует даже в вакууме, следует ли представлять себе поле как состояние некоего «носителя» или нужно наделять его независимым существованием, не сводимым ни к чему иному? Иными словами, существует ли «эфир» в качестве носителя поля, эфир, о котором, например, надо говорить, что он колеблется, когда он передает световые волны?

Существует естественный ответ на этот вопрос: так как отказаться от понятия поля нельзя, то предпочтительно не вводить дополнительно носитель с гипотетическими свойствами. Однако пионеры, впервые понявшие неизбежность понятия поля, были слишком отягощены механической традицией мышления, чтобы, не колеблясь, принять эту простую точку зрения. Но в последующие десятилетия этот взгляд постепенно одерживал верх.

Введение поля в качестве элементарного понятия приводит к непоследовательности теории как целого. Теория Максвелла, хотя и правильно описывает поведение электрически заряженных частиц, не объясняет поведение плотности электрического заряда, т. е. она не дает теории самих частиц. Таким образом, они должны рассматриваться на основе старой теории как материальные точки. Комбинация идеи непрерывного поля с представлением о материальных точках, расположенных дискретно в пространстве, оказывается противоречивой. Последовательная полевая теория требует непрерывности всех элементов теории, и не только во времени, но также и в пространстве, причем во всех его точках. Следовательно, материальной точке как фундаментальному понятию нет места в полевой теории. Таким образом, даже если отвлечься от оставленного в стороне тяготения, электродинамику Максвелла нельзя считать полной теорией.

Уравнения Максвелла для пустого пространства остаются неизменными, если пространственные координаты и время подвергать линейным преобразованиям особого рода — преобразованиям Лоренца («ковариантность» по отношению к преобразованиям Лоренца). Ковариантность также сохраняется и для преобразования, составленного из двух или больше подобных преобразований; это называется «групповым» свойством преобразований Лоренца.

Максвелловы уравнения приводят к «группе Лоренца», но из группы Лоренца еще не следуют уравнения Максвелла. Действительно, группу Лоренца можно определить независимо, как группу линейных преобразований, оставляющих одно значение скорости — скорость света — неизменным. Эти преобразования отвечают переходам из одной «инерциальной системы» в другую, движущуюся относительно первой равномерно и прямолинейно. Наиболее важным свойством этой группы преобразований является то, что она снимает абсолютный характер понятия одновременности для пространственно удаленных событий. По этой причине следует ожидать, что все уравнения физики ковариантны относительно преобразований Лоренца (специальная теория относительности). Таким образом, уравнения Максвелла приводят к эвристическому принципу, пригодному далеко за рамками применимости самих уравнений электромагнитного поля.

Следующее положение является общим для специальной теории относительности и механики Ньютона: законы обеих теорий предполагаются справедливыми лишь в определенных системах координат, а именно, в так называемых «инерциальных системах». Инерциальная система — это система, в которой «свободные от действия сил» материальные частицы не ускоряются по отношению к системе координат. Однако это определение бессодержательно, если нет независимого способа узнать об отсутствии сил. Но такого способа не существует, если тяготение рассматривать как поле.

Пусть A — система отсчета, движущаяся равномерно ускоренно относительно инерциальной системы I. Материальные точки, движущиеся неускоренно относительно I, будут двигаться с ускорением по отношению к A, причем ускорения во всех точках одинаковы по величине и направлению. Материальные точки ведут себя так, как если бы существовало гравитационное поле в системе A, ибо характерным свойством гравитационного поля является независимость ускорения от конкретного вида тел. Нет причин для отказа от возможности интерпретировать такое поведение как результат воздействия «истинного» гравитационного поля (принцип эквивалентности). Эта интерпретация означает, что A представляет собой «инерциальную систему», хотя она и движется ускоренно по отношению к другой инерциальной системе. (Для приведенных соображений существенно, что введение независимого гравитационного поля считается оправданным, несмотря на то, что не определено, какие массы, порождают это поле. Поэтому Ньютону такие соображения не показались бы убедительными.) Таким образом, понятия инерциальной системы, закона движения оказываются лишенными конкретного содержания — не только в классической механике, но и в специальной теории относительности. Более того, если следовать этому пути, то оказывается, что время по отношению к системе A нельзя измерить тождественными часами; в действительности, вообще говоря, теряют непосредственный физический смысл даже разности координат. Учитывая все эти трудности, не следует ли в конце концов попробовать сохранить понятие инерциальной системы, оставив все попытки объяснить фундаментальную черту гравитационных явлений, которая проявляет себя в системе Ньютона как эквивалентность инертной и тяготеющей масс? Тот, кто верит в постижимость природы, должен дать ответ — нет.

* * *

Суть принципа эквивалентности заключается в том, что для объяснения равенства инертной и тяготеющей масс в теории необходимо допустить нелинейные преобразования четырех координат. Таким образом, группу преобразований Лоренца и, следовательно, набор «допустимых» систем координат необходимо расширить.

Какая группа преобразований координат может заменить группу Лоренца? Математика предлагает ответ, основанный на фундаментальных исследованиях Гаусса и Римана: надлежащей заменой является группа всех непрерывных (аналитических) преобразований координат. При таких преобразованиях остается неизменным лишь то, что соседние точки имеют примерно одинаковые координаты и что система координат выражается в топологическом упорядочении точек в пространстве (с учетом его четырехмерного характера). Уравнения, выражающие законы природы, должны быть ковариантны по отношению ко всем непрерывным преобразованиям координат. Таков общий принцип относительности.

Описанная процедура устраняет несовершенство в основах механики, которое заметил уже Ньютон и критиковал Лейбниц, а двумя столетиями позже — Мах. Инерция противодействует ускорению, но ускорению относительно чего? В рамках классической механики на этот вопрос можно дать только один ответ: инерция противодействует ускорению относительно пространства. Таково физическое свойство пространства — пространство действует на объекты, но объекты не воздействуют на пространство.

В этом, по-видимому, заключен более глубокий смысл утверждения Ньютона: spatium est absolutum (пространство абсолютно). Но многих, и в частности Лейбница, тревожила мысль, что пространству нельзя приписывать независимого существования, и следует рассматривать его лишь как свойство «вещей» (совокупности физических объектов). Если бы оправданные сомнения Лейбница восторжествовали в то время, вряд ли это было бы выигрышем для физики, поскольку эмпирические и теоретические основы, необходимые, чтобы следовать его идее, в XVII в. еще не существовали.

Согласно общей теории относительности, не существует понятия пространства, лишенного какого бы то ни было физического содержания. Физическая реальность пространства представляется полем, компоненты которого есть непрерывные функции четырех независимых переменных — пространственных координат и времени. Именно этот особый вид зависимости отражает пространственный характер физической реальности.

Поскольку общая теория относительности подразумевает описание физической реальности непрерывным полем, ни понятие частиц, или материальных точек, ни понятие движения не могут иметь фундаментального значения. Частица может выступать лишь как ограниченная область пространства, в которой напряженность поля или плотность энергии особенно велики.

Релятивистская теория должна дать ответ на два вопроса: во-первых, какова математическая природа поля и, во-вторых, каким уравнениям должно удовлетворять это поле.

Что касается первого вопроса, то с математической точки зрения поле существенно характеризуется способом преобразования его компонент при выполнении преобразования координат. Что касается второго вопроса, то уравнения должны определять поле в достаточной мере, удовлетворяя при этом общему принципу относительности. Можно ли удовлетворить этому требованию, зависит от выбора типа поля.

Попытка понять связь между данными опыта на основе столь абстрактной программы может на первый взгляд показаться почти безнадежной. В действительности вся процедура сводится к вопросу: каков максимально простой объект (поле) и какими максимально простыми свойствами его нужно наделить, чтобы при этом сохранить общий принцип относительности? С точки зрения формальной логики двойственный характер этого вопроса кажется противоестественным, не говоря уж о туманности понятия «простой». Более того, с физической точки зрения нет никакой гарантии того, что «логически простая» теория окажется также «истинной».

Но каждая теория является спекулятивной. Когда основные понятия теории сравнительно «близки к опыту» (например, понятия силы, давления, массы), ее спекулятивный характер не так легко распознать. Однако если теория такова, что необходим сравнительно сложный логический процесс для извлечения из ее предпосылок тех выводов, которые можно сопоставить с наблюдениями, то каждый ощущает ее спекулятивную природу. В таких случаях у людей, неискушенных в гносеологическом анализе и не знающих о ненадежности теоретических идей в знакомых им областях, возникает почти непреодолимое чувство неприязни к теории.

С другой стороны, следует согласиться, что «близость» основных понятий и фундаментальных гипотез теории к опыту является важным ее преимуществом и большее доверие к такой теории, конечно, оправдано. Здесь меньше опасности уйти совсем в сторону, в частности потому, что требуется гораздо меньше времени и сил, чтобы опровергнуть такую теорию на опыте. Но снова и снова, по мере углубления наших познаний, мы должны отказываться от этого преимущества в нашем стремлении к логической простоте и единству основ физической теории. Следует признать, что общая теория относительности ушла дальше предшествующих физических теорий в отказе от «близости к опыту» фундаментальных понятий ради достижения логической простоты. Это относится уже к теории гравитации и еще более справедливо по отношению к ее новому обобщению, которое ставит целью охватить свойства полного поля. В этой обобщенной теории путь вывода из основных предпосылок тех заключений, которые можно сравнить с опытом, настолько труден, что никаких результатов еще не достигнуто. В пользу этой теории в настоящее время говорят ее логическая простота и ее «жесткость». Здесь жесткость означает, что теория либо верна, либо не верна; видоизменять же ее нельзя.

* * *

Глубочайшей внутренней трудностью на пути развития теории относительности является двойственный характер задачи, отраженный в двух типах вопросов, которые мы ставим. Эта двойственность является причиной того, что в развитии теории было два этапа, разделенных большим промежутком времени. Первый из этих этапов, теория гравитации, основывается на рассмотренном выше принципе эквивалентности и покоится на следующих соображениях. Согласно специальной теории относительности свет распространяется с постоянной скоростью. Если луч света в пустоте выходит из точки трехмерного пространства с координатами x_1, x_2 и x_3 в момент времени x_4, то он распространяется как сферическая волна и достигает соседней точки $(x_1 + dx_1,\ x_2 + dx_2,\ x_3 + dx_3)$ в момент $x_4 + dx_4$.

Вводя скорость света c, мы приходим к соотношению

$$\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} = c\,dx_4,$$

которое можно также записать в виде

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2 dx_4^2 = 0.$$

Это равенство представляет собой объективное соотношение между координатами соседних пространственно-временных точек в четырехмерном пространстве и справедливо во всех инерциальных системах, при условии, что преобразования координат ограничены преобразованиями специальной теории относительности. Однако это соотношение теряет такую форму, если в соответствии с общим принципом относительности допустить произвольные непрерывные преобразования координат, и принимает более общий вид

$$\sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0.$$

Величины g_{ik} — некоторые функции координат, преобразующиеся определенным образом при непрерывном преобразовании координат. Согласно принципу эквивалентности, функции g_{ik} описывают гравитационное поле частного вида — поле, которое можно получить преобразованием «свободного от поля» пространства. Функции g_{ik} подчиняются определенному закону преобразования. Математически они представляют собой компоненты «тензора», обладающего свойством симметрии, которое сохраняется при всех преобразованиях; это свойство симметрии выражается следующим образом:

$$g_{ik} = g_{ki}.$$

Напрашивается вопрос: не можем ли мы приписать объективный смысл такому симметричному тензору, даже если поле нельзя получить одним только координатным преобразованием пустого пространства специальной теории относительности? Хотя мы и не можем ожидать, что такой симметричный тензор будет описывать поле самого общего вида, он все же может описывать частный случай «чисто гравитационного поля». Таким образом становится очевидным, какого типа поля нужно вводить по крайней мере в конкретном случае общей теории относительности (симметричные тензорные поля). Остается лишь вопрос: какого типа общие ковариантные уравнения нужно постулировать для симметричного тензорного поля?

В наше время нетрудно было найти ответ на этот вопрос, так как необходимые математические понятия уже были известны в виде метрической теории поверхностей, созданной Гауссом сто лет назад и обобщенной Риманом на случай многообразий произвольного числа измерений. Результат этих чисто формальных исследований оказался поразительным во многих отношениях. Дифференциальные уравнения, которые можно постулировать как уравнения поля g_{ik}, не могут быть ниже второго порядка, т. е. они должны содержать производные по крайней мере второго порядка от g_{ik} по координатам. Если предположить, что производные выше второго порядка не входят в уравнения поля, то они оказываются математически определенными общим принципом относительности. Система уравнений может быть записана в следующем виде:

$$R_{ik} = 0.$$

Величины R_{ik} преобразуются таким же образом, как g_{ik}, т. е. они также составляют симметричный тензор.

Эти дифференциальные уравнения полностью заменяют ньютоновскую теорию движения небесных тел, при условии, что массы выступают как особенности поля. Другими словами, они содержат закон сил, а также закон движения, хотя и исключают использование «инерциальных систем».

То обстоятельство, что массы выступают как особенности поля, показывает, что сами массы нельзя объяснить с помощью симметричных полей g_{ik} или «гравитационных полей». Из теории нельзя вывести даже факт существования только положительных масс. Полная релятивистская полевая теория должна, очевидно, основываться на поле более сложной структуры, т. е. на обобщении симметричного тензорного поля.

* * *

Прежде чем переходить к этому обобщению, сделаем два замечания, относящихся к гравитационному полю и существенных для дальнейшего.

Во-первых, отметим, что общий принцип относительности налагает весьма сильное ограничение на круг теоретических возможностей. Без этого ограничивающего принципа было бы практически невозможно найти уравнения гравитационного поля, даже пользуясь специальным принципом относительности и зная заранее, что поле должно описываться симметричным тензором. Никакой набор фактов не может привести к этим уравнениям, пока не использован общий принцип относительности. Именно по этой причине все попытки глубже проникнуть в основы физики кажутся мне обреченными на неудачу, если основные представления не находятся с самого начала в согласии с общим принципом относительности. Эта ситуация затрудняет использование наших эмпирических знаний, как бы обширны они ни были, для поиска фундаментальных физических понятий и соотношений, и вынуждает нас прибегать к свободным умозаключениям в гораздо большей степени, чем это предполагает ныне большинство физиков. Я не вижу причины считать, что эвристическая роль общего принципа относительности ограничена гравитацией и остальная физика должна рассматриваться отдельно на основе специального принципа относительности в надежде, что впоследствии все будет объединено в рамках общей релятивистской схемы. Я не думаю, чтобы такой подход, хоть он и объясним исторически, можно было объективно оправдать. Сравнительная узость круга известных нам гравитационных эффектов не есть решающая причина для игнорирования общего принципа относительности в исследованиях фундаментального характера. Другими словами, я не считаю оправданным вопрос: как выглядела бы физика без гравитации?

Во-вторых, мы должны отметить, что уравнения гравитационного поля представляют собой систему из десяти уравнений для десяти компонент симметричного тензора g_{ik}. В случае теории, которая не является общерелятивистской, система обычно не переопределена, если число уравнений совпадает с числом неизвестных функций. Многообразие решений таково, что в рамках общего решения можно выбрать произвольно некоторое число функций трех переменных. В общерелятивистской теории это нельзя считать самоочевидным. Свобода в выборе системы координат приводит к тому, что из 10 функций, т. е. из 10 компонент поля, четыре можно задать произвольно путем надлежащего выбора системы координат. Иначе говоря, общий принцип относительности приводит к тому, что полное число функций, которые следует определять из дифференциальных уравнений, равно не десяти, а $10-4=6$. Для этих шести функций можно постулировать только шесть независимых дифференциальных уравнений. Лишь шесть из десяти дифференциальных уравнений гравитационного поля должны быть независимы между собой, тогда как остальные четыре должны быть связаны с первыми шестью с помощью четырех соотношений (тождеств). И действительно, левые части R_{ik} десяти гравитационных уравнений, связаны четырьмя тождествами (тождествами Бианки), которые обеспечивают совместность системы уравнений.

В случаях, подобных этому, когда число переменных поля равно числу дифференциальных уравнений, совместность системы всегда обеспечена, если уравнения можно вывести из вариационного принципа. Это действительно можно сделать в случае гравитационного поля.

Однако десять уравнений нельзя полностью заменить шестью. Система уравнений действительно «переопределена», но, благодаря существованию тождеств, переопределение не приводит к потере совместности, т. е. к критическому сужению многообразия решений. Уравнения гравитационного поля включают в себя закон движения для масс, и это обстоятельство теснейшим образом связано с указанной (допустимой) переопределенностью.

После этих вводных замечаний легко понять характер нашего исследования, не входя в математические детали. Проблема заключается в построении релятивистской теории полного поля. Наиболее важным указанием на путь решения является факт существования такого решения для частного случая чисто гравитационного поля. Поэтому теория, которую мы ищем, должна быть обобщением теории гравитационного поля. Первый вопрос таков: каким должно быть естественное обобщение симметричного тензора поля?

Ответить на этот вопрос можно, только связав его с другим вопросом: какое обобщение поля должно привести к наиболее естественной теоретической схеме? Рассматриваемая теория основана на следующем ответе: симметричное тензорное поле должно быть заменено на несимметричное. Это означает, что условие $g_{ik} = g_{ki}$ для компонент поля должно быть отброшено. В этом случае поле имеет 16 независимых компонент вместо десяти.

Теперь остается задача установления релятивистских дифференциальных уравнений для несимметричного тензорного поля. При попытке решить эту задачу возникает трудность, которая не встречается в случае симметричного поля. Общий принцип относительности недостаточен для полного определения уравнений поля, в основном потому, что закон преобразования для симметричной части поля не охватывает компонент антисимметричной части и наоборот. Вероятно, по этой причине такого типа обобщение никогда не выдвигалось ранее. Переход к комбинации этих двух частей поля можно считать естественным только в том случае, если в формализме теории играет роль лишь полное поле, а не отдельно его симметричная и антисимметричная части.

Оказывается, что этому требованию действительно можно удовлетворить естественным образом. Но даже это требование в совокупности с общим принципом относительности еще недостаточно, чтобы однозначно определить уравнения поля. Вспомним теперь, что система уравнений должна удовлетворять еще одному условию — она должна быть совместной. Выше упоминалось, что это условие выполняется, если уравнения можно вывести из вариационного принципа.

Это действительно было проделано, хотя и не столь естественным путем, как в случае симметричного поля. К сожалению, оказалось, что вывод можно выполнить двумя различными путями. Эти вариационные принципы дают две системы уравнений (назовем их E_1 и E_2), отличные (хотя и немного) одна от другой, каждая из которых страдает специфическими недостатками. Следовательно, даже условие совместности недостаточно для однозначного определения системы уравнений.

Но именно формальные недостатки систем E_1 и E_2 позволили найти выход. Существует третья система уравнений E_3, свободная от формальных недостатков систем E_1 и E_2 и представляющая собой их комбинацию в том смысле, что каждое решение E_3 является как решением E_1, так и решением E_2. Это наводит на мысль, что система E_3 и есть искомая система уравнений. Почему бы не постулировать систему E_3 как систему уравнений? Такой подход нужно оправдать дополнительным анализом, так как из совместности системы E_1 и совместности системы E_2 еще не следует совместность более сильной системы E_3, число уравнений в которой на четыре превышает число компонент поля.

Совершенно другие соображения показывают, что независимо от вопроса о совместности более сильной системы E_3 эта система является единственным действительно естественным обобщением уравнений гравитации.

Но E_3 не есть совместная система в том же смысле, что и системы E_1 и E_2, совместность которых обеспечена достаточным числом тождеств. Последнее означает, что каждое поле, удовлетворяющее этим уравнениям в некоторый момент времени, имеет непрерывное продолжение, представляющее решение в четырехмерном пространстве. Однако система E_3 не допускает такого продолжения. Используя язык классической механики, мы могли бы сказать: для системы нельзя задавать свободно «начальные условия». В действительности основное значение имеет ответ на следующий вопрос: является ли многообразие решений системы E_3 настолько богатым, насколько это требуется для физической теории? Эта чисто математическая задача пока не решена.

Допустим, скажет скептик, что эта система действительно разумна с логической точки зрения. Но этим еще не доказано, что она соответствует природе. Вы правы, дорогой скептик. Только опыт может решить, где же скрыта истина. Все же мы кое-чего достигли, если сумели сформулировать осмысленный и точный вопрос. Подтверждение или опровержение не будет простым, ввиду отсутствия экспериментальных данных. Получение из уравнений заключений, которые можно сопоставить с опытом, потребует огромных усилий и, вероятно, новых математических методов.

Статья написана в связи с выходом 3-го издания «Сущности теории относительности», в котором новая теория помещена в Приложении II. Это приложение было потом переработано (см. статью 141). Теории с несимметричными $g_{\mu\nu}$ Эйнштейн разрабатывал до конца своей жизни. Последний ее вариант изложен в Приложении II к 5-му изданию «Сущности теории относительности» (см. статью 146).

ТОЖДЕСТВА БИАНКИ В ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ*

1. Общие замечания

Эвристическое значение общего принципа относительности заключается в том, что он значительно уменьшает число мыслимых систем уравнений поля. Уравнения поля должны быть ковариантны относительно всех непрерывных преобразований четырех координат. Однако проблема будет хорошо определена математически лишь в том случае, если мы выберем зависимые переменные, входящие в уравнения поля, и постулируем их трансформационные свойства (структуру поля). Но после того как мы выбрали структуру поля (таким образом, чтобы существовали достаточно сильные релятивистские уравнения поля), принцип относительности еще не определяет уравнения поля однозначно. Следует добавить принцип «логической простоты», формулировка которого не лишена произвола. Лишь тогда мы получим определенную теорию, физическую применимость которой можно проверить a posteriori.

Структура поля релятивистской теории гравитации основана на использовании симметричного тензора g_{ik}. Основной физической причиной такого выбора является наше убеждение в том, что в каждой мировой точке существует «световой конус» ($g_{ik}\ dx^i dx^k = 0$), разделяющий пространственно-подобные линейные элементы от временно-подобных. Каким наиболее естественным путем можно обобщить эту структуру поля? Простейшей возможностью представляется использование несимметричного тензора, хотя этот выбор нельзя убедительно оправдать с физической точ-

* *The Bianchi Identities in the Generalized Theory of Gravitation.* Canad. J. Math., 1950, 2, 120—128.

ки зрения. Однако мне кажется немаловажным следующее формальное соображение. Для общей теории относительности существенно, что ковариантный тензор g_{ik} мы можем связать с контравариантным g^{ik} посредством соотношения $g_{is}\, g^{ks} = \delta_i^k = g_{si}\, g^{sk}$ (нормалированные кофакторы). Эту связь можно непосредственно перенести на случай несимметричного поля. Поэтому естественно попытаться распространить теорию гравитации на несимметричные поля g_{ik}.

Основная трудность заключается здесь в том, что из несимметричного тензора мы можем построить гораздо больше ковариантных уравнений, чем из симметричного. Это обусловлено тем обстоятельством, что симметричная $g_{\underline{ik}}$ и антисимметричная $g_{\underset{\vee}{ik}}$ части являются независимыми тензорами. Существует ли формальная точка зрения, которая позволяет считать одну из многих возможностей более естественной, чем остальные? Мне кажется, что существует. В теории гравитации существенно, что помимо тензора g_{ik} у нас имеется симметричное бесконечно малое смещение Γ^l_{ik}. Оно связано с g_{ik} соотношением

$$g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\Gamma^s_{lk} = 0. \tag{1}$$

Но в симметричном случае порядок индексов не играет роли. Каким образом обобщить уравнение (1) на наш случай? Мы воспользуемся следующим постулатом. Существует тензор g_{ki}, «сопряженный» g_{ik}, и смещение Γ^l_{ki}, «сопряженное» Γ^l_{ik}. По-видимому, разумно ожидать, что эти сопряженные величины должны играть эквивалентную роль в уравнениях поля. Поэтому мы требуем, чтобы любое уравнение поля при замене g и Γ на сопряженные им величины переходило в эквивалентное уравнение. Это требование заменяет симметрию в нашей системе (см. раздел 2). Если мы требуем, чтобы система соотношений (1) переходила сама в себя, то порядок индексов должен быть таким, какой указан в (1).

Наша основная задача состоит теперь в том, чтобы выяснить, существует ли достаточно убедительный метод нахождения однозначной системы уравнений для несимметричного поля указанной структуры. В обеих предыдущих работах [1] эта задача решалась путем формулирования вариационного принципа по аналогии с симметричным случаем. При этом мы могли быть уверены в совместности полученных уравнений. Единственная причина, по которой этот вывод может показаться не вполне удовлетворительным, заключается в том, что мы априори налагали на поле два

[1] A. Einstein. Ann. Math., 1945, 46, 578; A. Einstein, E. G. Straus. Ann. Math., 1946, 47, 731. (Статьи 127 и 130. — *Ред.*)

условия из соображения логической простоты:

$$\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{is}} = \frac{1}{2}(\Gamma^{s}_{is} - \Gamma^{s}_{si}) = 0, \tag{2}$$

$$\mathfrak{g}^{\hat{is}}_{,s} = \frac{1}{2}(\mathfrak{g}^{is} - \mathfrak{g}^{si})_{,s} = 0 \quad [\mathfrak{g}^{is} = g^{is}(-\det g_{ab})^{1/2}]. \tag{3}$$

Эти дополнительные условия усложняют вывод по сравнению с теорией гравитации; с формальной точки зрения они до сих пор не получили должного оправдания [2].

В теории симметричных полей существует другой способ убедиться в совместности уравнений поля ($R_{ik} = 0$). Мы должны получить четыре тождества, связывающие уравнения. Их можно вывести путем свертывания тождеств Бианки для тензора кривизны:

$$R_{iklm;\,\ddot{n}} = R_{iklm;\,n} + R_{ikmn;\,l} + R_{iknl;\,m} = 0.$$

В этой статье мы покажем, что аналогичные соображения можно использовать для обоснования уравнений поля и в нашем случае. Это поможет глубже разобраться в структуре несимметричных полей и продемонстрирует еще раз, что вывод уравнений для несимметричных полей действительно естествен.

2. Несимметричные тензоры

Для удобства приведем здесь основные соотношения для несимметричных тензоров.

Любой тензор A_{ik} можно записать как сумму симметричного тензора $A_{\underline{ik}}$ и антисимметричного $A_{\underset{\vee}{ik}}$, которые однозначно определяются соотношениями

$$A_{\underline{ik}} = \frac{1}{2}(A_{ik} + A_{ki}), \tag{4}$$

$$A_{\underset{\vee}{ik}} = \frac{1}{2}(A_{ik} - A_{ki}). \tag{5}$$

В излагаемой теории возникает усложнение, связанное с тем, что помимо фундаментального тензора g_{ik} существует сопряженный ему тензор

$$\tilde{g}_{ik} = g_{ki}. \tag{6}$$

---

[2] Вследствие соотношения (1) условия (2) и (3) эквивалентны. Это будет показано в разделе 5.

Остальные тензоры нашей теории определяются через g_{ik}. Если дан тензор A_{ik}, то под *сопряженным* к нему тензором $\widetilde{A}_{ik}$ мы разумеем тензор, полученный заменой g_{ik} в определении A_{ik} на g_{ki} [3]. [Это определение согласуется, в частности, с (6).] Мы будем интересоваться, в частности, тензорами, в определении которых g и $\widetilde{g}$ играют аналогичную роль; точнее, теми тензорами, для которых замена g_{ik} на g_{ki} приводит лишь к замене A_{ik} на A_{ki}, или

$$\widetilde{A}_{ik} = A_{ki}. \tag{7}$$

Тензор, обладающий таким свойством, называется *эрмитовым* [3]. В более общем виде: любая функция $A_{\ldots ik \ldots}$ от g_{ik} является эрмитовой по (ik), если

$$\widetilde{A}_{\ldots ik \ldots} = A_{\ldots ki \ldots} . \tag{7a}$$

Если величина Γ^l_{ik} определяется уравнением (1), то она эрмитова по (ik). Это другой способ формулировки принципа, на котором мы основывали выбор порядка индексов в соотношении (1) [4].

Мы говорим, что величина $A_{\ldots ik \ldots}$ антиэрмитова, если

$$\widetilde{A}_{\ldots ik \ldots} = - A_{\ldots ki \ldots} . \tag{8}$$

По аналогии с (4) и (5) мы можем однозначно представить любой тензор в виде разложения

$$A_{ik} = \frac{1}{2}(A_{ik} + \widetilde{A}_{ki}) + \frac{1}{2}(A_{ik} - \widetilde{A}_{ki}). \tag{9}$$

Здесь первый член — эрмитова часть A_{ik}, второй член — антиэрмитова.

Предстоит еще обобщить понятие ковариантной производной. В симметричной теории, если $A^{i}_{\ldots k \ldots}$ есть произвольный тензор, то величина

$$A^{i}_{\ldots k \ldots ;\, l} = A^{i}_{\ldots k \ldots ,\, l} \pm \ldots + A^{s}_{\ldots k \ldots}\Gamma^{i}_{sl} - A^{i}_{\ldots s \ldots}\Gamma^{s}_{kl} \pm \ldots$$

также является тензором. Это справедливо и в нашей теории, но в каждом члене (после первого) мы можем расположить нижние индексы двумя способами. Если индекс дифференцирования l должен быть справа в некотором члене, то мы будем ставить знак «+» под соответствующим

[3] Названия «сопряженный» и «эрмитов» можно оправдать следующим образом. Рассмотрим случай чисто мнимого $\check{g}_{ik}$. Тогда $\widetilde{g}$ действительно является сопряженным к g. Следовательно $\widetilde{A}$ является сопряженным к A и определение «эрмитовости» совпадает с обычным.

[4] Таким образом в нашей теории условие симметрии заменяется на условие эрмитовости. Величины g_{ik}, Γ^l_{ik}, R_{ik} — все эрмитовы по (ik).

тензорным индексом, если слева, то мы будем ставить знак «—» под индексом. В качестве иллюстрации приведем новую форму соотношения (1):

$$g_{\underset{+-}{ik};l} = g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\Gamma^s_{lk} = 0. \tag{1a}$$

Теоремы, относящиеся к ковариантному дифференцированию, можно перенести из симметричной теории, если аккуратно различать два типа производных. Поднимая индексы i и k в соотношении (1а), мы получаем

$$g^{\overset{ik}{+-}}{}_{;l} = g^{ik}_{,l} + g^{sk}\Gamma^i_{sl} + g^{is}\Gamma^k_{ls} = 0. \tag{1б}$$

Иногда удобно пользоваться даже такой записью:

$$A_{\underset{-+}{ik}lm;\,n} = A_{iklm,\,n} - A_{sk|lm}\Gamma_{ni} - A_{islm}\Gamma^s_{kn},$$

но следует помнить, что такого рода выражения не всегда являются тензорами, если знаки «+» и «—» не проставлены под каждым тензорным индексом.

Если через $\mathfrak{g}$ обозначить квадратный корень из определителя g_{ik}, взятого с обратным знаком, то $\mathfrak{g}$ будет скалярной плотностью. Тензорную плотность мы можем представить как произведение $\mathfrak{g}$ на тензор. Рассмотрим эти плотности. Умножим соотношение (1) на g^{ik} и просуммируем:

$$\frac{(\det g_{ik})_{,l}}{\det g_{ik}} - \Gamma^s_{sl} - \Gamma^s_{ls} = 0,$$

$$\frac{(\mathfrak{g}^2)_{,l}}{\mathfrak{g}^2} - 2\Gamma^s_{\underline{ls}} = 0. \tag{10}$$

$$\mathfrak{g}_{,l} - \mathfrak{g}\Gamma^s_{\underline{ls}} = 0.$$

Поэтому естественно определить [5] $\mathfrak{g}_{;l}$ как $\mathfrak{g}_{,l} - \mathfrak{g}\Gamma^s_{\underline{ls}}$. Если соотношение (1а) удовлетворено, то $\mathfrak{g}_{;l} = 0$. Если выполнение уравнения (1) не предполагать, то величины $g^{\overset{ik}{+-}}{}_{;l}$ и $g_{\underset{+-}{ik};l}$ не обращаются в нуль и имеют тензорный характер. Аналогично, $\mathfrak{g}_{;l}$ обладает свойствами векторной плотности.

---

[5] Поскольку $\Gamma^s_{sl} = \Gamma^s_{ls}$, два типа дифференцирования совпадают в применении к $\mathfrak{g}$. Этого и следовало ожидать, так как в данном случае нет индексов, под которыми нужно ставить знаки «+» или «—».

Мы можем теперь вычислить ковариантную производную от тензорной плотности по правилу дифференцирования произведений. Например,

$$\mathfrak{g}^{ik}_{;\,l} = (\mathfrak{g}g^{ik})_{;\,l} = \mathfrak{g}_{;\,l}g^{ik} + \mathfrak{g}g^{ik}_{;\,l}.$$

Эта величина обращается в нуль, если соотношение (1) выполняется. Или в более явном виде:

$$\mathfrak{g}^{ik}_{;\,l} = (\mathfrak{g}_{,\,l} - \mathfrak{g}\Gamma^{s}_{\underline{ls}})\,g^{ik} + \mathfrak{g}(g^{ik}_{,\,l} + g^{sk}\Gamma^{i}_{sl} + g^{is}\Gamma^{k}_{ls}) =$$

$$= \mathfrak{g}^{ik}_{,\,l} + \mathfrak{g}^{sk}\Gamma^{i}_{sl} + \mathfrak{g}^{is}\Gamma^{k}_{ls} - \mathfrak{g}^{ik}\Gamma^{s}_{ls}.$$

Отсюда получаем

$$\mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}_{;\,l} = \mathfrak{g}g^{\overset{ik}{+-}}_{;\,l} = 0.$$

Для полноты мы приведем следующее сокращенное обозначение:

$$A_{\underset{\cdots}{ikl}} = A_{ikl} + A_{kli} + A_{lik}.$$

3. Свойства обобщенной кривизны

Мы исходим из несимметричного Γ и строим тензор кривизны, как обычно, при помощи параллельного переноса вектора вокруг бесконечно малого элемента площади:

$$R^{i}_{klm} = \Gamma^{i}_{kl,m} - \Gamma^{i}_{km,\,l} - \Gamma^{i}_{sl}\Gamma^{s}_{km} + \Gamma^{i}_{sm}\Gamma^{s}_{kl}. \tag{11}$$

Прямое вычисление показывает, что тензор кривизны удовлетворяет следующим тождествам:

$$R^{\overset{i}{+}}_{\underset{+\cdot\,\cdot\quad\cdot}{klm;\,n}} = R^{i}_{\underset{\cdot\,\cdot\,\cdot}{klm,n}} + R^{s}_{\underset{\cdot\,\cdot}{klm}}\Gamma^{i}_{s\underset{\cdot}{n}} - R^{i}_{\underset{\cdot}{sl}\underset{\cdot}{m}}\Gamma^{s}_{k\underset{\cdot}{n}} = 0. \tag{12}$$

Из формулы (11) мы можем образовать по аналогии с симметричным случаем ковариантный тензор кривизны

$$R_{iklm} = g_{si}R^{s}_{klm}. \tag{13}$$

Выбор g_{si} вместо g_{is} может показаться произвольным, но в действительности это не так. Мы должны опустить индекс i в тождествах (12). Указанием на дифференцирование в отношении ковариантного индекса i служит знак «+» и его следует свертывать с таким же индексом, т. е. с первым индексом g. Лишь таким образом можно опустить индекс i в тождествах (12), не вводя дополнительных членов. Таким образом мы приходим к ковариантным тождествам:

$$g_{si}\overset{s}{R}{}^{+}_{\underset{+\cdot\cdot\ \ \cdot}{klm;\,n}} = (g_{\underset{-}{s}i}\overset{s}{R}_{\underset{+\cdot\cdot}{klm}})_{;\underset{\cdot}{n}} = R_{\underset{-+\cdot\ \cdot\ \ \cdot}{ik\,lm\,;n}} = 0. \qquad (14)$$

В дальнейшем нам также понадобятся свойства симметрии R_{iklm}. Из формулы (11) ясно, что тензор R^{i}_{klm} антисимметричен по индексам lm. Из соотношения (13) следует, что R_{iklm} обладает тем же свойством:

$$R_{iklm} = -R_{ikml}\,. \qquad (15)$$

Если мы продифференцируем соотношение (1) по индексу m и антисимметризуем результат по l и m, то получим

$$(g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^{s}_{il} - g_{is}\Gamma^{s}_{lk})_{,m} - (g_{ik,m} - g_{sk}\Gamma^{s}_{im} - g_{is}\Gamma^{s}_{mk})_{,l} = 0$$

или

$$-g_{sk,m}\Gamma^{s}_{il} - g_{is,m}\Gamma^{s}_{lk} + g_{sk,l}\Gamma^{s}_{im} + g_{is,l}\Gamma^{s}_{mk} -$$
$$- g_{sk}(\Gamma^{s}_{il,m} - \Gamma^{s}_{im,l}) - g_{is}(\Gamma^{s}_{lk,m} - \Gamma^{s}_{mk,l}) = 0.$$

Снова использовав соотношение (1) в первых четырех слагаемых и перегруппировав члены, находим

$$-g_{sk}(\Gamma^{s}_{il,m} - \Gamma^{s}_{im,l} - \Gamma^{s}_{tl}\Gamma^{t}_{im} + \Gamma^{s}_{tm}\Gamma^{t}_{il}) - g_{is}(\Gamma^{s}_{lk,m} -$$
$$- \Gamma^{s}_{mk,l} - \Gamma^{s}_{lt}\Gamma^{t}_{mk} + \Gamma^{s}_{mt}\Gamma^{t}_{lk}) = 0,$$

или, учитывая формулы (11) и (13), имеем:

$$R_{kilm} = -\widetilde{R}_{iklm}\,. \qquad (16)$$

Это равенство выражает антиэрмитовость R_{iklm} по индексам ik; таким способом антисимметричность R_{iklm} (в теории гравитации) обобщается на наш случай.

Из соотношений (14) сразу не видно, что величина $R_{\underset{-+\cdot\ \cdot\ \cdot}{iklm;n}}$ является тензором. Теперь нетрудно привести более полезную форму соотношений (14), из которой это обстоятельство легче усмотреть:

$$R_{\underset{-+\ -+}{ik\,lm;\,n}} + R_{\underset{-+++}{ikmn;\,l}} + R_{\underset{-+--}{ik\,nl;\,m}} = R_{\underset{-+\ \cdot\cdot\ \cdot}{ik\,lm;n}} - R_{ik\,sm}\Gamma^{s}_{nl} -$$
$$- R_{inls}\Gamma^{s}_{mn} - R_{iksn}\Gamma^{s}_{ml} - R_{ikms}\Gamma^{s}_{nj} - R_{iksl}\Gamma^{s}_{mn} - R_{ikns}\Gamma^{s}_{ml}\,.$$

Первый член в правой части этого равенства обращается в нуль в силу соотношений (14); последние шесть членов взаимно уничтожаются вследствие соотношений (15). Таким образом,

$$R_{\underset{-+-+}{ik\,lm;n}} + R_{\underset{-+++}{ikmn;\,l}} + R_{\underset{-+\ --}{ik\,nl;m}} = 0. \qquad (14a)$$

4. Уравнения поля

Мы можем теперь вывести тождества, связывающие уравнения поля. По аналогии с теорией гравитации выполним свертывание соотношения (14а) при помощи $g^{mi}\,g^{kl}$. [Подчеркнем, что последовательность индексов определяется характером соответствующих индексов в (14а) по отношению к дифференцированию.] Используя соотношения (15), мы приходим к соотношению

$$g^{mi}g^{kl}\,(R_{\underset{-+-+}{ik\;lm};\,n}-R_{\underset{-+++}{iknm};\,l}-R_{\underset{-+\,--}{ik\;ln};\,m})=0.$$

или, с учетом (1а), к

$$g^{kl}\,[g^{mi}R_{\underset{+-}{ik\,lm}}];_{n}-g^{kl}\,[g^{mi}R_{\underset{++}{iknm}}];_{\,l}-g^{mi}\,[g^{kl}R_{\underset{--}{ikln}}\,];_{m}=0. \tag{17}$$

Введем величины

$$R_{kl}=g^{mi}R_{iklm}\,, \tag{18}$$

$$S_{mi}=g^{kl}R_{iklm}\,, \tag{19}$$

где

$$R_{kl}=g^{mi}g_{si}R^{s}_{nlm}=\delta^{m}_{s}R^{s}_{klm}=\Gamma^{s}_{kl,s}-\Gamma^{s}_{ks,l}-\Gamma^{s}_{tl}\Gamma^{t}_{ks}+\Gamma^{s}_{ts}\Gamma^{t}_{kl}. \tag{18a}$$

Тогда получим

$$g^{kl}\,(R_{\underset{+-}{kl};\;n}-R_{\underset{++}{kn};\;l}-S_{\underset{--}{nl};\;k})=0. \tag{17a}$$

Найдем теперь связь между R и S. Из соотношений (15) и (16) следует, что

$$R_{kiml}=\widetilde{R}_{iklm}\,.$$

Умножим это равенство на $g^{im}\,(=\widetilde{g}^{mi})$ и просуммируем (т. е. выполним свертывание); тогда

$$S_{lk}=\widetilde{R}_{kl}. \tag{20}$$

Если бы тензор R был эрмитовым, то R и S совпадали бы тождественно. Это еще одна причина, чтобы требовать эрмитовости R_{kl}. Но из формулы (18а) мы видим, что R_{kl} имеет антиэрмитову часть [ср. равенство (9)]:

$$\frac{1}{2}(R_{kl}-\widetilde{R}_{lk})=\frac{1}{2}\,[(\Gamma^{s}_{sl,\,k}-\Gamma^{s}_{ks,l})-\Gamma^{t}_{kl}\,(\Gamma^{s}_{st}-\Gamma^{s}_{ts})]. \tag{21}$$

Из (10) следует, что

$$\Gamma^{s}_{ls}=\frac{g_{,\,l}}{g}=\left(\frac{1}{2}\ln|\det g_{ik}|\right)_{,\,l}. \tag{22}$$

Поэтому

$$\Gamma^s_{sl,\,k} - \Gamma^s_{ks,\,l} = \Gamma^s_{\underset{\vee}{sl},\,k} - \Gamma^s_{\underset{\vee}{ks},\,l}. \tag{21a}$$

$$\frac{1}{2}(R_{kl} - \widetilde{R}_{lk}) = -\frac{1}{2}\left(\Gamma^s_{\underset{\vee}{ls}} + \Gamma^s_{\underset{\vee}{ks},\,l} - \Gamma^t_{kl}\Gamma^s_{\underset{\vee}{ts}}\right).$$

Отсюда ясно, что тензор R_{kl} будет эрмитовым, если мы наложим на поле четыре условия:

$$\Gamma^s_{\underset{\vee}{is}} = 0. \tag{2}$$

Тогда из равенства (20) следует, что

$$S_{lk} = R_{lk}, \tag{20a}$$

и соотношение (17a) принимает вид

$$g^{kl}\,[R_{\underset{+-}{kl};\,n} - R_{\underset{++}{kn};\,l} - R_{\underset{--}{nl};\,k}] = 0. \tag{17б}$$

Эти тождества выполняются для всех полей, для которых Γ определено соотношением (1) и подчиняется условию (2). Мы могли бы прийти к заключению, что уравнения поля должны требовать обращения в нуль всех компонент R_{kl}. Однако эта система уравнений вместе с соотношениями (1) и (2) была бы переопределена. Можно получить более слабую систему, если рассмотреть, каким образом $R_{\underset{\vee}{kl}}$ входит в (17б). Вклад от $R_{\underset{\vee}{kl}}$ в это уравнение равен

$$g^{kl}\left[R_{\underset{\vee}{\overset{+-}{kl}};\,n} - R_{\underset{\vee}{\overset{++}{kn}};\,l} - R_{\underset{\vee}{\overset{--}{nl}};\,k}\right].$$

Это выражение можно записать в следующем виде:

$$g^{kl}\,[R_{\underset{\vee}{kl},\,n} - R_{\underset{\vee}{sl}}\Gamma^s_{kn} - R_{\underset{\vee}{ks}}\Gamma^s_{nl} - R_{\underset{\vee}{kn},\,l} + R_{\underset{\vee}{sn}}\,\Gamma^s_{kl} + R_{\underset{\vee}{ks}}\,\Gamma^s_{kl} -$$

$$- R_{\underset{\vee}{nl},\,k} + R_{\underset{\vee}{sl}}\Gamma^s_{kn} + R_{\underset{\vee}{ns}}\,\Gamma^s_{kl}] = g^{kl}\,[R_{\underset{\vee}{kl},\,n} - R_{\underset{\vee}{kn},\,l} - R_{nl,\,k}] =$$

$$= g^{kl}[R_{\underset{\vee}{kl},\,n} + R_{\underset{\vee}{nk},\,l} + R_{\underset{\vee}{ln},\,k}] = g^{kl}\,R_{\underset{\ddot{\vee}}{kl}\,\underset{\cdot}{n}}.$$

Поскольку $R_{\underset{\vee}{kl}}$ входит в уравнения лишь в комбинации $R_{\underset{\ddot{\vee}}{kl},\,\underset{\cdot}{n}}$, естественно выбрать уравнения поля для $R_{\underset{\vee}{kl}}$ в виде

$$R_{\underset{\ddot{\vee}}{kl},\,\underset{\cdot}{n}} = 0 \tag{23}$$

вместо уравнений $R_{kl} = 0$. Таким образом, мы приходим к системе уравнений поля:

$$\Gamma^s_{\underset{\vee}{is}} = 0, \tag{2}$$

$$R_{\underline{kl}} = 0, \tag{24}$$

$$R_{\underset{\ddot{\vee}}{kl},\,\underset{\cdot}{n}} = 0, \tag{23}$$

где Γ^l_{ik} определено соотношением

$$g_{\underset{+-}{ik};\,l} = 0. \tag{1a}$$

Приведенный вывод показывает, насколько естественно мы можем распространить общую теорию относительности на несимметричные поля. Предложенные ранее уравнения поля действительно являются естественными обобщениями гравитационных уравнений. Если бы мы были уверены, что выбор несимметричного тензора g_{ik} для описания структуры обобщенного поля правилен, то вряд ли могли бы возникнуть сомнения в справедливости указанных уравнений.

