

ЭЙНШТЕЙНОВСКИЙ
СБОРНИК

1975 • 1976

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОТДЕЛЕНИЕ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
ЭЙНШТЕЙНОВСКИЙ КОМИТЕТ

ЭЙНШТЕЙНОВСКИЙ СБОРНИК

1975—1976



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА
1978

Редакционная коллегия:

академик А. А. ЛОГУНОВ, академик В. Л. ГИНЗБУРГ,
академик М. А. МАРКОВ, академик АН Эст. ССР Г. И. НААН,
д. э. н. Б. Г. КУЗНЕЦОВ

Ответственные редакторы

В. Л. ГИНЗБУРГ, Б. Г. КУЗНЕЦОВ

Составитель

У. И. ФРАНКФУРТ

Эйнштейновский сборник 1975—1976

Утверждено к печати Отделением ядерной физики АН СССР

Редактор В. А. Никифоровский. Редактор издательства С. С. Матвеев

Художественный редактор Т. П. Поленова

Технический редактор П. С. Кашина. Корректоры Г. Н. Лац,

Л. И. Харитонова

ИБ № 7191

Сдано в набор 17.03.78. Подписано к печати 19.07.78. Т-08571

Формат 84×108¹/₃₂. Бумага типографская № 1. Гарнитура обыкновенная

Печать высокая. Усл. печ. л. 18,48. Уч.-изд. л. 19,2. Тираж 7100 экз.

Тип. зак. 249. Цена 1 р. 70 к.

Издательство «Наука». 117485, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 94а

Ордена Трудового Красного Знамени Первая типография

издательства «Наука». 199034, Ленинград, В-34, 9-я лин., 12

Переписка А. Эйнштейна и М. Бессо, 1903—1955	5
<i>Е. Л. Фейнберг</i>	
Можно ли рассматривать релятивистское изменение масштабов длины и времени как результат действия некоторых сил?	43
<i>С. И. Сыроватский</i>	
К вопросу о «запаздывании» релятивистского сокращения движущихся тел	78
<i>В. П. Фролов</i>	
Физика черных дыр: от Эйнштейна до наших дней	82
<i>С. Н. Столяров</i>	
Граничные задачи электродинамики движущихся сред	152
<i>Н. П. Коноплева</i>	
Об эволюции понятия инерции (Ньютон, Мах, Эйнштейн)	216
<i>В. П. Визгин</i>	
Теория тяготения на рубеже XIX и XX вв.	245
<i>А. Эйнштейн</i>	
Письмо К. Попперу	283
 ДИСКУССИЯ О ТВЕРДОМ ТЕЛЕ	
<i>М. Борн</i>	
Теория недеформируемого электрона в релятивистской кинематике	287
<i>М. Лауэ</i>	
К дискуссии о твердом теле в теории относительности	341
<i>П. Эренфест</i>	
К вопросу о трактовке Игнатовским борновского определения твердого тела	347
<i>В. Игнатовский</i>	
К трактовке борновского определения твердости (ответ П. Эренфесту)	349

66. ЭЙНШТЕЙН—БЕССО

Берлин, 5.11.1924

Дорогой Мишель!

Давно не писал тебе, а многое за это время пережил. Но внешние переживания остаются на поверхности, а главное — наука. Идея, над которой бьюсь, касается понимания сущности квантов; ее смысл: переопределение законов дифференциальными уравнениями, число которых превышает число переменных поля. Этим достигается понимание отсутствия произвольности начальных условий без отказа от теории поля. Конечно, этот путь может оказаться совершенно ошибочным, но он логически возможен, а поэтому должен быть испытан. От уравнения движения материальных точек (электронов) полностью отказываемся; механическое поведение последних определяется законами поля. Я вышлю тебе предварительную работу по этому вопросу, как только она будет опубликована **. Математическая часть очень сложна, а связь с опытом становится все более косвенной. Но все же это логическая возможность удовлетворить реальности без *sacrificium intellectus* ***.

Очень обрадовался тому, что ты пишешь о Веро и твоём маленьком внуке. Если ты не можешь дать последнему готовую жизненную мудрость, то это ничего не значит — он будет настолько благоразумен, чтобы не следовать ей...

Сердечный привет всем вам и счастливого 1924 года.

Твой Альберт.

* Продолжение. Начало см.: «Эйнштейновский сборник 1974». М., «Наука», 1976, с. 5. Пер. И. Л. Гандельсмана и В. Я. Френкеля.

** Арабскими цифрами далее помечены примечания издателя по реписки П. Спеццали. Буквой^(а) — примечания М.-А. Тоннела. Они приводятся в конце писем.

*** Жертва интеллекта (лат.).

Мой Альберт стал работающим крепким парнем. Гроссман писал мне, что он сдал экзамен¹ лучше всех своих товарищей. Он настоящий мужчина, превосходный яхтсмен, скромный и надежный.

1. По-видимому, экзамен по начертательной геометрии, которую преподавал Марсель Гроссман в федеральной политехнической школе в Цюрихе, где Альберт Эйнштейн-младший получал инженерное образование.

67. БЕССО—ЭЙНШТЕЙНУ

Берн, март, 1925

Дорогой Альберт!

I. Мой хороший знакомый, доктор Вислер, заместитель директора швейцарской национальной библиотеки, обратился ко мне за получением полного списка твоих трудов; он хочет также знать, какими способами и путями можно приобрести те из них, которых уже нет в продаже. Одновременно он сообщил о работах, имеющихся в библиотеке; этот список прилагаю к письму. Поскольку мне хотелось бы выполнить его просьбу, а моя собственная коллекция, с помощью которой можно было бы дать нужную информацию, как тебе известно, пропала в смутные времена войны, я позволяю себе обратиться непосредственно к источнику. Может быть, тебе известны владельцы изданий, которые бы согласились за деньги и несколько благодарственных слов уступить их. Например, семь недавно почивших физиков.

II. С нетерпением ожидаю обещанную работу, несмотря на то, что намек на математические трудности «пугает» меня. Может быть, ты еще попытаешься объяснить мне логическую возможность с помощью наипростейшего примера. Дифференциальные уравнения первого порядка в частных производных естественно дают значения переменных поля, соответствующих системе бесконечно близких гиперповерхностей. Другое условие даст другую систему гиперповерхностей, и они пересекутся лишь вдоль образований низшего порядка. Но, с одной стороны, мне кажется, что это лишь формально имеет отношение к теории поля; с другой стороны, я еще не вижу, как можно достигнуть на этом пути чего-то, соответствующего квантовым орбитам. Вывод:

я радуюсь получению работы и разъяснений ad usum delfini *.

III. Радуюсь вестям о твоём Альберте; они полностью соответствуют нашим ожиданиям. Я очень хотел бы знать, по какому руслу пойдет его жизнь. Что касается моей молодежи, то я совершенно не жалею, что не могу оставить им в наследство нечто вроде «Максим» Ларошфуко, которым все равно не следуют. Скорее, думаю о принципах простого и обычного образа жизни, которые и мы унаследовали от предков через своих родителей. Я постепенно стремлюсь преодолеть свое отвращение к порядку в духе этого совета. Формы будущей жизни напоминают неощутимую паутину из простых систем направлений. Так выглядит становление и трудно отличить от *Hommage que le vice rend à la vertu*¹.

IV. Еще не объяснил, почему ты получишь письмо, написанное карандашом и, по правде говоря, не мною. Неделю назад я подвергся операции по поводу грыжи, а теперь быстро выздоравливаю.

Сердечный привет от твоих

Мишеля и Анны.

1. «Уважения, которое порок платит добродетели». Часть максимы 218 Ларошфуко: «Лицемерие — это дань уважения, которую порок платит добродетели».

68. ЭЙНШТЕЙН—БЕССО

Киль, 24.5. 1925

Дорогой Мишель!

Знаю, что ты мне писал дважды, но ответил ли я, не помню. Возможно, я не писал после твоей операции. После чудесного путешествия в Японию, где я впервые увидел особое человеческое общество, веду тихую жизнь без внешних событий. Единственные перерывы — мои поездки в Киль, где я понемногу освежаю свои технические навыки. В плане научном я почти непрерывно отдаюсь квантовой проблеме и действительно думаю, что

* Для использования дофином (лат.); ироническое выражение, относящееся к произведениям, опубликованным с купюрами или адаптированным для определенной цели. — *Прим. пер.*

нахожусь на правильном пути, — или это не так. Лучшее, чего я достиг в последнее время, была статья 1922 г. в *Physik. Zeitschr.* Мои новые усилия ведут к объединению квантов с максвелловским полем. Из экспериментальных результатов последнего времени значительны только опыты Штерна и Герлаха¹, а также опыт Комптона² (рассеяние рентгеновских лучей с изменением частоты); первые доказали, что существуют лишь квантовые состояния, а второй подтвердил реальность импульса световых квантов.

Национальной библиотеке я послал свои сочинения как раз перед тем, как для моих книг вновь наступил период беспорядка из-за свадьбы моей падчерицы Ильзы. Здоровье у меня хорошее, и вообще во всех отношениях все хорошо. Особенно меня радуют сыновья, действительно очень удачные, так что Нобелевская премия, которую я передал первой жене, не окажется для них роковой. Политическая обстановка стала спокойнее, и, слава богу, толпа стала меньше волноваться вокруг меня, так что и моя жизнь стала более спокойной: мне меньше мешают. Своим голосованием Франция показала, что переварила свою победу. Избранным можно сделать тот комплимент, что они являются наименьшим злом; во всяком случае, так кажется мне.

Сердечно приветствую Анну, Веро, тебя и всю семью.

Твой Альберт.

Привет Шауэнбергу, Зауберу, Блау и Шенку³.

1. Опыты Штерна и Герлаха, доказавшие существование пространственного квантования, были выполнены в 1922 г.

2. Рассеяние рентгеновских лучей с изменением частоты (эффект Комптона) было открыто и измерено (изменение частоты зависит от угла рассеяния) в 1923 г. Артуром Комптоном, который построил и теорию одновременно с П. Дебаем.

3. Старые коллеги Эйнштейна по патентному бюро. Отметим, что Заубер (1871—1961) разработал механическую систему, приводящую к дифференциальным уравнениям вида максвелловских (*Ann. d. Phys.*, 1901, 6, 331—338. Интерпретация уравнений Максвелла для электромагнитного поля в неподвижных изотропных средах). Ему же принадлежит интересная статья «Как я познакомился с Эйнштейном», опубликованная в апреле 1966 г.

Берлин, 5.6.1925

Дорогой Мишель!

Первого июня вернулся из Южной Америки. Была большая суета без чего-либо по-настоящему интересного, но зато несколько недель отдыха во время морского путешествия. Я твердо убежден, что вся цепочка идей Вейль—Эддингтон—Схоутен не ведет ни к чему физически полезному, и пошел теперь по новому следу, физически более обоснованному. Мне кажется, что квантовая проблема требует введения чего-то вроде особого скаляра, и я теперь нашел для этого приемлемый путь. Кроме того, я разработал и развил некоторую квантовую теорию идеального газа¹, результаты которой сейчас представляются обоснованными. О Пикаре я также давно ничего не слышал. Сообщенные им пока почти достаточно точные результаты были отрицательными². Но, возможно, соотношения между порядками величин случайны.

Я приеду в Швейцарию на заседание Лиги Наций³, если только оно не состоится в Париже. Достижения Лиги Наций в большой политике, к сожалению, столь бедны, что все привыкли их считать пренебрежимо малой величиной. Я почти желал бы себе не возвращаться в нее.

Чтобы радоваться Европе, надо посетить Америку. Действительно, там люди более свободны от предрассудков, но зато в большинстве более пусты и менее интересны, даже чем у нас...

Приветствую всех вас.

Альберт.

1. Квантовая теория одноатомного идеального газа. — Sitzungsber. d. Preuss. Ak. d. Wiss., 1925, 18—25.

2. Речь идет о швейцарском физике Огюсте Пикаре (1884—1962), пионере изучения стратосферы и морских глубин*.

3. С июля 1924 г. Эйнштейн вновь состоял членом комиссии Лиги Наций по интеллектуальному сотрудничеству.

* Представляется, что, скорее, речь идет об опытах Пикара и Стаэля, повторивших опыт Майкельсона—Морли с интерферометром, установленным на воздушном шаре. Их опыты, продолжавшиеся до 1927 г., дали отрицательный ответ на вопрос о существовании эфирного ветра. Этим подтверждались результаты специальной теории относительности. — Прим. пер.

Берн, 9.6.1925

Дорогой Альберт!

Прежде всего хочу поблагодарить тебя за письмо; на какое число намечено заседание, которое, возможно, приведет тебя сюда?

Твое убеждение, что общая геометрия Схоутена не по-дает надежды найти подходящую общую картину физической реальности—сингулярные точки, естественно, исключаются, — основано на твоих многолетних исследованиях на той же основе. Было бы чрезвычайно важно зафиксировать ход мыслей, приведших к этому отрицательному результату, отношению к мнимым предположениям, отпугивающим хотя бы из-за изобилия возможностей. Твое выражение «чего-то вроде особого скаляра», по-видимому, скрывает интересные вещи.

В беседах с Заутером и проф. Гонзетом¹ я чисто логически пришел к ряду вопросов: 1) заняла ли метрика подобающее ей место в исследованиях Схоутена, или, скорее, наряду с общей аффинной геометрией возможна и общая метрическая геометрия, охватывающая случаи, в которых понятие параллельности столь же бессодержательно, как в неметрической геометрии перенос масштаба? 2) не должно ли оценочное выражение для квантовых количеств взорвать 4-мерность в смысле фазового пространства примерно так, что 4-мерность может означать лишь пространство с $4N$ измерениями соответственно положению и что она проявляется лишь при приближении к дискретной области? 3) не сводятся ли логические трудности с непрерывностью к существенно другому математическому способу рассмотрения, верно приспособленному к дискретной реальности? Странно, какими осведомленными стали чистые логики, но эта осведомленность (допущение бесконечных числовых рядов, вопреки всем действительно строгим логикам, не причиняет им видимой боли) ни в чем им не помогает.

Написан ли Евклид общей теории относительности? Настоящая логическая книга для homo mathematicus? Второй том Лауэ я не читал. Существует ли он?

Рассказал ли я тебе уже, что пустился в странную авантюру? Месяца четыре тому назад, дойдя до нулевой точки работоспособности, решил на визит к молодому

психоаналитику, внушавшему доверие. Практически уже само решение чудом подействовало — дальнейшее было для меня очень интересно, ибо внесло определенный порядок в мои воспоминания и стремления. Надеюсь, что следствием будет существенное улучшение моей работоспособности и главным образом улучшение плодотворных отношений с людьми, прежде всего с самим собой — исключение всяческих комплексов и абсурдностей.

В настоящее время мне мерещится одно предприятие большого масштаба: написать очерк обо всем, что касается охраны прав изобретателей, с особым выделением пунктов, в которых французское, американское и немецкое патентное право будет рассматриваться в применении к швейцарским покупателям патентов и к швейцарскому патентному праву². Хочу заинтересовать этим бывших политехников. . .

Ты, если приедешь, обязательно должен увидеть моих внуков. Сердечный привет от Анны.

Мишель.

Ты уже знаешь, что в этом семестре Альбертик слушает мой курс по субботам с 7 до 8? Значит, он не теряет времени. Оба мальчика меня радуют.

1. Фердинанд Гонзет в течение 1924 г. прочел в Берне ряд докладов, исправленный и дополненный текст которых был опубликован в Париже в 1926 г. под названием «Основы математики. От геометрии Евклида до общей теории относительности и интуиционизма», с предисловием Ж. Адамара. Во введении Гонзет благодарил Бессо. В этой книге Бессо мог найти ответ на некоторые из поставленных в письме вопросов.

2. План не был реализован. Сохранилась обширная переписка, свидетельствующая о больших усилиях, которые прилагал Бессо для его осуществления.

Женева, 28.7.1925

Дорогой Мишель!

Я намеревался тебя навестить в Берне по случаю сессии комиссии по интеллектуальному сотрудничеству, но теперь это не удастся, так как мальчики ждут меня с нетерпением, и я должен обязательно навестить Милеву и Гроссмана, который очень болен. Сразу после этого должен ехать в Киль. С удовольствием хотел устно представить тебе снесенное мною недавно яйцо, но теперь делаю это письменно.

Мы вводим независимо друг от друга аффинную связь ($\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$) и тензор (g_{uv} , соответственно $g^{uv}g^{uv}$) и требуем для произвольной (независимой) вариации g^{uv} и $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ осуществления вариационного принципа

$$\delta(g^{uv}R_{\mu\nu}d\tau) = 0, \text{ где } R_{\mu\nu} \text{ — тензор Римана — } \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial X_\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta.$$

Если допустить, что g^{uv} и $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ симметричны, получаем старый закон гравитации для пустого пространства. Если же отказаться от допущения симметрии, то в первом приближении получаем законы гравитации и максвелловские законы поля для пустого пространства, причем антисимметричная часть g^{uv} представляет электромагнитное поле. Это замечательная возможность, которая может соответствовать реальности. Теперь вопрос в том, совместима ли такая теория поля с существованием атомов и квантов. Не сомневаюсь в ее правильности для макроскопического мира. Если бы расчет конкретных задач был проще! Но все это пока предварительно^(а).

Не сердись и будь уверен, что я с тяжелым сердцем проезжаю мимо вас.

Сердечно приветствую тебя и твоих.

Альберт.

Написал это письмо во время скучного заседания Лиги Наций.

^(а) Смешанная унитарная теория (выводы получаются независимой вариацией метрики и асимметричного добавления), которая была предложена в 1925 г., наметила некоторые аспекты последней попытки Эйнштейна создать единую теорию поля (1945).

Берн, 2.8.1925

Дорогой Альберт!

Из открытки, которую я послал на авось в Киль, где, судя по его словам при прощании после моей последней лекции в Цюрихе, должен был находиться Альберт-младший, а случайно и ты, тебе уже известно, что твое письмо из Женевы от 28 июля я получил с благодарностью и «Fuchti»¹. В случае необходимости я бы с удовольствием пропутешествовал целую ночь, чтобы провести с тобой несколько часов.

Повторю написанное в открытке на случай, если ты ее не получил. Я просил разрешения поговорить с Гонзетом о содержании твоего письма, но не написал о главном, а именно, почему я бы это сделал с особым удовольствием. Для понимания твоего сообщения я должен знать смысл обозначения $g^{\mu\nu}$. Где можно это узнать? Об этом хотел спросить прежде всего Гонзета. Кроме того, думаю, что с его энергией и проворством он бы воспользовался новым путем. Теперь о том, что я, кажется, понял.

В $g^{\mu\nu}$ фигурируют как «равноправные» гравитационное и электромагнитное поля в противоположность формальному (я бы сказал, геометрическому) элементу, представленному Γ . Ты говорил, что Γ и g , соответственно g , «независимы друг от друга». Но не в любом смысле, поскольку вариационный принцип их связывает, независимо от произвольности элемента. . . что отражает произвольность выбора координат. Напиши мне несколько следующих друг за другом уравнений, чтобы я увидел, что варьируется и как вырастают отсюда оба результата.

Как я тебе уже писал, для меня остается загадкой в самой основе теории, какие вещи должны быть в пространстве, будь то, как в рассуждениях Рейхенбаха—Вейля², лишь само пространство или, как на твоем новом пути, — нечто пространственное (ибо g все еще . . .?). Но нет. Речь идет о том, чтобы отказаться видеть в $g^{\mu\alpha}$ представителей геометрии. Мы будем вновь знать, что следует рассматривать как содержащее и что как содержание. Суть заключается в том, чтобы рассматривать, как мы уже привыкли, $g^{\mu\nu}$ -поле как $f^{\mu\nu}$ -поле. Γ вступают на место g . Но измерения остаются все же выраженными в g ? (Линейный элемент)^(*).

Расскажи мне продолжение и скажи, кому и что я могу сообщить. Что касается меня, то Альберт-младший тебе, очевидно, уже говорил о моих попытках и усилиях, которые отражены на прилагаемом листе . . .

Сердечный привет тебе и всем твоим также и от Анны.

Мишель.

1. Все усилия выяснить значение этого слова в немецких диалектах не увенчались успехом. Может быть, это слово было изобретено и использовано Эйнштейном и Бессо в период их совместной работы в бюро патентов.

2. См.: *H. Reichenbach. La signification, philosophique de la théorie de la relativité. — Revue philosophique, 1922, 93, 5—242.*

(*) Готическое обозначение $g^{\mu\nu}$, которое не было известно Бессо, представляет «тензорную плотность» $g^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$. Бессо не заметил, что метрика и аффинная связность могут трактоваться а priori как независимые переменные. Вариации $\delta\Gamma$ и δg дают, с одной стороны, уравнения связи, определяющие связность как функцию метрики, и, с другой стороны, уравнения поля, позволяющие определить метрику.

73. ЭЙНШТЕЙН—БЕССО

Киль, 4.8.1925

Дорогой Мишель!

Очень жалею, что не смог тебя навестить. Но было так мало времени, к тому же я должен был навестить Милеву и Гроссмана, который болен ¹ (паралич и тяжелые недостатки речи). О научном деле можешь говорить со всеми, но вопрос об электроне хочу исследовать сам, хотя бы ради моего соавтора ².

Сердечный привет.

Альберт.

1. После многих лет болезни и физических страданий Марсель Гроссман скончался в 1936 г.

2. Речь идет о Я. Громмере.

Берлин, 25.12.1925

Дорогой Мишель!

Сердечные новогодние поздравления. Самое лучшее, что произошло за последнее время, — это договор в Локарно. Сегодня политики разумнее профессоров. . . Думаю, что опыты Миллера основаны на ошибках из-за температуры¹. Никогда не принимал их всерьез. От своей работы в духе Эддингтона я вынужден был отказаться. Вообще я теперь убежден, что с комплексом идей Вейля—Эддингтона, к сожалению, ничего нельзя сделать. Считаю уравнение

$$R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R = -T_{ik} \text{ (электромагнитно) почти лучшим}$$

из имеющегося сегодня в электромагнетизме. Имеем 9 уравнений для 14 величин $g_{\mu\nu}$ и $\gamma_{\mu\nu}$. Из новых расчетов, кажется, следует, что эти уравнения дают движение электрона. Но сомнительно, найдется ли здесь место для квантов.

Самое интересное теоретическое достижение последнего времени—это теория квантовых состояний Гейзенберга—Борна—Иордана. Настоящее колдовское исчисление, в котором вместо декартовых координат появляются бесконечные определители (матрицы). В высшей степени остроумно и благодаря своей сложности застраховано от доказательства ошибочности.

Сердечно приветствую тебя с Анной и Веро.

Твой Альберт.

1. Д. Миллер в 1920—1926 гг. предпринял повторение опытов Майкельсона и утверждал, что ему удалось обнаружить выходящий за пределы ошибок измерения эфирный ветер. Это утверждение не без оснований оспаривалось многими физиками. В конце концов оправдалось предположение Эйнштейна, что положительный результат был обусловлен неучтенными изменениями температуры.

Берн, 18.1.1926

Дорогой Альберт!

Большое спасибо за твое письмо от 25.12.

«Никогда не уставайте делать добро» — сразу последуют дальнейшие требования. Итак: тебе не удастся растворить в геометрии мира электромагнитное поле, подобно гравитационному. T_{ik} существуют в пространстве и определяют его соответственно g_{ik} . Но как определяется электромагнитное? Просто по Максвеллу?

Ты бы сделал замечательный подарок не только мне, но и всем интересующимся физикой, если бы пояснил, что тебя не удовлетворяет в исследованиях Вейля, Эддингтона и твоих собственных. Ведь не может быть решающим то, что электрон и квант еще остаются вне общей картины. Было бы, естественно, очень красиво, если бы они нашли свое место; но вряд ли следует удивляться, если здесь не тот случай. Что означает дополнение «Из новых расчетов, кажется, следует, что эти уравнения (уравнения гравитации) дают движение электрона»? В каком смысле «дают»? Почему это было сомнительно? Почему сомнительно, что кванты найдут там свое место? Следует ли понимать первое предложение в том смысле, что покоящийся электрон (а вместе с ним и движущийся) может быть построен, если отвлечься от его абсолютной величины (и только ее) и кванта действия?

С теорией Гейзенберга—Борна—Иордана я еще не познакомился. Где она опубликована?

Один молодой химик, недавно получивший докторат, показал мне замечательные соотношения между параметрами соединений и их составом; из них, кажется, можно сделать много выводов относительно условий полимеризации. Используемые формулы мне несколько непонятны, я только частично вижу, как можно выразить словами принятые предположения. Разреши все же послать тебе эту маленькую работу, хотя она еще совершенно бесформенна. Нет ли в вашей Академии опечатанного хранилища, подобно парижскому, для хранения приоритета? Если да, то, может быть, после твоего просмотра работу можно там депонировать, пока будут собраны дополнительные материалы? По приезде сюда

ты должен встретиться с этим юношей, в нем заложен дух изобретательства¹. . .

Сердечный привет тебе и всем твоим.

Мишель.

1. Речь идет об И. Г. Беке, родившемся в 1900 г. в Гриндельваде (кантон Берн). В 1927 г. он был ассистентом по судебной медицине в Цюрихе, затем работал в Берне.

76. БЕССО—ЭЙНШТЕЙНУ

Берн, 21.2.1926

Дорогой Альберт!

Несмотря на то, что не получил ответа на свое последнее письмо, а поэтому не знаю, найдут ли тебя эти строчки в Берлине, спешу послать тебе прилагаемые расчеты, выполненные молодым доктором химии Бек.

Вначале я просмотрел, что расчет количества тепла, выделяющегося при химической реакции и, параллельно, при сжатии идеального газа, дает разные по порядку величины; вчера вечером на это обратил мое внимание Бек. К тому же в расчете использованы десятичные логарифмы вместо натуральных. Из-за этого, естественно, отпадает всякое основание для замены искомой постоянной через RT . Но удивительно, что целочисленные отношения сохраняются в полной мере. Особенно ошеломляющи таблицы 2^B сверху и 2^A (1, 34''). Бек считал, что формула (2) выведена из закона Кулона, — сжатие радиуса электронного облака вокруг ядра молекулы. Но после моей критики он от этого отказался.

Представляется, что для веществ, которые можно не считать полимерными (а также комплексными соединениями Вунера), формула дает значения, пропорциональные получаемым из логарифмической формулы. Отклонения от пропорциональности устраняются введением соответствующего полимеризации множителя $V_0^{2/3}$. Комплексные соединения выявляются по значению коэффициента пропорциональности.

Меня, конечно, прельщает продолжение работы с Бек. Но я очень боюсь, что мы вместе не сумеем этого сделать в разумные сроки, тем более, что Бек очень загружен уроками, а вскоре должен получить постоянное место.

Разъяснения, которые он дал по моим указаниям, работая несколько последних вечеров до поздней ночи, конечно, еще не окончательны; но я очень бы хотел, чтобы результаты, которые кажутся мне очень интересными, не пропали для исследователей.

Как только Цангер почувствует себя достаточно хорошо, я покажу ему молодого человека и поговорю об его деле. Его обязательно нужно оценить; он человек с идеями и чутьем, исключительной скромности, если даже пока поражен химической логикой. Но это излечимая болезнь молодости.

Сердечный привет от всех наших.

Твой Мишель.

77. БЕССО—ЭЙНШТЕЙНУ

Берн, 25.3.1926

Дорогой Альберт!

Работу Бека я послал тебе пару месяцев назад (заказным письмом), но ничего не услышал об этом от тебя. Этими днями он послал мне прилагаемое письмо, а сегодня мы с ним беседовали. Результат действительно удивительный: в формулу для работы при изотермическом сжатии идеального газа вместо RT входит, если рассматривать выделение тепла и уменьшение объема в химических соединениях только с конденсированными частями, ряд чисел, подчиняющихся простым целочисленным соотношениям. Если брать выделенное тепло равным произведению уменьшения объема на квадрат радиуса молекулы, то получаем приблизительно тот же ряд целых чисел. Эмпирически найденная поправка, содержащая отношение суммы атомных весов к сумме атомных чисел, улучшает результат, который после этого позволяет устанавливать условия полимеризации в сомнительных случаях (полимеризация играет определенную роль и в кристаллической решетке). Ясно различаются при использовании этого метода и координационные связи (комплексные связи и т. д.). По порядку величины в соответствии с RT получаются внутриатомные скорости электронов.

Все это в самом деле увлекательно; меня удивило, что ты об этом ничего не написал. И здесь истина снова проще, чем это позволяют ждать теоретические представления.

... Мы переехали на Трехзелиштрассе, 9, в непосредственной близости от твоего бывшего жилища на Эгертенштрассе. Петер Винклер¹ приезжает в Берн. Когда приедешь ты?

Сердечный привет от всех нас.

Твой Мишель.

1. Двоюродный брат жены Бессо, старый знакомый Эйнштейна.

78. ЭЙНШТЕЙН—БЕССО

Берлин, 1.5.1926

Дорогой Мишель!

Я тогда сразу прочитал присланную работу, но не думаю, что в ней заложено что-нибудь стоящее. Конечно, в ней содержится грубое соотношение между уменьшением объема и энергией, и введением дальнейших параметров можно попытаться приблизиться к эмпирическим условиям. Но отсюда вряд ли можно получить что-нибудь разумное. Это напоминает мне Траубе¹. Такими аптекарскими методами, по моему мнению, не приходят к таинствам бога. Шредингер сделал две замечательные работы о правилах квантования (*Ann. d. Phys.*, 1926, 79). Раскрывается глубокая истина. Пусть он тебе расскажет.

Приеду в Швейцарию в течение июля. В конце июля будет сессия Лиги Наций в Женеве. Затем мы вместе с Тете пойдем куда-нибудь в горы. Тогда я навещу тебя или мы где-нибудь встретимся.

Сердечный привет также Анне и Веро.

Альберт.

1. И. Траубе (1860—1943) — профессор физической химии в Шарлоттенбурге в 1900—1933 гг., специалист по коллоидам. По отмеченному Эйнштейном вопросу он написал несколько работ, в том числе «Объемы и валентность, атом и электрон» (*Ann. d. Phys.*, 1907, 22, 24).

Цюрих, 11.7.1926

Дорогой Мишель!

Только что приехал в Швейцарию и радуюсь встрече с вами. Если ничего обо мне не услышишь, приеду в Берн 20-го. Если понадобится, пишите мне в Цюрих по адресу: Хуттенштрассе, 62.

Сердечный привет Анне.

*Твой Альберт.**Монтана-Вермала, 31.7.1926*

Дорогой Мишель!

Слава богу, Женева позади. «Это невтерпеж», как сказал бы берлинец. Здесь, на высоте, очень приятно, хотя несколько холодновато. Только что приехали. Маленькая гостиница Терминус, очень близко от фуникулера. Думаю, что тебе понравилось бы, и мы оба ¹ были бы рады твоему приезду. Цена пансиона без обслуживания 11 франков. Анна была со мной слишком либеральна ², я ее особо приветствую. Приветы также сыну Розы ³ и твоим внукам, но самые сердечные — тебе.

Альберт.

1. Эйнштейн был в горах со своим младшим сыном Эдуардом
2. Эйнштейн был в Берне у Бессо около 20-го, как и обещал.
3. Роза Винтелер, золовка Бессо.

Почтовая открытка, написанная карандашом. Адрес странный: Господину М. Б., вокзальный буфет, Лозанна (хранить до востребования). По календарю 6 августа 1926 г. (дата почтового гашения) было пятницей.

Монтана-Вермала, 6.8.1926

Дорогой Мишель!

Твои открытки перевернули наши планы, так как я понял из них, что в понедельник утром ты во всяком случае будешь в Лозанне. Садись в понедельник утром на поезд, отъезжающий в 8.11 на Бриг. Мы сядем в него

в Сидерсе. До вторника будешь с нами в Бриге. Оттуда тебе удобно будет ехать домой через Лётшберг; мы намерены ехать через Фурка.

С глубоким прискорбием прочитал твое сообщение о замечательном сыне Розы¹. Ужасно, что судьба заставляет вас переносить.

До свидания.

Твои Альберт и Тете.

1. Бенвенуто Банди-Винтелер, младший сын золотки Бессо, покончил с собой.

82. ЭЙНШТЕЙН—БЕССО

Монтана-Вермала, 6.8.1926

Дорогой Мишель!

Прекрасно понимаю, что ты не можешь покинуть дом, имея в виду грустные обстоятельства. По-видимому, именно это следует заключить из твоей телеграммы, которая прибыла в поврежденном виде. Мы решили ехать прямо в Цюрих из-за погоды, которая становится все более неустойчивой. Если погода улучшится, заедем в Фурку. От Равила мы отказались, но не окончательно. В Цюрихе останусь по крайней мере до 14-го. Если хочешь, можем встретиться где-нибудь между Цюрихом и Берном, например в Аарау или Бюргдорфе; а может быть, ты приедешь в Цюрих. В этом случае напиши на Хуттенштрассе, 62. В Цюрих мы приедем, вероятно, во вторник вечером. Во всяком случае, было бы хорошо еще раз увидеться. Мне очень жалко Розу; она столь превосходный человек и должна так много пережить.

Приветствую тебя вместе с Анной.

Альберт.

83. ЭЙНШТЕЙН—БЕССО

Цюрих, 11.8.1926

Дорогой Мишель!

Прилагаю работу и письмо Бека¹. Я хотел бы воздержаться от оценки этого труда, поскольку я не знаю работ Гальперна². Но, очевидно, использование здесь квантового условия совместно с уравнением движения

особенно неприятно, ибо справедливость последних представляется несовместимой со справедливостью первого.

Из письма заметил, что намеченный в нем метод самый быстрый. Но сомнительно, чтобы уравнение $R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = T_{ik}$ содержало еще какую-нибудь реальность по отношению к квантам. Сомнение очень сильное. Напротив, образование левой части, безусловно, ближе к истине. Если уравнение $R_{ik} = 0$ действительно определяет поведение сингулярностей, то подобный закон поведения будет значительно глубже обоснован, чем ранее названным уравнением, обоснованным неоднозначно и только феноменологически.

Установленное мною самим уравнение

$$R_{ik} = g_{ik} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} f_{i\alpha} f_{k\beta} g^{\alpha\beta}$$

также мало меня удовлетворяет^(a). Оно не допускает никаких электрических масс, свободных от сингулярностей. Кроме того, я не могу решиться связать две вещи (подобные правой и левой частям уравнения), которые логико-математически не имеют ничего общего.

Решил завтра вернуться домой, поскольку достаточно долго путешествую и меня уже тянет к покою и сосредоточению. Кроме того, моя вторая жена нуждается в моральной защите, так как совершенно одна сидит у постели безнадежно больной матери.

Приветствую тебя с Анной.

Альберт.

1. Работа Бека, которую Эйнштейн вернул Бессо, не была найдена в бумагах Бессо. Позже она появилась в *Zs. für Physik*, 1929, 53 под названием «Временное квантование движения». Независимо от работ Покровского была введена элементарная единица времени — хрон (порядка 10^{-24} сек), которая соответствует времени, необходимому электрону, чтобы пройти расстояние, равное его диаметру. В 1927 г. мы встречаем статью Бека «Аналогии газовых законов в твердом состоянии материи (законы электронного газа)» в *Zs. für Anorganische und allgemeine Chemie*, 161. В последующие годы Бек опубликовал много работ по общей химии.

2. Речь идет о работах Отто Гальперна в *Zeitschrift für Physik*: Квантовая теория нормального эффекта Зесмана (1923, 18); Тепловое равновесие между черным излучением и квантовыми атомами

(1924, 21); Теория рассеяния рентгеновских лучей (1924, 30; 1926, 38); Квантование ротатора и выбор координат в новой квантовой механике (1926, 38).

(а) Эйнштейн сразу увидел слабость «наивной» теории, которая кажется «склеенной» из одного геометрического слагаемого и второго, справедливость которого черпается только из теории Максвелла. Отметим здесь явно ошибочное положение коэффициента $1/2$.

Надо написать

$$R_{ik} = \frac{1}{2} g_{ik} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} - f_{i\alpha} f_{k\beta} g^{\alpha\beta},$$

что эквивалентно

$$R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R = -T_{ik},$$

где T_{ik} — тензор Максвелла.

84. БЕССО—ЭЙНШТЕЙНУ

Берн, 13.1.1927

Дорогой Альберт!

Наш друг Цангер сообщил мне о ваших соображениях по моему делу. Получил для хранения до подходящего дня твою «характеристику эксперта Бессо», столь дружественную и хорошо продуманную¹. Tutto il male non vien per nuocere*, — с одной стороны, это дело еще раз подтвердило твою и Цангера дружбу, а с другой — еще раз призвало работать в мои дни старости более целенаправленно, по крайней мере в том скромном направлении, которое требуется. Снова у меня чувство, что эти большие и малые области работы для меня легко и плодотворно достижимы. Последние два месяца напряженной деловой деятельности имели даже известную прелесть.

Ты, по-видимому, вскоре увидишь там Цангера, передай ему мой сердечный привет. Еще раз сердечно благодарю обоих.

О тебе, впрочем, давно ничего не слышал! Представляю себе, что введение скорости света и электрических и магнитных сил в теорию Шредингера держит тебя в напряжении.

* Нет худа без добра (итал.).

Рассказывал ли я тебе новости о мистике чисел химике Беке? В одной из его формул для количества тепла, развивающегося при химических соединениях, играет роль натуральный логарифм

$$\ln \frac{\text{объем компонент}}{\text{объем соединения}} \cdot$$

Еще одна острота идет от него: в соединениях с максимально возможной концентрацией этот логарифм равен единице; отношение объемов где-то в пределах от 2,68 до 2,72.

Сжимаемость твердых и жидких тел ведет для внутреннего давления к величине такого же порядка, как и в химии, и оба соответствуют по порядку величины скорости электронов в атоме водорода.

Но самым любопытным остаются открытые им целочисленные соотношения ², а практически наиболее важное — критерий полимеризации. Теория Шредингера с очень большим числом переменных?

Сердечный привет от твоего

Мишеля.

Другой Бек ³ послал мне рукопись чего-то шредингеровского о фотоэффekte.

1. Речь идет о характеристике, которую Эйнштейн послал Бессо, когда последнему угрожало увольнение из патентного бюро.

2. Бессо часто проявлял симпатию к исследователям с пифагорейским складом ума.

3. *Guido Beck. Ueber die Strahlungsreibung in der Quantenmechanik. — Zs. für Physik, 1927, 42, 86—88.*

85. БЕССО—ЭЙНШТЕЙНУ

Берн, 25.6.1927

Дорогой Альберт!

Только что получил прилагаемое письмо от Франца Банди из Обервиля, деверя Розы; Эрнст, о котором идет в нем речь, сын Розы. Я сказал Банди, что пошлю тебе письмо, и думаю, что если все так подготовить, что тебе останется только подписаться и бросить в ящик, то ты, возможно, сделаешь. Б. узнает, когда состоится полет, достанет немецкие авиамарки и вышлет тебе всю целую

вещь, если ты позволишь¹. Sono gli incerti del mestiere * должен был думать король Умберто, когда его настигла пуля анархиста².

Только что прочитал твои работы по теории Калуцы³, к сожалению, только весьма бегло, так как в библиотеку могу выбраться на часок или даже меньше. Если я правильно понимаю, в преимущественной системе координат одна из координат соответствует потенциалу. Но встречающиеся разности потенциалов пренебрежимо малы в сравнении с разностью потенциалов между протоном (граничная поверхность или нечто соответствующее) и электроном, т. е. сингулярностями; в непосредственной близости от двух гиперповерхностей — кванты со значительной частотой в окрестности третьей промежуточной гиперповерхности и в этой окрестности заключены все потенциалы, которые не находятся в непосредственной близости протонов и электронов. Верно ли это в принципе? Это три области аккумуляции; не обоснованы ли они ясно с квантовой точки зрения? И еще: что такое обобщенное (p, q) -пространство Зоммерфельда?

Если бы не случай написать, то сам еще поразмыслил бы. Не сердись. Я ведь очень ленив; самое лучшее в моей ежедневной работе — комментарии к «Раю» (Данте), которые я излагаю Саутеру по пути домой.

Сердечный привет и от Анны.

Мишель.

1. Журнал «Solothurner Zeitung» известил 20.6.1927 о беспосадочном перелете Берлин—Сан-Франциско немецкого летчика А. Кеннике. Поскольку пилот брал с собой в США корреспонденцию, которую должен был сбросить над Нью-Йорком, Банди, бывший филателистом, через Бессо просил Эйнштейна написать от своего имени письмо из Берлина швейцарскому консульству в Нью-Йорке; затем письмо должно было вернуться к Эйнштейну и т. д. Бессо не считал свой демарш нелепым.

2. Фраза, произнесенная Умберто I, королем Италии в 1878—1900 гг., после первого покушения на него в 1878 г. Он был убит в 1900 г.

* Это риск профессии (итал.).

3. К теории связи гравитации и электричества Калуцы (Собр. науч. трудов, т. II, с. 190—197). Т. Калуца (1885—1954) изучал математику в университетах Кенигсберга, Киля и Геттингена. Его математические работы относятся к степенным рядам, разложению функций в ряды Дирихле, монотонным функциям. Указанные статьи Эйнштейна касаются работы Калуцы «К проблеме единства физики».

86. ЭЙНШТЕЙН—БЕССО

Женева, 23.7.1927

Дорогой Мишель!

Не знаю точно, когда закончатся заседания. Поэтому лучше всего будет, если ты сам приедешь в Женеву, причем по возможности скорее. По-видимому, заседания продлятся до вторника вечером; было бы хорошо, чтобы ты приехал раньше. Если не получу никаких известий, то буду ждать тебя до четверга утром в гостинице «Англия». Если не приедешь до вечера в среду, я уеду в Цуоц, где устроил Тете. Не подходит тебе сейчас — увидимся в другой раз¹.

Сердечный привет.

Твой Альберт.

1. Бессо находился в отпуске в Ранде, в долине Сан-Никола. В той же гостинице жил и его друг Цезарь Кинкелин, нотариус из Романсгора. Мы реконструировали все, что произошло между субботой 23 июля и следующей субботой на основе одной телеграммы и гостиничной записи.

Открытка Эйнштейна прибыла в Ранд в понедельник 25-го, и на следующий день Бессо выехал в Женеву, но не нашел Эйнштейна в «Англии». К вечеру он получил телеграмму, отосланную из Ранда в 20 ч. 30 мин: «Бессо. Гостилица «Англия», Женева. Только что прибыла телеграмма, гласящая: «Жду тебя среду Сен-Морице. Альберт». Приветствую Кинкелин». Почему Эйнштейн отправился в Сен-Мориц вместо того, чтобы ждать Бессо до четверга, как он обещал? Как могли встретиться без затруднений Бессо и Эйнштейн в Сен-Морице в среду? Эти два второстепенных вопроса остаются неясными. Как бы то ни было, но встреча состоялась в Сен-Морице в намеченный день. После обеда Бессо и Эйнштейн сели в поезд на Бриг, но не остановились здесь надолго, так как предпочли провести ночь в Беризале, на пути к Симплоне. Можно предположить, что за это время Бессо написал несколько

слов своей жене, чтобы ее успокоить. В Беризале они провели 28 и 29-е (16 франков за две комнаты на две ночи); в четверг они участвовали в пикнике, организованном гостиницей (4 франка на две персоны), провели экскурсию. На следующий день вечером они оплатили счет курортной конторы Беризала, выписанный на имя проф. Эйнштейна и Бессо (52.40 франка). Бессо вернулся в Ранд, тогда как Эйнштейн, вероятно, лишь в субботу выехал в Гризонс, где должен был встретиться со своим младшим сыном в Цуоце

87. БЕССО—ЭЙНШТЕЙНУ

Черновой набросок письма на 2,5 страницах. Точно неизвестно, было ли письмо отослано.

Берн, 17.1.1928

Дорогой Альберт!

При наших последних встречах ты оба раза упомянул о моей докторской диссертации, которая фактически так и не была закончена. Я долго после этого размышлял о том, как много других связей существует между нами. Я обязан тебе своей женой, а значит, сыном и внуком; я обязан тебе своей должностью, а благодаря этому — покоем в человеческом монастыре и материальным благополучием в тяжелые времена. Я обязан тебе своей научной осведомленностью, которую без этой дружбы можно было бы достичь лишь усилиями всей своей личности, если вообще можно было бы достичь. И ты лучше всех знаешь, какие сверхчеловеческие усилия связаны с этим.

Мне кажется, что в 1904—1905 годах я служил для тебя публикой¹; при редактировании твоих работ по квантовой проблеме я лишил тебя части славы, но зато в лице Планка подарил друга.

Мишель.

1. О сотрудничестве Бессо при создании «Электродинамики движущихся тел» известно. Оказывал ли он помощь Эйнштейну и в его знаменитых статьях 1905 г. о световых квантах?

Возможно, Бессо внес исправления в письмо перед отправкой. Может быть, Цангер, которому он написал в тот же день, посоветовал не тревожить напрасно Эйнштейна? Можно лишь сожалеть, что в переписке имеется большой пробел, относящийся к 1928 г.

Гатов, близ Берлина, 5.1.1929

Дорогой Мишель!

Спасибо за поэтическое письмо, которое меня в самом деле обрадовало. В то время как большинство людей с возрастом становится ворчливым, у тебя как раз наоборот. Я этому поклоняюсь и радуюсь. Теперь временами я на несколько недель устраиваюсь совершенно один в сельском доме и варю себе сам, как старые отшельники. При этом с удивлением замечаешь, насколько дни приятно продолжительны и как излишни многие наши занятия и бесполезные служебные дела, пожирающие свободное время. Читаю с большим интересом и удовольствием книгу о социализме Г. Шоу¹, великолепного человека с широким взглядом на человеческие дела. Хочу попытаться делать этой книге некоторую рекламу. Но самое прекрасное, над чем ломал голову и что вычислял целыми днями и половину ночей, теперь уже готово и сжато на семи страницах под названием «Единая теория поля». Оно выглядит архаичным, и дорогие коллеги, как впрочем и ты, мой дорогой, сначала высунут язык во всю длину, ибо в уравнения не входит постоянная Планка h . Но когда явно дойдут до пределов возможностей статистического помешательства, то вернуться к пространственно-временному описанию, и тогда эти уравнения смогут дать исходную точку. Фактически я нашел геометрию, обладающую не только римановой метрикой, но и абсолютным параллелизмом, который мы до сих пор интуитивно считали характерным для Евклида. Простейшие уравнения поля подобного множества приводят к известным законам электричества и гравитации. Даже уравнения $R_{ik}=0$ нужно будет снести на чердак, несмотря на достигнутые успехи. Я без задержки вышлю тебе эти работы. Если ты тогда не высунешь язык, то ты притворщик; я знаю тебе *, мой мальчик, говорят берлинцы^(a).

Тебе и Анне сердечный привет и пожелания на 1929.

Твой А Э.

* Шутка заключается в том, что берлинцы применяют дательный падеж вместо винительного.

Привет Заутеру и Шауэнбергу, а также остальным, если кто-нибудь будет присутствовать при выполнении моего поручения. Со здоровьем дело постепенно поправляется, но я чуть не свернулся навсегда², что тоже нельзя бесконечно откладывать.

1. Речь идет о книге «The Intelligent Woman's Guide to Socialism and Capitalism», изданной в 1928 г.

2. В предыдущем году Эйнштейн поехал в Давос для чтения цикла докладов, но изменение высоты сыграло с ним злую шутку, и он на несколько месяцев оказался прикованным к постели.

(a) В этом письме упоминается построенная Эйнштейном в 1928 г. единая теория, в которой допускается абсолютный параллелизм, т. е. параллелизм конечного расстояния. Пространство-время претерпевает вращение (аффинная связь уже не будет симметричной), но оно лишено всякой кривизны вследствие того, что уравнения $R_{ik}=0$ «снесены на чердак». Законы гравитации и электромагнетизма появляются как условия структур, подвергнутых только вращению, описанному 24 антисимметричными коэффициентами $2\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}$.

9. БЕССО—ЭЙНШТЕЙНУ

Берн, 15/22.3.1929

Дорогой Альберт!

Газеты напомнили нам, что тебе исполнилось 50.

Уже 50! — воскликнул Мама¹, который все еще видит тебя таким, каким ты выглядел, когда был нашим коллегой.

Только 50! — сказал я, будучи почти на семь лет старше, обозрев все твое огромное творение.

И я благодарен судьбе, которая сблизила нас и позволила мне лучше других использовать эту уникальную возможность.

При этом меня еще точит мысль о Беризале, где я неосознанно подверг тебя опасности, тебя и всех тебе подобных², которым ты только что подарил новые замечательные открытия.

Твой неподкупный взгляд, не зачарованный тем, что принято считать незыблемо установленным, еще не одно десятилетие послужит людям, которые по праву смотрят на это почти как на чудо. То, что мое пожелание вполне осуществимо, видно, например, из того, что Эйфель создал

между 70 и 80 годами в совершенно новой для него области науки³.

От имени всех, семьи и бюро, сердечно

твой Мишель.

1. П. Э. Мами — коллега Бессо по бюро патентов и старый коллега Эйнштейна.

2. Встреча в Беризале в конце июля 1927 г. Намекает ли здесь Бессо на прогулку в горах?

3. Г. Эйфель (1832—1923) (см. его замечательную биографию «Эйфель — волшебник железа», принадлежащую перу Ф. Понсеттона). В 70 лет Эйфель отошел от дел, чтобы заняться исследованиями, и построил аэродинамическую лабораторию.

90. БЕССО—ЭЙНШТЕЙНУ

Берн, начало мая 1929

Дорогой Альберт!

Кроме нескольких слов, которые я хотел бы тебе предложить изменить, думаю, что твои исходящие от теплого чувства слова вполне достойны и поздравляемого и поздравляющего. Поручение, которое ты мне дал как квази-специалисту, нашло меня совершенно неподготовленным. Я ничего не знаю о специальном, а общее уже сказано тобой лучше, чем мог бы это сделать я. У техников простая преданность истине проявляется, возможно, сильнее, поскольку они больше используют и развивают открытия других, чем выступают с собственными притязаниями, но при этом заполняя все творческим началом.

Привожу по памяти выдержку из своего письма Цангеру, которая могла бы при надобности быть опубликована — под видом выдержки из письма ученика — как дополнение к твоим словам:

«Известие, что Стодола оставляет преподавание, меня глубоко взволновало; юношеская свежесть, которую он проявил при нашей прошлогодней встрече, тем более бросавшаяся в глаза после столь тяжелой болезни, заставляла думать, что соображения о возрасте и конце профессиональной карьеры относятся к очень далекой еще дате. Тот, кто еще через треть века извлекает пользу из его незабываемых лекций, может сказать, что теряет [высшая] школа. На его лекциях перед нами раскрывалась

сущность техники и технического созидания, при котором подшипники, шатуны, прокладки, регуляторы из далекого замкнутого мира формул вступали в жизнь, которую можно было ощутить и которая вселяла в нас творческую уверенность. Сияющей звездой светит мне сквозь годы объяснение им полузабытых исследований Рейнольдса о природе течения жидкости, ставших решающими для понимания трения. Вспоминаю замечательные эскизные упражнения, в которых пространственное видение и физическая трактовка в наиболее простой и эффективной форме содействовали сознательному усвоению. При этом мы не только чувствовали, что такое техника: перед нами всегда вырисовывалась мощь творчества интеллекта в целом.

Теперь нам нужно приблизить к себе и использовать эту творческую силу, которая освобождается от учебных обязанностей. Речь идет о том, чтобы сохранить для нас, взрослых, и для молодежи этот жизненный ток, который нас захватил с первой же встречи.

Уже много лет основное занятие Стодолы состояло в наблюдении за расцветом молодых умов. Это может продолжаться сейчас тем более свободно и непринужденно, если мы сумеем сохранить связь с ним. Очень важно построить *sensorium commune* * человечества. Учитель, покидающий сегодня школу, но не могущий покинуть молодость, который обрел спокойствие и простоту высшего мира, принадлежит к тому избранному небольшому, и весьма небольшому, числу людей, которые могут рассчитывать на всех нас в своем дальнейшем творчестве»¹.

Я должен всегда быть осторожным со своими словами, чтобы они не приняли форму сна наяву. Вышенаписанное тоже выражает пожелание, за которым скрываются меланхолические чувства о пределе человеческого. Подойдут ли они, тем не менее, вместе с твоими ясными и человеческими словами дорогому старому другу и учителю? Посоветуй мне, пожалуйста.

Твой Мишель.

1. В сборник «Festschrift A. Stodola» к его 70-летию письмо Бессо не вошло.

* Общее чувствилище (фр.).

91. ЭЙНШТЕЙН—БЕССО

Берлин, Шарлоттенбург, 10.5.1929

Дорогой Мишель!

Твоя открытка меня встревожила. Что тебя мучает? Сумели ли Вы использовать мою писанину? ¹

Сердечный привет.

Твой А. Э.

1. Эйнштейн послал Бессо рукопись (на трех страницах большого формата) статьи, посвященной Стодоле.

92. ЭЙНШТЕЙН—БЕССО

Берлин, Шарлоттенбург, 19.5.1929

Дорогой Мишель!

Надеюсь, что статья прибыла вовремя. Я даю тебе право вносить любые необходимые изменения. Что означают твои собственные намеки на заботы?

Сердечный привет.

Твой А.

93. БЕССО—ЭЙНШТЕЙНУ

Черновой набросок письма на двух страницах большого формата с постскриптумом от 20 сентября. Письмо отправлено вместе со следующим.

Берн, 12.8.1929

Дорогой Альберт!

От одного немецкого рабочего, который рассказывал, будто работал для одной немецкой фирмы в большой типографии в Петербурге (как специалист по эсперанто), я услышал, будто ты недель 6—8 назад был в Москве ¹. Каковы твои впечатления? Знаком ли ты с Мартином Андерсеном Нексе? ² Было бы чрезвычайно интересно узнать, как обстоят дела с опытом чисто рационального строительства, против которого пробуждаются многие предрассудки, даже у меня самого.

По случаю последней лекции Стодолы мы — его бывшие ученики, работающие в бюро патентов, — написали

ему несколько слов. Он ответил очень сердечно, особо поблагодарив меня за то, что пробудил дружеские воспоминания о нем в тебе. Прежде всего я послал письмо Цангеру, который в первую очередь заслужил эту благодарность; затем думал послать письмо тебе *, чтобы ты убедился, насколько прав был Цангер, когда прямо и косвенно надоедал, чтобы ты выразил свое уважение Стодоле в связи с его семидесятилетием. Стодола говорил, что твое послание вызвало самые приятные переживания ³.

Ты увидел его на этот раз? А Цангера? Он как будто в Самадене. Я не получил от него ответа на два своих последних письма и волнуюсь.

Как поживают твои молодые люди? Пусть Тете известит меня письменно или придет ко мне во время моего ближайшего посещения Цюриха.

Твой Мишель.

* Но не смог, так как письмо осталось у Цангера, который, кажется, не совсем здоров.

Только что поступило сообщение, что ему лучше: «Теперь я счастлив, что могу жить без лекарств. Ничего не писал и мало читал».

20.9.1929. С тех пор Цангер чувствовал себя лучше, но дней десять тому назад он снова тяжело заболел, по-видимому, в результате отравления консервами.

1. О мнимой поездке Эйнштейна в СССР, которая будто бы состоялась осенью 1923 г., см.: *P. Frank. Einstein, sa vie et son temps. . .*, 1968, p. 301.

2. Мартин Андерсен Нексе (1869—1954) — известный датский поэт и писатель; много лет прожил в Германии и СССР, умер в ГДР.

3. См.: *Festschrift A. Stodola zum 70 Geburtstag, 1929*. Статья Эйнштейна — на с. 126—132.

94. БЕССО—ЭЙНШТЕЙНУ

Черновик письма на двух страницах большого формата.

Берн, 20.9.1929

Дорогой Альберт!

Из приложения ты увидишь, что я пытался перехватить тебя в Цюрихе. Пока письмо вновь попало в мои руки, я опасался, не помешало ли тебе что-нибудь. Как видишь,

моя самоуверенность невелика; но верно, что, зная, насколько ты углублен в размышления, я боялся тебе помешать. Ты можешь выбросить приложение * в корзину для бумаг неп прочитанным; оно и так достигло своей цели, если ты из него сделал вывод, что я очень хотел тебя встретить; ты знаешь об этом. Было бы очень мило, если бы ты написал открытку Цангеру, который вновь лежит в больнице Самадена и очень обрадовался бы, получив от тебя пару слов.

