ЭЙНШТЕЙНОВСКИЙ СБОРНИК

1971

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ЭЙНШТЕЙНОВСКИЙ КОМИТЕТ

ЭЙНШТЕЙНОВСКИЙ СБОРНИК 1971

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА
1972

УДК 530.12

Ответственные редакторы
И. Е. ТАММ, Г. И. НААН

Составитель
У. И. ФРАНКФУРТ

2-3-2
444-72

СОДЕРЖАНИЕ

Переписка А. Эйнштейна и М. Борна. (Перевод **В. Я. Френкеля (и И. Л. Гандельсмана**) **7**

В. Я. Френкель
Макс Борн (к переписке с Эйнштейном) 55

Н. В. Мицкевич
Системы отсчета и конструктивный подход к наблюдаемым в общей теории относительности 67

В. И. Родичев
Геометрические свойства систем отсчета 88

Х. Мёллер
Статистическая механика Гиббса и теория относительности. Перевод В. А. Угарова) 114

Х. Мёллер
Термодинамические потенциалы в теории относительности и их статистическая интерпретация. (Перевод В. А. Угарова) 163

А. М. Френк
Теория излучения Эйнштейна 192

Ю. Б. Молчанов
К вопросу об определении одновременности с помощью транспортировки часов 226

А. М. Линец
О системах отсчета классической механики 254

Я. А. Смородинский
Геометрия Лобачевского и кинематика Эйнштейна 272

Э. М. Чудинов
А. Эйнштейн об отношении геометрии к реальности . . . 302

Л. Н. Любинская
О применении идей многозначной логики и логики связей к анализу творчества А. Эйнштейна 317

Из дискуссий на Сольвеевском конгрессе 27—31 октября 1913 г. в Брюсселе. (Перевод А. Г. Баранова и В. П. Жукова) 323

Дискуссия по докладу Планка «Произведенные Кауфманом измерения отклонения β-лучей и их значение для динамики электрона» на 78-м собрании немецких естествоиспытателей и врачей в Штутгарте в сентябре 1906 г. (Перевод А. Г. Баранова и В. П. Жукова) 349

Дискуссия по докладу А. Эйнштейна «О развитии наших воззрений на сущность и структуру излучения» на 81-м собрании немецких естествоиспытателей и врачей в Зальцбурге в сентябре 1909 г. (Перевод А. Г. Баранова и В. П. Жукова) . 354

Дискуссия по докладу Э. Будде «К теории опыта Майкельсона» на 83-м собрании немецких естествоиспытателей и врачей в Карлсруе в сентябре 1911 г. (Перевод А. Г. Баранова и В. П. Жукова) 358

Дискуссия по докладу А. Эйнштейна «К современному состоянию проблемы гравитации» на 85-м собрании немецких естествоиспытателей в Вене в 1913 г. (Перевод А. Г. Баранова и В. П. Жукова) 361

Дискуссия по докладу Г. Вейля «Электричество и гравитация» на 86-м собрании немецких естествоиспытателей в Наугейме в сентябре 1920 г. (Перевод А. Г. Баранова и В. П. Жукова) 371

Общая дискуссия о теории относительности на 86-м собрании немецких естествоиспытателей в Наугейме в сентябре 1920 г. (Перевод А. Г. Баранова и В. П. Жукова) 375

И. Я. Итенберг, У. И. Франкфурт
К истории релятивистской механики точки (1905—1913) . . 379

ПЕРЕПИСКА А. ЭЙНШТЕЙНА и М. БОРНА *

Берлин, 4.6.19

Дорогой Борн!

Меня совсем уже было замучила совесть из-за того, что я до сих пор не ответил на удивительно милое письмо Вашей жены, и вот в добавок ко всему от Вас приходит вместо нагоняя это отрадное письмо. Меня очень радует, что у Вас такое великолепное гнездо, домик с садом. Но это просто преступно, что Вы взяли на себя такую большую нагрузку. Неужели Вы собираетесь жить, обрекая на муки себя и славных студентов и будучи живым укором своим коллегам? А обещания Зоммерфельду писать статьи: неужели Вы собираетесь их выполнять? Это уж слишком. Если бы Шекспиру пришлось жить в нынешних условиях, то он, пожалуй, в своем изречении «Юпитер смеется над вероломством любви», которое все же звучит несколько жестоко, скорее всего концовку заменил бы на такую: «... над безответственными обещаниями писать статьи». Вы рассказываете мне далее о том, что, по словам нашего друга Оппенгейма, я якобы, открыл бог весть что необыкновенное. Но все это не так. Скромный намек, который я сделал ему по поводу той вещи, о которой я рассказывал Вам у Груневальдзее, в его буйном воображении раздулся уж очень устрашающим образом! Квантовая теория вызывает у меня ощущение, близкое к тому, которое испытываете и Вы. Пожалуй, следовало бы стыдиться этих успехов, так как достигнуты они были в соответствии с иезуитским принципом: «одна рука не должна ведать того, что делает другая».

Политическую ситуацию я не расцениваю столь пессимистически, как Вы. Условия, конечно, жестокие, но они

---

[1] Перевод сделан по книге: Albert Einstein, Hedwig und Max Born. Briefwechsel 1916—1955. Kommentiert von Max Born. München, 1968.

никогда не будут выполнены, они скорее послужат тому, чтобы удовлетворить не столько желудок, сколько глаз «врага». Людендорф несомненно был намного хуже, чем парижане. Действия французов побуждаются только страхом. А у Людендорфа — наполеоновский аппетит. Жестокости французских заблуждений смягчатся благодаря извечно безотказной халатности — в той же мере, как это некогда имело место в моем отечестве — Австрии [1]. В конце концов единство взглядов противника на опасность со стороны Германии развеется как дым, хотя какое-то последствие все же останется. Разве может некий жестоко настроенный братец-икс и детерминист, с повлажневшими от слез глазами, говорить, что он потерял веру в человечество? Именно это, продиктованное инстинктами поведения сегодняшних людей в политической сфере, как раз и способно сделать веру в детерминизм очень живучей.

Я убежден, что грядущее в течение ближайших лет будет намного менее жестоким, чем пережитое в последние годы.

С сердечным приветом Вам и Вашей жене, также и от моей жены.

Ваш Эйнштейн.

Применение Вашей теории к одновалентным металлам, предложенное Габером, просто ошеломляющее.

Литературные обязательства относятся к обещанию Зоммерфельду (профессору теоретической физики в Мюнхене) написать статью «Атомная теория твердого состояния» для тома «Физики» Математической энциклопедии. Эта длинная статья вышла потом отдельной книгой.

Оппенгейм был сыном известного франкфуртовского коммерсанта (торговца ювелирными изделиями), который основал сначала для Лауэ, а потом, когда я его заместил, и для меня — кафедру теоретической физики и финансировал ее. Молодой Оппенгейм интересовался философией и особенно философскими идеями, связанными с теорией относительности. Здесь речь идет, вероятно, о первых статьях Эйнштейна по единой теории поля, которая должна была объединить электромагнитное и гравитационное поля,— теории, которой Эйнштейн занимался до конца своей жизни.

---

[1] Эйнштейн имеет в виду свое пребывание в Праге в должности профессора немецкого университета. Прага и Богемия были тогда частью Австрии. (*Прим. М. Борна*).

Политические замечания свидетельствуют о том, что я находился на более пессимистических позициях, чем Эйнштейн.

Упомянутый «жестоко настроенный братец-*X*» (*X*-Bruder) и «детерминист» («иксом» мы называли, как это принято в математике, нечто неизвестное и подлежащее нахождению) был тогда, вероятно, прав, потому что несколькими годами позднее у меня возникли индетерминистические идеи.

Воскресенье, 1. 9. 19

Дорогая госпожа Борн!

Я чувствую себя очень виноватым перед Вами обоими и особенно перед Вами лично из-за того, что так редко выбираю время для писем. Прежде всего, чтобы не забыть, сообщаю, что мне очень хочется попытаться выцарапать для Вашего мужа субсидию Института Кайзера Вильгельма, если только это удастся при очередном распределении.

Я собираюсь вскоре навестить Вас в Вашем уютном убежище, если, конечно, у Вас там никто не гостит, так что ждите!

Относительно Оппенгейма — это ошибка; мое академическое жалование зависит от кармана господина Коппельса, а не от него. Я совсем не знал, что кафедра Вашего мужа субсидирована О[ппенгеймом], мне известно было только о тамошней обсерватории. Отношения между Оппенгеймом-младшим (старшего я видел всего один-единственный раз) и нами носят исключительно частный характер и связаны с его философскими увлечениями. Сложность, однако, в том, что я обещал господину О[ппенгейму]-младшему — также и Вам — поселиться у него, когда приеду во Франкфурт; выпутаться из этого — задача свыше моих сил, так что будь, что будет. Во всяком случае, выглядит это не так уж скверно, как в случае ответа Альтгоффа, который сказал одному обиженному, после того как кем-то другим была занята обещанная этому человеку профессорская должность,— сказал и весело и грубо: «Неужели Вы думаете, что эту должность я обещал только Вам одному?!» Вчера у меня был Штерн. Он в восторге от Франкфурта и института.

«Упоение» мне не так уж и понравилось, но это во всяком случае несомненно лучше, чем «Призрачная игра» Стриндберга.

Совершенно восхитительны любовь и уважение господина Бибербаха к самому себе и своей Музе. Пусть

Бог сохранит их ему, ведь так лучше всего живется. Раньше, когда люди жили обособленнее, такие оригиналы среди университетских профессоров были чуть ли не правилом, так как им не приходилось лично сталкиваться с равными себе по специальности, а чего-либо другого, кроме этой специальности, для них не существовало.

В вопросах политики я скорее придерживаюсь позиций Вашего мужа, а не Ваших. Я верю в способность союза народов (Völkerbundes) к развитию и верю также, что через некоторое время исчезнут трудности, связанные с его становлением. Уже сейчас противоречия в интересах внутри Антанты так велики, что кое-что смягчается (инцидент с конституцией из-за Австрии, интервенция Антанты в Силезию). Наибольшая опасность для будущего развития, по моему мнению, заключается в том, что американцы могут отступить; надеюсь, что Вильсон сможет этому помешать. Я не верю в то, что люди, как таковые, могут существенно измениться, но убежден, что возможно и даже необходимо покончить с анархией в отношениях между государствами, даже в том случае, если потеря самостоятельности отдельными государствами будет для них значительной жертвой.

Теперь относительно философии. То, что Вы называете «материализмом Макса»[1], является причинно-обусловленным способом рассмотрения окружающего. Этот способ всегда отвечает только на один вопрос «почему?» и никогда не отвечает на вопрос «зачем?» Здесь нам не сможет помочь никакой принцип полезности и никакой искусственный отбор.

Когда же кто-либо спросит: «Зачем нам нужно поддерживать друг друга, облегчать друг другу жизнь, писать чудесную музыку, стремиться к созданию прекрасных творений ума?», то ответить ему следует так: «если ты сам этого не чувствуешь, то и объяснить тебе никто уж не сможет». Без этого первичного мы — ничто, и лучше бы уж тогда нам и не жить. Если кто-либо к тому же захочет попытаться обосновать эти принципы, стремясь доказать, что подобные вещи способствуют сохранению существования человеческой натуры и помогают стимулировать ее развитие, то тогда-то и возникнет вопрос «зачем?».

---

[1] Макса Борна. (*Прим. перев.*).

А «научно» обоснованный ответ окажется здесь еще более безнадежным.

Если все же любой ценой хочется подойти к этим вопросам по-научному, то можно попытаться свести наши цели к минимально возможному количеству, а другие выводить уже из них. Но Вас это уже не будет трогать.

С пессимистической оценкой познания я не согласен. Способность ясно видеть взаимосвязи принадлежит к самым прекрасным ощущениям в жизни; и отрицать это Вы сможете только в том случае, если находитесь в самом мрачном и нигилистическом настроении. А привлекать в качестве свидетеля Библию Вам бы не следовало. В переводе Лютера во многих местах сказано: и он п о з н а л ее, и она родила ему сына. И звали его... Это как раз и связано с «древом познания».

Этот вопрос не очень-то относится к теории познания в нашем смысле; или, быть может, древние старцы вкладывали сюда двойной смысл? Что-то не очень это похоже на оных любителей поразмышлять да подискутировать.

Большое спасибо за прекрасные фотографии. Фотография Вашего мужа чудесна, да и оригинал ведь не плох! Он еще не бывал у меня; я очень был бы ему рад.

Я прекрасно провел последние — великолепные — дни, занимаясь парусным спортом, но, к сожалению, за эту матросскую службу подхватил новую хворобу (желудок), так что снова несколько дней должен был провести в постели. Отсюда и неразборчивый почерк.

Сердечный привет Вам обоим

от Вашего Эйнштейна.

Альтгофф в течение долгого времени был референтом по университетам в Министерстве культуры; он имеет большие заслуги в организации высшей школы. Его знали и боялись из-за его грубости и беспощадности.

Отто Штерн был молодым физиком из Силезии, который работал у меня в качестве ассистента. У нашего института была мастерская и очень дельный механик — Шмидт. Штерн блестяще использовал вытекающие отсюда возможности, благодаря чему поставил свой знаменитый эксперимент по удивительному квантовому эффекту, связанному с расщеплением пучка. Об эффекте такого рода тогда имелись косвенные представления, основанные на спектроскопических наблюдениях; Штерн задался целью непосредственно показать его наличие на атомных пучках в высоком вакууме. Он был при этом поддержан Вальтером Герлахом, ассистентом профессора Ваксмута в Институте экспериментальной физики университета. Позднее за эти исследования Штерн был удостоен Нобелевской премии. Побуждаемый им, я тоже в то время довольно успешно экспериментировал. С моей ассистенткой, Элизабет Борманн, с помощью атомных пучков мы провели прямое измерение длины свободного пробега атомов.

Что за вещью было «Упоение» — я не могу припомнить.

Дело Бибербаха заключалось в следующем. Естественнонаучный факультет имел красиво переплетенную книгу, в которую каждый новый профессор должен был внести краткие автобиографические сведения. Когда я получил ее от декана, математика Шенфлиса, я прочел, естественно, несколько таких кратких биографий и показал их также и моей жене. Она нашла среди них одну очень комичную и проникнутую тщеславием, принадлежавшую молодому математику Людвигу Бибербаху. Жена написала Эйнштейну о наиболее забавных с этой точки зрения местах его автобиографии.

Понедельник, 9.12.19

Дорогой Борн!

Твоя отличнейшая статья во франкфуртской газете меня очень обрадовала. Но вот теперь и тебя, быть может, только в меньшей степени, чем меня, будет одолевать пресса и прочий сброд. Меня это доводит до такого скверного состояния, что я почти не могу дохнуть, не говоря уж о том, чтобы заняться разумной работой.

Эта статья Дрилля потешна, поскольку демократические методы обращений и уговоров толпы он возводит в философию. Предоставим этому человеку возможность и дальше тарахтеть (размахивать цепом); жаль времени, которое занял бы ответ. Береги свой темперамент и оставь парня в покое, пусть болтает. Его доказательство причинности a priori, действительно, высокопарно.

Несколько дней я был у Шлика в Ростоке, в связи с юбилейными празднествами университета, наслушался там по этому поводу злых политических подстрекательских речей и увидел кое-что действительно потешное в провинциальной политике. Самое забавное состояло в том, что все знают друг друга с человеческой стороны настолько хорошо, что в высокопарных выражениях, по какому бы они поводу ни произносились, всегда звучат комические фальшивые нотки. В качестве помещения для торжества был предоставлен только театр, что придавало празднеству несколько комедийный оттенок. Восхитительно было наблюдать, как в двух расположенных одна за другой ложах просцениума сидели представители старого и нового правительств. Конечно, на долю новых от академических гигантов приходились булавочные уколы всевозможного рода, а бывший великий герцог был встречен долго не смолкающей овацией. Воистину, душе, рабской по природе, не поможет никакая революция!

Шлик — это прекрасная голова, нам надо бы подумать о профессорской деятельности для него, тем более что из-за обесценивания имущества ему пришлось туго. Но будет нелегко, так как он не принадлежит к философскому лагерю кантианцев.

Я принял очень близко к сердцу несчастье Планка. Я не мог сдержать слезы, когда зашел к нему после возвращения из Ростока. Держится он удивительно мужественно, не склонив головы, но видно, что в большом горе.

Письма твоей жены восхитительны, самобытны и метки. Надеюсь, что наш друг Оппенгейм быстро найдет себе желательную акушерку; если нет, так радостное событие можно будет ненадолго отложить. Такой же скверной разновидностью беременности страдает и мой друг Габер, который с того момента, как ты переехал, со всеми стенаниями набросился на меня.

Для него характерен насильственный метод, которым он стремится отвоевать истину у природы. Разумным сомнениям он противопоставляет свою интуицию. Это какой-то тип неистового варвара, но, право, он довольно интересен.

Ваш путаник Лоренц категорическим образом затребовал меня на абсолютно излишний доклад во Франкфурт. Он один из самых типичных представителей тех наседок, которые сидят на кафедрах. К сожалению, у меня другие заботы. К нам домой приезжает моя смертельно больная мать — мне придется на некоторое время устроить детей в Германии у моей первой жены. Осложнения и заботы со всех сторон.

Поведение Антанты начинает и мне казаться безобразным. Мои надежды на союз народов, как мне кажется, не собираются сбываться.

Все же, несмотря на ввоз угля, Франция очень страдает, что нетрудно видеть из последних ограничений пассажирского железнодорожного транспорта. У нас иностранцы будут закупать все движимое и недвижимое до тех пор, пока мы не превратимся в англо-американскую колонию.

Хорошо еще, что нам не приходится продавать или приносить в государственное пожертвование собственные мозги!

Надеюсь, что Вы все здоровы и не очень мерзнете.

Сердечно приветствует всех Вас

Ваш Эйнштейн.

Статья во франкфуртской газете была у меня в руках очень недолго, и я не могут сейчас найти ее. Я вспоминаю, что очень много лет пересаливал в своих шутках над традиционной философией. Мои воспоминания о господине Дрилле, статью которого Эйнштейн называет потешной, очень расплывчаты. Сам он являл собой типичный пример яростного противника Эйнштейна. Шлик, напротив, был знаменитым философом. Позднее он переехал в Вену и был основоположником школы, которую теперь называют школой логического позитивизма.

Описание Эйнштейном празднеств в Ростокском университете очень для него характерно.

Что касается горя, постигшего Планка, то я думаю, что Эйнштейн имеет здесь в виду смерть дочери Планка, последовавшую вскоре за рождением ее первого ребенка. Она и ее сестра были близнецами, очень друг к другу привязанными. Сестра покойной взяла на себя заботы о ребенке и вышла замуж за ее мужа. К ужасному несчастью, и она погибла при тех же обстоятельствах — после рождения своего первого ребенка.

Характеристика, данная Эйнштейном Фрицу Габеру, очень меткая. Во время войны между ним и мною произошел разрыв. Он хотел вовлечь меня в свои военные исследования, связанные с газами, от чего я резко отказался. Позднее мы помирились — после того, как я стал чаще посещать его институт в Далеме — с тем, чтобы получать от моего друга Франка экспериментальные данные, необходимые для моей работы по вычислению химического теплового эффекта из данных об энергии кристаллической решетки. Габер чрезвычайно интересовался этой работой и набросал графическую интерпретацию моего метода расчета. Позднее эта теория вошла в физико-химическую литературу под названием борн-габеровского циклического процесса. Таким образом, я имел возможность познакомиться с неистовым варваром, как его называет Эйнштейн. Однажды, например, мы оживленно спорили в его комнате, но нас постоянно прерывали ассистенты, докторанты и механики, которые что-то хотели от директора своего института. Наконец, дверь была без предварительного стука приотворена, после чего Габер, рассвирепев, схватил стеклянную чернильницу и швырнул ее в направлении двери, причем она разлетелась на куски, забрызгав чернилами и дверь и стену. Но в дверях оказалась жена Габера. Она тут же в ужасе исчезла, в то время как мы продолжали нашу работу, как будто бы ничего не произошло.

«Путаник Лоренц» был профессором физической химии во Франкфурте. Он и в самом деле был путаником, но все же в своей области это был дельный человек. Я несколько раз получал от него определенные стимулы. Упомяну, например, мою попытку объяснить аномалии в подвижности ионов малых размеров в экспериментах с диполями, а также опыты по механическому эффекту, определявшемуся этими диполями, которые выполнил мой ученик Лертес (см. мои «Избранные сочинения», стр. 655 и 689).

Заключительные абзацы письма показывают, что Эйнштейн не смог надолго сохранить свои оптимистические надежды, которые он часто противопоставлял моему пессимизму. Но он стремился к тому, чтобы быть справедливым в оценке трудностей, испытывавшихся Францией. Я думаю, что в то время ни один из нас не видел истинной опасности сурового отношения к Германии со стороны Антанты, в результате которого были попраны национальные чувства немецкого народа

3.3.20

Дорогой Борн!

Здесь трудно что-либо советовать. Теоретическая физика будет преуспевать как раз там, где будете находиться Вы; ведь второго Борна на сегодня в Германии не существует. Так что спросите только у самого себя, где Вам будет приятнее. Когда я ставлю себя на Ваше место, то подумываю о том, что лучше остаться во Франкфурте. Это потому, что для меня было бы невыносимым быть крепко привязанным к узкому кругу надутых и в большинстве своем скупых сердцем (и узкомыслящих) ученых (без возможности другого общения). Подумайте о том, что пришлось выдержать Гильберту от такого общества. Надо иметь в виду кое-что еще. Если у Макса возникнет нужда в том, чтобы дополнительно подработать, а такую возможность при теперешней неустойчивой обстановке исключить нельзя, то несравненно лучше в этом смысле жить во Франкфурте, а не в Геттингене. Но, с другой стороны, для домохозяйки жизнь в Геттингене намного приятнее, чем во Франкфурте, да и для детей это тоже лучше. Однако я не берусь высказываться об этом, так как недостаточно хорошо знаю обстановку во Франкфурте.

В конце концов, не то важно, где ты сидишь. Самым лучшим будет, если Вы последуете зову Вашего сердца, не вдаваясь в раздумья. Кроме того, я, как человек, никогда не пускавший глубоких корней, не чувствую себя вправе давать советы. Прах моего отца лежит в Милане. Свою мать я похоронил несколько дней тому назад здесь. Сам я беспрестанно болтался повсюду — и везде как чужак. Дети мои находятся в Швейцарии в таких условиях, что для меня возможность повидать их связана с очень большими хлопотами. Так что такой человек, как я, полагает за идеал чувствовать себя дома хоть где-нибудь вместе со своими; он не имеет права давать Вам совет в этих делах.

Меня очень заинтересовали рассуждения относительно подвижности ионов; я думаю, что идея верна. Все свое свободное время я размышляю о квантовой проблеме с релятивистских позиций. Я не верю в то, что теории придется отказаться от континуальных представлений. Но мне никак не удается придать осязаемые формы моей навязчивой идее понять квантовую структуру с помощью дифференциальных уравнений.

В надежде на то, что это письмо застанет вас всех четверых здоровыми и бодрыми с наилучшими пожеланиями

Ваш Эйнштейн.

...Письмо заканчивается двумя замечаниями физического характера. Первое касается моей работы; второе, более важное, содержит изложение идей Эйнштейна, относящихся к сущности квантов.

Моя работа по подвижности ионов была стимулирована франкфуртским физико-химиком Р. Лоренцем. Она основана на том факте, что ионы в водных растворах — особенно однозарядные — обладают удивительной аномалией подвижности. Можно было бы думать, что ионы малых размеров должны были двигаться быстрее, а большие — медленнее. На самом деле имеет место обратная ситуация.

Химики объясняли это довольно неопределенными соображениями о гидратации. Мне удалось глубже разобраться в этих идеях, причем я использовал дебаевскую теорию, согласно которой молекулы воды являются диполями. Один из движущихся в воде ионов оказывает вращательное действие на диполь, причем это действие тем сильнее, чем меньше радиус иона. Я развил эту теорию в очень общем виде; по аналогии с современной магнитогидродинамикой, она может быть названа электрогидродинамикой. Я также экспериментально доказал — с помощью одного из своих учеников, Лертеса,— существование простого эффекта: вращения шара, наполненного водой и помещенного во вращающееся электрическое поле.

Идея Эйнштейна о возможности разъяснить квантовую структуру в рамках обычного описания с помощью дифференциальных уравнений, которые дополнялись бы таким образом, чтобы быть внутренне согласованным, занимала его в течение ряда лет. Мы часто беседовали с ним об этом. Хотя из этого ничего и не получилось, он настолько сильно верил в плодотворность этой идеи, что не оставил ее и после возникновения квантовой механики. С этим, вероятно, связано и его неприятие квантовой механики.

Мне это письмо особенно дорого, потому что оно бросает свет на личность Эйнштейна и его жизнь.

Без даты

Дорогой Борн!

С этой же почтой уйдет к тебе мой последний экземпляр запрошенной тобою статьи. Его здорово сильно перепачкали в типографии Тюбнера. Я очень рад твоей книжечке о теории относительности. Прости меня за то, что я ленюсь писать письма невзирая на Ваши милые сообщения. Виноват этот шельмец-почтальон.

Как обстоят дела с Геттингеном?

Статья Дебая совершенно превосходна.

Сердечный привет

от твоего Эйнштейна.

Сердечно приветствую твою жену. Я не смогу в скором времени выбраться во Франкфурт. Надо надеяться, что еще до того мы увидимся здесь.

Моя книжка по теории относительности возникла на основе уже упоминавшихся лекций, которые я читал во Франкфурте... Эйнштейн читал корректуру книги и был согласен с моим методом изложения...

Франкфурт-на-Майне

21.6.20

Глубокоуважаемая и дорогая госпожа Эйнштейн!

Ваше милое письмо я переслал моей жене в Лейпциг. Она находится там у своего отца. Последние недели были очень печальными. Не смогу даже Вам всего передать. Хеди[1] под конец совсем сникла из-за волнений, болей и перенапряжения. Несмотря на это, она поехала в Лейпциг, но там должна была лежать и отдыхать. Кажется, сейчас ей получше.

Только что пришла открытка из Кристиании от Альберта, где он очень мило пишет, как ему там понравилось; фрейлейн Ильза тоже приписала пару слов.

У меня к Вам просьба. Вы знаете, что я написал большую популярную книгу о релятивистской теории. В ней я хочу дать хоть какое-то представление о жизни и личности Альберта. Пожалуйста, возьмите у д-ра Берлинера корректуру и прочтите этот биографический очерк; он

---

[1] Г-жа Хеди Борн, жена Борна. *(Прим. перев.)*

написан от всего сердца, но я не знаю, правильно ли выбран тон. Может быть, туда к тому же попало что-либо ошибочное по существу. Я был бы очень благодарен Вам за беспощадную критику и любые предложения. Мне больше всего хотелось бы избежать разговоров о том, что я курю фимиам Альберту. Он в этом не нуждается. Пожалуйста, пришлите мне свое мнение не откладывая.

И еще одна просьба. Гранки второй корректуры с рисунками в ближайшее время будут отправлены Альберту. Мне, конечно, очень важно, чтобы он прочитал или, по крайней мере, просмотрел книгу перед ее выходом из печати и сообщил мне предложения об изменениях. Но добраться до него будет трудно, а корректурные листы от него мне нужны будут сразу же, так как с печатанием задержки быть не должно. Позаботьтесь, пожалуйста, о том, чтобы он получил все наискорейшим образом, моментально просмотрел и сверхсрочно вернул мне.

Я Вам очень благодарен за подобранную и переданную мне для книги фотографию Альберта.

Мои малыши — сладкие милые создания, согревающие меня солнечным светом.

Вопрос «Геттинген или нет?» очень нас мучает. Мы все еще в нерешительности. Если Вы знаете, как нам лучше поступить, то посоветуйте.

С сердечным приветом Вашей дочери —

преданный Вам М. Борн.

Институт теоретической физики
Университета во Франкфурте-на-Майне, Роберт Майер штрассе, 2
26.7.20

Дорогой Эйнштейн!

Все же наиболее вероятно, что мы поедем в Геттинген, после того как туда будет назначен Франк и если он примет это назначение; факультет выдвинул его кандидатуру. Так что теперь актуальным становится вопрос о моем преемнике. Шенфлисс хотел написать тебе и запросить твое мнение. Я, конечно, хотел бы, чтобы это был Штерн. Но Ваксмут против этого; он говорил мне: «Я очень ценю Штерна, но у него такой расшатывающий основы (Zersetzenden) еврейский интеллект». Это, по меньшей мере, неприкрытый антисемитизм. Однако Шенфлисс и Лоренц хотят мне помочь. Ваксмут предлагает Косселя, что само по себе задумано очень тонко, поскольку против него возразить нечего, разве что он не знает математики, ну да это ведь не беда. А Штерн высоко поднял престиж нашего института и заслуживает за это признания. Полагаю, что тебе я могу не разъяснять, в чем состоят его достоинства.

Далее, могут рассматриваться еще кандидатуры Ленца и Райхе, а возможны еще и аутсайдеры. Embarras de richesse! [1]

Я запросил мнение Лауэ; неплохо было бы, если бы ты с ним поговорил, для того чтобы Ваши соображения не расходились.

Я сейчас здорово обленился и почти совсем не работаю; усердно слежу только за своими экспериментами по длине свободного пробега молекулярных пучков серебра. Моя ассистентка очень хорошо справляется с этим. Установка наша совсем уже готова, а вот провести измерения вряд ли удастся до каникул. 6-го августа мы уезжаем в Зульден в Южном Тироле (Италия). Я чрезвычайно рад тому, что смогу вырваться отсюда и хоть немного полюбоваться красотами природы. Жена моя после тяжелых времен, последовавших за смертью ее матери, уже немного пришла в себя. Мы часто выезжаем за город, и это идет ей на пользу. Завтра поедем к Рейну, которого она еще не видела. Ребята здоровы. К сожалению, решение вопроса о Геттингене тянется бесконечно долго; у нас все еще нет там квартиры. На следующей неделе моя жена собирается туда подъехать, для того чтобы подыскать жилье.

Не собираешься ли ты приехать на юг Германии? Нам так хотелось бы повидать тебя и поговорить.

Сердечный привет твоей жене и молодым дамам —

твой Макс Борн.

---

[1] Трудности, проистекающие от богатой возможности выбирать (франц.). (*Прим. перев.*).

Франкфурт-на-Майне
28.10.20

Дорогой Эйнштейн!

Я очень рад тому, что ты так отлично выступил против книги известного нам X'а. Будущее покажет, достаточно ли этого, чтобы предотвратить кляузы. Главное заключается в том, что ты не намерен больше допускать, чтобы нарушали твой душевный покой. Но, в конце концов, ты ведь не единственный, кто в этом заинтересован, ведь и мы, позволяющие себе считать себя твоими друзьями, тоже страдаем от этого зловония, и я боюсь, что мы так просто не удержим свои носы, как это собираешься делать ты. Ты можешь просто удрать в Голландию, мы же плотно застряли здесь, в стране Вейландов, Винов и их компании.

Я спешу написать тебе в Голландию, так как очень хочу узнать адрес господина Фоккера. Он прислал мне одну хорошую работу, в которой искупил за меня грехи моей молодости; на конверте имелся и адрес, но я не обратил на него внимания, так как был болен и лежал с астмой, а дети этот конверт уничтожили. Я очень хотел бы поблагодарить господина Фоккера; Эренфест знает, конечно, где он живет (...).

Я рад, что тебе так хорошо в Голландии. Но ты не должен на меня сердиться за то, что я — в свете последних событий — сильно усомнился в твоих способностях разбираться в людях и не разделяю чувства преклонения, которое ты испытываешь по отношению к Лоренцу. В Ленарде и Вине ты видишь чертей, в Лоренце — ангела, но и то и другое не совсем верно. У первых налицо своеобразная политическая болезнь, которая широко распространена в нашей голодной стране и отнюдь не основана на врожденной озлобленности. Во время последнего посещения Геттингена я видел Рунге, худого, как скелет, и соответственно ожесточившегося и изменившегося вообще. Тогда-то мне и стало понятным, что́ же происходит. Другое дело Лоренц: он ведь отказался написать что-либо к 60-летию Планка. И я на него за это очень обижен. Можешь ему это прямо сказать. Можно расходиться во мнениях с Планком, но в его откровенном, благородном характере может сомневаться только тот, кто сам не обладает таковым. Очевидно, Лоренц больше боится потерять своих сытых друзей по Антанте, чем заботится о справедливости. То, что он докладывал в Колледже о моих расчетах, меня отнюдь не подкупило. Но это не единственное, что меня против него настроило; я не буду, однако, об этом писать, чтобы не поносить его далее; а вообще-то, если быть откровенным, когда я знаю, что ты у Лоренца, Эренфеста, Вейса и Ланжевена, то это меня радует куда больше, чем твое общение с автором «...» [1] Ты там, наверное, встретишь и господина Чулановского из России; узнай у него о господине Ю. Круткове, который прислал мне свою работу об адиабатических инвариантах, которая мне показалась превосходной. Это, должно быть, отличнейший теоретик; его имени я до этого не встречал.

Моя жена передает искренний привет, она надрывается во всю, так как наша кухарка вот уже несколько недель как уволена из-за воровства и обмана (причем многократного). К тому же и я был в жалком состоянии до вчерашнего дня, провалявшись с астмой и требуя за собой ухода. Дети здоровы.

С сердечным приветом

твой Макс Борн.

...Мое резкое мнение о Лоренце, высказанное в письме, было вызвано не только его отказом написать что-либо к 60-летию Планка. Мне кажется, что у меня бывали различные поводы сердиться на него, но только один случай сохранился в моей памяти. Геттингенская Академия получила от одного состоятельного человека, господина Вольфкейля, по тем временам колоссальную сумму в 100 000 марок с условием, что она будет выплачена в качестве награды тому, кто сможет доказать знаменитую «великую теорему Ферма». Было много претензий на получение этой награды, но все доказательства оказывались ошибочными. Наконец, «Комиссия Вольфкейля», созданная при Академии, решила разумно использовать проценты с этого капитала — на организацию лекций, которые читались бы специально приглашенными выдающимися учеными. Мы называли такие лекции «фестивалями». Были проведены фестивали Бора, Зоммерфельда, Лоренца. Последний фестиваль был в 1910 г.; мне, в то время приват-доценту, было поручено переработать для печати материалы шести лекций Лоренца, объединенных под названием «Старые и новые проблемы физики» [2]. Они появились в 11 томе журнала Physikalische Zeitschrift и представляли собой хороший

---

[1] Отточие автора письма. (*Прим. перев.*).

[2] Именно под этим заголовком в 1970 г. издательство «Наука» выпустило сборник работ Г. А. Лоренца. В него вошли три лекции, прочитанные на фестивале Лоренца и относящиеся к теории квантов; сомнительные, с точки зрения Борна, лекции по теории эфира и теории относительности не были включены в этот сборник. Свои лекции Лоренц читал 24—29 октября 1910 г. (*Прим. перев.*).

обзор тогдашнего состояния физики. В одном из разделов излагалась «эйнштейновская теория относительности», причем предмет в ней был представлен таким образом, как если бы имелась возможность выбора между, с одной стороны, релятивизацией (в духе Эйнштейна и Минковского) пространства и времени и рассмотрением всех инерциальных систем в качестве равноправных, и, с другой стороны, абсолютным пространством и абсолютным временем; к этой возможности, очевидно, склонялся Лоренц. Мне — убежденному ученику Эйнштейна — эта точка зрения представлялась абсурдной и реакционной. При обработке лекций я не имел в распоряжении никаких письменных материалов: я делал все по своим собственным записям и обсуждал их потом с Лоренцем. Так что я смог достаточно хорошо с ним познакомиться. В изданном тексте докладов он не выразил мне ни единого слова признательности за мой труд. В последующие годы я еще чаще встречался с Лоренцем и убедился, что мнение Эйнштейна о нем было гораздо более обоснованным, чем моя неприязнь.

Институт теоретической физики
Университета Франкфурта-на-Майне,
Роберт Майер штрассе, 2
8.12.20

Дорогой Эйнштейн!

. . .Некоторое время назад я показывал тебе письмо от Эпштейна, который просил ему помочь. Тем временем пришел ответ Г. Н. Льюиса из Америки, которому я писал об этом деле. Он нашел для Эпштейна место в Университете в Беркли и пригласил его туда. Но я ничего не слышал о том, согласился ли Эпштейн туда поехать. Возможно, его пригласили швейцарцы.

Попытка заполучить его сюда в качестве моего преемника потерпела неудачу, натолкнувшись на сопротивление факультета. Не удалось на первое место выдвинуть и Штерна, так как Ваксмут захотел Маделунга. Штерн на 2-м, а Коссель на 3-м месте.

О делах научных. Я пытался заниматься разными вещами, но нигде особенно не преуспел. Больше всего меня привлекает упорядоченная теория необратимых процессов в кристаллах, в том духе, в котором она однажды была намечена Дебаем; но мне не удается создать разумные общие положения. Измерения длины свободного пробега в Институте продвигаются очень хорошо; главная задача состояла в том, чтобы добиться постоянства давления газа во время получасового распыления серебра, и нам удалось это сделать с точностью до 5%. А вот с корректными измерениями толщины слоев серебра мы еще не справились из-за того, что очень много времени занимает сборка оптических устройств.

Вчера Ланде, который недавно был на коллоквиуме в Гейдельберге, рассказал мне, что Рамзауэр (вместе с Ленардом) здорово упрекал меня за книгу по релятивистской теории, в связи с тем, что я, якобы, писал в ней об отрицательных результатах экспериментов, предложенных Максвеллом (определять абсолютное движение Солнечной системы по затмению спутников Юпитера).

Я согласен с тем, что упрек сделан не без основания и жду поэтому грубого выпада со стороны Ленарда или кого-нибудь из его единомышленников.

Со здоровьем долгое время дела были плохи, что, наверное, можно было почувствовать по желчному тону моего письма в Голландию. Сейчас я поправился, но вот политическая обстановка удручает меня, даже больше, чем я в том себе признаюсь.

С сердечным приветом

Макс Борн.

...В этом письме речь идет о помощи, которую мы стремились оказать П. Эпштейну. Гильберт Н. Льюис был знаменитым физико-химиком и жил в Лос-Анжелесе [1]. Я познакомился с ним через Фрица Габера, когда позднее (в 1926 г.) приехал в Калифорнию, где был очень дружественно принят обоими — Эпштейном и Льюисом.

31.1.21.

Дорогой Борн!

. . . Я в последнее время придумывал только мелочи. Лучшее из всего этого — экспериментальная постановка вопроса относительно поля излучения.

Статистические законы излучения заставляют сомневаться в том, что в нем действительно существует максвелловское поле. Средняя напряженность поля в мощном тепловом излучении составляет величину порядка 100 *в/см*: там, где имеется такое поле, на излучающих и поглощающих атомах должен существовать доступный обнаружению эффект Штарка. Если же реализуется другое распределение напряженности поля, соответствую-

[1] Отметим, что Г. Н. Льюису принадлежит термин «фотон» для планк-эйнштейновских квантов света. (*Прим. перев.*).

щее статистическим законам излучения, то воздействие должно иметь место только на небольшое число молекул, но зато оно проявляется в очень сильной степени, так что около резкой линии должен наблюдаться очень слабый диффузный эффект. Я хочу это дело исследовать вместе с Принсгеймом; дело это нелегкое. Просмотри небольшое рассуждение Бика о законе соответственных состояний и о квантах в Phys. Zeitschr.; это довольно красивая штука.

Твоя книжечка по теории относительности для очень многих открыла путь к пониманию этого предмета. Половина иностранцев, например, должна была бы засесть за это (теперь можно было бы уже и перестать путаться).

Тебе нечего расстраиваться из-за политической обстановки. Огромные репарационные суммы и угрозы представляют собой только моральную пищу для дорогой публики во Франции, представляя ей создавшееся положение в более розовом свете. Чем невероятнее эти условия, тем больше уверенности в том, что они никогда не будут реализованы.

Надеюсь, что со здоровьем у вас все в порядке. Приветствую искренне тебя и твою жену.

Твой Эйнштейн.

Письмо содержит несколько замечаний научного характера. Прежде всего — это сомнение в существовании максвелловского поля излучения, которое не может быть согласовано со статистическими законами, которым излучение подчиняется. В одной из своих первых работ [1] Эйнштейн показал следующее: волновая теория излучения приводит, по вычислениям Лоренца, к тому, что среднее значение квадрата флуктуации энергии излучения оказывается пропорциональным средней плотности энергии. Теория световых квантов Эйнштейна, в которой излучение трактовалось как особого рода газ, состоящий из «фотонов», приводила, как это имеет место для любого идеального газа, к пропорциональности между средним значением квадрата флуктуации энергии и первой степенью средней плотности энергии. Если, однако, воспользоваться найденным эмпирически законом излучения Планка, то для среднего значения квадрата флуктуации энергии получается величина, как раз равная сумме обоих этих членов. Это означает, что излучение состоит не только из волн и не только из частиц, а одновременно из тех и из других. В этом и заключается знаменитый и пресловутый «дуализм»,

---

[1] М. Борн имеет в виду работу А. Эйнштейна «К современному состоянию проблемы излучения», опубликованную в 1909 г. Она включена в III том Собрания научных трудов Эйнштейна (М., «Наука», 1966, стр. 164). (*Прим. перев.*).

с которым Эйнштейн с тех пор всегда мучился и о котором будет еще много говориться в последующих письмах. Он не хотел соглашаться с тем, что этот результат, принадлежащий ему самому, является окончательным. Здесь он хотел устранить максвелловское поле и именно с помощью соображения, что штарк-эффект в поле теплового излучения сам по себе достаточно велик, чтобы можно было сделать возможным выбор между концепцией волн или частиц. Я не знаю, выполнил ли он планировавшиеся совместно с Прингсгеймом эксперименты.

22.8.21

Дорогой Борн!

Большое спасибо за подробное сообщение. Институт Кайзера Вильгельма очень уж тяжел на подъем, поскольку я все время пытаюсь этих своих дорогих . . . [1] подбить на ассигнования. То, что ты просил тебе подкинуть, составляло бо́льшую часть наших богатств, но все же я об этом заявил и надеюсь, что мне удастся пробить это дело. Только немного терпения. Я продумал очень интересный и довольно простой эксперимент, относящийся к механизму излучения. Надеюсь, что смогу скоро его осуществить.

Снова оказался рабом этого проклятого почтальона, который безжалостно меня одолевает. Я провел чудный месяц с моими сынишками на берегах у озера.

От всего сердца поздравляю тебя и твою жену [2], с наилучшими пожеланиями

от твоего Эйнштейна.

Геттинген, 21.10.21

Дорогой Эйнштейн!

Сегодня я пишу к тебе как могущественному директору Института Общества Кайзера Вильгельма, а именно по вопросу запрашиваемой нами рентгеновской аппаратуры.

Франк, конечно, рассказывал тебе о том, как складываются дела; но за это время произошло кое-что еще. Примерно дней 10 тому назад здесь был представитель завода Вейфа и предложил нам следующее. Фирма собирается поставить нам желаемый нами аппарат по дейст-

---

[1] Отточие в публикации письма Борном. (*Прим. перев.*).

[2] В письме от 4/VII—21 г. Борн извещает Эйнштейна о рождении сына. (*Прим. перев.*).

вовавшим до последнего времени ценам; но мы должны иметь право аннулировать заказ до 31 октября (срок три недели), если не получим никакого подтверждения от Общества Кайзера Вильгельма.

В случае более позднего заказа на нас распространится подъем цен, вызванный падением валютного курса, что составит около 50% (!!!). Предложение мы приняли и сделали заказ в надежде на то, что в течение 3-х недель поступит сообщение об утверждении субсидии со стороны Общества Кайзера Вильгельма. Но вот срок (31 октября) приближается, а мы продолжаем ждать. Поль и Франк просили меня написать тебе и спросить, как, собственно, обстоят дела, и должны ли мы будем 31 октября аннулировать заказ или утверждение гарантировано, и заказ можно оставлять в силе. Было бы очень печально, если нам будет выделена сумма в 100 000 марок, но сообщение о ней придет так поздно, что цена на аппарат к тому времени повысится до 150 000 марок. Нельзя ли как-нибудь ускорить решение?

Мы за это время освободили два смежных помещения (за счет сложной перестановки аппаратуры, коллекций, туалетов и т. п.), в которых и должны будут проводиться рентгеновские работы, с расчетом по одному помещению на каждый отдел. А пока что доктор Кюстнер в тяжелых условиях трудится в медицинской клинике, где имеется Вейфа-аппарат,— с тем, чтобы ознакомиться с его работой.

У нас множество проблем, и мы были бы рады, если бы удалось получить аппарат.

После этих деловых сообщений последует кое-что приватное. Во время этих каникул у меня было не все благополучно со здоровьем; в конце июля я подхватил катар и до сих пор еще от него не избавился, хотя пробыл три недели в Эрвальде в Тироле. Катар — это само по себе не страшно, но у меня постоянная астма и это сильно беспокоит. Уже месяцами не проходило и ночи, чтобы она не давала себя чувствовать. Однако сейчас мне уже значительно лучше, и я надеюсь за несколько месяцев совершенно поправиться. Пора бы уже, так как скоро начнется семестр и тогда здесь все придет в большое оживление. В. Паули сейчас работает у меня в качестве ассистента; умен он на удивление и способностей огромных. К тому же он мне нравится и по-человечески. Соответственно своему возрасту (ему 21 год) он весел, ребячлив и совершенно нормален. К сожалению, летом он снова хочет уехать к Ленцу в Гамбург, которому дал обещание вернуться. Броди тоже еще у меня; он очень умен и инициативен. Нужно попытаться подобрать ему место, которое обеспечивало бы его жизнь; я могу поддерживать его только весьма скудно (из фонда, собранного мною, Франком и Курантом). Поланьи хотел с тобой по этому поводу поговорить.

В делах научных особых новостей не имею. Моя большая работа по термодинамике находится в печати, однако сейчас, мне кажется, что лучше бы я ее не публиковал, так как основа вопроса представляется мне не очень солидной. Результат (который я во всяком случае считаю верным, несмотря на непрочную основу) удивителен: закон Грюнайзена о пропорциональности энергии и теплового расширения при низких температурах несправедлив; вместо закона T^4 здесь справедлив закон T^2. Следовало бы проверить это экспериментально (Нернст?).

Далее, в печати находится и моя работа о потенциалах решетки, которая в математическом отношении очень изящна. С Паули мы собираемся провести квантовые расчеты атомов, используя метод приближений, который недавно разработан мною с Броди (в Zeitschr. f. Phys.) на примере системы осцилляторов. Может быть, из этого что-нибудь получится. Подумываю, кроме того, еще об очень многом, но в большинстве безуспешно. Кванты — это безнадежное свинство.

Жена и дети здоровы; Геттинген им очень подходит; малыш также превосходно развивается.

Меня снова очень угнетает политическая обстановка. При всех благих намерениях, если быть объективным, растет мое отвращение к представителям Антанты, потому что лицемерят они омерзительно. Конечно, немцы, когда они это могли, и воровали и грабили, но при этом они не болтали о спасении цивилизации и т. п. Но я не могу об этом писать без волнения — лучше уж брошу. Правда ли, что сотрудники Маунт-Вильсон подтвердили красное смещение? Опубликовано ли это и где? Я (как редактор Phys. Zeitschr.) получил от господина Глазера письмо с просьбой принять приложенную рукопись. Дебай также рекомендовал ее. Я прочитал ее и нашел, что она представляет собой грубый выпад против Гребе и Бахмана, в котором задевают также и тебя. Я вернул ее ему с просьбой изменить форму и разрешить мне после этого переслать ее для сведения Гребе. Было бы очень хорошо, если в том же выпуске было помещено сообщение из Маунт-Вильсон с подтверждением; ведь Глазер опирается главным образом на отрицательный результат Ст. Джонса. Не мог ли бы ты туда написать, чтобы мне прислали такую краткую статейку для публикации?

Ну, пора кончать. Сердечный привет твоим также от моей жены.

Твой (преисполненный страха и непритязательности)

Борн.

В этом письме содержится, помимо многих других вещей, вопрос исключительной важности: сообщение о подтверждении общей теории относительности с помощью красного смещения спектральных линий в гравитационном поле. Но сначала идет речь о финансовых делах, которые сегодня почти нельзя понять. Можно напомнить, что в то время начиналась инфляция немецкой марки. Обесценивание денег на половину могло в то время произойти за 2—3 месяца. Позднее для этого же требовалось всего 2—3 дня. Отсюда наши беды с рентгеновской аппаратурой...

В части письма научной имеются интересные замечания о расчете атомной структуры в совместной работе моей и моего молодого ассистента Паули. Нужно было проверить, приводят ли к верным результатам правила квантовой гипотезы Бора — Зоммерфельда в приложении к механической системе, если применять подходящие приближенные методы, которые были созданы по аналогии с расчетами возмущений, использовавшимися в астрономии (по Пуанкаре). Результаты оказались отрицательными, что и было выражено словами «безнадежное свинство» — в приложении к квантам.

Однако вскоре я начал относиться к этим вопросам иначе; были ли своего рода случайными успехи боровской теории применительно к водороду и другим подобным простым случаям? Нельзя ли было бы построить другую, лучшую теорию? Это и было нашей программой, особенно после того, как Гейзенберг пришел на место Паули. Мы начали систематически изучать те случаи, когда «отказывала» теория Бора, и вскоре нашли тому пример в атоме гелия. (Другие примеры я имел в работе по динамике кристаллической решетки; атомная решетка, построенная из боровских атомов с их плоскими электронными орбитами, приводила к неверным значениям сжимаемости.)

В письме далее следует вопрос о релятивистском красном смещении, который был у меня связан с борьбой против противников Эйнштейна. Я очень смутно вспоминаю имя Глазера, как одного из злостных антирелятивистов. Что до моего плана о публикации его ядовитой статьи одновременно с сообщением о положительных результатах, полученных на Маунт-Вильсон (Маунт-Вильсоновская обсерватория в США.— *Прим. перев.*), то я не знаю, было ли что-либо в этом направлении сделано. Надо, однако, сказать, что эффект красного смещения в течение долгого времени представлялся сомнительным и только совсем недавно удалось подтвердить эйнштейновский результат. На Солнце это удалось в процессе обстоятельного изучения солнечной атмосферы, возмущения которой, сопровождающиеся ее колебаниями по направлению к Солнцу и в противоположном направлении («приливы и отливы»), маскировали гравитационный эффект за счет известного эффекта Допплера. Были найдены натриевые облака, которые относительно спокойно парили в солнечной атмосфере и поэтому демонстрировали существование гравитационного эффекта в чистом виде. Наконец, красное смещение наблюдалось непосредственно на Земле, а именно в случае гамма-лучей и с помощью открытого Мёссбауэром эффекта. Но это уводит нас слишком далеко в сторону.

Геттинген, 29.11.21

Дорогой Эйнштейн!

Авторитеты никак не могут прийти к единому мнению по поводу того, где ты сейчас,— пребываешь ли в теплых краях Италии или уже в Берлине. Но можно с определенным основанием предполагать, что в первом случае твое возвращение ожидается в ближайшее время. Поэтому я и пишу тебе, надеясь на то, что ты скоро получишь это письмо.

В первую очередь я самым сердечным образом должен поблагодарить за великолепный дар — рентгеновскую аппаратуру. Франк, Поль и я неимоверно этому рады, так как сегодня такая аппаратура должна быть принадлежностью всякого порядочного института: очень часто возникают вопросы, ответить на которые можно только с помощью рентгеновских лучей. Поль должен будет написать тебе официальное благодарственное письмо, но я хочу добавить от себя лично несколько сердечных слов признательности. Ведь это большое пожертвование свидетельствует об уверенности вас, берлинцев, в том, что мы с помощью этой установки сделаем нечто стоящее; и это нас радует. Доставкой занимается главным образом Поль, и вот тут возникает очень много трудностей, недостаток помещения, ненадежность фирм и т. п. Особенные опасения вызывает предприятие Вейфа, которое так с нами обращалось, что мы, по-видимому, у них покупать не будем. Поль в ближайшее время поедет в Берлин для переговоров с фирмой Сименс. Мы хотим, если это возможно, не покупать готовый медицинский аппарат, а собрать по нашим соображениям установку из лучших имеющихся в распоряжении узлов.

Кроме этого, ничего радостного сообщить не могу, так как я, собственно говоря, все время болен. Моя летняя поездка в Тироль большой пользы не принесла, так как по возвращении у меня почти каждую ночь были приступы астмы, и я здорово сдал. Три недели тому назад у меня был очень тяжелый приступ с бронхитом, и я должен был на неделю лечь в постель. При этом я пользовался услугами наших медицинских светил (особенно Е. Майера), и им удалось избавить меня от астмы. Но у меня все еще скверный катар и лекции читать я не могу. Паули меня замещает; несмотря на свой возраст (ему 21 год) это хорошо ему удается. Очень жаль, что я стал таким дряхлым, ведь в остальном здесь так хорошо! Работать с Франком — одно наслаждение; и с Полем у нас все ладно. Маленький Паули очень инициативен; такого хорошего ассистента мне в жизни больше не видать. К сожалению, летом он собирается к Ленцу в Гамбург. В последнее время мне не удалось сделать ничего, но зато я теперь немного разбираюсь с теорией возмущений и имею смутное представление о том, чтó же делает Бор. Я продолжаю систематически работать над теорией кристаллов. Некоторые из летних работ недавно появились в Z. f. Phys. Хотелось бы мне знать, что ты думаешь о работах Поланьи по скоростям реакций; он утверждает, что здесь не разобраться без некоего неизвестного механизма передачи энергии (передача квантов энергии от одной молекулы к другой, при условии, что эти молекулы механически не взаимодействуют, вот так, просто: гоп — и через пространство). Франк и я с этим не согласны. Недавно здесь был Лангмюр; он утверждает нечто подобное, но мы все же ни с чем не соглашаемся. Но в остальном Лангмюр нам очень понравился. Он хорошо разбирается в физике. Безумна также работа Поланьи о прочности на разрыв, но все же что-то правильное в ней есть. С каким удовольствием я бы побеседовал с тобой об этом! Один мой ученик (племянник Минковского, с той же фамилией) разрабатывает сейчас точную теорию движения медленных электронов (со скоростью ниже наименьшего $h\nu$) в газах; она строится на следующей идее Франка: в сверхвысоком вакууме справедлив «закон пространственного заряда», определяющий ток в функции от напряжения (кажется,

$J \sim V^{3/2}$). Если ввести туда газ, то будут иметь место отражения электронов, за счет которых пространственный заряд в некоторой степени увеличится, и закон $J = f(V)$ изменится. По этому изменению, в соответствии с имеющейся теорией, можно рассчитать длину свободного пробега электронов в газе; это определенно интересно из-за почти абсурдного утверждения Рамзауэра (в Вене) о том, что в аргоне длина пробега электронов с уменьшением скорости становится бесконечной (якобы медленные электроны пролетают свободно сквозь атомы!). На это нам очень хочется возразить. Моя теоретическая идея состоит в следующем: я исхожу из кинетического уравнения Максвелла — Больцмана

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \ldots + \frac{X}{m} \frac{\partial F}{\partial \xi} + \ldots = \iint \text{интеграл соударений},$$

в то время как обычно его интегрируют так, чтобы в первом приближении левая часть стала равной нулю и чтобы интеграл обратился в нуль с помощью максвелловской функции распределения, а затем полученную функцию распределения подставляют во втором приближении в левую часть уравнения и т. д. Я же предлагаю поступить наоборот: в первом приближении пренебречь всеми соударениями, т. е. «распределением пространственного заряда» (для этого нужно еще принять, что $X = -e\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, и воспользоваться вторым уравнением: $\Delta\varphi = e \int F d\xi d\eta d\zeta$); во втором приближении учесть соударения и т. д.

Кажется, все получается удачно. Минковский хочет вместе с фрейлейн Шпонер сделать попытку реализовать эту идею; но, конечно, это очень сложно.

Статья Ленарда о Зольднере нас здорово позабавила. Не знаю, видел ли ты сообщение об этом во франкфуртской газете и возражения Лауэ, а также наше с Гильбертом.

Я занят сейчас чтением 2-го тома, написанного Лауэ, и нахожу его очень хорошим, но во всяком случае статья Паули для энциклопедии — это большое достижение.

Жена чувствует себя вполне хорошо. Она кормит малыша и обоим это на пользу. В данный момент она нездорова. Обе девчушки тоже в порядке.

Привет твоей жене и юным дамам, а также всем берлинским друзьям и знакомым.

С наилучшими пожеланиями

твой М. Борн.

Это длинное письмо прежде всего связано с пожертвованием Обществом Кайзера Вильгельма средств для приобретения рентгеновского аппарата и относящимися сюда всяческими финансовыми затруднениями.

Отчет о «маленьком Паули» является неполным. Я вспоминаю, что он любил много поспать и часто опаздывал на лекции, начинавшиеся в 11 часов. Поэтому мы в половине одиннадцатого посылали к нему нашу горничную, чтобы быть уверенными, что он уже не спит. Он был, без сомнения, гением первого ранга, но мое опасение о том, что «такого хорошего ассистента мне в жизни больше не видать», оказалось неоправданным. Его преемник Гейзенберг был столь же гениален, но более добросовестен: мне не нужно было его будить или напоминать ему об его обязанностях.

Замечания, относящиеся к физико-химику Поланьи, слишком связаны именно с тем временем, чтобы представлять интерес сегодня. Я хочу только заметить, что в годы гитлеризма Поланьи эмигрировал в Англию, получил кафедру в Манчестере, но не по химии, а по философии и социологии; это был многосторонний и одаренный человек.

Утверждение Рамзауэра о том, что в аргоне длина свободного пробега электронов с уменьшением их скоростей увеличивается и становится бесконечной, в то время должно было казаться «безумным». И тем не менее оно было правильным. Впервые этот факт мог быть объяснен с помощью волновой механики де Бройля: электронные волны материи имели длину, пропорциональную скорости электронов. Рассматривая их соударения с атомами в терминах дифракции, можно тотчас же понять, что движение медленных электронов, т. е. таких, которым соответствуют бóльшие длины волн, будет лишь в небольшой степени зависеть от атомных препятствий. Обо всем этом я еще не догадывался и поэтому называл эти важнейшие эксперименты Рамзауэра безумными. Видел ли в то время Эйнштейн дальше и глубже — я не знаю.

Что касается Зольднера, то этот немецкий математик и геодезист еще в 1801 г. предсказал отклонение света Солнцем. При этом луч света он описывал как некую комету, движущуюся по закону Ньютона (что представляется очень разумным, поскольку траектория небольшого тела, находящегося в поле притяжения центрального тела, не зависит от своей массы). Он получил такую же формулу, как и Эйнштейн в своей первой работе, посвященной этой проблеме: она отличалась, однако, на множитель 2 от окончательной эйнштейновской формулы, которая принимала во внимание требуемое общей теорией относительности изменение гравитационного поля вблизи Солнца. Разумеется, работа Зольднера была надлежащим образом использована против Эйнштейна его врагами.

30.12.21

Дорогие Борны!

Шлю Вам сегодня сердечные новогодние пожелания! Мы были в восторге от фотографии маленького Борна. О войне амазонок больше уже никто не думает. Меня очень огорчило сообщение о том, что тебе, милый Борн, так много досталось в связи с твоей болезнью. Надеюсь, что все вы уже здоровы и хорошо себя чувствуете.

Паули очень хороший парень, он может гордиться своей статьей для энциклопедии. Идеи Поланьи внушают мне ужас. Но он обнаружил трудности, для обхода которых у меня до сих пор нет разумных путей. В особенности это относится к количественному рассмотрению равновесия излучающих молекул; из-за этого мне приходится здорово ломать голову. В идеях Поланьи относительно прочности кристаллов определенно есть много правильного; вот только распространение их на случай газов кажется мне ошибочным.

Новое исследование потока электронов представляется мне интересным. Ваше возражение Зольднеру во франкфуртской газете мне очень понравилось.

Вот теперь благодаря превосходному сотрудничеству Гейгера и Боте закончен эксперимент по излучению. Результат таков: свет, испускаемый движущимися частичками каналовых лучей, строго монохроматичен, в то время как по волновой теории длина волны должна была бы быть различной и в различных направлениях.

Тем самым надежно доказано, что волнового поля на самом деле не существует, и боровская эмиссия является мгновенным процессом в собственном смысле этого слова. Это мое самое сильное научное потрясение за многие годы. Эренфест с восторгом пишет об атомной теории Бора, который сейчас у него гостит. А если уж Эренфест убежден, то это что-то значит, так как этот парень куда какой скептик.

Привет малышам и Вам обоим сердечные пожелания к Новому году

от Вашего А. Эйнштейна.

Энциклопедическая статья Паули посвящена теории относительности. Собственно говоря, ее должен был писать Зоммерфельд; он привлек к себе на помощь Паули. Но Паули так хорошо справился с этой задачей, что Зоммерфельд передал ему всю работу. Это должно казаться чудом, что молодой студент 21 года от роду сумел написать такую фундаментальную работу, каковой оказалась эта статья, работу, которая на протяжении последующих 30 лет превосходила все другие книги по теории относительности своей глубиной и основательностью, включая, по моему мнению, также и знаменитый труд сэра Артура Эддингтона.

К исследованиям, относящимся к излучению каналовых лучей, которые Эйнштейн проводил совместно с Боте и Гейгером и результаты которых он назвал «самым сильным потрясением за многие годы», посвящены также и последущие письма. В конце концов они обернулись большим разочарованием.

1.1.22

Дорогой Эйнштейн!

Мы, Франк и Борн, крайне потрясены содержанием твоего письма, несмотря на то, что при своей глупости мы не сможем реконструировать установку для проведения эксперимента с каналовыми лучами. Нас мучает тысяча вопросов и сомнений, и мы нуждаемся в тебе как в неком успокаивающем средстве. Поскольку это письмо не может быть длиною в 50 страниц и у нас имеется опасение, что вряд ли удастся дождаться ответа на него на 100 страницах, нам пришла в голову блестящая идея официально пригласить тебя к нам в Геттинген на средства фонда Вольфкейля для того, чтобы ты в непринужденной обстановке сделал для нас доклад. Попутно мы намерены заполучить тебя здесь на празднование 60-летия Гильберта, и эта идея привела старика в восторг. День рождения у него 23 января, доклад может состояться во вторник 24-го, а по меньшей мере воскресенье 22-го ты уж должен будешь посвятить нам. Может быть, вместе с тобой захочет приехать твоя жена? Было бы чудесно, если бы ты смог реализовать эту возможность, и нас очень радует перспектива того, что ты ни в коем случае не сможешь отказаться.

Сердечный привет и наилучшие пожелания к новому году.

Борн и Франк.

Январь 22 г.

Дорогой Борн!

Я с удовольствием приеду к вам — и для того, чтобы поздравить Гильберта, и для того, чтобы рассказать вам об эксперименте, и о том, как он прост.

Вся соль вот в чем: частицы каналовых лучей в соответствии с волновой теорией испускают по всем направлениям свет непрерывного спектра. Такая волна распространяется в диспергирующих средах со скоростью, являющейся функцией координат. Это должно приводить к отклонению волновых поверхностей, подобно тому, как это имеет место в случае рефракции в земных условиях. Однако экспериментальные результаты получаются бесспорно отрицательными.

Сердечный привет Франку и всем твоим.

Твой Эйнштейн.

18.1.22

Дорогие Борн и Франк!

С тяжелым сердцем мне все же приходится отказаться. Но иначе нельзя. Я настолько связан обязательствами по поводу писанины и т. п., что мне действительно не удастся совершить путешествие в Эльдорадо высокой науки. Так что я должен буду выразить свое глубокое уважение Гильберту только письменно. Передайте это также и Куранту, который хотел пригласить меня в качестве музыканта. Лауэ отчаянно борется с моим экспериментом и соответственно с моей интерпретацией его. Он утверждает, что волновая теория вообще никакого отклонения лучей не обусловливает. Он предложил красивый эксперимент, сущность которого заключается в том, чтобы с помощью капиллярных волн (в связи с их сильной дисперсией) исследовать возможное искривление лучей,— эксперимент, который должен заменить теорию, построить которую с требуемой строгостью очень трудно. Сегодня на коллоквиуме уже была большая дискуссия. Продолжу в следующий раз.

Не сердитесь на меня: отложить — это еще не значит отменить.

Ваш А. Эйнштейн.

Сердечное спасибо г-же Борн за милые картинки. Недавно вечером я прочитал Лауэ и Вегарту все посвященные нам стихи и тем самым привел их в восторг. Все считают, что это — серьезная конкуренция маэстро Бушу. Если учесть ту драчку, которая у нас здесь была, то я тем более прошу передать ей мою признательность.

Это письмо содержит (после отказа от приглашения) высказанное в первый раз сомнение о правильности соображений, которые лежат в основе экспериментов с каналовыми лучами. Это сомнение исходит от Макса фон Лауэ, который в то время был, вне сомнения, первоклассным экспертом в оценке всех проблем, связанных с оптикой. Что касается Франка и меня, то наше полное энтузиазма отношение к тому, что Эйнштейн принимал участие в экспериментах, было определенно основано не столько собственно на размышлении, сколько на нашей радости от сознания, что Эйнштейн снова сделал важный шаг вперед.

Письмо Эйнштейну из Геттингена
30.4.22

Дорогой Эйнштейн!

Лауэ был здесь очень недолго и мы очень радовались его приезду. Он рассказывал, что ты собираешься в Голландию. Надеюсь, что это письмо тебя еще застанет... Я уже довольно давно пишу для энциклопедии свою статью по теории решеток. Надеюсь, что к маю она будет готова. Это довольно хлопотливая работа. К сожалению, выяснилось, что в мою недавно опубликованную теорию равновесного состояния кристаллов вкралась ошибка. Я утверждал, что закон Грюнейзена о пропорциональности между энергией и расширением неточен и что при низких температурах первая пропорциональна T^4, а последнее T^2. Но это оказалось бессмыслицей. Напорол ерунду. Меня просто удручает, что это приключилось с таким стреляным воробьем, как я. Однако, когда ты сам находишь ошибку, это еще не так скверно. Я утешаю себя тем, что вопрос очень сложный; кроме того, Паули и Броди — оба проштудировали мою работу, а ошибки не нашли.

Паули, к сожалению, уехал; он в Гамбурге, у Ленца. В последнее время мы начали совместную работу, являющуюся продолжением опубликованной вместе с Броди статьи о квантовании негармонических осцилляторов. Разработанную в ней приближенную методику можно распространять на все случаи, в которых «невозмущенная» система является условно-периодической, а функция действия может быть разложена в ряд по степеням некоего параметра. Метод оказывается пригодным даже в случае выражения невозмущенной системы и приводит непосредственно к боровскому методу «секулярных возмущений». И вообще теперь мы по-настоящему поняли часть рассуждений Бора. Мы начали также проводить расчеты с ортогелием (два компланарных электрона) и можем сейчас подтвердить правильность старого утверждения Бора о том, что внутренний электрон быстро вращается по эллипсу, большая ось которого постоянно ориентирована в направлении медленно движущегося внешнего электрона. Паули захватил работу с собой в Гамбург и собирается ее там закончить, так как у меня из-за статьи для энциклопедии абсолютно нет времени. К тому же еще снова начинается проклятый семестр, что и в самом деле очень мешает сосредоточенной работе.

У Франка весь институт наводнен докторантами и все они, питаясь его идеями, делают прекрасные работы.

Гильберт в Швейцарии и приедет только через 8 дней.

У нас все здоровы,— несмотря на ужасную погоду никто не простудился.

Моя жена просит передать всем вам сердечный привет.

Привет от меня голландским и берлинским коллегам.

Твой Борн.

В письме содержится замечание о том, что я допустил ошибку в своей статье о твердых телах, написанной для энциклопедии. Оно является своеобразной прелюдией к аналогичной ситуации, в которой оказался Эйнштейн и о которой написано в его следующем письме.

Берлин
(без даты)

Дорогой Борн!

Ужасно трудно теперь с устройством теоретиков Голландия страдает от перепроизводства, и если там смогли что-то сделать для Эпштейна, так это только благодаря исключительному значению его работ. Там есть превосходные теоретики, например Фоккер, которые работают на скромной должности учителей гимназий. Несколько месяцев тому назад я писал Милликену и Эйнштейну в Пазадену относительно Броди, но до сих пор еще не получил ответа. Я хочу поговорить с Лауэ, который, если я не ошибаюсь, пользуется влиянием в Комитете содействия (Notgemeinschaft).

С Вашим методом возмущений я познакомился в диссертации Беккера и он мне очень понравился.

Недавно я сел в лужу [1] (эксперименты с излучением света каналовыми лучами). Но утешаю себя мыслью, что только мертвецы застрахованы от ошибок. Работы Бора внушают мне огромное уважение тем безошибочным инстинктом, которым они пронизаны. Чудесно, что вы занялись гелием. Самое интересное на сегодня — это эксперимент Штерна и Герлаха. Ориентацию атомов при отсутствии соударений между ними по нынешним теоретическим взглядам, основанным на учете излучения, понять невозможно; такая ориентация по правилам должна была бы установиться более чем за сто лет. Я с Эренфестом провел в связи с этим небольшой расчет. Рубенс считает результат эксперимента абсолютно достоверным.

Распорядитесь побыстрее деньгами для покупки рентгеновского аппарата! Почему это тянется так долго?

Всем сердечный привет *от твоего Эйнштейна.*

Здесь Эйнштейн признает, что его соображения, приведшие его к экспериментам с каналовыми лучами, были неверными: это был крупный ляпсус («ein kapitalen Bock»). К этому я должен добавить, что сейчас (1965 г.), когда я снова читал старые письма Эйнштейна, его рассуждения были вообще мне непонятны и сразу же казались неприемлемыми,— прежде чем я продолжал читать дальше. Это объясняется, естественно, очень просто: тем, что за прошедшие с тех пор более чем 40 лет очень многое стало понятным в вопросах распространения света. Это относится и к утверждению о том, что законы распространения света в прозрачных телах не имеют отношения к квантам и правильно описываются с помощью волновой теории (максвелловскими уравнениями и их релятивистским обобщением на случай движущихся сред). Вероятно, это уже тогда было понятно Лауэ, почему он и возражал против эйнштейновской идеи. Эйнштейн это понял и согласился с тем, что «дал маху».

Но вот снова слышны крики противников Эйнштейна, антирелятивистов: «Видите, даже Эйнштейн ошибается. Почему же мы должны верить его безумной теории относительности?» На это надо ответить так: ошибки делаем мы все — от опасности сесть в лужу за-

---

[1] «Ein monumentalen Bock geschossen» — букв. «подстрелил монументального козла». (*Прим. перев.*).

страхованы только мертвецы. Первоначально даже среди серьезных ученых были такие, которые ничего не хотели и знать о теории относительности, эдакие консервативные умы, неспособные порвать с философскими принципами своего времени. Пока они вели свою полемику, оставаясь в рамках приличий, им нельзя было предъявлять претензий. Сам Эйнштейн в последующие годы относился к этой группе. Он не хотел соглашаться с определенными новыми идеями в физике, которые противоречили его твердым философским убеждениям. Об этом в данной переписке еще будет много говориться. Но он никогда не вел полемики необъективно или со злобой.

Имеются, далее, настоящие ученые, обладающие заслугами перед наукой, которые в такой степени находятся во власти предубеждений из области, выходящей за пределы науки и философии, что отклоняют новые идеи, если они исходят от людей, чье происхождение, религиозные убеждения и т. п. ими не одобряются. К числу таких ученых относятся и те антисемитски настроенные физики, от которых страдал Эйнштейн. Но позднее в эту категорию консерваторов попали и многие другие, включая и меня самого.

Наконец, имеются еще и чистые «больные», аутсайдеры, которые не выполнили ни одной позитивной научной работы, но надеялись обнаружить ошибку в новых учениях, подобных эйнштейновской теории относительности. Можно было бы думать, что подобного рода люди с годами будут встречаться все реже. Но вряд ли это имеет место. С течением времени множество перворазрядных физиков и математиков углублялись в теорию относительности и никто из них не сумел в ней найти ошибки. Тот, кто сегодня надеется обнаружить такую ошибку, вряд ли будет приниматься всерьез. Это особенно касается аутсайдеров, которые не получили известности своими позитивными работами. Мне часто приходилось вскрывать неправильные умозаключения в работах такого типа «больных», но того, чтобы эти ошибки были признаны,— как это сделал в рассматриваемом случае Эйнштейн,— мне так и не удалось добиться.

Однако вернемся к письму. Рубенс занимал кафедру экспериментальной физики в берлинском университете; он известен прежде всего своими исследованиями инфракрасного излучения и их применением к выводу планковской формулы для плотности излучения.

Странно, что Эйнштейн пытается убеждать меня в том, что эксперимент Штерна и Герлаха является «самым интересным на сегодня». Он, видимо, забыл, что этот эксперимент был осуществлен на моих глазах, в моем Институте во Франкфурте, в результате дискуссий со мной, и что проводился он на средства, полученные мною от чтения докладов по теории относительности.

Маленький расчет, который провели Эйнштейн и Эренфест, относится к предсказанному Зоммерфельдом «выстраиванию» атомов в магнитном поле, которое было доказано экспериментально Штерном и Герлахом. Этот расчет был явно не классическим; если мне не изменяет память, то относящийся к нему эксперимент также был выполнен Штерном.

23.12.22

Дорогие Борны!

В Рождество — и такое великолепное солнце! Счастливая прекрасная страна, с чудесными милыми людьми.

29 снова большой водой поплыву через Яву, Палестину и Испанию домой; доберусь, наверное, не раньше апреля.

А пока что сердечный привет

от вашего Эйнштейна.

Эта открытка, отправленная из Японии, была единственной весточкой, которую мы получили за время путешествия Эйнштейна по свету, которое он совершил вместе со своей женой, побывав в Китае, Японии, Палестине и других странах. Уже после отъезда он получил известие о том, что ему присуждена Нобелевская премия, причем именно за объяснение фотоэффекта на основе его теории световых квантов, а не за теорию относительности. Желающие подробнее ознакомиться со всем этим, могут прочесть любую из бесчисленных биографий Эйнштейна, например книгу Карла Зелига «Альберт Эйнштейн» [1].

Геттинген, 7.4.23

Дорогой Эйнштейн!

Говорят, что ты уже вернулся. Я хотел написать тебе приветственное письмо, но опоздал. Самое главное: мы сердечно поздравляем тебя, хотя и с опозданием, с Нобелевской премией. Нельзя было выбрать лучших, чем ты и Бор, и радости нашей не было предела. Спасибо тебе большое и за красивую открытку из Японии. Мы никогда не знали вашего адреса и не могли отвечать. Но теперь я снова хотел бы наладить обмен мыслями — в той, конечно, степени, в какой смогу злоупотреблять твоим временем. Как бы мне хотелось послушать рассказ о твоих впечатлениях от большого путешествия! Может быть, в конце месяца я приеду на несколько дней в Берлин, чтобы встретиться с одним американским меценатом и другом, который помогает мне прокормить моих студентов. Надеюсь тогда и тебя повидать.

Мы здесь жили очень тихо и замкнуто. Единственным внешним и значительным событием был приезд лорда Холдейна. У него в голове довольно большая путаница,

[1] См. русский перевод: «Альберт Эйнштейн». Атомиздат, 1966. (*Прим. перев.*).

но, несмотря на это, общее образование и европейская натура этого человека произвели на нас (на Гильберта, Франка, Куранта и меня) большое впечатление.

Если ты пролистаешь выпуски журналов за последнее полугодие, то увидишь, что я был довольно прилежным и к тому же руководил большой группой учеников, но вожусь я исключительно с простыми задачами.

К великой квантовой загадке, несмотря на все усилия, так и не удалось подступиться. Мы здесь изучили теорию возмущений (по Пуанкаре), для того чтобы установить, можно ли получить из моделей Бора при точном расчете наблюдаемые значения термов. Но совершенно очевидно, что это не так, как было показано в случае гелия, когда мы нашли все возможные многократно периодические орбиты (с достаточной степенью приближения).

Зимой сюда ко мне приезжал Гейзенберг (поскольку Зоммерфельд был в Америке); он одарен по меньшей мере в той же степени, как и Паули; по характеру милее и веселее. Кроме того, превосходный пианист.

Помимо работы по гелию, мы совместно исследовали некоторые принципиальные вопросы атомной теории Бора, главным образом, фазовые соотношения в моделях атома (Z. f. Phys.). Сейчас я, наконец, закончил свою большую статью для энциклопедии по теории решеток; она получилась на 250-ти страницах и появится во втором издании моей старой книги. Думаю, что она выйдет из печати в мае. На этом я могу данную область отложить ad acta, т. е. до тех пор, пока вопрос о гомеополярных атомных связях не будет разъяснен с позиций теории Бора. К сожалению, любая попытка точной формулировки срывается. Я вижу только, что в действительности все должно быть совсем, совсем по-другому, а не так, как себе это сейчас представляют.

Однако множество качественных результатов может быть извлечено из идей Бора; Франк в этом смысле великолепен и продолжает ставить чудесные эксперименты. Я дрожу при мысли, что Франка могут отозвать в Берлин. Для него, для физики и даже для Берлина лучше было бы, если бы он остался здесь, а обо мне и говорить не приходится! В данный момент он уехал в Голландию к Герцу.

Говорят, что ты развил новую теорию о взаимосвязи между метрическим и электромагнитным полями, из которой должно следовать отношение гравитации к земному полю. Я чрезвычайно этим заинтересован. Ко всем прочим публикациям, связанным с релятивистской теорией, я в большинстве случаев равнодушен; особенно отвратительным нахожу кашеобразную стряпню Ми. Гильберт следит за этим в полглаза, поскольку он с головой ушел в свое новое обоснование логики и математики. То, что мне из этого известно, кажется мне в действительности самым большим прогрессом, какой только в этой области можно себе представить. Но большинство математиков пока что ничего этого и знать не хотят.

В газетах писали, что ты оставил Союз народов. Мне очень хотелось бы знать, правда ли это? Мы вообще не можем прийти к какому-либо разумному мнению относительно политического положения, из-за того, что правду систематически искажают, как это было во время войны. Сумасшествие французов меня более чем печалит, так как этим они укрепляют у нас национализм и ослабляют республику. Я много думаю о том, что я мог бы сделать, чтобы избавить своего сына от судьбы участника реваншистской войны. Но для Америки я слишком стар, да, кроме того, у них там царит еще больший, чем у нас, военный психоз. Недавно я прочел статью Куденкова-Калерджи «Апология техники», содержание которой меня очень просветило. Если ты с ней незнаком, то постарайся себе ее достать.

В марте мы были в Берлине. Я разговаривал с Планком, и он меня порадовал. А вот в Германском физическом обществе, где я делал доклад, было довольно-таки безотрадно; ничего похожего на активность или дискуссию. Там здорово недостает Рубенса, который, несмотря на свою холодность и осторожность, был в научном смысле полон интереса к жизни.

Все мои здоровы и сердечно всех вас приветствуют.

Твой Макс Борн.

В этом письме содержится много интересного материала. Американского друга и мецената звали Генри Гольдман. Он был главой банковского дома «Гольдман, Закс и К°» в Нью-Йорке. Я познакомился с ним при следующих обстоятельствах. В годы моего пребывания во Франкфурте я как-то посетил Берлин и встретил там своего знакомого, с которым до этого давно не видался. Он рассказал мне, что полюбил американку и теперь, после окончания войны, уезжает в Нью-Йорк, чтобы, наконец, жениться на ней. Полушутя я сказал, что он должен бы найти там богатого американца немецкого происхождения, который выразил бы готовность поддержать мой Институт, оказавшийся из-за инфляции в трудном положении. Спустя пару недель я получил открытку из Нью-Йорка: «У меня есть нужный Вам человек. Его зовут Генри Гольдман и он живет там-то и там-то». С помощью моей жены я написал вежливое письмо мистеру Гольдману и еще через какое-то время получил его очень любезный ответ и чек на двести долларов — сумма, очень значительная для тогдашней ситуации в Германии. Личное знакомство с этим меценатом и было целью моего посещения Берлина.

Лорд Хольдейн в течение нескольких лет учился в Геттингене и любил немецкий язык и немецкую культуру. С этим, вероятно, было связано то, что в 1914 г. он ушел в отставку с поста военного министра, поскольку его родина в возникшем конфликте была на стороне Франции и России. Вскоре после окончания войны 1914—1918 гг. он приехал в Геттинген, чтобы посетить престарелую фрейлейн Шлоте, у которой он жил в годы своего студенчества. Моя жена ее знала и познакомилась с Хольдейном, поскольку мы уже жили в Геттингене. Он был большим поклонником Эйнштейна и прочел мою книгу по теории относительности. Сам он написал толстую книгу под названием «Царство относительности» («The Reign of Relativity»), которая, однако, не имела абсолютно никакого отношения к теории Эйнштейна, но трактовала тривиальные положения о том, что «все относительно».

В письме идет речь, далее, о теории возмущений. Астрономы использовали чаще всего простые, практически оказывавшиеся пригодными методы, и мало интересовались их систематическим и строгим развитием, данным Анри Пуанкаре.

Но в теории электронных орбит в атоме с проблемой возмущений имели дело в такой степени, что оказалась необходимой общая, строгая их теория. Мы, так же как и Бор в Копенгагене, изучали ее, чтобы на ее основе можно было объяснить периодическую систему элементов.

Цель, которую преследовали мы с Гейзенбергом, была другой. Мы сомневались в том, что боровская остроумная, но в основе своей непостижимая связь между квантовыми законами и классической механикой была верной. Поэтому мы хотели на примере гелиевого атома точно рассчитать задачу двух тел (ядро и два электрона) и использовали для этого строгий метод последовательных приближений Пуанкаре. Результат оказался совершенно отрицательным, и это в конце концов привело к отказу от классической механики и построению новой, квантовой, механики.

Слух о новом исследовании Эйнштейна, которое имело своей целью соединение его теории гравитации и максвелловской теории электромагнитного поля, был правильным. В то время он начал свои впоследствии повторявшиеся, но в сущности все же напрасные попытки развить такую единую теорию поля.

Усилия Гильберта по-новому обосновать математику по-началу очень меня захватили и воодушевили. Позднее я уже не мог более следовать за ними.

Выход Эйнштейна из состава Союза народов означал, что он отказался от участия в «Комиссии по интеллектуальному сотрудничеству», председателем которой был философ Анри Бергсон. Основания для этого шага, вероятно, лишь в незначительной степени носили политический характер; скорее они объяснялись главным образом недостатком времени. Если я не ошибаюсь, место Эйнштейна в этой Комиссии заняла мадам Кюри [1].

22.7.23

Дорогие Борны!

Ни моя нечистая совесть, ни даже моя жена не могли привести в движение мое ленивое тело для того, чтобы я, наконец, ответил на ваше милое письмо. Но вот Ваша, госпожа Борн, открытка меня основательно встряхнула. Немощный порыв нечистой совести — это единственное неприятное ощущение, которое у меня возникает, когда я думаю о Вас. Ведь Вы не только всегда добры и милы, но способствуете облагораживанию этого странного бытия силами физики, музыки, поэзии, прозы и дружеской приветливостью.

У нас все вполне хорошо. В делах научных меня занимает в настоящее время один очень интересный вопрос, связанный с аффинной теорией поля. Есть надежда понять поле земного магнетизма и электростатический бюджет Земли и проверить выводы экспериментально. Но с экспериментом нужно подождать.

Сердечно благодарю Вас за милое приглашение от своего имени и от имени моей жены. Но я должен некоторое время посидеть здесь, в этой толкучке, где от посетителей, корреспонденции и телефона можно сойти с ума.

Ланжевен предпринял специальную поездку в интересах пацифистской пропаганды; это чудесный человек. Как бы беспомощны ни были добрые и справедливые люди, уже само их существование делает жизнь стоящей.

К наступающим каникулам шлем сердечные пожелания вам обоим и вашим милым детишкам.

Ваш А. Эйнштейн.

Сердечный привет от моей жены, которая очень занята и сама напишет в следующий раз. Франк, который

[1] По поводу этой Комиссии Эйнштейн писал: «Несмотря на ее блистательный состав, это была самая хромоногая затея, в которой я участвовал за свою жизнь». См. об этом подробнее в книге К. Зелига (откуда и приведена данная цитата): «Альберт Эйнштейн». Атомиздат, 1966, стр. 163. (*Прим. перев.*).

был здесь только что, говорил мне, что по проведенным уже измерениям в ионизованных газах ожидавшийся мною эффект не был обнаружен.

Таким образом, с пониманием поля земного магнетизма ничего не вышло.

Я посылаю это письмо тебе для того, чтобы оно дошло наверняка. Но напиши, пожалуйста, своей жене о том, что мы оба сердечно к ней расположены и чтобы она не обижалась на нас за то, что мы ленимся писать письма.

Институт теоретической физики
университета Геттинген, 25.8.23
Бунзенштрассе, 9

Дорогой Эйнштейн!

Твое милое письмо нас очень обрадовало. От души благодарим за него. Сегодня хочу тебя кое-что спросить (и ответ мне нужен незамедлительный); нас длительно бомбардируют письмами из общества Гельмгольца, Германского физического общества и т. д. о том, что надо ехать на конференцию физиков в Бонн. Если бы она состоялась где-нибудь в другом месте, я бы ничего не имел против. Но представляется, что в случае Бонна из-за французской оккупации придают значение многочисленности приезжих, и Франк считает, что надо поехать из соображений приличия. Я считаю, что конгресс разумнее было бы проводить в неоккупированном районе, так как было бы неправильным придавать научным контактам какую-либо политическую окраску.

Но глупое решение уже сделано, и вопрос теперь только в том, нужно ли принимать участие в конференции. Могут ведь возникнуть и серьезные затруднения с ограничениями проезда и т. п. Сам я не испытываю никакого стремления к высококонцентрированному скоплению физиков и хотел бы, наоборот, сам по себе тихо жить и работать, тем более что я только что вернулся с побережья Северного моря.

От тебя хотел бы узнать, что поделываете вы, берлинские физики (особенно Планк, Лауэ, Габер, Мейтнер и др.), и считаете ли вы поездку желательной. Пожалуйста, ответь мне сразу же, так как о паспорте нужно позаботиться без промедления.

Моя жена с детьми была более 5-ти недель в Лангеоге, где и я провел последние три недели. Мы там очень хорошо отдохнули, особенно дети — они окрепли и выглядят хорошо. Мы много купались и ничем не занимались, кроме того что валялись на пляже и бездельничали. Несмотря на закалку, я здесь сразу же подхватил дикий насморк. Каникулярные дни в Геттингене я представлял себе тихими и спокойными; но вот за те три дня, что мы вернулись, здесь уже побывали два приезжих гостя — один англичанин из Оксфорда и господин Гримм из Мюнхена. С завтрашнего дня прикинусь мертвым и никого принимать не буду. Собственно говоря, у меня ничего особенного не намечается. Я, как всегда, безнадежно думаю о квантовой теории и ищу рецепт, по которому можно было бы рассчитать гелий и другие атомы, но и это мне не удается.

Моя статья для энциклопедии появилась в свет. Экземпляр ее я пришлю тебе в ближайшее время. А в остальном я убиваю время за чтением, прогулками, занятиями с детьми и музыкой. Я упражняюсь очень регулярно и, как мне кажется, сделал успехи. К сожалению, здесь очень трудно организовать трио или квартет.

В последнем выпуске Annalen, в котором помещена превосходная работа Грюнейзена и Гоэнса относительно проверки твоей теории скорости диссоциации, есть и статья Герольда фон Гляйха о перигелии Меркурия; ее тон мне совсем не понравился. Будешь ли ты что-либо ему возражать? Просто удивительно, что есть такое множество людей, не обладающих чутьем ко внутреннему правдоподобию.

Добился ли ты успеха с аффинным миром?

Сердечный привет твоей жене от нас обоих.

Твой Борн.

29.4.23

Дорогие Борны!

Ваше письмо, дорогая госпожа Борн, было действительно превосходным. В самом деле, благотворное влияние японского общества и искусства заключается в том, что индивидуум там столь гармоничен в широком аспекте, что в главном он принадлежит не самому себе, а всему сообществу. Каждый из нас стремился к этому в молодости, а потом должен был от этого отказаться. Ведь из всех сообществ, которые можно было бы принять во внимание, я не связался бы ни с одним, будь то даже общество действительно ищущих, которое с трудом насчитывает очень немного оставшихся в живых членов.

От Неаполя я отказался, узнав, к своей радости, что в моем здоровье есть достаточный для этой возможности дефект; зато я снова ненадолго поеду в Киль. Меня очень интересует мнение Бора по поводу излучения. Но мне не хотелось бы пойти на отказ от строгой причинности до тех пор, пока мы не нашли вместо этого чего-то совершенно иного. Мысль о том, что попадающий под воздействие луча электрон по свободной воле может выбирать время и направление дальнейшего движения, для меня невыносима. Если до того дойдет, то лучше бы мне быть сапожником или маркером в игорном доме, а не физиком. Мои попытки дать квантам ощутимый образ постоянно терпят неудачу, но я еще не скоро оставлю надежду справиться с этим. Ну, а если уже совсем не получится, тогда мне останется только утешаться тем, что неудача связана только со мной.

Наслаждайтесь прелестью солнечного края и примите сердечный привет

от вашего Эйнштейна.

Замечание относительно рекламного бюро возникло как-то из подсознания, как следствие веселого настроения, без того, чтобы я отдавал себе отчет о том, что Вас на этом как-то женили. За Ваше прелестное замечание Вас следовало бы погладить по головке, если только это разрешено делать с замужней дамой.

Это письмо Эйнштейна является ответом на очевидно утерянное письмо к нему моей жены. В приведенном письме, помимо личных моментов, имеется философско-физическое утверждение: отказ Эйнштейна считать статистические законы окончательной основой физики. Эта тема будет снова и снова всплывать в нашей переписке и приведет к горячим спорам между нами. Здесь я хочу сказать о том, что же явилось последней причиной этого раздора. Эйнштейн был твердо убежден, что физические законы формируются нами, исходя из объективно существующего внешнего мира. Я же, как и многие другие физики, в течение долгого времени склонялся к тому,—основываясь на опытных данных из области атомных квантовых явлений,— что это не так, что мы в каждый данный момент имеем только грубое, приближенное знание объективного мира, исходя из которого, по определенным правилам - теоретико-вероятностным законам квантовой механики - можем делать заключения о неизвестных нам (например, будущих) состояниях.

Геттинген, 15.7.25

Дорогой Эйнштейн,

Мы от всей души радовались твоим милым строчкам. Моя жена с детьми позавчера уехала в Сильванию в Англии и напишет тебе, наверное, оттуда. Я же, между тем, хочу кое-что рассказать о нас.

Что касается физики, то твои дружеские слова о моей занятости я отношу к твоей душевной доброте. Я же сознаю, что все, что я делаю, является весьма будничным по сравнению с твоими или Бора идеями. Моя мозговая коробочка очень дряхлая, в нее много не входит, а то, что там есть, дребезжит в ней, не имеет определенной формы и всегда усложняется. Видит бог, твой мозг куда более проницателен. Его творения ясны, просты и захватывают самую суть. Мы доходим до этого с трудом только через несколько лет. Вот так оно и было с твоим вырожденным газом и со статистикой Бозе. К счастью, здесь появился Эренфест, который нам все это представил в должном свете. После этого я читал работу Луи де Бройля и понемножку только смог раскусить твои уловки. Теперь я полагаю, что «волновая теория материи» будет очень существенной вещью. Рассуждения господина Эльзассера еще не доведены до конца; сначала выяснилось, что он основательно просчитался, но я все же верю, что самое существенное в его замечаниях, особенно относительно отражения электронов, можно еще спасти. Я также немного размышляю о дебройлевских волнах. Мне кажется, что существует взаимосвязь (чисто формальная) между ними и тем мистическим объяснением отражения, дифракции и интерференции за счет «пространственного» квантования, предложенным Комптоном и Дюане и детальнее исследованным Эпштейном и Эренфестом. Но главным образом я интересуюсь весьма таинственным исчислением конечных разностей, которое кроется, как мне кажется, за квантовой теорией строения атомов. Вместе с Иорданом я систематически исследую, но с незначительными затратами ума, все мыслимые соответствия между классическими, многократно периодическими системами и квантованными атомами. Работа, в которой мы исследуем влияние непериодических полей на атомы, должна скоро появиться. Она является преддверием к исследованию процессов, происходящих при соударении атомов (затухание флюоресценции, сенсибилизированная флюоресценция по Франку и т. п.); можно будет, как мне кажется, разобраться в основных чертах явления. Различное поведение атомов основано главным образом на том, что они могут иметь либо (средний) дипольный момент, либо только квадрупольный момент, или соответственно электрическую симметрию еще более высокого порядка. Что касается твоих возражений по работе Иордана, то здесь я себя чувствую не совсем уверенно; но поскольку в настоящее время я эти вещи рассматриваю со своих (несколько запутанных) позиций, то я в дальнейшем в этом разберусь. В общем и целом ты, конечно, прав; но мнение Иордана основано на несколько отличающемся рассмотрении, при котором он допускает наличие когерентных пучков лучей, в то время как ты говоришь о некогерентных. Но если даже Иордан здесь неправ, что мне сейчас кажется весьма возможным, у него все же исключительно умная и находчивая голова, соображающая намного быстрее и точнее, чем моя. Вообще, мои молодые люди — Гейзенберг, Иордан, Хунд — блестящи. Мне часто приходится очень здорово напрягаться для того, чтобы поспевать за ходом их рассуждений. Так называемой зоологической спектроскопией (Term-Zoologie) они овладели в совершенстве.

Новая работа Гейзенберга, которая скоро появится, выглядит очень мистической, но по существу очень верна и глубока. А Хунд привел в порядок всю периодическую систему, в том числе и запутанные мультиплеты. И эта работа тоже скоро увидит свет. Наряду с этим я рассчитываю и на других, менее самостоятельных учеников в вопросах теории решеток. У нас закончена сейчас одна работа (некий господин Больнов), в которой рассчитываются соотношения между кристаллографическими осями двух кристаллов тетрагональной системы — рутила и анатаза, являющихся двумя формами двуокиси титана TiO_2, и все получается довольно хорошо — с учетом соблюдения требования элекростатического равновесия в решетке.

Твое сообщение о наконец-то удавшемся объединении гравитации и электродинамики меня очень воодушевило; указанный принцип действия выглядит очень простым. Иордан и я хотим его «проварьировать», как только появится время, но мы умоляем тебя как можно скорее выслать нам свою статью. Все это намного глубже, чем наши небольшие работки. На такое я никогда бы не решился.

В этом семестре у нас снова было много гостей. Крамерс провел здесь 8 дней, далее, как я уже упоминал, был Эренфест, с которым мы очень подружились, особенно моя жена. На прошлой неделе был Капица из Кембриджа, затем Иоффе из Ленинграда, который нам очень понравился,— сколько прекрасных работ он сделал и почти ничего не опубликовал! Сейчас здесь Филипп Франк. Это, конечно, здорово тонизирует, но нашим женам зачастую достается очень много забот. Поэтому они и удирают. Моя жена и жена Куранта уехали уже, а госпожа Франк уедет через два дня. Но, пожалуйста, не делай из этого вывода, что ваш приезд не был бы желанным. Он доставил бы исключительную радость, нужно только, чтобы он пришелся на более спокойное время. У иностранцев в большинстве случаев уже в июле наступают каникулы и они валят сюда толпами. Тебе-то ведь такое оживление знакомо. Завтра тоже будет суматоха: состоится торжественное открытие Гидродинамического института Прандтля с экскурсией, обедом, праздничным концертом. На это я уже потратил почти целый рабочий день, но я скоро тоже удеру. 30 июля я должен сделать доклад у Герлаха и Ланде́ в Тюбингене, а потом поеду в Энгадин к своим. В октябре собираюсь в Кембридж, меня пригласил Капица, а зимой мы все должны поехать на русский конгресс физиков в Москву. Иоффе говорит, что наше путешествие будет оплачено.

Как видишь, мы тоже сможем посмотреть на белый свет, хотя и без Японии и Аргентины.

Да, вот что еще: сегодня на астрономическом коллоквиуме Кинли доложил о новой превосходной работе (кажется, выполненной на Маунт-Вильсон): спутник Сириуса является одним из тех загадочных маленьких карликов, которые обладают гигантской массой и плотностью (28 000), так что, по Эддингтону, это скопление голых ядер и электронов. Теперь доказано красное смещение (около 20 *км/сек*), в точности соответствующее колоссальной плотности (радиус мал!). Ну, вот, теперь все!

Сердечный привет твоей жене и дочери.

Твой Борн.

Это письмо является — с моей точки зрения — в какой-то мере наиболее богатым по содержанию из моих писем и для меня важнейшим. Теория вырожденного газа, которая была развита индийским физиком Бозе, тотчас же была подхвачена Эйнштейном и развита им в очень важной статье. В этой работе Эйнштейна статистическое поведение излучения, трактуемого как газ фотонов, подчиняющийся отличной от обычной (больцмановской) статистике, было перенесено и на случай обычных газов, которые, в соответствии с этим, при низких температурах должны были демонстрировать отступления от нормального поведения (вырождение). По самым существенным было при этом наличие связи с дебройлевской волновой теорией материи (которая появилась за два года до этого и которую Эйнштейн побудил меня проштудировать). По удивительному совпадению как раз ко времени написания мною этого письма Эйнштейну пришло письмо и от американского физика Девиссона, содержавшее описание непонятных ему результатов, наблюдавшихся при отражении электронов от металлической пластинки. Эти результаты были приведены Девиссоном в виде таблиц и кривых. Когда я обсуждал содержание письма Девиссона с Франком, мы пришли к мысли, что странные максимумы на кривых Девиссона могут быть объяснены дифракцией электронных материальных волн на кристаллической решетке; грубый расчет по формуле де Бройля дал правильное по порядку величины значение длины волны. Мы передали разработку этой идеи нашему ученику Эльзассеру, который поначалу работал в области экспериментальной физики у Франка, но хотел переключиться на теоретическую физику. В то время как в моем вышеприведенном письме идет речь о трудностях, надо сказать, что в конце концов Эльзассер с ними успешно справился. Его работа должна рассматриваться как первое подтверждение волновой механики де Бройля.

Подозревавшаяся мною связь с «пространственным квантованием» Комптона—Дюане существовала на самом деле: дебройлевское квантовое условие для импульсов является в точности таким же, только по-другому и более наглядно обоснованным. В то время как Дюане говорит об абстрактном разложении процессов излучения в ряд по гармоникам, де Бройль рассматривает эти последние как реальные «материальные» волны, которые должны заменить собой частицы. Позднее я указал на связь между частицами и волнами иным образом, который является сегодня практически общепринятым: волны описывают распределение вероятности нахождения частицы. Но здесь не место обсуждать эту ситуацию более подробно.

Также не буду я касаться и «загадочного» исчисления конечных разностей (см., например, статью М. Борна и П. Иордана в Zs. f. Phys., 33, 1925, стр. 32), которое стоит за квантовой теорией атома. Я могу сослаться на книгу ван дер Вардена, которая содержит все наиболее важные статьи, относящиеся к возникновению квантовой механики, и подробное введение в ее взаимосвязи с другими областями физики [1].

---

[1] B. L. van der Waerden. Sources of Quantum Mechanics. (Источники квантовой механики). Amsterdam, 1967. Ср. также: Friedrich Hund. Geschichte der Quantentheorie. (История квантовой теории). Mannheim, 1967.

Похвала моим молодым сотрудникам Гейзенбергу, Иордану и Хунду была вполне заслуженной; ныне они признаны ведущими физиками.

Выражение «зоологическая спектроскопия» употреблялось нами для описания процесса накопления экспериментальных данных о спектральных линиях и их разложения на «термы», которые, в соответствии с картиной боровских ступеней энергии, определяют возбужденные состояния атомов. Для найденных при этом числовых закономерностей не имелось какой-либо удовлетворительной теории. Их приходилось воспринимать как эмпирические факты, аналогично тому, как в зоологии систематизируют виды.