5. Вариационный принцип

Для сравнения мы приведем вывод наших уравнений на основе вариационного принципа. Формально этот вывод проще, чем изложенный выше, но его недостатком является использование двух, казалось бы, произвольных условий, налагаемых на поле:

$$\Gamma^s_{\underset{\vee}{is}} = 0, \tag{2}$$

$$g^{\overset{is}{\vee}}_{,s} = 0. \tag{3}$$

С другой стороны, соотношения (1) выводятся из вариационного принципа, и нам нет нужды их постулировать. В этом выводе удобно пользоваться методом Палатини. Как и в разделе 3, мы строим тензор кривизны

$$R^i_{klm} = \Gamma^i_{kl,\,m} - \Gamma^i_{km,\,l} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{km} + \Gamma^i_{sm}\Gamma^s_{kl}. \tag{11}$$

Обобщая метод Палатини на несимметричный случай, нетрудно убедиться, что

$$\delta R^i_{klm} = \Bigl(\delta \overset{i}{\Gamma}{}^{+}_{\underset{+-}{kl}}\Bigr)_{;m} - \Bigl(\delta \overset{i}{\Gamma}{}^{+}_{\underset{++}{km}}\Bigr)_{;\,l}. \tag{25}$$

Мы выбираем функцию Гамильтона следующим образом:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{kl}R_{kl}, \tag{26}$$

$$\mathfrak{H} = \delta^m_i \mathfrak{g}^{kl} R^i_{klm}. \tag{26a}$$

Варьируя равенство (26a) по Γ, получаем

$$\delta\mathfrak{H} = \delta^m_i \mathfrak{g}^{kl}\,(\delta R^i_{klm}) = \delta^m_i\, \mathfrak{g}^{kl}\,\bigl[(\delta \overset{i}{\Gamma}{}^{+}_{\underset{+-}{kl}})_{;m} - (\delta \overset{i}{\Gamma}{}^{+}_{\underset{++}{km}})_{;l}\,\bigr]. \tag{27}$$

Положим для краткости

$$\mathfrak{A}^m = \delta_i^m \mathfrak{g}^{kl} (\delta\Gamma_{kl}^i) = \mathfrak{g}^{kl} (\delta\Gamma_{kl}^m), \tag{28}$$

$$\mathfrak{B}^l = \delta_i^m \mathfrak{g}^{kl} (\delta\Gamma_{km}^i) = \mathfrak{g}^{kl} (\delta\Gamma_{km}^m). \tag{29}$$

Тогда равенство (27) можно записать в виде

$$\delta\mathfrak{H} = \overset{m}{\mathfrak{A}}{}^{+}_{;m} = -\,(\underset{+}{\overset{m}{\delta}}{}^{+}_{i}\ \overset{kl}{\mathfrak{g}}{}^{++})_{;m}\,(\delta\Gamma^i_{kl}) - \overset{l}{\mathfrak{B}}{}^{-}_{;l} + (\underset{+}{\overset{m}{\delta}}{}^{+}_{i}\ \overset{kl}{\mathfrak{g}}{}^{+-})_{;l}\ \delta\,(\Gamma^i_{km}). \tag{27a}$$

Мы должны образовать интеграл от $\delta\mathfrak{H}$. Рассмотрим вклад в этот интеграл, вносимый величиной $\overset{m}{\mathfrak{A}}{}^{+}_{;m}$ (см. раздел 2):

$$\overset{m}{\mathfrak{A}}{}^{+}_{;m} = \mathfrak{A}^m_{,m} + \mathfrak{A}^s\,\Gamma^m_{sm} - \mathfrak{A}^s\,\Gamma^m_{ms} = \mathfrak{A}^m_{,m} + \mathfrak{A}^m\Gamma^s_{\underset{\vee}{ms}}\,. \tag{30}$$

Первый член представляет собой обычную дивергенцию и, следовательно, не дает никакого вклада в интеграл. Чтобы вклад от второго члена обращался в нуль, необходимо, очевидно, ввести предположение (2). Налагая на поле условие (2), мы убеждаемся, что $\overset{m}{\mathfrak{A}}{}^{+}_{;m}$ (и, аналогично, $\overset{l}{\mathfrak{B}}{}^{-}_{;l}$) при интегрировании обращается в нуль. Поэтому мы можем опустить эти члены в равенстве (27а) и представить вариацию в виде

$$\delta\mathfrak{H} = \left[-\,(\underset{+}{\overset{m}{\delta}}{}^{+}_{i}\ \overset{kl}{\mathfrak{g}}{}^{+-})_{;m} + (\underset{+}{\overset{l}{\delta}}{}^{+}_{i}\ \overset{km}{\mathfrak{g}}{}^{+-})_{;m}\right](\delta\Gamma^i_{kl}) \tag{27б}$$

или, в силу того, что $\delta\,\underset{+}{\overset{l}{}}{}^{+}_{i;m}$ обращается в нуль,—

$$\delta\mathfrak{H} = \left[-\,\overset{kl}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;m} + \overset{km}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;m}\ \underset{+}{\overset{l}{\delta}}{}^{+}_{i}\right](\delta\Gamma^i_{kl}). \tag{27в}$$

Мы не можем утверждать, что величина в круглых скобках равна нулю, так как Γ^i_{kl} не являются независимыми, но связаны условием (2). Однако мы могли бы заключить об обращении в нуль величин, если бы они зависели только от 60 параметров, а не от 64 $\overset{kl}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;i}$. Но это действительно имеет место по следующей причине: в соотношении

$$\frac{1}{2}\left(\overset{kl}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;l} - \overset{lk}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;l}\right) = \overset{kl}{\mathfrak{g}}{}_{,\overset{\vee}{l}} - \mathfrak{g}^{kl}_{-}\Gamma^s_{\underset{\vee}{ls}} \tag{31}$$

все четыре величины в левой части обращаются в нуль, если на поле наложить условия (2) и (3). Следовательно, лишь 60 из 64 величин $\mathfrak{g}^{kl}_{\substack{+-\\ ;i}}$ независимы. То же самое должно относиться к величинам в квадратных скобках в правой части равенства (27в). Таким образом, из равенства (27в) мы можем заключить, что эти величины все равны нулю. Свертывая по индексам l и i, мы получаем, что $\mathfrak{g}^{km}_{\substack{+-\\ ;m}} = 0$. Следовательно, равны нулю $\mathfrak{g}^{kl}_{\substack{+-\\ ;i}}$ и вместе с ними величины $g^{kl}_{\substack{+-\\ ;i}}$ [см. соотношения (1б) и (1в)]. Следовательно, мы доказали, что

$$g_{\underset{+-}{ik};\, l} = 0. \tag{1а}$$

[Отсюда и из соотношения (31) следует, что условия (2) и (3) эквивалентны].

Нам нужно еще проварьировать (7) по $\mathfrak{g}^{ik}$. Но мы должны помнить, что $\mathfrak{g}^{ik}$ удовлетворяют соотношению (3). Это проще всего выполнить, полагая

$$\mathfrak{g}^{\overset{ik}{\vee}} = \mathfrak{g}^{iks}_{,s}\,, \tag{32}$$

$$\mathfrak{g}^{ik} = \mathfrak{g}^{\underline{ik}} + \mathfrak{g}^{iks}_{,s}$$

и варьируя по независимым величинам $\mathfrak{g}^{\underline{ik}}$ и $\mathfrak{g}^{iks}$. (Здесь $\mathfrak{g}^{iks}$ — тензорная плотность, антисимметричная по любой паре индексов.) В результате получаем уравнения

$$R_{\underset{\vee}{kl};n} = 0, \tag{23}$$

$$R_{\underline{kl}} = 0. \tag{24}$$

Этим завершается вывод уравнений поля.

В обоснование априорного предположения (2) мы можем указать, что оно необходимо и достаточно для эрмитовости тензора R_{kl} [см. соотношения (21а)].

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ И ПРОБЛЕМА ПРОСТРАНСТВА *

Характерной особенностью ньютоновской физики является то, что она пространству и времени, так же как и материи, должна приписывать независимое реальное существование, поскольку в ньютоновском законе движения появляется понятие ускорения. Но ускорение в этой теории может означать только «ускорение по отношению к пространству». Таким образом, ньютоново пространство должно мыслиться как «покоящееся» или, по крайней мере, как «неускоренное», чтобы ускорение, появляющееся в законе движения, можно было рассматривать как величину, имеющую физический смысл. Почти то же самое справедливо и для времени, которое также входит в определение понятия ускорения. Сам Ньютон и наиболее критически настроенные его современники чувствовали, что это не позволяет считать физической реальностью как само пространство, так и состояние движения последнего; но в то время не было другого выбора, если хотели, чтобы механика имела ясный смысл.

Приписание физической реальности пространству вообще и, особенно, пустому пространству — в самом деле требование слишком жестокое. Философы с давних времен всегда сопротивлялись такому требованию,

* *Relativität und Raumproblem.* Приложение V к немецкому изданию 1954 года книги «О специальной и общей теории относительности» (статья 43, том 1). (Впервые опубликовано в 15-м английском издании этой книги в 1952 году.—*Ред.*)
В предисловии (9 июня 1952 г.) к этому изданию Эйнштейн пишет:
«В этом издании я добавил Приложение V, в котором изложил свои взгляды на проблему пространства вообще и на изменения наших представлений о пространстве, возникающие под влиянием релятивистской точки зрения. Мне хотелось показать, что пространству и времени нельзя с необходимостью приписать раздельное существование, независимо от действительных объектов физической реальности. Физические объекты находятся не в пространстве, но эти объекты являются пространственно протяженными. На этом пути концепция „пустого пространства“ теряет свой смысл».

Декарт аргументировал это примерно так: пространство совпадает с протяженностью, а протяженность связана с телами; таким образом, нет пространства без тел и, следовательно, нет пустого пространства. Слабость этой аргументации заключается главным образом в следующем. Несомненно верно, что понятие протяженности обязано своим происхождением нашему опыту в расположении твердых тел в пространстве. Отсюда, однако, нельзя заключить, что понятие протяженности не может быть оправдано и в других случаях. Такое расширение понятий может быть обосновано косвенно по его значению для интерпретации эмпирических результатов. Поэтому утверждение, что протяженность обязательно связана с телами, очевидно, само по себе необоснованно. Однако позже мы увидим, что общая теория относительности подтверждает все же концепцию Декарта, хотя и другим путем. Декарта привело к его удивительно привлекательной точке зрения сознание того, что без настоятельной необходимости не следует приписывать реальность вещам, подобным пространству, которые не допускают «прямой проверки на опыте» [1].

Психологическое происхождение идеи пространства или необходимости ее далеко не так очевидно, как может показаться на основе привычного нам образа мышления. Геометры прошлого имели дело с мысленными объектами (прямая, точка, поверхность), но не с пространством как таковым, которое понадобилось позже, в аналитической геометрии. Однако идея пространства подсказывалась некоторыми простыми опытами. Допустим, что сделан ящик. Внутри ящика так разместим предметы, чтобы он был целиком заполнен. Возможность такого размещения предметов есть свойство материального объекта — «ящика», то, что с ним связано,— «ограниченное пространство». Это — нечто различное для разных ящиков, что можно естественно представить себе, независимо от того, имеются вообще какие-либо предметы в ящике в любой момент времени или нет. Когда в ящике нет предметов, его пространство «пустое».

До сих пор наше представление о пространстве связывалось с ящиком. Однако оказывается, что все возможные способы размещения, которые определяют пространство-ящик, не зависят от толщины стенок ящика. Нельзя ли тогда сделать эту толщину равной нулю, не теряя, однако, «пространства»? Естественность такого предельного процесса очевидна, и для нашего воображения пространство без ящика — вещь очевидная; она тем не менее становится нереальной, как только мы забываем происхождение этого понятия. Можно думать, что Декарт считал его несовместимым с представлениями о пространстве как о независимой от материальных объектов вещи, которая может существовать

[1] Это выражение не следует понимать слишком буквально.

в отсутствие материи [2]. (В то же самое время, это не мешало ему трактовать пространство как фундаментальное понятие его аналитической геометрии.) Ссылка на вакуум в ртутном барометре, конечно, обезоружила картезианцев. Но нельзя отрицать, что уже на этой примитивной стадии пространство понималось как самостоятельно существующий реальный объект.

Способы, которыми тела могут заполнять пространство (например, ящик), представляют собой предмет трехмерной эвклидовой геометрии; ее аксиоматическая структура, однако, легко вводит в заблуждение, так как она не подчеркивает, что геометрия не описывает реальные объекты.

Если теперь понятие пространства формируется намеченным выше образом и следует из опыта «заполнения» ящика, то это пространство прежде всего — *ограниченное* пространство. Однако это ограничение не представляется существенным, так как, очевидно, всегда можно ввести в рассмотрение ящик бóльших размеров, охватывающий ящик меньших размеров. На этом пути пространство представляется как нечто неограниченное.

Я не буду здесь рассматривать, как понятия трехмерности и «эвклидовости» пространства могут быть прослежены в сравнительно простых опытах. Прежде всего я буду рассматривать с других точек зрения роль понятия пространства в развитии физической мысли.

Если некоторый ящик s находится в состоянии относительного покоя, внутри некоторого ящика S бóльших размеров, то полость ящика s является частью полого пространства ящика S; при этом одно и то же «пространство», которое содержат оба ящика, принадлежит каждому из них. Однако, если s движется относительно S, это понятие становится менее простым. Тогда были склонны думать, что ящик s охватывает всегда одно и то же пространство, но различные части пространства ящика S. В таком случае становилось необходимым выделить для каждого ящика его особое пространство, которое не мыслится ограниченным, и предположить, что эти два пространства находятся в движении по отношению друг к другу.

Прежде чем такой сложный вопрос был осознан, пространство представлялось неограниченной средой, или вместилищем, в котором плавают материальные объекты. Теперь же надо вспомнить, что существует бесконечное число пространств, которые движутся относительно друг друга.

[2] Попытку же Канта устранить это затруднение путем отрицания объективности пространства трудно считать серьезной. Возможность заполнения внутреннего пространства ящика так же объективна, как и сам ящик и как объект, который может быть помещен внутри него.

Понятие пространства как чего-то, существующего объективно и независимо от вещей, относится к донаучному мировоззрению; оно сменяется идеей о существовании бесконечного числа пространств, движущихся относительно друг друга. Эта последняя оказывается логически неизбежной, но и она не может играть значительную роль в научной мысли.

Что можно сказать о психологической природе понятия времени? Это понятие, несомненно, связано с фактом «запоминания», а также с дифференциацией чувственных ощущений и воспоминанием о них. Сомнительно, дает ли нам что-либо психологически дифференциация чувственного опыта и воспоминание (или просто изображение). Всякий знает по своему опыту, что он часто сомневался в том, испытывал ли он что-то действительно или просто вообразил себе это. Вероятно, способность различать между этими возможностями впервые приходит как результат упорядочивающей деятельности мышления.

«Запоминание» упорядочивает ощущения и позволяет рассматривать «более ранние переживания» в сравнении с «переживаниями в настоящее время». Этот понятный принцип упорядочения вспоминаемого опыта и возможность его выполнения имели своим результатом субъективное понятие времени, т. е. такое понятие времени, которое относится к упорядочению переживаний индивидуума.

Что мы имеем в виду, вводя объективное понятие времени? Рассмотрим следующий пример. Лицо A («я») испытало: «Молния!». В то же самое время лицо A также обнаружило такое поведение лица B, что сопоставило поведение лица B со своим собственным ощущением молнии. Таким образом, A связывает с B свое ощущение молнии. У лица A возникает представление, что другие лица также участвуют в опыте с молнией. «Молния!» теперь истолковывается уже не как некоторое исключительно субъективное переживание, но как опыт других лиц (или в конечном счете только как «потенциальный опыт»). Таким образом ощущение «Молния!», которое первоначально доходило до сознания как некоторый «опыт», теперь интерпретируется как некоторое (объективное) «событие». Это как раз и есть полная сумма всех событий, которую мы имеем в виду, когда говорим о «реальном внешнем мире».

Мы видели, что мы сами склонны приписывать упорядочение во времени наших переживаний следующим образом. Если β позже, чем α, и γ позже, чем β, то γ также позже, чем α («последовательность событий»). Как обстоит теперь дело в этом отношении с «событиями», которые мы ассоциируем с переживаниями? На первый взгляд представляется естественным предположить, что существует порядок следования событий во времени, который согласуется с временны́м порядком переживаний (ощущений). Вообще это делалось бессознательно до тех пор, пока не стали возникать сомнения [3]. Чтобы прийти к идее объективного мира, необходимы еще дополнительные конструктивные понятия: событие локализовано не только во времени, но и в пространстве.

В предыдущих разделах [4] мы пытались описать, как понятия пространства, времени и события психологически могут быть связаны с переживаниями. С логической точки зрения они представляют собой свободные творения человеческого разума, инструменты мышления, которые должны служить для установления связи одних ощущений с другими, так чтобы их можно было лучше обозревать. Попытка осознать эмпирические источники этих фундаментальных понятий должна показать, в какой мере мы фактически привязаны к этим понятиям. Мы отдаем себе отчет в свободе, разумное использование которой в случае необходимости всегда является трудным делом.

Мы должны еще добавить нечто существенное к этому наброску, касающемуся психологической природы понятий пространства — времени — события (будем называть их более кратко понятиями «пространственного типа» в отличие от этих понятий в психологической сфере). Мы связывали понятие пространства с ощущениями, используя ящики и размещение материальных объектов в них. Таким образом, это формирование понятий уже предполагает понятие материальных объектов (например, «ящиков»). Таким же образом лица, которые были введены в рассмотрение при обсуждении объективного понятия времени, тоже играют роль материальных объектов. Поэтому мне кажется, что формирование понятия материального объекта должно предшествовать нашим понятиям времени и пространства.

Все эти понятия пространственного типа, вместе с такими, как «боль», «цель», «намерение», и другими понятиями из области психологии, принадлежат к донаучным представлениям. Теперь для физического мышления, как и для естественнонаучного мышления вообще, характерно то, что оно в принципе стремится обойтись *только* понятиями «пространственного типа» и старается выразить с помощью их все соотношения, имеющие форму законов. Физик пытается свести цвета и тона к частотам колебаний, психолог — мышление и боль к нервным процессам, так что психический элемент как таковой исключается из причинной зависимости в природе и, таким образом, нигде не выступает как независимое звено в причинных связях. Эта позиция, с точки зрения которой для понимания всех связей возможно в принципе использовать исключительно

[3] Например, порядок ощущений во времени, полученных акустическими средствами, может отличаться от временнóго порядка ощущений, полученных визуально, так что временнáя последовательность событий не может быть отождествлена с временной последовательностью ощущений.

[4] См. статью 43 тома I.— *Прим. ред.*

понятия «пространственного типа», несомненно и есть то, что в настоящее время понимается под термином «материализм» (после того, как «материя» утратила свою роль фундаментального понятия).

Зачем понадобилось ниспровергать с платоновских олимпийских высот фундаментальные представления естественнонаучной мысли и пытаться обнаружить их земное происхождение? Ответ: для того, чтобы освободить эти идеи от привязанного к ним «табу» и, таким образом, достичь большей свободы в формировании представлений и понятий. В том, что эта критическая концепция была введена, бессмертная заслуга принадлежит прежде всего Д. Юму и Э. Маху.

Наука приняла от донаучного мышления понятия пространства, времени и материального объекта (с важным частным случаем «твердого тела»), а затем модифицировала и уточнила их. Ее первым значительным достижением было построение эвклидовой геометрии. Аксиоматическая формулировка последней не должна была заставлять нас закрывать глаза на ее эмпирическое происхождение (возможности размещения твердых тел), в особенности на трехмерную природу пространства, а также на его эвклидовский характер (т. е. возможность заполнить без пробелов пространство одинаковыми «кубами»).

Тонкость понятия пространства возросла с открытием того, что абсолютно твердых тел не существует. Все тела являются упруго деформируемыми и изменяют свой объем с изменением температуры. Поэтому структуры, возможные расположения которых должны описываться эвклидовой геометрией, не могут быть оторваны от физических понятий. Но так как физика при установлении своих понятий в конце концов должна использовать геометрию, то эмпирическое содержание геометрии может быть сформулировано и проверено на опыте только в рамках всей физики.

В этой связи необходимо также подумать об атомистике и ее концепции конечной делимости; пространство не может быть измерено до субатомных размеров. Атомистика заставляет также отказаться, в принципе, от резкой и статически определенной ограничивающей поверхности твердых тел. Строго говоря, не существует *точных* законов для возможных расположений твердых тел, касающихся друг друга, даже в макроскопической области.

Несмотря на это, никто не думал отказываться от понятия пространства, ибо оно представляется необходимым в замечательно оправдывающейся совокупности естественных наук. Мах в девятнадцатом столетии был единственным, кто серьезно думал об исключении понятия пространства, которое он пытался заменить представлением о всей сумме расстояний между всеми материальными точками. (Он предпринял эту попытку для того, чтобы прийти к удовлетворительному пониманию инерции).

Поле

В механике Ньютона пространство и время играют двойственную роль. Прежде всего они выполняют для объектов, встречающихся в физике, роль носителя или рамы, относительно которой события описываются с помощью пространственных координат и времени. В принципе, вещество мыслится состоящим из «материальных точек», движения которых образуют физическое событие. Если вещество мыслится непрерывным, то это делается лишь в тех случаях, когда не желают или не могут описывать его дискретную структуру. В этом случае малые части (элементы объема) материи трактуются подобно материальным точкам, по крайней мере до тех пор, пока мы интересуемся только движениями, но не явлениями, которые в данный момент нельзя или ненужно относить к движениям (например, изменения температуры, химические процессы). Вторая роль пространства и времени была та, что они служили «инерциальной системой». Из всех мыслимых систем отсчета инерциальные системы потому считались привилегированными, что по отношению к ним справедлив закон инерции.

При этом существенным обстоятельством является то, что «физическая реальность», существующая независимо от познающих ее субъектов, представлялась состоящей по крайней мере в принципе, из пространства и времени, с одной стороны, и из постоянно существующих материальных точек, движущихся по отношению к пространству и времени,— с другой. Идея независимого существования пространства и времени может быть выражена следующим образом: если бы материя исчезла, то остались бы только пространство и время (своего рода сцена, на которой разыгрываются физические явления).

Эта точка зрения была преодолена в результате возникновения новых идей, которые сначала, казалось, не вносили никаких изменений в проблему пространства — времени, а именно, в результате появления *понятия поля* и возникновения требования — заменить им, в принципе, понятие частицы. В рамках классической физики понятие поля появлялось как вспомогательное понятие в тех случаях, когда вещество трактовалось как некоторый континуум. Например, при рассмотрении теплопроводности в твердом теле состояние этого тела описывалось путем задания температуры в каждой точке тела для каждого определенного момента времени. Математически это означает, что температура T представляется как функция пространственных координат и времени t (поле температуры). Закон теплопроводности представляется как некоторое локальное соотношение (дифференциальное уравнение), которое охватывает все частные случаи передачи тепла. Температура здесь представляет собой простой пример понятия поля. Это — некоторая величина (или некоторый комплекс величин), являющаяся функцией координат и времени. Другим примером может служить описание движения жидкости. В каждой точке и для любого момента времени существует скорость, которая количественно описывается ее тремя «компонентами» по осям системы координат (вектор). Здесь компоненты скорости в точке (поле компонент) также являются функциями координат (x, y, z) и времени (t).

Характерной особенностью упомянутых здесь полей является то, что они выступают только в пределах весомых масс; они служат только для описания состояния вещества. На ранней стадии развития понятия поля считалось, что там, где нет вещества, не может существовать и поля. Однако в первой четверти девятнадцатого столетия было показано, что явления интерференции и распространения света могут быть объяснены с изумительной ясностью, если свет рассматривать как волновое поле, совершенно аналогичное полю механических колебаний в некотором упругом твердом теле. Таким образом, возникла необходимость ввести поле, которое могло бы существовать в пустом пространстве, в отсутствие весомой материи.

Это состояние проблемы привело к парадоксальной ситуации, так как по самой своей природе понятие поля возникло для описания состояний внутри весомых тел. Это казалось естественным, так как утвердилось убеждение, что каждое поле должно рассматриваться как некоторое состояние, допускающее механическую интерпретацию, что, конечно, предполагает присутствие вещества. Таким образом вынуждены были предположить существование всюду, даже в пространстве, которое прежде считалось пустым, некоторого рода материи, которая была названа «эфиром».

Эмансипация понятия поля от предположения о его связи с механическим носителем нашла отражение в психологически наиболее интересных процессах развития физической мысли. В течение второй половины XIX столетия, в связи с исследованиями Фарадея и Максвелла, становилось все более ясным, что полевое описание электромагнитных процессов значительно превосходит трактовку на основе механических концепций материальной точки. Введя понятия поля в электродинамику, Максвелл успешно предсказал существование электромагнитных волн, принципиальное тождество которых со световыми волнами, уже ввиду равенства их скорости распространения, не вызывало сомнений. В результате этого оптика в принципе была поглощена электродинамикой. *Один* психологический эффект этого огромного успеха состоял в том, что концепция поля, в противоположность механической картине классической физики, постепенно приобретала все бóльшую самостоятельность.

Тем не менее сначала допускали, что электромагнитные поля должны интерпретироваться как состояния эфира, и усердно пытались объяснить эти состояния как механические. Но поскольку все усилия оказывались тщетными, в науке постепенно стали привыкать к идее отказа от такой механической интерпретации. Несмотря на это, все еще оставалось убеждение, что электромагнитные поля должны представлять собой состояния эфира; это продолжалось вплоть до начала XX столетия.

Эфирная теория повлекла за собой следующий вопрос: как ведет себя эфир с механической точки зрения по отношению к весомым телам? Принимает ли он участие в движении этих тел или его части остаются в покое относительно друг друга? Для решения этого вопроса было предпринято много остроумных экспериментов. В этой связи должны быть отмечены следующие важные факты: «аберрация» неподвижных звезд вследствие годичного движения Земли и «эффект Допплера» (влияние относительного движения звезд на частоту излучаемого ими света, достигающего нас). Результаты всех этих наблюдений и опытов (за исключением одного, эксперимента Майкельсона — Морли) были объяснены Г. А. Лоренцом на основе предположения, что эфир не принимает участия в движениях весомых тел и что части эфира вообще не перемещаются относительно друг друга. Таким образом, эфир выступил как бы воплощением абсолютно покоящегося пространства. Но Лоренц достиг гораздо большего. Он объяснил все известные в то время электромагнитные и оптические процессы в весомых телах на основе предположения, что влияние весомой материи на электрическое поле, и обратно, обусловлено исключительно тем фактом, что составляющие материю частицы несут электрические заряды, которые участвуют в движении частиц. Что же касается эксперимента Майкельсона — Морли, то Г. А. Лоренц показал, что полученный результат по крайней мере не противоречит теории покоящегося эфира.

Несмотря на все эти замечательные успехи, состояние теории все еще не было полностью удовлетворительным по следующим причинам. Согласно классической механике, в справедливости которой, с высокой степенью точности, можно было бы не сомневаться, все инерциальные системы или инерциальные «пространства» эквивалентны для формулировки законов природы, т. е. законы природы инвариантны относительно перехода от одной инерциальной системы к другой. Электромагнитные и оптические *эксперименты* с высокой точностью говорили о том же. Но из основ электромагнитной *теории* следовало, что должно отдаваться предпочтение некоторой особой инерциальной системе отсчета, а именно системе, покоящейся относительно светового эфира. Такое понимание теоретических основ совершенно неудовлетворительно. Возник вопрос: нет ли модификаций этих основ, которые бы сохраняли, подобно классической механике, эквивалентность инерциальных систем (специальный принцип относительности)?

Ответом на этот вопрос явилась специальная теория относительности. Она приняла от теории Максвелла — Лоренца предположение о постоянстве скорости света в пустом пространстве. Чтобы согласовать это предположение с эквивалентностью инерциальных систем (специальный принцип относительности), необходимо было отказаться от идеи абсолютного характера одновременности; кроме того, для перехода от одной инерциальной системы к другой служили преобразования Лоренца для времени и пространственных координат. Все содержание специальной теории относительности заключено в постулате: законы природы инвариантны относительно преобразований Лоренца. Важное значение этого требования состоит в том, что оно определенным образом ограничивает возможные законы природы.

Каково отношение специальной теории относительности к проблеме пространства? В первую очередь мы должны предостеречь от того мнения, что четырехмерность реальности была введена впервые этой теорией. Даже в классической механике «положение» события определяется четырьмя числами: тремя пространственными координатами и одной временно́й координатой; таким образом, вся совокупность физических «событий» мыслится как бы погруженной в четырехмерное непрерывное многообразие (континуум). Но сообразно с классической механикой этот четырехмерный континуум распадается объективно на одномерное временно́е и на трехмерное пространственное сечения, причем лишь последнее из них содержит одновременные события. Это «расщепление» является одним и тем же для всех инерциальных систем. Одновременность двух определенных событий по отношению к одной инерциальной системе влечет за собой одновременность этих событий по отношению ко всем инерциальным системам. Это есть то, что имеют в виду, когда говорят об абсолютном времени в классической механике. Согласно же специальной теории относительности это уже не так. Хотя по отношению к некоторой определенной инерциальной системе существует совокупность событий, одновременных с каким-либо наблюдаемым событием, эта совокупность уже не будет независимой от выбора инерциальной системы. Четырехмерный континуум не распадается объективно на сечения, среди которых были бы сечения, содержащие все одновременные события; для пространственно протяженного мира понятие «сейчас» теряет свой объективный смысл. В связи с этим пространство и время должны рассматриваться как объективно нераспадающийся четырехмерный континуум, если желают выразить содержание объективных отношений без ненужного произвола

Тем, что специальная теория относительности показала физическую эквивалентность всех инерциальных систем, она доказала несостоятельность гипотезы покоящегося эфира. Поэтому необходимо было отказаться от идеи, что электромагнитное поле должно рассматриваться как состояние некоторого материального носителя. Таким образом, поле становится несводимым элементом физического описания, несводимым в том же смысле, что и понятие материи в теории Ньютона.

До сих пор мы обсуждали вопрос о том, в какой мере понятия пространства и времени были *модифицированы* специальной теорией относительности. Теперь же сконцентрируем наше внимание на тех элементах, которые эта теория приняла от классической механики. В ней законы природы претендуют на справедливость только в том случае, когда в качестве основы пространственно-временно́го описания принята инерциальная система. Закон инерции и принцип постоянства скорости света справедливы только по отношению к *инерциальной системе*. Можно также требовать, чтобы законы поля имели физический смысл и были справедливы только по отношению к инерциальным системам. Таким образом, как и в классической механике, пространство здесь является независимой составной частью в представлении физической реальности. Если мы представим себе, что материя и поле удалены, то остается (инерциальное) пространство, или, точнее говоря, это пространство вместе со связанным с ним временем. Эта четырехмерная структура (пространство Минковского) мыслится как носитель материи и поля. Инерциальные пространства, вместе со связанными с ними временами, являются привилегированными четырехмерными координатными системами, связанными линейными преобразованиями Лоренца. Так как в этой четырехмерной структуре не существует каких-либо сечений, которые объективно представляли бы «сейчас», понятия события и становления не исключаются полностью, но усложняются. Поэтому представляется более естественным мыслить физическую реальность как четырехмерные события вместо *развития* событий трехмерных.

Это жесткое четырехмерное пространство специальной теории относительности есть до некоторой степени аналог неподвижного трехмерного эфира Г. А. Лоренца. Для этой теории справедливо также следующее утверждение: описание физических состояний постулирует пространство как заданное с самого начала и существующее независимо. Таким образом, даже эта теория не рассеяла беспокойства Декарта, связанного с независимым или, быть может, *априорно* существующим «пустым пространством». Действительная цель нашего обсуждения — показать, до какой степени эти сомнения преодолены общей теорией относительности.

Понятие пространства в общей теории относительности

Эта теория возникла первоначально из попытки понять равенство инертной и тяжелой масс. Мы исходим из инерциальной системы S_1, пространство которой, с физической точки зрения, является пустым. Иными словами, в рассматриваемой части пространства не существует ни материя (в обычном смысле), ни поле (в смысле специальной теории относительности). Пусть по отношению к системе S_1 равноускоренно движется вторая система отсчета S_2. Тогда система S_2 будет неинерциальной. По отношению к S_2 каждая пробная масса должна двигаться с ускорением, которое не зависит от ее физической и химической природы. Поэтому относительно S_2 существует картина, которую, по крайней мере в первом приближении, нельзя отличить от гравитационного поля. Таким образом, с наблюдаемыми фактами совместима следующая концепция: система S_2 эквивалентна некоторой «инерциальной системе», в отличие от S_1, находящейся в (однородном) гравитационном поле (природой которого, в этой связи, не следует заниматься). Итак, когда в теорию введено гравитационное поле, инерциальная система теряет свое объективное значение, если предположить, что такой «принцип эквивалентности» может быть распространен на любое относительное движение любой системы отсчета. Если на основе этой фундаментальной идеи можно создать последовательную теорию, то само собой должен удовлетворяться надежно установленный эмпирический факт равенства инертной и тяжелой масс.

Нелинейные преобразования четырех координат, рассматриваемые в четырехмерном пространстве, соответствуют переходу от S_1 к S_2. Теперь возникает вопрос: какого рода нелинейные преобразования допустимы, или, как должно быть обобщено преобразование Лоренца? Для ответа на этот вопрос решающее значение имеет следующее рассуждение.

Инерциальной системе прежней теории мы приписываем такое свойство: разности координат измеряются покоящимися «твердыми» измерительными стержнями, а разности значений времени — покоящимися часами. Первое предположение дополняется другим предположением, а именно, что для относительного расположения измерительных стержней в покое выполняются теоремы эвклидовой геометрии о «расстояниях». Тогда из результатов специальной теории относительности, путем элементарных рассуждений, приходим к заключению, что оказывается утраченной прямая физическая интерпретация координат для системы отсчета (S_2), ускоренной относительно инерциальной системы (S_1). Но если это так, то координаты выражают только порядок или степень «близости», а следовательно, и размерность пространства, но не выражают никаких его метрических свойств. Мы пришли, таким образом, к распространению преобразований на произвольные непрерывные преобразования [5]. Это заключает в себе общий принцип относительности: законы природы должны быть ковариантны относительно произвольных непрерывных преобразований координат. Это требование (в сочетании с требованием наибольшей возможной логической простоты этих законов) ограничивает рассматривавшиеся законы природы несравнимо сильнее, чем специальный принцип относительности.

Такой ход мыслей существенно основан на понятии поля как независимом понятии. Так как условия, существующие по отношению к S_2, интерпретируются как гравитационное поле, несомненно наличие масс, которые создают это поле. На основании этого хода мыслей можно также понять, почему законы чисто гравитационного поля более непосредственно связаны с идеей общей относительности, чем законы полей более общего вида (например, электромагнитного поля). Именно, мы имеем хорошую основу для предположения, что «свободное от поля» пространство Минковского представляет собой возможный частный случай и даже простейший мыслимый частный случай. Что касается метрических свойств такого пространства, то оно характеризуется тем, что $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ есть квадрат измеренного единичным масштабом пространственного расстояния между двумя бесконечно близкими точками трехмерного сечения «пространственного типа» (теорема Пифагора), тогда как dx_4 есть измеренный совместно с (x_1, x_2, x_3) соответствующим временным масштабом интервал времени между двумя событиями. Как нетрудно показать с помощью преобразований Лоренца, все это просто означает, что объективный метрический смысл придается величине

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2. \tag{1}$$

Математически это означает, что величина ds^2 инвариантна по отношению к преобразованиям Лоренца.

Если теперь, в смысле общего принципа относительности, пространство [ср. формулу (1)] подвергается произвольному непрерывному преобразованию координат, то величина ds, имеющая объективный смысл, выражается в новой системе координат соотношением

$$ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k, \tag{1a}$$

где должно быть выполнено суммирование по индексам i и k для всех

[5] Эта не вполне точная формулировка, вероятно, достаточна здесь.

комбинаций 11, 12, . . ., 44. Компоненты g_{ik} теперь уже не константы, а функции координат, которые определены произвольно выбранным преобразованием. Тем не менее, компоненты g_{ik} являются не произвольными функциями новых координат, но функциями такого рода, что форма (1а) может быть преобразована снова в форму (1) непрерывным преобразованием четырех координат. Чтобы это было возможно, функции g_{ik} должны удовлетворять определенным общековариантным соотношениям, которые были выведены Б. Риманом более чем за полстолетия до формулирования общей теории относительности («условие Римана»). Согласно принципу эквивалентности, соотношение (1а) описывает в общековариантной форме гравитационное поле специального вида, если функции g_{ik} удовлетворяют условию Римана.

Отсюда следует, что уравнения чисто гравитационного поля общего вида должны быть удовлетворены, если выполняется условие Римана; но они должны быть слабее, чем условия Римана. Таким путем закон чисто гравитационного поля практически полностью определяется; мы не будем здесь обосновывать этого более детально.

Мы в состоянии теперь видеть, насколько переход к общей теории относительности видоизменяет понятие пространства. В соответствии с классической механикой и согласно специальной теории относительности, пространство (пространство-время) существует независимо от материи или поля. Для описания того, что заполняет пространство и зависит от координат, нужно, чтобы пространство-время, или инерциальная система, с ее метрическими свойствами, мыслились существующими с самого начала, так как иначе описание «того, что заполняет пространство», не имело бы смысла [6]. С другой стороны, согласно общей теории относительности, не существует отдельно пространство, как нечто противоположное «тому, что заполняет пространство» и что зависит от координат. Таким образом, чисто гравитационное поле может быть описано с помощью g_{ik} (как функций координат), путем решения уравнений гравитации. Если мы представим себе, что гравитационное поле, т. е. функции g_{ik}, устранено, то не останется не только пространства типа (1), но и вообще *ничего*, в том числе и «топологического пространства». В самом деле функции g_{ik} описывают не только поле, но и в то же самое время топологические и метрические структурные свойства многообразия. Пространство типа (1) с точки зрения общей теории относительности не есть пространство без поля, но представляет собой частный случай поля

[6] Если мы представим себе, что «то, что заполняет пространство» (например, поле) удалено, то все еще оставалось бы метрическое пространство, соответствующее форме (1), которое определяло бы также инерциальное поведение помещенного в него пробного тела.

g_{ik}, когда — в определенной системе координат, которая сама по себе не имеет объективного значения — функции g_{ik} имеют значения, независящие от координат. Пустое пространство, т. е. пространствобез поля, не существует. Пространство-время существует не само по себе, но только как структурное свойство поля.

Таким образом, Декарт был не так далек от истины, когда полагал, что существование пустого пространства должно быть исключено. Эта точка зрения действительно казалась абсурдной до тех пор, пока физическую реальность видели исключительно в весомых телах. Потребовалась идея поля, как реального объекта в комбинации с общим принципом относительности, чтобы показать истинную сущность идеи Декарта: не существует пространство, «свободное от поля».

Обобщенная теория гравитации

На основе общей теории относительности можно построить теорию чисто гравитационного поля, поскольку мы можем быть уверены в том, что «свободное от поля» пространство Минковского с его метрикой, соответствующей форме (1), удовлетворяет общим законам поля. Из этого частного случая закон тяготения следует в результате обобщения, которое практически свободно от произвола. Дальнейшее развитие теории определяется общим принципом относительности не столь однозначно; в течение последних десятилетий были предприняты попытки в различных направлениях. Общим для всех этих попыток было представление физической реальности как некоторого поля, которое является обобщением гравитационного поля и полевые законы которого являются обобщением закона чисто гравитационного поля. После долгих поисков (в которых приходилось идти ощупью) я думаю, что теперь нашел [7] наиболее естественную форму этого обобщения, но еще не в состоянии выяснить, может ли этот обобщенный закон выдержать сравнение с опытными фактами.

Для общей теории вопрос о законах этого особого поля является вторичным. Главный вопрос в настоящее время заключается в следующем: может ли теория поля рассмотренного здесь вида вообще привести нас к цели? Такая теория должна описать исчерпывающим образом физи-

---

[7] Это обобщение можно охарактеризовать следующим образом. В соответствии с их происхождением из пустого «пространства» Минковского, функции g_{ik} чисто гравитационного поля обладают свойством симметрии: $g_{ik} = g_{ki}$ ($g_{12} = g_{21}$ и т. д.). Обобщенное поле есть поле того же рода, но не обладающее этим свойством симметрии. Вывод закона поля полностью аналогичен выводу его в частном случае чистой гравитации.

ческую реальность как поле. Современное поколение физиков склонно ответить на этот вопрос отрицательно. Соглашаясь с современной формой квантовой теории, они считают, что состояние системы не может быть охарактеризовано непосредственно, но только косвенно, путем установления статистического распределения результатов измерений над системой. Преобладает убеждение, что надежно установленный экспериментально дуализм природы (корпускулярные и волновые свойства) может быть понят только на пути такого «ослабления» понятия реальности. Я думаю, что такая далеко идущая теоретическая уступка пока еще не оправдывается нашими фактическими знаниями и что не следует отказываться идти до конца по пути релятивистской теории поля.

ОТВЕТ ЧИТАТЕЛЯМ «ЕЖЕМЕСЯЧНИКА ПОПУЛЯРНОЙ НАУКИ»*

Не моя вина, что читатели получают преувеличенное представление о важности достигнутых результатов. В этом скорее повинны авторы популярных статей и в особенности корреспонденты газет, которые преподносят все насколько возможно сенсационно.

Разрешите мне ответить на Ваш вопрос.

Путем обобщения релятивистских уравнений гравитации, т. е. чисто математически, я пытался найти простые уравнения для полного поля. Я надеялся, что полученные таким образом уравнения будут справедливы для описания реального мира. Чтобы решить, в какой мере это справедливо, необходимо найти решения этих уравнений, которые описывали бы известные из опыта факты. До сих пор ни я, ни кто-либо другой не добились успеха в этом направлении; поэтому нет никакой возможности ответить на вопрос, является теория «верной» или нет. Причина этого заключается в сложности математической задачи.

Приведу пример, чтобы проиллюстрировать для неспециалиста создавшееся положение. Ньютоновская теория движения планет основана на эмпирических законах движения планет вокруг Солнца, открытых Кеплером. Эти простые законы достаточно точны, поскольку масса Солнца велика, а масса планет мала, так что взаимодействие планет между собой почти не возмущает их движения. Ньютон гипотетически предположил для них закон движения тел под действием силы притяжения. Эта теория была основана на нескольких удивительно простых предположениях. Чтобы показать справедливость теории, ему надо было вычислить траектории планет в соответствии с этой гипотезой. Тем самым можно было выяснить, согласуются ли вычисленные траектории с теми, которые дают эмпирические законы Кеплера. Вычисление траекторий на основе простых гипотез

* *Doctor Einstein Replies to PSM Readers.* Popul. Sci. Monthly, 1952, 160, N 4, 18.

было трудной задачей, но гений Ньютона справился с ней. Таким образом, теория Ньютона получила подтверждение.

Однако если бы планетная система состояла из тел примерно одинаковой массы, находящихся примерно на одинаковых расстояниях одно от другого, то траектории этих тел имели бы настолько сложную форму, что их нельзя было бы ни определить и описать эмпирически, ни вычислить на основе теории. Если бы такая ситуация действительно существовала, мы, возможно, никогда бы не узнали, справедлива теория Ньютона или нет.