Еще одно. Ты помнишь Кёнига, директора палаты мер и весов? ¹ Его сын, который совсем недавно получил здесь степень доктора, проведет следующий семестр в Берлине. Это приятный и умный человек, знающий и умеющий почти все, что можно изучить в Берне по математике и физике, включая технику эксперимента, расчеты и черчение диаграмм. Он очень сдержанно отнесся к моему предложению рекомендовать его тебе, мотивируя это тем, что последние месяцы занимался почти только экспериментом и тензорное исчисление ему теперь менее близко, чем год назад. Но все же я бы хотел, чтобы ты его увидел; думаю, что он покажется тебе занятым и ты сможешь ему дать некоторые полезные личные советы, хотя он — человек, который при всей скромности способен сам устроить свою судьбу. Позволь ему сопровождать тебя во время небольшой прогулки. Или, может, лучше сделать, чтобы он увидел тебя, не мешкая? Может быть, ему позвонить к тебе домой, и твоя жена скажет, что ему делать? . . . ²

Веду себя подобно сестре, колеблясь между Лейбницем и Шопенгауэром.

Дед Мишель.

* Когда я хотел его вложить, оно необъяснимым образом исчезло! Святой Фрейд, храни меня! И все же я нашел его прежде, чем закрылась почта.

1. Эмиль Кёниг (1871—1948), близкий приятель Бессо.

2. Молодой доктор Ганс Кёниг не решился посетить Эйнштейна в Берлине дома. Он присутствовал на двух его лекциях 22 и 23 ноября; после первой он провожал Эйнштейна до дома. Об этом подробно написал Бессо 27.11. Г. Кёниг заменил отца в дирекции федерального бюро мер и весов в Берне.

Берлин, Шарлоттенбург, 4.11.1929

Дорогой Бессо!

< . . . > Я уже готов ехать в Париж, где прочту несколько докладов о своей новой теории¹. «Математические анналы» печатают работы в течение полугода, иначе бы моя работа² уже была у тебя.

Сердечно приветствую в спешке.

Твой А. Э.

1. В 1929 г. Эйнштейн сделал первую попытку построения единой теории поля. 8 ноября Эйнштейн писал Соловину: «Сегодня в 5.30 прочитал доклад о своей новой теории в институте Пуанкаре». И вновь 4.3.1930: «Моя теория поля добилась хороших успехов. Картан хорошо поработал в этой области. Я сам работаю с одним математиком (В. Майером из Вены). . . Все еще вспоминаю прекрасные дни в Париже. . .»

2. Единая теория поля, основанная на метрике Римана и абсолютном параллелизме. Статья была опубликована в *Mathematische Annalen*, 1930, 102, 685—697.

96. БЕССО—ЭЙНШТЕЙНУ

Берн, 1.5.1930

Дорогой Альберт!

Второе возражение к заявке Эйнштейна—Сцил[ларда], обоснованное некоторыми редакционными соображениями, будет днями выслано. В случае, если желательна некоторая оттяжка выдачи патента, бюро сейчас щедро на продление срока отвода второго и предыдущего возражений, если только заявление об этом будет своевременно подано. Если же ты предпочитаешь быструю выдачу патента, то должен только обвести чернилами мои карандашные пометки¹.

Как у тебя дела? Из интервью Эгьюэ понял, что ты был в Париже, а значит, у тебя все в порядке. В этом году я особенно чувствую весну. Как будто долго отодвигаемое увеличение возраста теперь вдруг наступило.

Сердечный привет тебе и жене.

Твой Бессо.

1. Эйнштейн и Лео Сциллард подали заявку на патент на холодильную машину.

7.9.1930

Дорогой Альберт!

Ты слышал, конечно, об университетском санатории, основанном доктором Вотье¹, может быть, ты даже был там; тогда все последующее можешь не читать, если только тебе не доставит удовольствие моя болтовня.

Стодола рассказал мне, что ты был у него, — я как раз об этом думал. Очень мило с твоей стороны, что ты навестил его; по-видимому, ты тоже обрадовался его идеально-юношеской горячности. Но очень жаль, что я не узнал заблаговременно о твоём приезде в Цюрих; мне было бы, естественно, очень приятно тебя увидеть и следить за твоей беседой со Стодолой. . . [Дальше идет подробное описание пребывания Бессо в санатории].

Заканчиваю свою воскресную болтовню. О Майе²: вчера вечером говорил с ней по телефону, она навестила в Женеве свою крестницу [Майю Анну Регину — младшую дочь Веро] и сообщила мне хорошие известия о тебе. Чувствую на себе пределы способности писать, так что жду от тебя всего только открытку, чтобы узнать, могу ли выслать тебе печатные материалы об университетском санатории.

В ожидании сердечно приветствую.

Твой Мишель.

1. Доктор Л. Вотье основал в 1922 г. в Лейзене (Швейцария) международный санаторий для студентов и преподавателей.

2. Майя — сестра Эйнштейна.

Берн, 19.9.1930

Дорогой Альберт!

Видел Майю после того, как написал последнее письмо. Итак, представляется, что пределы возможности отождествления математических образов предметами, существующими в природе, стали очень узкими. Тем более ценен полученный результат, если в конце концов он окажется единственной возможностью. Работа меня заинтересовала еще одним вопросом: по-видимому, ты опять

размышляешь над весьма принципиальной вещью о связи движения материи с магнитным полем, которая, несмотря на опыты Пикара, должна подтвердить положения твоего доклада в Люцерне¹. Очень любопытно было бы узнать!

Очень любопытно было бы также узнать, не была ли затронута в твоей беседе с Тагором² «Логика против эстетики» такая мысль: «Непрерывная цепочка человек—фильтрующий вирус—атом «объясняет», каким образом стол еще «существует» — конечно, в «туманном воображении Майи», — если ни один человек его не тронул».

Мы, конечно, увидимся в начале ноября в Цюрихе. А пока много тебе счастья в твоей Одиссее.

Дедушка Бессо дедушке Эйнштейну³.

1. Речь идет о докладе Эйнштейна «Об эфире», опубликованном в 1924 г. в Докладах Швейцарского общества естественных наук.

2. Индийский писатель Рабиндранат Тагор посетил Эйнштейна в 1930 г. в Капуте, близ Потсдама.

3. У Альберта-младшего, женатого на жительнице Цюриха, родился сын, названный Бернардом.

99. БЕССО—ЭЙНШТЕЙНУ

8.10.1930

Дорогой Альберт!

Очень тебе благодарен за сердечное письмо; представляю, какую ужасную перегрузку пришлось тебе преодолеть. Даже передача простейших знаний невероятно утомительна. Я хорошо отдаю себе сейчас отчет в этом, так как пытаюсь принимать некоторое участие в подготовке открытия Международного токсикологического института с правом выдачи патентов. Правда, пока речь идет лишь о расширенном монологе Цангера¹, предназначенном благорасположенным людям; их первые возражения должны стимулировать дальнейшее. В совершенно других условиях здесь частично осуществляется то, о чем я тебе говорил 25 лет назад. Но я с большим трудом избавляюсь от роли просто благоприятно реагирующего человека.

Мы очень радуемся твоему предстоящему визиту²; может быть, эта кратковременная поездка даст тебе не-

сколько часов отдыха от людской толчеи. Я с удовольствием приеду за тобой в Цюрих и с радостью провожу тебя обратно, чтобы продлить несколькими часами в поезде нашу встречу. Если еще есть время, предупреди нас открыткой (Тунштрассе, 84); если нет — то телеграфно или по телефону бюро (Боллверк, 49—61).

Сердечный привет от Анны и твоего

Мишеля.

1. Цангер был весьма прозорливым предшественником борьбы с любимыми отравляющими веществами.

2. С 20 по 26 октября 1930 г. Эйнштейн участвовал в 6-м Сольевском конгрессе по физике в Брюсселе.

100. ЭЙНШТЕЙН—БЕССО

Цюрих, 1.11.1930

Дорогой Мишель!

Я все же поехал прямо в Цюрих, так как после конгресса в Брюсселе¹ и выполнения своих обязанностей в Лондоне² слишком устал, чтобы предпринять окольное путешествие.

Но меня очень обрадует, если ты сможешь ненадолго приехать сюда. Может быть, к нашему празднику³ или раньше. Пока живу у фрау Карр, Этцельштрассе, 30, позже, возможно, буду у своей первой жены.

Сердечно приветствую вас с Анной.

Твой Альберт.

1. По этому случаю Эйнштейн был принят бельгийской королевской четой.

2. Известен тост, произнесенный в честь Эйнштейна на банкете в Лондоне Бернардом Шоу.

3. Речь идет о праздновании 75-й годовщины основания Политехнической школы в Цюрихе, на котором Эйнштейн был удостоен диплома доктора.

Берн, вторник, 4.11.1930

Дорогой Альберт!

Большое спасибо за телеграмму¹; значит, в четверг утром около 10 часов — *se Dio vuole*², как говорила наша бабушка, — я появляюсь на Хуттенштрассе, 62.

Сердечный привет тебе, Милеве и Тете от меня и Анны.

Мишель.

1. Документ не найден.

2. Если небу будет угодно (лат.).

Берн, январь 1931

Дорогой Альберт!

Прежде чем закончится первый день нового года, посылаю тебе и твоим сердечный привет от имени всех наших!

Прилагаю экземпляр маленькой работы, содержащей размышления, о которых писал тебе еще в ноябре. Недели две назад написал об этом Ц[ангеру]¹. Каждый раз возвращаюсь к «нашему институту» как необходимости для будущего, которую нужно подготовить. Нет ли у фонда Рокфеллера института профессиональной патологии? А у университета в Пасадене?

Не послать ли мне свои соображения об этом институте в Пасадену Эйнштейну? Не для того, чтобы они теперь были опубликованы, а единственно как меморандум, чтобы увидеть, нельзя ли подготовить открытие института по изучению хронических отравлений ядами. Впоследствии, если он оправдает себя, институту нужно будет поставить последующие задачи и дать право выдачи патентов. Нечто подобное «ожиданию в море с запечатанным приказом». Ц[ангер] очень серьезно вовлек меня в это дело. . . [Дальше — описание воздействия ядов на людей, работающих в различных отраслях промышленности].

Мой маленький трактат дойдет до тебя на днях через твой институт в Берлине, куда я его посылаю для верности. Может быть, тебе удастся заинтересовать кого-нибудь этим предприятием; оно того заслуживает.

Пусть твоя поездка на Дальний Запад будет приятной². Где зародится «центральная нервная система» человечества?

Сердечный привет от всех нас.

Твой Мишель.

1. Цангеру принадлежат многочисленные работы в области ядов. Он предсказал скорое загрязнение воздуха и воды. Если бы прислушались к его предупреждению, то, возможно, удалось бы предотвратить нынешнее тревожное положение.

2. Приглашенный в Пасадену как «гостящий профессор», Эйнштейн отправился туда в декабре 1930 г. Вернувшись в Берлин весной 1931 г., он вновь посетил Пасадену следующей зимой.

103. БЕССО—ЭЙНШТЕЙНУ

Берн, 18.1.1931

Дорогой Альберт!

Наконец готовы копии, которые я теперь пошлю уже прямо в Пасадену¹. Здесь идет речь об общей задаче, решение которой представляет большой интерес для каждого человека. . .

Желаю тебе всего хорошего и прекрасного на Дальнем Западе.

Твой Мишель.

Еще один физический вопрос. Может быть, было бы важно что-нибудь узнать о радиусе соударений протонов? Можно ли работать с атомарным водородом? Было бы важно тогда исследовать рассеяние протонных пучков в водороде?

Почта скоро закроется. Еще раз

твой М.

1. Работа Бессо содержит 14 страниц машинописи.

104. ЭЙНШТЕЙН—БЕССО

Капут, 1 марта 1931

Дорогой Мишель!

Большое спасибо тебе за письмо и брошюру. Она мне очень понравилась, и я думаю, что намеченный в ней план действительно важен и имеет шансы на успех. Пошли

свой доклад новому директору Международного института интеллектуального сотрудничества в Париже и напиши ему в сопроводительном письме, что посылаешь брошюру по моему предложению. Это человек весьма здравомыслящий, и даже если дело не относится непосредственно к его ведомству, то он найдет возможность направить его в нужные руки. Ему известны все личности, связанные с женевской машиной ¹.

Поездка в Америку была очень интересной, хотя и утомительной. Люди в обсерватории Маунт-Вильсон замечательны ². За последнее время они обнаружили, что туманности распределены в пространстве приблизительно равномерно, и для них обнаружен эффект Доплера, пропорциональный их удаленности. Впрочем, существование этого эффекта прямо вытекает из теории относительности (без космологического члена). Загвоздка здесь в том, что расширение материи приводит к временному началу Вселенной порядка 10^{10} — 10^{11} лет. Поскольку другие объяснения эффекта также сталкиваются с большими трудностями, ситуация действительно весьма острая.

Приветствую вас с Анной.

А. Э.

1. Имеется в виду Лига Наций.

2. Сохранилась фотография зимы 1931 г., на которой изображены А. Майкельсон, А. Эйнштейн, Р. Милликен, Адамс, В. Майер, М. Фарранд.

105. ЭЙНШТЕЙН—БЕССО

Капут, Потсдам, 8 июня 1931

Дорогой Бессо!

Все с меня сдирают кожу, а теперь еще и самые близкие друзья присоединяются к моим мучителям. Если не найду в себе силы уединиться от всего, то со мной покончено. Скажи своему другу, что при всем желании не могу себя нагрузить подобным поручением ¹.

С сердечным приветом.

Твой А. Эйнштейн.

1. Поскольку письмо Бессо не сохранилось, не удалось установить, о какой просьбе шла речь.

Берн, 28.9.1931

Дорогой Альберт!

Мне кажется, что мы уже целую вечность не виделись и не слышали ничего друг о друге — будто мы находимся на медленно отдаляющихся дрейфующих льдинах. Тем более меня обрадовало полученное от Цангера известие, что в вычислениях, проведенных вместе с Майером, ты нашел связь между гравитацией и электромагнетизмом, если даже все квантовое пока остается вовне. Содержится ли в ней магнитное поле излучения? Как понять исключение квантового: так, что вообще нельзя построить какой-нибудь носитель зарядов и т. д., или так, что пока еще не видно, существуют ли для этого подходящие меры? . .

Большой привет и от Анны!

Твой Мишель.

МОЖНО ЛИ РАССМАТРИВАТЬ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ИЗМЕНЕНИЕ МАСШТАБОВ ДЛИНЫ И ВРЕМЕНИ КАК РЕЗУЛЬТАТ ДЕЙСТВИЯ НЕКОТОРЫХ СИЛ?

1. Введение

Вопрос, поставленный в заголовке этой статьи, может представлять, конечно, только методический интерес. Релятивистская кинематика и динамика образуют замкнутую систему, позволяющую решать любые правильно сформулированные физические задачи в рамках компетенции теории. Когда речь идет о равномерно движущихся телах или системах отсчета, то, вообще говоря, нет никакой необходимости обращаться к этому вопросу. Однако при рассмотрении *изменений* состояния движения, особенно когда оно сопряжено с физическими изменениями структуры или других характеристик внутреннего состояния тел, иногда возникают парадоксы (см. разд. 7), связанные именно с возможностью различных ответов на интересующий нас вопрос. И действительно, многие физики, успешно использующие теорию относительности и, казалось бы, хорошо знающие ее, отвечают на него диаметрально противоположно: одни говорят — да, можно; другие — нет, не только невозможно, но даже самые поиски положительного ответа противоречат теории относительности. Есть, правда, и весьма многочисленная третья группа, считающая, что вопрос не представляет интереса и не имеет никакого значения. Вероятно поэтому в подавляющем большинстве книг по специальной теории относительности (мы будем говорить только о ней) он вообще не упоминается, а там, где его не обходят, обычно лишь декларируют ту или иную точку зрения.

При таком резком расхождении мнений, видимо, нелишне остановиться на этом вопросе подробнее, хотя излагаемое ниже, по существу, является тривиальным и может иметь лишь педагогическую ценность. Во всяком случае, речь здесь идет о фундаментальных вопросах теории и вряд ли стоит стыдливо избегать их обсуждения.

2. Уточнение постановки вопроса

Прежде всего нужно четче сформулировать вопрос, о котором мы будем говорить.

Длина стержня есть понятие относительное, ее зависимость от движения системы отсчета есть выражение того факта, что длина определяется соотношением двух объектов — измеряемого тела и измеряющего комплекса масштабов и часов. Поэтому длина данного тела, полученная при использовании измеряющего комплекса, помещенного в некоторой инерциальной системе отсчета, столь же реальна, как и измеренная комплексом, покоящимся в другой инерциальной системе. Эта оговорка нужна потому, что иногда вопрос о динамической природе сокращения масштаба смешивается с вопросом о «реальности сокращения». Задают вопрос: «кажущийся это эффект или реальный»? Ответ, разумеется, может быть только один — реальный, поскольку ничего более реального, чем свойства тел, наблюдаемые всеми возможными физическими методами, мы не знаем. Еще Лоренц (в 1912 г., когда он уже полностью принял и осознал точку зрения Эйнштейна) отвечал на этот вопрос так: «Не следует делать ошибку, полагая, что укорочение только кажущееся. Напротив, как A , так и B (два одинаковых масштаба, покоящиеся в разных системах. — *Е. Ф.*) можно действительно наблюдать. . . так же, как, например, расширение тела при нагревании» [1, с. 27—28] (здесь и ниже, где цитируются иностранные тексты, перевод автора настоящей статьи).

Здесь, пожалуй, уместно сделать небольшое отступление и напомнить, что «кажется» как раз совсем другое. Например, согласно преобразованиям Лоренца, как мы знаем, движущийся вдоль одного из своих ребер куб сжимается в параллелепипед (а шар в эллипсоид). Долгое время все думали, что это и будет видеть наблюдатель, мимо которого тело движется. В частности, то же получится на фотографии. Весьма эффектно такое представление использовалось в популярной литературе, например, считалось, что пассажир поезда, движущегося с очень большой скоростью, будет видеть дома и людей на перроне сплюснутыми. Лишь более полувека спустя после создания теории относительности Террел [2], а также и Пенроуз (для шара [3]) рассмотрели вопрос непредвзято. Оказа-

лось, что куб по-прежнему будет «казаться» (т. е. будет виден) кубом (а шар — шаром), но повернутым относительно своего истинного положения (точнее, это верно, если угол зрения, в пределах которого видно тело, не велик). Между тем, на самом деле он не повернут, но сжат. Действительно, во всех расчетах эффектов, производимых этим телом, нужно учитывать, что вещество его заполняет сжатый и не повернутый объем (параллелепипед, эллипсоид), перемещающийся равномерно без изменения формы. «Кажущееся» возникает от того, что для попадания света от разных точек тела в глаз (или на фотопластинку) требуется разное время. В частности, из-за этого наблюдатель будет видеть и ту сторону тела, которая не видна ему, если тело покоится. Эффект этот имеет место в классике, релятивистская кинематика меняет его лишь количественно. Он прекрасно разобран в обзоре [4]¹.

Однако обычно рассматривают лишь мысленные эксперименты. Между тем этот эффект давно и хорошо наблюдается в физике высоких энергий. Действительно, если два протона очень высокой энергии соударяются в системе центра инерции с лоренц-факторами $\gamma_c \gg 1$ и порождают много новых частиц, разлетающихся в среднем симметрично вперед—назад (рис. 1, а), то в лабораторной системе наблюдатель видит два направленных вперед конуса летящих частиц — «узкий» и «широкий» (разделяющий их угол $\vartheta_{\text{лаб}} = 1/\gamma_c$), так что наблюдатель, смотрящий навстречу потоку частиц, видит также и частицы, испускаемые задней полусферой излучающей системы (рис. 1, б),

¹ Разумеется, если длина движущегося вдоль своей оси тонкого стержня регистрируется тем способом, который описан в первой же работе Эйнштейна и с тех пор фигурирует во всех изложениях теории относительности, то будет наблюдаться обычное релятивистское сокращение длины. Для этого измерительная линейка должна быть уложена вдоль оси движущегося стержня в непосредственной близости от нее (и соответственно должны быть размещены на линейке покоящиеся часы), а положение концов движущегося стержня должно одновременно (по этим часам) отмечаться фотоаппаратом, глазами и т. п., помещенными в непосредственной близости от соответствующего конца стержня в момент регистрации. Эта процедура и будет подразумеваться в дальнейшем. Ее же, конечно, имеет в виду и Лоренц в процитированной фразе. Совершенно так же, при должной постановке эксперимента, мы можем наблюдать сжатие шара в эллипсоид, когда он приведен в движение, и т. п.

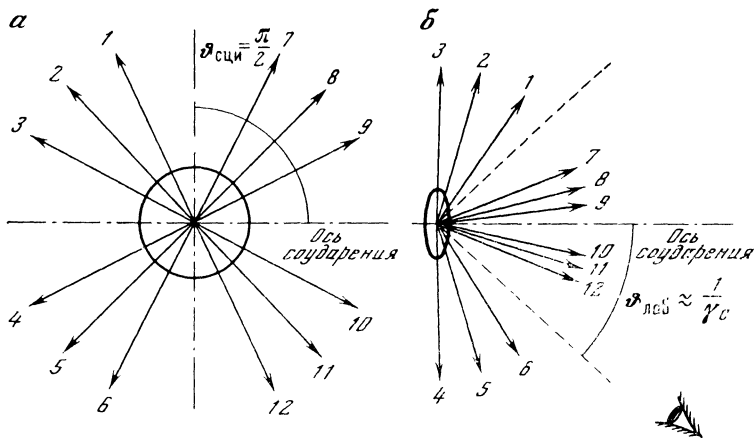


Рис. 1. Испускание мезонов в процессе генерации частиц при соударении адронов высокой энергии

а — в системе центра инерции; *б* — в лабораторной системе. (Половина частиц лежит в пределах узкого конуса, $\vartheta_{\text{лаб}} = 1/\gamma_c$, где γ_c — лоренц-фактор движения системы центра инерции в лабораторной системе)

т. е. видит как бы свечение задней поверхности объекта, не видимой в СИИ, в которой излучающий объект покоится.

После этого отступления о том, что «кажется» при наблюдении разными методами и что имеет место в действительности, вернемся к основному интересующему нас вопросу. Он, как видим, относится отнюдь не к «реальности» эффекта, а совсем к другому: означают ли приведенные выше слова Лоренца, что укорочение масштаба при переходе в другую систему отсчета можно рассматривать как результат действия физических факторов и свойств тел (упругости и т. п.), фигурирующих в уравнениях движения и в условиях равновесия частей тела, подобно тому, как расширение при нагревании происходит при подводе тепла в согласии с уравнениями теплопроводности и механики, а конечное состояние определяется равновесием некоторых сил? Этот вопрос не имеет отношения к проблеме эфира и задается он уже в рамках теории относительности Эйнштейна.

Уточним, что, собственно, понимается под укорочением масштабов и замедлением часов.

Рассуждение, которое использовал Эйнштейн в своей классической статье 1905 г., состоит в следующем: «Пусть в «покоящемся» пространстве» (до этого Эйнштейн разъясняет, что «покоящейся» называется одна выбранная система отсчета из числа тех, которые мы теперь называем инерциальными. — *Е. Ф.*) «. . . даны две координатные системы. . . Пусть каждая система снабжена масштабом и некоторым числом часов и пусть оба масштаба и все часы в обеих системах в точности одинаковы. Пусть теперь началу координат одной из этих систем. . . сообщается постоянная скорость v в направлении возрастающих значений x другой покоящейся системы. . . ; эта скорость передается также координатным осям, а также соответствующим масштабам и часам» [5, с. 13]. После этого начинается обычное сравнение измерений в двух системах. Тремя страницами раньше тоже говорится о том, что «стержня. . . *сообщается* (курсив мой. — *Е. Ф.*) «равномерное и параллельное оси x поступательное движение (со скоростью v)» [5, с. 10]. Так возникает первая из двух используемых формулировок вопроса — классическая, связанная с передачей стержней и часов из одной инерциальной системы в другую. Она является классической как в том смысле, что используется в классических трудах по специальной теории относительности, так и потому, что не опирается на квантовые свойства вещества, а имеет более общее значение.

Итак, при *первой формулировке* сокращение длины, как утверждается, имеет следующий смысл [5, 6]. Пусть в некоторой инерциальной системе отсчета ИСО₁ мы изготовили достаточное количество совершенно одинаковых масштабов длины и часов и затем роздали их в разные инерциальные системы. Пусть часть из них мы передали в систему ИСО₂, движущуюся относительно первой со скоростью v . Уложив стержни в обеих системах вдоль направления скорости, разместив в разных точках стержней часы и синхронизовав их (в каждой ИСО) по известному способу, мы измеряем длину переданного в ИСО₂ стержня с помощью стержней и часов, оставшихся в ИСО₁. Оказывается, что эта длина стержня l_2 меньше, чем его же длина l_1 до передачи в ИСО₂; $l_2 = l_1 \sqrt{1 - v^2/c^2}$.

В таком случае естественно задать вопрос: не произошло ли это потому, что передавая стержень, мы, ускоряя его, должны были воздействовать на него некоторыми

силами и при этом неизбежно что-то изменили в его структуре? Мы могли, например, тянуть его за один конец, либо толкать другой конец. При этом по стержню пошли упругие волны, а когда приложенная сила была снята и когда все точки стержня достигли одной и той же скорости v (это два, вообще говоря, разных условия; см. разд. 7), то он мог приобрести иную форму, чем до приложения силы. Важно, что в окончательное состояние равномерного движения с одной и той же скоростью v можно прийти бесконечным числом способов. Можно, например, зарядить стержень электрическим зарядом и на некоторое время включить электростатическое поле (при расчете, конечно, обязательно нужно будет принять во внимание нарастание и последующее убывание включаемого и выключаемого поля во времени и пространстве) и т. д. При всех этих способах приведения стержня в движение его деформация может меняться, следуя самым различным режимам (в частности, можно приводить стержень и часы в движение бесконечно медленно; это, однако, не значит, что интегральный эффект исчезает).

Пытаясь так объяснить лоренцовское сокращение, мы сразу наталкиваемся на два смущающих пункта в этом рассуждении.

Во-первых, кажется крайне странным, что все возможные процессы и режимы деформации, если они оканчиваются равномерным движением с одной и той же скоростью v , приводят в конце концов к одинаковой результирующей деформации — к лоренцову сокращению, зависящему только от v .

Во-вторых, ведь мы могли ускорять не *измеряемый стержень*, переводя его в ИСО₂, а всю *измеряющую систему*, расположенную в ИСО₁, придавая ей такую же скорость, но в обратном направлении. По теории относительности результат должен получиться — и, конечно, получается — тот же: происходит укорочение *измеряемого стержня*, хотя силы действовали не на стержень, а на систему измерительных приборов.

Однако это только сомнения, и против каждого из них можно найти соответствующие контрдоводы, которые будут приведены ниже.

Но существует и *другая формулировка*, которая обходит процедуру передачи тел, но зато использует, по существу, тождественность микрочастиц и, в частности,

атомов одного и того же элемента, т. е. использует квантовые свойства.

Она избавляет нас от процедуры передачи тел. Здесь нет речи об ускорении тела, но сразу рассматриваются равновесные конфигурации двух одинаковых тел, покоящихся каждое в своей ИСО.

Например, изготовим независимо в двух ИСО одинаковые стержни, «скажем, из стали» [6, с. 211], причем «единственное, что будет трудно в первый момент, — это вопрос о том, как взять . . . те же самые эталоны длины» [6]. Однако мы можем преодолеть эту трудность [6]. Следует подчеркнуть: здесь мы (бесмолвно) принимаем довольно естественное предположение, что «сталь» в двух системах одна и та же. Если же договорить до конца, то, по существу, мы опираемся на квантовый принцип тождественности микрочастиц и одинаково построенных из них атомов (изотопов). Так, два атома кадмия, помещенные в разные ИСО, можно считать а priori тождественными. Между тем, сравнивая (приборами какой-либо одной ИСО) длины волн и частоты испускаемого ими излучения, мы обнаруживаем релятивистское изменение этих величин (см., например, [7]). Два подхода ведут к одинаковым результатам, и это, конечно, необходимо.

В самом деле, наблюдая некоторый стержень, пролетающий со скоростью v , мы можем не знать его истории² он мог быть передан из ИСО₁ в ИСО₂, а мог быть и сразу изготовлен («из такого же материала») в ИСО₂. Результат не может зависеть от нашего знания или незнания.

Конечно, при такой второй формулировке справедливость формул преобразования теории относительности ставится в зависимость от квантового принципа тождественности микрочастиц. Это можно считать нежелательным, так как теорию относительности принято считать общезначимой, не связанной с частными положениями квантовой теории. Однако «одинаковость» материала стали и т. п. большинство физиков считает настолько элементарным и ясным фактом, что в этом трудно усмотреть слабый пункт³.

² Нужно, правда, быть уверенным, что его части находятся в стационарном состоянии, т. е. если на него и действовали какие-либо внешние силы, то это было достаточно давно; см. разд. 7.

³ Не исключена, конечно, чрезвычайно интересная ситуация: быть может, в мире, в котором вещество не подчиняется кванто-

Но и эта вторая формулировка отнюдь не исключает «силовой» интерпретации сокращения длины. Если мы передавали стержень, то мы можем полагать, что после прекращения действия внешних сил в нем остались некоторые напряжения, установилось новое равновесие внутренних сил, которое и определяет его новую форму. Следовательно, и в стержне, изготовленном сразу в ИСО₂, имеющем такую же сокращенную (с точки зрения ИСО₁) форму, должно иметь место точно такое же равновесие сил без всякой его передачи. И это действительно так. Ничего не зная об истории пролетающего стержня, мы можем измерить действующие внутри него силы и убедиться, что они совсем иные, чем в покоящемся стержне. Например, напряженность электрического поля каждого движущегося заряда, входящего в состав стержня, отличается от напряженности того же заряда в покое. Более того, у него имеется магнитное поле, которого нет у покоящегося заряда, и его тоже можно измерить. Поэтому, если два заряда движутся вместе, то между ними действуют не те силы, которые наблюдаются у покоящихся. Значит, равновесная форма тела, составленного из заряженных частиц, должна измениться.

Конечно, и здесь возникает то же недоумение, что и при передаче стержней: почему независимо от природы сил и вещества, от формы и положения тела новая равновесная форма отличается от формы этого же тела в покое одним и тем же лоренцовым сжатием, зависящим только от скорости движения v ? Однако снова это только сомнение, а универсальность сжатия как следствия некоторых сил в настоящее время может быть констатирована уже на примере по крайней мере двух типов полей — электромагнитного и поля сил упругости (см. ниже).

Две рассмотренные формулировки различаются (в аспекте, который нас здесь интересует) тем, что в первом случае речь идет, так сказать, о «динамической» интерпретации релятивистского сокращения, а во втором —

вым законам, нельзя удовлетворить принципу относительности. В самом деле, квантовая и релятивистская теории связаны очень тесно. Например, тождественность частиц, которая в нерелятивистской квантовой механике принимается как независимый постулат, в действительности должна быть следствием вторичного квантования в последовательной релятивистской квантовой теории поля.

о «статической», но в обоих случаях об использовании не «кинематической» аргументации, а концепции реально действующих сил.

Прежде чем перейти к пояснениям физической допустимости подобной интерпретации, уместно привести высказывания различных авторов об этой проблеме.

3. «Поиски динамических причин бессмысленны»

Вот наудачу цитаты из, вообще говоря, хороших популярных и из более серьезных книг авторов, явно знающих теорию относительности и умеющих ею пользоваться для практических расчетов. Некоторые из этих авторов являются известными учеными.

«Движущиеся тела сокращают свои размеры не вследствие каких-то изменений, происходящих с ними самими, а просто потому, что они движутся относительно измерительного прибора. Этот эффект не динамический, а чисто геометрический, или, точнее, кинематический» [8, с. 40]; «Излишне говорить, что поиски динамических причин замедления времени так же бессмысленны, как и в случае лоренцова сокращения» [8, с. 49].

«Для Лоренца и Фицджеральда сокращение было физическим изменением, обусловленным давлением эфирного ветра. Для Эйнштейна оно было связано только с процессом измерения» [9, с. 56]. Ясно, что если оно связано «только с процессом измерения» (что именно в действительности думал Эйнштейн, мы скоро увидим), то отсюда можно заключить, что не только взаимодействие с эфиром, но и деформацию под действием ускоряющих сил при передаче масштаба автор отвергает.

«Если . . . , то можно прийти к неверному выводу, что с движущимися часами происходит нечто подобное материальному сокращению Фицджеральда—Лоренца» [10, с. 111]. Итак, никакого «материального сокращения» не происходит.

«Слово «сокращение» может внушить совершенно неправильное истолкование этого термина. Так, стержень при нагревании расширяется, а при охлаждении сжимается. Ничего подобного не происходит⁴ (с точки зрения теории Эйнштейна) ни с поездом, ни с платформой при их относительном движении» [10, с. 128; ср. с приведенными на с. 44 словами Лоренца].

«Кинематические эффекты не следует отрицать на том основании, что они происходят без участия реальных сил. Действительно, релятивистское сокращение масштабов не связано ни с какими силами» [41, с. 176].

В некоторых книгах, переведенных с английского, изменение длины и замедление времени называется «кажущимся». Нужно, однако, иметь в виду, что английское *apparent* (кажущееся, видимое) не обязательно имеет тот же оттенок «фиктивного», как «кажущееся». Так, в книге [42] говорится: «Hence the apparent length of the rigid body. . . is reduced» (с. 15), «A moving clock appears to go slow» (с. 16) и т. д. Поскольку эти фразы далее никак не развиваются, то, по справедливости, мы не можем считать, что автор отрицает динамическую природу эффекта, хотя это и представляется правдоподобным.

К этому можно добавить, что автору настоящей статьи неоднократно приходилось слышать от весьма уважаемых им физиков-теоретиков такой же ответ на обсуждаемый нами вопрос: привлечение картины сил, осуществляющих сжатие стержня и изменение хода часов, не только невозможно, но и противоречит всему духу теории относительности ⁴.

Нелишне подчеркнуть, что весь пафос борьбы авторов, стоящих на «антидинамической», «антисиловой» платформе, как правило, направлен против эфира, против веры в изменение стержней при переходе из *абсолютного* покоя в «истинное» инерциальное движение. В действительности же давно устаревший вопрос об абсолютном движении отнюдь не связан с тем, что нас здесь интересует. Мы говорим о процессах, которые происходят в рамках обычного определения длины и процедуры измерения в теории относительности, т. е. уже отказавшись от ньютоновского абсолютного пространства.

4. «Динамическая трактовка возможна и даже желательна»

Прелесть и мощь эйнштейновской трактовки, выраженной в его знаменитой первой статье [5], произвели такое

⁴ Почему-то споры, затрагивающие вопросы понимания основных положений теории относительности и квантовой механики, обычно носят особенно резкий характер. В них часто «переходят на личности», с взаимными обвинениями в неграмотности и т. п.

оглушающее впечатление, что многие читатели не увидели, не услышали некоторых интересных высказываний ряда, скажем прямо, довольно серьезных авторов.

Паули: «Весьма важно, что Эйнштейн сделал теорию независимой от специальных предположений о строении материи.

Следует ли на этом основании вообще отбросить стремление к атомистическому пониманию лоренцова сокращения? По нашему мнению, это не так. Сокращение масштаба является не простым, а напротив, крайне сложным процессом. Оно не имело бы места, если бы не только основные уравнения электронной теории, но и еще неизвестные законы, определяющие строение электрона, не были бы ковариантными относительно группы преобразований Лоренца. Мы должны постулировать это предположение и иметь в виду, что когда указанные законы станут известными, *теория будет в состоянии дать атомистическое объяснение поведению движущихся масштабов и часов*» [13, с. 30]; (курсив мой. — Е. Ф).

Но, может быть, это оговорка молодого автора, ведь Паули было 21 год, когда он написал свою замечательную книгу? Однако Эйнштейн горячо одобрил ее как «зрелую и тщательно продуманную работу» [14]. Трудно считать это одобрение результатом небрежности Эйнштейна, быть может, не придавшего значения процитированному выше высказыванию Паули. Ведь в краткой и тоже высоко положительной рецензии на книгу Вейля он не преминул оговорить свое несогласие с точками зрения Вейля по поводу смысла закона сохранения энергии и по поводу соотношения между теоретической физикой и действительностью [15].

Другой автор, Лауэ: «Упругие силы, обуславливающие форму тела, должны испытывать такое воздействие движения, чтобы они привели к сокращению» [16, с. 62].

Третий, Мёллер: «Должно быть также возможно вывести запаздывание движущихся часов из фундаментальных законов механики, управляющих ходом часов. Но так же как в случае лоренцова сокращения, эффект запаздывания более адекватно рассматривать как элементарный эффект, являющийся прямым следствием принципа относительности. Если за основу вычислений работы часов мы возьмем ньютоновскую механику, то никакого запаздывания при движении часов не получим, поскольку

время в ньютоновских основных уравнениях является инвариантным параметром. . . Однако это как раз показывает, что уравнения Ньютона не достаточно точны в области, где $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ заметно отличается от единицы. *Если же мы используем точные релятивистские уравнения механики для описания работы часов . . . , то эффект замедления должен получаться как следствие этих уравнений* [17, с. 49—50]; (курсив мой — Е. Ф.). Таким образом, согласно Мёллеру, вопрос только в одном, — что считать более «элементарным» и адекватным, — замедление как результат динамики приводимой в движение материальной системы (часы) или общекинематический вывод из принципа относительности. Он предпочитает второе, и это можно понять (см. ниже). Ну, а все-таки, что думал сам Эйнштейн?

«Собственно говоря, теорию масштабов и часов следовало бы выводить из решения основных уравнений (учитывая, что эти предметы имеют атомную структуру и движутся), а не считать независимой от них» [18]. И дальше: «. . . с самого начала ясна недостаточность принятых постулатов для обоснования теории масштабов и часов. Эти постулаты не настолько сильны, чтобы из них можно было вывести достаточно полные уравнения движения для физических процессов. Если вообще не отказываться от физического толкования координат (что само по себе было бы возможно), то лучше уж допустить такую непоследовательность, но с обязательством избавиться от нее на дальнейшей стадии развития теории (курсив мой. — Е. Ф.). Однако этот грех нельзя узаконивать до такой степени, чтобы разрешить, например, пользоваться представлением о расстоянии как о физической сущности особого рода, существенно отличной от других физических величин (сводить физику к геометрии и т. п.)».

5. Комментарий о сокращении масштабов и действии сил

Теперь, после цитат, выражающих обе точки зрения, мы можем отказаться от плохо выдерживаемой позиции объективности и несколько подробнее прокомментировать, мотивировать точку зрения, согласно которой динамическое понимание сокращения масштабов возможно, а затем, в следующем параграфе, показать, как такой

подход соотносится с более распространенным кинематическим подходом (который, как мы увидим, при постоянной скорости и неизменной структуре тел в определенном смысле можно считать даже более адекватным).

Когда в разд. 2 мы привели две формулировки физической реализации процесса сокращения длины, то были приведены и возможные возражения против «силовой» интерпретации. Одно из них является общим для обеих формулировок: как примирить с этой интерпретацией тот факт, что при любых режимах ускорения, при любых родах сил, вещества и т. д. результат зависит только от окончательной относительной скорости v ? Второе возражение относится только к процедуре передачи стержня: почему воздействие на стержни и часы *измеряющей* системы вызывает сокращение измеряемого стержня?

Сначала обсудим второе возражение.

Читатель может заметить, что формулировка его здесь чуть-чуть отличается от данной в разд. 2, хотя они вполне эквивалентны. Этого изменения формулировки достаточно, чтобы сделать ответ почти тривиальным: ясно, что если под действием сил как-то изменяются измеряющие приборы, то результат измерения может измениться.

Пусть, например, вместо того, чтобы передавать *измеряемый* стержень из ИСО₁ в ИСО₃, движущуюся со скоростью v , мы передадим *измеряющие* стержень и часы из ИСО₁ в некоторую новую систему ИСО₃, движущуюся относительно ИСО₁ (и относительно оставшегося в ней измеряемого стержня длины l_1) со скоростью $-v$. Очевидно, что с точки зрения ИСО₁, длина *измеряющего* стержня (как в первом варианте, когда мы передавали измеряемый стержень в ИСО₂) должна стать меньше в прежнем отношении, т. е. $l'_1 = l_1 \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Это, однако, *отнюдь не значит*, что оставшийся в ИСО₁ измеряемый стержень с точки зрения ИСО₃ станет длиннее *измеряющего* (что противоречило бы первому случаю и нарушило симметрию). В самом деле, нужно учесть еще, что стало с часами при передаче их в ИСО₃, ведь они также участвуют в измерении длины стержня, оставшегося в ИСО₁. Предположим, например, что, ускоряя (до скорости $-v$) измерительный стержень, мы тянули его за конец, первоначально находившийся в точке $x_1 = 0$. По стержню пойдут упругие волны, и до часов, находящихся в некоторой точке $x_1 \neq 0$, они дойдут через какое-то время, пропор-

циональное x_1 , и только тогда эти часы начнут ускоряться и могут начать менять свой ход. Поэтому время t_3 , отсчитываемое по ним после завершения процесса ускорения, будет некоторой функцией не только t_1 , но и x_1 . Мы можем обеспечить соблюдение принципа относительности и независимость от режима ускорения, если эта функция линейна и коэффициенты зависят только от конечной скорости v :

$$t_3 = \alpha_1(v) x_1 + \alpha_2(v) t_1. \quad (1)$$

Аналогично, для точки измерительного стержня, первоначально располагавшейся в $x_1 \neq 0$ и начавшей процесс ускорения только тогда, когда до нее дошел фронт упругой волны, вообще говоря, будет

$$x_3 = \beta_1(v) x_1 + \beta_2(v) t_1. \quad (2)$$

Теперь требованию взаимности, требованию соблюдения принципа относительности (и вообще групповым свойствам) легко удовлетворить подбором соответствующих функций $\alpha_i(v)$ и $\beta_i(v)$ совершенно так же, как это сделал Эйнштейн и как излагается во всех курсах теории относительности.

Таким образом, указанное сомнение можно устранить⁵.

Можно, конечно, еще удивляться, почему при такой чудовищной асимметрии перехода в конечное состояние движения с одинаковой относительной скоростью получается симметричный результат. Но здесь следует вспомнить, что основная статья Эйнштейна [5] начинается именно с этого вопроса: «взаимодействие между магнитом и проводником» теория Максвелла описывает асимметрично, а физический результат симметричен. «Наблюдаемое явление зависит здесь только от относительного движения проводника и магнита, в то время как согласно обычному представлению оба случая, в которых либо одно, либо другое из этих тел является движущимся, должны быть строго разграничены. В самом деле, если

⁵ Может возникнуть вопрос: почему приведенные в движение часы начнут менять свой ход, например, отставать? Это зависит от конкретного устройства часов. Например, для часов с грузом на пружине может повлиять возрастание массы с ростом скорости [19, с. 26] (не исключено, что на это ранее указывал и кто-либо другой.)

движется магнит, а проводник покоится, то вокруг магнита возникает электрическое поле. . . Если же магнит находится в покое, а движется проводник, то вокруг магнита не возникает никакого электрического поля; зато в проводнике возникает электродвижущая сила». Таким образом, физическому воздействию подвергаются разные тела, результат же одинаков и соответствует истинной симметрии, вскрываемой в теории относительности. Здесь важно обратить внимание на то, что Эйнштейн вовсе *не считает* «обычное» асимметричное представление *неправильным*, ошибочно описывающим явление в каком-либо из двух случаев. Оно правильно передает ход физических явлений в соответствии с уравнениями движения, не ведет к ошибочным выводам и допустимо, но не вскрывает всей глубины явления, оставляет непонятой тождественность результатов столь различно протекающих процессов.

Перейдем теперь к первому «возражению», общему для классической постановки вопроса о передаче стержней и часов и для не зависящей от передачи формулировки, опирающейся на тождественность микрочастиц и атомов: почему окончательный эффект не зависит ни от режима ускорения, ни от типа сил, ни от формы тела и свойств вещества, а только от окончательной относительной скорости v ? Рассмотрим поясняющий пример. Пример этот — всем хорошо известное лоренцовское решение уравнений Максвелла для поля точечного заряда. До создания теории относительности Лоренц показал, что сферически симметричное кулоновское поле заряда при переходе заряда в состояние равномерного и прямолинейного движения становится эллипсоидальным. Несмотря на сопутствовавшую фразеологию, существо дела здесь никакого отношения к существованию эфира не имеет. Важно подчеркнуть два свойства найденного решения: 1) результат не зависит от метода и режима ускорения, ведущего к конечному состоянию равномерного и прямолинейного движения; 2) результат точно совпадает с тем, который получается при применении теории относительности; он следует из принципа ковариантности уравнений электродинамики относительно преобразований Лоренца, т. е., если угодно, из релятивистской кинематики.

Это оказалось возможным до создания теории относительности Эйнштейна потому, что за четыре десятилетия до того Максвелл совершил чудо — он открыл уравнения

электродинамики, инвариантные относительно преобразований Лоренца. (Этого чуда не совершил в механике Ньютон, когда создал свои уравнения движения. Именно поэтому релятивистские уравнения механики пришлось отыскивать заново, и они отличаются от уравнений Ньютона. Вряд ли, однако, Ньютона можно за это упрекнуть.)

Лоренц из своего результата сделал вывод: если бы элементы тел удерживались в равновесии только электромагнитными силами, то они соответственно расположились бы в новых точках равновесия (например, на ставках эллипсоидальными эквипотенциальных поверхностях), и характерное сокращение Лоренца—Фиджеральда имело бы место для микроскопических тел в целом⁶.

Однако хорошо известно, что такое равновесие под действием одних электромагнитных сил невозможно (теорема Ирришоу в электростатике, неустойчивость структуры электрона самого по себе, падение электрона на ядро в неквантовой планетарной модели атома). Поэтому должны существовать еще какие-то причины, обеспечивающие равновесие. Но законы механики, теории упругости и т. п., уравнения движения были тогда известны только в нерелятивистской (неверной при больших v) форме. Они не могли преобразоваться так же, как электромагнитные, и не могли вместе с ними обеспечить правильное лоренцово сокращение макроскопического тела в целом.

Мёллер подчеркивает: если ход часов описывать правильными релятивистскими уравнениями механики, то замедление хода часов должно получиться и при динамическом расчете правильным (т. е. так же, как Лоренц получил сжатие электрического поля).

Можно вообразить себе такую фантастическую ситуацию. Представим себе, что человечество было бы одновременно и очень глупым, и очень умным, что оно, с одной стороны, не создало бы ни в 1905 г., ни в последующие десятилетия теорию относительности с ее новым пониманием пространства и времени. Но, с другой стороны,

⁶ Поэтому исходящая из лоренцова решения аргументация справедлива и для формулировки без передачи стержня: как уже говорилось, можно измерить новые значения напряженности электрического поля и (если равновесие определяется только электромагнитными силами) убедиться, что эта новая картина сил обеспечивает равновесие.

исследуя все более и более быстрые движения, физики обнаружили бы неправильность законов Ньютона. Например, обнаружили бы, что в условиях применимости закона Ньютона приходится предполагать изменение массы со скоростью (это, впрочем, исторически действительно имело место), различие масс при продольном и поперечном ускорении; обнаружили бы, что вообще компоненты силы (измеряемой в системе, относительно которой тело движется) действуют «необычным» образом. Тогда, поступая чисто эмпирически, обобщая опыт, какой-нибудь новый Максвелл — «Максвелл № 2» — в конце концов сформулировал бы, если пользоваться современной терминологией, релятивистски правильное обобщение законов Ньютона, т. е. сделал бы то, что сделал «Максвелл № 1» для электродинамики, также не имея представления ни о ковариантности уравнений, ни о принципе относительности (и даже будучи твердо убежденным в существовании эфира).

Пусть, далее, прошли бы еще годы, и, исследуя множественную генерацию частиц при соударении адронов сверхвысокой энергии, кто-то решил бы описывать ее, как это сделал Ландау в 1953 г. (см. ниже), как гидродинамический процесс, а подробное изучение процесса навело бы какого-нибудь «Максвелла № 3» на мысль, что уравнения гидродинамики можно записать в виде

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0 \quad (i = 1, \dots, 4), \quad (3)$$

причем тензор энергии-импульса нужно считать равным

$$T_i^k = (\varepsilon + p)u^k u_i + p\delta_{ik} + \tau_i^k, \quad (4)$$

где u^k — то, что мы теперь называем 4-скоростью, ε — плотность энергии, p — давление, а τ_i^k — слагаемое, описывающее действие вязкости и теплопроводности (хорошо известное в настоящее время, см., например, [20], оно является сложной комбинацией u^k , двух коэффициентов вязкости и коэффициента теплопроводности; в правую часть уравнения (3), вообще говоря, может входить внешняя сила).

Пусть прошли бы еще десятилетия, и были открыты мезоны, мезонные силы, и в результате мучительных об-

ширных исследований (особенно мучительных при незнании принципа ковариантности) какому-нибудь «Максвеллу № 4» удалось написать правильные релятивистски ковариантные (без осознания этого факта физиками) уравнения мезонного поля. Затем все то же могло бы повториться для слабых взаимодействий. В результате оказалось бы, что все эти поля приводят чудесным образом к одной и той же лоренцовой деформации при движении (например, жидкая капля из сферической становится, согласно правильной — формулы (3) и (4) — гидродинамике, эллипсоидальной), к одинаковому сокращению линейных масштабов всех этих полей вдоль направления движения и к одинаковому замедлению связанных с этими полями временных процессов.

Все это было бы «силовым», «динамическим» описанием самых разнообразных полей и процессов. Оно не было бы неправильным, но уже их разрозненность неудовлетворительна, а одинаковость кинематических следствий для состояний равномерного движения совершенно непонятна.

Неизбежно, как бы долго этот процесс ни длился, в конце концов осмысление этих общих свойств привело бы к открытию принципа ковариантности, к осознанию особых свойств пространства и времени, обнаруживаемых с помощью анализа процесса измерения. Гениальность Эйнштейна заключается в том, что ему было достаточно опыта электродинамики и уравнений Максвелла, чтобы проделать эту работу (впрочем, как известно, он сам говорил, что если бы не он, то кто-либо другой «без большого премедрения» создал бы специальную теорию относительности⁷; человечество все же не так глупо, как предполагается в описанной — логически возможной — фантастической истории).

6. Ковариантность законов природы как «интегральный ограничительный принцип»

В наше время мы хорошо знаем, почему для всех полей результат одинаков: для всех полей уравнения движения

⁷ При этом он справедливо добавил: «Но по отношению к общей теории относительности дело обстоит иначе. Вряд ли она была бы известна теперь» (сказано четверть века спустя после ее опубликования).

описывают процессы в пространстве-времени, мера которого определяется одним и тем же принятым нами процессом измерения длин и временных промежутков, и эти уравнения движения ковариантны относительно одной и той же группы Лоренца. Поэтому *те общие свойства материальных тел и процессов, для которых достаточно учитывать указанные свойства пространства-времени, получаются отсюда не только проще, но и более адекватно, чем из анализа динамического процесса преобразования (деформации) тел при передаче их в движущуюся систему отсчета (неважно, какого именно, — при передаче измеряемого тела в другую ИСО, либо при передаче измеряющих приборов в ИСО, движущуюся в обратном направлении с той же скоростью). Именно поэтому, например Мёллер в приведенной выше цитате, справедливо считает подход, основанный на общем кинематическом принципе, более адекватным, а вытекающее отсюда сокращение масштаба — более «элементарным» фактом.*

Однако теория относительности ни в коем случае не заменяет и не подменяет уравнений движения, она только «контролирует» их. Эйнштейн неоднократно говорил об этом: «Общий принцип специальной теории относительности содержится в постулате: законы физики инвариантны относительно преобразований Лоренца . . . Это есть ограничительный принцип . . . который можно сравнить с лежащим в основе термодинамики ограничительным принципом несуществования вечного двигателя» [18, с. 279] (курсив мой — Е. Ф). В другом месте он снова ставит его в один ряд с законом сохранения энергии и законом неубывания энтропии. Поясним это примером.

Предположим, что студенту задана (нерелятивистская) задача: найти высоту z_0 , до которой долетит камень массы m , если его бросить вверх (вдоль оси z) со скоростью v . Аккуратный, но не очень догадливый студент напишет дифференциальное уравнение движения Ньютона, решит его, принимая во внимание начальные условия $z=0$, $\dot{z}=v$ при $t=0$, найдет функцию $z(t)$ и из условия максимума для этой функции найдет z_0 . Здесь все физически и математически правильно. Однако в таком решении нет никакой необходимости. Можно ведь, не решая уравнения, сразу написать, используя лишь закон сохранения энергии, что $gz_0 = mv^2/2$ (где g — ускорение силы тяжести), и не интересоваться функцией $z(t)$.

Эта задача может быть усложнена, скажем, если добавить ветер, дующий горизонтально. Решение дифференциального уравнения усложнится, будет вычислена двухмерная траектория, но из закона сохранения энергии для вертикальной компоненты вместо этого вне z_0 определяется сразу. А что, если считать, что в районе опыта расположен смерч со строго горизонтальными вихрями? Это еще более усложнит вычисление всей траектории (мы, конечно, предполагаем, что студент так недогадлив, что не ограничится решением одного уравнения для $z(t)$, а вычислит всю трехмерную траекторию), но все это не нужно — закон сохранения энергии дает по-прежнему нужный (ограниченный по содержанию) ответ сразу. То же будет, если бросать камень из горизонтально движущегося поезда и т. д.

В этом примере подчеркнем два обстоятельства: 1) бесконечно многообразные траектории, получаемые при разных постановках задачи, ведут к одинаковому ответу на интересующий нас вопрос: $z_0 = mv^2/2g$ (однако, конечно, есть и такие условия задачи, которые нарушают его, например, если присутствует вертикальная компонента скорости ветра); не важны здесь также ни химический состав, ни форма камня; 2) подлинная физическая причина, которая ограничивает высоту полета камня и определяет z_0 , — это именно закон сохранения энергии. Поэтому опирающееся на него решение *не только проще — оно и более адекватно. Оно, однако, отнюдь не запрещает использования дифференциальных уравнений*, не делает его *физически* неправильным, нелепым. С помощью уравнений движения можно непрерывно проследить взлет тела до z_0 . Можно, вообще, получить много физических результатов, которые не могут быть получены из одного закона сохранения энергии. Эти результаты могут быть совершенно различными для разных условий задачи, для разных режимов достижения одной и той же высоты. Но для ответа на поставленный нами узкий вопрос (найти *только* z_0) это явно нецелесообразно. Более того, подробное решение затуманивает истинную физическую природу эффекта.

Нетрудно видеть, что приведенный пример совершенно аналогичен — пункт за пунктом — проблеме динамической природы сокращения масштабов и замедления часов.

Если нас интересует *только* соотношение длин тел или промежутков времени в двух разных ИСО, нет нужды

проследивать все стадии динамической деформации масштабов при их передаче из одной ИСО в другую, как нет нужды и исследовать статическое равновесие сил в каждом данном теле сложной конфигурации (если мы пользуемся формулировкой без передачи стержня). В этом вопросе, весьма ограниченном по постановке, 1) режим ускорения безразличен, по достижении конечной постоянной скорости результат будет одинаков, 2) глубокая физическая причина, по существу так же определяющая окончательный эффект, как закон сохранения энергии ограничивал высоту полета камня, — отсутствие избранной системы отсчета, существование пространственно-временного континуума, не распадающегося на независимые континуумы пространства и времени. Поэтому основанное на этих «кинематических» соображениях решение не только проще, но и более адекватно.

Еще одно замечание. Закон сохранения энергии выводили ранее как обобщение эксперимента, а в механике — как интеграл движения. В настоящее время мы понимаем его как следствие однородности времени, проявляющейся в инвариантности лагранжевой функции относительно сдвига во времени. Подобно этому, хотя принцип относительности мог бы быть извлечен из системы ковариантных уравнений для всех полей, если бы эти уравнения были известны, он не просто выражает математическую ковариантность уравнений движения, но истолковывается как проявление свойств пространства-времени. Именно поэтому кинематический расчет справедливо считается «более элементарным», как говорит Мёллер. В то же время ничто не мешает считать уравнения движения, вообще говоря, более фундаментальными, чем закон сохранения энергии (ведь он есть одно из частных следствий уравнений движения), и то же верно для теории относительности (ср. выше слова Эйнштейна о том, что «теорию масштабов и часов следовало бы выводить из решения основных уравнений»).