И вот дальше — главное. Пара строчек о новой работе Гейзенберга, про которую говорится, что она «выглядит, как мистическая, но по существу очень верна и глубока». Здесь речь идет, без сомнения, о статье в Zs. f. Phys. (35, 879, 1925), в которой формулируются основные идеи квантовой механики и с помощью простых примеров дается им объяснение. Ввиду того, что мои воспоминания об этом времени, ознаменовавшем собой революцию физических идей, несколько стерлись, я написал профессору ван дер Вардену, который подтвердил мое предположение. В его книге можно прочесть о целом ряде событий во всех подробностях. Упомяну здесь только о том, что имеет отношение к письму, адресованному Эйнштейну.

Гейзенберг передал мне свою рукопись 11 или 12 июля с просьбой высказать мое мнение о том, стоит ли ее публиковать; он просил и о том, чтобы я использовал ее как основу для дальнейшего, так как он не может продвинуться далее. Я прочел ее из-за усталости не сразу, а только 15 июля, в тот же день, когда написал Эйнштейну. Уверенность, с которой я утверждаю, что это дело, хотя и выглядит мистически, представляется все же правильным, основывается, я думаю, на следующем. В тот же самый день я обнаружил, что замечательные расчеты Гейзенберга представляют собой не что иное, как матричное исчисление. Тогда я уже знал, что гейзенберговская формула представляет собой диагональный элемент матричного уравнения

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$$

и что одновременно с этим другие матричные элементы величины $pq - qp$ должны быть равны нулю. Коль скоро это было так, у меня хватило осторожности ничего не говорить об этом Эйнштейну, поскольку сначала следовало бы доказать, что недиагональные элементы обращаются в нуль. О том, каким образом это удалось сделать с помощью Иордана, и как появилась наша работа, написанная втроем — Гейзенбергом, Иорданом и мною,— можно прочесть в книге ван дер Вардена.

Упомянутая работа Хунда относится к другому исследованию Гейзенберга, сделанному незадолго до этого.

Я останавливаюсь на этом так подробно, хотя это и имеет малое отношение к Эйнштейну, и это объясняется тем, что я в какой-то мере горжусь тем, что первым написал квантово-механическую формулу в терминах «некоммутативной» алгебры.

Письмо содержит еще два важных научных вопроса: об эйнштейновской теории поля, которая должна была бы объединить электродинамику с теорией тяготения, и проблему спутника Сириуса. Я думаю, что мой восторг по поводу успеха эйнштейновской идеи был вполне искренним. Мы все считали тогда, что поставленная им цель достижима и очень важна. Эйнштейн преследовал эту цель до конца своей жизни. Многих из нас одолевали потом сомнения, — когда наряду с этими двумя полями в физике возникали еще и новые. Сначала это было мезонное поле Юкавы, являющееся прямым обобщением электромагнитного поля и призванное описывать ядерные силы, а затем и другие поля, относящиеся к другим элементарным частицам. Позднее мы были склонны рассматривать непрекращающиеся попытки Эйнштейна продвинуться в этом направлении как трагическое заблуждение.

Следует сделать некоторые разъяснения о том, что говорится о визитах в Геттинген. Крамерс был голландцем, учеником Бора (и Эренфеста.—*Прим. перев.*). Это был высокоодаренный человек. Эренфест уже упоминался на этих страницах. Капица — русский физик, который в первые годы после революции в России работал в Кембридже[1]. Он был сотрудником Кавендишской лаборатории и членом Тринити-Колледжа. Его приезд в Геттинген относится к этому времени. Иоффе, который принадлежал к числу физиков более старшего поколения, был одним из ведущих ученых Советского Союза. Филипп Франк — физик-теоретик, который работал в немецком университете в Праге; позднее он эмигрировал в Америку. В Праге он подружился с Эйнштейном и потом написал захватывающую биографию его[2].

Кинли был профессором астрономии в Геттингене. Упомянутый в моем письме доклад касался астрономического наблюдения, которое можно рассматривать в качестве подтверждения теории Бозе — Эйнштейна, предсказывавшей вырождение газа описанного типа. Однако об этой связи в моем письме не говорится, и мне кажется, что ни Кинли, ни нам эта связь не была очевидна.

7.5.26

Дорогая госпожа Борн!

Ваше письмо было действительно восхитительным. Живот болит, но голову выше и прямее — на это способны только сильные люди. Это, наверное, великолепно — путешествовать с Вашим мужем. Ведь он способен так много дать, а брать — это ведь тоже прекрасно, если находится в равновесии с тем, что даешь. От идей Гейзенберга — Борна у всех перехватило дыхание, они завладели чувствами и мыслями всех заинтересованных в теории

[1] П. Л. Капица, сотрудник Государственного рентгенологического и радиологического института в Петрограде, работал в нем с 1918 по 1921 г., после чего по командировке Наркомпроса начал работать в Англии (*Прим. перев.*).

[2] Биография Эйнштейна, написанная Ф. Франком, вышла двумя изданиями в США в конце сороковых годов, т. е. еще при жизни Эйнштейна. (*Прим. перев.*).

людей. Взамен глупого отрицания у нас, лентяев, возникло неповторимое напряжение. На Вашу долю от всего этого приходится только психологическая часть переживаний, но она, пожалуй, более возвышенна, чем та, которая достается в удел земным существам.

Но теперь самое главное, чтобы Вы снова совершенно поправились, чтобы Вы почувствовали себя веселой в окружении Ваших подрастающих сыновей и свободно пользовались жизнью. Я знаю по собственному опыту, как выздоравливают: это значит в течение долгого времени быть чем-то вроде растения, развивающегося тихо и радостно,— вот искусство, которым Вы не сможете овладеть с такой полнотой, как это удается большинству, принадлежащему к Вашему полу; ведь бодрая головка не захочет покоя, так я себе представляю! Припомните азиатское прошлое, тогда Вы в должной мере почувствуете преходящесть всего на свете и станете здоровой.

С тем и приветствую Вас сердечно.

Ваш А. Эйнштейн.

В. Я. Френкель

МАКС БОРН
(к переписке с Эйнштейном)

Джозеф Лармор в своей маленькой статье о Лоренце писал в 1928 г., что его неожиданная смерть была «преждевременной не по годам, а по сохранности интеллекта» [1]. Эти слова могут быть в равной мере отнесены и к Максу Борну, скончавшемуся в возрасте 87 лет 5 января 1970 г.

В 1955 г. Борн писал в статье, посвященной Эйнштейну: «Когда я полтора года назад оставил свою кафедру в Эдинбурге по достижении предельного возраста, я решил больше не принимать активного участия в физической науке (за исключением работы над завершением двух книг)» [2]. Однако трудно подобрать слово, которое бы с такой полнотой и точностью, как прилагательное «активный», характеризовало последние полтора десятка лет жизни и деятельности Макса Борна. Работа над книгами, воспоминания о себе и своих современниках, дискуссии о философских основах квантовой механики — все это ставило Борна в один ряд с учеными, активно участвующими в прогрессе современной физики. Было бы наивным полагать, что Борн не мог находиться на уровне сегодняшней физики, и не сумел бы при желании успешно решать, скажем, многочисленные задачи, которые остаются и вновь возникают в процессе приложения квантовой механики к объяснению конкретных физических явлений. Однако ученые его типа по самой природе своего дарования занимаются фундаментальными проблемами науки, а менее крупные и существенные вопросы именно поэтому (а отнюдь не из-за гордого сознания несоответствия этих задач масштабу их таланта, не из опасения пожинать дешевые лавры) оказываются вне круга их интересов. В такой же, если не большей степени сказанное относится к великому партнеру Макса Борна по публикуемой здесь переписке — к Альберту Эйнштейну. Его титаническую работу над созданием единой теории поля, отнимавшую все его время и силы, часто оценивают в трагических тонах. Однако обращение пятидесятилетнего Эйнштейна к этим вопросам также определялось масштабом его таланта, просто не приспособленного к разработке сиюминутных и «мелкомасштабных» проблем. Наивными в этом смысле представляются сетования о том, что Эйнштейну-де надо было обратиться к каким-либо иным задачам, отказавшись от попыток решения той, которую диктовал ему его могучий интеллект. Здесь будет уместно вспомнить глубокое замечание Генриха Гейне, сделанное в некрологе о Л. Маркусе: «...Не только творчество, не только оставшиеся после нас труды дают право на почетное признание после смерти, но и стремление само по себе, в особенности, пожалуй, стремление неудачное, потерпевшее крах» [3].

Планк, Эйнштейн, Шредингер, Борн потому и вошли в историю науки, что занимались фундаментальными проблемами, которые им посчастливилось довести до разрешения. Отказ или, точнее, отход от работы в области теоретической физики в действительности означал для них или отказ от такого рода именно фундаментальных исследований или же, как это было в случае Эйнштейна,— полную поглощенность ими, невзирая на саму проблематичность их решения и завершения. Можно думать, что подобными же обстоятельствами или соображениями (сознательно или подсознательно) определялось погружение сорокалетнего Максвелла в работу по разбору и исследованию научного наследства Генри Кавендиша.

В физике XX века Макс Борн занимает исключительно высокое место, определяющееся не только его чисто научными заслугами (назовем главнейшие из них: теория атомных решеток, включая сюда теорию теплоемкости твердых тел, разработанную им и Теодором фон Карманом практически одновременно с теорией Дебая; участие в создании квантовой механики и вероятностная трактовка волновой функции; теория столкновений). Чрезвычайно важно, что он был еще и создателем замечательной научной школы. Геттингенский период истории физики, геттингенская школа, идиллические геттингенские двадцатые годы — прежде всего связываются в нашем сознании с его именем. Достаточно сказать, что его ближайшими сотрудниками-ассистентами и учениками были Отто Штерн, Вернер Гейзенберг, Вольфганг Паули, Норберт Винер. Макс Борн, вспоминая о Геттингене начала века, когда он был еще студентом, пишет об этом маленьком университетском городке как о Мекке немецких математиков. Слава университета в это время поддерживалась тремя пророками — Клейном, Гильбертом и Минковским. С полным правом мы можем утверждать, что в героическое для теоретической физики нашего века время, в годы квантово-механической «бури и натиска», Геттинген стал Меккой теоретиков, и пророком в нем был Макс Борн. Его выдающиеся личные качества, честность и прямота привлекали к нему физическую молодежь, стекавшуюся в Геттинген со всего света — из США, СССР, Италии, Англии, не говоря уже о самой Германии. Но, поскольку исключительной одаренности и выдающихся личных качеств оказывается еще недостаточно для создания научной школы, надо добавить к этим двум талантам, которыми был наделен Борн, третий. Именно он ответствен за способность к созданию научных школ; его природа куда менее очевидна, но право на существование и рассмотрение представляется несомненным. Это видно на примере как физиков, им обладавших и в силу этого создавших свои школы (Дж. Дж. Томсон, Резерфорд, П. Н. Лебедев, Бор, Зоммерфельд, Иоффе, Ландау и др.), так и тех гигантов, у которых, очевидно, он отсутствовал (Эйнштейн, Лоренц, Шредингер, Дирак, Гейзенберг).

Приведем краткие биографические сведения о Борне. Он родился в 1882 г. в профессорской семье в Бреслау (Вроцлаве) и получил прекрасное (в частности, и музыкальное) образование, впитав в себя ту творческую атмосферу, которая царила в доме его отца, Густава Борна, биолога, получившего известность своими работами по эмбриологии. Высшее образование Борн получил в Бреслауском университете, но одновременно с ним он прослушал ряд курсов физики и математики в университетах Цюриха, Гейдельберга и Геттингена. В последнем университете своими способностями Макс Борн обратил на себя внимание всех трех пророков — Гильберга, Клейна и Минковского. На семинаре по теории упругости Клейна и Рунге Борн доложил о решении им одной из ее задач. Решение понравилось Клейну, представившему работу на конкурс. 13 июня 1906 г. философский факультет Геттингенского университета Георгия Августа удостоил эту работу премии. Позднее она была издана отдельной книгой, которую Борн посвятил памяти своих родителей (его отец умер, когда он кончал школу, а мать — когда он был совсем маленьким). На титульном листе значилось: «Исследования по равновесию упругой линии на плоскости и в пространстве»; после указания о том, что работа была удостоена премии «высоким факультетом философии», было приведено его заключение: «Работа излагает решение поставленной факультетом задачи, решение хотя и не исчерпывающее, но изложенное со знанием дела и тщательно; она содержит целый ряд результатов, которые свидетельствуют о существенном прогрессе в понимании предмета». В 1908 г. Минковский пригласил Борна для совместной работы в качестве своего ассистента (Борн 1906 и 1907 годы провел в Бреслау); однако сотрудничество с ним было чрезвычайно кратковременным — он умер через несколько недель после приезда Борна, 12 января 1909 г. Но Борн остался в Геттингене и прожил там почти 7 лет, до весны 1915 г., когда он переехал в Берлин и начал работать на кафедре Планка. В 1919 г. он поменялся местами с Максом фон Лауэ, который оставил профессуру во Франкфурте-на-Майне, чтобы работать в Берлине — вместе и рядом со своим учителем, Максом Планком. Франкфуртский период и дальнейшая деятельность Борна прослеживаются непосредственно по его переписке с Эйнштейном. Годы, проведенные во Франкфурте, ознаменованы экспериментальными исследованиями (которых Борн не чуждался и ранее, работая в Бреслау у Люммера, в Англии — у Лармора и, наконец, в США — у А. Майкельсона), а также тесным сотрудничеством с Отто Штерном, бывшим сотрудником Эйнштейна по Немецкому университету в Праге.

С 1921 по 1933 г. Борн вновь в Геттингене, где он возглавляет Институт теоретической физики при университете. С приходом к власти нацистов Борн эмигрировал из Германии и связал свою судьбу с английскими университетами — сначала с Кембриджем, а затем с Эдинбургом, в котором он явился преемником известного физика-теоретика Дарвина, сотрудничавшего в свое время в Манчестерской лаборатории у Резерфорда. В Шотландии Борн проработал вплоть до достижения предельного возраста и вышел в отставку в 1953 г. В Эдинбурге вокруг него собралась плодотворно работавшая группа молодых физиков, занимавшаяся приложением квантовой механики к исследованиям конденсированных систем.

Приняв в начале 50-х годов предложение Геттингена о почетном гражданстве, Макс Борн предопределил тем самым свое возвращение на родину, куда влекла его любовь к немецкой культуре — музыке (он превосходно играл на рояле) и литературе (интересно отметить, что он перевел на английский и издал стихи Буша). Вдали от родины, ему были, вероятно, более чем созвучны первые строчки «Ночных мыслей» Гейне: «Когда я ночью думаю о Германии, я теряю сон...» В своих воспоминаниях Борн пишет: «...Мы решили вернуться в Германию. Я не могу здесь обсуждать причины, побудившие нас принять это решение, но хотя некоторые из моих друзей, в частности Эйнштейн, отвергали их, мы не сожалеем о принятом шаге. Мы выбрали небольшой курорт, Бад Пирмонт, расположенный в очаровательной сельской местности неподалеку от Геттингена, но все же на достаточном расстоянии от него, чтобы быть вдали от шумной толпы» [4].

В Бад Пирмонте, в доме на Маркардштрассе, 4, Борн и прожил свои последние 16 лет.

Борн довольно много писал об Эйнштейне и об его работах,— начиная с упоминающейся в переписке книги по теории относительности (выдержавшей в СССР четыре издания) [5] и кончая специально написанными воспоминаниями о нем.

В 1905 г., в Геттингене, Борн посещал руководимый Гильбертом и Минковским семинар, посвященный электродинамике движущихся тел. Но он отмечает, что хотя статья Эйнштейна в это время уже увидела свет, о нем самом не упоминалось на геттингенских дискуссиях. Об этой первой статье Эйнштейна по теории относительности Борн услышал позднее, вернувшись в Бреслау, от польского физика Станислава Лориа и Франца Рейхе, ученика Планка. Трое молодых людей начали изучать эту работу, и именно в процессе ее штудирования Борн вступил в переписку с Минковским, что и повлекло за собой его приглашение в Геттингенский университет.

Личное знакомство с Эйнштейном состоялось позднее, на собрании общества немецких естествоиспытателей в Зальцбурге, где Эйнштейн выступил с докладом на тему «О развитии наших взглядов на сущность и структуру излучения» [6]. В работе собрания принимали участие Планк, Хазенорль (преемник Больцмана в Венском университете), а также — помимо Борна — ряд молодых физиков, впоследствии получивших мировую известность, в частности Лауэ и Лиза Мейтнер. Тот факт, что идеи Планка и Эйнштейна о дискретности излучения в то время не были еще приняты повсеместно, непосредственно виден из эйнштейновской ремарки: «Так как я не могу предполагать эту теорию (теорию Планка.— *В. Ф.*) общеизвестной, я хочу в краткой форме сообщить самые необходимые сведения о ней». И действительно, Борн пишет, что ни в Геттингене 1905—1906 гг., ни в Кембридже (лето 1906 г.) он ничего не слышал о квантах, и лишь попав в лабораторию Люммера (экспериментальные исследования которого так тесно переплетаются со знаменитым исследованием Планка), он узнал об этих работах, как узнал и о том, что в той же лаборатории «световые кванты Эйнштейна всерьез не принимали» [2, стр. 370].

Поначалу знакомство с Эйнштейном было, как вспоминал Борн, довольно поверхностным, хотя между ними и началась сперва несистематическая переписка (первое сохранившееся и опубликованное Борном письмо датируется февралем 1916 г.). Это знакомство, однако, быстро переросло в дружбу, когда Борн переехал в Берлин, где Эйнштейн находился с 1913 г., будучи избранным в Прусскую академию наук на место, освободившееся после смерти Вант Гоффа.

О том, как высоко ценил Борн Эйнштейна, лучше всего свидетельствует следующая выдержка из доклада, прочитанного им в апреле 1956 г., спустя год после кончины Эйнштейна: «Для нас, которые воспитывались в догматической вере в ньютоновскую механику, характерной для XIX века, было нелегко принять эйнштейновские идеи, и не каждому выпадало счастье, как мне, учиться непосредственно у него самого. Несмотря на это преимущество, я никогда не отваживался посвятить себя работе в области общей теории относительности. Она казалась мне слишком грандиозной и величественной для моих сил и, вместе с тем,— добавляет Борн,— слишком далекой от обычной физики и слишком мало подкрепленной наблюдениями» [2, стр. 386].

Хотя после отъезда Эйнштейна в США, а Борна в Англию (1933 г.) они больше никогда не виделись, их переписка не прерывалась, а дружба не ослабевала. Все увеличивающееся расхождение во взглядах на квантовую механику, статистическую интерпретацию волновой функции, а также на корпускулярно-волновой дуализм,— ни в коей мере не подорвали сердечности их отношений, выдержавших испытания резкими научными дискуссиями.

Опубликованная здесь часть переписки (а также комментарии к ней Борна) дает возможность провести сопоставление обоих ее участников еще в одном аспекте. Речь идет о пессимистической точке зрения Борна на текущие политические события, контрастирующей с более уверенным взглядом в будущее, характерным для Эйнштейна. К сожалению, развитие событий в Германии 20-х — начала 30-х гг. подтвердило обоснованность пессимистической позиции Борна. Здесь уместно отметить, что он не ограничивался мрачной констатацией своей правоты, а в течение всей жизни пытался оказывать посильное влияние на дальнейший ход событий, выступая против фашистской идеологии и помогая жертвам фашизма в годы своей эмиграции. В послевоенные годы он протестовал против гонки ядерного вооружения и был в числе авторов известного «Геттингенского манифеста». Вместе с тем, именно в послевоенные годы его пессимизм достиг крайнего предела — на страницах заключительной части его воспоминаний (названной им «Размышления» [1]) Борн рисует беспросветную картину будущего человечества, которое «...если и не будет уничтожено в огне термоядерной войны, дегенерирует и превратится в стадо глупых, тупых существ — под влиянием тирании диктаторов, которые будут управлять им с помощью машин и кибернетических устройств. Это не пророчество,— заканчивает Борн,— это кошмар!» Но он все же добавляет: «Однако мои соображения могут быть совершенно неверными. Я надеюсь, что так оно и есть на самом деле». Комментируя эту часть воспоминаний Борна, академики А. М. Прохоров

---

[1] См. [4, 7].

и В. А. Фок писали: «Советские ученые, активно участвующие в построении коммунистического общества, не разделяют пессимизма Макса Борна. Но мы с пониманием относимся к его озабоченности судьбами человечества. Эта озабоченность характерна не только для крупнейших западных мыслителей, но и вообще для представителей западной интеллигенции, не замкнувшихся в башне из слоновой кости. Мы разделяем призыв Борна к совести ученого, к его ответственности перед человечеством» [7].

Остановимся в заключение — в нескольких словах — на том, как складывались отношения Борна с советскими физиками и советской физикой в целом. В его лице мы несомненно имели большого и доброжелательного друга.

В приложении к своей цитированной выше автобиографии Борн приводит список крупных физиков, работавших с ним в геттингенский период. Он относит В. А. Фока и Ю. Б. Румера к числу своих ближайших сотрудников, а среди гостей Института теоретической физики при Геттингенском университете, работавших в его стенах, называет Я. И. Френкеля и И. Е. Тамма. К этим именам следует добавить Ю. А. Круткова и С. А. Богуславского.

Ю. Б. Румер в статье, посвященной 80-летию со дня рождения Борна [8], пишет: «Секрет его успеха в необычайной широте его натуры, в сочетании таланта большого ученого с горячим сердцем очень хорошего человека». В той же статье Румер вспоминает, что Борн любил говорить о своем методе работы следующими словами: «сперва начать считать, потом подумать». Это утверждение Борна, конечно, следует рассматривать как шутку, характерную, впрочем, для его метода работы: он не любил соображать на пальцах, и «математика всегда была та via regia [1], которая вела его к раскрытию тайн природы»,— как писал Румер.

Живые впечатления о Борне, относящиеся ко второй половине 20-х годов, мы находим в письмах Я. И. Френкеля из Геттингена на родину [9]. 4 мая 1926 г. Френкель пишет: «Сегодня, наконец, познакомился с Борном. Мне

---

[1] Королевская дорога (*лат.*).

он чрезвычайно понравился. Ему 40 с лишним лет, но выглядит он совсем молодым. Небольшого роста, худощавый, бритый, с седеющими волосами и голубыми глазами. В обращении прост и весел. Одним словом,— заключает Френкель,— патрон мой мне так же нравится, как и Геттинген». 9 мая 1926 г.: «О впечатлении, произведенном на меня Борном, я уже поведал вам. Ныне могу точнее охарактеризовать это впечатление: в моем воображении (не очень ярком) Борн представлялся весьма солидным мужчиной; на деле он оказался совсем не «солидным». Я был у него на дому дня три тому назад и беседовал часа два на разные научные темы. Познакомился с его женой — еще молодой женщиной; видел также сына — мальчугана лет семи в индейском костюме, вывезенном, очевидно, из Америки. Мы с Крутковым получили от супругов Борн приглашение пожаловать вчера вечером в гости, но по случаю концерта это приглашение было перенесено на покамест неопределенный срок. Борн и его жена, по-видимому, очень музыкальны, ибо в громадной комнате, являющейся кабинетом Борна и вместе с тем гостиной, стоят примкнутые друг к другу два рояля». С этим письмом перекликаются воспоминания Гейзенберга: он пишет о гостеприимном доме Борнов и о том, что в человеческом плане молодежи много дало пребывание в его стенах. «Большую роль играла при этом музыка,— пишет Гейзенберг.— Борн часто играл вместе с Эйнштейном сонаты, а поскольку в комнате стояли два прекрасных рояля, я тоже иногда исполнял вместе с ним концерты Моцарта и Баха».

Еще одна выдержка из письма Френкеля к родным от 29 июня 1926 г.: «Борн сейчас занят разработкой чрезвычайно интересной и остроумной теории, которая бросает свет на множество оставшихся доселе совершенно непонятных вопросов (видимо, речь идет о вероятностной трактовке квадрата амплитуды волновой функции.— *В. Ф.*). И если бы вы знали, как он просто и скромно говорит о том, что делает. Мне он очень нравится не только как физик, но и как человек» [9].

В 1928 г. Борн впервые посетил нашу страну, где принял участие в работе так называемого Волжского (шестого) съезда физиков, о котором написал позднее в исключительно дружелюбных тонах. Он высоко ценил работы, проводившиеся в Советском Союзе, в частности исследования Мандельштама и Ландсберга по комбинационному рассеянию. Он писал: «Явление, открытое Ландсбергом и Мандельштамом на кристаллах, по существу своему тождественно с эффектом, который был наблюден Раманом и его сотрудником Кришнаном на жидкостях; русская физика вправе гордиться тем, что это важное открытие сделано московскими исследователями независимо от работ индусов и почти одновременно с ними» [11]. В знак протеста против того, что Нобелевской премией за эти работы был отмечен только Раман, Макс Борн вышел из состава Нобелевского комитета. Не это ли послужило причиной столь позднего увенчания этой премией его самого? Признание физиков его работа заслужила довольно быстро, а вот Нобелевскую премию Борн получил только в 1954 г., через 28 лет после того, как соответствующие исследования были выполнены и опубликованы.

Вторично Борн побывал у нас — в Москве и в Ленинграде — в июне 1945 г., через несколько недель после победоносного окончания второй мировой войны. Он был гостем Академии наук СССР, отмечавшей 220-летие со дня своего основания (Борн был в декабре 1924 г. избран в число членов-корреспондентов нашей Академии, одновременно с Бором, Дебаем, Лауэ, Майкельсоном и Милликеном; в 1931 г. он стал иностранным действительным членом Академии). 27 июня 1945 г., перед возвращением в Англию, он писал Я. И. Френкелю: «Мне не нужно говорить Вам, что две недели, проведенные в России, являются большим событием для нас. Мы были приняты с роскошным гостеприимством и видели массу прекрасных вещей в области науки, искусства и т. д. Я был очень рад обменяться с Вами и другими физиками нашими идеями в области физики. Мне хотелось бы поблагодарить их всех, но поскольку это невозможно, я прошу Вас передать им мой сердечный привет и благодарность» [9].

Хотя Максом Борном и не был создан систематический курс общей или теоретической физики (подобный зоммерфельдовскому, хвольсоновскому, курсу Ландау и Лифшица, Хунда и некоторых других), написанные им книги сыграли исключительно большую роль — начиная с монографий по теории атомной решетки, учебников оптики, атомной физики, классической популярной теории относительности. Они издавались и переиздавались и нашли себе многотысячную аудиторию среди физиков нескольких поколений и во всем мире. Его книги многократно выходили и у нас в стране. По его «Современной физике» (М.—Л., Гостехиздат, 1935 г.) в течение долгих лет в ряде исследовательских институтов и вузов принимались аспирантские экзамены по физике. Борна уже не было в живых, когда в 1970 г. вышло третье ее издание — под названием «Атомная физика» — перевод с 7-го немецкого. Эту монографию академик Н. Н. Боголюбов с полным основанием называет классической. В том же 70-м году изданы «Принципы оптики» Борна и Вольфа, явившиеся переводом с пересмотренного Борном в содружестве с его соавтором «Учебника оптики», также в свое время (1937 г.) опубликованного на русском языке. В числе книг Макса Борна на русском языке специально должен быть отмечен сборник «Физика в жизни моего поколения» [2], составленный из превосходных по глубине и форме научных, научно-популярных и мемориальных его статей.

Феликс Клейн, геттингенский «великий Феликс», писал в своих «Лекциях о развитии математики в XIX столетии», что, уже будучи сформировавшимся математиком, в Эрлангене, т. е. в годы формулирования своей знаменитой эрлангенской программы, он «...стал постепенно вникать в идеи Римана». «Будучи учеником Плюккера,— говорит он,— я являюсь, таким образом, как бы «экстерном» в отношении римановской школы, а экстерны, как известно, если берутся за какое-нибудь дело, то работают с особым рвением, ибо к работе их побуждает только глубокий внутренний интерес» [12]. Думается, что многие советские физики могут отнести себя к числу заочных учеников Борна, экстернов его школы, оказавшей столь большое и стимулирующее влияние на развитие современной физики.

Макс Борн прожил долгую жизнь и имел все основания писать, заканчивая свои воспоминания: «Мне посчастливилось с моими родителями, женой, детьми, учителями, учениками и сотрудниками», иллюстрируя своим примером названное им тривиальным замечание о том, что научные достижения людей во многом зависят от счастливой судьбы.

Литература

1. *Д. Лармор*. В кн.: *Г. А. Лоренц*. Старые и новые проблемы физики. «Наука», 1970.
2. *М. Борн*. Физика в жизни моего поколения. ИЛ, 1963.
3. *Г. Гейне*. Собр. соч., т. 7. ГИХЛ, 1958, стр. 183.
4. *M. Born*. Bulletin of Atomic Scientists, NN 9—11, 1967; УФН, 1970, **102**, 152.
5. *М. Борн*. Эйнштейновская теория относительности. «Мир», 1972.
6. *А. Эйнштейн*. Собр. науч. трудов, т. III, стр. 164. «Наука», 1966.
7. *А. М. Прохоров*, *В. А. Фок*. Несколько строк о Максе Борне. «Литературная газета», 1970 г.
8. *Ю. Б. Румер*. УФН, 1962, 78, 695.
9. *В. Я. Френкель*. Яков Ильич Френкель. «Наука», 1966.
10. *В. Гейзенберг*. УФН, 1970, **102**, 149.
11. *М. Борн*. Телеграфия и телефония без проводов, 1928, № 51, 718.
12. *Ф. Клейн*. Лекции о развитии математики в XIX столетии, ч. 1. М.— Л., ОНТИ, 1937.

И. В. Мицкевич

СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА И КОНСТРУКТИВНЫЙ ПОДХОД К НАБЛЮДАЕМЫМ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Традиционный аппарат общей теории относительности (ОТО) — тензорный анализ — действует в некотором многообразии, которое понимается как пространство и время. Это 4-многообразие предоставляет нам координаты для описания событий, мировых линий и прочих геометрических образов, равно как и негеометрических полей, определенных на этом многообразии. В свое время понимание этого объективного факта ознаменовало гигантский скачок теории вперед. Однако координаты — не более чем способ нумерации точек многообразия [1], и физики им иногда тяготятся. Так, например, при квантовании гравитационного поля делались попытки перейти от координатного описания к «путевому» [2]. Координаты, вообще говоря (особенно в ОТО), не отражают физической ситуации, но выбираются из технико-вычислительных соображений. Конечно, нельзя отрицать, что их «удачный» в этом смысле выбор объективно как-то связан с физическим содержанием рассматриваемой в конкретных случаях задачи, однако при этом координаты выходят за рамки своих функций и заимствуют нечто у систем отсчета. В этом смысле наиболее строгий подход к системам координат предполагает отражение в них самое большее фактической размерности нашего мира [2].

Все же в теории мы исходим из координат и соответствующих компонент тензоров. Конечно, из этих компонент

[1] См. особенно энергичное выражение этой мысли у В. И. Родичева [1].

[2] Не следует упускать из вида, что «макроскопическая» размерность нашего мира, равная 4, может оказаться при более пристальном изучении вторичным эффектом. В связи с этим см. [3, стр. 138] и [4, стр. 191].

в ряде случаев можно построить нетривиальные скаляры, не связанные с выбором системы координат, но содержащаяся в теории информация ими не исчерпывается. Математиков это не смущает, но физик неизбежно задается вопросом: как из теоретических величин, данных в их координатах (нефизических компонентах), построить физические наблюдаемые (физические компоненты)? Итак, на повестку дня автоматически ставится проблема конструктивного подхода к наблюдаемым физическим величинам в ОТО. Этот подход должен, в отличие от обычного геометрического аппарата ОТО, объединяющего пространство и время в единое псевдориманово многообразие, вновь выделить из него отдельно пространство и отдельно время, предписывая вместе с тем рецепт построения соответствующих им физических компонент наблюдаемых величин. Совершенно очевидно, что такое разделение предполагает конкретный выбор (задание) системы отсчета ввиду фундаментального факта относительности пространственно-временны́х характеристик.

Метод τ-поля

По-видимому, все сходятся в том, что систему отсчета следует задавать через некоторое тело отсчета, пусть воображаемое, но непременно поддающееся реализации путем соответствующей расстановки приборов и наблюдателей (иначе мы ничего не выиграли бы по сравнению с использованием системы координат в смысле приближения к процедуре наблюдения). Можно говорить о точках тела отсчета в 3-мерном смысле, т. е. о мировых линиях этих «материальных» точек (прототипов отдельных приборов или наблюдателей) [5]. Пока точки тела отсчета могут рассматриваться как сферически симметричные (подобно математическим точкам), их мировые линии исчерпывающе изображают систему отсчета. А так как такой конгруэнции линий в 4-пространстве одно-однозначно соответствует поле времениподобного единичного 4-вектора скорости точек, то можно свести задание системы отсчета (при указанных предположениях) к заданию поля такого вектора τ^{μ}. Итак, при сигнатуре $(+ - - -)$ и греческих 4-мерных индексах поле вектора τ^μ, задающего систему отсчета, должно удовлетворять соотношениям

$$\tau^\mu = \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)_p, \qquad \tau^\mu \tau_\mu = 1. \tag{1}$$

(Значок p указывает, что величины в скобках связаны с данной точкой тела отсчета.) Мировые линии точек тела отсчета, вообще говоря, не геодезические [3]. Ясно, что, проектируя 4-мерные тензорные величины на направление τ^μ, можно найти физические временны́е компоненты этих величин; например, интервал физического времени между событиями x^μ и $x^\mu + dx^\mu$ равен

$$dt = \tau_\mu dx^\mu \tag{2}$$

с точки зрения данной системы отсчета. Если теперь из вектора τ^μ и из метрического тензора построить новый тензор

$$b_{\mu\nu} = \tau_\mu \tau_\nu - g_{\mu\nu}; \qquad g_{\mu\nu} = \tau_\mu \tau_\nu - b_{\mu\nu}, \tag{3}$$

то нетрудно заметить, что он будет по построению ортогонален вектору τ^μ:

$$\tau^\mu b_{\mu\nu} \equiv 0. \tag{4}$$

Это означает, что он может служить оператором проектирования на 3-многообразие, ортогональное физическому времени (мировой линии точки тела отсчета в данной мировой точке), для любого тензора. Такой подход был впервые сформулирован Эккартом [6] и Лифом [7], а затем независимо развит в разных аспектах в трудах Зельманова [8] и Каттанео [9], а позднее — Шмутцера [10]. Итак, любой 4-вектор A_μ можно разложить на физические временну́ю и пространственные компоненты

$$a_* = A_\mu \tau^\mu \quad \text{и} \quad a_\mu = A^\nu b_{\mu\nu}, \tag{5}$$

причем, например, сдвиг dx^μ дает наряду с интервалом времени (2) также пространственную длину dl,

$$dl^2 = b_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{6}$$

---

[3] В частности, в мире с положительной кривизной геодезические могут не дать конгруэнции при анализе движения, достаточно длительного во времени.

приуроченную к данной системе отсчета. Тогда автоматически

$$ds^2 = dt^2 - dl^2. \tag{7}$$

Итак, имеет место выражение для квадрата четырехмерного интервала, совпадающее с известным из частной теории относительности, но теперь уже действительное и в случае неинерциальных систем отсчета (и искривленного мира). Нетрудно показать, что определенные таким образом «расщепленные» на физические временну́ю и пространственные части величины преобразуются при переходах между любыми системами отсчета (в том числе и неинерциальными) с помощью локального преобразования Лоренца [11].

Тетрадный подход

Это последнее обстоятельство вполне естественно хотя бы потому, что приведенное определение системы отсчета находится в тесной связи с тетрадным подходом [4]; в последнем же переходы между всеми конкретно заданными системами отсчета, как хорошо известно, сводятся к локальным поворотам тетрадных векторов (локальным преобразованиям Лоренца). Особенно полно этот вопрос рассмотрен Иваницкой [13]. Обозначая четверку тетрадных векторов через $g_{(\alpha)\mu}$ (здесь в скобках стоит номер вектора; латинские индексы в дальнейшем пробегают, в отличие от греческих, лишь три пространственных значения), можно записать условие их ортонормированности в виде[5]

$$g_{(\alpha)\mu} g_{(\beta)}{}^{\mu} = g_{(\alpha)(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}, \tag{8}$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — декартова (или «галилеева») метрика с сигнатурой $(+\,-\,-\,-)$; из этого условия вытекает эквивалентное ему равенство

$$g_{(\alpha)\mu} g_{(\beta)\nu} \cdot \delta^{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}. \tag{9}$$

---

[4] Математические соотношения см. у Эйзенхарта [12].

[5] Коренная буква g выбрана для обозначения тетрадных векторов по той очевидной причине, что, например, ковариантную компоненту μ вектора номер α можно рассматривать как компоненту метрического тензора с одним ковариантным тензорным индексом μ и другим тетрадным индексом α.

Естественно определить также операцию поднятия и опускания тетрадных индексов с помощью чисто тетрадной метрики $g_{(\alpha)(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}$, представляющей собой с тензорной точки зрения просто набор постоянных [6] скаляров. Возращаясь к определению системы отсчета с помощью векторного поля τ^μ, заметим, что при сопоставлении тетрады заданной системы отсчеты должно выполняться равенство

$$g_{(0)\mu} = \tau_\mu. \tag{10}$$

Спрашивается, какую же нагрузку несут остальные три тетрадных вектора? Сочетание соотношений (3) и (9) приводит к заключению, что метрика 3-многообразия (вообще говоря, чисто локального и не обладающего огибающей гиперповерхностью) $b_{\mu\nu}$ записывается через тетрадные векторы как

$$-b_{\mu\nu} = g_{(i)\mu} g^{(i)}{}_\nu = -g_{(i)\mu} g_{(i)\nu}. \tag{11}$$

При заданном поле τ^μ тензор $b_{\mu\nu}$ содержит всего 6 независимых компонент (что соответствует 6 степеням свободы), тогда как три пространственноподобных тетрадных вектора обладают 12 компонентами [7], из которых, однако, следует вычесть 3 условия ортогональности относительно вектора τ^μ $(g_0{}^\mu)$; точно такой же вывод можно было бы извлечь и из равенства (11), где для однозначного определения векторов $g_{(i)\mu}$ на основании заданного тензора $b_{\mu\nu}$ не хватает 3 степеней свободы, связанных у этих векторов с 3-мерными поворотами. Какую информацию (с физической точки зрения) могут дать эти 3 новые (по сравнению с методом τ-поля) степени свободы и не является ли эта информация излишней при формулировке понятия системы отсчета? Этот вопрос далеко не тривиален, как могло быть показаться на первый взгляд, и связан с полнотой определения системы отсчета. Мы уже говорили выше о том, что поле вектора τ^μ отвечает описанию тела отсчета с помощью сферически симметричных материальных точек (аналога математических точек). Однако известен

---

[6] В случае ортонормированности тетрадных векторов.

[7] Речь идет о л и н е й н о й независимости, так что квадратичные соотношения ортонормированности типа (8) здесь не в счет.

целый ряд частиц, обладающих собственным моментом импульса — спином, т. е. частиц, выделяющих некоторое направление в 3-пространстве наряду с тем, что их вектор 4-скорости выделяет, как обычно, времениоподобное направление. Кроме того, и это важнее с точки зрения введения системы отсчета, в процессе измерения производится проектирование на некоторое направление, задаваемое конструкцией прибора [8]. Дело не ограничивается при этом просто соображениями удобства, но связано с проблемами принципиального характера, на которых полезно остановиться. В любой мировой точке тетрада представляет собой локальную декартову систему, однако поле тетрад в некоторой области совершенно необязательно моделирует декартову систему в этой области. Так, например, в обычном плоском 3-пространстве можно указать поле триады, соответствующее повсюду (кроме начала координат) глобальной сферической системе координат; при этом в каждой точке в отдельности триаду следует продолжать рассматривать как локальную декартову систему! Это обстоятельство поясняет смысл понятия калибровки тетрад. В плоском мире можно говорить, в частности, о декартовой и сферической калибровках тетрадных векторов.

Концепция одиночного наблюдателя

Как быть теперь в искривленном пространстве-времени? В нем отсутствует понятие прямой линии, результат параллельного переноса в нем зависит от выбора пути, и мы не можем сравнивать векторы, определенные в разных точках, кроме как по модулю, если не введем дополнительного правила, не следующего с необходимостью из идей римановой геометрии. Это правило можно искать, исходя из физических соображений, и мы приведем здесь идеи, высказанные в статье [14]. Речь идет о «концепции одиночного наблюдателя», когда система отсчета — глобально или в некоторой 4-области — однозначно задается движением одной материальной точки при использовании фи-

[8] Сам же наблюдатель, естественно, различает основные направления «вверх», «вперед», «вправо», служащие основой декартовой системы координат или триады ортонормированных пространственноподобных векторов.

зического в своей основе принципа [9]. Движение материальной точки («наблюдателя») изображается мировой линией Λ—инвариантным геометрическим образом. Эта линия может не быть геодезической, но она должна быть временноподобной. Вектор 4-скорости наблюдателя является касательным к этой линии в любой ее точке, так что на всем протяжении Λ определена система отсчета в τ-формализме. Если мы хотим описывать здесь систему отсчета с помощью тетрад, то в некоторой начальной мировой точке на линии можно задаться и остальными тремя векторами, образующими вместе с τ^μ ортонормированную тетраду. Распространять вдоль линии Λ эту тройку векторов нужно так, чтобы каждый из них сохранял свою ориентацию относительно τ^μ; при этом следует заранее договориться, допустимы ли 3 совместные с этим условием дополнительные вращения. Эти чисто пространственные (в физическом смысле) вращения можно предотвратить, если потребовать распространения тетрадных векторов вдоль Λ с помощью переноса Ферми—Уолкера (см., например, [15]), определение которого опирается на репер Френе, построенный из касательного и нормальных векторов к данной кривой. При параметрическом задании кривой (s — собственное время) уравнение такого переноса для некоторого вектора A_μ имеет вид

$$\delta A^\mu = DA^\mu + A_\lambda \cdot \left[\frac{dx^\mu}{ds}\frac{D}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} - \frac{dx^\lambda}{ds}\frac{D}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}\right]. \tag{12}$$

Здесь D — ковариантный дифференциал, а δ — отличие получающегося при переносе Ферми — Уолкера вектора A^μ от значения этого вектора, уже имевшегося в точке, куда совершен перенос. Так как речь идет о создании поля вектора A^μ путем такого переноса, то мы потребуем $\delta A^\mu = 0$. Очевидно, что в случае, когда Λ — геодезическая, перенос Ферми— Уолкера переходит в обычный параллельный перенос. В этом случае перенесенная таким образом тетрада реализует вдоль Λ систему, наиболее близкую декартовым координатам плоского мира. В против-

---

[9] Существует много подходов к калибровке тетрад, но мы не будем на них останавливаться, ограничившись концепцией одиночного наблюдателя, так как остальные подходы базируются на формальных соображениях, в лучшем случае чисто геометрических, а не физических.

ном случае мы имеем неинерциальную систему отсчета (Λ — не геодезическая) также с квазидекартовой калибровкой тетрад в ней. Чтобы теперь вынести тетрады в пространство, окружающее нашу мировую линию, необходимо задаться новыми путями переноса, пересекающими эту линию. Эти пути должны быть наиболее универсальными, они должны быть определены инвариантным образом и включать в себя некоторый физический принцип. Поэтому мы не склонны рассматривать, например, геодезические, идущие во всех пространственных направлениях, ортогональных τ^μ, от всех точек этой кривой. Предпочтем изотропные геодезические, образующие световые конусы прошлого с вершинами на Λ: это хорошо изображает факт получения информации наблюдателем через световые сигналы; световой конус — инвариантный геометрический образ, тесно связанный с физическими понятиями [10]. Вдоль этих изотропных геодезических тетрадные векторы остается лишь подвергнуть параллельному переносу, чтобы окончательно получить (конструктивным путем) поле тетрад в пространстве-времени в некоторой мировой трубке вдоль линии Λ. Вообще говоря, дело ограничивается такой мировой трубкой, а не касается всего пространства-времени в целом, так как изотропные геодезические, приходящие в одну и ту же вершину светового конуса, могут иметь где-то еще точки пересечения (эффект «гравитационной линзы», [16]), если мир соответствующим образом искривлен. Если бы таких повторных пересечений не было, мы получили бы сразу глобальное поле тетрад. Однако случай пересекающихся во втором фокусе лучей не противоречит идее согласовать калибровку поля тетрад с процедурой наблюдения; напротив, мы видим, что предлагаемый подход отвечает воспринимаемому облику мира. Он совпадает с процедурой, которую Синг [15] называет установлением «оптических координат». Очевидно, что эту калибровку можно в некотором смысле считать декартовой.

---

[10] Хотя фотоны, обладая спином, распространяются в искривленном мире не строго по геодезическим, мы ограничимся геодезическими на заполняемом фотонами световом конусе; масса покоя фотона, конечно, принимается равной нулю.

Тетрадный перенос и дифференцирование

Пусть поле тетрад задано тем или иным образом (даже совсем не конструктивным). Покажем, что сам факт его задания индуцирует новый перенос, не зависящий от пути, которому соответствуют определенная связность и операция обобщенного ковариантного дифференцирования [14]. В самом деле, относительно обычных координат тетрадные компоненты любого вектора (или тензора) являются скалярами. Их перенос осуществляется однозначно, независимо от пути, а в конечной точке, зная там компоненты тетрадного поля, всегда можно эти скаляры стандартным способом перевести снова в компоненты вектора. Итак, новый перенос существенно зависит от поля тетрад только в начальной и конечной точках пути переноса и никак не зависит от формы этого пути. Чтобы найти соответствующую связность, рассмотрим перенос между двумя бесконечно близкими точками с координатами x^μ и $x^\mu + dx^\mu$. Величина, получающаяся в результате описанного выше «тетрадного» переноса, может быть записана как

$$\begin{aligned} A_\nu (x \to x + dx) &= A_\nu (x)\, g_{(\alpha)}{}^{\mu} (x)\, g^{(\alpha)}{}_{\nu} (x + dx) = \\ &= A_\nu (x) + A_{(\alpha)} (x)\, g^{(\alpha)}{}_{\nu,\lambda} dx^\lambda \end{aligned} \tag{13}$$

и при сравнении с исконным значением поля A_ν в точке $x^\mu + dx^\mu$ дает

$$\begin{aligned} \Delta A_\nu &= A_\nu (x + dx) - A_\nu (x \to x + dx) = \\ &= [A_{\nu;\lambda} - A_\mu \Phi_{\lambda\nu}{}^{\mu}]\, dx^\lambda, \end{aligned} \tag{14}$$

где коэффициенты вращения Риччи, образующие тензор третьего ранга, определяются как обычно:

$$\Phi_{\lambda\mu\nu} = - \Phi_{\lambda\nu\mu} = g_{(\alpha)\nu} g^{(\alpha)}{}_{\mu;\lambda}. \tag{15}$$

Итак, тетрадное (обобщенное ковариантное) дифференцирование можно определить как

$$A_{\nu|\lambda} = A_{\nu;\lambda} - A_\mu \Phi_{\lambda\nu}{}^{\mu} \tag{16}$$

и естественно обобщить на случай любого тензора или тензорной плотности произвольного веса A_B:

$$A_{B|\lambda} = A_{B;\lambda} + a_B |^{\tau}_{\sigma} \Phi_{\lambda\tau}{}^{\sigma}. \tag{17}$$

Здесь индекс B — собирательный, включающий, вообще говоря, как ковариантные, так и контравариантные (и другие возможные) значки, а коэффициенты инфинитезимального преобразования $a_B|^{\tau}_{\sigma}$ задаются как (см. [4])

$$a_B|^{\tau}_{\sigma} = \frac{\partial}{\partial \xi^{\sigma}_{,\tau}} [A'_B(x') - A_B(x)], \tag{18}$$

$$x'^{\nu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}. \tag{19}$$

Теперь легко проверить постоянство обычного метрического тензора относительно тетрадного дифференцирования, $g_{\mu\nu|\lambda} \equiv 0$, вместе с таким же постоянством и самих тетрадных векторов:

$$g_{(\alpha)\mu|\lambda} \equiv 0. \tag{20}$$

Из определений (16), (17) видно, что коэффициенты вращения Риччи играют роль добавка к обычным кристоффелевым коэффициентам связности; они и обеспечивают независимость тетрадного переноса от выбора пути. Так как тетрады и операция проектирования на них тензорных величин являются атрибутом одного из подходов к описанию наблюдаемых с точки зрения систем отсчета, следует признать новую операцию тетрадного дифференцирования также связанной с использованием системы отсчета.

Формализм хронометрических инвариантов Зельманова

Вернемся к методу τ-поля, но рассмотрим его особую модификацию. Она составит самостоятельный подход к определению систем отсчета, в котором системами координат уже нельзя пренебрегать. Поставим вопрос так: при каких условиях система координат и система отсчета будут жестко связаны (в смысле относительного движения) между собой? Ведь можно представить себе сопутствующие координаты[11], в которых «простран-

[11] В этом смысле остроумный пример, приведенный В. И. Родичевым в его статье [1] на стр. 145, бьет не совсем по цели, так как можно представить себе такое «тело отсчета», для которого нестационарная система координат (номер улицы) — (номер дома) в фантастическом Нью Нью-Йорке была бы сопутствующей, а сам Нью Нью-Йорк относительно этой системы отсчета как-то двигался бы (возможно, эффективно «деформируясь»!).

ственное положение» точек тела неизменно! Однако тогда с каждой системой отсчета было бы связано бесчисленное множество систем координат, и нетрудно найти связь между такими координатами: это чисто пространственные (трехмерные) преобразования

$$x'^i = x'^i(x^1,\ x^2,\ x^3) \tag{21}$$

и произвольные преобразования координатного времени

$$x'^0 = x'^0(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3) \tag{22}$$

— так называемые «хронометрические преобразования», как назвал их Зельманов [8]. При таком определении систем отсчета физические величины, получаемые конструктивным путем при специфическом расщеплении 4-мерных тензорных величин, должны быть инвариантами (скалярами) относительно хронометрических преобразований (22) и тензорами (хотя лучше всего — скалярами!) относительно преобразований (21). С другой стороны, если говорить на языке τ-поля, мировые линии точек тела отсчета должны совпадать с линиями времени соответствующих систем координат (преобразование (22), как и (21), не изменяет линий времени), так что касательный к ним вектор τ^μ должен обладать равными нулю контравариантными пространственными (1,2,3) компонентами. Это соответствует $dx^i = 0$ для точек тела отсчета — их состоянию покоя относительно «координатной сетки». Условие нормировки (1) сразу же дает [12]

$$\tau^\mu = \frac{\delta^\mu_0}{\sqrt{g_{00}}}, \qquad \tau_\mu = \frac{g_{0\mu}}{\sqrt{g_{00}}}, \tag{23}$$

откуда физический элемент времени строится как

$$dt = \tau_\mu dx^\mu = \frac{g_{0\mu}dx^\mu}{\sqrt{g_{00}}}, \tag{24}$$

а 3-мерная метрика, служащая для нахождения пространственных длин, — как

$$b_{ij} = \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}, \tag{25}$$

---

[12] Из последующих соотношений очевидно, что необходимым условием применимости формализма Зельманова является $g_{00} \neq 0$.

причем $b_{0i} = 0$ и $b_{00} = 0$. Легко проверить хронометрическую инвариантность и 3-мерную ковариантность (в случае (24) — просто 3-инвариантность) этих конструкций. Совершенно ясно, как теперь найти квадрат пространственного интервала длины, пользуясь формулой (6); замечательно, что получающийся результат в точности совпадает с тем, которые Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц находят из совершенно других соображений [17, стр. 302], а именно, пользуясь законами распространения световых сигналов. Ясно также, что всегда выполняется и равенство (7), из которого видно, что локально определяемая скорость света ($ds^2 = 0$) в любых (в том числе и неинерциальных) системах отсчета и произвольных гравитационных полях не может отличаться от фундаментального значения (в наших единицах это 1). Мы не будем давать более подробной сводки результатов формализма Зельманова, в котором детально разработана как алгебраическая, так и аналитическая стороны,— читатель может почерпнуть этот материал как в трудах самого Зельманова, так и в книгах [4, 10]. Главное, что следует здесь подчеркнуть,— это отсутствие внутренних противоречий между идеями общековариантной ОТО и формализма хронометрических инвариантов, внешне связанного со специализацией системы координат, но в действительности являющегося своеобразным выражением явно общековариантного метода τ-поля.

Проблема энергии-импульса-момента

Определяющую роль выбор систем отсчета играет в теории сохраняющихся величин типа энергии-импульса-момента. Эти величины существенным образом изменяются при переходе от одного наблюдателя к другому, движущемуся относительно предыдущего; вместе с тем, современная трактовка энергии-импульса учитывает это обстоятельство далеко не последовательно. Часто, наряду с явным введением системы отсчета через тетрады, авторы не обеспечивают сохраняющиеся величины инвариантностью (скалярными свойствами) относительно обычных координатных преобразований. Однако, даже если гарантировано это последнее свойство, часто величина энергии (как ее плотность, так и интегральное значение) критически зависит от выбора поля пространственных тетрадных векторов. Этот порок формулировки энергии (формулировки наиболее простой по сравнению с определением импульса и момента импульса) имеет прямое отношение к известному **парадоксу Бауэра**, связанному с псевдотензором Эйнштейна [13]. Выходом из положения может служить задание «декартовой калибровки» тетрад, о которой говорилось выше, хотя, конечно, можно надеяться найти определение плотности энергии, полностью инвариантное относительно чисто пространственных тетрадных поворотов.

Для того чтобы более определенно говорить о приложении формализмов описания систем отсчета к определению энергии в ОТО, приведем здесь основную схему рассуждений для теоремы Нётер [3, 20]. Если исходить из инвариантности(в **смысле скалярных свойств**!) интеграла действия, то при произвольной области 4-мерного интегрирования лагранжиан должен быть скалярной плотностью. Рассматривая теперь бесконечно малые преобразования (19) и вводя наряду с операцией $\delta A_B = A'_B(x') - A_B(x)$ операцию δ^*, с точностью до знака совпадающую с дифференциалом Ли,

$$\begin{aligned}\delta^* A_B = A'_B(x) - A_B(x) = \delta A_B - A_{B,\alpha}\xi^\alpha = \\ = a_B\Big|_\sigma^\tau \cdot \xi^\sigma_{,\tau} - A_{B,\sigma}\xi^\sigma\end{aligned} \qquad (26)$$

[ср. 18)], можно записать тот факт, что лагранжиан есть скалярная плотность, в виде

$$\delta^*\mathfrak{L} + (\mathfrak{L}\xi^\alpha)_{,\alpha} = 0. \qquad (27)$$

Предположим, что лагранжиан зависит от потенциалов полей A_B, их первых и вторых производных [14]. Ограничива-

---

[13] Напомним содержание этого парадокса. В пустом плоском мире псевдотензор Эйнштейна в декартовых координатах тождественно равен нулю и дает нулевую интегральную энергию; в сферических же координатах, покоящихся относительно прежних декартовых, псевдотензор Эйнштейна приобретает ненулевое значение, причем интегральная энергия расходится [18]. Сам Эйнштейн смог предложить лишь следующий выход из этого положения [19]: при использовании его псевдотензора допустимы лишь те системы координат в пространстве-времени островной модели Вселенной, которые декартовы на пространственной бесконечности, на конечных же расстояниях допустимы любые достаточно гладкие преобразования.

[14] Последнее имеет место, например, при рассмотрении плотности скалярной кривизны в качестве гравитационного лагранжиана.

ясь бесконечно малыми первого порядка, соотношение (27) можно переписать в виде

$$[\mathfrak{U}^{\alpha}_{\sigma}\xi^{\sigma} + \mathfrak{M}^{\alpha\tau}_{\sigma}\xi^{\sigma}_{,\tau} + \mathfrak{N}^{\alpha\tau\beta}_{\sigma}\xi^{\sigma}_{,\tau,\beta}]_{,\alpha} = \\ = \left[\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_B} A_{B,\alpha} + \left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_B} a_B \Big|^{\beta}_{\alpha}\right)_{,\beta}\right]\cdot\xi^{\alpha}, \tag{28}$$

где введены обозначения

$$\mathfrak{U}^{\alpha}_{\sigma} = \mathfrak{T}^{\alpha}_{\sigma} - \mathfrak{t}^{\alpha}_{\sigma} = \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_B} a_B \Big|^{\alpha}_{\sigma} + \mathfrak{L}\delta^{\alpha}_{\sigma} - \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_{B,\alpha}}\cdot A_{B,\sigma} - \\ - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial A_{B,\alpha,\beta}}\cdot A_{B,\sigma,\alpha}; \tag{29}$$

$$\mathfrak{M}^{\alpha\tau}_{\sigma} = \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_{B,\alpha}} a_B \Big|^{\tau}_{\sigma} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial A_{B,\alpha,\tau}} A_{B,\sigma} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial A_{B,\alpha,\beta}} a_B \Big|^{\tau}_{\sigma,\alpha}; \tag{30}$$

$$\mathfrak{N}^{\alpha\tau\beta}_{\sigma} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial A_{B,\alpha,\beta}} a_B \Big|^{\tau}_{\sigma} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial A_{B,\alpha,\tau}} a_B \Big|^{\beta}_{\sigma}\right]; \tag{31}$$

$$\mathfrak{T}^{\alpha}_{\sigma} = \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_B} a_B \Big|^{\alpha}_{\sigma} = -2\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta g_{\alpha\mu}} g_{\sigma\mu} = \sqrt{-g}\,T^{\alpha\mu}g_{\sigma\mu}; \tag{32}$$

$$\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi} = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\varphi} - \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\varphi_{,\mu}}\right)_{,\mu} + \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\varphi_{,\mu,\nu}}\right)_{,\nu,\mu}. \tag{33}$$

Ввиду произвольности ξ^{α}, из (28) следует ряд соотношений, которые естественно называть соотношениями Нётер; они выражают факт инвариантности действия (свойств лагранжиана как скалярной плотности), уже **н е в к л ю ч а я** в себя упоминания о преобразованиях координат (ξ^{σ}). Учитывая эти соотношения Нётер (см. их в [4]), а также переходя к *с л а б ы м* соотношениям [15], получим общий вид плотностей сохраняющихся величин типа энергии-импульса-момента. Для этого заметим, что правая часть (28) обращается в нуль в силу уравнений поля (на самом деле это обращение в нуль является здесь более общим свойством); в левой части (28) будем считать все величины полученными с помощью одного лишь грави-

[15] Под слабыми соотношениями понимают такие, которые выполняются лишь при учете уравнений поля; в отличие от *с и л ь н ы х* соотношений, отражающих только свойства инвариантности конструкций типа лагранжианов, *с л а б ы е* соотношения более насыщены физическим содержанием. См. также [21, стр. 50].

тационного лагранжиана (будем пользоваться его ковариантными формами). Учтем также уравнения Эйнштейна в форме

$$\frac{\delta \mathfrak{L}_{\mathrm{tot}}}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}(\mathfrak{T}_g^{\mu\nu} + \mathfrak{T}_f^{\mu\nu}) = 0, \tag{34}$$

так что из (29) следует

$$\mathfrak{U}^{\alpha}_{g\sigma} = \mathfrak{T}^{\alpha}_{g\sigma} - \mathfrak{t}^{\alpha}_{g\sigma} = -(\mathfrak{t}^{\alpha}_{g\sigma} + \mathfrak{T}^{\alpha}_{f\sigma}). \tag{35}$$

Возвращаясь к соотношению (28) после учета этих замечаний, найдем, что величина

$$\begin{aligned} w^{\alpha} &= (\mathfrak{t}^{\alpha}_{g\sigma} + \mathfrak{T}^{\alpha}_{f\sigma})\xi^{\sigma}_{,\tau} - \mathfrak{M}^{\alpha\tau}_{g\sigma}\xi^{\sigma}_{,\tau} - \mathfrak{N}^{\alpha\tau\beta}_{g\sigma}\xi^{\sigma}_{,\tau,\beta} = \\ &= [\mathfrak{M}^{\tau\alpha}_{g\sigma}\xi^{\sigma} + 2\,\mathfrak{N}^{\tau\beta\alpha}_{g\sigma}\xi^{\sigma}_{,\beta}]_{,\tau} \end{aligned} \tag{36}$$

удовлетворяет дифференциальному закону сохранения [4, стр. 44]

$$w^{\alpha}_{,\alpha} = 0. \tag{37}$$

Нетрудно показать, что w^{α} является истинной плотностью контравариантного вектора относительно общих преобразований координат, так что в (37) можно использовать ковариантную дивергенцию; следовательно, интегральная сохраняющаяся величина будет истинным скаляром. Если теперь связать ξ^{μ} с системой отсчета, то следует заключить, что программа, обсуждавшаяся на стр. 78, уже частично реализована, и требуется лишь исследовать поведение плотности при переходах между системами отсчета (при общих поворотах тетрад).

Обобщение векторов Киллинга

Мы пришли, таким образом, к одноиндексным плотностям сохраняющихся величин, к которым с других точек зрения подходили и другие авторы. Здесь становится особенно ясной связь этих величин, с одной стороны, с теоремой Нётер, а с другой стороны — с выбором системы отсчета. Ясно также, что выбор в качестве ξ^{μ} векторов Киллинга не дает общего решения проблемы по следующим причинам. Прежде всего векторы Киллинга существуют не для всех пространств ОТО, тогда как дифференциальные законы сохранения (37) можно записать всегда.

Кроме того, при задании конкретной системы отсчета векторы Киллинга (если они существуют) вовсе не обязательно описывают, например, сдвиги вдоль физического времени или пространственных направлений, характеризующих данную систему отсчета. Конечно, если существуют векторы Киллинга, то с ними можно связать некоторые привилегированные в каком-то смысле системы отсчета. Однако полезно вспомнить, что с точки зрения наблюдателя (системы отсчета) даже операция ковариантного дифференцирования должна быть обобщена как (17). В этом смысле можно понимать и обобщение уравнений Киллинга, предлагая вместо их обычной формы

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0 \tag{38}$$

записывать

$$\eta_{\mu|\nu} + \eta_{\nu|\mu} = 0. \tag{39}$$

Такие обобщенные уравнения Киллинга можно получить как выражение обобщенного требования изометрии. Вспомним, что уравнения в виде (38) можно получить, требуя неизменности квадрата 4-интервала между любыми бесконечно близкими парами точек пространства-времени при увлечении этих точек, соответствующем преобразованию (19). Это преобразование является голономным преобразованием голономных (т. е. не тетрадных, а обычных) координат. Для дифференциалов его можно записать

$$dx'^{\mu} = dx^{\mu} + d\xi^{\mu}. \tag{40}$$

Рассмотрим теперь неголономные координаты, выражаемые с точки зрения наблюдателя, т. е. с помощью тетрад. По самой своей природе они могут быть выражены лишь в дифференциалах:

$$dx_{(\alpha)} = g_{(\alpha)\mu}dx^{\mu}; \tag{41}$$

здесь $dx_{(\alpha)}$ не является, вообще говоря, полным дифференциалом, почему мы и говорим о неголономности. Произведем преобразование этих координат, в некотором смысле не затрагивая их неголономности [16],

$$d\bar{x}_{(\alpha)} = dx_{(\alpha)} + d\eta_{(\alpha)}. \tag{42}$$

[16] Локальные тетрадные повороты изменили бы конкретный характер этой неголономности.

Такое преобразование можно назвать голономным преобразованием неголономных координат [17], так как $d\eta(\alpha)$ является по определению полным дифференциалом:

$$d\eta_{(\alpha)} = \eta_{(\alpha),\mu}dx^{\mu}. \tag{43}$$

Напротив, с точки зрения координат (41) преобразование (19) или (40) можно назвать неголономным преобразованием неголономных координат. Теперь произведем локальное увлечение неголономных координат, соответствующее преобразованию (42), что соответствует сдвигам, представимым с точки зрения наблюдателя, который каждый раз действует лишь в своей окрестности. В результате от

$$ds^2 = dx_{(\alpha)}dx^{(\alpha)} \tag{44}$$

придем к [18]

$$d\bar{s}^2 = d\bar{x}_{(\alpha)}d\bar{x}^{(\alpha)} = dx_{(\alpha)}dx^{(\alpha)} + 2\eta_{(\alpha),\mu}dx^{\mu}dx^{(\alpha)}. \tag{45}$$

Мы ограничиваемся здесь, как обычно, малыми первого порядка. Требуя $ds^2 = d\bar{s}^2$ для (44) и (45) (требование изометрии), получаем

$$\eta_{(\alpha),\mu}g^{(\alpha)}_{\nu} + \eta_{(\alpha),\nu}g^{(\alpha)}_{\mu} = 0, \tag{46}$$

откуда, учитывая, что

$$\eta_{(\alpha),\mu} \equiv \eta_{(\alpha);\mu} \equiv \eta_{(\alpha)||\mu} \tag{47}$$

и (20), непосредственно приходим к обобщенным уравнениям Киллинга (39). В частности, из (20) сразу видно, что тетрадные векторы автоматически оказываются обобщенными векторами Киллинга (при соответствующем тетрадном дифференцировании), что совершенно естественно, так как их направления изображают для локального наблюдателя в данной системе отсчета физические пути переносов (трансляций). Итак, взяв в выражении для плотности w^{α} (36) вместо ξ^{μ} обобщенный вектор Киллинга η^{μ}, мы получим, используя в качестве него тетрадный вектор $g^{\mu}_{(\sigma)}$, плотность соответствующей (σ) физической компоненты 4-импульса. Тогда в элементе объема

---

[17] Очевидно, что оно является одновременно неголономным преобразованием голономных координат!

[18] Аналогичные рассуждения для обычных уравнений Киллинга (38) можно найти, например, в книге Яно и Бохнера [21].

в окрестностях наблюдателя эта физическая компонента

$$dp_{(0)} = w^{\alpha} \left[g_{(0)}{}^{\mu} \right] \cdot dS_{\alpha} \tag{48}$$

будет аксиальным скаляром[19] в смысле общих преобразований координат, изменяясь лишь при переходах между разными системами отсчета (тетрадные повороты). Здесь через dS_α обозначен элемент гиперповерхности, взятый с точки зрения наблюдателя:

$$dS_{\alpha} = \tau_{\alpha} dV = g_{(0)\alpha} dV \tag{49}$$

(dV — элемент координатного объема)[20]. Этот подход в рамках хронометрически инвариантной формы метода τ-поля был рассмотрен нами в работе [22].

Заключение

Подведем некоторые итоги. Мы рассмотрели, пусть конспективно, различные подходы к определению системы отсчета. Подразделяя их подчеркнуто-детально, можно говорить о τ-подходе (назовем его в духе

[19] Ср. с соображениями на стр. 34 [4], в частности, с формулой (2.4.11).

[20] Заметим попутно, что для заданной системы отсчета вовсе не обязательно существование гиперповерхностей, роль вектора нормали к которым играло бы поле τ^μ. В частности, в случае одиночного наблюдателя, находящегося в мировой точке вершины некоторого светового конуса, можно брать систему его «корреспондентов», расположенных всякий раз на этом световом конусе. Тогда элементы dS_α (49) для каждого из этих корреспондентов образуют «ступенчатый» конус с бесконечно малым шагом ступенек, что эквивалентно заданию гиперповерхности для определения интегральной величины в виде светового конуса, но с «исправленной» ориентацией его элемента (нормаль этого конуса является одновременно касательной к нему). Необходимость такой процедуры показывают следующие два соображения. Во-первых, нереалистично задаваться, скажем, начальными данными на неограниченной пространственноподобной гиперповерхности (случай открытой Вселенной, хотя и для закрытой модели важную роль может играть «горизонт наблюдения»): информация может быть получена не более чем из светового конуса прошлого (включая саму гиперповерхность конуса). Во-вторых, если исходить из светового конуса и использовать его изотропную нормаль, мы уже в частной теории относительности получим совершенно нелепое выражение даже для энергии электромагнитного поля. Все это свидетельствует в пользу определения величин на световом конусе, но при модификации понятия элемента гиперповерхности на нем.

Зельманова монадным подходом), о формализме хронометрических инвариантов, о тетрадном подходе и о концепции одиночного наблюдателя («оптические координаты» у Синга). По сути дела, второй подход является модификацией (если угодно, конкретной калибровкой) первого, а четвертый — третьего, хотя концепция одиночного наблюдателя применима и с позиций монадного подхода. Мы проиллюстрировали ценность понятия системы отсчета в ее конкретном математическом выражении при определении сохраняющихся величин типа энергии-импульса-момента. Только четкое определение понятия системы отсчета дает нам возможность наполнить физическим содержанием в ОТО понятия энергии, импульса и т. д., так как в противном случае мы, с одной стороны, не могли бы в принципе выделить, например, энергию из общего комплекса возникающих в теореме Нётер величин, с другой же стороны, обращаясь к векторам Киллинга в случае наличия у рассматриваемого пространства-времени свойств подвижности, пришли бы к инвариантным конструкциям. Однако ясно, что последние не обеспечивают достаточно полного соответствия с нерелятивистской или частнорелятивистской теорией (так как там нельзя понять мотивов выделения привилегированных систем отсчета). Попутно мы показали возможность (можно думать, — даже необходимость) обобщения векторов Киллинга и соответствующих уравнений с учетом специфики наблюдателя или системы отсчета, что придает несколько бо́льшую стройность построениям, когда тетрадные векторы трактуются как «физические» декартовы оси, вдоль которых осуществляются сдвиги физических систем (теорема Нётер, производная Ли, изометрия и т. д.).

Все это дает основание верить, что двуединство пространства и времени является одним из величайших завоеваний физики нашего века. Это детище Альберта Эйнштейна является разным поколениям в разных обличьях. Впервые, когда набат частной теории относительности всколыхнул умы ученых и непосвященной толпы, было очень заманчивым пойти как можно дальше во внедрении идеи единства пространства и времени [21]. Это торжество ин-

[21] Собственно, если Эйнштейна можно назвать отцом этой идеи, то «матерью» ее следует признать Германа Минковского. (Справедливость требует, конечно, отметить, что Анри Пуанкаре еще в 1906 г., за два года до Минковского, говорил о 4-мерности

дукции привело и к смешению понятий системы координат и системы отсчета, до сих пор еще не изжитому в самых широких кругах физиков. Однако трезвый подход к этому вопросу рано или поздно должен был возобладать, особенно когда ОТО подошла к конкретным задачам, непосредственно связанным с наблюдениями [22]. Рассматривая системы отсчета, теоретики шли уже по пути дедукции, от знакомого и весьма симметричного 4-мерного пространства-времени ко всякий раз специфически выделяемым физическому пространству и физическому времени. Этот этап познания не менее плодотворен и насыщен неожиданностями, чем предыдущий этап индукции. Этот новый этап познания еще далеко не завершен, в ОТО он требует освоения и применения мощных математических методов, в значительной мере уже разработанных такими глубокими математиками, как Схоутен (см., например, [25]). В ходе новейших исследований мы все лучше, причем с новых сторон, познаем то, что, казалось, изучено уже вдоль и поперек — физические пространство и время. Старые проблемы синхронизации часов, измерения расстояний, анализа релятивистских сил инерции, определения сохраняющихся величин и множество других наполняются новым, живым содержанием и все больше сближают математически изысканный и запутанный храм ОТО, этакий собор Парижской Богоматери в теоретической физике, с требованиями экспериментаторов — иногда по-своему придирчивыми, часто прозаическими, но, как правило, серьезно обоснованными. И этот процесс обогащает

мира, но формулировка, данная Минковским, была настолько полной и математически совершенной, что обычно именно о нем — наряду с Эйнштейном — говорят как о совершившем революцию в наших представлениях о пространстве и времени.) Напомним крылатую фразу, принадлежащую Минковскому [23]: Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbstständigkeit bewahren (с этого часа пространство само по себе и время само по себе должны полностью обратиться в тени, самостоятельность же должен сохранить только лишь некий род единения их обоих). Сначала я не думал приводить здесь эту цитату полностью, и лишь затянувшиеся поиски точного ее текста показали, что не грех ее перепечатать снова.

[22] С одной стороны, это была космология, в связи с которой провел свои ставшие уже классическими исследования Зельманов [8]. С другой стороны, к такой же трактовке систем отсчета пришел Мёллер [24], разбирая ряд проблем, связанных с наблюдаемыми эффектами (включая, по-видимому, известный парадокс часов).

не только арсенал идей и аппарата теоретиков, но и экспериментаторов, так как в обоих лагерях идет переоценка ценностей, переосмысливание привычных догм. Если объединить пространство и время помогло введение 4-мерных координат, то разъединение достигается с помощью формализмов системы отсчета, и этот новый этап гораздо содержательнее, чем можно было думать во времена Минковского. Уже сама такая диалектика несет в себе большое удовлетворение для исследователя, присутствующего при ее рождении.

Литература

1. *В. И. Родичев.* Эйнштейновский сб. «Наука», 1968, стр. 115.
2. *S. Mandelstam.* Ann. of Phys., 1962, **19**, 25.
3. *Р. Марцке, Дж. А. Уилер.* В сб. «Гравитация и относительность», стр. 107. М., 1965.
4. *Н. В. Мицкевич.* Физические поля в общей теории относительности. М., 1969.
5. *А. Л. Зельманов.* Тезисы докладов 5-й Международной конференции по гравитации и теории относительности. Тбилиси, 1968, стр. 115.
6. *C. Eckart.* Phys. Rev., 1940, **58**, 919.
7. *B. Lief.* Phys. Rev., 1951, **84**, 345.
8. *А. Л. Зельманов.* Докл. АН СССР, 1948, **61**, 993; 1956, **107**, 815; 1960, **135**, 1367; Труды VI Совещания по космогонии. М., 1959.
9. *C. Cattaneo.* Nuovo Cimento, 1958, **10**, 318; Ann. di Mat. Pura e Appl., 1959, **48**, 361; Rendiconti mat., 1961, **20**, 18; 1962, **21**, 373.
10. *E. Schmutzer.* Relativistische Physik. Leipzig, 1968.
11. *Н. В. Мицкевич, В. Н. Захаров.* Докл. АН СССР, 1970, **195**, № 2.
12. *Л. П. Эйзенхарт.* Риманова геометрия. М., 1948.
13. *О. С. Иваницкая.* Обобщенные преобразования Лоренца и их применение. Минск, 1969.
14. *Н. В. Мицкевич, М. Рибейро Теодоро.* ЖЭТФ, 1969, **56**, 954.
15. *Дж. Л. Синг.* Общая теория относительности. М., 1963.
16. *S. Refsdal.* International Conference on Relativistic Theories of Gravitation. Vol. 1. London, 1965.
17. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теория поля. М., 1967.
18. *H. Bauer.* Phys. Zs., 1918, **19**, 163.
19. *A. Einstein.* Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. 1918, 448. (см. перевод: *А. Эйнштейн.* Собр. науч. трудов, т. I, стр. 650. Изд-во «Наука», 1965).
20. *Н. В. Мицкевич.* Ann. der Physik, 1958, **1**, 319.
21. *К. Яно и С. Бохнер.* Кривизна и числа Бетти. М., 1957.
22. *Н. В. Мицкевич, Х. Д. Мухика.* Докл. АН СССР, 1967, **176**, 809.
23. *H. Minkowski.* Phys. Zs., 1909, **10**, 104.
24. *C. Møller.* The Theory of Relativity. Oxford, 1952.
25. *И. А. Схоутен и Дж. Д. Стройк.* Введение в новые методы дифференциальной геометрии. М.— Л., 1939, т. I; 1947, т. II.

В. И. Родичев

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ ОТСЧЕТА

Введение

Системы отсчета являются необходимым составным элементом любого как экспериментального, так и теоретического исследования. Только при правильном учете или выборе системы отсчета, в соответствии с условиями наблюдения, можно ожидать результатов, поддающихся физической интерпретации. Не существует такого явления и нет такого наблюдателя, которых нельзя было бы отнести к какой-либо системе отсчета. Иногда последняя задается помимо воли и желания наблюдателя — экспериментатор и его приборы пока вынуждены в основном находиться на Земле, принадлежность к такой «естественной» системе отсчета накладывает определенный отпечаток на результаты наблюдений, с которым следует считаться.

Однако, как это ни парадоксально, в настоящее время нет общепризнанного аналитического определения как самих систем отсчета, так и правил перехода от одних к другим [1,2]. Если в случае инерциальных систем отсчета (сокращенно ИСО), в которых введены галилеевы системы координат, ситуацию можно считать как будто благополучной (во всяком случае мы убеждены, что преобразования Лоренца связывают пространственные координаты и время двух различных ИСО), то в случае неинерциальных систем отсчета (сокращенно НСО), ситуация далеко не такая ясная. Систему отсчета часто отождествляют с системой координат, специализированной определенным образом: например, с галилеевой — в специальной теории относительности (сокращенно СТО) или с синхронной — в общей теории относительности (сокращенно ОТО). Переход от одной НСО к другой описывается тогда с помощью либо специализированных, либо произвольных преобразований координатной сетки — группа преобразований (Λ):

$$x^{\mu'} = f^{\mu'}(x^{\mu}); \qquad x^{\mu} = \varphi^{\mu}(x^{\mu'}). \tag{1}$$

Не менее часто систему отсчета отождествляют с полями тетрад, однородными или неоднородными:

$$\{O, \boldsymbol{h}_a\}; \quad \boldsymbol{h}_a = \text{const}; \qquad \{O, \boldsymbol{h}(\alpha)\}; \qquad a, \alpha = 1, 2, 3, 4, \tag{2}$$

где h_a и $h(\alpha)$ — векторы, образующие ортонормированные реперы, в последнем случае они изменяются от точки к точке. Переход от одной системы отсчета к другой здесь описывается локальными или нелокальными лоренцовыми вращениями тетрад — группа преобразований (В):

$$\boldsymbol{h}(\alpha') = \omega(\alpha'\alpha)\,\boldsymbol{h}(\alpha); \quad \boldsymbol{h}_{a'} = \omega_{aa'}\boldsymbol{h}_a; \qquad \omega_{aa'} = \text{const}. \tag{3}$$

В приводимой ниже таблице перечислены основные, бытующие ныне, различные способы отображения систем отсчета и указаны операции, описывающие переход между ними.

Сам факт существования принципиально различных аналитических определений систем отсчета и переходов между ними говорит о неудовлетворительной ситуации. Что же в действительности представляет собой система отсчета, что будет являться ее геометрическим отображением, как связаны между собой различные системы отсчета — инерциальные и неинерциальные? На все эти вопросы сейчас нет однозначного ответа. Мы рассмотрим эти вопросы и попытаемся дать ответ на некоторые из них.

Система отсчета, с одной стороны, представляет собой как бы мизансцену, на фоне которой развертываются события, с другой стороны, — это своеобразный физический прибор, предназначенный для выполнения некоторых измерений, и, как таковой, имеет нечто общее с любым, обычным, физическим прибором.

Так, например, вольтметр имеет прежде всего физическую основу — базис, состоящий из магнита, рамки с обмоткой, стрелки и т. д. Но этот базис превратится в физический прибор, пригодный для измерений, только после того, как будет осуществлена его градуировка, которая должна быть, в принципе, любым, но однозначным образом зафиксирована на его шкале.

Геометрическое отображение системы отсчета	Операция, описывающая переход от одной системы отсчета к другой
ИСО	
1. Галилеева система координат $x_a;\ a = 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ x_4 = ict$	Координатные преобразования Лоренца (линейный случай группы А) $x_{a'} = \omega_{a'a} x_a;\ \omega_{a'a} = \text{const}$
2. Однородное поле тетрад $\{O, \boldsymbol{h}_a\};\ a = 1,\ 2,\ 3,\ 4$	Лоренцовы, нелокальные вращения тетрад (частный случай группы В) $\boldsymbol{h}_{a'} = \omega_{a'a} \boldsymbol{h}_a;\ \omega_{a'a} = \text{const}$
НСО	
1. Произвольная координатная система x^μ	Произвольные преобразования координатной сетки (группа А) $x^{\mu'} = f^{\mu'}(x^\mu);\quad x^\mu = \varphi^\mu(x^{\mu'})$
2. Полугеодезическая (синхронная) система координат: $\tau,\ x^k,\ k = 1, 2, 3$	Хронометрически инвариантные преобразования (частный случай группы А) $\tau = \tau';\ x^{k'} = f^{k'}(\tau,\ x^k)$
3. Поле единичных, временноподобных векторов u^μ, задающих конгруэнцию мировых линий	Хронометрические инвариантные преобразования компонент вектора u^μ (частный случай группы А) $u^{0'} = u^0;\qquad u^{k'} = u^0\ \partial x^{k'}/\partial\tau + u^k \partial x^{k'}/\partial x^k$ $k,\ k' = 1,\ 2,\ 3$
4. Неоднородное поле тетрад $\{O,\ \boldsymbol{h}(\alpha)\};\ \alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4$	Локальные преобразования Лоренца (группа В) $\boldsymbol{h}(\alpha') = \omega(\alpha'\alpha)\, \boldsymbol{h}(\alpha)$

Точно так же и система отсчета должна иметь физический базис — набор, определенным образом движущихся или неподвижных, тел, стандартных приспособлений и часов. Это могут быть, вообще говоря, Солнце, звезды, сигналы радиомаяка, гироскопы и другие датчики, позволяющие ориентироваться в пространстве и времени. Но такой базис превратится в систему отсчета только после того, как он будет проградуирован.

Вопросы, связанные с градуировкой и ее геометрическим отображением, подробно нами рассмотрены в работе [3], здесь мы приведем только краткую сводку результатов, необходимых нам в дальнейшем.

Градуировка базиса системы отсчета распадается на две существенно различные — (A) и (B). A-градуировка точечная, позволяющая каждому телу (в пределе каждой материальной точки) сопоставить 4 числа x^{μ}, характеризующие положение в физическом (трехмерном) пространстве и отмечающие соответствующий момент времени.

Числа x^{μ} принадлежат некоторой числовой области Ω и являются геометрическим отображением нумерации точек в физическом пространстве-времени. От отображения требуется непрерывность и взаимная однозначность, в остальном оно произвольно. Числа x^{μ} получают название координат, а отображение на область Ω называется координатной системой. Пользуясь произвольностью отображения, мы можем переходить от одного к другому с помощью преобразований координат (1), образующих, как мы уже знаем, группу преобразований (A). Из произвольности отображения следует, во-первых, что выбор координат никак не связан с изменением физической ситуации и, во-вторых, что величины dx^{μ} не могут быть истолкованы ни как отрезки длины, ни как промежутки времени; для этого необходима метрика, определить которую можно только исходя из дополнительных геометрических и физических соображений.

Но, независимо от того, какова метрика пространства и введена ли она вообще, основное назначение координат всегда одно и то же — нумерация пространственно-временных точек.

Однако одной A-градуировки еще недостаточно. Так, например, для описания движения тела, кроме сведений о мгновенном положении его центра масс, необходимо знать его мгновенную ориентацию и скорость центра масс. В общем случае этих данных все еще недостаточно, но мы ограничимся пока ими.

Для определения ориентации и численных значений скорости необходимо задать начальные направления (для отсчета углов Эйлера) и выбрать тело отсчета, условно приписав ему скорость, равную нулю.

Выбор этих начальных направлений и скоростей (ввиду относительности направления и скорости) — операция хотя и необходимая, но формальная, их можно задавать произвольно и даже локально, т. е. в каждой точке пространства-времени свои. Таким образом, в дополнение к А-градуировке необходимо еще занумеровать (перечислить) все направления и скорости относительного движения. Это и составляет содержание В-градуировки.

Геометрическим отображением начальных (нулевых) направлений в трехмерном плоском пространстве является трехмерный ортонормированный репер — декартова триада, точнее, однородное поле триад. Они отличаются в этом случае только параллельными сдвигами. Если начальные направления выбраны локально, геометрическим отображением будет уже неоднородное поле триад.

Нумерацию (перечисление) относительных скоростей геометрически, согласно СТО, можно отобразить с помощью перечисления направлений четвертых, ортогональных триадам времениподобных векторов. Иначе говоря, геометрическим отображением всей В-градуировки будет в общем случае неоднородное поле тетрад.

Две различные В-градуировки, которые в силу определения, конечно, равноправны, связаны преобразованием группы (В). Следовательно, группа (В) описывает переход от одной В-градуировки к другой, подобно тому как группа (А) устанавливает связь между двумя А-градуировками.

Подводя итог, можно сделать очень важный вывод. именно, из того факта, что выбор как А-, так и В-градуировки — операция хотя и необходимая, но в основном формальная, не влияющая ни на состояние движения системы отсчета, ни тем более на состояние изучаемого объекта, следует.

1. Законы природы аналитически должны выражаться в форме общековариантной относительно обеих групп преобразований (А) и (В).

2. Все физические величины должны геометрически отображаться общековариантными относительно групп (А) и (В) тензорами.

Это является минимальным требованием, без которого невозможна физическая интерпретация аппарата любой теории.

Механика и электродинамика полностью отвечают этим требованиям; что касается ОТО, то в метрической формулировке она нековариантна относительно группы (А), в тетрадной — нековариантна относительно группы (В). По этой причине мы до сих пор не имеем физической интерпретации аппарата ОТО. Из предыдущего рассмотрения вытекает еще один важный вывод, именно — преобразования групп (А) и (В) не могут описывать переход от одной системы отсчета к другой даже в том случае, если системы инерциальные. Всякий раз, как только мы обратимся к этим преобразованиям, пытаясь описать переход от одной системы отсчета к другой, будет возникать неизбежный вопрос — а как отличить, когда эти преобразования описывают изменение градуировки и когда — переход к другой системе отсчета? Легко видеть, что, оставаясь в рамках этих преобразований, ответить на вопрос невозможно. Даже в том случае, когда преобразования групп (А) и (В) любым образом зависят от времени, они все-таки описывают только переход к новой, в этом случае нестационарной, градуировке одной и той же системы отсчета! Сам Эйнштейн, по его словам, не так легко освободился от представления, что координаты и их произвольные преобразования в ОТО имеют метрический и физический смысл [4]. С другой стороны, как мы уже отмечали, лоренцовы преобразования галилеевой системы координат имеют определенный физический смысл и приводят ко многим физическим следствиям. Не противоречит ли это только что отмеченному геометрическому смыслу координат и их преобразований, как изменений нумерации мировых точек? Как же тогда подойти к непротиворечивому описанию систем отсчета? Как отобразить самые существенные стороны ее? К решению этих вопросов можно, по-видимому, приблизиться, рассмотрев метод конгруэнций мировых линий, широко применяемый сейчас при анализе точных решений уравнений Эйнштейна.

§ 1. Базис системы отсчета и его отображение

Как мы уже отмечали, базис системы отсчета можно себе представить в виде множества движущихся тел (в пределе — материальных точек), с каждым из которых связан периодический процесс — часы. В движении тел должна быть некоторая упорядоченность. Так, например, хаотически движущиеся молекулы газа определенно не могут быть приняты за базис системы отсчета. Между телами базиса не должно быть столкновений, кроме того, они должны быть так подобраны, чтобы в одинаковом силовом поле все они приобретали одинаковое ускорение. Например, если силовое поле электромагнитное, то все тела базиса должны иметь одинаковое отношение заряда к массе. В случае гравитационного поля такая «стандартизация» всегда имеет место (принцип эквивалентности). Тогда история движения базиса геометрически отобразится конгруэнцией мировых линий [1], дифференциальной характеристикой которой будет поле касательных векторов $u^\mu = dx^\mu/ds$, т. е. поле четырехскоростей базисных тел. Это поле мы и примем в качестве геометрического отображения базиса любой системы отсчета. Поле u^μ полностью общековариантно, оно не зависит ни от выбора координатной сетки, ни от выбора тетрад и содержит, как увидим, всю необходимую информацию о системе отсчета. Если имеется другая система отсчета, то отображением ее базиса будет другое векторное поле $\boldsymbol{u}'$. Тогда в каждой мировой точке будут заданы два вектора $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{u}'$, принадлежащие различным полям, относительная ориентация которых отображает, очевидно, скорость относительного движения базисов в данной точке. К сожалению, как показывает приведенная во введении таблица, переход от одного базиса к другому обычно пытаются описать либо с помощью специализированного преобразования координат (группа А), либо с помощью локального (или нелокального) преобразования тетрад (группа В), забывая при этом, что поля $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{u}'$ заданы в общековариантной, относительно обеих групп преобразований, форме, и, следовательно, переход от поля $\boldsymbol{u}$ к полю $\boldsymbol{u}'$ может быть также описан только общековариантной операцией.

Назовем эту операцию Ω, тогда

$$\boldsymbol{u}' = \Omega \boldsymbol{u}; \quad \boldsymbol{u} = \widetilde{\Omega} \boldsymbol{u}'. \tag{1}$$

Это соотношение, общековариантное относительно обеих групп преобразований (А) и (В), называется аффинором [5]. В общем случае аффинор Ω — локальный, преобразующий одно неоднородное векторное поле в другое. Конкретный вид Ω будет определен. если заданы поля $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{u}'$.

---

[1] Эти мировые линии есть линии времени синхронной системы координат.

§ 2. Инерциальные системы отсчета

Рассмотрим конкретный вид аффинора Ω, описывающего переход от одной ИСО к другой. Базисы двух различных ИСО будут отображаться однородными полями u-const и u'-const. Эти поля можно отнести к произвольному полю тетрад $\{O, h(\alpha)\}$, однако, учитывая, что пространство плоское (случай СТО), отнесем их к любому однородному полю тетрад $\{O, h_a\}$, тогда u_a и u'_a будут ортогональными (галилеевыми) компонентами этих полей. Искомый аффинор должен преобразовать однородное поле u в однородное же поле u', при этом длина векторов должна сохраниться

$$u_a u_a = u'_a u'_a = -1, \tag{5}$$

т. е. преобразование (4) должно сводиться просто к повороту. Преобразования (4), удовлетворяющие условиям (5), запишутся

$$u'_a = \Omega_{ab} u_b; \qquad u_a = \Omega_{ba} u'_b; \qquad \Omega_{ac}\Omega_{bc} = \delta_{ab}. \tag{6}$$

Аффинор, который является тензором второго ранга, удовлетворяющий условиям (6) и переходящий в единичный, когда $u'_a = u'_a$, имеет вид

$$\Omega_{ab} = \delta_{ab} + \frac{1}{1-\alpha}(u_a + u'_a)(u_b + u'_b) - 2u'_a u_b, \tag{7}$$

где $\alpha = u'_a u_a$, если $u'_a = u_a$, $\alpha = -1$.

Заметим, что преобразования (6) ни в коем случае нельзя рассматривать как преобразование (поворот) тетрад или галилеевой системы координат! Поля u_a и u'_a отнесены к одной и той же системе тетрад или — системе координат. Индексы «a» и «b» в коэффициентах Ω_{ab} принадлежат к одной и той же системе тетрад (или системе координат).

Если записать преобразование компонент некоторого вектора A_a при ортогональном преобразовании системы координат, с теми же коэффициентами, то мы получим

$$A_{a'} = \Omega_{a'a} A_a, \tag{8}$$

здесь индексы a и a' относятся к различным системам координат!

Переходя от галилеевой системы координат к произвольной, вместо (7) получим

$$\Omega_{\mu\cdot}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} + \frac{1}{1-\alpha}\{u_{\mu}u^{\nu} + u'_{\mu}u'^{\nu} + u_{\mu}u'^{\nu} + u'_{\mu}u^{\nu}\} - $$
$$- 2u'_{\mu}u^{\nu} \tag{9}$$

аффинор, записанный в общековариантной форме. Наконец, свертывая (9) с коэффициентами Ламэ, получим

$$\Omega(\alpha\beta) = \Omega_{\mu}^{\nu} h^{\mu}(\alpha)\, h_{\nu}(\beta) \tag{10}$$

— тот же аффинор, отнесенный к локальной тетраде.

При всех этих преобразованиях тензорные свойства и физическая информация, которую содержит аффинор, конечно, не изменяются.

Компоненты аффинора (7), подходящим выбором поля тетрад, можно значительно упростить. Выберем однородное поле тетрад так, чтобы векторы $\boldsymbol{h}_4$ совпали с веторами $\boldsymbol{u}$, направление остальных векторов $\boldsymbol{h}_k$ пока произвольно. Тогда компоненты векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{u}'$ запишутся

$$u_k = 0, \qquad u_4 = i; \qquad u'_k = \frac{i\beta_k}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad u'_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$k = 1, 2, 3, \tag{11}$$
$$\beta_k = \frac{v_k}{c}; \qquad \beta = \frac{v}{c}; \qquad \alpha = u_a u'_a = i u'_4 = -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

подставляя это в (7), получим

$$\Omega_{ab} = \left\{\begin{array}{ccc} \delta_{kn} + \varkappa\,\dfrac{v_k v_n}{v^2} & \vdots & \dfrac{-iv_k}{c\sqrt{1-\beta^2}} \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{+iv_k}{c\sqrt{1-\beta^2}} & \vdots & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \varkappa = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1, \\ k, n = 1, 2, 3, \end{array} \tag{12}$$

где v_k — компоненты скорости относительного движения.

Число α, определяющее относительную ориентацию векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{u}'$, определяет и величину скорости относительного движения:

$$v = \frac{c}{|\alpha|}\sqrt{\alpha^2 - 1} = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^{1/2}.$$

Компоненты v_k будут определены, если будет задана также и пространственная часть тетрады. Так, например, если мы направим вектор $\boldsymbol{h}_1$ тетрады вдоль трехвектора $\boldsymbol{v}$, то получим: $v_1 = v$, $v_2 = v_3 = 0$, матрица (12) тогда примет следующий вид:

$$\Omega_{ab} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, & 0, & 0, & \frac{-iv}{c\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ \frac{+iv}{c\sqrt{1-\beta^2}}, & 0, & 0, & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{matrix} \right\}. \tag{13}$$

Наконец, если скорость относительного движения $v = 0$, т. е. $u'_a = u_a'$, мы получим

$$\Omega_{ab} = \delta_{ab}. \tag{14}$$

Можно взять новое однородное поле тетрад $\{O, \boldsymbol{h}_a'\}$ и точно так же связать его с полем u_a', тогда тетрады $\{O, \boldsymbol{h}_a'\}$ и $\{O, \boldsymbol{h}_a'\}$ будут связаны соотношением

$$\boldsymbol{h}'_a = \Omega_{ab}\boldsymbol{h}_b. \tag{15}$$

Точно так же будут связаны и собственные координатные сетки x_a и $x_{a'}$, т. е. те системы координат, координатные линии которых совпадают по направлению с тетрадными векторами, именно

$$x_{a'} = \Omega_{aa'}x_a. \tag{16}$$

Это и есть обычное (координатное) преобразование Лоренца.

Таким образом, в случае инерциальных систем отсчета, в которых введены однородные поля тетрад и соответствующие им собственные галилеевы координатные сетки с временными осями x_4 и x_4', совпадающими по направлению с $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{u}'$, мы имеем численное совпадение компонент трех геометрических объектов: компонент аффинора Ω_{ab}, компонент матрицы ω_{ab}, описывающей поворот тетрад, и коэффициентов линейного преобразования галилеевых систем координат (16).

Галилеевы координаты всегда имеют хорошо известный метрический и физический смысл. Тогда преобразования

(16), связывающие такие координаты двух различных систем отсчета, могут дать ценную физическую информацию о связи свойств пространства, времени и движения, как это и имеет место в СТО. Этим и объясняется, во-первых, физический смысл координатных преобразований Лоренца (который, в сущности, должен относиться к аффинору Ω_{ab}) и, во-вторых, разъясняется отмеченное во введении кажущееся противоречие между физическим и геометрическим смыслом координатных преобразований Лоренца.

Итак, характерными признаками ИСО являются: однородность поля скоростей u_a, отображающего базис, т. е. $du_a/dx_b = 0$; отсутствие ускорений базисных тел (как следствие предыдущего), т. е. $du_a/ds = 0$, и отсутствие кривизны пространства-времени ИСО.

Если ввести произвольную координатную сетку, то отмеченные признаки в общековариантной форме можно записать так:

$$\nabla_\sigma u^\mu = 0; \qquad \frac{Du^\mu}{ds} = 0; \qquad R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma\cdot} = 0; \tag{17}$$

они, очевидно, сохраняются при переходе от одной ИСО к другой.

§ 3. Неинерциальные системы отсчета

1. Геометрические свойства пространства-времени НСО

Если тела, образующие базис системы отсчета, подвергаются действию силового поля любой природы, то система отсчета становится неинерциальной (НСО)[1]. Базис НСО мы снова отобразим полем 4-вектора скорости u^μ, но теперь оно будет уже неоднородным, его можно считать порожденным локальным аффинором (4). Мировые линии, составляющие конгруэнцию, будут теперь искривлены.

Пусть x^μ — криволинейные координаты, введенные в ИСО, относительно которой задано движение базиса НСО; тогда

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu; \qquad u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}; \qquad g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1. \tag{18}$$

[1] При этом всегда предполагается, что осуществлена стандартизация базисных тел, указанная в § 1.

Изменение поля u^μ при смещении вдоль координатной линии x^σ дается ковариантной производной, которую всегда можно представить в виде

$$\nabla_\sigma u^\mu = B_\sigma^{\cdot\mu} + u_\sigma f^\mu; \qquad f^\lambda u_\lambda = 0; \qquad B_\sigma^{\cdot\mu} u^\sigma = B_\delta^{\cdot\mu} u_\mu = 0. \tag{19}$$

Здесь f^μ — вектор первой кривизны конгруэнции, описывающий поле ускорений базисных тел. Тогда закон движения любого базисного тела НСО запишется:

$$\frac{Du^\mu}{ds} = f^\mu; \qquad \frac{Du^\mu}{ds} \equiv u^\sigma \nabla_\sigma u^\mu. \tag{20}$$

Соотношения (19) показывают, что как f^μ, так и тензор $B_{\sigma}^{\cdot\mu}$ принадлежат локальному V_3, ортогональному u^μ [1]. Тензор B_σ^μ описывает изменение u^μ при смещении вдоль V_3 и зависит как от силового поля, так и от начального распределения скорости u^μ; его обычно представляют в виде следующего разложения:

$$B_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3} B\varepsilon_{\mu\nu}, \tag{21}$$

где

$$\omega_{\mu\nu} = B_{[\mu\nu]}; \qquad \sigma_{\mu\nu} = B_{(\mu\nu)} - \frac{1}{3} B\varepsilon_{\mu\nu};$$

$$B = B_\lambda^{\cdot\lambda} = \nabla_\lambda u^\lambda; \qquad B_{\mu\nu} = B_\mu^{\cdot\lambda} g_{\nu\lambda}.$$

Здесь

$$\varepsilon_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu \tag{22}$$

есть тензор проектирования на локальное V_3, он принадлежит ему и является метрическим тензором этого V_3.

Тензорам $\omega_{\mu\nu}$, $\sigma_{\mu\nu}$ и скаляру B может быть дана простая «гидродинамическая» интерпретация, если мы проследим за движением некоторого выделенного объема, содержащего одни и те же базисные тела (материальные точки). Тогда $\omega_{\mu\nu}$ описывает поворот, $\sigma_{\mu\nu}$ — деформацию (сдвиг) и скаляр B — относительное изменение выделенного объема при смещении его вдоль мировых линий, т. е. с течением собственного времени.

---

[1] Т. е. лежат в локальной пространственноподобной гиперповерхности, ортогональной u^μ.

Теперь нам следует выяснить, какой смысл мы должны вкладывать в слова «наблюдатель находится в НСО»? В случае ИСО этот смысл очевиден — наблюдатель находится в ИСО, если он покоится относительно ее базиса (т. е. если его скорость и ускорение относительно базиса равны нулю). Тогда мировая линия наблюдателя, будучи прямой, параллельной мировым линиям тел базиса, войдет в конгруэнцию мировых, описывающих базис ИСО.

В случае НСО простые соображения подсказывают нам следующее: если наблюдатель и его средства измерения находятся в НСО, то это значит, что они движутся относительно ИСО точно так же, как то базисное тело НСО, около которого они в данный момент находятся. Иначе говоря, мы будем считать, что наблюдатель находится в НСО — будет сопутствовать ей, если его скорость и ускорение, относительно местного базисного тела, равны нулю и, следовательно, его мировая линия входит в конгруэнцию мировых, описывающих базис НСО. Мы видим, что, в отличие от ИСО, все высказанные здесь определения по необходимости носят локальный характер, так как базисные тела НСО движутся относительно друг друга.