Заметка представляет собой ответ на письмо одного из читателей журнала, который спрашивал, почему ничего не слышно о развитии новой теории Эйнштейна, которую газеты преподносили на первых полосах как сенсацию.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ *

ПРИЛОЖЕНИЕ II К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ РАБОТЫ «СУЩНОСТЬ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ»

Содержание изложенной выше общей теории относительности формально выражается уравнением

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = T_{ik}. \tag{1}$$

Левая часть этого уравнения зависит только от симметричного тензора g_{ik}, описывающего как метрические свойства пространства, так и гравитационное поле. Правая часть уравнения (1) феноменологически описывает все источники гравитационного поля. Тензор T_{ik} представляет энергию, которая создает гравитационное поле, но сама не имеет гравитационного характера, как, например, энергия электромагнитного поля, энергия, связанная с плотностью вещества и т. д. При составлении тензора T_{ik} были использованы представления дорелятивистской физики, которые только a posteriori были согласованы с общим принципом относительности.

Такой дуалистической трактовки единого поля нельзя было избежать на первой стадии развития теории относительности. Было, однако, очевидно, что это только предварительный подход к проблеме. Отправной точкой теории явилось установление единства тяготения и инерции (принцип эквивалентности). Из этого принципа и из установленного факта, что свет определенным образом ведет себя в «пустом пространстве», следовало, что свойства последнего описываются симметричным тензором g_{ik}. Однако принцип эквивалентности не позволяет ответить на вопрос о том, каков наиболее общий математический аппарат, на котором следует строить те-

* *Generalization of Theory of Gravitation.* The Meaning of Relativity, fourth edition. Prinston, 1953 (Статья 60. Приложение II] появилось впервые во 2-м издании «Сущности теории относительности». Для 4-го издания оно было переработано.— *Прим. ред.*).

орию единого поля, охватывающего всю физическую реальность. В этом случае наши познания в области физики не позволяют сделать однозначного выбора, подобного тому, который следовал из эквивалентности инерции и тяготения для частного случая чисто гравитационного поля. Единственным указанием, которое можно извлечь из опыта, является смутное ощущение, что полное поле должно включать в себя нечто подобное электромагнитному полю Максвелла.

В результате попытка последовательного обобщения общей теории относительности ведет к явно туманной формулировке проблемы: найти структуру поля, являющуюся естественным обобщением симметричного тензора, и отыскать систему уравнений поля этой структуры, которые представляли бы естественное обобщение уравнений чистой гравитации

$$R_{ik} = 0. \tag{2}$$

Сейчас я попытаюсь дать решение этой проблемы, которое кажется мне в высшей степени убедительным, хотя вследствие математических трудностей еще не найдено практического пути для сравнения результатов теории с экспериментальными данными.

§ 1. Структура поля

Первая проблема заключается в следующем: каков естественный путь обобщения структуры поля? Что является естественным обобщением симметричного тензора g_{ik}?

Решение, сразу же приходящее в голову, заключается в замене симметричного тензора поля несимметричным. Именно такая структура поля кладется в основу излагаемой ниже теории.

Легко понять, почему этот путь, кажущийся на первый взгляд таким естественным, до последнего времени никогда серьезно не рассматривался. Если разложить тензор g_{ik} на его симметричную и антисимметричную части ($\underline{g_{ik}}$ и $\underset{\vee}{g_{ik}}$ соответственно) согласно уравнению

$$g_{ik} = \underline{g_{ik}} + \underset{\vee}{g_{ik}}, \tag{3}$$

то мы увидим, что каждая из этих двух частей сама по себе является тензором, т. е. при преобразовании координат компоненты каждой из частей преобразуются независимо от компонент другой части. Другими словами, несимметричный тензор g_{ik}, с точки зрения лоренцовой группы, не является неприводимым, а представляет собой произвольную и необоснованную комбинацию двух величин различной природы.

Это должно казаться веским возражением. Следует заметить, однако, что теоретико-групповые соображения отнюдь не являются единственным критерием для суждения о «единообразии» концепции несимметричного тензора поля. Действительно, в теории симметричного тензорного поля (теория Римана) очень важную роль играет определитель, составленный из g_{ik}. В частности, с его помощью становится возможным связать контравариантный тензор g^{ik} с ковариантным тензором g_{ik} согласно соотношению

$$g_{is}g^{it} = \delta_s^t = g_{si}g^{ti}, \tag{4}$$

где δ_s^t — тензор Кронекера. Эта связь, играющая фундаментальную роль в теории симметричного поля, может быть немедленно перенесена на случай несимметричного поля; в последнем случае, однако, необходимо сохранять порядок индексов. Это указывает на то, что, несмотря на приведенное выше возражение, введение несимметричного тензорного поля является естественным обобщением симметричного поля. Соотношение (4) позволяет поднимать и опускать индексы у тензора; однако в случае несимметричного поля эта операция уже не является однозначно определенной априори (A_sg^{sk} и A_sg^{ks} не равны друг другу), даже если задан «фундаментальный тензор».

§ 2. Аффинное смещение и абсолютное дифференцирование в случае несимметричного поля

Понятие бесконечно малого параллельного переноса вектора

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{st}A^s dx^t, \tag{5а}$$

$$\delta A_i = \Gamma^s_{it}A_s dx^t, \tag{5б}$$

может быть немедленно распространено и на нашу обобщенную теорию. При этом приходится, однако, считать, что Γ несимметричен по двум нижним индексам, так что нужно постулировать разумное соотношение между g_{ik} и Γ^l_{ik}.

Из (5а) и (5б) следует, что [1]

$$A^i_{,k} + A^s\Gamma^i_{sk} \tag{6а}$$

и

$$A_{i,k} - A_s\Gamma^s_{ik} \tag{6б}$$

[1] В дальнейшем запятая будет всегда означать частное дифференцирование например, $A^i_{,k} \equiv \dfrac{\partial A^i}{\partial x^k}$.

имеют тензорный характер, так же как и в случае симметричного Γ^l_{ik}. Из определений (5), аналогично случаю симметричного Γ, вытекает закон преобразования величин Γ^l_{ik}

$$\Gamma^{l*}_{ik} = \frac{\partial x^{l*}}{\partial x^t} \frac{\partial x^r}{\partial x^{i*}} \frac{\partial x^s}{\partial x^{k*}} \Gamma^t_{rs} - \frac{\partial^2 x^{l*}}{\partial x^a \partial x^b} \frac{\partial x^a}{\partial x^{i*}} \frac{\partial x^b}{\partial x^{k*}}. \tag{7}$$

Разлагая Γ^l_{ik} соответственно симметрии нижних индексов на

$$\Gamma^l_{ik} = \Gamma^l_{\underline{ik}} + \Gamma^l_{\underset{\vee}{ik}}, \tag{8}$$

легко показать, что получаемые две величины преобразуются независимо друг от друга. Переставляя в (6б) индексы i и k и вычитая полученный таким образом тензор из (6б), мы получаем тензор

$$(A_{i,\ k} - A_{k,\ i}) - A_s(\Gamma^s_{ik} - \Gamma^s_{ki}).$$

Выражение в первой скобке имеет тензорный характер; поэтому то же должно быть справедливо для $A_s\Gamma^s_{\underset{\vee}{ik}}$, а следовательно, и для $\Gamma^s_{\underset{\vee}{ik}}$. Тогда из (6б) следует, что

$$A_{i,\ k} - A_s\Gamma^s_{\underline{ik}}$$

также является тензором. Следовательно, $\Gamma^s_{\underline{ik}}$ само является (симметричным) полем смещений.

С теоретико-групповой точки зрения, Γ^l_{ik} не является однородным образованием, так как с помощью разложения (8) его можно разбить на симметричное поле смещений $\Gamma^l_{\underline{ik}}$ и на антисимметричный тензор $\Gamma^l_{\underset{\vee}{ik}}$ — аддитивную добавку, на первый взгляд кажущуюся нежелательной. Однако мы сейчас увидим, что, так же как и в аналогичном случае несимметричного тензора g_{ik}, это возражение не имеет решающего значения.

Если ввести определение

$$\widetilde{\Gamma}^l_{ik} = \Gamma^l_{ki}, \tag{9}$$

то из (9) следует, что

$$\widetilde{\Gamma}^l_{ik} = \Gamma^l_{\underline{ik}} + (-\Gamma^l_{\underset{\vee}{ik}}).$$

Из формулы преобразования (7) мы видим, что $\widetilde{\Gamma}^l_{ik}$ также является полем смещений. Транспонируя g_{ik}, можно таким же образом, конечно, построить и тензор $\widetilde{g}_{ik} = g_{ki}$. В дальнейшем окажется важным рассматривать g, Γ и транспонированные величины $\widetilde{g}$ и $\widetilde{\Gamma}$ совместно.

Поскольку наряду со смещением Γ возможно смещение $\widetilde{\Gamma}$, то, согласно формулам (6а) и (6б), имеются две различные возможности абсолютного дифференцирования, которые следует рассматривать отдельно. Соответственно этому мы вводим следующие определения:

$$\left.\begin{aligned} A^{\overset{i}{+}}{}_{;k} &= A^i_{,k} + A^s\Gamma^i_{sk} \\ A^{\overset{i}{-}}{}_{;k} &= A^i_{,k} + A^s\Gamma^i_{ks} \end{aligned}\right\}, \tag{10а}$$

$$\left.\begin{aligned} A_{\underset{+}{i};\,k} &= A_{i,\,k} - A_s\Gamma^s_{ik} \\ A_{\underset{-}{i};\,k} &= A_{i,\,k} - A_s\Gamma^s_{ki} \end{aligned}\right\}. \tag{10б}$$

Далее, так как иногда оказывается, что ковариантные производные содержат симметризованное Γ, то мы определим еще

$$A^{\overset{i}{0}}{}_{;k} = A^i_{,k} + A^s\Gamma^i_{\underline{sk}}\,, \tag{11а}$$

$$A_{\underset{0}{i};\,k} = A_{i,\,k} - A_s\Gamma^s_{\underline{ik}}. \tag{11б}$$

При абсолютном дифференцировании, так же как и в случае симметричного Γ, выполняются правила произведений и сумм, из которых, в частности, следуют правила дифференцирования тензоров более высокого ранга.

Следует обратить внимание на следующее обстоятельство, не имеющее аналога в случае симметричного Γ: ковариантная производная тензора Кронекера δ^k_i обращается в нуль только в случаях

$$\delta_{\underset{+}{i}}{}^{\overset{k}{+}}{}_{;l};\ \delta_{\underset{-}{i}}{}^{\overset{k}{-}}{}_{;l};\ \delta_{\underset{0}{i}}{}^{\overset{k}{0}}{}_{;l},$$

тогда как, например,

$$\delta_{\underset{+}{i}}{}^{\overset{k}{-}}{}_{;l} = 0 + \delta^s_i\,\Gamma^k_{ls} - \delta^k_s\,\Gamma^s_{il} = 2\Gamma^k_{\underset{\vee}{li}} \neq 0.$$

Свертывание индексов под знаком дифференцирования (без добавления поправочных членов) по этой причине возможно, только если соответствующие индексы имеют один и тот же характер по отношению к дифференцированию. Так, например,

$$A^{\overset{i}{+}}{}_{\underset{+}{k}\ldots;\,l}\,\delta^k_i = A^s{}_{s\ldots;\,l}$$

Абсолютное дифференцирование тензорных плотностей

Величина

$$g_{\underset{+-}{ik};l}\,(=g_{ik,l}-g_{sk}\Gamma^s_{il}-g_{is}\Gamma^s_{lk}) \tag{12}$$

является тензором. Умножая на g^{ik} и свертывая по индексам i и k, мы получаем, согласно правилу дифференцирования определителей, вектор

$$\frac{w_{,l}}{w}-\Gamma^s_{\underline{ls}}, \tag{13}$$

где w означает $\sqrt{-\operatorname{Det}(g_{ik})}$, а w - скалярную плотность (ранга 1). Кроме того, если ρ — произвольная скалярная плотность (ранга 1), то ρ/w, а следовательно, и $\ln(\rho/w)$ являются скалярными величинами. Дифференцируя по x_l, получаем вектор

$$\frac{\rho_{,l}}{\rho}-\frac{w_{,l}}{w}. \tag{14}$$

Складывая векторы (13) и (14), получаем вектор

$$\frac{\rho_{,l}}{\rho}-\Gamma^s_{\underline{ls}}.$$

Умножение его на ρ дает векторную плотность

$$\rho_{,l}-\rho\Gamma^s_{\underline{ls}}.$$

Это выражение мы будем рассматривать как определение ковариантной производной $\rho_{;l}$ скалярной плотности ρ

$$\rho_{;l}=\rho_{,l}-\rho\Gamma^s_{\underline{ls}}. \tag{15}$$

Из этого определения, в частности, вытекает следующее тождество для скалярной плотности w:

$$\left(\frac{w_{;l}}{w}\right)_{,m}-\left(\frac{w_{;m}}{w}\right)_{,l}\equiv\Gamma^s_{\underline{ls},m}-\Gamma^s_{\underline{ms},l}. \tag{16}$$

Используя (15) и правило абсолютного дифференцирования произведений, мы можем уже знакомым путем распространить понятие абсолютного дифференцирования на тензорные плотности. Так, например,

$$(\rho A^{\overset{i}{+}})_{;k}=\rho_{;k}A^i+\rho A^i{}_{;k}$$

или, обозначая векторную плотность ρA^i через $\mathfrak{A}^i$,

$$\mathfrak{A}^{\overset{i}{+}}{}_{;k} = (\rho_{,k} - \rho\Gamma^s_{\underline{ks}})\, A^i + \rho\,(A^i_{,k} + A^s\Gamma^i_{sk}),$$

что можно записать в виде

$$\mathfrak{A}^{\overset{i}{+}}{}_{;k} = \mathfrak{A}^i_{,k} + \mathfrak{A}^s\Gamma^i_{sk} - \mathfrak{A}^i\Gamma^s_{\underline{ks}}. \tag{17}$$

Последний член отличает ковариантную производную векторной плотности от ковариантной производной вектора. Аналогичный результат получается и при абсолютном дифференцировании тензорных плотностей более высокого ранга. Свертывая (17), получаем

$$\mathfrak{A}^{\overset{t}{+}}{}_{;t} = \mathfrak{A}^t_{,t} + \mathfrak{A}^t\Gamma_t, \tag{18}$$

где мы ввели обозначение $\Gamma_t = \Gamma^s_{\underset{\vee}{ts}}$. Таким же образом получаем

$$\mathfrak{A}^{\overset{t}{-}}{}_{;t} = \mathfrak{A}^t{}_{,t} - \mathfrak{A}^t\Gamma_t. \tag{19}$$

Тождества для метрического тензора

Выведем теперь несколько тождеств, которые окажутся полезными в дальнейшем. Так же как и в предыдущем разделе, умножим тензор $g_{\underset{+-}{ik};l}$ на g^{ik} и свернем полученное выражение по i и k. Используя определение $w_{;l}$, можем написать

$$g^{ik}g_{\underset{+-}{ik};l} \equiv 2w_{;l}. \tag{20}$$

Умножим, далее $g_{\underset{+-}{ik};l}$ на $g^{it}g^{sk}$ и произведем свертку. Это дает (учитывая, что $g^{sk}g_{ik,l} = -g^{sk}{}_{,l}g_{ik}$)

$$g^{it}g^{sk}g_{\underset{+-}{ik};l} \equiv -g^{st}_{,l} - g^{it}\Gamma^s_{il} - g^{sk}\Gamma^t_{lk} \equiv -g^{\overset{st}{+-}}{}_{;l}. \tag{21}$$

Определим, наконец, $\mathfrak{g}^{ik}$ как $\mathfrak{g}^{ik} = wg^{ik}$. Для этой тензорной плотности выполняется соотношение

$$\mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}{}_{;l} = \mathfrak{g}^{ik}{}_{,l} + \mathfrak{g}^{sk}\Gamma^i_{sl} + \mathfrak{g}^{is}\Gamma^k_{ls} - \mathfrak{g}^{ik}\Gamma^s_{\underline{ls}}.$$

Антисимметризуя по индексам i и k и свертывая по k и l, получаем важное тождество

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{g}^{it}{}_{;t} - \mathfrak{g}^{ti}{}_{;t}) \equiv \mathfrak{g}^{\overset{it}{\vee}}{}_{,t} - \mathfrak{g}^{\overset{it}{-}}\Gamma_t. \tag{22}$$

Риманова кривизна

Точно так же как и в случае симметричной теории, тензор кривизны можно получить путем параллельного переноса вектора вдоль границы бесконечно малого элемента поверхности

$$R^i_{klm} = (\Gamma^i_{kl,m} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{km}) - (\Gamma^i_{km,l} - \Gamma^i_{sm}\Gamma^s_{kl}). \tag{23}$$

Другой тензор этого же типа получается при замене Γ^i_{kl} на $\widetilde{\Gamma}^i_{kl} (= \Gamma^i_{lk})$.

Свертывая (23) по i и m, получаем в результате тензор

$$R_{kl} = (\Gamma^t_{kl,t} - \Gamma^t_{sl}\Gamma^s_{kt}) - (\Gamma^t_{kt,l} - \Gamma^t_{st}\Gamma^s_{kl}). \tag{24}$$

§ 3. Вывод уравнений поля

Чтобы получить совместную систему уравнений, ограничимся случаем, когда система уравнений может быть выведена из вариационного принципа. Это гарантирует совместность уравнений.

В качестве наиболее общего подынтегрального выражения для нашего вариационного принципа мы выберем скалярную плотность $\mathfrak{H}$, построенную из $\mathfrak{g}^{ik}$, Γ^l_{ik} и их первых производных. Из вариационного принципа следует

$$\delta \int \mathfrak{H}\, d\tau = 0, \tag{25}$$

где $\mathfrak{g}^{ik}$ и Γ^l_{ik} должны варьироваться независимо друг от друга. Мы можем так выбрать $\delta\mathfrak{g}$ и $\delta\Gamma$, чтобы на границах области интегрирования они обращались в нуль. Тогда, производя интегрирования по частям, можно переписать (25) в следующей форме:

$$\int (\mathfrak{B}^{ik}_l \delta\Gamma^l_{ik} + W_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik})\, d\tau = 0. \tag{25a}$$

Так как $\delta\mathfrak{g}$ и $\delta\Gamma$ независимы, коэффициенты при них должны обращаться в нуль, и мы получаем уравнения поля

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B}^{ik}_l &= 0 \\ W_{ik} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{I}$$

Посмотрим, что получится, если варьировать интеграл (25) при дополнительном условии

$$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s} = 0. \tag{26}$$

Введение априори этого соотношения между компонентами $\mathfrak{g}^{ik}$ означает, что $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ не являются уже независимыми. Чтобы учесть это, мы можем, например, использовать метод неопределенных множителей Лагранжа. Тогда после интегрирования по частям находим

$$\int (\mathfrak{B}_l^{ik}\delta\Gamma_{ik}^l + [W_{ik} + \sigma_{i,k} - \sigma_{k,i}]\delta\mathfrak{g}^{ik})\, d\tau = 0,$$

где σ_i — векторное поле множителей Лагранжа, которое позволяет нам теперь рассматривать $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ как независимые переменные. Таким образом, мы приходим к уравнениям

$$\mathfrak{B}_l^{ik} = 0; \quad \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}{}_{,s} = 0; \quad W_{ik} + (\sigma_{i,k} - \sigma_{k,i}) = 0,$$

или, исключая вспомогательные переменные σ_i,

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{B}_l^{ik} = 0; \quad \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}{}_{,s} = 0 \\ &W_{\underline{ik}} = 0; \quad W_{\underline{ik},l} + W_{\underset{\vee}{kl},i} + W_{\underset{\vee}{li},k} = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II)}$$

Система уравнений (II) отличается от системы (I) тем, что шесть уравнений системы (I) $W_{\underset{\vee}{ik}} = 0$ заменены в ней восемью уравнениями

$$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}{}_{,s} = 0; \quad W_{\underset{\vee}{ik},l} + W_{\underset{\vee}{kl},i} + W_{\underset{\vee}{li},k} = 0.$$

Левые части этих восьми уравнений удовлетворяют двум тождествам

$$(\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}{}_{,s})_{,i} \equiv 0$$

и

$$(W_{\underset{\vee}{ik},l} + W_{\underset{\vee}{kl},i} + W_{\underset{\vee}{li},k})_{,m}\, \eta^{iklm} \equiv 0$$

(η^{iklm} — антисимметричная по всем четырем индексам тензорная плотность Леви-Чивиты).

Кажется очевидным (и это будет строго доказано ниже, см. стр. 786), что при любом выборе тензорной плотности $\mathfrak{H}$ для вариационного принципа эти восемь уравнений и два тождества более жестко определяют переменные поля, чем шесть уравнений системы (I). В качестве физической теории я склонен предпочесть более «жесткую» систему (II) системе (I). Такой принцип предпочтения более жестких систем более слабым представляется мне имеющим всеобщую применимость.

Тождества Бианки

В чисто гравитационной теории мы знаем четыре тождества Бианки. Следуя Вейлю, их можно получить из вариационного принципа, используя инвариантность по отношению к группе преобразований координат.

Та же самая процедура может быть проделана и в несимметричной теории. Предположим, что $\delta\Gamma^l_{ik}$ и $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ возникли в результате бесконечно малого преобразования координат. Тогда получаем [2]

$$\delta\Gamma^l_{ik} = \Gamma^s_{ik}\xi^l_{,s} - \Gamma^l_{sk}\xi^s_{,i} - \Gamma^l_{is}\xi^s_{,k} - \xi^l_{,ik} - \Gamma^l_{ik,s}\xi^s,$$

$$\delta\mathfrak{g}^{ik} = \mathfrak{g}^{sk}\xi^i_{,s} + \mathfrak{g}^{is}\xi^k_{,s} + \mathfrak{g}^{ik}\xi^s_{,s} - \mathfrak{g}^{ik}_{s,}\xi^s.$$

Подставляя эти выражения в варьируемый интеграл $\delta\int\mathfrak{H}\,d\tau = 0$ и выполняя необходимые интегрирования по частям, мы можем привести интеграл к следующему виду

$$\int\mathfrak{M}_i\xi^i d\tau = 0, \tag{27}$$

откуда следуют четыре тождества Бианки

$$\mathfrak{M}_i \equiv 0. \tag{28}$$

Конкретное содержание этих тождеств зависит, конечно, от выбора $\mathfrak{H}$ в вариационном принципе. Однако даже не делая этого выбора, мы можем видеть, как тождества (28) связывают уравнения поля, следующие из общего вариационного принципа $\delta\int\mathfrak{H}\,d\tau = 0$. Действительно, если мы подставим $\delta\Gamma^l_{ik}$ и $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ в (25a) и приведем его к виду (27), то увидим, что $\mathfrak{M}_i$ линейно зависят от $\mathfrak{B}^{ik}_{l,}$, W_{ik} и их первых производных, так что если удовлетворяются уравнения поля (I), то (28) представляют собой тождественные соотношения между этими уравнениями поля. То же самое справедливо и в случае системы (II), но, чтобы увидеть это, необходимо выделить симметричную и антисимметричную части W_{ik}, входящие в $\mathfrak{M}_i$. Вклад W_{ik} в $\mathfrak{M}_i$ равен

$$[-2(W_{\underline{si}}\mathfrak{g}^{\underline{st}})_{,t} + W_{\underline{sk},i}\mathfrak{g}^{sk}] + \mathfrak{g}^{sk}[W_{\underset{\vee}{ki},s} +$$
$$+ W_{\underset{\vee}{is},k} + W_{\underset{\vee}{sk},i}] + [-W_{\underset{\vee}{ik}}\mathfrak{g}^{tk}_{,t} + W_{\underset{\vee}{ik}}\mathfrak{g}^{kt}_{,t}].$$

Последняя скобка как раз равна $2W_{\underset{\vee}{sk}}\mathfrak{g}^{\overset{\vee}{kt}}_{,t}$ (= 0, согласно (26)). Таким образом, мы видим, что и в случае системы (II) $\mathfrak{M}_i$ являются линейными комбинациями уравнений поля.

---

[2] Последний член в каждой строке появляется вследствие того, что варьируемые величины должны браться при фиксированных значениях координат.

Выбор гамильтониана $\mathfrak{H}$

Вопрос о выборе тензорной плотности $\mathfrak{H}$ для вариационного принципа пока оставался открытым. До сих пор ничего не говорилось о виде $\mathfrak{H}$. Чтобы сделать какой-то выбор, наложим следующее условие на вариационный принцип: из него должно следовать (по возможности) наиболее простое соотношение между g и Γ, а именно:

$$g_{\underset{+-}{ik};l} = 0. \tag{29}$$

Условие (29) является обобщением соотношения в симметричной теории. Это условие обладает свойством инвариантности относительно транспонирования (которое, конечно, не имеет смысла в симметричной теории); это означает, что уравнения остаются справедливыми при замене

$$g_{ik} \text{ на } \widetilde{g}_{ik} (\equiv g_{ki}) \text{ и } \Gamma^i_{kl} \text{ на } \widetilde{\Gamma}^i_{kl} (\equiv \Gamma^i_{lk}).$$

Это является математическим выражением того факта, что для теории безразличен знак заряда электричества.

Плотность $\mathfrak{H}$, удовлетворяющая поставленному выше условию, может быть действительно найдена. Начнем с рассмотрения свернутого тензора кривизны

$$R_{ik} = [\Gamma^s_{ik,s} - \Gamma^t_{is}\Gamma^s_{tk}] - [\Gamma^s_{is,k} - \Gamma^t_{ik}\Gamma^s_{\underline{ts}}]. \tag{24}$$

Сначала прибавим к R_{ik} тензор $\Gamma_{\underset{+}{i};k} = \Gamma^s_{\check{i}s,k} - \Gamma^t_{ik}\Gamma^s_{t\check{s}}$; при этом R_{ik} заменится на

$$\overset{*}{R}_{ik} = [\Gamma^s_{ik,s} - \Gamma^t_{is}\Gamma^s_{tk}] - [\Gamma^s_{\underline{is},k} - \Gamma^t_{ik}\Gamma^s_{ts}].$$

Для выражения во второй скобке мы используем теперь уравнение, определяющее абсолютное дифференцирование скалярной плотности,

$$w_{;t} = w_{,t} - w\Gamma^s_{\underline{ts}}. \tag{15}$$

После перегруппировки членов это дает

$$\overset{*}{R}_{ik} = [\Gamma^s_{ik,s} - \Gamma^t_{is}\Gamma^s_{tk}] - \left[\left(\frac{w_{,i}}{w}\right)_{,k} - \left(\frac{w_{,t}}{w}\right)\Gamma^t_{ik}\right] + \left[\left(\frac{w_{;i}}{w}\right)_{,k} - \left(\frac{w_{;t}}{w}\right)\Gamma^t_{ik}\right].$$

Последняя скобка равна просто тензору $[(1/w)\,w_{;\underset{+}{i}}]_{;k}$. Вычитая этот тензор из $\overset{*}{R}_{ik}$, получаем

$$\overset{**}{R}_{ik} = \Gamma^s_{ik,s} - \Gamma^t_{is}\Gamma^s_{tk} - (\ln w)_{,ik} + (\ln w)_{,t}\Gamma^t_{ik}. \tag{24a}$$

По построению $\overset{**}{R}_{ik}$ является тензором и, действительно, мы сейчас проверим, что плотность $\mathfrak{g}^{ik}\overset{**}{R}_{ik}$ может быть использована для нашего вариационного принципа и дает при этом нужный нам результат. Проварьируем интеграл $\int \mathfrak{g}^{ik}\overset{**}{R}_{ik}d\tau$ сначала по Γ (когда дополнительное условие $\overset{is}{\mathfrak{g}}_{,s}^{\vee} = 0$ не играет роли). Мы получим уравнение

$$\mathfrak{g}^{ik}_{,l} + \mathfrak{g}^{tk}\Gamma^i_{tl} + \mathfrak{g}^{it}\Gamma^k_{lt} - \mathfrak{g}^{ik}(\ln w)_{,l} = 0. \tag{30}$$

Заменяя $\mathfrak{g}^{ik}$ на wg^{ik} и деля все уравнения на w, находим

$$0 = g^{ik}_{,l} + g^{tk}\Gamma^i_{tl} + g^{it}\Gamma^k_{lt} = g^{\overset{ik}{+-}}_{;l}, \tag{30a}$$

что, согласно тождествам (20) и (21), приводит к нужному результату

$$g_{\underset{+-}{ik};l} = 0; \qquad \mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}_{;l} = 0; \qquad w_{;l} = 0.$$

Поскольку у нас есть теперь уравнения $\mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}_{;l} = 0$ и $\overset{is}{g}_{,s}^{\vee} = 0$, то из тождества (22) видно, что выполняются также соотношения

$$\Gamma_i = 0. \tag{31}$$

Отсюда, далее, вытекает, что $\overset{**}{R}_{ik}$ оказывается теперь равным R_{ik}, так как разность между этими двумя тензорами сводится к величине

$$\Gamma_{\underset{+}{ik}} - \left(\frac{1}{w}w_{;\underset{+}{i}}\right)_{;k},$$

которая равна нулю.

Нам осталось получить остальные уравнения. Найдем их, варьируя $\int \mathfrak{g}^{ik}\overset{**}{R}_{ik}d\tau$ по $\mathfrak{g}^{ik}$.

После интегрирования по частям имеем

$$0 = \int [\overset{**}{R}_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik} - \{\mathfrak{g}^{ik}_{,ik} + (\mathfrak{g}^{ik}\Gamma^t_{ik})_{,t}\}\,\delta(\ln w)]d\tau.$$

Но коэффициент при $\delta(\ln w)$ обращается в нуль, поскольку он может быть записан в виде

$$\{\mathfrak{g}^{ik}_{,i} + \mathfrak{g}^{it}\Gamma^k_{it}\}_{,k} = \{\mathfrak{g}^{ik}_{;i}\}_{,k} = 0.$$

Поэтому у нас остается

$$\int \overset{**}{R}_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik}d\tau = 0.$$

Вариации $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ не являются независимыми вследствие условия

$\mathfrak{g}^{is}_{,\check{s}} = 0$, и мы используем, как это уже делалось выше, метод неопределенных множителей Лагранжа. В результате получаются уравнения (мы можем теперь писать R_{ik} вместо $\overset{**}{R_{ik}}$):

$$R_{\underline{ik}} = 0, \qquad R_{\underset{\vee}{ik},l} + R_{\underset{\vee}{kl},i} + R_{\underset{\vee}{li},k} = 0.$$

Выписывая полную систему уравнений, мы замечаем, что в силу тождества (22) уравнения $\mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}_{;l} = 0$ и $\Gamma_i = 0$ вместе эквивалентны уравнениям $\mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}_{;l} = 0$ и $\mathfrak{g}^{is}_{,\check{s}} = 0$. Поэтому нашу систему можно выбрать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{g}_{\underset{+-}{ik};l} = 0; && \Gamma_i = 0 \\ &R_{\underline{ik}} = 0; && R_{\underset{\vee}{ik},l} + R_{\underset{\vee}{kl},i} + R_{\underset{\vee}{li},k} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{IIa}$$

Эта система уравнений обладает свойством инвариантности относительно транспонирования; это непосредственно видно для уравнений $\mathfrak{g}_{\underset{+-}{ik};l} = 0$ и $\Gamma_i = 0$. Для двух других инвариантность легко проверить, заменяя R_{ik} на $\overset{**}{R_{ik}}$.

Мы должны теперь выяснить, можно ли выбрать какое-нибудь другое выражение для $\mathfrak{H}$, которое также приводило бы к уравнению $g_{\underset{+-}{ik};l} = 0$. Предположим, что мы нашли такую плотность $\mathfrak{H}^*$, причем $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H} + \mathfrak{K}$. Если $\mathfrak{K}$ зависит от Γ, то оно дает свой вклад при варьировании по Γ. С другой стороны, чтобы выполнялось уравнение $g_{\underset{+-}{ik};l} = 0$, этот вклад должен тождественно обращаться в нуль. Мы можем без доказательства принять, что это означает, что $\mathfrak{K}$ не может зависеть от Γ. Остается возможность, что $\mathfrak{K}$ построено только из g_{ik}, как, например, w или $wg^{ik}g_{ki}$ и т. д. (Первая из этих возможностей ведет к так называемому «космологическому члену».) Все такие дополнительные члены внесли бы неоднородность в систему уравнений и их следует отбросить, если только не будут найдены веские физические аргументы в их пользу.

Замечания относительно физической интерпретации системы уравнений. При физической интерпретации теории на первый план выступает вопрос: в какой степени имеется сходство между этой теорией и теорией Максвелла? Есть формальное сходство между линейным приближением к этой теории и уравнениями Максвелла. Можно показать, что в линейном приближении система распадается на две системы уравнений: одну — для симметричных компонент поля и другую — для антисимметричных компонент. Уравнения для антисимметричной части являются обобщением уравнений Максвелла для пустого пространства. Расщепление уравнений в линейном приближении делает понятным, почему электромагнитное и гравитационное поля казались независимыми на начальной стадии развития наших теоретических идей. Дело в том, что эти идеи основывались исключительно на известных нам данных о поведении слабых полей.

В строгой теории такой независимости уже нет. Во всяком случае, сходство с теорией Максвелла не очень близкое; в частности, локализация энергии оказывается совершенно другой. Однако имеются и следующие общие черты.

Вид уравнения $\mathfrak{g}^{i\underset{\vee}{s}}_{,s} = 0$ наводит на мысль, что его можно интерпретировать как условие обращения в нуль магнитного тока. Кроме того, величины

$$g_{\underset{\vee}{ik},l} + g_{\underset{\vee}{kl},i} + g_{\underset{\vee}{li},k}$$

или соответствующую векторную плотность

$$\mathfrak{J}^m = \frac{1}{6}(g_{\underset{\vee}{ik},l} + g_{\underset{\vee}{kl},i} + g_{\underset{\vee}{li},k})\,\eta^{iklm}$$

можно интерпретировать как плотность электрического тока, так как эти величины тождественно удовлетворяют «уравнению непрерывности»

$$\mathfrak{J}^m_{,m} = 0.$$

Другой вывод уравнений поля

Приведенный выше вывод уравнений поля, в котором использовался вспомогательный тензор $\overset{**}{R}_{ik}$, имеет некоторые преимущества. Вариация по Г непосредственно дает уравнение $g_{\underset{+}{i}\underset{-}{k};l} = 0$. Кроме того, когда мы в уравнениях заменяем R_{ik} на $\overset{**}{R}_{ik}$, сразу становится очевидной инвариантность относительно транспонирования.

Однако, с другой стороны, этот вывод имеет и свои недостатки, так как $\overset{**}{R}_{ik}$ вводится искусственным путем; кроме того, этот вывод позволяет допустить, что с тем же основанием можно выбрать антисимметричную часть поля ($g_{\underset{\vee}{ik}}$ и $\Gamma^l_{\underset{\vee}{ik}}$) чисто мнимой. Поэтому мы считаем нужным коротко упомянуть о другом выводе, свободном от указанных недостатков.

Сопоставим каждому полю Γ^l_{ik} семейство полей Γ^{l+}_{ik}, связанных друг с другом соотношением

$$\Gamma^{l+}_{ik} = \Gamma^l_{ik} + \delta^l_i \lambda_k \qquad («\lambda\text{-преобразование»}),$$

где λ_k — произвольное векторное поле[3]. Нетрудно показать, что совокупность преобразований координат и λ-преобразований образует группу («расширенная группа»). Возникает вопрос, можно ли найти вариационный принцип (опять с априорным условием $g^{\underset{\vee}{is}}_{,s} = 0$), инвариантный относительно расширенной группы.

Применяя λ-преобразование к R_{ik}, получаем

$$\overset{+}{R}_{ik} = R_{ik} - (\lambda_{i,k} - \lambda_{k,i}).$$

Тензорная плотность $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik}R_{ik}$ преобразуется поэтому следующим образом:

$$(\mathfrak{g}^{ik}\overset{+}{R}_{ik} =)\, \overset{+}{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} - \mathfrak{g}^{ik}(\lambda_{i,k} - \lambda_{k,i}) = \mathfrak{H} + 2\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ik}}\lambda_{k,i}.$$

Пользуясь условием $0 = \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s}$, мы можем переписать это в виде

$$\overset{+}{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} + 2(\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ik}}\lambda_k)_{,i}.$$

Второй член при интегрировании дает поверхностный интеграл и поэтому ничего не вносит при варьировании. Отсюда следует, что вариационный принцип

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}\, d\tau\right\} = 0$$

и вытекающие из него уравнения инвариантны относительно λ-преобразований.

Можно показать, что вариация по Γ приводит к уравнению

$$-\mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}_{;l} + \mathfrak{g}^{\overset{it}{+-}}_{;t}\delta^k_l + \mathfrak{g}^{ik}\Gamma_l + \mathfrak{g}^{it}\Gamma_t\delta^k_l = 0.$$

Отсюда вытекает, что $\mathfrak{g}^{\overset{i\,k}{+-}}_{;\,l;} = 0$, если выполняется условие $\Gamma_i = 0$. Но этого можно добиться (благодаря λ-инвариантности вариационного принципа) соответствующим выбором λ_k («нормировка» Γ-поля).

Таким образом, мы приходим к тем же уравнениям, что и при использовании первого метода. При этом, однако, существенно, что Γ^l_{ik} вещественны, а $\Gamma^l_{\underset{\vee}{ik}}$ уже не имеют инвариантного смысла при преобразованиях расширенной группы. Если мы опять потребуем, чтобы выполнялось уравнение $g_{\underset{+}{i}\,\underset{-}{k};\,l} = 0$, то с помощью тех же рассуждений, как и раньше (стр. 774), мы увидим, что в функцию Гамильтона нельзя ввести никаких добавочных членов.

[3] Это преобразование, очевидно, «смешивает» симметричную и антисимметричную части Γ-поля, так что $\Gamma^i_{\underset{\vee}{kl}}$ не может быть при этом выбрано мнимым.

§ 4. Общие замечания относительно «жесткости» системы уравнений. Применение к теории несимметричного поля

В предыдущем параграфе (стр. 770) мы из двух систем уравнений (I) и (II) отдали предпочтение второй. Принцип, которому мы при этом следовали, имеет всеобщую применимость к физическим теориям: систему уравнений следует выбирать так, чтобы полевые величины определялись этой системой *как можно более жестким образом.*

Чтобы применять этот принцип, нам нужен метод, который позволял бы дать меру жесткости системы уравнений. Поступим следующим образом: разложим переменные по́ля вблизи точки P в ряд Тэйлора (предполагается аналитический характер поля). Коэффициенты разложения, которые представляют собой не что иное, как производные переменных поля в точке P, распадаются на группы соответственно порядку дифференцирования. В каждом порядке дифференцирования мы на первых порах получаем набор коэффициентов, которые можно было бы выбрать произвольно, если бы поле не должно было удовлетворять системе уравнений. Благодаря наличию системы дифференциальных уравнений (и уравнений, получаемых из них путем дифференцирования по координатам) число независимых коэффициентов уменьшается, так что в каждой группе уже меньшее число коэффициентов может быть выбрано произвольно. Количество «свободных» коэффициентов в каждой группе непосредственно дает меру «слабости» системы уравнений и, таким образом, определяет и «жесткость» системы.

Этот метод подсчета числа свободных коэффициентов в каждом порядке дифференцирования предполагает, что число их можно вычислять последовательно порядок за порядком. Мы можем также ограничиться случаем, когда все эти числа положительны, т. е. когда уравнения для коэффициентов одного порядка не накладывают добавочных условий на коэффициенты предыдущих порядков. В таком случае мы будем говорить, что система уравнений «абсолютно совместна». Все системы уравнений, применявшиеся до сих пор в теоретической физике, по-видимому, имеют такой характер.

Проиллюстрируем этот метод несколькими примерами. Волновое уравнение в пространстве четырех измерений имеет вид

$$0 = \Box\varphi = \varphi_{,1,1} + \varphi_{,2,2} + \varphi_{,3,3} - \varphi_{,4,4}.$$

Система уравнений в этом случае состоит из одного уравнения для одной функции φ. В окрестности какой-либо точки, например $x_i = 0$,* φ разлагается в степенной ряд следующего вида:

$$\varphi = c + (c_i x_i) + (c_{ik} x_i x_k) + \ldots$$

Таким образом, φ будет определено, если мы зададим значения коэффициентов c для всех членов разложения (т. е. производные φ в точке $x_i = 0$). Количество коэффициентов на каждой последовательной ступени вычислений приведено в следующей таблице:

Порядок	Число коэффициентов
0	1
1	$4 = \binom{4}{1}$
2	$\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2} = \binom{4}{2}$
3	$\frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = \binom{4}{3}$
. . .	. . . .
n	$\frac{4\cdot 5\ldots(n+3)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} = \binom{4}{n}$

Количество этих коэффициентов уменьшается вследствие условий, вытекающих из дифференциального уравнения. Эти условия получаются при учете дифференциального уравнения и всех уравнений, получаемых путем последовательного дифференцирования исходного уравнения, в точке $x_i = 0$.

Порядок	Число условий
0	0
1	0
2	1
3	$\binom{4}{1}$
. . .	. . . .
n	$\binom{4}{n-2}$

Вычитая из числа коэффициентов данного порядка соответствующее число условий, получим число коэффициентов данного порядка Ω_n, остающихся произвольными. Для числа свободных коэффициентов степени n (> 2) находим

$$\Omega_n = \binom{4}{n} - \binom{4}{n-2},$$

или

$$\Omega_n = \binom{4}{n}\left(1 - \frac{n}{n+3}\,\frac{n-1}{n+2}\right) = \binom{4}{n}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{3}{n}}\,\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right).$$

При больших n это равенство можно заменить на

$$\Omega_n \sim \binom{4}{n}\frac{6}{n}.$$

Множитель $6/n$ дает ту часть общего числа коэффициентов (порядка $n \gg 1$), которые остаются не определенными дифференциальным уравнением. Величина Ω_n, таким образом, является мерой жесткости, с которой дифференциальное уравнение определяет поле. Будучи положительным, число Ω_n характеризует эту систему как «абсолютно совместную».

Эти же соображения можно без всякого изменения перенести на более сложное уравнение

$$A_{ik}\varphi_{,ik} + B = 0,$$

где A_{ik} и B — известные функции φ и $\varphi_{,s}$. Продифференцировав это уравнение $(n-2)$ раз в точке $x_i = 0$, найдем, что n-я производная от φ входит в выражение линейно, тогда как производные низших степеней входят более сложным образом. При меньшем числе дифференцирований n-я производная от φ вообще не появляется. Это позволяет последовательно проводить дифференцирование различных порядков. Схема, показывающая число условий, которые следуют из дифференциальных уравнений, дает в правом столбце число уравнений, в которых порядок дифференцирования, указанный в левом столбце, появляется в первый раз (и появляется линейно).

Главная трудность, возникающая при применении намеченного выше метода к системам, состоящим более чем из одного дифференциального уравнения, заключается в правильном учете тождества между уравнениями. Мы покажем, как это делается на примере уравнений Максвелла для вакуума.

Уравнения Максвелла для пустого пространства

Запишем уравнения Максвелла в форме Минковского (с мнимой временной координатой):

$$(U_i \equiv)\, \varphi_{is,s} = 0,$$

$$(V_{ikl} \equiv)\, \varphi_{ik,l} + \varphi_{kl,i} + \varphi_{li,k} = 0,$$

где φ_{ik} — (антисимметричный) тензор электромагнитного поля. Эти уравнения удовлетворяют тождествам

$$U_{i,i} = 0,$$
$$V_{ikl,m}\eta^{iklm} = 0.$$

Поскольку φ_{ik} имеет шесть компонент, число коэффициентов разложения в ряд Тэйлора на n-м этапе равно $6\binom{4}{n}$. Эти коэффициенты связаны между собой алгебраическими уравнениями, получаемыми при $(n-1)$-кратном дифференцировании уравнений поля. Число этих условий (алгебраических уравнений) равно

$$4\binom{4}{n-1} + 4\binom{4}{n-1}.$$

Однако вследствие существования тождеств эти условия не независимы. Действительно, между коэффициентами n-го этапа существуют соотношения, выполняющиеся тождественно, как это следует из $(n-2)$-кратного дифференцирования выписанных выше тождеств. Число таких тождественных соотношений между коэффициентами равно

$$\binom{4}{n-2} + \binom{4}{n-2}.$$

Число *независимых* соотношений между коэффициентами n-го этапа, следовательно, равно

$$8\binom{4}{n-1} - 2\binom{4}{n-2}.$$

Вычитая это число из (полного) числа $6\binom{4}{n}$ коэффициентов на n-м этапе, мы получаем число Ω_n коэффициентов, остающихся неопределенными на n-м этапе:

$$\Omega_n = 6\binom{4}{n} - \left[8\binom{4}{n-1} - 2\binom{4}{n-2}\right].$$

В этом месте удобно использовать асимптотическое выражение $(n \gg 1)$

$$\binom{4}{n-r} \sim \binom{4}{n}\left(1 - \frac{3r}{n}\right) \qquad (r \ll n).$$

Отсюда следует, что

$$\Omega_n \sim \binom{4}{n}\left[6 - 8\left(1 - \frac{3}{n}\right) + 2\left(1 - \frac{6}{n}\right)\right],$$

или

$$\Omega_n \sim \binom{4}{n}\frac{12}{n}.$$

Мы видим, что на n-м этапе здесь остается вдвое больше свободных коэффициентов, чем в случае скалярного волнового уравнения.