7. Реальные процессы установления новой формы тела

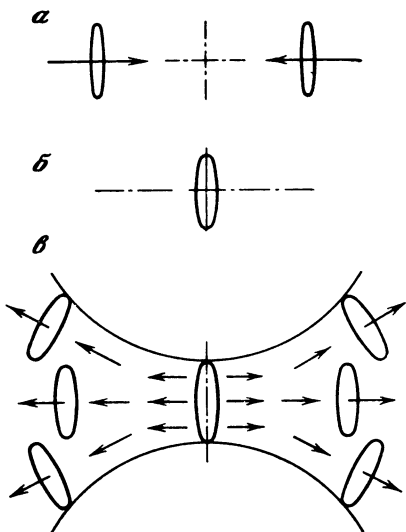
Но тогда зачем все это усложнение, не проще ли забыть о возможности динамического рассмотрения, забыть о существовании самой этой проблемы? Думается, это все же было бы нецелесообразно.

Въяснение истинного соотношения между физическим процессом постепенного — по мере воздействия ускоряющих сил — изменения сжатия тел и замедления протекания процессов или между изменившимися условиями равновесия сил в движущемся теле, с одной стороны, и обеспечивающими соблюдение принципа относительности общими пространственно-временными закономерностями — с другой, само по себе желательно. В то же время, можно думать, что понимание этих вопросов должно иметь педагогическую ценность, поскольку связывает довольно отвлеченные понятия теории пространственно-временных измерений с весьма «земными» и «физически осязаемыми» явлениями деформации. Возможно, изложение теории относительности для впервые изучающих ее целесообразно начинать со сжатия кулоновского поля, как его получал Лоренц, подчеркивая независимость степени сжатия от частного характера процесса ускорения; затем вводить необходимость такого же преобразования для всех других полей, постулируя ненаблюдаемость абсолютного движения (принцип относительности); соответственно требовать для ее обеспечения взаимности сокращения тел — вводить требование такого же сокращения измеряемой длины, когда действие сил испытывает (и приобретает ускорение) не измеряемый стержень, а измеряющий комплекс масштабов и часов. Лишь после того как подобным образом качественно (не обязательно количественно) будет понята независимость результатов не только от режима ускорения, но и от выбора объекта действия силы, из сопоставления также с асимметрией толкования взаимодействия проводника и магнита (с которого начинал статью Эйнштейн) можно сформулировать общую проблему измерения и дать обычный вывод с поездами и платформами. Возможно, так будет понятнее, и мистический туман лоренцовского сокращения и замедления в некоторой мере рассеется (не будем таить греха — ведь при всеобщем распространении и использовании теории относительности очень многие «сначала не понимают, затем привыкают»).

Но этого мало. Если мы встречаемся с реальными процессами взаимодействия тел и полей, ведущими к перераспределению скоростей тел и т. п., если, как это встречается все чаще и чаще, нас интересует протекание реального процесса ускорения тела до релятивистских скоро-

Рис. 2. Множественная генерация адронов при соударении нуклонов весьма высокой энергии по гидродинамической теории Ландау (картина в общей системе центра инерции)

a — до соударения,
б — момент полного слияния и остановки,
в — гидродинамический разлет и распад на отдельные частицы



стей, то без уравнений движения не обойтись. В этих случаях, помимо чисто расчетных проблем, мы нередко встречаемся с ситуацией, в которой без уяснения реальности динамического процесса возникает непонимание изучаемых процессов. И наоборот, в таких явлениях вскрывается реальность силовой природы сжатия и т. п.

Рассмотрим, например, процесс, который встречается в статистико-гидродинамической теории множественного рождения частиц при нуклонных соударениях высокой энергии. Здесь имеются в виду соударения, при которых в системе центра инерции лоренц-фактор нуклонов $\gamma_{\text{СЦИ}} = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ измеряется числами порядка 100 и много больше. При такой энергии нуклон, имеющий в покое сферическую форму с характерным радиусом $R \sim 10^{-13}$ см, в СЦИ является тоненьким блином толщины $d = R/\gamma_{\text{СЦИ}}$. Ферми предположил, что при любом соударении таких блинов из-за сильного взаимодействия они полностью останавливаются и вся их энергия оказывается сконцентрированной в объеме с толщиной порядка d (рис. 2). В этот момент скорость всех точек системы равна нулю. Впоследствии процесс остановки был рассмотрен строго в рамках гидродинамической модели [21] как результат прохождения ударных волн, причем была использована

релятивистская гидродинамика. Здесь также наступает момент, когда почти все вещество покоится (за исключением его малой части, начинающей истечение в пустоту с обоих концов системы). Следует подчеркнуть, что, учитывая симметрию задачи, мы можем представить себе столкнувшиеся частицы разделенными непроницаемой для вещества стенкой, так что вещество каждого нуклона находится в своем полупространстве и не смешивается с веществом другого нуклона. По предположению Ферми, из-за высокой плотности энергии на этой стадии происходит генерация большого числа новых адронов, которые и уносят всю энергию. Однако, как заметил Померанчук, рожденные адроны должны, разлетаясь, взаимодействовать между собой в течение некоторого времени, пока не разойдутся далеко. Соответственно этому Ландау построил изящную теорию расширения, охлаждения и, в конце, распада весьма плотной материи, рассматриваемой как сплошная среда. Эта теория использует уравнения релятивистской гидродинамики и термодинамики, причем расширение происходит, конечно, постепенно, ни в какой момент скорость не превышает скорости света [21].

К сожалению, до сих пор не известно, происходит ли в природе такой процесс полной остановки соударяющихся начальных адронов-близов (все равно, хотя бы как «мысленный эксперимент», пример вполне строг). Нам важно другое. Если этот процесс имеет место, то после того как начальная скорость была взаимно погашена, начальная форма двух нуклонов отнюдь не восстанавливается мгновенно — протекает длительный, динамически рассчитываемый процесс.

Гидродинамическая теория Ландау существует 25 лет, разрабатывалась, обсуждалась и применялась во многих десятках работ. И все же, если спросить многих из тех физиков, кто пользуется ею, почему же после остановки адроны не имеют форму шара, которую они должны иметь в покое — ведь они в этот момент покоятся, ответы нередко будут уклончивы и невразумительны. Поэтому понимание роли динамики лоренцова сокращения масштабов и замедления часов имеет значение также и в повседневной практике физиков, когда нужно рассчитывать реальный переход системы к новому состоянию движения.

Недавно был рассмотрен другой красочный пример — изменение плотности зарядов (и изменение размеров всей

системы) в тонком плоском слое заряженных частиц при нормальном падении на него электромагнитной волны [22]. Здесь также видно, что процесс установления окончательной постоянной скорости всех зарядов (и соответственно значения плотности, удовлетворяющего лоренцову сжатию всей системы) требует динамического рассмотрения.

Иногда задаются вопросом: можно ли рассматривать неравномерное движение в рамках специальной теории относительности? Конечно, очень странный вопрос. Ведь именно для этого и существуют релятивистски правильные, ковариантные уравнения движения, позволяющие в принципе изучать любое движение, в том числе движение сложных систем. Другое дело, что пока длится ускорение, пока действуют внешние силы (а также в течение некоторого времени и после того, см. ниже), нельзя, вообще говоря, в каждый данный момент применять к телу в целом формулы преобразования длины и времени, справедливые для равномерного движения. Так, например, если ускоряемые часы в некоторый момент имеют скорость v , то отсчитываемый по ним промежуток времени $d\tau'$, вообще говоря, отнюдь не $d\tau_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$, где $d\tau_0$ — соответствующий промежуток времени для покоящихся часов; показание часов не дается лоренцовым преобразованием времени для данного v . Все зависит от конструкции часов и от режима ускорения. Ведь в этот период часы испытывают переменные напряжения, различные в разных элементах часов, и т. п.⁸ Совершенно так же и длина ускоренного стержня, если, например, в данный момент скорость его центра тяжести есть v , не определяется лоренцовым сжатием для данного v — ведь по стержню идут упругие волны и т. п.

⁸ Только при достаточно медленном ускорении $d\tau' = d\tau_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$, и в таком случае τ' совпадает с так называемым собственным временем. Но, «вообще говоря, ускорение оказывает влияние на ход часов. Только когда ускорение достаточно мало, это значит, кривизна мировой линии достаточно невелика, собственное время непосредственно имеет данное физическое значение. Где лежит граница — зависит от свойств часов. Все же определяемое формулой. . . [$d\tau' = d\tau_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} - E. \Phi.$] собственное время является полезным математическим понятием») [16, с. 76] (быть может, лучше сказать: оно выражает практически полезную предельную и идеализированную величину, которая в очень многих случаях является очень хорошим приближением к действительно наблюдаемому показанию часов).

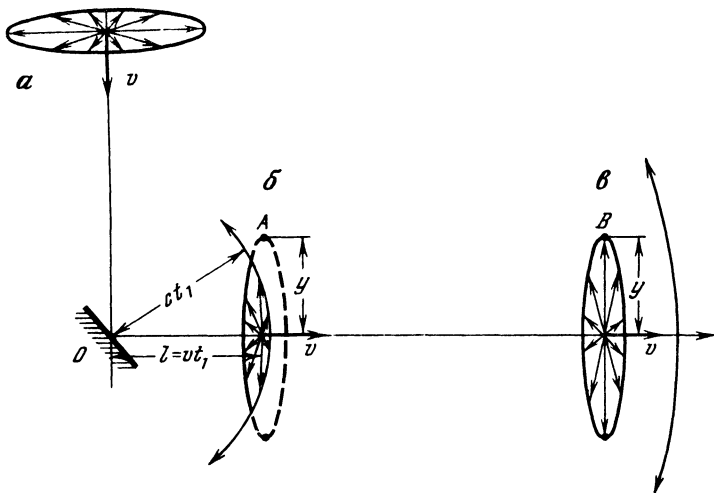


Рис. 3. Собственное поле равномерно движущегося электрона весьма высокой энергии

a — при бесконечно долгом равномерном движении, *б* — вскоре после резкого изменения скорости, $l < (1 - v^2/c^2)^{-1/2}y$;

в — после достаточно долгого периода восстановления нормального равновесного поля, $l \gg (1 - v^2/c^2)^{-1/2}y$

Более того, даже после того как внешняя сила перестала действовать, требуется некоторое время, иногда очень значительное, для того, чтобы внутреннее состояние тела стало равновесным и во всех отношениях соответствующим некоторой единой для всех частей тела постоянной скорости v .

Хорошим примером здесь может служить собственное электромагнитное поле быстро движущегося заряда, например электрона (рис. 3). При равномерном движении, когда внутреннее состояние системы вполне стационарно, поле должно быть эллипсоидом с отношением полуосей для любой эквипотенциальной поверхности $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Но если такой электрон испытал резкое ускорение, например, рассеялся на большой угол, то еще долго, двигаясь уже с постоянной скоростью v , он не будет обладать таким полем. Как легко показать из выражения для полей Лиенара—Вихерта (да и просто из конечности скорости распространения поля в системе покоя электрона),

электрон еще долго может быть «голым» (точнее, «полуголым»), поле появляется лишь постепенно. На расстоянии y от оси движения поле у электрона появляется лишь, когда он пройдет путь $l \sim y\sqrt{1-v^2/c^2}$ ⁹. В частности, на расстоянии порядка комптоновской длины $y \sim 4 \cdot 10^{-11}$ см у электрона с энергией 10^{16} эв (встречается в космических лучах) поле появляется лишь, когда он (двигаясь уже равномерно!) пройдет путь около 1 см; это справедливо и в квантово-электродинамическом случае, но там появление поля происходит статистически скачкообразно, с вероятностью порядка единицы по прохождению того же пути l . А на расстоянии $y=1$ см оно появится у электрона энергии 10^{11} эв, только когда он пройдет 2 км. Этот эффект проявляется в конкретных (хорошо наблюдаемых и изученных) явлениях потому, что «голый» электрон взаимодействует с другими частицами на своем пути иначе, чем нормальный, «одетый». Например, его тормозное излучение при повторном взаимодействии резко отлично от нормального для электрона той же скорости, но имевшего после своего ускорения достаточно времени, чтобы «одеться» — прийти в равновесное состояние со своим полем (весь вопрос подробно рассмотрен в [23]).

В связи с этим уместно вернуться к вопросу о соотношении между показаниями реальных часов и «собственным временем» для равномерного движения. Согласно только что сказанному, они совпадают, только если ускорение предельно мало или если после резкого ускорения прошло достаточно много времени для того, чтобы внутренняя структура часов пришла в равновесие. Эйнштейн, приведя формулу преобразования времени, писал: «Сразу видно, что этот результат получается и тогда, когда часы движутся из A в B по любой ломаной линии»

⁹ Действительно, когда электрон рассеялся в точке O в момент $t=0$, эллипсоид поля имел центр в этой точке и был — по предположению, $(c-v)/c \ll 1$ — очень сильно сжат. Поэтому поле в точке A с ординатой y (рис. 3, б) отсутствовало. Когда через время t_1 электрон прошел расстояние $l=vt_1$, поле, распространяющееся из O со скоростью c , могло быть отлично от нуля лишь в пределах сферы радиуса ct_1 с центром в O . Только когда из-за разности скоростей c и v сфера достаточно обгонит электрон, поле в точке B с ординатой y и той же, что у электрона абсциссой, может появиться (рис. 3, в).

[5, с. 19]; впоследствии это утверждение было распространено и на любую ломаную *мировую* линию, когда v на различных отрезках различно. Строго говоря, это утверждение нуждается в уточнении. После каждого излома в течение времени $\Delta\tau_0 = \Delta\tau' / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ (ср. рис. 3), где τ' — время в *собственной* системе, необходимое для того, чтобы часы «успокоились» после ускорения (после излома мировой линии), обычную формулу преобразования времени для постоянного v применять нельзя. Поэтому если время движения по прямолинейным отрезкам сравнимо с $\Delta\tau_0$, то формула, полученная суммированием по этим отрезкам, $\tau_0 = \sum_i \tau'_i / \sqrt{1 - v_i^2/c^2}$, где τ'_i — собственное время движения по i -у отрезку, совершенно неверна для физической системы с подобным временем «успокоения» $\Delta\tau'$. В равной мере это относится к распространению тех же соображений на кривую мировую линию.

В парадоксе близнецов, например в простейшем случае двух равномерных движений «туда» и «обратно», приходится пренебрегать сдвигами во времени, возникающими в периоды начального ускорения, поворота и окончательного замедления. Вычислить их в общем случае нельзя, так как они зависят от устройства часов (близнецов) и режима ускорения. Однако ими можно пренебречь, потому что они конечны, а отрезки равномерного движения можно сделать произвольно длинными. Как мы видим, кроме того, нужно пренебрегать и сдвигами времени *после* каждого из трех ускорений, когда, двигаясь уже в целом равномерно, система «успокаивается». Критерий пренебрежимости этими сдвигами очевиден: *собственное* время, затрачиваемое на «успокоение» системы, $\Delta\tau'$, должно быть много меньше *собственного* времени, затрачиваемого на равномерное движение τ' (в примере на рис. 3, если для результата работы часов существенно поле электрона на расстоянии порядка y от оси движения, то $\Delta\tau' \sim y/c$).

Необходимость выждать время, пока ускоренная система, двигаясь уже без приложенных сил, «успокоится», придет в новое равновесное состояние и к ней можно будет применять формулы преобразования длины и времени специальной теории относительности, очень наглядно видна на различии поведения связанных и не-

зависимых систем, очень хорошо разобранного в [24, § 195—200 и др.] (с некоторыми общими высказываниями автора в других местах, например, от юсительно эфира и связываемой с ним системы отсчета (§§ 8, 57), мы не можем согласиться).

Рассмотрим сначала в некоторой системе K два тела в точках x_1 и x_2 , $x_2 - x_1 = l$. Пусть одновременно (по часам K) они получили совершенно одинаковые ускорения, так что через некоторое время стали двигаться с постоянными скоростями $v_1 = v_2$ вдоль оси x (это могут быть, например, снаряды двух одновременно выстреливших пушек). Ясно, что их взаимное расстояние, измеряемое по-прежнему приборами в K , останется неизменным и равным l . Никакого лоренцова сжатия для этого расстояния не произойдет. Если же эти тела были соединены стержнем, то ускорения, приданные телам, передадутся стержню, по нему пойдут упругие волны и, когда все успокоится, длина стержня, т. е. расстояние $x_2 - x_1$, уменьшится и станет по измерениям в K равным $l' = l\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Что же происходит в промежуточном случае, если связь (прочность стержня) мы будем постепенно ослаблять и в конце концов перейдем к тончайшей нити? Если ускорение «переднего» конца очень велико, то нить просто разорвется. Но как бы она ни была слаба, мы можем, придавая достаточно малое ускорение, осуществить ту же ситуацию, что и в случае прочного стержня. Однако для достижения той же конечной скорости v и того же сжатия нити до длины l' потребуется соответственно гораздо больше времени.

8. «Динамическая интерпретация» и общие принципы теории относительности

Опыт дискуссий показывает, что «силовая» интерпретация встречает возражения главным образом из-за возникающей психологической ассоциации с неоднократными попытками основать на ней борьбу против теории относительности. Мы видим, что в действительности такое противопоставление неправильно. Описание релятивистского сокращения масштабов и замедления часов как реального процесса, связанного с действием (в частности, с перераспределением) реальных независимо измеряемых сил, физически правильно и вполне согласу-

ется с общими принципами и конкретными формулами теории относительности. Однако и до открытия Эйнштейном общих принципов, и после предпринимались попытки ограничиться конкретными динамическими или статическими расчетами. В давние времена это была борьба за эфир и за абсолютное пространство.

И в середине XX в. еще встречались попытки убедить в «неузости» теории относительности, ибо предсказываемые или объясняемые ею явления можно получить конкретным рассмотрением физических процессов, например, используя только зависимость массы от скорости. При этом имеется в виду, что подобная зависимость для электромагнитной массы вытекает уже из дорелятивистских вычислений Лоренца. Почему она должна иметь место и для незаряженных частиц (например, для нейтрона), остается при таком подходе необъяснимым. Это (считают такие авторы) должно стать задачей будущих поколений. При этом подходе иногда полагают необходимым снова и снова проверять на опыте выводы теории относительности, снова и снова сверяя результат с тем, что можно получить «без теории относительности», просто детальным анализом физического процесса на основании уравнений Максвелла, а также уравнений Ньютона с массой, зависящей от скорости. Такая система уравнений действительно для многих явлений почти эквивалентна релятивистской механике и электродинамике и потому способна дать результат, совпадающий с выводами теории относительности. Нужно ли однако держать эту теорию под постоянным подозрением? ¹⁰

Нет сомнения, никто не решится утверждать, что теория относительности останется на все времена неизменной. Могут появиться требующие изменений новые экспериментальные факты. Однако, если это и произойдет, то потому, что теория заменится более всеобъемлющей и останется предельным случаем этого более общего теоретического построения (как частная теория относительности заменилась общей). Но самое главное — это то, что динамическое объяснение так называемых кинематических эффектов ничем не ослабляет принципы тео-

¹⁰ В дореформенном русском суде, помимо приговоров «оправдать» и «признать виновным», существовала формула: «оправдать, но оставить под подозрением» (она была, в частности, применена к драматургу Сухово-Кобылину).

рии относительности, несколько не выходит за рамки этой теории, а составляет ее органический элемент и более того, как мы видели, по мнению самого Эйнштейна, — оно необходимо. Рассмотрение конкретных примеров может служить еще одним свидетельством того, что ясное понимание места и роли динамического подхода помогает избавиться от мучительных сомнений.

И. Е. Тамм писал [25, с. 184]: «Постулаты теории относительности, подобно закону сохранения энергии, позволяют указать ряд точных характеристик физических явлений и в тех случаях, когда нам неизвестны точные законы сил взаимодействия элементов данного тела. . . или в тех случаях, когда точное вычисление результатов действия известных сил. . . практически невыполнимо по своей сложности. Конечно, очень многие физические вопросы не могут быть решены только на основании общих закономерностей, а требуют детального анализа».

Требование постоянно, снова и снова проверять справедливость выводов теории относительности нельзя отклонить никакими доводами, кроме того, что теория относительности в этом отношении ничем не выделена из ряда других фундаментальных теорий. Действительно, с такой же обоснованностью (или необоснованностью) можно настаивать на постановке специальных опытов по проверке закона сохранения энергии, закона возрастания энтропии и т. п. Чисто логическая возможность нарушения подобных законов всегда существует. Однако правильность динамической интерпретации кинематических формул теории относительности здесь ничего не прибавляет.

Заключение

В заключение можно поставить еще один вопрос. Если все так просто и «силовое», в частности динамическое, истолкование справедливо, почему же у Эйнштейна, Паули, Лауэ, Мёллера и других авторитетов так редко встречаются высказывания по этому поводу, а в других трудах крупных физиков и того нет? Вероятно, дело в том, что для всех них вопрос этот элементарно ясен ¹¹.

¹¹ Не стал же Ландау в своей статье по гидродинамической теории объяснять, почему в начальный момент гидродинамического расширения мы имеем тонкий лепесток на рис. 2, б, а не два шара.

Динамическое толкование слишком песомненно вытекало из предшествующей истории вопроса, из трудов Лоренца, Паункаре и др. Проблема для Эйнштейна была в другом: каков тот общий принцип, который обеспечивает универсальность, сокращение масштабов и замедление часов *независимо* от их физических свойств, от рода участвующих полей, от режима ускорения, и притом принцип, который согласуется с ненаблюдаемостью абсолютного движения? Этот принцип — ковариантность уравнений движения относительно преобразования Лоренца и неразложимость пространства-времени на независимые пространство и время — принцип относительности в сочетании с независимостью скорости света от скорости источника. Его и нашел Эйнштейн, проанализировав процесс измерения, дав определение понятий длины и промежутка времени и обнаружив относительность одновременности. В открытии и формулировке нового «ограничительного принципа», ставшего в один ряд с принципом сохранения энергии и другими принципами того же ранга, и состоит заслуга Эйнштейна, благодаря которой теория относительности носит его имя. Именно это его открытие так поразило физиков, что все они при изложении теории относительности прежде всего передают эту сторону работы Эйнштейна, вопрос же о динамическом истолковании релятивистских эффектов представляется им не заслуживающим особого внимания.

Резюмируя, можно сказать следующее. На вопрос — допустимо ли рассматривать релятивистское сокращение масштабов и замедление времени как результат динамического процесса (либо сводить их к изменяющему с ростом скорости свой характер равновесию сил), мы отвечаем: вполне допустимо, но если нас интересует *только состояние (достаточно долго длящегося) равномерного относительного движения тела и системы отсчета, это не нужно*. Не нужно потому, что релятивистский кинематический подход не только проще и прямее ведет к цели, но он и адекватнее: сведение к действию сил, к атомарной структуре и уравнениям движения может заслопить универсальный характер эффекта и его обусловленность свойствами пространства-времени, которые вскрывает принцип относительности.

Однако следует помнить, что *такая «динамическая» интерпретация эффекта возможна*, причем она *необхо-*

дима в тех процессах, в которых имеет место *переход от одного состояния равномерного движения к другому*, особенно если этот переход сопровождается изменениями внутренней структуры и других свойств тела. Здесь необходимо использовать уравнения движения, конкретные свойства вещества и т. п. В свете этой более общей ситуации сокращение масштаба и замедление часов при равномерном движении предстает как частный случай, для которого достаточно использовать кинематику теории относительности, подобно тому, как достаточно использовать закон сохранения энергии для определения высоты, достигаемой брошенным камнем.

Это положение можно проиллюстрировать также и следующим примером.

Когда утверждалась концепция близкодействия электрических зарядов через посредство электромагнитного поля в противовес дальнодействию, то нельзя было сделать выбор между двумя концепциями, оставаясь только в рамках электростатики. Выбор стал возможен только при рассмотрении более общего случая. Обычно приводилось такое рассуждение: пошлем радиосигнал, разрушим (или выключим) передатчик и затем построим (или включим) в другом месте приемную станцию, прежде чем до этого места дойдет сигнал¹². Ясно, что в период, когда не было ни передатчика, ни приемника, энергия была запасена в поле. Нечто подобное мы имеем и в той релятивистской проблеме, которую мы рассматриваем: реальность сил, обуславливающих сжатие масштабов и замедление часов, раскрывается лишь в процессах установления сжатого состояния (или замедленного течения процессов). Об этих силах мы можем не думать и ничего не знать, если нас интересует только интегральный эффект — различие длин и промежутков времени, определяемых по отношению к различным инерциальным системам отсчета. Здесь достаточно использовать общий «ограничительный» принцип, стоящий в одном ряду с законом сохранения энергии и закон неубывания энтропии.

Мы видим, что даже простой вопрос: что считать более фундаментальным, более «элементарным» (Мёллер) —

¹² В качестве курьеза стоит вспомнить, что лет 40 назад это рассуждение воспринималось как невероятная гипербола, хотя как мысленный эксперимент допустимая. В век межпланетной радиосвязи это вполне реальная ситуация.

релятивистское сокращение длины или ковариантные уравнения движения, — не допускает однозначного ответа.

В случае закона сохранения для консервативной системы, с одной стороны, можно считать уравнения движения более фундаментальными, чем закон сохранения. В самом деле, он ведь лишь одно из следствий уравнений движения, один интеграл уравнений и поэтому гораздо беднее по содержанию. Достаточно ввести переменное во времени внешнее поле, и он теряет силу. Придется пользоваться уравнениями движения. Но, с другой стороны, он обладает столь большой общностью и, более того, выражает столь фундаментальное свойство времени — его однородность (инвариантность лагранжиана относительно смещения во времени), что есть достаточно оснований считать его более фундаментальным, чем уравнения движения, которые обязаны ему удовлетворять.

Совершенно так же релятивистски ковариантные уравнения движения, законы динамики гораздо шире, чем одно предельное свойство всех систем — сокращение длины и замедление времени при равномерном движении. Если же появляется малейшая неравномерность движения часов, то их показание, строго говоря, перестает соответствовать релятивистскому замедлению при данной — мгновенной — их скорости. Это показание будет зависеть от конструкции часов и от режима ускорения. Показание часов можно будет рассчитать (хотя бы в принципе) только из уравнений движения. Поэтому можно считать, что эти уравнения более фундаментальны, чем лоренцовы формулы для замедления времени и сокращения длины, дающие лишь предельное значение эффекта при достаточно долго длящемся совершенно равномерном движении. Но, с другой стороны, в этих формулах выражается столь общее свойство пространства и времени — неразложимость пространственно-временного континуума на независимые континуумы пространства и времени, — что имеются основания и для того, чтобы именно их считать более фундаментальными.

Л и т е р а т у р а

1. *Lorentz H. A.* Die Relativitätstheorie für Gleichformige Translationen, Lpz., Akad. Verlagsgesellschaft, 1929.
2. *Terrell J.* — Phys. Rev., 1959, 116, 1041.
3. *Penrose R.* Pros. Cambr. Phil. Soc., 1959, 55, 137.
4. *Вайскопф В.* — УФН, 1964, 84, 183.
5. *Эйнштейн А.* К электродинамике движущихся тел. Собр. науч. трудов, т. I. М., «Наука», 1965, с. 7.
6. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории относительности. Собр. трудов, т. 5. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1950.
7. *Сморodinский Я. А., Угаров В. А.* — В кн.: Эйнштейновский сборник 1972. М., «Наука», 1974, с. 237.
8. *Жуков А. И.* Введение в теорию относительности. М., Физматгиз, 1961.
9. *Гарднер М.* Теория относительности для миллионов. М., Атомиздат, 1965.
10. *Курганов В.* Введение в теорию относительности. Пер. с франц. М., «Мир», 1968.
11. *Мицкевич Н.* Послесловие. — В кн.: *Гарднер М.* Введение в теорию относительности. М., «Мир», 1968.
12. *McCrea W. H.* Relativity Physics. L., Methuen, 1935.
13. *Паули В.* Теория относительности. М., Гостехиздат, 1947.
14. *Эйнштейн А.* Собр. науч. трудов, т. IV, М., «Наука», 1967, с. 46.
15. *Эйнштейн А.* Там же, с. 42.
16. *Laue M.* Die Relativitätstheorie, Bd. I, 1921.
17. *Möller C.* The Theory of Relativity. Oxford Univ. Press, 1955. Пер. с англ.: *Мёллер К.* Теория относительности. М., Атомиздат, 1975, с. 41.
18. *Эйнштейн А.* Автобиографические заметки. Собр. науч. трудов, т. IV. М., «Наука», 1967, с. 280.
19. *Соколовский Ю.* Теория относительности в элементарном изложении. Харьков, 1960.
20. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
21. *Беленький С. З., Ландау Л. Д.* — УФН, 1955, 56, 309.
22. *Сыроватский С. И.* — УФН, 1976, 118, 545; см. наст. сб. с. 78.
23. *Фейнберг Е. Л.* — ЖЭТФ, 1966, 50, 202 (квантовоэлектродинамическое рассмотрение); Проблемы теоретической физики (сборник статей памяти И. Е. Тамма). М., «Наука», 1972.
24. *Janossy L.* Theory of relativity based on physical reality Budapest. 1971.
25. *Тамм И. Е.* — УФН, 1957, 62, 183.

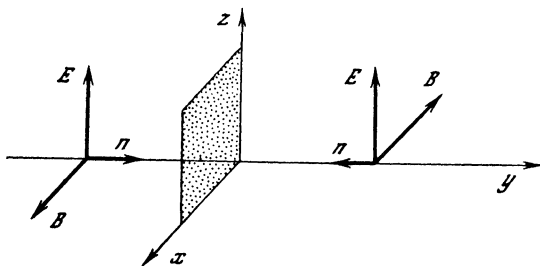
К ВОПРОСУ О «ЗАПАЗДЫВАНИИ» РЕЛЯТИВИСТСКОГО СОКРАЩЕНИЯ ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ

Релятивистское сокращение движущихся тел или систем тел является прямым следствием фундаментальных принципов современной физики и поэтому столь же достоверно, как и сами эти принципы. Возникающие иногда недоразумения обычно связаны с неправильным применением преобразований Лоренца. Часто это происходит, когда смешиваются два существенно различных явления. С одной стороны, это различие размеров тела, измеренных в двух движущихся друг относительно друга системах отсчета, с другой — изменение размеров тела, приведенного в движение (или остановленного) в данной системе координат. Если в первом случае ответ однозначен и дается формулами преобразования Лоренца, то во втором он существенно зависит от того, как именно двигалось рассматриваемое тело между двумя измерениями. Несмотря на очевидность этих утверждений, их полезно проиллюстрировать на простом примере, тем более что он показывает, в каких условиях различие исчезает и в обоих случаях результат выражается преобразованием Лоренца.

Таким примером служит одномерная задача о движении плоского слоя зарядов под действием плоской электромагнитной волны. Эта задача возникает в проблеме ускорения частиц в нейтральных токовых слоях в плазме [1, 2] и является одним из немногих примеров точно решаемых самосогласованных задач электродинамики [3]. Мы рассмотрим ее в простейшем варианте.

Пусть на тонкий слой заряженных частиц в плоскости x, z , (см. рисунок) по нормали к нему падает плоская электромагнитная волна с прямоугольным фронтом. Для простоты, хотя это и не принципиально, будем считать, что в той же плоскости расположен жестко удерживаемый неподвижный слой зарядов противоположного

знака, так что в целом слой электрически нейтрален. Задача особенно проста в симметричном случае, когда одновременно такая же волна приходит с противоположной стороны слоя. В этом случае магнитные поля гасят друг друга, а электрические складываются, приводя заряды в движение в направлении оси z . Возникающий ток с плотностью $j = nev$, где n — плотность зарядов, v — их скорость, в свою очередь порождает излучение (отраженную волну). Точное решение такой самосогласованной задачи не представляет труда, и мы не будем здесь его приводить (см. [1—3]). Остановимся только на одном вопросе: как связана плотность движущихся зарядов n с ее начальным значением n_0 ? Речь, разумеется, идет об исходной, т. е. «лабораторной» системе отсчета.



Ответ на этот вопрос однозначен, он автоматически вытекает из одномерности задачи (все величины не зависят от координат в плоскости слоя x и z) и сохранения числа частиц. Действительно, все частицы движутся одновременно и одинаково, и поэтому какое бы то ни было изменение плотности невозможно. Ошибкой было бы полагать, что расстояния между зарядами и их плотность по мере роста скорости будут изменяться в соответствии с релятивистскими формулами

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad n = \frac{n_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1)$$

В самом деле, в лабораторной системе любые два заряда движутся одинаково и независимо друг от друга, и поэтому расстояние между ними должно сохраняться. При этом применение преобразования Лоренца показы-

вает, что в собственной системе отсчета (движущейся вместе с зарядами) плотность последних равна

$$n' = n_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (2)$$

т. е. слой оказывается «растянутым», с большим расстоянием между частицами, чем в начальном состоянии. Это растяжение вполне реально, и причина его состоит в том, что, в отличие от исходной «лабораторной» системы, где фронт или фиксированная фаза волны действует одновременно на все частицы, в «собственной» системе этой одновременности уже нет. В «собственной» системе запаздывание фронта в точке z'_2 по сравнению с точкой z'_1 равно

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = -\frac{v}{c^2} (z'_2 - z'_1), \quad (3)$$

как это следует из преобразования Лоренца и одновременности в лабораторной системе. Иными словами, в собственной системе движущегося слоя волны уже не падают строго навстречу друг другу, а сближаются под некоторым углом, и их фронты не параллельны слою, хотя вся физическая картина по-прежнему симметрична относительно слоя.

Рассматриваемая совокупность независимых зарядов, очевидно, не имеет «равновесной» длины и, как видно на нашем примере, испытывает растягивание в собственной системе отсчета. Поэтому она не может быть выбрана в качестве масштаба для измерения длин и соответственно не может удовлетворять преобразованиям (1). В качестве масштабов в теории относительности выбираются реальные тела, находящиеся в различных системах в одинаковых физических условиях, например упругие стержни в разгруженном состоянии. В силу принципа относительности их собственные длины будут во всех системах одинаковы.

Видоизменим нашу задачу, закрепив заряды на упругой пластине. Рассмотренное выше движение, во-первых, придаст пластине скорость вдоль оси z и, во-вторых, вызовет растяжение пластины, т. е. выведет ее из упругого равновесия. Для того чтобы ее снова можно было использовать как масштаб, нужно подождать, пока эти напряжения релаксируют и упругое равновесие восстановится. Это время, очевидно, будет определяться размером пластины по оси z и скоростью распространения взаимодей-

ствий, определяющих равновесие пластины (в случае упругой пластины — скоростью упругих, т. е. звуковых волн). Спустя это время размер пластины примет равновесное значение и в силу принципа относительности будет подчиняться соотношениям (1). Любопытно, что в строго двумерном случае, когда протяженность слоя бесконечна, бесконечным оказывается и время установления равновесия. Отсюда, в частности, следует, что в теории относительности можно рассматривать только масштабы конечной длины, что, впрочем, очевидно.

Таким образом, мы приходим к вполне тривиальному выводу: в тех случаях, когда физическое тело, или, что то же, масштаб, используемый для измерения длин, изменяет состояние своего движения (например, при переносе из одной системы координат в другую), формулы релятивистского преобразования длины будут справедливы лишь спустя время, необходимое для восстановления внутреннего равновесного состояния этого тела (снятия напряжений, возникающих при переносе).

Заметим здесь, что в более широком плане обсуждение вопроса о преобразованиях Лоренца для неравновесных состояний дано в статье Е. Л. Фейнберга [4].

Л и т е р а т у р а

1. Сыроватский С. И. — Изв. АН СССР. Сер. физ. 1967, 31, 1303.
2. Буланов С. В., Сыроватский С. И. — Труды ФИАН, 1974, 74, с. 88.
3. Буланов С. В. — Изв. вузов. Радиофизика, 1975, 18, 1511.
4. Фейнберг Е. Л. — УФН, 1975, 116, вып. 4.

ФИЗИКА ЧЕРНЫХ ДЫР: ОТ ЭЙНШТЕЙНА ДО НАШИХ ДНЕЙ

Возможность существования черных дыр является, по-видимому, одним из наиболее интересных и вместе с тем неизбежным следствием общей теории относительности Эйнштейна¹. Проблема черных дыр имеет к настоящему времени уже довольно внушительную историю. Впервые с этой проблемой физики столкнулись в год создания общей теории относительности, после того как Шварцшильд получил первое точное решение уравнений Эйнштейна в пустоте. Потребовалось более трети столетия, прежде чем в результате анализа «неожиданных» особенностей решения Шварцшильда наступило глубокое понимание структуры пространства-времени в сильном гравитационном поле. На то, что этот интервал времени оказался таким длительным, по всей видимости, существенно повлияло общее представление, царившее в то время, о невозможности существования в природе тел, размеры которых сравнимы с их гравитационным радиусом. Подобной точки зрения придерживался, в частности, и сам создатель общей теории относительности. Однако после работ Ландау, Бааде, Цвикки и Оппенгеймера с сотрудниками, предсказавших в тридцатых годах возможность существования нейтронных звезд, размер которых лишь на порядок превосходит размер их гравитацион-

¹ Задолго до создания теории относительности (в 1799 г.) Лаплас [1] обратил внимание на то, что достаточно сильное гравитационное поле способно удержать не только частицы, но и свет. Хотя его рассуждения далеко не строги (он использовал неправильное, нерелятивистское, выражение для энергии света и применял ньютонову теорию тяготения в той области, где она заведомо неверна), наглядность и простота их, особенно то случайное обстоятельство, что полученное им выражение $r_g = 2GM/c^2$ точно совпадает с гравитационным радиусом в общей теории относительности, делают «вывод» Лапласа полезным не только в историческом плане.

ного радиуса, интерес к свойствам сверхсжатых гравитационных систем сильно возрос. Картина гравитационного коллапса массивной звезды, приводящего к образованию черной дыры, была впервые описана Оппенгеймером и Снайдером в 1939 г.

Следующий период в истории физики черных дыр относится к середине шестидесятых годов, когда после работ Синга, Крускала и других, получивших, наконец, полное решение для задачи Шварцшильда, и работы Керра, обнаружившего решение, описывающее гравитационное поле вращающейся черной дыры, началось интенсивное теоретическое изучение общих свойств черных дыр и их классических взаимодействий. Полученные в этот период результаты позволили понять качественную картину образования черной дыры и ее возможной дальнейшей эволюции.

В конце шестидесятых годов после открытия пульсаров (нейтронных звезд) с особой остротой перед астрофизиками встал вопрос о возможности обнаружения черных дыр. Анализ падения (аккреции) вещества на одиночные черные дыры и на черные дыры, входящие в состав двойных систем, позволил предсказать, что подобные аккрецирующие черные дыры могут быть мощными источниками рентгеновского излучения. Развитие рентгеновской астрономии и исследований на рентгеновских спутниках, начатых впервые в конце 1970 г. на спутнике «УХУРУ», позволило обнаружить ряд мощных рентгеновских источников. Последующая тщательная обработка результатов наблюдений дала возможность предположить, что один из этих источников, расположенный в созвездии Лебедя Cyg X-1, по-видимому, является черной дырой.

Не успела затихнуть «сенсация», вызванная возможным обнаружением черной дыры, как новый неожиданный результат, полученный Хокингом, снова привлек внимание физиков к черным дырам. Оказалось, что неустойчивость вакуума в сильном гравитационном поле черной дыры приводит к тому, что малые черные дыры могут распадаться. Подобные малые черные дыры (если они существуют), по-видимому, могли образовываться только на очень раннем этапе развития Вселенной, и обнаружение или доказательство отсутствия их или продуктов их распада может дать ценную информацию о физических процессах, происходивших в крайне отдаленном прошлом.

В настоящее время многие вопросы физики черных дыр привлекают к себе пристальное внимание и число публикаций по этим вопросам непрерывно растет. В нашем обзоре мы осветим лишь часть из них, отчетливо понимая, что нельзя «объять необъятное», и рассчитывая, что этот обзор и приведенные в нем ссылки помогут читателю в какой-то мере получить представление об этой интересной и быстро развивающейся области физики — физике черных дыр.

Загадка сферы Шварцшильда. Историческое введение

В ньютоновой теории потенциал гравитационного поля φ , создаваемого распределением вещества плотности ρ , как хорошо известно, определяется уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi G\rho. \quad (1)$$

В простейшем случае, при наличии сферической симметрии, решение вне вещества (в пустоте), убывающее на бесконечности, имеет вид $\varphi = -A/r$. Находя решение уравнения Пуассона внутри вещества и сшивая полученные внутреннее и внешнее решения на границе вещества, нетрудно получить, что $A = GM$, где M — полная масса системы. Если, сохраняя значение массы M , уменьшить размеры системы, то гравитационное поле вне вещества

$$\varphi = -GM/r \quad (2)$$

остается неизменным, и в предельном случае, когда распределение вещества стягивается в точку, решение (2) описывает поле точечной массы M .

После создания Эйнштейном общей теории относительности естественным «пробным камнем» для этой новой теории тяготения явилось решение задачи о гравитационном поле сферически симметричного распределения вещества. Сам Эйнштейн в 1916 г. нашел приближенное решение выведенных им уравнений вне источников [3] и показал, что если размеры источника r много больше гравитационного радиуса $r_g = 2GM/c^2$ ($r \gg r_g$, или, что то же, $|\varphi(r)/c^2| \ll 1$), имеется соответствие с обычной ньютоновой теорией. В том же 1916 г. Шварцшильдом [4] было найдено точное решение уравнений Эйнштейна, описывающее гравитационное поле вне сферически сим-

метричных источников. Соответствующее выражение для метрики, полученной Шварцшильдом, имеет вид

$$ds^2 = \Phi c^2 dt^2 - \Phi^{-1} dr^2 - r^2 d\vartheta^2, \quad (3)$$

где

$$\Phi = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad d\vartheta^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2.$$

Интересным свойством этого решения, сразу обратившим на себя внимание, является то, что, кроме ожидаемой особенности метрики при $r=0$, оно обладает другой особой точкой $r=r_g$, где поведение метрики также сингулярно. Эта особенность при $r=r_g$ получила название «особенности Шварцшильда», или «сферы Шварцшильда», и для полного выяснения причины ее появления и физического смысла этой особенности потребовалось довольно длительное время. Прежде чем перейти к обсуждению проблемы «сферы Шварцшильда», необходимо кратко остановиться на свойствах пространства-времени, описываемого метрикой (3). Сферическая симметрия этого решения позволяет ограничиться рассмотрением двумерного сечения $\vartheta = \pi/2$, $\varphi = 0$, диаграмма которого представлена на рис. 1. Изображенные на этой диаграмме локальные световые конусы и мировые линии пробных частиц и световых лучей позволяют получить представление о характере радиального движения пробных тел в поле тяготения Шварцшильда. В частности, для достижения «сферы Шварцшильда» требуется бесконечно большое (координатное) время t . Поэтому никакие частицы, движущиеся со скоростью, меньшей скорости света, не могут пересечь линию $r=r_g$ при конечном значении t и попасть из R -области в T -область или наоборот.

По-видимому, первой работой, в которой была предпринята атака на «загадку сферы Шварцшильда», явилась статья Фламма [5]. В этой работе Фламм обратил внимание на то, что геометрия двумерного сечения $t = \text{const}$, $\vartheta = \pi/2$ пространства-времени Шварцшильда, определяемая элементом длины

$$dl^2 = \Phi^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (4)$$

совпадает с внутренней геометрией на двумерной поверхности в трехмерном плоском пространстве, описываемой при вращении параболы $z^2 = 4r_g(r - r_g)$, причем значению

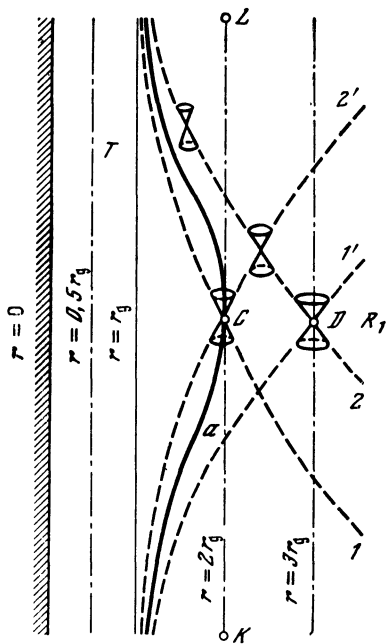


Рис. 1. Диаграмма пространства-времени Шварцшильда

Координата t изменяется вдоль вертикальной оси, координата r — вдоль горизонтальной. Жирной сплошной линией изображена мировая линия движения пробной частицы a . Пунктирные линии соответствуют падающим (1, 2) и выходящим (1', 2') световым лучам. Штрихпунктирные линии соответствуют точкам поверхности $r = \text{const}$

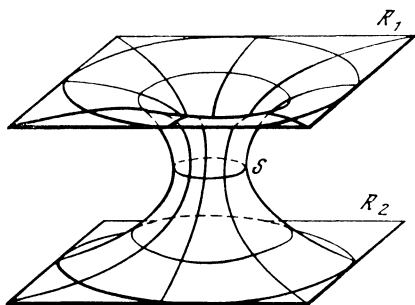


Рис. 2. Геометрия двумерного сечения $t = \text{const}$, $\vartheta = \pi/2$ полного пространства-времени («мост» Эйнштейна—Розена)

$r = r_g$ соответствует «горловина» S этой поверхности (рис. 2). При изменении координаты r от ∞ до r_g описывается лишь одна (верхняя) половина полной поверхности. Это означает, что особенность $r = r_g$ в метрике (4) координатная, и ее можно устранить, если использовать вместо координаты r новую координату z : $z^2 = 4r_g(r - r_g)$. Действительно, переписав метрику Шварцшильда в виде

$$ds^2 = \frac{z^2}{z^2 + 4r_g^2} c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{z^2}{4r_g^2}\right) dz^2 + \left(r_g + \frac{z^2}{4r_g}\right)^2 d\sigma^2, \quad (5)$$

легко убедиться, что во всей области изменения координат $z \in (-\infty, \infty)$ пространственная часть интервала не содержит особенностей. Однако полностью избавиться от «особенности Шварцшильда» таким образом не удастся из-за обращения в 0 коэффициента при dt^2 при $z=0$. По поводу этой особенности Фламм ошибочно полагал, что в ней сосредоточена масса, создающая гравитационное поле. К аналогичной процедуре продолжения решения и аналогичному (ошибочному) заключению о наличии сингулярного распределения вещества (источника поля) на «сфере Шварцшильда» приходит также Вейль [6]. Позднее Эйнштейн и Розен [7] попытались избавиться от особенности при $z=0$ в метрике путем модификации основных уравнений общей теории относительности. Соединение двух «листов» (областей пространства) через горловину они назвали «мостом». Совершенно аналогичное продолжение, содержащее «мост», было получено ими и для случая решения Рейсснера—Нордстрема [8], описывающего гравитационное поле электрически заряженной сферически симметричной системы. Эйнштейн и Розен рассматривали решение, содержащее мост, как своеобразную модель элементарной частицы.

Следующий шаг в изучении «особенности Шварцшильда» был сделан Эддингтоном [9]. Интересуясь сравнением теорий тяготения Эйнштейна и Вайтхеда, он рассмотрел преобразование

$$t_- = t - \frac{r_g}{c} \ln \left| \frac{r}{r_g} - 1 \right|, \quad (6)$$

приводящее выражение для интервала (3) к виду

$$ds^2 = c^2 dt_-^2 - dr^2 - r^2 d\alpha^2 - \frac{r_g}{r} (cdt_- - dr)^2. \quad (7)$$

Метрика (7), в отличие от метрики Шварцшильда (3), является регулярной при $t_- \in (-\infty, \infty)$ и $r > 0$ (в частности и при $r=r_g$), причем преобразование (6), переводящее метрику (7) в метрику Шварцшильда, является неособенным в области $r \neq r_g$.

Принципиально новым по сравнению со случаем преобразований, использованных Фламмом и Вейлем, является то, что преобразование Эддингтона «перепутывает» пространственные и временные переменные. По-видимому, сам Эддингтон не осознал во всей мере значения получен-

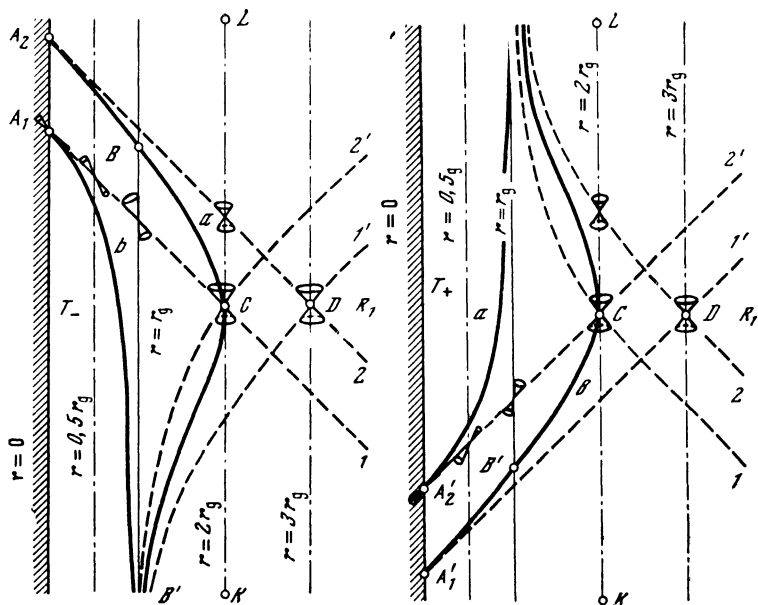


Рис. 3. Диаграмма пространства-времени Эддингтона—Финкельштейна в координатах (t_-, r)

Координата t_- изменяется вдоль вертикальной оси, координата r — вдоль горизонтальной. Обозначение мировых линий частиц и световых лучей такое же, как на рис. 1

Рис. 4. Диаграмма пространства-времени Эддингтона—Финкельштейна в координатах (t_+, r)

Координата t_+ изменяется вдоль вертикальной оси, координата r — вдоль горизонтальной. Обозначения мировых линий частиц и световых лучей такое же, как на рис. 1

ного им результата. И лишь позднее Леметр [10] со всей отчетливостью сформулировал, что так называемая особенность Шварцшильда вовсе не является физической сингулярностью, а связана с «неудачным» выбором координатной системы. Структура пространства-времени в координатах Эддингтона² приведена на рис. 3. Казалось бы, после работ Эддингтона и Леметра «загадка шварцшиль-

² Координаты, использованные Леметром (см., например, [11]), имеют вид, существенно отличный от (6). Однако можно убедиться, что существует регулярное преобразование, связывающее координаты Леметра и Эддингтона во всей их области изменения, и полная структура пространства-времени, описываемого в этих координатах, одинакова.

довской особенности» разрешилась и найдено наконец решение уравнений Эйнштейна, описывающее полное пространство-время, единственная особенность которого при $r=0$ аналогична особенности решения (2).

Однако прошло еще семнадцать лет, прежде чем Синг [12] обратил внимание на то, что полученное Эддингтоном и Леметром продолжение решения Шварцшильда вовсе не является полным, и сумел, наконец, найти искомое полное пространство-время. Чтобы понять, в чем состоит причина неполноты продолжения Эддингтона и Леметра, полезно вновь обратиться к соответствующей диаграмме на рис. 3. Падающая частица (ее мировая линия изображена кривой $СВА_2$) пересекает гравитационный радиус и достигает точки $r=0$, как это следует из простых вычислений, за конечный интервал собственного времени. Движение подобных падающих частиц полностью описывается в координатах Эддингтона и Леметра. Однако для мировых линий частиц, вылетающих по радиусу наружу (например, кривая $В'С$ на рис. 3) дело обстоит совершенно по-иному. Как видно из рисунка, мировая линия подобных частиц при продолжении ее в прошлое асимптотически стремится к поверхности Шварцшильда. Несмотря на то, что для достижения этой поверхности требуется бесконечный интервал координатного времени t_- , простой расчет показывает, что соответствующий интервал собственного времени, необходимого для достижения гравитационного радиуса, оказывается конечным. Поэтому в координатах Эддингтона и Леметра не описывается полная предыстория движения частицы a до вылета ее из-под гравитационного радиуса, и соответствующее пространство-время, описываемое в этих координатах, не является полным. Эта неполнота тесным образом связана с тем, что метрика (7) не инвариантна относительно обращения времени $t_- \rightarrow -t_-$. Подобное обращение времени эквивалентно использованию вместо преобразования (6) следующего преобразования³:

$$t_+ = t + \frac{r_g}{c} \ln \left| \frac{r}{r_g} - 1 \right|. \quad (8)$$

³ Преобразование (6), введенное Эддингтоном, и преобразование (8) были рассмотрены в работе Финкельштейна [13], который обратил внимание на неинвариантность решения (7) относительно замены $t_- \rightarrow -t_-$. Координаты (t_+, r) часто называют координатами Эддингтона-Финкельштейна.

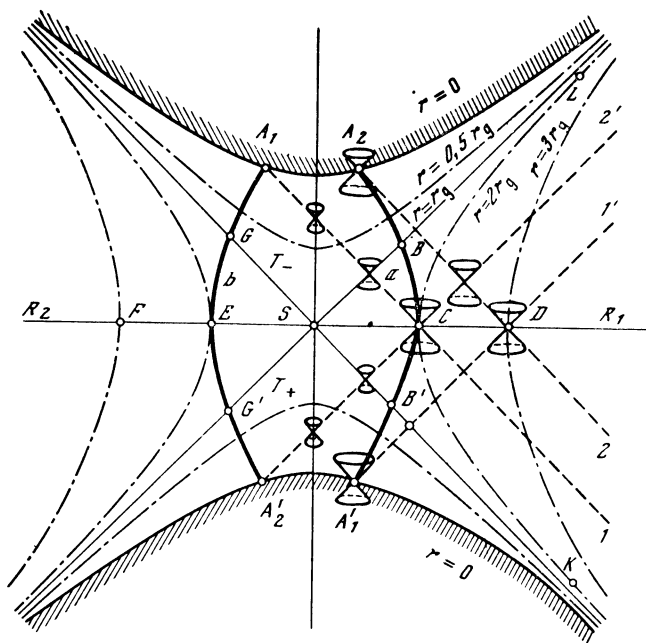


Рис. 5. Диаграмма полного пространства-времени в координатах Крускала

Координата v изменяется вдоль вертикальной оси, координата u — вдоль горизонтальной. Обозначения на этой диаграмме совпадают с обозначениями на предыдущих рисунках

Диаграмма пространства-времени в координатах (t_+, r) приведена на рис. 4. Как видно из этой диаграммы, в подобных координатах полностью описывается история движения частицы, вылетающей из-под гравитационного радиуса, тогда как неполнота появляется при рассмотрении частиц, падающих по направлению к гравитационному радиусу.

Структура пространства-времени полученного Сингом [12] продолжения изображена ⁴ на рис. 5. К аналогичному продолжению в несколько отличной форме при-

⁴ В работе Синга [12] содержится также обсуждение возможного продолжения решения за истинную сингулярность $r=0$. Области, соответствующие подобному продолжению, на рис. 5 отсутствуют.

шли позднее Фронсдал [14], Крускал [15] и Жекерес [16]. Работа Крускала получила наибольшую известность, а координаты, использованные им (их принято называть *координатами Крускала*), оказались наиболее простыми и удобными, поэтому при обсуждении свойств полного пространства-времени обычно используют координаты Крускала.