Дадим теперь строгое определение. Пусть относительно некоторой ИСО движется множество наблюдателей, мировые линии которых образуют конгруэнцию. Пусть далее относительно этой же ИСО движется множество тел, образующих базис некоторой НСО, мировые линии которых также образуют конгруэнцию. Тогда если эти конгруэнции совпадают [1], то наблюдатели находятся в данной НСО, в противном случае наблюдатели и НСО находятся в относительном движении.

Из определения следует, что относительно наблюдателей, находящихся в НСО, вектор первой кривизны конгруэнции мировых линий базиса, в каждой точке, равен нулю, $\tilde{f}^{\mu} = 0$, в то время как относительно ИСО это поле существует, $f^{\mu} \neq 0$. Переход от ИСО к НСО связан, таким образом, с обращением в нуль поля ускорений f^{μ}. Это показывает, что физические условия и, следовательно, геометрические свойства пространства-времени НСО резко отличаются от таковых в ИСО. Действительно, мировые линии базиса НСО, относительно ее самой, будут геодезичес-

[1] Т. е. соответствующие векторные поля скоростей и ускорений совпадают.

кими, ибо они характеризуются нулевым значением вектора первой кривизны. Далее, различные наблюдатели, находящиеся в НСО, измерив скорость $\widetilde{v}^{\mu}$ их относительного движения и обнаружив относительное ускорение, сделают вывод об искривленности пространства-времени НСО, так как последняя связана с относительным ускорением формулой геодезического отклонения

$$\frac{\widetilde{D}\widetilde{v}^{\mu}}{d\widetilde{s}}+\widetilde{R}^{\mu}_{\cdot\nu\sigma\lambda}\widetilde{u}^{\nu}\eta^{\sigma}\widetilde{u}^{\lambda}=0, \quad \widetilde{v}^{\mu}=\frac{d\eta^{\mu}}{ds}. \tag{23}$$

Все эти качественные результаты следует оправдать аналитическими выкладками, чем мы и займемся далее, а сейчас для лучшего уяснения сложившейся ситуации сопоставим эти результаты в виде таблицы [1].

Система отсчета	Проекция смещения	Ускорение *	Интервал
ИСО	dx^{μ}	$j^{\mu}\neq 0$	$ds^2=g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$
НСО	dx^{μ}	$\widetilde{j}^{\mu}=0$	$d\widetilde{s}^2=\widetilde{g}_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$

* Имеется в виду ускорение наблюдателя, находящегося в НСО.

Система отсчета	Скорость	Уравнение движения	Кривизна пространства
ИСО	$u^{\mu}=\dfrac{dx^{\mu}}{ds}$	$\dfrac{Du^{\mu}}{ds}=j^{\mu}$	$R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma.}=0$
НСО	$\widetilde{u}^{\mu}=\dfrac{dx^{\mu}}{d\widetilde{s}}$	$\dfrac{\widetilde{D}\widetilde{u}^{\mu}}{d\widetilde{s}}=0$	$\widetilde{R}^{\lambda}_{\mu\nu\sigma.}\neq 0$

Здесь все величины с тильдами: $\widetilde{j}^{\mu}$, $\widetilde{g}_{\mu\nu}$ и т. д. взяты относительно НСО, и нам еще надлежит установить их связь с аналогичными величинами, отнесенными к ИСО. Сравнение приведенных результатов показывает, что

[1] Напоминаем, что координатная сетка для ИСО и НСО выбрана общая.

их невозможно привести в соответствие ни координатными, ни тетрадными преобразованиями. Действительно, мы имеем, например, два закона движения одного и того же наблюдателя или базисного тела — по мировым относительно ИСО и по геодезическим относительно НСО. Совершенно очевидно, что никакими преобразованиями группы (А) или (В) невозможно свести одно уравнение движения к другому. Для этого необходимо было бы с помощью этих преобразований обратить в нуль поле f^{μ}, но это невозможно, ибо f^{μ} есть общековариантное, относительно обеих групп преобразований, векторное поле. То же самое можно сказать и относительно кривизны пространства-времени НСО. Все это еще раз показывает, что ни координатными, ни тетрадными преобразованиями невозможно описать переход от ИСО к НСО.

2. Метрика НСО

Аналитическое описание перехода от ИСО к НСО мы будем понимать, во-первых, как описание геометрических свойств пространства-времени НСО и, во-вторых, как установление связи этих свойств со свойствами пространства-времени ИСО. Это значит, как показывает приведенная таблица, что мы должны найти такую метрику $\tilde{g}_{\mu\nu}$, относительно которой первоначальная конгруэнция мировых линий, задаваемая полем u^{μ}, превратилась бы в геодезическую,— задаваемую полем $\tilde{u}^{\mu}$. Займемся теперь отысканием этой метрики.

Согласно (22), метрический тензор $g_{\mu\nu}$, принадлежащий ИСО, можно записать в следующем виде:

$$g_{\mu\nu} = u_{\mu}u_{\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}, \tag{24}$$

где $\varepsilon_{\mu\nu}$, как уже отмечали, есть метрический тензор локального V_3. Равенство (24) можно толковать как представление $g_{\mu\nu}$ с помощью собственного вектора u_{μ}, которому соответствует собственное значение, равное единице, и тензора $\varepsilon^{\mu\nu}$, для которого любая декартова (пространственная) триада будет собственной. Заметим, что для $g_{\mu\nu}$ любая тетрада будет также собственной, но мы выбрали в (24) тетрады с временны́м вектором u_{μ} потому, что он инвариантно связан с базисом НСО. Можно было бы инвариантным образом определить и остальные три вектора тетрады, определив поле репера Френе, в котором вектор

l^μ задавал бы направление первого пространственноподобного вектора, но при переходе к НСО, где конгруэнция мировых должна быть геодезической, пространственная часть репера Френе становится неопределенной. Следовательно, в ИСО имеется только одно направление, задаваемое вектором u^μ, которое при переходе к НСО сохраняет свой смысл и определяется там полем $\tilde{u}^\mu$. Неизвестный метрический тензор $\tilde{g}_{\mu\nu}$, принадлежащий НСО, можно также представить в виде, аналогичном (24):

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{u}^\mu \tilde{u}^\nu + \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu} \tag{25}$$

с совершенно аналогичным истолкованием. Рассмотрим, ради простоты, случай, когда векторы u^μ и $\tilde{u}^\mu$, приведенные в таблице, коллинеарны [1]:

$$\tilde{u}^\mu = p(x) u^\mu; \quad p(x) = ds/d\tilde{s}, \tag{26}$$

где $p(x)$ является скалярной функцией точки. Может возникнуть сомнение, возможно ли говорить о коллинеарности двух векторов, принадлежащих разным пространствам с метриками $g_{\mu\nu}$ и $\tilde{g}_{\mu\nu}$? Но легко видеть, что коллинеарность — это частный случай линейной зависимости векторов, т. е. это аффинное понятие, не нуждающееся для своего определения в какой-либо метрике. Подставляя (26) в (25), находим:

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = p(x)^2 u^\mu u^\nu + \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu}; \qquad \tilde{g}^{\mu\nu} u_\nu = p(x^2) u^\mu. \tag{27}$$

Равенства (27) показывают, что вектор u^μ является собственным временноподобным вектором не только $g^{\mu\nu}$, но также и тензора $\tilde{g}^{\mu\nu}$, однако, в отличие от (24), с отличным от единицы собственным значением [2]. Последнее равенство можно записать в виде

$$(\tilde{g}^{\mu\nu} - p^2 g^{\mu\nu}) u_\nu = 0. \tag{28}$$

Если бы вектор u_ν был произволен, то из (28) немедленно следовало бы, что

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = p^2 g^{\mu\nu}, \tag{29}$$

---

[1] В общем случае коллинеарность, конечно, отсутствует.

[2] Относительно метрики $g^{\mu\nu}$ тензор $\tilde{g}^{\mu\nu}$ можно рассматривать как произвольный симметричный тензор, для которого отыскание собственных векторов имеет определенный смысл.

т. е. метрики должны были бы находиться в конформном соответствии. Однако поле u_ν не любое, оно нам задано заранее, именно то поле, которое описывает движение базиса конкретной НСО, поэтому соотношение (28) следует рассматривать не как тождество, а как уравнение. Тогда из (28) следует более общее решение

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = p^2 g^{\mu\nu} + \tilde{b}^{\mu\nu}, \tag{30}$$

где $\tilde{b}^{\mu\nu} = \tilde{b}^{\nu\mu}$; $\tilde{b}^{\mu\nu} u_\nu = 0$, т. е тензор $\tilde{b}^{\mu\nu}$ принадлежит локальному V_3. Ради удобства сделаем следующую несущественную замену, положим

$$p = e^{-\varphi}; \qquad \tilde{b}^{\mu\nu} = e^{-2\varphi} b^{\mu\nu}; \qquad \varphi = \varphi(x);$$

тогда

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{-2\varphi}(g^{\mu\nu} + b^{\mu\nu}), \tag{31}$$

где $\varphi(x)$ — пока неизвестная скалярная функция точки.

Для ковариантных компонент получим

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\varphi}(g_{\mu\nu} + a_{\mu\nu}); \tag{32}$$

тензоры $a_{\mu\nu}$ и $b^{\mu\nu}$ принадлежат V_3 и связаны соотношением

$$a^{\lambda}_{\mu} b^{\nu}_{\lambda} + a^{\nu}_{\mu} + b^{\nu}_{\mu} = 0. \tag{33}$$

Таким образом, тензоры $\tilde{g}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ связаны деформацией, $g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + a_{\mu\nu}$, с последующим конформным преобразованием.

Из (26) также находим

$$\tilde{u}^{\mu} = e^{-\varphi} u^{\mu}; \qquad \tilde{u}_{\mu} = e^{\varphi} u_{\mu}. \tag{34}$$

Пусть $\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\lambda}$ и $\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}$ — символы Кристоффеля, соответствующие метрическим тензорам $\tilde{g}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$, следовательно, $\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{g}_{\mu\nu} = 0$, $\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0$, где $\tilde{\nabla}_\sigma$, ∇_σ — символы соответствующих ковариантных производных; тогда связь между символами Кристоффеля запишется:

$$\tilde{\Gamma}^{\tau}_{\mu\nu} = \Gamma^{\tau}_{\mu\nu} + S^{\tau}_{\mu\nu}. \tag{35}$$

Здесь $S^{\tau}_{\mu\nu}$ — тензор аффинной деформации связности, который в данном случае равен:

$$S^{\tau}_{\mu\nu} = \tilde{g}^{\tau\sigma} S_{\mu\nu,\sigma}; \qquad S_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2}\{\nabla_\mu \tilde{g}_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \tilde{g}_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma \tilde{g}_{\mu\nu}\}. \tag{36}$$

Подставляя в (36) значения $\tilde{g}_{\mu\nu}$ из (32), мы находим

$$S^{\tau}_{\nu\sigma} = \Phi^{\tau}_{\nu\sigma} + F^{\tau}_{\nu\sigma}, \tag{37}$$

где

$$\Phi^{\tau}_{\nu\sigma} = \varphi_{\nu}\delta^{\tau}_{\sigma} + \varphi_{\sigma}\delta^{\tau}_{\nu} - \varphi^{\tau}g_{\nu\sigma}; \qquad A_{\nu\sigma;\lambda} = \frac{1}{2}(\nabla_{\nu}a_{\sigma\lambda} +$$

$$+ \nabla_{\sigma}a_{\nu\lambda} - \nabla_{\lambda}a_{\nu\sigma}); \qquad F^{\tau}_{\nu\sigma} = (g^{\lambda\tau} + b^{\lambda\tau})(A_{\nu\sigma,\lambda} - a_{\nu\sigma}\varphi_{\lambda}) -$$

$$- \varphi_{\lambda}b^{\lambda\tau}g_{\nu\sigma}; \qquad \varphi_{\sigma} \equiv \partial\rho / \partial x^{\sigma}.$$

Первое слагаемое в (37) порождено только конформным преобразованием, второе — связано с деформацией метрики. Ковариантную производную поля $\tilde{u}^{\mu}$, аналогично (19), можно записать в виде

$$\tilde{\nabla}_{\sigma}\tilde{u}_{\nu} = \tilde{B}_{\sigma\nu} + \tilde{u}_{\sigma}\tilde{f}_{\nu}; \qquad \tilde{D}\tilde{u}_{\nu}/d\tilde{s} = \tilde{f}_{\nu}, \tag{38}$$

при этом для $\tilde{f}_{\nu}$ и $\tilde{B}_{\sigma\nu}$ с помощью (19) и (34)—(36) получим следующие выражения:

$$\tilde{f}_{\nu} = f_{\nu} - S^{\tau}_{\alpha\beta}u_{\tau}u^{\alpha}\varepsilon^{\beta}_{\nu}; \qquad \tilde{B}_{\sigma\nu} = e^{\varphi}\{B_{\sigma\nu} - S^{\tau}_{\alpha\beta}u_{\tau}\varepsilon^{\alpha}_{\sigma}\varepsilon^{\beta}_{\nu}\}. \tag{39}$$

Если подставить сюда значение $S^{\tau}_{\sigma\nu}$ из (37), то получим

$$\tilde{B}_{\sigma\nu} = e^{\varphi}\{B_{\sigma\nu} + \lambda(\varepsilon_{\sigma\nu} + a_{\sigma\nu}) - u^{\lambda}A_{\sigma\nu,\lambda}\}; \quad \lambda = \varphi_{\sigma}u^{\sigma}, \tag{40}$$

для ускорения $\tilde{f}_{\nu}$ также найдем

$$\tilde{f}_{\nu} = f_{\nu} - \varphi_{\beta}\varepsilon^{\beta}_{\nu} = f_{\nu} + \lambda u_{\nu} - \varphi_{\nu}. \tag{41}$$

Интересно отметить, что изменение ускорения обусловлено только конформной функцией $\varphi(x)$, точнее — проекцией ее градиента φ_{σ} на V_3. Это, очевидно, связано со специальным выбором тензора $a_{\mu\nu}$, который целиком лежит в локальном V_3.

Для того чтобы конгруэнция, задаваемая полем $\tilde{u}^{\mu}$, была геодезической, необходимо обращение в нуль вектора первой кривизны конгруэнции (т. е.— поля ускорений), $\tilde{f}_{\nu} = 0$. Это даст

$$f_{\nu} = \varphi_{\beta}\varepsilon^{\beta}_{\nu}; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\sigma}}u^{\sigma}u_{\nu} = f_{\nu}, \tag{42}$$

где f_{ν}, u_{ν} считаются известными функциями. Таким образом, конформная функция должна удовлетворять линейному неоднородному дифференциальному уравнению в частных производных. Если оно удовлетворяется, то независимо от выбора тензора $a_{\mu\nu}$, т. е. на довольно широком классе метрик $\widetilde{g}_{\mu\nu}$, конгруэнция, задаваемая $\widetilde{u}^{\mu}$, будет геодезической, при этом поле $\widetilde{u}^{\mu}$ будет неоднородным

$$\widetilde{\nabla}_{\sigma}\widetilde{u}_{\nu} = \widetilde{B}_{\sigma\nu}; \qquad \frac{\widetilde{D}\widetilde{u}^{\mu}}{d\widetilde{s}} = 0. \tag{43}$$

3. Тензор кривизны пространства-времени НСО

Воспользовавшись выражением (35) для связности, мы можем найти тензор кривизны по формуле

$$\widetilde{R}_{\mu\nu\sigma\cdot}^{\;\;\;\;\;\tau} = 2\partial_{[\mu}\widetilde{\Gamma}^{\tau}_{\nu]\sigma} + 2\widetilde{\Gamma}^{\tau}_{\lambda[\mu}\widetilde{\Gamma}^{\lambda}_{\nu]\sigma}; \qquad \partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}; \tag{44}$$

это приводит к следующему результату:

$$\widetilde{R}\qquad{}^{\tau} = 2\{\nabla_{[\mu}S^{\tau}_{\nu]\sigma} + S^{\tau}_{\lambda[\mu}S^{\lambda}_{\nu]\sigma}\}, \tag{45}$$

тензор кривизны, в нашем случае, выражается только через тензор аффинной деформации связности, так как кривизна исходного пространства (пространство-время ИСО), как мы видели, равна нулю. Метрика $g_{\mu\nu}$ и связность $\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}$ характеризуют плоское пространство-время ИСО, в котором введена произвольная координатная сетка. Подставляя в (45) значение $\widetilde{S}^{\tau}_{\mu\sigma}$ из (37), тензор кривизны представим в виде

$$\widetilde{R}^{\tau}_{\mu\nu\sigma\cdot} = K^{\tau}_{\mu\nu\sigma\cdot} + D^{\tau}_{\mu\nu\sigma\cdot}\,, \tag{46}$$

где

$$K^{\tau}_{\mu\nu\sigma\cdot} = 2\{\nabla_{[\mu}\Phi^{\tau}_{\nu]\sigma} + \Phi^{\tau}_{\lambda[\mu}\Phi^{\lambda}_{\nu]\sigma}\}, \tag{47}$$

$$D^{\tau}_{\mu\nu\sigma\cdot} = 2\{\nabla_{[\mu}F^{\tau}_{\nu]\sigma} + F^{\tau}_{\lambda[\mu}F^{\tau}_{\nu]\sigma} + F^{\tau}_{\lambda[\mu}\Phi^{\lambda}_{\nu]\sigma} + \Phi^{\tau}_{\lambda[\mu}F^{\lambda}_{\nu]\sigma}\}. \tag{48}$$

Разумеется, оба слагаемых в выражении (46) являются общековариантными тензорами. Первое слагаемое, $K^{\tau}_{\mu\nu\sigma\cdot}$, обусловлено только конформным преобразованием, второе, $D^{\tau}_{\mu\sigma\nu\cdot}$, связано с деформацией метрики. В дальнейшем нас будет интересовать главным образом кривизна, связанная с конформным преобразованием; запишем ее подробнее:

$$K^{\tau}_{\mu\nu\sigma\cdot} = 2\{S_{\sigma[\mu}\delta^{\tau}_{\nu]} + g_{\sigma[\mu}S^{\tau}_{\nu]}\}, \tag{49}$$

где

$$S_{\mu\sigma} = \varphi_{\mu\sigma} - \varphi_{\mu}\varphi_{\sigma} + \frac{1}{2}g_{\mu\sigma}\varphi_{\lambda}\varphi^{\lambda}; \qquad S^{\tau}_{\nu} = g^{\tau\lambda}S_{\nu\lambda}, \tag{50}$$

$$\varphi_{\mu} \equiv \nabla_{\mu}\varphi = \partial_{\mu}\varphi; \qquad \varphi_{\mu\nu} = \nabla_{\mu}\varphi_{\nu}.$$

4. Случай нормальной конгруэнции

Рассмотрим случай, когда конгруэнция мировых линий, описывающая историю движения базиса НСО, нормальная. Это значит, что она состоит из мировых линий, ортогональных к некоторому семейству гиперповерхностей, нормалями к которым являются векторы u_{μ}. Если конгруэнция нормальная, то в (21) $\omega_{\mu\nu} = 0$ — отсутствует вращение и, следовательно, тензор $B_{\mu\nu}$ симметричен. Пусть $\Phi(x) = C$ есть уравнение одной из гиперповерхностей, ортогональных конгруэнции. Придавая C различные значения, получим семейство этих гиперповерхностей. Тогда

$$u_{\mu} = q(x)\,\Phi_{\mu}; \qquad \Phi_{\mu} = \partial_{\mu}\Phi, \tag{51}$$

где $q(x)$ — нормирующаяся скалярная функция. Вычислим ускорение, воспользовавшись (51):

$$f_{\nu} = u_{\sigma}\nabla_{\sigma}u_{\nu} = (u^{\sigma}\nabla_{\sigma}q)\,\Phi_{\nu} + qu^{\sigma}\Phi_{\sigma\nu}; \qquad \Phi_{\sigma\nu} = \Phi_{\nu\sigma} = \nabla_{\sigma}\Phi_{\nu};$$

после несложных преобразований находим

$$f_{\nu} = \lambda' u_{\nu} - \partial_{\nu}(\ln q); \qquad \lambda' = u^{\sigma}\partial_{\sigma}(\ln q). \tag{52}$$

Подставляя это в выражение (41) для $\tilde{f}_{\nu}$, находим

$$\tilde{f}_{\nu} = (\lambda + \lambda')\,u_{\nu} - \partial_{\nu}(\ln q + \varphi); \tag{53}$$

но так как конгруэнция геодезическая, то $\tilde{f}_{\nu} = 0$, тогда

$$q(x) = e^{-\varphi(x)}. \tag{54}$$

Сопоставляя (34), (51), (54), находим

$$\tilde{u}_{\mu} = \partial_{\mu}\Phi. \tag{55}$$

Из равенства $\tilde{u}_\mu \tilde{u}^\mu = 1$ следует, что функция $\Phi(x)$ должна удовлетворять уравнению Гамильтона — Якоби

$$\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi = 1. \tag{56}$$

Из выражения (55) получаем

$$\tilde{u}_\mu dx^\mu = d\tilde{s} = \Phi_\mu dx^\mu = d\Phi.$$

Если смещение dx^μ лежит на гиперповерхности, то $\tilde{u}_\mu dx^\mu = 0$, и, следовательно, $d\tilde{s} = 0$, $\tilde{s} =$ const. Это значит, что гиперповерхности $\Phi(x) =$ const являются геометрическим местом одновременных событий (синхронной гиперповерхностью). Если dx^μ лежит в направлении $\tilde{u}_\mu$, то получим

$$\Delta\tilde{s} = \int\limits_{C_1}^{C_2} \Phi_\mu dx^\mu = C_2 - C_1, \tag{57}$$

т. е. отрезки времени, вырезаемые из конгруэнции мировых двумя соседними гиперповерхностями, везде одинаковы (геодезически параллельные гиперповерхности). Выясним теперь, какая информация содержится в тензоре кривизны пространства-времени НСО. Рассмотрим при этом частный случай, когда имеется только конформное преобразование, т. е. тензоры деформации метрики равны нулю: $a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} = 0$. Согласно (41), (42), это не влияет на конформную функцию. Тогда мы имеем

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\varphi} g_{\mu\nu}; \qquad \tilde{g}^{\mu\nu} = e^{-2\varphi} g^{\mu\nu}; \qquad F^{\tau}_{\nu\sigma} = 0;$$

$$\tilde{B}_{\sigma\nu} = e^{\varphi}\{B_{\sigma\nu} + \lambda\varepsilon_{\sigma\nu}\}, \tag{58}$$

и тензор кривизны, согласно (49), (50), определяется только конформной частью. Решение уравнений (42) можно представить в виде

$$\varphi = \psi(x) + \tilde{\varphi}(\Phi); \qquad \Phi = \Phi(x). \tag{59}$$

Здесь первое слагаемое — частное решение системы с правой частью, второе — решение однородной системы, оно зависит от координат не непосредственно, а через функцию $\Phi(x)$, описывающую семейство ортогональных гиперповерхностей (51), при этом $\tilde{\varphi}(\Phi)$ есть произвольная функция своего аргумента. Согласно (42), мы получим

$$\varphi_\nu = f_\nu + \lambda u_\nu; \qquad \varphi_{\mu\nu} = \varphi_{\nu\mu} = \nabla_\mu \varphi_\nu;$$
$$\varphi_{\mu\nu} = \nabla_\mu f_\nu + \lambda_\mu u_\nu + \lambda B_{\mu\nu} + \lambda u_\mu f_\nu; \qquad \lambda_\mu \equiv \partial_\mu \lambda;$$
$$\nabla_{[\mu} f_{\nu]} + \lambda_{[\mu} u_{\nu]} + \lambda u_{[\mu} f_{\nu]} = 0. \tag{60}$$

Используя эти результаты, находим $S_{\mu\sigma}$ согласно (50):

$$S_{\mu\sigma} = \nabla_\sigma f_\mu - f_\mu f_\sigma - \lambda f_\sigma u_\mu + B_{\mu\sigma} + \lambda_\sigma u_\mu -$$
$$- \lambda^2 u_\mu u_\sigma + \frac{1}{2} g_{\mu\sigma}(f^2 + \lambda^2); \tag{61}$$

симметрия выражения обеспечивается последним из соотношений (60). Подставляя это в (49), получим довольно громоздкое выражение для тензора кривизны, которое мы не приводим, но уже из (61) ясно видно, какую информацию он содержит. Прежде всего — он зависит от градиентов сил (или градиентов ускорений), от самих сил f_μ, зависит от тензора $B_{\mu\sigma}$, который описывает распределение векторов u^μ вдоль гиперповерхности, наконец, зависит от поля u^μ довольно сложным образом [1], при этом только f_μ дает нам непосредственную информацию о силовом поле. В случае гравитации тензор кривизны будет содержать также весьма похожую информацию, поэтому принимать $R^{\tau}_{\mu\nu\sigma}$ в ОТО в качестве компонент гравитационного поля, как иногда пытаются делать, не представляется возможным.

5. Равноускоренная система отсчета

В качестве простейшего примера приложения развитого выше аппарата рассмотрим описание равноускоренной НСО. Пусть базисом НСО будут пробные частицы, движущиеся в направлении оси X' относительно ИСО, в которой введена галилеева система координат X^μ, так что $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\{1, -1, -1, -1\}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, и создано однородное электростатическое поле, направленное также по оси X', ($E_1 = E$; $E_2 = E_3 = 0$). Предположим, что частицы имеют заряд e и массу m_0. Тогда поле 4-вектора скорости u^μ будет иметь составляющие u' (x^0, x'), u^0 (x^0, x'), $u^2 = u^3 = 0$.

[1] В общем случае, когда присутствуют тензоры деформации метрики $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$, тензор кривизны содержит также информацию о свойствах ортогональных к u^μ гиперповерхностей (т. е. информацию о свойствах V_3).

Уравнения движения и конгруэнция мировых линий (гипербол) базисных тел запишутся так:

$$\frac{du^0}{ds} = f^0 = ku', \qquad u' = -u_1 = kx^0 = \operatorname{sh} ks; \quad k = \frac{eE}{m_0c^2};$$

$$\frac{du'}{ds} = f' = ku^0, \qquad u^0 = u_0 = k(x' - \xi') = \operatorname{ch} ks. \tag{62}$$

Легко убедиться в том, что конгруэнция будет нормальной. Для отыскания метрики $\tilde{g}_{\mu\nu}$ равноускоренной НСО следует найти решение системы уравнений (42), которая в данном случае сводится к одному уравнению

$$x^0 \frac{\partial\varphi}{\partial x^0} + (x' - \xi')\frac{\partial\varphi}{\partial x'} = -1. \tag{63}$$

Его решение запишется [1]:

$$e^\varphi = \frac{1}{kx^0}\left(\frac{x' - \xi'}{x^0}\right)^A, \tag{64}$$

где A — произвольная постоянная. Рассмотрим, ради упрощения, только конформное преобразование ($a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} = 0$), тогда, согласно (32), находим

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\varphi} g_{\mu\nu} = \frac{1}{(kx^0)^2}\left(\frac{x' - \xi'}{x^0}\right)^{2A} g_{\mu\nu}. \tag{65}$$

Для того чтобы $\tilde{g}_{\mu\nu}$ переходило в $g_{\mu\nu}$ при отсутствии поля ($E = k = 0$), постоянная A должна быть равной (-1), ибо при $k = 0$ из (62) следует $kx^0 = 0$; $k(x' - \xi') = 1$. Тогда

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2(x' - \xi')^2} g_{\mu\nu}; \qquad g_{\mu\nu} = \operatorname{diag}\{1, -1, -1, -1\}. \tag{66}$$

Вычисляя тензор кривизны, согласно (49), находим

$$\tilde{R}_{\mu\nu\sigma\tau} = -k^2(\tilde{g}_{\mu\sigma}\tilde{g}_{\nu\tau} - \tilde{g}_{\nu\sigma}\tilde{g}_{\mu\tau}); \tag{67}$$

свертывая это с $\tilde{g}^{\nu\tau}$, находим тензор Риччи:

$$\tilde{R}_{\mu\sigma} = -3k^2\tilde{g}_{\mu\sigma}; \tag{68}$$

[1] Мы не рассматриваем сейчас решение однородного уравнения.

еще раз свертывая с $\tilde{g}^{\mu\sigma}$, находим скалярную кривизну пространства:

$$\tilde{R} = -12k^2 = -\frac{12e^2E^2}{m_0^2c^4}. \tag{69}$$

Таким образом, пространство, в котором будет проводить свои наблюдения наблюдатель, находящийся в равноускоренной НСО, оказывается частным случаем пространства постоянной отрицательной кривизны. При этом кривизна определяется квадратом напряженности электростатического поля. Из геометрии же известно, что пространства постоянной кривизны — конформно плоские, т. е. могут быть обращены в плоское только конформным преобразованием.

Заключение

Подведем теперь коротко итоги. Одним из самых существенных результатов, который можно усмотреть, анализируя метод конгруэнций мировых линий, состоит в том, что он с неизбежностью приводит к геометрическому отображению движения базиса системы отсчета в виде поля четырехскоростей u^μ. Если это поле однородно, мы имеем ИСО, в противном случае мы имеем базис НСО. Но если заданы поля, отображающие базисы систем отсчета, то так же однозначно определяется и операция, описывающая связь двух различных полей u^μ; этой операцией является аффинор. Именно он содержит всю физическую информацию: о силовом поле, о распределении скоростей тел базиса и т. д. Что касается физического смысла координатных и тетрадных преобразований, то надо иметь в виду следующее: только в том случае, когда тетрады и соответствующие им системы координат «жестко» связаны с полями u^μ так, что компоненты аффинора, коэффициенты локального вращения тетрад и коэффициенты поворота галилеевых систем координат совпадают, только в этом случае тетрадные и координатные преобразования получают хорошо известный физический смысл. В противном случае эти преобразования описывают только изменение А- и В-градуировки системы отсчета и не имеют никакого отношения к описанию базиса системы отсчета. Наиболее сложная ситуация в настоящее время сложилась в связи с отсутствием однозначного аналитического определения НСО. Если в определении базиса существует некоторое единство, его определяют, почти всегда, в виде стандартных тел и часов, движущихся в силовом поле и заполняющих пространство наподобие некоторой среды, то при описании свойств НСО, и особенно при описании перехода от одной НСО к другой, о базисе, в сущности, забывают. НСО пытаются представить либо в виде специальной координатной сетки, рассматривая преобразования группы (A) как переход от одной НСО к другой, либо пытаются отобразить ее в виде поля тетрад, описывая переход между системами отсчета преобразованиями группы (B). Налагают ряд дополнительных условий на координатные сетки и тетрады, якобы конкретизирующие систему отсчета, забывая, на наш взгляд, самое основное, чем отличается НСО от ИСО, т. е. наличие общековариантного поля ускорений базиса НСО относительно ИСО.

Действительно, самое существенное при сравнении результатов наблюдений двух наблюдателей, один из которых находится в ИСО, другой в НСО, состоит в том, что для первого поле ускорений базиса НСО отлично от нуля, $f^\mu \neq 0$, в то время как для второго оно равно нулю, $\tilde{f}^\mu = 0$. Следовательно, переход от ИСО к НСО связан с обращением в нуль общековариантного поля ускорений. Но если это так (а что это так, может подтвердить каждый школьник — ускорение наблюдателя, движущегося вместе с базисным телом, относительно этого тела равно нулю), то переход от ИСО к НСО, как мы видели, связан с изменением геометрических свойств пространства-времени — с появлением кривизны. Таким образом, «исчезновение» объективно существующего силового поля (поля ускорений) компенсируется также объективно существующим полем кривизны. Иначе говоря, силовые поля, в зависимости от условий, проявляются либо в виде поля ускорений, либо в виде поля кривизны!

Переход от ИСО к НСО несколько напоминает процедуру моделирования, развиваемую в работах [6], однако в нашем случае задача стоит совсем иная. Например, мы не можем требовать, для этого нет никаких оснований, чтобы наблюдаемые эффекты были одинаковы для наблюдателей, находящихся в различных НСО.

Мы не затронули в обзоре еще целый ряд интересных вопросов, связанных с однозначностью выбора НСО, соответствующей заданному силовому полю. Не рассмотрен обратный переход от НСО к ИСО — насколько он однозначен. Мы не подвергли такому исследованию точные решения уравнений Эйнштейна, в частности, важнейшего из них — поля Шварцшильда. Наконец, не рассмотрен целый класс так называемых квазиинерциальных или обобщенных ИСО, рассмотренных в работах [3,7], к этому мы вернемся в ближайшем обзоре.

Литература

1. *О. С. Иваницкая.* Обобщенные преобразования Лоренца и их применение. Минск, «Наука и техника», 1969.
2. *Н. В. Мицкевич.* Физические поля в общей теории относительности. «Наука», 1969.
3. *В. И. Родичев.* Эйнштейновский сб. «Наука», 1968, стр. 115.
4. *А. Эйнштейн.* УФН, 1956, 9, вып. 1. Май, 95.
5. *П. К. Рашевский.* Риманова геометрия и тензорный анализ. «Наука», 1967.
6. *А. З. Петров.* Сб. «Гравитация и теория относительности», вып. 4—5. 1968 и вып. 7, 1970. Изд. Казан. ун-та.
7. *Х. П. Керес.* Современные проблемы гравитации. Сб. трудов II советской гравитационной конференции 1965 г. Изд. Тбилисского ун-та, 1967.

Х. Мёллер

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ГИББСА И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ [1]

1. Введение и общий обзор

В весьма интересной работе Отта [1], написанной в 1963 г., было показано, что старая релятивистская трактовка термодинамических процессов, принадлежащая Планку и другим авторам [2], содержала в себе некоторую ошибку, которая в конечном счете приводила к неправильной формуле преобразования для количества тепловой энергии, передаваемой в тех или иных процессах. В дорелятивистской термодинамике первый закон термодинамики выражал закон сохранения энергии в том случае, когда в рассматриваемом процессе было необходимо учитывать тепловую энергию. В теории относительности этот закон приходится дополнять аналогичным законом сохранения импульса. Таким образом, в произвольной инерциальной системе S имеется четыре уравнения, отражающие законы сохранения [2]

$$\Delta G_i = \Delta I_i + \Delta Q_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4, \tag{1.1}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Delta G_i &= \{\Delta \mathbf{G}, -\Delta H/c\}, \\ \Delta I_i &= \{\Delta \mathbf{I}, -\Delta A/c\}, \\ \Delta Q_i &= \{\Delta \mathbf{Q}, -\Delta Q/c\}. \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

В этих формулах через $\Delta \mathbf{G}$ и ΔH обозначены изменения импульса $\mathbf{G}$ и энергии H термодинамического тела в процессе, переводящем тела из одного равновесного состоя-

---

[1] C. M ø l l e r. Gibbs'Statistical Mechanics in the Theory of Relativity. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 36, N 16, 1968.

[2] Латинские индексы пробегают значения от 1 до 4, греческие — от 1 до 3. Метрический тензор в пространстве Минковского имеет сигнатуру $+2$; всюду используется обычное правило суммирования.

ния в другое. $\Delta \boldsymbol{I}$ представляет собой механический импульс, т. е. интеграл по времени от механических сил, действующих на тело, тогда как ΔA — это работа, совершаемая этими силами во время процесса. Следовательно, ΔQ — это тепловая энергия, переданная телу во время процесса (это определение!), а $\Delta \boldsymbol{Q}$ — соответствующий импульс, передаваемый вместе с передачей тепла.

Отт в своей работе [1] выяснил, что ошибка прежнего рассмотрения была связана с неверным выражением для механической работы, производимой внешними силами. Однако его аргументация и выводы были приняты далеко не всеми, и вслед за его работой появилась целая серия противоречивых работ по этому поводу [3]. В связи с этим автор настоящей статьи недавно рассмотрел [4] подробно простой случай термодинамических процессов, происходящих с жидкостью, заключенной в контейнер переменного объема. Если допустить, что жидкость не оказывает сопротивления сдвигам, внешние силы, действующие на жидкость, представляют собой просто нормальное давление со стороны стенок контейнера. Так как давление является релятивистским скаляром, в этом случае нетрудно сразу выписать формулы преобразования для величин ΔG_i и ΔI_i. Тогда закон преобразования величин ΔQ_i уже следует из (1.2). Основные результаты, полученные в [4], сводятся к следующему. Вообще говоря, ни ΔG_i, ни ΔI_i при преобразованиях Лоренца не преобразуются как компоненты 4-вектора. Тем не менее разности $\Delta G_i - \Delta I_i$, т. е. ΔQ_i, *образуют ковариантные компоненты 4-вектора — вектора 4-импульса тепла, переданного системе.* Этот результат, который в [4] был доказан для частного случая жидкости, оказался справедливым для любого упругого тела и для любого термодинамического процесса, переводящего это упругое тело из одного равновесного состояния в другое. Доказательство было дано Бревиком [5] и Седерхольмом [6].

В работе [4] было показано также, что 4-импульс переданного тепла в бесконечно малом обратимом процессе пропорционален 4-скорости тела

$$V_i = \{\gamma \boldsymbol{v}, -\gamma c\}, \qquad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}, \tag{1.3}$$

так что

$$dQ_i^{\text{обр}} = \frac{dQ_{\text{обр}}^0}{c^2} V_i, \tag{1.4}$$

где через $dQ^0_{\text{обр}}$ обозначена переданная тепловая энергия, измеренная в той системе S^0, где тело покоится. Четвертая компонента (1.4) дает

$$dQ^{\text{обр}} = \frac{dQ^0_{\text{обр}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{1.5}$$

Что касается второго закона термодинамики, то общепризнанно, что энтропия системы S является релятивистским инвариантом, т. е.

$$S = S^0, \tag{1.6}$$

и в системе, где тело покоится, мы имеем

$$dS^0 = \frac{dQ^0_{\text{обр}}}{T^0}, \tag{1.7}$$

где T^0 — собственная температура, измеренная в системе покоя. Если мы хотим, чтобы аналогичное соотношение

$$dS = \frac{dQ_{\text{обр}}}{T} \tag{1.8}$$

было справедливо и во всех остальных инерциальных системах, можно легко выяснить из (1.5) — (1.8), что определенная соответствующим образом температура T связана с собственной температурой T^0 формулой Отта

$$T = \frac{T^0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{1.9}$$

Таким образом, температура T отнюдь не является инвариантом, а скорее четвертой компонентой временноподобного вектора

$$T_i = \frac{T^0}{c} V_i, \tag{1.10}$$

который был введен Арцели [7] и назван «температурным 4-вектором»

$$T = T^4 = -T_4. \tag{1.11}$$

Очевидно, модулем этого вектора будет инвариантная собственная температура T^0, поскольку

$$\sqrt{-T_i T^i} = T^0. \tag{1.12}$$

Следовательно, вместо того чтобы использовать одну величину T, определенную, согласно (1.9), для характеристики термодинамического состояния (наряду с «экстенсивными» величинами типа объема и т. д.), представляется более подходящим в произвольной инерциальной системе ввести четыре компоненты температурного 4-вектора T_i для этой же самой цели. Только в собственной системе S^0, где пространственные компоненты $T_i^0 = 0$, остается всего лишь одна величина $T_4^0 = - T^0$, как это имеет место в классической термодинамике. Эта точка зрения была недавно развита в работе [8], в которой была также приведена общая релятивистская формулировка, из которой весьма просто вытекает условие Толмена для теплового равновесия большого тела под действием своего собственного поля тяготения.

Однако в случае *необратимого процесса* формулировка второго закона в этой схеме приводит к ненужным усложнениям. В собственной системе S^0 для необратимого процесса мы имеем

$$dS^0 > \frac{dQ^0}{T^0}, \tag{1.13}$$

но в произвольной инерциальной системе S (1.13) вовсе *не эквивалентно*

$$dS > \frac{dQ}{T}, \tag{1.14}$$

соотношению, которое просто неправильно. Это обстоятельство связано с тем, что для необратимых процессов 4-вектор dQ_i, вообще говоря, уже не пропорционален V_i. Однако можно получить очень простую общую формулировку второго закона, если вместо температурного 4-вектора T_i ввести взаимный температурный 4-вектор ϑ^i, определяемый как

$$\vartheta^i = \vartheta^0 V^i, \qquad \vartheta^0 \equiv (T^0)^{-1}, \tag{1.15}$$

модуль которого равен

$$\vartheta \equiv \sqrt{-\vartheta_i \vartheta^i / c} = \vartheta^0. \tag{1.16}$$

Тогда в произвольной инерциальной системе S второй закон примет вид

$$dS \geqslant -\vartheta^i \, dQ_i, \tag{1.17}$$

где знак равенства относится только к обратимым процессам. В последнем случае, когда dQ_i может быть записано в виде (1.4), выражение (1.17) тождественно с (1.7) или с (1.8); для необратимых же процессов мы получим

$$-\vartheta^i\,dQ_i = -\vartheta^{0i}\,dQ_i^0 = -\frac{c}{T^0}\,dQ_4^0 = \frac{dQ^0}{T^0},$$

так что (1.17) оказывается эквивалентным (1.13). В форме (1.17) второй закон может быть непосредственно использован в общей теории относительности, и все результаты, приведенные в [8], в частности условие равновесия Толмена, получаются весьма просто.

В работах [4, 8] рассматривались чисто термодинамические вопросы, однако совершенно ясно, что результаты этих работ должны вытекать также из релятивистского обобщения статистической механики Гиббса. В методе Гиббса термодинамические свойства макроскопической системы в состоянии теплового равновесия описываются как средние значения в каноническом ансамбле. *Обратимый процесс* представляется как последовательность канонических ансамблей с изменяющимися значениями параметров, характеризующих ансамбль. На этом пути можно вывести все ранее упомянутые термодинамические свойства систем, в частности законы преобразования ΔG_i, ΔT_i и ΔQ_i из принципов статистической механики. Это и составляет содержание предлагаемой работы.

Имея в виду общий характер рассматриваемых вопросов, достаточно рассмотреть самую простую модель типа идеального газа, состоящего из одинаковых частиц, заключенных в контейнер. Поскольку в этом случае частицы не взаимодействуют между собой, они движутся независимо друг от друга в поле силы, создаваемой стенками контейнера и, может быть, каких-то других внешних источников. Поэтому в следующем разделе мы начнем с изучения системы, состоящей всего-навсего из одной частицы; этот случай легко обобщается на случай n тождественных частиц. Мы покажем, что уравнения движения можно записать в любой инерциальной системе в гамильтоновской форме. Однако, вообще говоря, гамильтониан уже не будет интегралом движения. В разделе 3 описываются свойства релятивистского фазового пространства, такие, как теорема Лиувилля для произвольной лоренцовской системы и релятивистская инвариантность объема в фазовом пространстве. В разделе 4 рассматриваются ансамбли механических систем в фазовом пространстве произвольной лоренцовской системы. В частности, разбирается вопрос о релятивистской инвариантности плотности вероятности и общего ее вида для *канонического* ансамбля.

В разделе 5 содержится вывод законов преобразования для средних значений канонического 4-импульса, силы, мощности и «экспоненциальной вероятности» в каноническом ансамбле. В разделе 6 дается статистическое описание обратимых процессов и расчет механического импульса и производимой работы; здесь очень отчетливо проявляются типичные релятивистские эффекты. Мы получаем также статистическое выражение для 4-импульса тепла, передаваемого в обратимом процессе. Наконец, в заключительном 7 разделе содержится большое число теорем, с помощью которых можно подсчитывать средние значения существенных физических величин простым дифференцированием функций, тесно связанных со свободной энергией, вводимой в термодинамике.

2. Лагранжева и гамильтонова формы уравнений движения в поле статических сил для заданной инерциальной системы отсчета S^0

Движение частицы с постоянной массой покоя m, на которую действует обычная сила $\mathfrak{F}$ в произвольной инерциальной системе S, определяется в общем случае уравнениями Минковского

$$\frac{dp_i}{d\tau} = F_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4, \tag{2.1}$$

где

$$d\tau = dt\,\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{2.2}$$

определяет собственное время,

$$p_i = \{\boldsymbol{p}, -E/c\} = \left\{\frac{m\boldsymbol{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, -\sqrt{m^2c^2 + p^2}\right\} \tag{2.3}$$

определяет 4-импульс частицы,

$$F_i = \left\{\frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \frac{(\mathfrak{F}\boldsymbol{u})/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right\}, \tag{2.4}$$

наконец, 4-сила, действующая на точку.

Сейчас мы займемся частным случаем, когда сила $\overline{\mathfrak{F}}^0$ постоянна в некоторой инерциальной системе S^0 и может быть выведена из потенциала $U^0(\boldsymbol{x}^0)$, не зависящего от времени t^0, так что

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\mathfrak{F}}^0 = -\operatorname{grad} U^0, \\ &F_i^0 = \left\{-\frac{\partial U^0}{\partial x^0}, \left(\frac{\partial U^0}{\partial x^0}u^0/c\right)\right\} \Big/ \sqrt{1-u^{0^2}/c^2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

$U^0 = U^0(\boldsymbol{x}^0, a)$ может зависеть от многих постоянных параметров (a_l), которые определяют внешний источник сил. Для частицы, заключенной в контейнер объема V^0, на которую не действуют никакие другие внешние силы, потенциальная энергия представляет собой просто константу, которую можно положить равной нулю внутри объема V^0 и равной бесконечности — снаружи. В присутствии внешних сил, таких, как постоянное электрическое или магнитное поле, $U^0 \neq 0$ и будет изменяться внутри контейнера. Параметры (a) определяют интенсивность внешних полей, а также форму и объем контейнера. Для постоянных a и изменяющегося $\boldsymbol{x}^0$

$$-dU^0 = -\frac{\partial U^0(\boldsymbol{x}^0, a)}{\partial \boldsymbol{x}^0} d\boldsymbol{x}^0$$

равно работе, совершаемой над частицей при ее перемещении на $d\boldsymbol{x}^0$. Для заданных значений $\boldsymbol{x}^0$ (и $\boldsymbol{p}^0$) увеличение потенциальной энергии при изменении внешних параметров da_l равно

$$d_{(a)}U^0 = \sum_l \frac{\partial U^0(\boldsymbol{x}^0, a)}{\partial a_l} da_l. \tag{2.6}$$

Это увеличение энергии может быть интерпретировано как работа, совершаемая над системой при изменении конфигурации окружающих ее систем.

Для заданных (a) три уравнения (2.1), где $i = 1, 2, 3$, в системе S^0 представляют собой уравнения Эйлера для вариационного принципа

$$\left.\begin{aligned} &\delta \int L^0\, dt^0 = 0, \\ &L^0 = -mc^2\sqrt{1-u^{0^2}/c^2} - U^0(\boldsymbol{x}^0), \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

т. е.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{x}^0)}{\partial \boldsymbol{u}^0}\right) = \frac{\partial L(\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{x}^0)}{\partial \boldsymbol{x}^0}. \tag{2.8}$$

Канонический (обобщенный) импульс $\boldsymbol{P}^0$, соответствующий лагранжиану (2.7), определяется в виде

$$\boldsymbol{P}^0 = \frac{\partial L^0(\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{x}^0)}{\partial \boldsymbol{u}^0} = \boldsymbol{p}^0, \tag{2.9}$$

т. е. в системе S^0 обобщенный импульс совпадает с обычным импульсом $\boldsymbol{p}^0$. Соответствующий гамильтониан

$$\mathfrak{H}^0 = \boldsymbol{P}^0\boldsymbol{u}^0 - L^0 = E^0 + U(\boldsymbol{x}^0) = = c\sqrt{m^2c^2 + \boldsymbol{p}^{0^2}} + U^0(\boldsymbol{x}^0) \tag{2.10}$$

равен полной энергии частицы во внешнем поле. Уравнения Гамильтона

$$\frac{d\boldsymbol{p}^0}{dt^0} = -\frac{\partial \mathfrak{H}^0(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{x}^0)}{\partial \boldsymbol{x}^0}, \qquad \frac{d\boldsymbol{x}^0}{dt^0} = \frac{\partial \mathfrak{H}^0(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{x}^0)}{\partial \boldsymbol{p}^0} \tag{2.11}$$

эквивалентны уравнениям (2.8) или (2.1) при $i = 1, 2, 3$. Сам гамильтониан $\mathfrak{H}^0$ является интегралом движения

$$\frac{d\mathfrak{H}^0}{dt^0} = -\frac{dL^0(\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{x}^0)}{\partial t^0} = 0; \tag{2.12}$$

соотношение (2.12) эквивалентно четвертому уравнению (2.1) в системе S^0. Соотношение (2.6) можно записать еще и так:

$$d_{(a)}U^0 = \sum_l \frac{\partial \mathfrak{H}^0(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{x}^0, a)}{\partial a_l} da_l = d_{(a)}\mathfrak{H}^0. \tag{2.6'}$$

Теперь мы перейдем к рассмотрению движения частицы по отношению к произвольной инерциальной системе S. Пусть скорость S^0 относительно системы S будет равна $\boldsymbol{v}$. Тогда соответствующая 4-скорость V_i определяется согласно (1.3), и ради простоты мы предположим, что связь между координатами события в системах S и S^0 определяется преобразованием Лоренца без поворота пространственных осей. Если рассматривать $U^0(\boldsymbol{x}^0)$ как инвариантный скаляр, ее также можно считать функцией координат $x^i = \{\boldsymbol{x}, ct\}$ в системе S.

Функция $U(x, a)$ обозначает тогда функцию, получаемую из функции $U^0(\boldsymbol{x}^0, a)$ заменой $\boldsymbol{x}^0$ с помощью преобразования Лоренца, связывающего системы S и S^0, т. е.

$$U(x, a) = U(\boldsymbol{x}, t, a) = U^0(\boldsymbol{x}^0, a). \tag{2.13}$$

В рассматриваемом случае 4-сила (2.4), как легко видеть, имеет форму «лоренцовой силы»:

$$F_i = F_{ik} U^k / c^2, \tag{2.14}$$

где

$$U^i = \left\{ \frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \frac{c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right\} \tag{2.15}$$

представляет собой 4-скорость частицы, а антисимметричный тензор F_{ik} определяется как

$$F_{ik} = \frac{\partial U(x)}{\partial x^i} V_k - \frac{\partial U(x)}{\partial x^k} V_i. \tag{2.16}$$

Поскольку $F_{ik} U^k$ — это 4-вектор, справедливость выражения (2.14) для F_i следует из того, что оно переходит в выражение (2.5) для F_i^0 в системе S^0, для которой $V_i^0 = -c\delta_{i4}$. Если выражение (2.16) подставить в (2.14), мы получим

$$F_i = \frac{V_k U^k}{c^2} \frac{\partial U}{\partial x^i} - \frac{V_i}{c^2} \frac{dU}{d\tau}. \tag{2.17}$$

Таким образом, если определить новый 4-вектор P_i как

$$P_i = p_i + \frac{V_i}{c^2} U(x, a), \tag{2.18}$$

уравнения (2.1) можно записать в виде

$$\frac{dP_i}{d\tau} = K_i, \tag{2.19}$$

где

$$K_i = \frac{V_k U^k}{c^2} \frac{\partial U(x)}{\partial x^i}. \tag{2.20}$$

Поскольку $V_0^i = c\delta_4^i$, т. е.

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x^i} V^i = \frac{\partial U^0(x^0)}{\partial x^{0\varkappa}} V^{0\varkappa} = 0, \tag{2.21}$$

4-вектор K_i ортогонален вектору V^i:

$$K_i V^i = 0. \tag{2.22}$$

Если мы примем, что

$$P_i = \{\boldsymbol{P}, -\mathfrak{H}/c\}, \tag{2.23}$$

то получим из (2.3), (2.18) и (1.3):

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= \boldsymbol{p} + \gamma \boldsymbol{v} U(x)/c^2, \\ \mathfrak{H} &= E + \gamma U(x). \end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

И тогда из (1.3) и (2.15), (2.20), (2.22)

$$K_i = \left\{ \frac{\overline{\mathfrak{K}}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, -\frac{(\overline{\mathfrak{K}}\boldsymbol{v})/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right\}, \tag{2.25}$$

причем

$$\overline{\mathfrak{K}} = -\left(1 - (\boldsymbol{v}\boldsymbol{u})/c^2\right) \gamma \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}. \tag{2.26}$$

Для значений $i = 1, 2, 3$ уравнения движения (2.19) приобретают теперь вид

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \overline{\mathfrak{K}}. \tag{2.27}$$

Это просто уравнения Эйлера вариационного принципа

$$\delta \int L\, dt = 0, \tag{2.28}$$

причем лагранжиан имеет вид

$$L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, t) = -mc^2 \sqrt{1 - u^2/c^2} - (1 - (\boldsymbol{v}\boldsymbol{u})/c^2)\gamma U(\boldsymbol{x}, t). \tag{2.29}$$

Действительно, дифференцируя лагранжиан по $\boldsymbol{u}$, мы получим

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, t)}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{p} + \frac{\boldsymbol{v}}{c^2} \gamma U(\boldsymbol{x}, t) \equiv \boldsymbol{P},$$

принимая во внимание (2.24), а дифференцируя по $\boldsymbol{x}$:

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, t)}{\partial \boldsymbol{x}} = -(1 - (\boldsymbol{v}\boldsymbol{u})/c^2)\gamma \frac{\partial U(\boldsymbol{x}, t)}{\partial \boldsymbol{x}} \equiv \overline{\mathfrak{K}}, \tag{2.30}$$

принимая во внимание (2.26). Следовательно, $\boldsymbol{P}$ в (2.23) является обобщенным импульсом, а $\overline{\mathfrak{K}}$ можно назвать обобщенной (канонической) силой. Выпишем соответствующий гамильтониан

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{P}\boldsymbol{u} - L = \boldsymbol{p}\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v}\boldsymbol{u})\gamma U(x)/c^2 + mc^2\sqrt{1-u^2/c^2} + \\ &+ (1-(\boldsymbol{v}\boldsymbol{u})/c^2)\gamma U(x) = E + \gamma U(x, t) = \mathfrak{H}. \end{aligned}\right\} \tag{2.31}$$

Таким образом, величина $\mathfrak{H}$ в (2.24), которая вместе с обобщенным импульсом $\boldsymbol{P}$ образует обобщенный (канонический) вектор 4-импульса (2.23), равна полной энергии частицы во внешнем поле. Тогда $\gamma\, U\,(\boldsymbol{x},\, t)$ можно интерпретировать как потенциальную энергию. В противоположность $U^0(\boldsymbol{x}^0)$ и $\mathfrak{H}^0$ обе величины U и $\mathfrak{H}$ зависят от времени, а $\mathfrak{H}$ не является интегралом движения. Из (2.19), положив $i = 4$, мы получим, согласно (2.23), (2.25),

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{H}}{dt} &= \overline{\mathfrak{K}}\boldsymbol{v} = -(1-(\boldsymbol{v}\boldsymbol{u})/c^2)\,\gamma\left(\boldsymbol{v}\frac{\partial U(x, t)}{\partial \boldsymbol{x}}\right) = \\ &= -\frac{\partial L(\boldsymbol{u}, x, t)}{\partial t}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

где учтены (2.21), (2.26), (2.29). Уравнения (2.27), (2.32) могут быть сведены в одно четырехмерное уравнение

$$\frac{dP_i}{dt} = \frac{\partial L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x})}{\partial x^i} = -(1-(\boldsymbol{v}\boldsymbol{u})/c^2)\,\gamma\,\frac{\partial U(x)}{\partial x^i} \tag{2.33}$$

с учетом (2.30).

Если исключить скорость $\boldsymbol{u}$ в (2.31) с помощью (2.24), функция $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\,(\boldsymbol{P},\, \boldsymbol{x},\, t)$ будет зависеть уже только от $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{x}$, и уравнения движения можно будет переписать в гамильтоновской форме:

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = -\frac{\partial\mathfrak{H}(\boldsymbol{P}, x, t)}{\partial \boldsymbol{x}}, \qquad \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{H}(\boldsymbol{P}, x, t)}{\partial \boldsymbol{P}}. \tag{2.34}$$

В силу соотношения [9]

$$\frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{\sqrt{1-u^{0^2}/c^2}} = \gamma(1-(\boldsymbol{v}\boldsymbol{u})/c^2) = \frac{1}{\gamma(1+(\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}^0)/c^2)}, \tag{2.35}$$

вариационный принцип (2.7), (2.28) оказывается инвариантным. Действительно, согласно (2.29), (2.2), (2.7) мы имеем

$$L\,dt = \frac{L\,d\tau}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{L^0\,d\tau}{\sqrt{1-u^{0^2}/c^2}} = L^0\,dt^0.$$

Предыдущие рассуждения легко переносятся на газ, состоящий из n невзаимодействующих частиц массы m, находящихся под действием одних и тех же внешних сил. В этом случае лагранжиан L_g представляет собой просто сумму функций Лагранжа (2.29) для отдельной частицы, т. е.

$$L_g = \sum_{r=1}^{n} L^{(r)}(\boldsymbol{u}^{(r)}, \boldsymbol{x}^{(r)}, t), \tag{2.36}$$

$$L^{(r)} = -mc^2\sqrt{1 - u^{(r)2}/c^2} - (1 - (\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}^{(r)})/c^2)\,\gamma U(\boldsymbol{x}^{(r)}, t).$$

Соответствующий гамильтониан имеет вид

$$\mathfrak{H}_g = \sum_{r=1}^{n} \mathfrak{H}^{(r)}(\boldsymbol{P}^{(r)}, \boldsymbol{x}^{(r)}, t). \tag{2.37}$$

Индекс g указывает, что величина, снабженная этим индексом, относится ко всей системе в целом. Случай невзаимодействующих частиц оказался тривиальным обобщением задачи одного тела; в следующем разделе мы начнем со статистической механики отдельной частицы, а затем обобщим уже этот случай на систему n тел. Обозначим через P_i^g сумму обобщенных 4-импульсов всех частиц газа, т. е.

$$P_i^g = \sum_r P_i^{(r)}(\boldsymbol{p}^{(r)}, \boldsymbol{x}^{(r)}, t, a) = \sum_{r=1}^{n} p_i^{(r)} + \\ + \frac{V_i}{c^2}\sum_{r=1}^{n} U(\boldsymbol{x}^{(r)}, t, a). \tag{2.38}$$

Эта сумма зависит от внешних параметров (a), а также от координат и импульсов. Для фиксированных значений последних величин изменение величин a на da_l приводит к изменению величины P_i^g на

$$d_{(a)}P_i^g = \sum_l \frac{\partial P_i^g}{\partial a_l}\,da_l = \frac{V_i}{c^2}\sum_{r=1}^{n}\sum_l \frac{\partial U(\boldsymbol{x}^{(r)}, t, a)}{\partial a_l}\,da_l. \tag{2.39}$$

3. Структура релятивистского фазового пространства

В классической статистической механике вводят важное представление о «фазовом пространстве», которое для «системы», состоящей из одной частицы, представляет собой шестимерное пространство, каждая (фазовая) точка которого соответствует определенному механическому состоянию системы. Однако в релятивистской теории удобно вводить отдельное фазовое пространство $\Sigma\ (S)$ для каждой системы отсчета S. Любое механическое состояние изображается как точка в пространстве $\Sigma\ (S)$ с шестью координатами $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{x})$. Точка, изображающая состояние системы («изображающая точка»), движется в пространстве $\Sigma\ (S)$ согласно уравнениям Гамильтона (2.34), которые определяют кривую в пространстве (фазовую траекторию), которую описывает изображающая точка $(\boldsymbol{P}\ (t),\ \boldsymbol{x}\ (t))$ с течением времени t.

Благодаря гамильтоновской форме уравнений движения, сохраняющейся во всех инерциальных системах S, во всех системах $\Sigma\ (S)$ справедлива теорема Лиувилля, хотя в общем случае $\mathfrak{H}$ зависит от времени. Так что, если $\boldsymbol{\Omega}\ (t_0)$ — область в пространстве $\Sigma\ (S)$, занятая изображающими точками в момент времени t_0, а $\boldsymbol{\Omega}\ (t)$ — область, занятая теми же самыми изображающими точками в момент времени t, фазовые объемы этих областей должны быть одинаковыми:

$$V_{\Omega(t)} \equiv \iint\limits_{\Omega(t)} d\boldsymbol{P}\, d\boldsymbol{x} = \iint\limits_{\Omega(t_0)} d\boldsymbol{P}\, d\boldsymbol{x} \equiv V_{\Omega(t_0)}; \tag{3.1}$$

$$d\boldsymbol{P}\, d\boldsymbol{x} = dP_x\, dP_y\, dP_z\, dx\, dy\, dz.$$

В каждой $\Sigma\ (S)$ объем определяется в точности так же, как в евклидовском пространстве с декартовыми координатами.

В системе S^0, где $\mathfrak{H}^0$ не зависит от t^0, фазовые траектории представляют собой неподвижные кривые в пространстве $\Sigma\ (S^0)$. Но это совсем не так в системах, где направление фазовой траектории, проходящей через заданную точку, задается фазовой скоростью $\left(\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}, \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)$, которая, как это видно из (2.34), зависит от времени.

Вместо канонических переменных ($\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{x}$) можно использовать также и не канонические переменные

$$\xi_\mu \equiv (p_x, p_y, p_z, x, y, z) \tag{3.2}$$

в качестве «координат» фазовых точек. Из уравнений преобразования (2.24)

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}\gamma U(x)/c^2 \tag{3.3}$$

легко усмотреть, что соответствующий якобиан равен единице, т. е.

$$J = \frac{d(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{x})}{d(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})} = 1. \tag{3.4}$$

Следовательно, на основании теоремы Якоби, объем области $\boldsymbol{\Omega}$ можно записать также в виде

$$V_\Omega = \iint\limits_\Omega d\boldsymbol{p}\, d\boldsymbol{x}, \qquad d\boldsymbol{p}\, d\boldsymbol{x} = \sum_{\mu=1}^{6} d\xi_\mu. \tag{3.5}$$

В новых координатах теорема Лиувилля (3.1) запишется так:

$$V_{\Omega(t)} = \iint\limits_{\Omega(t)} d\boldsymbol{p}\, d\boldsymbol{x} = \iint\limits_{\Omega(t_0)} d\boldsymbol{p}\, d\boldsymbol{x} = V_{\Omega(t_0)}. \tag{3.6}$$

Из уравнений (3.1), (3.6) видно, что объем $V_{\Omega(t)}$, занятый фазовыми точками, лежащими внутри области $\Omega(t)$ в момент t, не зависит от времени t. Кроме того, этот объем является релятивистским инвариантом в следующем смысле. Рассмотрим все фазовые точки, расположенные в системе S^0 в момент времени t^0 в области $\Omega^0(t^0)$ фазового пространства $\Sigma(S^0)$. Те же самые фазовые точки движутся через фазовое пространство $\Sigma(S)$ другой системы S, согласно уравнениям движения (2.34). В момент времени t их одновременные положения перекроют область $\Omega(t)$. Тогда

$$V_{\Omega^0(t^0)} \equiv \iint\limits_{\Omega^0(t^0)} d\boldsymbol{p}^0\, d\boldsymbol{x}^0 = \iint\limits_{\Omega(t)} d\boldsymbol{p}\, d\boldsymbol{x} = V_{\Omega(t)} \tag{3.7}$$

независимо от выбора t^0 и t. Доказательство этой теоремы довольно сложно и для простоты мы рассмотрим лишь частный случай (сохраняющий общность полученного доказательства), когда Ω^0 и Ω — бесконечно малые области, а относительная скорость систем S и S^0, которую мы обозначаем через $\boldsymbol{v}$, имеет компоненты

$$\boldsymbol{v} = \{v, 0, 0\}. \tag{3.8}$$

Изображающая точка, которая в момент t проходит через точку фазового пространства $\xi_\mu = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$ в пространстве $\Sigma(S)$, в пространстве $\Sigma(S^0)$ пройдет через точку $\xi^0_\mu = (\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{x}^0)$ в момент времени t^0, определяемый из преобразования Лоренца:

$$\left.\begin{aligned} p^0_x &= \gamma\,[p_x - vE/c^2], & p^0_y &= p_y, & p^0_z &= p_z, \\ x^0 &= \gamma\,[x - vt], & y^0 &= y, & z^0 &= z, \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

$$t^0 = \gamma\,(t - vx/c^2). \tag{3.10}$$

Здесь мы использовали свойства 4-вектора $p_i = \{\boldsymbol{p}, -E/c\}$. Так как $E = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$, уравнения (3.9) описывают нелинейное преобразование

$$\xi^0_\mu = f_\mu(\xi_\nu, t), \tag{3.11}$$

которое определяет одно-однозначное соответствие точек в $\Sigma(S^0)$ с точками в $\Sigma(S)$. В силу соотношения

$$\frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{c^2\boldsymbol{p}}{E} = \boldsymbol{u}, \tag{3.12}$$

частные производные $\dfrac{\partial \xi^0_\mu}{\partial \xi_\nu} = \dfrac{\partial f_\mu(\xi, t)}{\partial \xi_\nu}$ могут быть заданы в виде матрицы

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial \xi_\nu} = \begin{pmatrix} \gamma\,(1 - vu_x/c^2) & -\gamma v u_y/c^2 & -\gamma v u_z/c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Рассмотрим теперь изображающие точки в фазовом пространстве $\Sigma(S)$, которые в момент времени t проходят через фазовые точки, лежащие внутри бесконечно малого параллелепипеда $\Omega(t)$, построенного на шести бесконечно малых векторах, направленных вдоль «координатных осей», т. е.

$$\left.\begin{array}{l} d^{(1)}\xi_\mu = (dp_x,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \\ d^{(2)}\xi_\mu = (0,\ dp_y,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d^{(6)}\xi_\mu = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ dz) \end{array}\right\} \tag{3.14}$$

или

$$\left.\begin{array}{l} d^{(\alpha)}\xi_\mu = \delta_\mu^\alpha\, d\xi_{\alpha)}, \qquad \alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \\ d\xi_\alpha = (dp_x, dp_y, dp_z, dx, dy, dz). \end{array}\right\} \tag{3.15}$$

В первой строке (3.15) никакого суммирования по α нет.

Объем этой области определяется детерминантом

$$dV_{\Omega(t)} = |\, d^{(\alpha)}\xi_\mu \,| = |\, \delta_\mu^\alpha\, d\xi_{\alpha)} \,| = \prod_{\alpha=1}^{6} d\xi_\alpha = d\boldsymbol{p}\, d\boldsymbol{x}. \tag{3.16}$$

Проектируя пространство $\Sigma(S)$ на $\Sigma(S^0)$ согласно (3.9) или (3.11), мы приводим область $\Omega(t)$ в соответствие с областью $\Omega^0(t^0,\ t^0 + dt^0)$ в $\Sigma(S^0)$, которая ограничена шестью бесконечно малыми «векторами»:

$$d^{(\alpha)}\xi_\mu^0 = \sum_\nu \frac{\partial f_\mu(\xi,\ t)}{\partial \xi_\nu} d^{(\alpha)}\xi_\nu = \frac{\partial f_\mu}{\partial \xi_\alpha} d\xi_{\alpha)} \tag{3.17}$$

в силу (3.15). Объем этой области дается детерминантом

$$dV_{\Omega^0(t^0,\ t^0 + dt^0)} = \left| \frac{\partial f_\mu}{\partial \xi_\alpha} d\xi_{\alpha)} \right| = J \prod_{\alpha=1}^{6} d\xi_\alpha = J\, dV_{\Omega(t)}, \tag{3.18}$$

где якобиан J представляет собой определитель матрицы (3.13), т. е.

$$J = \frac{d(\boldsymbol{p}^0,\ \boldsymbol{x}^0)}{d(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x})} = \gamma^2 (1 - v u_x / c^2). \tag{3.19}$$

На двумерной схеме (рис. 1) область $\Omega(t)$ пространства $\Sigma(S)$ изображается внутренней частью прямоуголь-

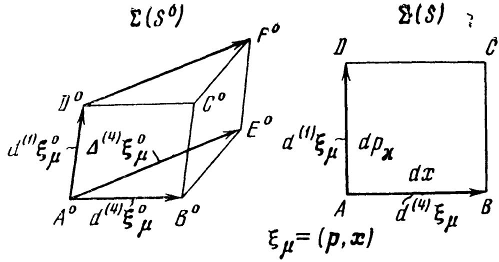

Рис. 1

ника $ABCD$ со сторонами dx и dp_x, векторы $d^{(1)}\xi_\mu$ и $d^{(4)}\xi_\mu$ представлены соответственно отрезками $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$. Соответствующие им векторы $d^{(1)}\xi^0_\mu$ и $d^{(4)}\xi^0_\mu$ в пространстве $\Sigma\ (S^0)$, определенные по (3.17), изображаются отрезками $\overrightarrow{A^0D^0}$ и $\overrightarrow{A^0B^0}$; область $\Omega^0\ (t^0,\ t^0 + dt^0)$ расположена внутри параллелограмма $A^0B^0C^0D^0$.

Согласно (3.18), (3.19), объем $dV_{\Omega^0(t^0, t^0+dt^0)}$ этой области совсем не равен объему $dV_{\Omega(t)}$ области $\Omega\ (t)$. При этом точки внутри $\Omega^0\ (t^0,\ t^0 + dt^0)$ не являются положениями изображающих точек в $\Omega\ (t)$ в пространстве $\Sigma\ (S^0)$ в тот же самый момент времени t^0, потому что время прохождения для точек по линиям, параллельным A^0B^0, в соответствии с (3.10), изменяется по линейному закону от t^0 до $t^0 + dt^0$, причем

$$dt^0 = -\frac{\gamma v}{c^2}\,dx \tag{3.20}$$

и к тому же отрицательно. За промежуток времени $|dt^0| = \frac{\gamma v}{c^2}\,dx$ точки на линии B^0C^0 перемещаются так, что вектор их смещения $\delta\xi^0_\mu$, если пренебречь малыми членами второго порядка, дается выражением

$$d\xi^0_\mu = \left(\frac{dp^0}{dt^0}\,|\,dt^0\,|,\ \frac{dx^0}{dt^0}\,|\,dt^0\,|\right) = \left(-\frac{\partial \mathfrak{H}^0}{\partial x^0}\,\frac{\gamma v\,dx}{c^2},\ \frac{\gamma v u^0}{c^2}\,dx\right). \tag{3.21}$$

На рисунке этот постоянный вектор изображен отрезком $\overrightarrow{B^0E^0}$ или $\overrightarrow{C^0F^0}$. Изображающие точки, которые в момент времени $t^0 + dt^0 = t^0 - \frac{\gamma}{c^2}\,dx$ были в B^0 и C^0, окажутся в момент времени t^0 в положениях E^0 и F^0 соответственно, а вся линия B^0C^0 перейдет в линию E^0F^0. Таким образом, область $\Omega^0(t^0)$, которая в момент времени t^0 заполнена изображающими точками, находящимися внутри $\Omega(t)$, на рисунке представлена параллелограммом $A^0E^0F^0D^0$, построенным на векторах $\overrightarrow{A^0D^0}$ и $\overrightarrow{A^0E^0}$, т. е. векторами $d^{(1)}\xi^0_\mu$ и $d^{(4)}\xi^0_\mu + \delta\xi^0_\mu = \Delta\xi^0_\mu$. Следовательно, в шестимерном фазовом пространстве область $\Omega^0(t^0)$ построена на шести векторах:

$$\Delta^{(\alpha)}\xi^0_\mu = \{d^{(1)}\xi^0_\mu,\ d^{(2)}\xi^0_\mu,\ d^3\xi^0_\mu,\ \Delta\xi^0_\mu,\ \ d^{(5)}\xi^0_\mu,\ d^{(6)}\xi^0_\mu)\}, \tag{3.22}$$

причем

$$\Delta^{(4)}\xi^{(0)}_\mu = \Delta\xi^0_\mu = d^{(4)}\xi^{(0)}_\mu + \delta\xi^0_\mu = \frac{\partial f_\mu}{\partial\xi_4}\,dx + \delta\xi^0_\mu =$$
$$= \left(-\frac{\partial\mathfrak{H}^0}{\partial x^0}\frac{\gamma v}{c^2},\ -\frac{\partial\mathfrak{H}^0}{\partial y^0}\frac{\gamma v}{c^2},\ -\frac{\partial\mathfrak{H}^0}{\partial z^0}\frac{\gamma v}{c^2}\right),$$
$$\gamma\left(1+\frac{vu^0_x}{c^2}\right),\left(\frac{\gamma vu^0_y}{c^2},\ \frac{\gamma vu^0_z}{c^2}\right)dx, \tag{3.23}$$

где приняты во внимание (3.17), (3.21), (3.13). Другие векторы $\Delta^{(\alpha)}\xi^0_\mu$ определяются согласно (3.17), (3.13).

Объем области, построенной на векторах (3.22), равен определителю

$$dV_{\Omega^0(t^0)} = |\,\Delta^{(\alpha)}\xi_\mu\,|,$$

величина которого может быть легко подсчитана:

$$dV_{\Omega^0(t^0)} = \gamma^2(1 - vu_x/c^2)(1 + vu^0_x/c^2)\,dp\,dx$$

или, в силу (2.35) и (3.8), (3.16)

$$dV_{\Omega^0(t^0)} = dp\,dx = dV_{\Omega(t)}. \tag{3.24}$$

Так как dV_Ω инвариантно по отношению к любым пространственным вращениям, очевидно, что (3.24) сохраняет свою силу для произвольной системы S (для любой v). Следовательно, для любых двух лоренцовских систем S и S' можно записать

$$dV_{\Omega(t)} = dV_{\Omega'(t')}. \tag{3.25}$$

Обобщение этих результатов на систему n невзаимодействующих частиц тривиально. Фазовые пространства

$\Sigma\ (S)$ теперь уже $6n$-мерные, а в качестве координат фазовых точек можно взять $6n$ переменных

$$\xi_\mu = (\boldsymbol{p}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{p}^{(n)}, \boldsymbol{x}^{(n)}). \tag{3.26}$$

Если объем области Ω в пространстве $\Sigma\ (S)$ определить как

$$V_\Omega = \int\limits_{\Omega}\ldots\int \prod_{\mu=1}^{6n} d\xi_\mu = \int\limits_{\Omega}\ldots\int d\boldsymbol{p}^{(1)}\, d\boldsymbol{x}^{(1)} \ldots d\boldsymbol{p}^{(n)}\, d\boldsymbol{x}^{(n)}, \tag{3.27}$$

то непосредственно очевидно, что теорема Лиувилля (3.6), а также и инвариантность dV_Ω, т. е. соотношение (3.24), сохраняют свою силу также и для газа, состоящего из n независимых частиц.

4. Статистические ансамбли механических систем в фазовом пространстве $\Sigma(\boldsymbol{S})$ произвольной лоренцовской системы $\boldsymbol{S}$. Канонические ансамбли

Начнем с рассмотрения произвольного ансамбля систем, состоящих из одной частицы. В пространстве $\Sigma\ (S)$ распределение изображающих точек ансамбля описывается плотностью вероятности $\mathfrak{P}\ (\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x},\ t)$, которая в общем случае явно зависит от времени t. Число систем, которые в момент времени t попадают внутрь бесконечно малой области $\Omega\ (t)$ объема $dV_{\Omega\ (t)}$ в фазовой точке $(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{x})$, по определению равно

$$N\mathfrak{P}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}, t)\, dV_{\Omega(t)}, \tag{4.1}$$

где N — полное число систем в ансамбле ($N \to \infty$). В другой момент времени t_0 то же самое число изображающих точек уже равно

$$N\mathfrak{P}(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{x}_0, t_0)\, dV_{\Omega(t_0)}, \tag{4.2}$$

где

$$dV_{\Omega(t_0)} = dV_{\Omega(t)} \tag{4.3}$$

в силу (3.6). Тогда из (4.1), (4.2) вытекает

$$\mathfrak{P}(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{x}_0, t_0) = \mathfrak{P}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}, t); \tag{4.4}$$

это означает, что $\mathfrak{P}(p, x, t)$ представляет собой интеграл движения, т. е.

$$\frac{d\mathfrak{P}(p, x, t)}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{P}(p, x, t)}{\partial x} u + \frac{\partial\mathfrak{P}(p, x, t)}{dp} \frac{dp}{dt} + \\ + \frac{\partial\mathfrak{P}(p, x, t)}{\partial t} = 0. \tag{4.5}$$

Интегрируя по полному фазовому пространству, мы получим для любого момента времени t

$$\iint \mathfrak{P}(p, x, t)\, dp\, dx = 1. \tag{4.6}$$

Все полученные соотношения справедливы для любой лоренцовской системы. В фазовом пространстве $\Sigma(S')$ другой системы S' изображающие точки, определяемые согласно (4.1), занимают в момент времени t' бесконечно малую область $\Omega'(t')$ вокруг точки (p', x'), причем (p', x', t') и (p, x, t) связаны между собой преобразованием Лоренца при переходе от S к S'. В силу (3.25), объем $dV_{\Omega'(t')}$ этой области равен объему $dV_{\Omega(t)}$. Следовательно, поскольку число систем (4.1) также равно

$$N\mathfrak{P}'(p', x', t')\, dV_{\Omega'(t')}, \tag{4.7}$$

где $\mathfrak{P}'(p', x', t')$ — плотность вероятности в пространстве $\Sigma(S')$, можно заключить, что плотность вероятности является релятивистским инвариантом, т. е.

$$\mathfrak{P}(p, x, t) = \mathfrak{P}'(p', x', t'), \tag{4.8}$$

где аргументы двух выписанных функций связаны между собой преобразованием Лоренца, ведущим от S к S'.

Среднее значение любой физической величины $F(p, x, t)$, такой, например, как энергии $\mathfrak{H}$ или обобщенного импульса P, определяется для момента времени t выражением

$$\langle F(p, x, t)\rangle = \iint F(p, x, t)\, \mathfrak{P}(p, x, t)\, dp\, dx. \tag{4.9}$$

Для системы из n невзаимодействующих частиц плотность вероятности $\mathfrak{P}_g(\xi_\mu, t)$ в $6n$-мерном фазовом пространстве $\Sigma(S)$ представляет собой произведение плотности вероятности записанных в шестимерных фазовых пространствах отдельных частиц

$$\mathfrak{P}_g(\xi_\mu, t) = \prod_{r=1}^{n} \mathfrak{P}^{(r)}(p^{(r)}, x^{(r)}, t). \qquad (4.10)$$

Разберем, в частности, случай, когда ансамбль имеет в S^0 каноническое распределение. Такой ансамбль представляет собой адекватное описание наших сведений о механическом состоянии газа, заключенного в контейнер, покоящийся в системе S^0 и находящийся в тепловом равновесии с тепловым резервуаром заданной температуры T^0. В идеальном газе каждая из частиц газа будет распределена канонически с плотностью вероятности

$$\mathfrak{P}^0(p^0, x^0) = \exp\{[\varphi^0 - \vartheta^0 \mathfrak{H}^0(p^0, x^0, a)]/k\}, \qquad (4.11)$$

где через k обозначена постоянная Больцмана, а через $\vartheta^0 = 1/T^0$ — величина, обратная собственной температуре T^0. Величины

$$\varphi^0 = \varphi^0_p + \varphi^0_q \qquad (4.12)$$

являются фазово независимыми и определяются как

$$\left.\begin{aligned} \exp(-\varphi^0/k) &= \iint \exp(-\vartheta^0 \mathfrak{H}^0/k)\, dp^0\, dx^0, \\ \exp(-\varphi^0_p/k) &= \int \exp(-\vartheta^0 E^0/k)\, dp^0, \\ \exp(-\varphi^0_q/k) &= \int \exp(-\vartheta^0 U^0(x^0, a)/k)\, dx^0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.13)$$

Эти уравнения определяют $\varphi^0 = \varphi^0(\vartheta^0, a)$ как функции ϑ^0 и внешних параметров (a), задающих термодинамическое состояние системы в S^0. Термодинамический смысл φ^0 следует из соотношения

$$F^0 = n\varphi^0/\vartheta^0 = \Phi^0/\vartheta^0, \qquad (4.14)$$

где через F^0 обозначена свободная энергия газа в собственной системе S^0 (см. § 5).

В то время как $\mathfrak{P}^0$ в системе S^0 не зависит от времени t^0, плотность вероятности $\mathfrak{P}$ в системе S уже зависит от времени. Так как обобщенный 4-импульс P_i является 4-вектором, можно написать

$$P_i V^i = P^0_i V^{0i} = -\mathfrak{H}^0. \qquad (4.15)$$

Следовательно, если ввести 4-вектор (1.15), (1.16)

$$\vartheta^i = \vartheta^0 V^i = \vartheta V^i, \tag{4.16}$$

то мы получим, имея в виду инвариантность плотности вероятности, определенной согласно (4.8) при $S' = S^0$,

$$\mathfrak{P}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}, t) = \exp\{(\varphi + \vartheta^i P_i)/k\}, \tag{4.17}$$

где

$$\varphi = \varphi^0 \tag{4.18}$$

является инвариантом.

В произвольной системе S термодинамическое состояние определяется четырьмя параметрами ϑ^i совместно с внешними параметрами (a_l). Выражение (4.17) очень близко к выражениям, использованным Мазуром и Лурса, а также Барю [10].

5. Средние значения энергии и обобщенного импульса и их поведение при преобразовании Лоренца

Средние значения энергии и обобщенного импульса находятся в системе S следующим образом:

$$\langle \mathfrak{H} \rangle = \iint \mathfrak{H}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}, t)\, \mathfrak{P}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{p}\, d\boldsymbol{x},$$
$$\langle \boldsymbol{P} \rangle = \iint \boldsymbol{P}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}, t)\, \mathfrak{P}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{p}\, d\boldsymbol{x}, \tag{5.1}$$

где интегрирование ведется в определенный момент времени. Из выражений (5.1) на первый взгляд кажется, что $\langle \mathfrak{H} \rangle$ и $\langle \boldsymbol{P} \rangle$ зависят от времени. Однако вычисление интегралов (5.1) для канонических ансамблей, для которых $\mathfrak{P}$ определяется согласно (4.17), показывает, что эти величины от времени не зависят.

Примем снова для простоты, что скорость S^0 относительно S имеет компоненты

$$\boldsymbol{v} = \{v, 0, 0\}; \tag{5.2}$$

в этом случае справедливы равенства (3.9). Чтобы произвести интегрирование в (5.1), удобно ввести величины $\boldsymbol{p}^0$, $\boldsymbol{x}^0$, определенные равенствами (3.9), в качестве новых переменных интегрирования (при постоянном t). Обратные преобразования для (3.9) для фиксированного момента t имеют вид

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \gamma\,[p_x^0 + vE^0/c^2], \qquad p_y = p_y^0,\ p_z = p_z^0, \\ x &= vt + x^0/\gamma, \qquad y = y^0,\ z = z^0. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Согласно теореме Якоби, мы должны заменить произведение $d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{x}$ на

$$d\boldsymbol{p}\,d\boldsymbol{x} = J\,d\boldsymbol{p}^0\,d\boldsymbol{x}^0. \tag{5.4}$$

Через J здесь обозначен определитель Якоби, соответствующий преобразованию (5.3), который, как легко видеть, равен

$$J = \frac{d\,(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})}{d\,(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{x}^0)} = 1 + vu_x^0/c^2 = 1 + vp_x^0/E^0. \tag{5.5}$$

Конечно, значение определителя J, полученное в (5.5), является обратной величиной определителя (3.19), что легко усмотреть из соотношения (2.35). Так как P_i является 4-вектором, а $\boldsymbol{P}^0 = \boldsymbol{p}^0$, мы получим

$$\mathfrak{H} = \gamma\,[\mathfrak{H}^0 + vp_x^0],$$

и, вследствие инвариантности плотности вероятности, первый интеграл из (5.1) приобретает вид

$$\langle\mathfrak{H}\rangle = \iint \mathfrak{P}^0(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{x}^0)\,\gamma\,(\mathfrak{H}^0 + vp_x^0)(1 + vp_x^0/E^0)\,d\boldsymbol{p}^0\,d\boldsymbol{x}^0. \tag{5.6}$$

Здесь, конечно, мы использовали независимость $\mathfrak{P}^0$ от времени.

В следующем разделе мы рассмотрим случаи, когда плотность вероятности $\mathfrak{P}^0(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{x}^0, t^0)$ зависит от времени t^0. Тогда, пользуясь формулой (5.6), следует в $\mathfrak{P}^0(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{x}^0, t^0)$ вместо аргумента t^0 подставить выражение (3.10), которое с учетом (5.3) можно переписать в форме

$$t^0 = \gamma\,[t - vx/c^2] = t/\gamma - vx^0/c^2. \tag{5.7}$$

Однако сейчас для нашего случая мы получим из (5.6)

$$\langle\mathfrak{H}\rangle = \gamma\left[\langle\mathfrak{H}^0\rangle^0 + v\,\langle p_x^0\rangle^0 + \left\langle\frac{v\mathfrak{H}^0}{E^0}\,p_x^0\right\rangle^0 + \left\langle\frac{v^2 p_x^{0^2}}{E^0}\right\rangle^0\right], \tag{5.8}$$

где знаком $\langle\ \rangle^0$ обозначено среднее значение по ансамблю (4.11) в пространстве Σ (S^0). Поскольку

$$\mathfrak{H}^0 = c\sqrt{m^2c^2 + p^{0^2} + U^0(x^0)},$$

а E^0 зависит только от квадратов p_x^0, p_y^0 и p_z^0, интегрирование по этим переменным идет от $-\infty$ до $+\infty$, где $\mathfrak{H}^0 = +\infty$, а $\mathfrak{P}^0 = 0$; очевидно, что

$$\left.\begin{aligned} &\langle p_x^0\rangle^0 = \langle p_y^0\rangle^0 = \langle p_z^0\rangle^0 = 0,\\ &\langle p_x^0 p_x^0\rangle^0 = \langle p_x^0 p_z^0\rangle^0 = \left\langle \frac{\mathfrak{H}^0 p_x^0}{E^0}\right\rangle^0 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

Далее, на основании

$$\frac{c^2 p_x^{0^2}}{E^0} = p_x^0 \frac{\partial E^0}{\partial p_x^0} = p_x^0 \frac{\partial \mathfrak{H}^0}{\partial p_x^0} \tag{5.10}$$

мы получаем частным дифференцированием

$$\left\langle \frac{c^2 p_x^{0^2}}{E^0}\right\rangle^0 = \iint p_x^0 \frac{\partial \mathfrak{H}^0}{\partial p_x^0} \exp\{(\varphi^0 - \vartheta^0\mathfrak{H}^0)/k\}\, d\boldsymbol{p}^0\, d\boldsymbol{x}^0 =$$
$$= -\frac{k}{\vartheta^0}\iint p_x^0 \frac{\partial \mathfrak{P}^0}{\partial p_x^0}\, d\boldsymbol{p}^0\, d\boldsymbol{x}^0 = kT^0 \iint \mathfrak{P}^0\, d\boldsymbol{p}^0\, d\boldsymbol{x}^0 = kT^0. \tag{5.11}$$

Следовательно,

$$\langle \mathfrak{H}\rangle = \gamma\left[\langle \mathfrak{H}^0\rangle^0 + \frac{v^2}{c^2} kT^0\right]. \tag{5.12}$$

Аналогично получаем из второго определения (5.1), вспоминая, что

$$P_x = \gamma\,[p_x^0 + v\mathfrak{H}^0/c^2],\ P_y = P_y^0,\ P_z = P_z^0 \tag{5.13}$$

$$\left.\begin{aligned} &\langle P_x\rangle = [\langle \mathfrak{H}^0\rangle^0 + kT^0]\,\gamma v/c^2,\\ &\langle P_y\rangle = \langle P_z\rangle = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

в силу (5.9), (5.11).

Для газа, состоящего из n невзаимодействующих частиц, выражения (5.12), (5.14) справедливы для каждой частицы в отдельности, и, умножая каждое из этих выражений на n, мы придем к соответствующим формулам для средних значений полной энергии и обобщенного импульса газа. С термодинамической точки зрения эти величины следует отождествить с энергией и импульсом газа, т. е. считать

$$\left.\begin{aligned} H &= \langle \mathfrak{H}_g \rangle = n \langle \mathfrak{H} \rangle, & H^0 &= \langle \mathfrak{H}_g^0 \rangle^0 = n \langle \mathfrak{H}^0 \rangle^0, \\ \boldsymbol{G} &= \langle \boldsymbol{P}_g \rangle = n \langle \boldsymbol{P} \rangle, & \boldsymbol{G}^0 &= \langle \boldsymbol{P}_g^0 \rangle^0 = n \langle \boldsymbol{P}^0 \rangle^0, \\ G_i &= \langle P_i^g \rangle = n \langle P_i \rangle, & G_i^0 &= \langle P_i^{g^0} \rangle^0 = n \langle P_i^0 \rangle^0. \end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

Обоснование такого отождествления можно найти в том обстоятельстве, что флуктуациями этих величин обычно можно совершенно пренебречь, если число n очень велико, порядка числа частиц любого весомого количества газа. Может показаться несколько странным, что $\boldsymbol{G}$ отождествляется со средним значением *обобщенного* импульса, а не со средним значением импульса. Однако следует заметить, что потенциал $U^0(\boldsymbol{x}^0)$ частицы в системе S^0 соответствует импульсу $\gamma v \langle U^0 \rangle^0 / c^2$ в системе S и, согласно (2.24), он в точности равен разности между средними значениями обобщенного и обычного импульса. В том случае, когда нет никаких других внешних сил, кроме сил, действующих со стороны стенок, $\langle U^0 \rangle^0$ обращается в нуль и никакого различия между $\langle \boldsymbol{P} \rangle$ и $\langle \boldsymbol{p} \rangle$ просто нет.

Из (5.12), (5.14), (5.15) получаем выражения для импульса и энергии газа

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{G} &= [H^0 + nkT^0]\, \gamma \boldsymbol{v}/c^2, \\ H &= \left[H^0 + \frac{v^2}{c^2} nkT^0\right]\gamma, \end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

справедливые для любого направления скорости v. Эти выражения можно записать еще и так:

$$\left.\begin{aligned} G_i &= \frac{H^0}{c^2} V_i + g_i, \\ g_i &= \left\{\frac{nkT^0}{c^2} \gamma \boldsymbol{v}, -\frac{nkT^0}{c^2} \frac{v^2\gamma}{c}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

Величина g_i (и, следовательно, G_j) не является 4-вектором, но она удовлетворяет в произвольной системе S соотношению

$$\left.\begin{aligned} &g_i V^i = 0 \\ &\text{или} \\ &G_i V^i = -H^0. \end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

Так как величина F_i является 4-вектором, мы получаем, в случае (5.2), следующие формулы преобразования для механической силы $\bar{\mathfrak{F}}$ и мощности $\bar{\mathfrak{F}}u$:

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\mathfrak{F}}_x = \frac{\mathfrak{F}_x^0 + v(\bar{\mathfrak{F}}^0 u^0)/c^2}{1 + vu_x^0/c^2}, \qquad \mathfrak{F}_y = \frac{\mathfrak{F}_y^0}{\gamma[1 + vu_x^0/c^2]},\\
&\mathfrak{F}_z = \frac{\mathfrak{F}_z^0}{\gamma[1 + vu_x^0/c^2]}, \qquad \bar{\mathfrak{F}}^0 = -\frac{\partial U^0(x^0)}{\partial x^0},\\
&\bar{\mathfrak{F}}u = \frac{\bar{\mathfrak{F}}^0 u^0 + v\mathfrak{F}_x^0}{1 + vu_x^0/c^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

Аналогично получим для обобщенной силы (2.25), (2.26)

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{K}_x = \frac{\mathfrak{K}_x^0}{1 + vu_x^0/c^2}, \qquad \mathfrak{K}_y = \frac{\mathfrak{K}_y^0}{\gamma[1 + vu_x^0/c^2]},\\
&\mathfrak{K}_z = \frac{\mathfrak{K}_z^0}{\gamma[1 + vu_x^0/c^2]}, \qquad \bar{\mathfrak{K}}^0 = -\frac{\partial U^0(x^0)}{\partial x^0},\\
&\bar{\mathfrak{K}}v = \frac{\bar{\mathfrak{K}}^0 v}{1 + vu_x^0/c^2} = \frac{\mathfrak{K}_x^0 v}{1 + vu_x^0/c^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.20}$$

Среднее значение $\bar{\mathfrak{F}}^0 = \bar{\mathfrak{K}}^0$ по ансамблю (4.11) равно

$$\begin{aligned}
&\langle \bar{\mathfrak{F}^0} \rangle^0 = \langle \bar{\mathfrak{K}^0} \rangle^0 =\\
&= -\iint \frac{\partial U^0(x^0)}{\partial x^0} \exp\left\{\left(\varphi^0 - \vartheta^0 E^0 - \vartheta^0 U^0\right)/k\right\} dp^0\, dx^0 =\\
&= \frac{k}{\vartheta^0} \iint \frac{\partial}{\partial x^0} \exp\{(\varphi^0 - \vartheta^0 E^0 - \vartheta^0 E^0)/k\}\, dp^0\, dx^0 = 0,
\end{aligned} \tag{5.21}$$

так как $\mathfrak{P}^0$ вне контейнера обращается в нуль. Аналогично найдем

$$\langle \bar{\mathfrak{F}}^0 u^0 \rangle^0 = \langle \bar{\mathfrak{K}^0} v \rangle^0 = 0. \tag{5.22}$$

С помощью теоремы Якоби и (5.4), (5.5), (5.19), (5.20) мы получим, следовательно, для средних значений сил и мощностей в системе S

$$\left.\begin{aligned}
&\langle \bar{\mathfrak{F}} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{K}} \rangle = 0,\\
&\langle \bar{\mathfrak{F}}u \rangle = \langle \bar{\mathfrak{K}}v \rangle = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

Хотя среднее значение полной внешней силы действующей на систему, равно нулю в каноническом ансамбле (как это и следует ожидать для термодинамической системы, покоящейся в системе S^0 и находящейся там же в состоянии теплового равновесия) в общем случае мы получим результат, отличный от нуля, если возьмем среднее значение от этой величины, когда положение частицы неизменно или ограничено конечной областью пространства ω^0. Тогда в системе S^0 вместо (5.21) получим

$$\langle \bar{\mathfrak{F}}^0 \rangle^0_{\omega^0} = \langle \bar{\mathfrak{K}}^0 \rangle^0_{\omega_0} =$$

$$= \int \exp \{(\varphi^0 - \vartheta^0 E^0)/k\} \, d\boldsymbol{p}^0 kT^0 \int\limits_{\omega^0} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^0} \exp \{-\vartheta^0 U^0 (x^0)/k\} \, d\boldsymbol{x}^0 =$$

$$= \frac{kT^0 \int\limits_{\sigma^0} \exp \{-\vartheta^0 U^0 (x^0)/k\} \, \boldsymbol{n} \, d\sigma^0}{\int \exp \times \{-\vartheta^0 U^0 (x^0)/k\} \, d\boldsymbol{x}^0}, \tag{5.24}$$

причем интеграл в числителе берется по поверхности σ^0 области ω^0, а $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль поверхностного элемента $d\sigma$. Объемный интеграл в знаменателе (5.24) появляется из (4.13). В том случае, когда единственными внешними силами, действующими на газ, будут силы со стороны стенок контейнера, получим

$$U^0 (\boldsymbol{x}^0) = \begin{cases} 0 & \text{внутри контейнера,} \\ +\infty & \text{вне контейнера,} \end{cases} \tag{5.25}$$

а знаменатель принимает значение

$$\int \exp \{(-\vartheta^0 U^0/k)\} \, d\boldsymbol{x}^0 = \mathfrak{V}^0, \tag{5.26}$$

где $\mathfrak{V}^0$ — объем контейнера в системе, где он покоится.

Выберем теперь за область ω^0 небольшой цилиндр с граничными поверхностями $d\sigma_1^0$ и $d\sigma_2^0$, расположенными сразу же чуть внутрь и чуть наружу от стенок цилиндра. (Фактически нам следует думать о стенке как о тонком переходном слое, внутри которого потенциал лишь быстро, но непрерывно возрастает от нуля на $d\sigma_1^0$ до очень большого значения на $d\sigma_2^0$.) Тогда из (5.24) мы можем получить, если справедливо (5.25),

$$\langle \bar{\mathfrak{F}}^0 \rangle^0_{\omega^0} = \langle \bar{\mathfrak{K}}^0 \rangle^0_{\omega^0} = kT^0 \, d\sigma_1^0 \boldsymbol{n}_1 / \mathfrak{V}^0, \tag{5.27}$$

где через $\boldsymbol{n}_1$ обозначена внутренняя нормаль к стенке контейнера. Если величину, определенную равенством (5.27), умножить на число частиц n и разделить на $d\sigma_1^0$, найдем нормальное давление $\boldsymbol{p}^0$ на газ со стороны стенок. Таким образом,

$$\mathfrak{p}^0 = nkT^0/\mathfrak{V}^0. \tag{5.28}$$

Если потенциальная энергия U^0 задается в виде (5.25), давление оказывается всюду одинаковым, термодинамическое тело — однородным. С другой стороны, если $U^0(\boldsymbol{x}^0) \neq 0$ внутри контейнера, давление меняется по закону $\exp\{(-\vartheta^0 U_1^0/k)\}$, где U_1^0 — значение потенциала U^0 в рассматриваемой точке. Если все рассуждения, ведущие к (5.24), (5.27), провести для системы S, легко обнаружить с помощью (5.19), что давление оказывается инвариантом, т. е.

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^0. \tag{5.29}$$

В случае однородного поля (5.25), когда справедливо (5.28), соотношения (5.16) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{G} &= [H^0 + \mathfrak{p}^0\mathfrak{V}^0]\,\gamma\boldsymbol{v}/c^2, \\ H &= \left[H^0 + \frac{v^2}{c^2}\,\mathfrak{p}^0\mathfrak{V}^0\right]\gamma; \end{aligned}\right\} \tag{5.30}$$

эти соотношения совпадают с теми выражениями для термодинамической жидкости, с которых началось рассмотрение в [4].

Наконец, мы перейдем к статистическому аналогу термодинамической энтропии S. Если положить

$$\mathfrak{P} = e^{\eta}, \qquad \mathfrak{P}^0 = e^{\eta^0}, \tag{5.31}$$

то инвариантность плотности вероятности влечет за собой инвариантность «экспоненциальной вероятности» η, т. е.

$$\eta(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}, t) = \eta^0(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{x}^0), \tag{5.32}$$

причем аргументы в этих функциях связаны соотношениями (5.3). Значит,

$$\langle\eta\rangle = \langle\eta^0\rangle^0. \tag{5.33}$$

Тот же самый результат следует и из теоремы Якоби и (5.4), (5.5)

$$\langle\eta\rangle = \iint \eta\mathfrak{P}\,dp\,dx = \iint \eta^0\mathfrak{P}^0 (1 + vp_x^0/E^0)\,dp^0\,dx^0 = \\ = \langle\eta^0\rangle^0 + v\,\langle\eta^0 p_x^0/E^0\rangle^0.$$

Те же самые рассуждения, которые привели нас к (5.9), позволяют заключить, что последний член этого выражения равен нулю, откуда и следует (5.33). Так как (5.33) справедливо для каждой частицы, то из (4.10) можно получить для среднего значения «экспоненциальной вероятности» для газа, состоящего из n частиц,

$$\begin{gathered} \eta_g = \ln \mathfrak{P}_g, \\ \langle\eta_g\rangle = n\,\langle\eta\rangle = n\,\langle\eta^0\rangle^0 = \langle\eta_g^0\rangle^0. \end{gathered} \tag{5.34}$$

Согласно классической статистической механике, энтропия S^0 газа в той системе, где газ покоится, определяется как

$$S^0 = -k\,\langle\eta_g^0\rangle^0 = -kn\,\langle\eta^0\rangle^0, \tag{5.35}$$

и поскольку энтропия является релятивистским инвариантом, из (5.34) вытекает, что энтропия S в произвольной инерциальной системе должна записываться в виде

$$S = -k\,\langle\eta_g\rangle = -kn\,\langle\eta\rangle. \tag{5.36}$$

Для канонического ансамбля (4.17)

$$\eta = \ln \mathfrak{P} = (\varphi + \vartheta^i P_i)/k.$$

Следовательно,

$$S = -n\varphi - n\vartheta^i\,\langle P_i\rangle \tag{5.37}$$

или, согласно (5.15),

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= -\vartheta^i G_i - S, \\ \Phi &= n\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{5.38}$$

Хотя G_i не является 4-вектором, произведение $\vartheta^i G_i$ определяет инвариант. Это видно из того, что согласно (5.18) и (4.16)

$$\vartheta^i G_i = -\vartheta^0 H^0 = -H^0/T^0. \tag{5.39}$$

Благодаря инвариантности энтропии (5.38) может быть переписано и так:

$$\Phi = \Phi^0 = \frac{H^0 - T^0 S^0}{T^0} = F^0/T^0 \tag{5.40}$$

в соответствии с (4.14).