Прежде чем оставить этот пример, остановимся на одном пункте, который необходим как для понимания используемого здесь метода, так и для формального понимания этой конкретной системы уравнений.

Если в выписанные выше уравнения введем вектор-потенциал ψ_i, определяемый соотношением

$$\varphi_{ik} = \psi_{i,k} - \psi_{k,i},$$

то увидим, что второе уравнение выполняется автоматически, в то время как первое дает

$$(W_i \equiv)\, \psi_{i,s,s} - \psi_{s,s,i} = 0.$$

Это система четырех уравнений для четырех компонент ψ_i, причем между ними имеется одно тождество $W_{i,i} \equiv 0$. Таким образом, эти уравнения неоднозначно определяют векторное поле ψ_i, из которого мы обратно можем получить первоначальную систему уравнений. Как известно, для однозначного определения ψ_i-поля необходимо дополнить эту (промежуточную) систему уравнением $\psi_{s,s} = 0$. При этом получается система

$$(A_i \equiv)\, \psi_{i,s,s} = 0,$$

$$(B \equiv)\, \psi_{s,s} = 0.$$

Приведенное выше тождество принимает форму

$$A_{i,i} - B_{s,s} \equiv 0.$$

Эта система включает в себя промежуточную систему, а с ней и первоначальную систему уравнений для φ_{ik}. Следовательно, эта система определяет φ_{ik} с той же самой жесткостью, что и первоначальная система; представляется интересным вычислить также жесткость, с которой определяются ψ_i. Метод подсчета коэффициентов n-го порядка дает в этом случае

$$\Omega_n = 4\binom{4}{n} - \left[4\binom{4}{n-2} + \binom{4}{n-1} - \binom{4}{n-3}\right],$$

или, асимптотически,

$$\Omega_n \sim \binom{4}{n}\left(\frac{24}{n} + \frac{3}{n} - \frac{9}{n}\right) = \binom{4}{n}\frac{18}{n}.$$

Сравнение с результатами, относящимися к первоначальной системе уравнений, показывает, что ψ_i-поле определяется менее жестко, чем φ_{ik}-поле. С этой точки зрения, следует отдать предпочтение первоначальной форме уравнений Максвелла, если нет причин приписывать независимый физический смысл переменным ψ_i. Причиной разной жесткости этих двух систем уравнений является то, что, даже зная полностью φ_{ik}, мы не можем однозначно определить ψ_i. Сейчас мы разберем это подробно, так как этот случай позволяет проиллюстрировать, как при подсчете учесть «тождества между тождествами». Пусть φ_{ik} заданы, а ψ_i удовлетворяет уравнениям

$$(C_{ik} \equiv)\, \psi_{i,k} - \psi_{k,i} = \varphi_{i,k},$$

$$(B \equiv)\, \psi_{s,s} = 0$$

(где заданные φ_{ik} удовлетворяют уравнению $\varphi_{ik,l} + \varphi_{kl,i} + \varphi_{li,k} = 0$). Первое из этих уравнений удовлетворяет тождеству

$$(D_{ikl} \equiv)\, C_{ik,l} + C_{kl,i} + C_{li,k} \equiv 0.$$

Однако эти четыре тождества не независимы друг от друга, поскольку сами D_{ikl} удовлетворяют тождеству

$$D_{ikl,m}\eta^{iklm} \equiv 0,$$

выполняющемуся при любых (антисимметричных) C_{ik}. Это тождество между компонентами D_{ikl} меняет на каждом этапе результат подсчета коэффициентов. Не проводя доказательства, приведем лишь результат

$$\Omega_n = 4\binom{4}{n} - \left[\left\{6\binom{4}{n-1} + \binom{4}{n-1}\right\} - \left\{4\binom{4}{n-2} - \binom{4}{n-3}\right\}\right].$$

Первый член в правой части равен полному числу коэффициентов на n-м этапе дифференцирования; член в квадратных скобках дает число условий, накладываемых уравнениями на коэффициенты. Внутри квадратной скобки выражение в первой фигурной скобке равно числу условий, вытекающих из первоначальных уравнений, без учета тождеств. Вторая фигурная скобка связана с наличием тождеств первого и второго рода.

Вычисление приводит к следующему асимптотическому выражению для Ω_n:

$$\Omega_n \sim \binom{4}{n}\left(\frac{18}{n} + \frac{3}{n} - \frac{24}{n} + \frac{9}{n}\right) \sim \binom{4}{n}\frac{6}{n}.$$

Здесь мы видим отражение того произвола, с которым определяются ψ_i при заданных φ_{ik}; численно эта степень произвола согласуется с полученными ранее результатами относительно

$$\varphi_{ik} \text{ и } \psi_i \left(\frac{6}{n} = \frac{18}{n} - \frac{12}{n}\right).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать системы общековариантных уравнений. Здесь необходимо сделать замечания о числе коэффициентов в таких системах для каждого порядка. Пусть в число переменных поля входит и тензор g_{ik}. Тогда число возникающих из g_{ik} коэффициентов n-го порядка будет равно $16\binom{4}{n}$. Однако не все эти коэффициенты имеют объективный смысл, так как они изменяются при преобразовании координат. О фактическом множестве действительно различных полей можно судить, подсчитывая число независимых коэффициентов в *полностью определенной* системе координат.

Из законов преобразования следует, что в конечной области координаты можно выбрать так, что g_{14}, g_{24}, g_{34} обращаются в нуль, а $g_{44} = \pm 1$. Остающиеся компоненты $g_{ik}(g_{11},\ldots,g_{33})$ в общем случае зависят тогда от $x_1,\ldots,x_4$. На гиперповерхности $x_4=0$ они являются функциями x_1, x_2, x_3. Поэтому можно сделать дальнейшее преобразование координат так, чтобы на этой гиперповерхности $x_4 = 0$ мы имели $g_{13} = g_{23} = 0$, $g_{33} = \pm 1$. Эту же процедуру можно повторить в подпространстве $x_4 = x_3 = 0$, при этом получим $g_{12} = 0$, $g_{22} = \pm 1$ и, наконец, в подпространстве $x_4 = x_3 = x_2 = 0$, так чтобы получить $g_{11} = \pm 1$. Это — наиболее жесткое ограничение на компоненты тензора, которого можно добиться путем выбора системы координат. В результате общее число $16\binom{4}{n}$ коэффициентов в ряде Тэйлора уменьшится на

$$4\binom{4}{n} + 3\binom{3}{n} + 2\binom{2}{n} + 1 = D_n$$

коэффициентов. Общее g_{ik}-поле имеет поэтому на n-м этапе на D_n меньше коэффициентов, чем получилось бы без учета его ковариантных свойств. Для больших значений n мы находим [3]

$$D_n \sim \binom{4}{n}\left(4 + \frac{9}{n}\right).$$

[3] Эта формула, как показано самим автором, ошибочна. См. ниже, стр. 791.— *Прим. ред.*

Применение метода к системе уравнений симметричного поля (чисто гравитационное поле)

Полное поле состоит из симметричных полей g_{ik} и Γ^l_{ik}. Будем считать, что оба поля разложены в степенные ряды вблизи начала координат. Структура уравнений

$$0 = g_{ik;l} = g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\Gamma^s_{lk}$$

такова, что на каждом этапе дифференцирования g_{ik} дифференцируется на один раз больше, чем Γ. По этой причине в разложении

$$\Gamma = \underset{0}{\Gamma} + \underset{1}{\Gamma_s} x_s + \underset{2}{\Gamma_{st}} x_s x_t + \ldots$$

мы будем рассматривать $\underset{0}{\Gamma}$ как величину первого порядка, $\underset{1}{\Gamma}$ — второго порядка и т. д. Благодаря этому получим, что в уравнениях, определяющих коэффициенты разложения, высшие порядки входящих в них коэффициентов g и Γ одинаковы. Уравнения для R_{ik} не вносят затруднений, так как в них g вообще не входит.

Среди членов n-й степени в разложении поля мы имеем

$$10\binom{4}{n} \text{ коэффициентов для } g_{ik}\text{-поля,}$$

$$40\binom{4}{n-1} \text{ коэффициентов для } \Gamma\text{-поля.}$$

Чтобы скомпенсировать последствия произвола в выборе системы координат, из этого числа следует вычесть число D_n.

Продифференцированные $(n - 1)$ раз уравнения $g_{ik;l} = 0$ дают для коэффициентов соотношения, в которых высший порядок коэффициентов равен n. Число таких уравнений, получаемых дифференцированием, равно

$$40\binom{4}{n-1}.$$

Продифференцированные $(n - 2)$ раза уравнения $R_{ik} = 0$ дают

$$10\binom{4}{n-2}$$

уравнений для коэффициентов n-й степени.

Однако мы должны еще учесть существование четырех тождеств Бианки, благодаря которым уравнения для коэффициентов не являются независимыми. Продифференцированные $(n - 3)$ раза тождества Бианки дают тождества, в которых высший порядок коэффициентов равен n, причем эти коэффициенты входят линейно. Тождества Бианки, следовательно, приводят к

$$4\binom{4}{n-3}$$

алгебраическим тождествам. Полное число этих тождеств следует вычесть из полного числа уравнений для коэффициентов, следующих из уравнений поля; эта процедура даст нам число независимых уравнений для определения коэффициентов n-го порядка.

Собирая все вместе и вычитая число независимых уравнений из числа коэффициентов n-го порядка, получаем число коэффициентов, которые можно выбрать произвольно. Это число равно

$$\Omega_n=\left[10\binom{4}{n}+40\binom{4}{n-1}-D_n\right]-\left[40\binom{4}{n-1}+10\binom{4}{n-2}-4\binom{4}{n-3}\right].$$

Выносся за скобку множитель $\binom{4}{n}$ и используя приближенное выражение при больших n, получаем

$$\Omega_n\sim\binom{4}{n}\frac{15}{n}.$$

Сравнивая эту величину с результатом, полученным для волнового уравнения, мы видим, что гравитационные уравнения оставляют в $^5/_2$ раза больше неопределенных коэффициентов, чем волновое уравнение (для $n\gg1$). Такой вывод кажется удивительным, ибо g_{ik} имеет десять компонент, тогда как φ — только одну.

Замечание. Совместность десяти гравитационных уравнений есть следствие существования четырех тождеств Бианки. Однако интересно отметить, что простого существования четырех тождеств самого по себе еще недостаточно, чтобы обеспечить абсолютную совместность. В этом отношении эффективность тождества зависит от порядка входящей в него производной g_{ik}. Если бы, например, мы имели систему, в которой тождества Бианки были пятой степени, а не третьей, то для асимптотического выражения Ω_n вычисление дало бы формулу

$$\Omega_n\sim\binom{4}{n}\left(-\frac{9}{n}\right)<0,$$

которая означает, что такая система не была бы абсолютно совместной.

Применение метода к несимметричному полю

Наши уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_k&=0, & \overset{kl}{g}{}^{+-}_{;s}&=0\\ R_{\underline{ik}}&=0, & R_{\underset{\vee}{ik},l}+R_{\underset{\vee}{kl},i}+R_{\underset{\vee}{li},k}&=0\end{aligned}\right\}\qquad\text{(IIa)}$$

и существует шесть тождеств между ними: четыре тождества Бианки (с производными третьего порядка) от g_{ik}, тождество $(\bar{\mathfrak{g}}^{it}_{;t} - \mathfrak{g}^{ti}_{;t} - 2\mathfrak{g}^{\underline{ti}}\Gamma_t)_{,i} = 0$ (с производными второго порядка) и тождество $(\eta^{iklm} R_{\underset{\vee}{ik},l} + R_{\underset{\vee}{kl},i} + R_{\underset{\vee}{li},k})_{,m} = 0$ (с производными четвертого порядка). Число свободных коэффициентов равно

$$\Omega_n = \left[16\binom{4}{n} + 64\binom{4}{n-1} - D_n\right] - \\ - \left[\left\{4\binom{4}{n-1} + 64\binom{4}{n-1} + 10\binom{4}{n-2} + 4\binom{4}{n-3}\right\} - \\ - \left\{1\binom{4}{n-2} + 4\binom{4}{n-3} + 1\binom{4}{n-4}\right\}\right],$$

или, асимптотически,

$$\Omega_n \sim \binom{4}{n}\frac{45}{n}.$$

Докажем теперь, что система уравнений типа (II) является более жесткой, чем система типа (I) (см. стр. 770).

Если бы в системе (IIa) при помощи уравнений $g_{ik;l} = 0$ можно было исключить Γ, то W_{ik} [см. (I) и (II)] в этом случае содержали бы вторые производные от g_{ik}. В общем случае порядок производных не может быть меньше, и мы обозначим его через α. В случае системы (I) шесть уравнений $W_{\underset{\vee}{ik}} = 0$ приводят к $6\binom{4}{n-\alpha}$ условиям для коэффициентов n-го порядка. В случае (II) эти шесть уравнений заменяются восемью уравнениями $\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s} = 0$, $W_{\underset{\vee}{ik},l} + W_{\underset{\vee}{kl},i} + W_{\underset{\vee}{li},k} = 0$, между которыми существует два тождественных соотношения, упомянутых на стр. 770. Число независимых условий для системы (II) тогда равно

$$\left[4\binom{4}{n-1} + 4\binom{4}{n-\alpha-1}\right] - \left[\binom{4}{n-2} + \binom{4}{n-\alpha-2}\right].$$

Вычитая число условий для системы из числа условий для системы (II), мы асимптотически получаем

$$6\binom{4}{n}\frac{3\alpha-4}{2n}.$$

Это число положительно для $\alpha \geqslant 2$, а это и показывает, что система (II) всегда является более жесткой, чем система (I). $\left(\text{Для } \alpha = 2 \text{ эта разность равна } \binom{4}{n}\frac{6}{n}.\right)$

§ 5. Общие замечания относительно понятий и методов теоретической физики

Если не считать окончательным переход к теории принципиально статистического характера, какой является, например, квантовая механика в ее современном виде, то цель физической теории можно сформулировать следующим образом: дать объективное (в принципе полное) описание физических систем и установить структуру законов, связывающих понятия, входящие в это объективное описание. Под «объективным описанием» понимается такое описание, которое может претендовать на справедливость и осмысленность без ссылок на какие бы то ни было акты наблюдения.

Единственное отличие физических теорий от математических построений заключается в следующем. Физическая теория должна давать существенно полное и воспроизводимое соответствие между описанной в определенных терминах реальностью и непосредственными чувственными восприятиями. Вопрос о том, как установить это соответствие, может решаться только интуитивно и не может быть выражен в рамках логически сформулированной теории.

Одна теория отличается от другой главным образом выбором «кирпичей» для фундамента, т. е. ни к чему не сводимых основных понятий, на которых построена вся теория. В классической теории (механика) такими основными понятиями являются материальная точка, сила взаимодействия между материальными точками (потенциальная энергия) и инерциальная система (последняя составляется из декартовой системы координат и временной координаты). С ростом наших знаний об электромагнитном поле к числу основных понятий наравне с материальной точкой (вещество) прибавилось понятие поля, рассматриваемого как второй носитель энергии.

Специальная теория относительности изменила эту схему лишь в том отношении, что в структуру инерциальной системы пришлось включить «факт» (на деле — гипотезу, основанную на ряде экспериментальных фактов, без которой, по-видимому, нельзя обойтись) постоянства скорости света. Теория предполагает далее, что мы можем отбросить концепцию материальной точки и иметь дело только с полевой концепцией. Это связано с тем, что относительность одновременности делает невозможным дальнейшее сохранение концепции дальнодействия и потенциальной энергии.

Еще более глубокие изменения теоретических основ внесла общая теория относительности, которая вовсе отбросила понятие инерциальной системы. В прежних теориях пространство, математически выражаемое инерциальной системой, рассматривалось как независимый элемент физической реальности. Этот элемент можно было рассматривать как нечто абсолютное, поскольку он определял поведение точечных масс или поля, которые сами на него не действовали. Однако в общей теории относительности инерциальная система заменяется полем смещений, которое является составной частью единого поля, представляющего собой единственное средство описания реального мира. Пространственный аспект реальных вещей, таким образом, полностью выражается полем, зависящим от четырех координат-параметров; он есть свойство этого поля. Если мы представим себе, что поле удалено, то не останется и «пространства», так как пространство не имеет независимого существования.

Этим можно закончить замечания *об изменениях*, которые связаны с развитием указанных идей. В связи с возможностями дальнейшего развития теоретических основ интересно спросить, что же осталось неизменным в процессе этого развития. Для всех этих теорий, существенно, что они оперируют с пространственно-временным континуумом четырех измерений (во всяком случае, с конечным числом измерений). (Этот континуум может включать в себя или не включать сингулярные точки или линии.) Возможность отказа от этой фундаментальной предпосылки много раз рассматривалась, в частности, Риманом. Такой отказ от четырехмерного континуума, конечно, привел бы к ломке всех основных концепций, на которых строились рассматривавшиеся до сих пор теории.

Кроме всегда использовавшегося понятия континуума, прежние теории имели еще одну общую черту. Во всех этих теориях существенным является непременное наличие группы преобразований, так что одно и то же физическое состояние можно представить в различных формах, которые переходили одна в другую при преобразованиях этой группы. Чем шире группа преобразований, тем жестче она ограничивала круг возможных уравнений.

Во всех этих теориях считалось, что (четырехмерная) *точка* объективно существует, т. е. что она существует независимо от представления. Конкретной точке поля *в одном* представлении соответствует определенная точка в любом другом эквивалентном представлении той же самой физической системы. Математически это выражается тем фактом, что только такие преобразования считаются эквивалентными, которые связаны взаимнооднозначными преобразованиями координат.

Очевидно, что весь формализм современных теорий неразрывно связан с этим ограничением. Из него следует существование закона преобразования для дифференциалов координат dx^i, на котором основан закон преобразования векторов, а следовательно, и тензоров (ковариантный вектор можно, например, определить, рассматривая инвариант $\alpha_i dx^i$). Если отбросить понятие вектора (и тензора), то от формализма существующих ныне теорий не останется ничего.

Хотя априори не очевидно, почему не может существовать эквивалентных представлений физической системы, в которых не сохранялась бы тождественность точки (в то время как весь континуум переходил бы сам в себя), я не вижу путей построения релятивистской теории в таком широком смысле. Для понимания существующей сейчас теории относительности, во всяком случае, важно знать, что она полностью основана на предположении об инвариантном смысле точки.

Заключительные замечания

Результаты настоящего Приложения сводятся к следующему: в качестве естественного обобщения гравитационных уравнений в пустом пространстве мы рассматриваем систему уравнений:

$$g_{\underset{+}{i}\underset{-}{k};s} = 0, \qquad \Gamma_i = 0,$$

$$R_{\underline{ik}} = 0, \quad R_{\underset{\vee}{ik},l} + R_{\underset{\vee}{kl},i} + R_{\underset{\vee}{li},k} = 0.$$

Однако я должен объяснить, зачем я потратил столько сил, чтобы прийти к этому результату. Современные физики с трудом поймут это без соответствующего разъяснения, поскольку успех основанной на понятии вероятности квантовой механики убедил их, что физическая теория не должна ставить своей целью полное описание реальной ситуации. Я не хочу обсуждать здесь вопросы о том, почему я не разделяю этого убеждения или почему я не думаю, чтобы действительно интересная попытка де-Бройля и Бома дать в рамках формализма современной квантовой теории полное описание реально существующих индивидуальных явлений увенчалась успехом.

Существует, далее, убеждение, что нельзя одновременно сохранить концепции поля и частицы как элементов физического описания. Концепция поля требует, чтобы в поле не было сингулярностей, в то время как концепция частиц (как элементарная концепция) требует, чтобы они были. Концепция поля, однако, кажется неизбежной, поскольку без нее невозможна формулировка общей теории относительности. А общая теория относительности есть единственный способ избежать такой нереальной «вещи», как инерциальная система.

По этой причине я не вижу в существующей ситуации другого возможного пути, кроме чисто полевой теории, которая, впрочем, должна тогда решить такую чрезвычайно трудную задачу, как вывод атомистического характера энергии. Я считаю, далее, что уравнения гравитации для пустого пространства представляют собой единственный рационально обоснованный случай теории поля, который может претендовать на строгость (с учетом также и нелинейных членов). Все это приводит к попытке построить теорию единого поля путем обобщения теории гравитации для пустого пространства.

Предложенные обобщенные уравнения поля, однако, далеко еще не совершенны, так как мы пока не знаем, как находить свободные от сингулярностей решения такой системы уравнений; мы даже не имеем метода, с помощью которого можно было бы судить о существовании или отсутствии несингулярных решений. Поэтому от возможности сопоставления результатов теории с экспериментом нас пока отделяет непреодолимый барьер. Тем не менее я считаю неоправданным объявлять априори, что такая теория не сможет быть согласована с атомистическим характером энергии.

Дополнение к Приложению II[4]

В теории уравнений поля важную роль играет понятие «жесткости» системы уравнений. Это понятие основано на следующем рассуждении. Если компоненты поля разлагать вблизи какой-нибудь точки в ряд Тэйлора, то производные каждого порядка (скажем, порядка n) приведут к появлению некоторого количества коэффициентов. Их можно было бы выбирать произвольно, если бы не уравнения поля, которые устанавливают алгебраические связи между коэффициентами каждого порядка дифференцирования. При больших n часть коэффициентов остается свободной для выбора; число их записывается в виде

$$\Omega_n = \binom{4}{n}\left(\frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n^2} + \ldots\right).$$

Когда n достаточно велико, многообразие решений рассматриваемой совокупности дифференциальных уравнений определяется числом z_1. Если приходится выбирать между несколькими различными совместными системами уравнений, то следует предпочесть наиболее «жесткую» из них, т. е. систему с наименьшим z_1.

При рассмотрении числа коэффициентов n-го порядка в системе уравнений общей теории относительности нужно помнить, что некоторые из них лишены объективного значения вследствие свободы в выборе координат[5].

По этой причине представляется естественным вычесть их число из общего числа коэффициентов n-го порядка; мы получим, таким образом, число свободных коэффициентов при полностью определенной координатной решетке. В Приложении II[6] эта поправка была введена неправильно; однако ее можно очень просто найти путем следующего рассуждения.

[4] Это дополнение напечатано в виде вкладки. —*Прим. ред.*

[5] Число таких коэффициентов обозначалось через D_n.

[6] Ссылка относится к стр. 783 основного текста статьи.— *Прим. ред.*

Тензорное поле, фигурирующее в уравнениях поля, обозначим через g_{ik}. При произвольном преобразовании координат оно будет меняться по закону

$$\overset{*}{g}_{ik} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial \overset{*}{x}_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial \overset{*}{x}_k} g_{\alpha\beta}.$$

Если это выражение продифференцировать n раз по $\overset{*}{x}_1$, то впервые возникнут $(n+1)$-е производные от x_α по $\overset{*}{x}_1$. Следовательно, фиксируя их значения, можно произвольно задать

$$D_n = 4\binom{4}{n+1}$$

производных n-го порядка от $\overset{*}{g}_{ik}$ без какого-либо «реального» изменения поля. Это и есть то число, которое мы должны вычесть из числа коэффициентов n-го порядка, чтобы правильно судить о свободе, действительно присущей полю. В результате получим

$$D_n = \binom{4}{n} 4\,\frac{n+4}{n+1} \sim \binom{4}{n} 4\left(1+\frac{3}{n}\right) \sim \binom{4}{n}\left(4+\frac{12}{n}\right).$$

Старые рассуждения давали вместо этого результата ошибочный

$$\binom{4}{n}\left(4+\frac{9}{n}\right).$$

Если устранить эту ошибку в Приложении II, то для ковариантных уравнений характеристические числа z_n будут меньше на три единицы:

Система уравнений	z_n	
Гравитационные уравнения	12 (вместо 15)	Число свободных для выбора коэффициентов n-го порядка
$g^{\substack{kl\\+-}}_{;s} = 0;\quad R_{\underline{ik}} = 0$	42 (вместо 45)	$\Omega_n = \binom{4}{n}\left(\frac{z_1}{n} + \ldots\right)$
$\Gamma_k = 0;\quad R_{\underset{\vee}{ik},l} + \ldots = 0$		

Теорию уравнений поля можно сделать более ясной путем следующих рассуждений.

При логически последовательном подходе к несимметричной теории поля мы рассуждали по такой схеме.

Вводится несимметричный символ Γ^i_{kl} и из него строится тензор кривизны

$$R^i_{klm} = \Gamma^i_{kl,m} - \Gamma^i_{km,l} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{km} + \Gamma^i_{sm}\Gamma^s_{kl}.$$

После свертки

$$R_{kl} = \Gamma^s_{kl,s} - \Gamma^s_{kt}\Gamma^t_{ls} - \Gamma^s_{ks,l} + \Gamma^s_{kl}\Gamma^t_{st}.$$

Тогда, следуя Палатини, получаем при бесконечно малой вариации поля

$$\delta R_{kl} = \delta(\Gamma^{\overset{s}{+}}_{\underset{+\,-}{k\,l}})_{;s} - (\delta\Gamma^s_{\underset{+}{k s}})_{;l},$$

что естественным образом обобщает выражение, появляющееся в случае симметричного поля. Чтобы сформулировать вариационный принцип с помощью R_{ik}, введем несимметричный тензор g_{kl} и его контравариантную тензорную плотность $\mathfrak{g}^{ik}$. Затем, используя оба поля, образуем скалярную плотность

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{kl}R_{kl},$$

интеграл по пространству от которой варьируется по $\mathfrak{g}^{kl}$ и Γ^m_{kl} независимо. После использования метода Палатини, варьирование приводит к уравнениям поля

$$\left.\begin{aligned} R_{kl} &= 0 \\ -\mathfrak{g}^{\underset{+-}{kl}}_{;m} + \mathfrak{g}^{\underset{+-}{kt}}_{;t}\delta^l_m + \mathfrak{g}^{kl}\Gamma_m + \mathfrak{g}^{kt}\Gamma_t\delta^l_m &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(I)}$$

где

$$\frac{1}{2}(\Gamma^s_{ls} - \Gamma^s_{sl}) = \Gamma^s_{\underset{\vee}{ls}} = \Gamma_l.$$

Появление последних двух членов в левой части второго уравнения показывает, что вариационный принцип не приводит непосредственно к уравнению $g_{\underset{+-}{ik;l}} = 0$, которого мы могли бы ожидать по аналогии с симметричной теорией. Эти члены возникают по той причине, что величину $(\mathfrak{g}^{kl}\,\delta\Gamma^s_{kl})_{;s}$, которая имеет вид $\mathfrak{A}^{\overset{s}{+}}_{;s}$, *нельзя* заменить на $\mathfrak{A}^s_{;s}$ и, следовательно, при интегрировании ее нельзя преобразовать в интеграл по поверхности. Преодоление этой трудности составляет существенную задачу при выводе уравнений поля.

В Приложении II эта задача решается введением дополнительно условия $\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ks}}_{,s} = 0$ для поля g_{ik}. Несколько проще следующий путь.

Заменим в вариационном принципе поле смещений Γ^l_{ik} на выражение $\Gamma^s_{kl} = \Gamma^{s*}_{kl} + \delta^s_k\lambda_l$, где λ_l — вектор. По своим трансформационным свойствам Γ^{s*}_{kl} снова образует поле смещений. При заданном Γ^{s}_{kl} остается произвол в выборе λ_l. Следовательно, после варьирования можно выбрать λ_l так, чтобы выполнялось условие («нормировка»):

$$\overset{*}{\Gamma}_k = \frac{1}{2}(\Gamma^{s*}_{ks} - \Gamma^{s*}_{sk}) = 0.$$

Это, собственно, и было причиной введения Γ^{s*}_{kl}.

В вариационном принципе мы можем независимо варьировать Γ^{i*}_{kl} и λ_k. Тем не менее варьирование дает не $64+4$, а только 64 независимых алгебраических уравнения, так как варьирование по λ_l эквивалентно определенным образом выбранному варьированию по Γ^{i*}_{kl}.

Подставляя новые Γ^{i*}_{kl} в свернутый тензор кривизны, путем прямого вычисления получаем выражение

$$R_{kl} = \overset{*}{R}_{kl} - (\lambda_{k,l} - \lambda_{l,k}),$$

где $\overset{*}{R}_{ik}$ — та же функция от Γ^{i*}_{kl}, что R_{ik} от Γ^{i}_{kl}. Подынтегральное выражение в вариационном принципе теперь принимает вид

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{kl}[\overset{*}{R}_{kl} - (\lambda_{k,l} - \lambda_{l,k})].$$

Варьируя λ_k, получаем

$$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ks}}_{,s} = 0,$$

тогда как варьирование по Γ^{s*}_{kl} приводит к результату

$$-\mathfrak{g}^{\overset{kl}{+-}}_{\underset{*}{;s}} + \mathfrak{g}^{\overset{kt}{+-}}_{\underset{*}{;t}}\delta^l_s + \mathfrak{g}^{kl}\overset{*}{\Gamma}_s + \mathfrak{g}^{kt}\overset{*}{\Gamma}_t\delta^l_s = 0.$$

Второе из этих уравнений совпадает со вторым из уравнений (I) при условии, что Γ^{i}_{kl} заменено на Γ^{i*}_{kl}. Кроме того, легко убедиться, что первое уравнение становится тождественным второму, если свернуть последнее по индексам s и k.

После нормировки поля Γ^{i*}_{kl} в соответствии с условием $\overset{*}{\Gamma}_k = 0$ второе уравнение принимает вид

$$\mathfrak{g}^{\overset{kl}{+-}}_{\underset{*}{;s}} = 0 \quad \text{и соответственно} \quad g_{\underset{+-}{kl};\underset{*}{s}} = 0,$$

где абсолютное дифференцирование проводится при помощи Γ^{s*}_{kl}. Варьирование по $\mathfrak{g}^{kl}$ дает уравнение

$$\overset{*}{R}_{kl} - (\lambda_{k,l} - \lambda_{l,k}) = 0,$$

или, по исключении λ_k,

$$\overset{*}{R}_{\underline{kl}} = 0,$$

$$\overset{*}{R}_{\underset{\vee}{kl},m} + \overset{*}{R}_{\underset{\vee}{lm},k} + \overset{*}{R}_{\underset{\vee}{mk},l} = 0.$$

Объединяя результаты, получаем тот же набор уравнений, который был выведен в работе при помощи вспомогательного условия $\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ks}}_{,s} = 0$, а именно

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{g}^{\overset{kl}{+-}}_{;m} = 0; \qquad && \Gamma_k = 0 \\ &R_{\underline{kl}} = 0; \qquad && R_{\underset{\vee}{kl},m} + R_{\underset{\vee}{lm},k} + R_{\underset{\vee}{mk},l} = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{II}$$

где Γ^{s*}_{kl} всюду заменено на Γ^{s}_{kl}.

Системы (I) и (II) эквивалентны, поскольку они следуют из одного и того же вариационного принципа. Тем не менее легко видеть, что уравнения (II) выражают налагаемые на поле условия более удовлетворительно, чем уравнения (I). Действительно, пусть Γ^{s}_{kl} и $\mathfrak{g}^{kl}$ — решение уравнений (I). Мы получим соответствующее решение уравнений (II), положив

$$\Gamma^{s*}_{kl} = \Gamma^{s}_{kl} + \delta^{s}_{k}\lambda_l,$$

$$\overset{*}{\Gamma}_k = \frac{1}{2}(\Gamma^{s*}_{ks} - \Gamma^{s*}_{sk}) = 0$$

и вычислив Γ^{s*}_{kl} из Γ^{s}_{kl}. Исключение λ_l дает

$$\Gamma^{s*}_{kl} = \Gamma^{s}_{kl} + \frac{2}{3}\delta^{s}_{k}\Gamma_l.$$

Следовательно, каждый раз, когда задано поле $g_{kl} - \Gamma^{s}_{kl}$, удовлетворяющее системе (I), существует одно и только одно поле $g_{kl} - \Gamma^{s*}_{kl}$, удовлетворяющее системе (II). Обратное, однако, не справедливо, поскольку правая часть этого уравнения удовлетворяет четырем алгебраическим тождествам, так что его нельзя разрешить относительно Γ^{s}_{kl}. Следовательно, имеются различные по форме решения системы (I), отвечающие одному и тому же решению системы (II).

Дополним эти рассуждения следующим. Система (II) полна, хотя число переменных поля $(16 + 64)$ на четыре единицы больше, чем число уравнений $(64 + 10 + 4 + 4)$, уменьшенное на число тождеств $(4 + 1 + 1)$, как это и должно быть в релятивистских теориях. Соответственно, в общем решении не появится произвольных функций четырех координат. В этом смысле система (II) полностью определяет переменные поля, фигурирующие в ней.

То же самое выполнялось бы для системы (I), если бы, кроме тождеств Бианки, не существовало еще одно тождество. В этом случае система уравний содержала бы (16 + 64) переменных пóля, (16 + 64) уравнения и четыре тождества; число переменных оказывалось бы в результате на четыре больше, чем разность между числом уравнений и числом тождеств. Существует, однако, дополнительное тождество. Если обозначить через $\mathfrak{A}_m^{kl}$ левую часть второго уравнения в системе (I), то можно показать, что существует следующее тождество:

$$\mathfrak{A}^{st}_{s,t} \equiv 0.$$

Существование этого тождества соответствует инвариантности R_{kl} и, следовательно, $\mathfrak{H}$ относительно преобразования $\Gamma^{s*}_{kl} = \Gamma^{s}_{kl} + \delta^s_k \lambda_{,l}$, где λ — произвольный скаляр.

Отсюда следует, что система (I) недостаточна для определения своих (16 + 64) переменных пóля, и в общем решении появится произвольная функция четырех координат. Таким образом, чтобы сделать систему (I) полностью определенной по отношению к выбранным переменным, мы должны присоединить к ней произвольное скалярное уравнение.

Можно выбрать, например, одно из следующих двух уравнений:

$$g^{kl}\Gamma_k\Gamma_l = 0,$$

$$(\mathfrak{g}^{ks}\Gamma_s)_{,k} = 0.$$

Порядок дифференцирования равен 1 в первом уравнении и 2 во втором. (Соответственно, в системе (II) полная определенность достигается произвольной нормировкой, согласно условию $\Gamma_i = 0$.)

Теперь для каждой из этих двух полностью определенных систем можно вычислить характеристическое число z_1, дающее число коэффициентов разложения, которые могут быть выбраны произвольно.

Сравнение систем (II) и (I) дает :

Система уравнений	z_1
Система (II)	42
Дополненная система (I)	45 или 48

Таким образом, мы видим, что даже после того как система (I) сделана полной, в ней остается на три коэффициента больше, чем в случае, когда законы поля описываются системой (II). Это одна из причин, по которой мы должны предпочесть описание законов поля с помощью системы (II) описанию с помощью системы (I).

Дополнительный аргумент для предпочтения системы (II) можно усмотреть в том, что она удовлетворяет двум условиям.

1. Она содержит наиболее естественное уравнение для определения Γ^s_{kl} по g_{kl}:

$$g_{\underset{+-}{kl;m}} = 0.$$

2. Как уже указывалось в самой работе, система (II) инвариантна по отношению к транспонированию. Здесь мы хотим только подчеркнуть, что при выводе системы (II) можно обойтись без налагаемого заранее на поле g_{kl} условия $\mathfrak{g}^{ks}_{\overset{\vee}{,s}} = 0$.

Причины, заставившие меня считать неестественным введение других добавочных членов в вариационный принцип, конечно, остаются теми же. Такие добавочные члены не могли были бы содержать Г, иначе уравнение $g_{\underset{+-}{kl;m}} = 0$, определяющее Г, перестало бы быть справедливым; поэтому они могут зависеть только от g_{kl} и их производных. Такие добавки нарушили бы однородную структуру теории.

На клапане суперобложки 4-го издания помещено следующее высказывание Эйнштейна:

«Теорию относительности можно рассматривать как итог борьбы с фундаментальным представлением физики Галилея и Ньютона, а именно, представлением об «инерциальной системе». Пересмотр основ теории был вызван существенными результатами электромагнитных и оптических экспериментов. Прежде лишь очень немногие были серьезно озабочены призрачным понятием инерциальной системы. Лейбниц, Ньютон, Риман и Э. Мах были теми мыслителями, которые ясно обнаруживали интерес к этой проблеме.

Специальная теория относительности приспособила инерциальную систему к основному закону постоянства скорости света; этот вопрос не вызывает сейчас сомнения — после результатов, полученных в исследованиях Г. А. Лоренца по электродинамике движущихся тел. Эта первая фаза теории относительности представлялась физикам того времени революционной, в особенности потому, что она отбросила понятие одновременности; теория, однако, оставила нетронутым независимый, объективный характер инерциальной системы.

Общая теория относительности впервые уничтожила инерциальную систему, заменив ее «полем смещений». После этого пространство потеряло свое независимое существование и стало в значительной степени свойством поля. Без опытного факта эквивалентности инертной и гравитационной масс вряд ли было бы возможно психологически ликвидировать инерциальную систему, несмотря на то, что в наших руках был готовый аппарат в форме римановской теории метрического континуума и понятой Минковским формальной эквивалентности трех пространственных измерений и времени.

Последний шаг теории состоит в унификации понятия поля, характеризуемой переходом к несимметричным полям. Трудности выбора законов поля были полностью преодолены в последние несколько месяцев. Аргументы, существенные для понимания этого, подробно изложены в Приложении II».

Такую же уверенность в близости завершения теории Эйнштейн высказывает и в статье для журнала «Scientific American» (статья 137). Однако этим надеждам не суждено было осуществиться.

ЗАМЕЧАНИЕ ПО ПОВОДУ КРИТИКИ ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ*

Соображение доктора Джонсона [1] затрагивает вопрос фундаментальной важности, заслуживающий подробного рассмотрения. Чтобы выявить суть дела, приведу сначала следующую аналогию нашему случаю.

Инвариантны ли законы электромагнитного поля по отношению к изменению знака электрических зарядов, или, что эквивалентно, знака компонент электромагнитного поля? Мы склоняемся ответить на этот вопрос отрицательно, основываясь на наших познаниях, почерпнутых из опыта. В самом деле, если мы находим решение, описывающее атом с положительно заряженным ядром и отрицательно заряженными окружающими частицами, то существует и другое решение, в котором электрический заряд ядра отрицателен, а окружающих его частиц — положителен. Это противоречит данным опыта, согласно которым электрический заряд ядра всегда положителен. Следовательно, мы заключаем, что уравнения не обладают сформулированным выше свойством инвариантности.

Однако это заключение неосновательно. Действительно, предположим, что законы электромагнитного поля все-таки обладают этим свойством инвариантности. Возможно, что преобладание ядерных электрических зарядов одного знака связано с тем, что конфигурации противоположных зарядов неустойчивы. Это привело бы к преобладанию одного знака электрического заряда ядра. Рассмотрение математических возможностей показывает, что это альтернативное объяснение (при котором законы обладают указанной выше инвариантностью) оказывается более правдоподобным.

Вернемся теперь к проблеме, которая нас здесь интересует.

* *A Comment on a Criticism of Unified Field Theory*. Phys. Rev., 1953, 89, 321.

[1] C. P. Johnson. Phys. Rev., 1953, 89, 320.

Чтобы система уравнений поля была приемлема с физической точки зрения, она должна объяснять атомистическую структуру физической реальности. Для этого она должна иметь характерные свойства:

1) квазилокализацию массы (т. е. энергии) и электрического заряда;

2) области пространства, соответствующие «частицам», имеют дискретные массу и заряд. Иными словами, если существуют элементарные решения уравнений, которые зависят от непрерывного параметра, то уравнения поля не должны допускать одновременного существования в пределах одной системы таких элементарных решений, которые отвечают произвольным значениям их параметров. Если же теория не обладает этими свойствами, т. е. если они не вытекают из теории, то теория неприемлема.

Разобьем теперь все мыслимые системы уравнений поля на два класса соответственно тому, «однородны отдельные уравнения по отношению к порядку дифференцирования» или нет. Под «однородными» мы понимаем уравнения такого типа, как, например, гравитационные уравнения для пустого пространства ($R_{ik} = 0$). Выражение R_{ik} состоит из членов, каждый из которых является либо линейным по вторым производным от g_{ik} по координатам, либо квадратичным по первым производным от g_{ik}. Мы говорим тогда, что выражение R_{ik} является «однородным (второго порядка) относительно дифференцирования по координатам».

Мне кажется, что все релятивистские системы уравнений, обладающие однородной структурой, т. е. являющиеся набором логически независимых членов, обладают этим свойством однородности. Это справедливо также и для той системы уравнений, которую я назвал «обобщенными уравнениями гравитации».

Создается впечатление, что любая такая однородная система уравнений должна быть несовместима с приведенным выше требованием (2), поскольку любая однородная система уравнений имеет семейство решений, которые непрерывно зависят от параметра k. Это, по сути дела, то свойство, которое Джонсон использовал в своих рассуждениях.

Для краткости обозначим переменные поля через g. Пусть $g(x)$ — решение уравнений поля; тогда $g(kx)$ также будет решением при любом значении k. О таком многообразии решений будем говорить, как о семействе «подобных решений». Здесь физически важно, что как масса, так и заряд «частицы» непрерывно меняются при изменении параметра k (все решения вложены в одно и то же пространство Минковского). Такой мир, построенный из решений с непрерывно меняющимися значениями параметра k, не удовлетворяет требованию (2).

Однако это заключение основано на предположении, что такие решения с произвольно различающимися значениями k могут существовать одновременно в одном и том же мире, так что взаимодействие их не разрушает. Могло оказаться, например, что взаимодействие приводит к недопустимым сингулярностям поля (именно это происходит в статической задаче двух тел в теории, учитывающей только гравитацию). Однако, если уравнения поля исключают возможность одновременного существования подобных решений в одном и том же мире, то такого рода возражение против теории снимается. Аргументы Джонсона тогда не могут быть использованы, поскольку они также основаны на предположении о существовании подобных решений.

Приведенные выше соображения показывают, насколько осторожным следует быть при использовании доводов общего характера для высказывания достоверных суждений относительно допустимости какой-либо теории поля с эмпирической точки зрения.

Поступила 12 ноября 1952 г.

Джонсон указывает на противоречие, к которому можно прийти, если предположить, что в единой теории поля (которая определяет массу и заряд частицы) из любого решения можно получить новое преобразованием подобия координат $x_i' = kx_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

О СОВРЕМЕННОМ СОСТОЯНИИ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ*

(Совместно с Б. Кауфман)

Излагаемые ниже исследования, посвященные проблеме обобщения уравнений гравитации на случай несимметричного поля, не содержат ничего существенно нового. Тем не менее они позволяют отдать предпочтение одной из многих незначительно отличающихся друг от друга систем уравнений, выводимых из вариационных принципов, и в силу этого кажущихся на первый взгляд одинаково допустимыми. В части Б будет показано, почему мы считаем, что другая система уравнений (называемая «сильной системой» [1] и не выводимая из вариационного принципа) неприемлема с физической точки зрения.

А. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ ИЗ НАИБОЛЕЕ ЕСТЕСТВЕННОГО ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА БЕЗ АПРИОРНЫХ УСЛОВИЙ, НАЛАГАЕМЫХ НА ПОЛЕ

Введение несимметричного поля приводит к некоторым усложнениям в выводе уравнений поля. В приводимом ниже кратком изложении основного формализма мы покажем, каким образом можно обойти эти трудности.

1. *Абсолютное дифференцирование.* Если задано поле несимметричных параллельных переносов Γ^l_{ik}, то абсолютная производная от вектора не будет определяться однозначно. Дело обстоит так потому, что $\widetilde{\Gamma}^l_{ik} (\equiv \Gamma^l_{ki})$

* *Sur l'Etat Actuell de la Théorie gênérale de la Gravitation*, в сб. «Луи де Бройль, физик и мыслитель», стр. 321—342.

[1] A. Einstein. The Meaning of Relativity, 3d Edition, Appendix II, p. 144. (Приложение II помещено в виде, переработанном Эйнштейном; при этом он исключил обсуждение «сильной системы».— *Ред.*)

представляет собой также поле параллельных переносов таких, что [2]

$$\frac{1}{2}\left(\Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{ki}\right) \equiv \Gamma^l_{\underline{ik}}.$$

Поэтому мы будем различать следующие типы абсолютной производной от контравариантного вектора:

$$A^{\overset{i}{+}}_{;k} \equiv A^i_{,k} + A^s\Gamma^i_{sk},$$

$$A^{\overset{i}{-}}_{;k} \equiv A^i_{,k} + A^s\Gamma^i_{ks},$$

$$A^{\overset{i}{0}}_{;k} \equiv A^i_{,k} + A^s\Gamma^i_{\underline{sk}}.$$

Аналогично рассматриваются и ковариантные векторы.