Метрика в координатах Крускала имеет вид

$$ds^2 = \frac{4r_g^3}{r} e^{-\frac{r}{r_g}} (dv^2 - du^2) - r^2 d\varphi^2, \quad (9)$$

где r является функцией v и u , задаваемой (неявно) уравнением

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{r_g} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{r_g}\right), \quad (10)$$

и координаты u и v изменяются на (u, v) -плоскости в области, ограниченной неравенством $u^2 - v^2 > -1$ (линиями, соответствующими $r=0$). Для понимания особенностей структуры полного пространства-времени, диаграмма которого приведена на рис. 5, полезно выяснить, каким образом с ней связаны обсуждавшиеся выше продолжения метрики, диаграммы которых приведены на рис. 1—4. Отметим прежде всего, что, как видно из выражения для интервала (9), лучи света, распространяющегося по радиусу, изображаются на диаграмме Крускала прямыми линиями, имеющими наклон $\pm 45^\circ$ по отношению к горизонтальной оси. С помощью простой проверки нетрудно убедиться, что в области R_1 (где $u > 0$, $|v| < u$) преобразование координат

$$\frac{u+v}{u-v} = e^{-ct/r_g}, \quad u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{r/r_g} \quad (11)$$

приводит метрику (9) к виду (3) и поэтому части диаграммы, изображенной на рис. 1, лежащей правее линии $r=r_g$, соответствует R_1 -область на диаграмме Крускала (рис. 5). Подобным образом оказывается, что можно привести метрику (9) к виду (3) и в области R_2 (где $u < 0$, $|v| < u$), и соответствующее преобразование отличается от (11) заменой (u, v) на $(-u, -v)$.

Изображенному на рис. 2 двумерному сечению $t = \text{const}$, $\theta = \pi/2$ соответствует прямая $v=0$ на диаграмме Крускала (или любая другая прямая, проходящая через

S и имеющая угол с горизонтальной осью меньше 45°). Поэтому метрика (5) в координатах (t, z, θ, ψ) описывает геометрию в областях R_1 и R_2 . Наконец, в координатах Эддингтона—Финкельштейна $(t_\pm, r, \vartheta, \varphi)$ описываются области R_1 и T_\pm полного пространства-времени. Нетрудно понять, каким образом осуществляется соответствие между различными диаграммами, изображенными на рис. 1—4, с частями полной диаграммы Крускала, если учесть, что как мировые линии пробных тел и лучей, так и различные события (мировые точки) на всех диаграммах обозначены одинаковым образом.

Продолжение решения Шварцшильда, полученное Сингом, Крускалом и другими⁵, действительно является полным. При изучении движения пробных тел в этом пространстве-времени оказывается, что соответствующие мировые линии полностью описываются в используемых координатах и не могут выйти из области действия этих координат за конечный интервал собственного времени (как это было, например, в координатах Шварцшильда для частиц, пересекающих гравитационный радиус). Обрыв мировой линии возможен лишь в физически особой точке $r=0$.

Чему учит история?

Как найти полное пространство-время

Прежде чем перейти к обсуждению на первый взгляд довольно необычных свойств полученного полного решения, полезно извлечь опыт из истории поиска этого решения. Получив некоторое точное решение уравнений Эйнштейна (в нашем случае это было решение Шварцшильда), мы сталкиваемся со следующими вопросами:

⁵ Кроме указанных выше работ [12—16], структура полного пространства-времени в рассматриваемом случае исследовалась также в работах [17—19]. Решение аналогичной проблемы для метрики Рейсснера—Нордстрема было получено Грейвсом, Бриллом [20] и Картером [21]. Максимальное продолжение для метрики Керра [22], описывающей гравитационное поле вращающегося тела, было найдено и исследовано в работах [23—25]. По поводу процедуры продолжения неполных решений в более общих случаях см., например, статью [26]. Относительно общих свойств продолженных решений метрик Шварцшильда, Рейсснера—Нордстрема и Керра более подробно можно прочитать в книгах [2, 27, 28] и в обзоре [29].

1) имеет ли найденное решение особенности? 2) если особенности имеются, то не являются ли они координатными и как в этом случае построить продолжение решения? 3) до каких пор следует продолжать решение, иначе говоря, каков критерий полноты искомого пространства-времени? 4) единственно ли максимальное продолжение пространства-времени в рассматриваемом случае?

При ответе на эти вопросы важно помнить об одном существенном отличии общей теории относительности от теории в плоском пространстве-времени. В общей теории относительности математическим образом реального физического пространства-времени является *гладкое четырехмерное многообразие*⁶, точкам которого соответствуют различные мировые события. В окрестности произвольной точки P на многообразии можно ввести координатную систему (*карту*), так что переход от одних координат к другим в общей области их действия будет задаваться гладкими функциями. Все многообразие, вообще говоря, не покрывается одной картой. Это может быть связано не только с тем, что нам не повезло и мы просто не сумели такую карту найти, но может оказаться, что из-за сложного (топологически нетривиального) устройства пространства-времени в целом покрыть его одной картой (описать его в одной координатной системе) просто невозможно.

При решении уравнений Эйнштейна (например, уравнений в пустом пространстве) нам необходимо найти не только метрику g пространства-времени, но и восстановить пространственно-временное многообразие \mathcal{M} , на котором эта метрика ищется. В этом и состоит то существенное отличие, о котором упоминалось выше, так как в случае теории в плоском пространстве-времени само многообразие \mathcal{M} известно заранее. То, к чему мы стремимся в общей теории относительности, это при наложении определенных ограничений на свойства метрики (например, предположении о наличии той или иной симметрии) и на структуру тензора энергии-импульса, порождающего гравитационное поле (например, предположении о равенстве его нулю), найти максимально про-

⁶ Строгое определение гладкого многообразия можно найти в любом современном учебнике по дифференциальной геометрии (см., например, [2, 30]).

долженное решение, т. е. такую пару (\mathcal{M}, g) (многообразие \mathcal{M} и метрику g на нем), для которой выполнялись бы следующие требования: 1) метрика g не имеет особенностей и является решением уравнений Эйнштейна на всем многообразии \mathcal{M} ; 2) мировые линии или не достигают границы пространственно-временного многообразия \mathcal{M} ни при каком конечном значении собственного времени или, в противном случае, имеющие физический смысл величины (например, инварианты кривизны) неограниченно возрастают вдоль подобных обрывающихся мировых линий при подходе к точке обрыва и, следовательно, в этой точке имеется физическая сингулярность⁷.

Для достижения указанной цели при получении решений уравнений Эйнштейна обычно накладываются дополнительные условия, для того чтобы ликвидировать неоднозначность, связанную с выбором координат. Наложение подобных дополнительных условий по сути дела представляет собой выбор определенной карты. Этот выбор зависит

⁷ При изучении свойств полноты пространства-времени можно использовать не только времениподобные геодезические, но также пространственноподобные и светоподобные геодезические. Можно вместо геодезических рассматривать более широкий класс кривых, например, обладающих ограниченным четырехмерным ускорением. Вообще говоря, определение полноты существенно зависит от выбранного класса кривых. Обсуждение этих вопросов можно найти, например, в работах [2, 31—34]. Аналогичное замечание можно сделать и по поводу сингулярностей. Хорошо известно, что в пустом пространстве имеется четыре функционально независимых инварианта кривизны, обращение которых в бесконечность часто используется в качестве определения сингулярности. Конечно, обращение этих инвариантов в бесконечность не исчерпывает все возможные виды особенностей, и необходим более детальный анализ для выяснения поведения других физических наблюдаемых в окрестности физической сингулярной точки. Подобный анализ тесно связан с проблемой классификации возможных типов сингулярностей, обсуждаемой, например, в работах [35—41]. Подчеркнем, что физические сингулярности связаны с особенностями величин, не зависящих от координат. Поэтому, в частности, представляется неудачным при обсуждении характера особенности Шварцшильда опираться на свойство обращения или необращения в нуль определителя метрического тензора $|g|$, как это делается, например, в [11, с. 393], поскольку при преобразовании координат эта величина преобразуется как скалярная плотность, и даже в случае, когда метрика на пространственно-временном многообразии всюду является регулярной, определитель $|g|$ на границе действия координатной карты может иметь особенность.

не только от вида дополнительных условий, но и от свойств искомого решения. Не зная заранее этого решения, мы не можем в общем случае быть уверены в том, что соответствующая карта покрывает все пространство-время. Может случиться так, что действие используемых нами координат x ограничивается лишь некоторой областью U_x полного пространства-времени \mathfrak{M} . При другом выборе дополнительных условий соответствующая карта y покрывает, вообще говоря, иную область U_y пространства-времени. В пересечении этих областей $U_x \cap U_y$ можно использовать обе координатные системы x и y , и в обоих координатах метрика g не имеет особенностей. В граничных точках области U_x , где координаты x перестают действовать, лежащих внутри U_y , функции, задающие переход от координат y к координатам x , имеют особенность. Аналогичная (координатная) особенность появляется в метрике при рассмотрении ее вне области действия соответствующей координатной системы.

Таким образом, наложив дополнительные условия и получив метрику в соответствующих координатах, необходимо прежде всего убедиться, не является ли это решение полным. Для этого требуется найти в полученной метрике мировые линии пробных тел и выяснить, не обрываются ли они в точках, не являющихся физически особыми. Если подобные обрывы имеют место и пространство-время нами полностью не описаны, надо выбрать другое дополнительное условие так, чтобы получить продолжение решения. В ряде простейших случаев (к которым относятся многие физически интересные метрики, например, метрики Шварцшильда, Керра и другие) алгоритм соответствующей процедуры продолжения подробно описан в работе [26].

Следующее замечание касается вопроса об однозначности построения полного пространства-времени. Даже в простейшем случае, когда кривизна равна нулю и пространство-время является локально плоским, мы не можем гарантировать, что многообразие \mathfrak{M} совпадает с полным пространством Минковского. Чтобы пояснить это, рассмотрим следующий пример. Вырежем из пространства Минковского часть, ограниченную двумя плоскостями $x = -1$ и $x = 1$, и отождествим точки этих плоскостей с совпадающими координатами (t, y, z) между

собой. После такого отождествления мы получим новое полное многообразие \mathcal{M}' с плоской метрикой $g = \eta$ на нем, топологически отличное от пространства Минковского. Пара (\mathcal{M}', η) так же, как и пространство Минковского (R^4, η) , удовлетворяет всем требованиям, которыми мы руководствовались при поисках полного решения. Поэтому, когда искомое пространство-время обладает некоторой группой симметрии, необходимы дополнительные топологические предположения, выполняющие роль граничных условий, чтобы сделать задачу нахождения полного пространства-времени однозначной. Подобные различные топологические перестройки полного пространства-времени Крускала обсуждаются в работах [42—44].

О точечности и протяженности частиц в общей теории относительности

Описывает ли приведенное выше полное сферически симметричное решение уравнений Эйнштейна в пустоте гравитационное поле точечной частицы? На первый взгляд сходство особенностей решения Крускала и решения уравнения Лапласа при $r=0$ свидетельствует в пользу такой возможности. Однако, как это выясняется при более внимательном анализе, эти две особенности имеют совершенно различную природу. Непосредственной проверкой (для этого достаточно воспользоваться картиной расположения локальных световых конусов, приведенной на рис. 5) можно убедиться, что линии постоянного значения r при $r < r_g$ являются пространственноподобными. Поэтому подобная линия (и в частности, линия $r=0$) не может быть мировой линией частицы (источника поля), скорость движения которой не превосходит скорости света.

Что же в таком случае является источником, порождающим интересующее нас гравитационное поле? Перед тем как ответить на этот вопрос, уместно напомнить, что в случае нелинейных уравнений (к числу которых принадлежат и уравнения Эйнштейна) связь между максимально продолженным решением в пустоте и полем от точечного источника вовсе не является столь простой, как в случае уравнения вида (1). Несложный пример уравнения

$$\left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right) \Delta \varphi = -4\pi G \rho_0 \quad (12)$$

позволяет в этом убедиться. Сферически симметричное решение этого уравнения в пустоте имеет вид $\varphi = -GM/r$, совпадающий с выражением (2). Однако в рассматриваемом случае связь между полной массой M , определяющей поле вне источников, и «внутренней» массой $M_0 = \int \rho_0 dV$ имеет более сложный характер, чем в случае уравнения Пуассона (1). В простейшем случае, когда источником является тонкая массивная сфера радиуса ε , эта связь имеет вид

$$M = \frac{1}{2} \left(-\frac{\varepsilon c^2}{G} + \left(\frac{\varepsilon^2 c^4}{G^2} + \frac{4M_0 \varepsilon c^2}{G} \right)^{1/2} \right). \quad (13)$$

Если теперь при неизменном значении M_0 , уменьшая размер сферы ε , перейти к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ (точечный источник с массой M_0), то приведенная формула (13) показывает, что внешнее поле в этом случае стремится к нулю. Поэтому решение в пустоте $\varphi = -GM/r$ при $M \neq 0$ не описывает поле точечного источника, обладающего конечной «внутренней» массой M_0 . Как можно убедиться, используя формулу (13), подобное максимально продолженное решение возникает, если при стягивании размера источника ε к нулю одновременно увеличивать «внутреннюю» массу M_0 по закону

$$M_0(\varepsilon) = M \left(1 + \frac{GM}{c^2 \varepsilon} \right).$$

Физической причиной подобных особенностей решений уравнения (12) является то, что нелинейность этого уравнения приводит к уменьшению эффективной плотности источников $\rho = \rho_0 (1 + \varphi/c^2)^{-1}$ в результате взаимодействия их с полем, которое они создают («гравитационный дефект масс»).

Как оказывается, совершенно аналогичное явление происходит и в общей теории относительности. Существенно новым моментом при этом, однако, является то, что процесс стягивания пространственного распределения массы к точечному связан с радикальным изменением геометрии пространства [45]. Чтобы описать качественную картину, возникающую при переходе от протяженного объекта к точечной частице, предположим, что гравитационное поле порождается сферически симметричным мгновенно покоящимся однородным распределением вещества,

«внутренняя» масса которого M_0 . В этом простейшем случае геометрия внутри вещества, определяемая в результате решения уравнений Эйнштейна, имеет вид ($0 \leq \chi \leq \leq \chi_0$)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\sigma^2), \quad (14)$$

и геометрия двумерного сечения $t=0$, $\vartheta = \pi/2$ пространства-времени

$$dl^2 = a^2(0) (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\varphi^2) \quad (15)$$

совпадает с геометрией на поверхности части $0 \leq \chi \leq \chi_0$ сферы радиуса $a_0 = a(0)$. Этот радиус a_0 связан с внутренней массой M_0 и величиной χ_0 , характеризующей протяженность распределения вещества (инвариантное расстояние от центра до границы распределения есть $a_0 \chi_0$), следующим образом [11]:

$$M_0 = \frac{3}{4} \frac{c^2}{G} a_0 \left(\chi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\chi_0 \right). \quad (16)$$

Вне вещества решение описывается метрикой Крускала, и геометрия соответствующего двумерного сечения $t=0$, $\vartheta = \pi/2$ изображена на рис. 2. Следствием справедливости уравнений на границе вещества является условие гладкости сопряжения соответствующих двумерных сечений этих двух решений, и «внешняя» масса M , определяющая внешнее гравитационное поле системы, будет равна

$$M = \frac{1}{2} \frac{c^2}{G} a_0 \sin^3 \chi_0, \quad (17)$$

а радиус граничной сферы вещества есть

$$r_0 = a_0 \sin \chi_0 = \frac{4G \sin \chi_0 M_0}{3c^2 \left(\chi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\chi_0 \right)}. \quad (18)$$

Если теперь при неизменной «внутренней» массе M_0 устремить размеры источника r_0 к нулю, то приведенные формулы показывают, что при этом увеличивается степень замкнутости ($\chi_0 \rightarrow \pi$) системы и «внешняя» масса M , уменьшаясь, стремится к нулю. Соответствующая возникающая при этом последовательность конфигураций схематично изображена на рис. 6. В предельном случае $\chi_0 \rightarrow \pi$ геометрия внутри распределения вещества стремится к геометрии замкнутого мира, а вне вещества —

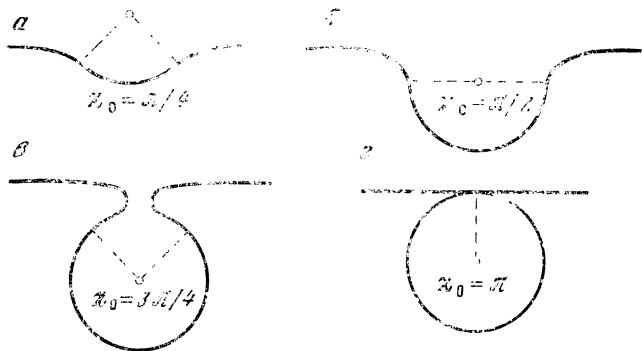


Рис. 6. Последовательность сечений конфигураций системы с постоянным значением внутренней массы M_0 при уменьшении ее размеров

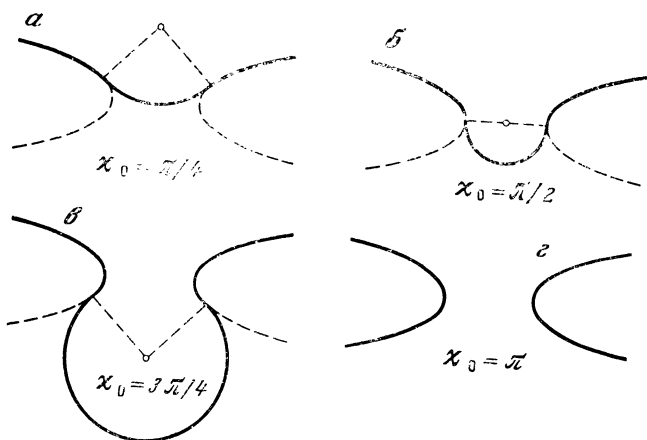


Рис. 7. Последовательность сечений конфигураций системы с постоянным значением внешней массы M при увеличении степени ее замкнутости

к геометрии плоского пространства-времени. Отличие «внешней» массы M от «внутренней» M_0 вызвано гравитационным дефектом массы и при $\chi_0 \rightarrow \pi$ этот гравитационный дефект полностью «погашает» массу M_0 ⁸. Таким

⁸ Аналогичный результат получается и в случае произвольного сферически симметричного распределения вещества. Интересно отметить, что если источником является массивная (с массой M_0)

образом, нейтральная точечная частица в общей теории относительности обладает нулевой «внешней» массой⁹.

Совершенно другая картина возникает, если мы будем изменять параметры системы, оставляя неизменным значение «внешней» массы M . Соответствующая последовательность конфигураций, возникающих при этом, схематично изображена на рис. 7. При возрастании χ_0 от 0 до π увеличивается часть пространства, описываемая решением Крускала, и соответствующим образом возрастает «внутренняя» масса M_0 . В предельном случае (рис. 7, г) эта масса становится неограниченно большой, при этом источник поля удаляется на бесконечность в R_2 -пространстве. Неизменное значение «внешней» массы является результатом неограниченного возрастания гравитационного дефекта массы, равного $\Delta M = M_0 - M$. Именно подобная физически нереальная предельная конфигурация порождает полное пространство-время Крускала.

Черные дыры, белые дыры, полужамкнутые миры

Хорошо известно, что при произвольном радиальном движении заряженного вещества описываемое законом Кулона электрическое поле вне его остается неизменным. Совершенно аналогичное утверждение, получившее название *теоремы Бирхгофа* [27, 55], имеет место и в теории

тонкая сфера радиуса ϵ , то, как показали Арновит, Дезер и Мизнер [46—48], выражение для «внешней» массы совпадает с формулой (13), а уравнения Эйнштейна в этом случае приводят к соотношению (12). Купер (см. примеч. 6 в [48]) указал на то, что это соотношение нетрудно «получить» из обычного уравнения Пуассона (1), если учесть, что эффективная плотность ρ источника гравитационного поля в силу принципа эквивалентности отличается от плотности распределения ρ_0 «внутренней» массы на величину $\rho\varphi/c^2$, отвечающую гравитационному дефекту масс $\rho = \rho_0 - \rho\varphi/c^2$. Если подставить выражение для $\rho = \rho_0(1 + \varphi/c^2)^{-1}$ в уравнение Пуассона (1), то получится уравнение (12).

⁹ Интересно отметить, что если частица обладает электрическим зарядом Q ($Q < M_0\sqrt{G}$), то переход к точечному пределу невозможен. Минимальное значение «внешней» массы M и «внешнего» размера R такой системы полностью определяются величиной ее заряда $R = Q\sqrt{G}/c^2$, $M = Q/\sqrt{G}$ [50]. Свойства подобных полужамкнутых систем, получивших название фридмонов [49], рассмотрены в работах [45, 49—54]. Аналогичная ситуация, возникающая, когда система содержит заряды безмассового поля Янга—Миллса, обсуждается в [53].

гравитации Эйнштейна. А именно, гравитационное поле в пустоте, порождаемое сферически симметричным распределением вещества при произвольном его радиальном движении, остается неизменным и описывается метрикой Крускала. Мировая линия частиц на границе вещества изображается на диаграмме Крускала времени подобной кривой. При построении полного пространства-времени необходимо часть диаграммы, лежащую левее этой кривой, отбросить и вместо нее «приклеить» (используя необходимые условия сшивания) соответствующую часть диаграммы, описывающую гравитационное поле внутри вещества.

Различным возможным случаям движения вещества отвечают различные кривые на диаграмме Крускала. Простейшему случаю, когда силы давления уравновешивают силы гравитационного притяжения и поверхность тела имеет неизменный радиус $r > r_g$, соответствует, например, кривая KCL на рис. 5. Кривая KCA_2 описывает движение поверхности тела, которое с некоторого момента времени $t=t_0$ начинает сжиматься. За конечный интервал собственного времени поверхность тела пересекает гравитационный радиус и попадает в T -область¹⁰. При движении в этой области, как это видно из характера расположения световых конусов (см. рис. 5), всякое движение со скоростью, не превосходящей скорости света, неизбежно является движением к сингулярности $r=0$. Поэтому, после того как тело пересекло гра-

¹⁰ Понятие T -области в самом общем случае определяется следующим образом. Выберем некоторую двумерную пространственно-подобную поверхность S и обозначим через $\Gamma_S(l_i)$ ($i=1, 2$) два семейства световых лучей, выпущенных перпендикулярно этой поверхности в обе стороны от нее. Обозначим через ρ_i сходимости световых лучей в этих конгруенциях, т. е. величину $\rho_i = -1/2 \times l_{(i); \mu}^\mu$. Замкнутая двумерная пространственно-подобная поверхность S называется *ловушечной поверхностью*, если на этой поверхности выполняются условия $\rho_1 > 0$ и $\rho_2 > 0$, т. е. оба семейства лучей, испущенных с нее, являются сходящимися. Трехмерная гиперповерхность, ограничивающая область пространства, в которой имеются ловушечные поверхности, определяемая условиями $\rho_1=0$ и $\rho_2 \geq 0$ (или $\rho_1 \geq 0$, $\rho_2=0$), носит название *горизонта видимости*. Часть пространства-времени, лежащая внутри горизонта видимости, называется T -областью. В рассматриваемом случае горизонт видимости совпадает с поверхностью Шварцшильда.

витационный радиус, никакая сила не может остановить его сжатие, и за конечное собственное время оно сожмется в точку. Для внешнего наблюдателя этап сжатия под гравитационным радиусом оказывается недоступным для наблюдения, так как лучи света, испущенные с поверхности тела, не могут выйти из T_- -области (см. рис 5). В процессе сжатия (*коллапса*) тела (участок кривой CB) лучи света приходят с тем большим запазданием, чем ближе поверхность тела в момент испускания света находится к гравитационному радиусу. Это запаздывание становится неограниченно большим в момент пересечения поверхностью тела гравитационного радиуса. Излучение, идущее от центральной части видимого диска коллапсирующего тела, при этом испытывает возрастающее красное смещение, и интенсивность этого излучения резко (по экспоненциальному закону) падает.

Лучи, идущие с периферии коллапсирующего тела и испущенные в момент, когда размер его был порядка $r \sim 3GM/c^2$, захватываются гравитационным полем и, как показали Эймс и Торн [58], могут совершить большое число оборотов вокруг этого тела, прежде чем попадут к наблюдателю. Эти лучи, приходящие с периферии видимого диска, практически не испытывают красного смещения. Общая яркость периферийной области быстро убывает из-за уменьшения ее толщины. Общая светимость коллапсирующей звезды изменяется по закону [59]

$$L(t) \sim \exp(-tc^3/3\sqrt{3}GM).$$

Впервые картина сферически симметричного гравитационного коллапса была рассмотрена в статье Оппенгеймера и Снайдера [60]. Более полное современное изложение этих вопросов можно найти в книгах [27, 57]. В результате коллапса образуется объект, получивший название черной дыры. Если снаружи черной дыры полностью отсутствует вещество и если пренебречь квантовыми процессами, несущественными для черных дыр звездной массы, то с точки зрения внешнего удаленного наблюдателя черная дыра представляет собой застывшее неизлучающее тело с размером, равным гравитационному радиусу и обладающим, по сути дела, единственным свойством — способностью притягивать. При образовании черной дыры вся информация о внутреннем строении коллапсирующей звезды и свойствах образующего ее ве-

щества становится для внешнего наблюдателя полностью недоступной.

Формальное обращение во времени описанного выше движения коллапсирующего тела приводит к картине расширения тела из точки с последующим выходом его из-под гравитационного радиуса. При подобном движении, получившем название *антиколлапса*, движение границы тела изображается кривой $A_1'CL$. Из картины распространения световых лучей (рис. 5) видно, что удаленному наблюдателю доступны для изучения все стадии расширения как до, так и после его выхода из-под гравитационного радиуса (из области T_+). Соответствующее покраснение фотонов, выходящих из области сильного гравитационного поля, компенсируется в этом случае дополнительным «посинением» квантов, вызванным эффектом Доплера из-за быстрого приближения к наблюдателю поверхности антиколлапсирующего тела. Объекты, выходящие в процессе антиколлапса из-под гравитационного радиуса в пространство внешнего наблюдателя, получили название *белых дыр* [61, 62]¹¹.

При других начальных условиях, когда кинетическая энергия расширяющегося тела оказывается недостаточной для того, чтобы оно при расширении вышло в пространство внешнего наблюдателя, это тело попадает в R_2 -область. Кривая A_2EA_1 является мировой линией границы подобной системы. Геометрия пространственного сечения пространства-времени в момент максимального расширения этой системы совпадает с геометрией на двумерной поверхности вращения, изображенной на рис. 8. Подобная конфигурация, впервые рассмотренная в работах [18, 65—67], получила название *полузамкнутого мира*. Она характеризуется большой величиной гравитационного дефекта массы ¹². Внешний наблюдатель может

¹¹ Более подробное обсуждение спектральных свойств излучения антиколлапсирующих тел можно найти, например, в [63, 64]. Аккреция вещества на белые дыры [64а] и квантовые процессы рождения частиц вблизи сингулярности [64б], по-видимому, приводят к быстрому превращению белых дыр в «серые» (черные дыры второго рода).

¹² В простейшем случае, когда источником гравитационного поля является тонкая массивная сфера, для образования полузамкнутого мира необходимо, чтобы гравитационный дефект масс $\Delta M = M_0 - M$, т. е. разность между полной «внутренней» массой M_0 и «внешней» массой M , превосходил величину $0,5 M_0$ [54]. Для

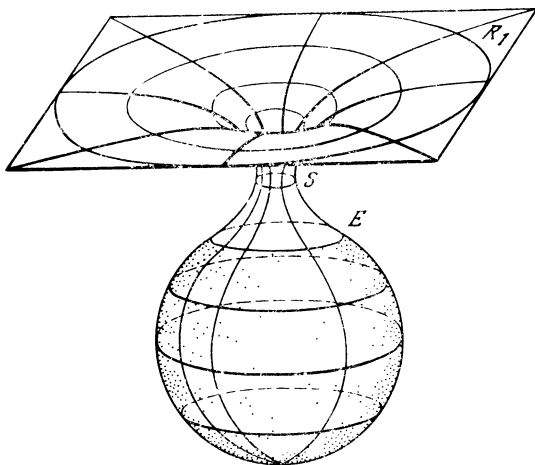


Рис. 8. Геометрия двумерного сечения $t = \text{const}$, $\vartheta = \pi/2$ полузамкнутого мира

увидеть лишь этап расширения до гравитационного радиуса (участок A'_2G'). Характер покраснения света и уменьшения светимости подобного объекта качественно совпадает со случаем, когда образуется обычная черная дыра, с тем, правда, отличием, что при «застывании» размер этого тела приближается к гравитационному радиусу со стороны меньших значений. Чтобы отличить подобные застывшие объекты от обычных черных дыр их называют *серыми дырами* (Зельдович, Новиков [57]) или *черными дырами второго рода* (Марков).

Черные дыры. Общие свойства

Описанная выше картина идеального сферического коллапса и образования шварцшильдовской черной дыры помогает понять многие особенности подобного процесса и в самом общем случае. Образование черной дыры происходит, если гравитирующее тело сжать до таких малых размеров, что его гравитационное поле способно удержать любые частицы и световые лучи (сигналы), испущенные с его поверхности, и не дать им выйти наружу. В подобном

однородного распределения вещества должно выполняться условие $\Delta M > (1 - 4/3 \pi) M_0$.

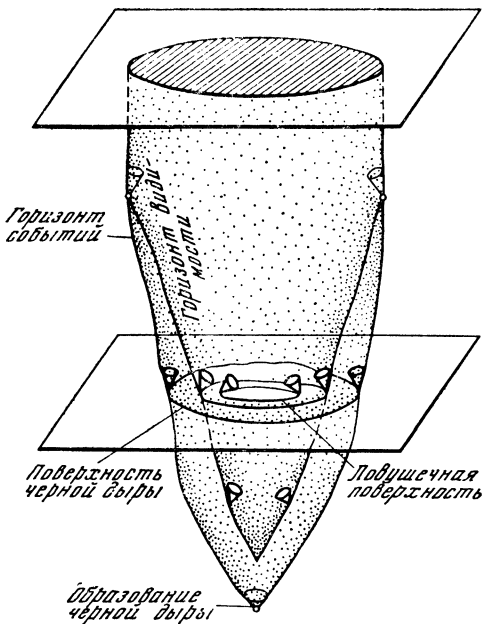


Рис. 9. Структура пространства-времени в окрестности черной дыры. На диаграмме изображены момент образования черной дыры, поверхности горизонта событий и горизонта видимости. Поверхность образовавшейся черной дыры не убывает (теорема Хокинга). С течением времени черная дыра становится стационарной, и поверхности горизонта событий и горизонта видимости в ней совпадают.

случае все точки пространства-времени можно разделить на два класса в зависимости от того, может или нет сигнал из этой мировой точки выйти к удаленному наблюдателю. Можно показать (Пенроуз [28]), что граница между этими двумя областями является светоподобной поверхностью, образующими которой являются световые геодезические, не имеющие конечных точек в будущем. Эта поверхность называется *горизонтом событий*¹³. Подобное название связано с тем, что горизонт событий ограничивает множество событий, которые невозможно увидеть снаружи. Область пространства-времени, лежащая под горизонтом событий, называется *черной дырой* (рис. 9).

¹³ Более формальное определение горизонта событий строится следующим образом [68]. В случае, когда пространство-время

Если пространственноподобная поверхность (множество точек, имеющих одинаковое значение некоторой временной координаты $\tau = \tau_0$) пересекает горизонт событий, то соответствующая двумерная поверхность пересечения называется *границей черной дыры* в момент τ_0 . Световые геодезические, принадлежащие горизонту, не могут его покинуть или пересечься друг с другом. Это свойство световых лучей, образующих горизонт (генераторов), обнаруженное Пенроузом [28], дает возможность доказать следующую теорему (Хокинг [68, 71]), играющую важную роль в физике черных дыр: *Если плотность потока энергии через горизонт событий (т. е. величина $\Phi_{00} = T_{\mu\nu} l^\mu l^\nu$, где l^μ — светоподобный вектор, касательный к образующей горизонта) неотрицательна, то площадь поверхности черной дыры не может уменьшиться со временем.* Доказательство этой теоремы основывается на известном фокусирующем действии гравитационного поля, приводящем к тому, что если световые лучи, образующие горизонт, начали сближаться в области, где $\Phi_{00} \geq 0$, то они обязательно пересекутся [28]. Так как подобное пересечение противоречит теореме Пенроуза, то горизонт составлен из несходящихся лучей и, следовательно, площадь его не может убывать¹⁴. В процессе коллапса тела черная дыра первоначально образуется в его центральной части, затем площадь ее возрастает в результате пересечения горизонта все новыми и новыми более удаленными слоями вещества.

Возникающая черная дыра первоначально имеет, вообще говоря, неправильную форму. Однако при кол-

является асимптотически плоским и обладает асимптотической бесконечностью в будущем \mathcal{I}^+ , множество точек, откуда световой луч может достичь \mathcal{I}^+ , совпадает с прошлым I_- (\mathcal{I}^+) области \mathcal{I}^+ . Граница этого множества I_- (\mathcal{I}^+) является горизонтом событий. Определение асимптотически плоского пространства и асимптотической бесконечности \mathcal{I}^+ , их свойства и дальнейшие ссылки приведены в работах Пенроуза [28, 69] и книге [2] (см. также обзоры [70, 70a]).

¹⁴ Тот факт, что на поверхности горизонта событий сходимость ρ генераторов является неположительной величиной $\rho \leq 0$, позволяет заключить, что при $\Phi_{00} \geq 0$ горизонт видимости (определение которого приведено в примеч. 10) либо лежит внутри горизонта событий, либо частично или полностью с ним совпадает. Полное совпадение горизонта видимости и горизонта событий имеет место, например, в случае шварцшильдовской черной дыры.

лаше тела несферической формы в процессе сжатия вещества изменение его квадрупольных и более высоких моментов сопровождается гравитационным излучением, и гравитационное поле подобной черной дыры является нестатическим. С течением времени процессы излучения гравитационных волн прекращаются. В этом случае, как показано в работах [68, 72—75], образовавшаяся стационарная черная дыра является или шварцшильдовской (сферически симметричной) или, если сколлапсировавшее тело обладает угловым моментом, вращающейся (*керровской*) черной дырой. Метрика Керра, описывающая гравитационное поле подобной черной дыры, наряду с параметром M массы содержит параметр \mathcal{J} , характеризующий величину углового момента черной дыры. Характерное время, в течение которого нестационарная черная дыра переходит в стационарное состояние, имеет порядок $t_q \sim r_g/c \sim 10^{-38} \text{ сек} (Mg)$. В процессе коллапса, приводящего к образованию черной дыры, сбрасываются (излучаются) не только высшие мультипольные моменты гравитационного поля [76], но, в случае если коллапсирующее тело не обладает зарядом, полностью исчезает его электромагнитное поле [77]. При наличии заряда Q гравитационное поле соответствующей стационарной черной дыры определяется тремя величинами — M , \mathcal{J} и Q . О свойстве стационарных черных дыр, состоящем в том, что для их описания не требуется никаких дополнительных характеристик (таких, например, как мультипольные гравитационные и электромагнитные моменты, заряд массивного векторного поля, слабый заряд и т. п. [76—87]), Уилер образно высказался так: «Черные дыры не имеют волос»¹⁵.

¹⁵ Отметим, что в то время как поле от соответствующих источников, помещенных внутри черной дыры, не может проникнуть наружу за поверхность горизонта, поле от источников, помещенных вне черной дыры, проникает внутрь горизонта. В работе [87a] показано, в частности, что происходит своеобразное фокусирование силовых линий массивного векторного поля от внешних источников около особенности $r=0$, что приводит к поведению

$$T_{\nu}^{\mu} \approx \text{diag} \left(\frac{g^2}{r^4}, \frac{g^2}{r^4}, -\frac{g^2}{r^4}, -\frac{g^2}{r^4} \right) \text{ для компонент тензора энергии-импульса.}$$

Такое поведение указывает на то, что нельзя пренебрегать влиянием на метрику поля от внешних источников около особенности. В частности, это влияние может привести к изменению структуры самой сингулярности.

Хотя в общем случае довольно затруднительно указать необходимые и достаточные условия, характеризующие степень сжатия тела произвольной формы с массой M , при которой возникает черная дыра, однако анализ имеющихся точных решений и многочисленные расчеты позволяют предположить, что для образования черной дыры нужно, чтобы максимальный размер тела был несколько меньше или порядка величины гравитационного радиуса $r_g = 2GM/c^2$ [87]. Используя теорему Хокинга, нетрудно показать, что образовавшаяся черная дыра не может распасться на две или более черных дыр [68], так как при сохранении полной энергии суммарная площадь поверхностей возникших черных дыр должна была бы уменьшиться. Важную роль при описании взаимодействия черных дыр с окружающим веществом и черных дыр друг с другом играет обнаруженная Бекенштейном [88, 89] и развитая в работах [29, 90] *аналогия физики черных дыр с термодинамикой*. Центральную роль в этой аналогии играет теорема Хокинга о возрастании площади S поверхности черных дыр, давшая основание предположить, что величина $Sc^3/4\hbar G$ имеет много общего с энтропией в термодинамике. Аналогом температуры при этом является величина $\theta = \hbar\kappa/2\pi ck$, где k — постоянная Больцмана, а κ — *поверхностная гравитация* (напряженность гравитационного поля на поверхности черной дыры). Для шварцшильдовской черной дыры $\kappa = GM/r_g^2 = c^4/4GM$. Формулировка соответствующих четырех законов физики черных дыр и различные случаи применения этих законов приведены в работах [29, 90] (см. также обзоры [91, 92]).

Хотя область пространства-времени внутри черной дыры отдаленному наблюдателю недоступна для изучения, наблюдатель, падающий вместе с коллапсирующим телом, может «увидеть» происходящие там события. При сферическом коллапсе все тела, попавшие в T_- -область, за собственное время порядка $t_g \sim r_{g1/c} \sim 10^{-38}$ сек (M в г) достигают физически особой точки $r=0$. Как было показано Пенроузом [93], возникновение в процессе коллапса ловушечной поверхности приводит к тому, что и в самом общем случае (если только выполняются уравнения Эйнштейна, плотность энергии положительна и начальные данные полностью определяют решение в будущем) внутри

черной дыры имеются особые точки, в которых обрываются мировые линии световых лучей. Эта и другие подобные теоремы, доказанные Пенроузом и Хокингом [2, 28, 94], указывают на то, что и в общем случае появление сингулярностей в процессе коллапса является неизбежным. Обычно полагают, что все подобные сингулярности лежат внутри горизонта событий и поэтому появление их никак не влияет на свойства пространства-времени вне черной дыры. (Этот принцип получил название *принципа «космической цензуры»* [95].)

Почему гравитационный коллапс неизбежен?

Предельная масса невращающейся нейтронной звезды

В то время как для привычных нам в земных условиях тел энергия гравитационного взаимодействия $U_g \sim GM^2/R$ ничтожно мала, для астрономических объектов (звезд, планет и т. д.) она становится сравнимой с их полной внутренней энергией и играет существенную роль, определяя их форму и строение. Многие особенности гравитационного равновесия невращающихся тел связаны с тем, что это равновесие возникает в результате равенства дальнедействующих гравитационных сил притяжения и короткодействующих сил отталкивания, возникающих при взаимодействии движущихся частиц веществ друг с другом и проявляющихся в виде давления¹⁶.

В ньютоновской теории соответствующее уравнение гидростатического равновесия, играющее основную роль при анализе строения звезд, имеет вид

$$-\frac{dp}{dr} = \frac{GM(r)\rho}{r^2}, \quad M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr. \quad (19)$$

Для качественного анализа вместо этого уравнения можно использовать приближенное соотношение

$$\frac{P}{R} \sim \frac{GM^2}{R^5}, \quad (20)$$

¹⁶ Наличие центробежных сил (если тело вращается) или магнитного поля может существенно повлиять на свойства равновесных конфигураций. Мы ограничимся более простым и хорошо изученным случаем, когда этими дополнительными силами можно пренебречь.

где P — характерное среднее давление, (с точностью до порядка величины) обычно совпадающее с давлением в центре звезды, M и R — полная масса и размер звезды. При оценочных вычислениях, считая ионизованный газ звезды идеальным, можно использовать уравнение Клапейрона

$$p = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho T,$$

чтобы получить для характерной температуры T внутри звезды значение

$$T \sim \frac{GM}{R} \frac{\mu}{\mathcal{R}} \sim 10^7 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{R_{\odot}}{R} \right) \text{К.}$$

Здесь μ — молекулярная масса вещества звезды и \mathcal{R} — универсальная газовая постоянная. Идущие при этой температуре термоядерные реакции являются источником энергии, излучаемой звездой. Давление горячего ионизованного газа и излучения (преобладающего при $M \geq 5M_{\odot}$) делают возможным существование устойчивых равновесных конфигураций во всем диапазоне звездных масс (от $0,1 M_{\odot}$ до $100 M_{\odot}$). Ядерные реакции поддерживают установившийся температурный режим на том уровне, который обуславливается строением звезды и ее химическим составом и обеспечивает светимость звезд в течение длительного времени.

Эволюция звезды после выгорания ядерного топлива может пойти или с сохранением гидродинамического равновесия, или, если это равновесие нарушится и гравитационные силы превзойдут силы противодействия давления, начнется гравитационное сжатие звезды. Характер дальнейшей эволюции звезды определяется зависимостью сил давления от температуры и плотности, т. е. уравнением состояния вещества.

Обычно уравнение состояния при адиабатическом процессе имеет вид

$$p = A \bar{\rho}^{\gamma}, \quad \bar{\rho} \equiv mn, \quad (21)$$

где γ — показатель адиабаты, и результирующую F силы гравитационного притяжения и силы давления, действующих на единицу объема, можно записать следующим образом:

$$F \sim - \frac{GM^2}{R^6} + \frac{AM\gamma}{R^{3\gamma+1}}. \quad (22)$$

Если уравнение состояния (21) достаточно «жесткое» ($\gamma > 4/3$), т. е. при уменьшении размеров сила давления нарастает достаточно быстро, то равновесие звезды, определяемое условием $F=0$, устойчиво. При более «мягком» уравнении состояния ($\gamma < 4/3$) любое случайное возмущение плотности будет нарастать и устойчивое гравитационное равновесие невозможно. В особом случае, когда показатель адиабаты γ имеет значение $4/3$, обе силы — гравитация и перепад давлений — зависят от размера звезды одинаковым образом. Однако зависимость этих сил от массы звезды различная, и поэтому существует определенное критическое значение массы, при котором эти силы уравниваются. Если же масса звезды превышает это критическое значение, то под действием нескомпенсированной силы тяготения начнется сжатие.

После выгорания ядерного горючего основную роль в поддержании устойчивости звезды (если подобная равновесная конфигурация возможна) играет давление вырожденного электронного (Ландау [96]) или нейтронного (Оппенгеймер, Волков [97]) ферми-газа (см. также [98—100]). Характерный импульс Ферми p_f частиц подобного газа плотности n есть $p_f \sim \hbar n^{1/3}$. Если движение частиц газа (с массой m) нерелятивистское ($p_f \ll mc$), то характерная энергия ϵ_f , приходящаяся на одну частицу, равна $\epsilon_f \sim p_f^2/2m \sim \hbar^2 n^{2/3}/m$, и поэтому давление нерелятивистского вырожденного ферми-газа определяется формулой

$$p \sim n\epsilon_f \sim \frac{\hbar^2}{m} n^{5/3}. \quad (23a)$$

В ультрарелятивистском случае ($p_f \gg mc$) соотношение $\epsilon_f \sim p_f c$ приводит к уравнению состояния вида

$$p \sim n\epsilon_f \sim \hbar c n^{4/3}. \quad (23б)$$

При сжатии нерелятивистского ферми-газа давление его растет как вследствие увеличения импульса частиц, так и из-за увеличения частоты ударов частиц газа о стенку. «Смягчение» уравнения состояния при переходе к релятивистскому случаю связано с тем, что скорость частиц становится порядка скорости света, частота ударов о стенку далее не возрастает, и поэтому увеличение давления определяется лишь возрастанием импульса частиц.

Уравнения (23) показывают, что при тех плотностях, при которых вырожденный ферми-газ является нерелятивистским, давление этого газа оказывается достаточным, чтобы препятствовать гравитационному сжатию. Однако при увеличении массы звезды плотность вещества в центре ее возрастает, движение частиц вырожденного ферми-газа становится релятивистским и существует предельное значение массы, при котором из-за «смягчения» уравнения состояния устойчивое равновесие оказывается невозможным.

Выгоревшие звезды, равновесие которых поддерживается давлением вырожденного электронного газа, известны в астрономии под названием *белых карликов*. Для белых карликов характерны следующие параметры: средняя масса $0,6 M_{\odot}$, радиус $0,013 R_{\odot}$, средняя плотность $4 \cdot 10^5 \text{ г/см}^3$. Предельное критическое значение массы белых карликов (*предел Чандрасекара*) не превосходит величины $1,4\text{--}1,5 M_{\odot}$. Сейчас известно несколько тысяч белых карликов. Так как светимость их сравнительно невелика (примерно в $10\text{--}100$ раз ниже светимости L_{\odot} Солнца), то все открытые белые карлики находятся не очень далеко от Солнца, на расстоянии до 100 пс .

Если плотность вещества существенно больше плотности вещества белых карликов, то энергия «вырожденных» электронов настолько велика, что суммарная полная масса такого электрона и протона оказывается больше массы нейтрона и энергетически более выгодным оказывается нейтронное состояние вещества. Давление вырожденного нейтронного газа может обеспечить равновесие подобной *нейтронной звезды*.

Для нейтронных звезд характерны следующие параметры: средняя масса $\sim M_{\odot}$, радиус $R \sim 10\text{--}20 \text{ км}$, средняя плотность $\rho \sim 2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$.

Так как гравитационный радиус, соответствующий массе нейтронной звезды, $r_g \sim 3 \text{ км}$ менее чем на порядок отличается от радиуса нейтронной звезды, то при более точном анализе условий равновесия необходимо учитывать поправки (порядка $r_g/R \sim 0,15\text{--}0,20$), связанные с общей теорией относительности. Уравнение гидродинамического равновесия в общей теории относительности имеет вид

$$-\frac{dp}{dr} = \frac{GM(r)\rho}{r^2} \left(1 + \frac{p}{\rho c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{Mc^2}\right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1}. \quad (24)$$

В нерелятивистском пределе ($c \rightarrow \infty$) это уравнение совпадает с (19). Появление дополнительных множителей в первых двух круглых скобках вызвано тем, что источником гравитационного поля является тензор энергии-импульса, содержащий наряду с плотностью энергии также и давление (давление тоже «весит»).

Наличие последнего множителя, связанного с искривлением пространства, можно пояснить следующим образом. Для того чтобы частица покоилась в гравитационном поле Шварцшильда, на нее должна действовать (четырёхмерная) сила F' такая, что

$$F = |F_\alpha F^\alpha|^{1/2} = \frac{GM}{r^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{1/2}}. \quad (25)$$

Если эта сила порождается разностью давлений в соседних точках, то должно выполняться условие

$$F = - \frac{dp}{dl}, \quad (26)$$

где $dl = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1/2} dr$ — расстояние между этими точками. Сравнение выражений (25) и (26) позволяет понять причину появления множителя $(1 - 2GM/c^2 r)^{-1}$ в формуле (24).

Заметим, что каждый из множителей в скобках в формуле (24) больше единицы. Это приводит к тому, что при учете релятивистских эффектов давление в центре звезды оказывается выше, чем это следует из нерелятивистского уравнения равновесия. В нерелятивистской теории при достаточно жестком уравнении состояния возможно существование равновесных конфигураций со сколь угодно большой массой. Существенным отличием релятивистской теории является то, что увеличение давления сопровождается дополнительным возрастанием его «веса». Если масса звезды достаточно велика, то оказывается, что даже при самом жестком мыслимом уравнении состояния градиент давления не может скомпенсировать суммарный вес вещества и самого давления и подобная звезда коллапсирует. Этот вывод о существовании предельной массы равновесной конфигурации в общей теории относительности можно проиллюстрировать в случае, когда уравнение состояния имеет вид

$$p = \gamma \rho c^2. \quad (27)$$

Решение уравнения (24) с бесконечной плотностью и бесконечным давлением в центре дается следующим простым выражением:

$$\rho(r) = \frac{c^2}{2\pi G} \frac{\gamma}{\gamma^2 + 6\gamma + 1} \frac{1}{r^2}.$$

Если уравнение состояния (27) справедливо при плотности выше некоторой плотности ρ_s , то соответствующая масса, содержащаяся внутри подобного центрального ядра звезды, есть

$$M = \frac{c^3}{G^{3/2}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{\gamma}{\gamma^2 + 6\gamma + 1}\right)^{3/2} \rho_s^{-1/2}.$$

При фиксированном значении ρ_s эта масса максимальна для предельно жесткого уравнения состояния ($\gamma=1$), совместного с причинностью. (В этом случае скорость звука $v=(dp/d\rho)^{1/2}$ совпадает со скоростью света.) Соответствующее значение массы

$$M_{\max} \sim 2M_{\odot} (\rho_s/2 \cdot 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3})^{-1/2}.$$

Используя обычное уравнение состояния для плотностей меньших ядерной, можно показать, что масса, содержащаяся в оболочке (в области, где плотность меньше ядерной), мала по сравнению с M_{\max} . Следовательно, при любом уравнении состояния вида (27) даже конфигурация с бесконечной величиной плотности и давления в центре приводит к конечному значению массы нейтронной звезды.

Вопрос о точной верхней границе массы нейтронной звезды чрезвычайно важен при обсуждении возможности отождествления того или иного астрофизического объекта с черной дырой¹⁷. Если нейтронная звезда не вращается и ее магнитным полем пренебречь, то подобную верхнюю границу можно получить следующим образом [101]. Предположим, что нам известно уравнение состояния до плотностей, не превосходящих значения ρ_s , и p_s — давление при этой плотности. Если выше этой плотности использовать любое уравнение состояния, не противоречащее причинности¹⁸

$$\frac{dp}{d\rho} \leq c^2, \tag{28}$$

¹⁷ Более подробно этот вопрос обсуждается в следующем разделе.

¹⁸ Отметим, что, вообще говоря, в плотной среде при наличии дисперсии и затухания адиабатическая скорость звука $v=$

то, как показали Роадес и Руффини [101], максимальное значение массы нейтронной звезды достигается в том случае, когда при плотности $\rho > \rho_s$ выбирается максимально жесткое уравнение состояния

$$p = p_s + (\rho - \rho_s) c^2. \quad (29)$$

Используя это уравнение и интегрируя уравнение (24) при различных значениях величины плотности в центре ρ_c , можно получить при выбранном ρ_s зависимость массы нейтронной звезды от ρ_c : $M = M(\rho_c, \rho_s)$. Максимум этой величины при произвольных значениях ρ_c определяет $M_{\max}(\rho_s)$ — максимальное значение массы нейтронной звезды при известном нам уравнении состояния для плотностей меньше ρ_s . Очевидно, что при возрастании ρ_s величина $M_{\max}(\rho_s)$ уменьшается. Как показывают численные расчеты, если выбрать в качестве ρ_s значение ядерной плотности $\rho_s = \rho_N = 2 \cdot 10^{14}$ г/см³, то $M_{\max}(\rho_N) \sim 4,8 M_\odot$. Экстраполяция уравнения состояния ядерной материи до плотностей $\rho_1 = 4,6 \cdot 10^{14}$ г/см³ (уравнение Гаррисона—Уилера [112]) позволяет уменьшить эту оценку M_{\max} примерно в $(\rho_1/\rho_N)^{1/2} \sim 1,5$ раза, поэтому, если принять, что при плотностях, в 2,3 раза превышающих ядерную, уравнение состояния не становится экстремально жестким, то максимальная масса невращающейся нейтронной звезды не может быть больше 3—3,2 M_\odot [101]. Таким образом, если принять, что массивные звезды не теряют значительной доли своей массы в процессе эволюции, и если

$= \sqrt{dp/d\rho}$ может отличаться от скорости распространения сигнала $v_{\text{сигн}}$. Интересный вопрос о том, какие ограничения накладывает принцип причинности на уравнения состояния при экстремальных условиях, обсуждается в работах [102—104]. В статье [104а] рассмотрена модель, в которой, несмотря на то, что $p > \rho c^2$ и величины фазовой ω/k и групповой $d\omega/dk$ скоростей (в пределе низких частот) и адиабатической скорости звука v превосходят скорость света, тем не менее для скорости распространения сигналов $v_{\text{сигн}}$ имеет место соотношение $v_{\text{сигн}} < c$. Даже если отказаться от ограничения (27) и выбрать при плотности $\rho > \rho_s$ уравнение состояния, соответствующее несжимаемой жидкости, то масса невращающейся нейтронной звезды не может быть больше величины [105] $M = 11,4 (1 - 3\rho_s/\rho_s c^2) \cdot M_\odot (\rho_s/10^{14} \text{ г.см}^{-3})^{-1/2}$. Вопрос о максимальной массе невращающейся нейтронной звезды при различных предположениях о выборе ρ_s и уравнении состояния выше ρ_s исследовался также в работах [107—111]. Относительно наблюдательных ограничений на массу нейтронных звезд см. [111а].

их вращение не препятствует образованию черной дыры, то все звезды с массой $M \geq 3 M_{\odot}$ (а возможно, и несколько меньшей величины) в конце своего эволюционного пути превратились бы в черные дыры. Время жизни подобных массивных звезд меньше 10^9 лет, и во всей нашей Галактике в среднем примерно одна звезда с массой $M > 3 M_{\odot}$ каждые десять лет заканчивает свою эволюцию. Реальная скорость образования черных дыр в Галактике, вероятнее всего, много меньше этой величины. Основная неопределенность при оценке скорости образования черных дыр связана с трудностью расчетов последних этапов эволюции массивных звезд. Обычно в конце эволюции подобные звезды взрываются, и в результате выброса оболочки масса вещества, остающегося в ядре звезды после взрыва, может значительно отличаться от первоначальной массы звезды. В настоящее время отсутствуют также надежные вычисления эволюции вращающихся звезд. По-видимому, достаточно массивные звезды с массой $M \geq 10 M_{\odot}$ в конце своей жизни могут привести к образованию массивного плотного ядра, коллапс которого в дальнейшем приводит к появлению черной дыры. Во всяком случае предположение о том, что в нашей Галактике (как и во всякой другой галактике) имеются черные дыры, возникшие в результате коллапса выгоревших остатков массивных звезд, можно считать довольно правдоподобным и сомнения, которые сейчас имеются, касаются главным образом того, насколько распространены подобные объекты в Галактике и во Вселенной.

Как «увидеть» черную дыру? Сферическая и дисковая аккреции

Как же «увидеть» черную дыру, возникшую при коллапсе звезды? Практически невозможно обнаружить одиночную черную дыру в пустом пространстве, находящуюся далеко от солнечной системы. Однако в реальном случае вокруг одиночной черной дыры не пустота, а разреженный газ¹⁹. Всасывание этого газа и падение (*аккреция*) его на черную дыру, сопровождающееся нагрева-

¹⁹ Средняя плотность газа в межзвездном пространстве равна приближенно 10^{-24} г/см³, т. е. в одном кубическом сантиметре пространства находится в среднем один нуклон.

нием газа, может привести к вполне наблюдаемым эффектам. Если T — температура газа вдали от черной дыры, то средняя скорость v движения его частиц (совпадающая по порядку величины со скоростью звука) есть

$$v \sim \sqrt{kT/m}.$$

Частицы, движущиеся с такой скоростью, могут уйти от черной дыры с массой M только в том случае, если они находятся на расстоянии R от дыры, большем, чем

$$r_a \sim GM/v^2.$$

При хаотическом движении частиц газа через сферу радиуса r_a вокруг черной дыры за единицу времени влетает снаружи $\sim 4\pi r_a^2 n v$ частиц (n — средняя плотность числа частиц). Поэтому скорость аккреции можно оценить следующим образом [57]:

$$\begin{aligned} \dot{M} &\sim 4\pi r_a^2 v \rho = \\ &= \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{\rho}{10^{-14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}}\right) \left(\frac{T}{10^4 \text{ К}}\right)^{-3/2} \times 10^{11} \text{ г} \cdot \text{сек}^{-1}. \end{aligned} \quad (30)$$

Газ вне сферы r_a практически не движется, а внутри этой сферы находится в состоянии свободного падения.