В этом разделе мы получили выражения термодинамических функций состояния G_i, p и S, зависящих от ϑ^i и (a). Изменения этих величин в процессах, ведущих от одного равновесного состояния к другому, можно получить простым дифференцированием. Но нам придется заняться такими величинами, как ΔI и ΔA (механический импульс и работа), которые не являются полными дифференциалами и поэтому зависят от характера процесса. В следующем разделе будут рассмотрены, в частности, обратимые процессы.

6. Статистическое описание обратимых процессов. Механический импульс и работа. Четыре-импульс переданного тепла

Рассмотрим обратимый термодинамический процесс, связывающий два равновесных состояния (ϑ^i, a_l) и $(\vartheta^i + \Delta\vartheta^i, a_l + da_l)$, и допустим на мгновение, что *собственная система S^0 во время процесса одна и та же*; это означает, что скорость $\boldsymbol{v}$ термодинамического тела относительно системы S постоянна. Тогда изменение величин ϑ^i связано исключительно с изменением температуры T^0 на величину ΔT^0. Процесс будет обратимым, если он совершается настолько медленно, что можно считать систему проходящей через последовательность равновесных состояний с температурой $T^0(t^0)$ и внешними параметрами $a_l(t^0)$, которые описываются «бесконечно» медленно изменяющимися монотонными функциями времени t^0. Если обозначить через τ^0 длительность процесса, можно допустить, что температура и внешние параметры возрастают от исходных значений (T^0, a_l) до конечных значений $(T^0 + \Delta T^0, a_l + \Delta a_l)$ за промежуток времени

$$0 \leqslant t^0 \leqslant \tau^0. \tag{6.1}$$

С экспериментальной точки зрения тело в течение процесса должно быть приведено в тепловой контакт с «непрерывной» последовательностью тепловых резервуаров с температурами $T^0(t^0)$.

Из классической статистической механики известно, что адекватное статистическое описание такого процесса в системе S^0 дается «квазиканоническим» ансамблем с плотностью вероятности (для каждой частицы) типа

$$\mathfrak{P}^0(p^0, x^0, \vartheta^0(t^0), a(t^0)) = \\ = \exp\{(\varphi^0(\vartheta^0, a) - \vartheta^0(t^0)\,\mathfrak{H}^0(p^0, x^0, a(t^0))/k\}. \tag{6.2}$$

В точности так же, как $T^0(t^0)$ и $a(t^0)$, величина

$$\vartheta^0(t^0) = 1/T^0(t^0) \tag{6.3}$$

представляет собой медленно меняющуюся функцию в интервале (6.1) и постоянную величину вне этого интервала

$$\vartheta^0(t^0) = \begin{cases} \vartheta^0 & \text{для} \quad t^0 \leqslant 0, \\ \vartheta^0 + \Delta\vartheta^0 & \text{для} \quad t^0 \geqslant \tau^0. \end{cases} \tag{6.4}$$

Поскольку φ^0 является функцией ϑ^0 и (a), она будет также функцией t^0 в интервале (6.1). Условие корректности этого описания состоит в том, что τ^0 чрезвычайно велико по сравнению с характерным периодом системы, т. е.

$$\tau^0 \gg l^0/\langle u^0\rangle^0, \tag{6.5}$$

где l^0 — линейные размеры контейнера, а $\langle u^0\rangle^0$ — среднее значение скорости частицы.

Займемся теперь подсчетом средней силы и средней мощности, передаваемой частице в произвольной системе S; начнем со случая, когда во время процесса величины a сохраняются постоянными. Мы увидим, что даже этот простой случай уже обнаруживает типичные особенности, характерные для теории относительности. В нерелятивистской термодинамике в таких процессах механическая работа равна нулю, и изменение температуры связано исключительно с передачей тепловой энергии. В теории относительности это по-прежнему верно в собственной системе S^0, но, как это было показано в [4], в любой другой системе S мы обнаружим конечный импульс и конечную работу, совершаемую внешними силами. Этот самый эффект подсчитаем теперь на основе статистической механики.

Для простоты начнем с предположения, что относительная скорость $\boldsymbol{v}$ определяется согласно (5.2), так что преобразование, связывающее фазовые пространства Σ (S) и Σ (S^0), записываются в виде (5.3). Тогда, используя (5.19) и теорему Якоби (5.4), (5.5), получаем для среднего значения $\mathfrak{F}_x$ в момент времени t в системе S

$$\langle \mathfrak{F}_x \rangle_t = \iint \frac{\mathfrak{F}_x^0 + \frac{v}{c^2} (\mathfrak{F}^0 \boldsymbol{u}^0)}{1 + v p_x^0 / E^0} \mathfrak{P}^0 (\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{x}^0, \vartheta^0 (t^0)) \times$$
$$\times (1 + v p_x^0 / E^0) \, d\boldsymbol{p}^0 \, d\boldsymbol{x}, \tag{6.6}$$

где $\mathfrak{P}^0$ — функция распределения (6.2), где a считаются постоянными. Здесь следует помнить, что $\vartheta^0(t^0)$ — функция переменной

$$t^0 = t/\gamma - v x^0 / c^2, \tag{6.7}$$

заданной согласно (5.7) и зависящей от переменной интегрирования x^0. Следовательно,

$$\langle \mathfrak{F}_x \rangle_t = \iint \left(- \frac{\partial U^0 (\boldsymbol{x}^0)}{\partial x^0} \right) \mathfrak{P}^0 (\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{x}^0, \vartheta^0 (t^0)) \, d\boldsymbol{p}^0 \, d\boldsymbol{x}^0 +$$
$$+ v \iint \frac{(\mathfrak{F}^0 \boldsymbol{p}^0)}{E^0} \mathfrak{P} (\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{x}^0, \vartheta^0(t^0)) \, d\boldsymbol{p}^0 \, d\boldsymbol{x}^0. \tag{6.8}$$

Второй интеграл в правой части, очевидно, равен нулю, так как $\mathfrak{P}^0$ представляет собой функцию (p_x^0, p_y^0, p_z^0), зависящую только от квадратов этих величин. Таким образом, из (5.20) вытекает, что средние значения $\mathfrak{F}_x$ и $\mathfrak{K}_x$ равны между собой. Чтобы подсчитать первый интеграл в (6.8), замечаем, что величина $k\mathfrak{P}^0/\vartheta^0$ в рассматриваемом случае, когда все a постоянны, зависит от переменной x^0 как через U^0 ($\boldsymbol{x}^0$), входящую в показатель экспоненты в (6.2) и определяющую $\mathfrak{P}^0$, так и через ϑ^0 (t^0). Следовательно,

$$k \frac{\partial (\mathfrak{P}^0/\vartheta^0)}{\partial x^0} = \mathfrak{P}^0 \left(- \frac{\partial U (\boldsymbol{x}^0)}{\partial x^0} \right) + k \frac{\partial (\mathfrak{P}^0/\vartheta^0)}{\partial \vartheta^0} \frac{\partial \vartheta^0 (t^0)}{\partial x^0}; \tag{6.9}$$

принимая во внимание равенство

$$\frac{\partial \vartheta^0 (t^0)}{\partial x^0} = - \frac{\gamma v}{c^2} \frac{\partial \vartheta^0 (t^0)}{\partial t}, \tag{6.10}$$

следующее из (6.7), можно переписать (6.9) в форме

$$k\,\frac{\partial(\mathfrak{P}^0/\vartheta^0)}{\partial x^0}=\left(-\frac{\partial U^0}{\partial x^0}\right)\mathfrak{P}^0-k\,\frac{\gamma v}{c^2}\,\frac{\partial(\mathfrak{P}^0/\vartheta^0)}{\partial t}\,. \tag{6.11}$$

Если проинтегрировать (6.11) по всему фазовому пространству Σ (S^0), левая часть обратится в нуль, тогда как интеграл от первого члена правой части окажется как раз равным первому члену в (6.8). Следовательно,

$$\langle \mathfrak{F}_x\rangle_t=\langle \mathfrak{K}_x\rangle_t=\frac{k\gamma v}{c^2}\,\frac{d}{dt}\iint\frac{\mathfrak{P}^0(\boldsymbol{p}^0,\,\boldsymbol{x}^0,\,\vartheta^0(t^0))}{\vartheta^0(t^0)}\,d\boldsymbol{p}^0\,d\boldsymbol{x}^0. \tag{6.12}$$

Аналогичным образом мы найдем, используя (5.19), (5.20),

$$\langle \mathfrak{F}_g\rangle_t=\langle \mathfrak{K}_y\rangle_t=0,\quad \langle \mathfrak{F}_z\rangle_t=\langle \mathfrak{K}_z\rangle_t=0. \tag{6.13}$$

Соотношения (6.13) совместно с (6.12) можно записать в единой векторной форме:

$$\langle \overline{\mathfrak{F}}\rangle_t=\langle \overline{\mathfrak{K}}\rangle_t=\frac{k\gamma v}{c^2}\,\frac{d}{dt}\iint\frac{\mathfrak{P}^0(\boldsymbol{p}^0,\,\boldsymbol{x}^0,\,\vartheta^0(t^0))}{\vartheta^0(t^0)}\,d\boldsymbol{p}^0\,d\boldsymbol{x}^0. \tag{6.14}$$

Аналогичным путем находится средний механический эффект:

$$\langle \overline{\mathfrak{F}}\boldsymbol{u}\rangle_t=\langle \overline{\mathfrak{K}}\boldsymbol{v}\rangle_t=\frac{k\gamma v^2}{c^2}\,\frac{d}{dt}\iint\frac{\mathfrak{P}^0(\boldsymbol{p}^0,\,\boldsymbol{x}^0,\,\vartheta^0(t^0))}{\vartheta^0(t^0)}\,d\boldsymbol{p}^0\,d\boldsymbol{x}^0. \tag{6.15}$$

Для газа, состоящего из n частиц, выражения в правых частях (6.14), (6.15) нужно умножить на n. Для импульса полной механической силы, действующей на газ в течение интервала времени $t_1<t<t_2$, получим тогда

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{I}(t_1,t_2)&=\\&=n\int_{t_1}^{t_2}\langle\overline{\mathfrak{F}}\rangle_t\,dt=\frac{n\gamma vk}{c}\Big[\iint\mathfrak{P}^0(\boldsymbol{p}^0,\,\boldsymbol{x}^0,\,\vartheta^0(t_2^0))/\vartheta^0(t_2^0))\,d\boldsymbol{p}^0d\boldsymbol{x}^0-\\&-\iint\mathfrak{P}^0(\boldsymbol{p}^0,\,\boldsymbol{x}^0,\,\vartheta^0(t_1^0))/\vartheta^0(t_1^0))\,d\boldsymbol{p}^0d\boldsymbol{x}^0\Big],\end{aligned} \tag{6.16}$$

где значения t_1^0 и t_2^0 получаются из (6.7), если приравнять t значению t_1 и t_2 соответственно. Выберем теперь t_1 и t_2 так, чтобы $t_1^0\leqslant 0$, а $t_2^0\geqslant\tau^0$ для всех значений x^0 внутри контейнера. Тогда $\vartheta^0(t_1^0)$ и $\vartheta^0(t_2^0)$ принимают постоянные значения $\vartheta^0 + \Delta\vartheta^0$ и ϑ^0, соответственно, в двух интегралах, выписанных в (6.16). В конце концов получаем для механического импульса, приобретаемого во время процесса,

$$\Delta I = \frac{n\gamma v}{c^2}\left[\frac{k}{\vartheta^0 + \Delta\vartheta^0} - \frac{k}{\vartheta^0}\right] \equiv \gamma v \frac{nk\Delta T^0}{c^2}. \qquad (6.17)$$

Аналогично, интегрируя (6.15), получаем для полной работы внешних сил выражение

$$\Delta A = \frac{\gamma v^2}{c^2} nk\Delta T^0. \qquad (6.18)$$

Следовательно,

$$\Delta I_i = \left\{\frac{nk\Delta T^0}{c^2}\gamma v, \quad -\frac{nk\Delta T^0}{c^2}\frac{\gamma v^2}{c}\right\} = \Delta g_i, \qquad (6.19)$$

где через Δg_i обозначено изменение величины g_i в (5.17) при постоянной скорости $\boldsymbol{v}$.

Из (5.17) и (6.19) видно, что разность $\Delta G_i - \Delta I_i$ является 4-вектором, который, согласно (1.1), можно интерпретировать как 4-импульс переданного тепла:

$$\Delta Q_i = \Delta G_i - \Delta I_i = \frac{\Delta H^0}{c^2} V_i = \frac{\Delta \langle \mathfrak{H}_g^0 \rangle^0}{c^2} V_i = \frac{\Delta Q^0}{c^2} V_i, \qquad (6.20)$$

где

$$\Delta Q^0 = \Delta H^0 = \Delta \langle \mathfrak{H}_g^0 \rangle^0 \qquad (6.20')$$

представляет собой переданное тепло в собственной системе S^0 при постоянных a.

Соотношение (6.20) находится в полном соответствии с термодинамическим соотношением (1.4), выведенным в [4], однако до сих пор наш вывод на основе статистической механики был ограничен случаем, когда внешние параметры a оставались во время процесса неизменными. Однако нетрудно найти статистические выражения для работы и импульса для бесконечно малых обратимых изменений внешних параметров (a). В собственной системе S^0 работа, совершаемая над частицей (при фиксированных $\boldsymbol{p}^0$, $\boldsymbol{x}^0$), при увеличении параметров a на da_l дается выражениями (2.6,6′). Среднее значение этой величины, умноженное на n, следует отождествить с работой, совершаемой над газом, связанной с изменением параметров a, т. е.

$$dA^0 = n \langle d_{(a)} \mathfrak{H}^0 \rangle^0 = n \sum_l \left\langle \frac{\partial \mathfrak{H}^0}{\partial a_l} \right\rangle^0 da_l, \tag{6.21}$$

или

$$dA^0 = \langle d_{(a)} \mathfrak{H}_g^0 \rangle^0 = \sum_l \left\langle \frac{\partial \mathfrak{H}^0}{\partial a_l} \right\rangle^0 da_l, \tag{6.22}$$

где через $\mathfrak{H}_g^0$ обозначен полный гамильтониан газа (2.37).

В случае однородного поля сил (5.25) существует только один внешний параметр, за который можно взять собственный объем $\mathfrak{B}^0$. Поскольку работа, совершаемая над газом при обратимом возрастании объема $d\mathfrak{B}^0$, равна

$$dA^0 = - \mathfrak{p}^0 d\mathfrak{B}^0, \tag{6.23}$$

сравнение (6.23) с (6.21), (6.22) позволяет написать

$$\mathfrak{p}^0 = - \left\langle \frac{\partial \mathfrak{H}_g^0}{\partial \mathfrak{B}^0} \right\rangle^0 = - n \left\langle \frac{\partial \mathfrak{H}^0 (p^0, x^0, \mathfrak{B}^0)}{\partial \mathfrak{B}^0} \right\rangle^0. \tag{6.24}$$

Это выражение следует также из (5.24), если принять во внимание, что потенциал $U^0 (x^0)$ в окрестности стенок будет функцией расстояния от стенок по нормали.

По аналогии с (6.21), (6.22), импульс и работа в системе S, связанные с увеличением внешних параметров a на da_l, равны средним значениям величины $d_{(a)} P_i^g$, определяемой согласно (2.39). Следовательно,

$$\begin{aligned} d_{(a)} I_i = \langle d_{(a)} P_i^g \rangle = \sum_l da_l \left\langle \frac{\partial P_i^g (\xi, t, a)}{\partial a_l} \right\rangle = \\ = n \langle d_{(a)} P_i \rangle = n \sum da_l \left\langle \frac{\partial P_i (p, x, t, a)}{\partial a_l} \right\rangle = \\ = n \sum da_l \left\langle \frac{\partial U (x, a_l)}{\partial a_l} \right\rangle \frac{V_i}{c^2} . \end{aligned} \tag{6.25}$$

Так как производные dU/da_l являются релятивистскими скалярами, из теоремы Якоби (5.4), (5.5) следует, что

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial a_l} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial U^0}{\partial a_l} \right\rangle^0 = \left\langle \frac{\partial \mathfrak{H}^0}{\partial a_l} \right\rangle^0 .$$

Таким образом, в силу (6.21), (6.22), (6.25)

$$d_{(a)}I_i = \frac{dA^0}{c^2} V_i = \frac{\langle d_{(a)}\mathfrak{H}_g^0\rangle^0}{c^2} V_i. \tag{6.26}$$

Из (6.26) видно, что эта часть механического «импульса-работы» dI_i составляет 4-вектор. Для *бесконечно малого* обратимого процесса полное выражение для dI_i получается как сумма (6.26) выражения (6.19), т. е.

$$\left.\begin{aligned} dI_i &= dg_i + \frac{dA^0}{c^2} V_i, \\ dg_i &= \left\{\frac{nkdT^0}{c^2}\gamma\boldsymbol{v}, \quad -\frac{nkdT^0}{c^2}\frac{\gamma v^2}{c}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{6.27}$$

для постоянной скорости $\boldsymbol{v}$. Вместо (6.20) получаем уже в общем случае

$$dQ_i = dG_i - dI_i = \frac{dH^0 - dA^0}{c^2} V_i = \frac{dQ^0}{c^2} V_i \tag{6.28}$$

в полном соответствии с (1.4). Статистическое выражение для переданного количества тепловой энергии в системе S^0, согласно (5.15) и (6.22), равно

$$dQ^0 = dH^0 - dA^0 = d\langle\mathfrak{H}_g^0\rangle^0 - \sum da_l \left\langle\frac{\partial\mathfrak{H}_g^0}{\partial a_l}\right\rangle^0. \tag{6.29}$$

Поскольку $dg_i \cdot V^i = 0$, мы получаем из (6.27)

$$V^i dg_i = -dA^0, \tag{6.30}$$

откуда, с помощью (1.2), (1.3) получаем

$$dA = \boldsymbol{v}d\boldsymbol{I} + dA^0\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{6.31}$$

Ошибка, допущенная в первых работах, посвященных релятивистской термодинамике, происходила из того, что выражение dI в формуле (6.31) заменялось на $d\boldsymbol{G}$, вместо того чтобы сделать правильную замену $d\boldsymbol{I} = d\boldsymbol{G} - d\boldsymbol{Q}$, как это следует из (1.1).

В случае однородного поля (5.25), когда справедливы (5.28) и (6.23), мы получим из (6.27), (1.2), (1.3) и (6.31)

$$\left.\begin{aligned} d\boldsymbol{I} &= \frac{\mathfrak{V}^0 d\mathfrak{p}^0}{c^2}\gamma\boldsymbol{v}, \\ dA &= \frac{\mathfrak{V}^0 d\mathfrak{p}^0}{c^2}\gamma v^2 - \mathfrak{p}\, d\mathfrak{V}, \end{aligned}\right\} \tag{6.32}$$

где

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}^0 \tag{6.33}$$

представляют собой объем и давление в системе S. Выражения (6.32) совпадают с выражениями (66) и (72) работы [4].

Равенство (4.6), которое для канонического ансамбля (4.17) запишется в виде

$$\iint \exp\{(\varphi + \vartheta^i P_i(p, x, t, a))/k\}\, dp dx = 1, \tag{6.34}$$

определяет функцию φ в зависимости от переменных состояния ϑ^i и (a). Дифференцирование этого равенства позволяет найти, что для бесконечно малых изменений $d\vartheta^i$ и da_l этих переменных

$$\iint (d\varphi + d\vartheta^i P_i + \vartheta^i d_{(a)} P_i)\, \mathfrak{P} dp dx = 0$$

или (6.35)

$$d\varphi + d\vartheta^i \langle P_i \rangle + \vartheta^i \langle d_{(a)} P_i \rangle = 0.$$

Если теперь продифференцировать равенство

$$k \langle \eta \rangle = \varphi + \vartheta^i \langle P_i \rangle, \tag{6.36}$$

получим с учетом (6.35)

$$kd \langle \eta \rangle = d\varphi + d\vartheta^i \langle P_i \rangle + \vartheta^i d \langle P_i \rangle = \vartheta^i (d \langle P_i \rangle - \\ - \langle d_{(a)} P_i \rangle). \tag{6.37}$$

Умножив это соотношение на $-n$, найдем, принимая во внимание (5.36), (5.15) и (6.25), изменение энтропии S:

$$dS = -\vartheta^i (dG_i - d_{(a)} I_i). \tag{6.38}$$

Для процессов такого типа, которые рассматриваются здесь, т. е. при постоянной скорости v, можно написать

$$\vartheta^i dg_i = \frac{1}{T^0} V^i dg_i = 0.$$

Таким образом, из соотношений (6.26) — (6.28) следует, что

$$dS = -\vartheta^i (dG_i - dI_i) = -\vartheta^i dQ_i \tag{6.39}$$

в соответствии с термодинамическим определением для обратимых процессов. Этот результат можно рассматривать как дополнительное доказательство справедливости статистического выражения для энтропии (5.36).

В заключение остановимся кратко на *процессах адиабатического* ускорения термодинамического тела, когда ускорение производится «бесконечно» медленно и плавно при постоянных a и без теплообмена. В этом случае можно считать неизмененным внутреннее термодинамическое состояние во всех последовательных мгновенных сопутствующих (собственных) системах S^0 контейнера; это значит, что H^0 и $\vartheta^0 = 1/T^0$ в течение процесса остаются неизменными.

Из выражения (5.17), которое может быть переписано в виде

$$G_i = \frac{H^0 + nkT^0}{c^2} V_i + \frac{nkT^0}{c\gamma} \delta_{i4}, \tag{6.40}$$

получаем

$$\Delta G_i = \frac{H^0 + nkT^0}{c^2} \Delta V_i + \frac{nkT^0}{c} \delta_{i4} \Delta\gamma^{-1} = \Delta I_i, \tag{6.41}$$

поскольку в этом процессе теплообмена не происходит. Для бесконечно малого процесса такого типа, поскольку $V^i dV_i = 0$,

$$V^i dI_i = \frac{nkT^0}{c} V^4 d\gamma^{-1} = nkT^0 \gamma d\gamma^{-1},$$

или же, согласно (1.2), (1.3),

$$dA = \boldsymbol{v} d\boldsymbol{I} - nkT^0 d\gamma^{-1}; \tag{6.42}$$

это соотношение заменяет собой для этого случая (6.31). Подробный статистический вывод (6.41) наиболее адекватным способом производится заменой последовательных сопутствующих систем одной плавно ускоряемой координатной системой, подобной той, которая вводится в гл. VIII, § 97 работы [9]. Но это требует обобщения статистической механики, рассмотренной в предыдущих разделах, на случай систем отсчета, движущихся с ускорением; в этот вопрос мы не станем здесь вдаваться. Однако в следующем разделе мы дадим по крайней мере статистический вывод соотношения (1.17) для процесса адиабатического ускорения; в последнем случае (1.17) переходит в равенство $dS = 0$.

7. Средние значения в каноническом ансамбле

Согласно (4.10), (4.17), газ, состоящий из n частиц и находящийся в тепловом равновесии в произвольной инерциальной системе S, описывается канонической плотностью вероятностей

$$\mathfrak{P} = \exp\{(\Phi + \vartheta^i P_i^g)/k\}, \tag{7.1}$$

где

$$\left.\begin{aligned} P_i^g &= p_i^g + \frac{V_i}{c^2} U_g, \\ p_i^g &= \sum_{r=1}^{n} p_i^{(r)}, \quad U_g = \sum_{r=1}^{n} U(x^{(r)}, t, a). \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

Таким образом, «полный обобщенный импульс» газа P_i^g зависит от «координат» (ξ_μ) (3.26) точек фазового пространства и от параметров V^i и a_l термодинамического состояния, т. е.

$$P_i^g = P_i^g(\xi_\mu, t, V^i, a). \tag{7.3}$$

Величина Φ, которая связана со свободной энергией (4.14), (4.18), определяется из равенства

$$\left.\begin{aligned} &\int \ldots \int \exp\{(\Phi + \vartheta^i P_i^g(\xi, t, V^i, a))/k\}\, d\xi = 1, \\ &d\xi = dp^{(1)} dx^{(1)} \ldots dp^{(n)} dx^{(n)}, \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

или

$$\exp\{-\Phi/k\} = \int \ldots \int \exp\{(\vartheta^i P_i^g(\xi, t, V^i, a))/k\}\, d\xi. \tag{7.5}$$

Связь между переменными ϑ^i и V^i определяется соотношением (4.16). Но для последующего рассмотрения более удобно в данный момент считать переменные ϑ^i и V^i не зависящими друг от друга. Для заданных V^i величина Φ, определенная согласно (7.5), оказывается функцией $\Phi(\vartheta^i, V^i, a)$ независимых переменных ϑ^i и a_l; эту функцию можно частным образом дифференцировать по ϑ^i или по a_l; все остальные величины при этом дифференцировании считаются постоянными.

Частным дифференцированием (7.4) по ϑ^i получим

$$\int \dots \int \left(\frac{\partial \Phi (\vartheta^i, V^i, a)}{\partial \vartheta^i} + P_i^g \right) \mathfrak{P} d\xi = 0. \tag{7.6}$$

Таким образом, принимая во внимание (7.1), (7.4) и соотношения (5.15) и (4.16),

$$G_i = \langle P_i^g \rangle = - \left[\frac{\partial \Phi (\vartheta^i, V^i, a)}{\partial \vartheta^i} \right]. \tag{7.7}$$

Здесь и далее квадратные скобки, окружающие любую функцию от (ϑ^i, V^i, a), показывают, что в этой функции сделана подстановка

$$\vartheta^i = \vartheta V^i = \vartheta^0 V^i. \tag{7.8}$$

Частное дифференцирование (7.6) по ϑ^k дает

$$\int \dots \int \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^i \partial \vartheta^k} + \frac{1}{k} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta^i} + P_i^g \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta^k} + P_i^g \right) \right\} \mathfrak{P} d\xi = 0, \tag{7.9}$$

или, если ввести сюда $\vartheta^i = \vartheta V^i$ и использовать (7.7)

$$\langle (P_i^g - \langle P_i^g \rangle)(P_k^g - \langle P_k^g \rangle) \rangle = -k \left[\frac{\partial^2 \Phi (\vartheta^i, V^i, a)}{\partial \vartheta^i \partial \vartheta^k} \right]. \tag{7.10}$$

В частности, для $k = i$ мы получаем следующее простое выражение квадрата флуктуации $\sigma \{P_i^g\}$ величины P_i^g:

$$\sigma^2 \{P_i^g\} = -k \left[\frac{\partial^2 \Phi (\vartheta^i, V^i, a)}{\partial \vartheta^{i^2}} \right]. \tag{7.11}$$

Аналогично этому, среднее значение «экспоненциальной вероятности» или энтропии может быть выражено через Ф и ее первые производные. Из (5.36), (5.37) и (7.7) следует, что

$$S = -k \langle \eta_g \rangle = -[\Phi + \vartheta^i \langle P_i^g \rangle] =$$
$$= - \left[\Phi (\vartheta^i, V^i, a) - \vartheta^i \frac{\partial \Phi (\vartheta^i, V^i, a)}{\partial \vartheta^i} \right]. \tag{7.12}$$

Частное дифференцирование (7.4) по a_l (ϑ^i, V^i постоянны!) дает

$$\int \cdots \int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a_l} + \frac{\vartheta^i V_i}{c^2} \frac{\partial U_g}{\partial a_l} \right) \mathfrak{P} d\xi = 0. \tag{7.13}$$

Таким образом, подставляя $\vartheta^i = \vartheta V^i$ и имея в виду, что $dU_g/\partial a_l$ является инвариантом, получим

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{\partial U_g}{\partial a_l} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial U_g^0}{\partial a_l} \right\rangle^0 = \left\langle \frac{\partial \mathfrak{H}_g^0}{\partial a_l} \right\rangle^0 = \\ &= \vartheta^{-1} \left[\frac{\partial \Phi(\vartheta^i, V^i, a)}{\partial a_l} \right] = (\vartheta^0)^{-1} \frac{\partial \Phi^0(\vartheta^0, a)}{\partial a_l}, \end{aligned} \tag{7.14}$$

где $\Phi^0(\vartheta^0, a) = n\varphi^0(\vartheta^0, a)$ представляет собой функцию, определенную согласно (4.13). В случае однородной системы, когда собственный объем $\mathfrak{V}^0$ может быть отождествлен с внешним параметром a, из (5.29), (6.24) и (7.14) вытекает следующее выражение для давления:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^0 = -\vartheta^{-1} \left[\frac{\partial \Phi(\vartheta^i, V^i, \mathfrak{V}^0)}{\partial \mathfrak{V}^0} \right] = -(\vartheta^0)^{-1} \frac{\partial \Phi^0(\vartheta^0, \mathfrak{V}^0)}{\partial \mathfrak{V}^0}. \tag{7.15}$$

Из предшествующих рассуждений следует, что все термодинамические функции системы могут быть получены простым дифференцированием, если известна функция $\Phi(\vartheta^i, V^i, a)$. Также могут быть получены типичные статистические величины, такие, как флуктуации P_i^g. Для обратимых процессов мы можем через Φ и ее производные выразить также и такие величины, как dI_i и dQ_i. Например, мы получим из (6.22), (6.26) и (7.14)

$$\begin{aligned} dA^0 &= (\vartheta^0)^{-1} \sum_l \frac{\partial \Phi^0(\vartheta^0, a)}{\partial a_l} da_l, \\ d_{(a)} I_i &= \left((\vartheta^0)^{-1} \sum_l \frac{\partial \Phi^0(\vartheta^0, a)}{\partial a_l} \right) V_i/c^2. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Исследуем теперь общую структуру функции $\Phi(\vartheta^i, V^i, a)$. Хотя эта функция для $\vartheta^i = \vartheta V^i$, конечно, имеет одно и то же значение в любой лоренцовской системе, она не является форм-инвариантной функцией (независимых) 4-векторов ϑ^i и V^i. Поскольку

$$\vartheta^i P_i^g = \vartheta^i p_i^g + \frac{\vartheta^i V_i}{c^2} U_g \tag{7.17}$$

представляет собой сумму двух членов, содержащих импульсы и координаты порознь, можно написать

$$\exp\{-\Phi/k\} = \exp\{-\Phi_p/k\}\cdot\exp\{-\Phi_q/k\}, \tag{7.18}$$
$$\Phi = \Phi_p + \Phi_q,$$

где выражение

$$\exp\{-\Phi_p(\vartheta^i)/k\} = \int\ldots\int\exp\{\vartheta^i p_i^g/k\}\,d\boldsymbol{p}^{(1)}\ldots d\boldsymbol{p}^{(n)} \tag{7.19}$$

представляет собой функцию только величин ϑ^i, тогда как

$$\exp\{-\Phi_q(\vartheta^i,\ V^i,\ a)\} =$$
$$= \int\ldots\int\exp\{\vartheta^i V_i U_g/kc^2\}\,d\boldsymbol{x}^{(1)}\ldots d\boldsymbol{x}^{(n)}, \tag{7.20}$$

вообще говоря, зависит от всех переменных $(\vartheta^i,\ V^i,\ a)$.

Частным дифференцированием (7.19) по ϑ^i можно получить, аналогично тому как это было сделано в (7.6), (7.7), для среднего значения 4-импульса p_i^g

$$\langle p_i^g\rangle = -\left[\frac{\partial\Phi_p(\vartheta^i)}{\partial\vartheta^i}\right], \tag{7.21}$$

который можно интерпретировать как «чистый» 4-импульс газа. Аналогично выражению (7.11), квадрат флуктуации 4-импульса равен

$$\sigma^2\{p_i^g\} = -k\left[\frac{\partial^2\Phi_p(\vartheta^i)}{\partial\vartheta^{i2}}\right]. \tag{7.22}$$

Вычитая (7.7) из (7.21), используя (7.2) и (7.18), мы можем получить выражение «4-импульса потенциальной энергии»:

$$\frac{\langle U_g\rangle}{c^2}V^i = \frac{\langle U_g^0\rangle^0}{c^2}V_i = -\left[\frac{\partial\Phi_q(\vartheta^i,\ V^i,\ a)}{\partial\vartheta^i}\right]. \tag{7.23}$$

Поскольку выражение для $p_i^g = \sum\limits_r p_i^{(r)}$ равно сумме

4-импульсов отдельных частиц, из (7.19) вытекает, что

$$\Phi_{\boldsymbol{p}}(\vartheta^i) = n\varphi_p(\vartheta^i), \tag{7.24}$$

причем $\varphi_p(\vartheta^i)$ находится из

$$\exp\{-\varphi_p(\vartheta^i)/k\} = \int \exp\{\vartheta^i p_i/k\}\, d\boldsymbol{p}. \tag{7.25}$$

Здесь обе величины p_i и

$$\vartheta^i = \{\boldsymbol{\vartheta},\ \vartheta^4\} \tag{7.26}$$

являются временноподобными 4-векторами.

В интеграле (7.25) удобно ввести в качестве новых переменных интегрирования компоненты вектора импульса $\boldsymbol{p}^0$ в лоренцовой системе S^0, временна́я ось которой направлена по ϑ^i. Тогда 4-скорость системы S^0 относительно S может быть записана как

$$V^i = \vartheta^i/\vartheta = \{\boldsymbol{V}, V^4\}. \tag{7.27}$$

В системе S^0 этот вектор имеет компоненты

$$V^{0i} = c\delta^{i4}. \tag{7.28}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\vartheta^i p_i = \vartheta V^i p_i = \vartheta V^{0i} p_i^0 = \vartheta c p_4^0 = -\vartheta E^0 = \\ = -\vartheta c\sqrt{m^2c^2 + |\boldsymbol{p}^0|^2}.\end{aligned} \tag{7.29}$$

Поскольку известно, что $d\boldsymbol{p}/E$ есть инвариант лоренцовского преобразования, якобиан, соответствующий преобразованию $\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p}^0$ [припомните соотношение (2.35)],

$$\frac{d(p)}{d(p^0)} = \frac{E}{E^0} = V^4/c + (\boldsymbol{V}\boldsymbol{p}^0)/E^0 = \vartheta^4/c\vartheta + (\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{p}^0)/\vartheta E^0, \tag{7.30}$$

в силу (7.27). Тогда (7.25) переходит в

$$\begin{aligned}\exp\{-\varphi_p(\vartheta^i)/k\} = \int \exp\{-\vartheta E^0/k\}\frac{\vartheta^4}{\vartheta c}\, d\boldsymbol{p}^0 + \\ + \int \exp\{-\vartheta E^0/k\}\frac{\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{p}^0}{\vartheta E^0}\, d\boldsymbol{p}^0.\end{aligned}$$

Последний интеграл очевидным образом обращается в нуль, так что $\exp\{-\varphi_p(\vartheta^i)/k\}$ имеет вид

$$\exp\{-\varphi_p(\vartheta^i)/k\} = \frac{\vartheta^4}{c\vartheta}\exp\{-f_p(\vartheta)/k\}. \tag{7.31}$$

Здесь $f_p(\vartheta)$ — функция инвариантного модуля

$$\vartheta = \sqrt{-\vartheta_i\vartheta^i/c}, \tag{7.32}$$

который определяется из равенства

$$\exp\{-f_p(\vartheta)/k\} = \int \exp\{-\vartheta E^0/k\}\, d\boldsymbol{p}^0 =$$

$$= (mc)^3 \iiint \exp\left\{-\frac{\vartheta mc^2}{k}\sqrt{1+\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right\} d\xi\cdot d\eta\cdot d\zeta. \tag{7.33}$$

Сравнение (7.33) с (4.13) показывает, что

$$\varphi_p^0(\vartheta^0) = f_p(\vartheta^0). \tag{7.34}$$

Функция $f_p(\vartheta)$, определяемая согласно (7.33), может быть выражена через функцию Ганкеля $H_2^{(1)}$ первого и второго родов с мнимым аргументом [11] следующим образом:

$$\exp\{-f_p(\vartheta)/k\} = (mc)^3 4\pi \int\limits_0^\infty \exp\left\{-\frac{\vartheta mc^2}{k}\sqrt{1+u^2}\right\} u^2 du =$$

$$= \frac{2\pi^2 m^2 ck}{i\vartheta} H_2^{(1)}(imc^2\vartheta/k). \tag{7.35}$$

Из соотношений (7.24), (7.31) получим для той части Φ, которая обозначена через Φ_p,

$$\Phi_p(\vartheta^i) = n\varphi_p(\vartheta^i) = n\left(f_p(\vartheta) - k\ln\frac{\vartheta^4}{\vartheta c}\right). \tag{7.36}$$

Эта часть Φ не зависит от сил, действующих на систему, которые оказывают влияние только на Φ_q, определенное согласно (7.20).

Для системы, состоящей из невзаимодействующих частиц, в которой потенциал имеет вид (7.2), получим по аналогии с (7.24)

$$\Phi_q(\vartheta^i, V^i, a) = n\varphi_q(\vartheta^i, V^i, a), \tag{7.37}$$

причем

$$\exp\{-\varphi_q/k\} = \int \exp\{\vartheta^i V_i U(x, t, a)/kc^2\}\, dx. \tag{7.38}$$

Если вместо переменных интегрирования x ввести новые переменные интегрирования — координаты x^0 в собственной системе S^0, в интеграл (7.38), который берется при постоянном времени t, следует подставить

$$dx = dx^0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{c}{V^4}\, dx^0. \tag{7.39}$$

Таким образом, (7,38) можно записать

$$\exp\{(-\varphi_q(\vartheta^i, V^i, a))/k\} = \exp\{(-f_q(\mu, a))/k\}\, \frac{c}{V^4}, \tag{7.40}$$

причем функция $f_q(\mu, a)$, определенная равенством

$$\exp\{f_q(\mu, a)/k\} = \int \exp\{(-\mu U^0(x^0, a))/k\}\, dx^0, \tag{7.41}$$

представляет собой инвариантную функцию a и инвариантной переменной

$$\mu = -\vartheta^i V_i/c^2. \tag{7.42}$$

Сравнение (7.41) с (4.13) показывает, что

$$\varphi_q^0(\vartheta^0, a) = f_q(\vartheta^0, a). \tag{7.43}$$

Величина μ положительна, когда ϑ^i близка к значению (7.8). Из соотношений (7.40), (7.36), (7.18) получим окончательно

$$\left.\begin{aligned} \Phi_q &= n\left(f_q(\mu, a) - k \ln \frac{c}{V^4}\right), \\ \Phi(\vartheta^i, V^i, a) &= n\left(f_p(\vartheta) + f_q(\mu, a) - k \ln \frac{\vartheta^4}{\vartheta V^4}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7.44}$$

Используя полученное выражение Φ, можно вычислить средние значения различных физических величин. Например, по формуле (7.7), 4-импульс G_i получается дифференцированием Φ по ϑ^i и последующей подстановкой $\vartheta^i = \vartheta V^i$. Поскольку

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta^i} = -\frac{\vartheta^i}{c^2 \vartheta}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta^i} = -\frac{V_i}{c^2}, \tag{7.45}$$

получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta^i} = n(-f_p'(\vartheta)\,\vartheta^i/\vartheta - f_q'(\mu,\ a)\,V_i)/c^2 - nk\left(\frac{\delta_{i4}}{\vartheta^4} + \frac{\vartheta^i}{c^2\vartheta^2}\right),$$

$$f_q'(\mu,\ a) = \frac{\partial f_q(\mu,\ a)}{\partial\mu}. \tag{7.46}$$

Таким образом, имея в виду, что

$$[\mu] = \vartheta = \vartheta^0, \tag{7.47}$$

получим окончательно

$$G_i = -\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta^i}\right] = n\,(f_p'(\vartheta^0) + f_q'(\vartheta^0,\ a))\,V_i/c^2 +$$
$$+ \frac{nk}{\vartheta^0}\frac{V_i}{c^2} + \frac{nk}{\vartheta^0\gamma c}\,\delta_{i4}. \tag{7.48}$$

Выражение (7.48) определяет G_i как функцию термодинамических переменных $(V_i,\ a)$ и $\vartheta^0 = 1/T^0$. В собственной системе S^0, где $V_i^0 = -c\delta_{i4}$, конечно, получится $G^0 = 0$, и, следовательно,

$$H^0 = -cG_4^0 = n\,(f_p'(\vartheta^0) + f_q'(\vartheta^0,\ a)), \tag{7.49}$$

так что (7.48) можно записать

$$G_i = \frac{H^0 + nkT^0}{c^2}\,V_i + \frac{nkT^0}{c\gamma}\,\delta_{i4}, \tag{7.50}$$

в соответствии с результатом (6.40).

Если продифференцировать затем (7.46) по ϑ^i, то с помощью (7.11) можно получить выражение для квадрата флуктуации величины P_i^g, которая, очевидно, линейно растет с увеличением n. Поскольку в то же время средние значения, т. е. G_i, зависят от n также линейно, получим оценку отношения

$$\frac{\sigma\{P_i^g\}}{\langle P_i^g\rangle} = 0\,(n^{-1/2}), \tag{7.51}$$

откуда видно, что, вообще говоря, флуктуации становятся несущественными для макроскопических тел. Мы уже упоминали о том, что эта особенность характерна для всех термодинамических величин.

Если подставить $V^i = \vartheta^i/\vartheta$ в функцию $\Phi(\vartheta^i, V^i, a)$, мы перейдем к функции $\Phi(\vartheta^i, a)$ от ϑ^i и a, которая, согласно (7.44), (7.42), может быть записана в виде

$$\Phi(\vartheta^i, a) = [\Phi(\vartheta^i, V^i, a)] = n(f_p(\vartheta) + f_q(\vartheta, a)). \quad (7.52)$$

Следовательно, как функция переменных термодинамического состояния (ϑ^i, a), функция Φ зависит только от нормы ϑ и внешних параметров (a):

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(\vartheta^i, a) = f(\vartheta, a), \\ &f(\vartheta, a) = n(f_p(\vartheta) + f_q(\vartheta, a)). \end{aligned}\right\} \quad (7.53)$$

Для соответствующей величины Φ^0 в собственной системе, которая находится согласно (4.10) — (4.13), по (7.34), (7.43) получается

$$\Phi^0(\vartheta^0, a) = n\varphi^0(\vartheta^0, a) = n(\varphi^0_p + \varphi^0_q) =$$
$$= n(f_p(\vartheta^0) + f_q(\vartheta^0, a),$$

или

$$\Phi^0(\vartheta^0, a) = f(\vartheta^0, a). \quad (7.54)$$

Так как $\vartheta = \vartheta^0$ является инвариантом, из соотношений (7.53), (7.54) следует, что

$$\Phi(\vartheta^i, a) = \Phi^0(\vartheta, a) = \Phi^0(\vartheta^0, a), \quad (7.55)$$

в полном соответствии с (4.18).

Как мы убедились, соотношение (7.7) позволяет вычислить 4-импульс G_i простым дифференцированием функции $\Phi(\vartheta^i, V^i, a)$ по ϑ^i и последующим использованием соотношения (7.8). Однако если мы сначала используем (7.8) в $\Phi(\vartheta^i, V^i, a)$, с помощью которой найдем функцию $\Phi(\vartheta^i, a)$, определенную согласно (7.53), а затем продифференцируем ее по ϑ^i, получим величину

$$P_i = -\frac{\partial\Phi(\vartheta^i, a)}{\partial\vartheta^i}, \quad (7.56)$$

которая в противоположность G_i является вектором. Действительно, из (7.53), (7.45), (7.8) можно получить

$$P_i = \frac{\partial f(\vartheta, a)}{\partial\vartheta}\frac{\vartheta_i}{c^2\vartheta} = n(f'_p(\vartheta^0) + f'_q(\vartheta^0, a))\, V_i/c^2$$

или с помощью (7.49)

$$P_i = \frac{H^0}{c^2} V_i. \tag{7.57}$$

Величина P_i была бы 4-импульсом системы, если бы система была свободной.

В заключение мы должны убедиться в том, что выражение (7.12) для энтропии не зависит от V^i. Из (7.46), (7.8), (7.53) получим

$$\left[\vartheta^i \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta^i}\right] = \vartheta n\,(f'_p(\vartheta) + f'_q(\vartheta, a)) = \vartheta f'(\vartheta, a), \tag{7.58}$$

и, следовательно, для энтропии (7.12)

$$S = -f(\vartheta, a) + \vartheta \frac{\partial f(\vartheta, a)}{\partial \vartheta}. \tag{7.59}$$

Видим, что это выражение не зависит от V^i, т. е.

$$S = S^0,$$

в соответствии с тем, что энтропия инвариантна. Кроме того, ясно, что энтропия не меняется, т. е.

$$dS = 0 \tag{7.60}$$

в процессе адиабатического ускорения, когда ϑ и (a) постоянны, а меняются только переменные V^i. Равенство (7.60) находится в соответствии с термодинамическим соотношением (1.17) для процессов, о которых идет речь.

Литература

1. *H. Ott.* Zs. f. Phys., 1963, **175**, 70.
2. *M. Planck.* Berl. Ber., 1907, p. 542; Ann. d. Phys., 1908, **76**, 1.
   F. Hasenöhrl. Wien. Ber., 1907, **116**, 1391.
   A. Einstein. Jahrb. f. Rad. und El., 1907, 4, 411; см.: *Эйнштейн.* Собр. науч. трудов, т. I, стр. 65, а также любой учебник по теории относительности.
3. *H. Arzelies.* Nuovo Cimento, 1965, **35**, 792.
   R. Penney. Nuovo Cimento, 1966, **43A**, 911.
   T. W. B. Kibble. Nuovo Cimento, 1966, **41B**, 72, 83, 84.
   A. Gamba. Nuovo Cimento, 1965, **37**, 1792; 1966, **41B**, 72.
   H. Arzelies. Nuovo Cimento, 1966, **41B**, 81.
   F. Rohrlich. Nuovo Cimento, 1966, **45B**, 76.
   L. de Broglie. Compt. Rend., 1966, **262**, 1235.

A. Starnskievicz. Act. Phys. Pol., 1966, **29**, 249.
L. A. Schmid. Nuovo Cimento, 1967, **47B**, 1.
P. T. Landsberg. Proc. Phys. Soc., 1966, **89**, 1007.

4. *C. Møller.* Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selskab, 1967, **36**, 1. Русский перевод: Эйнштейновский сборник, 1969—1970. «Наука», стр. 11.
5. *I. Brevik.* Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selskab, 1967, **36**, 3.
6. *L. Söderholm.* Свойства преобразования импульса и энергии количества тепла, переданного упругой системе, в релятивистской термодинамике. Nuowo Cimento, 1968, **57B**, 173.
7. См. первую работу Arzelies в [3].
8. *C. Møller.* Thermodynamics in the Special and General Theory of Relativity (1967) in «Old and New Problems in Elementary Particles». Ac. Press, New York, London, 1968. Русский перевод: Эйнштейновский сборник, 1969—1970. «Наука», стр. 40.
9. См., например, *C. Møller.* The Theory of Relativity. Oxford, 1952, § 21, Eq. (56).
10. *F. Lurcat, P. Mazur.* Nuovo Cimento, 1964, **31**, 140, *A. O. Barut.* Phys. Rev., 1958, **109**, 1376.
11. *F. Jüttner.* Ann. der Phys., 1911, **34**, 856; релятивистское рассмотрение идеального газа в собственной системе.

Х. Мёллер

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ИХ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ [1]

1. Введение и общий обзор вопроса

В классической нерелятивистской механике термодинамические потенциалы — свободная энергия по Гельмгольцу и Гиббсу — играют весьма существенную роль. Если термодинамический потенциал задан как функция переменных, определяющих термодинамическое состояние системы, все термодинамические функции в данном состоянии могут быть найдены частным дифференцированием потенциала. Другими словами, термодинамические свойства рассматриваемого тела полностью определяются через термодинамический потенциал. Для однородного изотропного тела, находящегося в тепловом равновесии и *покоящегося* в данной системе отсчета, состояние может задаваться двумя переменными, например объемом V^0 и температурой T^0. По определению, свободная энергия Гельмгольца дается выражением

$$F^0 = H^0 - T^0 S^0, \tag{1.1}$$

где H^0 и S^0 являются соответственно энергией и энтропией системы. Если F^0 задана как функция T^0 и V^0, энтропия и давление системы определяются формулами

$$S^0 = -\frac{\partial F^0(T^0, V^0)}{\partial T^0}, \qquad p^0 = -\frac{\partial F^0(T^0, V^0)}{\partial V^0}, \tag{1.2}$$

а с учетом (1.1) выражение для энергии примет вид

$$H^0 = F^0 - T^0 \frac{\partial F^0(T^0, V^0)}{\partial T^0}. \tag{1.3}$$

---

[1] C. M ø l l e r. The Thermodynamic Potentials in the Theory of Relativity and Their Statistical Interpretation. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selskab., 1969, 37, N 4.

В релятивистской теории соотношения (1.2) остаются еще справедливыми в собственной системе K^0 тела, но, вообще говоря, нет никаких оснований считать, что эти соотношения будут годиться в любой инерциальной системе K. Принцип относительности выдвигает лишь одно условие — соответствующие релятивистские соотношения должны быть ковариантными и должны сводиться к (1.2) в той системе отсчета, где рассматриваемое тело покоится. Однако Планк в своей классической работе [1] пытался найти законы преобразования термодинамических величин таким образом, что соотношения вида (1.2) остаются справедливыми и в произвольной инерциальной системе. Если обозначить скорость тела (или системы K^0) относительно системы K через v, то окажется, что

$$p = p^0, \qquad V = V^0 \sqrt{1-\beta^2}, \qquad \beta = \frac{v}{c}. \tag{1.4}$$

Давление представляет собой релятивистский инвариант; то же самое предполагается и для энтропии:

$$S = S^0. \tag{1.5}$$

Чтобы сохранить соотношение (1.2) и для преобразованных величин, следует принять планковские законы преобразования для свободной энергии и температуры:

$$F = F^0 \sqrt{1-\beta^2}, \tag{1.6}$$

$$T_p = T^0 \sqrt{1-\beta^2}. \tag{1.7}$$

И действительно, из (1.2)—(1.7) легко получить соотношения

$$S = -\frac{\partial F(T_p, V)}{\partial T_p}, \qquad p = -\frac{\partial F(T_p, V)}{\partial V}, \tag{1.8}$$

совпадающие по форме с выражениями (1.2), справедливыми в собственной системе отсчета.

На основе этих соображений Планк ввел температуру T_p, отнесенную к произвольной инерциальной системе K, определив ее согласно (1.7). Эта точка зрения нашла поддержку в появившейся сравнительно недавно работе Балеску [2]. Однако значительно раньше Отт [3] привел веские аргументы в пользу введения другой температуры

T_0, определив ее как

$$T_0 = T^0/\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (1.9)$$

Фактически именно эта формула появляется совершенно однозначно [см. (1.35)], если поставить условие, чтобы второй закон термодинамики для обратимых процессов имел в любой инерциальной системе тот же вид

$$dS = \frac{\partial Q_{\text{обр}}}{T_0}, \qquad (1.10)$$

что и в собственной системе, где, как обычно,

$$dS^0 = \frac{dQ^0_{\text{обр}}}{T^0}. \qquad (1.11)$$

Бурная дискуссия, развернувшаяся в литературе после появления работы Отта, помогла выяснению важного обстоятельства: сам по себе принцип относительности не приводит однозначным образом к понятию о температуре, отнесенной к произвольной системе K. Вопрос заключается в том, что закон преобразования температуры зависит от того, какие классические соотношения термодинамики, справедливые в собственной системе отсчета, хотят сохранить неизменными при преобразованиях Лоренца. Можно заранее сказать, что представляется вовсе не самым естественным взять в качестве основы для определения температуры требование инвариантности соотношений (1.2) и (1.8). Во-первых, эти соотношения относятся к довольно частному случаю однородного изотропного тела и куда более естественно постулировать инвариантность формы первого и второго законов термодинамики, которые,— как это принято считать, годятся для любой термодинамической системы. Во-вторых, в произвольной инерциальной системе для определения состояния однородного и изотропного тела необходимо задать пять (а вовсе не два) независимых переменных. Например, кроме температуры T^0 и объема V^0, еще три компоненты скорости v. Точно так же обстоит дело и в нерелятивистской теории, но здесь внутренние термодинамические свойства полностью независимы от внешних особенностей движения тела. В релятивистской теории это совсем не так, поскольку инертная масса тела зависит от его внутреннего состояния. Поэтому следует ожидать, что разумное релятивистское обобщение соотношений (1.2) должно содержать *пять* уравнений, выражающих пять термодинамических величин в виде частных производных от релятивистских потенциалов по пяти подходящим образом выбранным независимым переменным, описывающим состояние системы. Эти соотношения должны, конечно, сводиться к двум соотношениям (1.2) в собственной системе K^0.

Во второй части этой работы мы покажем, что именно так и будет, если пользоваться той формулировкой релятивистской термодинамики, которая, как было показано недавно [4], предопределяется релятивистской статистической механикой. Ниже излагается вкратце релятивистская формулировка первого и второго начала термодинамики, полученная в только что упомянутой работе.

Имея в виду рассмотренный выше произвол в общем определении температуры, было предложено отказаться от введения отдельной температуры для каждой инерциальной системы. Следовательно, когда мы говорим о температуре тела, при этом подразумевается просто собственная температура, измеренная термометром, покоящимся относительно тела. В любой инерциальной системе K, отличной от системы K^0, представляется более правильным говорить о 4-векторе температуры T^i, определенном впервые Арцели [5]. Если V^i является 4-вектором скорости тела с компонентами

$$V^i = \{\gamma \boldsymbol{v}, \gamma c\}, \qquad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \tag{1.12}$$

температурный вектор определяется в виде

$$T^i = \frac{T^0 V^i}{c}. \tag{1.13}$$

В собственной системе K^0 этот 4-вектор имеет всего лишь одну отличную от нуля компоненту T^{04}, которая равна собственной температуре тела T^0. В любой другой системе K четвертая компонента T^4 равна оттовской температуре (1.9).

Для многих термодинамических вопросов более удобно ввести величину, обратную собственной температуре,

$$\vartheta^0 = \frac{1}{T^0} \tag{1.14}$$

в качестве меры теплового состояния. Тогда, если, кроме того, ввести функцию

$$\Phi^0(\vartheta^0, V^0) = \vartheta^0 F^0 \tag{1.15}$$

(Φ^0 — это так называемый планковский потенциал), соотношения (1.2) примут вид

$$H^0 = \frac{\partial \Phi^0(\vartheta^0, V^0)}{\partial \vartheta^0}, \qquad p^0 = -\frac{1}{\vartheta^0}\frac{\partial \Phi^0(\vartheta^0, V^0)}{\partial V^0}. \tag{1.16}$$

Поскольку ϑ^0 с ростом температуры стремится к нулю, Трусделл [6] назвал величину ϑ^0 «холодностью». Вместо температурного вектора T^i довольно удобно ввести 4-вектор холодности ϑ^i, определив его как

$$\vartheta^i = \vartheta^0 V^i. \tag{1.17}$$

Этот вектор в собственной системе имеет компоненты

$$\vartheta^{0i} = \delta_4^i c\vartheta^0 = \delta_4^i c/T^0. \tag{1.18}$$

В произвольной инерциальной системе K четвертая компонента ϑ^4 равна обратной величине планковской температуры (1.7), умноженной на c. В отличие от 4-скорости, удовлетворяющей соотношению

$$V_i V^i = -c^2, \tag{1.19}$$

компоненты ϑ^i вектора холодности представляют собой четыре независимые переменные, которые вполне могут заменить T^0 и v в качестве переменных, описывающих состояние системы. Таким образом, термодинамическое состояние однородного изотропного тела полностью определяется пятью переменными (ϑ^i, V^0) или (ϑ^i, p).

Вектор холодности представляет собой временноподобный 4-вектор, модуль которого равен

$$\vartheta(\vartheta^i) = \sqrt{-\vartheta_i\vartheta^i}/c. \tag{1.20}$$

Из соотношений (1.17) — (1.19) вытекает, что значение инварианта ϑ равно холодности

$$\vartheta = \vartheta^0 \tag{1.21}$$

и что

$$V^i = \vartheta^i/\vartheta. \tag{1.22}$$

Следовательно, задание ϑ^i определяет холодность и 4-скорость (а значит, и $\boldsymbol{v}$) согласно формулам (1.21) и (1.22).

Теперь уже можно дать подходящие релятивистские выражения для первого и второго законов термодинамики. Мы сделаем это, следуя работе [4]. Для бесконечно малого процесса мы записываем

$$\text{первое начало} \quad dG_i = dI_i + dQ_i, \tag{1.23}$$

$$\text{второе начало} \quad dS \geqslant -\vartheta^i dQ_i. \tag{1.24}$$

В формуле (1.23) dG_i имеет компоненты

$$dG_i = \{d\boldsymbol{G},\ -dH/c\}, \tag{1.25}$$

т. е. представляет собой изменение 4-импульса тела

$$G_i = \{\boldsymbol{G},\ -H/c\}. \tag{1.26}$$

Что касается величины dQ_i

$$dQ_i = \{d\boldsymbol{Q}, -dQ/c\}, \tag{1.27}$$

то она определяет 4-импульс тепла, приобретенного в ходе термодинамического процесса. Через dQ обозначено количество тепла, переданного системе, а через $d\boldsymbol{Q}$ — импульс, переданный системе вместе с теплом. Наконец,

$$dI_i = \{d\boldsymbol{I},\ -dA/c\} \tag{1.28}$$

представляет собой 4-импульс внешних механических сил. Это означает, что $d\boldsymbol{I}$ представляет собой импульс, передаваемый системе внешними силами (другими словами, интеграл по времени от полной механической силы, действующей на тело), а dA — работу, совершаемую этими силами во время процесса.

В релятивистской термодинамике первое начало может быть выражено всего лишь одним уравнением — законом сохранения энергии. Принимая во внимание симметрию импульса и энергии в теории относительности, следует дополнить второй закон тремя уравнениями, выражающими закон сохранения импульса. Вообще говоря, ни G_i, ни dG_i или dI_i не являются 4-векторами, однако разности

$$dQ_i = dG_i - dI_i \tag{1.29}$$

оказываются ковариантными компонентами 4-вектора для любого процесса и для любой термодинамической системы [7, 8, 9]. Этот важный результат был получен впервые для жидкости [7]. Затем было получено доказательство для произвольной термодинамической системы [8, 9]. Для доказательства справедливости этой теоремы очень существенно, что dI_i, по определению, включает в себя импульс и работу только настоящих «механических» сил. Другими словами, сила, действующая на бесконечно малый элемент тела, комбинируется со скоростью совершения работы (мощностью этой силы), образуя обычный 4-вектор силы Минковского.

Для *обратимого* процесса удается показать [7], что 4-импульс $dQ_i^{\text{обр}}$ переданного тепла пропорционален 4-скорости, т. е. что

$$dQ_i^{\text{обр}} = \frac{dQ^0_{\text{обр}}}{c^2} V_i. \tag{1.30}$$

Поскольку ϑ^i и dQ_i являются 4-векторами, правая часть выражения для второго начала (1.24) оказывается инвариантом, значение которого, согласно (1.18) и (1.27), равно

$$-\vartheta^i dQ_i = -\vartheta^{0i}\, dQ_i^0 = -\frac{c dQ_4^0}{T^0} = \frac{dQ^0}{T^0}. \tag{1.31}$$

Следовательно, принимая во внимание (1.5), можно считать, что (1.24) эквивалентно

$$dS^0 \geqslant \frac{dQ^0}{T^0}. \tag{1.32}$$

Но мы хорошо знаем, что это соотношение справедливо в собственной системе отсчета. Так как знак равенства в (1.32) годится исключительно для обратимых процессов, отсюда следует, что и в (1.24) знак равенства подразумевает, что рассматривается обратимый процесс.

Для таких процессов $dQ_i^{\text{обр}}$ определяется по (1.30), причем для $i = 4$ мы получим

$$dQ_{\text{обр}} = dQ^0_{\text{обр}}/\sqrt{1-\beta^2}, \tag{1.33}$$

имея в виду (1.12) и (1.27). Таким образом, для обратимых процессов (1.24) принимает вид

$$dS = -\vartheta^i dQ_i^{\text{обр}} = \frac{dQ_{\text{обр}}^0}{T^0} = \frac{dQ_{\text{обр}}\sqrt{1-\beta^2}}{T^0}, \tag{1.34}$$

где учтены (1.31) и (1.33). Последнее выражение можно переписать еще и в виде (1.10)

$$dS = \frac{dQ_{\text{обр}}}{T_0}, \tag{1.35}$$

где введена температура Отта T_0, согласно (1.9). Однако следует подчеркнуть, что (1.24) для необратимых процессов, вообще говоря, вовсе не эквивалентно

$$dS > \frac{dQ}{T_0}. \tag{1.36}$$

Последнее соотношение годится только для отдельных необратимых процессов, таких, например, как чистая теплопроводность.

После этого краткого обзора общих законов релятивистской термодинамики мы дадим во второй части работы соответствующее релятивистское обобщение термодинамических потенциалов и классических соотношений типа (1.16).

2. Релятивистски инвариантные термодинамические потенциалы однородных изотропных тел

В этой части рассматривается в качестве термодинамической системы жидкость, заключенная в сосуд, собственный объем которого равен V^0. Жидкость испытывает давление только со стороны стенок сосуда, причем это давление, естественно, направлено по нормали. В условиях термодинамического равновесия 4-импульс жидкости имеет в произвольной лоренцовской системе K компоненты [10]

$$G_i = \{\boldsymbol{G}, -H/c\} = $$
$$= \{(H^0 + p^0V^0)\gamma\boldsymbol{v}/c^2,\ -(H^0 + \beta^2 p^0 V^0)\gamma/c\}, \tag{2.1}$$

где верхний значок «0» относится к собственной системе K^0 жидкости. Величины G_i не образуют компоненты 4-вектора. Тем не менее величина V^iG_i является инвариантом, потому что в произвольной системе K, согласно (1.12) и (2.1),

$$V^i G_i = (H^0 + p^0 V^0)\gamma^2\beta^2 - (H^0 + \beta^2 p^0 V^0)\gamma^2, \qquad (2.2)$$
$$V^i G_i = -H^0.$$

Следовательно, инвариант $-V^i G_i$ равен просто энергии покоя.

Кроме 4-импульса, мы рассмотрим еще две другие величины P_i и E_i, которые в отличие от G_i представляют собой 4-векторы. Первый из них определяется следующим образом:

$$P_i = H^0 V_i/c^2; \qquad (2.3)$$

этот вектор был бы 4-вектором импульса системы, если бы система была свободной. Придерживаясь терминологии Ландсберга [11], мы назовем P_i *обобщенным* 4-импульсом. Второй 4-вектор E_i определяется согласно

$$E_i = (H^0 + p^0 V^0) V_i/c^2. \qquad (2.4)$$

Сопоставление последнего выражения с (2.1) показывает, что пространственные компоненты E_i просто равны компонентам импульса $\boldsymbol{G}$. Четвертая компонента имеет вид

$$E_4 = -E/c, \qquad (2.5)$$

причем

$$E = -cE_4 = (H^0 + p^0 V^0)\gamma = H + p^0 V^0 \gamma (1 - \beta^2)$$

или, с учетом (1.4),

$$E = H + pV. \qquad (2.6)$$

Величину E, определенную согласно (2.6), обычно называют энтальпией и, естественно, E_i назвать 4-энтальпией. Очевидно, что величины G_i, E_i, P_i связаны между собой соотношениями

$$\left.\begin{aligned} E_i &= P_i + p^0 V^0 V_i/c^2, \\ G_i &= E_i + \delta_{i4} pV/c. \end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

Из формул (2.2), (2.3) и (2.4) следует, что

$$V^i E_i = -(H^0 + p^0 V^0) = -E^0, \qquad (2.8)$$

где через E^0 обозначена энтальпия в собственной системе отсчета и, следовательно,

$$V^i P_i = V^i G_i = -H^0. \tag{2.9}$$

Дифференцируя второе соотношение (2.7), получим

$$dG_i = dE_i + \delta_{i4} d(pV)/c.$$

Таким образом, первое начало термодинамики (1.23) можно переписать в следующем виде:

$$dE_i = dJ_i + dQ_i, \tag{2.10}$$

где

$$dJ_i = dI_i - \delta_{i4} d(pV)/c = \{d\boldsymbol{I}, -[dA + d(pV)]/c\}, \tag{2.11}$$

причем принято во внимание (1.28). В отличие от dI_i величина dJ_i является 4-вектором. Это немедленно вытекает из (2.10), так как и dE_i и dQ_i. являются 4-векторами. Значит, $\vartheta^i dJ_i$ будет инвариантом, значение которого равно

$$\vartheta^i dJ_i = \vartheta^{0i} dJ_i^0 = c\vartheta^0 dJ_4^0 = -\vartheta^0 [dA^0 + d(p^0V^0)]. \tag{2.12}$$

В этой цепи равенств использованы (1.18) и (2.11). Для обратимого процесса работа в собственной системе dA^0 равна

$$dA^0 = -p^0 dV^0. \tag{2.13}$$

Следовательно,

$$\vartheta^i dJ_i^{\text{обр}} = -\vartheta^0 V^0 dp^0 = -\vartheta V^0 dp, \tag{2.14}$$

где приняты во внимание (1.4) и (1.21).

Используя первое и второе начало термодинамики в форме, представленной соотношениями (1.24) и (2.10), применимыми для обратимых процессов, мы получим

$$dS = -\vartheta^i dQ_i^{\text{обр}} = -\vartheta^i dE_i + \vartheta^i dJ_i^{\text{обр}}$$

или, учитывая (2.14),

$$dS = -\vartheta^i dE_i - \vartheta V^0 dp. \tag{2.15}$$

Поскольку соотношения (2.7) связывают величины E_i, P_i, G_i, последнее уравнение можно переписать также и в виде

$$dS = -\vartheta^i dP_i + \vartheta p dV^0 \tag{2.16}$$

и также

$$dS = -\vartheta^i dG_i + \frac{\vartheta^4 p}{c} dV, \tag{2.17}$$

где величина

$$\vartheta^4 = \vartheta^0 \gamma c = \vartheta \gamma c \tag{2.18}$$

является четвертой компонентой вектора холодности. Здесь мы использовали (1.4), (1.12) и (1.19), из которых следует, что

$$\vartheta^i V_i = -\vartheta c^2. \tag{2.19}$$

Теперь мы можем уже ввести две инвариантные функции состояния Φ и Ψ, определив их следующим образом:

$$\Phi \equiv -\vartheta^i P_i - S, \tag{2.20}$$
$$\Psi \equiv -\vartheta^i E_i - S. \tag{2.21}$$

Поскольку ϑ^i пропорционально V_i, из (2.9) следует, что Φ можно определить так же, как

$$\Phi = \vartheta^i G_i - S. \tag{2.22}$$

Согласно соотношениям (2.7), (2.18) и (1.4) функции Φ и Ψ связаны между собой уравнением

$$\Psi = \Phi + \vartheta p V^0. \tag{2.23}$$

Дифференцируя выражения (2.20)—(2.22) и используя различные представления dS (2.15)—(2.17), легко получить

$$d\Phi = -P_i d\vartheta^i - \vartheta p dV^0, \tag{2.24}$$

$$d\Psi = -E_i d\vartheta^i + \vartheta V^0 dp, \tag{2.25}$$

$$d\Phi = -G_i d\vartheta^i - \vartheta^4 p dV/c. \tag{2.26}$$

Для однородного изотропного тела, рассматриваемого здесь, состояние термодинамического равновесия определяется пятью независимыми переменными. Если выбрать (ϑ^i, V^0) за переменные, характеризующие термодинамическое состояние системы, любая функция состояния системы может быть представлена в зависимости от этих переменных. В частности, такие переменные удобны для функции Ф. Если известна функция $\Phi(\vartheta^i, V^0)$, можно подсчитать пять остальных функций состояния, дифференцируя Ф относительно пяти независимых переменных (ϑ^i, V^0). Действительно, из (2.4) мы получим для обобщенного 4-импульса и давления:

$$P_i = -\frac{\partial\Phi(\vartheta^i, V^0)}{\partial\vartheta^i}, \qquad p = -\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial\Phi(\vartheta^i, V^0)}{\partial V^0}. \tag{2.27}$$

Что касается выражения для всех остальных функций состояния, то их можно получить из (2.7) и (2.20). Например, для энтропии мы получим

$$S = -\Phi(\vartheta^i, V^0) + \vartheta^i\frac{\partial\Phi(\vartheta^i, V^0)}{\partial\vartheta^i}. \tag{2.28}$$

С другой стороны, если выбрать в качестве переменных, описывающих состояние системы, величины ϑ^i и p, то из (2.25) легко получить следующие выражения для 4-энтальпии и собственного объема:

$$E_i = -\frac{\partial\Psi(\vartheta^i, p)}{\partial\vartheta^i}, \qquad V^0 = \frac{1}{\vartheta}\frac{\partial\Psi(\vartheta^i, p)}{\partial p}. \tag{2.29}$$

Наконец, выбирая в качестве переменных ϑ^i и V, из (2.26) мы найдем 4-импульс и давление

$$G_i = -\frac{\partial\Phi(\vartheta^i, V)}{\partial\vartheta^i}, \qquad p = -\frac{1}{\vartheta^4}\frac{\partial\Phi(\vartheta^i, V)}{\partial V}. \tag{2.30}$$

Релятивистски инвариантная функция состояния, являющаяся функцией тензорных переменных, описывающих термодинамическое состояние системы, может зависеть только от инвариантных комбинаций этих переменных. Единственной инвариантной величиной, которую можно получить из ϑ^i, будет модуль этого вектора, определяемый согласно (1.20). Поскольку V^0 также является инвариантом, функция $\Phi(\vartheta^i, V^0)$ должна быть записана в следующей форме:

$$\Phi(\vartheta^i, V^0) = f(\vartheta, V^0), \tag{2.31}$$

причем f представляет собой инвариантную функцию, характеризующую рассматриваемую материальную систему. В точности так же, поскольку давление p является инвариантом, Ψ должно иметь вид

$$\Psi(\vartheta^i, p) = g(\vartheta, p), \tag{2.32}$$

очевидно, функция $g(\vartheta, p)$ связана с функцией $f(\vartheta, V^0)$ соотношением

$$g(\vartheta, p) = f(\vartheta, V^0) + \vartheta p V^0, \tag{2.33}$$

вытекающим из (2.23).

Очевидно, любая функция состояния, зависящая только от (ϑ, V^0) или (ϑ, p), является релятивистски инвариантной, т. е. не зависящей от скорости. Из соотношений (2.27), (2.29), а также (2.31), (2.32) мы получим

$$p = -\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial f(\vartheta, V^0)}{\partial V^0}, \qquad V^0 = \frac{1}{\vartheta}\frac{\partial g(\vartheta, p)}{\partial p}. \tag{2.34}$$

Таким образом, p и V^0 являются функциями (ϑ, V^0) и (ϑ, p) соответственно, причем инвариантными функциями благодаря инвариантности этих величин. Легко видеть, что правая часть (2.28) также является функцией только ϑ и V^0 в соответствии с тем, что энтропия — инвариантная функция. Действительно, с помощью (2.31) и (2.28) мы получим

$$S = -f(\vartheta, V^0) + \vartheta^i \frac{\partial\vartheta}{\partial\vartheta^i}\frac{\partial f(\vartheta, V^0)}{\partial\vartheta}, \tag{2.35}$$

а дифференцируя ϑ в (1.20) по ϑ^i, можно прийти к выражениям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\vartheta}{\partial\vartheta^i} = -\vartheta^i/c^2\vartheta, \\ &\vartheta^i\frac{\partial\vartheta}{\partial\vartheta^i} = -\vartheta^i\vartheta_i/\vartheta\cdot c^2 = \vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

Однако функция состояния $\Phi(\vartheta^i, V)$, являясь функцией переменных (ϑ^i, V), зависит не только от ϑ и V, но также и от четвертой компоненты вектора холодности ϑ^4. Действительно, поскольку

$$V^0 = \gamma V = \frac{V\vartheta^4}{c\vartheta}, \tag{2.37}$$

из (2.31) можно получить

$$\Phi(\vartheta^i, V) = f\left(\vartheta, \frac{V\vartheta^1}{c\vartheta}\right). \tag{2.38}$$

Дифференцируя это выражение по ϑ^i (при постоянном V) и используя (2.30) и (2.27), мы снова возвращаемся к выражениям (2.7).

Умножив выражения (2.8) и (2.9) на ϑ^0, мы получим

$$\left.\begin{aligned} \vartheta^i E_i &= -\vartheta^0 (H^0 + p^0 V^0), \\ \vartheta^i P_i &= \vartheta^i G_i = -\vartheta^0 H^0. \end{aligned}\right\} \tag{2.39}$$

Из этих выражений виден физический смысл инвариантных функций Φ и Ψ, определенных согласно (2.20) и (2.21). Очевидно, мы имеем

$$\Phi = \Phi^0, \tag{2.40}$$

где

$$\Phi^0 = \vartheta^0 H^0 - S^0 = \vartheta^0 F^0 (\vartheta^0, V^0) \tag{2.41}$$

представляет собой просто классический потенциал (1.15), получаемый умножением свободной энергии Гельмгольца на холодность. Аналогично получим

$$\Psi = \Psi^0, \tag{2.42}$$

где

$$\Psi^0 = \vartheta^0 (H^0 + p^0 V^0) - S^0 = \vartheta^0 G^0 \tag{2.43}$$

и

$$G^0 = F^0 + p^0 V^0 \tag{2.44}$$

будет классической свободной энергией Гиббса.

Следовательно, Φ и Ψ могут служить естественным релятивистским обобщением классических термодинамических потенциалов — свободной энергии Гельмгольца и Гиббса. Они обладают всеми теми свойствами, которые требуются от релятивистских потенциалов (они были перечислены в первой части работы). Формулы (2.27)—(2.30) показывают, как можно получить все термодинамические функции системы путем частного дифференцирования функций Φ и Ψ по соответствующим переменным, определяющим термодинамическое состояние системы. В собственной системе три уравнения из пяти уравнений (2.27) просто выражают обращение в нуль обобщенного импульса, а два остающиеся уравнения тождественны с классическими уравнениями (1.16), которые эквивалентны (1.2). В отличие от уравнений (2.27)—(2.30), охватывающих трансформационные свойства всех термодинамических функций состояния при преобразовании Лоренца, соотношение Планка (1.8) представляет собой всего-навсего правильную трактовку уравнения (1.2) в собственной системе отсчета. Сверх того, что заключено в (1.2), в соотношении (1.8) содержатся правила преобразования S, p, V. Функция $F(T_p, V)$ вовсе не определяет всех термодинамических свойств системы. Например, она не дает уравнения, аналогичного (1.3), с помощью которого определяется энергия, не говоря уже о компонентах импульса $\boldsymbol{G}$. Следовательно, свободная энергия $F(T_p, V)$, определенная согласно (1.6), не обладает всеми свойствами термодинамического потенциала.

Из (2.31), (2.32), а также (2.40)—(2.44) мы получим, так как $\vartheta = \vartheta^0$, $p = p^0$,

$$\left.\begin{aligned} \Phi^0 &= f(\vartheta^0, V^0) = \vartheta^0 F^0(\vartheta^0, V^0), \\ \Psi^0 &= g(\vartheta^0, V^0) = \vartheta^0 G^0(\vartheta^0, V^0). \end{aligned}\right\} \tag{2.45}$$

Функции $F^0(\vartheta^0, V^0)$ и $G^0(\vartheta^0, V^0)$ можно в принципе определить обычными термодинамическими экспериментами, производимыми с покоящимися телами.

Но тогда, согласно (2.45), можно определить также функции $f(\vartheta^0, V^0)$ и $g(\vartheta^0, V^0)$ в зависимости от переменных, определяющих состояние системы. Заменив в этих функциях ϑ^0 на ϑ, а p^0 на p, мы получим выражения (2.31), (2.32) для релятивистских потенциалов $\Phi(\vartheta^i, V)$ и $\Psi(\vartheta^i, p)$. Согласно (2.38), можно определить также и функцию $\Phi(\vartheta^i, V)$ от переменных (ϑ^i, V). И тогда с помощью (2.27) — (2.30) можно подсчитать уже все термодинамические функции состояния в произвольной инерциальной системе.

3. Статистическая интерпретация релятивистских потенциалов

Исторически возникновение статистической механики связано с желанием добиться «рационального объяснения» законов термодинамики и тем самым установить способ подсчета термодинамических функций состояния системы, если известна ее механическая структура. Для нерелятивистской механики статистический метод, предложенный Гиббсом, дает наиболее общее решение поставленной задачи. В работе [4] приведено релятивистское обобщение классического метда Гиббса, на основании которого можно непосредственно интерпретировать релятивистские термодинамические потенциалы, введенные в разделе 2.

Рассмотрим систему, состоящую из n частиц с собственной массой m, которые в заданной инерциальной системе K^0 взаимодействуют с силами, которые могут быть получены из механического потенциала, не зависящего от времени:

$$U_g^0 (x_1^0, \ldots, x_r^0, \ldots, x_n^0, a_l). \tag{3.1}$$

Здесь через a_l обозначены инвариантные параметры, описывающие конфигурацию внешних систем, оказывающих влияние на рассматриваемую систему. U_g^0 содержит также взаимодействие $U^0 (x_r^0, a_l)$ отдельных частиц с внешними системами (например, со стенками контейнера) наряду с взаимодействием $W^0 (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ между самими частицами. Следовательно, мы исходим из того, что силы, действующие на частицы, могут быть найдены из потенциала вида

$$U_g^0 = \sum_{r=1}^{n} U^0 (x_r^0, a_l) + W^0 (x_1^0, \ldots, x_n^0). \tag{3.2}$$

Это предположение в известной мере ограничивает применимость теории, поскольку в теории относительности, вообще говоря, нельзя описать взаимодействие между частицами столь простым способом. В общем случае взаимодействие нужно описывать с помощью промежуточного поля, которое должно рассматриваться в качестве независимой физической системы с бесконечным числом степеней свободы. Однако для газа, состоящего из частиц с массой порядка массы нуклонов, определенно удовлетворяется соотношение

$$\frac{kT^0}{mc^2} \ll 1, \tag{3.3}$$

где k — постоянная Больцмана, из которого вытекает, что рассматриваемая система может рассматриваться как нерелятивистская в K^0.

Действительно, если m — масса нуклона, собственная температура T^0 будет порядка 10^{13} °K для того, чтобы левая часть неравенства (3.3) стала по порядку величины равной единице, и, насколько мы сейчас знаем, ни в какой части Вселенной такие температуры в настоящее время не достигаются. Нарушение условия (3.3) может иметь место для электронов в очень специальных условиях. Исключая эти редкие случаи из нашего рассмотрения, мы можем описывать взаимодействие в системе K^0 с помощью потенциала вида (3.2). Что касается взаимодействия частиц, то оно учитывается таким образом лишь приближенно (хотя практически во всех без исключения случаях это приближение весьма удовлетворительное); для системы невзаимодействующих частиц, когда $W^0 = 0$, подробные расчеты, произведенные в [4], являются точными.

В последующем изложении потенциал U^0 рассматривается как инвариантный скаляр, что означает следующее: в каждой лоренцовской системе K вводится функция $U_g(x_1^i, \ldots, x_n^i)$ пространственно-временны́х координат частиц, определяемая так, что

$$U_g(x_1^i, \ldots, x_r^i, \ldots, x_n^i, a) = U_g^0(x_1^0, \ldots, x_r^0, \ldots, x_n^0, a), \tag{3.4}$$

где $x_r^i = \{x_r, ct_r\}$ и x_r^0 связаны между собой лоренцовским преобразованием от системы K^0 к K. Таким образом, U_g получается из U_g^0 исключением аргументов x_r^0 в последней функции с помощью преобразования Лоренца. Если принять все временны́е координаты в этой функции равными одному и тому же значению t

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_n = t, \tag{3.5}$$

мы придем к заданной функции пространственных координат x_r и одной временно́й переменной t

$$U_g(x_1, \ldots, x_r, \ldots, x_n, t, a). \tag{3.6}$$

Эта функция зависит, конечно, от внешних параметров (a), а также от параметров преобразования Лоренца, в частности, от относительной скорости v систем K^0 и K. Следовательно, для преобразования Лоренца частного вида, когда

$$x_r^0 = \gamma(x_r - vt_r), \quad y_r^0 = y_r, \quad z_r^0 = z_r \tag{3.7}$$

функция (3.6) имеет вид

$$U_g(\ldots, x_r, y_r, z_r, \ldots, t, a) = \\ = U_g^0(\ldots, \gamma(x_r - vt), \ y_r, z_r, \ldots, a). \qquad (3.8)$$

Допустим теперь, что рассматриваемая система (газ из n частиц) находится в состоянии термодинамического равновесия, которое в лоренцовской системе K описывается переменными состояния (ϑ^i, a). В этой ситуации у нас нет исчерпывающего знания *механического* состояния, которое определяется $6n$ «координатами»

$$(\xi_\mu) = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_r, \boldsymbol{x}_r, \ldots, \boldsymbol{p}_n \boldsymbol{x}_n) \qquad (3.9)$$

точек в фазовом пространстве Σ (K) системы в K. Согласно [4], рассматриваемая ситуация описывается статистически следующей «канонической» плотностью вероятности $\mathfrak{P}(\xi_\mu)$ в $\Sigma(K)$:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{P}(\xi) = \exp\{(\Phi + \vartheta^i P_i^g(\xi, a))/k\}, \\ &P_i^g = \sum_{r=1}^{n} p_i^r + U_g(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r, \ldots, \boldsymbol{x}_n, t, a) V_i/c^2 \end{aligned}\right\} \qquad (3.10)$$

(сравните соотношения (7.1), (7,2) в разделе 7 работы [4]). В (3.10) $p_i^r = \{\boldsymbol{p}_r, \ -E_r/c\}$ представляет собой «чистый» 4-импульс r-й частицы. Через V_i обозначена 4-скорость системы K^0 относительно K. Что касается величины Φ, то она определяется как

$$\int \ldots \int \mathfrak{P}(\xi)\, d\xi = 1 \qquad (3.11)$$

$$d\xi = \prod_{\mu=1}^{6n} d\xi_\mu,$$

или

$$\exp\{-\Phi(\vartheta^i, a)/k\} = \int \ldots \int \exp\{\vartheta^i P_i^g(\xi, a)/k\}\, d\xi. \qquad (3.12)$$

Сравнение (2.22) с (5.38) из работы [4] показывает, что статистическая величина Φ в (3.10) может быть отождествлена с релятивистским термодинамическим потенциалом, введенным в разделе 2 настоящей статьи.

В системе «покоя» K^0 выражение (3.10) сводится к каноническому распределению Гиббса:

$$\mathfrak{P}^0 = \exp\{(\Phi^0 - \vartheta^0 \mathfrak{H}_g^0)/k\}, \tag{3.13}$$

где

$$\Phi^0 = \Phi,$$

а

$$\mathfrak{H}_g^0 = \sum_{r=1}^{n} E_r^0 + U_g^0 \tag{3.14}$$

представляет собой гамильтониан в K^0. В системе K выражение (3.12) переходит в

$$\exp\{-\Phi^0(\vartheta^0, a)/k\} = \int \dots \int \exp\{-\vartheta^0 \mathfrak{H}_g^0/k\}\, d\xi^0, \tag{3.15}$$

которое обычным образом определяет $\Phi^0(\vartheta^0, a)$ как функцию (ϑ^0, a).

В разделе 7 работы [4] были подсчитаны функции Φ и Φ^0 в (3.12, 15). Согласно (4; 7. 53, 54, 33, 35, 41), можно написать

$$\Phi(\vartheta^i, a) = f(\vartheta, a), \quad \Phi^0(\vartheta^0, a) = f(\vartheta^0, a), \tag{3.16}$$

где $f(\vartheta, a)$ является функцией модуля ϑ и (a), определяемой следующим образом:

$$f(\vartheta, a) = f_p(\vartheta) + f_q(\vartheta, a), \tag{3.17}$$

$$\left.\begin{aligned} &\exp\{-f_p(\vartheta)/k\} = \int \dots \int \exp\left\{-\vartheta \sum_r E_r^0/k\right\} dp_1^0, \dots, dp_n^0 = \\ &= \left[\int \exp\{-\vartheta E^0/k\}\, dp^0\right]^n = \left[\frac{2\pi^2 m^2 ck}{i\vartheta} H_2^{(1)}(imc^2\vartheta/k)\right]^n, \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} &\exp\{-f_q(\vartheta, a)/k\} = \\ &= \int \dots \int \exp\{-\vartheta U_g^0(x_1^0, \dots, x_n^0, a)/k\}\, dx_1^0 \quad , \dots, dx_n^0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Для невзаимодействующих частиц последнее выражение сведется к n-кратной степени выражения (4; 7. 41). В случае, рассматриваемом здесь, когда выполняется (3.3), аргумент функции Ганкеля (3.18) принимает очень большие значения, и точные значения функции можно заменить ее асимптотическим разложением. Тогда выражение (3.18) переходит в

$$\exp\{-f_p(\vartheta)/k\} = \frac{2\pi mk}{\vartheta}\exp\{-nmc^2\vartheta/k\}, \qquad (3.20)$$

в полном согласии с соответствующей формулой нерелятивистской статистической механики. Из формул (4; 7. 56, 57) мы получим выражение

$$P_i \equiv -\frac{\partial\Phi(\vartheta^i, a)}{\partial\vartheta^i} = \frac{\langle\mathfrak{H}_g^0\rangle^0}{c^2} V_i, \qquad (3.21)$$

что представляет собой статистическое выражение для обобщенного 4-вектора импульса системы, определенного согласно (2.3).

Сейчас мы переходим к рассмотрению частного случая, когда единственными силами, действующими на частицы, являются лишь силы, обусловленные взаимодействием между частицами и стенками.

Тогда $U^0(x_r^0, a)$ обращается в нуль внутри контейнера и резко возрастает до очень большого значения, когда частицы приближаются к стенке. Допустим для простоты, что контейнер имеет форму цилиндра, ось которого направлена вдоль оси x^0 системы K^0, а боковые крышки расположены в плоскостях $x^0 = 0$ и $x^0 = l^0$ соответственно. Если правая стенка представляет собой передвижной поршень, величину объема можно изменять за счет перемещения поршня, т. е. изменяя l^0, поскольку

$$V^0 = F^0 l^0, \qquad (3.22)$$

где через F^0 обозначена (постоянная) площадь крышек цилиндра. Если используется такое устройство, единственным способом *механического* воздействия на систему со стороны внешнего мира является изменение положения поршня. Таким образом, в этом случае существует всего-навсего один внешний параметр a, за который с равным правом можно выбрать l^0 или V^0, а

$$f_q(\vartheta, a) = f_q(\vartheta, l^0) = f_q(\vartheta, V^0) \qquad (3.23)$$

является функцией ϑ и l^0 (или V^0). Для невзаимодействующих частиц, когда $W^0 = 0$, а функция $U^0(x_r^0, a)$ обладает тем свойством, о котором речь шла выше, из выражения (3.19) мы получим

$$\exp\{-f_q/k\} = (F^0 l^0)^n = (V^0)^n,$$

$$f_q = -kn\ln(F^0 l^0) = kn\ln V^0.$$

Следовательно, для идеального газа f_q будет функцией только l^0 или V^0, однако для взаимодействующих частиц f_q (а также f) будет в общем случае зависеть как от ϑ, так и от V^0. Таким образом, в нашем случае из (3.16) следует

$$\Phi(\vartheta^i, V^0) = f(\vartheta, V^0), \quad \Phi^0(\vartheta^0, V^0) = f(\vartheta^0, V^0), \tag{3.24}$$

а уравнения (3.21) становятся тождественными с четырьмя термодинамическими уравнениями (2.27). Далее, если отождествить среднее значение силы p, с которой поршень действует на жидкость, отнесенное к единице площади, с термодинамическим давлением p, то из (4; 7.15) мы получим

$$\left.\begin{aligned} p = \langle p\rangle &= -\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial\Phi(\vartheta^i, V^0)}{\partial V^0} = -\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial f(\vartheta, V^0)}{\partial V^0}, \\ p^0 = \langle p^0\rangle^0 &= -\frac{1}{\vartheta^0}\frac{\partial f(\vartheta^0, V^0)}{\partial V^0} = -\frac{1}{\vartheta^0}\frac{\partial\Phi^0(\vartheta^0, V^0)}{\partial V^0}, \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

в соответствии с последними уравнениями (2.27) и (1.16). Такое отождествление вполне оправдано, поскольку отношение флуктуаций к среднему значению силы, действующей со стороны поршня, пропорционально $n^{-1/2}$, и поэтому, вообще говоря, чрезвычайно мало для любого весомого количества вещества, когда n — число порядка числа Авогадро. В собственной системе уравнения (3.21) сведутся к единственному соотношению

$$\langle \mathfrak{H}_g^0\rangle^0 = \frac{\partial f(\vartheta^0, V^0)}{\partial\vartheta^0} = \frac{\partial\Phi^0(\vartheta^0, V^0)}{\partial\vartheta^0}. \tag{3.26}$$

Средние статистические значения уравнений (3.21, 25, 26) полностью согласуются с термодинамическими соотношениями (2.27) и (1.16).

Таким образом, релятивистская статистическая механика открывает непосредственную интерпретацию термодинамического потенциала Φ и соотношений (2.27), и с помощью (3.12), где нужно считать $a = V^0$, мы уже в состоянии *подсчитать* $\Phi = f(\vartheta, V^0)$, если известен механический потенциал U_g. Вместе с тем, в соответствии с замечанием, сделанным в конце раздела 2, нет никакой необходимости производить вычисление Φ в произвольной системе K, потому что согласно (3.16) — (3.19), функция f полностью определена соотношением (3.16), имеющим место в собственной системе K^0.

Теперь мы обратимся к вопросу об интерпретации релятивистского потенциала $\Psi(\vartheta^i, p)$, введенного, согласно (2.21), с точки зрения статистической механики. В точности так же, как и в случае Φ, достаточно интерпретировать функцию $\Psi^0(\vartheta^0, p^0)$ в собственной системе K^0. Из предшествующего рассмотрения следует, что $\Phi(\vartheta^i, V^0)$ появляется как существенная величина в каноническом распределении (3.10), соответствующем ситуации, когда термодинамические переменные ϑ^i и V^0 имеют четко определенные значения. В системе K^0 это означает, что поршень закреплен в определенном положении при $x^0 = l^0$, а газ приведен в тепловой контакт с тепловым резервуаром, обладающим холодностью ϑ^0. С *термодинамической точки зрения*, фиксированным значениям ϑ^0 и V^0 соответствуют определенные значения H^0 и p^0 энергии и давления, определяемые уравнением состояния, задаваемым, например, в виде (1.16). Следовательно, мы можем исключить V^0 и определять состояние системы через (ϑ^0, p^0) вместо переменных (ϑ^0, V^0); тогда потенциал Ψ^0 дается выражением (2.23), т. е.

$$\Psi^0 = \Phi^0 + \vartheta^0 p^0 V^0. \tag{3.27}$$

Однако при описании системы в статистической механике определенные значения ϑ^0 и V^0 не соответствуют точно определенным значениям энергии и давления, и термодинамические уравнения состояния справедливы только для *средних значений* энергии и внешних сил. Как это неоднократно подчеркивалось Бором [12], это обстоятельство дает поучительный пример существования принципа дополнительности в классической физике. Энергия и давление являются дополнительными величинами по отношению к температуре и объему, соответственно, примерно в том же смысле, в каком импульс и положение частицы являются дополнительными величинами в квантовой механике. Верно, конечно, что для систем весомого размера, для которых n очень велико, дополнительный характер упомянутых выше величин обычно почти не проявляется, но в принципе (в специальных случаях, примеры которых можно привести) выявление дополнительного характера этих величин важно для понимания особенностей термодинамических систем.

Так же, как и в квантовой механике, дополнительность упомянутых термодинамических величин связана с тем, что экспериментальные устройства, позволяющие найти определенные значения для интересующих нас величин, взаимно исключают друг друга. Так, например, чтобы придать определенные значения холодности ϑ^0 и объему V^0, следует, как уже об этом упоминалось раньше, привести газ в тепловой контакт с обширным тепловым резервуаром в течение достаточно длительного времени, причем все это время поршень должен быть закреплен в заданном положении. После того как установится тепловое равновесие, все предыдущие сведения об энергии и силе, действующей на поршень, становятся бесполезными, и все сведения о механическом состоянии системы после этой процедуры могут быть адекватно получены из канонического распределения (3.13, 15), где $a = V^0$, согласно которому термодинамические соотношения (1.16) справедливы только для *средних значений* энергии и давления.

С другой стороны, если мы хотим обеспечить определенные значения холодности ϑ^0 и *давления* p^0, мы должны *высвободить* поршень и подвергнуть его действию постоянной внешней силы

$$K_p^0 = F^0 p^0, \tag{3.28}$$

вместо того, чтобы закрепить его в определенном положении. После того как тепловое равновесие будет достигнуто, эта ситуация снова может быть адекватно описана каноническим распределением (3.13,15), но теперь уже отнесенным к системе $(g + p)$, состоящей из газа и поршня. Поршень может описываться как частица макроскопической массы, которая может свободно перемещаться вдоль оси x^0. Таким образом, если число степеней свободы для газа равно n, то соответствующее число степеней свободы системы $g + p$ равно $n + 1$, и координата l^0 поршня и объем V^0, определяемый согласно (3.22) в этой ситуации, не имеют точно определенных значений.

Постоянная внешняя сила (3.28) может быть получена дифференцированием потенциала U_p^0:

$$K_p^0 = -\frac{\partial U_p^0(l^0, p^0)}{\partial l^0},$$

где

$$U_p^0(l^0, p^0) = K_p^0 l^0 = p^0 F^0 l^0 = p^0 V^0 \equiv U_p^0(V^0, p^0), \qquad (3.29)$$

а в качестве внешнего параметра a для системы $g + p$ можно выбрать давление p^0.

Если использовать V^0 вместо l^0 в качестве «обобщенной» координаты поршня, его (нерелятивистская) кинетическая энергия будет

$$T_p^0 = M\dot{V}^{02}/2F^{02}, \quad \dot{V}^0 = \frac{dV^0}{dt^0}. \qquad (3.30)$$

Соответствующий канонический импульс будет

$$p_p^0 = \frac{dT_p^0}{d\dot{V}^0} = M\dot{V}^0/F^{02}. \qquad (3.31)$$

Механический потенциал системы газ + поршень можно записать в виде

$$U_{(g+p)}^0 = U_g^0(x_1^0, \ldots, x_n^0, V^0) + U_p^0(V^0, p^0), \qquad (3.32)$$

а ее гамильтониан (пренебрегая энергией покоя поршня)

$$\mathfrak{H}_{(g+p)}^0 = \mathfrak{H}_g^0 + p^0 V^0 + F^{02} p_p^{02}/2M. \qquad (3.33)$$

Следовательно, плотность вероятности (3.13) системы $(g + p)$ дается выражением

$$\mathfrak{P}_{(g+p)}^0 = \exp\{(\Phi_{(g+p)}^0 - \vartheta^0 \mathfrak{H}_{(g+p)}^0)/k\}. \qquad (3.34)$$

Она является функцией фазовых координат (ξ^ν) газа и канонических переменных p_p^0 и V^0 поршня; функция $\Phi_{(g+p)}^0$ определяется из уравнения

$$\int \ldots \int \mathfrak{P}_{(g+p)}^0 d\xi^0 dp_p^0 dV^0 = 1. \qquad (3.35)$$

Теперь мы уже в состоянии подсчитать средние значения величин, относящихся к газу и поршню. Согласно теореме о равномерном распределении энергии по степеням свободы, среднее значение кинетической энергии поршня равно kT^0, а скорость поршня будет порядка $v_p \sim (kT^0/M)^{1/2}$. Если масса M имеет величину порядка грамма, скорость v_p оказывается чрезвычайно малой; это означает, что поршень практически всегда будет находиться в состоянии покоя, несмотря на то, что он не закреплен. Интегрируя (3.34) по p_p^0 от $-\infty$ до $+\infty$, мы получаем плотность вероятности $\mathfrak{P}^*(\xi^0, V^0)$, определяющую вероятность нахождения газа в точке (ξ^0) фазового пространства и в объеме V^0 независимо от импульса поршня. Очевидно, что величина $\mathfrak{P}^*$ может быть представлена в виде

$$\mathfrak{P}^* = \exp\{(\Psi^0 - \vartheta^0\mathfrak{H}^*)/k\}, \tag{3.36}$$

где

$$\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H}_g^0(\xi^0, V^0) + p^0V^0, \tag{3.37}$$

а Ψ^0 — функция ϑ^0 и p^0, определяемая согласно

$$\int \ldots \int \mathfrak{P}^* d\xi^0 dV^0 = \\ = \int\int \exp\{(\Psi^0 - \vartheta^0\mathfrak{H}^*(\xi^0, V^0, p^0))/k\}\, d\xi^0 dV^0 = 1. \tag{3.38}$$

Дальнейшее интегрирование $\mathfrak{P}^*$ по (ξ^0) приводит нас к плотности вероятности $W(V^0)$, определяющей вероятность для газа иметь объем V^0. С помощью соотношений (3.36), (3.37) и (3.15), где следует положить $a = V^0$, мы получим

$$W(V^0) = \exp\{(\Psi^0 - \Phi(\vartheta^0, V^0) - \vartheta^0 p^0 V^0)/k\}, \tag{3.39}$$

$$\int_0^\infty W(V^0)\, dV^0 = \\ = \int_0^\infty \exp\{(\Psi^0(\vartheta^0, p^0) - \Phi(\vartheta^0, V^0) - \vartheta^0 p^0 V^0)/k\}\, dV^0 = 1. \tag{3.40}$$

Последнее уравнение можно записать также в виде

$$\exp\{-\Psi^0/k\} = \int_0^\infty \exp\{-(\Phi(\vartheta^0, V^0) + \vartheta^0 p^0 V^0)/k\}\, dV^0, \tag{3.41}$$

из которого можно найти $\Psi^0(\vartheta^0, p^0)$, если известна функция $\Phi^0(\vartheta^0, V^0)$, входящая в (3.24). Наиболее вероятные значения

$\widetilde{V}^0$ объема V^0 определяются уравнением

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dW(V^0)}{dV^0} = -W(V^0)\left(\frac{\partial\Phi(\vartheta^0, V^0)}{\partial V^0} + \vartheta^0 p^0\right)\Big/ k = 0, \\ &\text{т. е.} \\ &\frac{\partial\Phi(\vartheta^0, \widetilde{V}^0)}{\partial \widetilde{V}^0} + \vartheta^0 p^0 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.42)$$

Частным дифференцированием (3.40) по ϑ^0 мы получим обычным способом

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial\Psi^0(\vartheta^0, p^0)}{\partial\vartheta^0} - \frac{\partial\Phi(\vartheta^0, V^0)}{\partial\vartheta^0} - p^0 V^0\right) W(V^0)\, dV^0 = 0 \\ &\text{или} \\ &\frac{\partial\Psi^0(\vartheta^0, p^0)}{\partial\vartheta^0} = \left\langle\frac{\partial\Phi(\vartheta^0, V^0)}{\partial\vartheta^0}\right\rangle^0 + p^0 \langle V^0\rangle^0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.43)$$

Частное дифференцирование (3.40) по p^0 дает

$$\langle V^0\rangle^0 = \frac{1}{\vartheta_0}\,\frac{\partial\Psi^0(\vartheta^0, p^0)}{\partial p^0}, \qquad (3.44)$$

$$\sigma^2\{V^0\} \equiv \langle (V^0 - \langle V^0\rangle^0)^2\rangle^0 = -\frac{k}{\vartheta^{02}}\,\frac{\partial^2\Psi^0(\vartheta^0, p^0)}{\partial p^{02}} = -\frac{k}{\vartheta^0}\,\frac{\partial\langle V^0\rangle^0}{\partial p^0}, \qquad (3.45)$$

где $\sigma^2\{V^0\}$ представляет собой квадрат флуктуации объема относительно своего среднего значения $\langle V^0\rangle^0$. Поскольку обе величины $\langle V^0\rangle^0$ и $\sigma^2\{V^0\}$ пропорциональны n, отношение флуктуации к среднему значению V^0, которое мы обозначим через R, пропорционально $n^{-1/2}$:

$$R(\vartheta^0, p^0) = \frac{\sigma\{V^0\}}{\langle V^0\rangle^0} = O(n^{-1/2}) \qquad (3.46)$$

Если отвлечься от очень специальных случаев, когда $\dfrac{\partial\langle V^0\rangle^0}{\partial p^0}$ чрезвычайно велико (как это имеет место при переходе от одной газовой фазы к другой), флуктуации V^0 полностью пренебрежимы для весомого количества газа, когда величина n по порядку величины близка к числу Авогадро. Следовательно, в этих случаях $\langle V^0\rangle^0$ можно отождествить с термодинамической переменной V^0, и соотношение (3.44) между объемом, холодностью и давлением может быть отождествлено с соотношением (3.25). Более того, наиболее вероятный объем $\tilde{V}^0$, определяемый согласно (3.42), должен быть приравнен к среднему значению для этого случая, т. е.

$$\tilde{V}^0 = \langle V^0 \rangle^0 \tag{3.47}$$

в соответствии с результатом сравнения (3.42) с (3.45). Это означает, что функция (3.39) при фиксированных ϑ^0 и p^0 должна иметь очень крутой максимум при $V = \tilde{V}^0 = \langle V^0 \rangle^0$ со средней шириной, равной $R(\vartheta^0, p^0)$. Таким образом, интеграл в (3.40) становится равным максимальному значению $W(\tilde{V}^0)$, взятому R раз, и мы получаем из (3.40)

$$R(\vartheta^0, p^0) \exp\{(\Psi^0(\vartheta^0, p^0) - \Phi(\vartheta^0, \tilde{V}^0) - \vartheta^0 p^0 \tilde{V}^0)/k\} = 1 \tag{3.48}$$

или

$$\Psi^0(\vartheta^0, p^0) = \Phi^0(\vartheta^0, \tilde{V}^0) + \vartheta^0 p^0 \tilde{V}^0 - k \ln R. \tag{3.49}$$

Так как Ψ^0, Φ^0 и $\tilde{V}^0$ пропорциональны n, в то время как $\ln R$ содержит только $\ln n$, можно пренебречь последним членом в (3.49) в том случае, когда n велико и справедливо (3.47).