Рассмотрим теперь правило дифференцирования тензорной плотности w. Пусть g_{ik} — несимметричный ковариантный тензор, а g^{ik} — соответствующий ему контравариантный тензор, определяемый соотношением

$$g_{ik}g^{ik} = g_{is}g^{it} = \delta^t_s.$$

Образуем тензор

$$g_{\underset{+-}{ik;l}} \equiv g_{ik;l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\Gamma^s_{lk}.$$

После умножения на $\frac{1}{2}\, g^{ik}$ и свертывания по i и k мы получим вектор

$$\frac{w_{,l}}{w} - \Gamma^s_{\underline{ls}},$$

где w — скалярная плотность, определяемая из соотношения $w^2 = -\operatorname{Det}(g_{ik})$. Произведение этого вектора на скалярную плотность w даст нам векторную плотность, определяемую как абсолютная производная от скалярной плотности w:

$$w_{;l} \equiv w_{,l} - w\Gamma^s_{\underline{ls}}.$$

....

[2] Несимметричные тензоры Γ^l_{ik} обычно разлагают на симметричную и антисимметричную части:

$$\Gamma^l_{ik} = \Gamma^l_{\underline{ik}} + \Gamma^l_{\underset{\vee}{ik}},$$

где $\Gamma^l_{\underset{\vee}{ik}} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki}\right)$. То же относится и к тензору g_{ik}.

Из этого определения и определения абсолютного дифференцирования тензоров вытекает правило образования абсолютной производной тензорной плотности.

Теперь мы уже в состоянии перейти непосредственно к рассмотрению тех особенностей, которыми обусловлены трудности, возникающие при обобщении уравнений теории гравитации на случай несимметричных полей. Речь идет о дивергенции контравариантного вектора, задающей некоторую плотность. Из сказанного выше для дивергенции векторной плотности вытекают следующие результаты:

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{i}{\mathfrak{A}}{}^{+}_{;i} \equiv \mathfrak{A}^{i}_{,i} + \mathfrak{A}^{s}\Gamma^{i}_{si} - \mathfrak{A}^{s}\Gamma^{i}_{\underline{si}} \equiv \mathfrak{A}^{i}_{,i} + \mathfrak{A}^{s}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{si}} \equiv \mathfrak{A}^{i}_{,i} + \mathfrak{A}^{s}\Gamma_{s}\\
&(\text{здесь } \Gamma_s \equiv \Gamma^{i}_{si}) \text{ и, аналогично,}\\
&\overset{i}{\mathfrak{A}}{}^{-}_{;i} \equiv \mathfrak{A}^{i}_{,i} - \mathfrak{A}^{s}\Gamma_{s},\\
&\overset{i}{\mathfrak{A}}{}^{0}_{;i} \equiv \mathfrak{A}^{i}_{,i}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

В двух первых случаях «абсолютная дивергенция» отличается от обычной дивергенции наличием дополнительного члена, который в этих уравнениях записан вторым. Именно этот член и вызывает некоторые трудности при выводе уравнений поля из вариационного принципа.

2. *Вариационный принцип.* Так же, как и в симметричном случае, мы получаем тензор кривизны Римана с помощью параллельного переноса некоторого вектора вдоль бесконечно малого замкнутого контура:

$$R^{i}_{klm} = (\Gamma^{i}_{kl,m} - \Gamma^{i}_{sl}\Gamma^{s}_{km}) - (\Gamma^{i}_{km,l} - \Gamma^{i}_{sm}\Gamma^{s}_{kl}). \qquad (2)$$

Свертывание по индексам i и m приводит к тензору

$$R_{kl} = (\Gamma^{s}_{kl,s} - \Gamma^{t}_{sl}\Gamma^{s}_{kt}) - (\Gamma^{s}_{ks,l} - \Gamma^{t}_{st}\Gamma^{s}_{kl}). \qquad (3)$$

Рассмотрим теперь несимметричный тензор g_{ik} как обобщение тензора гравитации. Тогда наиболее простой вариационный принцип, какой только можно себе представить, требует, чтобы

$$\delta\left(\int \mathfrak{g}_{ik}R_{ik}\,d\tau\right) = 0, \quad \mathfrak{g}_{ik} = wg_{ik}. \qquad (4)$$

Предполагается, что вариация удовлетворяет условиям с обычными пределами и что тензоры g_{ik} (или $\mathfrak{g}_{ik}$) и Γ^{l}_{ik} варьируются независимо друг от друга.

Замечание. По поводу упомянутого выше гамильтониана можно высказать следующее возражение: этот гамильтониан не инвариантен относительно трансмутации, т. е. не инвариантен относительно преобразования $g_{ik} \to g_{ki}$; $\Gamma^l_{ik} \to \Gamma^l_{ki}$. (В этом свойстве проявляется эквивалентность положительного и отрицательного электричества в теории несимметричного поля.) Несмотря на это, совершенно неожиданным образом оказывается (как мы увидим дальше), что окончательные уравнения поля инвариантны относительно этого преобразования.

Наиболее просто указанная вариация вычисляется по методу, в котором используется метод Палатини, предложенный для случая симметричного поля. Согласно этому методу, при вычислении вариации тензора Γ мы исходим из представления

$$\delta R_{ik} = (\delta \overset{s}{\Gamma}{}^{+}_{\underset{+-}{ik}})_{;s} - (\delta \Gamma^{s}_{\underset{+}{is}})_{;k},$$

аналогичного представлению Палатини в случае симметричного поля.

Проинтегрировав соотношение (4) по частям и воспользовавшись формулами (1), получим под знаком суммы:

$$R_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik} + (-\overset{ik}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;s} + \overset{it}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;t}\delta^k_s + \mathfrak{g}^{ik}\Gamma_s + \mathfrak{g}^{it}\Gamma_t\delta^k_s)\,\delta\Gamma^s_{ik}. \tag{4a}$$

Затем, приравнивая нулю коэффициенты при $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ и $\delta\Gamma^s_{ik}$, находим уравнения поля:

$$R_{ik} = 0 \tag{5}$$

и

$$-\overset{ik}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;s} + \overset{it}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;t}\delta^k_s + \mathfrak{g}^{ik}\Gamma_s + \mathfrak{g}^{it}\Gamma_t\delta^k_s = 0. \tag{6}$$

Второе из этих уравнений имеет чрезвычайно сложный вид, поскольку в нем фигурируют Γ_i. (Величины Γ_i не входили бы в это уравнение, если бы абсолютная дивергенция совпадала с обычной.) Чтобы избежать этого усложнения, можно высказать гипотезу о том, что для параллельных переносов поля $\Gamma_i = 0$. (Такую гипотезу вводят и на самом деле в «сильной системе» уравнений.) Однако, благодаря исследованиям Шредингера, мы в настоящее время знаем, что прибегать к такому косвенному методу нет необходимости. Если в уравнении (6) произвести свертывание по s и k и воспользоваться полученным при этом результатом для того, чтобы исключить $\overset{ik}{g}{}^{+-}_{;t}$, то из уравнения (6) получим уравнение

$$-\overset{ik}{\mathfrak{g}}{}^{+-}_{;s} + \mathfrak{g}^{ik}\Gamma_s - \frac{2}{3}\,\mathfrak{g}^{it}\Gamma_t\delta^k_s = 0. \tag{6a}$$

Введем теперь, вслед за Шредингером, новое поле параллельных переносов:

$$\underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{ik} \equiv \Gamma^{s}_{ik} + \frac{2}{3}\,\delta^{s}_{i}\,\Gamma_{k}, \tag{7}$$

которое удовлетворяет условию

$$\underset{0}{\Gamma}_{i} \equiv \underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{\check{is}} \left(= \Gamma^{s}_{\check{is}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,(1-4)\,\Gamma_{i}\right) = 0. \tag{7а}$$

В этих переменных уравнение (6а) примет следующий простой вид:

$$\underset{0}{\mathfrak{g}}{}^{\overset{ik}{+-}}_{;s} \left(\equiv \mathfrak{g}^{ik}_{,s} + \mathfrak{g}^{it}\underset{0}{\Gamma}{}^{k}_{st} + \mathfrak{g}^{tk}\underset{0}{\Gamma}{}^{i}_{ts} - \mathfrak{g}^{ik}\underset{0}{\Gamma}{}^{t}_{\underline{st}}\right) = 0. \tag{6б}$$

Таким образом, выполнив вариацию, мы получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \underset{0}{\mathfrak{g}}{}^{\overset{ik}{+-}}_{;s} &= 0,\\ R_{ik} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

В случае симметричного поля 40 уравнений $\underset{0}{g}{}^{\overset{ik}{+-}}_{;s} = 0$ определяют 40 (симметричных) величин $\underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{ik}$, которые в этом случае, разумеется, совпадают с Γ^{s}_{ik}. Случай несимметричного поля отличается от случая симметричного поля тем, что 64 уравнения $\underset{0}{\mathfrak{g}}{}^{ik}_{;s} = 0$ уже нельзя разрешить относительно $\underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{ik}$ при произвольном поле g_{ik}. Дело обстоит так потому, что среди величин $\underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{ik}$ имеется лишь 60 независимых, что можно усмотреть из условия (7а). В самом деле, из (7а) мы получаем тождество:

$$\frac{1}{2}\left(\underset{}{\mathfrak{g}}{}^{\overset{it}{+-}}_{;t} - \mathfrak{g}^{\overset{ti}{+-}}_{;t}\right) \equiv \mathfrak{g}^{\check{it}}_{,t}. \tag{7б}$$

Отсюда следует, что уравнения поля $\underset{0}{\mathfrak{g}}{}^{ik}_{;s} = 0$ с необходимостью влекут за собой уравнения

$$\mathfrak{g}^{\check{it}}_{,t} = 0. \tag{7в}$$

Если эти 4 уравнения относительно g^{ik} выполняются, то из 64 уравнений $\underset{0}{\mathfrak{g}}{}^{ik}_{;s} = 0$ алгебраически независимых останется лишь 60. Этих уравнений ровно столько, сколько необходимо для того, чтобы найти 60 величин $\underset{0}{\Gamma}{}^s_{ik}$.

В заключение следует еще добавить, что переменные g_{ik} и Γ^s_{ik}, определяемые из системы (1), связаны четырьмя тождествами, которые соответствуют тождествам Бианки в теории симметричного поля. Их нетрудно получить, например, пользуясь методом Г. Вейля. Так же, как и в теории симметричного поля, наличие четырех тождеств Бианки означает, что 4 из 16 величин g_{ik} (или 10 величин g_{ik} в теории симметричного поля) можно выбрать произвольно, как это и должно быть при общей ковариантности рассматриваемой системы уравнений.

3. *Окончательный вид полученной системы уравнений.* Поскольку первое из уравнений (1) допускает введение лишь 60 независимых величин $\underset{0}{\Gamma}{}^s_{ik}$, во втором уравнении удобно произвести замену переменных по формуле (7). В результате R_{ik} окажется функцией, зависящей от 60 величин $\underset{0}{\Gamma}{}^s_{ik}$ и 4 величин Γ_i (не зависящих от $\underset{0}{\Gamma}{}^s_{ik}$), вместо того, чтобы зависеть от 64 величин Γ^s_{ik}.

Выполнив эту замену переменных, мы получим:

$$\underset{0}{R}_{ik} + \frac{2}{3}(\Gamma_{i,k} - \Gamma_{k,i}) = 0. \tag{8}$$

Здесь $\underset{0}{R}_{ik}$ представляет собой выражение, которое получится, если в выражении (3) вместо Γ^s_{ik} подставить $\underset{0}{\Gamma}{}^s_{ik}$. Так как несимметричная часть тензора $\underset{0}{\Gamma}{}^s_{\underset{\vee}{ik}}$ обращается в нуль, мы можем заменить два последних члена $\underset{0}{R}_{ik}$ следующим выражением:

$$-\underset{0}{\Gamma}{}^s_{\underline{is},k} + \underset{0}{\Gamma}{}^s_{ik}\underset{0}{\Gamma}{}^t_{\underline{st}}.$$

Затем это выражение можно записать в виде

$$-\frac{1}{2}(\underset{0}{\Gamma}{}^s_{\underline{is},k} + \underset{0}{\Gamma}{}^s_{\underline{ks},i}) + \underset{0}{\Gamma}{}^s_{ik}\,\underset{0}{\Gamma}{}^t_{st}$$

по следующей причине: умножив уравнение $\underset{0}{g}{}^{\overset{ik}{+-}}_{;s} = 0$ на g^{ik} и произведя свертывание по индексам i и k, мы получим

$$\frac{w_{,s}}{w} - \underset{0}{\Gamma}{}^i_{sk} = 0,$$

откуда

$$\underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{i\underline{s},\,k} = \underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{k\underline{s},\,i}.$$

Поэтому в соотношении (8) мы можем вместо $\underset{0}{R}_{ik}$ записать

$$\underset{0}{R}_{ik} = \underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{ik,\,s} - \underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{it}\Gamma^{t}_{sk} - \frac{1}{2}\left(\underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{i\underline{s},\,k} + \underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{ks,\,i}\right) + \underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{ik}\underset{0}{\Gamma}{}^{t}_{st}.$$

Наконец, поскольку величины Γ_i входят лишь во второе уравнение системы (1), представляется естественным исключить их из системы (1), а следовательно, и из соотношения (8). В результате мы получим:

$$\underset{0}{R}_{\underline{ik}} = 0, \tag{8б}$$

$$\underset{0}{R}_{\underset{\vee}{ik},\,l} + \underset{0}{R}_{\underset{\vee}{kl},\,i} + \underset{0}{R}_{\underset{\vee}{li},\,k} = 0. \tag{8а}$$

Теперь уже величины Γ_i не входят более в уравнения поля. Поэтому мы можем изменить обозначения и вместо $\underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{ik}$ писать Γ^{s}_{ik}. Однако, поступая так, мы вынуждены присоединять к нашей системе уравнений условие $\Gamma_i = 0$ (которое в первоначальных обозначениях получалось при определении величин $\underset{0}{\Gamma}{}^{s}_{ik}$ по величинам Γ^{s}_{ik}). Итак, исходя из наиболее простого вариационного принципа, мы сразу же получаем хорошо известную [3] систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} g_{\underset{+-}{ik};\,l} &= 0,\\ \Gamma_i &= 0,\\ R_{\underline{ik}} &= 0,\\ R_{\underset{\vee}{ik},\,l} + R_{\underset{\vee}{kl},\,i} + R_{\underset{\vee}{li},\,k} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1а}$$

Здесь R_{ik} задается соотношением (3а). Эта система уравнений остается инвариантной при преобразованиях величин g_{ik} и Γ^{s}_{ik}.

---

[3] A. Einstein, E. Strauss, Ann. of Math., 47, 1946, 731 (Статья 130.)

Б. ИСКЛЮЧЕНИЕ «СИЛЬНОЙ СИСТЕМЫ» ИЗ РАССМОТРЕНИЯ

Приведенный выше вывод уравнений поля является гораздо более убедительным, чем прежние выводы. Тем не менее нельзя отрицать, что существуют и другие вариационные принципы, которые (несмотря на то что они менее естественны, чем принцип, указанный в настоящей работе) приводят к несколько иным системам уравнений. Эти различные системы уравнений содержатся в «сильной системе» (которую нельзя вывести из вариационного принципа).

Ввиду этого «сильная система» представляется наиболее подходящей. Однако имеется еще один вопрос, который также надлежит принимать во внимание: какая из двух совокупностей решений достаточно обширна для того, чтобы соответствующая система уравнений могла иметь физический смысл? Ниже мы хотим показать, что «сильная система» предоставляет мало свободы и нам приходится исключить ее из рассмотрения. Для доказательства этого утверждения мы воспользуемся методом, который одинаково применим и в случае симметричного поля. Вот почему поучительно рассмотреть сначала уравнения гравитационного поля, чтобы понять, почему такие ограничения не возникают в этом случае.

1. *Симметричное поле.* Разложим решение, соответствующее слабому полю, в ряд по степеням параметра ε:

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \varepsilon \underset{1}{g}_{ik} + \varepsilon^2 \underset{2}{g}_{ik} + \ldots.$$

Аналогичным образом разложим Γ^s_{ik}:

$$\Gamma^s_{ik} = \varepsilon \underset{1}{\Gamma}{}^s_{ik} + \varepsilon^2 \underset{2}{\Gamma}{}^s_{ik} + \ldots$$

(здесь η_{ik} — метрический тензор пространства Минковского). Мы хотим, чтобы эти ряды тождественно относительно ε удовлетворяли уравнениям поля $g_{ik;\,l} = 0$ и $R_{ik} = 0$. Тогда первое из этих уравнений в первом и втором приближениях запишется в виде:

$$\underset{1}{g}_{ik,\,l} - \eta_{sk} \underset{1}{\Gamma}{}^s_{il} - \eta_{is} \underset{1}{\Gamma}{}^s_{lk} = 0, \tag{9а}$$

$$(\underset{2}{g}_{ik,\,l} - \underset{1}{g}_{sk} \underset{1}{\Gamma}{}^s_{il} - \underset{1}{g}_{is} \underset{1}{\Gamma}{}^s_{lk}) - \eta_{sk} \underset{2}{\Gamma}{}^s_{il} - \eta_{is} \underset{2}{\Gamma}{}^s_{lk} = 0. \tag{9б}$$

Из уравнения (9а) мы получим, что

$$\underset{1}{\Gamma}{}^s_{ik} = \underset{1}{\left[\frac{s}{ik}\right]} \equiv \frac{1}{2}(-\underset{1}{g}_{ik,s} + \underset{1}{g}_{is,\underline{k}} + g_{\underline{sk},i})$$

(отдельный подчеркнутый индекс означает, что он поднят — или опущен — с помощью тензора η^{ik} или η_{ik}). Подставляя в уравнение (9б) выражения для $\underset{1}{\Gamma}{}^s_{ik}$ через $\underset{1}{g}_{ik}$, мы сможем представить $\underset{2}{\Gamma}{}^s_{ik}$ в виде функции от $\underset{1}{g}_{ik}$ и g_{ik}. Имеем:

$$\underset{2}{\Gamma}{}^s_{ik} = \underset{2}{\left[\frac{s}{ik}\right]} + g_{iks},$$

где $\underset{2}{\left[\frac{s}{ik}\right]}$ связано с $\underset{2}{g}_{ik}$ такими же линейными соотношениями, как $\left[\frac{s}{ik}\right]$ с $\underset{1}{g}_{ik}$, а g_{iks} представляет собой известное выражение, квадратичное относительно $\underset{1}{g}_{ik}$. Затем из уравнений

$$R_{ik} = 0 = \Gamma^s_{ik,s} - \Gamma^s_{is,k} - \Gamma^l_{is}\Gamma^s_{lk} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{sl}$$

мы получим два первых приближения:

$$\underset{1}{R}_{ik} = 0 = \underset{1}{\Gamma}{}^s_{ik,s} - \underset{1}{\Gamma}{}^s_{is,k}, \tag{10а}$$

$$\underset{2}{R}_{ik} = 0 = \underset{2}{\Gamma}{}^s_{ik,s} - \underset{2}{\Gamma}{}^s_{is,k} - (\underset{1}{\Gamma}{}^l_{is}\underset{1}{\Gamma}{}^s_{lk} - \underset{1}{\Gamma}{}^s_{ik}\underset{1}{\Gamma}{}^t_{st}). \tag{10б}$$

Выразим $\underset{1}{\Gamma}$ и $\underset{2}{\Gamma}$ через $\underset{1}{g}$ и $\underset{2}{g}$ и отделим линейные члены от квадратичных. Из уравнений (10а) получим:

$$0 = \underset{1}{\left[\frac{s}{ik}\right]}_{,s} - \underset{1}{\left[\frac{s}{is}\right]}_{,k} \equiv \underset{1}{\mathcal{L}}_{ik} \equiv \frac{1}{2}(-\underset{1}{g}_{ki,\underline{s},s} + \underset{1}{g}_{\underline{sk},si} + \underset{1}{g}_{\underline{si},sk} - g_{\underline{ss},ik}), \tag{11а}$$

в то время как из уравнений (10б) получим

$$0 = \underset{2}{\left[\frac{s}{ik}\right]}_{,s} - \underset{2}{\left[\frac{s}{is}\right]}_{,k} + \underset{2}{Q}_{ik} \equiv \underset{2}{\mathcal{L}}_{ik} + \underset{2}{Q}_{ik}. \tag{11б}$$

Величина $\underset{2}{\mathcal{L}}_{ik}$ в этом уравнении оказывается связанной с $\underset{2}{g}$ той же линейной зависимостью, что и величина $\underset{1}{\mathcal{L}}_{ik}$ с $\underset{1}{g}$. Величина $\underset{2}{Q}_{ik}$ квадратична относительно $\underset{1}{g}$. Ее можно вычислить в явном виде совершенно строго.

Таким образом, проблема решения уравнений гравитационного поля (второго порядка) сводится к проблеме решения двух систем линейных дифференциальных уравнений (из которых вторая система (11б) — неоднородная). Решив систему (11а), мы подставим в систему (11б) функции $\underset{1}{g}_{ik}$, которые теперь уже будут известными, и решим систему (11б).

Ниоткуда, однако, не следует и заранее вовсе не очевидно, что система (11б) имеет решение, и вот почему. Между величинами $\mathcal{L}_{ik}$ существует 4 тождества:

$$D_i(g_{st}) \equiv \left(\mathcal{L}_{\underline{ik}} - \frac{1}{2}\,\eta_{\underline{ik}}\mathcal{L}_{\underline{ss}}\right)_{,\,k} \equiv 0. \tag{12}$$

Эти тождества остаются в силе в приближениях всех порядков. Но тогда, применив к уравнениям (11б) дифференциальный оператор D_i, получим

$$D_i(\underset{2}{Q}_{st}) = 0. \tag{13}$$

Уравнения (13) представляют собой 4 дополнительных уравнения, которым должны удовлетворять функции $\underset{1}{g}\ldots$. Вообще говоря, нет никаких оснований считать, что они удовлетворяют этим уравнениям. Однако с помощью вполне строгих вычислений можно показать, что уравнения (13) удовлетворяются тождественно. (Тот факт, что уравнения (13) удовлетворяются тождественно, имеет глубокую причину: наличие 4 тождеств Бианки, в чем нетрудно убедиться, разлагая эти тождества в ряд по степеням малого параметра.) Это означает, что каждому решению уравнений (11а), полученных в первом приближении, отвечает некоторое решение уравнений (11б), полученных во втором приближении.

2. *Несимметричное поле.* Иначе обстоит дело, если речь идет о «сильной системе» уравнений для несимметричного поля. В этом случае вместо одной системы (13) мы получаем две системы уравнений, квадратичных относительно $\underset{1}{g}$. Точно так же, как и в случае гравитационного поля, одна из этих систем, получающаяся из симметричной части уравнения $R_{ik} = 0$, автоматически удовлетворяется в силу 4 «тождеств Бианки». Другая система, получаемая из уравнений $R_{\underset{\vee}{ik}} = 0$, тождественно не удовлетворяется. Более того, она представляет собой дополнительное ограничение, налагаемое на решение уравнений первого приближения. Как мы увидим дальше, это ограничение с точки зрения теоретической физики является очень сильным.

Чтобы рассмотреть этот вопрос подробно, применим излагавшийся ранее метод к сильной системе:

$$g_{\underset{+-}{ik};t} = 0, \quad \Gamma_i = 0, \quad R_{ik} = 0.$$

Разложим снова g и Γ по степеням малого параметра и найдем систему уравнений в двух первых приближениях. Выражения, позволяющие получить $\underset{1}{\Gamma}{}^{s}_{ik}$ и $\underset{2}{\Gamma}{}^{s}_{ik}$ как функции от g, уже выписаны в предыдущем параграфе: их можно взять такими же, как и в случае симметричного поля. Поскольку те же соображения остаются в силе и в нашем случае при рассмотрении симметричной части уравнений $R_{ik} = 0$, мы не будем рассматривать здесь эту симметричную часть уравнений, а рассмотрим лишь уравнения

$$R_{\underset{\vee}{ik}} \equiv \frac{1}{2}(R_{ik} - R_{ki}) = 0.$$

В первом приближении мы получим уравнения[4]:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \underset{1}{\Gamma_i} = {}_1\!\begin{bmatrix} s \\ - \\ \underset{\vee}{is} \end{bmatrix} = \underset{1}{g}_{\underset{\vee}{is},\, s} \equiv \underset{1}{\mathfrak{M}_i},\\
0 &= \underset{1}{R}_{\underset{\vee}{ik}} = {}_1\!\begin{bmatrix} s \\ - \\ \underset{\vee}{is} \end{bmatrix}_{,s} - \frac{1}{2}\left({}_1\!\begin{bmatrix} s \\ - \\ is \end{bmatrix}_{,k} - {}_1\!\begin{bmatrix} s \\ - \\ ks \end{bmatrix}_{,i}\right) \equiv \underset{1}{g}_{\underset{\vee}{ik},\, ss} \equiv \underset{1}{\eta}_{\underset{\vee}{ik}}.
\end{aligned}\right\} \tag{14a}$$

Во втором приближении уравнения запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \underset{2}{\Gamma_i} = {}_2\!\begin{bmatrix} s \\ - \\ \underset{\vee}{is} \end{bmatrix} + \underset{2}{p_i} \equiv \underset{2}{\mathfrak{M}_i} + \underset{2}{p_i},\\
0 &= \underset{2}{R}_{\underset{\vee}{ik}} = {}_2\!\begin{bmatrix} s \\ - \\ \underset{\vee}{ik} \end{bmatrix}_{,s} - \frac{1}{2}\left({}_2\!\begin{bmatrix} s \\ - \\ is \end{bmatrix}_{,k} - {}_2\!\begin{bmatrix} s \\ - \\ ks \end{bmatrix}_{,i}\right) + \underset{2}{P}_{\underset{\vee}{ik}} \equiv \underset{2}{\eta}_{\underset{\vee}{ik}} + \underset{2}{P}_{\underset{\vee}{ik}}.
\end{aligned}\right\} \tag{14б}$$

Величины $\underset{2}{\mathfrak{M}_i}$ и $\underset{2}{\eta}_{\underset{\vee}{ik}}$, выраженные как функции от $\underset{2}{g}$, представляют собой те же линейные выражения, которые в первом приближении определялись уравнениями (14а). С другой стороны, $\underset{2}{p_i}$ и $\underset{2}{P}_{\underset{\vee}{ik}}$ являются известными выражениями, квадратичными относительно $\underset{1}{g}$; их можно вычислить абсолютно строго. В результате мы находим 4 тождества между линейными формами $\mathfrak{M}_i$ и $\eta_{\underset{\vee}{ik}}$:

$$E_i(g_{st}) \equiv \eta_{\underset{\vee}{ik},\, k} - \mathfrak{M}_{i,\, \underline{k},\, k} = g_{\underset{\vee}{ik},\, ss\underline{k}} - g_{\underset{\vee}{is},\, \underline{k}ks} = 0. \tag{15}$$

....

[4] Отдельный подчеркнутый индекс означает индекс, поднятый или опущенный с помощью тензоров η^{ik} или η_{ik}, соответственно.

Введем теперь в уравнения (14б) оператор E_i, записав, что

$$0 = \underset{2}{R}_{\underset{\vee}{ik},k} - \underset{2}{\Gamma}_{i,kk} = [\underset{2}{\eta}_{\underset{\vee}{ik},k} - \underset{2}{\mathfrak{M}}_{i,kk}] + [\underset{2}{P}_{\underset{\vee}{ik},k} - \underset{2}{p}_{i,kk}].$$

Первая из этих скобок так же, как и в (15), обращается в нуль, и мы получаем

$$\underset{2}{P}_{\underset{\vee}{ik},k} - \underset{2}{p}_{i,kk} = 0 \tag{16}$$

— четыре уравнения, квадратичных относительно $\underset{1}{g}_{ik}$. (Важно отметить, что поскольку в этом случае не существует тождеств, аналогичных тождествам (15), такого замечания, как мы делали в случае систем (1) и (1а), сделать нельзя.) Довольно длинные, но строгие вычисления позволяют найти явный вид уравнений (16):

$$\underset{1}{g}_{\underset{\vee}{kt},s}(\underset{1}{g}_{\underset{-}{ik},st} + \underset{1}{g}_{\underset{-}{st},ik}) = 0. \tag{17}$$

Уравнения (17) должны удовлетворяться, чтобы обеспечить существование решения $\underset{2}{g}$ дифференциальных уравнений (14б). Однако уравнения (17) автоматически не удовлетворяются. Скорее наоборот, они налагают существенное ограничение на совокупность решений $\underset{1}{g}$ уравнений (14а).

Дело обстоит следующим образом. В первом приближении мы должны удовлетворить линейным уравнениям поля. В силу уравнений (14а) антисимметричная часть решения должна удовлетворять уравнениям

$$\underset{1}{g}_{\underset{\vee}{is},s} = 0$$

и

$$\underset{1}{g}_{\underset{\vee}{ik},ss} = 0,$$

в то время как симметричная часть должна удовлетворять уравнению, получаемому при симметризации уравнения (11а):

$$\underset{1}{g}_{\underset{-}{ik},sk} + \underset{1}{g}_{\underset{-}{ss},ik} - \underset{1}{g}_{\underset{-}{is},ks} - \underset{1}{g}_{\underset{-}{ks},is} = 0.$$

Мы видим, что в первом приближении уравнения поля для симметричных и несимметричных g_{ik} полностью не зависят друг от друга. В силу этого, пока речь идет лишь об этих уравнениях, решения в первом приближении можно считать произвольными.

Однако уравнения (17), билинейные относительно $\underset{1}{g}_{\underset{\vee}{ik}}$ и $\underset{1}{g}_{\underset{-}{ik}}$, ограничивают общность этого предположения. Сейчас мы покажем, что это предположение не является допустимым с физической точки зрения.

Рассмотрим, каким образом наличие поля Шварцшильда, которое мы предполагаем сколь угодно слабым, уменьшает общность произвольного антисимметричного поля на расстоянии a от некоторой массы. В первом приближении поле Шварцшильда можно представить в виде:

$$\underset{1\,-}{g}_{ik} = -\,\delta_{ik}\frac{2m}{\rho},$$

где ρ — расстояние между массой и рассматриваемой точкой поля $\left(\rho^2 = \sum\limits_{\sigma=1}^{3}(x_\sigma - a_\sigma)^2\right)$. Величину $\frac{1}{\rho}$ можно разложить в окрестности начала координат. Мы воспользуемся обозначением

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

и напомним, что $a_4 = 0$. Тогда мы получим, что

$$\underset{1\,-}{g}_{ik,st} = -\frac{2m}{a^5}\delta_{ik}(3a_s a_t - a^2\varepsilon_{st}), \quad i, k = 1, 2, 3, 4$$

(если удерживать только члены низшего порядка по x_i).

Подставляя этот результат в (17), получаем

$$0 = -\frac{2m}{a^5}\underset{1\,\vee}{g}_{kt,s}[3a_s a_t\delta_{ik} + 3a_i a_k\delta_{st} - a^2\delta_{ik}\varepsilon_{st} - a^2\delta_{st}\varepsilon_{ik}].$$

Выберем теперь систему координат так, чтобы направление, соединяющее начало координат с массой, было осью x. Тогда $a_1 = -a$, $a_2 = a_3 = 0$. В результате из уравнения (7) мы получаем 4 условия:

$$\text{при } i = 1 \qquad \underset{1\,\vee}{g}_{14,4} = 0,$$

$$i = 2 \qquad \underset{1\,\vee}{g}_{21,1} - \underset{1\,\vee}{g}_{24,4} = 0,$$

$$i = 3 \qquad \underset{1\,\vee}{g}_{31,1} - \underset{1\,\vee}{g}_{34,4} = 0,$$

$$i = 4 \qquad \underset{1\,\vee}{g}_{41,1} = 0.$$

Первое из этих уравнений означает, что при наличии сколь угодно малой гравитационной массы радиальная составляющая магнитного поля не будет зависеть от времени. Четвертое уравнение означает, что эта радиальная составляющая не должна также зависеть от x. Кроме того, с помощью несложных вычислений можно показать, что эти условия вместе с уравнением (7в) исключают существование плоских «электромагнитных» волн, распространяющихся по всем другим направлениям, кроме направления оси x.

Это замечание показывает, до какой степени «сильные уравнения» ограничивают аддитивность слабых симметричных и антисимметричных полей. По-видимому, оно полностью исключает пригодность «сильной системы» с физической точки зрения.

ПРИЛОЖЕНИЕ[5]

Расширение релятивистской группы

Фундаментальным принципом общей теории относительности является условие ковариантности уравнений поля относительно группы T всех невырожденных преобразований координат. Рассмотрим эту группу T. Интересующие нас переменные поля, например, g_{ik} и Γ^l_{ik}, преобразуются по формулам

$$g^*_{i'k'} = \frac{\partial x_i}{\partial x^*_{i'}} \frac{\partial x_k}{\partial x^*_{k'}} g_{ik} \, (= T\,(g_{ik})),$$

$$\Gamma^{*l'}_{i'k'} = \frac{\partial x^*_{l'}}{\partial x_l} \frac{\partial x_i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x_k}{\partial x^*_{k'}} \Gamma^l_{ik} - \frac{\partial^2 x^*_{l'}}{\partial x_a \partial x_b} \frac{\partial x_a}{\partial x^*_{i'}} \frac{\partial x_b}{\partial x^*_{k'}} \, (= T\,(\Gamma^l_{ik})).$$

Эти уравнения формально определяют природу величин g_{ik} и Γ^l_{ik}. Групповое свойство этих преобразований T можно усмотреть непосредственно из этих уравнений. Оно состоит в том, что произведение двух таких преобразований T_2T_1 снова является преобразованием T.

Введем теперь второй вид преобразований (преобразование A), определяемых следующим образом:

$$A\,(g_{ik}) = g_{ik}$$

(и одинаковых для всех тензоров и всех тензорных плотностей).

$$A\,(\Gamma^l_{ik}) = \Gamma^l_{ik} + \delta^l_i \lambda_k$$

---

[5] *Extension du groupe relativiste.* Сб. «Луи де Бройль, физик и мыслитель», стр. 337—342. Это приложение написано без участия Б. Кауфман.— *Ред.*

(величины λ_k представляют собой 4 произвольные функции от x_i).

Сразу же видно, что эти преобразования A образуют группу. Например,

$$A_2 A_1 (\Gamma^l_{ik}) = A_2 (\Gamma^l_{ik} + \delta^l_{i_1} \lambda_k) = (\Gamma^l_{ik} + \delta^l_{i_1} \lambda_k) + \delta^l_{i_2} \lambda_k = \Gamma^l_{ik} + \delta^l_i (\underset{1}{\lambda_k} + \underset{2}{\lambda_k}).$$

Теперь мы утверждаем, что *совокупность* таких преобразований T и A образует группу. Для тензоров это очевидно непосредственно. Для величин Γ это утверждение следует проверить.

Прежде всего мы составим произведение преобразования A и преобразования T, взяв их в различной последовательности:

$$AT (\Gamma^l_{ik}) = \Gamma^{*l'}_{i'k'} + \delta^{l'}_{i'} \lambda^*_{k'},$$

$$TA (\Gamma^l_{ik}) = T (\Gamma^l_{ik} + \delta^l_i \lambda_k) = \frac{\partial x^*_{l'}}{\partial x_l} \frac{\partial x_i}{\partial x^*_{i'}} \frac{\partial x_k}{\partial x^*_{k'}} (\Gamma^l_{ik} + \delta^l_i \lambda_k) + $$

$$+ \frac{\partial^2 x^*_{l'}}{\partial x_a \partial x_b} \frac{\partial x_a}{\partial x^*_{l'}} \frac{\partial x_b}{\partial x^*_{k'}} = \Gamma^{*l'}_{i'k'} + \delta^{l'}_{i'} \lambda^*_{k'}.$$

В последнем преобразовании предполагается, что λ_k преобразуется при замене переменных как ковариантный вектор. Полученный результат означает, что преобразование A коммутирует с преобразованием T.

Если теперь у нас имеется некое произведение преобразований A и T, взятых в каком-то порядке, то с помощью перестановок преобразований A и T соответствующий ему оператор можно привести к виду:

$$A_1 A_2 \ldots T_1 T_2 \ldots$$

Как A, так и T обладают групповым свойством, поэтому выписанное преобразование эквивалентно некоторому преобразованию вида

$$AT.$$

Тем самым групповое свойство составных преобразований доказано также и в том случае, когда их применяют к Γ^l_{ik}. Мы назовем группу преобразований, составленных из произведения преобразований A и T, группой преобразований U. Это расширение группы T до группы U имеет огромное значение, ибо преобразование U определяется 8 произвольными функциями, а преобразование T — лишь 4 функциями. Все поля, которые получаются друг из друга преобразованием U, будут рассматриваться как различные представления одного и того же поля.

Отсюда вытекает, например, следующее. Величина

$$a_{\underset{+}{i};\, k} = a_{i,\, k} - a_s \Gamma^s_{ik}$$

относительно группы T представляет собой тензор, если a_i — вектор. Но относительно группы U эта величина тензором не является. В самом деле, в результате преобразования A мы имеем

$$a_i^* = a_i,$$

$$\Gamma_{ik}^{*s} = \Gamma_{ik}^s + \delta_i^s \lambda_k.$$

Отсюда

$$(a_{\underset{+}{i};\, k})^* = a_{\underset{+}{i};\, k} - a_i \lambda_k.$$

Таким образом, с помощью абсолютного дифференцирования (в основу которого положена группа T) мы не можем получить из вектора никакой величины, ковариантно преобразующейся относительно группы U. Кроме того, преобразование A переводит симметричные Γ в несимметричные Γ, а антисимметричные Γ в неантисимметричные Γ. Следовательно, в этом случае $\Gamma_{\check{i}k}^l$ не обладает тензорными свойствами, а симметричная часть $\Gamma_{\underline{ik}}^l$ не имеет никакого инвариантного смысла как поле параллельных переносов. В рассматриваемом случае величины Γ определяются лишь своими трансформационными свойствами относительно преобразований U, а не тем, что они приводят к параллельному переносу вектора, удовлетворяющему уравнению $\delta a^i = -\Gamma_s^i + a^s dx_+$.

Что же произойдет с римановой кривизной для несимметричного поля? Относительно группы T величина

$$R_{klm}^i = (\Gamma_{kl,\,m}^i - \Gamma_{sl}^i \Gamma_{km}^s) - (\Gamma_{km,\,l}^i - \Gamma_{sm}^i \Gamma_{kl}^s)$$

представляет собой тензор. В этом уравнении подвергнем величины Γ преобразованию A. Получим

$$R_{klm}^{*i} = R_{klm}^i + \delta_k^i (\lambda_{l,\,m} - \lambda_{m,\,l}).$$

Таким образом, относительно преобразования A величина R_{klm}^i преобразуется не как тензор. То же справедливо и для кривизны, над которой произведено свертывание. Имеем

$$R_{ik}^* = R_{ik} - (\lambda_{i,\,k} - \lambda_{k,\,i}).$$

Поэтому величина $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} R_{ik}$ не имеет никакого инвариантного смысла. В то же время интеграл от этой величины I, взятый по объему (мы не принимаем во внимание интеграла по поверхности), дает

$$I^* = I + 2 \int \mathfrak{g}_{,\,k}^{\check{i}k} \lambda_i \, d\tau.$$

Последний интеграл обращается в нуль, когда на поле g_{ik} априори наложено условие $\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ik}}_{,k} = 0$. После этого инвариантный интеграл I (модуль интеграла по поверхности) позволяет получить с помощью вариации $\mathfrak{g}^{ik}$ и Γ^l_{ik} уравнения поля, ковариантные относительно группы U. Этот процесс вариации отличается от рассмотренного выше процесса лишь тем, что на поле g_{ik} априори наложено условие $\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ik}}_{,k} = 0$.

Таким образом получаются прежде всего уравнения

$$g_{ik;\underset{0}{l}} = 0, \quad R_{\underline{ik}} = 0,$$

$$R_{\underset{\vee}{ik},l} + R_{\underset{\vee}{kl},i} + R_{\underset{\vee}{li},k} = 0.$$

Если $\underset{0}{\Gamma}{}^l_{ik}$ в R_{ik} снова заменить выражением $\underset{0}{\Gamma}{}^l_{ik} = \Gamma^l_{ik} + \frac{2}{3}\delta^l_i\Gamma_k$ (в соответствии с определением Шредингера), в силу чего R_{ik} так же, как это было сделано выше, придется заменить на $\underset{0}{R}_{ik} + \frac{2}{3}(\Gamma_{i,k} - \Gamma_{k,i})$, то получится система уравнений

$$g_{ik;\underset{0}{l}} = 0, \quad \underset{0}{R}_{\underline{ik}} = 0,$$

$$\underset{0}{R}_{\underset{\vee}{ik},l} + \underset{0}{R}_{\underset{\vee}{kl},i} + \underset{0}{R}_{\underset{\vee}{li},k} = 0,$$

которая не содержит никаких других величин, кроме $\underset{0}{\Gamma}{}^l_{ik}$ (для которых $\underset{0}{\Gamma}{}^i = 0$). Смысл расширения группы преобразований до группы U состоит в том, что последняя практически полностью определяет уравнения поля. Например, хотя все решения этих уравнений поля в случае симметричных полей полностью совпадают с решениями уравнений гравитационного поля, тем не менее последняя система не имеет никакого ковариантного смысла относительно группы U. Обобщение группы вынуждает нас к обобщению тех полей, которые определялись первоначальной теорией относительности, на случай несимметричных полей.

Так же, как и в теории симметричного поля, гамильтониан можно обобщить путем добавления к нему интегралов, не содержащих Г, например,

$$\int w\,d\tau,$$

$$\int w g^{ii'} g^{kk'} (\varphi_{i,k} - \varphi_{k,i})(\varphi_{i',k'} - \varphi_{k',i'})\,d\tau.$$

Я считаю, что введения таких интегралов следует по возможности избегать, ибо это привело бы к нарушению единой структуры теории. В частности, следует по возможности избегать введения наряду с g_{ik} и Γ^l_{ik} других переменных поля (например, вектора φ_i).

Еще одно замечание формальчого характера. Если Γ^l_{ik} подвергнуть преобразованию A, то это никак не скажется на $\underset{0}{\Gamma^l_{ik}}$. Таким образом, окончательные уравнения обладают простой инвариантностью относительно группы T. Это обстоятельство ничуть не умаляет разумность введения группы U, ибо группа ограничивает выбор гамильтониана, а следовательно, и закон поля, гораздо сильнее, чем группа T.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ НЕСИММЕТРИЧНОГО ПОЛЯ *

(Совместно с Б. Кауфман)

1. Введение

В теории симметричного поля постоянство сигнатуры поля в пространстве следует из того, что поле g_{ik} регулярно и определитель $|g_{ik}|$ отличен от нуля. Постоянство сигнатуры позволяет различать пространственно-подобные и временно-подобные направления в каждой точке континуума (построить световой конус).

Мы смогли показать, что это важное свойство сохраняется и в теории несимметричного поля. Оно проявляется в том, что симметричная часть $\underline{g}_{ik}$ тензора g_{ik} есть риманова метрика с постоянной сигнатурой. Но для доказательства, помимо предположения $\det(g_{ik}) \neq 0$, приходится постулировать, что величина Γ, которая вычисляется из соотношения

$$g_{\underset{+-}{ik};l} = 0, \tag{1}$$

в каждой точке конечна и алгебраически определена («регулярность Γ-поля»). Из этих двух постулатов следует, что должно выполняться условие $\det(\underline{g}_{ik}) \neq 0$ и, следовательно, сигнатура поля $\underline{g}_{ik}$ постоянна.

Однако оказывается, что этих двух неравенств недостаточно для того, чтобы обеспечить регулярность Γ-поля, и поле g_{ik} должно удовлетворять еще одному алгебраическому неравенству, которое мы в дальнейшем выведем.

В этом исследовании существенно используется существование в каждой точке локальной системы координат, в которой смешанный тензор $g_k^i = g^{is} g_{sk}$ представляется диагональной матрицей $\rho_i \delta_k^i$.

---

* *Algebraic Properties of the Field in the Relativistic Theory of the asymmetric Field.* (With B. Kaufmann). Ann. Math., 1954, 59, 230—244.

Формальное усложнение, вносимое несимметричностью поля, обусловлено главным образом тем, что несимметричное поле g_{ik} обладает алгебраическими инвариантами, которых не имеет симметричное поле. С этим связано то обстоятельство, что решение уравнений $g_{\underset{+-}{ik};l} = 0$ относительно Γ для несимметричного поля оказывается гораздо сложнее, чем в случае симметричного поля. По этой же причине, по-видимому, бесполезно (возможное в принципе) исключение Γ из уравнений поля при исследовании и интегрировании этих уравнений. Однако с формальной точки зрения представляет интерес получить замкнутое выражение для Γ как функции g_{ik} и его первых производных. Среди существующих решений этой задачи отметим работы Бозе [1] и Главатого [2].

В последней части настоящего исследования мы также дали решение этой задачи, которое является относительно более прозрачным в том смысле, что в нем обходится разложение поля на симметричную и антисимметричную компоненты — разложение, не соответствующее духу теории.