Для того чтобы оценить возможное энерговыделение в этом процессе, заметим, что при медленном опускании на черную дыру тела с массой m (например, на бесконечно тонкой и бесконечно прочной нити) можно получить энергию, равную mc^2 . Поэтому в принципе при падении вещества на черную дыру возможно преобразование его полной массы в энергию с коэффициентом полезного действия равным 100%. Конечно, в реальных условиях этого не происходит, и большая часть потенциальной энергии, освобождаемой при падении частиц на черную дыру, переходит в кинетическую энергию этих частиц и поглощается черной дырой. Как показывают оценки [113], при сферической аккреции основную роль в преобразовании энергии падающих частиц в энергию излучения играет магнитное поле в ионизованном межзвездном газе. Из-за высокой проводимости ионизованного газа силовые линии магнитного поля «вморожены» в аккрецирующее вещество. При увеличении плотности вещества магнитное поле возрастает и его энергия становится сравнимой с кинетической энергией падающего вещества. Это приводит

к тому, что магнитное поле начинает влиять на движение аккрецирующего газа и нагревает его. Быстрое движение заряженных частиц (главным образом электронов) горячего ионизованного газа в магнитном поле приводит к сильному синхротронному излучению, полная мощность которого дается формулой [114]

$$L \sim 10^{29} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^3 \left(\frac{\rho}{10^{-24} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}} \right)^2 \left(\frac{T}{10^4 \text{ К}} \right)^{-3} \frac{\text{эрг}}{\text{сек}}. \quad (31)$$

Спектр этого нетеплового излучения имеет широкий максимум в видимой и ультрафиолетовой области (соответствующая частота $\sim 10^{15}$ гц). Основной поток излучения идет из области, отстоящей от центра на расстоянии нескольких гравитационных радиусов. Сравнение формул (30) и (31) показывает, что при сферической аккреции на черную дыру с массой $M \sim 10 M_{\odot}$ энергия синхротронного излучения составляет примерно 1% от полной энергии аккрецирующего вещества, при этом интенсивность излучения имеет порядок 10^{32} эрг/сек. (Напомним, что общая светимость Солнца есть $2 \cdot 10^{33}$ эрг/сек, а характерная светимость белых карликов $10^{31} - 10^{32}$ эрг/сек.). Так как светимость при сферической аккреции сравнительно невелика, то обнаружить подобную одиночную черную дыру можно, только если она находится относительно недалеко от Солнца. В отличие от обычных звездных спектров спектр излучения аккрецирующей черной дыры нетепловой и не содержит линий поглощения. Основная сложность при попытках идентифицировать одиночную черную дыру по указанным свойствам ее излучения состоит в том, что подобный объект крайне трудно отличить от аккрецирующей нейтронной звезды, если пульсирующее излучение последней не наблюдается из-за неблагоприятной ориентации диаграммы направленности или из-за слабости ее магнитного поля. Сходство характера излучения в обоих случаях связано с тем, что как уже указывалось, основная доля излучения идет из области, расположенной на расстоянии нескольких гравитационных радиусов от центра системы, где свойства гравитационных полей черной дыры и нейтронной звезды совпадают. Основным отличием, по-видимому, является дополнительное жесткое (рентгеновское) излучение, возникающее при ударе частиц аккрецирующего газа о поверхность нейтронной звезды, отсутствующее при аккреции на черную дыру.

Если нейтронная звезда обладает магнитным полем, то рентгеновское излучение от нее будет поляризовано. Подобные эффекты поляризации должны отсутствовать у черной дыры, так как она «не имеет магнитных волос».

Гораздо более простой представляется задача обнаружения черной дыры, если она входит в состав *двойной системы* вместе с обычной звездой в качестве второй компоненты. Двойные звезды — довольно распространенное явление во Вселенной. Они образуются из сжимающегося первичного облака газа в том случае, когда это облако обладает вращением, препятствующим образованию отдельной звезды. После разделения облака на две или несколько частей существенная доля углового момента оказывается заключенной в орбитальном вращении этих частей. По-видимому, более половины всех звезд в галактике наблюдается в виде двойных или кратных систем. Случай, когда одна из компонент двойной системы в результате эволюции образовала черную дыру, является благоприятным для наблюдения по следующим причинам.

Во-первых, периодический доплер-эффект, связанный с движением видимой звезды вокруг общего центра масс, позволяет определить период вращения T и максимальное значение проекции скорости v этой звезды на луч зрения наблюдателя. Если этот луч имеет угол i с нормалью к плоскости орбиты, то скорость движения видимой звезды v_v есть $v_v = v/\sin i$. Пусть расстояние между видимой звездой с массой M_v и невидимой компонентой с массой M_n есть a . Тогда

$$v_v = \frac{2\pi}{T} a_1, \quad a_1 = \frac{M_n}{M_v + M_n} a.$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{M_v v_n^2}{a_1} = \frac{GM_v M_n}{a^2}.$$

Сравнивая эти два выражения, можно получить следующее соотношение:

$$\frac{M_n^3 \sin^3 i}{(M_n + M_v)^2} = \frac{v^3 T}{2\pi G}. \quad (32)$$

В правой части формулы (32) стоит величина, непосредственно определяемая из наблюдений. Массу M_v видимой компоненты можно найти, воспользовавшись известной зависимостью спектральных характеристик звезд от их

массы (для обычных звезд, лежащих на главной последовательности диаграммы Герцшпрунга—Рессела). Если в соотношении (32) положить $\sin i = 1$, то можно определить минимальное значение массы $M_{n, \min}$ невидимой компоненты. Если значение $M_{n, \min}$ оказывается большим (например, порядка $5-10 M_{\odot}$), то уже этот факт может явиться сильным указанием в пользу того, что невидимая компонента двойной системы является черной дырой. Это заключение связано с тем, что представляется маловероятным для обычной звезды с такой большой массой оставаться «невидимой». С другой стороны, это значение массы превосходит предельное допустимое значение для массы белых карликов и нейтронных звезд. Предложение использовать «невидимость» в качестве критерия при поиске черных дыр в двойных системах было высказано в работах [115—117]. Однако среди звезд, огобранных по этому признаку, обнаружить черную дыру не удалось.

Другим крайне важным является то обстоятельство, что когда черная дыра входит в состав двойной системы, захват ею вещества, теряемого обычной звездой, может существенно увеличить скорость аккреции по сравнению со случаем одиночной черной дыры. Среди многочисленных двойных звезд существует довольно много *тесных двойных систем*, у которых расстояние между компонентами сравнимо с суммой радиусов звезд. Если черная дыра входит в состав тесной двойной системы, то скорость аккреции на нее вещества, перетекающего от обычной звезды, может достигать величины $10^{-5} M_{\odot}$ в год. Характер аккреции на черную дыру в двойной системе существенно отличается от сферической аккреции на одиночную черную дыру. Основное отличие состоит в том, что вещество, перетекающее от звезды, вследствие вращения системы обладает угловым моментом относительно черной дыры. Значение углового момента l частиц вещества много больше величины mr_{gc} , поэтому эти частицы не могут упасть на черную дыру, не отдав своего момента, и «вынуждены» занять соответствующую имеющемуся у них угловому моменту круговую орбиту. Таким образом, вокруг черной дыры образуется диск из аккрецирующего вещества (рис. 10). Плоскость этого диска совпадает с плоскостью, в которой движутся компоненты двойной системы. Толщина диска невелика, порядка сотой части от его размера. Угловая скорость вращения вещества зависит

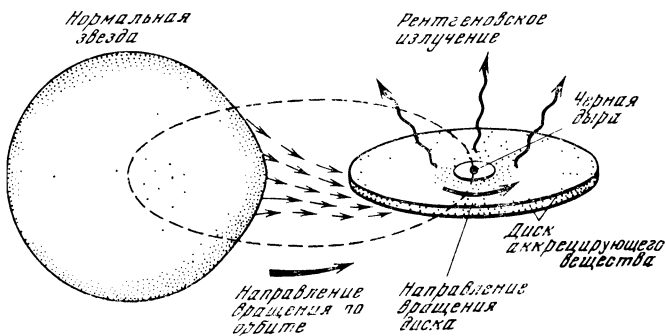


Рис. 10. Аккреция на черную дыру в двойной системе

от расстояния и из-за наличия трения между соседними слоями диска вещество каждого слоя отдает свой угловой момент внешним по отношению к нему слоям, постепенно приближаясь к центру. Работа гравитационных сил при этом частично превращается в кинетическую энергию движения газа, частично, из-за наличия трения, переходит в тепло и разогревает аккрецирующий газ. После того как аккрецирующее вещество приблизится к черной дыре на расстояние, соответствующее положению последней устойчивой круговой орбиты (это расстояние равно $3r_g$ для невращающейся и $1/2r_g$ для экстремально вращающейся черной дыры), оно срывается и свободно падает на черную дыру. Поэтому общее значение энергии, которая освобождается при падении вещества до последней устойчивой орбиты, не превосходит энергии связи на этой орбите, равной $0,06 \dot{M}c^2$ в случае невращающейся и $0,42 \dot{M}c^2$ для вращающейся черной дыры. Температура вещества в диске существенно выше во внутренних областях, чем во внешних. Если поток массы \dot{M} не превосходит величины $\dot{M} = 10^{-8} M_{\odot}$ в год, то общая светимость диска L имеет порядок [114]

$$L \sim 0,1 \dot{M}c^2 \sim 10^{38} (\dot{M}/10^{-8} M_{\odot} \text{ год}^{-1}) \frac{\text{эрг}}{\text{сек}}. \quad (33)$$

При потоке $\dot{M} \sim 10^{-8} - 10^{-8} M_{\odot} \text{ год}^{-1}$ температура внутренних областей диска равна $T \sim 10^7 - 10^8 \text{ К}$, и подобная черная дыра в двойной системе является мощным источником рентгеновского излучения.

При больших потоках аккрецирующего вещества, приводящих к излучению больше величины $L_{\text{Э}} = 6 \cdot 10^{37}$ (M/M_{\odot}) эрг/сек, описанная выше картина существенно изменяется. Это критическое значение излучения $L_{\text{Э}}$ носит название *эддингтоновского предела*. Если излучение достигает величины эддингтоновского предела, то его давление на падающее вещество сравнивается с силой гравитационного притяжения. Действительно, светимость L равна $L = 4\pi r^2 c q$, где q — плотность потока импульса излучения на расстоянии r от источника. Взаимодействие излучения с плазмой определяется величиной томсоновского сечения рассеяния $\sigma_{\text{T}} = 8\pi/3 (m_e c^2/e^2)^2 = 0,657 \cdot 10^{-24}$ см². Если сила давления излучения $q\sigma_{\text{T}}$, приходящаяся на одну заряженную частицу (электрон), уравнивается силой гравитационного притяжения GMm_p/r^2 , то критическое значение светимости $L_{\text{Э}}$, определяемое из этого условия, дается выражением

$$L_{\text{Э}} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_{\text{T}}} = 6 \cdot 10^{37} \frac{M}{M_{\odot}} \frac{\text{эрг}}{\text{сек}}.$$

При потоках аккрецирующего вещества больше величины $\dot{M} = 10^{-8} M_{\odot} \text{ год}^{-1}$ под действием давления излучения, превышающего силу гравитационного притяжения, из внутренних областей начинается отток газа в направлении, перпендикулярном к плоскости диска. Вследствие этого утолщения диска и его размытия рентгеновское излучение, прежде чем выйти наружу, испытывает рассеяние в толще аккрецирующего вещества и перерабатывается в более мягкие кванты. Это приводит к тому, что подобные черные дыры могут наблюдаться как яркие оптические звезды со светимостью $\sim 10^{38}$ эрг/сек.

Из-за различных процессов, происходящих в нормальной звезде, поток перетекающего на черную дыру газа может испытывать значительные вариации. Если в результате этого (или по каким-либо другим причинам) в аккрецирующем диске появляется «горячее» пятно, то в интенсивности излучения черной дыры могут появиться периодические изменения, период которых равен времени обращения частиц по круговой орбите вокруг черной дыры. Минимальное значение возможного периода определяется временем обращения на последней устойчивой круговой орбите и равно $T_{\text{мин, пер}} = 5 \cdot 10^{-4}$ сек (M/M_{\odot}) для невраща-

щающей и $T_{\text{min, вр}} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ сек} (M/M_{\odot})$ для вращающейся черной дыры ²⁰.

Описанная выше *стандартная модель дисковой аккреции* ²¹ дает основание считать, что если обнаружен мощный ($L \sim 10^{37} - 10^{38} \text{ эрг/сек}$) источник рентгеновского излучения, входящий в состав двойной системы в качестве оптически невидимого компаньона обычной звезды, и масса его превосходит $M = 3 - 5 M_{\odot}$, то по всей видимости этот объект является черной дырой. К настоящему времени открыто около десятка мощных рентгеновских источников ($L \sim 10^{36} - 10^{39} \text{ эрг/сек}$), входящих в состав двойных систем. Примерно половина из них является затменно-переменными, т. е. интенсивность их рентгеновского излучения периодически изменяется из-за покрытия их обычной звездой. В ряде случаев удалось отождествить их видимого компаньона с известной звездой. Некоторые из наиболее изученных источников, такие как Her X 1, Cen X-3 и Vela X-1 ²², оказались нейтронными звез-

²⁰ При сферической аккреции на одиночные черные дыры также возможны флуктуации интенсивности излучения с этими характерными периодами.

²¹ На возможность рентгеновского излучения в двойных звездных системах было обращено внимание в статье [118]. В работах [119, 120] было исследовано рентгеновское излучение от нейтронной звезды, входящей в состав двойной системы. Модель дисковой аккреции на белый карлик была предложена в работе [121]. Стандартная модель дисковой аккреции на нейтронные звезды и черные дыры в двойных системах была разработана в [122—124]. Обзор Новикова и Торна, посвященный аккреции вещества на нейтронные звезды и черные дыры, в котором, в частности, обсуждаются различные релятивистские эффекты, можно найти в книге [114] (см. также [57, 125—128]).

²² Принятое обозначение рентгеновских источников включает в себя сокращенное латинское название созвездия, за которым идет буква X и порядковый номер источника в этом созвездии. Первые шесть рентгеновских источников, входящих в двойные системы, среди которых, кроме перечисленных, содержится также и источник Cyg X-1, были открыты в результате наблюдений на американском рентгеновском спутнике «УХУРУ». В настоящее время разнообразные рентгеновские наблюдения постоянно проводятся на рентгеновских спутниках «Ариабата» (Индия), «Анс» (Голландия), «Ариэль-5» (Англия), «САС-3», «OSO-8» и «ОАО» (США). Подобные наблюдения составляли также часть научной программы во время полетов на советских орбитальных станциях «Салют». Обсуждение некоторых последних достижений рентгеновской астрономии содержится в обзоре [129].

дами (*рентгеновскими пульсарами*), входящими в состав двойной системы. Всего в настоящее время открыто 9 рентгеновских пульсаров в двойных системах [130]. Подобному отождествлению способствовал тот факт, что рентгеновское излучение от этих источников, кроме периода в несколько дней, связанного с движением источника по орбите, обладает также другим характерным периодом от секунды ($0,715 \text{ сек}$ для источника SMC X-1 в Малом Магеллановом облаке, $1,24 \text{ сек}$ для Her X-1) до нескольких минут (284 сек для Vela X-1, 835 сек для источника 3U 0352+30). Эта периодичность связывается с вращением источника вокруг оси и имеет порядок, характерный для периодов вращения замедлившихся нейтронных звезд.

Одним из наиболее интересных из обнаруженных компактных галактических рентгеновских источников является источник Cyg X-1 в созвездии Лебедя. (Детальный обзор, посвященный Cyg X-1, можно найти в работе [130a].) Этот источник по ряду причин сразу привлек к себе внимание. Его рентгеновская светимость порядка $10^{37} \text{ эрг} \cdot \text{сек}^{-1}$. В 1971 г. в результате исследований этого источника на спутнике «УХУРУ» и с помощью рентгеновских телескопов на высотных баллонах удалось с относительно большой точностью установить его положение. В том же году были зарегистрированы изменения его рентгеновской светимости и одновременно с этим наблюдалось резкое возрастание излучения от радиоисточника, расположенного в этом же районе. Этот факт позволил отождествить рентгеновский и радиоисточник и тем самым зафиксировать положение рентгеновского источника с точностью $\leq 1''$. Внутри области погрешности была обнаружена оптическая звезда HDE 226868, которая оказалась спектрально двойной, с периодом $5,6 \text{ сут}$. Дальнейшие исследования рентгеновского излучения на спутниках «Коперник», «OSO-7» и «Ариэль-5» показали [213—216], что это излучение имеет периодическую компоненту, причем соответствующий период совпал с $5,6 \text{ сут}$. Тем самым было доказано, что рентгеновский источник входит в двойную систему вместе со звездой HDE 226868.

Звезда HDE 226868, согласно наиболее точным данным [217], расположена на расстоянии $> 2 \text{ кпс}$ и ее масса превосходит $20 M_{\odot}$, а масса ее невидимого компаньона (источника рентгеновского излучения) $> 8 M_{\odot}$. Все это дало основания предположить, что источник Cyg X-1

является черной дырой в двойной системе. В пользу этого свидетельствует также и то, что характерные времена хаотических флуктуаций рентгеновского излучения составляют от тысячных долей секунды до десятков секунд, что согласуется с теорией аккрецирующих дисков вокруг черной дыры [131]. Однако, к сожалению, до сих пор еще остается не полностью исключенной возможность того, что этот источник рентгеновского излучения является нейтронной звездой, входящей в состав тройной системы [205, 206]. Хотя, по-видимому, вероятность этого мала, однако лишь дальнейшие более детальные исследования характеристик как рентгеновского, так и видимого излучения от этого объекта смогут внести окончательную ясность в этот вопрос.

Если обсуждение свойств черных дыр с массой порядка нескольких масс Солнца носит вполне конкретный характер, то вопрос о массивных (с массой $M \sim 10^3 M_{\odot}$) и о сверхмассивных ($M \sim 10^8 M_{\odot}$) черных дырах гораздо в большей степени дискуссионный. Привлекательной является идея объяснить активность ядер галактик и квазаров наличием в них *сверхмассивной черной дыры* [132, 133]. При падении на нее межзвездного газа, участвующего во вращении галактики, образуется аккрецирующий диск, максимум излучения которого лежит в ультрафиолетовом и оптическом диапазоне [114]. По-видимому, по крайней мере в простейшем варианте эта модель встречается с рядом трудностей, обсуждение которых содержится в работах [134, 204]. Вопрос о возможности существования черной дыры в центре нашей Галактики также является открытым. Важно, однако, отметить, что масса подобной черной дыры, по-видимому, не может быть очень велика (по оценкам, приведенным в работе [202], она не превосходит $10^2 M_{\odot}$).

Предположение о наличии *массивных черных дыр* в звездных скоплениях [135—140] в последнее время привлекло к себе внимание в связи с открытием источников мощных вспышек рентгеновского излучения [141—143]. Первоначально считали, что большинство этих источников совпадает со звездными скоплениями. В настоящее время известно около двух десятков подобных источников. Дальнейшие наблюдения и более тщательная обработка их показали, что только относительно небольшая часть их (около 20%) расположена в звездных скоплениях. Независимо от того, ответственны или нет массивные

черные дыры за эту часть ренгеновских вспышек, дальнейшие наблюдения и теоретические работы с целью обнаружить массивные и сверхмассивные черные дыры или доказать их отсутствие представляются крайне важными.

Реликтовые черные дыры и ранняя история Вселенной

В предыдущих разделах главным образом речь шла о черных дырах с массой, сравнимой с массой Солнца или большей ее. Вопрос о возможности существования малых черных дыр, т. е. черных дыр с массой гораздо меньше солнечной, был оставлен в стороне. Переходя к обсуждению этого вопроса, мы напомним, что характерная плотность вещества в момент, когда тело массы M , сжимаясь, достигает размера своего гравитационного радиуса (в «момент образования» черной дыры), будет

$$\rho \sim \frac{M}{4/3\pi r_g^3} \sim \frac{c^6}{32G^3 M^2} \sim 10^{83} (M \text{ г})^{-2} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$$

и при образовании малой черной дыры эта плотность значительно (например, для массы $M \sim 10^{15}$ г почти на сорок порядков) превосходит ядерную плотность. Поэтому при обсуждении возможности образования малых черных дыр неизбежно приходится использовать некоторые далеко выходящие за рамки известного в настоящее время гипотезы о свойствах вещества при подобных огромных плотностях²³.

Обычно предполагают, что вещество описывается определенным уравнением состояния, в качестве которого при адиабатических процессах используют уравнение

$$p = \gamma \rho c^2, \quad (34)$$

²³ Заметим, в частности, что если существует *фундаментальная длина* l_f , характеризующая размеры пространственно-временной области, внутри которой обычные представления о пространстве и времени неприменимы, то возможные значения массы черной дыры естественным образом ограничиваются снизу величиной $M_f = c^2 l_f / 2G$ [144]. Наличие фундаментальной длины l_f могло бы также привести к тому, что первичные черные дыры с массой меньше $M_{\min} = 10^{27} (l_f / 10^{-17} \text{ см})^2 \text{ г}$, эффективное образование которых возможно лишь в случае, когда характерная плотность вещества превосходит плотность $\rho \sim h / l_f^3 c$, связанную с фундаментальной длиной, в процессе эволюции Вселенной не возникают [145].

где γ в ограниченном интервале плотностей является отрицательной постоянной, характеризующей «жесткость» вещества. Скорость звука для этого уравнения состояния дается выражением

$$v = \gamma^{1/2} c, \quad (35)$$

и если ограничиться «причинным» уравнением состояния, то $\gamma \leq 1$.

В настоящее время во Вселенной, по всей видимости, отсутствуют процессы, приводящие к появлению вещества в столь плотном состоянии. Однако известный факт разбегания галактик указывает на то, что в отдаленном прошлом средняя плотность вещества во Вселенной была гораздо выше современной. Известные в настоящее время данные наблюдений (высокая степень — до 0,01% — изотропности реликтового излучения, изотропность распределения галактик и радиосточников, довольно высокая степень однородности распределения галактик и их систем в масштабах $R > 100$ мпс) позволяют заключить, что в среднем распределение вещества во Вселенной является довольно однородным и изотропным. С другой стороны, существование галактик и их систем указывает на то, что в меньших масштабах имеются отклонения от равномерного распределения. Существование реликтового излучения с температурой $T=2,7$ К свидетельствует в пользу того, что в более ранние времена вещество во Вселенной было сильно нагрето. Все эти факты находятся в соответствии с принятой в настоящее время стандартной моделью «горячей» Вселенной. Согласно этой модели, на ранних этапах Вселенная представляла собой в среднем однородное и изотропное распределение горячей материи, расширение которой началось примерно 10—20 млрд. лет тому назад. Формально (если не задумываясь верить в неограниченную применимость теории Эйнштейна) это расширение началось из состояния вещества с бесконечной плотностью. Однако, по крайней мере при плотности, большей чем $\rho_q \sim c^5/\hbar G^2 \sim 10^{93}$ г·см⁻³, классическая теория гравитации неприменима из-за большой величины квантово-гравитационных флуктуаций (см., например, [42, 146]). Вероятно также, что обычные представления о структуре и свойствах пространства-времени при значениях кривизны $R \sim c^3/\hbar G \sim 10^{66}$ см⁻², соответствующих этой плотности, требуют существенного изменения.

Поэтому фактически эволюция Вселенной, описываемая обычными классическими уравнениями Эйнштейна, началась с некоторого эффективного момента времени t_0 , в который вещество имело большое, но конечное значение плотности ρ_0 . Обычно полагают $t_0 \sim 10^{-43}$ сек, $\rho_0 \sim 10^{93}$ г/см³. (Наличие фундаментальной длины l_f может привести к тому, что $t_0 \sim l_f/c$, $\rho_0 \sim \hbar/cl_f^3$ [145].)

Распределение плотности энергии в этот момент времени t_0 предполагается в среднем однородным и изотропным; флуктуации плотности в масштабах, больших $l_0 = ct_0$, малы. Геометрия однородного и изотропного пространства имеет вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + f_k^2(\chi) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)],$$

где $k = -1$, $f_{-1} = \sin \chi$ — для замкнутого мира, $k = +1$, $f_1 = \text{sh } \chi$ — для открытого мира и $k = 0$, $f_0 = \chi^2$ — для открытого трехмерно-плоского мира. Уравнения Эйнштейна в этом случае сводятся к одному соотношению

$$\left(\frac{da}{cdt}\right)^2 = k + \frac{8\pi G}{3c^2} \rho a^2. \quad (36)$$

Если выделить в однородном мире небольшой шар радиуса $R = a\chi_0$, то масса вещества этого шара есть $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$. Уравнение (36), переписанное в виде

$$\frac{\dot{R}^2}{2} - \frac{GM}{R} = \mathcal{K} = \frac{kc^2\chi_0^2}{2}, \quad (37)$$

имеет простой физический смысл. Действительно, в левой части этого соотношения стоит полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия, отнесенная к единице массы вещества в шаре, и равенство ее постоянной величине \mathcal{K} означает сохранение полной энергии в процессе движения.

Чтобы применить уравнение (37) для описания эволюции Вселенной, необходимо, используя данные наблюдений, определить две величины, характеризующие значение полной энергии \mathcal{K} и интервала времени t от начала расширения до настоящего момента. Вместо этих начальных данных обычно используются связанные с ними величины $H = \dot{a}/a$ (постоянная Хаббла) и ρ_1 (средняя плотность вещества во Вселенной в настоящее время). Значение постоянной Хаббла известно в настоящее время с точностью до 25%; она составляет 50–75 км/сек·млн. Средняя плотность вещества известна с гораздо меньшей точ-

ностью. Основная неопределенность состоит в том, что, кроме вещества, входящего в состав галактик (плотность которого после усреднения по всему пространству $\rho_m \sim \sim 3 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3$), и реликтового фотонного излучения ($\rho_r \sim 10^{-34} \text{ г/см}^3$) существенный вклад в среднюю плотность может дать вещество (например, заключенное в черных дырах или в слабо светящихся звездах), непосредственно нами не наблюдаемое. Согласно современным представлениям, $\rho_1 \sim 3 \cdot 10^{-31} - 10^{-29} \text{ г/см}^3$.

Пренебрегая процессами диссипации, для процесса с постоянной энтропией можно записать первый закон термодинамики в виде $dE = -pdV$, или, учитывая, что $E = \rho c^2 V$ и $V \sim a^3$, имеем

$$\frac{c^2 d\rho}{\rho + c^2 \rho} = -\frac{dV}{V} = -3 \frac{da}{a}.$$

Это равенство позволяет получить следующую зависимость плотности ρ от величины масштабного множителя a в случае, когда уравнение состояния имеет вид (34):

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\gamma)}. \quad (38)$$

Полученное соотношение позволяет заключить, что для любого разумного уравнения состояния (при $\gamma \geq 0$) при малых временах t величиной k в правой части (36) можно пренебречь и, следовательно, характер динамики при малых временах во всех трех случаях полностью одинаковый. В дальнейшем для простоты будем считать, что $k=0$. Интегрирование уравнения (36) в этом случае дает

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+\gamma)}}, \quad (39)$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{t_0}{t} \right)^2 = \frac{1}{6\pi G (\gamma + 1)^2} \frac{1}{t^2} \sim \frac{8 \cdot 10^5}{(\gamma + 1)^2} \frac{1}{(t \text{ ссек})^2} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \quad (40)$$

где $t_0 = (6\pi G \rho_0 (\gamma + 1)^2)^{-1/2}$.

Чтобы найти зависимость температуры от времени при адиабатическом расширении, в случае когда число сортов частиц x остается неизменным, можно использовать соотношение $\rho c^2 \sim xkTn$. Так как $n \sim a^{-3}$, то на основании формул (39) и (40) имеем

$$T \sim t^{-\frac{2\gamma}{(1+\gamma)}} \sim a^{-3\gamma}. \quad (41)$$

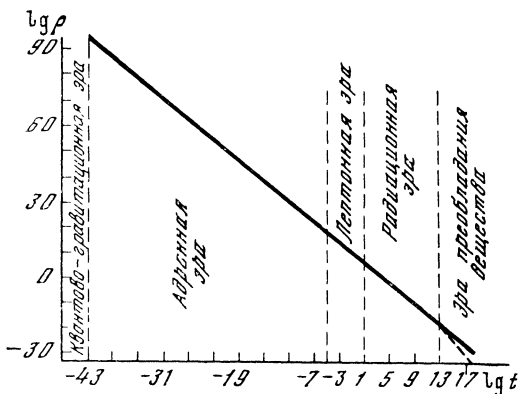


Рис. 11. Диаграмма зависимости плотности вещества во Вселенной ρ ($г/см^3$) от момента времени t (сек) с начала расширения

Таким образом, если число сортов различных частиц не возрастает неограниченно при увеличении температуры, то температура монотонно возрастает при переходе ко все более ранним этапам развития Вселенной.

Эволюция в стандартной модели горячей Вселенной естественным образом разбивается на несколько этапов (рис. 11).

Как уже указывалось выше, эволюция Вселенной в течение начального времени 10^{-43} сек является предметом описания квантовой теории гравитации и в настоящее время относящиеся к этой *квантово-гравитационной эре* утверждения имеют явно гипотетический характер. В самом начале следующей, *адронной эры*, длящейся от 10^{-43} до 10^{-4} сек, важную роль могут играть процессы квантового рождения частиц в быстро изменяющемся гравитационном поле [147—164]. Подобные процессы могут, в частности, привести к изотропизации первоначально анизотропной Вселенной [157—158]. Плотность вещества в течение адронной эры уменьшается до ядерной плотности, а температура $T > 10^{13}$ К. Так как на протяжении почти всей адронной эры $kT \gg m_n c^2$, где m_n — масса нуклона, то вещество в адронную эру содержит наряду с лептонами, фотонами и гравитонами также барион-антибарионные пары и представляет собой ультрарелятивистский газ сильно взаимодействующих частиц. Отсутствие данных

о сильных взаимодействиях и свойствах элементарных частиц при сверхвысоких энергиях делает затруднительным описание свойств вещества в адронную эру. При временах $t \sim 10^{-6} - 10^{-4}$ сек температура падает до $T \sim 10^{13} - 10^{12}$ К и происходит аннигиляция адрон-антиадронных пар.

Позднее (10^{-4} сек $\leq t \leq 10$ сек, лептонная эра) вследствие понижения температуры последовательно аннигилируют сначала $\mu^+ \mu^-$ -пары, а затем и $e^+ e^-$ -пары. Это приводит к тому, что сначала для мюонного, а затем для электронного нейтрино вещество во Вселенной становится практически прозрачным («отрыв» нейтринного реликтового излучения). В начале следующей, радиационной эры (10 сек $\leq t \leq 10^{12}$ сек), при временах $t \sim 180$ сек нейтроны и протоны образуют ионизованный газ, состоящий в основном из водорода (70—75% по массе) и гелия (25—30% по массе). После этого, в течение радиационной эры вещество в основном состоит из находящихся в термодинамическом равновесии водородно-гелиевой плазмы и фотонного газа и свободного газа реликтовых нейтрино и гравитонов. Плотность излучения превышает плотность вещества. Однако различие законов изменения плотности при расширении ($\rho \sim a^{-4}$ для излучения и $\rho \sim a^{-3}$ для вещества) приводит к тому, что в конце радиационной эры плотности излучения и вещества сравниваются и после этого плотность вещества превосходит плотность излучения. В конце радиационной эры температура понижается до 4000 К, происходит рекомбинация водорода, резко возрастает прозрачность водородного газа для фотонов и происходит «отрыв» реликтового фотонного излучения. В это же время из-за резкого смягчения уравнения состояния, вызванного рекомбинацией, становится возможным развитие гравитационных неустойчивостей, приводящих к образованию галактик и звезд²⁴.

Процессы образования *малых* (с массой меньше солнечной) *черных дыр* (если они вообще происходят) должны иметь место в адронную эру. Подобные черные дыры могут возникать [196, 169] при развитии неоднородностей, которые были в начальный момент времени t_0 на фоне

²⁴ Более подробное изложение вопросов, касающихся основных этапов развития Вселенной, можно найти в книгах Зельдовича и Новикова [165], Вайнберга [166], Пиблса [167], а также в сборнике [203].

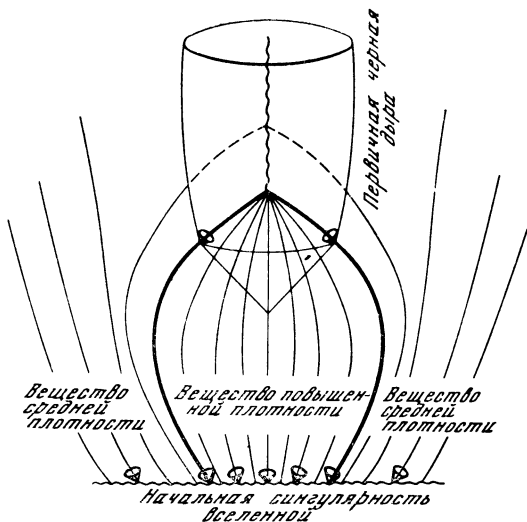


Рис. 12. Схема образования первичной черной дыры

в среднем однородного и изотропного распределения вещества²⁵. Число и спектр масс подобных *первичных (реликтовых) черных дыр* определяется, как будет показано ниже, главным образом степенью жесткости уравнения состояния в момент их образования и первоначальным спектром возмущений плотности вещества. Если полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия возмущения отрицательна, то существует момент времени, когда вещество в этой области после расширения может начать сжиматься (рис. 12). Для образования черной дыры из возмущения необходимо, чтобы в этот момент силы гравитационного притяжения превышали силы отталкивания давления и в результате начавшегося коллапса вещество сжалось до размера своего гравитационного радиуса. Если однородное распределение покоящегося вещества плотности ρ сосредоточено в области размером R , то, ис-

²⁵ Для простоты мы ограничимся рассмотрением возмущений плотности (адиабатических возмущений), не обсуждая другие возможные типы возмущений: энтропийные и вихревые. По этому поводу см., в частности [165, 168, 203]. Численный расчет динамики образования первичных черных дыр из адиабатических возмущений приведен в работе [208].

пользуя условие равновесия (20), можно заключить, что это распределение оказывается гравитационно неустойчивым и будет сжиматься, если размер R превосходит величину

$$R_J = \sqrt{\frac{p}{G\rho^2}} \sim \frac{v}{\sqrt{G\rho}},$$

называемую *джинсовским радиусом*. (Последнее равенство написано с учетом того, что $p/\rho \sim v^2$, где v — скорость звука.) Можно показать, что R_J примерно совпадает с расстоянием, пробегаемым звуком с момента начала расширения Вселенной. Если размер R области возмущения в момент максимального расширения превосходит R_J , то звуковая волна, бегущая от границы возмущения, за время расширения не успевает достичь центра этой области. Поэтому при рассмотрении движения внутренней области возмущения можно пренебречь влиянием градиента давления на границе и рассматривать эту область как часть расширяющейся однородной и изотропной Вселенной.

При анализе возможности образования первичной черной дыры [169—171] предположим, что в некоторый «начальный» момент времени t_0 на фоне однородного расширяющегося вещества средней плотности ρ_0 имеется участок повышенной плотности $\rho_0 + \delta\rho_0$ размером R_0 . Считая, что скорость расширения вещества \dot{R}_0 в этой области в «начальный» момент t_0 совпадает со средней скоростью расширения вещества во Вселенной, получаем для полной энергии единицы массы \mathcal{K} в области возмущения следующее выражение:

$$\mathcal{K} = \frac{\dot{R}_0^2}{2} - \frac{G(M_0 + \delta M_0)}{R_0} = -\frac{G\delta M_0}{R_0} = -\frac{GM_0}{R_0} \delta_0,$$

где $\delta_0 = \delta\rho_0/\rho_0$. Используя соотношения (36) и (38), можно получить оценку для времени t_m остановки расширения возмущения и размера R_m области возмущения в этот момент:

$$t_m \sim t_0 \delta_0^{-\frac{3(1+\gamma)}{2(1+3\gamma)}}, \quad R_m \sim R_0 \delta_0^{-\frac{1}{(1+3\gamma)}}. \quad (42)$$

Если учесть, что джинсовский радиус $R_J(t_m)$ в момент остановки расширения возмущения имеет порядок

$$R_J(t_m) \sim \sqrt{\gamma} ct_m, \quad (43)$$

то для того, чтобы вещество после расширения начало сжиматься и привело к образованию черной дыры, должно быть выполнено условие

$$R_m > R_J(t_m). \quad (44)$$

Сравнивая формулы (42)—(44), имеем

$$\delta_0 > \left(\frac{t_0 c}{R_0}\right)^2 \gamma, \quad (45)$$

т. е. флуктуация плотности, приводящая к образованию черной дыры, не может быть слишком малой. С другой стороны, оказывается, что существование чрезмерно больших флуктуаций невозможно, так как подобные флуктуации образовали бы замкнутые миры и не участвовали бы в процессах, протекающих во Вселенной. Это ограничение приводит к тому, что вместо неравенства (45) должно выполняться следующее неравенство ²⁶ [169—171]:

$$\left(\frac{t_0 c}{R_0}\right)^2 > \delta_0 > \left(\frac{t_0 c}{R_0}\right)^2 \gamma. \quad (46)$$

Полученное неравенство позволяет заключить, что если в момент образования первичной черной дыры уравнение состояния крайне жесткое ($\gamma \simeq 1$), то образование подобных черных дыр (если вообще оно возможно) крайне затруднено, так как только для возмущений очень специального вида условие (46) может выполняться. Для мягкого уравнения состояния ($\gamma \ll 1$) условие (46) выполняется для достаточно широкого интервала значений, и образование черных дыр в этом случае может идти довольно интенсивно.

Для оценки числа первичных черных дыр, рождающихся из случайных неоднородностей, необходимо знать спектр этих неоднородностей, т. е. знать, как часто встречаются в момент времени t_0 области размером R_0 с отклонением плотности от средней $\delta\rho_0/\rho_0 = \delta_0(R_0)$. По сути дела речь идет о выборе начальных данных для распределения вещества во Вселенной в некоторый исходный момент времени t_0 . Если считать флуктуации в области R_0 слу-

²⁶ Так как все оценки проводились лишь с точностью до порядка величины, то более точное неравенство будет $A \left(\frac{t_0 c}{R_0}\right)^2 > \delta_0 > B \left(\frac{t_0 c}{R_0}\right)^2$, где величины A и B порядка единиц.

чайными, тогда вероятность найти отклонение плотности $\delta = \delta\rho/\rho_0$ в интервале $(\delta, \delta + d\delta)$ есть

$$P(\delta, R_0) d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\delta_0(R_0)} \exp(-\delta^2/2\delta_0^2(R_0)) \quad (47)$$

и для задания спектра флуктуаций надо выбрать определенную зависимость $\delta_0 = \delta_0(R_0)$. Обычно выбирают

$$\delta_0(R_0) = \varepsilon \left(\frac{R_0}{R_{\text{Пл}}} \right)^{-\nu}, \quad (48)$$

где $R_{\text{Пл}} = (\hbar G/c^3)^{1/2}$ — планковская длина, а параметры ε и ν характеризуют малость флуктуаций и их зависимость от размера. Гаррисон [172] привел соображения в пользу того, что если рассматриваемые неоднородности возникли вследствие квантовых флуктуаций гравитационного поля, то естественно выбрать $\nu = 2$, а произвольную постоянную ε — между нулем и единицей. Зельдович [173] отметил, что в теории образования галактик и скоплений галактик для объяснения современных наблюдаемых характеристик галактик требуется наличие подобных флуктуаций на существенно больших масштабах R_0 при $\varepsilon \sim 10^{-3} - 10^{-4}$.

В работе Карра [170] содержится детальный анализ спектра масс первичных черных дыр при различных предположениях об уравнении состояния вещества в момент образования и о спектре начальных флуктуаций. В случае, когда возмущения плотности имеют вид (47) — (48), общее число первичных черных дыр с массой, лежащей в интервале $(M, M + dM)$, образовавшихся к моменту времени t , описывается формулой

$$n(M, t) dM = 10^{103} \varepsilon^{-1} \cdot \text{см}^{-3} \left(\frac{a(t)}{a(t_0)} \right)^3 \left(\frac{M}{M_{\text{Пл}}} \right)^{-\frac{2(1+2\gamma)}{(1+\gamma)}} \times \\ \times \varepsilon \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\varepsilon^2}\right), \quad (49)$$

где $t_0 = 10^{-43}$ сек и $M_{\text{Пл}} = 10^{-5}$ г — планковская масса. Наличие в выражении (49) множителя $\varepsilon \exp(-\gamma^2/2\varepsilon^2)$ показывает, что первичных черных дыр образуется тем меньше, чем жестче уравнение состояния и чем меньше величина флуктуаций плотности вещества ε . В заключение раздела напомним еще раз, что все содержащиеся в нем выводы об образовании черных дыр произвольной массы могут существенно измениться, если окажется, что в природе существует фундаментальная длина $l_f > l_g \simeq 10^{-33}$ см.

Квантовое испарение черных дыр. Космологические следствия

Дальнейшая судьба образовавшихся первичных черных дыр существенно зависит от их массы. Это связано с тем, что, как показал Хокинг [174, 175], сильное гравитационное поле вокруг черной дыры приводит к спонтанному рождению пар около горизонта ²⁷. Одна из рожденных частиц, обладая положительной энергией, вылетает наружу, другая, энергия которой отрицательна, оказывается внутри черной дыры. Результаты Хокинга, подтвержденные и развитые в целом ряде работ [176—190, 209], показали, что вследствие этого процесса черная дыра излучает все возможные виды частиц точно так же ²⁸, как если бы она была черным телом с размером r_g , нагретым до температуры

$$\theta = \frac{\hbar c^3}{8\pi Gk} M^{-1} \sim 1,2 \cdot 10^{26} \text{ K } (M \text{ } \varepsilon)^{-1}. \quad (50)$$

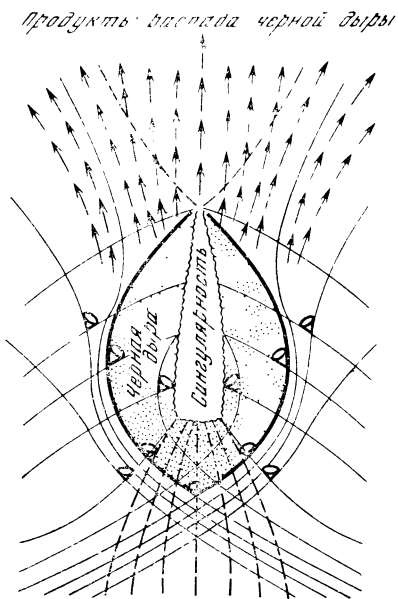
²⁷ Более подробно об эффекте Хокинга и квантовых процессах в черных дырах можно прочитать в обзоре [91]. (См. также [92]).

Возможны в принципе две существенно отличные точки зрения на то, где рождаются частицы, приводящие к излучению Хокинга. Согласно одной из них, процесс рождения частиц происходит вблизи поверхности коллапсирующего тела [218—220]. В этом случае при образовании горизонта событий плотность энергии-импульса в свободно падающей системе отсчета вблизи его должна неограниченно возрастать. Это приводило бы к тому, что при описании реального коллапса невозможно было бы пренебрегать влиянием на метрику рожденного в процессе коллапса вещества, и горизонт событий при учете обратного влияния не возникал. Согласно другой точке зрения (которой придерживался, в частности, сам Хокинг), рождение частиц происходит не у поверхности коллапсирующего тела, а равномерно вдоль поверхности горизонта событий. Аргументы в пользу этой точки зрения можно найти, например, в работах [175, 190, 221]. Проведенные в последнее время детальные вычисления тензора энергии-импульса рождающихся в процессе Хокинга частиц показали, что соответствующий тензор энергии-импульса конечен на горизонте (см., например, [222]). Поэтому в настоящее время, по-видимому, можно считать доказанным, что правильной является вторая точка зрения.

²⁸ Более точно, спектр излучения черной дыры несколько отличается от теплового из-за рассеяния этого излучения на гравитационном поле черной дыры. С той же оговоркой излучение от вращающейся черной дыры совпадает с излучением от нагретого вращающегося тела.

Рис. 13. Диаграмма пространства-времени «испаряющейся» черной дыры

Стрелками обозначены мировые линии продуктов распада черной дыры. Толстая сплошная линия изображает границу черной дыры, волнистая линия соответствует сингулярности $r=0$. Тонкие сплошные линии изображают распространение товых лучей



В полном соответствии с законом сохранения энергии излучение черной дыры с интенсивностью

$$\frac{dE}{dt} = 10^{46} f(M) (M \text{ г})^{-2} \frac{\text{эрг}}{\text{сек}}, \quad (51)$$

где величина $f(M)$ характеризует число различных сортов частиц, рождаемых черной дырой, сопровождается соответствующим уменьшением ее массы вследствие потока через горизонт частиц с отрицательной энергией. Гравитационный радиус черной дыры r_g при этом уменьшается. Если масса M черной дыры много больше планковской массы, то скорость уменьшения гравитационного радиуса гораздо меньше скорости света и в этом случае, как показано в работе [185], излучение черной дыры остается тепловым с эффективной температурой, медленно возрастающей со временем $\theta = \theta(M(t))$. Структура пространства-времени при квантовом испарении черной дыры приведена на рис. 13, взятом из работы [191].

Черные дыры с массой больше $M = 10^{17}$ г излучают только безмассовые частицы: фотоны (γ), нейтрино (ν) и гравитоны (g). При уменьшении массы черной дыры до

10^{15} г ее эффективная температура возрастает до величины $\theta \sim 10^{11}$ К, и подобные черные дыры, помимо безмассовых частиц, излучают также μ -мезоны и электроны. При дальнейшем уменьшении массы ($M < 10^{14}$ г) становится возможным рождение барионов²⁹.

Детальное описание процесса распада черных дыр с массой $M < 10^{13}$ г представляется затруднительным из-за того, что нам неизвестен спектр масс элементарных частиц и их свойства при соответствующих энергиях $E = c^3 \hbar / GM > 10$ Гэв. Дополнительной трудностью является то, что при рождении большого количества сильно взаимодействующих частиц необходимо учитывать взаимодействие конечных продуктов распада черной дыры. Следствием этого взаимодействия может быть образование в результате распада черной дыры горячей капли (файербола) сильно взаимодействующих частиц, последующий распад которой определяется соответствующими гидродинамическими законами [191, 192].

Общее время жизни черной дыры $\tau(M)$ можно оценить следующим образом:

$$\tau(M) \sim 10^{-26} f^{-1}(M) (Mc^2)^3 \text{ сек.} \quad (52)$$

(Для черных дыр с массой $M > 10^{17}$ г функция $f(M) = 1$, для $M \sim 10^{14}$ г функция $f(M) \sim 10$.) Первичные черные дыры, масса которых меньше $M = 5 \cdot 10^{14}$ г, к настоящему времени полностью распались, в то время как черные дыры с большей массой потеряли в результате квантового испарения лишь незначительную долю своей массы. Для больших черных дыр (с массой $M \geq M_{\odot}$) явление квантового «испарения» пренебрежимо мало (эффективная температура $\theta \leq 10^{-7}$ К) и практически совершенно не существует³⁰. В таблице приведены сведения о характе-

²⁹ Нетрудно убедиться, что характерная длина волны излучения имеет порядок гравитационного радиуса r_g черной дыры. Массивные частицы рождаются в гравитационном поле черной дыры в том случае, если комптоновская длина волны, соответствующая их массе, превосходит значение r_g .

³⁰ Любопытно отметить, что если реликтовая черная дыра с массой порядка $M \sim 10^{28}$ г по каким-либо причинам попала бы внутрь Солнца, то эддингтоновская аккреция вещества на нее могла бы привести к энерговыделению, сравнимому с полной энергией излучения Солнца. Подобная модель была рассмотрена в работе [207] в связи с известной трудностью с солнечными нейтрино.

Масса M первичной черной дыры, g	Плотность ρ в момент образо- вания, g/cm^3	Момент вре- мени обра- зования первичной черной дыры, $сек$	Время жизни первичной черной дыры, $сек$	Основные про- дукты распада	Доля полной массы черной дыры (в %), уносимая при распаде				
					гравито- нами (g)	фотонами (γ)	нейтрино (ν)	электро- нами (e)	нукло- нами (N)
10^{-5}	10^{93}	10^{-43}	10^{-43}	$g, \bar{\nu}, \nu, e, \mu, \pi$ K, η, N	< 1	11	40	25	12
10^9	10^{65}	10^{-29}	10^{-1}	$g, \gamma, \nu, e, \mu, \pi$	< 1	10	55	35	—
10^{12}	10^{59}	10^{-26}	10^8	g, γ, ν, e, μ	1	7	51	41	—
$10^{13,5}$	10^{56}	$10^{-24,5}$	10^{12}	g, γ, ν, e	1	9	45	45	—
10^{14}	10^{55}	10^{-24}	10^{14}	g, γ, ν	2	17	81	—	—
$10^{14,5}$	10^{54}	$10^{-23,5}$	$5 \cdot 10^{16}$	Практи- чески не излучает	—	—	—	—	—
10^{15}	10^{53}	10^{-23}	10^{18}						
10^{17}	10^{49}	10^{-21}	10^{24}						
10^{33}	10^{17}	10^{-5}							

ристиках первичных черных дыр различной массы. Для черных дыр малой массы ($M \leq 10^{13}$ г) время жизни и основные продукты ее распада существенно зависят от предположений о спектре масс элементарных частиц и модели сильного взаимодействия при сверхвысоких энергиях, поэтому для времени жизни этих черных дыр в таблице приведены ограничения сверху, а графы, касающиеся продуктов распада, не заполнены. Сведения о черных дырах с массой $M \geq 10^{13,5}$ г взяты из работ [192–194].

Переходя к анализу возможных космологических следствий гипотезы существования первичных черных дыр, отметим, что наиболее важным и интересным следствием этой гипотезы является принципиальная возможность получения информации об очень ранних этапах эволюции Вселенной. Первичные черные дыры с массой от 10^{15} до 10^{33} г, которые до настоящего времени остались практически неизменными³¹, являются «живыми свидетелями» процессов, происходивших во времена 10^{-23} – 10^{-5} сек после «большого взрыва». Хотя первичные черные дыры с меньшей массой, образовавшиеся еще ранее, уже распались к настоящему времени, однако в принципе имеется возможность установить наличие или отсутствие продуктов их распада и найти тем самым ограничения на возможное число и спектр масс подобных черных дыр. Так как эти характеристики тесным образом связаны со спектром флуктуаций и уравнением состояния на ранних этапах, то появляется привлекательная возможность получения весьма ценной информации о состоянии вещества при сверхвысоких температурах и давлениях и о строении Вселенной в крайне отдаленном прошлом³².

³¹ В работе Карра и Хокинга [169] было показано, что аккреция на первичные черные дыры не может, по-видимому, увеличить их массу более чем на порядок. Об особенности аккреции на первичные черные дыры при «жестком» уравнении состояния $p = \rho c^2$ см. [195]. Согласно теореме Хокинга, в классических взаимодействиях эти дыры не могут распасться и поэтому, так как квантовые процессы для них не существенны, их масса и размеры остаются близкими с соответствующими значениями в момент образования. Верхняя граница ($M = 10^{33}$ г) указанного диапазона масс выбрана из тех соображений, что, по-видимому, черные дыры с массой меньше солнечной могут возникать только как первичные черные дыры.

³² Заметим, что данные о реликтовом фотонном излучении позволяют судить о свойствах Вселенной в момент отрыва излучения от вещества ($t \sim 10^{12}$ сек). О более ранних этапах ($t \sim 1$ сек) косвен-

При получении ограничений на численность первичных черных дыр в разных диапазонах масс привлекают различные соображения. Наиболее сильные ограничения на степень неоднородностей вещества, приведших к образованию черных дыр с массой $10^{17} - 10^{33}$ г, получаются, если использовать следующее простое рассуждение [196]. Из современных наблюдательных данных вытекает, что средняя плотность реликтового излучения в настоящее время t_1 имеет порядок $\rho_r(t_1) \sim 10^{-34}$ г/см³. С другой стороны, общая плотность вещества в настоящее время t_1 не превосходит величину $\rho_1 \sim 10^{-29}$ г·см⁻³, поэтому, если обозначить максимально допустимую среднюю плотность массы, заключенную в черных дырах, через $\rho_{\text{вн}}$, то имеем

$$\rho_{\text{вн}}(t_1)/\rho_r(t_1) = \beta 10^5, \quad \beta \leq 1. \quad (53)$$

Различие законов изменения плотности излучения со временем ($\rho_r(t) \sim a^{-4}(t)$) и плотности черных дыр ($\rho_{\text{вн}}(t) \sim a^{-3}(t)$) приводит к тому, что отношение

$$\rho_{\text{вн}}(t)/\rho_r(t) = \beta 10^5 a(t)/a(t_1) \quad (54)$$

в более ранние моменты времени t было меньше. В интервале времени (t_2, t_1) , где t_2 определяется условием $\rho_{\text{вн}}(t_2) = \rho_r(t_2)$ (или, что то же, $a(t_2) = \beta^{-1} 10^{-5} a(t_1)$), плотность вещества превосходит плотность излучения и $a(t) \sim t^{1/3}$. Поэтому имеем для времени t_2 оценку $t_2 = t_1 \beta^{-3/2} 10^{-7.5} \sim 2 \cdot 10^{10} \beta^{-3/2}$ сек. При меньших временах плотность излучения доминирует; считая (для простоты), что уравнение состояния $p = \rho c^2/3$ справедливо вплоть до момента образования черной дыры, получаем, что в этом интервале времени $a \sim t^{1/2}$. Первичные черные дыры, как было указано выше, преимущественно образуются в момент времени $t_3 \sim (G/c^3) M \sim 10^{-38}$ сек ($M \text{ г}$) и для отношения $a(t_3)/a(t_2)$ можно получить оценку

$$\frac{a(t_3)}{a(t_2)} = \left(\frac{t_3}{t_2} \right)^{1/2} \sim 10^{-24} \beta^{3/4} (M \text{ г})^{1/2}.$$

Если учесть, что в момент образования первичной черной дыры общая плотность $\rho_{\text{tot}} = \rho_r$, то приведенные выше оценки позволяют заключить, что в момент образования

ную информацию дает соотношение между количествами синтезированного гелия и водорода.

черных дыр с массой M средняя плотность вещества, заключенного в эти дыры, не превосходит величины

$$\rho_{\text{вн}}(t_3) = \rho_{\text{tot}}(t_3) \cdot 10^{-24} (Mg)^{1/2} \beta^{3/4}, \quad (55)$$

т. е. при образовании черных дыр с массой $M=10^{15}-10^{33}$ г в них может попасть лишь крайне малая часть вещества во Вселенной. Если воспользоваться формулой (49), то можно заключить [17С, 196], что

$$\varepsilon \exp(-\gamma^2/2\varepsilon^2) < 10^{-21}, \quad \varepsilon < 1/30, \quad (56)$$

т. е. неоднородности в масштабах масс, приводящих к образованию черных дыр в интервале $M=10^{15}-10^{33}$ г, малы.

Черные дыры с массой меньшей $M=5 \cdot 10^{14}$ г к настоящему времени полностью распались. Как видно из таблицы, первичные черные дыры с массой, лежащей в диапазоне от $3 \cdot 10^{13}$ г до $5 \cdot 10^{14}$ г, окончили свое существование уже после рекомбинации водорода, поэтому фотоны, образующиеся при их распаде, слабо взаимодействуют с нейтральным веществом.

Для оценок можно считать, что при распаде черной дыры с массой M в указанном диапазоне образуется примерно $10^{11} \varepsilon_{\gamma} M^2$ фотонов с энергией $E(M) \sim 4 \cdot 10^{22} \text{ эв} (Mg)^{-1}$. Момент распада этой черной дыры $\tau(M)$ связан с массой черной дыры соотношением $\tau(M) \sim M^3$. Поэтому, так как фотоны, родившиеся в момент распада черной дыры, испытывают красное смещение, определяемое после рекомбинации фактором $a(t) \sim t^{2/3}$, можно найти, что средняя энергия $E'(M)$ этих квангов в настоящее время t_1 есть

$$E'(M) = E(M) \frac{a(\tau(M))}{a(t_1)} = E(M) \left(\frac{\tau(M)}{t_1} \right)^{2/3}.$$

Это приводит к тому, что основная часть плотности энергии γ излучения в диапазоне $E \geq 100-120 \text{ Мэв}$ возникает из-за распадов черных дыр с массой $M^* \sim 5 \cdot 10^{14}$ г, происходящих в настоящее время. Если предположить, что вся наблюдаемая плотность фонового γ -излучения в этом диапазоне, имеющая значение 10^{-38} г/см^3 , является продуктом распада реликтовых черных дыр, то средняя плотность массы, заключенной в этих черных дырах, не может быть больше ³³ $\rho_{\text{вн}}^* = \varepsilon_{\gamma}^{-1} 10^{-38} \text{ г/см}^3 \sim 10^{-37} \text{ г/см}^3$. Это по-

³³ Примерно десятая доля полной массы черных дыр в рассматриваемом диапазоне уносится при их распаде фотонами (см. табл.), т. е. $\varepsilon_{\gamma} \sim 0,1$.