Следовательно,

$$\Psi^0(\vartheta^0, p^0) = \Phi^0(\vartheta^0, \langle V^0 \rangle^0) + \vartheta^0 p^0 \langle V^0 \rangle^0. \tag{3.50}$$

Сравнение этого соотношения с термодинамическим соотношением (3.27) показывает, что статистическая величина Ψ^0, входящая в (3.37), может быть отождествлена с термодинамическим потенциалом $\Psi^0(\vartheta^0, p^0)$.

Величина $\mathfrak{H}^*$, определенная согласно (3.37), оказывается равной энергии газа плюс потенциальная энергия (3.29) поршня во внешнем поле. Частным дифференцированием (3.38) по ϑ^0 мы найдем среднее значение $\mathfrak{H}^*$

$$\langle \mathfrak{H}^* \rangle = \frac{\partial \Psi^0(\vartheta^0, p^0)}{\partial \vartheta^0} = \left\langle \frac{\partial \Phi^0(\vartheta^0, V^0)}{\partial \vartheta^0} \right\rangle^0 + p^0 \langle V^0 \rangle^0 \tag{3.51}$$

на основании (3.43). Согласно (3.26) $\dfrac{\partial \Phi^0(\vartheta^0, V^0)}{\partial \vartheta^0}$ представляет собой среднее значение энергии H_g^0 газа в каноническом ансамбле с заданным значением объема V^0.

Следовательно,

$$\left\langle \frac{\partial \Phi^0(\vartheta^0, V^0)}{\partial V^0} \right\rangle^0$$

представляет собой среднее значение $\mathfrak{H}^0_g$ в ансамбле с переменным V^0, описываемым (3.34). Это находится в соответствии с соотношением, получаемым усреднением соотношения (3.37) по ансамблю (3.34):

$$\langle \mathfrak{H}^* \rangle^0 = \langle \mathfrak{H}^0_g \rangle^0 + p^0 \langle V^0 \rangle^0. \tag{3.52}$$

Соотношения (3.51), (3.52) остаются справедливыми для любых n. Однако для больших n, когда функция $W(V^0)$ имеет крутой максимум и удовлетворяется (3.47), соотношение (3.51) переходит в

$$\langle \mathfrak{H}^* \rangle^0 = \frac{\partial \Phi^0(\vartheta^0, \widetilde{V}^0)}{\partial \vartheta^0} + p^0 \widetilde{V}^0. \tag{3.53}$$

Сравнение с первым соотношением (1.16) показывает, что первый член правой части (3.53) должен быть отождествлен с термодинамической энергией газа H^0, и, принимая во внимание (2.8), мы приходим к заключению, что $\langle \mathfrak{H}^* \rangle^0$ в (3.51), (3.53) должно быть статистическим аналогом термодинамической энтальпии E^0 газа в собственной системе. Точные средние значения выражений (3.44), (3.51), очевидно, представляют собой статистические аналоги термодинамических соотношений (2.29), которые в собственной системе K^0 сводятся к двум уравнениям:

$$V^0 = \frac{1}{\vartheta^0} \frac{\partial \Psi^0(\vartheta^0, p^0)}{\partial p^0}, \qquad E^0 = \frac{\partial \Psi^0(\vartheta^0, p^0)}{\partial \vartheta^0}. \tag{3.54}$$

Таким образом, статистическая величина Ψ^0, определяемая по (3.38) или (3.40), обладает всеми свойствами термодинамического потенциала Ψ^0. Она самым тесным образом связана с Φ^0 — функцией системы газ + поршень (если мы пренебрегаем энергией покоя поршня). Из определений (3.38), (3.35) Ψ^0 и Φ^0_{g+p} нетрудно получить

$$\Phi^0_{g+p} = \Psi^0 - k \ln \frac{\sqrt{2\pi M k/\vartheta^0}}{F^0}. \tag{3.55}$$

Так как Φ^0 и Ψ^0 пропорциональны n, можно пренебречь последним членом в правой части этого уравнения для любого весомого количества газа. Таким образом, для больших n мы получим

$$\Phi^0_{g+p}(\vartheta^0, p^0) = \Psi^0(\vartheta^0, p^0). \qquad (3.56)$$

В произвольной системе K соответствующий потенциал $\Psi(\vartheta^i, p)$ получается из $\Psi(\vartheta^0, p^0)$ заменой ϑ^0 и p^0 модулем ϑ и p соответственно.

Из наших рассуждений вытекает следующая физическая интерпретация 4-энтальпии E_i в произвольной системе K. *Величины E_i, определенные согласно (2.4) или (2.29), равны компонентам обобщенного 4-импульса системы (g + + p) за вычетом MV_i, где через M обозначена собственная масса поршня.*

Литература

1. *M. Planck.* Berl. Ber., 1907, 542; Ann. d. Phys., 1908, **76**, 1.
2. *R. Balescu.* Relativistic Statistical Mechanics. Solvay colloquium, May 1968.
3. *H. Ott.* Zs. f. Phys., 1963, **175**, 70.
4. *C. Møller.* Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk, 1968, 36, 16. Русский перевод: наст. сборник, стр. 114—162.
5. *H. Arzéliès.* Nuovo Cimento, 1965, 35, 792.
6. *C. Truesdell.* Six Lectures on Modern Natural Philosophy (Springer, New York, 1966), p. 72.
7. *C. Møller.* Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1967, 36, 1. Русский перевод: Эйнштейновский сборник, 1969—1970. «Наука», стр. 11.
8. *I. Brevik.* Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1967, 36, 3.
9. *L. Söderholm.* Nuovo Cimento, 1968, 57B, 173.
10. См.: например, ссылку [7] или любой подробный учебник по теории относительности.
11. *P. P. Landsberg.* Proc. Phys. Soc., 1966, 89, 1007.
12. *N. Bohr.* Faraday Lecture, 1930, published in the Journal of the Chemical Society, 1932.

А. М. Френк

ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

Состоявшийся в 1911 г. Сольвеевский конгресс, на котором обсуждалась проблема «Теория излучения и кванты», в значительной мере усилил интерес физиков к вопросам теории излучения. В ходе дискуссии на конгрессе достаточно ясно выявилась непригодность классической механики и классической электродинамики для разрешения трудностей, которые сконцентрировались в теории излучения. Позиция квантовой теории укрепилась благодаря тому, что в период 1905—1911 гг. она успешно применялась для рассмотрения явлений фотоэффекта, люминесценции, фотохимических действий, зависимости удельной теплоемкости от температуры, а в 1913 г. появилась квантовая теория строения атома и спектров Бора.

Фактически в работах Эйнштейна этого периода достаточно четко выяснилось, что существование кванта действия неизбежно приводит к радикальному изменению законов при переходе от макро- к микромиру. Тем не менее в большом потоке работ по теории излучения, появившихся после опубликования материалов конгресса, еще проявлялась тенденция оградить физику от коренной ломки классических представлений и понятий. Эта тенденция простиралась от прямого отказа признать квантовую гипотезу до попыток построения теории, в которой квантовые идеи в максимально возможной степени выражались бы классическим языком.

Оценивая состояние проблемы в этот период и отношение Планка к ее решению, Паули в 1949 г. писал: «Однако вопрос о том, содержала ли в себе новая «квантовая гипотеза» необходимость изменения закономерностей самих микроскопических явлений, независимо от статистических применений, или же она имела целью только улучшение статистических методов расчета равновероятных состояний, в первоначальных работах Планка обсуждался с известной сдержанностью. Во всяком случае он сам предпочитал тенденцию к компромиссу между старыми представлениями физики, которые теперь обозначаются как «классические», и квантовой теорией» [1]. Существовала острая необходимость точного выяснения того, что из классической теории можно сохранить, а что действительно подлежит замене. Определенным указателем при решении этой задачи служило то обстоятельство, что в предельном случае больших плотностей излучения и малых частот формула излучения Планка переходит в классическую формулу Релея — Джинса. Поэтому детальный анализ всех физических предпосылок, лежащих в основе вывода формулы Планка, приобрел существенное значение. И Эйнштейн неоднократно обращается к этому вопросу, используя в каждом случае другие предпосылки. На этом пути он стремился к построению, по выражению Зоммерфельда, «философии квантов».

В первой из написанных после конгресса работ [2] Эйнштейн рассматривает процесс разложения молекул под действием светового излучения малой плотности. В основе вывода им фотохимического закона лежат два предположения:

1) распад молекулы происходит независимо от наличия других молекул;

2) вероятность распада молекулы в течение некоторого интервала времени пропорциональна спектральной плотности излучения ρ_ν.

Тогда число молекул, распадающихся в единицу времени, будет

$$Z = An\rho_\nu,$$

где A — коэффициент пропорциональности, n — число молекул. Если же вещество освещается светом непрерывного спектра, то, разделив весь интервал частот на эле-

---

[1] В. Паули. Вклад Эйнштейна в квантовую теорию. УФН, 1965, 86, стр. 413.

[2] А. Эйнштейн. Термодинамическое обоснование закона фотохимического эквивалента. Собр. науч. трудов, т. III, стр. 266—275.

ментарные области со средней частотой ν_i, получим

$$Z = n\Sigma A_i \rho_{\nu_i}.$$

При этом принимается еще допущение, что общее число распадающихся в единицу времени молекул равно сумме актов распада, которые вызываются независимо каждой областью частот падающего излучения.

Эйнштейн показывает, что принятые предположения совместимы с законом излучения только в области частот, где резко сказываются квантовые свойства (т. е. в области малых плотностей и больших частот, когда справедлива формула излучения Вина). Более того, в этом случае формула Вина

$$\rho_\nu = A\nu^3 e^{-h\nu/kT}$$

сразу получается из указанных исходных предположений. Первый вывод формулы Планка был изложен в статье «Некоторые аргументы в пользу гипотезы о молекулярном возбуждении при абсолютном нуле» [1], написанной совместно с О. Штерном. Так называемая «вторая теория Планка», согласно которой испускание света происходит квантами, а поглощение непрерывно, приводила к выводу, что при абсолютном нуле энергия резонатора равна не нулю, а $h\nu/2$, т. е. что даже при абсолютном нуле существует некоторое остаточное молекулярное движение. Эйнштейн и Штерн показывают, что, исходя из существования нулевой энергии, можно получить формулу Планка, не делая допущений о дискретности каких-либо величин. При этом они воспользовались методом, с помощью которого Эйнштейн и Хопф [2] получили в 1910 г. закон Релея — Джинса. Рассматривается поступательное движение молекулы-резонатора под действием неупорядоченного излучения. Воздействие последнего сказывается, во-первых, в появлении некоторой силы сопротивления движению осциллятора, пропорциональной его скорости и создающей импульс $-Pv\tau$ (v — скорость, τ — время, P — коэффициент пропорциональности), а во-вторых, в возбуждении флуктуаций импульса Δ, в первом приближении независимых от движения резонатора. Счи-

---

[1] А. Эйнштейн. Собр. науч. трудов, т. III, стр. 314—322 (оригинал датирован декабрем 1912 г.).

[2] Там же, стр. 205.

тая флуктуации, возбуждаемые в резонаторе излучением, независимыми от нулевой энергии, Эйнштейн и Хопф получили

$$\overline{\Delta}^2 = \frac{c^4\sigma\tau}{40\pi^2\nu^3}\,\rho_\nu^2 \tag{1}$$

(c — скорость света, σ — постоянная затухания осциллятора вследствие испускания излучения). Подставляя это выражение в выведенную ими общую формулу флуктуаций импульса

$$\overline{\Delta}^2 = 2kTP\tau, \tag{2}$$

где

$$P = \frac{3c\sigma}{10\pi\nu}\left(\rho_\nu - \frac{\nu}{3}\,\frac{d\rho_\nu}{d\nu}\right), \tag{3}$$

они получили дифференциальное уравнение

$$\frac{c^3}{24\pi kT\nu^2}\,\rho_\nu^2 = \rho_\nu - \frac{\nu}{3}\,\frac{d\rho_\nu}{d\nu},$$

решение которого дает закон Релея

$$\rho_\nu = \frac{8\pi kT}{c^3}\,\nu^2. \tag{4}$$

Если теперь считать, что энергия флуктуаций, возбуждаемых излучением, мала по сравнению с нулевой энергией, то, как показали Эйнштейн и Штерн, получаем

$$\overline{\Delta}^2 = \frac{1}{5\pi}\,hc\sigma\rho_\nu\tau. \tag{5}$$

Приравнивая (5) и (2) с учетом (3) имеем

$$h\nu\rho_\nu = 3kT\rho_\nu - kT\nu\,\frac{d\rho_\nu}{d\nu}.$$

Решением этого уравнения будет закон Вина

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\,\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}}, \tag{6}$$

что и следовало ожидать, поскольку наличие отличной от нуля энергии резонатора при температуре абсолютного нуля является чисто квантовым эффектом. Таким образом, хотя Эйнштейн и не вводит в свой вывод никаких дискретностей, они фактически входят в него благодаря принятой гипотезе о существовании нулевой энергии.

Если одновременно учитывать флуктуации, соответствующие нулевой энергии (5), и флуктуации, возбуждаемые излучением (1), и считать их независимыми, то

$$\overline{\Delta}^2 = \frac{1}{5\pi} hc\sigma\rho_\nu\tau + \frac{c^4\sigma\tau}{40\pi^2\nu^3}\,\rho_\nu^2. \tag{7}$$

Из (2), (7) и (3) тогда получаем

$$h\nu\rho_\nu + \frac{c^3}{8\pi\nu^2}\rho_\nu^2 = 3kT\left(\rho_\nu - \frac{\nu}{3}\frac{d\rho_\nu}{d\nu}\right).$$

Решением этого дифференциального уравнения является закон Планка

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Интересно отметить, что уже в дискуссии на II Сольвеевском конгрессе (1913) Эйнштейн выдвинул ряд возражений против существования нулевой энергии, если ее трактовать как энергию упругих дебаевских колебаний, в связи с чем он говорил: «Должен также по этому поводу заметить, что аргументы, которые мы с Штерном привели в пользу наличия энергии при абсолютном нуле, я уже не считаю приемлемыми. Развивая приведенные нами соображения по поводу закона излучения Планка, я пришел к выводу, что этот путь, основанный на гипотезе энергии при нулевой температуре, приводит к противоречиям» [1]. Правильное понимание вопроса о нулевой энергии могло быть достигнуто только после установления принципа Паули.

Свою работу 1914 г. «К квантовой теории» Эйнштейн начинает следующими словами: «Ниже будут рассмотрены две проблемы, находящиеся в тесной взаимосвязи друг с другом, так как они показывают, в какой степени можно вывести чисто термодинамическим путем важнейшие новейшие результаты учения о теплоте, а именно формулу излучения Планка и теорему Нернста, не обращаясь к принципу Больцмана, но используя основные идеи теории квантов» [2].

---

[1] La structure de la matière. Rapports et discussions de la reunion tenus à Bruxelles en 1913. Paris, 1921, p. 108.

[2] А. Эйнштейн. Собр. науч. трудов, т. III, стр. 328.

Рассматривается смесь разных газов (или однородный газ с молекулами-резонаторами разной энергии), компоненты которой характеризуются определенной энергией ε_σ, и из условия статистического равновесия выводится закон распределения энергий резонаторов по молекулам

$$n_j = n_0 e^{\frac{s_j - s_0}{R} - \frac{\varepsilon_j - \varepsilon_0}{T}},$$

где n_j — молярная плотность молекул, у которых постоянная энтропии равна s_j, а энергия резонаторов ε_j. Для получения формулы Планка вводятся два допущения: первое, соответствующее теореме Нернста, гласит, что для всех компонент смеси $s_j = s_0$, а второе,— что энергия резонаторов на моль кратна $Nh\nu$, т. е. $\varepsilon_j = jNh\nu$. Отсюда получается $n_j = n_0 e^{-ih\nu/kT}$, а средняя энергия

$$\bar{\varepsilon} = \frac{Nh\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Наиболее существенными в истории квантовой физики оказались работы Эйнштейна 1916 г. «Испускание и поглощение излучения по квантовой теории» и 1917 г. «К квантовой теории излучения».

Как и многие до него, Эйнштейн указывает на логическое противоречие между двумя частями планковского вывода закона черного излучения. Устанавливая связь между средней энергией резонатора $\bar{\varepsilon}$ и плотностью излучения

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\bar{\varepsilon}, \qquad (8)$$

Планк пользовался законами классической электродинамики, а вычисляя среднюю энергию, он за основу берет квантовый постулат. «Однако никого не удовлетворяло,— писал Эйнштейн,— что рассмотрение на основе электродинамики и механики, приводящее к соотношению (8), противоречит основной идее квантовой теории; не удивительно, что и сам Планк, и все теоретики, занимающиеся изучением материи, беспрестанно старались придать теории такой вид, чтобы она покоилась на непротиворечивых предпосылках»[1].

[1] А. Эйнштейн. Собр. науч. трудов, т. III, стр. 386.

Но если некоторые, в том числе и сам Планк, видели решение этой задачи в максимально возможном возврате к классике, Эйнштейн с самого начала ставит себе целью переход к квантовым представлениям: «Таким образом, единство теории, по-видимому, должно быть установлено так, чтобы рассмотрение с помощью электродинамики и механики, приведшее Планка к соотношению (8), заменить квантово-теоретическими соображениями о взаимодействии между веществом и излучением»[1]. И хотя Эйнштейн говорит, что такое убеждение возникло после замечательных успехов квантовой теории спектров Бора, необходимость именно такого подхода прослеживается в его работах уже с 1905 г. Во всяком случае теория Бора ясно показала, что при рассмотрении квантовых явлений нет необходимости ограничиваться использованием столь специальной системы, как осциллятор Герца — Планка. Формулу Планка следовало вывести из более общих соображений, справедливых для любых атомных систем. Поэтому Эйнштейн вводит в рассмотрение «молекулу» как взаимодействующий с излучением объект; о механизме взаимодействия не делается никаких специальных ограничивающих допущений.

Рассматривается газ из одинаковых молекул, находящийся в равновесии с тепловым излучением. Состояние равновесия определяется равенством числа молекул, переходящих в единицу времени из состояния Z_m в состояние Z_n и обратно. Эти переходы, по Эйнштейну, могут быть троякого типа: спонтанное излучение (Ausstrahlung) энергии $\varepsilon_m - \varepsilon_n$, положительное поглощение (positive Einstrahlung) энергии $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ и отрицательное поглощение (negative Einstrahlung), т. е. вынужденное (индуцированное) излучение той же энергии $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ под действием внешнего поля. Число J_m^n переходов первого типа из состояния Z_m в состояние Z_n просто пропорционально числу молекул N_m, находящихся первоначально в состоянии Z_m, т. е. $J_m^n = A_m^n N_m A_m^n$ — некоторая постоянная, определяемая комбинацией состояний Z_m и Z_n. Аналогичные выражения можно написать для переходов, происходящих под влиянием внешнего излучения, но здесь нужно

[1] А. Эйнштейн. Собр. науч. трудов., т. III, стр. 386—388.

учитывать пропорциональность плотности внешнего излучения:

$$J^n_m = B^n_m N_m \rho_\nu, \qquad J^m_n = B^m_n N_n \rho_\nu.$$

Условие детального равновесия дает

$$A^n_m N_m + B^n_m N_m \rho_\nu = B^m_n N_n \rho_\nu. \tag{9}$$

Согласно принципу Больцмана, вероятность W_n состояния Z_n, а значит, и относительное число молекул в этом состоянии задается выражением

$$W_n = p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}},$$

где p_n — статистический вес состояния Z_n. Тогда

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{p_n}{p_m} e^{-\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_m}{kT}}. \tag{10}$$

Из (9) и (10) получаем

$$A^n_m + B^n_m \rho_\nu = B^m_n \rho_\nu \frac{p_n}{p_m} e^{\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{kT}},$$

или

$$\rho_\nu = \frac{A^n_m p_m}{B^m_n p_n e^{\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{kT}} - B^n_m p_m}. \tag{11}$$

Так как при $T \to \infty$ $\rho_\nu \to \infty$, мы должны положить

$${}^{m}_{n} p_n = B^n_m p_m,$$

и, разделив в (11) числитель и знаменатель на $B^n_m p_m$, получаем

$$\rho_\nu = \frac{\alpha_\nu}{e^{\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{kT}} - 1}, \tag{12}$$

где введено обозначение $\alpha_\nu = A^n_m / B^n_m$. Поскольку ρ_ν — универсальная функция частоты и температуры, $\alpha\nu$ и

$\varepsilon_m - \varepsilon_n$ должны зависеть только от частоты. На основании закона смещения Вина

$$\alpha_\nu = C\nu^3 \quad \text{и} \quad \varepsilon_m - \varepsilon_n = h\nu.$$

Таким образом, получаем формулу Планка

$$\rho_\nu = C\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{13}$$

Вычисление постоянных A_m^n и B_m^n требует предварительного создания электродинамики и механики, годных в микромире. Но если потребовать, чтобы в пределе низких частот формула (13) переходила в формулу Релея — Джинса, сразу получим

$$C = \frac{8\pi h}{c^3}.$$

Нетрудно видеть, что если в (9) не учитывать члена, соответствующего индуцированному излучению, получим вместо (11)

$$\rho_\nu = \frac{A_m^n}{B_n^m}\frac{p_m}{p_n}e^{-\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{kT}},$$

т. е. получаем формулу излучения Вина

$$\rho_\nu = C\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}}.$$

Эйнштейн подчеркивает два существенных результата своей работы. Во-первых, общий и простой вывод формулы Планка из условия, что распределение состояний внутренней энергии молекул должно определяться только поглощением и испусканием энергии. Во-вторых, доказательство того факта, что согласующаяся с формулой Планка картина поглощения и испускания получается только в том случае, если допустить строгую направленность всех этих процессов. В этом он видел шаг на пути к решению проблемы, которую Эйнштейн считал наиважнейшей [1], — выяснению сущности квантовых процессов

---

[1] См.: У. И. Франкфурт, А. М. Френк. Вопросы оптики и атомной физики в переписке между Эйнштейном и Зоммерфельдом. Эйнштейновский сборник, 1969—1970. «Наука», стр. 300.

поглощения и испускания энергии. Эйнштейн вновь обращается к неоднократно им использованному методу вычисления флуктуаций импульса поля излучения. Исходя из полученной им формулы (2) $\Delta^2 = 2PkT\tau$, он вычисляет Δ^2/τ и P с учетом импульса, передаваемого молекуле при индуцированном излучении, и показывает, что если брать ρ и $\partial\rho/\partial\nu$ из формулы Планка, то (2) становится тождеством только в предположении, что в каждом акте испускания или поглощения энергии $h\nu$ молекула приобретает или отдает импульс $h\nu/c$ в определенном направлении. Такой характер излучения, названный Эйнштейном «игольчатым» (Nadelstrahlung), вытекал из общей гипотезы, что процессы испускания и поглощения, вызванные пучками излучения разных направлений, независимы друг от друга, т. е. при каждом элементарном акте индуцированного излучения или поглощения происходит испускание или поглощение кванта энергии только одного направления. Таким образом, здесь речь идет о том же аргументе в пользу гипотезы световых квантов, который уже выдвигался Эйнштейном в его знаменитом докладе 1909 г. «О развитии наших взглядов на сущность и структуру излучения»[1]. Вопрос о существовании импульса световых квантов еще несколько лет дискутировался физиками, даже после того как в эффекте Комптона оно получило экспериментальное подтверждение. К нему возвращался и Эйнштейн[2] в связи с работой Иордана «К теории излучения квантов»[3]. В этой работе Иордан, используя идеи Эйнштейна, попытался показать, что для установления теплового равновесия между элементарными излучателями и планковским полем излучения нет необходимости допускать, что излучатель претерпевает отдачу, обусловленную импульсом $h\nu/c$. В своем ответе, отмечая математическую безупречность выводов Иордана, Эйнштейн показывает, что источником расхождений в результатах является то обстоятельство, что Иордан не считает независимыми процессы поглощения света из пучков разных направлений.

Основные идеи, изложенные в работах Эйнштейна 1916 г., сразу же стали оказывать влияние на дальнейшее

---

[1] А. Эйнштейн. Собр. науч. трудов, т. III, стр. 181.
[2] То же, т. III, стр. 512.
[3] P. Jordan. Z. Phys., 1924, 30, S. 297.

развитие многих проблем, связанных с разработкой квантовой теории. При этом в зависимости от сущности рассматриваемой проблемы на первый план выдвигались различные стороны эйнштейновского подхода к исследованию элементарных квантовых процессов: вероятностная трактовка процессов энергетических переходов, учет существования индуцированных переходов, применение наряду с энергетическими соотношениями связей между импульсами, требование перехода в пределе к классическим формулам.

По-видимому, первым, кто откликнулся на работу Эйнштейна, был Н. Бор. В своей знаменитой работе 1918 г. «О квантовой теории линейчатых спектров», излагая содержание всей работы Эйнштейна, Бор подчеркивает три момента: устранение внутренней противоречивости при выводе формулы Планка, приведшее к боровскому условию частот, использованную Эйнштейном аналогию с классическим осциллятором и отсутствие предположений о механизме перехода электрона с одного энергетического уровня на другой, что характеризуется вероятностными закономерностями. Такой подход Бора представляется естественным, если вспомнить, что как раз в этот период основные его усилия были направлены на создание теории строения атомов всех элементов периодической системы Менделеева с помощью принципа соответствия.

Для оценки впечатления, произведенного работой Эйнштейна, характерна статья А. Смекала «Боровское условие частот и линейчатые рентгеновские спектры» [1]. Он называет совершенно удивительной ту простоту, с которой Эйнштейн, пользуясь представлениями о спонтанном и индуцированном излучении, получил боровское условие частот для квантовых переходов. Поскольку не вводились никакие ограничения на механизм перехода, условие частот должно быть верным для всего спектра, в том числе и в рентгеновской области. Именно на этом основании Смекал отвергает высказанные Зоммерфельдом [2] сомнения относительно применимости боровского правила к рентгеновским спектрам и видит причину расхождений, указанных Зоммерфельдом, не в непримени-

---

[1] A. Smekal. Verh. Dtsch. Phys. Ges., 1919, 21, S. 149.
[2] A. Sommerfeld. Phys. Z., 1918, 19, S. 297.

мости условия частот, а в недостатках боровской модели заполнения внутренних электронных уровней.

В известной критической статье В. Нернста и Т. Вульфа [1] «Об одной основанной на опытах модификации формулы излучения Планка», в которой дается обзор всех экспериментальных данных по черному излучению, авторы предлагают некоторое видоизменение закона Планка на том основании, что наблюдаются определенные отклонения от этого закона, но и они признают важность вывода Эйнштейна. Хотя вывод Нернста и Вульфа оказался ошибочным, их статья привела к постановке новых экспериментов, из которых наиболее убедительными были опыты Рубенса и Михеля [2].

Схема рассуждений Эйнштейна оказала непосредственное влияние на целый ряд работ, посвященных исследованию различных атомных явлений. По-видимому, первой в этом ряду была выполненная в Копенгагенском институте теоретической физики у Бора в 1920 г. работа О. Клейна и С. Росселанда «О соударениях между атомами и свободными электронами» [3]. Из опытов Франка и Герца по ионизации атомов и возбуждению излучения при соударениях между атомами и свободными электронами стало ясно, что в определенных случаях возможны переходы атомов из нормального состояния в более высокое энергетическое стационарное состояние. Одновременно в соответствии с законом сохранения энергии скорость свободных электронов уменьшается.

Подобно тому как Эйнштейн рассмотрел термодинамическое равновесие между атомами и полем излучения, Клейн и Росселанд поставили вопрос о том, как повлияют указанные выше соударения на равновесие в системе, состоящей из атомов и свободных электронов. Поскольку часть атомов переходит в более высокое энергетическое состояние, а часть электронов теряет энергию, могло казаться, что равновесное распределение свободных электронов по скоростям и атомов по стационарным состояниям нарушается, что противоречит второму закону термодинамики. Чтобы избежать этого, необходимо допустить существование некоторого обратного процесса, обеспе-

---

[1] W. Nernst, Th. Wulf. Verh. Dtsch. Phys. Ges., 1919, 21, S. 294.

[2] H. Rubens, G. Michel. Phys. Z., 1921, 22, S. 569.

[3] O. Klein, S. Rosseland. Ann. Phys., 1921, 4, S. 46.

чивающего сохранение равновесия. Если Эйнштейн принял равновесие между процессами спонтанного и индуцированного излучения, с одной стороны, и индуцированным поглощением, с другой, то Клейн и Росселанд должны были ввести обратный процесс, вызванный самими равновесно распределенными свободными электронами. Они предположили, что существуют такие соударения между свободными электронами и атомами, при которых последние переходят из стационарного состояния с большей энергией в стационарное состояние с меньшей энергией без излучения, а теряемая атомом энергия передается электрону, увеличивая его скорость. Подобные безызлучательные переходы получили название «удара второго рода», в отличие от ударов первого рода, которые наблюдались Франком и Герцем. Следуя схеме Эйнштейна, они написали условие равновесия как связь между вероятностями обоих процессов с учетом статистических весов и энергий начального и конечного состояний атомов и максвелловского распределения электронов по скоростям и выяснили, при каких условиях наиболее вероятны удары второго рода.

К этому же кругу работ можно отнести и статью Р. Беккера «О термической ионизации газов и об элементарных процессах, лежащих в ее основе» [1]. Автор ставит перед собой следующую задачу: внутри заданного объема v находятся при заданной общей энергии E Z электронов и Z фиксированных ядер водорода. Как велико в условиях термодинамического равновесия N_e — число свободных электронов и число свободных ядер, а также сколько атомов будут находиться в стационарных состояниях с энергиями ε_1, ε_2, ε_3, $\ldots$, ε_σ, где $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3, \ldots < \varepsilon_\sigma$? Для решения этой задачи Беккер рассматривает процесс связывания электрона ядром по Бору с учетом переходов атомов из одного энергетического состояния в другое благодаря поглощению, спонтанному и индуцированному излучению. При этом, вслед за Эйнштейном, вводятся вероятности подобных элементарных процессов и определяется связь между ними.

В работе Крамерса [2] метод Эйнштейна применяется к испусканию и поглощению рентгеновских лучей, т. е.

---

[1] R. Becker, Z. Phys., 1923, 18, S. 325.
[2] A. Kramers. Phil. Mag., 1923, 44, p. 836.

к переходам, происходящим на внутренних уровнях атома. Мильн [1] рассматривал фотоэффект, при котором электроны идут в ионизированный газ высокой температуры, и, полагая, что захват электрона на оптические уровни может быть индуцирован внешним излучением, искал условие равновесия между атомами, ионами, свободными электронами и излучением в замкнутой полости при заданной температуре.

Но наиболее интересной работой этого направления была статья В. Паули «О равновесии между излучением и свободными электронами»[2]. Вопрос о взаимодействии излучения со свободными электронами приобрел в это время особый интерес в связи с экспериментальным открытием рассеяния рентгеновских лучей на электронах (эффект Комптона) — явления, интерпретация которого Комптоном [3] и Дебаем [4] послужила сильным доводом в пользу эйнштейновского представления о световых квантах. Как было уже известно, классическая теория не могла дать непротиворечивого описания взаимодействия излучения со свободными электронами. Паули ставил себе задачу найти такой квантовый механизм взаимодействия, при котором удовлетворялось бы требование термодинамического равновесия между электронами с максвелловским распределением скоростей и планковским полем излучения. При этом он исходил из эйнштейновского рассмотрения задачи равновесия планковского поля излучения с атомами и разделял точку зрения Эйнштейна, что кванту света следует приписывать строго определенный импульс. Различие между случаями, рассмотренными Эйнштейном и Паули, заключалось в том, что во втором отсутствовало спонтанное излучение. В основу расчетов положены законы сохранения энергии и импульса при комптоновском рассеянии.

Пусть импульс электрона до рассеяния находится в пределах G, $G + dG$, а импульс кванта Γ, $\Gamma + d\Gamma$ (индекс 1 при всех величинах относится к значениям после рассеяния), $d\Omega_0$ — пространственный угол (в системе координат, связанной с центром тяжести системы электрон-квант), в пределах которого лежит направление ско-

---

[1] E. A. Milne. Phil. Mag., 1924, 47, p. 209.
[2] W. Pauli. Z. Phys., 1923, 18, S. 272.
[3] A. Compton. Phys. Rev., 1923, 21, p. 483.
[4] P. Debye. Phys. Z., 1923, 24, S. 161.

рости электрона после рассеяния. Тогда для частоты повторения процесса рессеяния определенным электроном можно написать

$$dW' = Fd\Gamma d\Omega_0 dt,$$

а для общего процесса рассеяния (n — число электронов в единице объема)

$$dW = ndGdW' = FndGd\Gamma d\Omega_0 dt.$$

Здесь F — некоторая функция, зависящая от спектральной плотности излучения (ρ_ν); наиболее простое предположение заключается в том, что F пропорциональна ρ_ν, т. е.

$$F = A\rho_\nu. \tag{14}$$

Если это предположение применить к произвольному пучку излучения, то с учетом максвелловского распределения

$$\frac{n}{n_1} = e^{\frac{h(\nu-\nu_1)}{kT}} \tag{15}$$

и лоренц-инвариантности выражения

$$A\nu^3 dGd\Gamma d\Omega_0 = A_1\nu_1^3 dG_1 d\Gamma_1 d\Omega_0 \tag{16}$$

получим из условия равновесия $FndGd\Gamma d\Omega_0 = F_1 n_1 dG_1 d\Gamma_1 d\Omega_0$

$$A\rho_\nu e^{\frac{h(\nu-\nu_1)}{kT}} = A_1\rho_{\nu_1}\frac{A}{A_1}\frac{\nu^3}{\nu_1^3} \tag{17}$$

и после несложных преобразований

$$\rho_\nu = C\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}},$$

т. е. формулу Вина.

Отсюда ясно, что предположение (14) дает следствие, приводящее к расхождению с опытом в области $h\nu \ll kT$, т. е. в области действия классического закона Релея — Джинса. Как показал Эйнштейн, это обстоятельство связано с тем, что не учтены волновые свойства излучения, проявляющиеся в интерференционных явлениях. Это положение аналогично тому, которое получалось в задаче, рассмотренной Эйнштейном, если не учитывать индуцированное излучение. Чтобы получить нужную формулу, Паули берет для F вместо (14) выражение

$$F = A\rho_\nu + B\rho_\nu\rho_{\nu_1}, \tag{18}$$

т. е. он предполагает, что вероятность рассеяния $\nu \rightarrow \nu_1$ зависит не только от плотности излучения на первоначальной частоте ν, но и на конечной частоте ν_1. Нетрудно видеть, что условие равновесия в этом случае дает формулу Планка. Подставляя (18) в (17), имеем

$$(A\rho_\nu + B\rho_\nu\rho_{\nu_1})\, n dG d\Gamma d\Omega_0 = (A_1\rho_{\nu_1} + B_1\rho_\nu\rho_{\nu_1})\, n_1 dG_1 d\Gamma_1 d\Omega_0,$$

и, учитывая (15) и (16), получаем, принимая по Эйнштейну $A/B = \alpha\nu^3$,

$$\left(\frac{\alpha\rho_\nu}{\nu^3} + \frac{\rho_\nu\rho_{\nu_1}}{\nu^3\nu_1^3}\right) e^{\frac{h\nu}{kT}} = \left(\frac{\alpha\rho_{\nu_1}}{\nu_1^3} + \frac{\rho_\nu\rho_{\nu_1}}{\nu^3\nu_1^3}\right) e^{\frac{h\nu_1}{kT}},$$

или

$$\left(\frac{\alpha\nu^3}{\rho_\nu} + 1\right) e^{-\frac{h\nu}{kT}} = \mathrm{const},$$

откуда

$$\rho_\nu = C\frac{\alpha\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Связь формулы Паули (18) с формулами для излучения была рассмотрена Эйнштейном и Эренфестом в статье «К квантовой теории радиационного равновесия»[1]. С этой целью они распространили статистические закономерности, установленные Эйнштейном в работе 1916 г., на случай, когда в элементарном процессе участвует несколько квантов. Это соответствует и комптоновскому рассеянию, в котором участвуют два кванта — падающий и рассеянный — с разными направлениями и в общем случае с разными частотами. Процесс рассеяния рассматривается как совокупность двух процессов: поглощения кванта $h\nu$ (вероятность этого события $dW = b\rho_\nu$) и излучения кванта $h\nu_1$ (вероятность этого события $dW_1 = a_1 + b_1\rho_{\nu_1}$). Вероятность сложного события будет

$$dW' = b\rho_\nu(a_1 + b_1\rho_{\nu_1})\, dt. \tag{19}$$

---

[1] А. Эйнштейн. Собр. науч. трудов, т. III, стр. 450.

Аналогично, вероятность обратного процесса

$$dW'' = b_1\rho_{\nu_1}(a + b\rho_\nu)\,dt.$$

Условие равновесия (если принять статистические веса равными единице) будет

$$nb\rho_\nu(a_1 + b_1\rho_\nu)\,dt = n_1 b_1\rho_{\nu_1}(a + b\rho_\nu)\,dt,$$

причем

$$n_1/n = e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}, \qquad \text{где } \varepsilon = h(\nu_1 - \nu).$$

В общем случае, когда в процессе участвуют p квантов падающего излучения и q квантов, испускаемых излучающим атомом (электроном, молекулой), то

$$n\prod^{p} b_p\rho_{\nu_p}\prod^{q}(a_q + b_q\rho_{\nu_q}) = n'\prod^{p}(a_p + b_p\rho_{\nu_p})\prod^{q} b_q\rho_{\nu_q}.$$

Нетрудно показать, что это условие выполняется для планковской формулы излучения, если для каждой пары коэффициентов принять известное соотношение

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{8\pi h}{c^3}\,\nu^3.$$

Если $p = 0$, $q = 1$, получим эйнштейновские процессы излучения, если $p = 1$, $q = 0$ — процессы индуцированного поглощения, а если $p = 1$, $q = 1$ — рассеяние по Паули. Таким образом, формула Паули (19) получается как частный случай общей формулы для вероятности элементарных процессов взаимодействия излучения с веществом. Вместе с тем видно, что вторые члены в формулах Эйнштейна ($B\rho_\nu$) и Паули ($b\rho_\nu\rho_{\nu_1}$) играют одну и ту же роль — отражают волновые свойства излучения, тогда как первые выражают таким же образом чисто квантовые, корпускулярные свойства в предположении независимости световых квантов.

Физическая сущность «волновых» членов была предметом обсуждения во многих работах, причем в новом свете, после работ 1923—1924 гг., предстали и более старые работы 1914—1915 гг. Все попытки строгого обоснования формулы излучения Планка явно или неявно, независимо от исходных предпосылок (здесь, конечно, не идет речь о работах, авторы которых стремились уйти от необходимости отказа от классических представлений), в конечном итоге сталкивались с вопросом о физическом смысле тех допущений, которые вводились, чтобы из квантовой гипотезы получить именно формулу Планка, а не Вина, т. е. для обоснования обоих слагаемых флуктуационной формулы Эйнштейна. Только при подходящем выборе оснований, позволяющих в предельных случаях $h\nu \ll kT$ и $h\nu \gg kT$ получить формулы Релея — Джинса и Вина, можно было достигнуть успеха. Нетрудно видеть, что фактически речь шла об осмысливании корпускулярно-волнового дуализма свойств излучения, дуализма, на который Эйнштейн указал еще в своей знаменитой речи на 81 собрании немецких естествоиспытателей и врачей в Зальцбурге в 1909 г.

Как известно, гипотеза световых квантов была выдвинута Эйнштейном как результат рассмотрения свойств излучения в виновской области. Вольфке [1] для вывода формулы Планка из той же гипотезы вынужден был ввести ряд дополнительных допущений. В ходе дискуссии Вольфке — Крутков [2] была выдвинута идея, что непрерывное при больших плотностях излучение по мере уменьшения плотности распадается на ряд дискретных квантов. Крутков [3] показал, что из допущения независимости световых квантов получается формула Вина; по формуле Планка получается более сложная формула зависимости энтропии от объема, которая уже не соответствует относительной вероятности распределения независимых световых квантов по объему. Ссылаясь на А. Ф. Иоффе [4], П. Эренфеста [5] и Натанзона [6], Крутков показал, что формулу Планка можно получить, если допустить возможность образования световых «молекул», т. е. объединения квантов в группы. Эренфест и Натанзон подчеркивали, что коренное отличие эйнштейновских представлений от планковских состоит в том, что первый предполагает независимость световых квантов, тогда как у второго кванты играют, скорее, символическую роль и связаны только

---

[1] M. Wolfke. Verh. Dtsch. Phys. Ges., 1913, 15, S. 1123, 1215.
[2] M. Wolfke, I. Krutkow. Phys. Z., 1914, 15, S. 135, 308, 363, 463.
[3] Ю. А. Крутков. ЖРФХО, ч. физ., 1914, 46, отд. I, стр. 12.
[4] А. Ф. Иоффе. ЖРФХО, ч. физ., 1910, 42, отд. II, стр. 409.
[5] P. Ehrenfest. Ann. Phys., 1911, 36, S. 91.
[6] L. Natanson. Phys. Z., 1911, 12, S. 659.

с материальными осцилляторами. Иоффе же попытался получить определенные зависимости на основе далеко идущей аналогии между ассоциациями световых квантов, с одной стороны, и молекулами газа — с другой.

Возвращаясь к этой мысли, Вольфке[1] предположил, что черное излучение состоит из ряда компонент, каждая из которых подчиняется формуле Вина

$$\rho_{\nu_i} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-\frac{ih\nu}{kT}}, \quad \text{где } i = 1, 2, 3 \ldots .$$

Тогда полное излучение

$$\rho_\nu = \sum_0^\infty \rho_{\nu_i} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \sum e^{-\frac{ih\nu}{kT}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Если ε_i — полная энергия i-й компоненты, то можно считать, что каждая компонента состоит из $\varepsilon_i/ih\nu$ пространственно независимых кратных квантов $ih\nu$, световых молекул. Поскольку таких молекул в единице объема

$$n_i = \frac{\rho_{\nu_i}}{ih\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{e^{-\frac{ih\nu}{kT}}}{i} \quad \text{и} \quad \frac{n_i}{n_{i+1}} = \frac{i+1}{i} e^{\frac{h\nu}{kT}},$$

то при $h\nu \ll kT$ отношение n_i/n_{i+1} велико и даже $n_2 \ll n_1$, так что практически все излучение состоит из отдельных квантов. При возрастании плотности излучения отношение n_i/n_{i+1} уменьшается и начинают играть роль кратные кванты. В области Релея — Джинса все усложняющиеся световые молекулы переходят в континуум.

Вопрос о механизме образования световых молекул Вольфке не детализирует: допущение об их существовании, которое можно интерпретировать как указание на возможность некоторого рода взаимодействия между световыми квантами, математически означает переход к суммированию $\sum e^{-\frac{ih\nu}{kT}}$, т. е. переход от виновской формулы к планковской. Но подобный формальный переход в каждом случае сталкивается с необходимостью создания такой модели элементарного процесса, которая бы физически оправдывала действие суммирования.

---

[1] M. Wolfke. Phys. Z., 1921, **22**, S. 375.

Так, например, Л. С. Орнштейн и Г. С. Бюргер [1] рассматривали равновесие между световыми квантами и электронами в предположении, что кванты обладают сферой действия, радиус которой пропорционален длине волны. При этом они смогли получить только формулу Вина, так как предполагали, что плотность фотонного газа бесконечно мала, а следовательно, невозможна встреча электрона одновременно с двумя квантами. В случае же, когда они учитывали возможность одновременного (или, во всяком случае, через интервал, соизмеримый со временем взаимодействия) действия двух и более квантов, не очень сильно отличающихся по частоте, то они приходили к уравнениям [2], решение которых содержало сомножитель типа $\sum e^{-\frac{ih\nu}{kT}}$, где i представляло собой число одновременно действующих квантов. А это означало, что удавалось получить формулу Планка.

Исторически интересно отметить содержащееся в работе указание, что Эйнштейн обратил внимание авторов на возможность использования подобного механизма при рассмотрении равновесия между излучением и веществом. Если допустить, что на атом одновременно действуют два или более квантов, то ведущее к формуле Планка условие равновесия можно получить без индуцированного излучения. Это объяснялось тем, что в подобном случае может иметь место своеобразное когерентное воздействие нескольких фотонов, в результате чего число актов поглощения уменьшается, и при некоторых благоприятных условиях спонтанное излучение окажется достаточным для уравновешивания поглощения. Все эти вопросы получили новое развитие лишь в последние годы в рамках нелинейной оптики.

Если Орнштейн и Бюргер стремились разрабатывать квантовую теорию с помощью механических моделей,— о чем свидетельствуют даже названия их работ: «О размере эйнштейновских световых квантов», «О динамике соударения между световым квантом и электроном»,— то Паули, как и Эйнштейн, стремился к построению теории на наиболее общей основе. Отвечая Орнштейну и Бюргеру, он писал: «У Орнштейна и Бюргера определение

[1] L. S. Ornstein, H. C. Burger. Z. Phys., 1923, **20**, S. 351.
[2] L. S. Ornstein, H. C. Burger. Z. Phys., 1924, **21**, S. 358.

частоты элементарных актов рассеяния излучения свободными электронами следует из сравнения указанного квантового процесса с ударом двух шаров, тогда как в работе автора (т. е. Паули — *А. Ф.*) подобная механическая аналогия отсутствует. Я стремился сделать свое изложение по возможности независимым от каких-либо специальных представлений о природе элементарного процесса. В вопросы физического смысла и правомочности механических символизаций и моделей элементарных процессов в квантовой теории вообще здесь не следует вдаваться» [1]. Характерно для рассматриваемого периода поисков путей к созданию замкнутой квантовой теории, что Орнштейн и Бюргер в следующей статье [2], посвященной применению эйнштейновских вероятностных представлений о переходах атомов из одного состояния в другое к вычислению интенсивности отдельных компонент мультиплетных линий, пишут, что «пока еще модельные представления невозможны».

Хотя использованный Дебаем [3] при выводе формулы Планка метод собственных колебаний содержал элементы, вошедшие в будущую теорию, он не мог стать отправной точкой для построения этой теории, поскольку при тогдашнем положении вещей с его помощью нельзя было вскрыть те глубоко лежащие трудности волновой теории, которые обнаружились при исследовании сущности и структуры излучения. В нем не содержался подход к рассмотрению корпускулярно-волнового дуализма свойств излучения. Еще Лоренц [4] отмечал, что ключ ко всей проблеме излучения лежит в вычислении флуктуации энергии поля излучения. Именно этот путь, проложенный Эйнштейном, должен был привести и привел к правильной интерпретации элементарных процессов, происходящих на атомном уровне. Схема рассуждений здесь была ясна. Используя формулы для средних флуктуаций энергии

$$\overline{\Delta}^2 = kT^2 \frac{dE}{dT}$$

---

[1] W. Pauli. Z. Phys., 1924, 22, S. 261.
[2] L. S. Ornstein, H. C. Burger. Z. Phys., 1924, 24, S. 41.
[3] P. Debye. Ann. Phys., 1910, 33, S. 1427.
[4] Г. А. Лоренц. Статистические теории в термодинамике. М., 1935, стр. 119.

и подставляя сюда значение производной из формулы Планка, получаем то выражение, которое и необходимо интерпретировать. Так как

$$E = \frac{\alpha\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} V, \quad \text{то} \quad \overline{\Delta}^2 = h\nu E + \frac{h}{\alpha\nu^2}\frac{E^2}{V}. \tag{20}$$

Любая гипотеза о структуре излучения должна дать это выражение; элементарные процессы (поглощения, излучения, рассеяния и др.), рассмотрение которых приводит к формуле Планка, должны дать такое распределение энергии, что уравнение флуктуаций (20) в точности выполняется. Задача состояла в том, чтобы этим элементарным актам дать квантовую трактовку.

Подобное рассмотрение провел Боте для индуцированного излучения [1] и рассеяния света на свободных электронах [2]. Исходя из ранее высказывавшихся предположений о возможности образования многократных квантов, он трактует процесс индуцированного излучения так: падающий квант, встречая возбужденный атом, вызывает в нем испускание кванта той же частоты (энергии); поскольку теперь с той же скоростью в том же направлении движутся два одинаковых кванта, можно говорить об образовании квантового дублета. Если начальный квант уже принадлежит паре, то подобным же образом возникает триплет, и т. д. При этом, однако, не нужно думать, что между квантами одного мультиплета действуют определенные силы связи, что для его диссоциации требуется затрата работы. Если один из квантов пары поглощается, например, то это никак не сказывается на втором. Таким образом, если между квантами света и существует какое-либо взаимодействие, то по Боте оно имеет место не в конфигурационном пространстве.

Из этих представлений нетрудно получить формулу для числа фотонных мультиплетов n_i данной кратности i в объеме V:

$$n_i = \frac{\alpha\nu^3}{h} e^{-\frac{ih\nu}{kT}} V.$$

---

[1] W. Bothe. Z. Phys., 1923, 20, S. 145.
[2] W. Bothe. Z. Phys., 1924, 23, S. 214.

Поскольку $n = \Sigma n_i$, общая энергия

$$E = nh\nu = \alpha\nu^3 V \sum e^{-\frac{ih\nu}{kT}},$$

откуда

$$\rho_\nu = \alpha\nu^3 \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Таким образом, хотя подходы Боте и Вольфке несколько отличаются по физическому толкованию, полученные ими формулы эквивалентны.

Все эти предпринятые с разных точек зрения поиски физического обоснования исходных предпосылок вывода формулы Планка отражают те огромные трудности, с которыми встречалась квантовая теория света при осмысливании сущности корпускулярно-волнового дуализма. Наиболее существенным шагом на пути к такому осмысливанию после работ Эйнштейна 1916—1917 гг. была статья С. Н. Бозе «Закон Планка и гипотеза световых квантов» [1]. Бозе ставит себе ту же задачу, которая уже несколько раз ставилась до него: найти такой вывод формулы Планка, при котором статистические методы применялись бы к световым квантам без использования каких бы то ни было предпосылок, восходящих к классической волновой теории.

Воспользовавшись методом, разработанным Планком, Бозе делит шестимерное фазовое пространство световых квантов на фазовые ячейки с конечным объемом h^3, но при расчете равновероятных случаев учитывает не то, какие кванты входят в данную фазовую ячейку, а лишь число их. При этом полная энергия берется равной сумме энергий всех квантов. Существенным, таким образом, в методике Бозе является то, что он обращается со световыми квантами как с газом независимых световых частиц, но эти частицы считаются неразличимыми, тождественными. Легко видеть, что без последнего допущения применение статистики к фотонному газу приводит, как и следовало ожидать, к формуле Вина. Действительно, по Больцману, среднее число частиц в единице объема

---

[1] S. N. Bose. Z. Phys., 1924, **26**, S. 178. (Русск. перевод в кн.: А. Эйнштейн. Собр. науч. трудов, т. III, стр. 475).

с импульсом в интервале $p,\ p + dp$ равно

$$d\bar{n} = Ce^{-\frac{E}{kT}} p^2 dp.$$

Поскольку для фотонов $p = h\nu/c$ и $E = h\nu$,

$$d\bar{n} = Ce^{-\frac{h\nu}{kT}} \nu^2 d\nu;$$

отсюда

$$\rho_\nu d\nu = h\nu \cdot d\bar{n} = Ce^{-\frac{h\nu}{kT}} \nu^2 d\nu.$$

По Бозе, функция распределения для газа невзаимодействующих фотонов будет

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}.$$

А поскольку число квантовых состояний фотона с частотой в интервале $\nu,\ \nu + d\nu$ (по Бозе — число фазовых ячеек, принадлежащих интервалу $d\nu$) равно

$$dZ = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V d\nu, \quad \text{а} \quad \varepsilon = h\nu, \tag{21}$$

получаем формулу Планка

$$\rho_\nu d\nu = \frac{\varepsilon \bar{n} dZ}{V} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu.$$

По существу, метод Бозе ничем внешне не отличается от предложенного в 1910 г. Дебаем [1], хотя исходные модели у них были разные. Если у Бозе состояние излучения в данном объеме описывается заданием числа частиц, приходящихся на одну ячейку фазового пространства, а сами частицы считаются тождественными, у Дебая роль фазовой ячейки играет собственное колебание, и описание дается числом квантов энергии $h\nu$, соответствующих каждому собственному колебанию. Принятая Бозе тождест-

---

[1] См. сноску 3 на стр. 212.

венность частиц при дебаевском подходе сказывается в том, что кванты рассматриваются не как частицы, а как неотличимые друг от друга количества энергии, а значит, различные формы возбуждения этого колебания с одной и той же общей энергией считаются равновероятными. Но если методу Дебая был присущ общий недостаток первоначальных теорий — наложение на волновое поле, подчиняющееся уравнениям Максвелла, чуждых ему условий квантования,— способ Бозе был основан на чисто корпускулярных понятиях. Вместе с тем явный параллелизм при выводе формулы Планка — эквивалентность представлений об излучении как о квантовых волнах и как о фотонном газе,— непосредственно указывал на возможность двойственного рассмотрения излучения.

И это сразу же понял Эйнштейн. Для него проблема световых квантов, со всеми их своеобразными свойствами, была только частью значительно более общей задачи об определении исходных предпосылок для построения полной теории поля. Возможность замены расчета, основанного на концепции волн, газокинетическим могла пролить некоторый свет на эту общую проблему. В статье «Об эфире», написанной сразу же после ознакомления с идеями Бозе, Эйнштейн писал: «... факты и идеи, относящиеся к квантовой теории, угрожают вообще взорвать здание теории поля. В самом деле, все множатся доказательства в пользу того, что световые кванты следует рассматривать как физическую реальность, что электромагнитное поле нельзя считать последней реальностью, к которой можно свести другие физические объекты». Описав опыты Комптона, Эйнштейн продолжает: «Далее, недавно появилась работа индийца Бозе о выводе формулы Планка, имеющая для наших теоретических представлений особое значение.... Бозе заменяет этот (т. е. Дебая — *А. Ф.*) основанный на представлениях теории колебаний подсчет газокинетическим, относя его к одному находящемуся в полости световому кванту, представляемому в виде некоторой молекулы. Тогда возникает вопрос, нельзя ли явления дифракции и интерференции включить в квантовую теорию таким образом, чтобы полевые понятия теории выражали лишь взаимодействие между квантами, причем полю уже не приписывалась бы самостоятельная физическая реальность... Но даже если эта возможность созреет в подлинную теорию, мы не можем в теоретической физике обойтись без эфира, т. е. континуума наделенного физическими свойствами...»[1].

Такая постановка вопроса проливает свет на то обстоятельство, что в период усиленной работы над созданием общей теории относительности (1907—1917) Эйнштейн особенное внимание уделяет проблемам квантовой теории света, а перейдя к разработке единой теории поля. создает на основе статистики Бозе квантовую теорию идеального одноатомного газа[2]. По свидетельству Иордана[3], Эйнштейн долго вынашивал идею о дуалистических свойствах частиц, но не опубликовал ее, так как не находил путей к математической формулировке этого дуализма. Такую возможность он получил после появления в 1924 г. статистики Бозе и введения де Бройлем[4] в том же году волн материи (обе работы были выполнены под непосредственным влиянием идей Эйнштейна). Оставляя в стороне значение работ Эйнштейна для самой статистической физики, обратимся к исторически наиболее существенной идее — приписыванию потоку частиц некоторых свойств волнового излучения. Наиболее явно это проявилось в эйнштейновском анализе флуктуаций плотности газа. Для этих флуктуаций он получает следующую формулу:

$$\left(\frac{\Delta_\nu}{n_\nu}\right)^2 = \frac{1}{n_\nu} + \frac{h^2 \Delta E}{32\pi^2 V^2 m^3 E},$$

где n_ν — число молекул с энергией в пределах E, $E + \Delta E$; V — объем газа; m — масса молекулы газа. Если бы молекулы были просто взаимно независимыми частицами, то в формуле сохранился бы только первый член. Второй член, не зависящий от средней плотности молекул и определяемый полностью объемом и энергией, появился именно вследствие использования новой статистики. Аналогия с формулой флуктуаций поля излучения заставила Эйнштейна сопоставить газу некоторый волновой процесс и вычислить его интерференционные

---

1 А. Эйнштейн. Собр. науч. трудов, т. II, стр. 159—160.
2 А. Эйнштейн. Собр. науч. трудов, т. III, стр. 481, 489, 503.
3 P. Jordan. Ergebnisse d. Exacten Naturwiss. Bd. VII, Berlin, 1928, S. 175.
4 L. de Broglie. Thèses. Paris, 1924; Phil. Mag., 1924, 47, p. 446. (Русск. перевод в кн.: «Вариационные принципы механики». Сборник статей. М., 1959, стр. 631).

флуктуации. Эти вычисления дали второе слагаемое в формуле флуктуаций плотности и показали, что речь идет не о простой аналогии между газом и излучением, а о значительно более глубокой связи между корпускулярными и волновыми свойствами, к которой де Бройль пришел исходя из других представлений.

Эренфест[1] показал, что в рассуждениях Бозе и Эйнштейна неявно содержится предположение о статистической зависимости частиц газа. Это замечание Эренфеста имеет очень глубокий физический смысл, и теперь, после создания квантовой механики, можно сказать, что в нем в значительной мере содержался ключ к разгадке истинной природы корпускулярно-волнового дуализма. Причина неудач первых попыток понять двойственную природу света коренилась в том, что модель световых квантов строилась на основе классических представлений о пространстве и времени и классического принципа каузальности. Примером является модель независимых квантов, описывающих траектории в смысле классической кинематики и связанных с некоторым интерференционным полем. В какой-то мере это напомнило старые попытки построения механических моделей эфира. Для правильного толкования дуализма важно было выяснить, что представление о независимости газовых частиц, лежащее в основе вывода формулы флуктуаций излучения и плотности газов, было грубым упрощением. В действительности каждая система (газ, излучения) может находиться только в состоянии с определенной симметрией, поэтому частицы не могут вести себя совершенно произвольно, независимо от состояния остальных частиц. Даже для газа, состоящего из невзаимодействующих частиц, формула флуктуаций будет содержать два слагаемых: в силу принципа тождественности газ не подчиняется классическому закону распределения, предполагающему полную независимость частиц. Определенная принципом тождественности взаимная обусловленность поведения частиц приводит к появлению в формуле флуктуаций интерференционного члена. Благодаря тому, что корпускулярному представлению о свете может быть сопоставлено эквивалентное волновое представление, этот член имеет как раз ту форму, которую Лоренц вывел для классического волнового поля.

---

[1] P. Ehrenfest. Z. Phys., 1925, 34, S. 362.

Как показал Эйнштейн, квантовые идеальные газы в той или иной мере вырождены, т. е. их поведение отличается от поведения обычного идеального газа. Например, давление в газе, подчиняющемся статистике Ферми — Дирака, больше, чем в обычном газе. Квантово-механические обменные эффекты приводят в случае действия принципа «запрета» Паули к появлению некоторого дополнительного эффективного «отталкивания» между частицами. Наоборот, для газов, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна, давление меньше вычисленного по классической статистике, т. е. обменные эффекты приводят к некоторому эффективному «притяжению». Здесь действует своеобразный принцип «поощрения» (по выражению Я. И. Френкеля [1]). Он проявляется в том, что вероятность перехода бозона в данное состояние тем больше, чем больше частиц того же рода уже находится в этом состоянии. Именно с точки зрения подобной статистической связи можно теперь понять использованную в ранних работах по квантам (Иоффе, Вольфке, Крутков, Боте, де Бройль) идею об образовании квантовых «молекул» света. Но взаимодействие между квантами, приводящее к образование конгломератов, не является силовым, оно имеет место не в конфигурационном, а в фазовом пространстве. В этих работах удавалось вывести формулу Планка потому, что рассмотрение отдельных независимых квантов давало «корпускулярный» член в формуле флуктуаций, а рассмотрение конгломератов квантов — «интерференционный». В другой группе работ, где вывод формулы Планка достигался путем применения принципа детального равновесия к атомным процессам излучения и поглощения (Эйнштейн, Паули), первый член в формуле флуктуаций обеспечивался рассмотрением поглощения и спонтанного излучения, а второй — учетом индуцированного излучения [2]. Попытки вывода правильной формулы без вынужденного излучения, как показал Эйнштейн, не могли дать удовлетворительного результата [3].

---

[1] Я. И. Френкель. На заре новой физики. Л., «Наука», 1970, стр. 127.

[2] L. S. Ornstein, F. Zernike. Versl. Akad. Amsterdam, 1919/1920, 28, p. 280; A. Smekal. Z. Phys., 1926, 37, S. 319.

[3] L. S. Ornstein, H. C. Burger. Z. Phys., 1924, 21, S. 358; S. N. Bose. Z. Phys., 1924, 27, S. 384; А. Эйнштейн. Собр. науч. трудов, т. III, стр. 479.

В своей статье «Эйнштейн и дуализм волны-частицы» [1] М. Клейн обратил внимание на то обстоятельство, что при исследовании истории развития квантовой теории главное внимание обычно концентрируется на проблемах строения атома и его связи с атомными спектрами, в то время как развитие собственно квантовой теории света, связанной с осмысливанием сущности световых квантов и интерпретацией корпускулярно-волнового дуализма, остается как бы в тени. А ведь созданием квантовой механики физика в равной мере обязана обоим направлениям, игравшим основную роль в исследованиях квантовых проблем в первой четверти XX века. Подобное отношение историков физики в какой-то мере отражает то положение, которое сложилось в физике в указанный период. Первое направление (назовем его боровским) сравнительно быстро нашло себе многочисленных сторонников, и развитию квантовой теории строения атома и спектров было посвящено огромное количество работ. Второе направление (назовем его эйнштейновским), долгое время развивалось фактически одним Эйнштейном и встречало достаточно упорное сопротивление даже со стороны видных теоретиков. Приведем несколько характерных высказываний. В. Вин в своей нобелевской речи (1911 г.) говорил: «При значительной же плотности лучистой энергии, когда излучение подчиняется моему закону, преобладает другой член (имеется в виду двучленная формула Эйнштейна для флуктуации излучения.— *А. Ф.*), который нельзя прямо объяснить при помощи волновой теории света. Его можно было бы понять, если бы лучистая энергия состояла из планковских элементов, находящихся и в пустом пространстве. Но это представление нельзя развивать дальше: нельзя поколебать волновую теорию света, принадлежащую к самым прочным построениям всей физики. Кроме того, член, для обеспечения которого мы хотим ввести сосредоточенные в пространстве элементы энергии, не единственный, а установить в оптике дуалистический взгляд, принять, например, одновременно волновую теорию Гюйгенса и теорию истечения Ньютона представляется с самого начала совершенно неприемле-

---

[1] M. J. K l e i n. The natural philosopher, 1964, 3. (Русск. перевод в кн.: «Эйнштейновский сборник, 1966». М., «Наука», 1966, стр. 213).

мым»[1]. Указывая на трудности, с которыми встречалась гипотеза световых квантов, Лоренц говорил о себе: «Докладчик не хотел бы оспаривать эвристическую ценность этих гипотез; он лишь защищает старую теорию до тех пор, пока это возможно»[2] (1910). Аналогичную позицию занимал и Планк: «Эйнштейновские флуктуации лучистой энергии заключают в себе, кроме члена, обусловленного обыкновенной интерференцией соседних лучей, еще один, совершенно чуждый классической теории, пропорциональный кванту действия, который даже при самых высоких температурах не совсем исчезает. Вывести из этого заключение, что для распространения лучистой энергии в свободном пространстве не годятся больше законы классической теории,— мне кажется в настоящее время, по крайней мере, преждевременным»[3] (1923).

Чем можно объяснить, негативное в общем отношение к эйнштейновскому направлению? На наш взгляд, можно выделить три основные причины. Первая состояла в том, что хотя в обоих случаях развитие требовало определенной ломки привычных представлений, боровское направление теснее переплеталось с классической электродинамикой и механикой, в то время, как точка зрения Эйнштейна, казалось, требовала более решительного пересмотра, например отказа от волновой теории света. С этим была связана и вторая причина. Принимая гипотезу световых квантов, Эйнштейн с самого начала явно провозгласил дуалистический характер света, а затем и обычных частиц, тогда как дуализм, содержащийся в боровских представлениях, не проявлялся явно вплоть до формулировки принципа дополнительности. Третья, более внешняя причина, заключалась в том, что результаты, получаемые из квантовой теории строения атома и спектров, удавалось сравнительно легко оправдать на опыте, тогда как экспериментальное основание эйнштейновской теории света до открытия эффекта Комптона (1923) и опытов Боте и Гейгера (1924) оставалось фактически на уровне 1905 г. В этом отношении весьма характерны неоднократ-

---

[1] В. Вин. О законах теплового излучения. В кн.: «Новые идеи в физике». Сб. шестой. СПб., 1913, стр. 121.

[2] Г. А. Лоренц. Старые и новые проблемы физики. М., «Наука», 1970, стр. 81.

[3] М. Планк. Атомная теория Бора. В кн.: «Новые идеи в физике». Сб. № 10, Пг., 1924, стр. 44.

ные попытки Эйнштейна найти схему опытов, которые, могли бы решить судьбу теорий света.

Представляет интерес проследить отношение к эйнштейновскому направлению самого Бора. Уже в своей знаменитой работе 1913 г. «О строении атомов и молекул» Бор указывает на Эйнштейна как на одного из основоположников квантовой теории. Но сама фраза, где говорится об этом, заслуживает внимания: «На всеобщее значение теории Планка для обсуждения поведения атомных систем впервые указал Эйнштейн. Соображения Эйнштейна были затем развиты и применены к различным явлениям в особенности Штарком, Нернстом и Зоммерфельдом»[1]. Через несколько страниц Бор приводит эйнштейновскую формулу фотоэффекта. Таким образом, выделяется не вопрос о сущности и структуре света, а тот факт, что Эйнштейн открыл дорогу применению квантовых представлений при объяснении целого ряда физических явлений. О гипотезе световых квантов, о вскрытой Эйнштейном дуалистической природе света не упоминается.

Впервые о световых квантах Бор упоминает в докладе, прочитанном в 1920 г. на заседании немецкого физического общества. Тогда он говорил: «Мы видим отсюда, что результат Планка может быть интерпретирован следующим образом: осциллятор может испускать и поглощать излучение только так называемыми квантами излучения величиной $h\nu$. Как известно, такая интерпретация привела Эйнштейна к теории фотоэлектрического эффекта, имеющей большое значение как применение теории квантов к явлению нестатического характера. Я не буду останавливаться на хорошо известных затруднениях, к которым приводит так называемая гипотеза световых квантов в явлениях интерференции, столь просто объясняемой в классической теории излучения. Я вообще не намерен входить в обсуждение загадки, связанной с природой излучения. Я попытаюсь только показать, каким образом можно чисто формально построить теорию спектров, основные элементы которой являлись бы одновременным рациональным развитием той и другой интерпретации результата Планка»[2]. Эту же точку зрения Бор высказал

---

[1] Н. Бор. Избр. науч. труды, т. I, М., 1970, стр. 88, 99.
[2] Там же, стр. 249.

и через год в своей нобелевской речи: «Несмотря на свою эвристическую ценность, гипотеза световых квантов, будучи совершенно несовместимой с так называемыми явлениями интерференции, не может помочь и в выяснении вопроса о природе излучения» [1].

В 1923 г. в работе «О применении квантовой теории к строению атома» Бор повторил довод о неудовлетворительности гипотезы световых квантов ввиду ее неспособности объяснить интерференционные явления. Далее Бор пишет: «Поэтому гипотеза световых квантов непригодна для того, чтобы дать общую картину процессов, которая бы могла включать всю совокупность явлений, рассматриваемых при применениях квантовой теории. Но удовлетворительный способ, которым гипотеза объясняет определенные стороны явлений, пригоден для обоснования выдвигаемой с разных сторон точки зрения, что в противоположность принятому в классической физике способу описания явлений природы, где идет речь только о статистическом результате большого числа единичных процессов, полное непротиворечивое пространственно-временно́е описание атомных процессов не может быть произведено с помощью понятий, заимствованных из классической электродинамики» [2]. И тут же добавляет: «Следует отметить, что до настоящего времени эти понятия являлись единственным средством для определения принципов, лежащих в основе применений квантовой теории». Это означало, что поскольку нельзя полностью отказаться от классических понятий при пространственно-временно́м описании квантовых процессов, гипотеза световых квантов в том понимании, которое тогда существовало, неприемлема. Сама задача, которую себе ставил Бор в этой работе, заключалась в выражении принципов квантовой теории в такой форме, чтобы использование классических представлений, на которых основано описание природы, было свободно от противоречий.

Уже в следующей работе «Квантовая теория излучения», написанной совместно с Крамерсом и Слэтером, ради выполнения этой программы Бор отказался от требования строгой выполнимости законов сохранения и

---

[1] Н. Бор. Избр. науч. труды, стр. 423.
[2] N. Bohr, Z. Phys., 1923, **13**, S. 158. (Русск. перевод в кн.: Н. Бор. Избр. науч. труды, т. I, стр. 518).

импульса в элементарных атомных явлениях. Иначе было бы невозможно представить такой пространственно-временнóй процесс, который бы одновременно обеспечивал удовлетворительное соответствие с классической теорией излучения и допускал объяснение совокупности атомных явлений. Заканчивая свою статью, они писали: «Приведенные рассуждения показывают, что наше описание оптических явлений естественным образом связано с обычным непрерывным описанием макроскопических явлений, для объяснения которых столь успешно использовалась теория Максвелла» [1].

О. Клейн, ученик и близкий сотрудник Бора в 1918—1922 гг., пишет в своих воспоминаниях «Однако Бор не мог примириться с представлениями Эйнштейна о световом кванте... Колебания Бора объяснялись тем, что он сжился с волновой теорией света, и каждый раз, когда о ней заходила речь, подчеркивал, что она объясняет распространение света с необыкновенной точностью и полнотой. Бор заявлял, что само определение частоты колебаний, от которой зависит энергия светового кванта, базируется на волновой теории. Эйнштейн, напротив, полагал, что правильная теория света тем или иным образом должна объединить характеристики волн и частиц» [2].

Аргументация Эйнштейна была иной: она базировалась на уверенности в справедливости выполнения законов сохранения в элементарных актах, откуда следовал принципиально другой путь — существование малых областей концентрации энергии даже в пустоте. После опытов Боте и Гейгера, после создания статистики Бозе — Эйнштейна (1924), после первых работ де Бройля Бор вынужден был согласиться, что все это в соответствии с квантовой теорией света Эйнштейна «навязывает нам корпускулярную картину распространения света» [3].

И все же можно согласиться с утверждением Е. Л. Фейнберга, что «для Бора же эта двойственность составляла саму суть дела» [4]. Однако в период 1913—1925 гг. на пер-

---

[1] Н. Бор. Избр. науч. труды, т. I, стр. 541.

[2] О. Клейн. Портрет Нильса Бора — ученого и мыслителя. В кн.: «Нильс Бор. Жизнь и творчество». М., 1967, стр. 290—291.

[3] Н. Бор. Избр. науч. труды, т. I, стр. 560.

[4] Е. Л. Фейнберг. Научное творчество Бора. В кн.: «Нильс Бор. Жизнь и творчество», стр. 95.

вый план выступала одна сторона той двойственности, которая затем была им выражена в виде принципа дополнительности,— роль классического описания. И только под влиянием работ Эйнштейна у него постепенно вырисовывалась общая картина, окончательная разработка которой стала возможной после создания Гейзенбергом и Шредингером математического аппарата квантовой механики — синтез обоих направлений, о которых шла здесь речь. Для этого Бору пришлось преодолеть не только ограниченность развитой им точки зрения соответствия, но и слишком конкретное примитивное понимание эйнштейновских световых квантов.

Таким образом, создание адекватной теории световых и атомных явлений было синтезом результатов, добытых в процессе развития обоих основных направлений квантовой теории.

Ю. Б. Молчанов

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОДНОВРЕМЕННОСТИ С ПОМОЩЬЮ ТРАНСПОРТИРОВКИ ЧАСОВ

В литературе по теории относительности, наряду с рассмотрением предложенного Эйнштейном метода установления одновременности разноместных (т. е. происходящих в различных точках пространства) событий с помощью сигналов того или иного рода и связанных с этим методом физических и философских проблем, обычно упоминается еще один метод установления одновременности, а именно, метод транспортировки синхронизированных часов.

До последнего времени этот метод и связанные с ним методологические проблемы не подвергались достаточно глубокому анализу, поскольку считалось общепринятым утверждение о его несостоятельности по причине релятивистского замедления хода транспортируемых часов, которое нарушает предварительную их синхронизацию.

Однако недавно этот метод привлек внимание американских исследователей и его обсуждению был посвящен мартовский выпуск журнала «Philosophy of Science» 1969 г., где опубликовано несколько статей, в которых подробно обсуждались теоретические проблемы, связанные с установлением одновременности разноместных событий с помощью транспортировки часов, с отношением этого метода к сигнальному методу Эйнштейна и с возможностью установления с помощью этих методов объективных критериев установления абсолютной одновременности разноместных событий.

Это обсуждение представляет значительный интерес, поскольку способствует устранению некоторых неясностей и ошибочных трактовок, встречающихся при истолковании классической и релятивистской концепции времени и связанного с этим различного понимания отношения одновременности.

Дело в том, что само отношение одновременности, утверждение об абсолютном или относительном ее характере имеют различный смысл в зависимости от того, в рамках какой концепции они формулируются.

Рассмотрение литературы, где эти вопросы анализируются достаточно подробно и глубоко [1], позволяет сделать вывод о том, что и абсолютную и относительную одновременность следует понимать в различных смыслах.

С одной стороны, отношение одновременности между разноместными событиями может быть абсолютным в смысле уникальности, т. е. связывать только по одному-единственному событию из множеств событий, происходящих в каждой точке пространства. Относительность одновременности означает, что каждому событию, происходящему в данной точке пространства, соответствует в другой точке не одно-единственное одновременное ему событие, а некоторое множество объективно (или «топологически», по терминологии А. Грюнбаума) одновременных ему событий, из которых каждое является равноправным по отношению ко всем остальным по своим объективным физическим характеристикам. Абсолютную и относительную одновременность такого рода можно именовать одновременностью в смысле уникальности [2]. Абсолютная в смысле уникальности одновременность выбирается из

---

[1] А. Эйнштейн. К электродинамике движущихся тел. Собр. науч. трудов, т. I. М., «Наука», 1965, стр. 7—35; Сущность теории относительности. Собр. науч. трудов, т. II. М., «Наука», стр. 5—83; А. Бергсон. Длительность и одновременность. «Academia», Пг., 1923; A. A. Robb. The Absolute Relations of Time and Space. Cambridge University Press, 1921. А. С. Эддингтон. Теория относительности. М.— Л., ОНТИ, 1934; H. Reichenbach. Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre. Braunschweig, 1929; The Philosophy of Space and Time. N. Y., 1950. Л. И. Мандельштам. Лекции по физическим основам теории относительности. Полное собр. трудов, т. V, Л., 1950; В. А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. М., 1961; Современная теория пространства и времени. «Природа», 1953, № 12; А. Д. Александров. Теория относительности как теория абсолютного пространства-времени. В сб. «Философские вопросы современной физики». М., Изд-во АН СССР, 1959; Г. Рейхенбах. Направление времени. М., ИЛ, 1962; Дж. Уитроу. Естественная философия времени. М., «Прогресс», 1964; А. Грюнбаум. Философские проблемы пространства и времени. М., «Прогресс», 1969.

[2] См.: Ю. Б. Молчанов. Одновременность; Философская энциклопедия, т. IV. М., Изд-во «Советская энциклопедия», 1967, стр. 131—132.

множества объективно одновременных событий, говоря словами Эйнштейна, только «по определению» и имеет конвенциальный характер. Конвенциальность выбора этого отношения одновременности обусловлена с точки зрения релятивистской концепции времени (полагающей, что временны́е отношения «раньше-позже» имеют физический смысл только для событий, которые могут быть связаны между собой реальными взаимодействиями) наличием в природе верхнего предела скорости распространения материальных взаимодействий, каковым является скорость света. Устанавливаемое «по определению» Эйнштейном положение о равенстве скоростей света при прохождении им пути «туда» и «обратно» позволяет выбирать из двух множеств объективно одновременных событий одну-единственную пару, которую считают абсолютно одновременной.

Однако эта одна-единственная пара установленных «по определению» в рамках одной инерциальной системы отсчета абсолютно одновременных (в смысле уникальности) событий не будет оставаться таковой в другой инерциальной системе отсчета: там абсолютно одновременной (в смысле уникальности) будет уже какая-то другая пара также выбранных «по определению» событий.

Здесь мы имеем дело с отношениями абсолютной и относительной одновременности уже в другом смысле — в смысле всеобщности. Абсолютно одновременными будут только такие события, которые остаются одновременными во всех возможных инерциальных системах отсчета, и относительно одновременными такие, которые одновременны в одной системе отсчета, но не одновременны в других системах отсчета.

Классическая абсолютная одновременность ньютоновской физики является абсолютной как в смысле уникальности, так и в смысле всеобщности. Событию, происходящему в данной точке пространства, в каждой другой точке одновременно только одно-единственное событие, и это отношение одновременности имеет силу во всех возможных системах отсчета.

С релятивистской же точки зрения, событию, происходящему в данной точке пространства, объективно одновременно в любой другой точке некоторое множество событий; из этого множества путем соглашения выбирается одно-единственное абсолютно одновременное (в смысле уникальности) с ним событие. Это установленное по соглашению отношение абсолютной одновременности имеет силу только в пределах единой для обеих точек инерциальной системы отсчета и теряет силу в любой другой системе, где (по соглашению опять же), устанавливается другое отношение абсолютной одновременности, связывающее уже иные пары событий.

Эти вопросы получили освещение в нашей статье «О различных смыслах отношения одновременности (к истории вопроса)» [3], где были также рассмотрены различные попытки теоретически обосновать справедливость классического истолкования одновременности. Таковыми являются положения Канта [4] об абсолютной одновременности бытия составных элементов целого, идея Бергсона об абсолютной одновременности событий, охватываемых по крайней мере для одного объекта «единым мгновенным восприятием» [5], а также различные варианты, релятивистских по сути дела попыток обосновать объективность отношения абсолютной одновременности путем ссылки на возможность распространения материальных взаимодействий с бесконечно большими скоростями.

В упомянутой выше статье мы не говорили вообще о возможности установления одновременности разноместных событий путем транспортировки синхронизированных часов, так как считали этот способ несущественным при рассмотрении данной проблемы.

Обсуждение этих вопросов в американской литературе наводит, однако, на мысль о необходимости подробного рассмотрения этого метода установления одновременности с целью выяснения его смысла и значения в рамках различных концепций времени: классической и релятивистской.

Несколько лет тому назад в книге П. В. Бриджмена, изданной после его смерти в 1962 г. под названием «Утонченный учебник теории относительности» [6], была выдвинута идея, что абсолютную (в смысле уникальности)

---

[3] См. «Эйнштейновский сборник, 1968». М., «Наука», 1968, стр. 92—115.

[4] И. Кант. Критика чистого разума. Соч., т. 3. М., «Мысль», 1964, стр. 405—406.

[5] А. Бергсон. Длительность и одновременность (по поводу теории Эйнштейна). Пг., 1923, стр. 40.

[6] P. W. Bridgman. A Sophisticate's Primer of Relativity. Middletown, Weslean University Press, 1962.

одновременность разноместных событий можно установить помимо эйнштейновского определения, опирающегося на световые сигналы, также и с помощью транспортировки часов.

Бриджмен придерживается следующего определения одновременности: «Два удаленных друг от друга события являются одновременными, если показания времени на двух соответствующих локальных часах являются совершенно тождественными» [7].

Нетрудно, конечно, заметить, что данное определение не имеет смысла, ибо одинаковые показания могут давать любые несинхронизированные часы относительно заведомо неодновременных событий. Однако Бриджмен полагает, что для установления абсолютной одновременности разноместных событий нужно только синхронизировать фиксирующие их свершение часы, т. е. нужно добиться, чтобы эти часы одновременно давали одинаковые показания. Не замечая того, что с подобными дефинициями нельзя выйти из логического круга, Бриджмен специально подчеркивает, что для синхронизации часов вовсе не нужно устанавливать никакой каузальной связи между событиями, происходящими в тех же точках пространства, где расположены часы [8]. Чтобы учесть и устранить нарушения хода часов, возникающие при их транспортировке, Бриджмен предлагает следующую процедуру. Некоторое множество синхронизированных в одной точке пространства часов перемещается с различными скоростями в другую точку по одной и той же траектории. Скорость этих часов, по Бриджмену, является «самоизмеряемой», т. е. устанавливается на основании показаний самих часов. По прибытии на место все часы дают разные показания. Из данного множества часов выбираются некоторые эталонные часы (возможно, часы, перемещавшиеся с наименьшей скоростью) и устанавливается разность показаний каждых часов по сравнению с ними. На основании установленных разностей вычерчивается кривая, которая экстраполируется на нулевую «самоизмеряемую» скорость, и таким образом определяются показания часов, которые они могли бы давать, если бы перемещались с «нулевой» скоростью. По мнению Бриджмена, такой метод установки

[7] P. W. Bridgmen. A Sophisticate's Primer of Relativity. Middletown, Weslean University Press, 1962, p. 55.
[8] Там же, стр. 55—62.

удаленных часов является «уникальным и точно определенным, подразумевающим только актуально выполнимые физические операции и, видимо, поэтому нет никаких оснований, чтобы не принять его»[9].

Утверждая, что этот метод дает такое же уникальное определение одновременности, как и метод «стандартной световой синхронизации» Эйнштейна, Бриджмен, однако, подчеркивает, что его метод приводит к столь же конвенциальному определению, что и метод Эйнштейна, и что «он (Эйнштейн) по существу говорил, что любой метод какой-либо сверки удаленных часов включает элемент определения»[10].

В 1967 г. Брайен Эллис и Питер А. Боумен выступили на страницах журнала «Philosophy of Science» со статьей, в которой, обсуждая методику П. В. Бриджмена, выдвинули иные соображения относительно физического значения предложенного им метода[11].

Они считают важной заслугой Бриджмена в области физики идею синхронизации удаленных часов с помощью медленной транспортировки. По их мнению, его методика демонстрирует либо ошибочность, либо тривиальность тезиса о том, что в специальной теории относительности установление одновременности удаленных друг от друга событий подразумевает «существенный конвенциальный ингредиент».

Напомним, что по Эйнштейну абсолютная (в смысле уникальности) одновременность двух разноместных, но происходящих в единой инерциальной системе событий устанавливается «по определению», согласно которому скорость света в направлении из точки A в точку B равна скорости света в направлении из точки B в точку A. Отсюда, если мы обозначим через t_1 — время отправления сигнала из точки A в точку B, t_2 — время отражения сигнала в точке B, t_3 — время возвращения сигнала в точку A, то

$$t_2 = t_1 + \varepsilon (t_3 - t_1).$$

Согласно определению Эйнштейна, $\varepsilon = {}^1/_2$ и синхронизация с помощью такого коэффициента называется

---

[9] Там же, р. 65.
[10] Там же, р. 66.
[11] B. Ellis, P. Bowman. Conventionality in Distant Simultaneity, «Philosophy of Science». Michigan State University, East Lansing, Michigan, 1967, Vol. 34, N 2, pp. 116—136.

«стандартной синхронизацией», а сам коэффициент ε мы будем называть «коэффициентом одновременности».

Поскольку временны́е отношения обусловлены наличием или возможностью материальных взаимодействий, то в силу предельности скорости света, с моментом события отражения света t_2 в точке B будут одновременны все события, происходящие в точке A в интервале $t_3 - t_1$. И выбор какого-то одного из них при $\varepsilon = {}^1/_2$ имеет преимущества перед другими только в смысле дескриптивной (описательной) простоты и фактуально (т. е. в смысле своих объективных свойств) не дает данному событию никаких физических преимуществ перед всеми другими событиями, выбранными с помощью $\varepsilon \neq {}^1/_2$. Единственное ограничение состоит в том, чтобы ε находилось в пределах между 0 и 1. Методы синхронизации удаленных друг от друга часов, которые опираются на предположение, что $\varepsilon \neq {}^1/_2$, именуются «нестандартными синхронизациями».

Рассматривая синхронизацию часов по сигнальному методу Эйнштейна, а также установление синхронизации путем медленной транспортировки часов как «стандартные синхронизации», Эллис и Боумен считают, что им удалось доказать, что «имеются веские физические основания для предпочтения стандартной сигнальной синхронизации» [12]. Они полагают, что с помощью бриджменовского метода можно установить объективные физические критерии для отношения абсолютной (в смысле уникальности) одновременности разноместных событий в рамках единой инерциальной системы.

Обосновывают свою точку зрения они следующим образом. Первая группа их аргументов направлена на доказательство несостоятельности «нестандартных синхронизаций».

Эллис и Боумен стремятся доказать, что выбор $\varepsilon \neq {}^1/_2$ приводит к следствиям, не совместимым с физическими фактами.

Можно сказать, по их мнению, что существует так называемый эмпирический принцип СТО, согласно которому скорость света при прохождении им пути «туда — обратно», или скорость в двух направлениях, $\frac{2d}{t_3 - t_1} = c$

---

[12] Там же, p. 116—136.

(где c — скорость света в вакууме, а d — расстояние в одном направлении). Этот принцип они называют «двухсторонним принципом света». Кроме того, можно сформулировать еще одно условие, которое они именуют «топологическим условием для света». Это условие состоит в том, что величина t_2, которую должны были бы показывать часы в точке A в тот момент, когда сигнал достигает точки B, должна быть между t_1 и t_3, или $t_2 = t_1 + \varepsilon (t_3 - t_1)$, где $0 < \varepsilon < 1$. Далее, если предположить, что подобная же процедура синхронизации часов производится и в точке B по отношению к точке A, и что t_2 есть также время отправления сигнала из B, а t_4 — время возвращения сигнала в B после его отражения в точке A, то мы получим, исходя из «двухстороннего принципа света», что $t_4 - t_2 = t_3 - t_1$, и если мы обозначим ε_{AB} и ε_{BA} коэффициенты, по которым устанавливаются часы в точках A и B соответственно, то из «двухстороннего принципа света» следует, что $\varepsilon_{AB} + \varepsilon_{BA} = 1$.

Затем они рассматривают принцип «транзитивной синхронизации», согласно которому, если из трех часов A, B и C, покоящихся в данной инерциальной системе и синхронизированных на основании одного и того же принципа, часы A синхронны с часами B, а B с C, то тогда и A синхронны с C.

Из «двухстороннего принципа света» и «принципа транзитивности» Эллис и Боумен выводят «трехсторонний» и вообще «n-сторонний принцип света» и выдвигают условие, «что любая нестандартная синхронизация с помощью световых сигналов должна удовлетворять n-стороннему принципу света. Ибо, если этот принцип не выполняется, то устанавливаемые световыми сигналами соотношения между часами нашей системы не будут транзитивными и не будут устанавливать отношение синхронизации» [13].

Таким образом, с их точки зрения любая нестандартная синхронизация, чтобы ее вообще можно было рассматривать как синхронизацию, должна быть транзитивной.

Итак, ограничение, накладываемое Эллисом и Боуменом на методы синхронизации, состоит в том, что они должны удовлетворять принципу транзитивности.

---

[13] Там же, p. 118.

Второе возражение этих авторов против нестандартных синхронизаций состоит в том, что они якобы не согласуются с требованиями принципа относительности.

Авторы рассматривают как «слабую», так и «сильную» версии формулировок принципа относительности, связывая эти формулировки соответственно с именами Эйнштейна и Пуанкаре. Эллис и Боумен характеризуют слабую формулировку, или версию Эйнштейна, следующим образом: «В своей обычной формулировке он (принцип относительности) провозглашает тождественность, эквивалентность или инвариантность законов во всех инерциальных системах, при равномерном прямолинейном движении, и эта тождественность оценивается по их отношению к преобразованиям Лоренца» [14].

Сильная же формулировка, связываемая ими с именем Паункаре, провозглашает «полную невозможность в рамках инерциальных систем установить состояние абсолютного движения... Эта версия является более строгой, чем первая, поскольку она исключает также расхождения в количественных определениях таких величин, как длина, скорость, диэлектрическая постоянная и т. д. между различными инерциальными системами» [15]. По мнению Эллиса и Боумена, слабая формулировка отвергает очень широкий подкласс нестандартных синхронизаций, а сильная формулировка, если ее дополнить требованием сохранения справедливости первого закона Ньютона в любой инерциальной системе, исключает все нестандартные синхронизации.

Пытаясь доказать справедливость этих положений, авторы полемизируют с А. Грюнбаумом, который в «Эпилоге» упоминавшейся выше книги Бриджмена утверждал, что «использование различных значений ε в разных инерциальных системах S и S' может привести к отказу от первого постулата СТО не более чем использование сантиметров для выражения скорости в системе S и миль для выражения той же самой скорости в системе S'» [16].

Эллис и Боумен говорят, что если Грюнбаум придерживается слабой версии принципа относительности, то его

---

[14] Там же, p. 122.
[15] Там же.
[16] A. Grünbaum. Epilogue, in: P. W. Bridgman. «A Sophisticate's Primer of Relativity», p. 191.

аналогия опровергается тем, что выбор шкалы длин не влияет на форму выражения каких-либо законов физики, тогда как выбор ε, очевидно, влияет. Если же он придерживается сильной версии, то и в таком случае его аналогия ошибочна. Этот вывод обосновывается следующим образом.

Австралийский математик Макфи (*Mac Phee*), говорят они, доказал следующую теорему: «Если мы синхронизируем часы различных инерциальных систем таким образом, чтобы равномерное прямолинейное движение в любой из этих систем должно было бы рассматриваться как равномерное прямолинейное движение в любой другой и чтобы удовлетворялось условие взаимной симметрии (reciprocity) относительных скоростей, то в таком случае часы каждой инерциальной системы должны быть синхронизированы согласно стандартной сигнальной синхронизации» [17]. Под условием взаимной симметрии здесь имеется в виду утверждение, что скорость системы K относительно системы K' должна быть равна скорости системы K' относительно системы K по абсолютной величине.

Согласно этой теореме, различные значения ε в разных инерциальных системах приводят к разным значениям соответственных относительных скоростей. Но невозможность взаимной симметрии относительных скоростей приводит к нарушению принципа относительности в его строгой формулировке.

Выдвинув возражения против утверждений о правомерности любых определений коэффициента ε в рамках топологической одновременности, Эллис и Боумен приводят следующие аргументы в пользу утверждения об уникальном характере «стандартной синхронизации». «Рейхенбах утверждает,— пишут они,— что даже если... было бы возможно установить синхронность с помощью транспортировки часов, то все равно утверждение о том, что часы, синхронные локально, остаются таковыми после их разделения в пространстве, оставалось бы результатом дефиниции, а не эмпирического факта. Но случай этот был бы тогда по существу аналогичен пространственной конгруэнтности удаленных отрезков» [18].

---

[17] B. Ellis, and P. Bowman. Conventionality in Distant Simultaneity, «Philosophy of Science», Michigan State University, East Lansing, Minchigan, 1967, Vol. 34, N 2, pp. 124—125.

[18] Там же, p. 126.

Если бы допускалась возможность нестандартной синхронизации с помощью медленной транспортировки, которая была бы совместима с «n-сторонним принципом света», то следовало бы ввести два поля универсальных сил. Одно поле необходимо для объяснения анизотропии эмпирически определяемых скоростей света в разных направлениях, а второе — для объяснения ускорения или замедления транспортируемых часов. Эти силы были бы универсальными как в том смысле, что действовали бы одинаково на все электромагнитные сигналы и на все часы, так и в том смысле, что от них нельзя изолироваться. Более того, два разных поля универсальных сил характеризовались бы одинаковыми законами распределения, т. е. они имели бы законы, идентичные по форме закону распределения световых скоростей, но тогда тезис Рейхенбаха о конвенциальном характере определения одновременности либо неверен, либо истинен только в тривиальном смысле. В своей нетривиальной версии он неверен потому, что требует введения двух независимых полей универсальных сил, которые подчиняются идентичным законам распределения. А таких сил, как учит нас опыт, не существует.

Если же мы считаем приемлемым принцип, согласно которому все подобные универсальные силы должны быть приравнены нулю, тогда существование двух логически независимых способов определения одновременности удаленных событий (сигнального, медленной транспортировки часов), каждый из которых является уникальным и которые, по-видимому, должны давать одно и то же отношение одновременности удаленных событий как следствие эмпирических фактов, дает хорошие физические основания для принятия одной из этих дефиниций.

Если подобные «физические основания» отвергаются, тогда вообще не может существовать никаких физических оснований для какой-либо дефиниции количественного равенства каких угодно характеристик вещей, удаленных друг от друга.

Говоря о синхронизации с помощью медленной транспортировки часов, Эллис и Боумен подчеркивают, что даже в том случае, когда предсказания специальной теории относительности о замедлении хода транспортируемых часов являются верными, то и тогда бесконечно медленная транспортировка таких часов остается физическим отношением, «которое на самом деле является симметричным и транзитивным и которое можно было бы использовать для установления одновременности удаленных событий. Это физическое отношение не зависит от какой бы то ни было сигнальной процедуры и не требует для своего определения никаких предварительных измерений скорости. Поэтому оно подобно тем отношениям, которые могут быть использованы для определения равенства по массе удаленных друг от друга тел и про которые никто не говорит, что они являются конвенциальными в каком-либо ином смысле, кроме тривиального»[19].

Аргументы Эллиса и Боумена явились предметом критического обсуждения в ряде статей, опубликованных в мартовском выпуске журнала «Philosophy of Science» за 1969 г. Против них были выдвинуты веские возражения.

Так, А. Грюнбаум[20] считает, что оценка Эллисом и Боуменом нестандартных синхронизаций является неверной, поскольку из справедливости «двухстороннего принципа света» и «топологического условия для света» вовсе не следует, что $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{BA}$, и ничто не обязывает нас рассматривать показания часов, отмечающие момент возвращения сигнала, как автоматическое свидетельство о достигнутой синхронизации с другими часами. Для этого нужно внести дополнительное ограничение, именуемое Грюнбаумом «правилом фиксированной синхронизации», которое гласит: «установку любых таких часов X следует рассматривать как автоматически синхронизирующую часы X с точки зрения часов Y или любых других часов»[21].

Эллис и Боумен смешивают так называемый «обобщенный принцип фиксированной синхронизации», согласно которому при синхронизации допустим самое большее один акт установки на одни часы, и более строгий принцип «транзитивной синхронизации». Однако «обобщенный принцип фиксированной синхронизации» допускает любые нестандартные синхронизации в рамках

---

[19] Там же, p. 127.

[20] A. G r ü n b a u m. Simultaneity by Slow Clock Transport in the Special Theory of Relativity, «Philosophy of Science». Michigan State University, East Lansing, Michigan, Vol. 36, N 1, March 1969, pp. 5—43.

[21] Там же, p. 7.

«топологического условия для света» ($0 < \varepsilon < 1$), но не все эти синхронизации являются транзитивными.

С другой стороны, принцип транзитивности не допускает никакой другой синхронизации, кроме стандартной. При едином критерии синхронизации требование «транзитивности», выдвигаемое Эллисом и Боуменом, приводит к тому, что единственным видом транзитивной синхронизации является именно стандартная.

Таким образом, запрещение нестандартных синхронизаций уже подразумевается «принципом транзитивности синхронизации» и поэтому он не может быть использован в качестве аргумента против возможности синхронизации удаленных друг от друга часов с помощью нестандартных способов синхронизации.

Рассмотрев далее аргументацию Эллиса и Боумена с точки зрения соответствия нестандартных синхронизаций принципу относительности, А. Грюнбаум приводит следующие аргументы в пользу справедливости своего утверждения о том, что использование различных коэффициентов синхронизации так же не ведет к нарушению принципа относительности, как и выражение скоростей в сантиметрах в одной инерциальной системе и в милях в другой.

Рассматривая слабую версию формулировки принципа относительности, согласно которой законы должны быть тождественны, или инвариантны, во всех инерциальных системах, А. Грюнбаум отмечает, что если Эллис и Боумен не считают заранее, что данная его аналогия несостоятельна, а намереваются это доказать, то они должны доказать, что ограничение свободы выбора коэффициента синхронизации в рамках «топологического условия для света» обусловлено фактуальными, а не конвенциальными ингредиентами принципа относительности. Ибо фактически их обвинение основано на том, что они придерживаются одних соглашений и отбрасывают другие, которых придерживаются их оппоненты.

Рассматривая примеры с измерением движущегося стержня и выражением закона распространения света в прямоугольных и полярных координатах, Грюнбаум приходит к выводу, что при отсутствии других физических аргументов против выбора $\varepsilon \neq 1/2$ апелляция к нарушению при этом выборе слабой формулировки принципа относительности не устанавливает несовместимости

$\varepsilon \neq {}^1/_2$ с любыми фактуальными физическими ингредиентами слабой версии.

Что же касается сильной версии принципа относительности, то, рассмотрев пример с измерением скорости звука в различных инерциальных системах, Грюнбаум приходит к выводу, что формулировка принципа относительности (сильная), которой придерживаются Эллис и Боумен, является ошибочной.

Они смешивают внутрисистемный принцип относительности с межсистемным условием взаимной симметрии, когда требуют взаимного равенства по модулю относительных скоростей.

Согласно принципу относительности, законы природы одни и те же внутри систем, принадлежащих к определенному классу систем, скажем, инерциальных.

Согласно же принципу взаимной симметрии, всякий раз, когда закон природы выражает отношение R между системами отсчета, относящимися к одному и тому же классу, должен существовать сопутствующий закон, согласно которому отношение R имеет силу и для обратного отношения этих же систем (KRK', $K'RK$).