Мы хотели бы поблагодарить нашего коллегу В. Баргмана за ряд плодотворных дискуссий.

2. Алгебраические свойства поля g_{ik}

Прежде чем обсуждать решение уравнений (1), рассмотрим алгебраические свойства поля g_{ik}, которое ограничено лишь требованием, чтобы определитель $|g_{ik}|$ был всюду отличен от нуля и, следовательно, знак его, из соображений непрерывности, был всюду одинаков. Потребуем, в частности, чтобы всюду

$$|g_{ik}| < 0,$$

поскольку в областях, где поле достаточно слабо, определитель должен быть отрицателен из физических соображений.

2. 1. Заметим сначала, что в частном случае симметричного поля ($g_{ik} = g_{ki}$) тензор g_{ik} не имеет алгебраических инвариантов. Это эквивалентно тому известному обстоятельству, что тензор g_{ik} путем локальной замены координат можно привести к виду $\varepsilon\delta_k^i$, где $\varepsilon = \pm 1$. Число отрицательных значений ε — «сигнатура» — не меняется при преобразованиях координат.

---

[1] S. N. B o s e. Ann. Math., 1954, 58, 171—176.

[2] V. H l a v a t ý. J. Rational Mech. and Analysis, 1952, 1, 539—562; 1953, 2, 1—52. Ряд алгебраических свойств поля g_{ik}, полученных здесь, был выведен также в двух работах проф. Главатого, с которыми мы ознакомились уже после завершения настоящей работы. (Ср. книгу V. H l a v a t ý, Geometry of Einstein's Unified Field Theory, Groningen, 1957.— *Ред.*)

Для несимметричного тензора g_{ik} дело обстоит иначе, и мы покажем, что такой тензор обладает двумя независимыми инвариантами. Легко видеть, что инварианты g_{ik} следует строить путем свертывания смешанных тензоров, простейшим из которых является тензор $g^i_k = g^{is}g_{sk}$ (или обратный ему $g^i_k = g^{si}g_{ks}$). Смешанный тензор, который можно свернуть в скаляр, очевидно, должен обладать одинаковым числом ковариантных и контравариантных множителей g_{ab} и g^{ab}. Следовательно, достаточно рассмотреть инварианты, построенные из g^i_k, а именно, $I_1 = g^i_i$, $I_2 = g^i_k g^k_i$, $I_3 = g^i_k g^k_l g^l_i$ и т. д. Мы покажем, что лишь два из этих инвариантов независимы. Проще всего убедиться в этом, перейдя в специальную (локальную) систему координат, в которой тензор g^i_k диагонален[3]: $g^{i^*}_k = \rho_{\underline{i}}\delta^i_k$ (как мы убедимся в дальнейшем, такая диагонализация всегда возможна).

В «диагональной системе» инварианты простым образом выражаются через диагональные элементы ρ_i:

$$I_1 = \sum_1^4 \rho_s, \qquad I_2 = \sum_1^4 \rho_s^2, \qquad I_3 = \sum_1^4 \rho_s^3 \text{ и т. д.}$$

Чтобы выполнить диагонализацию, выпишем сначала закон преобразования для g^i_k:

$$g^{i^*}_k = \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^{k^*}} g^a_b. \tag{2}$$

Мы хотим найти преобразование, результатом которого будет диагонализация g^i_k:

$$g^{i^*}_k = \rho_i \delta^i_k. \tag{2a}$$

Если мы умножим соотношение (2) на $\partial x^{k^*}/\partial x^c$ и подставим искомое выражение для $g^{i^*}_k$, то получим

$$\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^c}\rho_i = \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^a} g^a_c,$$

или

$$\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^a}(g^a_c - \delta^a_c \rho_i) = 0. \tag{3}$$

Эти 16 уравнений выполняются при всех i и c и определяют четыре собственных значения ρ_i и закон преобразования $\partial x^{i^*}/\partial x^c$. Собственные зна-

[3] Звездочка у индекса означает, что по нему не выполняется суммирование.

чения находятся из следующего условия существования нетривиального решения однородных уравнений (3):

$$\det(g^a_c - \delta^a_c \rho_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{4}$$

Как известно, процедура диагонализации всегда выполнима, если четыре собственных значения ρ_i различны. В дальнейшем мы увидим, что для рассматриваемых нами полей это условие, вообще говоря, выполняется.

Левая часть уравнения (4) представляет собой полином 4-й степени по ρ, и мы можем переписать это уравнение в следующем виде:

$$\rho^4 - S_1\rho^3 + S_2\rho^2 + S_3\rho + S_4 = 0, \tag{5}$$

где S_1, S_2, S_3 — суммы главных миноров соответственно 1-, 2- и 3-го порядка определителя g^a_b, а $S_4 = \det(g^a_b)$.

Из определения g^a_b следуют соотношения

$$S_4 = +1 \tag{а}$$

и

$$S_3 = S_1. \tag{б}$$

Доказательство: а) $S_4 = |g^a_b| = |g^{as}g_{sb}| = |g^{as}| \cdot |g_{sb}| = |g^{sa}| \cdot |g_{sb}| = |g^{sa}g_{sb}| = |\delta^a_b| = 1.$

б) Как упоминалось выше, элементами матрицы, обратной (g^a_b), являются $g^b_a = g^{sb}g_{as}$, так как $g^b_a g^c_b = g^{sb}g_{as}g^{ct}g_{tb} = \delta^c_a$. С другой стороны, поскольку $|g^a_b| = +1$, элементы g^b_a равны минорам 3-го ранга (ко-факторам g^a_b) определителя $|g^a_b|$. Отсюда

$$S_3 = g^k_k = g^{sk}g_{ks} = g^s_s = S_1.$$

Вследствие соотношений (а) и (б) уравнение (5) приводится к виду

$$\rho^4 - S_1\rho^3 + S_2\rho^2 - S_1\rho + 1 = 0. \tag{6}$$

Таким образом корни этого уравнения зависят только от двух инвариантных величин S_1 и S_2 и, следовательно, не может существовать более двух независимых инвариантов, что и требовалось доказать.

Существует тесная связь между инвариантами I_1 и I_2, введенными выше, и S_1 и S_2. Если уравнение (6) переписать в форме

$$(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)(\rho - \rho_3)(\rho - \rho_4) = 0,$$

то увидим, что

$$S_1 = \sum_1^4 \rho_s = I_1, \tag{7а}$$

тогда как

$$S_2 = \sum_{\substack{s>t\\1}} \rho_s\rho_t,$$

так что

$$S_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2). \tag{7б}$$

[В дальнейшем мы будем пользоваться либо набором (S_1, S_2), либо набором (I_1, I_2) в зависимости от того, что нам будет удобнее [4]].

2.2. Из уравнения (6) немедленно следуют два заключения:

а) корни этого уравнения являются *попарно сопряженными*, поскольку коэффициенты вещественны;

б) корни являются *попарно взаимно обратными*. Если уравнение (6) поделить на ρ^4, то получим

$$\frac{1}{\rho^4} - S\frac{1}{\rho^3} + S_2\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho}S_1 + 1 = 0,$$

т. е. уравнение для $1/\rho$ совпадает с уравнением для ρ.

То обстоятельство, что корни попарно взаимно обратны, существенно при вычислении ковариантного тензора g_{ik} в системе координат, где тензор g_k^i диагонален. В этой «диагональной системе» $g_k^i = \rho_{\underline{i}}\delta_k^i$. Отсюда, воспользовавшись определением $g_k^i = g^{is}g_{sk}$, мы можем найти g_{ik}. Умножая это соотношение на g_{im} и свертывая, получаем

$$g_{mk} = g_{im}g_k^i \tag{8}$$

или, если положить $g_k^i = \rho_{\underline{i}}\delta_k^i$,

$$g_{mk} = g_{km}\rho_{\underline{i}}. \tag{9}$$

Если произвести замену g_{km} на $g_{mk}\rho_{\underline{m}}$, согласно (9), то получим

$$g_{mk} = \rho_{\underline{k}}\rho_{\underline{m}}g_{mk}, \tag{10}$$

и, следовательно, $g_{mk} = 0$ при $\rho_m\rho_k$, не равном $+1$. Если мы перенумеруем попарно обратные корни g_k^i в следующем порядке: ρ_1, $\rho_2 = \frac{1}{\rho_1}$, ρ_3, $\rho_4 = \frac{1}{\rho_3}$, то единственными отличными от нуля недиагональными членами в g_{ik} будут g_{12}, g_{21} и g_{34}, g_{43}. Что касается диагональных членов, то вследствие равенства (9) они обращаются в нуль, исключая лишь

[4] См. A. Einstein, E. Straus, Ann. Math., 1946, 47, 731. (Статья 130). В этой работе определена несколько иная система инвариантов.

частный случай, когда $\rho_k = +1 = \frac{1}{\rho_k}$. В общем случае в диагональной системе

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & g_{12} & 0 & 0 \\ g_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{34} \\ 0 & 0 & g_{43} & 0 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

где $g_{21} = \rho_1 g_{12}$, $g_{43} = \rho_3 g_{34}$.

Компоненты g_{ik} в (11) определены не полностью: мы можем умножить g_{12} и g_{21} на одну и ту же постоянную (и аналогично для g_{34} и g_{43}), не изменив g^i_k. Это соответствует возможности совершить еще одно преобразование координат: $x^{1*} = \alpha_1 x^1, \ldots, x^{4*} = \alpha_4 x^4$, в результате которого компоненты g_{12} и g_{21} умножаются на одну и ту же постоянную $(\alpha_1\alpha_2)$, а компоненты g_{34} и g_{43} — на постоянную $(\alpha_3\alpha_4)$, но не затрагиваются компоненты $g^1_1 = \rho_1, \ldots, g^4_4 = \rho_4$. В частности, в «диагональной системе» мы можем пользоваться стандартизованной формой g_{ik}:

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & \rho_1^{-1/2} & 0 & 0 \\ \rho_1^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_3^{-1/2} \\ 0 & 0 & \rho_3^{1/2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

2.3. В следующем разделе мы покажем, что теория требует, чтобы $\det(g_{\underline{ik}}) \neq 0$. Здесь же мы выведем алгебраические следствия из этого требования. Обращение в нуль $\det(g_{\underline{ik}})$ является инвариантным свойством, и мы можем использовать «диагональную систему». Из формулы (12) следует, что

$$|g_{\underline{ik}}| = \frac{1}{16}(\rho_1^{1/2} + \rho_1^{-1/2})^2 (\rho_3^{1/2} + \rho_3^{-1/2})^2$$

и определитель $|g_{\underline{ik}}|$ обращается в нуль в том и только в том случае, когда $\rho_1^{1/2} = -\rho_1^{-1/2}$ или $\rho_3^{1/2} = -\rho_3^{-1/2}$, т. е. когда один из корней равен -1. (В действительности, когда два корня равны -1, т. е. когда $\rho_1 = -1$, то также $\rho_2 = \rho_1^{-1} = -1$).

Если $|g_{\underline{ik}}| \neq 0$, то ортогональным преобразованием координат симметричный тензор $g_{\underline{ik}}$ можно привести к диагональному виду $\varepsilon\delta^i_k$. При сигнатуре $(+, +, +, -)$ этот тензор останется диагональным при преобразовании Лоренца. Что касается антисимметричной части поля, то она останется антисимметричной и после всех этих преобразований, при этом мы можем найти преобразование Лоренца, которое оставляет отличными от нуля только компоненты $g_{\underset{\vee}{12}}$ и $g_{\underset{\vee}{34}}$. Иными словами, при сигнатуре симметричной части поля $(+, +, +, -)$ мы можем регулярным преобразованием привести ковариантный тензор g_{ik} к виду

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & g_{\underset{\vee}{12}} & 0 & 0 \\ -g_{\underset{\vee}{12}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & g_{\underset{\vee}{34}} \\ 0 & 0 & -g_{\underset{\vee}{34}} & 1 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где g_{12} и g_{34} — вещественные величины.

Формулы (12) и (13) тесно связаны, и ρ_1 нетрудно выразить через g_{12}, а ρ_3 — через g_{34}. Мы получаем

$$\rho_1 = \frac{1 + ig_{\underset{\vee}{12}}}{1 - ig_{\underset{\vee}{12}}}, \qquad \rho_3 = \frac{1 + g_{\underset{\vee}{34}}}{1 - g_{\underset{\vee}{34}}}. \tag{14}$$

Это значит, что ρ_1, $\rho_2 = \rho_1^{-1}$ лежат на окружности единичного радиуса, тогда как ρ_3, $\rho_4 = \rho_3^{-1}$ — вещественны. Мы видим также, что $\arc(\rho_1) < \pi$ (другими словами, что $\rho_1 \neq -1$).

Используем теперь условие $|g_{ik}| < 0$. Из формулы (13) получаем

$$|g_{ik}| = (1 + g^2_{\underset{\vee}{12}})(-1 + g^2_{\underset{\vee}{34}}) < 0,$$

откуда следует, что

$$|g_{\underset{\vee}{34}}| < 1. \tag{15}$$

Это неравенство показывает, что ρ_3 и ρ_4 — положительны.

Подведем итоги. Мы показали, что при сигнатуре симметричной части $g_{\underline{ik}}$ вида $(+, +, +, -)$ взаимно обратные корни ρ_1, ρ_2 лежат на окружности единичного радиуса, из которой исключена точка -1; два других взаимно обратных корня ρ_3, ρ_4 положительны. Удобно выразить корни через углы ϑ_1 и ϑ_2:

$$\rho_1 \equiv e^{i\vartheta_1} = \rho_2^{-1}, \qquad \rho_3 \equiv e^{\vartheta_2} = \rho_4^{-1}. \tag{14a}$$

Отсюда следует, что $|\vartheta_1| < \pi$; для ϑ_2 аналогичного ограничения не существует.

3. Требование регулярности Γ^l_{ik}

Мы постулируем теперь, что величины Γ^l_{ik}, определяемые соотношением

$$g_{ik,l} = g_{is}\Gamma^s_{lk} + g_{sk}\Gamma^s_{il}, \tag{1}$$

всюду регулярны и однозначно определены алгебраически. Исследуем необходимые и достаточные условия для выполнения этого постулата.

Покажем сначала (как мы обещали выше), что

$$\det (g_{\underline{ik}}) \neq 0 \tag{16}$$

является необходимым условием [5]. Чтобы убедиться в этом, предположим, что это условие не выполнено, т. е. что $|g_{\underline{ik}}| = 0$. Тогда должен существовать по крайней мере один вектор A^k, такой, что

$$g_{\underline{ik}}A^k = 0.$$

Умножая уравнение (1) на $A^iA^kA^l$, мы получаем

$$A^iA^kA^lg_{\underline{ik};l} = A^iA^kA^lg_{\underline{i}s}\Gamma^s_{l\underline{k}} + A^iA^kA^lg_{s\underline{k}}\Gamma^s_{i\underline{l}} = 0.$$

Тождественное обращение в нуль всех членов, содержащих Γ^l_{ik} в этой линейной комбинации, означает, что определитель из коэффициентов при неизвестных Γ^l_{ik} в уравнении (1) обращается в нуль, если $\det (g_{\underline{ik}}) = 0$, и, следовательно, в этом случае не существует однозначного алгебраического решения для Γ^l_{ik}.

Мы доказали, что регулярность и однозначная определимость Γ^l_{ik} требует, чтобы

$$\det (g_{\underline{ik}}) \neq 0. \tag{16}$$

Как мы видели выше, это эквивалентно условию

$$\rho_i \neq -1. \tag{16a}$$

Условие $|g_{\underline{ik}}| \neq 0$ влечет за собой важное для теории следствие, что сигнатура симметричной части поля всюду $(+, +, +, -)$. (Поскольку сигнатура не может измениться без того, чтобы $|g_{\underline{ik}}|$ прошло через запрещенное нулевое значение, а в областях, где поле почти симметрично, сигнатура равна $(+, +, +, -)$, то она остается одинаковой всюду.) Этот результат означает, что всюду в пространстве временноподобные

[5] Это утверждение принадлежит Е. Страусу.

области одинаковым образом отличаются от пространственноподобных,— так же как в теории гравитации (с симметричными полями).

Вернемся к вопросу об условиях регулярности и однозначной определимости Γ^l_{ik}. Необходимое условие $\det(g_{\underline{ik}}) \neq 0$ (или, что эквивалентно, $\rho_i \neq -1$) не является, как мы сейчас увидим, достаточным. Если выполняется неравенство (16) или (16а), то мы всегда можем несингулярным преобразованием перейти к (локальной) диагональной системе координат (см. раздел 2.3). Запишем уравнение (1) в «диагональной» системе, использовав стандартизованную форму (12) тензора g_{ik}. (В этой системе координат легче проверить условие регулярности, а если величина Γ^l_{ik} регулярна в «диагональной» системе, то она регулярна и в произвольной). В «диагональной» системе уравнения (1) принимают вид

$$g_{ik,l} = g_{k\underline{\underline{k}}}\Gamma^{\underline{\underline{k}}}_{il} + g_{i\underline{\underline{i}}}\Gamma^{\underline{\underline{i}}}_{lk}. \tag{1a}$$

Здесь мы использовали следующие обозначения: $\underline{\underline{k}} = 1$, если $k = 2$, и $\underline{\underline{k}} = 2$, если $k=1$; $\underline{\underline{k}} = 4$, если $k = 3$, и $\underline{\underline{k}} = 3$, если $k = 4$. В этих обозначениях

$$g_{k\underline{\underline{k}}} = \rho_{\underline{\underline{k}}}^{1/2}, \qquad g_{\underline{\underline{k}}k} = \rho_{\underline{\underline{k}}}^{-1/2} = \rho_k^{1/2}. \tag{17}$$

Уравнения (1а) легко разрешить. Если все три индекса одинаковы, мы получаем

$$g_{ii,i} = (g_{\underline{\underline{i}}i} + g_{i\underline{\underline{i}}})\,\Gamma^{\underline{\underline{i}}}_{ii} = (\rho_i^{1/2} + \rho_i^{-1/2})\,\Gamma^{\underline{\underline{i}}}_{ii}. \tag{18}$$

Поскольку $\rho_i \neq -1$, по предположению, это уравнение можно разрешить относительно $\Gamma^{\underline{\underline{i}}}_{ii}$, и решение является регулярным и однозначным.

Если не все три индекса совпадают, мы берем систему трех уравнений, отвечающих циклической перестановке индексов:

$$\begin{aligned} g_{ik,l} &= g_{\underline{\underline{k}}k}\Gamma^{\underline{\underline{k}}}_{il} + g_{i\underline{\underline{i}}}\Gamma^{\underline{\underline{i}}}_{lk}, \\ g_{kl,i} &= g_{\underline{\underline{l}}l}\Gamma^{\underline{\underline{l}}}_{ki} + g_{k\underline{\underline{k}}}\Gamma^{\underline{\underline{k}}}_{il}, \\ g_{li,k} &= g_{\underline{\underline{i}}i}\Gamma^{\underline{\underline{i}}}_{lk} + g_{l\underline{\underline{l}}}\Gamma^{\underline{\underline{l}}}_{ki}. \end{aligned} \tag{19}$$

Определитель из коэффициентов в правых частях последней системы уравнений есть

$$\begin{vmatrix} g_{\underline{\underline{k}}k} & g_{i\underline{\underline{i}}} & 0 \\ g_{k\underline{\underline{k}}} & 0 & g_{\underline{\underline{l}}l} \\ 0 & g_{\underline{\underline{i}}i} & g_{l\underline{\underline{l}}} \end{vmatrix} = -(\rho_k^{1/2}\rho_l^{1/2}\rho_i^{1/2} + \rho_k^{-1/2}\rho_l^{-1/2}\rho_i^{-1/2}). \tag{20}$$

Он может обратиться в нуль лишь в очень специальном случае, когда один из корней есть $i = \sqrt{-1}$, а другой $+1$. В этом случае в (20) мы берем, например, $k = l$ и $\rho_k = \rho_l = i$, а $\rho_i = +1$ и находим, что определитель равен нулю. Мы можем описать этот случай с помощью инвариантов S_1, S_2:

$$S_1 = \sum_1^4 \rho_t = 1 + 1 + i + (-i) = 2,$$

$$S_2 = \sum_{\substack{s<t \\ 1}}^4 \rho_s\rho_t = 1 + i - i + i - i + 1 = 2.$$

Таким образом мы получили достаточное условие регулярности и однозначной алгебраической определимости Γ^l_{ik}:

$$\det(g_{\underline{ik}}) \neq 0 \text{ и } S_1 \neq 2 \neq S_2.$$

Сопутствующее условие $S_1 \neq 2 \neq S_2$ может оказаться весьма сильным для компонент поля; оно делает вероятным существование неравенства $\vartheta_1 < \pi/2$. Действительно, если поле содержит значения $|\vartheta_1| \geqslant \pi/2$, то в поле, вообще говоря, должна существовать поверхность, на которой $\vartheta_1 = \pi/2$. При изменении значений ρ_3 и $\rho_4 = \rho_3^{-1}$ на этой поверхности, вообще говоря, будет существовать по крайней мере точка, в которой $\rho_3 = \rho_4 = +1$ (или $\vartheta_2 = 0$), иначе говоря, точка, где $S_1 = 2 = S_2$. В этой точке Γ алгебраически не определено однозначно, и такого рода решения уравнений поля, согласно нашему постулату, мы должны исключить. Поэтому представляется правдоподобным, что теория как целое требует выполнения более сильного неравенства для ϑ_1, а именно, $\vartheta_1 < \pi/2$. Однако доказательство этого утверждения не может основываться только на соображениях регулярности g и Γ.

Из равенств (14) и (14а) следует, что если $|\vartheta_1|$ должна быть меньше чем $\pi/2$, то

$$|g_{\check{12}}| < 1$$

[$g_{\check{12}}$ — полевая переменная в формуле (13)], и это условие в какой-то мере аналогично неравенству

$$|g_{\check{34}}| < 1$$

[$g_{\check{34}}$ — снова из формулы (13)].

4. Решение уравнений для Γ^l_{ik}

Решения уравнений (18) и (19) не очень полезны, поскольку они найдены лишь в локальной системе координат, которая меняется от точки к точке. Поэтому представляет интерес найти решение в общей системе координат. Такого рода решение действительно можно построить — вывод мы вкратце дадим ниже,— но оно громоздко и совершенно бесполезно для решения дифференциальных уравнений.

4.1. Первый шаг к решению заключается в переходе к более удобной записи уравнения (1). Введем для удобства две величины:

$$V_{ik|l} = g_{sl}\Gamma^s_{ik},$$
$$W_{ik|l} = g_{ls}\Gamma^s_{ik}. \tag{21}$$

Они просто связаны между собой:

$$\Gamma^t_{ik} = g^{tl}V_{ik|l} = g^{lt}W_{ik|l}, \tag{22}$$

или

$$V_{ik|m} = g^{lt}g_{tm}W_{ik|l} = g^l_m W_{ik|l}. \tag{23}$$

Введем величины V и W в уравнение (1) и затем исключим V с помощью соотношений (23). Тогда получим уравнение для W:

$$0 = g_{ik,l} - W_{lk|i} - g^s_k W_{il|s}. \tag{24}$$

Это уравнение можно видоизменить и привести к более удобной и прозрачной форме. Мы используем (24) в виде

$$W_{lk|i} = g_{ik,l} - g^s_k W_{il|s} \tag{24a}$$

и подставим это выражение в третий член уравнения (24). Тогда мы получим

$$0 = g_{ik,l} - W_{lk|i} - g^s_k\,(g^s_{l,i} - g^t_l)\,W_{si|t},$$

или

$$0 = (g_{ik,l} - g^s_k g_{sl,i}) - W_{lk|i} + g^s_k g^t_l W_{si|t}.$$

Теперь мы повторим эту процедуру и снова заменим $W_{si|t}$ в последнем члене на эквивалентное выражение с помощью (24а)

$$g_{ik,l} + g^{k'}_k g^{l'}_l g_{l'i,k'} - g^{k'}_k g_{k'l,i} = W_{lk|i} + g^{l'}_l g^{k'}_k g^{i'}_i W_{l'k'|i'}. \tag{25}$$

Введя определение

$$A_{ik|l} = g_{lk,i} - g^{k'}_k g_{k'i,l} + g^{i'}_i g^{k'}_k g_{i'l,k'}, \tag{26}$$

можно написать

$$A_{ik|l} = (\delta_i^{i'}\delta_k^{k'}\delta_l^{l'} + g_i^{i'}g_k^{k'}g_l^{l'})W_{i'k'|l'}. \tag{27}$$

Это наиболее удобный вид уравнения для $W_{ik|l}$. Коль скоро W известно, мы находим Γ, используя соотношение (21):

$$\Gamma_{ik}^l = g^{ls}W_{ik|s}. \tag{21a}$$

Насколько рациональна запись уравнения в форме (27), можно убедиться, рассматривая, например, случай симметричного поля. В этом случае $g_i^{i'} = \delta_i^{i'}$. Левая часть уравнения (27) равна $2\begin{bmatrix} l \\ ik\end{bmatrix}$, тогда как правая часть превращается в $2W_{ik|l}$ и уравнение (27) приводит к соотношению

$$\Gamma_{ik}^l = g^{ls}\begin{bmatrix} s \\ ik\end{bmatrix},$$

т. е. к хорошо известной формуле римановой геометрии. Чтобы разрешить (27) относительно W, умножим это уравнение на тензор, обратный коэффициенту при W. Обозначим этот коэффициент через $U_{ikl}^{i'k'l'}$, а обратный ему коэффициент — через $\underline{U}_{i'k'l'}^{ikl}$. Тогда

$$U_{ikl}^{i'k'l'}\underline{U}_{i''k''l''}^{ikl} = \delta_{i''}^{i'}\delta_{k''}^{k'}\delta_{l''}^{l'}. \tag{28}$$

Умножая теперь уравнение (27) на $\underline{U}$, находим

$$\underline{U}_{i''k''l''}^{ikl}A_{ik|l} = W_{i''k''|l''}. \tag{29}$$

Таким образом, наша задача об определении W (и тем самым Γ) свелась к задаче о нахождении тензора $\underline{U}$, обратного U. Это — чисто алгебраическая задача, в которой производные от g_{ik} не фигурируют вообще.

4.2. Обращение U. Чтобы тензору U придать более компактный вид, введем прямое произведение матриц (обозначаемое символом «$\times$»). Пусть M — четырехрядная матрица, элементами которой являются g_k^i, и пусть I — четырехрядная единичная матрица. Тогда из определения U следует

$$U_{ikl}^{i'k'l'} = \delta_i^{i'}\delta_k^{k'}\delta_l^{l'} + g_i^{i'}g_k^{k'}g_l^{l'} = (\mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\mathrm{I} + \mathrm{M}\times\mathrm{M}\times\mathrm{M})_{ikl}^{i'k'l'},$$

или, в более компактной форме,

$$\mathrm{U} = \mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\mathrm{I} + \mathrm{M}\times\mathrm{M}\times\mathrm{M}. \tag{30}$$

Наша задача заключается в отыскании матрицы $\underline{\mathrm{U}}$, такой что

$$\mathrm{U}\cdot\underline{\mathrm{U}} = \mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\mathrm{I} = \mathrm{M}^0\times\mathrm{M}^0\times\mathrm{M}^0. \tag{31}$$

Нетрудно найти решение для матрицы, обратной U, в заданной точке, если мы будем описывать поле в этой точке в локальной диагональной системе. В этой локальной системе U принимает вид

$$U_{ikl}^{i'k'l'} = \delta_i^{i'}\delta_k^{k'}\delta_l^{l'}(1+\rho_{i'}\rho_{k'}\rho_{l'}), \tag{32}$$

и для обратной матрицы $\underline{\mathrm{U}}$ мы получаем выражение

$$\underline{U}_{i''k''l''}^{ikl} = \delta_{i''}^{i}\delta_{k''}^{k}\delta_{l''}^{l}(1+\rho_i\rho_k\rho_l)^{-1}. \tag{32a}$$

В принципе это и есть решение нашей задачи; но поскольку оно приведено в не ковариантной форме и по виду (32а) нелегко догадаться о том, как выглядит ковариантное выражение, то приходится обратиться к другому подходу, основанному на последовательном использовании произвольной системы координат. Поэтому решение для $\underline{\mathrm{U}}$ запишем в общем виде:

$$\sum c_{rst}\,\mathrm{M}^r\times\mathrm{M}^s\times\mathrm{M}^t.$$

Суммирование должно быть ограничено значениями — 2, —1, 0, +1, поскольку M удовлетворяет алгебраическому тождеству четвертой степени:

$$\mathrm{M}^2 - S_1\mathrm{M}^1 + S_2\mathrm{M}^0 - S_1\mathrm{M}^{-1} + \mathrm{M}^{-2} \equiv 0 \equiv \sum_{-2}^{2}\alpha_s\mathrm{M}^s. \tag{33}$$

С помощью этого тождества все полиномы по M можно привести к стандартной форме, куда входят только четыре последовательных степени M [однако выбор этих степеней остается свободным, поскольку тождество (33) выполняется и после умножения его на M^t]. Поэтому мы можем написать

$$\underline{\mathrm{U}}\,| = \sum_{-2}^{+1} c_{rst}\mathrm{M}^r\times\mathrm{M}^s\times\mathrm{M}^t, \tag{34}$$

и наша задача теперь сводится к определению коэффициентов c_{rst} из матричного уравнения

$$(\mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\mathrm{I} + \mathrm{M}\times\mathrm{M}\times\mathrm{M})\cdot\sum_{-2}^{+1} c_{rst}\mathrm{M}^r\times\mathrm{M}^s\times\mathrm{M}^t \equiv$$

$$\equiv \sum_{-1}^{+2} d_{rst}\mathrm{M}^r\times\mathrm{M}^s\times\mathrm{M}^t = \mathrm{M}^0\times\mathrm{M}^0\times\mathrm{M}^0. \tag{35}$$

Легко видеть, что введенные здесь коэффициенты d_{rst} связаны с c_{rst} соотношением

$$d_{rst} = c_{rst} + c_{r-1,\,s-1,\,t-1}. \tag{36}$$

В дальнейшем мы используем здесь два различных метода определения этих коэффициентов. Первый из них, который мы изложим лишь вкратце, позволяет получить c_{rst} как рациональные функции инвариантов S_1 и S_2, входящие в тождество (33). Однако получающиеся при этом коэффициенты c_{rst} как функции r, s, t не имеют единой формы. По этой причине мы дадим подробный вывод другим методом, лишенным этого недостатка. Однако в этом случае мы получим c_{rst} как функции инвариантов ρ_i, которые не являются рациональными функциями S_1, S_2 и, следовательно, рациональными функциями переменных поля. Этот метод существенно опирается на свойства локальной диагональной системы, и решение легко приводится в любой данной точке к локальному решению (32а).

Обращаясь к первому методу, укажем сначала на некоторые свойства симметрии коэффициентов. (Имеется в виду, что d_{rst} обращается в нуль, если хоть один индекс принимает значение меньше -2 или больше $+2$, и c_{rst} обращается в нуль, если какой-либо индекс принимает значения меньше -2 или больше $+1$.) Из уравнения (35) нетрудно видеть, что c_{rst} не меняется при перестановке индексов (поскольку изменение порядка множителей в прямых произведениях не меняет ни правой части, ни общего множителя перед суммой. Чтобы обеспечить эту инвариантность, коэффициенты c_{rst} должны быть сами инвариантны относительно перестановки индексов). Следовательно, и коэффициенты d_{rst} инвариантны относительно перестановок индексов.

Тождество (33), кроме того, инвариантно относительно замены M на M^{-1}. Значит, соотношение (35) не должно нарушаться при такой замене. Отсюда следует, что $d_{rst} = d_{-r,-s,-t}$ или, если воспользоваться соотношением (36), что $c_{rst} = c_{-r-1,-s-1,-t-1}$. Эти свойства симметрии существенно уменьшают число коэффициентов.

Теперь из соотношения (35) и тождества (33) мы видим, что наиболее общее выражение для d_{rst} имеет вид

$$d_{rst} = \delta_{r0}\delta_{s0}\delta_{t0} + (\alpha_r d_{st} + \alpha_s d_{tr} + \alpha_t d_{rs}), \tag{37}$$

где d_{rs} пока неизвестны, но будут определены из уравнений, которым должны удовлетворять величины d_{rst}. Из свойств симметрии d_{rst} следует, что d_{rs} должны удовлетворять соотношениям $d_{rs} = d_{sr}$ и $d_{rs} = d_{-r-s}$. Следовательно, остается определить лишь девять различных коэффициентов d_{rs}.

Уравнения (36) вместе с соотношением $c_{2st} = 0$ дают нам теперь 9 уравнений для d_{rst}. Чтобы убедиться в этом, составим величину

$$d^*_{rst} = d_{rst} - d_{r-1,\,s-1,\,t-1} + d_{r-2,\,s-2,\,t-2} - \ldots,$$

причем

$$d^*_{rst} = c_{rst} \qquad (r,\ s,\ t \neq 2), \tag{38}$$

но

$$d^*_{2st} = \delta_{s2}\delta_{t2}. \tag{39}$$

В силу симметрии относительно перестановок и изменения знака, соотношения (39) содержат только 9 различных уравнений для d_{rst}, или, в силу соотношений (37), 9 уравнений для d_{rs}. Эту систему из 9 линейных уравнений для 9 величин d_{rs} можно решить. Отсюда находим d_{rst} и затем [используя соотношения (38)] c_{rst} как явные функции α_r (т. е. S_1, S_2). Однако нам не удалось записать это решение в обозримом виде, и поэтому мы перейдем сейчас к другому методу, о котором упоминалось выше.

При использовании второго метода тождество (33) применяется иначе. Заменим при помощи этого тождества M^2 на более низкие степени M во всех слагаемых в левой части уравнения (35). Тогда в левой части останется приведенный полином, в который M входит в степенях —2, —1, 0, +1; в правой же части стоит прямое произведение $M^0 \times M^0 \times M^0$. Поскольку все полиномы приводятся к стандартной форме со степенями —2, —1, 0, +1, равенство выражений в левой и правой частях означает, что коэффициент при $M^r \times M^s \times M^t$ (в приведенной левой части) должен быть равен $\delta_{r0}\delta_{s0}\delta_{t0}$.

Приведение левой части по модулю тождества (33) выполняется с помощью следующего искусственного приема. Имеем

$$M \cdot M^r = \sum_{s=-2}^{+1} \alpha_{rs} M^s \qquad (r = -2,\ -1,\ 0,\ +1), \tag{40}$$

где

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & S_1 & -S_2 & S_1 \end{bmatrix}. \tag{41}$$

Последняя строка в матрице берется из тождества. Подставляя (40) в соотношение (35), получаем:

$$M^0 \times M^0 \times M^0 = \sum_{rst} c_{rst} M^r \times M^s \times M^t + \sum_{rst} c_{rst} (M \cdot M^r) \times (M \cdot M^s) \times (M \cdot M^t) =$$

$$= \sum_{rst} c_{rst} M^r \times M^s \times M^t + \sum_{rst} c_{rst} \sum_{uvw} \alpha_{ru}\alpha_{sv}\alpha_{tw} \times M^u \times M^v \times M^w =$$

$$= \sum_{uvw} M^u \times M^v \times M^w \Big\{ \sum_{rst} c_{rst} \left(\delta_{ru}\delta_{sv}\delta_{tw} + \alpha_{ru}\alpha_{sv}\alpha_{tw} \right) \Big\}.$$

Сравнивая коэффициенты в обеих частях равенства, находим

$$\delta_{u0}\delta_{v0}\delta_{w0} = \sum_{-2}^{+1} c_{rst}\,[\delta_{ru}\delta_{sv}\delta_{tw} + \alpha_{ru}\alpha_{sv}\alpha_{tw}]. \tag{42}$$

Пусть t — матрица, диагонализирующая α:

$$\mathrm{t}\alpha\mathrm{t}^{-1} = \lambda \quad \text{или} \quad \alpha\mathrm{t}^{-1} = \mathrm{t}^{-1}\lambda,$$

или, в более подробной записи,

$$\alpha_{ab}(\mathrm{t}^{-1})_{bc} = (\mathrm{t}^{-1})_{ac}\lambda_c. \tag{43}$$

Умножая соотношение (42) на

$$(\mathrm{t}^{-1})_{ua}(\mathrm{t}^{-1})_{vb}(\mathrm{t}^{-1})_{wc}$$

и суммируя по u, v, w, получаем:

$$(\mathrm{t}^{-1})_{0a}(\mathrm{t}^{-1})_{0b}(\mathrm{t}^{-1})_{0c} = [\sum_{rst} c_{rst}(\mathrm{t}^{-1})_{ra}(\mathrm{t}^{-1})_{sb}(\mathrm{t}^{-1})_{tc}]\cdot[1 + \lambda_a\lambda_b\lambda_c].$$

Разделим обе части равенства на $(1+\lambda_a\lambda_b\lambda_c)$, умножим на $t_{ak}t_{bl}t_{cm}$ и просуммируем по a, b, c. Тогда мы придем к соотношению

$$\sum_{abc} \frac{(\mathrm{t}^{-1})_{0a}(\mathrm{t}^{-1})_{0b}(\mathrm{t}^{-1})_{0c}\,t_{ak}\,t_{bl}\,t_{cm}}{1 + \lambda_a\lambda_b\lambda_c} = c_{klm}, \tag{44}$$

которое и содержит искомый результат.

Остается найти лишь λ_k и t'_{ak}. Как видно из определения α [формула (41)], собственные значения α удовлетворяют уравнению

$$\det(\alpha_{rs} - \lambda\delta_{rs}) = \lambda^4 - \lambda^3 S_1 + \lambda^2 S_2 - \lambda S_1 + 1 = 0.$$

Следовательно, собственные значения α и M совпадают:

$$\lambda_k = \rho_k. \tag{45}$$

Нетрудно также проверить, что равенства (43) удовлетворяются, если

$$(\mathrm{t}^{-1})_{ab} = (\rho_b)^a, \tag{46}$$

и, таким образом, в соотношении (44)

$$(\mathrm{t}^{-1})_{0a}(\mathrm{t}^{-1})_{0b}(\mathrm{t}^{-1})_{0c} = (\rho_a)^0(\rho_b)^0(\rho_c)^0 = 1.$$

Заметим, что поскольку при суммировании индексы пробегают значения —2, —1, 0, +1, то необходимо также изменить обозначения собственных значений на $\rho_{-2}, \ldots, \rho_{+1}$ и положить, например, $\rho_{-2} = \rho_{-1}^{-1}$, $\rho_0 = \rho_1^{-1}$.

Вычисляя, наконец, t, находим:

$$\begin{aligned} t_{a,\,-2} &= (\rho_{-2})^2\left(-\frac{1}{\rho_a}\right)\sigma_a, \\ t_{a,\,-1} &= (\rho_{-1})^2\,\frac{1}{\rho_a}\left(S_1-\frac{1}{\rho_a}\right)\sigma_a, \\ t_{a,\,0} &= (\rho_0)^2\,(\rho_a-S_1)\cdot\sigma_a, \\ t_{a,\,+1} &= (\rho_1)^2\sigma_a, \end{aligned} \tag{47}$$

где $S_1=\sum\rho_s$ и $(\sigma_0)^{-1}=(\rho_{+1}-\rho_0)(\rho_{-2}-\rho_0)(\rho_{-1}-\rho_0)$ и т. д. Эти величины можно использовать при вычислении различных коэффициентов:

$$c_{rst}=\sum_{abc=-2}^{+1}\frac{t_{ar}t_{bs}t_{ct}}{1+\rho_a\rho_b\rho_c}\,. \tag{48}$$

Интересно проследить, каким образом это решение переходит в локальное решение (32а). Имеем соотношение

$$\underline{\mathrm{U}}=\sum_{-2}^{+1}c_{rst}\mathrm{M}^r\times\mathrm{M}^s\times\mathrm{M}^t.$$

Следовательно, в диагональной системе матрица U является диагональной:

$$\underline{\mathrm{U}}^{ikl}_{i''k''l''}=\delta^i_{i''}\delta^k_{k''}\delta^l_{l''}\sum_{-2}^{+1}c_{rst}\,(\rho_i)^r\,(\rho_k)^s\,(\rho_l)^t=\delta^i_{i''}\delta^k_{k''}\delta^l_{l''}\sum_{rst}\sum_{abc}\frac{t_{ar}t_{bs}t_{ct}}{1+\rho_a\rho_b\rho_c}\,(\rho_i)^r\,(\rho_k)^s\,(\rho_l)^t.$$

Суммирование по r, s, t можно выполнить независимо для каждого индекса. Используя соотношение (46), находим

$$\sum_{r=-2}^{+1}t_{ar}\,(\rho_i)^r=\sum_{r=-2}^{+1}t_{ar}\,(\mathrm{t}^{-1})_{ri}=\delta_{ai} \tag{49}$$

и, следовательно,

$$U^{ikl}_{i''k''l''}=\delta^i_{i''}\delta^k_{k''}\delta^l_{l''}\sum_{abc}\frac{\delta_{ai}\delta_{bk}\delta_{cl}}{1+\rho_a\rho_b\rho_c}=\delta^i_{i''}\delta^k_{k''}\delta^l_{l''}\frac{1}{1+\rho_i\rho_k\rho_l},$$

что совпадает с выражением (32а).

Поступила 23 июня 1953 г.

145

НОВАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

(Совместно с Б. Кауфман)

Введение

Наиболее ясно общую теорию относительности можно охарактеризовать как теорию, которая обходится без введения «инерциальной системы координат». Первым, кто ясно увидел, что может заменить инерциальную систему, был Леви-Чивита. Инерциальная система дает нам соотношение между векторами в любых двух точках на конечном расстоянии. «Поле смещений» (Γ^l_{ik}) дает нам инвариантным образом соотношение между векторами (и тензорами) в бесконечно близких точках и поэтому является инвариантом, заменяющим инерциальную систему. Это Γ-поле приводит к понятию тензора кривизны пространства R^i_{klm} и вместе с ним к понятию свернутого тензора кривизны $R_{kl} (\equiv R^s_{kls})$.

Чтобы использовать эти понятия для вывода уравнений поля, которые не были бы ни недоопределены, ни непозволительно переопределены, можно воспользоваться вариационным принципом. При этом заранее предполагается существование инвариантного интеграла по пространству, т. е. существование скалярной плотности $\mathfrak{H}$. Простейший способ построения такой плотности состоит во введении, кроме поля смещений, (контравариантной) тензорной плотности $\mathfrak{g}^{ik}$. Этой паре полей сопоставляется тогда скалярная плотность $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik}R_{ik}$, которая выбирается в качестве подынтегрального выражения в варьируемом интеграле. Тогда теория в принципе становится полностью определенной, если мы добавим, что при варьировании поля $\mathfrak{g}$ и Γ следует рассматривать как независимые переменные.

Настоящая теория возникла из попытки создать теорию полного поля путем обобщения уравнений чисто гравитационного поля. Это обобщение

* *A new Form of the General Relativistic Field Equations.* (With B. Kaufmann). Ann. Math., 1955, 62, 128—138.

состоит в отказе от свойств симметрии полей $\mathfrak{g}$ и Γ, т. е. от симметрии $\mathfrak{g}_{ik}$ и Γ^l_{ik} по индексам i, k. На первый взгляд такое обобщение кажется неестественным, так как симметричные и антисимметричные компоненты этих полей преобразуются независимо друг от друга, не смешиваясь при преобразованиях координат; таким образом, с точки зрения группы преобразований эти два набора компонент (симметричный и антисимметричный) выступают как независимые величины. Но, с другой стороны, можно убедиться, что те образования, которые существенны для установления ковариантных уравнений, не зависят от предположения о симметрии. В частности, это справедливо для поля смещений и тензора кривизны. Таким образом, при построении теории не нужно использовать свойства симметрии. Вместо симметрии переменных поля, которая характерна для теории гравитационного поля, более естественно ввести формально аналогичное (но более слабое) условие «инвариантности по отношению к транспонированию» системы уравнений. Мы замечаем, что хотя $\mathfrak{g}^{ik}$ и Γ^l_{ik} могут быть несимметричными, законы преобразования для этих величин те же, что для транспонированных

$$\tilde{\mathfrak{g}}^{ik}\,(\equiv \mathfrak{g}^{ki}),\ \ \Gamma^l_{ik}\,(\equiv \Gamma^l_{ki}).$$

Тогда мы потребуем, чтобы законы поля выполнялись для транспонированных величин так же, как и для исходных [1].