звояет получить для средней плотности числа черных дыр с массой $M \sim 10^{13} - 5 \cdot 10^{14}$ г следующую верхнюю оценку:

$$n < n^* \sim \rho_{\text{вн}}^* / M^* \sim 3 \cdot 10^{-52} \text{ см}^{-3} \sim 10^4 \text{ пс}^{-3}. \quad (57)$$

Таким образом, если черные дыры с массой $M \sim 10^{13} - 5 \cdot 10^{14}$ г были распределены равномерно во Вселенной, то в среднем на 10^{-4} кубических парсека сопутствующего объема приходится не более одной такой дыры [192, 197]. Если же черные дыры концентрируются главным образом в галактиках, то максимально допустимая плотность подобных черных дыр должны быть не выше $n_1 \sim 10^6 n^*$. Множитель 10^6 возникает из-за того, что среднее расстояние между галактиками превосходит характерный размер галактики примерно в 100 раз. При этом в объеме пространства радиусом, в полтора раза превышающим радиус орбиты Плутона, в среднем находится не более одной черной дыры³⁴.

Представляется также возможным получить ограничения на спектр масс первичных черных дыр с меньшей массой: $M < 10^{12}$ г. Если бы подобных дыр было много, то их распад привел бы к слишком большому значению энтропии вещества во Вселенной (Чаплайн [198, 199] Зельдович, Старобинский [200]). С другой стороны, образование при распаде подобных черных дыр нейтрино в принципе может повлиять на реакции синтеза гелия (Вайнер, Насельский [201]). Это приводит к следующему ограничению: $\rho_{\text{вн}} / \rho_{\text{бар}} \leq 10 - 10^4$ для черных дыр с массой $M \sim 10^{10} - 10^{11}$ г ($\rho_{\text{бар}}$ — плотность барионов). Еще большие ограничения на число первичных черных дыр в диапазоне масс $10^{10} - 10^{11}$ г дает эффект разбивания

³⁴ М. Рис [210] обратил внимание на то, что при взрыве малой черной дыры движение нагретой высокопроводящей плазмы в магнитном поле может привести к преобразованию некоторой доли энергии взрыва в энергию излучения радиоволн. Из-за того, что при данной энергии число радиоквантов гораздо выше, чем число γ -квантов, а также из-за того, что площадь радиодетектора существенно больше площади существующих γ -детекторов, эффективность регистрации взрывов малых черных дыр в радиодиапазоне может быть существенно (на несколько порядков) выше [210, 212]. Если предложенный Рисом механизм действительно эффективно работает, то в принципе можно было бы даже надеяться зарегистрировать взрыв малой черной дыры, находящейся в ближайшей к нам галактике.

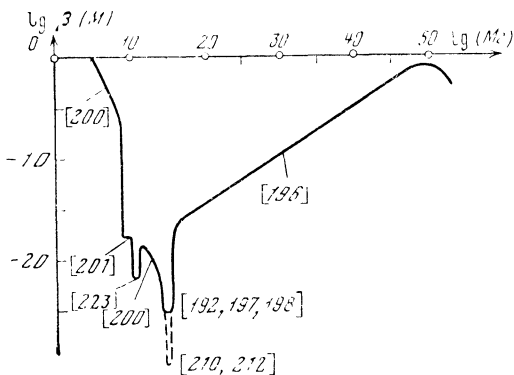


Рис. 14. Ограничение на допустимую долю массы вещества, попадающего в первичные черные дыры с массой M в момент их образования

В квадратных скобках указаны работы, в которых были получены ограничения в соответствующей области масс

ядер He^4 ультрарелятивистскими нуклонами и антинуклонами, испущенными при распаде соответствующих черных дыр, приводящий к образованию дейтерия [223]. Этот дейтерий, образующийся при $t \geq 10^3$ сек, уже не выгорает и из сравнения концентрации дейтерия, возникающего в этом процессе, с наблюдаемой концентрацией дейтерия во Вселенной можно получить существенное ограничение на число черных дыр в этом диапазоне масс. Если обозначить $\rho(M)$ отношение средней плотности вещества, заключенного в черные дыры с массой M , к общей плотности вещества во Вселенной в момент образования этих черных дыр, то описанные выше ограничения на число черных дыр разной массы можно представить в виде следующего графика (рис. 14).

Все полученные оценки указывают на то, что в широком диапазоне масс неоднородности во Вселенной на ранних этапах, по-видимому, были довольно малы.

В заключение нам хотелось бы еще раз подчеркнуть, что в обзоре мы остановились лишь на некоторых отдельных вопросах физики черных дыр. Последние годы показали, что в настоящее время эта область физики развивается чрезвычайно интенсивно. Особенно это касается вопросов, связанных с эффектом Хокинга и гипотезой о существовании первичных черных дыр. Многие проблемы

(такие, например, как сохранение барионного числа и роль сильного взаимодействия при квантовых взрывах черных дыр, возможность существования элементарных черных дыр с массой 10^{-5} г, физические процессы вблизи сингулярностей и другие) еще далеки от решения и привлекают к себе пристальное внимание физиков. Быть может, именно эта «незавершенность», позволяющая надеяться на новые (возможно, неожиданные) результаты, касающиеся фундаментальных свойств пространства-времени и основных физических законов в экстремальных условиях, делают физику черных дыр столь интересной.

Автор выражает глубокую признательность В. Л. Гинзбургу, М. А. Маркову и Л. М. Озерному, ценные замечания которых во многом помогли при написании обзора.

Литература

1. *Laplace P. S.* Allgemeine geographische Ephemeriden, 1799.
2. *Hawking S. W., Ellis G. F. R.* The large scale structure of Space-time. Cambridge, Univ. Press, 1973. Рус. пер.: *Хокинга С., Эллис Дж.* Крупномасштабная структура пространства-времени. М., «Мир», 1977.
3. *Эйнштейн А.* Собр. науч. трудов, т. I. М., «Наука», 1965, с. 452.
4. *Schwarzschild K.* — Berliner Sitzungsberichte, 1916, S. 189.
5. *Flamm L.* — Phys. Z., 1916, 17, 448
6. *Weyl H.* — Ann. Physik, 1917, 54, 117.
7. *Эйнштейн А.* Собр. науч. трудов, т. II. М., «Наука», 1966, с. 424.
8. *Reissner H.* — Ann. Physik, 1916, 50, 106; *Nordström G.* — Proc. Koninkl. nederl. Akad. wet., 1918, 20, 1238.
9. *Eddington A. S.* — Nature, 1924, 113, 192.
10. *Lemaitre G.* — Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 1933, A53, 51.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М., «Наука», 1973.
12. *Synge J. L.* — Proc. Roy. Irish Acad., 1950, A53, 83.
13. *Finkelstein D.* — Phys. Rev., 1958, 110, 965.
14. *Fronsdal C.* — Phys. Rev., 1958, 116, 778.
15. *Kruskal M. D.* — Phys. Rev., 1960, 119, 1743.
16. *Szekeres G.* — Publ. Mat. Debrecen, 1960, 7, 285.
17. *Рылов Ю. А.* — ЖЭТФ, 1965, 40, 1955.
18. *Новиков И. Д.* — Астрон. журн., 1963, 40, 772.
19. *Новиков И. Д.* — Сообщ. ГАИШ, 1964, № 132, 3, 43.
20. *Graves J. C., Brill D. R.* — Phys. Rev., 1960, 120, 1507.
21. *Carter B.* — Phys. Lett., 1966, 21, 423.
22. *Kerr R. P.* — Phys. Rev. Lett., 1963, 11, 237.
23. *Carter B.* — Phys. Rev., 1966, 141, 1242.
24. *Boyer R. H., Lindquist R. W.* — J. Math. Phys., 1967, 8, 265.
25. *Carter B.* — Phys. Rev., 1968, 174, 1559.

26. Walker M. — J. Math. Phys., 1970, 11, 2280.
27. Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A. Gravitation, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1973. Рус. пер.: Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. М., «Мир», 1977.
28. Пенроуз Р. Структура пространства-времени. М., «Мир», 1972.
29. Carter B. — In: Black Holes. C. DeWitt, B. S. DeWitt (Eds). N. Y., Gordon and Breach, 1973, p. 57.
30. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М., «Мир», 1970.
31. Герок Р. — В кн.: Квантовая гравитация и топология. М., «Мир», 1973, с. 27.
32. Geroch R. P. — J. Math. Phys., 1968, 9, 450.
33. Geroch R. P., Kronheimer E. H., Penrose R. — Proc. Roy. Soc., 1972, A327, 545.
34. Schmidt B. G. — GRG, 1971, 1, 269.
35. Ellis G. F. R., Schmidt B. G. — Preprint Max-Planck-Inst. Phys. und Astrophys., München, 1976.
36. Clarke C. J. S. — Comm. Math. Phys., 1973, 32, 205.
37. Clarke C. J. S. — Comm. Math. Phys., 1976, 49, 17.
38. Clarke C. J. S., Schmidt B. G. Preprint MPI-PAE/Astro 79, Max-Planck-Inst. Phys. und Astrophys., München, 1976.
39. Clarke C. J. — GRG, 1975, 6, 35.
40. Bera K., Datta B. K. — GRG, 1975, 6, 129.
41. King A. R. — Phys. Rev., 1975, D11, 763.
42. Wheeler J. A. — Phys. Rev., 1955, 97, 511.
43. Уилер Дж. Гравитации, нейтрино и Вселенная. М., ИЛ, 1962.
44. Brill D. R., Lindquist R. W. — Phys. Rev., 1963, 131, 471.
45. Марков М. А., Фролов В. П. — ТМФ, 1972, 13, 41.
46. Arnowitt R., Deser S., Misner C. W. — Ann. Phys., 1965, 33, 88.
47. Арновитт Р., Дезер С., Мизнер К. В. Эйнштейновский сборник 1967, М., «Наука», 1967, с. 233.
48. Arnowitt R., Deser S., Misner C. W. — Phys. Rev., 1960, 120, 313.
49. Марков М. А. — Препринт Д2-4534. Дубна, ОИЯИ, 1969.
50. Марков М. А., Фролов В. П. — ТМФ, 1970, 3, 1.
51. Марков М. А. — Препринт P2-5289. Дубна, ОИЯИ, 1970.
52. Markov M. A. — Ann. Phys., 1970, 59, 109.
53. Фролов В. П. Канд. дис. М., 1973.
54. Фролов В. П. — ЖЭТФ, 1974, 66, 813.
55. Birkhoff G. D., Langer R. Relativity and modern physics. Cambridge, 1923.
56. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. — УФН, 1964, 84, 377.
57. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Теория тяготения и эволюция звезд. М., «Наука», 1971.
58. Ames W. L., Thorne K. S. — Astrophys. J., 1968, 151, 659.
59. Подурец М. А. — Астрон. журн., 1964, 41, 1091.
60. Oppenheimer J. R., Snyder H. — Phys. Rev., 1939, 56, 455.
61. Новиков И. Д. — Астрон. журн., 1964, 41, 1075.
62. Neeman Y. — Astrophys. J., 1965, 141, 1303.
63. Новиков И. Д., Озерной Л. М. — ДАН СССР, 1963, 150, 1019.
64. Narlikar J. V., Apparao K. M. V. — Astrophys. and Space Sci., 1975, 35, 321.

- 64a. *Eardly D. M.* — Phys. Rev. Lett., 1974, 33, 442. *Eardly D. M.*, *Press W. H.* — Annual Rev. Astron. and Astrophys., 1975, 13, 381.
- 64б. *Зельдович Я. Б.*, *Новиков И. Д.*, *Старобинский А. А.* — ЖЭТФ, 1974, 66, 1897.
65. *Klein O.* — In: Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit. Braunschweig. Vieweg, 1961, S. 58.
66. *Зельдович Я. Б.* — ЖЭТФ, 1962, 42, 1667.
67. *Новиков И. Д.* — Вестн. МГУ, 1962, сер. 3, № 6, 61.
68. *Hawking S. W.* — Comm. Math. Phys., 1972, 25, 152.
69. *Penrose R.* — Phys. Rev. Lett., 1963, 10, 66.
70. *Фролов В. П.* — Труды ФИАН, 1977, 96, 72.
- 70а. *Волович И. В.*, *Загребнов В. А.*, *Фролов В. П.* — Элементарные частицы и атомное ядро, 1978, 9, 147.
71. *Hawking S. W.* — Phys. Rev. Lett., 1971, 26, 1344.
72. *Israel W.* — Phys. Rev., 1967, 164, 1776.
73. *Israel W.* — Comm. Math. Phys., 1968, 8, 245.
74. *Carter B.* — Phys. Rev. Lett., 1971, 26, 331.
75. *Robinson D. C.* — Phys. Rev. Lett., 1975, 34, 905.
76. *Дорошкевич А. Г.*, *Зельдович Я. Б.*, *Новиков И. Д.* — ЖЭТФ, 1965, 49, 170.
77. *Гинзбург В. Л.*, *Озерной Л. М.* — ЖЭТФ, 1964, 47, 1030.
78. *De la Cruz V.*, *Chase J. E.*, *Israel W.* — Phys. Rev. Lett., 1970, 24, 423.
79. *Price R. H.* — Phys. Rev., 1972, D5, 2419.
80. *Price R. H.* — Phys. Rev., 1972, D5, 2439.
81. *Bekenstein J. D.* — Phys. Rev. Lett., 1972, 28, 452.
82. *Bekenstein J. D.* — Phys. Rev., 1972, D5, 1239.
83. *Bekenstein J. D.* — Phys. Rev., 1972, D5, 2403.
84. *Teitelboim C.* — Lett. Nuovo Cimento, 1972, 3, 326, 397.
85. *Hartle J.* — Phys. Rev., 1972, D3, 2938.
86. *Марков М. А.* — УФН, 1973, 111, 3.
87. *Thorne K. S.* — Preprint OAP-236, Calif. Techn. Inst., Pasadena, 1971; Comments Astrophys. and Space Phys., 1970, 2, 191.
- 87а. *Frolov V. P.* — Preprint IC/77/39, Trieste, Italy, 1977; Gen. Rel. and Grav. 1978, 9.
88. *Bekenstein J. D.* — Phys. Rev., 1973, D7, 2333.
89. *Bekenstein J. D.* — Phys. Rev., 1974, D9, 3292.
90. *Bardeen J. B.*, *Carter B.*, *Hawking S. W.* — Comm. Math. Phys., 1973, 31, 161.
91. *Фролов В. П.* — УФН, 1976, 118, 473.
92. *Sciama D. W.* — Vistas in Astronomy, 1976, 19, 385.
93. *Penrose R.* — Phys. Rev. Lett., 1965, 14, 57.
94. *Hawking S. W.*, *Penrose R.* — Proc. Roy. Soc., 1969, A314, 529.
95. *Penrose R.* — Nuovo Cimento, 1969, 1, spec. number, 252.
96. *Landau L. D.* — Phys. Z. Sowjetunion, 1932, 1, 285.
97. *Oppenheimer J. R.*, *Volkoff G. M.* — Phys. Rev., 1939, 55, 374.
98. *Baade W.*, *Zwicky F.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1934, 20, 254.
99. *Oppenheimer J. R.*, *Serber R.* — Phys. Rev., 1938, 54, 540.
100. *Tolman R. C.* — Phys. Rev., 1939, 55, 364.
101. *Rhoades C. E.*, *Ruffini R.* — Phys. Rev. Lett., 1974, 32, 324.
102. *Киржниц Д. А.*, *Поляченко В. Л.* — ЖЭТФ, 1964, 46, 755.

103. *Киржниц Д. А., Сазонов В. Н.* Эйнштейновский сборник 1973. М., «Наука», 1974, с. 84.
104. *Bludman S. A., Ruderman M. A.* — *Phys. Rev.*, 1970, D1, 3243. Рус. пер.: Эйнштейновский сборник 1973, с. 190.
- 104а. *Caporaso G., Brecher K.* — Preprint MIT, СТР-666, USA, 1977.
105. *Dennis J. H., Lee T. H., Cohen J. M.* — *Astrophys. J.*, 1975, 201, 462.
106. Neutron stars, black holes and binary X-ray sources. H. Gursky, R. Ruffini (Eds). Dordrecht, Holland—Boston, Reidel, 1975.
107. *Sabbadini A., Hartle J. B.* — *Astrophys. and Space Sci.*, 1973, 25, 117.
108. *Nauenberg M., Chapline G.* — *Astrophys. J.*, 1973, 179, 277.
109. *Chitre D. M., Hartle J. B.* — *Astrophys. J.*, 1976, 207, 592.
110. *Brecher K., Caporaso G.* — *Nature*, 1976, 259, 377.
111. *Hartle J. B., Sabbadini A. G.* — Preprint Univ. Calif. Santa Barbara, TH-11, 1976.
- 111а. *Joss P. C., Rappaport S. A.* — *Nature*, 1976, 264, 219.
112. Уилер Дж., Гаррисон Б., Вакано М., Торн К. Теория гравитации и гравитационный коллапс. М., «Мир», 1967.
113. *Шварцман В. Ф.* — *Астрон. журн.*, 1971, 15, 377.
114. *Novikov I. D., Thorne K. S.* — In: *Black holes*. C. DeWitt, B. DeWitt (Eds). N. Y., Gordon and Breach, 1973, p. 343.
115. *Zeldovich Ya. B., Guseynov O. H.* — *Astrophys. J.*, 1965, 144, 840.
116. *Гусейнов О. Х., Зельдович Я. Б.* — *Астрон. журн.*, 1966, 43, 313.
117. *Trimble V. L., Thorne K. S.* — *Astrophys. J.*, 1969, 156, 1013.
118. *Hayakawa S., Matsuoko M.* — *Progr. Theor. Phys. Suppl.*, 1964, 30, 204.
119. *Novikov I. D., Zeldovich Ya. B.* — *Nuovo Cimento Suppl.*, 1966, 4, 810.
120. *Шкловский И. С.* — *Астрон. журн.*, 1967, 44, 930.
121. *Prendergast K. H., Burbidge G. R.* — *Astrophys. J. Lett.*, 1968, 151, 83.
122. *Shakura N. I., Sunyaev R. A.* — *Astron. and Astrophys.*, 1973, 24, 337.
123. *Шакура Н. И.* — *Астрон. журн.*, 1972, 49, 945.
124. *Pringle J. P., Rees M. J.* — *Astron. and Astrophys.*, 1972, 21, 1.
125. *Novikov I. D.* — In: *Astrophysics and gravitation*. Proc. 16th Solvay Conf. on Physics, Univ. Bruxelles, 1974, p. 317.
126. *Шакура Н. И., Сюняев Р. А.* — В кн.: *Переменные звезды*.
127. *Kraft R. P.* In book 106, p. 235.
128. *Шакура Н. И.* Нейтронные звезды и черные дыры в двойных системах. М., «Знание», 1976.
129. *Lightman A. P.* *Sky and Telescope*, 1976, p. 243.
130. *Joss P. C., Rappaport S.* — Preprint MIT, CSR-P-67-31, 1976; *Rappaport S., Joss P. C.* — *Nature*, 1977, 266, 123.
- 130а. *Oda M.* — Preprint Inst. Space and Aeronaut. Sci., N 28. Tokyo, 1977.
131. *Poetschild R. E., Boldt E. A., Holt S. S., Serlemitsos P. J.* — *Astrophys. J.*, 1977, 213, 818.
132. *Lynden-Bell D.* — *Nature*, 1969, 223, 690.

133. *Lynden-Bell D., Rees M. J.* — Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1971, 152, 461.
134. *Озерной Л. М.* — УФН, 1976, 120, 309.
135. *Ekers R., Linden-Bell D.* — Astrophys. Lett., 1970, 9, 189.
136. *Peebles P. J. E.* — GRG, 1972, 3, 63.
137. *Bahcall J. N., Ostriker J.* — Nature, 1975, 256, 23.
138. *Silk J., Arons J.* — Astrophys. J. Lett., 1975, 200, L131.
139. *Bahcall J. N., Wolf R. A.* — Astrophys. J., 1976, 209, 214.
140. *Frank J., Rees M. J.* — Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1976, 176, 633.
141. *Giacconi R., Murray S., Gursky H., Kellog E., Schreier E., Matilsky T., Koch D., Tananbaum H.* — Astrophys. J., Suppl., 1974, 27, 37.
142. *Clark G. W., Markert T. H., Li F. K.* — Astrophys. J. Lett., 1975, 199, L93.
143. *Canizares C. R., Neighbours J. E.* — Astrophys. J. Lett., 1975, 199, L97.
144. *Гинзбург В. Л.* — Письма в ЖЭТФ, 1975, 22, 514.
145. *Гинзбург В. Л., Фролов В. П.* — Письма в АЖ, 1976, 2, 471.
146. *Гинзбург В. Л., Любушин А. А., Куржниц Д. А.* — ЖЭТФ, 1971, 60, 451.
147. *Parker L.* — Phys. Rev. Lett., 1968, 21, 562.
148. *Груб А. А., Мамаев С. Г.* — ЯФ, 1969, 10, 1276; 1971, 14, 800.
149. *Chernicov N. A., Tagirov E. A.* — Ann. Inst. Henri Poincaré, 1968, 9, 109.
150. *Parker L.* — Phys. Rev., 1969, 183, 1057; 1971, D3, 346.
151. *Fulling S. A., Parker L.* — Ann. Phys., 1974, 87, 176; Phys. Rev., 1974, D9, 341.
152. *Hu B. L., Fulling S. A., Parker L.* — Phys. Rev., 1973, D8, 2377.
153. *Любушин А. А.* — ТМФ, 1972, 10, 399.
154. *Фролов В. П.* — Препринт ФИАН, 1972, № 124.
155. *Фролов В. П.* — Препринт ФИАН, 1972, № 127.
156. *Зельдович Я. Б.* — Письма в ЖЭТФ, 1970, 12, 443.
157. *Зельдович Я. Б., Старобинский А. А.* — ЖЭТФ, 1971, 61, 2161.
158. *Лукаш В. Н., Старобинский А. А.* — ЖЭТФ, 1974, 66, 1515.
159. *Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М., Фролов В. П.* — Письма в АЖ, 1975, 1, 8.
160. *Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М., Старобинский А. А.* — ЖЭТФ, 1976, 70, 1577.
161. *Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М., Старобинский А. А.* — Письма в АЖ, 1976, 2, 136.
162. *Streeruwitz E.* — Phys. Rev., 1975, D11, 3378.
163. *Berger V. K.* — Phys. Rev., 1976, D12, 368.
164. *Raine D. J., Winlove C. P.* — Phys. Rev., 1976, D12, 946.
165. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.* Структура и эволюция Вселенной. М., «Наука», 1975.
166. *Вайнберг С.* Гравитация и космология. М., «Мир», 1975.
167. *Пиблс П. Дж.* Физическая космология. М., «Мир», 1975.
168. *Чибисов Г. В.* В сб.: Релятивистская астрофизика. Космология. Гравитационный эксперимент. Минск, Ин-т физики АН БССР, 1976, с. 85.

169. Carr B. J., Hawking S. W. — Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1974, 168, 399.
170. Carr B. J. — Astrophys. J., 1975, 201, 1.
171. Chapline G. F. — Phys. Rev., 1975, D12, 2949.
172. Harrison E. R. — Phys. Rev., 1970, D1, 2726.
173. Зельдович Я. Б. — Препринт ИПМ, 1973, № 66.
174. Hawking S. W. — Nature, 1974, 248, 30.
175. Hawking S. W. — Comm. Math. Phys., 1975, 43, 199.
176. De Witt B. S. — Phys. Rept, 1975, C19, 297.
177. Unruh W. G. — Phys. Rev., 1976, D14, 870.
178. Wald R. M. — Phys. Rev., 1976, D13, 3176.
179. Parker L. — Phys. Rev., 1975, D12, 1519.
180. Hartle J. B., Hawking S. W. — Phys. Rev., 1976, D13, 2188.
181. Gerlach U. H. — Phys. Rev., 1976, D14, 1479.
182. Israel W. — Phys. Lett., 1976, A57, 107.
183. Davies P. S. W. — Proc. Roy. Soc., 1976, A351, 129.
184. Hawking S. W., Gibbons G. W. — Phys. Rev., 1977, D15, 2752.
185. Волович И. В., Загребнов В. А., Фролов В. П. — ТМФ, 1976, 29, 191.
186. Boulware D. G. — Phys. Rev., 1976, D13, 2169.
187. Gibbons G. W., Hawking S. W. — Phys. Rev., 1977, D15, 2738.
188. Carter B. — Phys. Lett., 1976, 33, 558.
189. Damour T., Ruffini R. — Phys. Rev., 1976, 14, 332.
190. Frolov V. P., Volovich I. V., Zagrebнов V. A. — Preprint FIAN. 1977, 13. Волович И. В., Загребнов В. А., Фролов В. П. — ТМФ, 1977, 33, 3.
191. Carter B., Gibbons G. W., Lin D. N. C., Perry M. J. — Astron. and Astrophys., 1976, 52, 427.
192. Carr B. J. — Astrophys. J., 1976, 206, 8.
193. Page D. N. — Preprint OAP-419, Cal. Techn. Inst., Pasadena, 1975.
194. Page D. N. — Preprint OAP-452, Cal. Thech. Inst., Pasadena, 1976.
195. Lin D. N. C., Carr B. J., Fall S. M. — Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1976, 177, 51.
196. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. — Астрон. журн., 1966, 43, 758.
197. Page D. N., Hawking S. W. — Astrophys. J., 1976, 206, 1.
198. Chapline G. F. — Nature, 1975, 253, 251.
199. Chapline G. F. — Nature, 1976, 261, 550.
200. Зельдович Я. Б., Старобинский А. А. — Письма в ЖЭТФ. 1976, 24, 616.
201. Вайнер Б. В., Насельский П. Д. — Письма в АЖ, 1977, 3, 147.
202. Докучаев В. И., Озерной Л. М. — Письма в АЖ, 1977, 3, 327.
203. Происхождение и эволюция галактик и звезд. Под ред. С. Б. Пикельнера. М., «Наука», 1976.
204. Ginzburg V. L., Ozernoi L. M. — Astrophys. Space Sci., 1977, 48, 401; 1977, 50, 23.
205. Helmut H. A., Hintzen P., Levy S. G. — Astrophys. J. Lett., 1977, 213, 815.
206. Kemp J. C. — Circ. IAU, 1977, N 3060.
207. Clayton D. D., Newman M. J., Talbot R. J. — Astrophys. J., 1975, 201, 489.
208. Надежин Д. К., Новиков И. Д., Полнарев А. Г. — Препринт ИКИ, 1977, № 348.

209. *Frolov V. P.* — Preprint IC/77/46, Trieste, Italy, 1977.
210. *Rees M. J.* — Nature, 1977, 266, 333.
211. *Porter N. A., Weekes T. C.* — Astrophys. J., 1977, 212, 224.
212. *Meikle W. P. S.* — Nature, 1977, 269, 41.
213. *Mason K. O. et al.*, — Astrophys. J. Lett., 1974, 192, L65.
214. *Li F. K., Clark G. W.* — Astrophys. J. Lett., 1974, 191, L27.
215. *Holt S. S. et al.* — Astrophys. J. Lett., 1976, 203, L63.
216. *Holt S. S. et al.* Nature, 1976, 261, 213.
217. *Margon B., Bowyer S., Stone R. P. S.* — Astrophys. J. Lett., 1973, 185, L113.
218. *Gerlach U. H.* — Phys. Rev., 1976, D14, 1479.
219. *Boulware D. G.* — Phys. Rev., 1976, D13, 2169.
220. *Davies P. C. W.* — Proc. Roy. Soc., 1976, A351, 129.
221. *Unruh W. G.* — Phys. Rev., 1977, D15, 365.
222. *Fulling S. A.* — Phys. Rev., 1977, D15, 2411.
223. *Зельдович Я. Б., Старобинский А. А., Хлопов М. Ю., Чечеткин В. М.* — Письма в АЖ, 1977, 3, 208.
224. *Торн К.* — УФН, 1976, 118, 453.

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

Введение

К граничным задачам электродинамики движущихся сред относятся задачи о распространении и излучении волн в пространстве, где имеются движущиеся ограниченные среды или движущиеся границы раздела в покоящихся средах. Первая задача такого рода решена А. Эйнштейном в его знаменитой работе 1905 г. по специальной теории относительности [1]. В ней рассмотрено отражение электромагнитных волн от идеального зеркала, плоскость которого равномерно перемещается в направлении своей нормали. В работе вычислены амплитуды отраженных волн, их частоты и углы отражения в зависимости от амплитуды и частоты падающей волны и угла падения. С помощью этих формул получено выражение для светового давления, которое оказывает плоская электромагнитная волна на движущееся с релятивистской скоростью зеркало. Все эти результаты наглядно иллюстрировали основные принципы специальной теории относительности. Впоследствии, в 1908 г., при доказательстве релятивистской инвариантности уравнений Максвелла в среде А. Эйнштейн в совместной работе с И. Лаубом сформулировал условия для полей и индукций на движущихся границах раздела (см. [1, с. 115 и 123]). Таким образом был создан фундамент электродинамики движущихся сред. Он состоял из уравнений Максвелла, материальных соотношений Минковского и условий для полей и индукций на движущихся границах раздела. Дальнейшее развитие этого направления электродинамики целиком определялось потребностями и возможностями физического эксперимента. Действительно, поскольку в начале двадцатого столетия было трудно говорить о макроскопическом движении сред с релятивистскими скоростями, то работы по граничным задачам электродинамики движу-

щихся сред представляли в основном чисто академический интерес и число этих работ было весьма незначительным. Так, только в 1929 г. Д. Еропкин [2] получил обобщение закона Снеллиуса на случай движущихся сред. С помощью преобразований Лоренца им вычислены углы отражения и преломления на границе раздела двух диэлектриков, движущихся с одинаковой скоростью в направлении нормали к этой границе. Формулы для амплитуд отраженной и преломленной волн в этом случае при нормальном падении волн получены С. Тотаро лишь в 1956 г. [3]. Им же в 1957 г. выведены формулы для частот, компонент волновых векторов и амплитуд отраженной и преломленной волн при падении волны из покоящегося диэлектрика на границу раздела с движущимся диэлектриком [4]. Во всех случаях использованы преобразования Лоренца.

Интерес к граничным задачам электродинамики движущихся сред оживился около 25 лет тому назад, когда стало ясно, что можно создавать макроскопические объекты, сгустки релятивистских электронов или движущейся плазмы, скорость перемещения которых может быть сравнимой со скоростью света. Именно тогда появились различные предложения по практическому использованию отражения волн от релятивистских границ для целей усиления волн с одновременным преобразованием частоты. Эти эффекты отмечены еще в работе А. Эйнштейна [1]. Дело оставалось только за «малым»: создать релятивистские зеркала. В работе К. Ландекера 1952 г. в качестве такого отражателя предложено использовать пучок релятивистских электронов [5]. Для достижения релятивистских эффектов при относительно медленном движении макроскопического объекта М. Ламперт в 1956 г. предложил использовать замедление волн в пространстве, в котором они распространяются [6]. Отражение и преломление волн, падающих нормально на границу раздела с магнитоактивной плазмой, движущейся в пространстве замедленных волн, рассчитано в работе Я. Файнберга и В. Ткалича [7]. Начиная приблизительно с 1960 г. количество работ по отражению и преломлению волн на движущихся границах раздела резко возросло (см. литературу в обзоре [8]). В этих работах рассмотрены различные варианты релятивистских зеркал и даны количественные оценки эффектов преобразования частот и увеличения амплитуд волн.

Некоторые из релятивистских эффектов наблюдались экспериментально (см. литературу в [8]).

Одновременно с этим в теоретических и экспериментальных работах горьковской школы физиков по возбуждению и распространению волн в системах с переменными параметрами (в том числе и в нелинейных средах) (см. обзоры [9—11]) показано, что релятивистское преобразование частот и амплитуд распространяющихся волн возможно и в том случае, когда по покоящейся среде перемещается граница раздела, на которой меняются преломляющие свойства сред. Поэтому для получения релятивистских эффектов не нужно «двигать» среду, а достаточно перемещать границу раздела. Этой цели можно достигнуть, например, меняя в некоторой конечной области параметры среды и вызывая затем перемещение этой области с заданной скоростью. Такое бегущее изменение свойств среды называется обычно волной параметра. Трансформацию волн в покоящихся средах с бегущими параметрами также можно описывать с помощью единого аппарата электродинамики движущихся сред.

Предлагаемая статья содержит подробный анализ отражения и преломления волн на резких границах раздела с движущимися средами в том случае, когда скорость перемещения границы раздела и скорости сред по обе стороны от нее направлены по нормали к поверхности раздела. Такую ситуацию мы будем называть в дальнейшем нормальным разрывом скорости движения сред. Частными случаями нормального разрыва являются движущееся зеркало, движущийся диэлектрик, в том числе и движущаяся плазма, а также системы с бегущими параметрами. В последнем случае возможно сверхсветовое перемещение границы раздела (и даже с бесконечной скоростью), ибо скорость границы является фазовой скоростью, с которой меняется состояние среды под действием внешних источников. Все эти случаи подробно проанализированы в данной работе.

Во всех указанных выше работах речь шла о плоских и резких границах раздела, которые перемещались с постоянной скоростью в направлении, перпендикулярном этой границе. При выводе формул для амплитуд и компонент волновых векторов во всех работах [2—4] дважды применялись преобразования Лоренца для соответствующих величин: сначала авторы преобразовывали все вели-

чины из лабораторной системы координат в систему покоя границы раздела, решали в этой системе обычную граничную задачу, а затем преобразовывали полученные величины обратно в лабораторную систему координат. Такая процедура была удобна в простейших случаях релятивистского зеркала [1] или двух движущихся с одинаковой скоростью диэлектриков (см. [2, 3]). Если же диэлектрики по обе стороны границы раздела движутся с различными скоростями, то использование преобразований Лоренца приводит к весьма громоздким формулам, с помощью которых довольно трудно проследить зависимости искоемых величин от параметров падающей волны и движущихся сред. Это особенно наглядно видно на примере формул, полученных в работе [4]. Аналогичным способом решались задачи и в работах [5, 7].

Однако во всех случаях практически более удобным оказался метод решения граничных задач без применения преобразований Лоренца, а с использованием соответствующих материальных уравнений Минковского, записанных для каждого из движущихся диэлектриков в лабораторной системе координат. Он позволяет довольно просто и в компактной форме получить обобщенные формулы Френеля—Снеллиуса для весьма сложных случаев, например для ударной волны, распространяющейся в потоке газа. В этом случае среды по обе стороны от границы раздела и сама граница раздела имеют различные скорости. Очевидно, что для этой ситуации, во-первых, невозможно найти такую систему координат, где все три движущиеся составляющие покоились, а во-вторых, решение задач отражения и преломления обычным методом перехода из одной системы координат в другую потребовало бы шестикратного использования преобразований Лоренца, что выходит за рамки разумных расчетов. Следует отметить, что некоторые граничные задачи с тангенциальным разрывом скоростей движущихся диспергирующих сред довольно успешно решаются также с использованием соответствующего тензора диэлектрической проницаемости, записанного в лабораторной системе координат [12—15].

Прежде чем переходить к формулировке основных соотношений, используемых нами в дальнейшем при решении всех граничных задач, укажем на те два типа граничных задач, о которых обычно идет речь, а также отметим

те приближения, которые используются нами при решении граничных задач.

В общем случае граница раздела и среды по обе стороны от нее могут иметь различные скорости как по величине, так и по направлению. Поскольку мы в основном будем рассматривать плоские границы раздела, то скорости движения сред и границ раздела мы можем разложить на компоненты, перпендикулярные поверхности раздела, и на компоненты, лежащие в плоскости поверхности раздела. В первом случае, который называется нормальным разрывом скоростей, скорости сред и границы раздела могут быть различными по величине, но направлены они все по нормали к поверхности раздела. Во втором случае, который обычно называется тангенциальным разрывом скоростей, скорости границы раздела и сред по обе стороны от нее различны по величине, но все лежат в плоскостях, параллельных поверхности раздела. Конечно, это значит, что сами скорости могут быть и непараллельными. В данной работе этот случай не рассматривается. Используемое разбиение общей граничной задачи на две более простые можно осуществить потому, что рассматриваемые задачи электродинамики движущихся сред линейны как по электромагнитным полям, так и по скоростям движения сред.

Решение граничных задач будем проводить при следующих предположениях:

1) скорости перемещения сред и границ постоянны по величине и направлению и не зависят от интенсивности электромагнитного поля распространяющихся в них волн. Это значит, что все скорости заданы извне и их постоянство обеспечивается внешними по отношению к данной системе источниками;

2) границы раздела представляют из себя плоские поверхности бесконечно малой толщины. Последнее означает, что границы раздела считаются резкими в пространстве и во времени. С электродинамической точки зрения такое приближение можно использовать только тогда, когда размер переходного слоя от одной среды к другой много меньше всех длин волн, которые распространяются в данной системе [16]. Нарушение этого условия на движущихся границах раздела приводит к появлению ряда особенностей отражения и преломления [17];

3) на границах раздела отсутствуют свободные поверхностные заряды и токи;

4) для изучаемых задач предполагается безынерционность отклика среды на воздействие электрических полей распространяющихся волн. На существенность инерционности отклика среды на внешнее поле для задач с релятивистскими границами недавно обратил внимание Л. А. Островский [18].

§ 1. Исходные уравнения.

Кинематические инварианты.

Постановка задач отражения и преломления

Теперь можно привести основные соотношения, которые будут использоваться в дальнейшем при решении граничных задач электродинамики движущихся сред. Пусть плоская и резкая граница раздела двух сред перемещается со скоростью v . Тогда поля \mathbf{E} , \mathbf{H} и индукции \mathbf{B} , \mathbf{D} по обе стороны от границы раздела связаны между собой на этой границе раздела соотношениями [19—21]

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_{II} - \mathbf{E}_I] = \frac{v_n}{c} (\mathbf{B}_{II} - \mathbf{B}_I), \quad (1)$$

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_{II} - \mathbf{H}_I] = -\frac{v_n}{c} (\mathbf{D}_{II} - \mathbf{D}_I),$$

где индексами I и II обозначены значения полей и индукций по обе стороны от границы раздела; \mathbf{n} — нормаль к поверхности раздела, а v_n — нормальная составляющая скорости перемещения границы раздела.

В каждой из однородных изотропных сред поля \mathbf{E} , \mathbf{H} и индукции \mathbf{B} , \mathbf{D} связаны уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

где ρ и \mathbf{j} — плотность сторонних зарядов и токов, и материальными соотношениями Минковского

$$\mathbf{D} + \left[\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{H} \right] = \epsilon \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{B} \right] \right), \quad (3)$$

$$\mathbf{B} + [\mathbf{E}, \mathbf{u}/c] = \mu (\mathbf{H} + [\mathbf{D}, \mathbf{u}/c]),$$

где \mathbf{u} — скорость движения среды, а ϵ и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, измеренные в системе ее покоя.

Если среды по обе стороны от этой границы однородны, имеют диэлектрические и магнитные проницаемости $\epsilon_{1,2}$ и $\mu_{1,2}$ и движутся с постоянными скоростями $\mathbf{u}_{1,2}$, то соотношения между полями и индукциями в каждой среде ($i=1, 2$) для плоских монохроматических волн вида $\exp\{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)\}$ определяются уравнениями Максвелла—Минковского (2) и (3) в отсутствие зарядов и токов ($\rho=0$, $\mathbf{j}=0$)

$$\mathbf{D} = -\left[\frac{c\mathbf{k}}{\omega}, \mathbf{H}\right], \quad \mathbf{B} = \left[\frac{c\mathbf{k}}{\omega}, \mathbf{E}\right],$$

$$(\mathbf{k}, \mathbf{B}) = 0, \quad (\mathbf{k}, \mathbf{D}) = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_i \mathbf{E} + \frac{\alpha_i \gamma_i^2}{\mu_i} \{\beta_i^2 \mathbf{E} - \beta_i (\beta_i, \mathbf{E}) + [\beta_i, \mathbf{B}]\},$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_i} \mathbf{B} + \frac{\alpha_i \gamma_i^2}{\mu_i} \{\beta_i (\beta_i, \mathbf{B}) - \beta_i^2 \mathbf{B} + [\beta_i, \mathbf{E}]\}.$$
(5)

В эти соотношения и в граничные условия (1) не входит тангенциальная компонента v_t скорости перемещения границы раздела. Поэтому граничные условия (1) относятся к случаю нормального разрыва скоростей, а для тангенциального разрыва скоростей, когда $v_n=0$, граничные условия принимают вид (1)

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_{II} - \mathbf{E}_{I}] = 0, \quad [\mathbf{n}, \mathbf{H}_{II} - \mathbf{H}_I] = 0,$$

$$(\mathbf{n}, \mathbf{B}_{II}) = (\mathbf{n}, \mathbf{B}_I), \quad (\mathbf{n}, \mathbf{D}_{II}) = (\mathbf{n}, \mathbf{D}_I).$$
(6)

Используем теперь то обстоятельство, что граничные условия рассматриваются для тех точек пространства, где в данный момент находится движущаяся поверхность раздела. Это означает, что при решении задач об отражении и преломлении плоских монохроматических волн $\exp\{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)\}$ на такой границе раздела граничные условия (1) и (6) должны выполняться в точках с координатами $\mathbf{r} = \mathbf{v}t + \boldsymbol{\rho}$ для всех волн одновременно в любой момент времени t и в любой точке поверхности раздела, координаты которых задаются двумерным вектором $\boldsymbol{\rho}$. Это возможно только в том случае, если для всех волн будут оставаться инвариантными следующие величины:

$$I_\omega = (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) = \text{invar}; \quad \mathbf{I}_t = \mathbf{k}_t = \text{invar}. \quad (7)$$

Эти инварианты справедливы при любом соотношении между ω и \mathbf{k} , т. е. для электромагнитных волн любого из рассматриваемых нами типов.

Неизменность величин I_ω и I_t при отражении и преломлении волны на движущейся границе раздела имеет простое физическое объяснение. Если мы с помощью преобразований Лоренца [20, 21] для частот ω и компонент волновых векторов \mathbf{k} перейдем в систему покоя границы раздела, то выражения для I_ω и I_t примут вид

$$\omega' = \gamma_v I_\omega, \quad \mathbf{k}'_t = I_t, \quad (8)$$

где

$$\gamma_v = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \text{а } \omega' \text{ и } \mathbf{k}'_t$$

— частота и тангенциальная компонента волнового вектора волны в системе покоя границы раздела. Поскольку величина γ_v одинакова для всех волн, то отсюда ясно, что инвариантность величин I_ω и I_t в (7) означает не что иное, как хорошо известное условие совпадения частот и тангенциальных компонент волновых векторов падающих, отраженных и преломленных волн на покоящейся границе раздела (в системе ее покоя) [19]. В дальнейшем величины I_ω и I_t будем называть кинематическими инвариантами.

Для решения задач кинематики отражения и преломления волны на движущейся границе раздела, т. е. для обобщения формул Снеллиуса на этот случай, в предлагаемой методике расчета, кроме кинематических инвариантов, достаточно знать дисперсионные уравнения для волн в каждой из движущихся сред. Они имеют вид [8]

$$L_i^{tr}(\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \chi_i(\omega, \mathbf{k}) \gamma_i^2 c^{-2} (\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_i)^2 = 0 \quad (9)$$

— для квазипоперечных волн и

$$L_i^l(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_i(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (10)$$

— для квазипродольных волн. Здесь

$$\chi_i = (\varepsilon_i \mathbf{u}_i - 1), \quad \gamma_i^2 = (1 - \mathbf{u}_i^2/c^2)^{-1}, \quad (11)$$

а индексы $i=1$ и $i=2$ относятся соответственно к первой среде, откуда падает волна, и ко второй среде, куда она преломляется.

Таким образом, для решения задач кинематики отражения и преломления волн, г. е. для вычисления частот и компонент волновых векторов отраженных и преломленных волн, достаточно знать дисперсионные уравнения (9) и (10) и кинематические инварианты (7). Если нужно определить и амплитуды отраженных и преломленных волн, то для этого нужно использовать уравнения Максвелла—Минковского (4) и (5) для плоских монохроматических волн в равномерно движущейся изотропной среде.

В случае нормального разрыва скоростей движения сред плоская граница раздела и среды по обе стороны от нее перемещаются в одном направлении, перпендикулярном поверхности раздела. Однако скорости обеих сред и границы раздела по величине различны. Выберем это направление за ось z . Тогда плоскость границы раздела совпадет с плоскостью (x, y) . Пусть теперь из первой среды с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 и магнитной проницаемостью μ_1^1 , перемещающейся вдоль оси z со скоростью u_1 , на границу раздела падает плоская монохроматическая волна с частотой ω_0 и с волновым вектором \mathbf{k}_0 . Электрический вектор \mathbf{E}_0 этой волны имеет вид

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp \{i(k_{0x}x + k_{0z}z - \omega_0 t)\}. \quad (12)$$

Плоскость падения этой волны совпадает с плоскостью (x, z) . При взаимодействии с границей раздела двух сред, движущейся вдоль оси z со скоростью $v_n = u_z$, в первой среде перед границей раздела возникает отраженная волна

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1 \exp \{i(k_{1x}x + k_{1z}z - \omega_1 t)\}, \quad (13)$$

а позади границы раздела в среде с проницаемостями ϵ_2 и μ_2 , движущейся вдоль оси z со скоростью u_2 , появится преломленная волна

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_2 \exp \{i(k_{2x}x + k_{2z}z - \omega_2 t)\}. \quad (14)$$

За исключением того, что частоты всех волн различны, отражение качественно происходит точно так же, как и на покоящейся границе раздела: падающая на границу волна трансформируется в одну отраженную и в одну преломленную волну. Волновые векторы всех трех волн лежат

¹ Напомним, что эти величины всегда измеряются в системе покоя соответствующей движущейся среды.

в плоскости падения (x, z) . Однако такая трансформация имеет место только в досветовом случае, когда скорость перемещения границы раздела меньше, чем величина компонента групповых скоростей отраженной и преломленной волн в направлении оси z , т. е. досветовое отражение имеет место только при

$$v_n = u_z < v_{1,2gz} = \frac{\partial \omega_{1,2}}{\partial k_{1,2z}}. \quad (15)$$

Только в этом случае отраженная волна отводит энергию от движущейся границы раздела. Если же граница раздела перемещается со скоростью большей, чем групповая скорость обеих волн в направлении оси z , т. е.

$$v_n = u_z > v_{1,2gz} = \frac{\partial \omega_{1,2}}{\partial k_{1,2z}}, \quad (16)$$

то мы будем иметь так называемый сверхсветовой случай отражения. Поскольку в этом случае граница раздела обгоняет отраженную волну в первой среде, то эта волна не может в ней образоваться и поэтому

$$E_1 = 0. \quad (17)$$

Вместо нее во второй среде за границей раздела возникает вторая преломленная волна, допускаемая дисперсионными уравнениями (9) или (10):

$$E_2^{(-)}(r, t) = E_2^{(-)} \exp \{i(k_{2x}^{(-)} x + k_{2z}^{(-)} z - \omega_2^{(-)} t)\}. \quad (18)$$

Обе преломленные волны в сверхсветовом случае (16) отводят энергию от движущейся границы раздела.

Очевидно, что, кроме случаев (15) и (16), возможно еще такое движение границы раздела, когда ее скорость $v_n = u_z$ лежит в интервале значений v_{1gz} и v_{2gz} . В этом случае отражение и преломление волн имеет более сложный характер [22]. В частности, если $v_{2gz} < u_z < v_{1gz}$, то такое движение границы раздела допускает существование одновременно одной отраженной и двух преломленных волн. Как показали Островский и Соломин [22] (см. также обзор [11]), в случае движения границы по покоящейся недиспергирующей среде амплитуда дополнительно возникшей волны определяется параметрами (волновым сопротивлением $\sqrt{\mu/\varepsilon}$) переходного слоя в точке синхронизма, где $v_n = v_{gz}$. Если же $v_{1gz} < u_z < v_{2gz}$, то

граница раздела становится, как правило, неустойчивой, ибо все возмущения на ней «схлопываются» к точке синхронизма $v_n = v_{gz}$ и нарастают в ней до бесконечности. Мы в дальнейшем не будем рассматривать задачи отражения и преломления для промежуточных случаев тем более, что они рассмотрены в [11, 22] при нормальном падении на фронт ударной волны в покоящихся средах, а ограничимся изучением только досветового и сверхсветового случаев. К рассмотрению этих задач мы и переходим [23—26].

§ 2. Преобразование частот и компонент волновых векторов, а также амплитуд волн при досветовом и сверхсветовом движении границы раздела

Конкретные вычисления будем проводить только для квазипоперечных свободных электромагнитных волн, подчиняющихся дисперсионному уравнению (9)². Кинематику отражения и преломления этих волн, т. е. частоты и компоненты волновых векторов всех волн, можно рассчитать с помощью уравнения (9) и кинематических инвариантов (7). Если для удобства записи ввести обозначения

$$\begin{aligned} \omega_0 &\equiv \omega_1^{(+)}, & \omega_1 &\equiv \omega_1^{(-)}, & \omega_2 &\equiv \omega_2^{(+)} & \text{и} & \omega_2^{(-)} \\ \mathbf{k}_0 &\equiv \mathbf{k}_1^{(+)}, & \mathbf{k}_1 &\equiv \mathbf{k}_1^{(-)}, & \mathbf{k}_2 &\equiv \mathbf{k}_2^{(+)} & \text{и} & \mathbf{k}_2^{(-)}, \end{aligned} \quad (19)$$

то для определения искомых величин $(\omega_1^{(-)}, \mathbf{k}_1^{(-)})$ и $(\omega_1^{(+)}, \mathbf{k}_1^{(+)})$ — в досветовом случае и $(\omega_2^{(+)}, \mathbf{k}_2^{(+)})$ и $(\omega_2^{(-)}, \mathbf{k}_2^{(-)})$ — в сверхсветовом случае через заданные величины ω_0 и \mathbf{k}_0 мы имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{c^2 \mathbf{k}_j^2}{\omega_j^2} = 1 + \kappa_j \gamma_j^2 \left(1 - \beta_j \frac{c \mathbf{k}_j}{\omega_j} \right)^2, \quad (20)$$

$$I_\omega = (\omega_j - c k_{jz} \beta_z) = (\omega_0 - u_z k_{0z}),$$

$$I_t = I_x = k_{jx} = k_{0x},$$

² В случае движущейся изотропной электронной плазмы можно решать аналогичные задачи и для квазипродольных волн (10) с

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\gamma^2 (\omega - \mathbf{k} \mathbf{u})^2}.$$

где

$$\mathbf{k}_j^2 = (k_{jx}^2 + k_{jz}^2), \quad \beta_j = \frac{u_j}{c} \mathbf{e}_z, \quad x_j = (\varepsilon_j \mu_j - 1),$$

$\beta_j = \frac{u_j}{c}$, $\beta_z = \frac{u_z}{c}$, а индексы $j=1$ и 2 относятся к параметрам сред и волн соответственно в первой и второй среде. Решения системы (20) имеют вид [24]

$$\begin{aligned} \omega_j^{(\pm)} &= I_\omega \gamma^2 \frac{[1 + x_j \gamma_j^2 \beta_j (\beta_z - \beta_j)] \pm \beta_z \sqrt{(1 + x_j) - d_j \left(\frac{cI_x}{\gamma I_\omega}\right)^2}}{d_j}, \\ \dot{c}k_{jz}^{(\pm)} &= I_\omega \gamma^2 \frac{[\beta_z + x_j \gamma_j^2 (\beta_z - \beta_j)] \pm \sqrt{(1 + x_j) - d_j \left(\frac{cI_x}{\gamma I_\omega}\right)^2}}{d_j} \quad (21) \\ ck_{jx}^{(\pm)} &= cI_x = ck_{0x}, \quad I_\omega = (\omega_0 - u_z k_{0z}), \end{aligned}$$

где

$$d_j = [1 - x_j \gamma_j^2 \gamma_j^2 (\beta_z - \beta_j)^2], \quad \gamma^{-2} = (1 - \beta_z^2) = \left(1 - \frac{u_z^2}{c^2}\right),$$

$$x_j = (\varepsilon_j \mu_j - 1), \quad \gamma_j^{-2} = (1 - \beta_j^2) = 1 - \frac{u_j^2}{c^2}.$$

Обратим внимание на то, что все эти формулы справедливы для квазиперечных волн с любой поляризацией, совместимой с уравнениями Максвелла.

Для нахождения амплитуд отраженной и преломленной волн нужно с помощью уравнений Максвелла (4) и материальных уравнений Минковского (5) расписать граничные условия (1). Это удобнее всего сделать для двух различных поляризаций падающих волн. В первом случае электрический вектор падающей волны, а как мы увидим ниже и всех других волн, перпендикулярен плоскости падения (x, z). Этот случай впоследствии мы будем называть случаем *E*-поляризации падающей волны. Во втором случае магнитный вектор всех волн перпендикулярен плоскости падения (x, z), а электрический вектор лежит в этой плоскости. Этот случай мы будем называть случаем *H*-поляризации падающей волны. Поскольку падающую волну с произвольной поляризацией электрического вектора всегда можно представить в виде суперпозиции волн с электрическими векторами, перпендикулярными плоскости падения и лежащими в этой плоскости,

то решения задач в двух указанных выше случаях позволяют вычислить амплитуды трансформированных волн при любой поляризации падающей волны.

Пусть электрический вектор падающей волны перпендикулярен плоскости падения (x, z) , т. е. направлен вдоль оси y . Тогда из уравнений Максвелла (4) и материальных соотношений Минковского (5) нетрудно определить компоненты всех векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_y \mathbf{e}_y, & \mathbf{H} &= H_x \mathbf{e}_x + H_z \mathbf{e}_z, & \mathbf{D} &= D_y \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{B} &= B_x \mathbf{e}_x + B_z \mathbf{e}_z, & [\mathbf{n}, \mathbf{E}] &= -E \mathbf{e}_x, & [\mathbf{n}, \mathbf{H}] &= H_x \mathbf{e}_x, & (22) \\ D_x &= D_z = H_y = B_y = 0, \end{aligned}$$

входящих в граничные условия (1). В j -й среде ($j = 1, 2$) они имеют вид

$$\begin{aligned} H_{jx} &= \frac{\gamma_j^2}{\mu_j} \left\{ \varepsilon_j \mu_j \beta_j \left(\beta_j \frac{ck_{jz}}{\omega_j} - 1 \right) + \left(\beta_j - \frac{ck_{jz}}{\omega_j} \right) \right\} E_j, \\ H_{jz} &= \frac{ck_{jx}}{\mu_j \omega_j} E_j, & B_{jx} &= \left(-\frac{ck_{jz}}{\omega_j} \right) E_j, \\ B_{jz} &= \frac{ck_{jx}}{\omega_j} E_j, \\ D_{jy} &= \frac{\gamma_j^2}{\mu_j} \left\{ \varepsilon_j \mu_j \left(1 - \beta_j \frac{ck_{jz}}{\omega_j} \right) + \beta_j \left(\frac{ck_{jz}}{\omega_j} - \beta_j \right) \right\} E_j, \end{aligned} \quad (23)$$

где единичный вектор \mathbf{n} нормали к поверхности раздела направлен вдоль оси z из первой среды во вторую, а \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z — единичные векторы соответствующих осей. Граничные условия (1) означают непрерывность компонент двух векторов

$$\mathbf{Q} = \{[\mathbf{n}, \mathbf{E}] - \beta_n \mathbf{B}\}; \quad \mathbf{J} = \{[\mathbf{n}, \mathbf{H}] + \beta_n \mathbf{D}\}. \quad (24)$$

В нашем случае с помощью (22) и (23) можно записать явный вид этих векторов в j -й движущейся среде

$$\mathbf{Q}_j = Q_{jx} \mathbf{e}_x + Q_{jz} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{J}_j = J_{jy} \mathbf{e}_y, \quad (25)$$

где

$$Q_{jx} = -(\omega_j - u_z k_{jz}) \frac{E_j}{\omega_j} = -I_\omega \frac{E_j}{\omega_j},$$

$$Q_{jz} = -u_z k_{jx} \frac{E_j}{\omega_j} = -u_z I_t \frac{E_j}{\omega_j}, \quad (26)$$

$$J_{jy} = \frac{\gamma_j^2 E_j}{\mu_j} \left\{ \varepsilon_j \mu_j \left(1 - \beta_j \frac{ck_{jz}}{\omega_j} \right) (\beta_z - \beta_j) - \left(\frac{ck_{jz}}{\omega_j} - \beta_j \right) (1 - \beta_z \beta_j) \right\} = -\frac{1}{\mu_j} \{ (ck_{jz} - \beta_z \omega_j) - \alpha_j \gamma_j^2 (\beta_z - \beta_j) (\omega_j - \beta_j ck_{jz}) \} \frac{E_j}{\omega_j}.$$

В силу инвариантности величин I_ω и I_t непрерывность вектора \mathbf{Q} сводится к непрерывности величины

$$A_j = E_j / \omega_j. \quad (27)$$

Нетрудно видеть, что величины A_j являются амплитудами вектор-потенциала для свободных монохроматических плоских волн. С помощью преобразований Лоренца для полей, вытекающих из закона преобразований компонент тензора F_{ik} [20, 27], можно показать, что компоненты вектор-потенциала A , перпендикулярные векторам \mathbf{u} и \mathbf{k} , при этих преобразованиях не меняются. Действительно, из преобразований Лоренца для полей и уравнений Максвелла следует, что $\mathbf{E}'_\perp = \frac{\mathbf{E}_\perp}{\omega} \gamma (\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}) = \frac{\omega'}{\omega} \mathbf{E}_\perp$. Отсюда сразу следует лоренц-инвариантность величин (27).