Принцип относительности касается внутрисистемных законов, принцип же взаимности — межсистемных. Кроме того, не следует смешивать специальный принцип относительности с более сильным требованием лоренц-инвариантности всех законов природы в координатных системах, связанных с любым эквивалентным классом допустимых систем отсчета.

Выдвигаемое Эллисом и Боуменом требование взаимной симметрии относительных скоростей является нетривиальным следствием преобразований Лоренца, вывод которых основывается на предположении, что $\varepsilon = {}^1/_2$.

Грюнбаум подчеркивает, что выдвигаемое Эллисом и Боуменом положение о связи строгого принципа относительности с требованием взаимной симметрии относительных скоростей несостоятельно. Они сделали это в расчете на дальнейший вывод о нарушении нестандартными синхронизациями ($\varepsilon \neq {}^1/_2$) строгого принципа относительности, поскольку эти синхронизации явным образом исключают взаимную симметрию относительных скоростей.

По собственной же оценке Эллиса и Боумена, вывод о том, что часы должны синхронизироваться при $\varepsilon = {}^1/_2$, следует из конъюнкции. Первой посылкой является условие взаимной симметрии относительных скоростей. Второй же посылкой является требование, чтобы движение, равномерное и прямолинейное в одной системе, было таковым и в любой другой системе. Другими словами, это условие требует инвариантности первого закона Ньютона по отношению к инерциальным системам и именуется «условием линейности».

Таким образом, отмечает Грюнбаум, становится очевидным, что вывод Макфи не содержит положения о том, что нестандартные синхронизации должны нарушать взаимную симметрию относительных скоростей. Он говорит только о более слабом требовании, согласно которому $\varepsilon \neq {}^1/_2$ нарушает либо условие линейности, либо условие взаимной симметрии относительных скоростей. В этой ситуации, отмечает А. Грюнбаум, Эллис и Боумен не имеют права принимать как доказанную отмеченную выше инвариантность независимо от того, выражается ли положение инвариантности первого закона Ньютона в разных инерциальных системах в конвенциальных или фактуальных ингредиентах. Но Эллис и Боумен рассматривают ее именно как доказанную, ибо стремятся отбросить нестандартные синхронизации, ссылаясь на то, что фактуальные компоненты физических принципов якобы опровергают конвенции, имплицитно входящие в эти принципы. Но инвариантность первого и второго законов Ньютона зависит не только от фактов, но и от частной конгруэнтности временны́х отрезков, которой пользуются для воспроизведения этих фактов. А утверждение о конгруэнтности содержит значительный конвенциальный ингредиент, и таким образом Эллис и Боумен не имеют права рассматривать как доказанное свое «условие линейности».

Затем А. Грюнбаум переходит к доказательству конвенциального характера определения абсолютной одновременности. Напомним, что в данном случае речь идет об установлении одновременности в рамках одной инерциальной системы, т. е. согласно нашей терминологии об установлении абсолютной (в смысле уникальности) одновременности.

Грюнбаум анализирует процедуру определения абсолютной (в смысле уникальности) одновременности на примере мысленного эксперимента, сходного с тем, которым пользовался А. Эйнштейн.

Рассмотрим два ряда событий, происходящих в различных точках A и B единой материальной системы, т. е. покоящихся друг относительно друга: этими рядами событий будут моменты времени, отсчитываемые расположенными в этих точках часами (U_A и U_B).

Пусть имеются также какие-то третьи часы U, которые пересекают мировую линию часов U_A в точке A в момент E_0 и в это мгновение синхронизируются с часами U_A, затем они достигают точки B в момент E_1 по часам U_B, и те в это мгновение синхронизируются с часами U, которые в то же мгновение отправляются назад и встречаются с часами U_A в момент E_i. Подобную же процедуру можно проделать и с помощью световых сигналов, но в таком случае никакой непосредственной синхронизации не будет. Просто из точки A в момент E_0 отправляется световой сигнал, который приходит в точку B в момент E_1 по часам U_B, мгновенно отражается там и возвращается в точку A в момент E_i по часам U_A.

Автор рассматривает, какие возможности для установления одновременности с помощью сигнального метода и транспортировки часов представляют различные типы миров, обладающие разными физическими свойствами, а именно ньютоновский, квазиньютоновский и другие типы миров СТО.

В ньютоновском мире, где транспортировка часов не влияет на скорость их хода и где существуют произвольно быстрые (бесконечные) скорости перемещения тел и сигналов, мировая линия S часов U_A содержит только одно-единственное событие E, которое не может также принадлежать мировой линии других часов, куда входит событие E_1, происходящее в точке B. Это обусловлено тем, что любое тело не может находиться одновременно в двух разных местах. Событие E делит мировую линию S на два открытых подкласса событий X и Y, обладающих следующим свойством. Каждое событие, принадлежащее X и Y, может принадлежать также и мировым линиям часов U, пересечение которых с мировой линией часов U_B представляет собой событие E_1. Кроме того, если каждые часы U были локально синхронизированы с часами U_A, то время t' события E_1, согласно каждым U, является одним и тем же (в силу независимости скорости хода часов от скорости перемещений и локальной синхронизации их с U_A) и расположено в численном отношении между событиями x по U (или U_A) и y по U (или U_A), опять же в силу локальной синхронизации и независимости скорости хода часов от их транспортировки. Промежуточное положение E_1 является порядковым фактом и не зависит от ссылок на какую-либо меру длительности интервала между событиями xE_1 и E_1y. Причем E_1 является единственным событием, испытывающим отношение временнóй промежуточности ко всем членам X и Y. Но и E по определению является единственным событием мировой линии S, которое находится по времени между каждым x в X и каждым y в Y.

Следовательно: а) E_1 и E расположены во времени между одними и теми же событиями S и б) в любой системе квазипоследовательного временнóго порядка, охватывающего события мировой линии S и часов U_B, E_1 и E занимают одинаковое место по отношению к порядку «раньше» и «позже», и это является физическим фактом. Таким образом, только на основе временны́х отношений промежуточности E_1 является уникально одновременным с E в рамках S, а E является одновременным с E_1 в рамках мировой линии часов U_B.

Если мы предположим, что существует некоторый предел скорости движения часов, то одних только порядковых соображений для определения одновременности E и E_1 при наличии синхронизации часов U и независимости скорости хода часов от скорости их передвижения недостаточно. В порядке будет существовать некоторый разрыв, и поэтому суждение об одновременности подобных событий будет решительным образом зависеть от метрического требования, чтобы E и E_1 были по длительности эквидистантны от событий на мировой линии S, происшедших раньше или позже крайних событий, которые в силу предельности скорости передвижения часов могут быть связаны с событием E_1.

Но если признать, что в ньютоновском мире могут существовать какие-либо ограничения скоростей перемещения часов, то уже одно только признание дальнодействия сил гравитации, т. е. мгновенного их распространения, выделяет такой класс событий, которые являются уникально одновременными, ибо ньютоновская гравитация связывает только одновременные события [22].

---

[22] Это же отмечалось нами в статье «Понятие одновременности и его эволюция». «Вопросы философии», № 9, 1964, стр. 60.

Таким образом, в ньютоновском мире абсолютная в смысле уникальности одновременность устанавливается физическими фактами, вытекающими из временно́го порядка, определяемого перемещением синхронизированных часов и гравитационными взаимодействиями. И она не является ни в коей мере результатом какой-либо конвенции. Конвенция не простирается далее градуировки часов.

К в а з и н ь ю т о н о в с к и й м и р отличается от ньютоновского тем, что в нем существует предел скорости распространения материальных воздействий. Наиболее быстрыми каузальными цепями являются свет и гравитация, скорость их распространения туда и обратно одинакова в любой инерциальной системе. Однако перемещение часов не влияет на скорость их хода.

В силу предельности скорости света, при установлении чисто порядковых отношений по времени между разноместными событиями существует разрыв во временно́м порядке разноместных событий, и временно́й порядок в этом разрыве является неопределенным. Чисто порядковые отношения разных временны́х координат, которые приписываются разноместным событиям часами, покоящимися в пространстве, и часами, транспортируемыми из данной точки в другую, вовсе не являются такими, чтобы рассматривать эти события как уникально принадлежащие одному и тому же мгновению в рамках общей системы квазипоследовательного временно́го порядка.

Чтобы доказать уникальную одновременность разноместных событий в квазиньютоновском мире, мы должны доказать, что оба события являются эквидистантными в смысле длительности от какого-то связанного с ними обоими третьего события.

Таким образом, здесь уже необходимо ссылаться на меру длительности, согласно которой равные различия во временны́х координатах пары событий требуют соответственно равенства между их мерами длительности. Тождество временны́х координат устанавливает одновременность соответствующих разноместных событий только после апелляции к метрической конгруэнтности длительностей интервалов на разных мировых линиях.

Но именно эта зависимость от временно́й метрики вводит нетривиальным образом конвенциальный ингредиент в отношения одновременности разноместных событий.

Этот конвенциальный ингредиент вытекает из того, что пространственные и временные интервалы в силу непрерывности пространства и времени не обладают внутренне присущей им метрикой, внутренне присущей им протяженностью, мера которой вводится извне с помощью конвенции. Таким образом, отношения одновременности, устанавливаемые с помощью транспортировки часов, могут быть конвенциальны и нетривиальным образом (тривиальная конвенциальность — определенная градуировка часов).

Миры специальной теории относительности отличаются от квазиньютоновского следующим: 1) медленное перемещение синхронных часов устанавливает абсолютную одновременность в рамках единой инерциальной системы в смысле уникальности, но эта одновременность не является абсолютной в смысле всеобщности, т. е. два одновременных события не будут одновременными с точки зрения другой системы отсчета; 2) строго говоря, перемещение часов влияет на скорость их хода и тем самым нарушает синхронизацию. Эллис и Боумен утверждают, что второе положение неверно, и полагают, что с помощью бесконечно медленной транспортировки часов можно добиться уникальной внутрисистемной абсолютной одновременности, которая будет вытекать из физических фактов и не будет результатом соглашения.

Но уже на примере квазиньютоновской Вселенной, где транспортировка часов устанавливает абсолютную одновременность и в смысле уникальности, и в смысле всеобщности, и во внутрисистемном и в межсистемном отношениях, мы видели, что в силу отсутствия мгновенной передачи материальных взаимодействий установление абсолютной одновременности является конвенциальным в нетривиальном смысле из-за отсутствия у пространственных и временных интервалов внутренне присущей им метрики. Таким образом, медленная транспортировка часов в специальной теории относительности не уничтожает конвенциального характера одновременности.

Рассмотрение аргументации А. Грюнбаума показывает, что в конце концов он согласен с тем, что никакая транспортировка часов не дает определения абсолютной (в смысле уникальности) одновременности, если не подкрепляется передачей бесконечно быстрых сигналов.

По мнению Весли К. Салмона[23], Эллис и Боумен, а до них Бриджмен, доказали, что в единой инерциальной системе отсчета уникальное отношение одновременности для удаленных друг от друга событий может быть установлено с помощью медленной транспортировки часов. Хотя эта процедура является, по мнению автора, законной, можно также предложить и другой метод установления уникальной одновременности с помощью транспортировки часов. Сущность этого метода состоит в том, что нужно учитывать релятивистское замедление хода часов при их транспортировке и соответствующим образом корректировать часы.

В. Салмон считает, что этот метод также устанавливает уникальное отношение одновременности, и получаемая синхронизация идентична стандартной сигнальной синхронизации и синхронизации, устанавливаемой медленной транспортировкой часов.

Но если мы признаем, что существуют различные методы установления уникального отношения метрической одновременности разноместных событий с помощью транспортировки часов, то возникает вопрос, можно ли доказать, что конвенциальный характер определения одновременности не является неизбежным?

Мы сталкиваемся здесь с ситуацией, которая характеризуется следующими условиями.

(А) Физически возможно установить уникальное отношение метрической одновременности на основе транспортировки часов.

(Б) Существует конечный предел скоростей передачи сигналов туда — обратно.

В такой ситуации, по мнению В. Салмона, сохраняют силу аргументы в пользу неизбежности соглашения, конвенции при определении одновременности. Для доказательства этого можно предположить, что выдвинутое выше положение (Б) ошибочно и заменить его на (Б′): нет никакого конечного верхнего предела для скоростей передачи сигналов туда — обратно.

Утверждение Эйнштейна, что (Б) истинно, а (Б′) ошибочно, является фактуальным утверждением, как

---

[23] W. C. Salmon. The Conventionality of Simultaniety. Philosophy of Science, Vol. 36, N 1, March 1969, pp. 44—63.

и противоположное ему утверждение классической механики.

Эллис и Боумен признают, что одновременность была бы конвенциальной в нетривиальном смысле, если бы, вопреки факту, не было никаких физических оснований для методов, отличных от сигнального метода Эйнштейна.

В связи с этим возникает вопрос: неизбежно ли использование световых сигналов при установлении отношений одновременности?

Когда Рейхенбах говорит, что временно́е сравнение удаленных событий требует использования сигналов, он сопоставляет локальное сравнение со сравнением удаленных событий, а не сигнальную синхронизацию с транспортировкой синхронизации. Он утверждает, что происходящие по соседству события можно сравнить непосредственно наблюдением, тогда как происходящие вдалеке друг от друга нельзя. Для временно́го сравнения удаленных событий требуются каузальные процессы, переносящие информацию из одного места в другое, с тем чтобы там можно было произвести локальное сравнение. Локальное сравнение совместно с каузальными процессами позволяет нам сделать выводы, являющиеся основанием для сравнения удаленных событий. Сигналы, на которые Рейхенбах ссылается в данном случае, не ограничиваются используемыми при установлении синхронизации с помощью сигналов; часы, транспортируемые из A в B, представляют собой сигнальный процесс, как и радиосигнал (или световой сигнал) из B в A, сообщающий о времени прибытия светового сигнала, регистрируемого часами в B. Главный вопрос в этой процедуре есть обоснование необходимости этой дефиниции или соглашения, но не вопрос о природе конвенции.

Среди альтернативных методов, рассмотренных Рейхенбахом, есть и метод транспортировки синхронизации. Относительно этого метода он особенно подчеркивает два момента: (1) независимо от того, обеспечивает или нет метод транспортировки часов уникальную синхронизацию, он не может обеспечить ничего, кроме нетривиальной дефиниции одновременности, и (2) несверенные непосредственно показания реальных транспортируемых часов не устанавливают уникальной синхронизации, так что их нельзя рассматривать даже как дефиницию одновременности. Таким образом, если считать доказанной возможность уникальной дефиниции одновременности, основанной на транспортировке часов, мы видим все же, что существование конечного верхнего предела для распространения сигналов приводит к конвенциальности особого вида, которой не было бы в мире, управляемом законами классической механики.

Рассматривая конвенциальные элементы в аксиоматических основаниях специальной теории относительности, Баз. К. ван Фраассен[24] считает, что утверждение Рейхенбаха о конвенциальном характере одновременности основывается на более фундаментальном положении, согласно которому «координативные дефиниции и необходимы и, по сути дела, произвольны». В теории пространства-времени роль координативных дефиниций состоит в «связывании» многообразия координат с многообразием измеряемых — физических отношений и величин. Существуют объективные факторы, ограничивающие выбор множества координативных дефиниций, но и допускающие определенный момент произвола, соглашение в их выборе.

Фундаментальная координативная дефиниция временнόго порядка состоит в том, что два события не являются одновременными, если их можно связать с помощью световых сигналов. В ситуации классической физики, где произвольно быстрые сигнальные цепи возможны, уже этого достаточно, чтобы определить уникальный эквивалент одновременности. Мы можем сформулировать проблему одновременности разными способами: а) при каких условиях два (несовпадающих) события одновременны в данной системе отсчета? б) при каких условиях двое инерциальных часов являются синхронными?

Эллис и Боумен не доказали, что стандартное отношение одновременности является неконвенциальным. Однако им удалось обнаружить некоторые альтернативные конвенции, которые также дают это же отношение одновременности.

Аллен Дж. Дженис[25] рассматривает вопрос, можно ли использовать транспортировку часов также и в

---

[24] Bas. C. van Fraassen. Conventionality in the Axiomatic Foundations of the Special Theory of Relativity. Philosophy of Science, vol. 36, N 1, March 1969, pp. 64—73.

[25] Allen J. Janis. Sinchronism by Slow Clock Transport in Noninertial Frames of Reference. Philosophy of Science, vol. 36, N 1, March 1969, pp. 74—81.

неинерциальных системах? Он считает, что, кроме случая так называемых сокращающихся систем отсчета, необходимым условием успешного применения метода транспортировки часов является геодезичность семейства временноподобных мировых линий, представляющих собой стационарные часы. Это условие есть следствие требования, чтобы транспортируемые часы давали показания времени, совместимые после их возвращения с показаниями часов, от которых они стартовали. В случае плоского пространства-времени специальной теории относительности геодезическим движением является движение с постоянной скоростью относительно некоторой инерциальной системы.

Обсуждение проблемы установления одновременности американскими учеными представляет интерес прежде всего потому, что оно показывает актуальность выяснения реального содержания как ньютоновской, так и релятивистской концепции времени, ибо попытка установить абсолютную (в смысле уникальности) одновременность разноместных событий путем сочетания транспортировки синхронизированных предварительно часов и сигнального метода есть не что иное, как попытка свести воедино две совершенно различные концепции времени: субстанциальную и реляционную концепцию Ньютона и концепцию Эйнштейна.

По Ньютону, время равномерно и одинаково протекает во всех точках пространства и имеет реальный физический смысл, независимо от каких-либо измерительных процедур и материальных процессов и взаимодействий.

Материализация такого времени, как указывает А. Эйнштейн, подразумевает расположение в этих точках пространства одинаково и равномерно идущих часов, которые к тому же синхронизированы друг с другом. Синхронизация подразумевает, что часы одновременно дают одинаковые показания. Вообще требование синхронизации часов есть требование установления единого абсолютного времени для всей Вселенной. Коль скоро эти условия выполнены, т. е. имеются часы и они синхронизированы между собой, то тем самым абсолютное время — эта умозрительная сущность классической физики — получает некоторый материальный аналог. Этого, собственно говоря (видимо, сами того не сознавая), и добиваются Бриджмен, Эллис и Боумен, доказывая, что можно достигнуть синхронизации расположенных в различных точках пространства часов, а тем самым и установления абсолютной одновременности и абсолютного времени классической физики.

Мы приводили выше высказывания Эллиса и Боумена, что даже в том случае, если права теория относительности, т. е. если перемещаемые часы изменяют скорость хода, то все равно метод транспортировки синхронизированных часов дает определение одновременности, которое является физическим отношением и «не зависит от какой бы то ни было сигнальной процедуры». Но такая трактовка одновременности и есть выражение ньютоновой субстанциальной концепции времени. Только, по Ньютону, не нужно никаких синхронизированных часов для того, чтобы «абсолютное, истинное, математическое время само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему» протекало равномерно [26].

Эллис и Боумен предлагают не более чем «операциональную интерпретацию» этой концепции. Ведь, согласно Ньютону, течение абсолютного времени, а согласно Эллису и Боумену — ход синхронизированных часов, расположенных в различных точках пространства,— не зависит от чего-либо внешнего, или, выражаясь словами последних, от «какой-бы ни то было сигнальной процедуры».

Такова же по сути дела и точка зрения П. В. Бриджмена, который также специально подчеркивает, что для установления абсолютной одновременности разноместных событий нужно только синхронизировать часы, фиксирующие моменты их свершения, и вовсе не нужно устанавливать каузальную связь между событиями, происходящими в соответствующих точках пространства.

Мало чем в этом отношении отличаются от точки зрения Эллиса и Боумена и взгляды их оппонентов.

А. Грюнбаум и В. Салмон во «Введении» к рассматриваемой серии статей специально подчеркивают, что ни один из выступающих в журнале авторов не опровергает того, что в инерциальных системах СТО метод медлен-

---

[26] И. Н ь ю т о н. Математические начала натуральной философии. Перевод А. Н. Крылова. Собр. трудов академика А. Н. Крылова. Т. VII, М.— Л., Изд-во АН СССР, 1936, стр. 30.

ной транспортировки дает уникальную синхронизацию, которая совпадает со стандартной [27].

А. Грюнбаум полагает также, что эйнштейнова концепция одновременности основывается на следующих двух положениях: 1) транспортировка часов влияет на скорость их хода, поэтому нельзя установить одновременность путем транспортировки предварительно синхронизированных часов; 2) свет — самый быстрый сигнал. И он подчеркивает, что если утверждение (1) считают ошибочным, тогда одной только уверенности в истинности утверждения (2) было бы недостаточно для отказа от ньютоновской доктрины абсолютной одновременности. [28]

Эти утверждения А. Грюнбаума помогут нам более определенно указать на различие точек зрения американских авторов и нашей относительно релятивистской концепции времени.

Во-первых, совершенно неверно, что ошибочность утверждения о нарушении хода часов при их транспортировке не позволила бы Эйнштейну отвергнуть ньютонову концепцию. Эйнштейн придерживался другого мнения на этот счет. Он считал, что даже в том случае, когда в различных точках пространства расположены одинаковые, равномерно идущие и синхронизированные часы, то для получения физического времени их нужно еще сверить.

Так, в статье «О принципе относительности и его следствиях» опубликованной в 1907 г., А. Эйнштейн писал:

«Представим себе, что во многих точках расположены покоящиеся часы. Пусть все они равноценны, т. е. разность показаний двух таких часов не изменяется. Если представить себе, что эти часы каким-то образом синхронизированы, то совокупность часов, расположенных на достаточно малых расстояниях, позволяет определить время любого точечного события при помощи ближайших часов.

---

[27] A. Grünbaum and W. C. Salmon. Introduction: The Context of these Essays. Philosophy of Science, vol. 36, N 1, March 1969, p. 4.

[28] A. Grünbaum. Simultaneity by Slow Clock Transport in the Special Theory of Relativity. Philosophy of Science, Michigan State University, East Lansing, Michigan, vol. 36, N 1, March 1969, p. 27.

Однако совокупность этих показаний часов еще не дает нам «время» в том виде, в каком оно нужно для физических целей. Кроме того, нам требуется еще рецепт, по которому эти часы могут быть сверены друг с другом»[29].

Таким образом, неважно, имеются ли в каждой точке пространства одинаковые часы, неважно, синхронизированы они или нет. Пусть будет так. Но это еще не дает нам физического времени. Для того чтобы получить физическое время, нужно сверить эти синхронизированные часы.

Это дополнительное условие сверки уже по определению синхронизированных часов и выражает отличие релятивистской концепции от классической.

Спрашивается, зачем же еще сверять заведомо синхронизированные часы? Итак ясно, что они идут одинаково и одновременно дают одни и те же показания.

Однако дело в том, что без «сверки», т. е. без материального взаимодействия между событиями, происходящими в точках пространства, где расположены часы, понятие времени для Эйнштейна не имеет физического смысла. Временны́х отношений между такими часами просто не существует. Каждые часы идут сами по себе, отмеряя время в своей точке, никакого же общего времени не только для Вселенной, но и для двух любых точек, снабженных одинаковыми часами, нет. «Мы определили пока только «*A*-время» и «*B*-время», но не общее для *A* и *B* «время»»[30]. Далее Эйнштейн говорит, что для определения этого общего времени нужна именно «сигнальная» процедура, которая строится исходя из «определения» равенства скоростей света туда и обратно. Не менее определенно высказывается он и в «Сущности теории относительности»: «чтобы придать понятию времени физический смысл, нужны какие-то процессы, которые дали бы возможность установить связь между различными точками пространства»[31].

Не совсем верно также и второе утверждение А. Грюнбаума о том, что одного положения о скорости света как о пределе скоростей распространения материальных вза-

---

[29] А. Эйнштейн. Собр. науч. трудов. Т. I, М., «Наука», 1965, стр. 68.
[30] Там же, стр. 9.
[31] А. Эйнштейн. Собр. науч. трудов. Т. II, М., «Наука», 1966, стр. 24.

имодействий недостаточно для отказа от ньютоновой концепции одновременности.

Дело в том, что отличие классической концепции времени от релятивистской основано вовсе не на отрицании верхнего предела скорости передачи материальных взаимодействий.

Вспомним хотя бы классическую электродинамику, которая признавала предельный характер скорости света. Однако она прекрасно пользовалась ньютоновым абсолютным временем и ньютоновой абсолютной одновременностью. Различие между двумя концепциями состоит именно в соотнесении временно́го порядка с каузальными цепями. В релятивистской концепции они связаны между собой, а в классической нет. Вопрос не о том, является ли свет наиболее быстрой каузальной цепью или нет, существенного значения для признания той или иной концепции не имеет. Решение этого вопроса начинает иметь значение уже после признания справедливости релятивистской точки зрения (для классической оно вообще безразлично) и тогда уже отражается на структуре теории.

Дискуссия в журнале «Philosophy of Science» показала, что наличие в разных точках пространства синхронизированных часов еще не дает оснований для объективного установления абсолютной одновременности, если не существует бесконечно быстрых сигналов. Она показала также, что если признать физический смысл за временем, устанавливаемым расположением в различных точках пространства синхронизированных часов (и транспортировкой синхронизации), т. е. если отказаться от эйнштейновой релятивистской концепции и стать на точку зрения материализованной концепции Ньютона, то такая концепция не имеет никаких преимуществ перед точкой зрения Эйнштейна в смысле «конвенциальности». В отношениях абсолютной одновременности здесь столь же глубокий конвенциальный ингредиент, как и там. Только здесь конвенциальна мера временно́го интервала, вводимая извне по соглашению из-за отсутствия у непрерывных интервалов внутренне присущей им метрики, а там по соглашению устанавливается выбор абсолютно одновременных в смысле уникальности моментов времени в рамках множества объективно одновременных событий.

Однако эта точка зрения, на наш взгляд, менее физична по сравнению с концепцией Эйнштейна, ибо там временные отношения (раньше-позже) устанавливаются физически с помощью материальных взаимодействий, а здесь являются скорее результатом воображения исследователя.

Таким образом, установление синхронизации множества равноправных часов, расположенных в различных точках пространства, еще не дает, с точки зрения теории относительности, физического времени.

Американские философы дали убедительную иллюстрацию именно этого положения, однако сделали это они исходя из иных соображений. Вся дискуссия велась вокруг вопроса о том, включают ли элементы соглашения, конвенции, так называемые «стандартные» процедуры синхронизации, в частности, с помощью медленной транспортировки часов. И авторы, выступавшие против утверждений Эллиса и Боумена о том, что им якобы удалось установить объективные критерии абсолютной (в смысле уникальности) одновременности путем тщательного анализа и убедительной аргументации показали необоснованность этих утверждений Эллиса и Боумена. Но их интересовал только вопрос, можно или нельзя установить абсолютную (в смысле уникальности) одновременность с помощью транспортировки синхронизированных часов, не прибегая к конвенциям. Они не учитывали того, что даже в случае, когда это возможно, все равно размещение в разных точках синхронизированных часов не дает, с релятивистской точки зрения, ни абсолютной одновременности, ни даже «физического времени». Для абсолютной одновременности нужны бесконечно быстрые сигналы.

А. М. Линец

О СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Отсутствие конкретных представлений о системах отсчета вызывает ряд принципиальных трудностей в классической механике. В данной статье рассматриваются возможности их устранения.

I. Трудности, связанные с системами отсчета

Об инерциальных системах отсчета известно следующее.

а. Система инерциальна, если тело, не испытывающее внешних воздействий, движется относительно нее в соответствии с законом инерции, т. е. равномерно и прямолинейно. По отношению к такой системе все законы механики должны выполняться во всем пространстве в течение неограниченного времени ([3], т. IV, стр. 494; [4], стр. 14).

б. Все инерциальные системы движутся только равномерно и прямолинейно, образуя единое семейство, в котором каждая система относительно других движется также равномерно и прямолинейно ([3], т. I, стр. 678; [3], т. IV, стр. 456).

в. Движение инерциальных систем неощутимо, т. е. не может быть обнаружено внутренним наблюдателем с помощью механических опытов. В отношении этих опытов все инерциальные системы эквивалентны ([3], т. 1, стр. 283).

Перечисленные свойства инерциальных систем следуют из законов механики, они проявляются в общих чертах наблюдаемых явлений, однако ни одной системы, обладающей ими в полной мере, до настоящего времени не найдено и неизвестно, существуют ли такие системы вообще. «Пока еще не решен один из наиболее фундаментальных вопросов: существует ли инерциальная система?» ([3], т. IV, стр. 489). В связи с этим ставится под сомнение возможность применения законов механики. «Мы имеем законы, но не знаем, каково то тело отсчета, к которому их следует отнести, и все наше физическое построение оказывается возведенным на песке» ([3], т. IV, стр. 490].

В этом состоит основная трудность механики, и Эйнштейн придавал ей столь серьезное значение, что возможность обходиться без инерциальных систем считал важнейшим достижением общей теории относительности.

«Теорию относительности можно рассматривать как итог борьбы с фундаментальным представлением физики Галилея и Ньютона, а именно представлением об инерциальной системе» ([3], т. II, стр. 796).

«Наиболее ясно общую теорию относительности можно охарактеризовать как теорию, которая обходится без введения инерциальной системы координат» ([3], т. II, стр. 835).

«Существенное достижение общей теории относительности заключается в том, что она избавляет физику от необходимости вводить инерциальную систему» ([3], т. II, стр. 854) — так писал Эйнштейн в своих последних работах.

Заметим, что уже в самих свойствах инерциальных систем содержатся серьезные неопределенности. Прежде всего это относится к проверке выполнения закона инерции. Как отмечал Эйнштейн, «...логическая слабость этого представления состоит в том, что у нас нет никакого опытного критерия для установления того, свободна ли материальная точка от действия сил или нет, поэтому понятие «инерциальная система» остается до некоторой степени проблематичным» ([3], т. II, стр. 121).

Далее, если бы инерциальная система была указана, мы не имели бы оснований утверждать, что она движется равномерно и прямолинейно. Для проверки характера ее движения внешними наблюдениями необходимо эталонное тело, о котором нам было бы достоверно известно, что оно не имеет ускорения, такое тело нам природой не дано. Внутренние же наблюдения не позволяют произвести указанную проверку ввиду неощутимости движения системы. Таким образом, серьезнейшее утверждение механики принимается, по существу, без доказательства: «Рецепт Ньютона таков: если принцип инерции имеет силу, то система координат либо покоится, либо движется прямолинейно и равномерно. Если принцип инерции не имеет силы, то тело не находится в прямолинейном и равномерном движении» ([3], т. IV, стр. 491). Однако опыт не вполне соответствует этому утверждению. Движение инерциальной системы не должно обнаруживаться механическими опытами, а вращение Земли устанавливается с помощью маятника Фуко, поэтому отвлечемся от этого вращения и рассмотрим систему, связанную с Землей, но движущуюся поступательно. Опытами, проводимыми на поверхности Земли и вблизи нее, такую систему трудно отличить от инерциальной, вместе с тем по отношению к Солнцу она движется криволинейно и со значительным ускорением $W \approx 6$ *мм/сек*^{2}.

Известно, что используя в качестве инерциальных систем даже поступательно движущиеся системы, связанные с Землей или Солнцем, мы поступаем не вполне строго. Однако в чем состоит эта нестрогость? Когда и какие погрешности она вызывает? На эти вопросы в литературе ответа нет.

Обе названные системы движутся не только ускоренно, но и с различными ускорениями, что противоречит представлениям и об инерциальной системе и о едином семействе их. Такое несоответствие в ряде случаев не препятствует весьма точному выполнению законов механики, в других же случаях обнаруживаются существенные их нарушения; Земля в этом отношении хуже Солнца, однако причины такого отличия и его величина до сих пор не установлены (проблема «Птолемей — Коперник»).

Иногда полагают, что указанное отличие определяется величинами ускорений, которые Земля и Солнце сообщают друг другу. Но если бы ухудшение земной системы отсчета было вызвано этой причиной, то направление к Солнцу отличалось бы от других, было бы физически выделенным, однако подобная анизотропия околоземного пространства при всей тщательности наблюдений не обнаружена ([3], т. I, стр. 538).

Правда, вблизи прямой, проходящей через центры Солнца и Земли, наблюдаются солнечные морские приливы, но существуют и лунные приливы, и если бы эти явления были обусловлены ускорениями, которые сообщают Земле Солнце и Луна, то соответственно величинам этих ускорений солнечные приливы превышали бы лунные в 180 раз. В действительности же лунные приливы примерно вдвое больше солнечных.

Возникают и другие вопросы. Опытным путем установлено, что системы, связанные с Землей и Солнцем, весьма близки к инерциальным. Обладают ли такими же свойствами Луна, Марс, спутники Юпитера, Сириус? Если обладают, то как увязать это с представлением о едином семействе инерциальных систем, если же не обладают, то чем объяснить исключительные свойства Земли и Солнца?

Существует предположение, что инерциальной была бы равномерно движущаяся система, связанная с уединенным телом, весьма удаленным от всех остальных масс ([3], т. I, стр. 563). Однако совсем не очевидно, что в такой системе законы механики выполнялись бы наилучшим образом (ниже будет показано, что это не так). Кроме того, как отмечал Эйнштейн: «Позволительно ли рассматривать движение лишь одного тела во всей Вселенной? Под движением тела мы всегда разумеем изменение его положения относительно другого тела. Поэтому говорить о движении одного-единственного тела значит противоречить здравому смыслу» ([3], т. IV, стр. 491).

Введенное Ньютоном абсолютное пространство ([2], стр. 31) не может быть использовано в качестве системы отсчета, поскольку ни одно из реальных тел не характеризует его состояния.

Предпринимались попытки определить инерциальную систему без использования понятий абсолютного пространства или неба неподвижных звезд. Таковы, например, утверждения Л. Ланге.

«Определение 1. Инерциальной системой называется такая система координат, в которой сходящиеся в одной точке траектории трех (массивных) точек, выброшенных одновременно из одной и той же точки пространства и предоставленных затем самим себе, все прямолинейны (три точки не должны лежать на одной прямой).

Теорема 1. Относительно инерциальной системы траектория любой четвертой точки, предоставленной самой себе, прямолинейна» ([5], стр. 154—155).

Недостатки таких утверждений были отмечены Махом: «Я оставил эти попытки потому, что я пришел к убеждепию, что при всех этих формах выражения (и то же самое можно сказать о выражениях Штрейнца и Ланге) только кажется, что обходится отнесение к небу неподвижных звезд... Изучение нескольких изолированных точек с полной абстракцией всего остального мира кажется мне недопустимым. Мне кажется очень спорным, двигалась ли бы (равномерно) четвертая, предоставленная самой себе материальная точка относительно „системы инерции" Ланге по прямой, если бы можно было рассматривать небо неподвижных звезд, как несуществующее...» ([6], стр. 201—202).

Заметим также, что в окружающих нас полях тяготения не существует массивных точек, предоставленных самим себе, и, следовательно, использовать утверждение Ланге не представляется возможным.

Таким образом, представление об инерциальной системе удовлетворительной конкретизации не имеет; ни с одним из реальных тел такую систему связать не удается. «Это только полезная фикция, и у меня нет ни малейшего представления, как ее реализовать»,— писал Эйнштейн ([3], т. IV, стр. 490). Но следует обратить внимание и на широкую полезность этой несуществующей фиктивной системы. Ведь законы механики хорошо выполняются и на поверхности Земли, и вдали от нее, и в сильных, и в слабых полях тяготения. Это несомненно означает, что та идеализированная обстановка, в которой инерциальная система могла бы существовать, одновременно близка ко многим р а з л и ч н ы м условиям движения тел. Это обстоятельство требует объяснения. Вместе с тем оно противоречит утверждению о том, что инерциальной может быть только система, свободная от всех воздействий: «Если бы только я мог изолироваться от всех материальных тел и освободиться от всех внешних влияний, то моя система была бы инерциальной» ([3], т. IV, стр. 490).

Серьезная трудность состоит и в том, что не объяснена особая роль инерциальной системы, «...состояние движения которой, с одной стороны, не связано с состоянием наблюдаемых предметов и, следовательно, не определяется чем-либо доступным восприятию, а с другой стороны — она должна определять движение материальных точек» ([3], т. I, стр. 296].

II. Предельные понятия механики

Устранение перечисленных трудностей оказывается возможным, если установить, относительно каких реальных тел и в какой степени выполняются законы механики, а затем рассмотреть строго инерциальную систему как предельное понятие механики, по отношению к которому реально используемые системы отсчета представляют различные степени приближения.

В механике уже используются предельные понятия об абсолютно твердом теле и о материальной точке, и их применение для решения теоретических и прикладных вопросов не вызывает трудностей. Это обусловлено тем, что в отношении названных понятий выполнены три требования:

а) определены реальные тела, которые могут в принципе, с некоторой погрешностью, представлять предельное понятие;

б) существует способ определения максимальной погрешности, которая возникает при использовании каждого пригодного реального тела вместо предельного понятия;

в) имеется способ выбора реальных тел, при котором эта погрешность может быть сделана достаточно малой.

Действительно, вместо абсолютно твердых тел мы пользуемся реальными твердыми телами, а такими мы называем тела, деформации которых под действием приложенных сил невелики. Наибольшая погрешность, вызываемая деформацией каждого реального тела, может быть определена с помощью пресса, и таким же путем могут быть выбраны тела, деформации которых под действием фактически возникающих в опыте сил будут иметь допустимую величину.

В качестве материальных точек мы используем такие реальные тела, размеры которых малы по сравнению, например, с расстоянием между ними. Очевидно, что погрешность, возникающая при измерении расстояний вследствие того, что вместо материальных точек используются реальные тела, не превышает суммы размеров этих тел. При этом тела или их части всегда могут быть выбраны так, чтобы сумма их размеров составляла достаточно малую часть от измеряемого расстояния.

Проводя аналогию, можно утверждать, что для устранения трудностей, связанных с системами отсчета, необходимо:

а) выделить класс реальных инерциальных систем, т. е. тел, допускающих применение законов механики с небольшой погрешностью;

б) указать метод вычисления максимальной погрешности, возникающей при применении законов механики по отношению к каждой реальной инерциальной системе;

в) сформулировать правила выбора реальных систем, при выполнении которых указанная погрешность может быть сделана сколь угодно малой.

Кроме того, решая вопрос об инерциальных системах отсчета, желательно выяснить, почему в реальных условиях существуют лишь реальные инерциальные системы и в каких условиях могла бы существовать строго инерциальная система классической механики. Чтобы решение вопроса было полным, необходимо также разъяснить все перечисленные трудности.

Условимся при этом рассматривать движение тел только под действием гравитационных полей и механических негравитационных сил таких как тяга двигателя космического корабля, реакции опор, силы сцепления между частями тела, сопротивления среды, так как именно эти воздействия во многих случаях оказываются наиболее существенными.

III. Реальные инерциальные системы

Важность правильного выбора системы отсчета впервые была показана Коперником, который, заменив систему, связанную с Землей, на систему, связанную с Солнцем, установил, что движения планет являются простыми круговыми, и выяснил важную и естественную для всех планет однотипность траекторий и характера движений.

Новый, весьма существенный шаг вперед был сделан Кеплером. Он показал, что при правильном выборе системы отсчета движения планет не только однотипны, но подчинены строгим и точным законам, регламентирующим движение каждой планеты и однозначно увязывающим между собой параметры движения всех планет солнечной системы.

Опытные данные, использованные Ньютоном для обоснования закона всемирного тяготения ([2], стр. 504—509), дают новое продвижение. Применив законы Кеплера к движению спутников, Ньютон фактически показал, что системы, связанные с Юпитером, Сатурном и Землей, пригодны для наблюдения своих спутников в такой же мере, как система, связанная с Солнцем, пригодна для наблюдения планет солнечной системы.

Таким образом, можно утверждать, что в случаях, когда гравитационное действие тела отсчета не оказывает существенного влияния на движение наблюдаемых тел, связанная с ним система инерциальна при выполнении закона инерции, если же гравитационное действие тела отсчета существенно, то критерием инерциальности является выполнение законов Кеплера. В качестве второго признака можно было бы указать и на закон тяготения, о котором известно, что он выполняется только в инерциальных системах ([3], т. IV, стр. 506), однако, поскольку мы стремимся к экспериментальному подтверждению инерциальности систем, следует опираться на законы Кеплера, так как именно они представляют опытную основу закона тяготения.

Еще один эффектный шаг принадлежит Эйнштейну, который установил, что закон инерции и остальные законы механики выполняются в свободно падающем лифте, а потому связанная с ним система отсчета инерциальна. Правда, указав, что такая система существует лишь короткое время до удара о Землю и локальна, так как при больших размерах закон инерции в ней нарушается, Эйнштейн отказался от падающего лифта как от целесообразной системы отсчета, назвав его «лишь карманным изданием реальной инерциальной системы» ([3], т. IV, стр. 494).

Однако согласиться с этим нельзя. Для выполнения закона инерции существенно состояние невесомости. Именно благодаря такому состоянию предмет, не испытывающий негравитационных воздействий и неподвижный относительно системы отсчета в начальный момент, неподвижным и остается, а движущийся — сохраняет равномерное и прямолинейное движение. Невесомость же, как показывает опыт, возникает в любой *свободно* движущейся системе, т. е. в *системе, поступательно движущейся в поле тяготения без воздействия негравитационных сил.*

Таким образом, выделяется весьма обширный класс систем, в которых с некоторой степенью точности выполняются законы механики. В него входят системы, связанные с падающими лифтами или с космическими кораблями (при выключенных двигателях), с Луной или другими спутниками, Землей или другими планетами, Солнцем или другими звездами, поскольку все такие системы свободно движутся в окружающих их полях тяготения.

Этим исключается первый недостаток системы, связанной с падающим лифтом,— кратковременность ее существования. Одновременно мы убеждаемся в том, что выполнение законов механики в системах, связанных с Землей и Солнцем, не является исключительной особенностью этих тел.

Рассмотрим теперь вопрос о локальности.

IV. Оценка точности реальных систем отсчета

Вследствие неоднородности реальных полей тяготения все свободные системы локальны, однако вызываемая этим погрешность может быть численно определена и сделана достаточно малой.

Свяжем систему отсчета с телом, свободно движущимся у Земли на расстоянии L от ее центра, и выделим вокруг него сферическую область наблюдения диаметра D (рис. 1). Свободный предмет, находящийся в этой области, в точке *1*, ближайшей к Земле, движется относительно Земли с ускорением W_1, а система отсчета — с ускорением $W_\text{с}$. Нарушение инерциальности $H_\text{и}$ в нашей системе состоит в том, что свободное тело движется относительно нее ускоренно:

$$H_\text{и} = W_1 - W_\text{с} = \gamma \frac{M_\text{з}}{\left[L - \frac{D}{2}\right]^2} - \gamma \frac{M_\text{з}}{L^2} =$$

$$= W_\text{с} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{D}{2L}\right)^2} - 1\right].$$

Для областей с достаточно малым относительным размером $D/L \ll 1$

$$H_\text{и} = W_\text{с} \frac{D}{L}. \tag{1}$$

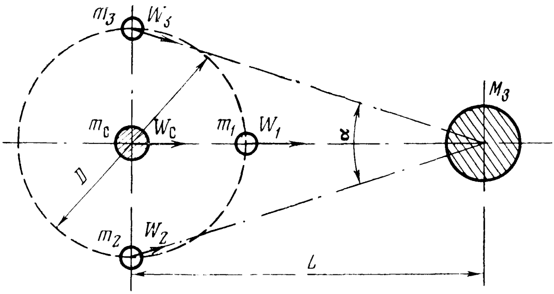

Рис. 1

Именно это соотношение характеризует наибольшую погрешность, возникающую в данном поле тяготения при применении законов механики в свободно движущейся системе. Некоторые дополнительные нарушения инерциальности в области D, в соответствии с тем же соотношением (1), возникают вследствие неоднородности полей Солнца, Галактики и более далеких, однако они невелики, так как крайне малы в этих полях относительные размеры области наблюдения.

Определим численную величину нарушения инерциальности в некоторых системах отсчета.

Так, в лифте диаметром, например, $D = 6{,}5$ *м*, свободно падающем у Земли ($L = 6{,}5 \cdot 10^6$ *м*; $W_c = 9{,}8$ *м/сек²*), нарушение инерциальности, согласно (1), составляет $H_и = 10^{-5}$ *м/сек²*. Будем считать эту систему удовлетворительной.

Система, связанная с Землей и свободно движущаяся в поле тяготения Солнца ($L = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ *м*; $W_c = 6 \cdot 10^{-3}$ *м/сек²*), столь же удовлетворительна в области наблюдения $D = 250\,000$ *км*. Вот почему эта система весьма точна при наблюдении искусственных спутников Земли ($D = 13\,000$ *км*; $H_и = 5 \cdot 10^{-7}$ *м/сек²*), достаточно точна при наблюдении Луны ($D = 7{,}5 \cdot 10^8$ *м*; $H_и = 3 \cdot 10^{-5}$ *м/сек²*) и непригодна для наблюдения планет. В этом последнем случае вообще пользоваться соотношением (1) нельзя, а непосредственное вычисление показывает, что при наблюдении Меркурия, например, нарушение инерциальности достигает $H_и = 6 \cdot 10^{-2}$ *м/сек²*.

Если считать поле Галактики центральным ($L \approx 4 \cdot 10^{20}$ *м*), то тогда связанная с Солнцем система

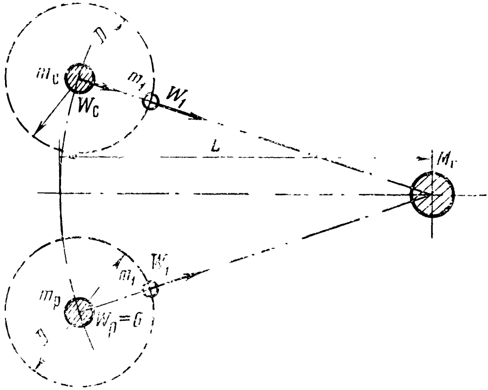

Рис. 2

($W_{\text{с}}=1{,}5\cdot 10^{-10}$ *м/сек*^{2}) в пределах орбиты планеты Плутон ($D = 1{,}2\cdot 10^{13}$ *м*), имеет нарушение инерциальности $H_{\text{и}} = 4{,}5\cdot 10^{-18}$ *м/сек*^{2}. Вот почему столь блестяще выполняются законы механики в системе, связанной с Солнцем.

Выражение (1) объясняет и соотношение высот лунного ($h_{\text{л}}$) и солнечного ($h_{\text{с}}$) приливов. Высоты приливов действительно характеризуют нарушение инерциальности системы, связанной с Землей в полях Луны ($H_{\text{и.л}}$) и Солнца ($H_{\text{и.с}}$). Область наблюдения приливов в обоих полях одинакова — поверхность Земли ($D_{\text{з}}$), ускорения же ($W_{\text{л}}$ и $W_{\text{с}}$) и расстояния до центров полей ($L_{\text{л}}$ и $L_{\text{с}}$) — различны. Отношение нарушений инерциальности равно

$$\frac{H_{\text{и л}}}{H_{\text{и с}}} = \left[W_{\text{л}}\frac{D_{\text{з}}}{L_{\text{л}}}\right] : \left[W_{\text{с}}\frac{D_{\text{з}}}{L_{\text{с}}}\right] = \frac{W_{\text{л}}}{W_{\text{с}}}\frac{L_{\text{с}}}{L_{\text{л}}} = \frac{1}{180}\cdot\frac{390}{1} = 2{,}16,$$

в таком же отношении находятся и высоты приливов, определяемые статической теорией:

$$\frac{h_{\text{л}}}{h_{\text{с}}} = \frac{0{,}54\ м}{0{,}25\ м} = 2{,}16.$$

Отметим теперь обстоятельства, которые необходимо учитывать при выборе систем отсчета.

V. Выбор реальных систем отсчета

Условимся называть **общим** такое поле, которое сообщает ускорения и системе отсчета и наблюдаемым телам; **побочным** — поле, которое сообщает ускорение системе отсчета, но не сообщает его наблюдаемым телам; **внутренним** — поле, сообщающее ускорение наблюдаемым телам, но не сообщающее его системе отсчета.

Тогда свободно движущаяся система выбрана правильно, если она и произвольно движущиеся наблюдаемые тела занимают в общем поле область наблюдения достаточно малого относительного размера и при этом побочные поля отсутствуют.

Действительно, при этих условиях все общие поля сообщают наблюдаемым телам такие же ускорения, как и свободно движущейся системе отсчета (с точностью до малых $H_{и}$). Поэтому, вычисляя ускорение наблюдаемого тела по отношению к системе, мы вычитаем из ускорений тела ускорение системы, т. е. **все** те ускорения, которые сообщены ему общими полями, и тем самым исключаем из рассмотрения влияние всех общих полей на движение наблюдаемого тела.

Поскольку общие поля сообщают телу и системе **одинаковые** ускорения, они не могут сообщить телу ускорения **по отношению** к системе. Такие ускорения телу могут быть сообщены либо внутренними полями — тогда они описываются законом всемирного тяготения, либо негравитационными силами — тогда они описываются вторым и третьим законами динамики. Если же тело не испытывает ни тех, ни других воздействий, то движение его характеризуется законом инерции. Таким образом, в правильно выбранных реальных системах отсчета выполняются все законы механики.

Если же система отсчета выбрана так, что имеется побочное поле, то оно сообщает системе ускорение $W_{п}$, которого наблюдаемое тело не получает. Относя движение тела к такой системе, кроме ускорений общих полей, мы вычтем у него ускорение $W_{п}$, т. е. формально припишем ему ускорение $W = -W_{п}$. Поскольку такое ускорение не сообщается телу ни гравитационным, ни негравитационным воздействиями, то законы механики в этой системе не выполняются. Заметим, что такая погрешность отличается от нарушения инерциальности в правильно выбранных системах тем, что она не уменьшается с уменьшением области наблюдения.

Используя реальные системы отсчета, мы не пренебрегаем влиянием полей тяготения, наоборот, мы полностью учитываем все воздействия на тело. Допускаемая погрешность ($H_и$) обусловливается только тем, что система и наблюдаемое тело находятся хотя и в близких, но различных точках поля; поэтому несколько различны и ускорения, получаемые ими от общих полей. Если необходимо уменьшить величину погрешности, то систему следует перенести в более общее поле. При этом существенно уменьшится относительный размер области наблюдения, следовательно, уменьшатся и различие ускорений и погрешность.

Приведем несколько примеров.

При наблюдении относительного движения камня и Земли систему отсчета не следует связывать с камнем, так как поле Земли станет при этом побочным. Правильно выбранной будет система, связанная с Землей. В этой системе общее поле Солнца и все более общие поля из рассмотрения исключены, поле же Земли, являющееся внутренним, сообщает камню ускорение, которое описывается законом всемирного тяготения.

При наблюдении относительного движения двух крупных тел, например Земли и Луны, систему отсчета не следует связывать ни с одним из этих тел, так как поле второго тела становится при этом побочным. В этом случае правильно выбранной будет система, связанная с центром масс обоих тел, так как именно эта точка при их взаимодействии ускорения не получает. В этой системе поле Солнца и более общие поля из рассмотрения исключены, поля же Земли и Луны являются внутренними и сообщают ускорения соответственно Луне и Земле по закону всемирного тяготения. В этом примере правильно выбранной будет и система, связанная с Солнцем; тогда и поле Солнца станет внутренним, исключаются же из рассмотрения поле Галактики и более общие поля.

Наблюдая относительное движение Солнца и планет, мы не можем связывать систему отсчета с Землей, так как при наблюдении Солнца его поле становится побочным, а при наблюдении планет область наблюдения слишком велика. Правильно выбранной будет в этом случае система, связанная с Солнцем, если же требуется учесть влияние планет на движение Солнца,— то система отсчета, связанная с центром масс солнечной системы.

В этом и состоит решение проблемы Птолемей — Коперник. Можно, кроме того, сравнить точность названных систем в допустимых для них областях наблюдения. По соотношению (1), нарушение инерциальности системы, связанной с Землей в пределах орбиты Луны ($H_з$), превышает нарушение инерциальности системы, связанной с Солнцем в пределах орбиты Плутона ($H_с$) в семь триллионов раз:

$$\frac{H_з}{H_с} = \frac{3 \cdot 10^{-5}\ м/сек^2}{4{,}5 \cdot 10^{-18}\ м/сек^2} = 7 \cdot 10^{12}.$$

Объясняется это тем, что ускорение Солнца в поле Галактики в $4 \cdot 10^7$ раза меньше ускорения Земли в поле Солнца, и относительный размера орбиты Плутона в поле Галактики в $1{,}75 \cdot 10^5$ раз меньше относительного размера орбиты Луны в поле Солнца.

Заметим также, что для наблюдения движения данных тел система отсчета может быть правильно выбрана в любом из общих полей, однако наблюдения и вычисления оказываются более простыми, если система выбрана в ближайшем из них. Так, для определения тяги двигателя космического корабля, летящего, например, у Земли, систему отсчета можно связать с Солнцем или с Землей, но удобнее связать ее с предметом, свободно падающим внутри корабля. Умножив ускорение корабля в этой системе отсчета на его инертную массу, мы простейшим путем получаем величину равнодействующей негравитационной силы, приложенной к кораблю.

Отметим в заключение, что открытие законов механики явилось одновременно и экспериментальным подтверждением выполнения их в свободно движущихся системах отсчета. Так, закон инерции, законы свободного падения и принцип относительности движения были открыты Галилеем в свободно движущейся системе, связанной с Землей. В этой же системе ставились и опыты по удару шаров, на основании которых Ньютон сформулировал второй и третий законы динамики. Наконец, закон всемирного тяготения был открыт им в свободно движущихся системах, связанных с Землей, Юпитером, Сатурном и

Солнцем. Таким образом, выполнение законов механики в свободно движущихся системах является таким же первичным опытным фактом механики, как и сами ее законы.

Мы установили, что связанные с реальными телами свободно движущиеся системы отсчета (и только они) в относительно малых областях наблюдения принципиально пригодны для применения законов механики, и среди них всегда можно выбрать системы, точность которых достаточна для решения требуемых теоретических или прикладных вопросов. Следовательно, свободно движущиеся системы с полным основанием могут быть названы реальными инерциальными системами.

VI. Некоторые свойства реальных систем отсчета

Относительный размер области наблюдения, если он достаточно мал, может быть геометрически интерпретирован как наибольший угол α, образуемый ускорениями двух тел m_2 и m_3 в этой области (рис. 1)

$$\frac{D}{L}=\alpha, \quad \text{тогда} \quad H_{\text{и}}=W_{\text{c}}\cdot\alpha. \qquad (2)$$

Следовательно, если бы реальная система отсчета двигалась в однородном поле любой напряженности ($W_{\text{c}} = \text{const}$; $\alpha = 0$), законы механики выполнялись бы в ней вполне строго ($H_{\text{и}} = 0$), независимо от размеров области наблюдения, а значит, такая система не отличалась бы от строго инерциальной системы классической механики. В частности, это имело бы место и в области, где нет поля ($W_{\text{c}} = 0$), только такой случай рассматривается в литературе ([3], т. I, стр. 563, 569 и др.), здесь же указано более общее решение. Таким образом, для наблюдателя свободно движущегося в изолированной системе относительно небольших размеров окружающее однородное поле неотличимо от гипотетического пространства, в котором поля нет.

Очевидно, что законы механики хорошо выполняются в реальных полях тяготения любой напряженности по отношению к реальным системам отсчета в тех случаях, когда малый относительный размер области наблюдения позволяет считать охваченную ею часть окружающего поля тяготения однородным полем. Именно в этих случаях мы и наблюдаем хорошее выполнение законов механики на поверхности Земли и вдали от нее в сильных и слабых полях тяготения, в любых различных условиях движения тел.

Мы получаем возможность объяснить еще некоторые из отмеченных выше трудностей и вместе с тем описать особенности реальных систем отсчета.

1. Все окружающее пространство представляет различные неоднородные поля тяготения, в которых возможны только реальные системы отсчета, пригодные лишь в своих относительно малых областях наблюдения и непригодные в соседних областях. Поэтому инерциальная система классической механики, пригодная для наблюдения движения тел во всем пространстве, в реальных условиях существовать не может.

2. В силу неоднородности реальных полей свободные тела, разделенные большими расстояниями, друг относительно друга движутся ускоренно и криволинейно и, вместе с тем, каждое в своей области является реальной инерциальной системой. Поэтому единое семейство инерциальных систем классической механики в реальных условиях существовать не может.

Такой особенностью обладают как системы с несовпадающими областями наблюдения (Земля, Уран, Плутон) и, следовательно, пригодные для наблюдения только различных тел, так и системы, имеющие общие области наблюдения (корабль у Земли, Земля, Солнце), в которых можно наблюдать одно и то же тело.

3. Так же, как отсутствие абсолютно неподвижного тела лишает смысла понятие абсолютной (полной) скорости тела, так отсутствие абсолютной инерциальной системы отсчета лишает смысла понятие абсолютного (полного) ускорения. В таком понятии и нет необходимости, так как законы механики справедливы в любой системе реально инерциальной в данной области наблюдения.

4. В любом удалении от центра тяготения движущаяся свободно система имеет существенно меньшие нарушения инерциальности, чем система, движущаяся относительно этого центра равномерно.

Действительно, поместим две сравниваемые системы на одинаковом расстоянии L от центра поля, создаваемого телом $M_{\text{г}}$ (рис. 2). Нарушение инерциальности в свободно движущейся системе $H_{\text{ис}}$ составит согласно (1)

$$H_{\text{и с}} = \gamma \frac{M_{\text{г}}}{L^2} \frac{D}{L} \cdot$$

В равномерно движущейся системе, ускорение которой относительно центра поля равно нулю, нарушение инерциальности $H_{\text{и р}}$ равно ускорению свободного тела относительно того же центра $H_{\text{и р}} \approx \gamma \frac{M_{\text{г}}}{L^2}$.

Отношение этих величин равно $\frac{H_{\text{и с}}}{H_{\text{и р}}} = \frac{D}{L}$.

Следовательно, преимущество свободно движущейся системы не только всегда велико, но еще и возрастает с удалением от центра тяготения.

5. Мы можем ответить и на вопросы о связи инерциальных систем с движущимися телами и их особой роли в описании движения тел.

Связь реальных систем с движущимися телами определяется одинаковым влиянием на них общих полей, в которых они относительно близко расположены. Именно поэтому все общие поля, количества которых и интенсивности мы не знаем, сообщают им одинаковые (с точностью до $H_{\text{и}}$) ускорения и не могут сообщить телу ускорения *по отношению* к системе.

Особая роль реальных систем состоит как раз в том, что, вычисляя ускорение тел по отношению к таким системам, мы исключаем из рассмотрения общие поля и получаем возможность с помощью законов механики описать движение тел под действием внутренних полей и негравитационных сил.

Эти соображения еще раз подтверждают, что кроме свободно движущихся систем отсчета никакие другие системы не могут оказаться пригодными для применения законов механики.

Мы приходим к окончательному выводу, что *решение проблемы инерциальных систем отсчета состоит не в поисках несуществующей предельной инерциальной системы, а в том, чтобы для* наблюдения движения любых интересующих нас тел выбрать такую свободно движущуюся реальную инерциальную систему, относительно которой законы механики могут быть применены с необходимой точностью. Как было показано, выбор такой системы всегда возможен.

Заметим также, что предложенная конкретизация представлений о системах отсчета и анализ свойств реальных инерциальных систем устраняют трудности механики в этой области, перечисленные в первой части статьи.

Литература

1. *Г. Галилей.* Избр. труды в двух томах. М., 1964.
2. *И. Ньютон.* Математические начала натуральной философии. Собр. трудов акад. А. Н. Крылова. Т. VII. М., 1936.
3. *А. Эйнштейн.* Собр. науч. трудов в четырех томах. М., 1965—1967.
4. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теоретическая физика. Т. I. Механика. М., 1966.
5. *М. Лауэ.* Статьи и письма. М., 1969.
6. *Э. Мах.* Механика. М., 1909.

Я. А. Смородинский

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО И КИНЕМАТИКА ЭЙНШТЕЙНА

§ 1. Введение

Связь между кинематикой теории относительности и геометрией Лобачевского известна давно. Она была отмечена еще Ф. Клейном и использована в лекциях по механике Зоммерфельдом. Хотя этой теме и было посвящено много работ разных авторов (среди последних отметим известную книгу В. А. Фока), только в работах Н. А. Черникова была отмечена возможность практического применения теории неевклидовой геометрии к расчетам процессов рассеяния.

В этом обзоре мы приведем основные формулы из области применения гиперболической тригонометрии к механике. Некоторые результаты были опубликованы в статье автора в номере «Атомной энергии» (№ 1 за 1962 г.), посвященном памяти И. В. Курчатова, и нескольких более поздних работах.

§ 2. Пространство скоростей

Уравнения классической механики инвариантны относительно перехода в произвольную инерциальную систему координат (принцип относительности Галилея).

Уравнения релятивистской механики также инвариантны относительно перехода в произвольную инерциальную систему координат (принцип относительности Эйнштейна).

Из этих двух утверждений следует, что задача о нахождении уравнений, инвариантных относительно преобразований между инерциальными системами, имеет по крайней мере два решения. Каждому решению соответствуют свои формулы преобразования: преобразование Галилея для уравнений Ньютона и преобразования Лоренца для уравнений Эйнштейна.

Выбор между двумя решениями определяется тем, что преобразования Лоренца сохраняют инвариантными уравнения Максвелла, а преобразования Галилея нарушают всю электродинамику. Чтобы увидеть в этой ситуации аналогию с геометрией, рассмотрим простой пример столкновения упругих шаров с одинаковой массой.

Пусть один из шаров вначале покоился. Тогда, обозначая импульсы и энергии шаров после удара штрихами, мы можем написать нерелятивистские уравнения сохранения импульса и энергии в виде

$$\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2',$$

$$p_1^2 = p_1'^2 + \boldsymbol{p}_2'^2.$$

Первое уравнение означает, что три вектора образуют треугольник: второе есть не что иное, как теорема Пифагора. Отсюда следует, что угол между векторами разлетающихся частиц прямой. Это хорошо известное свойство упругих соударений. Для нас интересно в этом примере то, что решение задачи механики свелось к использованию геометрической теоремы, причем теоремы из геометрии Евклида. Естественно ожидать, что переход к релятивистской механике приведет к теореме неевклидовой геометрии. Однако, прежде чем обсуждать этот вопрос, обратим внимание еще на одно обстоятельство. Когда мы решаем задачу методами аналитической геометрии, то пользуемся уравнениями, заданными в какой-то определенной системе координат. Мы, конечно, можем переходить от одной системы координат к другой, но для того чтобы написать уравнение, надо остановиться на какой-то определенной системе. Если же мы решаем обычную задачу тригонометрии, то, используя, например, формулы для треугольника, совершенно не интересуемся, как расположен этот треугольник: мы вообще даже не ставим вопрос о том, нарисованы ли какие-то координатные оси или нет. Это кажется настолько естественным, что на это даже не обращают внимания в учебниках. Не интересоваться положением треугольника в пространстве можно потому, что свойства треугольника не изменяются, если перенести его параллельно самому себе в любое другое место пространства. Перенести параллельно означает, что мы прибавим к каждому из радиус-векторов, определяющих положение вершин треугольника в какой-то системе координат, одинаковые по величине и направлению векторы и построим новый треугольник со смещенными вершинами.

В механике этому, конечно, соответствует неизменность уравнений относительно перехода в другую инерциальную систему. Переход в систему координат, которая движется со скоростью $\boldsymbol{v}$, очевидно, эквивалентен тому, что к скоростям всех точек прибавляется вектор $\boldsymbol{v}$.

В уравнения законов сохранения входят не скорости, а импульсы. Для того чтобы использовать инвариантность Лоренца, удобно записывать эти уравнения, вводя скорости. В частном случае одинаковых масс такая замена не изменяет форму уравнения. Полагая $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u}$, можем записать

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1' + \boldsymbol{u}_2',$$
$$u_2^2 = u_1'^2 + u_2'^2.$$

Эти уравнения мы можем изобразить в виде диаграммы (рис. 1). Начало координат O отвечает скорости первого шара до удара. Вектор $\boldsymbol{u}_2$ равен диагонали прямоугольника и равен сумме двух других векторов (здесь и использованы теоремы о параллельных). Мы можем теперь забыть о том, что O выбрано за начало координат, и говорить только о свойствах прямоугольника (вычисляя соотношения между его углами и сторонами по формулам тригонометрии). При этом вместо того, чтобы говорить о скорости первого шара после соударения в системе отсчета (инерциальной), в которой этот первый шар до соударения покоился, мы будем говорить об относительной скорости первого шара до и после соударения. Говорить об относительных скоростях, очевидно, означает говорить о чертеже в терминах тригонометрии, а не аналитической геометрии. Относительная скорость при этом равна длине соответствующей стороны прямоугольника. Таким образом, мы можем написать вместо буквы O (начало координат) букву u_1 (скорость первого шара до соударения), забыть о начале координат совсем. Принцип Галилея при такой интерпретации эквивалентен утверждению, что свойство геометрической фигуры не зависит от ее положения в пространстве. На рис. 2 изображен такой прямоугольник, причем для краткости мы опускаем букву u

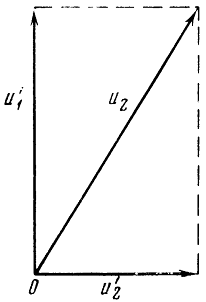

Рис. 1

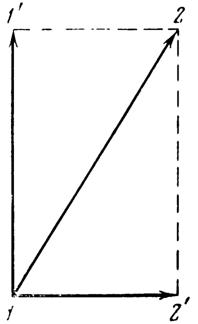

Рис. 2

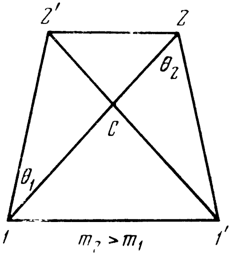

Рис. 3

и оставляем лишь индексы $1, 1'$, 2 и $2'$. В этих обозначениях процесс рассеяния мы будем записывать так: $1 + 2 \to 1' + 2'$.

Итак, прямоугольник предстает перед нами как кинематическая диаграмма, описывающая скорости частиц до и после соударения, длины сторон и диагоналей у этого прямоугольника определяют относительные скорости частиц.

Откажемся от условия равенства масс. Пусть сталкиваются два шара с массами m_1 и m_2, причем $m_1 \neq m_2$. Тогда центр масс этих шаров лежит не посередине отрезка, соединяющего точки *1* и *2*, а делит этот отрезок так, что выполняется «правило рычага»:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

Нетрудно видеть, что в этом случае кинематическая диаграмма превращается в равнобочную трапецию (рис. 3). Если мы ограничимся случаем упругих столкновений, то равнобочная трапеция описывает все возможные соотношения между параметрами рассеяния. Мы не будем далее подробно рассматривать здесь конкретные задачи. Для рассеяния, в котором участвуют только две частицы, задачи в обычных учебниках решаются в пространстве импульсов, что практически не приводит к более сложным вычислениям. Кроме того, цель этой статьи лежит в области кинематики релятивистской, а формулы нерелятивистской кинематики получаются в результате тривиального упрощения.

§ 3. Пространство скоростей (релятивистская механика)

Поскольку принцип инвариантности относительно перехода в любую инерциальную систему координат сохраняется и в релятивистской механике, то фигуры, нарисованные для решения задач нерелятивистской механики, могут быть сохранены. Изменяется только метрика, т. е. закон вычисления расстояний между двумя точками, нарисованными на евклидовой плоскости — листе бумаги. Метрика может быть получена разными способами. Полезно заметить, что поскольку рассматривается векторное пространство — пространство векторов скорости,—то речь идет о задании з а к о н а с л о ж е н и я в е к т о р о в. Значит, задача состоит в том, чтобы найти такое пространство, в котором закон сложения векторов совпадает с законом сложения скоростей в релятивистской механике. Мы сказали, что инвариантность относительно перехода в любую инерциальную систему координат (лоренцова инвариантность) означает на языке геометрии, что свойства чертежа не зависят от положения начала координат, а это значит, что чертеж можно переставить по плоскости куда угодно. Это значит, что пространство должно иметь постоянную кривизну. Известно, что такими пространствами (трехмерными) являются риманово пространство — поверхность четырехмерного эллипсоида (кривизна > 0), евклидово пространство (кривизна $= 0$) и поверхности одной из пол двуполостного гиперболоида — пространство Лобачевского (кривизна < 0).

Четвертое однородное пространство — поверхность однополостного четырехмерного гиперболоида — представляет собой более сложное многообразие.

Из перечисленных трех пространств пространство Евклида соответствует кинематике классической механики. Пространство Лобачевского изоморфно релятивистскому пространству скоростей. Пространство положительной кривизны замкнуто, и оно находит свое применение в задачах о движении нерелятивистской частицы в кулоновом поле.

В этой статье мы подробно рассмотрим применение теорем геометрии Лобачевского к задачам кинематики. Обратим внимание на то, что связь геометрии и механики позволяет упростить доказательство многих геометрических теорем, придав им смысл теорем механики. Так, теория конических сечений оказывается связанной с законами движения частиц в поле $u \sim 1/r$, теория геометрии Лобачевского — с преобразованием Лоренца. Разумное использование таких аналогий упрощает понимание геометрических теорем, делая в то же время более наглядными формулы механики.

§ 4. Основные соотношения

Мы не будем стремиться излагать кинематику с самого начала, пользуясь геометрическими методами. Это излишним образом усложнит задачу. Будем считать, что читатель знаком с основами специальной теории относительности и начнем сразу с того, что установим соответствие между геометрическими и физическими величинами.

Начнем с энергии частицы. Энергия свободной частицы равна

$$E = m^2 + p^2,$$

разделив на m и вводя 4-скорость

$$u = \left(\frac{E}{m}, \frac{p}{m}\right),$$

получим

$$u_0^2 - \boldsymbol{u}^2 = 1.$$

Теперь положим

$$u_0 = \operatorname{ch} a,$$

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{sh} a \cdot \boldsymbol{n}.$$

Здесь $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор. Главное в этих формулах — введение гиперболического аргумента a. Его смысл легко установить, составив отношение

$$\frac{\boldsymbol{u}}{u_0} = \frac{\boldsymbol{p}}{E} = \boldsymbol{n} \operatorname{th} a \quad \text{или} \quad \operatorname{th} a = \frac{v}{c} = \beta,$$

т. е. $\operatorname{th} a$ есть обычная трехмерная скорость частицы относительно некоторой системы отсчета ($\boldsymbol{n}$ определяет направление скорости).

Если теперь составить сумму двух скоростей, которая показана на рис. 4, то, как известно,

$$w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}.$$

Так как скорости u и v параллельны, то для абсолютной

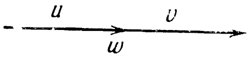

Рис. 4

скорости их суммы

$$\frac{w}{c} = \left(\frac{u}{c} + \frac{v}{c}\right)\left(1 + \frac{u}{c}\frac{v}{c}\right)^{-1}.$$

Если ввести гиперболические функции

$$\frac{w}{c} = \operatorname{th} c, \qquad \frac{v}{c} = \operatorname{th} b, \qquad \frac{u}{c} = \operatorname{th} a,$$

то последняя формула превращается в формулу гиперболического тангенса суммы

$$\operatorname{th} c = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}.$$

Если скорости u и v не параллельны (рис. 5), то формулу для w получим следующим образом. Формула Лоренца для преобразования энергии (направление скорости $u \equiv \beta$ вдоль оси z) дает

$$E = \frac{\beta p'_z + E'}{(1-\beta^2)^{1/2}};$$

обозначая

$$\beta = \operatorname{th} a, \; p'_z = \operatorname{sh} b \cos\theta, \; E'_z = \operatorname{ch} b, \qquad E = \operatorname{ch} c,$$

получим

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos\theta.$$

Но это есть формула косинусов (для суммы дуг) в гиперболической тригонометрии. Она выражает длину стороны гиперболического треугольника через длину двух сторон и угол θ между ними (ср. рис. 5). Таким образом, мы убеждаемся в том, что скорости складываются с помощью формул гиперболической тригонометрии. Это значит, что мы можем рисовать скорости на бумаге, но считать истинной длиной не их геометрическую длину, а гиперболический тангенс этой величины. При этом скорость будем измерять в безразмерных единицах, относя ее к скорости света c: скорость света играет роль кривизны пространства скоростей.

При таком условии скорость света изображается точкой на бесконечности, ибо $\mathrm{th}\infty = 1$.

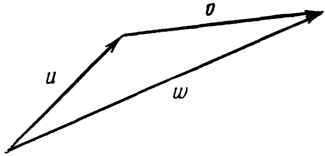

Рис. 5

Чтобы исключить из игры бесконечность, удобнее рисовать на бумаге скорость в виде отрезка длиной $\mathrm{th}\alpha$. Тогда векторы будут складываться по формулам гиперболической геометрии, так что масштаб в разных точках плоскости будет разный, но все векторы будут находиться в круге радиуса 1. Окружность радиуса 1, ограничивающая все возможные построения на плоскости (или шар такого же радиуса в пространстве), называется абсолютом, точки на оси отвечают скорости, равной скорости света, разных направлений[1]. Центр круга (или шара) есть начало координат — вблизи начала координат $\mathrm{th}\alpha \approx \alpha$ и метрика мало отличается от евклидовой (малые скорости). Напротив, вблизи абсолюта малым изменениям α отвечает сколь угодно большое изменение β. Это, в частности, делает трудным построение номограмм. Описанный способ построения «карты»[2] плоскости Лобачевского носит название модели Бельтрами. Модель Бельтрами можно получить, проектируя верхнюю полу однополостного гиперболоида в пространстве Минковского $u_0^2 - \boldsymbol{u}^2 = 1$ на плоскость, касающуюся вершины гиперболоида — точки (1,0,0,0), и выбирая центр проектирования в начале координат (0, 0, 0, 0).

[1] Отметим, что в евклидовой геометрии, в ее проективной форме бесконечно удаленная точка одна — все параллельные линии пересекаются в одной бесконечно удаленной точке. В геометрии Лобачевского возникает бесконечно удаленная окружность. Эта разница будет очень важна в дальнейшем.

[2] Мы говорим «карты», потому что описанная процедура очень похожа на построение географической карты.

В модели Бельтрами прямые линии остаются прямыми, а углы изменяются. Прямыми линиями естественно называть проекции геодезических на гиперболоиде — пересечение поверхности 3-мерного гиперболоида с плоскостями (3-мерными), проходящими через начало координат (аналог больших кругов на поверхности сферы). Таким образом, на рисунках в евклидовой плоскости видимые величины углов отвечают истине, а параллельные линии идут не параллельно (в евклидовом смысле слова), а пересекаются в одной из точек абсолюта — окружности радиуса 1. Так как мы ограничимся только простыми задачами, то для наших целей достаточно иметь дело только с плоскими рисунками. В общем случае все рисунки надо представлять себе сделанными внутри сферы единичного радиуса.

Главным отличием модели Бельтрами от евклидовой плоскости является, как мы уже говорили, отсутствие подобных фигур и, в частности, отсутствие подобных треугольников.

Треугольник Лобачевского определяется любыми тремя элементами, включая три угла. Если у двух треугольников в геометрии Лобачевского все три угла попарно равны, то треугольники одинаковые. Суммы углов треугольника в геометрии Лобачевского всегда меньше π. Величина

$$\delta = \pi - A - B - C,$$

где A, B и C — углы треугольника, называется гиперболическим недостатком. δ определяет площадь треугольника

$$S = \delta R^2,$$

где R^{-1} — кривизна (в нашем случае $R^{-1} = c$). Отсюда видно, что гиперболический треугольник не может иметь площадь [1] больше π.

§ 5. Формулы гиперболической тригонометрии

Лучше всего считать главными и запомнить две формулы, выражающие теорему косинусов (рис. 6):

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \operatorname{ch} a, \tag{5.1}$$

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c + \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos A. \tag{5.2}$$

[1] Известно, что в евклидовом пространстве нельзя разместить всю плоскость Лобачевского, хотя и на ней нельзя нарисовать слишком большой треугольник.

При малых длинах сторон (a, b, $c \ll 1$) первая теорема дает ($\operatorname{ch} a \sim 1$)

$$\cos A = -\cos(B + C) = \cos(\pi - B - C),$$

а вторая теорема переходит в теорему косинусов плоской тригонометрии.

Доказательство этих теорем проще всего взять из сферической тригонометрии, заменив вещественные углы — длины сторон — мнимыми. Характерным свойством формул гиперболической тригонометрии является их двойственность — симметрия между углами и сторонами. Математическое выражение этой симметрии находим в теореме о параллельных.

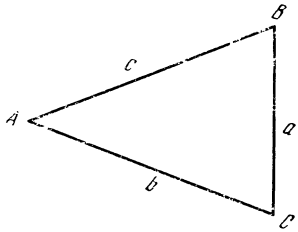

Рис. 6

Рассмотрим две параллельные линии (рис. 7). Проведем через них прямую, так чтобы она составляла с нижней параллелью прямой угол. Тогда верхняя параллель составляет с ней угол, меньший прямого. Его называют углом параллельности и обозначают через $\Pi(x)$, где x — длина отрезка прямой между параллельными. Угол, дополнительный к $\Pi(x)$, называют гудерманианом:

$$\operatorname{gd} x = \pi - \Pi(x). \tag{5.3}$$

В евклидовой геометрии, очевидно, $\Pi(x) = 90°$. В геометрии Лобачевского это справедливо лишь при $x = 0$, т. е. в случае, когда расстояние между параллельными мало.

Последняя формула легко обобщается на случай, когда ни один из углов не равен $\pi/2$ (рис. 8). Рассмотрим треугольник, с одним углом на бесконечности, как сумму двух прямоугольных треугольников; мы получим для его площади

$$S = \pi - A - B = \operatorname{gd} x + \operatorname{gd} y. \tag{5.4}$$

Эта формула будет полезна в дальнейшем.

Применим к треугольнику на рис. 7 теорему косинусов (5.1). Полагая $A = 0$, $B = \pi/2$, получим:

$$\operatorname{ch} a = 1/\sin \Pi(a), \tag{5.5}$$

или

$$\operatorname{th} a = \cos \Pi(a), \tag{5.6}$$

или

$$\operatorname{th} a = \sin \operatorname{gd} a. \tag{5.7}$$

Эти формулы связывают расстояние между параллельными с углом параллельности.

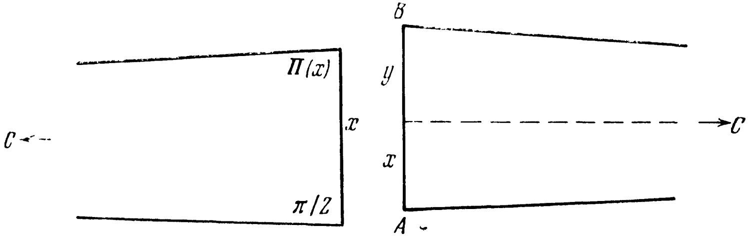

Рис. 7 Рис. 8

Во времена Лобачевского гиперболические функции не употреблялись, и он пользовался вместо этого тригонометрическими функциями с аргументами $\Pi(x)$. Мы будем пользоваться, как правило, гиперболическими функциями. Однако соотношения типа (5.5) играют важную роль: они показывают, как можно любому отрезку сопоставить угол. Такое взаимно однозначное соответствие углов и длин характерно для геометрии Лобачевского. У него нет аналога в евклидовой геометрии.

В релятивистской кинематике мы также обнаруживаем связь длин (скоростей) с углами — это явление, известное как аберрация; мы о нем будем говорить подробнее.

Простые вычисления дают

$$\operatorname{th} \frac{\Pi(x)}{2} = \operatorname{tg} \frac{a}{2}. \tag{5.8}$$

Эта формула удобна для перевода угловых величин в линейные; она не имеет аналога в евклидовой геометрии.

Из треугольника на рис. 8 можно получить еще одну формулу. Рассмотрим опять перпендикуляр, опущенный из точки на абсолюте на секущую, и полученные два прямоугольных треугольника. Применяя для каждого из них формулу (5.6), получим

$$\operatorname{th} a = \operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y} = \frac{\cos B + \cos A}{1 + \cos A \cos B} . \qquad (5.9)$$

Таким образом

$$\operatorname{th} a = \frac{\cos \Pi(x) + \cos \Pi(y)}{1 + \cos \Pi(x) \cos \Pi(y)} . \qquad (5.10)$$

Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник. Так как сумма его острых углов не равна (как в евклидовой геометрии) $\pi/2$, то мы имеем пять величин: два угла A и B и три стороны a, b, c. Между любыми тремя величинами существует соотношение. Поэтому для прямоугольного треугольника можно написать 10 уравнений.

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b, \qquad \text{(теорема Пифагора)} \qquad (5.11)$$

$$\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} c \sin A, \qquad (5.12)$$

$$\operatorname{sh} b = \operatorname{sh} c \sin B, \qquad (5.13)$$

$$\operatorname{th} a = \operatorname{th} c \cos B, \qquad (5.14)$$

$$\operatorname{th} b = \operatorname{th} c \cos A, \qquad (5.15)$$

$$\operatorname{th} a = \operatorname{sh} b \operatorname{tg} A, \qquad (5.16)$$

$$\operatorname{th} b = \operatorname{sh} a \operatorname{tg} B, \qquad (5.17)$$

$$\cos A = \operatorname{ch} a \sin B, \qquad (5.18)$$

$$\cos B = \operatorname{ch} b \sin A, \qquad (5.19)$$

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{ch} c = 1. \qquad (5.20)$$

Формула (5.11) выражает обобщение теоремы Пифагора. При малых a $\operatorname{ch} a \approx 1 + 1/2\ a^2$, и формула переходит в обычную евклидову теорему. Следующие четыре формулы позволяют вычислить катеты по гипотенузе и одному из острых углов. Для прилежащего угла формулы пишутся для th, а для противолежащего — для sh; в евклидовой геометрии всегда входит длина стороны (при $a \approx 0$ $\operatorname{sh} a \approx \operatorname{th} a \approx a$). Это замечание поможет понять, почему в релятивистской кинематике в некоторых формулах удобно пользоваться относительной скоростью ($\beta = \operatorname{th} a$), а в других — 4-скоростью ($u = \operatorname{sh} a$). Следующие две формулы дают выражение для тангенса угла через катеты, а последние три, переходящие в евклидовом случае в тривиальные тождества $A + B = \pi/2$, выражают длину катета через два острых угла.

Геометрический вывод этих формул достаточно труден — мы его здесь обсуждать не будем [1]. Вместо этого мы, используя их для получения формул кинематики, легко проверим их справедливость с помощью преобразований Лоренца. Преобразования Лоренца оказываются здесь весьма полезными для вывода геометрических формул. Это хорошо иллюстрирует тождественность геометрии Лобачевского и релятивистской кинематики; надо только научиться сопоставлять кинематическим величинам геометрические образы. Именно это и достигается изображением кинематических соотношений диаграммами в пространстве скоростей.

Выписав соотношения для прямоугольного треугольника, мы уже без особого труда можем получить формулы для произвольного треугольника; для этого надо разбить его на два прямоугольных.

Не разбирая все случаи подробно, добавим лишь к нашему списку формул еще теорему синусов, верную для любого треугольника,

$$\frac{\sin A}{\operatorname{sh} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{sh} b} = \frac{\sin C}{\operatorname{sh} c} \tag{5.21}$$

и формулу для площади треугольника

$$\sin \frac{S}{2} = \frac{\operatorname{sh} \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{b}{2}}{\operatorname{ch} \frac{c}{2}} \sin C. \tag{5.22}$$

Вообще говоря, для решения кинематических задач могут понадобиться не только формулы планиметрии, но и стереометрии. Такие формулы, конечно, выглядят сложнее и решение таких задач — дело более сложное.

---

[1] Выводы этих формул даны, например, в книгах В. Ф. Кагана: «Основания геометрии». М.— Л., 1949, и «Лобачевский и его геометрия». М., 1955. Особенно интересен вывод Гаусса, изложенный на стр. 282—292 последней книги.

§ 6. Рассеяние частиц

Применение формул, выведенных в предыдущем параграфе, мы начнем с задачи об упругом рассеянии частиц. Как уже говорилось, в пространстве скоростей скорости частиц до и после рассеяния расположены на вершинах равнобочной трапеции (см. рис. 3). Диагонали трапеции делят друг друга так, что отношение sh отрезков $1C$ и $2C$ равно отношению масс $m_2 : m_1$. Еще раз напомним, что каждая из пяти точек трапеции (четыре вершины и центр) отвечают одной из пяти систем координат: четыре системы покоя и система ц. и.

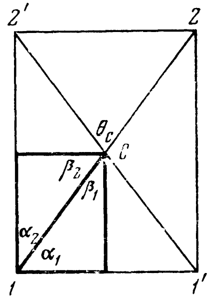

Рис. 9

Опустим из центра перпендикуляр на сторону (11′) (рис. 9). В системе 1 (т. е. в системе, где частица 1 до столкновения покоилась) угол рассеяния отсчитывается от направления падающей частицы 2 т. е. угол (212′) $= \alpha_2$ есть угол рассеяния, а угол (211′) $= \alpha_1$ есть угол отдачи в этой системе.

Применяя формулу для прямоугольного треугольника, получим, например,

$$\operatorname{th}\frac{(11')}{2} = \operatorname{th}(1C)\cos\alpha_1. \tag{6.1}$$

Если умножить это равенство на массу первой частицы m_1 и заметить, что m_1 ch (11′) есть энергия частицы отдачи в системе, где частица 1 покоится, а th (1C) есть относительная скорость частицы 1 в системе ц. и., то можно расшифровать формулу (6.1):

$$\left(\frac{\varepsilon_1 - m_1}{\varepsilon_1 + m_1}\right)^{1/2} = m_1\beta_1\cos\theta_{\text{отдачи}}. \tag{6.2}$$

Эту формулу можно получить, конечно, и из формул релятивистской механики. Получив ее таким образом и перейдя обратно к тригонометрическим функциям, мы докажем формулу гиперболической тригонометрии методом кинематики. В этом и состоит идея изоморфизма кинематики и геометрии.

Из трапеции (рис. 3) можно получить и другие соотношения. Получим, например, соотношение между энергией E_1 частицы в ц. и. и ε_1 в лабораторной системе (системе 1).

$$\mathrm{ch}\,(12) = \mathrm{ch}\,[(1C) + (C2)]. \tag{6.3}$$

Раскрывая скобки и заменяя гиперболические функции энергиями и импульсами, получим

$$m_1\varepsilon_2 = E_1E_2 + p_1p_2. \tag{6.4}$$

Слева в этом равенстве стоит скалярное произведение 4-векторов энергии-импульса обеих частиц в лабораторной системе, справа — то же произведение в системе ц. и.

Получим еще соотношение между углами отдачи в системе 1 и системе 2, т. е. между углами $(211')$ и $(122')$. Проводя через C прямую, перпендикулярную обеим основаниям трапеции, и используя для двух прямоугольных треугольников формулу (5.21), получим

$$\left(\frac{m_1 + \varepsilon_{1'}}{m_1 + \varepsilon_{2'}}\right)^{1/2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}, \tag{6.5}$$

где ε_1 и ε_2 — энергии частиц отдачи $1'$ и $2'$ в системах 1 и 2 соответственно.

С геометрической точки зрения, основания трапеций лежат на эквидистантах — линиях, расстояние между которыми остается постоянным; мы получили соотношение между двумя накрест лежащими углами, образуемыми эквидистантами с секущей. В евклидовой геометрии понятия эквидистанты и параллельной (и, добавим, предельной линии — орицикла, с которой мы встретимся дальше) суть синонимы. В геометрии Лобачевского это разные линии. Это отличие связано с тем, что пучок прямых, перпендикулярных какой-нибудь прямой, не является параллельным пучком. В геометрии Лобачевского есть три типа пучков: пучки параллельных, расходящихся и сходящихся. Кривые, им ортогональные, суть орицикл или предельная кривая, эквидистанта и окружность.

Введем еще соотношение между углами рассеяния в системах 1 и 2 (т. е. в системах, где до рассеяния покоились частица 1 и 2 соответственно). Применяя теорему синусов (5.21) к треугольнику $(2C1')$ и пользуясь тем, что этот треугольник равен симмметричному треугольнику $(1C2')$, получим (см. рис. 3)

$$\frac{\sin\theta_1}{m_1 p_2} = \frac{\sin\theta_2}{m_2 p_1}, \tag{6.6}$$

где p_1 и p_2 — импульсы частиц в системе ц. и. Это соотношение можно вывести и кинематическим путем и получить из него теорему синусов.

Получим еще несколько соотношений для частиц, имеющих одинаковую массу (см. рис. 9).

В этом случае трапеция, как мы знаем, превращается в прямоугольник. Найдем угол между частицами после рассеяния в системе 1 (тот угол, который в нерелятивистском случае был равен $\pi/2$). Применяя формулу (5.21) к двум треугольникам, жирной линией обведенным на рис. 9, найдем

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2); \qquad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta_1 \operatorname{ch} c};$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta_2 \operatorname{ch} c}; \qquad \beta_1 + \beta_2 = \frac{\pi}{2},$$

отсюда

$$\operatorname{tg} A = \frac{2}{\sin\theta_c}\frac{Em}{p^2},$$

где θ_c — угол рассеяния в системе ц. и., а E и p — энергия частиц в этой системе.

Соотношение между энергиями в системах 1 и ц. и. получается сразу по формуле косинуса суммы. Именно:

$$\frac{\varepsilon}{m} = \operatorname{ch}(12) = \operatorname{ch} 2(1C) = \operatorname{ch}^2(1C) + \operatorname{sh}^2(1C) = \frac{E^2 + p^2}{m^2},$$

т. е. E — энергия в системе ц. и.

В качестве последнего упражнения вычислим предельный угол рассеяния частицы 2 в системе 1, если частица 1 более легкая. Если $m_2 > m_1$, то трапеция имеет вид, изображенный на рис. 3 так, что к вершине 2 прилегает короткий отрезок диагонали. Максимальному углу рассеяния соответствует трапеция, у которой диагональ перпендикулярна боковой стороне.

Тогда по формуле (5.12)

$$\sin\vartheta_{\max} = \frac{\operatorname{sh} C2'}{\operatorname{sh} 1C} = \frac{m_1}{m_2} < 1.$$

Это та же формула, что и в нерелятивистской геометрии, а это означает, что она принадлежит к абсолютной геометрии, т. е. к множеству формул, не зависящих от постулата о параллельных.

Разные случаи рассеяния получаются вращением диагоналей вокруг C. При этом конец 2 описывает окружность. Максимальный угол рассеяния равен половине угла, под которым эта окружность видна из 1.

При переходе к более сложным случаям, например ядерным реакциям, когда массы всех частиц различны, или к случаю, когда в реакции участвует больше четырех частиц (например, реакции с распадами), диаграммы усложняются. Однако чем сложнее диаграммы, тем более сложными оказываются и алгебраические выкладки, так что выигрыш от использования тригонометрии становится еще заметнее.

§ 7. Реакции с фотонами. Абсолют и орициклы

До сих пор в рассматриваемых примерах частицы обладали массой и двигались со скоростью $\beta < 1$. Включим теперь в игру и фотоны (или нейтрино). Частица, скорость которой $\beta = 1$ (т. е. равна скорости света), изображается в модели Бельтрами точкой абсолюта — окружности радиуса 1 (или на сфере того же радиуса в трехмерном случае). По определению, фотоны, летящие по одному направлению, определяют собой семейство — пучок параллельных прямых — пучок лучей, вдоль которых направлена относительная скорость фотона у разных наблюдателей. Так как обычно говорят о фотоне, летящем от источника к наблюдателю, то относительная скорость направлена вдоль направления на источник, так что в этом случае направления в пространстве скоростей и в пространстве координат совпадают.

В метрике релятивистского пространства скоростей «расстояние» до абсолюта равно бесконечности ($\beta = \operatorname{th} \infty = 1$). Заметим, что если изображать 4-скорость точкой на верхней поле гиперболоида $u^2 = 1$, то кванту, строго говоря, отвечает точка не на гиперболоиде, а на конусе, и абсолют есть образ конуса, которого гиперболоид, так сказать, «касается на бесконечности». Поэтому формулы, которые мы получаем для фотона, носят исключительный характер: они представляют собой предел формул для частиц, если массу частиц стремить к нулю. Для фотона, строго говоря, нельзя вводить 4-скорость, а можно говорить только о векторе энергии-импульса или о 4-мерном волновом векторе. То, что мы стремимся к конусу со стороны $\beta < 1$, существенным становится при изучении аналитических свойств функций на гиперболоиде или при изучении представлений группы Лоренца.

Так как угол между параллельными прямыми по определению равен нулю, то угол между двумя прямыми, встречающимися на абсолюте, равен нулю (этим мы уже пользовались раньше). Посмотрим, можно ли построить треугольник $A\gamma B$, у которого одна вершина лежит на абсолюте, а два угла прямые. Вершины, лежащие на абсолюте, мы на всех рисунках будем обозначать знаком фотона γ. У такого треугольника две стороны параллельны. Сумма углов такого треугольника равна π, и его площадь должна быть равна нулю. Это значит, что точки A и B совпадают. Проведем из γ пучок параллельных. Проведем линию AB (теперь уже на «прямую»), которая пересечет все параллельные под прямым углом (рис. 10). Такая линия называется орициклом (или ее аналог в пространстве — орисферой). Лобачевский называл ее предельной линией (или предельной поверхностью).

С точки зрения релятивистской кинематики, орисфера в пространстве скоростей есть геометрическое место точек скоростей (наблюдателей), в которых фотон γ имеет одну и ту же частоту, но различные направления. Естественно считать, что «расстояние» между дугой орицикла AB и дугой любого другого орицикла $A'B'$ вдоль орицикла постоянно. В этом смысле об орицикле можно говорить как об окружности с центром, лежащим на абсолюте. На модели Бельтрами орицикл проходит через свой центр на абсолюте (так как масштаб по мере приближения к абсолюту все время уменьшается, и все отрезки, в том числе и радиус орицикла, становятся на абсолюте бесконечно малыми). Длина дуги орисферы увеличивается по мере удаления от «центра» экспоненциально, так что $AB = A'B'e^x$, где x есть (в пространстве скоростей) относительная скорость. Замечательное качество орисферы состоит в том, что на ней реализуется метрика евклидовой плоскости. Орисфера получается в результате сечения гиперболоида гиперплоскостью, параллельной образующим конуса

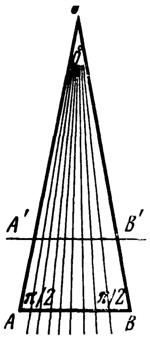

Рис. 10

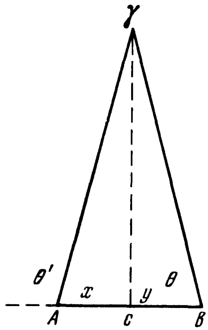

Рис. 11

(в 3-мерном пространстве ей соответствует парабола); это сечение разграничивает сечения гиперболические (с отрицательной кривизной) от сечений сферических (с положительной кривизной). Смысл этого утверждения можно понять, если заметить, что векторы, характеризующие фотон,— его волновой вектор и две возможные поляризации — образуют три направления, ортогональные в любой системе координат. Это есть следствие калибровочной инвариантности фотона, позволяющей в любой системе уничтожить продольную поляризацию плоской электромагнитной волны. Поэтому в направлении, нормальном к волновому вектору (т. е. на орисфере), можно построить двумерную прямоугольную декартову систему. Такое свойство орисферы делает ее особенно удобной для описания реакций при больших энергиях, в которых существенно выбирать в качестве переменных поперечные компоненты переданного импульса, рассматривая процесс рассеяния «с точки зрения наблюдателя, движущегося со скоростью света», т. е. в орисферической системе координат.

Возвращаясь опять к треугольнику с вершиной на орисфере (рис. 11), соединим его вершины A и B прямой линией. Углы θ и θ' суть соответственные углы, которые образует секущая AB к параллельным γA и γB. С точки зрения кинематики, это углы, под которыми виден фотон из двух систем координат, движущихся друг относительно друга со скоростью $\beta = \operatorname{th} c$. С помощью формулы (5.5) мы можем найти связь между этими углами. Опуская из γ перпендикуляр на AB и обозначая два отрезка, на которые опущенный перпендикуляр делит сторону AB, через x и y, найдем

$$\operatorname{th} x = -\cos\theta', \quad \operatorname{th} y = \cos\theta, \tag{7.1}$$

откуда

$$\beta = \operatorname{th} c = \frac{\cos\theta - \cos\theta'}{1 - \cos\theta\cos\theta'}. \tag{7.2}$$

Это дает нам известные формулы аберрации

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}, \tag{7.3}$$

$$\sin\theta' = (1 - \beta^2)^{1/2} \frac{\sin\theta}{1 - \beta\cos\theta}. \tag{7.4}$$

Отсюда получим формулу, которая нам понадобится в дальнейшем:

$$\cos(\theta - \theta') = \frac{(\cos\theta - \beta)\cos\theta + (1 - \beta^2)^{1/2}\sin^2\theta}{1 - \beta\cos\theta}. \tag{7.5}$$

Заметим, что последняя формула определяет и гиперболический недостаток треугольника $A\gamma B$, равный $\pi - \theta - (\pi - \theta') = \theta' - \theta$, так что площадь этого треугольника равна (в единицах c^2)

$$S = \theta' - \theta. \tag{7.6}$$

Формула (7.5) определяет разность соответственных углов в геометрии Лобачевского.

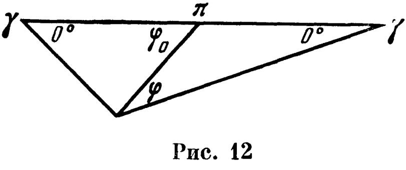

Рис. 12

При рассмотрении задачи о распаде π^0 на два γ-кванта мы встречаемся с треугольником, у которого два угла равны нулю. Вычислим угол между двумя γ-квантами в системе наблюдателя, относительно которого π-мезон имел скорость β (рис. 12). Обозначая через φ_0 угол, под которым γ-квант вылетает в системе покоя π-мезона (по отношению к относительной скорости пиона и наблюдателя), получаем по формуле (7.5), для разностей углов φ и φ_0 0:

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{(\cos\varphi_0 + \beta)\cos\varphi_0 + (1 - \beta^2)^{1/2}\sin^2\varphi_0}{1 + \beta\cos\varphi_0}. \qquad (7.7)$$

β можно выразить через энергию, массу и импульс пиона E_π, p_π и m_π. Обозначая единичный вектор в направлении

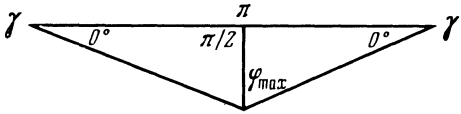

Рис. 13

γ-кванта в системе пиона через n, получим

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{(m_\pi + n p_\pi)(m_\pi + E_\pi) + (n p_\pi)^2}{(n p_\pi + E_\pi)(m_\pi + E_\pi)}. \qquad (7.8)$$

Максимальное значение угла φ отвечает, как это видно из рисунка, $\varphi_0 = \pi/2$. В этом случае, используя прямо теорему о параллельных, найдем (рис. 13)

$$\cos\varphi_{\max} = \beta_\pi; \qquad \sin\varphi_{\max} = \frac{m_\pi}{E_\pi}; \qquad (7.9)$$

$\varphi_{\max}$ очевидно, есть половина угла максимального разлета двух квантов, на которые распадается пион, имеющий энергию $E_\pi = \operatorname{ch}(\operatorname{arcth}\beta)$.

Для полноты разберем еще случай треугольника, у которого все три угла равны нулю, т. е. все вершины лежат на абсолюте. Площадь такого треугольника максимальна и равна π (в единицах c^2). Такой треугольник может встретиться в задаче о распаде частицы на три γ-кванта. Из элементов треугольника можно составить только один скаляр: квадрат площади, который не зависит от длин сторон, т. е. от частот фотонов. Заметим еще, что четырехугольник с двумя вершинами на абсолюте описывает распад $\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \tilde{\nu}_\nu$. Вывод формул для такого распада немногим сложнее тех, которые мы здесь приводили.

§ 8. Томасовская прецессия. Поворот спина

Рассмотрим две системы координат с относительной скоростью β. Попробуем понять, как два наблюдателя в этих системах установят свои 3-мерные системы координат.

Иначе говоря, пусть в каждой системе есть три ортонормированных вектора; как установить соответствие между их ориентациями?