В качестве примера такого закона поля мы приведем уравнение

$$0 = \mathfrak{g}^{ik}_{,\,l} + \mathfrak{g}^{ik}\Gamma^i_{il} + \mathfrak{g}^{it}\Gamma^k_{lt} - \frac{1}{2}\,\mathfrak{g}^{ik}\,(\Gamma^t_{lt} + \Gamma^t_{tl}).$$

Отсюда непосредственно видно, что если мы заменим в этом уравнении $\mathfrak{g}^{ik}$ и Γ^l_{ik} на транспонированные величины $\tilde{\mathfrak{g}}^{ik}$ и $\tilde{\Gamma}^l_{ik}$ и затем поменяем местами свободные индексы i и k, то вернемся к исходному уравнению. Поэтому имеет смысл говорить о правой части этого уравнения, как о выражении, обладающем «симметрией относительно транспонирования (по i и k)» и о самом уравнении как о «транспозиционно инвариантном» (по отношению к $\mathfrak{g}$ и Γ). Транспозиционная инвариантность является в некотором смысле более слабой заменой условий симметрии переменных и уравнений поля, которая характерна для теории гравитационного поля. В несимметричной теории условие транспозиционной инвариантности используется для значительного ограничения многообразия возможных вариантов. Физический смысл требования инвариантности по отношению к транспонированию состоит в инвариантности уравнений поля по отношению к изменению знака электрических зарядов.

[1] Эта формулировка будет несколько видоизменена по ходу нашего исследования, когда Γ^l_{ik} будут заменены на несколько отличные переменные поля.

Чтобы четко выявить черты нового вывода и новой формулировки законов поля, мы должны сперва привести первоначальный вывод в таком виде, который облегчит сравнение.

1. Вывод законов поля с использованием $\mathfrak{g}$ и Γ как переменных поля

Вывод законов поля из вариационного принципа становится автоматическим, как только выбрана скалярная плотность. При прежнем способе вывода $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik}R_{ik}$, где

$$R_{ik} = \Gamma^s_{ik,\,s} - \Gamma^s_{is,\,k} - \Gamma^t_{is}\Gamma^s_{tk} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^t_{st}. \tag{1}$$

Законы поля выводятся из условия

$$\delta\int \mathfrak{H}d\tau = \delta\int \mathfrak{g}^{ik}R_{ik}d\tau = 0,$$

где все $\mathfrak{g}^{ik}$ и Γ^l_{ik} варьируются независимо друг от друга, и вариации обращаются в нуль на границах интегрирования.

В результате варьирования по $\mathfrak{g}^{ik}$ мы получаем уравнения

$$R_{ik} = 0. \tag{2а}$$

Варьирование по Γ^l_{ik} несколько сложнее. Мы имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{ik}\delta R_{ik} &= \mathfrak{g}^{ik}(\delta\Gamma^s_{ik,\,s} - \delta\Gamma^s_{is,\,k} - \Gamma^t_{is}\cdot\delta\Gamma^s_{tk} - \delta\Gamma^t_{is}\cdot\Gamma^s_{tk} + \Gamma^s_{ik}\cdot\delta\Gamma^t_{st} + \\ &\quad + \delta\Gamma^s_{ik}\cdot\Gamma^t_{st}) = \{(\mathfrak{g}^{ik}\delta\Gamma^s_{ik})_{,\,s} - (\mathfrak{g}^{ik}\delta\Gamma^s_{is})_{,\,k}\} + \\ &\quad + \delta\Gamma^s_{ik}\{-\mathfrak{g}^{ik}_{,\,s} - \mathfrak{g}^{tk}\Gamma^i_{ts} - \mathfrak{g}^{it}\Gamma^k_{st} + \mathfrak{g}^{ik}\Gamma^t_{st} + \mathfrak{g}^{it}_{,\,t}\delta^k_s + \mathfrak{g}^{mt}\Gamma^i_{mt}\delta^k_s\}.\end{aligned}$$

Члены в первой скобке ничего не вносят в вариационный интеграл, поскольку вариации выбраны обращающимися в нуль на пределах. Обозначая коэффициент при $\delta\Gamma^s_{ik}$ через $\mathfrak{M}^{ik}_s$ и учитывая, что все $\delta\Gamma$ независимы, мы получаем уравнения

$$(\mathfrak{M}^{ik}_s \equiv)\,(-\mathfrak{g}^{ik}_{,\,s} - \mathfrak{g}^{tk}\Gamma^i_{ts} - \mathfrak{g}^{it}\Gamma^k_{st} + \mathfrak{g}^{ik}\Gamma^t_{st}) + \delta^k_s\,(\mathfrak{g}^{it}_{,\,t} + \mathfrak{g}^{mt}\Gamma^i_{mt}) = 0. \tag{2б}$$

Из рассмотрения уравнений (2а) и (2б) нетрудно заметить, что они не удовлетворяют требованию транспозиционной инвариантности; и это не удивительно, так как уравнения выводились из вариационной функции, которая не была транспозиционно инвариантной.

Тем не менее, можно изменить форму уравнений (2а) и (2б) таким образом, чтобы они стали транспозиционно инвариантными. Однако такой путь представляется довольно искусственным (хотя и законным), и мы приведем новый вывод и новую форму теории.

Метод, используемый при изменении формы уравнений (2а) и (2б), использует то обстоятельство, что как R_{ik}, так и $\mathfrak{M}_s^{ik}$ имели бы нужный вид, если бы мы могли положить $\Gamma_i = \frac{1}{2}(\Gamma_{is}^s - \Gamma_{si}^s) = 0$ (доказательство этого утверждения просто, но довольно длинно). Мы, конечно, не можем просто добавить в нашу систему четыре уравнения $\Gamma_i = 0$, ибо это нарушило бы ее внутреннюю согласованность. Вместо этого мы изменим формально описание поля, подставив вместо Γ новые величины Γ^*[2]

$$\Gamma_{ik}^l \equiv \Gamma_{ik}^{l*} + \delta_i^l \Lambda_k.$$

Мы должны ввести четыре новых произвольных переменных, которые не нужны для описания поля, но при варьировании рассматриваются как независимые переменные. Выполнив варьирование, мы можем придать Λ_k любое выбранное нами значение («нормировка» Λ_k); это позволит нам добавить к нашей системе, не нарушая ее совместности, четыре уравнения для Γ^*.

Прямым вычислением мы приходим к уравнению

$$R_{ik}(\Gamma) = R_{ik}(\Gamma^*) + (\Lambda_{k,\,i} - \Lambda_{i,\,k}),$$

так что для варьируемой функции получаем

$$\mathfrak{H}(\Gamma) = \mathfrak{H}(\Gamma^*) + \mathfrak{g}^{ik}(\Lambda_{k,\,i} - \Lambda_{i,\,k}). \tag{3}$$

Мы будем варьировать $\mathfrak{H}$ по $\mathfrak{g}^{ik}$, Γ_{ik}^{l*} и Λ_k. Но из формулы (3) видно, что варьирование по Γ дает нам те же уравнения (для Γ^*), которые были у нас ранее для Γ:

$$\mathfrak{M}_s^{ik}(\Gamma^*) = 0. \tag{4а}$$

Варьирование по $\mathfrak{g}^{ik}$ дает

$$R_{ik}(\Gamma^*) + (\Lambda_{k,\,i} - \Lambda_{i,\,k}) = 0. \tag{4б}$$

Наконец, варьирование по Λ_k дает

$$(\mathfrak{g}^{\overset{is}{\vee}}_{,s} \equiv)\ \frac{1}{2}(\mathfrak{g}^{is} - \mathfrak{g}^{si})_{,\,s} = 0. \tag{4в}$$

Эти последние уравнения не являются новыми, а следуют из (4а), так как

$$\mathfrak{M}_s^{si} = 2\mathfrak{g}^{\overset{is}{\vee}}_{,s}.$$

....

[2] Исходя из закона преобразования Γ_{ik}^l, нетрудно показать, что Γ_{ik}^{l*} также представляет собой поле смещений—при условии, что Λ_k преобразуется как вектор.

Теперь мы можем придать четырем лишним переменным Λ_k любое желаемое значение и выбрать Λ_k так, чтобы

$$\overset{*}{\Gamma}_k = 0. \tag{4г}$$

Приняв во внимание равенство (4г), можно показать, как упоминалось выше, что $\mathfrak{R}_s^{ik}(\Gamma^*)$ и $R_{ik}(\Gamma^*)$, как мы и хотели, транспозиционно инвариантны.

Когда переменные Λ_k полностью исключены, уравнения принимают окончательный вид

$$\begin{gathered}\mathfrak{R}_s^{ik}(\Gamma^*) = 0,\\ \overset{*}{\Gamma}_k = 0,\\ R_{\underline{ik}}(\Gamma^*) = 0,\\ R_{\underset{\vee}{ik},\, l}(\Gamma^*) + R_{\underset{\vee}{kl},\, i}(\Gamma^*) + R_{\underset{\vee}{li},\, k}(\Gamma^*) = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь все уравнения транспозиционно инвариантны. (И, конечно, нет нужды обозначать поле смещений через Γ^*; мы снова можем писать просто Γ.)

2. Введение поля U_{ik}^l

При выводе в предыдущем разделе был использован искусственный прием — сначала вводились четыре лишние переменные, а затем они исключались. Причина наших трудностей лежит в том, что мы требуем транспозиционной инвариантности уравнений поля, но исходим из вариационной функции, не обладающей этим свойством. Естественно возникает вопрос: можно ли найти вариационную функцию в форме, которая сама была бы транспозиционно инвариантной, так что все уравнения, выведенные из нее, были бы автоматически транспозиционно инвариантными, и не возникало бы необходимости в каких-либо искусственных приемах. И действительно, мы нашли, что такая форма $\mathfrak{H}$ существует, если $\mathfrak{H}$ выразить через новый «псевдотензор» [3] U_{ik}^l, который тесно связан с Γ_{ik}^l.

Нелегко непосредственно мотивировать введение псевдотензора U_{ik}^l. В действительности же он сначала был придуман, чтобы упростить выражение для R_{ik}. Заметим, что два подвергаемые дифференцирова

---

[3] Под «псевдотензором» мы подразумеваем величину, которая преобразуется как тензор при линейных преобразованиях координат; при этом закон преобразования отличается от тензорного только членами, не зависящими от самой этой величины.

нию $\Gamma^s_{ik,\,s} - \Gamma^s_{is,\,k}$ можно объединить: $(\Gamma^s_{ik} - \Gamma^t_{it}\delta^s_k)_{,\,s}$, так что псевдотензор можно определить равенством

$$U^l_{ik} = \Gamma^l_{ik} - \Gamma^t_{it}\delta^l_k. \tag{6}$$

Мы можем разрешить это равенство относительно Γ, выразив его через U. Прежде всего

$$U^t_{it} = -3\Gamma^t_{it}$$

и, следовательно,

$$\Gamma^l_{ik} = U^l_{ik} - \frac{1}{3}\,U^t_{it}\delta^l_k. \tag{6a}$$

Подставляя U вместо Γ в R_{ik}, находим

$$R_{ik} = U^s_{ik,\,s} - U^t_{is}U^s_{tk} + \frac{1}{3}\,U^t_{it}U^s_{sk}. \tag{7}$$

Выражение R_{ik} через U транспозиционно симметрично, что можно усмотреть непосредственно из равенства (7). Следовательно, U — более естественные переменные для описания поля, чем Γ.

В дальнейшем мы выберем $\mathfrak{g}^{ik}$ и U^l_{ik} в качестве наших переменных поля, а нашей варьируемой функцией будет $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik}R_{ik}$, где R_{ik} определяется формулой (7).

3. Инвариантные свойства вариационной функции

Процедура варьирования предполагает, что $\int \mathfrak{H}d\tau$ является скаляром. Иными словами, $\mathfrak{H}$ выбирается таким образом, чтобы $\int \mathfrak{H}d\tau$ не менялся при произвольных преобразованиях координат.

Кроме того, мы находим, что при выбранном нами частном виде $\mathfrak{H}$ этот интеграл не меняется и при так называемом «λ-преобразовании». Это преобразование состоит в замене U^l_{ik} на

$$U^{l*}_{ik} = U^l_{ik} + (\delta^l_i\lambda_{,\,k} - \delta^l_k\lambda_{,\,i}) \tag{8}$$

при неизменном $\mathfrak{g}^{ik}$. Прямые вычисления [путем подстановки выражения (8) в соотношение (7)] показывают, что R_{ik} инвариантно относительно λ-преобразования. Следовательно, как $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik}R_{ik}$, так и $\int \mathfrak{H}d\tau$ являются «λ-инвариантными» [4].

---

[4] Соответствующее λ-преобразование можно определить также для $R_{ik}(\Gamma)$ теми же путем показать, что $R_{ik}(\Gamma)$ есть λ-инвариант. Важно заметить, что можно опре-

Инвариантные свойства интеграла $\int \mathfrak{H}\, d\tau$ приводят к появлению тождеств для уравнений поля и переменных поля, что будет показано в следующем разделе.

4. Формальные следствия из вариационного принципа

Мы выводим все уравнения поля и тождества из требования

$$\delta \int \mathfrak{H} d\tau = 0$$

и из факта инвариантности $\int \mathfrak{H}\, d\tau$ относительно преобразований координат и λ-преобразований.

В результате варьирования получаем

$$\delta\mathfrak{H} = (\mathfrak{g}^{ik}\delta U^{s}_{ik})_{,\,s} + \mathfrak{N}^{ik}_{s}\delta U^{s}_{ik} + R_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik}, \tag{9}$$

где, как и раньше,

$$\mathfrak{N}^{ik}_{s} = -\,\mathfrak{g}^{ik}_{,\,s} - \mathfrak{g}^{tk}\left(U^{i}_{ts} - \frac{1}{3}\delta^{i}_{s}U^{m}_{tm}\right) + \mathfrak{g}^{it}\left(U^{k}_{st} - \frac{1}{3}\delta^{k}_{s}U^{m}_{mt}\right). \tag{10}$$

$$R_{ik} \equiv U^{s}_{ik,\,s} - U^{t}_{is}U^{s}_{tk} + \frac{1}{3}U^{s}_{is}U^{t}_{tk}, \tag{7}$$

которые могут быть найдены путем простых вычислений.

Выбирая частные формы вариации в нашей теории, мы можем получить различные результаты. Перечислим сначала эти частные случаи; подробности будут приведены ниже.

I. Вариации δU^{l}_{ik} выбираются так, что они обращаются в нуль на пределах интегрирования. Тогда первый член в правой части равенства (9) не дает вклада в интеграл. Поскольку все вариации, $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ и δU^{l}_{ik}, независимы, коэффициенты при них обращаются в нуль по отдельности, и мы находим *уравнения поля*

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{N}^{ik}_{s} &= 0,\\ R_{ik} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

II. Пусть вариации $\delta\mathfrak{g}$ и δU обусловлены варьированием, при котором $\delta\int\mathfrak{H}d\tau$ обращается в нуль тождественно. Снова предполагая, что

делить другое «λ-преобразование», которое оставляло бы неизменным $R_{ik}(\Gamma)$; однако не существует ни одного λ-преобразования, при котором как $R_{ik}(\Gamma)$, так и $R_{ik}(\widetilde{\Gamma})$ оставались бы неизменными. Этот факт используется в разделе 5.

δU^l_{ik} обращаются в нуль на поверхности интегрирования, получаем

$$\int (\mathfrak{N}^{ik}_s \delta U^s_{ik} + R^{\underline{\underline{\ }}}_{ik} \delta \mathfrak{g}^{ik})\, d\tau \equiv 0. \tag{12}$$

Такие вариации $\delta\mathfrak{g}$ и δU возникают, в частности, при бесконечно малом варьировании координат, либо при бесконечно малом λ-преобразовании. Значит δU и $\delta\mathfrak{g}$ можно выразить через бесконечно малые вариации ξ^i (для координат) и λ. Поскольку все вариации ξ^i и λ независимы, мы находим $4+1$ тождеств для наших уравнений поля, $\mathfrak{N}^{ik}_s$ и R_{ik}. Четыре тождества, обязанные варьированию координат, называются «тождествами Бианки».

III. Пусть снова $\delta\mathfrak{g}$ и δU возникают при бесконечно малых координатных и λ-преобразованиях; кроме того, предположим, что уравнения поля удовлетворяются. Тогда $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} R_{ik} = 0$, и при преобразованиях координат и при λ-преобразованиях $\mathfrak{H}$ остается равной нулю, так что $\delta\mathfrak{H} = 0$. Тогда (как следствие уравнений поля) получаем

$$(\mathfrak{g}^{ik} \delta U^s_{ik})_{,s} = 0. \tag{13}$$

Это — общий «закон сохранения», который в дальнейшем должен быть согласован с выбором вариации: бесконечно малое преобразование координат или λ-преобразование.

Мы можем теперь привести некоторые подробности для случаев II и III.

II. Здесь мы даем явную форму вариаций $\delta\mathfrak{g}$ и δU, возникающих при бесконечно малых преобразованиях координат и λ-преобразованиях.

а. Бесконечно малое λ-преобразование

Из определения этого преобразования следует

$$\delta\mathfrak{g}^{ik} = 0, \text{ но } \delta U^l_{ik} = \delta^l_i \lambda_{,k} - \delta^l_k \lambda_{,i}. \tag{14}$$

Подставляя эти выражения для вариаций в равенство (12), получаем

$$0 = \int [\mathfrak{N}^{ik}_s (\delta^s_i \lambda_{,k} - \delta^s_k \lambda_{,i})]\, d\tau = \int [\mathfrak{N}^{sk}_s \lambda_{,k} - \mathfrak{N}^{is}_s \lambda_{,i}]\, d\tau = \int [\mathfrak{N}^{sk}_s - \mathfrak{N}^{ks}_s] \lambda_{,k}\, d\tau.$$

Интегрируя по частям (и выбирая λ обращающимся в нуль на пределах интегрирования), мы получаем дифференциальное тождество

$$[\mathfrak{N}^{sk}_s - \mathfrak{N}^{ks}_s]_{,k} \equiv 0. \tag{15}$$

6. Бесконечно малые преобразования координат

Мы варьируем координаты, полагая $x^{i*} = x^i + \xi^i$ (ξ^i — бесконечно малая величина), откуда

$$\frac{\partial x^{i*}}{\partial x^a} = \delta^i_a + \xi^i_{,a} \text{ и } \frac{\partial x^a}{\partial x^{i*}} = \delta^a_i - \xi^a_{,i}.$$

Нас интересует теперь вариация $\mathfrak{g}^{ik}$, порожденная бесконечно малым изменением координат. Новые компоненты $\mathfrak{g}^{ik}$ (тензорной плотности!) определяются законом преобразования

$$(\mathfrak{g}^{ik})^* = \left[\frac{\partial x^{i*}}{\partial x^a}\cdot\frac{\partial x^{k*}}{\partial x^b}\,\mathfrak{g}^{ab}\right]y,$$

где y — функциональный определитель $|\partial x^s/\partial x^{t*}|$. При бесконечно малой вариации имеем

$$(\mathfrak{g}^{ik})^* = [(\delta^i_a + \xi^i_{,a})(\xi^k_b + \xi^k_{,b})\,\mathfrak{g}^{ab}](1 - \xi^s_{,s}) = \mathfrak{g}^{ik} + \mathfrak{g}^{ak}\xi^i_{,a} + \mathfrak{g}^{ib}\xi^k_{,b} - \mathfrak{g}^{ik}\xi^s_{,s}$$

(опуская члены, квадратичные по ξ).

Разность $(\mathfrak{g}^{ik})^* - (\mathfrak{g}^{ik})$ дает изменение компонент, но при двух различных значениях координат (x^i) и (x^{i*}). Однако в вариационном исчислении молчаливо предполагается, что варьирование следует производить при тех же значениях координат. По этой причине мы должны добавить изменение $-\mathfrak{g}^{ik}_{,s}\xi^s$, вызванное возвращением от координат (x^{i*}) к (x^i). В результате мы находим

$$\delta\mathfrak{g}^{ik} = \mathfrak{g}^{tk}\xi^i_{,t} + \mathfrak{g}^{it}\xi^k_{,t} - \mathfrak{g}^{ik}\xi^t_{,t} - \mathfrak{g}^{ik}_{,t}\xi^t. \tag{16}$$

Вариацию δU^l_{ik} можно аналогичным путем получить из закона преобразования U^l_{ik} (который выведен в Приложении). Мы находим

$$\delta U^l_{ik} = U^t_{ik}\xi^l_{,t} - U^l_{tk}\xi^t_{,i} - U^l_{it}\xi^t_{,k} - \xi^l_{,ik} + \frac{1}{2}(\delta^l_i\xi^t_{,tk} + \delta^l_k\xi^t_{,ti}) - U^l_{ik,t}\xi^t. \tag{17}$$

Теперь мы можем подставить выражения для $\delta\mathfrak{g}$ и δU в равенство (12) и выполнить необходимые интегрирования по частям. Получающийся интеграл имеет вид

$$\int W_i\xi^i d\tau \equiv 0;$$

поскольку все ξ^i независимы, мы находим «тождества Бианки» [5]:

$$0 \equiv [-\mathfrak{R}^{ik}_t U^s_{ik} + \mathfrak{R}^{sk}_t U^i_{tk} + \mathfrak{R}^{ks}_i U^i_{kt} - R_{it}\mathfrak{g}^{is} - R_{ti}\mathfrak{g}^{si}]_{,s} + \\ + \left[\frac{1}{2}(\mathfrak{R}^{is}_i + \mathfrak{R}^{si}_i)_{,t} - (\mathfrak{R}^{is}_t)_{,i}\right] + [R_{ik,t}\mathfrak{g}^{ik} - \mathfrak{R}^{ik}_s U^s_{ik,t}]. \tag{18}$$

[5] Этот метод вывода тождеств Бианки принадлежит Г. Вейлю.

III. Подставим в «закон сохранения» (13) явные выражения для δU^{l}_{ik} в различных частных случаях.

а. Бесконечно малое λ-преобразование

$$0=[\mathfrak{g}^{ik}(\delta^s_i\lambda_{,k}-\delta^s_k\lambda_{,i})]_{,s}=[\mathfrak{g}^{sk}\lambda_{,k}-\mathfrak{g}^{is}\lambda_{,i}]_{,s}=$$
$$=[(\mathfrak{g}^{sk}-\mathfrak{g}^{ks})\ \lambda_{,k}]_{,s}=2\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s}\lambda_{,k}.$$

Если, например, λ выбирается равным αx^a (α — бесконечно малая величина), мы получаем «уравнение дивергенции»

$$0=\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{sa}}_{,s}. \tag{19}$$

Ничего, кроме этого, не получается и при другом выборе λ.

б. Бесконечно малое преобразование координат

Выбирая случаи $\xi^a=\text{const.}$ и $\xi^i=0$ ($i\neq a$), из равенств (13) и (17) находим, что

$$0=[\mathfrak{g}^{ik}U^{s}_{ik,a}]_{,s}. \tag{20}$$

Обозначим выражение в скобках через $\mathfrak{T}^s_a$. Соотношение

$$0=[\mathfrak{T}^s_a]_{,s} \tag{21}$$

можно интерпретировать как «закон сохранения энергии-импульса». Тогда $\mathfrak{T}^s_a$ есть плотность «тензора энергии-импульса». (Эта величина есть тензорная плотность лишь по отношению к линейным преобразованиям.)

Выбирая другой частный случай, мы полагаем $\xi^a=c^a_b x^b$ (c^a_b — бесконечно малые и произвольные величины) и принимаем во внимание соотношение (20), а также независимость c^a_b. Тогда мы находим

$$[\mathfrak{g}^{ik}U^b_{ik}\delta^t_a-\mathfrak{g}^{bk}U^t_{ak}-\mathfrak{g}^{kb}U^t_{ka}]_{,t}=\mathfrak{g}^{ik}U^b_{ik,a}=\mathfrak{T}^b_a. \tag{22}$$

Иначе говоря, каждая компонента тензора энергии-импульса выражается через дивергенцию тензорной плотности. Этот факт полезен при вычислении интегралов типа $\int\mathfrak{T}^4_4 d\tau$, так как (по теореме Гаусса) нам нужно знать значения $\mathfrak{g}$ и U только на пределах интегрирования.

5. Рассмотрение совместности и «жесткости» системы уравнений

Мы можем теперь подробно обсудить совместность нашей системы уравнений. Имеется 16 + 64 переменных поля $\mathfrak{g}^{ik}$ и U^l_{ik} и 16 + 64 уравнений $R_{ik} = 0$ и $\mathfrak{N}^{ik}_l = 0$. Мы имеем также 4 тождества Бианки, которые выражают тот факт, что поля, отличающиеся одно от другого только преобразованием координат, суть одни и те же поля. (Таким образом, после решения нашей системы дифференциальных уравнений мы еще можем выбрать координатные функции четырьмя произвольными способами.) Кроме того, имеется тождество (обязанное λ-инвариантности), которое выражает тот факт, что поля смещений (Γ или U), отличающиеся одно от другого только λ-преобразованием, суть одни и те же поля.

Последнее соображение является главным доводом против метода, использованного в разделе 1. В самом деле, окончательная система уравнений (5) после выполнения «нормировки» больше не является λ-инвариантной. Это означает, что не все эквивалентные формы Γ-поля являются решениями уравнений (5). В противоположность этому, уравнения (11), выраженные через переменные пóля $\mathfrak{g}$ и U, являются λ-инвариантными, так же как они инвариантны относительно преобразований координат. По этой причине совокупность решений уравнений (11) включает *все* поля, удовлетворяющие вариационному принципу.

Важное значение λ-инвариантности для теории проявляется в следующем. Можно было бы задать вопрос: почему бы не воспользоваться транспозиционно-инвариантной скалярной плотностью

$$\frac{1}{2}\left[\mathfrak{g}^{ik} R_{ik}(\Gamma) + \widetilde{\mathfrak{g}}^{ik} R_{ik}(\widetilde{\Gamma})\right]$$

(где $R_{ik}(\Gamma)$ сконструировано из Γ) в качестве вариационной функции. При ближайшем рассмотрении оказывается, что с помощью этой плотности нельзя построить λ-инвариантную теорию, так что среди уравнений, выведенных таким образом, мы нашли бы лишь 4 тождества Бианки и не смогли бы отождествить поля, отличающиеся друг от друга λ-преобразованием. Грубо говоря, отождествление Γ-полей с разными λ уменьшает число компонент Γ от 64 до 63; совместность системы обеспечивается тогда существованием дифференциального тождества (обязанного λ-инвариантности). В системе без λ-инвариантности число компонент Γ равно 64 и компенсирующего тождества нет.

В этом заключается более глубокая причина относительной слабости системы, которая не является λ-инвариантной[6]. Мы придерживаемся того принципа, что более жесткую систему следует предпочитать любой более слабой, если нет особых причин для обратного.

Приложение. Закон преобразования для U^l_{ik}

Из определения U через Γ мы можем найти закон преобразования[7]

$$(U^l_{ik})^* = \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i^*}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}U^l_{ik} + \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{k^*}} - \delta^{l^*}_{k^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}}. \tag{23}$$

Выражение в правой части этого равенства не обладает транспозиционной симметрией по индексам i, k. Однако легко показать, что это преобразование можно рассматривать как две последовательные операции: во-первых, преобразование координат, которое транспозиционно симметрично, и, во-вторых, λ-преобразование. Чтобы убедиться в этом, напишем:

$$\begin{aligned}(U^l_{ik})^* = &\left\{\frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i^*}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}U^l_{ik} + \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{k^*}} -\right.\\ &\left.-\frac{1}{2}\delta^{l^*}_{i^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^{t^*}\partial x^{k^*}} - \frac{1}{2}\delta^{l^*}_{k^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}}\right\} -\\ &-\frac{1}{2}\left\{\delta^{l^*}_{k^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}} - \delta^{l^*}_{i^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{t^*}\partial x^{k^*}}\right\}.\end{aligned} \tag{23a}$$

Выражение в первой скобке транспозиционно симметрично; обозначим его через $U^{l^*}_{i^*k^*}$. Допустим, что U^l_{ik} переходит в $U^{l^*}_{i^*k^*}$ при преобразованиях координат. Произведем теперь λ-преобразование: $U^{l^*}_{i^*k^*}$ перейдет в

$$U^{l^*}_{i^*k^*} + (\delta^{l^*}_{i^*}\lambda_{,k^*} - \delta^{l^*}_{k^*}\lambda_{,i^*});$$

иными словами, преобразования (координатное и λ-преобразование) аддитивны. Сравнивая этот результат с (23), мы видим, что $(U^l_{ik})^*$ мы можем

---

[6] Строгий способ оценивать «жесткость» системы дифференциальных уравнений описан в Приложении II к нашей работе «Сущность теории относительности» (и в дополнении к этому Приложению). (Статья 141, новый вариант см. статью 146.— *Ред.*)

[7] В этих обозначениях i и i^* — независимые индексы, относящиеся к старой и новой системам координат, соответственно (аналогично и для других пар индексов). Такие обозначения облегчают «усвоение» некоторых формул.

рассматривать как комбинацию координатного и λ-преобразований, при условии, что мы сможем показать, что

$$\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}}$$

имеет вид $\lambda_{,i^*}$.

Обозначим функциональный определитель снова через J.

$$J \equiv \left|\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right| \equiv J^s_{t^*}.$$

Нормированный фактор при $J^s_{t^*}$ можно обозначить через $J^{t^*}_s$. Мы знаем, что

$$J^{t^*}_s = \frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s},$$

так как

$$\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial x^{m^*}} = \delta^{t^*}_{m^*}.$$

Выражение

$$\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}},$$

которым мы интересуемся, имеет теперь вид

$$J^{t^*}_s\cdot(J^s_{t^*}),_{i^*};$$

можно видеть, что это — логарифмическая производная определителя J:

$$\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}} = (\ln J),_{i^*}.$$

Таким образом, мы показали, что первоначально выведенную формулу преобразования (23) можно рассматривать как комбинацию транспозиционно инвариантного закона преобразования,

$$U^{l^*}_{i^*k^*} = \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i^*}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}u^l_{ik} + \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{k^*}} - \\ - \frac{1}{2}\delta^{l^*}_{i^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial t^*\partial x^{kx}} - \frac{1}{2}\delta^{l^*}_{k^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}}, \qquad (24)$$

с λ-преобразованием (относительно которого R_{ik} инвариантно). Формула (24) используется при выводе соотношения (17).

Вообще говоря, любое преобразование, составленное из преобразования координат типа (24) и λ-преобразования, не будет сколько-нибудь существенно менять U-поле, но лишь изменит его представление и, наоборот, любое преобразование, которое меняет только представление поля, можно разложить на координатное и λ-преобразование.

Заключение

Уравнения поля (11) полностью эквивалентны уравнениям поля (5). Однако система (11) обладает преимуществом перед последней, не только вследствие своего более простого вида, но также и потому, что она вводит поле без каких-либо ограничений, т. е. без ограничений, не связанных с вариационным принципом.

Поступила 28 января 1955 г.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ НЕСИММЕТРИЧНОГО ПОЛЯ*

ПРИЛОЖЕНИЕ II К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ РАБОТЫ «СУЩНОСТЬ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ»[1]

Прежде чем перейти собственно к предмету статьи, я хочу обсудить в общем виде вопрос о «жесткости» систем уравнений поля. Это понятие представляет самостоятельный интерес независимо от излагаемой здесь конкретной теории. Однако для более глубокого понимания нашей проблемы оно является почти неизбежным.

О «совместности» и «жесткости» систем уравнений поля

Если заданы какие-то определенные переменные поля и система уравнений пòля для них, то последняя в общем случае еще не определяет поле полностью. В решении остаются еще некоторые свободные параметры. Чем меньше число свободных параметров, совместных с системой уравнений поля, тем «жестче» система. Ясно, что при отсутствии какого-либо другого критерия для выбора уравнений более жесткую систему уравнений следует предпочитать менее жесткой. Наша цель состоит в том, чтобы найти меру такой жесткости уравнений. Оказывается, что можно определить такую меру, которая дает нам возможность сравнивать жесткость систем даже в том случае, если эти системы обладают различным числом и разными типами переменных поля.

* *Relativistic Theory of the non-symmetric Field.* The Meaning of Relativity. Fifth edition. Princeton, 1955. [В русском переводе 4-го издания «Сущности теории относительности» (см. примечание редактора к статье 60) этого Приложения не было, так как включался старый вариант (статья 141).—*Ред.*].

[1] Пятое издание книги вышло также на немецком (Braunschweig, 1960) и на французском языках (Paris, Gauthier — Villars, 1960). В предисловии к нему Эйнштейн писал:
«Для этого издания я полностью переработал „Обобщение теории гравитации“, озаглавив его „Релятивистская теория несимметричного поля“. Мне удалось — частично в сотрудничестве с моей ассистенткой Б. Кауфман — упростить вывод и саму форму уравнений поля. [Ср. статью 142. —*Ред.*]. Вся теория стала после этого более прозрачной, хотя ее содержание и не изменилось».

Мы поясним используемые здесь понятия и методы на примерах возрастающей сложности, ограничиваясь четырехмерными полями, и при рассмотрении этих примеров будем вводить соответствующие понятия в последовательном порядке.

Первый пример. *Скалярное волновое уравнение* [2].

$$\varphi_{,11} + \varphi_{,22} + \varphi_{,33} - \varphi_{,44} = 0.$$

Здесь система состоит лишь из единственного дифференциального уравнения для одной переменной поля. Предположим, что φ разлагается в ряд Тэйлора вблизи точки P (иначе говоря, что функция является φ аналитической). Тогда совокупность коэффициентов полностью описывает функцию. Число коэффициентов n-го порядка (то есть число производных φ n-го порядка в точке P) равно $\frac{4.5. \ldots (n+3)}{1.2. \ldots n}$ (сокращенно $\binom{4}{n}$) и все эти коэффициенты можно выбирать произвольно, если дифференциальное уравнение не устанавливает каких-либо связей между ними. Так как исходное уравнение второго порядка, то эти связи мы найдем, дифференцируя наше уравнение $(n-2)$ раза. Таким образом для коэффициентов n-го порядка мы получим $\binom{4}{n-2}$ условий. Поэтому число коэффициентов n-го порядка, остающихся произвольными, составит

$$z = \binom{4}{n} - \binom{4}{n-2}. \tag{1}$$

Это число положительно для всякого n. Следовательно, если произвольные коэффициенты для всех порядков, меньших n, будут зафиксированы, то условиям для коэффициентов n-го порядка всегда можно удовлетворить, не изменяя уже выбранных коэффициентов.

Аналогичное рассуждение можно привести для систем из нескольких уравнений. Если число свободных коэффициентов n-го порядка не меньше нуля, мы называем систему уравнений *абсолютно совместной*. Ограничимся именно такими системами уравнений. Все известные мне системы, используемые в физике, принадлежат к этому типу.

Перепишем равенство (1). Имеем

$$\binom{4}{n-2} = \binom{4}{n} \frac{(n-1)\,n}{(n+2)(n+3)} = \binom{4}{n}\left(1 - \frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n^2} + \cdots\right),$$

где $z_1 = +6$.

[2] В дальнейшем запятая всегда будет означать частные производные, например,

$$\varphi_{,i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \quad \varphi_{,11} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\,\partial x^1} \text{ и т. д.}$$

Ограничиваясь большими значениями n, можно пренебречь членами $\frac{z_2}{n^2}$ и т. д. в скобках, и для уравнения (1) мы получим *асимптотически*

$$z \sim \binom{4}{n} \frac{z_1}{n} = \binom{4}{n} \frac{6}{n}. \tag{1a}$$

Назовем z_1 «коэффициентом свободы», в нашем случае он равен 6. Чем больше этот коэффициент, тем слабее соответствующая система уравнений.

Второй пример. *Уравнения Максвелла для пустого пространства.*

$$\varphi^{is}_{,s} = 0; \quad \varphi_{ik,l} + \varphi_{kl,i} + \varphi_{li,k} = 0.$$

Тензор φ^{ik} получается из антисимметричного тензора φ_{ik} путем поднимания ковариантных индексов с помощью

$$\eta^{ik} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & +1 \end{bmatrix}.$$

Мы имеем $4 + 4$ уравнений поля для шести переменных поля. Среди этих восьми уравнений существуют два тождества. Если обозначить левые части уравнений поля через G^i и H_{ikl} соответственно, тождества примут вид

$$G^i_{,i} \equiv 0; \quad H_{ikl,m} - H_{klm,i} + H_{lmi,k} - H_{mik,l} = 0.$$

В этом случае мы рассуждаем следующим образом. Разложение шести переменных поля в ряды Тэйлора дает

$$6\binom{4}{n}.$$

коэффициентов n-го порядка. Условия, которым должны подчиняться эти коэффициенты n-го порядка, получаются $(n-1)$-кратным дифференцированием восьми уравнений поля первого порядка. Поэтому число этих условий равно

$$8\binom{4}{n-1}.$$

Однако эти условия не все независимы, так как среди восьми уравнений существуют два тождества второго порядка. После $(n-2)$-кратного дифференцирования они дают

$$2\binom{4}{n-2}$$

алгебраических тождеств для условий, полученных из уравнений поля. Поэтому число свободных коэффициентов n-го порядка равно

$$z = 6\binom{4}{n} - \left[8\binom{4}{n-1} - 2\binom{4}{n-2}\right].$$

Число z положительно для всех n. Таким образом система уравнений является «абсолютно совместной». Вынося за скобки множитель $\binom{4}{n}$ в правой части и разлагая, как и выше, в ряд для больших n, мы получаем

$$z = \binom{4}{n}\left[6 - 8\frac{n}{n+3} + 2\frac{(n-1)\,n}{(n+2)(n+3)}\right] \sim$$
$$\sim \binom{4}{n}\left[6 - 8\left(1 - \frac{3}{n}\right) + 2\left(1 - \frac{6}{n}\right)\right] \sim \binom{4}{n}\left[0 + \frac{12}{n}\right].$$

Таким образом, здесь $z_1 = 12$. Это говорит о том, что рассматриваемая система определяет поле менее жестко, чем в случае скалярного волнового уравнения ($z_1 = 6$). Равенство нулю постоянного члена в скобках в обоих случаях выражает тот факт, что рассматриваемая система не содержит никаких произвольных функций четырех переменных.

Третий пример. *Уравнения гравитации для пустого пространства.* Запишем их в виде:

$$R_{ik} = 0; \quad g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\Gamma^s_{lk} = 0.$$

Компоненты тензора R_{ik} содержат только величины Γ и являются величинами первого порядка по отношению к ним. Будем здесь считать независимыми переменными поля g и Γ. Второе уравнение показывает, что удобно рассматривать Γ как величины первого порядка при дифференцировании, т. е. что в разложении

$$\Gamma = \underset{0}{\Gamma} + \underset{1}{\Gamma}_s x^s + \underset{2}{\Gamma}_{st} x^s x^t + \ldots$$

следует считать $\underset{0}{\Gamma}$ величиной первого порядка, $\underset{1}{\Gamma}^s$ — величиной второго порядка и т. д. Соответственно компоненты R_{ik} следует рассматривать как величины второго порядка. Для этих уравнений существуют четыре тождества Бианки, которые вследствие сделанных выше предположений следует считать связанными с величинами третьего порядка.

В общековариантной системе уравнений возникает новое обстоятельство, существенное для правильного определения свободных коэффициентов. Поля, получаемые одно из другого только преобразованиями координат, надлежит рассматривать лишь как разные представления одного и того же поля. Соответственно лишь часть из

$$10\binom{4}{n}$$

коэффициентов n-го порядка функций g_{ik} служит для определения существенно различных полей. Поэтому число коэффициентов разложения, фактически определяющих поле, уменьшается на некоторую величину, которую мы теперь вычислим.

В законе преобразования величин g_{ik}

$$g^*_{ik} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{i*}} \frac{\partial x^b}{\partial x^{k*}} g_{ab}$$

функции g_{ab} и $g^*{}_{ik}$ на самом деле представляют одно и то же поле. Дифференцируя это уравнение n раз по x^*, мы замечаем, что коэффициенты n-го порядка в разложении g^* содержат все $(n+1)$-е производные четырех функций x по x^*; другими словами, здесь появляются $4\binom{4}{n+1}$ чисел, не играющих роли при определении поля. Поэтому во всякой общерелятивистской теории необходимо вычесть $4\binom{4}{n+1}$ из общего числа коэффициентов n-го порядка, чтобы учесть общековариантность теории. Подсчет числа свободных коэффициентов n-го порядка приводит, таким образом, к следующему результату.

Десять величин g_{ik} (нулевого порядка в смысле дифференцирования) и сорок величин Γ^l_{ik} (первого порядка в смысле дифференцирования) с учетом только что рассмотренной поправки дают

$$10\binom{4}{n} + 40\binom{4}{n-1} - 4\binom{4}{n+1}$$

соответствующих коэфициентов. Уравнения поля (10 уравнений второго и 40 первого порядка) дают для них

$$N = 10\binom{4}{n-2} + 40\binom{4}{n-1}$$

условий. Однако из этого числа N необходимо вычесть число тождеств

$$4\binom{4}{n-3},$$

которые получаются из тождеств Бианки (третьего порядка). В результате находим

$$z = \left[10\binom{4}{n} + 40\binom{4}{n-1} - 4\binom{4}{n+1}\right] - \left[10\binom{4}{n-2} + 40\binom{4}{n-1}\right] + \binom{4}{n-3}.$$

Выносся за скобки множитель $\binom{4}{n}$, мы получаем асимптотическую формулу для больших n

$$z \sim \binom{4}{n}\left[0+\frac{12}{n}\right].$$

Следовательно, $z_1 = 12$. В этом случае число z также положительно для всех n, так что система является абсолютно совместной в смысле данного выше определения. Поразительно, что уравнения гравитационного поля для пустого пространства определяют поле с такой же жесткостью, как уравнения Максвелла в случае электромагнитного поля.

Релятивистская теория поля

Общие замечания

Существенное достижение общей теории относительности заключается в том, что она избавила физику от необходимости вводить «инерциальную систему» (или «инерциальные системы»). Это понятие неудовлетворительно по той причине, что оно без какого-либо обоснования выделяет из всех мысленно возможных систем координат некоторые системы. Затем делается предположение, что законы физики выполняются *только* для таких инерциальных систем (например, закон инерции и закон постоянства скорости света). Таким образом в системе физики, пространство как таковое наделяется ролью, выделяющей его из всех прочих элементов физического описания. Оно играет определяющую роль во всех процессах, не испытывая их обратного воздействия. Хотя подобная теория является логически возможной, но, с другой стороны, она выглядит не совсем удовлетворительной. Ньютон вполне сознавал этот недостаток, но он столь же ясно понимал, что иного пути для физики в то время не было. Среди физиков позднейшего времени особое внимание на это обстоятельство обратил Эрнст Мах.

Какие новые идеи в развитии основ физики после Ньютона позволили преодолеть исключительность инерциальных систем? Прежде всего, введение понятия поля в теорию электромагнитных явлений Фарадея и Максвелла, или, точнее, введение поля как независимого, ни к чему уже не сводимого фундаментального понятия. Насколько мы способны судить в настоящее время, общая теория относительности может мыслиться только как теория поля. Ее нельзя было бы создать, придерживаясь точки зрения, что реальный мир состоит из материальных точек, движущихся под влиянием сил их взаимодействия. Всякий, кто попытался бы объяснить Ньютону равенство инерциальной и гравитационной масс, исходя из принципа эквивалентности, обязательно должен был бы ответить на следующее возражение: правда ли, что в ускоренной системе координат тела испытывают такое же ускорение, как и вблизи поверхности притягивающего их небесного тела? Но где же находятся в первом случае массы, производящие ускорение? Ясно, что теория относительности предполагает независимость понятия поля.

Математический аппарат, позволивший создать общую теорию относительности, мы находим в геометрических исследованиях Гаусса и Римана. Первый из них в своей теории поверхностей исследовал метрические свойства поверхности, вложенной в трехмерное эвклидово пространство, и показал, что эти свойства можно описывать с помощью понятий, относящихся только к самой поверхности и не связанных с пространством, в которое она вложена. Так как в общем случае на поверхности не существует предпочтительных систем координат, то это исследование впервые привело к выражению соответствующих величин в общих координатах. Риман распространил эту двумерную теорию поверхностей на пространства с произвольным числом измерений (пространства с римановой метрикой, которые характеризуются полем симметричных тензоров второго ранга). В этом замечательном исследовании он нашел общее выражение для кривизны многомерных метрических пространств.

Это кратко очерченное развитие математической теории, существенное для возникновения общей теории относительности, привело к тому, что сначала фундаментальным понятием, на котором была основана общая теория относительности, устранившая роль инерциальных систем, явилась метрика Римана. Однако позднее Леви-Чивита правильно указал на то, что элементом теории, позволяющим устранять инерциальную систему, является, собственно говоря, поле бесконечно малых смещений Γ_{ik}^{l}. Метрическое, или симметричное тензорное, поле g_{ik}, определяющее поле Γ_{ik}^{l}, связано с устранением роли инерциальной системы лишь косвенно, в той мере, в какой оно определяет поле смещений. Это ясно из следующего рассуждения.