Граничные условия для вектора \mathbf{J} означают, что на границе раздела остаются непрерывными величины

$$-J_{jy} = a_j A_j \quad (28)$$

для полных полей по обе стороны от границы раздела. Здесь

$$a_j = \frac{1}{\mu_j} \{ (ck_{jz} - \beta_z \omega_j) - \alpha_j \gamma_j^2 (\beta_z - \beta_j) (\omega_j - \beta_j ck_{jz}) \}. \quad (29)$$

В результате, если полное поле по обе стороны от границы раздела представляется в виде суперпозиции двух волн, допускаемых дисперсионным уравнением (20), то для определения неизвестных величин $A_1 = A_1^{(-)}$, $A_2 = A_2^{(+)}$ и $A_2^{(-)}$ через амплитуду падающей волны $A_0 = A_1^{(+)}$ мы получим следующую систему уравнений:

$$A_1^{(+)} + A_1^{(-)} = A_2^{(+)} + A_2^{(-)},$$

$$a_1^{(+)} A_1^{(+)} + a_1^{(-)} A_1^{(-)} = a_2^{(+)} A_2^{(+)} + a_2^{(-)} A_2^{(-)}, \quad (30)$$

где

$$A_j^{(\pm)} = \frac{E_j^{(\pm)}}{\omega_j^{(\pm)}},$$

$$a_j^{(\pm)} = \frac{1}{\mu_j} \{ (ck_{jz}^{(\pm)} - \beta_z \omega_j^{(\pm)}) - \alpha_j \gamma_j^2 (\beta_z - \beta_j) (\omega_j^{(\pm)} - \beta_j ck_{jz}^{(\pm)}) \}. \quad (31)$$

Эта система позволяет описывать одновременно как до-световой случай, так и сверхсветовой. В досветовом случае, когда отсутствует вторая преломленная волна, достаточно в (30) положить $A_2^{(-)} = 0$. В этом случае соотношения (30) превращаются в систему

$$A_1^{(+)} + A_1^{(-)} = A_2^{(+)}, \quad a_1^{(+)} A_1^{(+)} + a_1^{(-)} A_1^{(-)} = a_2^{(+)} A_2^{(+)} \quad (32)$$

двух уравнений относительно двух неизвестных величин, определяемых через заданную амплитуду падающей волны $A_1^{(+)}$. Ее решения имеют вид

$$E_1 = - \frac{\omega_1}{\omega_0} \frac{a_2^{(+)} - a_1^{(+)}}{a_2^{(+)} - a_1^{(-)}} E_0,$$

$$E_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} \frac{a_1^{(+)} - a_1^{(-)}}{a_2^{(+)} - a_1^{(-)}} E_0. \quad (33)$$

Здесь были использованы обозначения (19), (27), а также обозначения

$$E_1^{(+)} = E_0, \quad E_1^{(-)} = E_1, \quad E_2^{(+)} = E_2, \quad (34)$$

где E_0 — амплитуда падающей волны, а E_1 и E_2 — искомые амплитуды отраженной и преломленной волн.

В сверхсветовом случае, когда отсутствует отраженная волна, а вместо нее позади границы раздела появляется вторая преломленная волна с $A_2^{(-)} \neq 0$, в обоих равенствах (30) нужно положить $A_1^{(-)} = 0$. Мы получим систему уравнений

$$A_1^{(+)} = A_2^{(+)} + A_2^{(-)}, \quad a_1^{(+)} A_1^{(+)} = a_2^{(+)} A_2^{(+)} + a_2^{(-)} A_2^{(-)} \quad (35)$$

для определения искомых величин $A_2^{(\pm)}$ через заданную амплитуду $A_1^{(+)}$ падающей волны и параметры обеих сред и границы раздела. Ее решения имеют вид

$$E_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} \frac{a_1^{(+)} - a_2^{(-)}}{a_2^{(+)} - a_2^{(-)}} E_0, \quad (36)$$

$$E_2^{(-)} = - \frac{\omega_2^{(-)}}{\omega_0} \frac{a_1^{(+)} - a_2^{(+)}}{a_2^{(+)} - a_2^{(-)}} E_0.$$

Мы получили общие формулы для амплитуд отраженной и преломленной волны в досветовом случае (см. (33)) и формулы для амплитуд двух преломленных волн в сверхсветовом случае (36) при такой поляризации падающей волны, когда ее электрический вектор перпендикулярен плоскости падения (E -поляризация падающей волны). Как видно из этих формул, электрические векторы всех вновь появившихся волн также оказываются перпендикулярными плоскости падения.

Если же электрический вектор падающей волны лежит в плоскости падения (x, z), то из уравнений Максвелла (4) и материальных соотношений Минковского (5) можно показать, что в этом случае магнитный вектор падающей волны перпендикулярен плоскости падения. Тогда задачи отражения и преломления удобнее всего решать относительно неизвестных компонент магнитных полей вновь появившихся волн. Для этого все величины полей и индукций E , B и D , а также векторы Q и J (в 24) нужно выразить через компоненту H_y магнитного поля, перпендикулярную плоскости (x, z), точно так же, как это мы делали в формулах (23), (25) и (26) для E -поляризации. После громоздких преобразований можно показать, что граничные условия в этом случае опять сводятся к общей системе (30), в которой под величинами $A_j^{(\pm)}$ следует подразумевать отношения $H_{jy}^{(\pm)}/\omega_j^{(\pm)}$, а во всех величинах нужно заменить ϵ_j на μ_j и, наоборот, μ_j на ϵ_j . Поскольку при последней замене величина $\kappa_j = (\epsilon_j \mu_j - 1)$ остается без изменения, то формулы для искомых величин $H_1 = H_{1y}^{(-)}$, $H_2 = H_{2y}^{(+)}$ и $H_2^{(-)} = H_{2y}^{(-)}$ принимают вид: для досветового случая ($A_2^{(-)} = 0$)

$$H_1 = - \frac{\omega_1}{\omega_0} \frac{b_2^{(+)} - b_1^{(+)}}{b_2^{(+)} - b_1^{(-)}} H_0, \quad H_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} \frac{b_1^{(+)} - b_1^{(-)}}{b_2^{(+)} - b_1^{(-)}} H_0 \quad (37)$$

и для сверхсветового случая ($A_1^{(-)} = 0$)

$$H_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} \frac{b_1^{(+)} - b_2^{(-)}}{b_2^{(+)} - b_2^{(-)}} H_0, \quad (38)$$

$$H_2^{(-)} = - \frac{\omega_2^{(-)}}{\omega_0} \frac{b_1^{(+)} - b_2^{(+)}}{b_2^{(+)} - b_2^{(-)}} H_0,$$

где

$$b_j^{(\pm)} = \frac{1}{\varepsilon_j} \{ (ck_{jz}^{(\pm)} - \beta_z \omega_j^{(\pm)}) - \\ - \kappa_j \gamma_j^2 (\beta_x - \beta_j) (\omega_j^{(\pm)} - \beta_j ck_{jz}^{(\pm)}) \}, \quad (39)$$

а формулы (21) для $\omega_j^{(\pm)}$ и $k_{jz}^{(\pm)}$ остаются без изменения.

Полученные прямым расчетом простые соотношения между решениями для волн с E - и H -поляризациями являются следствием определенной симметрии уравнений Максвелла—Минковского (2) и (3) в случае отсутствия зарядов и токов. Действительно, если $\rho = j = 0$, то уравнения (2) и (3) остаются без изменения при следующей замене входящих в них величин:

$$E \rightarrow H, \quad H \rightarrow (-E), \quad D \rightarrow B, \quad B \rightarrow (-D),$$

$$\varepsilon \rightarrow \mu \text{ и } \mu \rightarrow \varepsilon.$$

Выражения для $a_j^{(\pm)}$ и $b_j^{(\pm)}$ в (31) и (39) можно существенно упростить, если подставить в них формулы для $\omega_j^{(\pm)}$ и $k_{jz}^{(\pm)}$ из (21). После некоторых преобразований получим

$$a_j^{(\pm)} = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}} \sqrt{1 - \frac{d_j}{1 + \kappa_j} \left(\frac{cI_x}{\gamma I_\omega} \right)^2}, \\ b_j^{(\pm)} = \pm \sqrt{\frac{\mu_j}{\varepsilon_j}} \sqrt{1 - \frac{d_j}{1 + \kappa_j} \left(\frac{cI_x}{\gamma I_\omega} \right)^2}, \quad (40)$$

где

$$\kappa_j = (\varepsilon_j \mu_j - 1), \quad d_j = [1 - \kappa_j \gamma_j^2 (\beta_x - \beta_j)^2], \quad \gamma_j^{-2} = (1 - \beta_j^2), \\ \gamma^{-2} = (1 - \beta_x^2),$$

а кинематические инварианты I_ω и I_x определяются параметрами падающей волны и скоростью перемещения границы раздела

$$I_\omega = (\omega_0 - u_x k_{0x}), \quad I_x = k_{0x}. \quad (41)$$

Напомним, что $j = 1$ и $j = 2$ обозначают параметры среды, откуда падает волна ($j = 1$), и среды, куда она преломляется ($j = 2$). Эти среды перемещаются вдоль оси z со скоростью $u_j = c\beta_j$.

Если какая-либо из сред обладает дисперсией, то во всех приведенных выше формулах проницаемости ε_j и μ_j стано-

вятся заданными функциями частоты ω'_j , которую воспринимает j -я среда в системе своего покоя. Согласно (21),

$$\omega'_j = \gamma_j (\omega_j^{(\pm)} - u_j k_{jz}^{(\pm)}) = I_\omega \frac{(1 - \beta_j \beta_z) \gamma_j \gamma^2}{d_j} \times \\ \times \left\{ 1 \pm \frac{\beta_z - \beta_j}{1 - \beta_z \beta_j} \sqrt{\varepsilon_j \mu_j - d_j \left(\frac{c I_x}{\gamma I_\omega} \right)^2} \right\}. \quad (41')$$

Однако поскольку в это выражение входят величины ε_j и μ_j , которые сами, вообще говоря, являются функциями искомой частоты ω'_j , то равенство (41'), так же как и выражения (21), по сути дела являются уравнениями относительно искомых величин $\omega_j^{(\pm)}$, $k_{jz}^{(\pm)}$ и ω'_j . Их решение зависит от конкретного вида дисперсионных зависимостей $\varepsilon_j = \varepsilon_j(\omega')$ и $\mu_j = \mu_j(\omega')$ в системе покоя каждой из j -х сред. Поскольку для различных волн в одной и той же среде, например падающей и отраженной, в силу заметной разницы частот могут возникнуть различные дисперсионные зависимости, то замена в формулах (40) ε_j и μ_j на соответствующие функции $\varepsilon_j(\omega_j)$ и $\mu_j(\omega_j)$ не столь очевидна, ибо при их выводе уже были использованы выражения (21). Поэтому при более аккуратном учете дисперсии следует использовать более общие выражения (29) и (39)

$$a_j^{(\pm)} = \frac{1}{\mu_j} \{ (ck_{jz}^{(\pm)} - \beta_z \omega_j^{(\pm)}) - \\ - x_j \gamma_j^2 (\beta_z - \beta_j) (\omega_j^{(\pm)} - \beta_j ck_{jz}^{(\pm)}) \}, \quad (42)$$

$$b_j^{(\pm)} = \frac{1}{\varepsilon_j} \{ (ck_{jz}^{(\pm)} - \beta_z \omega_j^{(\pm)}) - \\ - x_j \gamma_j^2 (\beta_z - \beta_j) (\omega_j^{(\pm)} - \beta_j ck_{jz}^{(\pm)}) \}.$$

В этих выражениях для каждой из волн в аргументы функций μ_j и ε_j нужно подставить соответствующую частоту ω'_j :

$$\omega'_j = \gamma_j (\omega_j^{(\pm)} - \beta_j ck_{jz}^{(\pm)}), \quad (43)$$

которую воспринимает j -я среда в системе покоя.

В последующем нам придется не только определять амплитуды отраженных и преломленных волн, но и на-

ходить коэффициенты отражения R и пропускания T по мощности. Эти коэффициенты определяются формулами

$$R = \frac{|S_{1z}|}{|S_{0z}|}, \quad T = \frac{|S_{2z}|}{|S_{0z}|} \quad (44)$$

— для досветового случая и

$$T_1 = T = \frac{|S_{2z}^{(+)}|}{|S_{0z}|} \quad \text{и} \quad T_2 = \frac{|S_{2z}^{(-)}|}{|S_{0z}|} \quad (45)$$

— для сверхсветового случая. Здесь \bar{S}_{jz} — нормальная к границе раздела компонента плотности потока энергии в каждой из волн, усредненная по периоду соответствующего колебания. Индексы $j=0, 1$ и 2 относятся к падающей ($j=0$), отраженной ($j=1$) и преломленной ($j=2$) волнам. Две преломленные волны для сверхсветового случая имеют индексы «+» и «-» в соответствии с проекциями направлений их распространения на ось z (нормаль к границе раздела). С помощью формул (22) и (23) нетрудно показать, что при попутном движении падающей волны и сред по обе стороны от границы раздела для E -поляризации падающей волны

$$\begin{aligned} \bar{S}_{jz} &= \frac{c}{8\pi} E_j H_{jx} = \\ &= \frac{c^2 E_j^2}{8\pi \mu_j \omega_j} \{k_{jz} + \alpha_j \gamma_j^2 \beta_j c^{-1} (\omega_j - u_j k_{jz})\}. \end{aligned} \quad (46)$$

При встречном движении падающей волны и обеих сред нужно во всех формулах заменять $u_j \rightarrow (-u_j)$ и $\beta_j \rightarrow (-\beta_j)$. Нетрудно показать, что в последнем случае формулы для коэффициентов R и T примут вид

$$\begin{aligned} R &= \frac{\omega_0 |k_{1z} - \alpha_1 \beta_1 \gamma_1^2 c^{-1} (\omega_1 + u_1 k_{1z})|}{|\omega_1| |k_{0z} - \alpha_1 \beta_1 \gamma_1^2 c^{-1} (\omega_0 + u_1 k_{0z})|} \left| \frac{E_1}{E_0} \right|^2, \\ T &= \frac{\mu_1 \omega_0}{\mu_2 |\omega_2|} \frac{|k_{2z} - \alpha_2 \beta_2 \gamma_2^2 c^{-1} (\omega_2 + u_2 k_{2z})|}{|k_{0z} - \alpha_1 \beta_1 \gamma_1^2 c^{-1} (\omega_0 + u_1 k_{0z})|} \left| \frac{E_2}{E_0} \right|^2 \end{aligned} \quad (47)$$

для досветового случая и для сверхсветового случая

$$\begin{aligned} T_1 &\equiv T, \quad T_2 = \frac{\mu_1 \omega_0}{\mu_2 |\omega_2^{(-)}|} \times \\ &\times \frac{|k_{2z}^{(-)} - \alpha_2 \beta_2 \gamma_2^2 c^{-1} (\omega_2^{(-)} + u_2 k_{2z}^{(-)})|}{|k_{0z} - \alpha_1 \beta_1 \gamma_1^2 c^{-1} (\omega_0 + u_1 k_{0z})|} \left| \frac{E_2^{(-)}}{E_0} \right|^2. \end{aligned} \quad (48)$$

В заключение отметим следующее. Мы получили все необходимые формулы для вычисления частот, компонент

волновых векторов и амплитуд всех волн, возникающих при взаимодействии плоской монохроматической квазипоперечной волны с нормальным разрывом скоростей движения сред. Хотя эти формулы относительно громоздки, но с их помощью мы можем довольно просто рассмотреть наиболее интересные случаи трансформации волн. К ним можно отнести отражение и преломление волн на границе раздела вакуума с движущимся диэлектриком. Частным и весьма интересным примером такого диэлектрика может служить плотный сгусток релятивистских электронов или движущейся плазмы. Другим примером может быть задача трансформации волн на фронте ударной волны, движущейся по покоящейся среде. Частным случаем такой ударной волны может быть мощный импульс электромагнитного излучения оптического диапазона, сканируемый извне по оптически нелинейной среде, или мощный электронный пучок, меняющий электромагнитные свойства среды при сканировании этого пучка по веществу. К более детальному изучению этих случаев мы сейчас и переходим.

3. Простейшие задачи трансформации волн

А. Нормальное падение волн

Заметим прежде всего, что при нормальном падении волн, когда $I_x = k_{0x} = 0$, в формулы (40) для величин $a_j^{(\pm)}$ и $b_j^{(\mp)}$ входят только проницаемости каждой из сред в ее системе покоя. Поэтому, если не учитывать изменение частот, приводящее к появлению соответствующих коэффициентов вида $\omega_j^{(\pm)}/\omega_0$ в формулах (33), (36—38), эти формулы при нормальном падении совпадают с соответствующими формулами Френеля для покоящихся сред и покоящейся границы раздела. Точнее, формулы Френеля в нашем случае получаются для величин E_j/ω_j и H_j/ω_j , пропорциональных амплитудам векторного потенциала волн. Движение сред и границ раздела проявляется только в трансформации частот, а также в том, что дополнительно появляется случай сверхсветового отражения, в котором искомые амплитуды двух преломленных волн определяются по формулам (36) и (38), отличным от обычных френелевских формул.

Приведем формулы для частот, компонент волновых векторов и амплитуд всех волн при их нормальном падении на движущуюся границу раздела двух перемещающихся относительно нее сред. Из формул (21) следует, что

$$\begin{aligned}
 I_{\omega} &= \omega_0 - \beta_z c k_0 = \omega_0 \frac{(1 - \beta_1 \beta_z) - \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} (\beta_z - \beta_1)}{1 + \beta_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}, \\
 \omega_0 &= \omega_1^{(+)} = I_{\omega} \frac{1 + \beta_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{(1 - \beta_1 \beta_z) - \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} (\beta_z - \beta_1)}, \\
 \omega_1 &\equiv \omega_1^{(-)} = I_{\omega} \frac{1 - \beta_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{(1 - \beta_1 \beta_z) + \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} (\beta_z - \beta_1)} = \\
 &= \omega_0 \frac{1 - \beta_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{1 + \beta_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} \cdot \frac{(1 - \beta_1 \beta_z) - \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} (\beta_z - \beta_1)}{(1 - \beta_1 \beta_z) + \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} (\beta_z - \beta_1)}, \\
 c k_0 &\equiv c k_1^{(+)} = \frac{(\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} + \beta_1) \omega_0}{1 + \beta_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}, \\
 c k_1 &\equiv c k_1^{(-)} = - \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} - \beta_1}{1 - \beta_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} \omega_1; \\
 \omega_2 &\equiv \omega_2^{(+)} = \frac{I_{\omega} (1 + \beta_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2})}{(1 - \beta_2 \beta_z) - (\beta_z - \beta_2) \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} = \\
 &= \omega_0 \frac{1 + \beta_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{1 + \beta_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} \frac{(1 - \beta_1 \beta_z) - (\beta_z - \beta_1) \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{(1 - \beta_2 \beta_z) - (\beta_z - \beta_2) \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}, \\
 \omega_2^{(-)} &= \frac{I_{\omega} (1 - \beta_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2})}{(1 - \beta_2 \beta_z) + (\beta_z - \beta_2) \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} = \\
 &= \omega_0 \frac{1 - \beta_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{1 + \beta_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} \cdot \frac{(1 - \beta_1 \beta_z) - (\beta_z - \beta_1) \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{(1 - \beta_2 \beta_z) + (\beta_z - \beta_2) \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}, \\
 c k_2 &= c k_2^{(+)} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} + \beta_2}{1 + \beta_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} \omega_2, \quad c k_2^{(-)} = - \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} - \beta_2}{1 - \beta_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} \omega_2^{(-)}.
 \end{aligned} \tag{49}$$

Интересно отметить, что если две движущиеся среды разделены покоящейся границей раздела, т. е. $\beta_z = 0$, то частоты всех волн одинаковы и равны частоте падающей волны, хотя в выражения для волновых векторов входят скорости движения сред. С помощью приведенных выше формул можно рассмотреть и все другие частные случаи.

Формулы для амплитуд векторного потенциала $A_j = E_j / \omega_j$ получаются в этом случае ($I_x = 0$) из соотношений

(33), (36)—(40). Например, для E -поляризации падающей волны и досветового случая получим

$$A_1 = -\frac{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} - \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} + \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}} A_0, \quad A_2 = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} + \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}} A_0. \quad (50)$$

При сверхсветовом движении границы раздела будет

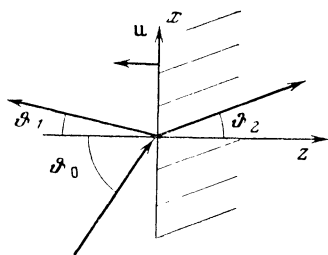
$$A_2 = \frac{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} + \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}}{2\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}} A_0, \quad A_2^{(-)} = -\frac{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} - \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}}{2\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}} A_0. \quad (51)$$

Для H -поляризации падающей волны все формулы получаются из случая E -поляризации заменой $\varepsilon \rightarrow \mu$ и $\mu \rightarrow \varepsilon$ одновременно.

Такую нечувствительность амплитудных формул для A_j к движению сред и даже границы раздела при нормальном падении можно качественно объяснить тем, что в данном примере выделенная ось анизотропии каждой из сред, направленная по скорости их движения, совпадает с направлением распространения волны. В этом случае анизотропия среды не сказывается на распространении волн точно так же, как это имеет место при распространении волн в магнитоактивной плазме [28, 29],

Б. Движущийся в вакууме диэлектрик без дисперсии

Перейдем теперь к анализу процессов отражения и преломления волн, падающих из вакуума под углом ϑ_0 на границу раздела с диэлектриком, перемещающимся



Кинематика отражения и преломления волн на движущемся диэлектрике

навстречу падающей волне со скоростью $u = c\beta$. В системе покоя среда обладает диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ . Кинематика отражения и преломления показана на рисунке. Поскольку скорость распространения волны в вакууме равна скорости света,

то диэлектрик не может обогнать отраженную волну, и в данном случае реализуется только досветовой случай отражения. Формулы для этого случая можно получить из формул общего случая, если в них положить

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \mu_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon, \quad \mu_2 = \mu, \quad \beta_1 = 0, \\ \beta_2 = \beta_z = -\beta \end{aligned} \quad (52)$$

и ввести углы падения ϑ_0 , отражения ϑ_1 и преломления ϑ_2 с помощью соотношений

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = k_{0x}/k_{0z}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_1 = -k_{1x}/k_{1z}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_2 = k_{2x}/k_{2z}. \quad (53)$$

Поскольку в вакууме $k_0^2 = \omega_0^2/c^2$, то из формул (21) и (40) для частот и амплитуд отраженных и преломленных волн получим для падающей волны ($x_1=0$, $d_1=1$)

$$\begin{aligned} I_x = k_{0x} = \frac{\omega_0}{c} \sin \vartheta_0, \quad k_{0z} = \frac{\omega_0}{c} \cos \vartheta_0, \\ I_\omega = \omega_0 + k_{0z}\mu = \omega_0(1 + \beta \cos \vartheta_0), \quad a_1^{(+)} \equiv a_0 = \frac{\cos \vartheta_0 + \beta}{1 + \beta \cos \vartheta_0}, \end{aligned} \quad (54)$$

для отраженной волны ($x_1=0$, $k_1^2 = \omega_1^2/c^2$, $d_1=1$)

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_0 \frac{(1 + \beta^2) + 2\beta \cos \vartheta_0}{1 - \beta^2}, \quad k_{1x} = I_x = \frac{\omega_0}{c} \sin \vartheta_0, \\ k_{1z} = -\frac{\omega_0}{c} \cdot \frac{(1 + \beta^2) \cos \vartheta_0 + 2\beta}{1 - \beta^2}, \\ \operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{\sin \vartheta_0 (1 - \beta^2)}{(1 + \beta^2) \cos \vartheta_0 + 2\beta}, \\ a_1^{(-)} = -a_0 = -\frac{\cos \vartheta_0 + \beta}{1 + \beta \cos \vartheta_0}, \end{aligned} \quad (55)$$

для преломленной волны ($x_2 = \varepsilon\mu - 1$, $d_2 = 1$)

$$\begin{aligned} k_{2x} = k_{0x} = \frac{\omega_0}{c} \sin \vartheta_0, \\ \omega' = \gamma(\omega_2 + k_{2z}\mu) = \gamma I_\omega = \gamma \omega_0(1 + \beta \cos \vartheta_0), \\ \omega_2 = \omega_0 \gamma^2 \left\{ (1 + \beta \cos \vartheta_0) - \beta \sqrt{(\cos \vartheta_0 + \beta)^2 + \varepsilon(1 + \beta \cos \vartheta_0)^2} \right\} = \\ = \omega_0 \gamma^2 \left\{ (1 + \beta \cos \vartheta_0)^2 (1 - \varepsilon\mu\beta^2) + \right. \\ \left. + \beta^2 (1 - \beta^2) \sin^2 \vartheta_0 \right\} / \left\{ (1 + \beta \cos \vartheta_0) + \beta \sqrt{\vphantom{\omega_2}} \right\}, \end{aligned}$$

$$k_{2z} = \frac{\omega_0}{c} \gamma^2 \left\{ \sqrt{(\cos \vartheta_0 + \beta)^2 + \kappa (1 + \beta \cos \vartheta_0)^2} - \right. \\ \left. - \beta (1 + \beta \cos \vartheta_0) \right\} = \frac{\omega_0}{c} \gamma^2 \{ (\varepsilon\mu - \beta^2) \times \\ \times (1 + \beta \cos \vartheta_0)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \vartheta_0 \} / \\ / \left\{ \sqrt{(\cos \vartheta_0 + \beta)^2 + \kappa (1 + \beta \cos \vartheta_0)^2} + \right. \\ \left. + \beta (1 + \beta \cos \vartheta_0) \right\}, \quad (56)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta_2 = \frac{k_{2x}}{k_{2z}} = \\ = \frac{\sin^2 \vartheta_0 (1 - \beta^2) \left[\sqrt{(\cos \vartheta_0 + \beta)^2 + \kappa (1 + \beta \cos \vartheta_0)^2} + \right. \\ \left. + \beta (1 + \beta \cos \vartheta_0) \right]}{(\varepsilon\mu - \beta^2) (1 + \beta \cos \vartheta_0)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \vartheta_0},$$

$$a_2^{(+)} \equiv a_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sqrt{1 - \frac{(1 - \beta^2) \sin^2 \vartheta_0}{\varepsilon\mu (1 + \beta \cos \vartheta_0)^2}} = \\ = \frac{\sqrt{(\cos \vartheta_0 + \beta)^2 + \kappa (1 + \beta \cos \vartheta_0)^2}}{\mu (1 + \beta \cos \vartheta_0)},$$

где

$$\kappa = (\varepsilon\mu - 1), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}.$$

Эти формулы относятся к падающим волнам с E -поляризацией, когда электрические векторы всех волн перпендикулярны плоскости падения (x, z) (см. рис.). Для волн с H -поляризацией, когда магнитные векторы перпендикулярны плоскости падения, в выражении для $a_2^{(+)}$ нужно заменить ε на μ и одновременно с этим μ на ε , так что

$$b_2^{(+)} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \vartheta_0 (1 - \beta^2)}{\varepsilon\mu (1 + \beta \cos \vartheta_0)^2}} = \\ = \frac{\sqrt{(\cos \vartheta_0 + \beta)^2 + \kappa (1 + \beta \cos \vartheta_0)^2}}{\varepsilon (1 + \beta \cos \vartheta_0)}. \quad (57)$$

Если диэлектрик перемещается в направлении распространения падающей волны, т. е. эта волна догоняет диэлектрик, то формулы для этого случая можно найти из выражений (54)–(56), заменив в них везде β на $(-\beta)$. При этом падающая волна будет только тогда догонять диэлектрик, когда ее скорость распространения в направлении оси z больше скорости перемещения диэлектрика, т. е. $v_{gz} = \partial\omega_0/\partial k_{0z} = c \cos \vartheta_0 > u$. Очевидно, что это выполняется только при $\cos \vartheta_0 > u/c$.

Обсудим полученные формулы (54)—(56).

Во-первых, кинематика отражения волн от движущегося диэлектрика совпадает с кинематикой отражения от движущегося зеркала. Это значит, что частота отраженной волны ω_1 и угол отражения ϑ_1 зависят от параметров ω_0 и ϑ_0 падающей волны и скорости движения диэлектрика u точно так же, как при отражении от релятивистского зеркала [1]. Как известно, при таком отражении частота отраженной волны ω_1 может стать существенно больше частоты падающей волны ω_0 , а направление отраженной волны становится близким к нормальному независимо от угла падения ϑ_0 : релятивистский диэлектрик, как и такое же зеркало, отбрасывает все падающие на него лучи прямо «по ходу» своего движения. Действительно, при $(1 - \beta^2) \ll 1$

$$\omega_1 \simeq \frac{2 \cos^2 \vartheta_0 / 2}{1 - \beta} \omega_0, \quad \text{tg } \vartheta_1 \simeq (1 - \beta) \text{tg } \frac{\vartheta_0}{2}. \quad (58)$$

Во-вторых, незеркальность отражения волн от движущегося диэлектрика сказывается только на амплитудах отраженных волн, ибо за счет появления преломленной волны, уносящей некоторую часть энергии падающего излучения, амплитуда отраженной от диэлектрика волны всегда меньше, чем при отражении от зеркала. Согласно формулам (33) и (37), амплитудные коэффициенты отражения r_{\perp} и r_{\parallel} для волн E -поляризации и H -поляризации имеют вид

$$r_{\perp} = \frac{E_1}{E_0} = m_1 r'_{\perp}, \quad r_{\parallel} = \frac{H_1}{H_0} = m_1 r'_{\parallel}, \quad (59)$$

где

$$m_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{1 + \beta^2 + 2\beta \cos \vartheta_0}{1 - \beta^2} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \left[1 - \frac{4\beta}{(1 + \beta)^2} \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \right],$$

$$r'_{\perp} = - \frac{a_2^{(+)} - a_1^{(+)}}{a_2^{(+)} - a_1^{(-)}} = - \frac{\sqrt{y_{\varepsilon}} - 1}{\sqrt{y_{\varepsilon}} + 1},$$

$$r'_{\parallel} = - \frac{b_2^{(+)} - b_1^{(+)}}{b_2^{(+)} - b_1^{(-)}} = - \frac{\sqrt{y_{\mu}} - 1}{\sqrt{y_{\mu}} + 1},$$

$$y_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\mu} \left(\frac{1 + \beta \cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_0 + \beta} \right)^2 - \frac{(1 - \beta^2) \sin^2 \vartheta_0}{\mu^2 (\cos \vartheta_0 + \beta)^2}, \quad (60)$$

$$y_{\mu} = \frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{1 + \beta \cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_0 + \beta} \right)^2 - \frac{(1 - \beta^2) \sin^2 \vartheta_0}{\varepsilon^2 (\cos \vartheta_0 + \beta)^2}.$$

Амплитудные коэффициенты отражения от движущегося диэлектрика в (59) состоят из произведений двух сомножителей. Первый из них, m_1 , не зависит от поляризации падающей волны и совпадает по величине с амплитудным коэффициентом отражения волны от движущегося зеркала. Он равен отношению частот при двойном преобразовании Лоренца к системе покоя среды и обратно (двойной эффект Доплера). Вторые сомножители, r'_\perp и r'_\parallel , учитывают незеркальность отражения волн от движущегося диэлектрика и зависят от его параметров ϵ и μ , от скорости его движения u и от угла падения волны ϑ_0 . При нормальном падении волны на движущийся диэлектрик

$$r'_\perp(\vartheta_0=0) = m_1 r_0, \quad r'_\parallel(\vartheta_0=0) = -m_1 r_0, \quad (61)$$

где $r_0 = \frac{\sqrt{\epsilon} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{\epsilon} + \sqrt{\mu}}$ — амплитудный коэффициент Френелевского отражения от границы покоящегося диэлектрика в вакууме при нормальном падении волны; значит коэффициенты r'_\perp и r'_\parallel при нормальном падении не зависят от скорости движения диэлектрика.

С увеличением угла падения ϑ_0 от 0 до $\pi/2$ и с ростом скорости движения среды будут меняться оба сомножителя в выражениях (59) для r'_\perp и r'_\parallel . Как и прежде, изменение величины m_1 будет таким же, как и при отражении волн от релятивистского зеркала, т. е. сомножитель m_1 будет расти с ростом скорости перемещения границы раздела и убывать с ростом угла падения ϑ_0 .

Для того чтобы проследить зависимость величин r'_\perp и r'_\parallel от угла падения и скорости движения среды, представим эти величины в виде

$$(-r'_\perp) = \frac{\sqrt{y_\epsilon} - 1}{\sqrt{y_\epsilon} + 1}, \quad (-r'_\parallel) = \frac{\sqrt{y_\mu} - 1}{\sqrt{y_\mu} + 1}, \quad (62)$$

где $x = \cos \vartheta_0$, а

$$y_\epsilon = \frac{\epsilon}{\mu} \left(\frac{1 + \beta x}{x + \beta} \right)^2 - \frac{1 - \beta^2}{\mu^2} \frac{1 - x^2}{(x + \beta)^2},$$

$$y_\mu = \frac{\mu}{\epsilon} \left(\frac{1 + \beta x}{x + \beta} \right)^2 - \frac{1 - \beta^2}{\epsilon^2} \frac{1 - x^2}{(x + \beta)^2}.$$

Нетрудно показать, что производные $\frac{d}{d\vartheta_0}(-r'_\perp)$ и $\frac{d}{d\vartheta_0}(-r'_\parallel)$ положительны во всем интервале углов падения $0 \leq \vartheta_0 \leq \pi/2$.

Поэтому величины $(-r'_\perp)$ и $(-r'_\parallel)$ с увеличением угла падения ϑ_0 монотонно возрастают. Если при нормальном падении коэффициенты $r'_\perp(0)$ и $r'_\parallel(0)$ в (61) равны по абсолютной величине, то с ростом угла падения они возрастают и при касательном падении будут

$$r'_\perp\left(\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{\varepsilon/\mu + \Delta_\varepsilon} - 1}{\sqrt{\varepsilon/\mu + \Delta_\varepsilon} + 1},$$

$$r'_\parallel\left(\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{\mu/\varepsilon + \Delta_\mu} - 1}{\sqrt{\mu/\varepsilon + \Delta_\mu} + 1},$$
(63)

где $\Delta_\varepsilon = \frac{(1 - \beta^2)(\varepsilon\mu - 1)}{\mu^2\beta^2}$, $\Delta_\mu = \frac{(1 - \beta^2)(\varepsilon\mu - 1)}{\varepsilon^2\beta^2}$. Отсюда

видно, что при отражении почти касательных лучей ($\vartheta_0 \simeq \pi/2$) от границы раздела с покоящимся диэлектриком ($\beta \rightarrow 0$) величины r'_\perp , r'_\parallel в (63) стремятся к единице (по абсолютной величине). Такие лучи испытывают полное отражение. Движение диэлектрика уменьшает эти коэффициенты по абсолютной величине.

При релятивистском движении диэлектрика, когда $\beta \simeq 1$, из формул (62) следует

$$\{-r'_\perp(\beta = 1)\} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} - 1}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} + 1} = -r_0,$$

$$\{-r'_\parallel(\beta = 1)\} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} - 1}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} + 1} = +r_0.$$
(64)

Эти амплитудные коэффициенты отражения не зависят от угла падения ϑ_0 и совпадают с коэффициентами отражения в (61) при нормальном падении волны. Связано это с тем, что при релятивистском движении границы раздела отраженная волна всегда отбрасывается в направлении нормали к поверхности раздела независимо от угла падения ϑ_0 .

Между случаем E -поляризации ($r' = r'_\perp$), когда электрический вектор падающей волны перпендикулярен плоскости падения, и случаем H -поляризации ($r' = r'_\parallel$), когда магнитный вектор падающей волны перпендикулярен плоскости падения, а электрический вектор лежит в плоскости па-

дения, имеется существенная разница. Если при $\varepsilon \gg \mu \gg 1$ величина $(-r'_\perp)$, монотонно возрастающая, всегда остается положительной, то величина $(-r'_\parallel)$ при монотонном возрастании проходит через нуль. Это хорошо известное и в покоящихся средах явление полной поляризации отраженного излучения [16]. Угол $\vartheta_0 = \vartheta_p$, при котором отраженное излучение (электрический вектор!) всегда поляризовано перпендикулярно плоскости падения, находится в данном случае из

$$\cos \vartheta_p = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu - 1} - \beta \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \beta - \sqrt{\varepsilon\mu - 1}}. \quad (65)$$

Это угол Брюстера при отражении волн от движущегося диэлектрика. Он зависит от скорости перемещения среды и находится в интервале $0 \leq \vartheta_p \leq \pi/2$ только в том случае, когда скорость движения $u = c\beta$ меньше критической:

$$0 \leq \beta \leq \beta_{кр} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon^2 - 1}}. \quad (66)$$

При $\beta > \beta_{кр}$ не существует явления полной поляризации отраженного излучения. Это можно понять, если вспомнить физическую причину явления. Оно связано с тем, что отраженная и преломленная волны образуются в результате интерференции вторичных волн с падающей волной. Эти вторичные волны возникают от тех излучателей в среде за границей раздела, которые возбуждаются падающей волной. Угол Брюстера соответствует тому случаю, когда направления преломленной и отраженной волн перпендикулярны друг другу. Если проследить кинематику отражения и преломления волн на движущемся диэлектрике, то можно видеть, что при $\beta = \beta_{кр}$ отраженная и преломленная волна составляют между собой прямой угол только при касательном падении, когда $\vartheta_0 = \pi/2$. При $\vartheta_0 < \pi/2$ угол между ними больше прямого при любом угле падения ϑ_0 , и явление Брюстера исчезает.

Перейдем теперь к изучению характеристик преломленной волны, прошедшей через границу в диэлектрик. Параметры этой волны существенным образом зависят от скорости движения среды и ее преломляющих свойств. Из формул (33) и (37), (56)–(57) следует

$$P_\perp = \frac{E_2}{E_0} = m_2 P'_\perp, \quad P_\parallel = \frac{H_2}{H_0} = m_2 P'_\parallel, \quad (67)$$

где

$$m_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} = (1 + \beta \cos \vartheta_0) \gamma^2 \times \\ \times \left[1 - \beta \sqrt{\epsilon_\mu - (1 - \beta^2) \frac{\sin^2 \vartheta_0}{(1 + \beta \cos \vartheta_0)^2}} \right], \quad (68)$$

$$p'_\perp = \frac{a_1^{(+)} - a_1^{(-)}}{a_2^{(+)} - a_1^{(-)}} = \frac{2}{\sqrt{y_\epsilon} + 1},$$

$$p'_\parallel = \frac{b_1^{(+)} - b_1^{(-)}}{b_2^{(+)} - b_1^{(-)}} = \frac{2}{\sqrt{y_\mu} + 1}$$

при

$$y_\epsilon = \frac{\epsilon}{\mu} \left(\frac{1 + \beta x}{x + \beta} \right)^2 - \frac{(1 - \beta^2)(1 - x^2)}{\mu^2 (x + \beta)^2},$$

$$y_\mu = \frac{\mu}{\epsilon} \left(\frac{1 + \beta x}{x + \beta} \right)^2 - \frac{(1 - \beta^2)(1 - x^2)}{\epsilon^2 (x + \beta)^2},$$

где $x = \cos \vartheta_0$.

Отсюда и из (56) видно, что при релятивистском движении диэлектрика преломленная волна распространяется внутрь диэлектрика почти по нормали к границе раздела. Поэтому направления распространения отраженной и преломленной волн в этом случае составляют между собой почти развернутый угол. Явление полной поляризации отраженного излучения наступает тогда, когда преломленная и отраженная волны составляют между собой прямой угол. В этом случае направление осей диполей, возбуждаемых в среде пришедшей в нее волной, совпадает с направлением отраженной волны, а как известно, в таком случае диполи не излучают в направлении своих осей. Поэтому нет отраженной волны под углом Брюстера. Если электрический вектор волны, падающей из вакуума на покоящийся диэлектрик, лежит в плоскости падения, то всегда найдется такой угол падения $\vartheta_0 = \vartheta_p$, при котором отраженная и преломленная волны составляют прямой угол. Однако при заданном угле падения ϑ_0 с ростом скорости движения диэлектрика начинает увеличиваться угол между направлениями отраженной и преломленной волн, причем так, что при релятивистском движении ($\beta \rightarrow 1$) этот угол уже равен развернутому углу независимо от угла падения. А это значит, что при таком движении среды исчезает явление полной поляризации отраженного излучения.

Из формул (68) следует, что с ростом скорости движения среды частота преломленной волны также увеличивается, но в более медленном темпе. Кроме того, поскольку преломленная волна распространяется навстречу движению среды, движущаяся среда может увлечь за собой эту волну столь сильно, что преломленная волна может поменять направление своего распространения и начать распространяться за уходящей границей раздела диэлектрика с вакуумом. Из формул (56) можно найти условия, при которых будет наблюдаться такое сильное увлечение. Используя приведенные там выражения, можно показать, что в преломленной волне величины $k_{2x} = k_{0x}$ и k_{2z} всегда положительны, а величина ω_2 становится отрицательной, когда $\epsilon\mu\beta^2 > 1$, причем при

$$\beta^2 \geq \frac{2}{(\epsilon\mu - 1) + \sqrt{(\epsilon\mu - 1)^2 + 4}} > \frac{1}{\epsilon\mu} \quad (69)$$

будет $\omega_2 < 0$ для любых углов падения ϑ_0 . При условии

$$\frac{2}{(\epsilon\mu - 1) + \sqrt{(\epsilon\mu - 1)^2 + 4}} \geq \beta^2 > \frac{1}{\epsilon\mu} \quad (70)$$

частота ω_2 становится отрицательной только при таких углах падения, для которых

$$\frac{q - \beta}{1 - \beta q} \leq \cos \vartheta_0 \leq 1, \quad (71)$$

где

$$q = \frac{1}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2(\epsilon\mu - 1)}.$$

В случае отрицательной частоты преломленной волны ω_2 и положительных компонентах k_{2x} и k_{2z} ее волнового вектора \mathbf{k}_2 фазовая скорость этой волны становится также отрицательной:

$$v_{2\phi x} = \frac{\omega_2}{k_{2x}} < 0 \text{ и } v_{2\phi z} = \frac{\omega_2}{k_{2z}} < 0,$$

т. е. эта волна уже направлена к границе раздела. Это еще один пример нарушения принципа излучения Зоммерфельда [8]. Однако принцип излучения Мандельштама и все другие эквивалентные ему принципы выполняются и в этом случае, ибо $u - |v_{2gx}| > 0$ всегда, и поэтому такая преломленная волна (с $v_{2gx} < 0$ и $v_{2\phi z} < 0$) по-прежнему отводит

энергию от границы раздела. Отметим кстати, что при $\omega_2 = 0$ преломленная волна имеет вид статического неоднородного поля $E_2 \exp \{i(k_{2x}x + k_{2z}z)\}$, в котором имеется отличный от нуля поток энергии, направленный вдоль фронта этой волны. Это следует из того, что $(\mathbf{k}_2, \mathbf{v}_{2g})|_{\omega_2=0} = 0$, но $v_{2gz}|_{\omega_2=0} \neq 0$. Последнее ясно из формул для групповой скорости в движущейся среде без дисперсии, приведенных, например, в [8].

Отраженная и преломленная волны обладают еще рядом дополнительных особенностей. Например, если падающая волна и диэлектрик перемещаются в одном направлении, то при

$$\frac{2\beta}{1 + \beta^2} \geq \cos \vartheta_0 \geq \beta \quad (72)$$

отраженная волна распространяется в том же направлении. В этом случае фазовая и групповая скорости отраженной волны направлены к уходящей от них границе раздела, хотя эти скорости по-прежнему меньше скорости границы раздела. Кстати, условия $\cos \vartheta_0 \geq \beta$, или $c \cos \vartheta_0 \geq u$, являются, как мы видели ранее, условием того, что падающая волна догоняет уходящую от нее границу раздела. Кроме того, при почти касательном падении волны на движущийся навстречу ей диэлектрик, т. е. при $\vartheta_0 = \pi/2$, углы отражения ϑ_{1l} и преломления ϑ_{2l} отличны от $\pi/2$ и равны

$$\operatorname{tg} \vartheta_{1l} = \frac{1 - \beta^2}{2\beta}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_{2l} = \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{\varepsilon\mu} - 1 + \beta^2 - \beta}. \quad (72a)$$

Мы подробно проанализировали кинематику отражения и преломления волн на движущемся диэлектрике. Для диагностических целей и других применений полезно иметь и энергетические соотношения. Введем, как обычно, коэффициенты отражения R и пропускания T по мощности, равные, согласно (44) и (45),

$$R = \frac{I_1}{I_0} = \frac{|\bar{S}_{1z}|}{|\bar{S}_{0z}|}, \quad T = \frac{I_2}{I_0} = \frac{|\bar{S}_{2z}|}{|\bar{S}_{0z}|}, \quad (73)$$

где \bar{S}_z — нормальная к границе раздела компонента плотности потока энергии $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ в каждой волне, усредненная по периоду колебаний, $I_{0,1,2}$ — интенсивность в соответствующей волне. С помощью уравнений Максвелла (4) и материальных уравнений Минков-

ского (5) можно показать, что для движущегося в вакууме диэлектрика при электрическом векторе волн, перпендикулярном плоскости падения (E -поляризации),

$$R_{\perp} = \left| \frac{\omega_0 k'_{1z}}{\omega_1 k'_{0z}} \right| |m_1|^2 |r'_{\perp}|^2 = \left| \frac{\omega_1 k'_{1z}}{\omega_0 k'_{0z}} \right| |r'_{\perp}|^2, \quad (74)$$

$$T_{\perp} = \frac{\omega_0 |k'_{2z} - \chi^2 \gamma^2 c^{-1} (\omega_2 + uk'_{2z})|}{\omega_2 \mu k'_{0z}} |m_2|^2 |p'_{\perp}| =$$

$$= \frac{|\omega_2| \cdot |k'_{2z} - \chi^2 \gamma^2 c^{-1} (\omega_2 + uk'_{2z})|}{|\mu \omega_0 k'_{0z}|} |p'_{\perp}|^2,$$

где все величины приведены в формулах (54)—(57), (59), (60), (67), (68). Для H -поляризации, когда электрический вектор волн лежит в плоскости падения, а магнитный вектор перпендикулярен ей, формулы для R_{\parallel} и T_{\parallel} получаются из (74) заменой μ на ϵ и одновременно с этим ϵ на μ .

Полученные формулы позволяют изучить ряд особенностей энергетических коэффициентов отражения волн от границы раздела движущегося в вакууме диэлектрика. Сначала мы хотели бы обратить внимание на то, что коэффициенты R_{\perp} и T_{\perp} связаны с хорошо известными коэффициентами R'_{\perp} и T'_{\perp} при отражении волн от границы раздела двух покоящихся диэлектриков. Коэффициенты R'_{\perp} и T'_{\perp} нетрудно получить из общих формул (74), если в них положить все скорости равными нулю. Тогда получим

$$R'_{\perp} = |r'_{\perp}|^2, \quad T'_{\perp} = \left| \frac{\mu_1 k'_{2z}}{\mu_2 k'_{0z}} \right| |p'_{\perp}| = (1 - R'_{\perp}), \quad (75)$$

где

$$r'_{\perp} = \frac{\mu_1 k'_{2z} - \mu_2 k'_{0z}}{\mu_1 k'_{2z} - \mu_2 k'_{1z}}, \quad p'_{\perp} = \frac{\mu_2 (k'_{0z} - k'_{1z})}{\mu_1 k'_{2z} - \mu_2 k'_{1z}} \quad (76)$$

при

$$k'_{0z} = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \vartheta'_0, \quad k'_{1z} = -k'_{0z},$$

$$k'_{2z} = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_1 \mu_1 \sin^2 \vartheta'_0}.$$

В нашем частном случае диэлектрика в вакууме $\epsilon_1 = \mu_1 = 1$, $\mu_2 = \mu$ и $\epsilon_2 = \epsilon$. Все величины, относящиеся к системе покоя границы раздела, обозначены штрихами.

Если мы теперь хотим опять перейти в лабораторную систему координат, то должны использовать преобразования Лоренца для всех величин [20, 21, 27]. В нашем

случае для E -поляризации получим для каждой j -й волны ($j=0, 1, 2$)

$$E'_{jy} = \gamma \left\{ E_{jy} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}, \mathbf{B}_j]_y \right\} = \frac{\gamma (\omega_j + uk_{jz})}{\omega_j} E_{jy}, \quad (77)$$

$$\omega'_j = \gamma (\omega_j + uk_{jz}), \quad k'_{jx} = k_{jx}, \quad k'_{jz} = \gamma \left(k_{jz} + \frac{u}{c} \cdot \frac{\omega_j}{c} \right).$$

Отсюда сразу следует лоренц-инвариантность амплитуд векторного потенциала

$$A'_j = \frac{E'_{jy}}{\omega'_j} = A_j = \frac{E_{jy}}{\omega_j}. \quad (78)$$

В результате этих преобразований мы можем записать энергетические коэффициенты R_{\perp} и T_{\perp} трансформации волн на движущемся диэлектрике через коэффициенты R'_{\perp} и T'_{\perp} трансформации волн на покоящемся диэлектрике

$$R_{\perp} = \left| \frac{\omega_1 k_{1z}}{\omega_0 k_{0z}} \right| \cdot R'_{\perp}, \quad T_{\perp} = \left| \frac{\omega_2 (k_{2z} - \chi \beta \gamma^2 c^{-1} I_{\omega}) \cdot k'_{0z}}{\omega_0 k_{0z}} \cdot \frac{k'_{0z}}{k'_{2z}} \right| T'_{\perp}. \quad (79)$$

При этом все величины должны выражаться через параметры среды и падающей волны в лабораторной системе координат. С помощью выражений для $\omega_{1, 2}$, I_{ω} и k_{1z} , k_{2z} (54)–(56), а также формул (75)–(78) можно получить

$$R_{\perp} = \xi R'_{\perp}, \quad T_{\perp} = \psi T'_{\perp}, \quad (80)$$

где

$$R'_{\perp} = |r'_{\perp}|^2 = \left| \frac{\sqrt{y_{\epsilon}} - 1}{\sqrt{y_{\epsilon}} + 1} \right|^2, \quad T'_{\perp} = \frac{4 |\sqrt{y_{\epsilon}}|}{|\sqrt{y_{\epsilon}} + 1|^2}, \quad (81)$$

$$\xi = \xi_{\parallel} = \xi_{\perp} = \left| \frac{\omega_1 k_{1z}}{\omega_0 k_{0z}} \right| = \gamma^4 \frac{(1 + \beta^2 + 2\beta \cos \vartheta_0) [(1 + \beta^2) \cos \vartheta_0 + 2\beta]}{\cos \vartheta_0},$$

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_{\perp} = \psi_{\parallel} = \left| \frac{\omega_2 (k_{2z} - \chi \beta \gamma^2 c^{-1} I_{\omega}) \cdot k'_{0z}}{\omega_0 k_{0z}} \cdot \frac{k'_{0z}}{k'_{2z}} \right| = \\ &= \frac{(\cos \vartheta_0 + \beta)}{f \cos \vartheta_0} \gamma^4 [(1 + \beta \cos \vartheta_0) - \beta f] [f - \epsilon \mu \beta (1 + \beta \cos \vartheta_0)]. \end{aligned}$$

Здесь

$$f = \sqrt{\epsilon \mu (1 + \beta \cos \vartheta_0)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \vartheta_0}, \quad (82)$$

$$k'_{0z} = -k'_{1z} = \frac{\omega_0}{c} \gamma (\cos \vartheta_0 + \beta),$$

$$y_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\mu} \left(\frac{1 + \beta \cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_0 + \beta} \right)^2 - \frac{(1 - \beta^2) \sin^2 \vartheta_0}{\mu^2 (\cos \vartheta_0 + \beta)^2}, \quad k'_{2z} = \frac{\omega_0}{c} \gamma f,$$

$$\omega'_0 = \omega'_1 = \omega'_2 = \gamma \omega_0 (1 + \beta \cos \vartheta_0) = \gamma I_{\omega},$$

$$(k_{2z} - \kappa \beta \gamma^2 c^{-1} I_{\omega}) = \frac{\omega_0}{c} \gamma [f - \varepsilon \mu \beta (1 + \beta \cos \vartheta_0)],$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}.$$

Для волн с H -поляризацией нужно опять провести замену $\varepsilon \rightleftharpoons \mu$. Эти формулы позволяют сделать следующие выводы.

Во-первых, как и на покоящейся границе раздела в (75), величины R'_{\perp} и T'_{\perp} в (81) удовлетворяют закону сохранения потока энергии через границу раздела

$$R'_{\perp} + T'_{\perp} = 1. \quad (83)$$

Кроме того, поскольку ξ всегда больше единицы, то $R_{\perp} = \xi_1 R'_1 > R'_1$, т. е. интенсивность излучения, отраженного от движущегося диэлектрика, больше, чем от покоящегося. Естественно, что при $\beta = 0$ будет $\xi = \psi = 1$, $R_{\perp} = R'_1$ и $T_{\perp} = T'_1$.

При нормальном падении волн на движущийся диэлектрик получим

$$R_0 = \xi_0 R'_0, \quad T_0 = \psi_0 T'_0, \quad (84)$$

где величины

$$R'_0 = |r_0|^2 = \left| \frac{\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\mu}} \right|^2, \quad T'_0 = \frac{4 |\sqrt{\varepsilon \mu}|}{|\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\mu}|^2} = (1 - R'_0),$$

$$\xi_0 = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^2, \quad \psi_0 = \left| \frac{1 - \beta \sqrt{\varepsilon \mu}}{1 - \beta} \right|^2$$

одинаковы для волн обеих поляризаций. Знак модуля позволяет рассматривать движущийся диэлектрик с потерями. Для этого достаточно везде заменить величину ε на комплексную диэлектрическую проницаемость $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon + i\varepsilon'')$, в которой мнимая часть ε'' пропорциональна потерям в среде.