Ясно, что одну ось, орт которой $\boldsymbol{n}^{(1)}$, ориентировать легко: ее можно направить по относительной скорости. Для того чтобы установить еще одну ось, надо ввести в игру еще какую-нибудь частицу, например фотон. Тогда направление волнового вектора фотона может быть принято за направление второго орта. Но это, конечно, не единственный способ. Можно второй и третий орты задать ортогональными к направлению относительной скорости. При этом, если есть еще третья система координат, то можно построить вектор, который во всех трех системах будет пространственноподобным:

$$n_\alpha^{(\beta)} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} u_\beta v_\gamma w_\delta, \tag{8.1}$$

где u, v и w — 4-скорости трех систем. Такое построение можно считать обобщением евклидовой теоремы о том, что через любые три точки можно провести плоскость. Второй орт $\boldsymbol{n}^{(2)}$ мы построим ортогональным к $\boldsymbol{n}^{(1)}$ и $\boldsymbol{n}^{(3)}$. Такое построение приведет к другой системе «синхронизации» ортов, чем выбор их по направлению скорости фотона. В последнем случае орты будут параллельны, в первом — они принадлежат расходящемуся пучку. Возникает естественный вопрос: как лучше всего выбрать орты? Этого вопроса нет в нерелятивистской механике потому, что там прямые, перпендикулярные заданной прямой, параллельны друг другу. Решение вопроса будет ясным, если мы попробуем «синхронизировать» орты в трех системах I, II, III [1].

Приняв какой-нибудь способ «синхронизации», мы перейдем от системы I к системе II, а потом и к системе

---

[1] Мы пользуемся, за неимением лучшего, этим термином по аналогии с «синхронизацией» часов.

III. Если теперь вернемся от системы III обратно к системе I, то обнаружим, что орты, «синхронизированные» по замкнутому циклу I—II—III—I, не совпадут с исходными ортами в системе I. Не существует никакого способа создания на всей поверхности гиперболоида согласованной системы ортов, так же как не существует способа «синхронизировать» часы вдоль экватора на вращающейся Земле. Поворот вектора (в частности, единичного орта) при параллельном переносе вдоль замкнутого пути равен площади, ограниченной этим путем. В случае обхода по треугольнику поворот вектора равен

$$\delta_w = \pi - A - B - C,$$

т. е. гиперболическому недостатку: орт поворачивается в сторону, обратную направлению обхода (так что угол поворота равен $-\delta w$).

Этот поворот называется вигнеровским поворотом и формально представляет собой произведение трех преобразований Лоренца $L_{\mathrm{I\,II}} L_{\mathrm{II\,III}} L_{\mathrm{III\,I}}$.

Вигнеровский поворот тесно связан с другим эффектом — томасовской прецессией — поворотом оси вращающегося тела при изменении направления скорости, в частности при движении его по круговой орбите.

Когда мы говорим о вращающемся теле, то почти всегда относим его к некоторой системе координат. Колесо автомобиля вращается в системе автомобиля. С точки зрения неподвижного наблюдателя, точка на краю колеса описывает не окружность, а циклоиду. Наблюдая за движением гироскопа на плывущем корабле, мы рассматриваем его движение по отношению к системе корабля. Вектор угловой скорости ω мы всегда относим к некоторой системе координат, и вопрос о его четырехмерном аналоге требует дополнительных определений.

Как преобразуется ω при преобразованиях Лоренца, сказать однозначно нельзя, так как нельзя сказать, что такое ω: часть асимметричного тензора второго ранга или пространственная часть псевдовектора. Такая дилемма встает при определении релятивистских свойств спина. Там дело решает поведение при зарядовом отражении (C). Спин (неизменный при C) считают псевдовектором, а магнитный момент (меняющий при C знак) считают частью тензора. Удобно поступить иначе. Будем считать, что ω есть часть 4-псевдовектора ω_α, на который наложено условие пространственной подобности:

$$u_\alpha \omega^\alpha = 0, \tag{8.2}$$

где u_α — 4-вектор скорости той системы координат, к которой естественно относить вращение (корабль или автомобиль) в приведенных примерах. При лоренцовом преобразовании в систему, характеризуемую вектором u'_α, у ω^α возникнет временноподобная компонента, а его пространственная часть поворачивается. При этом, однако, длина пространственной части тоже изменяется. Так как нас интересует только изменение угла, то на изменение длины мы можем внимания не обращать. Это и есть поворот. Однако мы видим, что величина угла поворота существенно зависит от того, как мы определили временну́ю компоненту ω^α. Формулу (8.2) геометрически можно интерпретировать следующим образом. Подобно тому, как вектор изображается точкой в пространстве скоростей, так и единичный вектор $(0, \boldsymbol{\omega}/\omega)$ можно изображать точкой, лежащей «за абсолютом», т. е. не на поверхности двуполостного гиперболоида $u^2 = 1$, а на поверхности однополостного гиперболоида $u^2 = -1$. Заметим, что пучок прямых, ортогональных заданной прямой в пространстве Лобачевского (расходящиеся прямые), «пересекается» на однополостном гиперболоиде (в мнимом пространстве Лобачевского, как его называют). Последнее утверждение станет понятным, если вспомнить, что параллельные прямые пересекаются на абсолюте (т. е. на конусе). Задача о синхронизации сводится теперь к тому, чтобы направить в каждой из систем орт на точку в мнимом пространстве. При такой интерпретации становится ясным, что выбор (8.2) не является единственным; более того, он даже не самый удобный.

Удобнее выбрать другое условие: положить временну́ю компоненту ω равной длине ее векторной части $\omega^2 = \boldsymbol{\omega}^2$, так что вместо (8.2) потребовать

$$\omega^\alpha \omega_\alpha = 0. \tag{8.3}$$

Такой выбор отвечает точке на абсолюте. Тогда орты направляются по параллельным линиям (что кажется более естественным). Поворот осей легко вычисляется по формулам аберрации (см. рис. 11). Углы θ и θ' в нерелятивистской теории равны (параллельные прямые). В этой

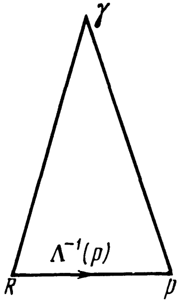

Рис. 14

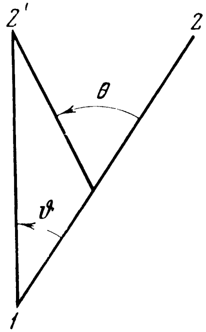

Рис. 15

задаче формула аберрации выступает как формула, описывающая поворот параллельной линии. Хотя поворот орта относится к обходу всего треугольника, его обычно относят к переходу между двумя системами. Считая одну из систем системой покоя (R), а другую — лабораторной, в которой частица имеет 4-импульс p (рис. 14), получим формулу для вигнеровского поворота, отвечающего лоренцовскому преобразованию $L^{-1}(p)$:

$$\delta_w = \arccos \frac{(\cos\theta - \beta)\cos\theta + (1 + \beta^2)^{1/2}\sin^2\theta}{1 - \beta\cos\theta}. \tag{8.4}$$

Через $L^{-1}(p)$ обычно обозначают преобразование, переводящее частицу с импульсом p в систему покоя.

На рис. 14 сторона треугольника изображает лоренцовское преобразование, а γ, как обычно,— точку на абсолюте.

Не всегда удобно выбирать третью точку на абсолюте. В частности, для вывода формулы прецессии Томаса удобно поступать иначе.

Пусть тело, имевшее скорость β, получило ускорение, так что скорость изменилась на $\beta + \dot{\beta}\,dt$. Тогда орты в системе этого тела повернулись на угол, равный площади треугольника со сторонами β, $\dot{\beta}\,dt$. В первом приближении

$$\delta\varphi = -\frac{1}{2}(\beta \times \dot{\beta})\,dt; \tag{8.5}$$

точная формула (с учетом того, что одна сторона треугольника $\dot{\beta} dt$ очень мала) будет

$$\delta\varphi = -\frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\beta \times \dot{\beta})\,dt. \tag{8.6}$$

Таким образом, ось вращающегося тела (как и всякий пространственный орт) будет вращаться со скоростью

$$\Omega = -\frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\beta \times \dot{\beta}) \tag{8.7}$$

с точки зрения неподвижного наблюдателя. Треугольник, который рассматривается при выводе этой формулы, имеет нулевой угол при вершине (так как одна сторона треугольника бесконечно мала). Поэтому томасовская прецессия (так называют этот эффект) имеет ту же геометрическую природу, что и аберрация света.

В заключение рассмотрим еще один пример — поворот спина при рассеянии релятивистских частиц. Наиболее просто выглядит формула для рассеяния одинаковых частиц.

Пусть (рис. 15) в пространстве скоростей точки 1, 2, 2′ обозначают скорость частицы-мишени до рассеяния (лабораторная система координат) и скорость второй частицы до и после рассеяния соответственно. C — скорость системы ц. и. Пусть спин до рассеяния квантовался по направлению скорости частицы 2, т. е. вдоль направления 12, а после рассеяния — вдоль направления скорости частицы 2′ (такое изменение оси квантования удобно при описании различных поляризационных эффектов). Поворот оси квантования совершается, как это видно из рисунка, на угол ϑ — угол рассеяния в лабораторной системе.

Можно сказать, что в нерелятивистском случае поворот спина происходит на угол $\delta_{NR} = \theta - \vartheta = \vartheta$ (так как в нерелятивистском случае $\theta = 2\vartheta$). В релятивистском случае из этого надо вычесть вигнеровский поворот, равный $\pi - (\pi - \theta) - 2\vartheta = \theta - 2\vartheta$. Поэтому суммарный поворот будет равен $\delta = \delta_{NR} - \delta_w = \vartheta - \theta$. Эту величину надо добавить к углу поворота в системе ц. и., который не связан с кинематикой, а связан с изменением осей при переходе от системы до рассеяния к системе после рассеяния. Поэтому суммарный угол будет ϑ.

§ 9. Квантование спина и кросс-преобразование

При описании системы со спином приходится выбирать некоторое направление, по отношению к которому определять квантовое число — проекцию спина. В пространстве скоростей выбор направления связан с выбором некоторой точки — системы, отличной от системы наблюдателя. Прямая (направленная), проходящая через две точки — скорость наблюдателя и скорость избранной точки,— определяет направление, вдоль которого можно квантовать спин.

Если в качестве второй точки избрана скорость системы центра инерции, то квантование спина происходит по направлению импульса (или 4-скорости) каждой частицы: это есть не что иное, как выбор спирального базиса. Таким образом, спиральный базис оказывается в релятивистской кинематике естественным.

Наибольшую трудность в релятивистской кинематике мы испытываем при попытке обобщить квантование спина по заданному направлению, так как определение того, что значит одно и то же направление для двух движущихся наблюдателей, как мы уже видели, не однозначно. Ясно, что если все наблюдатели движутся по одному направлению, то трудность исчезает; однако для произвольно движущихся наблюдателей мы столкнемся с неоднозначностью, как только попытаемся определить единое направление. Мы можем, например, задать направления во всех системах параллельными. Это значит, что мы строим в пространстве скоростей пучок параллельных и выбираем направление квантования спина по одной из прямых этого пучка. Можно поступить иначе — квантовать спин в направлении, перпендикулярном относительной скорости некоторой выбранной системы координат. Это будет квантование по пучку расходящихся прямых (их «точка пересечения» лежит за абсолютом, в мнимом пространстве Лобачевского). В нерелятивистской механике такой способ совпадает с квантованием по пучку параллельных. Если добавить сюда квантование, направленное на какую-нибудь систему (вдоль относительной скорости какой-либо системы, отвечающей пучку прямых, пересекающихся в точке, лежащей в самом пространстве Лобачевского), то мы получаем три разных типа квантования.

Каждый тип квантования характеризуется положением точки пересечения пучка прямых: в пространстве Лобачевского, на абсолюте и в мнимом пространстве. Таким образом, удобно говорить вместо квантования по направлению просто о квантовании на точку, указывая ее положение. Правильнее говорить, что орты (или, например, векторы поляризации) лежат в пространстве, касательном к однополостному гиперболоиду, так что в каждой точке гиперболоида «приклеена» либо сфера, либо гиперболоид, либо, наконец, евклидова плоскость, в которых и происходит преобразование ортов. Ясно, что преобразование в этом «приклеенном» пространстве не связано однозначным образом с преобразованиями Лоренца — сдвигами на самом пространстве Лобачевского. Поэтому необходимо вводить дополнительное условие, которое бы «синхронизировало» вращение орта в «приклеенном» пространстве со сдвигами на гиперболоиде. Преобразование спина играет роль счетчика оборотов (так сказать, шагомера), отмеряющего площадь, которую обходит система в пространстве скоростей. Три типа квантования связаны с тремя возможными определениями единичного вектора (например, орта). При выборе пространственных ортов определяются, очевидно, только три его пространственные компоненты. Четвертая, временноподобная компонента, может быть определена любым образом. Ясно, что есть три различных способа ее задания. Соответственно этому мы можем сделать орт (относительно которого проводится квантование) временноподобным ($n^2 > 0$), фотоноподобным ($n^2 = 0$) или пространственноподобным ($n^2 < < 0$) [1]. При обычном способе введения орта, который ведет к формуле вигнеровского поворота, орт выбирался фотоноподобным (отсюда аналогия с формулой аберрации).

В задаче о рассеянии орт выбирался временноподобным — он был «сделан» из 4-скорости частицы.

---

[1] Произвол в выборе единичного орта определяет некоторую группу преобразований ортов, аналогичную группе калибровок в электродинамике, которая оставляет неизменными все физические результаты.

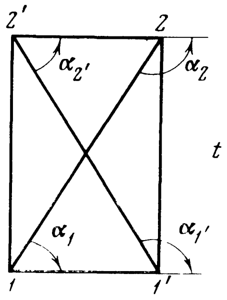

Рис. 16

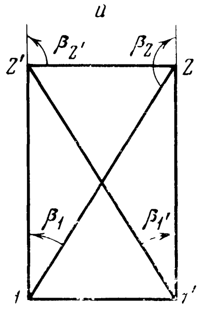

Рис. 17

Осталась неиспользованной еще третья возможность — пространственноподобный орт. Эта возможность используется при переходе в кросс-канал.

Если у нас есть какой-либо двухчастичный процесс

$$1+2\to 3+4,$$

то переходы к процессам

$$1+\bar{3}\to\bar{2}+4,$$

$$1+\bar{4}\to 3+\bar{2}$$

(черта указывает на античастицу) называются кросс-преобразованием. Если система координат, в которой $\boldsymbol{P}_s = \boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=0$ называется системой ц. и. s-канала, то системы $\boldsymbol{P}_t=\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_3=0$ и $\boldsymbol{P}_u=\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_4=0$ называют системами ц. и. в t- и u-каналах соответственно. В s-канале $P_s^2>0$, а $P_t^2<0$ и $P_u^2<0$.[2] При преобразовании спиральных амплитуд из s-канала в t-канал, кроме преобразования координат, необходимо перейти от квантования спина по направлению векторов $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ или, что то же самое, на точку P_s, к квантованию по направлению $\boldsymbol{p}_1$ и $-\boldsymbol{p}_3$, т. е. на точку P_1. Из рис. 16 видно, что для этого мы должны повернуть векторы спина на углы α_1, α_2, α_3, α_4, так как точка P_t лежит на пересечении про-

[2] Для простоты мы рассматриваем случай, когда массы всех частиц равны. Случай неравных масс формально несколько сложнее, но он не добавляет ничего принципиально нового.

должения двух сторон прямоугольника $(1,3')$ и $(2,4')$, т. е. на пересечении прямых, проходящих через отмеченные точки.

Повернув спины (или оси квантования) на углы α_i, мы приготовим амплитуду таким образом, чтобы после перехода в t-канал получились спиральные амплитуды. Аналогичным образом происходит квантование и в u-канал (углы β_i на рис. 17). В обоих случаях новое квантование происходит по направлению пространственноподобного вектора.

Таким образом, в любой задаче следует разумно выбирать «калибровку» ортов. В частности, при работе со спинами часто бывает удобно определить спин как четырехмерный вектор s с $s^2 = 0$, а не $s^2 = s(s+1)$, как это обычно делается. При этом упрощаются формулы для спиновых тензоров (поляризаций разных порядков).

Э. М. Чудинов

А. ЭЙНШТЕЙН ОБ ОТНОШЕНИИ ГЕОМЕТРИИ К РЕАЛЬНОСТИ

Со времен Евклида до XX в. философы и естествоиспытатели были убеждены в том, что единственно возможной геометрией реального физического пространства является евклидова геометрия. Открытие в прошлом веке неевклидовых геометрий лишь поколебало веру ученых в абсолютность евклидовой геометрии. И только в XX в. была доказана ограниченность традиционных представлений о геометрии реального физического пространства, объективная возможность геометрической структуры, отличной от евклидовой. Этим открытием наука обязана общей теории относительности А. Эйнштейна.

В работах по общей теории относительности и релятивистской космологии проблема геометрии физического пространства обычно рассматривается в контексте применения общей теории относительности для описания пространственно-временно́й структуры Вселенной. При такой постановке вопроса она сводится к нахождению космологических решений гравитационных уравнений, которые согласуются с данными астрономических наблюдений. Однако эта проблема актуальна не только в вышеупомянутом прикладном аспекте. Не меньший интерес она представляет и как проблема оснований физического знания. Именно в таком плане она рассматривается в ряде работ А. Эйнштейна.

Прежде всего необходимо отметить нетривиальность вопроса о геометрии пространства. Дело в том, что одно и то же пространство может быть описано на языке различных метрических геометрий. Этот факт стал известен после того, как было установлено, что моделями, на которых выполняются аксиомы и теоремы неевклидовых геометрий, служат объекты евклидовой геометрии. Такие евклидовы объекты, как внутренняя область круга Клейна или полуплоскость Пуанкаре, могут рассматриваться также и как двухмерные пространства гиперболической геометрии, а поверхность шара — как двухмерное пространство постоянной положительной кривизны, имеющее геометрию Римана.

Применительно к упомянутым объектам вопрос о том, какова их «истинная» геометрия, сам по себе не имеет смысла. Он приобретает смысл лишь после того, как определены правила конгруэнтности. Однако для непрерывного пространства не существует привилегированного стандарта конгруэнтности. Выбор определения конгруэнтности является вопросом конвенции. Поэтому в определенных пределах является произвольным и соглашение о том, считать ли данный пространственный объект, например внутреннюю область круга Клейна, имеющим евклидову или неевклидову геометрию.

Сказанное нами выше характеризует постановку вопроса о геометрии применительно к абстрактному математическому пространству. Можем ли мы экстраполировать приведенные факты на реальное физическое пространство? Ответ Эйнштейна на этот вопрос отрицателен. По его мнению, чистая математика, например абстрактная аксиоматически построенная геометрия, сама по себе еще ничего не говорит о чувственно наглядных объектах физического мира и метрике физического пространства. Для того чтобы превратить геометрию в совокупность утверждений о реальном физическом мире, необходимо теоретическим объектам геометрии поставить в соответствие физические объекты, а правилам оперирования с первыми — реальные операции со вторыми. Такого рода интерпретации геометрических понятий на моделях, элементами которых являются физические объекты, называются координативными дефинициями [1] геометрических понятий. Именно координативные дефиниции обращают чистую геометрию в физическую геометрию, имеющую определенное фактуальное содержание.

---

[1] Эти интерпретации называются также «реальными определениями», «правилами соответствия» и т. д. Мы будем придерживаться термина «координативная дефиниция», введенного Г. Рейхенбахом (H. Reichenbach. Philosophie der Raum Zeit. Lehre, 4, Berl., 1928).

В качестве координативных определений конгруэнтности в теории относительности обычно используются световые лучи и часы. Однако при обсуждении проблемы отношения геометрии к физическому пространству в рамках оснований физики Эйнштейн делает упор на координативную дефиницию, использующую понятие твердого тела. Для понимания того, какую роль твердые тела играют в превращении геометрии из абстрактно математической отрасли знания в описание физического мира, важное значение имеет результат, полученный Гельмгольцем еще в прошлом веке. Суть его состоит в том, что твердые тела и их конфигурации реализуют аксиомы евклидовой геометрии [1].

Интерпретация геометрии посредством твердых тел сыграла важную роль в создании общей теории относительности и в решении проблемы геометрии физического пространства. Она явилась, в частности, основой для вывода о том, что пространства неинерциальных систем и гравитационных полей имеют неевклидову геометрию.

Это было превосходно продемонстрировано Эйнштейном в его примере с двумя кругами, один из которых неподвижен, а другой вращается вокруг общей оси. Твердые стержни, уложенные вдоль окружности вращающегося круга, испытывают лоренцово сокращение с точки зрения неподвижного наблюдателя. Вследствие этого отношение длины окружности к диаметру, длина которого остается неизменной, отличается от π, что свидетельствует о неевклидовости пространства вращающейся неинерциальной системы. Поскольку же неинерциальные системы, в силу принципа эквивалентности, локально эквивалентны гравитационным полям, то все сказанное выше справедливо и в отношении гравитационного поля.

Эйнштейн придавал важное значение понятию практически твердого тела в решении проблемы отношения геометрии к реальному физическому миру. Именно оно, по его мнению, дает возможность приписать объективную геометрическую структуру физическому пространству. И, наоборот, отрицание практически твердых тел как объек-

---

[1] Гельмгольц. О происхождении и значении геометрических аксиом. СПб., 1895, стр. 52—53.

тивной модели геометрических аксиом возвращает нас к конвенционалистской постановке вопроса о геометрической структуре пространства, характерной для абстрактной геометрии.

Предпочтение, отдаваемое Эйнштейном твердому телу как координативной дефиниции конгруэнтности, имеет смысл только в рамках оснований физики, при построении основ общей теории относительности. После того как последняя создана и речь идет о приложениях, более эффективными оказываются световые лучи. Однако Эйнштейн не использует ab ovo световой луч в качестве координативной дефиниции конгруэнтности, потому что сама по себе траектория светового луча в гравитационном поле без заранее постулируемой теории гравитации лишена однозначного геометрического смысла.

Последнее обстоятельство было отмечено Пуанкаре еще до создания теории относительности. По мнению Пуанкаре, вопрос о том, какая геометрия истинна в смысле описания физического пространства, не имеет смысла. Мы всегда, утверждал Пуанкаре, перед лицом любых физических фактов можем сохранить любую геометрию — евклидову или одну из неевклидовых за счет корректировки физических законов. Вопрос о геометрии не зависит от физических опытов. Он решается исключительно на основе принятых конвенций в соответствии с соображениями о том, какая геометрия представляется наиболее удобной.

Конвенциональный статус физической геометрии Пуанкаре демонстрирует на следующем примере. Он пишет: «Если правильна геометрия Лобачевского, то параллакс очень удаленной звезды будет конечным, если правильна геометрия Римана, он будет отрицательным.

Эти результаты, по-видимому, допускают опытную проверку: некоторые надеются, что астрономические наблюдения могли бы решить выбор между тремя геометриями. Но то, что в астрономии называется прямой линией, есть просто траектория светового луча. Если, следовательно, сверх ожидания, удалось бы открыть отрицательные параллаксы или доказать, что все параллаксы больше известного предела, то представлялся бы выбор между двумя заключениями: мы могли бы отказаться от евклидовой геометрии или изменить законы оптики и допустить, что свет распространяется не в точности по прямой линии»[1]. Хотя далее Пуанкаре добавляет, что «всякий бы счел второе решение более удобным»[2], эти альтернативные описания являются, на его взгляд, логически эквивалентными.

Для того чтобы принять в качестве истинного такое описание, согласно которому световой луч распространяется по геодезической и которое объясняет эффект отклонения траектории луча от евклидовой прямой за счет неевклидовости самого пространства, необходимо с самого начала принять общую теорию относительности. Построение же самой теории, в частности обоснование неевклидовости пространства в присутствии гравитационного поля, Эйнштейн пытается осуществить при помощи понятия, которое, по его мнению, независимо от теории, а именно — понятия твердого тела.

Введение понятия твердого тела для формулировки координативной дефиниции конгруэнтности оказалось связанным с целым рядом трудностей, которые вынужден был признать и сам Эйнштейн. В статье «Геометрия и опыт» (1921) он писал: «В реальном мире не существует объектов, в точности соответствующих понятию измерительных стержней, или связанному с ним в теории относительности понятию часов. Ясно также, что твердое тело и часы не являются первоначальными понятиями в системе понятий физики, но представляют собой понятия сложные, которые не могут играть самостоятельную роль в теоретической физике»[3]. Однако, несмотря на это, Эйнштейн считал допустимой конструкцию твердого тела как некоторого приближения к реальным телам. Отвечая на критику понятия твердого тела, он в этой же статье писал: «Что же касается возражения, что в природе нет абсолютно твердых тел и что приписанные им свойства не соответствуют физической реальности, то оно никоим образом не является столь серьезным, каким оно может показаться на первый взгляд. В самом деле, нетрудно задать состояние измерительного тела достаточно точно, чтобы его поведение по отношению к другим измерительным телам было настолько определено, чтобы им можно было пользоваться как твердым телом. Именно такие изме-

---

[1] А. Пуанкаре. Наука и гипотеза. М., 1904, стр. 85—86.
[2] Там же.
[3] А. Эйнштейн. Геометрия и опыт. Собр. науч. трудов, т. II, стр. 86.

рительные тела надо иметь в виду, когда говорят о твердых телах»[1].

По мнению Эйнштейна, указанными понятиями можно пользоваться также и как независимыми. Постулирование их независимости он рассматривает не только как чисто логический прием, но и как такое их понимание, которое оправдано уровнем развития самой физики. «...По моему убеждению, при современном состоянии теоретической физики этими понятиями следует пользоваться как независимыми, поскольку мы пока еще далеки от такого понимания теоретических оснований атомистики, которое позволило бы построить теоретические понятия твердых тел и часов из более элементарных»[2].

Свои взгляды на твердое тело как на физический стандарт пространственной конгруэнтности Эйнштейн противопоставляет точке зрения Пуанкаре, который отрицал реальный смысл этого понятия[3]. Позицию Пуанкаре по данному вопросу Эйнштейн характеризует следующим образом: «Почему Пуанкаре и другие исследователи отклоняли напрашивающуюся эквивалентность практически твердого тела из реального опыта и геометрического тела? Просто потому, что реальные тела в природе при ближайшем рассмотрении оказываются совсем не твердыми, потому что их геометрическое поведение, т. е. их взаимное расположение, зависит от температуры, внеш-

---

[1] А. Эйнштейн. Геометрия и опыт. Собр. науч. трудов, т. II, стр. 86—87.

[2] Там же,

[3] Вообще говоря, было бы неправильно утверждать, что Пуанкаре начисто отрицал связь геометрии с опытами, производимыми над твердыми телами. В его работах имеются прямые указания на ту роль, которую они сыграли в становлении геометрии. В книге «Наука и гипотеза» он писал: «Опыт играет неизбежную роль в происхождении геометрии» («Наука и гипотеза». М., 1904, стр. 83). В другой своей работе «Ценность науки» он отмечает: «Известно, какую роль сыграла кинематика твердых тел в генезисе геометрии» («Ценность науки». М., 1906, стр. 170). Однако твердые тела, с которыми человек имеет дело в своем опыте не являются, по мнению Пуанкаре, предметом геометрии. Если бы это было так, то геометрия утратила бы свою строгость и стала лишь приближенной наукой, каковой она фактически не является. Геометрия имеет дело не с эмпирически твердыми телами, а с идеальными абсолютно твердыми телами. Понятие об этих телах, указывает Пуанкаре, «извлечено из недр нашего духа, и опыт представляет только случай, заставляющий это понятие выступать» («Наука и гипотеза». М., 1904, стр. 83).

них сил и т. п. Тем самым первоначальная связь между геометрией и физической реальностью оказывается уничтоженной, и мы чувствуем себя вынужденными перейти к следующему, более общему представлению, характерному для точки зрения Пуанкаре. О поведении реальных вещей геометрия ($Г$) ничего не говорит; это поведение описывает только геометрия вместе с совокупностью физических законов ($Ф$). Выражаясь символически, мы можем сказать, что только сумма ($Г$) + ($Ф$) является предметом проверки на опыте. Таким образом, можно произвольно набирать как ($Г$), так и отдельные части ($Ф$): все эти законы представляют собой соглашения»[1].

В последующих своих работах Эйнштейн неоднократно возвращается к обсуждению точки зрения Пуанкаре на отношение геометрии к опыту. При этом благожелательное отношение его к Пуанкаре в некоторых случаях создает видимость того, что Эйнштейн солидаризуется с его концепцией статуса физической геометрии. Данное обстоятельство послужило поводом для ошибочного вывода, сделанного некоторыми исследователями философии геометрии Эйнштейна, о том, что Эйнштейн эволюционировал в своих взглядах на геометрию в сторону конвенционализма.

В статье «Неевклидова геометрия и физика» (1926) Эйнштейн пишет: «По воззрению современной науки, геометрия, взятая в отдельности, не соответствует, строго говоря, вообще никаким опытам; она должна быть приложена к объяснению их совместно с механикой, оптикой и т. д. Так как сверх того геометрия должна предшествовать физике, поскольку законы последней не могут быть выражены без помощи геометрии, то геометрия и должна казаться наукой, логически предшествующей всякому опыту и всякой опытной науке»[2]. Приведенный фрагмент отнюдь не следует расценивать как свидетельство того, что Эйнштейн изменил свои взгляды на вопрос об отношении геометрии к физическому миру. Здесь он прежде всего излагает предпосылки конвенционалистского понимания геометрии, которые сформировались в ходе развития фи-

---

[1] А. Эйнштейн. Геометрия и опыт. Собр. науч. трудов, т. II, стр. 86.

[2] А. Эйнштейн. Неевклидова геометрия и физика. Собр. науч. трудов, т. II, стр. 179.

зического знания. Что же касается самой конвенционалистской трактовки физической геометрии, то вопрос о том, является ли она неизбежной или нет,— упирается, по мнению Эйнштейна, в допустимость понятия твердого тела как стандарта конгруэнтности. И здесь Эйнштейн вновь подтверждает свое прежнее отношение к понятию твердого тела. Отметив, что вопрос об отношении геометрии к физическому пространству допускает двоякое решение, Эйнштейн пишет: «С одной стороны, можно принять, что геометрическое „тело“ действительно реализуется физическими твердыми телами, если только, конечно, соблюдены известные предписания относительно температуры, механических напряжений и т. п. Такова точка зрения практического физика-экспериментатора... Эта точка зрения была особенно ясно высказана Гельмгольцем; можно добавить, что без нее невозможно было практически подойти к теории относительности» [1]. Далее, изложив альтернативную точку зрения Пуанкаре, отрицающую реальный смысл понятия реального тела, Эйнштейн заключает: «Мы примем первую точку зрения, как наиболее отвечающую современному состоянию наших знаний» [2].

Значительно менее ясным является следующее замечание Эйнштейна, высказанное им в статье «Относительность и проблема пространства» (1952): «Тонкость понятия пространства,— пишет он,— возросла с открытием того, что абсолютно твердых тел не существует. Все тела являются упруго деформируемыми и изменяют свой объем с изменением температуры. Поэтому структуры, взаимные расположения которых должны описываться евклидовой геометрией, не могут быть оторваны от физических понятий. Но так как физика при установлении своих понятий в конце концов должна использовать геометрию, то эмпирическое содержание геометрии может быть сформулировано и проверено только в рамках всей физики» [3]. С одной стороны, содержание вышеприведенного фрагмента может быть истолковано как выражение той же самой мысли, которая приводится в статье «Неевклидова геометрия и физика». А именно: Эйнштейн излагает здесь

---

[1] А. Эйнштейн. Неевклидова геометрия и физика. Собр. науч. трудов, т. II, стр. 180.
[2] Там же, стр. 181.
[3] А. Эйнштейн. Относительность и проблема пространства. Собр. науч. трудов, т. II, стр. 749.

те предпосылки, на которых возникла конвенционалистская концепция геометрии, хотя сам он не разделяет ее. Однако последняя фраза может быть интерпретирована и как указание на неокончательность решения проблемы физического пространства в рамках одной частной теории.

Для выяснения отношения Эйнштейна к конвенционалистской концепции физической геометрии Пуанкаре несомненный интерес представляет его рецензия на статью Г. Рейхенбаха «Философское значение теории относительности». В этой статье Рейхенбах подвергает критике конвенционалистскую трактовку геометрии с позиций эмпиризма. А. Эйнштейн представляет дискуссию Рейхенбаха с Пуанкаре в виде следующего диалога:

«Пуанкаре. Эмпирические тела не являются абсолютно твердыми и, следовательно, не могут служить реализацией геометрических отрезков. Поэтому теоремы геометрии нельзя проверить на практике.

Рейхенбах. Я допускаю, что тел, которые могли бы сами по себе служить „реальным определением отрезка", не существует. Тем не менее такое реальное определение можно получить, приняв во внимание тепловое расширение, упругость, электро- и магнитострикцию и т. д. ...

Пуанкаре. При построении улучшенного реального определения Вы воспользовались физическими законами, формулировка которых (в этом случае) предполагает евклидову геометрию. Следовательно, проверка, о которой Вы говорите, относится не только к геометрии, но и ко всей совокупности физических законов, лежащих в ее основе. Отсюда следует, что проверка одной лишь геометрии невозможна.

Но тогда почему мне не выбирать геометрию (например, евклидову), руководствуясь соображениями собственного удобства, а остальные („физические" в обычном смысле) законы не подгонять к выбранной геометрии так, чтобы всякая система в целом не противоречила опыту?» [1].

Любопытно заметить, что приведенных здесь диалога и рассуждений Пуанкаре о связи процедуры уточнения измерительного тела с конвенционалистской трактовкой геометрии в статье Рейхенбаха нет. Если мы обратимся к

---

[1] А. Эйнштейн. Замечания к статьям. Собр. науч. трудов, т. IV, стр. 304–305.

тексту этой статьи, то найдем там лишь следующее. Рейхенбах пишет, что, согласно Пуанкаре, «геометрия является конвенциальной вещью и высказываниям о геометрии физического пространства не может быть приписано никакого эмпирического значения» [1]. Далее, отметив, что такая точка зрения является ошибочной версией так называемой относительности геометрии, Рейхенбах делает следующее замечание: «Правильно лишь то, что физическое пространство может быть описано как евклидовой, так и неевклидовой геометрией. Но было бы ошибочно интерпретировать эту относительность геометрии, утверждая, что высказывания о геометрической структуре физического пространства лишены смысла. Выбор геометрии произволен до тех пор, пока мы не приняли специального определения конгруэнтности. Но как скоро эта дефиниция установлена, вопрос о том, какую геометрию имеет пространство, становится эмпирическим вопросом» [2].

Чем объяснить столь вольное изложение Эйнштейном содержания статьи Рейхенбаха? Вероятнее всего, Эйнштейн воспользовался этой статьей как поводом для того, чтобы сопоставить две крайние позиции в решении вопроса о статусе физической геометрии — эмпиризм и конвенционализм. Рейхенбах в приведенном диалоге выступает как сторонник эмпиризма, ратующий за то, что геометрия может быть эмпирически проверена на основе реальных опытов с твердыми телами, причем проверена сепаратным путем — независимо от той теоретической системы, ингредиентом которой геометрия является.

Может показаться, что взгляды Рейхенбаха на возможности эмпирического обоснования геометрии совпадают со взглядами самого Эйнштейна. Такого рода мнение имеет под собой определенные основания. О близости Эйнштейна к эмпиризму свидетельствуют уже упоминавшиеся статьи «Геометрия и опыт» и «Неевклидова геометрия и физика». В этих статьях, написанных в 20-е годы, Эйнштейн представляет себе эмпирическую проверку геометрии как процедуру реального опыта с практически твердыми телами. Однако в дальнейшем Эйнштейн отходит от эмпиризма.

---

[1] H. Reichenbach. The philosofical significance of theory of relativity. «Albert Einstein: philosopher scientist». Evanst., 1949, p. 297.

[2] Там же.

Его критическое отношение к эмпиризму проскальзывает в тех замечаниях, которые он вкладывает в уста Пуанкаре. Суть этих замечаний сводится к тому, что реальные твердые тела могут служить аналогом геометрических тел только после уточнения на основе законов физики, которые, в свою очередь, предполагают определенную геометрию. Этот аргумент, который сформулирован Эйнштейном (Пуанкаре им не пользовался), указывает на то, что программа проверки геометрии посредством реальных твердых тел ведет или к кругу в доказательстве, или к признанию некоторой априорной геометрии.

Свое несогласие с эмпиризмом Эйнштейн демонстрирует не только в рецензии на статью Рейхенбаха, но и в замечаниях на статью Бриджмена, чья философия операционализма является одним из вариантов эмпиризма. Согласно операционализму, для того чтобы какая-либо логическая система могла считаться физической теорией, необходимо, чтобы все ее утверждения допускали независимую операциональную проверку. По поводу этого требования операционализма Эйнштейн замечает: «В действительности же еще ни одна теория не смогла удовлетворить этим требованиям и им вообще невозможно удовлетворить. Для того чтобы какую-нибудь теорию можно было считать физической теорией, необходимо лишь, чтобы вытекающие из нее утверждения допускали эмпирическую проверку» [1].

Вышеприведенные замечания Эйнштейна по вопросу о формах эмпирического обоснования геометрии, его критика эмпиризма были интерпретированы известным американским специалистом по философии геометрии А. Грюнбаумом как свидетельство того, что Эйнштейн придерживался конвенционалистских взглядов на статус физической геометрии. В своей книге «Философские проблемы пространства и времени», изданной в Америке и Англии, а также переведенной на русский язык, он посвящает этому вопросу целую главу под претенциозным названием «Критика эйнштейновой философии геометрии». В частности, он приписывает Эйнштейну следующее: «Эйнштейн утверждает, что сама геометрия никогда не может быть связана с экспериментальной фальсификацией в отрыве от

[1] А. Эйнштейн. Замечания к статьям. Собр. науч. трудов, т. IV, стр. 306.

других законов физики, которые учитываются при вычислении поправок, компенсирующих деформацию стержня. Отсюда он делает вывод, что вы можете всегда сохранить геометрию, которая вам нравится, с помощью соответствующей регулировки связанных с ней корректировочных физических законов» [1].

При оценке взглядов Эйнштейна на отношение геометрии к реальности необходимо брать в расчет не отдельные его высказывания по этому вопросу, а его общую теорию относительности. Именно в этой теории, утверждающей объективность геометрической структуры физического пространства, в принципах ее построения содержится эйнштейнова философия геометрии. Если мы подойдем к эйнштейновой философии геометрии с этой точки зрения, то мы можем лучше понять и отношение Эйнштейна к твердым телам как средству проверки геометрии. Твердые тела были введены Эйнштейном прежде всего для построения теории. Посредством конструкции твердого тела Эйнштейн получил возможность непосредственно перейти от специальной теории относительности к общей теории относительности. Твердые тела, испытывающие лоренцово сокращение в неинерциональных системах, привели его к идее неевклидовости пространства этих систем, а затем и к идее геометрического описания гравитации.

Опыты с твердыми телами действительно являются для Эйнштейна средством эмпирической проверки геометрии. Но эти опыты носят характер идеализированных экспериментов, в которых твердые тела выступают в виде некоторой идеализации реальных вещей. Для таких опытов совершенно излишня процедура корректировки твердых измерительных стержней на основе физических закономерностей.

Отличие взглядов Эйнштейна от взглядов сторонников эмпиризма на практически твердые тела заключается в том, что для Эйнштейна они имеют лишь внутринаучное значение, тогда как реальная процедура эмпирической проверки геометрии — это проверка следствий, вытекающих из теоретической системы, элементом которой геометрия является. Эмпиризм же настаивает на прямой интерпретации геометрических понятий на реальных объе-

---

[1] А. Г р ю н б а у м. Философские проблемы пространства и времени. М., 1969, стр. 160.

ктах. И хотя Эйнштейн, видимо, испытал определенное влияние эмпиризма в период апогея этой философии, его концепция физической геометрии, составляющая философский подтекст общей теории относительности, чужда эмпиризму.

Не обесценивает ли сказанное выше значение результатов Гельмгольца? Если иметь в виду идеи Гельмгольца относительно эмпирических оснований евклидовой геометрии, то, видимо, нет. Евклидова геометрия действительно возникла на основе опытов с практически твердыми телами. Но ее нельзя рассматривать как результат филигранно выполненных измерений. На это указывает и сам Гельмгольц: «Впрочем, вовсе не моя цель утверждать, что человечество добыло пространственные интуиции, соответствующие аксиомам Евклида лишь посредством тщательно выполненных систем точных геометрических измерений. Скорее ряд обыденных опытов, особенно созерцание геометрического подобия больших и малых тел — подобия, возможного лишь в „плоском“ пространстве, привело к тому, что каждое геометрическсе созерцание, которое противоречило этому факту, отбрасывалось как невозможное» [1].

При той схеме эмпирической проверки теории, которая сформулирована Эйнштейном, важное значение при определении статуса физической геометрии имеет то, как физическая геометрия связана с остальной физикой. Нами уже отмечалось, что связь физики и геометрии явилась одной из предпосылок конвенционалистской трактовки геометрии. Казалось бы, что наиболее радикальным путем его преодоления является проведение четких границ между физическим и геометрическим ингредиентами теории, выявлении их относительной самостоятельности. Путь преодоления конвенционализма на основе теории относительности оказывается в некотором смысле диаметрально противоположным. В общей теории относительности достигается более полный синтез физики и геометрии, чем это наблюдалось на предыдущих этапах данных наук. Геометрия пространства-времени полностью совпадает с физикой гравитационного поля. Одни и те же величины — функции g_{ik} и их производные описывают как гравита-

---

[1] Гельмгольц. О происхождении и значении геометрических аксиом. СПб., 1895, стр. 54.

цию, так и пространственно-временной аспект физической реальности. Однако это сближение физики и геометрии не ведет к геометрическому конвенционализму.

Это, конечно, не означает, что тем самым исключается возможность описания данного физического пространства на языке различных метрических геометрий. После того как в результате решения гравитационных уравнений нами получена пространственно-временная структура, согласующаяся с данными наблюдений и потому приписываемая объективному миру, мы, в принципе, еще можем описать факты на языке других метрических геометрий. Но эти геометрии проигрывают по сравнению с геометрией пространственно-временной структуры, полученной в виде решения гравитационных уравнений. Последняя является привилегированной геометрией. Ее привилегированность состоит в том, что она описывает реальную структуру пространства-времени, которая есть не что иное, как структура реального гравитационного поля, обусловленного реальным распределением материи.

В своей книге «Философские проблемы пространства и времени» Грюнбаум развивает концепцию геохронометрического конвенционализма, согласно которой математически непрерывное пространство является метрически аморфным в силу того, что для него не существует привилегированного стандарта конгруэнтности. Этим оно отличается от дискретного пространства, которому такие стандарты присущи,— элементарные длины, являющиеся «атомами» этого пространства. Для непрерывного пространства может быть введена риманова функция расстояния между двумя бесконечно близкими точками — $ds^2 = g_{ik}dx^i\, dx^k$. Изменяя g_{ik}, мы можем получить различные типы метрических геометрий. Грюнбаум экстраполирует эти факты на реальное физическое пространство. Однако он недоучитывает следующего: в общей теории относительности выбор функций g_{ik}, вообще говоря, не является делом субъективного произвола. Он детерминирован тем обстоятельством, что эти функции характеризуют реальное гравитационное поле, обусловленное реальным распределением масс.

Риман по поводу причин возникновения метрических отношений в пространстве писал: «...В случае дискретного многообразия принцип метрических отношений содержится уже в самом понятии этого многообразия, тогда как в случае непрерывного многообразия его следует искать где-то в другом месте. Отсюда следует, что или то реальное, что создает идею пространства, образует дискретное многообразие, или же нужно пытаться объяснить возникновение метрических отношений чем-то внешним — силами связи, действующими на это реальное»[1]. Эйнштейнова теория тяготения явилась решением вопроса о метрике пространства в духе второй альтернативы, введя реальные «силы» связи — гравитационное поле, обращающее математически непрерывное многообразие в реальное метрическое пространство.

Таким образом, общая теория относительности свидетельствует о том, что далеко не всегда требование общей проверки $(Г) + (Ф)$ приводит к конвенционализму. Конвенционализм имеет свои корни лишь в том случае, когда, во-первых, проводится достаточно резкая демаркационная линия между $(Г)$ и $(Ф)$, и, когда, во-вторых, между $(Г)$ и $(Ф)$ нет однозначной связи, такой, что $(Г) \rightarrow (Ф)$ и $(Ф) \rightarrow (Г)$. Подобная картина наблюдается в физике, которая подразделяет реальность на пространство и время, с одной стороны, и не связанный с ними физический субстрат — с другой. «Слияние» пространства-времени с материей выбивает почву из-под конвенционализма. Более того, именно объединение $(Г)$ и $(Ф)$ в том виде, как оно осуществлено общей теорией относительности, дает возможность однозначного решения вопроса о геометрии.

---

[1] Б. Риман. О гипотезах, лежащих в основании геометрии. Сб. «Об основаниях геометрии». М., 1956, стр. 324.

Л. И. Любинская

О ПРИМЕНЕНИИ ИДЕЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ И ЛОГИКИ СВЯЗЕЙ К АНАЛИЗУ ТВОРЧЕСТВА А. ЭЙНШТЕЙНА

В физике, как и в других отраслях знания, существует необходимость использовать специфические логические средства для отражения разнообразных по своей природе отношений.

Исследования, проведенные в логике за последний период, убеждают в том, что закономерности объективного мира могут быть значительно полнее и всесторонне охарактеризованы, если использовать логику отношений. Об этом пишет, например, в своих работах Д. П. Горский [1]: «...нельзя суждения о равенстве, о количественных и порядковых соотношениях между предметами, пространственных и временны́х отношениях между ними истолковывать во всех случаях как атрибутивные суждения или как суждения включения в класс», например, такое понятие, как понятие «равенства», в одном случае может характеризовать свойства, в другом — отношения. Само понятие отношений постигается на различных уровнях. К нему возможен различный подход в зависимости от того, какой аспект имеется в виду.

1. Отношения обладают свойствами, которые можно классифицировать и исследовать самостоятельно.

2. Отношение можно рассматривать в логическом плане как «вещь», т. е. нерасчлененный объект, который обладает свойствами и может иметь отношение к другим объектам. Получается иерархия типа «свойства отношений» и «отношения между отношениями».

3. Наконец, следует учитывать, что отношение можно рассматривать как средство, при помощи которого образуется связь элементов, составляющих вещь. Это, так

---

[1] Д. П. Горский. Отношения, их логические свойства и их значение в логике. Уч. зап. МГУ, вып. 169, 1954.

сказать, «функциональный» подход к исследованию понятия отношений. Гипертрофирование этой функции, отвлечение ее от всех других свойств отношений и главным образом игнорирование связи между понятием «отношений», «свойств» и «вещей» характерно для операционализма.

Следовательно, понятие отношений может быть исследовано в различных аспектах, и в различных сферах знаний имеются свои специфические особенности и трудности при исследовании отношений. Так, например, в области экспериментальной физики исследователи имеют дело в основном с событиями, изучают отношения между событиями, поэтому здесь применяется логический метод, называемый событийным [1]. В сфере теоретической физики возникает необходимость замены событийного метода суждренческим. Объектом исследования являются не только сами факты, но и возможные оценки этих фактов, их интерпретации, суждения о них [2].

В ряде случаев может возникнуть потребность охарактеризовать и события и те оценки, которые могут быть даны событиям, если эти события рассматривать в различных условиях. Для такой синтетической, «комплексной» характеристики целесообразным оказывается использование идей многозначной логики.

Одна из особенностей многозначной логики заключается в том, что в ней делается попытка путем формального языка охарактеризовать те связи и зависимости, которые существуют между объектом, его свойствами и условиями, в которых эти свойства проявляются. В многозначной логике используется аппарат для характеристики не только различных объектов, но и различных ситуаций, различных зависимостей и суждений об этих зависимостях.

С этой точки зрения многозначная логика оказывается координированной с разделом логики, называемым логикой связей [3]. С помощью категории «связь» осуществляется характеристика особой формы отношений объектов.

Г. Н. Поваров. Событийный и суждренческий аспекты в связи с логическими задачами техники. Сб. «Применение логики в науке и технике». Изд-во АН СССР, 1960.

Е. Вигнер. События, законы природы, принципы инвариантности. УФН, т. 85, 1965, стр. 727. [3]

А. А. Зиновьев. Логическое строение знаний о связях. Логические исследования. Изд-во АН СССР, 1959. [1]

В терминах логики связей знания классифицируются с точки зрения полипредметности и полиситуационности. Это значит, что в логике связей рассматривается, с одной стороны, множество объектов и отношение между ними, а с другой стороны — множество ситуаций, в которых выявляются возможные различные по своей природе отношения между объектами. Построение знаний осуществляется путем суммирования сведений, получаемых относительно отношений между объектами, фиксирующих объекты в различных ситуациях.

При этом важно отметить тот факт, что далеко не всякое суммирование знаний дает в результате знания о связях.

Необходимы дополнительные условия, которые могут быть сформулированы следующим образом: «Существует набор 1, значит, существует набор 2». Отличие одного набора от другого заключается в том, что характеристика, даваемая отношениям между объектами в одной ситуации, будет заведомо противоположной (по крайней мере для одного объекта) в другом наборе. Эта контрастность, противоположность является крайним случаем выражения того обстоятельства, которое было сформулировано выше. Имеется в виду, что в различных ситуациях могут выявляться различные отношения. Предельными случаями будут такие, когда просматривается не весь спектр возможных отношений, а только предельные, крайние, противоположные. Такое рассмотрение дает возможность предвидения. Если в одной ситуации выявляется данное свойство, то в другой будет выявляться заведомо противоположное.

Исходя из тех представлений, которые выработаны в учении о связях, можно дать более строгую и формально точную характеристику содержания понятия «одновременности». При этом необходимо рассмотреть подробнее природу логических трудностей, которые испытывают физики при анализе взаимодействий между системами.

Предположим, что в одной и другой системах события соотносятся с показаниями часов. Как логически осуществлять это исследование? Отвлечься от содержания процессов внутри систем и взять какую-то третью систему, в которую поместить две первые, мы не можем, так как нас интересует вопрос о «соотнесении» процессов, происходящих в одной и другой системах. Взять одну систему за «основную», а другую рассматривать с точки зрения этой основной, привилегированной системы тоже неправильно, так как они равноправны. Следовательно, остается один путь — исследовать «отношения между отношениями», хотя логический аппарат традиционной логики для решения подобного рода задач в должной степени не приспособлен.

Физики естественно при этом испытывают значительные трудности. И дело не только в постановке новых экспериментов или в обращении к «здравому смыслу», а просто в необходимости дальнейшей разработки логики отношений, в «стыковании» возможностей обычной и математической логики.

Понятие «отношений» является абстрактным, непосредственно не связанным с объектом, именно поэтому оно требует особых формализованных средств выражения.

Отношение выступает как всеобщность особого рода, не то, что присутствует в каждом объекте и может быть отвлечено от этих объектов, а то, что сохраняет свою связь с объектами, но эта связь получает свое гносеологическое, а не онтологическое самостоятельное значение.

Когда речь идет о времени, то здесь имеется определенная специфика. Особенность заключается в том, что обычно необходимость в исследовании отношений обусловлена относительностью свойств. Поэтому вещи и их свойства рассматриваются с учетом определенных условий. Когда же речь идет о свойствах времени, то оказывается, что в ряде случаев при помощи понятия времени характеризуются условия, поэтому получается зависимость как бы от «самого себя», особая «рефлективность отношений».

При переходе к этапу исследования отношений ученые осуществляют поиски наиболее эффективного использования соответствующих логических возможностей.

Одни концентрируют внимание на том обстоятельстве, что в пространственно-временны́х отношениях отражаются инвариантные связи. Инвариантность, устойчивость, сохранность, локализация — это все признаки вещи. Поэтому высказываются гипотетические предположения о том, что пространство-время — это континуум, природа которого такая же, как природа вещи. Естественно, что речь идет о «вещи» в некотором, особом смысле этого слова. Это вещь, так сказать, «второго порядка»; подобно тому как можно обнаружить «свойства у свойств», «отношения между отношениями», можно говорить о том, что система отношений (инвариантные отношения) — это вещь. Здесь проявляется ситуация, когда категория вещи расширяется до категории структуры [1]. Основанием для подобного рода суждений является то обстоятельство, что существует особого рода взаимодействие между гравитационным полем и пространственно-временнóй метрикой.

Рассматривать как вещь-структуру можно не только пространственно-временнóй каркас, но и отдельно временнóй каркас, т. е. всю совокупность событий какого-то множества с точки зрения только временнóй характеристики событий.

Для выявления содержания понятия одновременности важно выразить на языке логики связей отношения между системами, движущимися друг относительно друга со скоростью, близкой к скорости света.

Значительный интерес при этом представляет то обстоятельство, что поиски своеобразных логических средств для характеристики понятия одновременности были предприняты самим А. Эйнштейном.

Факты из истории физики свидетельствуют о том, что Эйнштейн глубоко верил в наличие адекватных логических средств для выражения инвариантов в сложных иерархических видах зависимостей. Логика анализа такого многопланового, сложного понятия, как «одновременность», осуществлялась Эйнштейном следующим образом. Он высказал суждение о возможности существования единой, обобщенной характеристики тех отношений, которые имеют место между системами, учитывая вместе с тем, что каждая система, в свою очередь, является сложным объектом.

Именно поэтому Эйнштейн считал целесообразным ввести понятие о «сверхнаблюдателе». Для сверхнаблюдателя через относительные эффекты, поддающиеся оценке наблюдателей, связанных с определенными системами (отношения между которыми являются объектом изучения), проявлялось бы содержание абсолютных более общих отношений [2].

В современной действительности суждения А. Эйнштейна следует оценить как попытку при помощи обычной

---

[1] Н. Ф. Овчинников. Принципы сохранения. «Наука», 1966, стр. 129.

[2] Gen. Vollemin. Introduction a'la d'Einstein. Paris, 1923.

логики раскрыть содержание понятия, относящегося явно к логике многозначной [1]. Действительно, в понятии «одновременность» отражается и сложное суждение, так как делается вывод на основании сопоставления более простых суждений.

Использование опытных данных оказывается нетривиальным. Из того обстоятельства, что события являются одновременными в одной системе, не следует делать вывод, что они будут одновременными и в другой. Вывод по аналогии, индуктивная логика здесь оказываются неприменимыми.

Для того чтобы раскрыть содержание понятия «одновременность», следует в центр внимания поставить не событие, факт, а логическую категорию «отношение» и даже более точно — «отношение между отношениями».

Вводя представление о «сверхнаблюдателе», Эйнштейн утверждал тем самым возможность отражения иерархии в отношениях.

Понятие «одновременность» следует классифицировать и как полипредметное и как полиситуационное. События, одновременные в одной системе [обозначим эту ситуацию (Pa)], могут быть неодновременными в другой системе [что соответственно будет обозначено как $(-Pa)$]; следовательно, эти два вида знаний нельзя отнести к одной ситуации (по определению).

Выше было отмечено, что в логике связей формальному выражению поддаются такие отношения, которые меняются на противоположные в другой ситуации. Признаки: «одновременные» и «неодновременные» можно рассматривать как «обратные» или своего рода «симметричные». Если бы речь шла о характеристике целого спектра возможностей, а не двух противоположных ситуаций, то на данном этапе развития логики связей существовали бы трудности в формальном выражении множества возможных ситуаций.

Поэтому, когда речь идет об анализе понятия «одновременность» в плане логики — это попытка выразить содержание комплексного понятия многозначной логики при помощи обыденных понятий, что несомненно сопряжено с большими трудностями.

---

[1] А. А. Зиновьев. Философские проблемы многозначной логики. Изд-во АН СССР, 1960.

ИЗ ДИСКУССИЙ НА СОЛЬВЕЕВСКОМ КОНГРЕССЕ 27 — 31 ОКТЯБРЯ 1913 г. В БРЮССЕЛЕ[1]

По докладу Дж. Дж. Томсона «Структура атома»

. . . .

Э й н ш т е й н.— По «теории накопления» фотоэлектрического эффекта приходится допустить, что атому, сразу после эмиссии электрона, необходимо некоторое время до того, как он сможет испустить второй. Итак, если было бы возможно изъять из пространства, через которое проходит излучение, атомы, испустившие электроны, и собрать их в другое пространство, вещество, накопленное в этом пространстве, должно было бы проявить меньшую фотоэлектрическую чувствительность. Но подобное накопление в принципе возможно (в газе) под действием электрического поля, отбрасывающего атомы сразу после испускания ими электрона.

. . . .

Л о р е н ц.— Трудно представить себе способ, каким будет удаляться электрон из трубки, придуманной Томсоном, через ограничивающую ее поверхность. Это перемещение мне кажется вряд ли возможным, если частица подвержена лишь притягивающей и отталкивающей силам, как принимается в настоящее время, и если необходим известный резонанс для сообщения электрону требуемой скорости.

После смещения электрона в радиальном направлении возникнет результирующая сила, стремящаяся возвратить его в положение равновесия, и бесконечно малые колебания в этом направлении будут обладать определенной собственной частотой. Но бесконечно малое смещение, перпендикулярное радиусу сферы, не возбудит никакой

[1] Из книги «La structure de la materie». Paris, Gauthier-Villars, 1921.

квазиупругой силы. Из этого следует, что прогрессивное нарастание энергии электрона под действием непрерывной серии волн может происходить лишь в том случае, когда эти волны стремятся сдвинуть частицу в радиальном направлении.

Томсон уже отмечал, что даже при таком направлении эффект резонанса неизбежно ограничен тем обстоятельством, что при больших смещениях результирующая сила перестает быть пропорциональной смещению, в силу чего колебания перестают быть простыми и не имеют более постоянной частоты.

Я хотел бы еще указать на другую трудность.

В обозначениях Томсона, потенциальная энергия (ее можно полагать равной нулю на бесконечности) имеет величину

$$\frac{Ce^2}{2a^2}-\frac{Ae}{a}=-\frac{Ae}{2a}$$

в положении равновесия и величину

$$+\frac{Ae}{2a}$$

вне конуса, на равном расстоянии от центра. Чтобы электрон мог пройти сквозь поверхность конуса, он должен получить скорость, соответствующую кинетической энергии Ae/a. Но эта скорость не может быть достигнута при радиальных колебаниях, ибо величины, которые я только что написал, показывают, что электрон будет удаляться в н у т р и к о н у с а до бесконечности, как только он приобретет скорость, соответствующую вдвое меньшей энергии $Ae/2a$. Впрочем, сразу видно, что необходимая работа для прохождения электрона через трубчатую поверхность равна той, которая необходима, чтобы перенести его на бесконечность внутри конуса и возвратить затем на первоначальное расстояние от центра, в область, где действует лишь отталкивающая сила. Последнее перемещение требует положительной работы, и работа, соответствующая первому перемещению, должна, следовательно, быть меньше энергии, необходимой электрону для прохождения через поверхность трубки.

Можно попробовать обойти эту трудность введением магнитных сил, изменяющих непрерывно направление движения, но надо еще доказать, что в этих новых условиях электрон действительно может приобрести ту скорость, которую ему приписывает Томсон.

Впрочем, предлагаемая гипотеза вызывает другое возражение, более общее. Можно считать доказанным, что модель, в которой все происходит по законам обычной механики, приводит к формуле Релея для черного излучения. Так как модель Томсона не содержит ничего несовместимого с правилами механики, кажется весьма сомнительным, чтобы можно было вывести из нее правильный закон излучения [1].

. . . .

По докладу Лауэ
«Интерференция рентгеновских лучей»

Лоренц.— Полагаю, нет надобности говорить о кажущемся отражении на кристаллографических плоскостях и что вполне можно рассматривать явления, как следствие реального отражения.

Примем, что молекулы расположены в узлах сетки Браве, стороны a, b, c которой направлены по α, β, γ. Тогда можно переходить от неподвижной молекулы O к любой другой P через m шагов, равных a, в направлении α, n шагов, равных b, в направлении β и p шагов, равных c, в направлении γ; m, n и p — целые числа, определяющие положение молекулы P относительно O.

Пусть L — исходная точка лучей; рассмотрим состояние колебаний в точках A экрана, при очень больших расстояниях этих точек до кристалла по сравнению с размерами последнего. Поскольку каждая молекула, на которую падают лучи, становится центром колебаний, вибрация, исходящая из L, может достигнуть A, пройдя через каждую из молекул. Однако фаза колебания, приходящего в A, меняется в зависимости от положения рассматриваемой молекулы. Обозначая через s_1 разницу фазы, выраженную в длинах волны, возникающую из-за смещения a, и через s_2 и s_3 — возникающие из-за смещений b и c, получим разницу фаз

$$ms_1 + ns_2 + ps_3$$

между колебаниями, обязанными молекулам O и P.

---

[1] См. «La theorie du ragonnement et les quanta» (Rapports et discussions du premier Conseil de Physique. Paris, 1912, p. 121—123).

Но согласно взглядам Лауэ, для каждой точки A, где имеется максимум, s_1, s_2 и s_3 суть целые числа. Из этого следует, что, выбрав один из максимумов, можно удовлетворить уравнению

$$ms_1 + ns_2 + ps_3 = 0$$

бесчисленным множеством целых чисел m, n и p. Очевидно, этим определяются молекулы P, расположенные все в одной плоскости, направление которой зависит от положений L и A. Для каждой из них сумма расстояний до L и A имеет одинаковое значение, и можно сказать, что этот слой молекул отражает лучи к точке A. В самом деле, сущность отражения зеркалом заключается именно в равенстве фаз колебаний, достигающих освещенной точки от различных элементов поверхности.

. . . .

Лоренц отмечает, что, строго говоря, выражение (1a) Лауэ (p. 77), хотя и показывает положение максимумов, не представляет наблюдаемые интенсивности. Это выражение приводит к значениям максимумов, пропорциональным $M_1^2 M_2^2 M_3^2$, т. е. квадрату числа участвующих молекул, тогда как наблюдаемая интенсивность пропорциональна самому числу.

Вопрос аналогичен тому, который имеется в оптике в случае дифракции решеткой. Пусть n — число штрихов и предположим, что падающие лучи параллельны между собой и свет, после дифракции, попадает на экран, расположенный на большом расстоянии. Для одного из максимумов интенсивность в середине, измеренная энергией на единицу площади, пропорциональна n^2. Но, согласно хорошо известной теореме, ширина максимума обратно пропорциональна n. Итак, легко понять, что вычисление полной интенсивности приводит к значению, просто пропорциональному n.

Заметим, что угловая ширина выражается через λ/l, где λ — длина волны и l — ширина решетки. Когда это отношение очень мало, можно наблюдать лишь полную интенсивность. Это именно случай экспериментов с рентгеновскими лучами

. . . .

Зоммерфельд.— Наблюдения, которыми мы располагаем в настоящее время, еще не позволяют решить вопрос об энергии при абсолютном нуле, как, по-видимому, и показывает предварительное исследование.

Эйнштейн. — Имеются веские возражения против гипотезы энергии, заключающейся в упругих колебаниях при абсолютном нуле. В самом деле, если тепловая энергия упругих колебаний стремится не к нулю, а к некоторой конечной положительной величине по мере понижения температуры, следует ожидать, что все зависящие от температуры свойства твердых тел должны показывать аналогичную тенденцию, т. е. стремиться к постоянным и конечным значениям при низкой температуре. Но этому противоречит крупное открытие Камерлинг-Оннеса, установившего, что чистые металлы, при приближении к абсолютному нулю, становятся «сверхпроводящими».

. . . .

Эйнштейн. — Если хотим для резонатора Планка ввести энергию при абсолютном нуле, то не можем, на мой взгляд, допустить, что в твердом теле эта энергия заключается в упругих колебаниях в смысле Дебая. При такой точке зрения, против которой имеются, как я уже отмечал, веские возражения, неизбежно надо приписать этой энергии влияние на точки интерференции Лауэ.

Я должен также по этому поводу заметить, что аргументы, которые я приводил вместе со Штерном в пользу наличия энергии при абсолютном нуле, не рассматриваются более мною как приемлемые. Развивая приведенные нами соображения по поводу закона излучения Планка, я пришел к выводу, что этот путь, основанный на гипотезе энергии при нулевой температуре, приводит к противоречиям.

. . . .

Эйнштейн (отвечая на вопрос Нернста). — Очевидно, я должен стать на точку зрения, что соображения, приведшие к формуле для водорода, теряют свое обоснование.

Лоренц. — Когда Планк впервые пришел к концепции энергии при абсолютном нуле, речь шла о колебании настоящих осцилляторов. Но в современной теории удельной теплоемкости твердых тел атомы играют ту же роль, что осцилляторы Планка в теории излучения. Следовательно, при такой концепции энергия при абсолютном нуле заключалась бы в действительном сдвиге атомов с их положений равновесия и могла бы заметно влиять на интерференционные явления рентгеновских лучей.

З о м м е р ф е л ь д.— Мне кажется, что в случае опытов с обманкой я могу показать, что на фотографии имеются все точки, которые могут существовать в силу протяженности первичного излучения и в силу теплового движения, при условии допущения надлежащих гипотез о структуре обманки. Поэтому мне кажется, что нет места для закона кратных отношений между имеющимися длинами волн, и я должен рассматривать целые численные отношения, полученные Лауэ, как случайные, тем более, что длины волн, вычисленные по теории Лауэ, не точно удовлетворяют этим отношениям.

Что касается функции ψ Лауэ, я должен, очевидно, согласиться, по аналогии с решеткой со штрихами, что нужно ввести эту функцию в интересах общности и что можно также в нее включить влияние совместного действия нескольких решеток. Но мне кажется, что, поскольку она медленно меняется, эта функция оказывает малое влияние на интенсивность пятен в случае простой решетки; узлы решетки могут практически рассматриваться как простые диполи, как это делается при оценке диффузного излучения. Интерференционные явления сложных решеток уже подробно рассмотрены Брэггом. Я должен к этому вернуться в случае обманки. Не следует рекомендовать, по-видимому, включать их в общем случае в неизвестную ψ.

Тепловое движение имеет следствием, как можно заключить из теории Дебая, что плоскости со слишком редкими точками не отражают или, иначе говоря, что не могут встречаться пятна со слишком высокими порядковыми номерами h_1, h_2, h_3. Все же нельзя сказать, что пятна тем более интенсивны, чем меньше их порядковые номера [1]. Действительно, если для некоторого значения $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$ (лишь эта комбинация порядковых номеров важна) показатель коэффициента Дебая мал для данной темпера-

[1] Примечание во время корректуры (1914 г.): То, что здесь сказано, относится лишь к тепловому эффекту. Коэффициент чувствительности, который тем временем указал Лоренц (ср. D e b y e, Ann. d. Phys., 43, 1914, p. 93), благоприятствует, наоборот, пятнам малых номеров при всех обстоятельствах.

туры, то тепловой эффект не имеет значения; для пятна, $h_2^1 + h_2^2 + h_3^2$ которого еще меньше, тепловой эффект также меньше, так что пятно не может быть более интенсивным. Для интенсивности пятен (присутствующих в силу теплового движения) решающим скорее является распределение интенсивности в первичном спектре лучей X.

Л о р е н ц возвращается к расчету интенсивностей. Чтобы рассчитать сложение колебаний, соединяющихся в определенной точке, можно комбинировать молекулы в любом порядке. Можно, например, ограничиться сначала рядом частиц, расположенных в направлении падающих лучей, и затем рассматривать расширение системы в направлениях, перпендикулярных лучам. Но, по-видимому, лучше начать с отражающих слоев, имеющих направление кристаллографических плоскостей. Это позволяет освободиться от гипотезы, что эмитирующая точка L и рассматриваемая точка Q экрана находятся на бесконечных расстояниях. Пусть при любых положениях L и Q, U — отражающая плоскость, A — какая-то точка этой плоскости, $l = LA + AQ$ и A_0 — положение A, при котором l является минимумом l_0; A_0 — то, что можно назвать т о ч к о й р е г у л я р н о г о о т р а ж е н и я.

Пока разница $l - l_0$ очень мала по сравнению с длинами LA_0 и A_0Q, линии $l = \text{const}$ в плоскости U суть эллипсы с центром A_0, и можно дать себе отчет о разных фазах в Q, рассматривая эллипсы, соответствующие значениям $l = l_0 + {}^1/_2\ \lambda,\ l_0 + \lambda,\ l_0 + {}^3/_2\ \lambda \ldots$, напоминающие нам зоны Френеля. Результирующая интенсивность может быть точно рассчитана хорошо известным способом, указанным Кирхгофом [1]. Найдем, что можно считать ее обязанной центральной части области, ограниченной первым эллипсом, и что имеется разница фазы ${}^1/_4\ \lambda$ между результирующими колебаниями и теми, которые имеет отраженный луч в точке A_0.

Правда, в формулах Кирхгофа содержатся интегралы вместо сумм, о которых идет речь в нашем случае, но ими все же можно пользоваться, когда молекулярные расстояния очень малы по сравнению с размерами эллипсов.

---

[1] K i r c h h o f f. Zur Theorie der Lichtstrahlen (Ann. d. Phys. u. Chem., 17, 1883, p. 663).

Положив $LA_0 = a$, $A_0Q = b$ и обозначив через θ угол падения в точке A_0, имеем для полуосей эллипса $l = l_0 + {}^1/_2\lambda$

$$\sqrt{\frac{\lambda ab}{a+b}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\cos\theta}\sqrt{\frac{\lambda ab}{a+b}}.$$

При $\lambda = 10^{-9}$ *см*, $a = b = 50$ *см* эти длины становятся

$$1{,}6\cdot 10^{-4} \text{ см и } \frac{1{,}6\cdot 10^{-4}}{\cos\theta} \text{ см.}$$

Итак, видно, что размеры эллипсов намного больше молекулярных расстояний, но что, с другой стороны, лишь малая протяженность отражающей плоскости может считаться эффективной.

Следовательно, условия намного отличаются от тех, которые имелись бы, если бы L и Q находились на бесконечном расстоянии.

Можно теперь провести через кристалл ряд эквидистантных плоскостей, параллельных той, которую мы рассматривали, так что каждая молекула окажется в одной из этих плоскостей. Сложение оказываемых ими действий в точке Q не представляет трудности, так как амплитуда колебания и разница фазы двух последующих колебаний остаются существенно постоянными во всем ряду.

Наконец, чтобы закончить расчет, нужно учесть протяженность источника лучей и различные длины волн в падающем пучке.

Делая эти замечания, я ни в малейшей степени не хочу подвергать сомнению важный результат, к которому пришел Дебай в одном из своих последних исследований, а именно, что тепловое движение молекул никак не уменьшает четкость пятен. Дебай ясно показал, что распределение интенсивности в максимумах не нарушается этим движением, единственным эффектом которого является увеличение общей интенсивности фона, на котором выделяются максимумы. Его заключение не зависит от деталей, которые можно узнать из приведенных расчетов.

Следует добавить, что, если удовлетвориться определением общей интенсивности максимума, можно упростить задачу, полагая точку Q на бесконечности; ясно, что полная энергия максимума не изменяется от положения экрана.

По докладу Брэгга «Отражение X-лучей и спектрометр для X-лучей»

Зоммерфельд.— О фотограммах четвертого и третьего порядка симметрии обманки и спектре рентгеновского излучения.

Чтобы дополнить то, что я заметил во время дискуссии, я хотел бы, опираясь на некоторые фигуры, доказать присутствие всех пятен интерференций, возможных в силу границ первичного спектра, структуры обманки и теплового движения атомов. Для этого основываюсь, главным образом, на блестящих экспериментальных работах У. Г. Брэгга и замечательных теоретических исследованиях его сына У. А. Брэгга, которым мы обязаны, кроме всего прочего, знанием структуры обманки.

На оси абсцисс мы отметили на наших рисунках $2a/\lambda$, т. е. двойное значение постоянной решетки, деленное на длину волны. Легко вывести из фундаментальных формул интерференционной теории Лауэ, что для четвертого или для третьего порядков симметрии

$$\frac{2a}{\lambda}=\frac{S}{h_3} \quad \text{или} \quad \frac{2a}{\lambda}=\sqrt{3}\,\frac{S}{s}, \tag{1}$$

где для краткости обозначено

$$S=h_1^2+h_2^2+h_3^2, \qquad s=h_1+h_2+h_3. \tag{2}$$

Возможные системы трех чисел h_1, h_2, h_3, как мы скоро увидим, теоретически определены некоторыми арифметическими условиями. Этим устанавливаются значения абсцисс на нашем рисунке. На оси ординат отмечены наблюдаемые интенсивности соответствующих интерференционных пятен, измеренные по качественной шкале, заимствованной мною у У. А. Брэгга. Рис. 1 относится к четвертому порядку симметрии, рис. 2 и рис. 3 — к третьему. Кривые *I*, *II*, *III* рис. 1 связывают точки, для которых $h_3=1$, или 2, или 3 для четвертого порядка. Кривые *I*, *III*, *V* рис. 2 соединяют точки, для которых $s=1$, $=3$, $=5$ для третьего порядка. Другие точки третьего порядка, для которых $s=2$ и 4, представлены на рис. 3; точки, для которых $s=4$, соединены кривой; изолированная

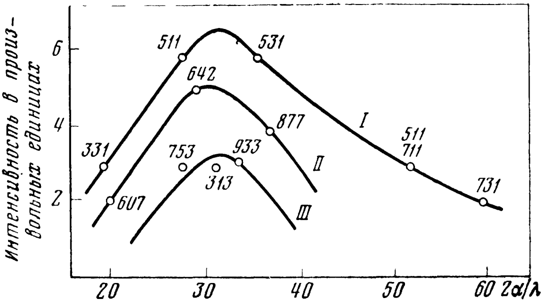

Рис 1

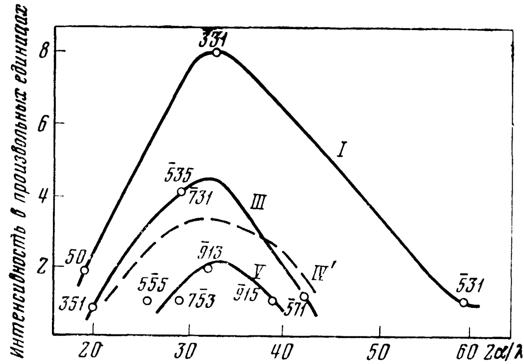

Рис. 2

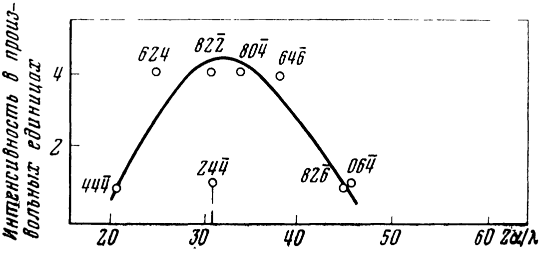

Рис. 3

точка $24\bar{4}$ относится к $s = 2$. Пунктирная линия $\dot{I}V$ рис. 2 выведена из кривой рис. 3 преобразованием, которое будет объяснено дальше.

Сразу констатируем: каждой длине волны, теоретически возможной (каждому вычисленному значению абсциссы), соответствует наблюдаемое интерференционное пятно (значение ординаты, представляющее определенную интенсивность).

Итак, все теоретически возможные интерференционные пятна действительно встречаются: не прибегая к неизвестной функции ψ Лауэ, можно дать себе отчет в том, что интерференционные фигуры являются полными. В случае четвертого порядка симметрии невозможны теоретически и реально не наблюдаются интерференционные пятна с $h_3 > 3$ или, в случае третьего порядка, с $s > 5$.

Затем, различные кривые $I, II, III...$ имеют аналогичный ход (лучше сказать: принимая во внимание присущую им неопределенность, можно считать их похожими и приближенно параллельными, особенно если их провести между точками, как это сделано для кривой III рис. 1, что кажется допустимым, учитывая чисто качественный характер измерения интенсивности). Мы будем рассматривать эти кривые в качестве картин распределения интенсивности в спектре первичного излучения. Вместе с Брэггом мы считаем, что это распределение дает меру интенсивности интерференционных пятен. В частности, максимум спектральной кривой соответствует во всех случаях одинаковому значению абсциссы. При выводе сначала этого значения абсциссы из кривых I, II, III рис. 1 находят значение $2a/\lambda$ между 27 и 35; сравнивая это с рис. 2, кривая I, видим, что самая интенсивная точка третьего порядка (порядковые номера $\bar{3}$, 3, 1, абсцисса $2a/\lambda = 33$) находится как раз в этом районе максимальной интенсивности. Впрочем, ввиду преобладающей интенсивности этой точки, шкала интенсивности на рис. 2 поднята на одну единицу выше, чем на рис. 1.

Тот факт, что кривые интенсивности I, II, III рис. 1 и I, III, V рис. 2 не идентичны между собой, а уменьшаются по величине, удовлетворительно объясняется поглощением в кристаллической пластинке. Теория Лауэ дает именно для угла θ между первичным и отклоненным лучом отношение

$$2(1-\cos\theta)=S\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2, \tag{3}$$

откуда, учитывая соотношение (1), получим для четвертого порядка

$$1-\cos\theta=h_3\frac{\lambda}{a}, \tag{4}$$

соответственно для третьего порядка

$$1-\cos\theta=\frac{s}{\sqrt{3}}\frac{\lambda}{a}.$$

Для одного и того же значения λ/a угол θ и, следовательно, пройденный отклоненным лучом путь в кристалле тем больше, чем больше h_3 или соответственно s. Итак, поглощение оказывает большее влияние на кривую *II*, чем на кривую *I*, больше на *III*, чем на *II*, и т. д.; из этого следует, что при равных значениях абсциссы, ординаты кривой *II* меньше ординат кривой *I* и т. д.

Можно, однако, показать, что некоторые точки о т к л о н я ю т с я п о р а з и т е л ь н ы м с п о с о б о м от регулярного хода нашего распределения спектральной интенсивности. На рис. 1 это точка 842 и особенно 802; последняя очень близка к максимуму интенсивности и должна бы иметь более высокую интенсивность; на рис. 3 точка 244, соответствующая $s=2$, заметно ниже, хотя находится близко к максимуму интенсивности. Исходя из измерения поглощения, следовало бы ожидать ее выше, рядом с вышерасположенной кривой, соответствующей $s=4$.

Затем мы констатируем, что все эти точки принадлежат порядковым номерам, сумма s которых имеет вид

$$s\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4).$$

Мы найдем весьма удовлетворительное объяснение этим исключительным случаям в структуре обманки, как она дана Брэггом.

Я должен теперь вкратце указать, по каким соображениям можно выбрать теоретически возможные длины волн или их порядковые номера, соответствующие h_1, h_2, h_3.

1. Границы спектра. — Основываясь на наших рисунках, т. е. апостериори, мы допустим, что первичное излучение содержит лишь длины волны, для которых

$$18 < \frac{2a}{\lambda} < 60. \tag{5}$$

В действительности, очевидно, граница не будет резкой ни со стороны коротких длин (60), ни со стороны длинных (18). Следовательно, имеется некоторый произвол в допущении определенных численных значений этих границ. Возьмем для примера четвертый порядок симметрии, и именно интерференционные точки этого порядка, для которых $h_3 = 1$. В силу (1), из (5) имеем для этих точек:

$$18 < S < 60 \quad \text{или} \quad 17 < h_1^2 + h_2^2 < 59. \tag{6}$$

2. Тепловое движение атомов. — Это движение вызывает, согласно Дебаю [1], ослабление интерференционных пятен в отношении e^{-M} или для высоких температур ($T > \theta$) и для регулярной системы [см. также (3)]:

$$M = \frac{6Nh^2}{\mu k\lambda^2} \frac{T}{\theta^2}(1 - \cos\theta) = \frac{3Nh^2}{\mu ka^2} \frac{T}{\theta^2} S, \tag{7}$$

N — число Лошмидта на молекулу; μ — молекулярный вес; θ — характеристическая температура; h, k — постоянные излучения.

Итак, в действительности влияние теплового движения определяется величиной $S = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$ так, что интерференционные точки со слишком высоким S гасятся тепловым движением.

Мы предположим также, что граница, очерченная тепловым движением, резка, хотя очевидно, что в действительности будет иметь место непрерывный переход между точками, не ослабленными тепловым движением, и теми, которые гасятся совершенно. Для оценки выберем

$$S < 100. \tag{8}$$

[1] Ann. d. Phys., 45, 1914, p. 49.

Это означает, что если мы примем для обманки $\theta = 200^\circ$, коэффициент ослабления e^{-M} будет не меньше $^1/_5$.

В нашем примере, где $h_3 = 1$ для четвертого порядка, условие (8) не действует, ибо оно заменяется более ограничительным условием $S < 60$, содержащимся в (6). Наоборот, в случае $h_3 = 2$ или $h_3 = 3$ условие (8) более ограничительно, поскольку из (5) и (1) выводится в качестве нижней границы спектра $S < 120$ или соответственно $S < 180$.

3. Решетка атомов цинка.— В своей первой публикации Лауэ замечает отсутствие среди других точек 493 и 251, длины волн которых представлены в других точках. Их порядковые номера являются смесями четных и нечетных чисел.

Но, согласно Брэггам, решетка атомов Zn в ZnS является кубической решеткой с «центрированными плоскостями», в которой каждый угол каждого куба и каждая середина грани заняты атомом Zn. В такой решетке могут появиться лишь интерференционные пятна, порядковые номера которых все четные или все нечетные (доказательство аналогично тому, которое будет приведено далее в пункте 5).

Итак, в нашем примере, поскольку $h_3 = 1$, необходимо, чтобы h_2 и h_1 были также нечетными. Поэтому условие (6) может быть удовлетворено лишь следующими шестью парами значений h_2 и h_1:

$$h_2 = 1,\ h_1 = 5 \text{ или } 7,$$

$$h_2 = 3,\ h_1 = 3, \text{ или } 5, \text{ или } 7,$$

$$h_2 = 5,\ h_1 = 5.$$

Это те шесть точек, которые представлены на кривой *I* (рис. 1). Случай $h_2 = 7$, $h_1 = 1$ опущен, так как он дает ту же точку, как и случай $h_2 = 1$, $h_1 = 7$ в первой строке.

4. Ограниченная величина пластинки.— Надо еще добавить простое условие, что при расположении примитивных экспериментов величина пластинки не позволяла фиксировать точки, для которых $\theta > \pi/4$. Но из уравнений (4) и (1) следует, что в случае четвертого порядка

$$1 - \cos\theta = \frac{2h_3^2}{S},$$

так что $\theta < \pi/4$ дает

$$\frac{S}{h_3^2} > 7. \tag{9}$$

Мы комбинируем это условие с (8), чтобы доказать, что для $h_3 > 3$ не существует интерференционных точек, так что на рис. 1 могли быть начерчены лишь кривые I, II и III. Действительно, при $h_3 = 4$ (9) дает уже $S > 112$, что противоречит (8).

5. Решетка атомов серы.— В ZnS, согласно Брэггам, решетка атомов S, как и решетка атомов Zn,— кубическая, с центрированными гранями, сдвинутая относительно решетки Zn на четверть диагонали куба, как в их модели алмаза, в которой обе решетки состоят из атомов С. В общем случае, если вторая решетка сдвинута относительно первой на ξ, η, ζ, то к амплитуде отклоненного луча, рассчитанной для первой решетки, добавляется коэффициент (который обозначим через ψ по Лауэ)

$$\psi = \left| 1 + Ae^{\frac{2\pi i}{\lambda}[\xi(\alpha-\alpha_0) + \eta(\beta-\beta_0) + \zeta(\gamma-\gamma_0)]} \right|,$$

где α, β, γ и α_0, β_0, γ_0 — направляющие косинусы отклоненного и первичного лучей. Между этими направляющими косинусами существуют основные отношения теории Лауэ:

$$\alpha - \alpha_0 = h_1 \frac{\lambda}{a}, \quad \beta - \beta_0 = h_2 \frac{\lambda}{a}, \quad \gamma - \gamma_0 = h_3 \frac{\lambda}{a}.$$

Итак, имеем также

$$\psi = \left| 1 + Ae^{\frac{2\pi i}{a}(h_1\xi + h_2\eta + h_3\zeta)} \right|. \tag{10}$$

Коэффициент A — мера отражательной способности (или рассеивающей способности) атомов второй решетки по сравнению с первой. Для алмаза (две идентичные решетки атомов С) имеем

$$A = 1, \quad \xi = \eta = \zeta = \frac{a}{4}.$$

следовательно, согласно (10),

$$\psi^2 = \left| 1 + e^{\frac{\pi i}{2}(h_1 + h_2 + h_3)} \right|^2 = 4\cos^2\frac{\pi s}{4}.$$

Как впервые заметил Эвальд, имеем

$$\begin{array}{lll} \text{для } s \equiv 0 \pmod 4 & \psi^2 = 4, \\ \quad s \equiv 1 & \psi^2 = 2, \\ \quad s \equiv 2 & \psi^2 = 0, \\ \quad s \equiv 3 & \psi^2 = 2. \end{array}$$

Для одинакового положения обеих решеток у ZnS имеем $A < 1$, ибо отражательная способность атомов S меньше, чем атомов Zn. В случае $s \equiv 2 \pmod 4$ будет, поэтому, неполное погашение, а в случае $s = 0 \pmod 4$ — неполное усиление. Во всех случаях оба эффекта сильно проявляются: на рис. 1 и 3 точки 802 и $24\bar{4}$, для которых $s \equiv 2 \pmod 4$, имеют, как мы видели, слишком слабую интенсивность. С другой стороны, точки рис. 3, соединенные кривой, для которых $s \equiv 0 \pmod 4$, относительно высоки. Если эту кривую уменьшить примерно в отношении 3 : 4, чтобы сделать ее сравнимой с кривыми рис. 2 [при $A = 1$ (алмаз) нужно, согласно значениям ψ^2, произвести уменьшение в отношении 1 : 2], найдем, что она хорошо согласуется в качестве кривой *IV* с кривыми рис. 2. Надо бы сделать подобную редукцию и с кривой *II* рис. 1. Чтобы закончить, еще два замечания.

а. Полярные оси обманки.— Структура обманки, данная Брэггами, заставляет предвидеть пироэлектричество. Действительно, из-за чередования Zn и S два конца третьих осей отличаются.

б. Абсолютная величина длины волны в максимуме распределения энергии. — Так как каждый куб a^3 в модели Брэгга содержит 4 атома Zn и 4 атома S, то из удельного и молекулярного веса ZnS вместо $a = 3{,}38 \cdot 10^{-8}$ по Лауэ получается

$$a = \sqrt[3]{4} \cdot 3{,}38 \cdot 10^{-8} = 5{,}35 \cdot 10^{-8}.$$

Так как для спектрального максимума мы нашли

$$\frac{2a}{\lambda} = 33,$$

получается

$$\lambda = 3 \cdot 10^{-9}.$$

По квантовой теории между длиной волны и напряжением V рентгеновской трубки имеется отношение

$$V\lambda = \frac{hc}{e}, \tag{11}$$

которое применим к длине волны, соответствующей максимуму интенсивности: $\lambda = 3 \cdot 10^{-9}$. Из (11) получаем

$$V = 40\,000 \text{ вольт},$$

что действительно равнялось среднему напряжению в первых экспериментах (измерение с помощью искрового микрометра в случае трубки аналогичной жесткости с возбуждением от электростатической машины).

(Дополнение при корректуре). Эта числовая связь с квантовой теорией мало надежна, так как очевидно, что наши рисунки не дают спектра рентгеновских лучей ни в трубке, ни в момент, когда они падают на кристалл; они дают спектр там, где находится фотографическая пластинка, т. е. после того как лучи прошли через кристаллическую пластинку. Но опыт показал, что в ZnS поглощение весьма велико, особенно в части длинных волн. Поэтому весьма вероятно, что максимум первичного спектра из-за поглощения сдвинут в сторону более коротких волн и соответствует в действительности длине волны $\lambda < 3 \cdot 10^{-9}$. Для сравнения проводятся эксперименты с алмазом (поглощение гораздо слабее).

Эвальд распространил обработку, сообщенную здесь, с лучшим результатом на другие эксперименты с ZnS (третьего порядка симметрии и асимметричные) и даст об этом сообщение в Annalen der Physik. В этих же Annalen будут приведены модификации к нашим спектральным кривым, необходимые согласно важному замечанию Лоренца [1].

. . . .

Зоммерфельд. — Число 100 для влияния теплоты, очевидно, несколько произвольно и было выбрано апостериори, так же как и числа для границ спектра; действительно, во всех случаях мы имеем дело не с резкими границами, а с постепенными переходами. Впрочем, число 100 относится не к двум кривым I, а в этом случае

[1] Ср. Debye. Ann. d. Phys., 43, 1914, p. 93.

заменено меньшим числом, соответствующим границе коротких волн спектра, так что, например, при замене числа 100 числом 200 не появилось бы новых точек на этих кривых, а лишь на кривых более высокого порядка.

. . . .

Э й н ш т е й н.— В случае радиоактивных реакций можно применить гипотезу квантов, чтобы попытаться установить баланс энергии. Когда в радиоактивном распаде появляется только одна частица β и лучи γ (монохроматичные), можно ожидать, например, следующее. Пусть E_1, $E_2, \ldots$, $E_n, \ldots$ — кинетические энергии β-лучей, имеющих разные скорости; $\nu_1, \ldots, \nu_2, \ldots$ — частоты γ-лучей; тогда различные β- и γ-лучи могут быть связаны между собой так, что $E_n + h\nu_n =$ радиоактивной преобразовательной энергии, т. е. одинаковой сумме для всех значений n.

. . . .

По докладу Барлоу и Попа и Бриллюэна «Структура кристаллов и анизотропия молекул»

Л о р е н ц.— Барлоу и Поп (стр. 147) высказываю геометрическое правило, определяющее размещение молекул. Идет ли здесь речь о математической теореме, доказанной на основе гипотезы притягивающих и отталкивающих сил?

. . . .

Л о р е н ц спрашивает, можно ли интерпретировать пропорциональность объемов сфер и валентностей как функцию притягивающих и отталкивающих сил.

. . . .

Л о р е н ц.— Барлоу рассматривает сферу, принадлежащую атому, как область, в которой этот атом оказывает преобладающее действие. Этот вопрос отличается от вопроса взаимодействия атомов, определяющего их размещение.

. . . .

Л о р е н ц.— Если я правильно понял, то в теории Барлоу и Попа нет ничего, что определяло бы абсолютную величину сфер. Итак, в настоящем своем виде теория не может давать какое-либо указание об изменениях плотности, вызываемых внешними воздействиями.

. . . .

Л о р е н ц.— Разве в модели алмаза, предложенной Барлоу и Попом, видны четыре валентности атома углерода?

. . . .

По докладу Грюнейзена «Молекулярная теория твердых тел»

Л о р е н ц.— Мне кажется, что имеются веские доводы допустить реальное тепловое движение электронов. Так, к примеру, если пробная частица находится в поле черного излучения, она несомненно подвергнута броуновскому движению, интенсивность которого возрастает с температурой [1], и естественно приписать свободному электрону в металле ту же кинетическую энергию, которую могло бы ему сообщить излучение.

Вин отрицал существование движения, зависящего от температуры потому, что применение закона равного распределения привело бы к формуле Релея для излучения. Но это же рассуждение можно применить к ионам электролитического раствора. Их движение также должно вызывать излучение, для которого получится формула Релея, если придерживаться правил классической механики. Однако, учитывая изящные исследования Нернста и Планка о явлениях в электролитах, ни один физик не станет сомневаться в существовании теплового движения ионов.

Мне думается, что в формуле электрической проводимости

$$\sigma = \frac{e^2 LN}{2mu}$$

скорость u должна рассматриваться, как зависящая от температуры, и разрешение трудностей нужно искать в соображениях о числе N свободных электронов и средней длине L их свободного пробега. Эта длина определяется столкновениями с атомами, механизм которых не известен. Здесь можно бы применить гипотезу квантов.

. . . .

[1] Однако в значении $^3/_2\ k'T$ для кинетической энергии электрона постоянная k' значительно ниже постоянной k Планка. См.: Теория излучения и кванты (Первый Сольвеевский конгресс). В недавней работе (Over Brownsche bewegingen in het stralingsveld, etc., Leiden, 1913). M. A. D. Fokker находит примерно $k' = 1/24\ k$.

Л о р е н ц.— Изящные результаты, полученные Грюнейзеном, зависят, частично, от формулы для потенциальной энергии (р. 261)

$$F(v) = -\frac{A}{v} + \frac{B}{v^m},$$

в которой различие степеней v приписывается тому, что притягивающие и отталкивающие силы меняются различно с изменением расстояния r. Легко видеть, что получится потенциальная энергия, обратно пропорциональная v^m, допуская силы, пропорциональные $\frac{1}{r^{3m+1}}$, но известно также, что член $-A/v$ никак не влечет закона $1/r^4$ для молекулярных притяжений. По теории Ван-дер-Ваальса этот член получается из одного допущения, что эти притяжения действуют при очень малых расстояниях.

Думаю, из этого примера можно заключить, что определенные законы молекулярных сил должны допускаться лишь с некоторой оговоркой. Не лучше ли избегать, по возможности, специальных гипотез о законе сил и виде функции $F(v)$? Поскольку в применениях речь идет лишь о малых изменениях объема, все, вероятно, будет зависеть от первой и второй производных функций, и можно будет рассматривать прежде всего, что покажут явления относительно их значений.

. . . .

Э й н ш т е й н.— Я вполне это допускаю.

. . . .

Л о р е н ц.— Вот каким образом я думал доказать теорему Нернста до наших дискуссий, два года назад [1]. Излагая ее, буду пользоваться наиболее привычными мне обозначениями, но это ничего не меняет по существу.

Я рассматриваю две «конденсированные» твердые фазы, например 1 и 2, одного вещества и предполагаю, что даже при абсолютном нуле одна из них может преобразоваться в другую и что из-за разных плотностей может иметь место равновесие при определенном давлении. Для конкретности воображаю переходный слой между фазами, в котором размещение молекул постепенно переходит от свойственного первой фазе к тому, которое существует во второй.

[1] См.: Теория излучения и кванты (Первый Сольвеевский конгресс).

Тогда, изменяя общий объем, можно произвольно перемещать этот слой.

При отсутствии всякого теплового движения равновесие будет чисто статическим, и принцип виртуальных скоростей приводит к условию

$$U_1 + pv_1 = U_2 + pv_2,$$

в котором U и v представляют энергию и объем единицы массы.

Предположим теперь, что температура чуть выше нуля. Возникнет тепловое движение и предыдущее равенство уже не будет верным. Тем не менее можно писать

$$U_1 + pv_1 = U_2 + pv_2 + \omega,$$

если ω означает поправку, зависящую от теплового движения и стремящуюся к нулю, когда это движение исчезает.

Согласно современной теории удельной теплоемкости, кинетическая энергия E падает вблизи абсолютного нуля с такой скоростью, что отношение E/T стремится к 0. Я предполагаю, что величина ω уменьшается с той же скоростью, и, следовательно, для $T = 0$

$$\lim \frac{\omega}{T} = 0.$$

Это достаточно для вывода теоремы Нернста. Действительно, правильным уравнением равновесия является, как известно,

$$U_1 + pv_1 - TS_1 = U_2 + pv_2 - TS_2,$$

где S — энтропия на единицу массы. Если вычесть это уравнение из нашей второй формулы и затем, после деления на T, перейти к пределу $T = 0$, то

$$\lim (S_1 - S_2) = 0,$$

что и является теоремой, о которой идет речь.

К сожалению, можно поставить под сомнение гипотезу

$$\lim \frac{\omega}{T} = 0,$$

от которой целиком зависит это доказательство. Если энергия сосредоточена в конечных квантах, возможно, что действие слабой кинетической энергии на равновесие определяется скорее величиной квантов, чем их числом и, следовательно, что член ω, выражающий это действие, уменьшается медленнее, чем мы только что предположили.

Это, в несколько иных словах, замечание, сделанное Эйнштейном во время дискуссии в 1911 г.

Добавлю, что последнее доказательство теоремы Нернста, данное им на основе постулата о невозможности достижения абсолютного нуля конечными изменениями, свободно, насколько мне кажется, от всякого возражения.

Эйнштейн.— Вопрос, который мы должны рассматривать в первую очередь, следующий. Теперь, когда экспериментальные исследования Нернста и его учеников убедительно показали, что удельная теплоемкость c конденсированных систем при низких температурах стремится к нулю быстрее, чем сама температура T, возникает вопрос, доказана ли этим теорема Нернста. На Первом Сольвеевском конгрессе мы видели, что мнения по этому вопросу разделились. Сам Нернст держался точки зрения, что его теорема могла быть выведена термодинамически из вырождения удельных теплоемкостей при низких температурах; позже он пытался обосновать свою концепцию на термодинамическое исследование, которое — хотя, по моему мнению, оно не достигло цели — имеет, тем не менее, весьма важное значение для ясного понимания сущности теоремы.

Нернст сначала хочет доказать невозможность существования адиабатического процесса, протекающего между конечными пределами, с помощью которого достижим абсолютный нуль. Действительно, при существовании подобных адиабатических процессов существовали бы циклы Карно, нижняя температура которых была бы нуль ($T_2 = 0$).

В нашем случае ($T_2 = 0$) хорошо известное уравнение $\frac{q_1}{T_1} = \frac{q_2}{T_2}$ требует исчезновения q_2. Следовательно, изотерма CD должна рассматриваться также как адиабата. Система могла бы ее пройти, не нуждаясь в резервуаре теплоты с температурой $T_2 = 0$. Итак, для цикла требовался бы лишь один резервуар теплоты с температурой $T = T_1$, теплота которого могла бы преобразоваться в работу,— что противоречило бы принципу Карно.

Нернст заключает отсюда, что адиабата типа BC не могла бы существовать.

Я сомневаюсь в доказательной силе этого рассуждения по следующей причине. По-моему, принципиально невозможно адиабатически пройти часть CD процесса. Действительно, любая необратимость, как бы она ни была мала, должна иметь следствием возврат системы сжатием из состояния C вдоль адиабаты в направлении B, а не в направлении D. Ибо, поскольку в природе нет процессов, в точности обратимых, сжатие нашей системы из состояния C абсолютно обратимо невозможно, всегда минимальные количества энергии преобразуются в хаотическую энергию (теплоту). Какими бы ни были малыми эти количества энергии, они несомненно существуют и заставляют систему покинуть ось $T = 0$ и следовать по адиабате CB. Итак, рассматриваемый цикл неосуществим в принципе.

Признавая, таким образом, что доказательство не убедительно, все же должны согласиться, что весьма неприятно для физика быть вынужденным допускать существование подобных адиабат. Мне кажется, что имеется гораздо лучший выход исходить, наоборот, из предположения о невозможности достижения абсолютного нуля конечным процессом; иначе говоря, возводя утверждение Нернста до ранга постулата. Таким образом, можно формулировать теорему Нернста весьма интуитивным образом, но, к сожалению, это опять приводит к следствиям, которые своим странным характером возбуждают недоверие.

Сначала из гипотезы отсутствия подобных адиабат выведем общее термодинамическое следствие. Рассмотрим систему, состояние которой определено абсолютной температурой T и произвольным параметром v. Для адиабатического процесса имеем

$$0 = dq = TdS = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\,dT + \frac{\partial S}{\partial v}\,dv\right).$$

Но из этого уравнения следует, что $T\,\dfrac{\partial S}{\partial T}$ — теплоемкость системы при постоянном v, так что мы можем придать уравнению этой адиабаты форму

$$\frac{\partial S}{\partial v} = -\,\frac{c}{T}\,\frac{dT}{dv}.$$

Но из эксперимента известно, что в пределе c/T исчезает, когда приближаемся к абсолютному нулю; тем более известно, что эта величина не стремится к бесконечно большим величинам. Для невозможности достижения абсолютного нуля рассматриваемым адиабатическим процессом необходимо чтобы dT/dv стремилось к нулю одновременно с T. Итак, мы видим из нашего уравнения, что при абсолютном нуле мы должны иметь

$$\frac{\partial S}{\partial v} = 0,$$

и, так как v — любой параметр системы, находим: когда теплоемкость системы исчезает не медленнее, чем T при приближении к абсолютному нулю, и нет адиабат, пересекающих ось T на конечном расстоянии, энтропия имеет одинаковое значение S для всех состояний системы при $T = 0$. Теорема Нернста, в формулировке Планка, применима поэтому не только к системам с химически однородными фазами, но и к любым смесям в конденсированном состоянии.