Переход от одной инерциальной системы к другой определяется *линейным* преобразованием (специального вида). Если в двух произвольно удаленных точках P_1 и P_2 существуют два вектора $\underset{1}{A^i}$ и $\underset{2}{A^i}$, соответственные компоненты которых взаимно равны ($\underset{1}{A^i} = \underset{2}{A^i}$), то при разрешенном преобразовании это равенство сохраняется. Если в формуле преобразования

$$A^{i^*} = \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^a} A^a$$

коэффициенты $\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^a}$ не зависят от x^a, то формула преобразования для компонент вектора не зависит от положения. Равенство компонент двух векторов в разных точках P_1 и P_2 является, следовательно, инвариантным соотношением, пока мы ограничиваемся инерциальными системами. Однако, если мы отказываемся от понятия инерциальной системы и разрешаем тем самым произвольные непрерывные преобразования координат, так чтобы коэффициенты $\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^a}$ зависели от координат x^a, то равенство компонент двух векторов, построенных в разных точках пространства, теряет свой инвариантный смысл, и, следовательно, такие векторы не могут непосредственно сравниваться. Именно по этой причине в общей теории относительности нельзя образовывать новые тензоры из данного тензора простым дифференцированием, и именно поэтому инвариантные образования встречаются в этой теории в гораздо меньшем количестве. Этот недостаток исправляется введением поля бесконечно малых смещений. Оно заменяет инерциальную систему постольку, поскольку позволяет проводить сравнение векторов в бесконечно близких точках. Отправляясь от этого понятия, мы рассмотрим в этом приложении релятивистскую теорию поля, опуская все, что является несущественным для нашей цели.

Поле бесконечно малых смещений Γ

Контравариантный вектор A^i в точке P (с координатами x^t) и вектор $A^i + \delta A^i$ в бесконечно близкой точке $(x^t + dx^t)$ мы связываем билинейным выражением

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{st} A^s \, dx^t, \tag{2}$$

причем величины Γ являются функциями x. С другой стороны, если A есть векторное поле, то компоненты (A^i) в точке $(x^t + dx^t)$ равны $A^i + dA^i$, где [3]

$$dA^i = A^i_{,\,t} \, dx^t.$$

Разность этих двух векторов в точке $x^t + dx^t$ тогда сама является вектором

$$(A^i_{,\,t} + A^s \Gamma^i_{st}) \, dx^t \equiv A^i_t dx^t,$$

связывающим компоненты векторного поля в двух бесконечно близких точках. Поле смещений заменяет инерциальную систему, поскольку оно удовлетворяет этому соотношению, формально установленному для инер-

[3] Как и прежде, символ «$,\,_t$» означает частное дифференцирование $\frac{\partial}{\partial x^t}$.

циальной системы. Выражение в скобках, обозначенное для краткости через A^i_l, является тензором.

Тензорный характер A^i_l определяет закон преобразования для величин Γ. Сначала имеем

$$A^{i^*}_{k_*} = \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}} A^i_k.$$

Использование одного и того же индекса в обеих системах не означает, что этот индекс относится к соответственным компонентам. Другими словами, индекс i в x^* и в x пробегает значения от 1 до 4 *независимо*. После некоторой практики такое обозначение значительно облегчает чтение уравнений. Теперь мы заменим

$$A^{i^*}_k \text{ на } A^{i^*}_{,k} + A^{s^*}\Gamma^{i^*}_{sk},$$

$$A^i_k \text{ на } A^i_{,k} + A^s\Gamma^i_{sk}$$

и, с другой стороны,

$$A^{i^*} \text{ на } \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i} A^i, \quad \frac{\partial}{\partial x^{k^*}} \text{ на } \frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Это приводит к уравнению, содержащему кроме величин Γ^* только полевые величины первоначальной системы и их производные по координатам x первоначальной системы. Разрешая это уравнение относительно Γ^*, мы получаем искомую формулу преобразования

$$\Gamma^{i^*}_{kl} = \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{l^*}} \Gamma^i_{kl} - \frac{\partial^2 x^{i^*}}{\partial x^s \partial x^t} \frac{\partial x^s}{\partial x^{k^*}} \frac{\partial x^t}{\partial x^{l^*}}. \tag{3}$$

Второй член (в правой части) можно несколько упростить:

$$-\frac{\partial^2 x^{i^*}}{\partial x^s \partial x^t} \frac{\partial x^s}{\partial x^{k^*}} \frac{\partial x^t}{\partial x^{l^*}} = -\frac{\partial}{\partial x^{l^*}} \left(\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^s}\right) \frac{\partial x^s}{\partial x^{k^*}} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x^{l^*}} \left(\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^{k^*}}\right) + \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*} \partial x^{l^*}} = \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*} \partial x^{l^*}}. \tag{3a}$$

Такую величину мы будем называть *псевдотензором*. При линейных преобразованиях она преобразуется как тензор, тогда как для нелинейных преобразований прибавляется член, который не содержит преобразуемого выражения, но зависит лишь от коэффициентов преобразования.

Замечания о поле смещений

1. Величина $\widetilde{\Gamma}^i_{kl}$ $(\equiv \Gamma^i_{lk})$, получаемая при транспонировании нижних индексов, также преобразуется в соответствии с формулой (3) и потому тоже является полем смещений.

2. Выделяя симметричную или антисимметричную по нижним индексам k^* и l^* часть уравнения (3), мы получаем два уравнения:

$$\Gamma^{i^*}_{\underline{kl}}\left(=\frac{1}{2}\left(\Gamma^{i^*}_{kl}+\Gamma^{i^*}_{lk}\right)\right)=\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l^*}}\Gamma^i_{\underline{kl}}-\frac{\partial^2 x^{i^*}}{\partial x^s \partial x^t}\frac{\partial x^s}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial x^t}{\partial x^{l^*}},$$

$$\Gamma^{i^*}_{\underset{\vee}{kl}}\left(=\frac{1}{2}\left(\Gamma^{i^*}_{kl}-\Gamma^{i^*}_{lk}\right)\right)=\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l^*}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{kl}}.$$

Следовательно, две составных части (симметричная и антисимметричная) величин Γ^i_{kl} преобразуются независимо, т. е., не перемешиваясь. Таким образом, с точки зрения закона преобразования они выглядят как независимые величины. Второе из этих уравнений показывает, что величина $\Gamma^i_{\underset{\vee}{kl}}$ преобразуется как тензор. Поэтому с точки зрения группы преобразований сначала кажется неестественным объединять аддитивно эти две величины в одну.

3. С другой стороны, нижние индексы Γ играют совершенно различные роли в определяющем уравнении (2), так что не существует никакой причины, заставляющей ограничивать Γ условием симметрии по нижним индексам. Если тем не менее это условие накладывается, то оно ведет к теории чисто гравитационного поля. Если же не подчинять величины Γ ограничительному условию симметрии, то мы приходим к обобщению закона гравитации, которое представляется мне естественным.

Тензор кривизны

Хотя поле Γ само не обладает тензорным характером, оно предполагает существование тензора. Этот тензор мы без труда получаем, перенося вектор A^i в соответствии с уравнением (2) вдоль контура, замыкающего бесконечно малый элемент двумерной поверхности, и вычисляя его изменение за один обход контура. Это изменение обладает векторным характером.

Пусть $\underset{0}{x}^t$ — координаты фиксированной точки и x^t — координаты другой точки на контуре. Тогда разность $\xi^t = x^t - \underset{0}{x}^t$ будет малой для всех точек контура, и ее можно использовать в качестве базиса при определении порядков величины.

Интеграл $\oint \delta A^i$ необходимо затем вычислить, используя более явные обозначения

$$-\oint \underline{\Gamma^i_{st}}\, \underline{A}^s dx^t \text{ или } -\oint \underline{\Gamma^i_{st}}\, \underline{A}^s d\xi^t.$$

Подчеркивание величин под знаком интеграла указывает на то, что эти величины следует брать для последовательных точек контура (а не для начальной точки $\xi^t = 0$).

Вычислим сначала в самом низшем приближении значение $\underline{A}^i$ для произвольной точки ξ^t контура. Это приближение получается при замене в интеграле, взятом теперь по незамкнутому пути, величин $\underline{\Gamma^i_{st}}$ и $\underline{A}^s$ на величины Γ^i_{st} и A^s для начальной точки интегрирования $(\xi^t = 0)$. Интегрирование тогда дает

$$\underline{A}^i = A^i - \Gamma^i_{st} A^s \int d\xi^t = A^i - \Gamma^i_{st} A^s \xi^t.$$

В этом выражении мы пренебрегли членами второго или более высокого порядка по ξ. В том же приближении мы получаем немедленно

$$\underline{\Gamma^i_{st}} = \Gamma^i_{st} + \Gamma^i_{st,\,r}\xi^r.$$

Подставляя эти выражения в интеграл и выбирая соответствующим образом индексы, по которым производится суммирование, мы получаем сначала

$$-\oint (\Gamma^i_{st} + \Gamma^i_{st,\,q}\,\xi^q)\,(A^s - \Gamma^s_{pq} A^p\,\xi^q)\,d\xi^t,$$

где все величины, за исключением ξ, следует брать для начальной точки интегрирования. Затем мы находим

$$-\Gamma^i_{st} A^s \oint d\xi^t - \Gamma^i_{st,\,q} A^s \oint \xi^q d\xi^t + \Gamma^i_{st}\Gamma^s_{pq} A^p \oint \xi^q\, d\xi^t,$$

где интегрирование производится по замкнутому контуру. (Первый член обращается в нуль, так как интеграл от него равен нулю.) Член, пропорциональный $(\xi)^2$, здесь опущен как величина высшего порядка. Два других члена можно объединить:

$$[-\Gamma^i_{pt,\,q} + \Gamma^i_{st}\Gamma^s_{pq}]\, A^p \oint \xi^q\, d\xi^t.$$

Это и есть изменение ΔA^i вектора A^i после переноса вдоль контура. Мы имеем

$$\oint \xi^q d\xi^t = \oint d\,(\xi^q \xi^t) - \oint \xi^t d\xi^q = -\oint \xi^t d\xi^q.$$

Таким образом, этот интеграл является антисимметричным по t и q, и, кроме того, он обладает тензорным характером. Обозначим его через f^{tq}.

Если бы f^{tq} был *произвольным* тензором, то векторный характер величины ΔA^i приводил бы к следствию, что выражение в скобках в предпоследней формуле имеет тензорный характер. В действительности же мы можем сделать вывод о тензорном характере выражения в скобках только в том случае, если оно будет антисимметризовано по t и q. Тогда из него получится тензор кривизны

$$R^i_{klm} \equiv \Gamma^i_{kl,\,m} - \Gamma^i_{km,\,l} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{km} + \Gamma^i_{sm}\Gamma^s_{kl}. \tag{4}$$

При этом положение всех индексов фиксируется. Свертывая по индексам i и m, мы получим *свернутый тензор кривизны*

$$R_{ik} \equiv \Gamma^s_{ik,\,s} - \Gamma^s_{is,\,k} - \Gamma^s_{it}\Gamma^t_{sk} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^t_{st}. \tag{4a}$$

λ-преобразование

Кривизна обладает свойством, которое будет иметь важное значение в последующем. Для поля смещений Г можно определить новые величины Г* по формуле

$$\Gamma^{l*}_{ik} = \Gamma^l_{ik} + \delta^l_i\lambda_{,k}, \tag{5}$$

где λ есть произвольная функция координат и δ^l_i есть тензор Кронеккера («λ-преобразование»). Если образовать R^i_{klm} (Γ^*) заменяя Γ^* на правую часть уравнения (5), то λ сокращается так, что

$$R^i_{klm}(\Gamma^*) = R^i_{klm}(\Gamma)$$

и

$$R_{ik}(\Gamma^*) = R_{ik}(\Gamma). \tag{6}$$

Кривизна инвариантна относительно λ-преобразования («λ-инвариантность»). Следовательно, теория, содержащая Г только в выражении для тензора кривизны, определяет поле Г не полностью, а только с точностью до функции λ, остающейся произвольной. В подобной теории Г и Г* следует рассматривать как представления одного поля таким образом, как если бы величина Г* получалась из Г просто преобразованием координат.

Следует отметить, что λ-преобразование, в противоположность преобразованию координат, порождает несимметричные величины Г* из симметричных по индексам i и k величин Г. В такой теории условие симметрии для Г теряет свой объективный смысл.

Основное значение λ-инвариантности определяется тем, что она, как мы увидим позднее, влияет на «жесткость» системы уравнений поля.

Требование «инвариантности относительно транспонирования»

Вводя несимметричные поля, мы встречаем следующую трудность. Если Γ^l_{ik} означает поле смещений, то $\widetilde{\Gamma}^l_{ik}\ (=\Gamma^l_{ki})$ тоже будет полем смещений. Если g_{ik} есть тензор, то $\widetilde{g}_{ik}\ (=g_{ki})$ также является тензором. Это ведет к большому числу ковариантных образований, из которых невозможно сделать выбор на основании одного только принципа относительности. Мы продемонстрируем эту трудность на примере и покажем, как можно преодолеть ее естественным образом.

В теории симметричного поля важную роль играет тензор

$$(W_{ikl}\equiv)\, g_{ik,\,l}-g_{sk}\Gamma^s_{il}-g_{is}\Gamma^s_{lk}.$$

Приравнивая его нулю, мы получаем уравнение, позволяющее выразить величины Γ через g, т. е. исключить Γ. Пользуясь тем, что, как показано ранее, 1) выражение $A^i_t = A^i_{,t} + A^s\Gamma_{st}$ есть тензор, и что 2) произвольный контравариантный тензор может быть представлен в виде $\sum\limits_t \underset{(t)}{A^i}\underset{(t)}{B^k}$, можно без труда доказать, что написанное выше выражение имеет тензорный характер и в том случае, если поля g и Γ уже не будут симметричными.

Но в последнем случае тензорный характер сохраняется, если, к примеру, в последнем члене Γ^s_{lk} транспонируется, т. е. заменяется на Γ^s_{lk} (это следует из того факта, что выражение $g_{is}\,(\Gamma^s_{kl}-\Gamma^s_{lk})$ есть тензор). Существуют и другие, хотя и не такие простые, образования, сохраняющие тензорный характер, которые можно считать обобщением рассматриваемого выражения на случай несимметричного поля. Следовательно, если мы захотим обобщить на несимметричные поля соотношение между величинами g и Γ, получаемое приравниванием нулю написанного выше выражения, то это, по-видимому, внесет произвол при выборе поля.

Но рассматриваемое образование обладает свойством, отличающим его от всех других возможных образований. Если одновременно заменить g_{ik} на $\widetilde{g}_{ik}$ и Γ^l_{ik} на $\widetilde{\Gamma}^l_{ik}$ и затем переставить индексы i и k, это образование переходит само в себя. Оно является «симметричным относительно транспонирования» по индексам i и k. Уравнение, получаемое приравниванием этого выражения нулю, является «инвариантным относительно транспонирования». В случае симметричных g и Γ это условие, разумеется, также удовлетворяется; оно служит обобщением требования того, чтобы полевые величины были симметричны.

Для уравнений несимметричного поля мы постулируем, что они должны обладать *инвариантностью относительно транспонирования.* Я полагаю, что этот постулат, с физической точки зрения, соответствует требованию, чтобы положительные и отрицательные электрические заряды входили в законы физики симметрично.

Взгляд на уравнение (4а) показывает, что тензор R_{ik} является не вполне инвариантным относительно транспонирования, поскольку при транспонировании он переходит в

$$(\overset{*}{R}_{ik} =)\ \Gamma^{s}_{ik,s} - \Gamma^{s}_{sk,i} - \Gamma^{s}_{it}\Gamma^{t}_{sk} + \Gamma^{s}_{ik}\Gamma^{t}_{ts}. \tag{4б}$$

Это обстоятельство и лежит в основе трудностей, с которыми мы сталкиваемся, пытаясь установить уравнения поля, инвариантные относительно транспонирования.

Псевдотензор U^{l}_{ik}

Оказывается, что из R_{ik} можно образовать симметричный относительно транспонирования тензор, введя вместо Γ^{l}_{ik} несколько отличающийся псевдотензор U^{l}_{ik}. В уравнении (4а) два линейных по Γ члена формально можно объединить в один. Заменим $\Gamma^{s}_{ik,s} - \Gamma^{s}_{is,k}$ на $(\Gamma^{s}_{ik} - \Gamma^{t}_{it}\delta^{s}_{k})_{,s}$ и определим новый псевдотензор U^{l}_{ik} уравнением

$$U^{l}_{ik} \equiv \Gamma^{l}_{ik} - \Gamma^{t}_{it}\delta^{l}_{k}. \tag{7}$$

Поскольку, как следует из уравнения (7) в результате свертывания по k и l,

$$U^{t}_{it} = -3\Gamma^{t}_{it},$$

мы получаем для Γ следующее выражение

$$\Gamma^{l}_{ik} = U^{l}_{ik} - \frac{1}{3} U^{t}_{it}\delta^{l}_{k}. \tag{7а}$$

Подставляя это выражение в (4а), находим для свернутого тензора кривизны выражение через U:

$$S_{ik} \equiv U^{s}_{ik,s} - U^{s}_{it}U^{t}_{sk} + \frac{1}{3} U^{s}_{is}U^{t}_{tk}. \tag{8}$$

Но это выражение симметрично относительно транспонирования. Именно это обстоятельство и придает псевдотензору U такое значение для теории несимметричных полей.

λ-Преобразование для U. Заменяя в уравнении (5) Γ на U, мы получаем после простого вычисления

$$U_{ik}^{l*} = U_{ik}^{l} + (\delta_i^l \lambda_{,k} - \delta_k^l \lambda_{,i}). \tag{9}$$

Это уравнение определяет λ-преобразование для U. Выражение (8) инвариантно по отношению к этому преобразованию ($S_{ik}(v^*) = S_{ik}(v)$).

Закон преобразования для U. Заменяя в уравнениях (3) и (3а) величины Γ на U с помощью формулы (7а), мы получаем

$$U_{ik}^{l*} = \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i^*}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}} U_{ik}^{l} + \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{k^*}} - \delta_{k^*}^{l^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}}. \tag{10}$$

Заметим, что опять индексы, относящиеся к обеим системам, пробегают все значения от 1 до 4 *независимо друг от друга*, даже если они обозначаются одной буквой. Рассматривая эту формулу, следует отметить, что из-за наличия последнего члена она несимметрична относительно перестановок индексов i и k. Это обстоятельство можно обнаружить, рассматривая преобразование как произведение симметричного относительно транспонирования преобразования координат и λ-преобразования. Запишем сначала последний член в виде

$$-\frac{1}{2}\left[\delta_{k^*}^{l^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}} + \delta_{i^*}^{l^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*}\partial x^{t^*}}\right] + \\ + \frac{1}{2}\left[\delta_{i^*}^{l^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*}\partial x^{t^*}} - \delta_{k^*}^{l^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\partial x^{t^*}}\right].$$

Первое из этих выражений является симметричным относительно транспонирования. Объединим его с первыми двумя членами правой части уравнения (10) в одно выражение K_{ik}^{l*}. Рассмотрим теперь, что получается, если вслед за преобразованием

$$U_{ik}^{l*} = K_{ik}^{l*}$$

мы совершаем λ-преобразование

$$U_{ik}^{l**} = U_{ik}^{l*} + \delta_{i^*}^{l^*}\lambda_{,k^*} - \delta_{k^*}^{l^*}\lambda_{,i^*}.$$

В результате получаем

$$U_{ik}^{l**} = K_{ik}^{l*} + (\delta_{i^*}^{l^*}\lambda_{,k^*} - \delta_{k^*}^{l^*}\lambda_{,i^*}).$$

Это значит, что (10) можно рассматривать как произведение двух преобразований, если второй член уравнения (10а) можно привести к виду $\delta_{i^*}^{l^*}\lambda_{,k^*} - \delta_{k^*}^{l^*}\lambda_{,i^*}$. Для этого достаточно показать, что существует такая функция λ, что

$$\frac{1}{2}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*}\,\partial x^{t^*}}=\lambda_{,\,i^*}$$

$$\left(\text{и}\ \frac{1}{2}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\,\partial x^{t^*}}=\lambda_{,\,i^*}\right). \tag{11}$$

Чтобы преобразовать левую часть гипотетического пока уравнения, необходимо сначала выразить $\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}$ через коэффициенты обратного преобразования $\frac{\partial x^a}{\partial x^{b^*}}$. С одной стороны,

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^{t^*}}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}=\delta_s^p, \tag{а}$$

с другой —

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^{t^*}}V_{t^*}^s=\frac{\partial x^p}{\partial x^{t^*}}\frac{\partial D}{\partial\left(\frac{\partial x^s}{\partial x^t}\right)}=D\delta_s^p.$$

Здесь $V_{t^*}^s$ означает сомножитель при $\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}$, который в свою очередь может быть выражен как производная определителя $D=\left|\frac{\partial x^a}{\partial x^{b^*}}\right|$ по $\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}$. Следовательно, мы имеем также

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^{t^*}}\frac{\partial\ln D}{\partial\left(\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right)}=\delta_s^p. \tag{б}$$

Из выражений (а) и (б) следует, что

$$\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}=\frac{\partial\ln D}{\partial\left(\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right)}.$$

Вследствие этого соотношения левую часть уравнения (4) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\ln D}{\partial\left(\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right)}\left(\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right)_{,\,k^*}=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln D}{\partial x^{k^*}}.$$

Это значит, что уравнение (11) действительно удовлетворяется, если

$$\lambda = \frac{1}{2} \ln D.$$

Это доказывает, что преобразование (10) можно рассматривать как произведение симметричного относительно транспонирования преобразования

$$U_{ik}^{l^*} = \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i^*}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}} U_{ik}^l + \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*} \partial x^{k^*}} - \\ - \frac{1}{2} \left[\delta_{k^*}^{l^*} \frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*} \partial x^{t^*}} + \delta_{i^*}^{l^*} \frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*} \partial x^{t^*}} \right] \quad (10б)$$

и λ-преобразования. Таким образом, в качестве формулы преобразования для U вместо (10) можно взять (10б). Всякое преобразование поля U, изменяющее только форму представления, можно выразить в виде произведения преобразования координат по формуле (10б) и λ-преобразования.

Вариационный принцип и уравнения поля

Вывод уравнений поля из вариационного поля имеет то преимущество, что обеспечивается совместность получаемой системы уравнений и что тождества, связанные с общей ковариантностью — тождества Бианки,— а также законы сохранения выводятся систематическим путем.

Варьируемый интеграл должен содержать скалярную плотность $\mathfrak{H}$. Мы построим эту плотность из R_{ik} или S_{ik}. Простейший способ состоит в том, чтобы ввести ковариантную тензорную плотность $\mathfrak{g}^{ik}$ с весом 1 в дополнение к Γ или U соответственно, полагая

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} R_{ik} (= \mathfrak{g}^{ik} S_{ik}). \quad (12)$$

Для $\mathfrak{g}^{ik}$ должен выполняться следующий закон преобразования:

$$\mathfrak{g}^{ik^*} = \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{k^*}}{\partial x^k} \mathfrak{g}^{ik} \left| \frac{\partial x^t}{\partial x^{t^*}} \right|, \quad (13)$$

где опять индексы, относящиеся к разным системам координат, несмотря на применение одних и тех же букв, следует считать взаимно независимыми. Действительно, мы получаем

$$\int \mathfrak{H}^* d\tau^* = \int \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{k^*}}{\partial x^k} \mathfrak{g}^{ik} \left| \frac{\partial x^t}{\partial x^{t^*}} \right| \frac{\partial x^s}{\partial x^{i^*}} \frac{\partial x^t}{\partial x^{k^*}} S_{st} \left| \frac{\partial x^{r^*}}{\partial x^r} \right| d\tau = \int \mathfrak{H} \, d\tau,$$

т. е. что интеграл инвариантен относительно преобразования. Кроме того, интеграл инвариантен относительно λ-преобразования (5) или (9), так как тензор R_{ik}, выраженный соответственно через Γ или U, а следовательно, и $\mathfrak{H}$ является инвариантным относительно λ-преобразования. Отсюда следует, что уравнения поля, получаемые варьированием $\int \mathfrak{H}\, d\tau$, являются ковариантными по отношению к преобразованию координат и λ-преобразованию.

Но мы постулировали также, что уравнения поля должны быть инвариантными относительно транспонирования двух полей $\mathfrak{g}$, Γ или полей $\mathfrak{g}$, U. Этот постулат выполняется, если инвариантностью относительно транспонирования обладает подынтегральная функция $\mathfrak{H}$. Мы видели, что тензор R_{ik} симметричен относительно транспонирования, если он выражен через U, но не через Γ. Следовательно, функция $\mathfrak{H}$ будет инвариантной относительно транспонирования только в том случае, если в качестве переменных поля в дополнение к $\mathfrak{g}^{ik}$ мы введем величины U (но не Γ). В этом случае мы с самого начала гарантируем, что уравнения поля, получаемые варьированием $\int \mathfrak{H}\, d\tau$, будут инвариантными относительно транспонирования.

Варьируя $\mathfrak{H}$ [уравнения (12) и (8)] по $\mathfrak{g}$ и U, мы находим

$$\delta\mathfrak{H} = S_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik} - \mathfrak{N}_l^{ik}\delta U_{ik}^l + (\mathfrak{g}^{ik}\delta U_{ik}^s)_{,s},$$

где

$$\left.\begin{aligned} S_{ik} &= U_{ik,s}^s - U_{it}^s U_{sk}^t + \frac{1}{3} U_{is}^s U_{tk}^t, \\ \mathfrak{N}_l^{ik} &= \mathfrak{g}^{ik}{}_{,l} + \mathfrak{g}^{sk}\left(U_{sl}^i - \frac{1}{3} U_{st}^t \delta_l^i\right) + \mathfrak{g}^{is}\left(U_{ls}^k - \frac{1}{3} U_{ts}^t \delta_l^k\right). \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Уравнения поля

Наш вариационный принцип гласит:

$$\delta\left(\int \mathfrak{H}\, d\tau\right) = 0. \qquad (15)$$

Величины $\mathfrak{g}_{ik}$ и U_{ik}^l варьируются независимо, и их вариации на границе области интегрирования обращаются в нуль. Варьирование прежде всего дает

$$\int \delta\mathfrak{H}\, d\tau = 0.$$

Подставляя сюда выражение (14), находим, что последний член в выражении для $\delta\mathfrak{H}$ не вносит в интеграл ничего, так как вариации δU_{ik}^l

на границах исчезают. Итак, мы получаем уравнения поля

$$S_{ik} = 0, \tag{16а}$$

$$\mathfrak{R}_l^{ik} = 0. \tag{16б}$$

Эти уравнения — как уже ясно из выбора вариационного принципа — являются инвариантными относительно преобразования координат, λ-преобразования и транспонирования.

Тождества

Эти уравнения поля не независимы одно от другого. Между ними имеется $4+1$ тождеств. Другими словами, существуют $4+1$ уравнений между их левыми частями, выполняющихся независимо от того, удовлетворяет поле $\mathfrak{g}$ и U уравнениям поля или нет.

Эти тождества можно получить хорошо известным методом из того факта, что интеграл $\int \mathfrak{H}\, d\tau$ является инвариантным относительно преобразования координат и λ-преобразования.

Из инвариантности интеграла $\int \mathfrak{H}\, d\tau$ следует, что его вариация обращается в нуль *тождественно*, если подставить в $\delta\mathfrak{H}$ вариации $\delta\mathfrak{g}$ и δU, возникающие в результате бесконечно малого преобразования координат или бесконечно малого λ-преобразования соответственно.

Бесконечно малое преобразование координат описывается формулой

$$x^{i*} = x^i + \xi^i, \tag{17}$$

где ξ^i означает произвольный бесконечно малый вектор. Теперь мы должны выразить вариации $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ и δU^l_{ik} через ξ^i с помощью уравнений (13) и (10б). В соответствии с уравнением (17) следует заменить

$$\frac{\partial x^{a*}}{\partial x^b} \text{ на } \delta^a_b + \xi^a_{,b}, \qquad \frac{\partial x^a}{\partial x^{b*}} \text{ на } \delta^a_b - \xi^a_{\ ,b}$$

и опустить все члены выше первого порядка по ξ. В результате получим:

$$\delta\mathfrak{g}^{ik} \left(= \mathfrak{g}^{ik*} - \mathfrak{g}^{ik}\right) = \mathfrak{g}^{sk}\xi^i_{,s} + \mathfrak{g}^{is}\xi^k_{,s} - \mathfrak{g}^{ik}\xi^s_{\cdot s} + \left[-\mathfrak{g}^{ik}_{,s}\xi^s\right], \tag{13а}$$

$$\delta U^l_{ik} \left(= U^{l*}_{ik} - U^l_{ik}\right) = U^s_{ik}\xi^l_{,s} - U^l_{sk}\xi^s_{,i} - U^l_{is}\xi^s_{,k} + \xi^l_{,ik} + \left[-U^l_{ik,k}\xi^s\right]. \tag{10в}$$

Сделаем следующее замечание. Формулы преобразования устанавливают новые значения переменных поля *для одной и той же точки континуума*. Вычисления, кратко описанные выше, дают сначала выражения для $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ и δU^l_{ik} без членов в скобках. С другой стороны, при варьировании символы $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ и δU^l_{ik} означают вариации *для фиксированных значений координат*. Чтобы получить эти вариации, необходимо прибавить члены в скобках.

При подстановке этих «трансформационных вариаций» $\delta\mathfrak{g}$ и δU вариация интеграла $\int \mathfrak{H}\,d\tau$ обращается в нуль тождественно. Если, кроме того, выбрать векторы ξ^i так, чтобы они (вместе со своими первыми производными) обращались в нуль на границе области интегрирования, то последний член в уравнении (14) не даст никакого вклада. Поэтому интеграл

$$\int (S_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik} - \mathfrak{N}^{ik}_l \delta U^l_{ik})\,d\tau$$

обращается в нуль тождественно, если вариации $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ и δU^l_{ik} заменяются выражениями (13а) и (10в). Поскольку этот интеграл является линейной однородной функцией векторов ξ^i и их производных, он может быть приведен к виду

$$\int \mathfrak{M}_i \xi^i\,d\tau$$

повторным интегрированием по частям, причем $\mathfrak{M}_i$ обозначает известное выражение (первого порядка по S_{ik} и второго порядка по $\mathfrak{N}^{ik}_l$). Отсюда следуют тождества

$$\mathfrak{M}_i \equiv 0. \tag{18}$$

Четыре тождества для S_{ik} и $\mathfrak{N}^{ik}_l$ соответствуют тождествам Бианки. В соответствии с введенной ранее терминологией эти тождества принадлежат третьему порядку.

Существует пятое тождество, соответствующее инвариантности интеграла $\int \mathfrak{H}\,d\tau$ по отношению к бесконечно малому λ-преобразованию. В этом случае в уравнение (14) мы должны подставить

$$\delta\mathfrak{g}^{ik} = 0, \qquad \delta U^l_{ik} = \delta^l_i \lambda_{,\,k} - \delta^l_k \lambda_{,\,i},$$

где λ — бесконечно малая величина, исчезающая на границе области интегрирования. Сначала получаем

$$\int \mathfrak{N}^{ik}_l (\delta^l_i \lambda_{,k} - \delta^l_k \lambda_{,i})\,dt = 0,$$

или, после интегрирования по частям,

$$2\int \mathfrak{N}^{\underset{\vee}{is}}_{s,\,i} \lambda\,d\tau = 0$$

$\left(\text{где, вообще, } \mathfrak{N}^{\underset{\vee}{ik}}_l = \frac{1}{2}(\mathfrak{N}^{ik}_l - \mathfrak{N}^{ki}_l)\right).$

Это дает искомое тождество

$$\mathfrak{N}^{\underset{\vee}{is}}_{s,\,i} \equiv 0. \tag{19}$$

По нашей терминологии это тождество второго порядка. Для $\mathfrak{R}^{\underset{\vee}{is}}_{s}$ непосредственным вычислением из уравнения (14) получаем

$$\mathfrak{R}^{\underset{\vee}{is}}_{s} \equiv \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s}. \qquad (19а)$$

Таким образом, если уравнение поля (16б) удовлетворяется, то

$$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s} = 0. \qquad (16в)$$

Замечание о физической интерпретации. Сравнение с теорией электромагнитного поля Максвелла наводит на мысль, что уравнение (16в) выражает равенство нулю плотности магнитного тока. Если принять эту интерпретацию, то станет очевидным, какое выражение должно означать плотность электрического тока. Тензорной плотности $\mathfrak{g}^{ik}$ можно сопоставить тензор g^{ik} по формуле

$$\mathfrak{g}^{ik} = g^{ik}\sqrt{-|g_{st}|}, \qquad (20)$$

где ковариантный тензор g_{ik} связывается с контравариантным тензором уравнениями

$$g_{is}g^{ks} = \delta_i^k. \qquad (21)$$

Из этих двух уравнений получаем

$$g^{ik} = \mathfrak{g}^{ik}(-|\mathfrak{g}^{st}|)^{-\frac{1}{2}}$$

и затем g_{ik} — из уравнений (21). Далее мы можем предположить, что уравнение

$$(a_{ikl}) = g_{\underset{\vee}{ik},l} + g_{\underset{\vee}{kl},i} + g_{\underset{\vee}{li},k}, \qquad (22)$$

или

$$\mathfrak{a}^m = \frac{1}{6}\eta^{iklm}a_{ikl}, \qquad (22а)$$

выражает плотность тока, причем η^{iklm} означает тензорную плотность Леви-Чивиты (с компонентами ± 1), антисимметричную по всем индексам. Дивергенция этой величины равна нулю тождественно.

Жесткость системы уравнений (16а), (16б)

Применяя здесь описанный выше метод вычислений, мы должны учитывать, что все величины U^*, получаемые из заданной величины U с помощью λ-преобразований вида (9), в действительности представляют одно и то же поле U. Вследствие этого коэффициенты n-го порядка в разложении U_{ik}^l включают $\binom{4}{n}$ производных λ n-го порядка, выбор которых не имеет значения для действительно различных полей U. Таким образом число коэффициентов разложения, существенных для определения полей U, уменьшается на $\binom{4}{n}$. Используя наш метод вычислений, мы получаем для числа свободных коэффициентов n-го порядка выражение

$$z = \left[16\binom{4}{n} + 64\binom{4}{n-1} - 4\binom{4}{n+1} - \binom{4}{n}\right] - \\ - \left[16\binom{4}{n-2} + 64\binom{4}{n-1}\right] + \left[4\binom{4}{n-3} + \binom{4}{n-2}\right]. \quad (23)$$

Первые скобки дают полное число соответствующих коэффициентов n-го порядка, характеризующих поле U, вторые скобки показывают уменьшение этого числа вследствие существования уравнений поля, а третьи скобки означают поправку к этому уменьшению, обусловленную тождествами (18), (19). Вычисляя асимптотическое значение для больших n, находим

$$z \sim \binom{4}{n}\frac{z_1}{n}, \quad (23а)$$

где $z_1 = 42$.

Следовательно, уравнения несимметричного поля оказываются значительно более слабыми, чем уравнения чисто гравитационного поля ($z_1 = 12$).

Влияние λ-инвариантности на жесткость системы уравнений. Можно попытаться построить теорию, инвариантную относительно транспонирования, отправляясь от выражения, инвариантного относительно транспонирования,

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{g}^{ik}R_{ik} + \tilde{\mathfrak{g}}^{ik}\tilde{R}_{ik}\right)$$

(вместо того, чтобы вводить в качестве переменных поля U). Конечно, получаемая при этом теория будет отличаться от изложенной выше. Можно показать, что эта функция $\mathfrak{H}$ не является λ-инвариантной. Здесь мы также получаем уравнения поля типа (16а), (16б), инвариантные относительно транспонирования $\mathfrak{g}$ и Г. Между ними, однако, существуют только четыре тождества Бианки. Применяя к этой системе метод вычислений, мы обнаружим, что в формуле, соответствующей (23), отсутствуют четвертый член в первых скобках и второй член в третьих скобках. Получаем

$$z_1 = 48.$$

Следовательно, эта система уравнений слабее, чем наша, и поэтому должна быть отвергнута.

Сравнение с прежней системой уравнений поля. Она гласит:

$$\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{is}} = 0, \qquad R_{\underline{ik}} = 0,$$

$$g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^{s}_{il} - g_{is}\Gamma^{s}_{lk} = 0, \qquad R_{\underset{\vee}{ik},l} + R_{\underset{\vee}{kl},i} + R_{\underset{\vee}{li},k} = 0,$$

где тензор R_{ik} как функция Г определяется уравнением (4а) и где

$$R_{\underline{ik}} = \frac{1}{2}(R_{ik} + R_{ki}), \quad R_{\underset{\vee}{ik}} = \frac{1}{2}(R_{ik} - R_{ki})\Big].$$

Эта система полностью эквивалентна новой [системе (16а), (16б), так как она получена варьированием того же интеграла. Она инвариантна относительно транспонирования $\mathfrak{g}_{ik}$ и Γ^l_{ik}. Разница, однако, заключается в том, что ни сам варьируемый интеграл, ни система уравнений, получаемая при его варьировании, не инвариантны относительно транспонирования. Однако она инвариантна по отношению к λ-преобразованиям (5). Чтобы добиться инвариантности относительно транспонирования, следует применить искусственный прием. Введем формально четыре новых переменных поля λ_i и выберем [4] их после варьирования так, чтобы удовлетворялись уравнения $\Gamma^s_{\underset{\vee}{is}} = 0$.

Таким образом уравнения, полученные варьированием по Г, приводятся к указанному виду, инвариантному относительно транспонирования. Но уравнения для R_{ik} все еще содержат вспомогательные переменные λ_i. Однако их можно исключить, что приведет к разложению этих уравнений в ряд указанным выше способом. Получаемые в результате уравнения также будут инвариантными относительно транспонирования по отношению к $\mathfrak{g}$ и Г).

Постулирование уравнений $\Gamma^s_{\underset{\vee}{is}} = 0$ приводит к нормировке Г-поля, устраняющей λ-инвариантность системы уравнений. В результате не все эквивалентные представления Г-поля оказываются решениями этой системы. То, что происходит при этом, можно сравнить с процессом присоединения к уравнениям чисто гравитационного поля произвольных дополнительных уравнений, ограничивающих выбор координат. К тому же в нашем случае уравнения становятся излишне усложненными. Эти трудности не появляются в новом представлении, получаемом из вариационного принципа, инвариантного относительно транспонирования по отношению к $\mathfrak{g}$ и U, причем в качестве переменных поля всюду следует применить $\mathfrak{g}$ и U.

Закон дивергенции и закон сохранения импульса и энергии

Если удовлетворяются уравнения поля и, кроме того, вариация является результатом λ-преобразования, то в уравнении (14) обращаются в нуль не только S_{ik} и $\mathfrak{N}^{ik}_l$, но и $\delta\mathfrak{H}$, так что уравнения поля имеют своим следствием

$$(\mathfrak{g}^{ik}\delta U^s_{ik})_{,s} = 0,$$

[4] Полагая $\Gamma^{l*}_{ik} = \Gamma^l_{ik} + \delta^l_i\lambda_k$.

где δU^{s}_{ik} определяются уравнением (10в). Этот закон дивергенции выполняется для произвольно выбранного вектора ξ^i. Простейший конкретный выбор, когда ξ^i не зависит от x, дает четыре уравнения:

$$\mathfrak{T}^{s}_{t,s} \equiv (\mathfrak{g}^{ik}U^{s}_{ik,\,t})_{,\,s} = 0.$$

Эти уравнения можно интерпретировать и применять в качестве уравнений сохранения импульса и энергии. Следует отметить, что эти уравнения сохранения определяются системой уравнений поля не единственным образом. Интересно отметить, что в соответствии с уравнениями

$$\mathfrak{T}^{s}_{t} \equiv \mathfrak{g}^{ik}U^{s}_{ik,\,t}$$

плотность потока энергии ($\mathfrak{T}^1_4$, $\mathfrak{T}^2_4$, $\mathfrak{T}^3_4$), а также плотность энергии $\mathfrak{T}^4_4$ исчезают для поля, независимого от x^4. Уже отсюда можно заключить, что согласно этой теории стационарное поле, не содержащее особенностей, не может представлять массу, отличную от нуля.

Вывод, а также вид законов сохранения становится намного сложнее, чем в том случае, когда мы использовали уравнения поля в прежней формулировке.

Общие замечания.

А. С моей точки зрения, изложенная здесь теория является логически простейшей релятивистской теорией поля, возможной вообще. Но это не значит, что природа не может подчиняться более сложным теориям поля.

Более сложные теории поля предлагались часто. Их можно классифицировать по следующим характерным признакам.

а) Увеличение числа измерений континуума. В этом случае необходимо объяснить, почему континуум *очевидным образом* ограничен четырьмя измерениями;

б) Введение полей иного рода (например, векторного поля) в дополнение к полю смещений и тензорному полю g_{ik} (или $\mathfrak{g}^{ik}$);

в) Введение уравнений поля высшего порядка (в смысле дифференцирования).

На мой взгляд подобные более сложные теории и их комбинации следует рассматривать только в том случае, если для этого будут существовать физические причины, основанные на эксперименте.

Б. Теория поля еще не вполне определяется системой уравнений поля. Надо ли признавать наличие сингулярностей? Следует ли постулировать граничные условия? Что касается первого вопроса, то мое мнение заключается в следующем: сингулярности должны быть исключены. Мне не кажется разумным вводить в теорию континуума точки (или линии и т. п.), для которых уравнения поля не выполняются. Кроме того, введение сингулярностей эквивалентно постулированию граничных условий (произвольных с точки зрения уравнений поля) на «поверхностях», окружающих сингулярности. Без такого постулата теория будет слишком неопределенной. Ответ на второй вопрос, по-моему, заключается в том, что постулирование граничных условий является обязательным. Я продемонстрирую это на элементарном примере. Можно сравнить постулат о потенциале вида $\varphi = \sum \frac{m}{r}$ с утверждением, что вне материальных точек (в трех измерениях) выполняется уравнение $\Delta\varphi = 0$. Но если не прибавить граничное условие, согласно которому φ обращается в нуль (или остается конечным) на бесконечности, то будут существовать решения, представляющие собой целые функции x [например, $x_1^2 - 1/2\,(x_2^2 + x_3^2)$] неограниченно возрастающие на бесконечности. Исключить такие поля можно, только постулируя граничное условие в случае, если пространство «открытое».

В. Можно ли думать, что теория поля позволит понять атомистическую и квантовую структуру реальности? Почти каждый ответит на этот вопрос «нет». Но я полагаю, что по этому поводу в настоящее время никому не известно ничего достоверного, поскольку мы не знаем, каким образом и в какой степени исключение сингулярностей сокращает множество решений. У нас вообще нет никакого метода для систематического получения решений, свободных от сингулярностей. Приближенные методы здесь не идут в счет, так как никогда не известно, существует ли для частного приближенного решения точное решение, свободное от сингулярностей. По этой причине мы не можем в настоящее время сравнивать с опытом содержание нелинейной теории поля. Здесь может помочь только существенный прогресс в математических методах. В настоящее время преобладает мнение, что теорию поля сначала необходимо перевести «квантованием» в статистическую теорию вероятностей, следуя более или менее установленным правилам. Я вижу в этом лишь попытку описывать линейными методами соотношения существенно нелинейного характера.

Г. Можно убедительно доказать, что реальность вообще не может быть представлена непрерывным полем. Из квантовых явлений, по-видимому, следует, что конечная система с конечной энергией может полностью описываться конечным набором чисел (квантовых чисел). Это, кажется, нельзя совместить с теорией континуума и требует для описания реальности чисто алгебраической теории. Однако сейчас никто не знает, как найти основу для такой теории.

Пятое издание «Сущности теории относительности» вышло в год смерти Эйнштейна (он умер 18 апреля 1955 г.). Приложение II к этому изданию — последняя опубликованная работа великого автора.

СОДЕРЖАНИЕ

1921 г.

1922 г.

1923 г.

1924 г.

1938 г.

1939 г.

1940 г.

1941 г.

1943 г.

1944 г.

1945 г.

1946 г.

АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН

Собрание научных трудов

Том II

Утверждено к печати
редколлегией серии «Классики науки»

Редактор ***С. И. Ларин***

Редактор издательства ***Е. М. Кляус***

Художник ***А. Я. Михайлов***

Технический редактор ***Н. Д. Новичкова***

Сдано в набор 16/II 1965 г. Подписано в печати 11/XI 1965 г.
Формат 70×90[1]/[16]. Печ. л. 55 + 1 вкл. = 64,35 усл. печ. л. +1 вкл.
Уч. изд. л. 42,3 + 1 вкл. (42,4 уч. изд. л.) Тираж 32 000 экз.
Изд. № 1641/а. Тип. зак. 2574.

Цена 3 р.

Издательство Академии наук СССР
Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография Издательства АН СССР
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
96	5 св.	По-видимому	По видимому
178	3 сн.	Rundschan	Rundschau
248	2 сн.	предположению	предложению
343	14 сн.	единицу	единицу,
370	7 сн.	$=0\ (\alpha)$	$=0\quad(\alpha)$
400	15 сн.	перефирии	периферии
800	2 сн.	Приложение II	Приложение II — статья 141—

А. Эйнштейн, т. II