Заметим еще, что при таком подходе к теореме мало вероятно, чтобы она относилась лишь к конденсированным системам. Ибо зигзагообразное движение газовых молекул носит также квазиколебательный характер, так что вряд ли надо сомневаться, что удельная теплоемкость газа при постоянном объеме исчезает около абсолютного нуля таким же образом, как удельная теплоемкость конденсированных систем.

Если гипотеза Нернста о невозможности достижения абсолютного нуля конечными адиабатическими процессами подтвердится, мы окажемся перед одним из самых фундаментальных результатов теории теплоты.

Известно, что многие следствия, выведенные из этой теоремы, подтверждены удовлетворительным образом экспериментом. С другой стороны, уже отмечалось, что физическое чутье отказывается допустить существование (исключаемое теоремой) адиабат типа BC, приведенное на рис. 2.

Все же имеется теоретический аргумент, который и сегодня несколько настораживает нас относительно теоремы Нернста; тот самый аргумент, который побудил Планка ограничить теорему химически однородными телами. В выражении энтропии некоторых систем имеются члены, зависящие только от группировки веществ, а не от температуры, и особенно трудно представить себе, что эти члены исчезают при приближении к абсолютному нулю.

Пример: предположим, что в парциальном объеме v растворителя, занимающего общий объем v_0, мы имеем разбавленный раствор грамм-молекулы вещества. Тогда между энтропией системы и величиной парциального объема v имеется отношение

$$S = S_0 + R \log v.$$

Из члена $R \log v$ выводят хорошо известный закон осмотического давления; существование этого члена связано со степенью упорядочения, заключающегося в том, что все растворенные молекулы вместо случайного распределения во всем объеме v_2 находятся в его части v. Этот член не имеет ничего общего с энергетическими факторами (температура, удельная теплоемкость, молекулярные силы и т. д.), а зависит лишь от свойств упорядочения, относящихся к геометрической группировке. Поэтому трудно себе представить, как этот член может терять свое значение при низких температурах, и эта трудность не исчезает при тщательной ревизии термодинамических теорий разбавленных растворов Вант-Гоффа и Планка. Нелегко найти причину, из-за которой эти теории отказали бы при низких температурах.

Очевидно, нельзя практически наблюдать осмотические давления при температурах, достаточно низких, чтобы достоверно оказаться в термически анормальной области, где растворенное вещество имело бы значение средней кинетической энергии движения молекул, меньшее, чем подсчитанное статистической механикой. Но имеется вторая область явлений, где также проявляются разницы в энтропии, основанные лишь на изменении геометрической группировки,— это область парамагнитных явлений. Здесь ориентация молекул играет ту же роль, что положение центра тяжести в осмотических явлениях. Закон Кюри — Ланжевена также хорошо выражает сопротивление, оказываемое тепловым движением одинаковой ориентации молекул, как закон осмотического давления определяется сопротивлением, которое оказывает тепловое движение ограничению объема, которым располагает молекула в своем диффузном движении. Поэтому чрезвычайно важно знать, прекращается ли область применения закона Кюри — Ланжевена при низких температурах. Или, более точно, вопрос состоит в том, связан ли закон Кюри — Ланжевена со степенями свободы вращения, которые нормально (т. е. по статистической механике) участвуют в удельной теплоемкости. Экспериментальный ответ на этот вопрос покажет нам, по моему мнению, влечет ли степень геометрического упорядочения при абсолютном нуле за собой разницу в энтропии; если эксперименты дадут положительный результат, почти не останется повода для сомнений против теоремы Нернста.

. . . .

Л о р е н ц.— Считает ли Нернст в настоящее время свою теорию всеобщей, например, применимой к одноатомным газам? Строго говоря, никогда не следовало бы рассуждать о явлениях при достигнутом абсолютном нуле, а лишь о том, что имеет место при температуре чуть выше нуля. Затем надо переходить к пределу $T = 0$, принимая, в случае необходимости, меры предосторожности, требуемые математической строгостью.

ДИСКУССИЯ ПО ДОКЛАДУ ПЛАНКА «ПРОИЗВЕДЕННЫЕ КАУФМАНОМ ИЗМЕРЕНИЯ ОТКЛОНЕНИЯ β-ЛУЧЕЙ И ИХ ЗНАЧЕНИЕ ДЛЯ ДИНАМИКИ ЭЛЕКТРОНА» НА 78-м СОБРАНИИ НЕМЕЦКИХ ЕСТЕСТВОИСПЫТАТЕЛЕЙ И ВРАЧЕЙ В ШТУТГАРТЕ В СЕНТЯБРЕ 1906 г.[1]

К а у ф м а н. — Я хотел бы, как ближайший соучастник, для полноты добавить несколько слов. Прошу пустить по рядам вычерченные кривые, а также пять оригинальных пластинок, на которых увидите по две симметричные ветви того же вида, что и на рисунке. Что касается результатов, то имеется полное согласие между Планком и мною, и меня весьма радует, что совершенно иной расчет Планка привел к тождественным количественным результатам. Это указывает, что в моих вычислениях нет расчетных ошибок. Относительно заключения: из наблюдаемых фактов следует, что ни лоренцова теория, ни теория Абрагама с ними не согласуются. Это заключение твердо. Теория Лоренца согласуется еще хуже, чем теория Абрагама. Отклонения по теории Лоренца (10—12%) столь велики, что они нигде не могут объясняться погрешностями наблюдения. Итак, если нет принципиальной ошибки в наблюдениях, то лоренцова теория опровергается. При теории Абрагама отклонения составляют 3—5%; они также лежат за пределами ошибок наблюдения. Однако все еще мыслимо, что ошибки могут складываться так, чтобы дать подобное отклонение.

П л а н к. — Когда исправление теоретических величин, необходимое для полного объяснения наблюдений, лежит за пределами погрешностей измерений, то для меня ясно, что при его учете и внесении изменений сверх ошибок наблюдений можно подойти ближе к теории Лоренца, чем к теории Абрагама. Из голого факта, что отклонения от одной из теорий меньшие, не вытекает ее преимущество.

---

[1] Physikalische Zeitschrift, 7, N 21, 1906, 759—761.

Бухерер.— Я хотел бы вернуться к замечанию докладчика о том, что моя теория недостаточно развита, чтобы ее здесь обсуждать дальше. Я усиленно занимался ею и ее следствиями и пришел к выводу, что она не дает ничего более существенного, чем прежняя и позднейшая теории Лоренца. Можно выдвинуть возражение, что в теории дисперсии имеются трудности из-за электромагнитных масс; в остальных пунктах теория деформированного при постоянном объеме электрона и соответственно деформированной системы дают примерно то же самое, что и новая теория Лоренца. Я не могу сказать, какие следствия будет иметь распространение соображений Планка на мой электрон. Но я хочу указать на некоторые теоретические вопросы. Динамика электрона может проверяться не только отклонением лучей Беккереля. Абрагам уже указывал на необходимость приписывать электрону Лоренца особую внутреннюю энергию. Эта трудность мне кажется большей, чем отклонение измерений Кауфмана. Можно выдвинуть некоторые возражения против теории относительности Эйнштейна. Он переворачивает уравнения Максвелла, но упускает из виду, что некоторые предпосылки не выполняются, а именно — справедливость теоремы дивергенции электрической силы.

После того как я осознал, что существующие до сих пор теории, включая мою собственную, не отвечают требованиям, я поставил перед собой вопрос: можно ли достигнуть согласия с опытом, сохраняя уравнения Максвелла и на основе принципа равенства действия и противодействия. Это удается, когда в основу закладывают положение: пондеромоторная сила между двумя системами, находящимися в относительном равномерном движении друг к другу, является, с учетом знака, силой, рассчитанной по дифференциальным уравнениям Максвелла — Лоренца, оказываемой на систему, произвольно считаемую покоящейся. Конечно, при такой точке зрения отпадает понятие эфира; ибо, как только мы вводим относительные движения и связываем координатную систему с любым телом динамической системы, мы отказываемся от теории эфира. Я проследил следствия и пришел к некоторым выводам относительно измерений Кауфмана, которые хочу сообщить. Сначала пойдет речь о жестком электроне. На основании теории относительности приходим к заключению, что, если лучи Беккереля направлены не параллельно, а наклонно к конденсаторной пластинке, действуют другие силы. Этим представился бы легкий способ проверки принципа теории относительности на основе уравнений Максвелла, ибо достаточно пустить лучи Беккереля наклонно относительно электрического или магнитного поля. При перпендикулярном движении получаются удивительным образом те же силы, что у Лоренца. Я уже раздумывал, не обусловлено ли отклонение измерений Кауфмана тем, что образуется угол.

Р у н г е.— Я хотел бы спросить Планка о следующем: при найденном им противоречии, когда он вычисляет β из первого значения, надо все же посмотреть, не вызывает ли небольшое изменение в наблюдении значительное изменение величины. Следовало бы вычислить интервал β, для которого еще имеются допустимые погрешности наблюдения.

П л а н к.— β пропорционально z'/y'. Небольшое изменение y' уже много значит, ибо y' мало по сравнению с z'. Но ошибки столь велики, что нельзя использовать значения; крайние значения во всяком случае надо было исключить, именно их нельзя использовать для теории. Я хотел бы еще задать вопрос Бухереру. Можете ли Вы привести Ваши уравнения к форме Лагранжа? И если да, исследовали ли Вы, какое значение будет иметь лагранжева функция H в Вашей теории?

Б у х е р е р.— Нет, я это еще не исследовал и не мог бы это решить сейчас.

П л а н к.— Это было бы все-таки очень важным, ибо уравнения движения электрона сводятся через форму Лагранжа к уравнениям общей механики.

Б у х е р е р.— Я думаю, что можно привести уравнения Максвелла к форме Лагранжа. Я еще не исследовал этого частного вопроса, но полагаю, что это возможно, ибо применяю без изменения уравнения Максвелла к квазистационарному движению, но этим не хочу сказать ничего окончательного.

А б р а г а м.— При ознакомлении с цифрами видишь, что отклонения теории Лоренца по меньшей мере в два раза больше, чем отклонения моей теории, так что можно сказать, что шаровая теория в два раза лучше описывает отклоняемость β-лучей, чем теория относительности. (Шумное веселье). Думая о состоянии вопроса 5 лет тому назад, когда я начал им заниматься, могу быть удовлетворенным результатами; я не верил вначале, что формула совпадает с экспериментами и был весьма удивлен, когда в один прекрасный день Кауфман сообщил мне, что формула хорошо согласуется с уточненными измерениями. Конечно, я усматриваю преимущество шаровой теории перед теорией относительности не только в лучшем согласии с измерениями, а прежде всего в том, что это чисто электромагнитная теория. Исходили же из вопроса, является ли масса электрона чисто электромагнитной величиной. Шаровая теория отвечает на этот вопрос положительно; она рассматривает энергию катодных лучей как чисто электромагнитную. Предпосылки плотности электромагнитной энергии также принимаются Лоренцом за основу. Но, кроме электромагнитной энергии, как я доказал и что не опровергнуто, электрон Лоренца имеет еще некоторый род внутренней потенциальной энергии. Согласно теории относительности, в таком случае нельзя рассматривать катодные лучи как чисто электромагнитные процессы, а как процессы, для объяснения которых недостаточно одной электродинамики.

Ганс. — Я хотел бы заметить, что любое предположение об изменении конфигурации электрона при движении вносит, разумеется, больше параметров в теорию, так что можно лучше приноровиться к явлениям.

Опыты Майкельсона — Морли и Троутон — Нобла требуют известного различия между продольным и поперечным растяжением, но их отношение остается неопределенным.

Можно построить еще больше теорий, в которых это отношение продольного растяжения к поперечному принимало бы другие значения; одна из них объясняла бы лучше всего явления лучей Беккереля, но нельзя было бы сказать, что это теория наилучшая, это было бы лишь подгонкой к явлениям задним числом.

Планк.— Абрагам прав, когда говорит, что существенное преимущество шаровой теории в том, что она чисто электрическая. Если бы она проходила, было бы очень хорошо, но пока это лишь постулат. В основу лоренцово-эйнштейновской теории положен также постулат, именно, что нельзя определить абсолютное перемещение. По-видимому, нельзя объединить оба постулата, и речь идет о том, который предпочтительнее. Мне больше нравится, по правде, постулат Лоренца.

Лучше всего будет, если работа будет продолжаться в обоих областях, и, в конце концов, решат эксперименты.

З о м м е р ф е л ь д.— Я пока что не присоединился бы к пессимистической точке зрения Планка. При исключительной трудности измерений отклонения имеют, возможно, неизвестные причины. В постановке вопроса Планком можно предположить, что физики моложе 40 лет предпочтут электродинамический постулат, а старше 40 лет — механико-релятивистский. Я предпочитаю электродинамический. (Веселье).

К а у ф м а н.— К вопросу о постулатах я хотел бы заметить, что теоретико-познавательное значение постулата в относительном движении не очень велико, ибо он применим лишь к равномерному движению. Как только идет речь о вращении или неравномерном движении, он неприменим. Им хотят устранить эфир, часто воспринимаемый как неудобный, однако при вращении, например при сплющивании небесных тел, приходится его вводить вновь.

П л а н к.— Конечно, речь идет о равномерном движении. Неравномерное движение мы можем определить механикой, но не можем механикой определить равномерное. Требование заключается в том, что неподдающееся определению механикой не должно также поддаваться определению электродинамикой.

ДИСКУССИЯ ПО ДОКЛАДУ А. ЭЙНШТЕЙНА «О РАЗВИТИИ НАШИХ ВОЗЗРЕНИЙ НА СУЩНОСТЬ И СТРУКТУРУ ИЗЛУЧЕНИЯ» НА 81-м СОБРАНИИ НЕМЕЦКИХ ЕСТЕСТВОИСПЫТАТЕЛЕЙ И ВРАЧЕЙ В ЗАЛЬЦБУРГЕ В СЕНТЯБРЕ 1909 г.[1]

Планк.— Если я позволю себе сделать несколько замечаний к докладу, то прежде всего хочу присоединиться к благодарности всего собрания, слушавшего с большим интересом то, что доложил Эйнштейн, и получившего толчок к дальнейшим размышлениям даже там, где, может быть, возникнут возражения. Я, конечно, ограничусь теми вопросами, по которым я придерживаюсь другого мнения, чем докладчик. Бóльшая часть того, что он сказал, не встретит возражения. Я тоже подчеркиваю необходимость введения известных квантов. Мы не можем продвинуться вперед во всей теории излучения без деления, в известном смысле, энергии на кванты, понимаемые как атомы действия. Спрашивается теперь, где искать эти кванты. Согласно последним высказываниям Эйнштейна, необходимо свободное излучение в вакууме, т. е. сами световые волны считать состоящими из корпускул и, вместе с этим, отказаться от уравнений Максвелла. Это мне кажется шагом в моем понимании еще не неизбежным. Я не хочу входить в детали, а лишь отмечу следующее. В последних рассуждениях Эйнштейна имеется заключение о влиянии движения материи на колебания свободного излучения в чистом вакууме. Это заключение мне кажется свободным от возражений тогда, когда точно известно взаимодействие между излучением в вакууме и движением материи; если же нет, то не хватает моста, необходимого, чтобы перейти от движения зеркала к интенсивности падающего на него излучения. Но мне сдается, что это взаимодействие свободной электрической энергии в вакууме и движения атомов материи все же очень мало известно. Оно существенно сводится к испусканию и по-

[1] Physikalische Zeitschrift, 10, N 22, 1909, 825—826.

глощению света. Световое давление в основном также заключается в этом, по крайней мере, согласно общепринятой теории дисперсии, сводящей отражение к поглощению и эмиссии. Но эмиссия и поглощение как раз темный вопрос, о котором мы очень мало знаем. О поглощении мы еще, может быть, кое-что знаем, но как обстоит дело с эмиссией? Ее представляют себе вызванной ускорением электронов. Но этот пункт самый слабый во всей электронной теории. Представляют себе, что электрон обладает определенным объемом и определенной конечной плотностью заряда, объемной или поверхностной, без этого не обходятся; однако это опять противоречит, в известном смысле, атомистическому представлению электричества. Это не является невозможным, но представляет трудности, и я почти удивлен, что это не вызвало больше возражений.

Я думаю, что полезно здесь ввести квантовую теорию. Мы можем высказать законы лишь для больших времен. Но для малых времен и больших ускорений имеется пока пробел, заполнение которого требует новых гипотез. Может быть, следует допустить, что колеблющийся резонатор обладает не переменной энергией, а что его энергия просто кратна элементарному кванту. Думаю, что, используя это положение, можно прийти к приемлемой теории излучения. Но все же стоит вопрос: как себе это представить? Это означает, что требуется механическая или электродинамическая модель подобного резонатора. Но в механике и в сегодняшней электродинамике мы не имеем никаких дискретных элементов действия и поэтому не можем также построить механическую или электродинамическую модель.

Итак, это кажется невозможным для механической модели, и следует к этому привыкнуть. Точно так же все попытки описать механически светоносный эфир потерпели неудачу. Хотели также представить себе электрический ток как механический процесс и думали об аналогии с водяным потоком, но пришлось от этого отказаться, и как привыкли к этому, так придется привыкнуть и к тому резонатору. Разумеется надо эту теорию разработать в деталях намного подробнее, чем это сделано до сих пор; может быть, кто-нибудь будет счастливее в этом, чем я. Во всяком случае, я полагаю, что следует прежде всего попытаться перенести все трудности квантовой теории в область взаимодействия материи и лучистой энергии;

процессы же в чистом вакууме можно было бы пока объяснять с помощью уравнений Максвелла.

Ц и г л е р.— Если представить себе проатомы материи как невидимые шарики, обладающие постоянной скоростью света, то можно себе представить все взамодействия между телесными состояниями и электромагнитными явлениями и тем самым перебросить пропавший мост Планка между материальным и нематериальным.

Ш т а р к.— Планк указал на то, что пока мы не имеем никакого основания принять следствие Эйнштейна и рассматривать излучение как сосредоточенное в пространстве, куда оно входит, освобожденное от материи. Первоначально я тоже был мнения, что пока можно ограничиться сведе́нием элементарного закона к некоторому взаимодействию резонаторов. Все же я думаю, что существует одно явление, которое приводит к тому, что нужно себе представить электромагнитное излучение, свободное от материи, как сосредоточенное в пространстве. Это именно то, что электромагнитное излучение, исходящее из рентгеновской трубки в окружающее пространство, даже на большом расстоянии (до 10 *м*) еще может действовать на отдельный электрон как сосредоточенное. Я полагаю, что это явление дает повод задать себе вопрос, не следует ли считать энергию электромагнитного излучения сосредоточенной и там, где она выступает оторванно от материи.

Р у б е н с.— Из представленной Эйнштейном точки зрения вытекало бы практическое следствие, доступное экспериментальной проверке. Как известно, на флуоресцирующем экране вызывают сцинтилляцию не только α-лучи, но и β-лучи. Согласно изложенным взглядам, то же должно происходить и при γ-лучах и рентгеновском излучении.

П л а н к.— С рентгеновскими лучами — особое дело; я не хотел бы утверждать слишком много. Штарк привел кое-что в пользу квантовой теории, я хочу привести кое-что против,— это интерференция при колоссальной разнице пути в сотни тысяч длин волны. Если квант интерферирует с самим собой, он должен иметь протяжение в сотни тысяч длин волны. Это тоже известная трудность.

Ш т а р к.— Легко противопоставить интерференционные явления квантовой гипотезе. Но если их обработать с большей благосклонностью к квантовой гипотезе, то будет объяснение и для них; высказываю это как надежду. Что касается экспериментальной стороны дела, то нужно подчеркнуть, что эксперименты, на которые ссылается Планк, ставятся с очень плотным излучением, так что в пучке света сосредоточено очень много квантов с одинаковой частотой; это следует учитывать при трактовке этих интерференционных явлений. При очень слабом излучении интерференционные явления выглядели бы иначе.

Э й н ш т е й н.— Явления интерференции не должны быть зачислены в ряд столь трудных, как себе представляют, и именно на следующем основании: нельзя полагать, что излучения состоят из квантов, не взаимодействующих; было бы невозможно тогда объяснить интерференцию. Я мыслю квант как сингулярность в окружении сильного векторного поля. Большим количеством квантов можно составить векторное поле, мало отличающееся от тех, которые принимаем при излучениях. Можно думать, что при встрече лучей с пограничной поверхностью, вследствие воздействия на поверхность, происходит разделение квантов, примерно в зависимости от фазы результирующего поля, при которой кванты достигают поверхности раздела. Уравнения результирующего поля мало отличались бы от уравнений прежней теории. Не доказано, что пришлось бы много изменить в представлениях об интерференционных явлениях, которыми обладаем сегодня. Я хотел бы это сравнить с процессом молекуляризации носителей электростатического поля. Поле, создаваемое атомистическими электрическими частицами, не очень существенно отличается от более ранних воззрений, и не исключено, что в теории излучения произойдет нечто аналогичное Я не вижу принципиальной трудности со стороны интерференционных явлений.

ДИСКУССИЯ ПО ДОКЛАДУ Э. БУДДЕ «К ТЕОРИИ ОПЫТА МАЙКЕЛЬСОНА» НА 83-м СОБРАНИИ НЕМЕЦКИХ ЕСТЕСТВОИСПЫТАТЕЛЕЙ И ВРАЧЕЙ В КАРЛСРУЕ В СЕНТЯБРЕ 1911 г.[1]

Л а у э.— Я не могу, конечно, остановиться на всех вопросах, к которым дают повод высказывания уважаемого докладчика. Хочу указать лишь на три пункта. Первое возражение предыдущего выступающего состояло в том, что скорость Земли относительно эфира имеет совершенно неизвестную компоненту. Допустим. Но Майкельсон и его последователи полностью это учли; эксперимент сделан не однажды, а повторен многократно, в различные времена года, с правильным, на мой взгляд, расчетом, что скорость Земли относительно эфира за полгода изменяется на 60 *км* в секунду.

Второе. Мое главное возражение относится к способу, которым предыдущий оратор вычислил разницу фаз. Из расстояний между зеркалами и пластинкой и из толщины пластинки он вычисляет разницу фаз; он делит каждый из этих отрезков на длину волны на этом отрезке и затем их складывает. При всяких интерференционных эффектах речь идет о разнице фаз, и мерой этой разницы фаз является прежде всего разница во времени, с которой приходят соответствующие фазы, деленная на конечный период. Нет уверенности, что последняя тождественна с рассчитанной Будде величиной, за исключением случая покоя. Когда эти отрезки вычисляются при движущихся телах, это неверно. Мне кажется, что правило — делить отрезки на длину волны и затем складывать — отказывает при движущихся телах.

В-третьих, речь идет о другом. Будде говорил о толщине пластинки, на которой лучи разделяются и вновь соединяются. Но он говорил, насколько я понял, лишь об

[1] Physikalische Zeitschrift, 12, 1911, 989—991.

одной пластинке. Майкельсон и его последователи имели всегда еще вторую пластинку. Первая, та, что делит лучи, была посеребрена. При этом первый луч проходит пластинку дважды, а другой — ни разу, и это компенсируется пластинкой, совпадающей с первой по толщине. Это же должно учитываться при расчете.

Примечание. Выступающий изложил свое замечание также письменно и при этом ко второму пункту сделал еще следующее добавление.

Из доклада у меня создалось впечатление, что l_n суть расстояния от зеркал до пластинки. При таком допущении l_n покрываются с относительной скоростью c_n, отличной от c. Итак, время прохождения

$$t = \sum \frac{l_n}{c_n} \quad \text{и} \quad \frac{t}{\tau} = \sum \frac{l_n}{c_n \tau},$$

где τ — период в конце. Это было бы равным $\sum \frac{l_n}{\lambda_n}$ лишь тогда, когда $\lambda_n = c_n \tau$. Но утверждение о пропорциональности λ_n и c_n не имеет места.

Позже друзья спросили меня, не следует ли понимать под l_n отрезки, которые свет проходит между отражениями от пластинки и от зеркал. Если бы эта трактовка была верной, то имели бы

$$t = \frac{1}{c} \sum l_n$$

и это равенство опять не сводится к

$$\frac{\lambda}{\tau} = \sum \frac{l_n}{\lambda_n}.$$

Будде.— Лишь стремление к краткости повинно в том, что я не упомянул о компенсационной пластинке (ср. текст статьи).

Что касается движения Земли в эфире, то знаю смутно, что Майкельсон делал эксперименты в разное время. Однако нужно дать себе отчет, что всегда имеешь дело лишь с проекцией движения Земли на соответствующую горизонтальную плоскость. Итак, надо было учитывать астрономическое положение Земли в координатной системе, неизменной относительно эклиптики.

Лауэ в основном оспаривает, что можно пользоваться частными от длин путей на длины волн при движущихся приборах Но когда два луча исходят из одного места при одинаковой фазе и приходят к другому месту одновременно, то разница хода у этого второго места, всегда определяется разницей между частными указанного вида, и я не вижу как можно ее найти иначе, чем вычислением числа волн, лежащих на обоих путях. Если, к примеру, два луча исходят из одной точки и встречаются в месте, до которого один прошел 166 длин волн, а другой $166^1/_2$, то разница фаз составляет $^1/_2$ периода, независимо от того, проходили они через движущиеся или неподвижные среды.

Примечание при корректуре. Мне кажется, что причиной письменного добавления Лауэ является недостаточная ясность моего устного изложения, вызванная неизбежной краткостью. Как видно из текста статьи, я вел расчет не в стекле с относительными величинами, а в покоящемся эфире с постоянной скоростью света c. И, насколько я понимаю, письменное замечание Лауэ этим исчерпывается. В покоящемся эфире

$$\frac{\text{путь света}}{\text{длина волны}} \text{ всегда} = \frac{\text{время пути}}{\text{период колебания}}.$$

Абрагам.— Заслуживает благодарности, бесспорно, то, что докладчик вновь подверг обсуждению опыт Майкельсона; он является единственной экспериментальной основой теории относительности. Раньше он считался не совсем достоверным. Уже на собрании естествоиспытателей в Дюссельдорфе в 1898 г. было решено повторить его в Германии, но, насколько я знаю, это не осуществлено.

Будде.— Мое предложение заключается в повторении опыта в такой форме, чтобы на пути падающего пучка света имелись две тонкие щели с расстоянием b между ними; тогда подсчитанные результаты для моих одиночных лучей были бы применимы с хорошим приближением.

Абрагам.— Впрочем, семь лет тому назад, в «Анналах физики», я развил теорию отражения света.

ДИСКУССИЯ ПО ДОКЛАДУ А. ЭЙНШТЕЙНА «К СОВРЕМЕННОМУ СОСТОЯНИЮ ПРОБЛЕМЫ ГРАВИТАЦИИ» НА 85-м СОБРАНИИ НЕМЕЦКИХ ЕСТЕСТВОИСПЫТАТЕЛЕЙ В ВЕНЕ В 1913 г.[1]

Ми. — Я хотел бы к интересному докладу Эйнштейна сделать некоторые дополнения об историческом развитии теории. Эйнштейн упомянул о нем лишь вскользь. Теория Нордстрема связана с исследованиями Абрагама. Я считаю необходимым, чтобы здесь было сказано, что первым, кто выдвинул до некоторой степени разумные уравнения гравитации, был Абрагам. В то время как раньше всегда стремились (существует несколько старых теорий гравитации) описать гравитационное поле аналогично электромагнитному, Абрагам нашел новый подход. Невозможно совместить старые попытки с принципом относительности; если принцип равенства инертной и тяжелой масс должен быть выполнен достаточно точно, то гравитационное поле не может быть описано шести-вектором. Поэтому Абрагам сначала построил теорию со скалярным потенциалом.

Я напишу уравнения поля со скалярным потенциалом в несколько обобщенной форме, которую я им придал несколько позже. Гравитационное поле описывается с помощью четырех-вектора (g_x, g_y, g_i, iu), который, однако, также хорошо можно заменить другим (k_x, k_y, k_z, in). Эти два четырех-вектора находятся друг к другу в отношении, аналогичном тому, как, например, напряжение в электрическом поле относится к электрическому смещению или как в упругом теле напряжение к деформации. Кроме того, для описания гравитационного поля имеется еще четырехмерный потенциал ω, который можно назвать гравитационным потенциалом. Тогда уравнения поля имеют сле-

[1] Physikalische Zeitschrift, 14, 1913, 1262—1266.

дующий вид:

$$g_x = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad g_y = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad g_z = \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad u = -\frac{\partial \omega}{\partial t},$$

$$\frac{\partial k_x}{\partial x} + \frac{\partial k_y}{\partial y} + \frac{\partial k_z}{z} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\gamma\rho;$$

здесь γ обозначает универсальную постоянную и ρ — плотность тяжелой массы. Отождествляя оба вектора (g, iu) и (k, iw), получают уравнения, которыми уже оперировал Абрагам. Однако он совершил ошибку тем, что отождествил ρ с плотностью инертной массы, которая по теории относительности должна опять быть тождественной плотности энергии. Но левая часть последнего уравнения является четырехмерным скаляром, инвариантным относительно преобразования Лоренца, а плотность энергии, напротив, не инвариант, и, таким образом, конечно, нельзя удовлетворить принципу относительности.

Нордстрем улучшил эту теорию тем, что он для ρ ввел величину, инвариантную относительно лоренцова преобразования. Почти одновременно с ним я также выдвинул свою теорию гравитации. Правда, моя теория включена в более широкой работе о теории материи вообще, и поэтому Эйнштейн, пожалуй, не заметил моих исследований. (Эйнштейн: нет, нет). В таком случае, вероятно, он ее не прочитал, иначе он бы ее упомянул. Моя теория, полагаю, имеет преимущество наглядности, поэтому, например, очень легко вычислить точно силу, действующую на частицу, что не совсем удалось, как мне кажется, в работе Эйнштейна. Кроме того, мое исходное положение очень общó и позволяет рассматривать многие специальные случаи как равноправные, поскольку я не отождествляю величины (g, iu) и (k, iw); они становятся равными лишь в идеальном вакууме, т. е. в пространстве, чрезвычайно удаленном от всякой материи, и мне нет необходимости делать какое-либо предположение о зависимости обеих величин внутри материи. Я еще не сравнил полностью мою теорию с теорией Нордстрема; в последней принимается $(g, iu) = (k, iw)$, иначе обе теории были бы почти идентичными. Для ρ я принял ту величину, которую обычно называют плотностью массы покоя. Это четырехмерный скаляр, не отличающийся в обычных условиях от плотности инертной массы. Как инертная масса тела в теории относительности тождественна с его энергией, так и масса покоя тождественна с функцией Гамильтона. Итак, плотность массы покоя — это плотность функции Гамильтона, и поэтому в своей работе я обозначаю ее через H и называю сокращенно «функцией Гамильтона». Эйнштейновская теория не намного сложнее этой. Основные ее уравнения весьма похожи на только что написанные. Эйнштейн уже подчеркивал, что его теория отличается тем, что гравитационный потенциал в ней не четырехмерный скаляр, а четырехмерный тензор. Обозначу компоненты этого потенциала через $w_{\mu\nu}$, где μ и ν пробегают цифры от 1 до 4 и $\omega_{\mu\nu} = \omega_{\nu\mu}$. Соответственно этому, гравитационное поле описывается не простым четырех-вектором, а через пространственно-временну́ю величину третьего ранга, которая, так сказать, образуется 10-ю четырех-векторами, каждый из которых может быть причислен к одной из компонент (μ, ν) тензора. Обозначу эти величины третьего ранга через $g_{\mu\nu x}$, $g_{\mu\nu y}$, $g_{\mu\nu z}$, $iu_{\mu\nu}$. Как в моей, так и в теории Эйнштейна имеется еще вторая величина, через которую можно также хорошо описать поле и которая отождествляется с $(g_{\mu\nu}, iu_{\mu\nu})$ лишь в идеальном вакууме. Я обозначу эту величину через $k_{\mu\nu x}$, $k_{\mu\nu y}$, $k_{\mu\nu z}$, $iw_{\mu\nu}$. Тогда можно записать основные уравнения эйнштейновской теории гравитации следующим образом:

$$g_{\mu\nu x} = \frac{\partial\omega_{\mu\nu}}{\partial x}, \quad g_{\mu\nu y} = \frac{\partial\omega_{\mu\nu}}{\partial x}, \quad g_{\mu\nu z} = \frac{\partial\omega_{\mu\nu}}{\partial z},$$

$$u_{\mu\nu} = -\frac{\partial\omega_{\mu\nu}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial k_{\mu\nu x}}{\partial x} + \frac{\partial k_{\mu\nu y}}{\partial y} + \frac{\partial k_{\mu\nu z}}{\partial z} + \frac{\partial\omega_{\mu\nu}}{\partial t} = -\gamma h_{\mu\nu}.$$

Я записал уравнения так, что сразу видна аналогия с теорией скалярного потенциала. Эйнштейн обозначает гравитационную постоянную, которую я назвал γ, через $\varkappa$; величина, которую я обозначаю $\omega_{\mu\nu}$, у него $g_{\mu\nu}/2\varkappa$; величины $(k_{\mu\nu}, iw_{\mu\nu})$ входят в его уравнения как линейные функции $(g_{\mu\nu}, iu_{\mu\nu})$, коэффициенты которых зависят от $\omega_{\mu\nu}$ (т. е. $g_{\mu\nu}$). $h_{\mu\nu}$ является тензором, представляющим плотность тяжелой массы. Если бы величины $h_{\mu\nu}$ были идентичными с компонентами тензора потенциальной энергии, то инертная и тяжелая массы действительно были бы принципиально идентичными. Но это никак не имеет места, $h_{\mu\nu}$ отличаются от компонент тензором потенциальной энергии, и тем самым тяжелая масса не равна энергии тела, а отношение обеих масс зависит также от других величин, например скорости, температуры. Эйнштейн также упоминает, что отношение тяжелой массы к инертной зависит от гравитационного потенциала. Так как отдельные атомы тела создают вокруг себя гравитационные поля то соотношение обеих масс тела во всяком случае должно зависеть также от его плотности.

Эйнштейн.— Я потому не говорил о теории Ми, что в ней не проводится строго эквивалентность инертной и тяжелой масс. Было бы нелогичным, если бы я исходил из известных постулатов, а затем не придерживался их. Допускаю, что я не прочел теорию Ми так внимательно, как может быть было нужно, но я далек от мысли желать ее умалить тем, что не упомянул о ней в этой связи.

Относительно теории Нордстрема: не могу сказать, что Абрагам пошел первым по пути, по которому пошел Нордстрем. Действительно, теория Абрагама предполагает, что скорость света переменна, что она является, известным образом, мерой гравитационного потенциала. Тем не менее он пользуется специальной теорией относительности, так что занимает позицию, полную противоречий. Возражение настолько веское, что эта теория мне кажется совершенно несостоятельной.

Ми.— Считаю эти возражения обоснованными; однако нетрудно, располагая уравнениями теории Абрагама, подойти к теории Нордстрема; насколько мне известно, Нордстрем непосредственно связан с уравнениями Абрагама.

Эйнштейн.— Да, психологически это действительно так, но не логически; теория Нордстрема фундаментально отличается от теории Абрагама.

Ми.— Я скоро опубликую работу, в которой показываю, что и теория Эйнштейна не абсолютно точно удовлетворяет требованию равенства инертной и тяжелой масс.

Теперь я хотел бы коснуться второго сомнения и думаю, что говорю в интересах всего собрания. В своей работе Эйнштейн, как мне кажется, постулирует весьма интересный принцип общей относительности. Правда, этот принцип в предложенной теории еще не выполнен, тем не менее обсуждение его представляет интерес. Мне не ясно, что он собственно физически означает. Я понял доклад Эйнштейна так, как будто он хочет развивать дальше идею Маха, согласно которой также невозможно обнаружить абсолютные ускорения. Но против подобного понимания обобщенного принципа относительности физик должен выдвинуть весьма веские сомнения. Приведу лишь один пример. Представим себе, что едем в вагоне железной дороги, изолированном от внешнего мира. Нас в вагоне трясет и эти силовые воздействия, которые чувствуем на собственном теле, обычно объясняют инерционными действиями, обязанными неравномерным колебаниям вагона. Общий принцип относительности в обсуждаемом здесь толковании утверждает, что можно допустить систему тяжелых масс, совершающих неравномерные движения вокруг вагона, рассматриваемого как покоящийся, и что это оказывает на наше тело те самые воздействия, которые мы принимаем за инерционные. Подобная фикция может оказаться математически очень удобной, как, например, когда для вычисления прилива и отлива допускают воображаемые планеты, чтобы этим заменить действие инерции, трудно поддающееся расчету, но ни одному физику не придет в голову считать эти воображаемые планеты за действительно существующие. Действие инерции в вагоне также нельзя интерпретировать физически как действие тяжелых масс; это привело бы к противоречиям с принципами физического исследования. Поэтому я полагаю, что изложенное здесь толкование обобщенного принципа относительности не имеет физического смысла.

Эйнштейн (последующее замечание при корректуре). Согласно моей теории, принцип относительности в этом наиболее общем смысле также не выполнен. Законы сохранения приводят к далеко идущей специализации системы отсчета, как я показал в докладе. Ответ на утверждение, что в моей теории условие эквивалентности тяжелой и инертной масс не выполняется, целесообразно отложить до тех пор, пока Ми опубликует свои сомнения по этому вопросу.

Рикке.— Теория должна выполнять ряд задач: во-первых, она должна представить физические факты возможно проще. Затем она должна дать путеводную нить для открытия новых фактов. Экспериментальная физика вначале отнеслась весьма критически к теории относительности. Нам казалось, что новая и странная теория развита не недостаточной экспериментальной базе. Но настроение переменилось. Мы все сознаем, какие новые разъяснения дала эта теория о явлениях, до тех пор непонятных. В связи с этим я хотел бы задать Эйнштейну один вопрос. Фарадей был, пожалуй, тем физиком, который открыл больше всего новых явлений. Но он также искал явления, которые он не открыл и которые были открыты позже. Среди того, что искал и не нашел Фарадей, имеется исследование о связи гравитационного и электромагнитного полей. Речь идет о том, существуют ли они независимо друг от друга или они взаимодействуют. Теперь возникает вопрос, что может сказать новая теория о возможности обнаружения подобного взаимодействия. Было бы интересным услышать что-нибудь об этом.

Эйнштейн.— Разумеется, что согласно теории должно быть взаимодействие между электрическим и гравитационным полями, но оно столь слабо, что кажется безнадежным обнаружить его экспериментально. Доступно наблюдению, кажется, лишь искривление световых лучей гравитационным полем Солнца.

Хазенорль.— Позволю себе спросить Эйнштейна, насколько он убежден, что отклонение светового луча гравитационным полем Солнца на секунду, если оно действительно имеет место, реально наблюдаемо и доступно измерению.

Эйнштейн.— По мнению астрономов, у которых я осведомлялся, констатация подобного отклонения вполне в области возможного.

Иегер.— Не найдут ли тогда астрономы много других причин для объяснения такого отклонения?

Эйнштейн.— Не думаю; в него входит $1/R$. Всякое атмосферное влияние падало бы гораздо быстрее с расстоянием. Поэтому я не думаю, что подобное отклонение будет объясняться иначе.

Земплен (на вопрос Шютца).— Метод Этвеша исходит из факта, что тяжесть на поверхности Земли является результирующей из центробежной силы и притяжения масс. Если бы удельное притяжение масс было разным для различных веществ, то тяжесть различных веществ отличалась бы не только по величине, но и по направлению Таким образом, если повесить на оба плеча крутильных весов грузы из различных веществ, то различие в направлении их тяжестей вызывало бы скручивание проволоки. Поскольку подобное скручивание не наблюдалось, несмотря на всю тщательность экспериментов, Этвеш более 20 лет тому назад вывел заключение о независимости удельного притяжения масс от рода вещества с точностью до 1/20 000 000. Согласно новым экспериментам, проведенным в сотрудничестве с Пекаром и Фекете, точность повышена до 1/100 000 000. (См.: E ö t v ö s. Mathem. u. naturw. Berichte aus Ungarn VIII, 1890; Beiblätter zu den Ann. d. Phys., **15**, 688, 1891; «Über Geodatische Arbeiten in Ungarn, besonders über Beobachtungen mit der Drehwage, Kap. VI» в трудах общей конференции международных измерений Земли, 1909.)

М и.— Из того, что сказал Эйнштейн о значении опытов Этвеша, можно, пожалуй, заключить, что я недостаточно проверил мою теорию на согласие с результатами этих опытов. Но это не так. Я, правда, допускаю, что инертная и тяжелая массы не абсолютно тождественны. Но отношение обеих масс отклоняется (в силу теплового движения молекул) столь мало от некоторого постоянного значения, что эти отклонения вообще не поддаются экспериментальному обнаружению. В лучшем случае отклонения составляют примерно 10^{-11}, и в случае измерений методом маятников пришлось бы для их обнаружения измерять длину маятника с точностью до доли диаметра атома. Поэтому моя теория не опровергается опытами Этвеша или им подобными.

Э й н ш т е й н.— Это и не было моим намерением. Но мне кажется, что в том, что тождественность инертной и тяжелой масс оправдались со столь значительной точностью, лежит одно из самых важных указаний для теоретического развития. Потребность найти более глубокое понимание этой тождественности, наряду с защищаемой Махом идеей об относительности инерции, послужило вообще для меня побуждением заняться проблемой гравитации. Отсюда понятно, что теории, не соответствующие моему исходному убеждению, мне чужды. Но я совершенно не утверждаю, что эти теории должны быть отброшены при современном состоянии экспериментов.

Рейснер.— Эйнштейн говорил об отклоняющем действии поля тяготения на энергию колебания светового луча. Я хотел бы попросить Эйнштейна высказаться о более элементарном вопросе, именно о воздействии поля тяготения на собственную энергию поля.

В нелинейном эйнштейновском уравнении потенциала, являющемся расширенным уравнением Лапласа, один из членов может интерпретироваться, как показал Эйнштейн, в качестве гравитационного действия статической энергии поля. Как далее может быть объяснимо или как получается математически, что статическая энергия чисто гравитационного поля, хотя она обладает инерцией и тяжестью, не имеет остальных свойств вещественной массы обнаруживать пондеромоторные силы и движения? Или как получается, что поле пребывает статическим, хотя энергия поля пустого пространства подвергается тяготению? Как следовало бы обозначать особый род энергии, свойственный вещественной массе, в противовес другим видам энергии?

Эйнштейн (ответ улучшен позже).— Без гравитационного поля компоненты электростатического поля находятся в равновесии. Это равновесие несколько изменяется, но не упраздняется наличием гравитационного поля. Сравнение: частицы газа в сосуде находятся в равновесии из-за давления. Если добавляется действие поля тяготения, то это равновесие изменяется, но не уничтожается [1].

Борн.— Хотел бы задать Эйнштейну вопрос, именно, с какой скоростью распространяется действие гравитации по его теории? Для меня не очевидно, что это происходит со скоростью света; должна быть очень сложная связь.

---

[1] Рейснер замечает позже к этому ответу Эйнштейна: Эйнштейн высказывается по поводу моего вопроса так, как будто в нем содержалось сомнение об установлении в его теории равновесия энергии пустого пространства. Я совсем далек от подобного сомнения. Так как он в остальном не высказывается по моему вопросу, хочу попытаться еще раз сформулировать его яснее и просить более исчерпывающего ответа. Хочу при этом связать вопрос с примером Эйнштейна о равновесии газа.

Равновесие газа или, может быть лучше, жидкости, может под влиянием объемных сил, например тяжести, установиться

Эйнштейн.— Чрезвычайно просто написать уравнения для случая, когда возмущения, вносимые в поле, бесконечно слабы. Тогда g отличается бесконечно мало от того, которое имело место без этого возмущения; нарушения распространяются тогда с той же скоростью, что и свет.

Борн.— Но при больших возмущениях это будет очень сложно?

Эйнштейн.— Да, это сложная математическая задача. Вообще трудно найти точные решения уравнений, поскольку они нелинейные.

лишь потому, что существует уравнение состояния между объемом и давлением. Итак, и в пустом пространстве необходимо уравнение состояния между градиентом скорости света и известными напряжениями, которые следует вообразить согласно методу Максвелла. При центрально-симметричном поле, например, подобное условие сводится к уравнению состояния между плотностью энергии и напряжением пустого пространства.

Абрагам показал, как это можно себе формально представить для гравитационного поля, по аналогии с системой электродинамических напряжений Максвелла (International Congress of Mathematicians. Cambridge, Aug., 1922). Я могу к этому добавить только одно, и это как раз касается сущности моего вопроса.

Именно, в представлении Абрагама объемные силы плотности энергии поля, свободного от вещественной массы пространства, равны нулю, но этого не может быть, если любая энергия, что Эйнштейн ставит в основу своей теории гравитации, имеет массу и тем самым вес.

Заменил ли Эйнштейн эту систему напряжений Абрагама другой, в которой силы тяжести действуют и на плотность энергии поля пустого пространства и которые приходят в равновесие с напряжениями типа максвелловских так, что последние оказывают сопротивление деформации поля, например, изменению плотности энергии?

Этим энергия поля пустого пространства получила бы некоторые упругие свойства!

Далее, тяжести пустого пространства отличаются от сил тяжести материи тем, что первые, в статическом случае, всегда приходят в равновесие с квази-максвелловскими напряжениями и без помощи величины движения или потока энергии, в то время как силы тяжести дискретных тел никогда не приходят в равновесие без образования величин движения или без других внешних сил.

Из какого другого уравнения состояния между скоростью света и напряжениями внутри материи это вытекает?

Высказывание Эйнштейна по этому вопросу, безусловно, дало бы многим другим читателям его трудов желаемое разъяснение.

И е г е р.— Эйнштейн должен был бы нам сообщить, как он представляет себе осуществление основного эксперимента, и было бы интересным услышать точку зрения присутствующих здесь астрономов.

Э й н ш т е й н.— Я не компетентен определить детали того, как это должны сделать астрономы. Речь идет о фотографировании неподвижных звезд около Солнца во время полного затмения для определения того, влияет или нет близость Солнца на кажущееся положение звезд.

И е г е р.— Не держится ли один астрофизик мнения, что изменения изображений неподвижных звезд возникают в зависимости от того, присутствует ли Солнце при этом или нет, и что, напротив, изменение, которое ищет Эйнштейн, полностью отсутствует?

Э й н ш т е й н.— Пусть об этом судят специалисты; пока что нужно подождать снимков.

М и.— Я хотел бы обратить внимание еще на другие экспериментальные следствия различных теорий гравитации. По теории Эйнштейна, период колебаний атомов в месте высокого гравитационного потенциала должен быть иным, по сравнению с нулевым потенциалом. Таким образом, спектральные линии неподвижной звезды большой массы должны быть сдвинуты относительно наблюдаемых линий на Земле. По моей теории это не так. Как я уже отмечал здесь, в основу моей теории положен определенный принцип. Конечно, я отказался от принципа тождественности тяжелой и инертной масс и думаю, что на нем нельзя обосновать какую-либо теорию. Зато я придерживаюсь принципа, что абсолютное значение гравитационного потенциала не оказывает какого-либо влияния на физические явления. Я называю это принципом относительности гравитационного потенциала. Итак, по моей теории, нельзя ожидать сдвига спектральных линий, предсказываемого теорией Эйнштейна.

Э й н ш т е й н.— Да, это так; по моей теории и по теории Нордстрема это должно иметь место; осциллятор, перенесенный отсюда на Солнце, должен там колебаться медленнее. К сожалению, и другие причины обусловливают сдвиги линий, так что очень трудно проверить, вызывается ли подобный сдвиг именно этой причиной.

ДИСКУССИЯ ПО ДОКЛАДУ Г. ВЕЙЛЯ «ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И ГРАВИТАЦИЯ» НА 86-м СОБРАНИИ НЕМЕЦКИХ ЕСТЕСТВОИСПЫТАТЕЛЕЙ В НАУГЕЙМЕ В СЕНТЯБРЕ 1920 г.[1]

Паули.— Ни одной из предыдущих теорий, в том числе и эйнштейновской (Berl. Ber., 1919), до сих пор не удалось удовлетворительно решить проблему электрического элементарного кванта, и напрашивается мысль искать более глубокую причину этой неудачи. Я искал бы эту причину в том, что вообще недопустимо описывать электрическое поле внутри электрона как непрерывную пространственную функцию. Напряжение электрического поля определяется как сила, действующая на заряженное пробное тело, и, поскольку нет пробных тел меньше электрона (соответственно N-ядра), кажется, что понятие напряжения электрического поля внутри электрона, которым оперируют все теории непрерывного типа, является пустой, бессодержательной фикцией, которой ничто реальное не соответствует. Аналогичное можно сказать об измерении пространства, ибо не существует сколь угодно малых масштабных линеек. Поэтому я хотел бы спросить профессора Эйнштейна, согласен ли он с тем, что следует ожидать решения проблемы материи лишь от модификации наших представлений о пространстве (может быть, и о времени) и электрическом поле в смысле атомизма или он считает приведенные сомнения не основательными и полагает, что следует придерживаться непрерывных теорий.

Эйнштейн.— При все прогрессирующем уточнении системы научных понятий способ проведения сопоставления понятий с событиями становится все сложнее. Когда в каком-либо разделе науки обнаруживают, что какое-то событие не может быть более согласовано с поня-

[1] Physikalische Zeitschrift, 21, 1920, 650—651.

тием, то имеется выбор отбросить понятие или его сохранить; в последнем случае мы вынуждены заменить систему соподчинения понятий событиям более сложной. Мы поставлены перед этой альтернативой и в отношении временнóго и пространственного расстояния. По моему мнению, ответ может диктоваться лишь соображениями целесообразности; как это получится, мне не ясно.

Р е й х е н б е х е р отмечает, что: 1) инвариантность калибровки появилась на стороне инвариантности координат и 2) радиус кривизны положен постоянным уже после того, как он вошел в принцип действия. Можно ли вводить естественную калибровку позже так, чтобы полевые уравнения также были калибровочно инвариантны? Далее он ставит на обсуждение вопрос о вводе двойственного вектора.

В е й л ь.— В известном смысле целесообразно оперировать любой калибровкой. Лишь для связи с прежней теорией хорошо применить особую калибровку. Что касается второго пункта, то целесообразность ввода двойственного полевого вектора считаю сомнительной, ибо это ведет к предпочтению одного винтового направления, что, как мне кажется, не вызывается фактами.

Э й н ш т е й н.— При составлении моей системы понятий решающим было стремление перевести элементарные опытные факты на язык знаков. Временно-пространственные расстояния определяются с помощью масштабных линеек и часов. Когда рассматривают два образования (масштабные линейки и часы), то их равенство, по опыту, не зависит от их предыстории. На этом основывается возможность сопоставить двум близким мировым точкам значение ds, имеющее физический смысл. Поскольку теория Вейля отказывается от этого эмпирически оправданного сопоставления, она лишает теорию одной из ее самых надежных эмпирических опор и возможности проверки. Так как я не вижу пока, чтобы это фундаментальное свойство природных объектов укладывалось в основу хода мыслей Вейля, то, как физик, я отношусь скептически к его теории.

М и указывает на существенное различие между теориями Вейля и Эйнштейна, подчеркивая наглядность теории Эйнштейна, благодаря применению римановой геометрии, наглядность, недостающую, насколько можно видеть, теории Вейля. Возможно, подумают, что можно теорию Эйнштейна обобщить также наглядно добавлением к симметричному тензору гравитационного потенциала антисимметричного тензора, представляющего шести-вектор электромагнитного поля. Но более точное рассуждение показывает, что таким образом не получается разумной мировой функции.

Вейль.— Я могу представить себе риманово пространство уложенным в евклидово пространство; это, конечно, не проходит при более общем метрическом пространстве. Но «проекция» не четырехмерное евклидово пространство так же хорошо возможна у меня, как и у Римана.

ОБЩАЯ ДИСКУССИЯ О ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ НА 86-м СОБРАНИИ НЕМЕЦКИХ ЕСТЕСТВОИСПЫТАТЕЛЕЙ В НАУГЕЙМЕ В СЕНТЯБРЕ 1920 г.[1]

Л е н а р д.— Меня порадовало, когда сегодня в докладе о теории гравитации я услышал об эфире. Однако я должен сказать, что, как только от гравитационной теории переходят к другим силам, непропорциональным массам, простой разум исследователя природы сталкивается с теорией. Сошлюсь на пример торможения поезда. Чтобы был применим принцип относительности, при использовании сил, не пропорциональных массам, мысленно добавляют гравитационные поля. Я мог бы сказать, что в физическом размышлении можно пользоваться двумя картинами, называемыми мною первого и второго рода. О картинах первого рода говорит, например, Вейль, когда он все процессы выражает уравнениями. Картины второго рода интерпретируют уравнения как процессы в пространстве. Я предпочел бы картины второго рода, в то время как Эйнштейн придерживается картин первого рода. При картинах второго рода эфир неизбежен. Он всегда был одним из важнейших подсобных средств для прогресса в исследовании природы, и его устранение означает устранение из мышления всех исследователей природы картин второго рода. Я хотел бы прежде всего поставить вопрос: как это получается по теории относительности, что в случае торможения поезда нельзя определить, что же тормозится: поезд или окружающий мир?

Э й н ш т е й н.— Несомненно, что мы наблюдаем действия, относительные к поезду, и, если хотим, можем их интерпретировать как инерционные действия. Но теория

[1] Physikalische Zeitschrift, 21, 1920, 666—668.

относительности может также хорошо их интерпретировать как действия гравитационного поля. Откуда это поле? Вы полагаете, что это выдумка релятивистского теоретика. Но это ни в коем случае не произвольная выдумка, ибо это поле выполняет те же самые дифференциальные законы, что и те поля, которые мы привыкли рассматривать как действия масс. Правильно, что кое-что из решения остается произвольным, когда рассматривают ограниченную область Вселенной. Господствующее относительно тормозящего поезда гравитационное поле соответствует индукционному действию, вызванному отдаленными массами. Итак, я мог бы вкратце резюмировать: поле не выдумано произвольно, ибо оно удовлетворяет общим дифференциальным уравнениям и может быть сведено к действию всех далеких масс.

Ленард. — Разъяснения Эйнштейна не сообщили мне ничего нового; они не вышли из дебрей картин первого рода к наглядным картинам второго рода. Я полагаю, что мысленно придуманные гравитационные поля должны соответствовать процессам, а такие процессы не проявляются на опыте.

Эйнштейн.— Я хотел бы сказать, что понятие наглядного и не наглядного изменилось. Взгляд на наглядность является до некоторой степени функцией от времени. Я полагаю, что физика доступна пониманию и не наглядна. Как пример изменчивости взгляда на наглядность напомню Вам о наглядности галилеевой механики в разные времена.

Ленард.— В статье «О принципе относительности, эфире, гравитации» я выразил мое мнение, что в некоторых отношениях эфир отказывает потому, что с ним еще обращаются не так, как нужно. Принцип относительности работает в неевклидовом пространстве, наделенном различными свойствами в зависимости от места и времени; тогда в пространстве может существовать нечто, состояния которого обусловливают эти различные свойства, и это нечто и есть эфир. Я вижу пользу принципа относительности, пока его применяют к гравитационным силам. Но для сил, пропорциональных массам, считаю его непригодным.

Эйнштейн.— В природе вещей, что можно говорить о пригодности принципа относительности только в том случае, если он пригоден для всех законов природы.

Ленард.— Только когда мысленно добавляют подходящие поля. Я полагаю, что потому принцип относительности в состоянии сказать что-то новое лишь о гравитации, что в случае сил, не пропорциональных массам, мысленно добавляемые гравитационные поля не добавляют какой-либо новой точки зрения, кроме желания показать пригодность принципа. Равноправность всех систем отсчета также создает трудности для принципа.

Эйнштейн.— Не существует системы координат, принципиально предпочтительной из-за ее простоты; поэтому также не существует способа отличить «реальные» гравитационные поля от «нереальных». Второй вопрос ко мне гласит: что говорит принцип относительности о недопустимом мысленном эксперименте, заключающемся в том, что, например, Землю оставляют неподвижной, а остальную Вселенную заставляют крутиться вокруг нее, причем получаются сверхсветовые скорости?

Первая фраза не есть утверждение, а своеобразное определение понятия «эфир».

Мысленный эксперимент — это принципиальный эксперимент, даже если он фактически не осуществим. Он служит для того, чтобы охватить обозримо действительные опыты и извлечь из них теоретические следствия. Недопустим мысленный эксперимент лишь тогда, когда его осуществление невозможно в принципе.

Ленард.— Полагаю, что могу резюмировать: 1) лучше отказаться от провозглашения «устранения эфира», 2) уместно все еще ограничить принцип относительности областью гравитации, 3) кажется, что сверхсветовые скорости все же создают трудности для принципа относительности; ибо они появляются при движении любого тела, как только это движение приписывают не этому телу, а всей Вселенной, что является правомерным согласно принципу относительности в его простейшей и до сих пор действительной форме.

Рудольф.— В том, что общая теория относительности блестяще оправдалась, нет никакого довода против эфира. Эйнштейновская теория правильна, но ее взгляд на эфир неправилен. И она становится приемлемой лишь с дополнением Вейля и вытекает даже из гипотезы эфира, когда при потоке остаются между сдвинутыми стенками эфира пустые места из-за центробежной силы при изменении напряжения звездных нитей.

Палажий.— Дискуссия между Эйнштейном и Ленардом произвела на меня сильное впечатление. Мы встречаем здесь вновь старые исторические противоположности между экспериментальной и математической физикой вроде тех, которые имели место, например, между Фарадеем и Максвеллом. Эйнштейн говорит, что не существует выделенной системы координат. Но такая существует. Станем на биологическую точку зрения. Тогда каждый человек носит в себе собственную координатную систему. В развитии этой мысли содержится опровержение теории относительности.

Эйнштейн замечает, что нет никакой противоположности между теорией и экспериментом.

Борн.— Теория относительности даже дает преимущество картинам второго рода. В качестве примера рассмотрим Землю и Солнце. Без притяжения Земля удалилась бы прямолинейно и т. д.

Ми.— Я никогда не мог понять, почему считается, что впервые теория относительности указала на недопустимость взгляда на тождественность эфира и осязаемой материи. Это сделано намного раньше в книге Лоренца «Электрические и оптические явления в движущихся телах». Абрагам также, когда еще отказывался признать теорию относительности, сказал в своем учебнике: «Эфир — это пустое пространство».

Я придерживаюсь мнения, что, и приняв гравитационную теорию Эйнштейна, следует резко различать просто воображаемые гравитационные поля, вносимые в картину мира лишь выбором системы координат, от истинных гравитационных полей, данных объективными обстоятельствами. Я недавно показал путь, как можно прийти к «предпочтительной» системе координат, в которой с самого начала исключаются всякие просто воображаемые поля.

Эйнштейн.— Я не могу понять, как может существовать предпочтительная система отсчета. В лучшем случае, можно думать о предпочтительности таких систем, в отношении которых оказывается приближенным выражение Минковского для ds^2. Но, не говоря о том, что для больших пространств таких систем вообще не может быть, они наверняка не могут быть точно определены, а лишь приближенно.

Краус отмечает некоторое теоретико-познавательное различие между картинами первого и второго рода и считает картины первого рода ценнее, чем второго.

Ленард.— Только что сюда впутали принцип центра тяжести; я все же думаю, что это не окажет влияния на принципиальные вопросы.

И. Я. Итенберг, У. И. Франкфурт

К ИСТОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ ТОЧКИ (1905—1913)

Одним из первых откликов на работу А. Эйнштейна «К электродинамике движущихся тел» [1] явилась статья М. Планка «Принцип относительности и основные уравнения механики»[2]. М. Планк сразу же отметил значение принципа относительности. «Этот принцип, если он вообще оправдает себя, обусловливает такое великолепное упрощение всех проблем электродинамики движущегося тела, что заслуживает того, чтобы быть на переднем плане любого теоретического исследования в этой области». М. Планк поставил и решил фундаментальную задачу: какова должна быть форма основных уравнений механики материальной точки в релятивистской физике, исходя из справедливости принципа относительности. Он обратил внимание на то, что переход от уравнений в движущейся системе к уравнениям в покоящейся системе можно было бы сделать с помощью второго закона Ньютона и преобразований Лоренца. Однако такой путь неудобен, ибо при этом теряется самостоятельный физический смысл силы. М. Планк предложил другой путь. Он рассмотрел специальный случай, но такой, который не исключает общности рассуждений и справедлив для сил любой природы. Это — «влияние электромагнитного поля в вакууме на материальную точку m, заряженную количеством электричества e». Достоинства этого случая в том, что 1) электрону не приписывается никакой формы; 2) известна связь между компонентами силы в обеих систе-

[1] А. Эйнштейн. К электродинамике движущихся тел. Собр. науч. трудов, т. I. М., 1965, стр. 7.

[2] M. Planck. Das Prinzip der Relativität und die Grundgleichungen der Mechanik. Verhandl. Deutsch. Phys. Ges., 1906, 8, S. 136—141.

мах отсчета. Для пересчета компонент сил служат полученные Эйнштейном соотношения между напряженностями полей в покоящейся и движущейся системах. Для силы Планк выписывает лоренцовское выражение. После ряда выкладок Планк приходит к выражениям вида

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right)=X.$$

Паули позднее писал: «Сформулированное Планком определение силы, т. е. принятие для силы, действующей на произвольно движущийся заряд, лоренцова выражения

$$\boldsymbol{F}=e\left\{\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\left[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right]\right\},$$

является наиболее целесообразным и единственно естественным; именно, оказывается, что только при таком определении силы она может рассматриваться как производная по времени от импульса, остающегося постоянным для замкнутой системы» [1].

Заменив уравнение $\frac{d}{dt}(m\dot{x})=X$

уравнением вида

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right)X,$$

Планк тем самым обосновал релятивистскую механику материальной точки. В полученном им выражении содержится и зависимость массы от скорости и релятивистское выражение импульса, хотя сам Планк в рассматриваемой работе на это и не указывает. Паули писал: «Вытекающее из теории относительности обоснование лоренцева закона изменения массы без всяких специальных предположений о форме и распределении заряда электрона является ее несомненным успехом. О природе массы также не нужно делать никаких предположений; более того, полученное выражение справедливо для любой весомой массы». Тем самым, казалось, было покончено и с вопросом об отличии «истинной» «постоянной» массы

---

[1] В. Паули. Теория относительности. М.— Л., 1947, стр. 123.

от «кажущейся» электромагнитной. В 1907 г. А. Эйнштейн опубликовал работу «О принципе относительности и его следствиях»[1]. Этой статьей он сделал попытку «свести в единое целое работы, которые возникли до настоящего времени путем объединения теории Лоренца и принципа относительности». Он выделяет отдельно раздел «Механика материальной точки (электрона)».

А. Эйнштейн рассматривает случай, когда в электромагнитном поле движется частица с зарядом ε. Силу он определяет аналогично Планку и приходит к уравнениям движения:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\mu\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right\} = \varepsilon\left(X + \frac{\dot{y}}{c}N - \frac{\dot{z}}{c}M\right) = K_x;$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\mu\dot{y}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right\} = \varepsilon\left(Y + \frac{\dot{z}}{c}L - \frac{\dot{x}}{c}N\right) = K_y;$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\mu\dot{z}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right\} = \varepsilon\left(Z + \frac{\dot{x}}{c}M - \frac{\dot{y}}{c}L\right) = K_z,$$

где μ — масса частицы, X, Y, Z, L, M, N — соответственно составляющие вектора напряженности электрического и магнитного полей.

А. Эйнштейн отмечал, что эти уравнения «отчетливо выявляют аналогию... с уравнениями классической механики. Мы будем считать, что уравнения справедливы и в том случае, когда сила, действующая на материальную точку, имеет неэлектромагнитную природу. В этом случае уравнения не имеют физического смысла и их следует рассматривать как определение силы».

В упомянутой уже работе 1906 г. Планк сравнивает уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right) = X$$

[1] А. Эйнштейн. О принципе относительности и его следствиях. Собр. науч. трудов, т. I, стр. 65.

с уравнением движения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\right) = X$$

и получает релятивистское выражение для кинетического потенциала

$$H = -mc^2\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}} + \text{const}.$$

Отсюда легко получить и выражение для живой силы

$$L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} + \text{const}.$$

Из функции Лагранжа можно получить и функцию Гамильтона. Планк записывает выражение для функции Гамильтона и канонические уравнения движения Гамильтона. Этой работой он полностью обосновал динамику специальной теории относительности материальной точки в любом способе ее изложения (Ньютон, Лагранж, Гамильтон). Многие усматривали недостаток работы Планка в использовании им выводов электродинамики для обоснования механики и стремились найти иные пути построения релятивистской механики точки.

Следует отметить ряд работ Льюиса и Толмена. В 1908 г. Льюис опубликовал работу. «К пересмотру фундаментальных законов материи и энергии» [1]. Он отметил, что развитие физики за последнее время требует пересмотра принципов механики, установленных еще Ньютоном. Он ставит перед собой задачу построить новую механику на основе законов сохранения энергии, массы и количества движения. Эта механика должна учитывать прежде всего зависимость массы движущегося тела от его скорости. В первой части работы Льюис установил связь между массой и энергией. Он рассмотрел поглощение световых лучей черным телом. По теории Максвелла, такое тело испытывает давление или силу

$$f = \frac{dE}{V dt}, \tag{1}$$

[1] G. A. Lewis. Revision of the Fundamental Laws of Matter and Energy. Phil. Mag., 1908, 16, p. 705—717.

где dE/dt — скорость, с которой тело получает энергию, V — скорость света, и приобретает количество движения

$$\frac{dM}{dt} = f. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует

$$\frac{dE}{dM} = V; \tag{3}$$

вообще

$$\frac{E}{M} = V. \tag{4}$$

При этом неизбежен вывод: если излучение обладает энергией и количеством движения, то оно обладает и массой. Излучающее тело теряет энергию и количество движения; вместе с тем оно теряет массу, и наоборот. Величину массы легко найти. Количество движения

$$M = mV, \tag{5}$$

$$dM = dmV. \tag{6}$$

Подставляя в (3), получим

$$dm = \frac{dE}{V^2}. \tag{7}$$

Хотя эта величина мала (Льюис дает примерную оценку), пренебрегать ею не следует.

«Всякое изменение полной энергии тела сопровождается пропорциональным изменением его массы, независимо от рода и способа, которым получено это изменение». Льюис делает, таким образом, широкое обобщение, распространив свой вывод на любые явления. Масса тела — мера его энергии

$$m = \frac{E}{V^2}. \tag{8}$$

Льюис отмечает, что аналогичное выражение было получено Эйнштейном из электромагнитной теории с помощью принципа относительности и что Комсток [1] получил

$$m = \frac{4}{3}\frac{E}{V^2}.$$

---

[1] D. Comstok. The relation of mass to energy. Phil. Mag., 1908, 15, p. 1—21.

Вторая часть статьи посвящена построению неньютоновской механики. Важной аксиомой механики Ньютона является постоянство массы, независимость ее от скорости движущегося тела. Именно это положение должно быть подвергнуто пересмотру. В основе вывода Льюиса лежит понятие количества движения M, масса тела тогда

$$m = \frac{M}{v}\,. \tag{9}$$

Каждое движущееся тело обладает кинетической энергией E' и справедливы соотношения

$$dM = fdt, \tag{10}$$

$$dE' = fdl. \tag{11}$$

Из (10) и (11), считая массу переменной величиной, путем простых преобразований получаем

$$dE' = mvdv + v^2dm. \tag{12}$$

Это фундаментальное уравнение, связывающее энергию движущегося тела с его массой и скоростью. По уравнению (7) $dE' = dm\,V^2$ и тогда

$$dmV^2 = mvdv + v^2dm. \tag{13}$$

Полученное уравнение содержит две переменные величины m и v; после интегрирования получаем

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}\,, \tag{14}$$

где $\beta = v/V$. Это и есть общее выражение зависимости массы от скорости; m_0 — масса покоя.

Льюис получает выражение для энергии движущегося тела

$$E' = mV^2\,[1-(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}].$$

Он показал, что выражения для массы и энергии переходят в соответствующие выражения механики Ньютона при $v \ll V$.

В том же году Льюис опубликовал статью «Неньютоновская механика» [1], где повторил выводы своей преды-

---

[1] G. Lewis. Non-Newtonians Mechanics. Phys. Rew., 1908, **27**, p. 525—526.

дущей статьи. Он распространил их на любые явления и получил уравнения движения в виде

$$\frac{dv}{dt} = \frac{f}{m}(1 - \beta^2); \qquad \frac{dm}{dt} = \frac{f}{v}\beta^2.$$

Льюис и Толмен в 1909 г. писали в статье «Принцип относительности и неньютоновская механика» [1]. «Новая механика имеет прочную экспериментальную основу в опытах Кауфмана и Бухерера, в общепринятых законах сохранения». Особое место занимает другая статья «Принцип относительности и неньютоновская механика» [2]. Это была первая работа по обоснованию механики с помощью механических явлений.

Льюис, как мы видели, получил свои результаты исходя из предположения относительно массы пучка света и законов сохранения массы, количества движения и энергии. Эйнштейн вывел, как известно, те же результаты из «принципа относительности» и электромагнитной теории. Льюис и Толмен в рассматриваемой работе пришли к тем же выводам на основании законов сохранения и принципа относительности.

Статья Льюиса и Толмена состоит из двух частей:
1) «Единицы пространства и времени»,
2) «Неньютоновская механика».

В первой части устанавливаются соотношения между единицами пространства и времени для разных инерциальных систем отсчета. Так как нельзя обнаружить абсолютное поступательное движение, то единственным движением, имеющим физическое значение, является движение одной системы относительно другой. Для вывода указанных соотношений анализируется мысленный эксперимент с двумя плоскими зеркалами, движущимися параллельно друг другу с постоянной относительной скоростью.

Пусть наблюдатель системы A посылает к зеркалу системы B пучок света. Этот пучок отражается от зеркала в B и возвращается к наблюдателю системы A. Наблю-

---

[1] G. Lewis, R. Tolman. The prinziple of relativity and non-Newtonians Mechanics. Proc. Amer. Akad., 1909, 44, p. 709—724.

[2] G. Lewis, R. Tolman. The prinziple of relativity and non-Newtonians Mechanics. Phil. Mag., 1909, 18, p. 510—523.

датель системы A измеряет время, затраченное светом для прохождения пути туда и обратно. Он считает свою систему покоящейся, а систему B движущейся. Поэтому для него в A свет идет по перпендикуляру к плоскости зеркал. И он считает, что если бы такой эксперимент произвел наблюдатель в движущейся системе B, то свет для того, чтобы вернуться к исходной точке, должен пройти более длинный путь. Путь света представлялся бы для наблюдателя в B двумя равными сторонами равнобедренного треугольника. Наблюдатель в B отмечает больший интервал времени, чем наблюдатель в A. Сопоставив свои результаты, наблюдатели в A и B обнаружат, однако, их совпадение. Такое совпадение следует из принципа относительности. Наблюдатель в A может объяснить это совпадение, только предположив, что часы наблюдателя B идут медленнее его часов. Наблюдатель в B, рассуждая аналогично, придет к такому же выводу о часах наблюдателя A. Различие в истолковании результатов связано с тем, что каждый наблюдатель произвольно считает себя в покоящейся системе. Если принять, что, например, система A покоится для каждого наблюдателя, то тогда следует, что часы в B идут медленнее.

Из простых геометрических соображений Льюис и Толмен получили: секунда, измеренная движущимися часами, относится к секунде, измеренной покоящимися часами, как $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Из аналогичного мысленного эксперимента получается соответствующее отношение между единицами длины в разных системах. Льюис и Толмен подчеркивают совершенно различный смысл идеи сокращения у Лоренца и Эйнштейна. «Хотя эти изменения в единицах пространства и времени представляются в известном смысле психологическими, все же лучше принять этот взгляд, чем совершенно отказаться от основных понятий пространства, времени и скорости, на которых построена современная физика. В настоящее время другого выбора нет».

Во второй части работы разбирается мысленный эксперимент, из которого устанавливается выражение для импульса релятивистской механики.

Два наблюдателя A и B движутся относительно друг друга со скоростью q. A бросает упругий шарик по направлению системы B, перпендикулярно скорости q.

Масса и скорость шарика, измеренные A,

$$m_A = m,$$

$$v_A = v.$$

Одновременно B бросает перпендикулярно к q такой же шарик по направлению к A,

$$m_B = m,$$

$$v_B = v.$$

Столкновение шаров происходит так, что направление удара перпендикулярно q, составляющие количества движения в направлении q из-за удара не меняются. По принципу относительности из-за полной симметрии систем A и B следует, что каждый наблюдатель для своего шара измерил одно и то же изменение скорости $(v - v')$. Если же наблюдатель A, считая себя в покое, подсчитает изменение скорости шара B, то он получит $(v - v')\sqrt{1-\beta^2}$. Тогда из закона сохранения количества движения следует, что

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \left(\text{где } \beta = \frac{q}{V}\right).$$

Льюис и Толмен считают совпадение результатов опытов Бухерера с полученной ими формулой подтверждением их вывода и принципа относительности вообще.

Получив выражение для массы, Льюис и Толмен находят выражения для силы, кинетической энергии и полной энергии. Затем, с помощью простых преобразований, выражение $\frac{E - E_0}{m - m_0} = c^2$. «Мы приходим к важному заключению: когда система приобретает энергию в какой бы то ни было форме, она всегда приобретает пропорциональное количество массы. Мы можем считать массу всякого тела мерою его полной энергии».

Паули отмечал, что этой статьей «доказана возможность обосновать релятивистскую механику независимо от электродинамики» [1].

В 1905 г., вскоре после появления основной работы Эйнштейна по СТО, была опубликована его статья «За

---

[1] В. Паули. Теория относительности. М.— Л., 1947, стр. 175

висит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии»[1], в которой с помощью принципа относительности установлена связь между массой и энергией тела. Хотя Эйнштейн получил формулу связи между массой и энергией, рассмотрев процесс излучения телом энергии, он распространил свои выводы на любые процессы. «Несущественно, что энергия, взятая у тела, прямо переходит в лучистую энергию излучения, так что мы приходим к более общему выводу. Масса тела есть мера содержащейся в нем энергии; если энергия меняется на величину L, то масса меняется соответственно на величину $L/(9\cdot10^{20})$, причем здесь энергия измеряется в эргах, а масса в граммах».

В 1906 г. Эйнштейн посвящает этому же вопросу — инерции энергии — работу «Закон сохранения движения центра тяжести и инерция энергии»[2], где для доказательства инерции энергии он не пользуется принципом относительности. Он исходил из уравнений Максвелла и и справедливости закона движения центра тяжести и для электродинамических процессов. Лауэ впоследствии указывал, что эта вторая работа является более приближенной, «но ... имеет то преимущество, что она более интуитивна и избегает релятивистских обоснований»[3]. Эйнштейн рассмотрел вначале наглядный и простой пример с покоящимся в пространстве произвольным полым цилиндром и получил выражение для инерции энергии $\frac{E}{V^2}$. Затем он переходит к общему случаю. Он рассмотрел систему материальных точек, имеющих заряд; точки взаимодействуют между собой не только с помощью механических сил, но и электродинамически. К ним Эйнштейн применяет уравнения Максвелла. После математических преобразований он получил выражение для инерции энергии $\frac{E}{V^2}$.

Эйнштейн замечает в конце статьи: «Если каждой энергии E приписать инертную массу $\frac{E}{V^2}$, то по крайней мере в первом приближении закон сохранения движения

---

[1] А. Эйнштейн. Собр. науч. трудов, т. I, стр. 36.
[2] Там же, стр. 39.
[3] М. Лауэ. Инерция энергии. Статьи и речи. М., «Наука», 1969, стр. 186.

центра тяжести будет справедлив также и для систем, в которых происходят электромагнитные процессы». И далее «...нужно либо отказаться от основного положения механики, согласно которому первоначально покоящееся тело, не подвергающееся воздействию внешних сил, не может прийти в состояние поступательного движения, либо принять, что инерция тела зависит указанным образом от содержащейся в нем энергии».

К инерции энергии Эйнштейн снова возвращается в статьях «Об инерции энергии, требуемой принципом относительности» и «О принципе относительности и его следствиях», получив тот же результат из других примеров. Для системы материальных точек Эйнштейн получил выражение

$$E = \left(\mu + \frac{E_0}{c^2}\right) \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$$

и

$$M = \mu + \frac{E_0}{c^2}.$$

Эйнштейн отмечал: «В последнем соотношении инертная масса и энергия физической системы выступают как однородные члены. Масса эквивалентна в смысле инерции количеству энергии μc^2; естественно считать, что всякая инертная масса представляет собой запас энергии».

М. Лауэ позднее отметил: «Представление о массе, составлявшее прежде основное представление в физике и меру количества вещества как такового, низвелось до второстепенной роли. Закон сохранения массы оказался излишним, потому что энергия тела может изменяться при передаче тепла или работы. Все, что осталось от этого закона, включил в себя закон сохранения энергии. С другой стороны, представление об энергии необычайно расширилось. Мы можем определить полное содержание энергии в теле по его массе. Существуют не просто разности энергии, как это было раньше, — энергия приобрела физически осмысленное абсолютное значение».

Н. Кэмпбелл в статье «Теория относительности и сохранение импульса»[1] оспаривал результат Льюиса и

[1] N. Campbell. Relativity and the Conservation of Momentum. Phil. Mag., 1911, 21, p. 626—630.

Толмена. Он считал, что Льюис и Толмен не учли влияния скоростей до и после столкновения на массу шаров. Кемпбелл критикует термин «реальное изменение скорости», употребляемый Льюисом и Толменом. «Когда он (Толмен) приступает к подсчету «реального изменения», не объясняя, что он понимает под этим термином, я подозреваю, что он употребляет слова, которым не может сопоставить какого-либо значения».

Кэмпбелл, рассматривая эксперимент Льюиса и Толмена, пришел к результату $m/m_0 = 1$. Он считал, что результат Льюиса и Толмена противоречит закону сохранения количества движения, когда 1) скорости шаров до и после удара сравнимы со скоростью света, 2) когда удар происходит по направлению относительной скорости. Выводы Кэмпбелла были ошибочны, его возражения относились больше к форме доказательства. Р. Толмен в статье «Неньютоновская механика. Масса движущегося тела» [1], отвечая на возражения Кэмпбелла, показал, что полученное выражение для массы справедливо для любого типа соударений. В этой же статье Толмен возражал против концепции двух масс: продольной и поперечной. Он полагал, что поскольку масса — величина, удовлетворяющая закону сохранения, то она должна быть выражена одной формулой, пригодной при любом направлении движения. Такой формулой должно быть полученное Льюисом и Толменом выражение

$$m = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Упругое столкновение двух тел в теории относительности было строго разобрано Ф. Юттнером в статье «Законы удара в лоренц-эйнштейновской теории относительности» [2]. Эта задача была поставлена перед ним М. Планком в 1910 г. Теория столкновений привела к весьма плодотворным результатам не только в механике, но и в дру-

---

[1] R. Tolman. Non-Newtonians Mechanics. The Mass of a Moving Body. Phil. Mag., 1912, 23, p. 375—380.

[2] F. Jüttner. Die Gesetze des Stosses in der Lorenz — Einsteinischen Relativitätstheorie. Zeitschr. f. Math. u. Phys., 1913, 62, S. 410—433.

гих областях физики (кинетическая теория). Поэтому очень важно было распространить ее и на теорию относительности.

Ф. Юттнер обсудил упругий удар двух однородных шаров. Вначале он рассмотрел центральный удар, когда центры обоих шаров движутся вдоль оси x некоторой инерциальной системы координат. В основу решения задачи положены законы сохранения импульса системы тел и энергии и релятивистские выражения для импульса и энергии

$$r = \frac{u}{\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Здесь m — масса покоя шаров, L — энергия, u — скорость, r — отнесенный к единице массы релятивистский импульс.

На основании законов сохранения получаем

$$m_1r_1 + m_2r_2 = m_1r_1' + m_2r_2',$$

$$L_1 + L_2 = L_1' + L_2';$$

m_1 и m_2 — массы покоя шаров, которые не изменяются при ударе вследствие сохранения энергии покоя.

Из этих уравнений следует решение поставленной задачи. Для решения Юттнер пользуется подстановкой $\operatorname{tg} \eta = \frac{u}{c}$, где η — гиперболический «угол скоростей» (двойной гиперболический сектор), тогда $r = c \sin \eta$ и $L = mc^2 \cos \eta$. В результате решения получаются выражения для u_1' и u_2', которые переходят в соответствующие выражения классической механики для u_1' и u_2'.

Ф. Юттнер рассмотрел и более общий случай нецентрального удара и дал для него строгое решение.

Использование соударений тел для обоснования релятивистской механики связано с тем обстоятельством, что в этом случае исключается «дальнодействие». Но более важным представляется использование законов сохранения, справедливость которых не подлежит сомнению. Из них неизбежно следует зависимость массы от скорости.

М. Джеммер писал, что «... допущение о независимости массы от скорости несовместимо с L-ковариантностью теоремы сохранения. Таким образом, теория относительности оказалась перед выбором: либо отбросить ковариантную теорему сохранения линейного импульса, либо принять вывод, что масса есть величина, зависящая от скорости. Вторая альтернатива оказалась более удобной в методологическом отношении» [1].

В 1909 г. М. Борн опубликовал статью «Инертная масса и принцип относительности» [2]. Появление этой статьи связано с обсуждавшимся тогда вопросом о природе массы электрона. Абрагам развил теорию электрона, рассматривая последний как сферическое твердое тело. Некоторое увеличение его массы при движении с большими скоростями, которое наблюдалось в известных опытах Кауфмана, Абрагам пытался объяснить чисто электродинамическими процессами с помощью кинематических соотношений, заимствованных из обычной механики твердого тела. Эту дополнительную массу называли «электромагнитной», допуская, что электрону присуща некоторая масса m_0 — «инертная» масса, имеющая характер обыкновенной материи. После 1900 г. многие физики стали склоняться к мысли, что вся масса электрона имеет электромагнитную природу. В начале статьи Борн отметил, что электродинамика, построенная на принципе относительности, не сумела дать удовлетворительного объяснения инертной массе. Эйнштейн, Планк, Минковский преобразовали понятие массы таким образом, чтобы оно удовлетворяло принципу относительности, но без электродинамического объяснения этого понятия. Г. Минковский в своей работе «Основные уравнения электромагнитных процессов в движущихся телах» указал, как следует расширить принцип Гамильтона обычной механики, чтобы он удовлетворял принципу относительности. М. Борн поставил задачу сформулировать основной принцип динамики движущегося заряда таким образом, чтобы в него входили только электромагнитные величины, но не входила инертная масса. Для этого он использовал принцип Гамильтона в форме, данной Минковским. Борн особенно подчеркивал, что при этом не делается никаких предположений о форме и размерах электрона. Для вы-

---

[1] М. Д ж е м м е р. Понятие массы в классической и современной физике. М., 1967, стр. 169.

[2] M. B o r n. Die träge Masse und das Relativitätsprinzip. Ann. der. Phys., 1909, 28, S. 571—584.

вода уравнений движения движущегося заряда он использовал уравнения Максвелла, векторные и скалярные потенциалы, записав их по способу Минковского. Уравнения движения установлены в форме Минковского. Из них следует и закон сохранения энергии. В эти уравнения входит множитель μ, который может рассматриваться как плотность массы покоя. «Масса покоя оказывается для каждой пространственно-временно́й линии постоянной интегрирования; она может иметь любое значение, которое не обязательно, как в теории Абрагама, связано с формой и размерами представляемого атомистически электрона».

В работе 1909 г. «О сложении скоростей в теории относительности» [1]. Зоммерфельд опирался на идею Минковского, трактовавшего преобразование Лоренца как вращение в четырехмерном многообразии. Он подчеркивал, что пространственно-временны́е представления, развитые Минковским, не только облегчают систематическое построение специальной теории относительности, но и являются надежным путеводителем при решении трудных вопросов этой теории. Модифицируя идею Минковского, Зоммерфельд представляет преобразование нештрихованной системы в штрихованную, используя мнимые углы. В дальнейшем он писал об этом: «Мы отступаем, правда, тем самым от великого образца, данного Германом Минковским, который применял в своем классическом докладе «Пространство и время», прочитанном в 1908 г. в Кельнском обществе испытателей природы, исключительно действительные величины. То что мы назвали бы единичным кругом $x_1^2 + x_4^2 = 1$, является у него гиперболой $x^2 - c^2t^2 = 1$; две прямые, которые мы представляем ортогональными друг другу, были бы у него сопряженными диаметрами этой гиперболы» [2].

Выведенными преобразованиями Зоммерфельд пользуется для наглядной интерпретации относительности времени, сокращения Лоренца, теоремы сложения скоростей.

Сложение скоростей он трактовал как последовательное применение двух преобразований Лоренца, каждое

---

[1] A. Sommerfeld. Über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten in der Relativtheorie. Phys. Zs., 1909, 10, S. 826—829.
[2] А. Зоммерфельд. Электродинамика. М., 1958, стр. 312.

из которых означает некоторое вращение. Поскольку углы определяются дугами единичного круга, то сложение означает последовательное откладывание дуг на круге радиуса i. При сложении скоростей различных направлений следует перейти к сфере, и нахождение результирующей скорости сведется к построению сферического треугольника. Мнимость дуг, приводящих к введению шара радиуса i, обоснована метрическими соотношениями геометрии мира.

В 1910 г. Игнатовский в статье «Некоторые общие замечания к принципу относительности»[1] ставит вопрос, к каким уравнениям преобразования можно прийти, если поставить во главу исследований только принцип относительности, и только ли преобразования Лоренца удовлетворяют этому принципу. А. Эйнштейн, введя принцип относительности, одновременно предположил, что скорость света является универсальной константой для всех систем отсчета. Г. Минковский исходил в своих исследованиях из инвариантности выражения $r^2 - c^2t^2$, где c — скорость света. Игнатовский отмечает, что, судя по докладу «Пространство и время» Г. Минковского, он рассматривал величину c скорее как универсальную постоянную, чем просто скорость света. Игнатовский рассмотрел две движущиеся поступательно с постоянной скоростью по отношению друг к другу координатные системы. По принципу относительности эти системы совершенно равноценны. Он получил уравнения преобразования, подобные лоренцовским, но множитель $1/c^2$ заменен множителем n. Множитель n является универсальной физической константой, так как он получен не из каких-либо специальных физических условий. Поэтому численное значение и знак n должны определяться экспериментально из любых физических явлений, например из электродинамических уравнений для движущегося точечного заряда. Игнатовский получил, что $n = \frac{1}{c^2}$. Если n рассматривать как универсальную постоянную, то и c — универсальная постоянная для всех координатных систем, движущихся относительно друг друга с постоянной скоростью.

---

[1] W. V. Ignatowsky. Einige allgemeine Bemerkungen zum Relativitätsprinzip. Phys. Zs., 1910, 25, S. 972.

В 1910 г. В. Варичак отметил [1], что вывод теоремы сложения скоростей Зоммерфельдом с помощью сферической тригонометрии открывает новую интересную область применения неевклидовых геометрий. По его мнению, многие авторы, излагавшие специальную теорию относительности, не приписывали неевклидовой геометрии существенного значения в описании физических процессов. Так, например, Вин писал, что новая концепция пространства-времени не имеет никаких непосредственных точек соприкосновения с неевклидовой геометрией. Льюис рассматривал неевклидовы геометрии как простые логические комбинации, не имеющие никакого физического значения. Еще более резко писал Планк. Он считал, что релятивистская концепция времени «превосходит по своей смелости все, что было сделано до сих пор в области умозрительного естествознания и в философской теории познания; в сравнении с этим неевклидова геометрия, имевшая пока серьезное значение только для чистой геометрии, не больше, чем детская игрушка» [2].

Варичак стремился доказать, что геометрия Лобачевского является адекватным аппаратом исследования теории относительности. «Интересны аналогии, которые существуют между теорией относительности и геометрией Лобачевского. Формулы новой механики переходят в формулы механики Ньютона при $c = \infty$. Геометрия Лобачевского точно так же переходит в евклидову, когда некоторая константа — так называемый радиус кривизны пространства — принимает бесконечные значения» [3].

Варичак стремился расширить эту аналогию, ставя вопрос о том, нельзя ли было истолковать лоренцово сокращение как следствие геометрической анизотропии пространства. В теории относительности правило параллелограмма сил и скоростей не имеет места, в геометрии Лобачевского не существует вообще параллелограмма. В теории относительности, изжившей абсолютное из физики, существует одна абсолютная скорость — c; в геометрии Лобачевского существует абсолютная длина R.

---

[1] V. Varicak. Die Relativtheorie und die Lobatschefkijsche Geometrie. Phys. Ls., 1910, **11**, S. 93—96.

[2] М. Планк. Восемь лекций по теоретической физике. С.-Петербург, 1911, стр. 145.

[3] Паули. Теория относительности. М.— Л., ОГИЗ, 1957, стр. 112.

Варичак сделал при этом неверный вывод о тождественности геометрии мира Минковского и геометрии Лобачевского. Ф. Клейн доказал изоморфизм группы Лоренца и группы движения пространства Лобачевского и выяснил суть взаимосвязей мира Минковского и геометрии Лобачевского. В дальнейшем Паули писал: «Варичак установил также формальную связь геометрии Лобачевского — Больяи с преобразованиями Лоренца... связь с геометрией Лобачевского — Больяи, о которой идет речь, может быть кратко охарактеризована следующим образом (не замеченным Варичаком): если рассматривать dx^1, dx^2, dx^3, dx^4 как однородные координаты в проективном трехмерном пространстве, то инвариантность уравнения $(dx')^2 + (dx^1)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2 = 0$ означает введение метрики Кейли, при этом в основу кладется действительное коническое сечение. Все дальнейшее получается само собой на основании известных соображений Клейна».

На мысль о неевклидовом истолковании теории относительности Варичака натолкнуло то, что Минковский выразил отношение скоростей в виде гиперболического тангенса. Герглотц также сказал, что неевклидова геометрия полезна при сложении скоростей.

Робб ввел понятие «быстроты» и писал, что если v — абсолютная скорость частицы по отношению к системе, то обратный гиперболический тангенс называется «быстротой». Вместо евклидова треугольника скоростей получаем треугольник «быстрот» Лобачевского.

УДК 530.12

Переписка А. Эйнштейна и М. Борна. «Эйнштейновский сборник, 1971». Изд-во «Наука», 1972, стр. 7.

Перевод (с немецкого) недавно опубликованной переписки Борна и Эйнштейна с 1919 по 1926 г.

УДК 530.12

Макс Борн (к переписке с Эйнштейном). Френкель В. Я. «Эйнштейновский сборник, 1971». Изд-во «Наука», 1972, стр. 55.

Приведены краткие биографические сведения о Борне, история взаимоотношений Борна и Эйнштейна, Борна и советских физиков. Библ. 12 назв.

УДК 530.12

Системы отчета и конструктивный подход к наблюдаемым в общей теории относительности. Мицкевич Н. В. «Эйнштейновский сборник, 1971». Изд-во «Наука», 1972, стр. 67.

Проведено сопоставление четырех основных подходов к определению систем отсчета в теории относительности. В качестве иллюстрации их применения проанализирована ситуация, сложившаяся при анализе проблемы энергии (трудности определения и интерпретации соответствующих наблюдаемых величин). Обсуждена возможность обобщения понятия однородности пространства-времени при явном введении систем отсчета. Библ. 25 назв.

УДК 530.12

Геометрические свойства систем отсчета. Родичев В. И. «Эйнштейновский сборник, 1971». Изд-во «Наука», 1972, стр. 88.

Продолжено рассмотрение геометрических свойств систем отсчета, начатое автором в сборнике за 1968 г. Дан обзор различных геометрических отображений систем отсчета. Проведено общековариантное разделение понятий: координатная сетка, поле тетрад, система отсчета. Дано описание неинерциальных систем отсчета. Показано, что в зависимости от условий наблюдения силовое поле кинематически проявляет себя либо в виде поля ускорений, либо в виде кривизны пространства-времени системы отсчета. Библ. 7 назв.

УДК 530.12

Статистическая механика Гиббса и теория относительности. Мёллер Х. «Эйнштейновский сборник, 1971». Изд-во «Наука», 1972, стр. 114.

Показано, что релятивистское обобщение классической статистической механики Гиббса дает обоснование релятивистским величинам, используемым в релятивистской термодинамике. Илл. 1. Библ. 11 назв.

УДК 530.12

Термодинамические потенциалы в теории относительности и их статистическая интерпретация. Мёллер Х. «Эйнштейновский сборник, 1971». Изд-во «Наука», 1972, стр. 163.

Показано, что термодинамические свойства тела полностью определены релятивистскими инвариантными функциями Ф и Ψ переменных состояния. Эти функции представляют обобщение классической свободной энергии Гельмгольца и Гиббса. Если потенциалы Ф и Ψ известны, то все термодинамические величины, например 4-импульс, энтропия и т. д., могут быть получены частным дифференцированием потенциала по переменным состояния. Потенциалы Ф и Ψ имеют простую статистическую интерпретацию, если релятивистским образом обобщить классическую статистическую механику Гиббса. Библ. 12 назв.

УДК 530.12

Теория излучения Эйнштейна. Френк А. М. «Эйнштейновский сборник, 1971». Изд-во «Наука», 1972, стр. 192.

Показано исторически, что создание адекватной теории световых и атомных явлений было синтезом результатов, добытых в процессе развития двух основных направлений квантовой теории.

УДК 530.12

К вопросу об определении одновременности с помощью транспортировки часов. Молчанов Ю. Б. «Эйнштейновский сборник, 1971». Изд-во «Наука», 1972, стр. 226.

Обсуждаемые в литературе различные способы установления одновременности разноместных событий, а именно — сигнальный метод, предложенный Эйнштейном, и метод транспортировки предварительно синхронизированных часов основываются на различных концепциях времени. Сигнальный — на релятивистской концепции, в которой необходимое условие наличия временных отношений между событиями состоит в материальном воздействии их друг на друга, транспортировки часов — ньютоновской концепции абсолютного времени, которая провозглашает «равномерное протекание» времени в разных точках пространства. Проведен анализ обоих способов.

УДК 530.12

О системах отсчета классической механики. Линец А. М. «Эйнштейновский сборник, 1971». Изд-во «Наука», 1972, стр. 254.

Рассмотрены возможности устранения трудностей в классической механике, возникающих вследствие отсутствия конкретных представлений о системах отсчета. Илл. 2. Библ. 6 назв.

УДК 530.12

Геометрия Лобачевского и кинематика Эйнштейна. Смородинский Я. А. «Эйнштейновский сборник, 1971». Изд-во «Наука», 1972, стр. 272.

Рассмотрен метод решения задач релятивистской кинематики, основанный на использовании тригонометрии Лобачевского. Рассмотрены задачи рассеяния и распада частиц, релятивистский поворот спина, кросс-преобразование.

УДК 530.12

А. Эйнштейн об отношении геометрии к реальности. Чудинов Э. М. «Эйнштейновский сборник, 1971». Изд-во «Наука», 1972, стр. 302.

Аксиоматически построенная геометрия ничего не говорит о геометрической структуре реального физического пространства. По мнению Эйнштейна, она превращается в физическую геометрию после того, как мы используем в качестве координативной дефиниции конгруэнтности твердые тела. Рассмотрена эволюция взглядов Эйнштейна на роль твердых тел в эмпирическом обосновании физической геометрии, отношение Эйнштейна к конвенционалистской трактовке геометрии.

УДК 530.12

О применении идей многозначной логики и логики связей к анализу творчества А. Эйнштейна. Любинская Л. Н. «Эйнштейновский сборник, 1971». Изд-во «Наука», 1972, стр. 317.

Рассмотрены возможные характеристики понятия одновременности при помощи аппарата многозначной логики. Показан путь, намеченный Эйнштейном, представляющий поиск нетривиального использования логики отношений в физике.

УДК 530.12

Из дискуссий на Сольвеевском конгрессе 27—31 октября 1913 г. в Брюсселе. «Эйнштейновский сборник, 1971». Изд-во «Наука», 1972, стр. 323.

Дискуссии по докладам Дж. Дж. Томсона «Структура атома», Лауэ — «Интерференция рентгеновских лучей», Брэгга — «Отражение x-лучей и спектрометр для x-лучей», Барлау и Поппа и Бриллуэна — «Структура кристаллов и анизотропия молекул», Грюнейзена — «Молекулярная теория твердых тел».

УДК 530.12

Дискуссия по докладу Планка «Произведенные Кауфманом измерения отклонения β-лучей и их значение для динамики электрона» на 78-м собрании немецких естествоиспытателей и врачей в Штутгарте в сентябре 1906 г. «Эйнштейновский сборник, 1971». Изд-во «Наука», 1972, стр. 349.

В дискуссии участвовали: Кауфман, Планк, Бухерер, Рунге, Абрагам, Ганс, Зоммерфельд.

УДК 530.12

Дискуссия по докладу А. Эйнштейна «О развитии наших воззрений на сущность и структуру излучения» на 81-м собрании немецких естествоиспытателей и врачей в Зальцбурге в сентябре 1909 г. «Эйнштейновский сборник, 1971». Изд-во «Наука», 1972, стр. 354.

В дискуссии участвовали: Планк, Циглер, Штарк, Рубенс, Эйнштейн.

УДК 530.12

Дискуссия по докладу Э. Будде «К теории опыта Майкельсона» на 83-м собрании немецких естествоиспытателей и врачей в Карлсруе в сентябре 1911 г. «Эйнштейновский сборник, 1971». Изд-во «Наука», 1972, стр. 358.

В дискуссии участвовали: Лауэ, Будде, Абрагам.

УДК 530.12

Дискуссия по докладу А. Эйнштейна «К современному состоянию проблемы гравитации» на 85-м собрании немецких естествоиспытателей в Вене в 1913 г. «Эйнштейновский сборник, 1971». Изд-во «Наука», 1972, стр. 361.

В дискуссии участвовали: Ми, Эйнштейн, Рикки, Хазенорль, Земплен, Рейснер, Борн, Исгер.

УДК 530.12

Дискуссия по докладу Г. Вейля «Электричество и гравитация» на 86-м собрании немецких естествоиспытателей в Наугейме в сентябре 1920 г. «Эйнштейновский сборник, 1971». Изд-во «Наука», 1972, стр. 372.

В дискуссии участвовали: Паули, Эйнштейн, Вейль.

УДК 530.12

Общая дискуссия о теории относительности на 86-м собрании немецких естествоиспытателей в Наугейме в сентябре 1920 г. «Эйнштейновский сборник, 1971». Изд-во «Наука», 1972, стр. 375.

В дискуссии участвовали: Ленард, Эйнштейн, Рудольф, Палажий, Клаус.

УДК 530.12

К истории релятивистской механики точки (1905—1913). Итенберг И. Я., Франкфурт У. И. «Эйнштейновский сборник, 1971», Изд-во «Наука», 1972, стр. 380.

Дан исторический обзор релятивистской механики точки.

Эйнштейновский сборник, 1971

Утверждено к печати
Эйнштейновским комитетом
Академии наук СССР

Редактор *В. А. Никифоровский*
Художественный редактор *Н. Н. Власик*
Технический редактор *П. С. Кашина*

Сдано в набор 15/II-1972 г.
Подписано к печати 7/VII-1972 г.
Формат 84×108 1/32. Усл. печ. л. 21.
Уч.-изд. л. 20,3 Тираж 9700. Т-14003
Тип. зак. 221. Бумага № 1
Цена 1 р. 67 к.

Издательство «Наука»
Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука»
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ЭЙНШТЕЙНОВСКИЙ СБОРНИК

1971

Эйнштейновский сборник 1971 года открывается перепиской А. Эйнштейна и М. Борна.

В остальном содержание сборника традиционно: в него вошли статьи советских и зарубежных авторов, посвященные связанным с теорией относительности физическим и философским проблемам, и материалы дискуссии по различным проблемам физики в связи с именем Эйнштейна.

Издание рассчитано на научных работников, преподавателей и студентов физических, физико-математических, механико-математических факультетов и широкие круги читателей, интересующихся современной физикой.