При почти касательном падении волны на движущийся диэлектрик ($\vartheta_0 \rightarrow \pi/2$) величины R'_{\perp} и T'_{\perp} совпадают с R'_0 и T'_0 , но ξ и ψ имеют особенность вида

$$\xi \Big|_{\vartheta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}} \simeq \frac{2\beta (1 + \beta^2)}{(1 - \beta^2)^2 \cos \vartheta_0}, \quad \psi \Big|_{\vartheta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}} \simeq \frac{\beta |1 - \beta f_0| |f_0 - \beta \varepsilon \mu|}{(1 - \beta^2)^2 |f_0| \cos \vartheta_0}, \quad (85)$$

где $f_0 = \sqrt{\varepsilon\mu - 1 + \beta^2}$. Связана эта особенность с тем, что движущийся диэлектрик всегда «отбрасывает» часть энергии из падающего потока вперед по ходу своего движения, причем углы ϑ_{1l} и ϑ_{2l} этих отраженных и преломленных волн определяются формулами (72а), а $S_0 = \frac{c}{8\pi} E_0^2$.

Во-вторых, если с ростом скорости движения диэлектрика коэффициент отражения волн R_{\perp} всегда растет, то коэффициент пропускания T_{\perp} изменяется более сложно. Это связано с наличием множителя ψ в (81). В частности, хотя коэффициент пропускания на покоящемся диэлектрике T' всегда конечен, коэффициент пропускания T на движущемся диэлектрике может обратиться в нуль из-за обращения в нуль множителя ψ , что имеет место при $k_{2z} = -\chi\beta\gamma^2 c^{-1} I_{\omega} = 0$ и $\omega_2 = 0$. Подробный анализ показывает, что ψ и, следовательно, T обращаются в нуль при $\cos \vartheta_0 = \frac{q_1 - \beta}{1 - \beta q_1}$, если $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu + 1}} \leq \beta \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, и при $\cos \vartheta_0 = \frac{q_0 - \beta}{1 - \beta q_0}$, если $\frac{(\varepsilon\mu - 1) + \sqrt{(\varepsilon\mu - 1)^2 + 4}}{2} \geq \beta \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, где $q_0 = \sqrt{1 - \beta^2(\varepsilon\mu - 1)}/\beta$ и $q_1 = \sqrt{1 + \varepsilon\mu(\varepsilon\mu\beta^2 - 1)}$. В первом интервале скоростей обращается в нуль множитель $(k_{2z} = -\chi\beta\gamma^2 c^{-1} I_{\omega})$, а во втором интервале скоростей обращается в нуль частота ω_2 преломленной волны. На аналогичное явление для движущейся плазмы было указано Ю. М. Сорокиным [30]. Видно, что явление обращения в нуль коэффициента пропускания, как и ряд рассмотренных выше эффектов, имеют место только при релятивистских скоростях движения диэлектрика, когда воспринимаемая им в системе покоя частота $\omega' = \gamma\omega_0(1 + \beta \cos \vartheta_0)$ (82) становится столь большой, что необходимо учитывать дисперсию движущейся среды. К анализу отражения и преломления волн на движущемся диэлектрике с учетом дисперсии мы сейчас и переходим, предполагая рассмотреть для простоты движущуюся изотропную электронную плазму.

Прежде чем переходить к этому вопросу, приведем в заключение данного пункта выражения для плотности силы нормального давления, действующей извне со стороны падающей и отраженной волн на движущийся диэлектрик. Она равна [31]

$$f_x = (\cos \vartheta_0 + \beta) \left\{ \cos \vartheta_0 + \frac{(1 + \beta^2) \cos \vartheta_0 + 2\beta}{1 - \beta^2} |r'|^2 \right\} w_0, \quad (86)$$

где $w_0 = E_0^2 / 8\pi$ — плотность энергии в падающей волне, а выражение для $|r'|^2$ в случае E -поляризации приведено в (81). Для H -поляризации нужно опять в этих формулах сделать замену $\epsilon \rightleftharpoons \mu$. Формула (86) получена в предположении, что в стационарном состоянии движущейся среды электромагнитный импульс и электромагнитные напряжения, сопровождающие прошедшую в диэлектриках волну, в точности компенсируются возникающими под их действием механическими напряжениями в среде.

Для движущегося зеркала $|r'|^2 = 1$, и мы получаем формулу работы [1].

При наклонном падении волны на движущийся диэлектрик в плоскости границы раздела действует сила с плотностью

$$f_x = \sin \vartheta_0 (\cos \vartheta_0 + \beta) (1 + |r'|^2) w_0. \quad (87)$$

С помощью выражения (86) можно рассчитать давление изотропного излучения на движущееся зеркало ($|r'|^2 = 1$). Оно равно

$$p_0 = \frac{4}{3} \frac{(1 + \beta)^2}{1 - \beta} w_0. \quad (88)$$

В. Движущаяся плазма (пучок электронов)

Изотропная электронная плазма и сгусток электронов являются примерами сред, для которых возможно осуществление реального макроскопического перемещения с релятивистскими скоростями движения. Распространение поперечных электромагнитных волн описывается в этих средах точно так же, как и в обычном покоящемся диэлектрике, магнитная и диэлектрическая проницаемости которого имеют вид

$$\mu = 1, \quad \epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2},$$

где N — концентрация электронов в сгустке, а ω — частота волны в системе покоя сгустка.

Поскольку в настоящее время на сильноточных ускорителях [32] создаются пучки релятивистских электронов с плотностями тока порядка 10^6 а/см², что соответствует концентрациям частиц порядка 10^{15} см⁻³ и более, то представляет интерес рассмотреть отражение и преломление

волн на границе раздела с такими движущимися сгустками.

Все необходимые формулы для этого случая можно взять из результатов предыдущего пункта, в которые вместо ϵ и μ нужно подставить выражения

$$\mu = 1, \quad \epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega'^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 (1 - \beta^2)}{\omega_0^2 (1 + \beta \cos \vartheta_0)^2}, \quad (89)$$

$$\text{где } \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}.$$

В результате при встречном движении волны и плазмы все необходимые формулы примут вид

$$\omega_1 = \omega_0 \gamma^2 [(1 + \beta^2) + 2\beta \cos \vartheta_0];$$

$$k_{1x} = I_x = \frac{\omega_0}{c} \sin \vartheta_0 = k_{2x} = k_{0x};$$

$$k_{1z} = -\frac{\omega_0}{c} \gamma^2 [(1 + \beta^2) \cos \vartheta_0 + 2\beta];$$

$$\text{tg } \vartheta_1 = -\frac{k_{1x}}{k_{1z}} = \frac{\sin \vartheta_0 (1 - \beta^2)}{(1 + \beta^2) \cos \vartheta_0 + 2\beta};$$

$$\omega_2 = \omega_0 \gamma^2 [(1 + \beta \cos \vartheta_0) - \beta f_p]; \quad I_\omega = \omega_0 (1 + \beta \cos \vartheta_0);$$

$$k_{2z} = \frac{\omega_0}{c} \gamma^2 [f_p - \beta (1 + \beta \cos \vartheta_0)];$$

$$\text{tg } \vartheta_2 = \frac{k_{2z}}{k_{2x}} = \frac{\sin \vartheta_0 (1 - \beta^2)}{f_p - \beta (1 + \beta \cos \vartheta_0)};$$

$$r'_1 = \frac{\sqrt{y_p} - 1}{\sqrt{y_p} + 1}; \quad r'_2 = -\frac{\sqrt{y_p} - \left[1 - \frac{\omega_p^2 (1 - \beta^2)}{\omega_0^2 (1 + \beta \cos \vartheta_0)^2}\right]}{\sqrt{y_p} + \left[1 - \frac{\omega_p^2 (1 - \beta^2)}{\omega_0^2 (1 + \beta \cos \vartheta_0)^2}\right]}; \quad (90)$$

$$p'_1 = \frac{2}{\sqrt{y_p} + 1}; \quad p'_2 = \frac{2 \left[1 - \frac{\omega_p^2 (1 - \beta^2)}{\omega_0^2 (1 + \beta \cos \vartheta_0)^2}\right]}{\sqrt{y_p} + \left[1 - \frac{\omega_p^2 (1 - \beta^2)}{\omega_0^2 (1 + \beta \cos \vartheta_0)^2}\right]};$$

$$\xi = \gamma^4 \frac{(1 + \beta^2 + 2\beta \cos \vartheta_0)}{\cos \vartheta_0} [(1 + \beta^2) \cos \vartheta_0 + 2\beta]; \quad \gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2};$$

$$\psi = \frac{(\cos \vartheta_0 + \beta)}{f_p \cos \vartheta_0} \gamma^4 [(1 + \beta \cos \vartheta_0) - \beta f_p] \times \\ \times \left[f_p - \beta (1 + \beta \cos \vartheta_0) \left(1 - \frac{\omega_p^2 (1 - \beta^2)}{\omega_0^2 (1 + \beta \cos \vartheta_0)^2} \right) \right];$$

$$f_p = \sqrt{(\cos \vartheta_0 + \beta)^2 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} (1 - \beta^2)};$$

$$y_p = \left[1 - \frac{\omega_p^2 (1 - \beta^2)}{\omega_0^2 (\cos \vartheta_0 + \beta)^2} \right].$$

Эти формулы позволяют выяснить особенности отражения и преломления волн на движущемся плазменном слое или на пучке релятивистских электронов.

Выражения для ω_1 , компонент волнового вектора k_{1x} и k_{1z} и угла отражения ϑ_1 по внешнему виду совпадают с аналогичными выражениями при отражении от движущегося диэлектрика. Однако, если в последнем случае преломленная волна всегда частично проходит в движущийся диэлектрик (это видно из того, что в отсутствие потерь ω_2 и k_{2z} всегда вещественны), то при отражении от движущейся плазмы прошедшая в нее волна может экспоненциально затухать. Для покоящейся плазмы такое полное отражение волн имеет место лишь при $\omega_0 < \omega_p$. Движение плазмы изменяет условия прохождения и полного внутреннего отражения. Нетрудно видеть, что при

$$f_p^2 = \left[(\cos \vartheta_0 + \beta)^2 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} (1 - \beta^2) \right] \geq 0 \quad (91)$$

все величины для прошедшей внутрь плазмы волны вещественны и она всегда частично пропускает падающее на нее излучение. Если же $f_p^2 < 0$, то, как видно из (90), $|r'|^2 = 1$, и движущаяся плазма полностью отражает падающее на нее излучение. При этом преломленная волна экспоненциально затухает, а коэффициент отражения по мощности становится равным коэффициенту отражения от движущегося зеркала [1]

$$R = \xi = R_{\perp} = R_{\parallel} = \frac{(1 + \beta^2 + 2\beta \cos \vartheta_0) [(1 + \beta^2) \cos \vartheta_0 + 2\beta]}{(1 - \beta^2)^2 \cos \vartheta_0}, \quad (92)$$

$$R = R(\vartheta_0 = 0) = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^2, \quad \text{если } f_p^2 < 0.$$

В этом случае движущаяся плазма работает как преобразователь частот (из ω_0 в ω_1) с одновременным усилением отраженного сигнала за счет энергии своего макроскопического перемещения. Из условия $f_p^2 < 0$ можно определить тот диапазон ее параметров и параметров падающей волны,

для которого это будет иметь место. Например, если $x_0 = \omega_p^2/\omega_0^2 \leq 1$, то полное отражение, т. е. $|r'|^2 = 1$, имеет место при углах падения ϑ_0 , для которых

$$\cos \vartheta_0 < (x_0 \sqrt{1 - \beta^2} - \beta), \quad x_0 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}, \quad (93)$$

причем это условие может выполняться только при скоростях

$$0 \leq \beta \leq \sqrt{\frac{x_0}{1 + x_0}}. \quad (94)$$

При скоростях

$$\beta \geq \sqrt{\frac{x_0}{1 + x_0}} \quad (95)$$

волна проходит в движущуюся плазму при любых углах падения ϑ_0 , и $|r'|^2$ в последнем случае всегда меньше единицы.

Если же $x_0 \geq 1$, то полное отражение имеет место для углов падения ϑ_0 , опять удовлетворяющих условию (93), но выполняется оно уже при скоростях

$$\frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} < \beta < \sqrt{\frac{x_0}{1 + x_0}}. \quad (96)$$

Вне этого интервала волна опять всегда проходит внутрь плазмы при любых углах падения.

Мы видим, что с ростом скорости движения плазмы она начинает пропускать внутрь себя падающее на нее излучение даже в том случае, когда покоящаяся плазма не пропускала его. Особенно ясно это видно из случая $x_0 > 1$, когда покоящаяся плазма отражает все лучи. Это обстоятельство можно понять, если вспомнить, что плазма является диспергирующей средой, для которой существенна не частота волн в лабораторной системе координат, а частота волн, воспринимаемая ею в системе покоя. В нашем случае она равна $\omega' = \omega_0 \gamma (1 + \beta \cos \vartheta_0)$. Поскольку с ростом скорости перемещения плазмы растет частота ω' , то одновременно с этим плазма становится все более прозрачной для падающей волны. Коэффициенты отражения R для E - и H -поляризаций в случае (91) соответственно равны

$$R_{\perp} = \left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^4 \frac{(1 + \beta^2 + 2\beta \cos \vartheta_0) [(1 + \beta^2) \cos \vartheta_0 + 2\beta]}{[f_p + (\cos \vartheta_0 + \beta)]^4 \cos \vartheta_0}, \quad (97)$$

$$R_{\parallel} = \left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^4 \frac{[1 + \beta^2 + 2\beta \cos \vartheta_0] [(1 + \beta^2) \cos \vartheta_0 + 2\beta]}{\left\{f_p + (\cos \vartheta_0 + \beta) \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta \cos \vartheta_0)^2}\right]\right\}^4} \times \\ \times \left\{1 - \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta \cos \vartheta_0)^2} \left[2 \sin^2 \vartheta_0 + x_0 \frac{(\cos \vartheta_0 + \beta)^2}{(1 + \beta \cos \vartheta_0)^2}\right]\right\},$$

где

$$f_p = \sqrt{(\cos \vartheta_0 + \beta)^2 - x_0 (1 - \beta^2)}, \quad x_0 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}.$$

Поскольку мы рассматриваем задачи отражения квазипоперечных волн в движущейся среде, то полученные формулы для коэффициентов отражения справедливы как для задач отражения волн от движущихся сгустков незаряженной электронной плазмы, так и для заряженных сгустков релятивистских электронов. В последнем случае наличие заряда сгустка приводит к появлению кулоновского продольного поля, которое во всех расчетах отделяется от рассматриваемого нами поперечного поля излучения.

При релятивистских скоростях движения плазмы, когда $(1 - \beta^2) \ll 1$, коэффициенты отражения одинаковы для волн обеих поляризацій и принимают вид

$$R_{\perp} = R_{\parallel} = R \simeq \left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^2 \frac{1}{4 \cos \vartheta_0 (1 + \cos \vartheta_0)^2} \quad (98)$$

при

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \simeq 2(1 + \cos \vartheta_0) \gamma^2,$$

где $\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2}{m_0} N_0$ — плазменная частота в системе покоя сгустка с концентрацией N_0 ; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ — релятивистский фактор для движущегося плазменного сгустка. Для пучка релятивистских электронов с полной энергией W и с энергией покоя электрона $m_0 c^2$ релятивистский фактор равен $\gamma = W/m_0 c^2$. При нормальном падении величины в (98) принимают вид

$$R_0 = R(\vartheta_0 = 0) = \left(\frac{r_0 \lambda_0^2 N_0}{4\pi}\right)^2; \quad \lambda_1 = \frac{\lambda_0}{4\gamma^2}. \quad (99)$$

Мы видим, что коэффициенты отражения в (97)–(99) пропорциональны квадрату концентрации числа частиц в сгустках, измеренной в системе их покоя. Это означает,

что процесс отражения можно рассматривать как когерентное переизлучение (двойной эффект Доплера!) электронами сгустка волн в направлении отраженного сигнала при их когерентном возбуждении падающей волной. Когерентный объем V_0 при этом равен $V_0 = \lambda_0^2 r_0$.

Однако запись величин R через концентрацию частиц N_0 в системе покоя сгустка не является практически удобной. Например, если рассматривается электронный пучок, то с точки зрения экспериментатора, находящегося в лабораторной системе координат, задан ток или плотность тока в пучке. А эта величина пропорциональна концентрации частиц (электронов) N , измеренной в лабораторной системе координат. В частности, для пучка релятивистских электронов плотность тока равна

$$j = ecN. \quad (100)$$

Величина N связана с N_0 соотношением

$$N = \gamma N_0. \quad (101)$$

Поэтому в данном случае множитель $x_0 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} = \frac{4\pi e^2 N_0}{m_0 \omega_0^2}$, входящий в приведенные выше выражения, примет вид

$$x_0 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} = \frac{r_0 \lambda_0^2 N}{\pi} \frac{1}{\gamma} = a_0 \frac{1}{\gamma}, \quad (102)$$

т. е. он становится зависящим от скорости движения сгустка. В результате изменяются условия пропускания в сгусток. В частности, полное отражение ($|r'|^2 = 1$) будет уже иметь место при

$$f_p^2 = [(\cos \vartheta_0 + \beta)^2 - a_0 (1 - \beta^2)^{3/2}] < 0. \quad (103)$$

В случае нормального падения это неравенство выполняется только при $a_0 \geq 1$ и для тех скоростей, у которых $1 \leq \gamma \leq \gamma_{кр}$, где

$$\gamma_{кр} \approx \begin{cases} \left[1 + \frac{1}{8} (a_0 - 1)^2 \right] & \text{для } 1 \leq a_0 \leq 4, \\ \left(\frac{1}{4} a_0 \right)^{1/3} & \text{для } a_0 \geq 4. \end{cases}$$

При $\gamma > \gamma_{кр}$ нормально падающая волна всегда частично проходит внутрь сгустка. Решение неравенства (103) при наклонном падении довольно затруднительно и может быть аналитически проведено лишь в предель-

ных случаях $\beta \ll 1$ и $(1 - \beta^2) \ll 1$, а в остальных случаях — численно. Мы не приводим здесь эти результаты, их может получить любой желающий. Отметим только, что при $a_0 \ll 1$ волна, падающая под любым углом ϑ_0 , всегда частично проходит внутрь сгустка.

Используя выражения (100)–(102), мы можем записать формулы (99) в виде

$$R = \left(\frac{r_0 \lambda_0^2 N}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\gamma^2} = (r_0^2 \lambda_0 N) (\lambda_1 \lambda_0^2 N), \quad (104)$$

где $\lambda_1 = \lambda_0 / 4\gamma^2$, а $\lambda_0 = \lambda_0 / 2\pi$. Отсюда сразу становится понятным уменьшение с ростом скорости сгустка коэффициента R_0 когерентного преобразования падающего излучения в отраженную волну. Действительно, первый сомножитель последнего равенства в (104) качественно дает ту часть электронов из их полного числа N в единице объема, которая когерентно возбуждается падающей волной в лабораторной системе координат. Вторым сомножителем определяется та часть электронов из N , которая когерентно испускает излучение с длиной волны λ_1 в направлении отраженной волны. Их произведение дает суммарный эффект от суперпозиции этих двух процессов. Поскольку с ростом величины γ уменьшается пропорционально γ^{-2} длина волны λ_1 , то уменьшается и доля $\lambda_1 \lambda_0^2 N$ тех электронов в сгустке, которые когерентно испускают отраженную волну. Поэтому уменьшается пропорционально γ^{-2} и полный коэффициент трансформации R_0 в (104) [33]. В заключение приведем формулы, позволяющие вычислять трансформированную длину волны λ_1 и эффективность этого преобразования частоты R_0 при отражении излучения с длиной волны λ_0 от движущегося навстречу ему пучка релятивистских электронов с плотностью тока j и релятивистским фактором $\gamma = W/m_0 c^2$. Подставляя в (104) выражение для N через j из (100), получим

$$R_0 \simeq 10^{-11} \lambda_0^4 j^2 \frac{1}{\gamma^2}; \quad \lambda_1 = \frac{\lambda_0}{4\gamma^2}. \quad (105)$$

Здесь λ_1 и λ_0 измеряются в см, а j — в а/см². Для пучков в современных сильноточных ускорителях [32] имеем $j \sim 10^8$ а/см², $\gamma \simeq 10$ ($W \simeq 5$ Мэв); тогда при $\lambda_0 = 1$ см будет

$$\lambda_1 \simeq 25 \text{ мкм} \quad \text{при } R_0 \simeq 0,1. \quad (106)$$

На первый взгляд кажется, что таким образом возможно осуществлять преобразования с заметной эффективностью ($\sim 10\%$) из СВЧ-диапазона в далекий инфракрасный диапазон. Однако, как показано в [17, 33], при таком преобразовании оказывается существенным конечный размер $L \simeq c\tau$ переходного слоя на границе пучок—вакуум, определяемый временем нарастания τ концентрации электронов от нуля до постоянного значения N в сгустке. При учете этого эффекта истинно наблюдаемый коэффициент отражения $R_{\text{н}}$ связан с R_0 соотношением

$$R_{\text{н}} \simeq R_0 e^{-\frac{\lambda_1}{L}} = R_0 \exp\left(-\frac{\lambda_1}{c\tau\gamma^2}\right). \quad (107)$$

В нашем примере (106) $R_{\text{н}} \simeq 0,1 \exp(-10^{-13}/\tau)$, где τ — время нарастания в секундах. Очевидно, что хорошее преобразование будет только на пучках с уникально резкими фронтами нарастания $\tau \simeq 10^{-12} - 10^{-13}$ сек.

Вернемся теперь к общим формулам (90) для движущейся плазмы и проследим на этом примере влияние дисперсии движущейся среды на явление полной поляризации отраженного излучения (угол Брюстера), на обращение в нуль коэффициента пропускания T и на другие свойства отраженных и преломленных волн.

Из формулы (90) следует, что коэффициент $r_{\text{н}}$ для волн с H -поляризацией может обратиться в нуль при угле падения $\vartheta_0 = \vartheta_p$. Этот угол определяется из уравнения

$$\left(\frac{1 + \beta \cos \vartheta_p}{\cos \vartheta_p + \beta}\right)^2 - 2 + \frac{x_0(1 - \beta^2)}{(1 + \beta \cos \vartheta_p)^2} = 0 \quad (108)$$

при условиях

$$\cos \vartheta_p \geq \sqrt{x_0(1 - \beta^2)} - \beta, \quad x_0 = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}. \quad (109)$$

Уравнение (108) имеет следующие решения: при $\beta \ll 1$ $\cos \vartheta_p \simeq \left\{ \frac{1}{\sqrt{2 - x_0}} - \beta \left[1 - 2 \frac{1 - x_0}{(2 - x_0)^2} \right] \right\}$, а при $1 - \beta^2 \ll 1$ и $x_0(1 - \beta^2) > 1$ $\cos \vartheta_p \simeq \sqrt{x_0(1 - \beta^2)} - 1$.

Поток энергии в волне, пришедшей в движущийся плазменный сгусток, может обращаться в нуль за счет обращения в нуль коэффициента ψ в формулах (90). Если для движущегося диэлектрика этот коэффициент

равен нулю при обращении в нуль частоты ω_2 прошедшей волны и сомножителя $k_{2z} = \alpha \beta \gamma^2 c^{-1} I$, то в движущейся плазме частота ω_2 всегда положительна, а второй сомножитель обращается в нуль при

$$[(\cos \vartheta_0 + \beta)^2 - x_0(1 - \beta^2)] + \beta^2 [x_0(1 - \beta^2) - (1 + \beta \cos \vartheta_0)^2] + \beta^2 x_0(1 - \beta^2) \left[1 - \frac{x_0(1 - \beta^2)}{(1 + \beta \cos \vartheta_0)^2} \right] = 0,$$

где $x_0 = \omega_p^2 / \omega_0^2$.

Решения этого уравнения, удовлетворяющие условию пропускания (91), имеют сложный вид и могут быть получены только численно. Однако при почти касательном падении ($\vartheta_0 \simeq \pi/2$) это уравнение имеет решение

$$\beta_0^2 \simeq \frac{2}{(2 - x_0) + \sqrt{x_0^2 + 4}}.$$

При этой скорости энергия касательно падающих на сгусток лучей не уходит внутрь плазмы, ибо $T=0$.

В заключение данного пункта можно привести выражения для ϑ_{1l} и ϑ_{2l} (72а), следующие из формул (90) при $\cos \vartheta_0 = 0$:

$$\operatorname{tg} \vartheta_{1l} = \frac{1 - \beta^2}{2\beta}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_{2l} = \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{\beta^2(1 + x_0) - x_0} - \beta}.$$

При отражении волн от движущегося навстречу им диэлектрика наблюдался кинематический эффект, связанный с изменением знака частоты ω_2 преломленной волны. При этом величины k_{2x} и k_{2z} оставались всегда положительными. Если же волна падает на движущуюся навстречу ей плазму, то, как видно из формул (90), теперь частота преломленной волны ω_2 и компонента k_{2x} остаются положительными, но может менять знак компонента k_{2z} прошедшей в плазму волны. В этом случае фазовая скорость преломленной волны меняет знак, проходя через бесконечное значение, а групповая скорость меняет знак, проходя через нуль. При $k_{2z} < 0$ преломленная волна бежит «вдогонку» за уходящей границей раздела, но ее групповая скорость по-прежнему меньше скорости движения плазмы, так что она, как и раньше, отводит энергию от границы. Условия, при которых осуществляется такая си-

туация, нетрудно найти из выражения для k_{2z} в формулах (90). Из них следует, что $k_{2z} \geq 0$ при

$$\cos \vartheta_0 \geq \frac{\sqrt{\beta^2 + x_0(1 + \beta^2)} - \beta}{1 + \beta^2} \geq (\sqrt{x_0(1 - \beta^2)} - \beta).$$

Последнее неравенство вытекает из требования вещественности величин k_{2z} и ω_2 , при выполнении которого преломленная волна может распространяться в движущейся плазме без затухания. Нетрудно показать, что условие $k_{2z} \geq 0$ можно выполнить только при $x_0 \leq 4$. При $x_0 > 4$ оно не выполняется ни при каких скоростях. А это значит, что при $x_0 > 4$ $k_{2z} < 0$ при всех скоростях движения β и углах падения ϑ_0 , для которых выполнено условие пропускания $\cos \vartheta_0 \geq (\sqrt{x_0} \sqrt{1 - \beta^2} - \beta)$. Величина k_{2z} может быть отрицательной и при $x_0 \leq 4$ в интервале параметров, для которых

$$(\sqrt{x_0} \sqrt{1 - \beta^2} - \beta) \leq \cos \vartheta_0 < \frac{\sqrt{\beta^2 + x_0(1 + \beta^2)} - \beta}{1 + \beta^2}.$$

В данном пункте мы провели подробное исследование отражения и преломления волн на движущемся плазменном сгустке или на пучке релятивистских электронов при встречном движении падающей волны и сгустка. Если же они движутся попутно, т. е. падающая волна догоняет движущийся сгусток, то взаимодействие между ними будет только тогда, когда $(v_{0g})_x > u$, или $c \cos \vartheta_0 > u$, и весь предыдущий анализ можно провести снова, заменив в формулах (90) β на $(-\beta)$. Это может сделать любой желающий.

Г. Трансформация волн на резком фронте бегущего параметра в покоящихся средах

Общие формулы, полученные в начале предыдущего параграфа, позволяют получить все необходимые выражения для данного частного, но важного случая. Для этого достаточно положить во всех формулах скорости движения сред по обе стороны границы раздела равными нулю. Тогда при встречном движении падающей волны и границы раздела двух покоящихся сред нужно в формулах (21) положить все $\beta_j = 0$, $\gamma_j = 1$, а $\beta_z = -\beta$, и мы получим

$$I_x = k_{0x} = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \vartheta_0 = \frac{\omega_0}{v_1} \sin \vartheta_0 = k_{1x} = k_{2x};$$

$$v_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}};$$

$$I_{\omega} = \omega_0 (1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0) = \omega_0 (1 + \beta_1 \cos \vartheta_0); \quad \beta = \frac{u}{c};$$

$$\beta_1 = \frac{u}{v_1} = \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1};$$

$$\begin{aligned} \omega_1^{(+)} &= \omega_0; \quad \omega_1 = \omega_1^{(-)} = \omega_0 \frac{(1 + \beta^2 \varepsilon_1 \mu_1) + 2\beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0}{1 - \beta^2 \varepsilon_1 \mu_1} = \\ &= \omega_0 \frac{(1 + \beta_1^2) + 2\beta_1 \cos \vartheta_0}{1 - \beta_1^2}; \end{aligned} \quad (110)$$

$$k_{1z}^{(+)} = k_{0z} = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0 = \frac{\omega_0}{v_1} \cos \vartheta_0;$$

$$\begin{aligned} k_{1z} &= k_{1z}^{(-)} = -\frac{\omega_0}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \frac{(1 + \beta^2 \varepsilon_1 \mu_1) \cos \vartheta_0 + 2\beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{1 - \beta^2 \varepsilon_1 \mu_1} = \\ &= -\frac{\omega_0}{v_1} \frac{(1 + \beta_1^2) \cos \vartheta_0 + 2\beta_1}{1 - \beta_1^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_2^{(\pm)} &= \frac{\omega_0}{1 - \varepsilon_2 \mu_2 \beta^2} \left\{ (1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0) \mp \beta f \right\} = \\ &= \frac{\omega_0 (1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0)}{1 - \beta^2 \varepsilon_2 \mu_2} [1 \mp \beta \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} h]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{2z}^{(\pm)} &= \frac{\omega_0}{c (1 - \beta^2 \varepsilon_2 \mu_2)} \left\{ -\beta \varepsilon_2 \mu_2 (1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0) \pm f \right\} = \\ &= \frac{\omega_0 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} (1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0)}{c (1 - \beta^2 \varepsilon_2 \mu_2)} (-\beta \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \pm h), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f^2 &= [\varepsilon_2 \mu_2 (1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0)^2 - \varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \vartheta_0 (1 - \beta^2 \varepsilon_2 \mu_2)] = \\ &= (1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0)^2 (\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2})^2 h^2; \end{aligned}$$

$$h^2 = 1 - \frac{\varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \vartheta_0 (1 - \beta^2 \varepsilon_2 \mu_2)}{\varepsilon_2 \mu_2 (1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0)^2}.$$

Из этих формул видно, что кинематика отражения волн от резкого фронта бегущего параметра в покоящейся среде совпадает с кинематикой отражения от движущегося зеркала в вакууме, если во всех формулах для падающей и отраженной волны заменить скорость света в вакууме на скорость света в первой среде, т. е. $c \rightarrow v_1 = c/\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$. Единственное и существенное отличие связано с замедлением волн в среде, и оно приводит к тому, что все формулы для отраженных волн нужно рассматривать только при

досветовом движении фронта, когда $\beta < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}$ или

$\beta_1 < 1$. При $\beta > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}$ отраженная волна не может

сформироваться в первой среде. Если положить $\varepsilon_1 \mu_1 = 1$, то параметры ω_2 и k_{2z} преломленных волн по своей структуре похожи на соответствующие величины в (56) для движущегося диэлектрика. Однако есть разница, обусловленная тем, что в случае движущегося в вакууме диэлектрика граница раздела и среда за ней движутся с одинаковой скоростью, поэтому величина $d=1$. Для фронта бегущего параметра $d_2 = (1 - \varepsilon_2 \mu_2 \beta^2) / (1 - \beta^2)$, ибо среда позади границы раздела покоится, т. е. ее скорость отлична от скорости границы раздела. Для нормально падающих волн эти различия исчезают.

В досветовом случае, когда $\beta < c/\sqrt{\varepsilon_{1,2} \mu_{1,2}}$, амплитуды отраженных и преломленных волн определяются по формулам (33), в которых нужно подставить $a_j^{(\pm)}$ из (40). В нашем случае выражения для $a_j^{(\pm)}$ имеют вид

$$a_0 = a_1^{(+)} = + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1} \frac{\cos \vartheta_0 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} l; \quad (111)$$

$$a_1^{(-)} = -a_0; \quad a_2^{(+)} = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} h,$$

где

$$h^2 = \left[1 - \frac{\varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \vartheta_0 (1 - \beta^2 \varepsilon_2 \mu_2)}{\varepsilon_2 \mu_2 (1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0)^2} \right]; \quad l = \frac{\cos \vartheta_0 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0}.$$

С их помощью выражения для амплитудных коэффициентов отражения и прохождения в (33) принимают вид (*E*-поляризация)

$$r_{\perp} = -m_1 r'_{\perp} = -m_1 \frac{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} h - \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} l}{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} h + \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} l}; \quad (112)$$

$$p_{\perp} = m_2 p'_{\perp} = m_2 \frac{2 \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} l}{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} h + \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} l},$$

где $m_{1,2} = \omega_{1,2}/\omega_0$.

Для *H*-поляризации соответствующие коэффициенты r_{\parallel} и p_{\parallel} можно получить из (112), заменив $\varepsilon \rightarrow \mu$ и $\mu \rightarrow \varepsilon$ одновременно.

Коэффициенты отражения R и пропускания T по мощности для такой границы примут вид

$$R_{\perp} = g_1 |r_{\perp}|^2 = \left| \frac{\omega_1 k_{1z}}{\omega_0 k_{0z}} \right| |r'_{\perp}|^2 = \xi_1 R'_{\perp};$$

$$T_{\perp} = g_2 |p_{\perp}|^2 = \xi_2 T'_{\perp},$$
(113)

где

$$g_{1,2} = \left| \frac{\omega_0 k_{1,2z}}{\omega_{1,2} k_{0z}} \right|; \quad \xi_{1,2} = \left| \frac{\omega_{1,2} k_{1,2z}}{\omega_0 k_{0z}} \right|.$$

В нашем случае

$$g_1 = 1 + \frac{2\beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin^2 \vartheta_0}{\cos \vartheta_0 (1 + \beta^2 \varepsilon_1 \mu_1 + 2\beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0)};$$

$$m_1 = \frac{1 + \beta^2 \varepsilon_1 \mu_1 + 2\beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0}{1 - \beta^2 \varepsilon_1 \mu_1};$$
(114)

$$g_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \frac{1}{\cos \vartheta_0} \left| \frac{h - \beta \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{1 - \beta \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} h} \right|; \quad m_2 = \left| \frac{1 - \beta \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} h}{1 - \beta^2 \varepsilon_2 \mu_2} \right|.$$

Для волн с H -поляризацией величины R_{\parallel} и T_{\parallel} получаются из R_{\perp} и T_{\perp} стандартной заменой $\varepsilon \rightleftharpoons \mu$. Полученные формулы позволяют исследовать вопрос о влиянии движения границы раздела на явление полного внутреннего отражения (ПВО). Падающая на движущуюся границу волна будет проходить во вторую среду только тогда, когда вещественная частота ω_2 и компонента k_{2z} для преломленной волны. Нетрудно видеть, что это имеет место только при вещественной величине h , т. е. когда

$$h^2 = \left[1 - \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta_0 (1 - \beta^2 \varepsilon_2 \mu_2)}{(1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0)^2} \right] \geq 0. \quad (115)$$

При $h^2 < 0$ волны во второй среде экспоненциально затухают при удалении от границы раздела, что и означает наличие полного внутреннего отражения от такой границы.

Исследование неравенства $h^2 > 0$ в (115) показывает, что и при движении границы раздела явление полного внутреннего отражения отсутствует тогда, когда $\varepsilon_1 \mu_1 < \varepsilon_2 \mu_2$, т. е. когда волна переходит из оптически менее плотной в оптически более плотную среду. В противоположном случае, когда $\varepsilon_1 \mu_1 > \varepsilon_2 \mu_2$, явление полного внутреннего отражения имеет место как на покоящейся,

так и на движущейся границе раздела. Для этого волны должны падать под углами ϑ_0 , удовлетворяющими неравенству

$$\sin \vartheta_0 > \sin \vartheta_{0f} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} \sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon_2 \mu_2} + \beta \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}} = f(\beta). \quad (116)$$

Нетрудно видеть, что движение границы увеличивает угол полного внутреннего отражения ϑ_{0f} и, следовательно, сужает диапазон углов, в котором осуществляется полное внутреннее отражение. При $\varepsilon_1 \mu_1 > \varepsilon_2 \mu_2$ скорость движения границы раздела для досветового случая должна удовлетворять условию $0 \leq \beta \leq \beta_{кр} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}$. Если

$2\varepsilon_2 \mu_2 > \varepsilon_1 \mu_1 > \varepsilon_2 \mu_2$, то стоящая в правой части неравенства (116) функция $f(\beta)$ достигает при $\beta = \beta_{max} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}$

своего максимального значения, равного единице, т. е. $f_{max} = f(\beta_{max}) = 1$. При такой скорости движения границы раздела все падающие на нее волны проходят во вторую среду, хотя на покоящейся границе раздела волны, падающие под углами $\sin \vartheta_0 > \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}$, полностью отражаются.

Если $\varepsilon_1 \mu_1 = 2\varepsilon_2 \mu_2$, то $\beta_{max} = \beta_{кр}$, и данное явление исчезновения полного внутреннего отражения осуществляется на границе рассматриваемого нами интервала скоростей $0 \leq \beta \leq \beta_{кр}$. При $\varepsilon_1 \mu_1 > 2\varepsilon_2 \mu_2$ неравенство $f(\beta) < 1$ будет выполняться уже во всем интервале скоростей, поэтому полное внутреннее отражение опять появляется для углов, удовлетворяющих равенству (116).

При выполнении неравенства (115) для преломленной волны, прошедшей во вторую среду за границу раздела, имеют место те же кинематические эффекты, что и для волн, прошедших внутрь движущегося диэлектрика или движущейся плазмы. Они связаны с обращением в нуль величин m_2 и g_2 в (114). Нетрудно видеть, что в досветовом случае, $\varepsilon_2 \mu_2 \beta^2 < 1$, частота ω_2 преломленной волны всегда положительна, поэтому такое явление имеет место только тогда, когда компонента k_{z_2} волнового вектора преломленной волны обращается в нуль, а преломленная волна имеет бесконечную фазовую и равную нулю компо-

ненту групповой скорости вдоль оси z . Конечно, все это с точки зрения лабораторной системы координат, в которой граница раздела перемещается по покоящейся среде в отрицательном направлении оси z . Поэтому даже при равной нулю компоненте групповой скорости в этом направлении преломленная волна отводит энергию от границы раздела в полном соответствии с принципом излучения Мандельштама [8].

Из выражений (110) видно, что при $h^2 > 0$ сначала обращается в нуль величина k_{2z} . Это имеет место при скорости

$$\beta = \beta_0 = \frac{\sin \vartheta_0 - \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \cos \vartheta_0}, \quad (117)$$

и может происходить только при $\varepsilon_1 \mu_1 \geq \varepsilon_2 \mu_2$ в интервале углов падения ϑ_0 , для которых

$$1 > \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}} \frac{1 + \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 \cdot \varepsilon_2 \mu_2 + (\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2)}}{\varepsilon_2 \mu_2 + 1} \geq \sin \vartheta_0 \geq \geq \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_2}}. \quad (118)$$

При скоростях перемещения границы раздела, превышающих β_0 , будет $k_{2z} < 0$, и поэтому компоненты фазовой и групповой скоростей преломленных волн становятся отрицательными. Это значит, что прошедшая во вторую среду волна распространяется вдогонку за уходящей границей раздела, но не догоняет ее.

Приведем теперь формулы для досветового случая ($\varepsilon_{1,2} \mu_{1,2} \beta^2 < 1$) при нормальном падении волны. При $\vartheta_0 = 0$ из формул (110)–(113) получим

$$m_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{1 - \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} = \frac{1 + \beta_1}{1 - \beta_1};$$

$$k_1 = -\frac{\omega_1}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}; \quad k_0 = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1};$$

$$m_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_2} = \frac{1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{1 + \beta \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} = \frac{1 + \beta_1}{1 + \beta_2};$$

$$k_2 = \frac{\omega_2}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}; \quad \beta_{1,2} = \frac{u}{U_{1,2}}; \quad v_{1,2} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{1,2} \mu_{1,2}}};$$

$$R = R_{\perp} = R_{\parallel} = \left| \frac{1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{1 - \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} \right|^2 R_0;$$

$$R_0 = \left| \frac{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} - \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} + \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}} \right|^2; \quad (119)$$

$$T = T_{\perp} = T_{\parallel} = \left| \frac{1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}}{1 + \beta \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}} \right|^2 T_0;$$

$$T_0 = \frac{4 \left| \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} \right|}{\left| \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} + \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} \right|^2}; \quad T_0 = (1 - R_0),$$

где R_0 и T_0 — коэффициенты отражения и пропускания для покоящейся границы раздела двух сред, $R_0 + T_0 = 1$. Однако $R + T \neq 1$, причем $R > R_0$ всегда, ибо $m_1^2 > 1$.

Эти формулы показывают, что отражение волн от резкого фронта бегущего параметра в покоящейся среде происходит практически так же, как и отражения волн от движущегося зеркала. Наличие среды сводится к тому, что в коэффициент m_1 , определяющий частотный сдвиг при отражении и увеличение интенсивности отраженных волн, входит не отношение скорости движения зеркала к скорости света в вакууме, а отношение скорости перемещения границы раздела к скорости распространения волн в среде перед ней.

Движущаяся граница создается внешними источниками таким образом, чтобы ее перемещение одновременно меняло и преломляющие свойства покоящейся среды. Это можно сделать, например, путем сканирования по нелинейной среде мощного импульса излучения или путем сканирования по среде мощного электронного пучка. Во всех случаях скорость перемещения границы раздела будет связана со скоростью перемещения фазы состояния используемого источника, и поэтому, как всякая фазовая скорость, она может иметь любые значения от нуля до бесконечности.

В частности, если выбрать ее такой, чтобы $|1 - \beta \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}| \ll 1$, то коэффициент отражения R от такой границы раздела может быть сделан сколь угодно большим даже при малом изменении показателя преломления среды $\Delta n = |n_2 - n_1| \ll \bar{n} = \frac{1}{2}(n_1 + n_2) \sim 1$, где $n_{1,2}^2 = \varepsilon_{1,2} \times \mu_{1,2}$. При этом мы можем в принципе иметь заметное преобразование частоты в область коротких длин волн [24]. Действительно, если по нелинейной среде сканируется мощный лазерный импульс с интенсивностью J_0 ,

то за счет нелинейности электронной поляризуемости атомов в сильном поле $\Delta n = a J_0$. Как показано в эксперименте [34], при $J_0 \approx 5 \text{ Мвт/см}^2$ будет $\Delta n \approx 2 \cdot 10^{-6}$. Эта поляризуемость практически безынерционна и устанавливается за период оптического колебания. Тогда при $J_0 \geq 500 \text{ Мвт/см}^2$ $\Delta n \approx 10^{-3}$. В этом случае $R \geq 1$ при $|1 - \beta n_1| \leq 10^{-2}$ и при этом $\lambda_1 \approx 10^{-3} \lambda_0$. Иными словами, имеется относительно простая возможность 100%-го преобразования оптического излучения ($\lambda_0 \approx 5 \cdot 10^3 - 7 \cdot 10^3 \text{ \AA}$) в более коротковолновое излучение, включая, как мы видим, и излучение рентгеновского диапазона с $\lambda_1 \approx (1-10) \text{ \AA}$. Потенциально же имеется возможность такого преобразования и в область жесткого рентгеновского излучения. Однако, как показано в [17, 33], эти возможности могут быть реализованы только при практически нереальных требованиях на резкость фронта бегущего параметра. Например, из формулы (107) видно, что для получения излучения с длиной волны $\lambda_1 \approx 5 \text{ \AA}$ толщина границы раздела не должна превышать величины в 5 \AA , или длительность сканирующего импульса должна быть не больше 10^{-18} сек .

Кроме этого существенного ограничения, существует еще одно обстоятельство, которое мы не учитывали в наших расчетах. Речь идет об учете дисперсии тех сред, в которых распространяются наши волны. Это особенно существенно для волны, отраженной от границы раздела, движущейся с релятивистской скоростью, ибо в этом случае частота отраженной волны может быть столь велика, что для нее принципиально необходимо учитывать дисперсию среды, в которой она распространяется. В то же время для падающей волны, которая распространяется в той же среде, дисперсия может быть несущественной.

В нашем конкретном случае, когда падающая, отраженная и преломленная волны распространяются по покоящейся диспергирующей среде, частоты и компоненты волновых векторов будут определяться из системы уравнений, образованной дисперсионным уравнением для каждой волны и кинематическими инвариантами I_x и I_ω :

$$\begin{aligned} I_x &= k_{0x} = \frac{\omega_0}{c} n_1(\omega_0) \sin \vartheta_0 = \frac{\omega_1}{c} n_1(\omega_1) \sin \vartheta_1 = \\ &= k_{2x} = \frac{\omega_2}{c} n_2(\omega_2) \sin \vartheta_2; \end{aligned}$$

$$I_{\omega} = \omega_0 [1 + \beta n_1(\omega_0) \cos \vartheta_0] = \omega_1 [1 - \beta n_1(\omega_1) \cos \vartheta_1] = \omega_2 [1 + \beta n_2(\omega_2) \cos \vartheta_2]; \quad (120)$$

$$k_0^2 = k_{0x}^2 + k_{0z}^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2} n_1^2(\omega_0); \quad k_1^2 = k_{1x}^2 + k_{1z}^2 = \frac{\omega_1^2}{c^2} \cdot n_1^2(\omega_1)$$

$$k_2^2 = k_{2x}^2 + k_{2z}^2 = \frac{\omega_2^2}{c^2} n_2^2(\omega_2); \quad n_{1,2}^2 = \varepsilon_{1,2} \mu_{1,2};$$

$$I_{\omega} = (\omega_i + k_{iz} u) = \omega_i [1 \pm \beta n_i(\omega_i) \cos \vartheta_i].$$

Из этой системы видно, что частоты ω_1 и ω_2 определяются из неявных уравнений

$$[1 - \beta^2 n_{1,2}^2(\omega_{1,2})] \omega_{1,2}^2 - 2I_{\omega} \omega_{1,2} + (I_{\omega}^2 + u^2 I_x^2) = 0, \quad (121)$$

где $I_{\omega} = \omega_0 [1 + \beta n_1(\omega_0) \cos \vartheta_0]$ и

$$I_x = \frac{\omega_0}{c} n_1(\omega_0) \sin \vartheta_0,$$

т. е. определяются через характеристики падающей волны, а $(k_{1,2})_x = \frac{I_{\omega} - \omega_{1,2}}{u}$.

Амплитудные коэффициенты r и p в этом случае задаются формулами (33) и (37), в которых $a_j^{(\pm)}$ и b_j^{\pm} определяются выражениями (42), принимающими в данном случае ($\beta_j = 0$, $\beta_z = -\beta$) вид

$$\begin{aligned} a_1^{(+)} &\equiv a_0 = \frac{1}{\mu_1(\omega_0)} \{ck_{0z} + \beta \varepsilon_1(\omega_0) \mu_1(\omega_0) \omega_0\}; \\ a_1^{(-)} &\equiv a_1 = \frac{1}{\mu_1(\omega_1)} \{ck_{1z} + \beta \omega_1 \varepsilon_1(\omega_1) \mu_1(\omega_1)\}; \\ a_2^{(+)} &\equiv a_2 = \frac{1}{\mu_2(\omega_2)} \{ck_{2z} + \beta \omega_2 \varepsilon_2(\omega_2) \mu_2(\omega_2)\}; \\ a_2^{(-)} &= \frac{1}{\mu_2(\omega_2^{(-)})} \{ck_{2z}^{(-)} + \beta \omega_2^{(-)} \varepsilon_2(\omega_2^{(-)}) \mu_2(\omega_2^{(-)})\}, \end{aligned} \quad (122)$$

где $x_j = (\varepsilon_j \mu_j - 1)$. Формулы для b_0 , b_1 , b_2 и $b_2^{(-)}$ получаются отсюда, как обычно, заменой $\varepsilon_{1,2} \rightleftharpoons \mu_{1,2}$.

Для нахождения явных аналитических выражений для всех величин нужно знать дисперсионные зависимости для показателей преломления $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega) \mu(\omega)}$ в обеих средах. В общем случае стандартной модели квазиупругих осцилляторов [21] уравнения (121) не имеют простых решений, хотя можно рассмотреть ряд предельных

случаев. Мы не приводим здесь этих исследований (при желании их можно сделать с помощью приведенных выше формул), а ограничимся простейшим случаем. Он имеет прямое отношение к преобразованию отраженных волн на релятивистской ($|1 - \beta^2| \ll 1$) границе в область очень высоких частот. В этом случае для падающей и преломленной волны дисперсию можно не учитывать, а для отраженной волны можно использовать плазменное выражение, т. е.

$$n_1(\omega_0) = n_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}; \quad n_2(\omega_2) = n_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$$

и
$$n_1(\omega_1) = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2}}. \quad (123)$$

В этом случае выражения для ω_2 , k_{2z} , ω_0 , k_{0z} и для $a_0 \equiv a_1^{(+)}$ и $a_2 \equiv a_2^{(+)}$ остаются без изменения, а изменяются только величины ω_1 , k_{1z} и $a_1 = a_1^{(-)}$. Они принимают вид

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{1 + \beta n_1 \cos \vartheta_0}{1 - \beta^2} (1 + \beta h_1);$$

$$k_{1z} = -\frac{\omega_0}{c} \frac{(1 + \beta n_1 \cos \vartheta_0)}{1 - \beta^2} (\beta + h_1);$$

$$a_1 = -\omega_0 (1 + \beta n_1 \cos \vartheta_0) \left\{ h_1 + \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta h_1} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 (1 + \beta n_1 \cos \vartheta_0)^2} \right\}, \quad (124)$$

где

$$h_1 = \sqrt{1 - (1 - \beta)^2 \frac{c^2 I_x^2 + \omega_p^2}{\omega_0^2 (1 + \beta n_1 \cos \vartheta_0)^2}}.$$

Поскольку выбранная модель хорошо описывает отражение лишь от релятивистской границы раздела, т. е. когда $(1 - \beta^2) \ll 1$, то эти выражения принимают следующий приближенный вид:

$$\omega_1 \simeq \omega_0 \frac{1 + \beta n_1 \cos \vartheta_0}{1 - \beta} \left[1 - \frac{1 - \beta}{2} \frac{c^2 I_x^2 + \omega_p^2}{\omega_0^2 (1 + \beta n_1 \cos \vartheta_0)^2} \right];$$

$$k_{1z} \simeq -\frac{\omega_0 (1 + \beta n_1 \cos \vartheta_0)}{c (1 - \beta)} \left[1 - \frac{1 - \beta}{2} \frac{c^2 I_x^2 + \omega_p^2}{\omega_0^2 (1 + \beta n_1 \cos \vartheta_0)^2} \right]; \quad (125)$$

$$a_1 \simeq -\omega_0 (1 + \beta n_1 \cos \vartheta_0) \left[1 - \frac{(1 - \beta) c^2 I_x^2}{\omega_0^2 (1 + \beta n_1 \cos \vartheta_0)^2} \right].$$

С помощью формул (125) можно рассчитать отражение от релятивистской границы раздела в покоящихся средах.

Мы подробно проанализировали результаты отражения и преломления волн на досветовой границе раздела, перемещающейся по покоящейся среде навстречу падающей волне со скоростью $u < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}$ и $u < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}$. Формулы для случая попутного движения границы и падающей волны получаются из приведенных в данном пункте заменой β на $-\beta$.

Перейдем теперь к анализу преломления волн на сверхсветовой границе раздела, когда ее скорость больше фазовой скорости распространения волн в обеих средах, т. е. $\beta \sqrt{\varepsilon_{1,2} \mu_{1,2}} > 1$. Очевидно, что взаимодействие между падающей волной и такой границей раздела будет осуществляться только при их встречном движении. В этом случае отраженной волны нет, а позади границы раздела образуются уже две преломленные волны. Одна из них совпадает с преломленной волной для досветового случая, и все ее характеристики были получены и изучены нами выше. Другая волна соответствует второму решению дисперсионного уравнения для двух возможных волн в покоящейся среде. Ее параметры также были получены выше. Мы выпишем здесь эти выражения для обеих волн вместе в явном виде с учетом того, что $\beta \sqrt{\varepsilon_{1,2} \mu_{1,2}} > 1$. Согласно формулам, приведенным в данном пункте, имеем: для частот и компонент волновых векторов из (110)

$$k_{2x}^{(+)} = k_{2x}^{(-)} = k_{0x} = I_x = \frac{\omega_1}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \vartheta_0;$$

$$I_\omega = \omega_0 (1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0); \quad (126)$$

$$\omega_2 = \omega_2^{(+)} = \omega_0 \frac{1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0}{\varepsilon_2 \mu_2 \beta^2 - 1} (\beta \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} h - 1);$$

$$m_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0};$$

$$k_{2z} \equiv k_{2z}^{(+)} = \omega_0 \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{c} \frac{1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0}{\varepsilon_2 \mu_2 \beta^2 - 1} (\beta \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} - h);$$

$$\omega_2^{(-)} = -\omega_0 \frac{1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0}{\varepsilon_2 \mu_2 \beta^2 - 1} (1 + \beta \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} h); \quad m_2^{(-)} = \frac{\omega_2^{(-)}}{\omega_0};$$

$$k_{2z}^{(-)} = \omega_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{c}} \frac{1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0}{\varepsilon_2 \mu_2 \beta^2 - 1} (\beta \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} + h);$$

для амплитуд обеих преломленных волн из (36), (38) и (40) и (110)

$$r_{\perp} = \frac{E_2^{(-)}}{E_0} = -\frac{\omega_2^{(-)}}{\omega_0} \frac{a_1^{(+)} - a_2^{(+)}}{a_2^{(+)} - a_2^{(-)}} = -m_2^{(-)} \frac{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} l - \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} h}{2 \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} h}; \quad (127)$$

$$p_{\perp} = \frac{E_2}{E_0} = \frac{\omega_2}{\omega_0} \frac{a_1^{(+)} - a_2^{(-)}}{a_2^{(+)} - a_2^{(-)}} = m_2 \frac{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} l + \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} h}{2 \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} h};$$

$$r_{\parallel} = \frac{H_2^{(-)}}{H_0} = -m_2^{(-)} \frac{\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1} l - \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2} h}{2 \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2} h};$$

$$p_{\parallel} = \frac{H_2}{H_0} = m_2 \frac{\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1} l + \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2} h}{2 \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2} h};$$

где

$$h^2 = 1 + \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2} \frac{(\beta^2 \varepsilon_2 \mu_2 - 1) \sin^2 \vartheta_0}{(1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0)^2}; \quad l = \frac{\cos \vartheta_0 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0}.$$

Трансформация энергии в эти две преломленные волны определяется коэффициентами

$$R_{\perp, \parallel} = g_2^{(-)} |r_{\perp, \parallel}|^2 \quad \text{и} \quad T_{\perp, \parallel} = g_2 |p_{\perp, \parallel}|^2, \quad (128)$$

где

$$g_2^{(\pm)} = \left| \frac{\mu_1 \omega_0 k_{0z}^{\pm}}{\mu_2 \omega_2^{(\pm)} k_{0z}} \right| \quad \text{и} \quad g_2 = g_2^{(+)}, \quad \text{а}$$

$$k_{0z} = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cdot \cos \vartheta_0.$$

Выражения для этих коэффициентов трансформации нетрудно получить из приведенных выше формул. Мы не будем заниматься подробным их анализом, ибо он аналогичен сделанному ранее для досветового случая. Приведем только выражения для этих коэффициентов при нормальном падении волны ($\vartheta_0 = 0$)

$$R = R_{\perp} = R_{\parallel} = M_1 R_0; \quad T = T_{\perp} = T_{\parallel} = M_2 T_0, \quad (129)$$

где

$$M_1 = |m_2^{(-)}(\vartheta_0 = 0)|^2 = \left| \frac{\beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} + 1}{\beta \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} - 1} \right|^2;$$

$$R_0 = \frac{|\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} - \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}|^2}{4 |\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} \cdot \varepsilon_2/\mu_2|}; \quad (130)$$

$$M_2 = |m_2(\vartheta_0 = 0)|^2 = \left| \frac{\beta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} + 1}{\beta \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} + 1} \right|^2; \quad T_0 = \frac{|\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} + \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}|^2}{4 \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} \cdot \varepsilon_2/\mu_2}.$$

Из этого частного случая видно, как изменяются частоты и амплитуды обеих волн при трансформации на сверхсветовой границе раздела. Поскольку скорость такой границы может принимать и бесконечные значения (напомним, что она является фазовой скоростью!), то с ростом скорости частоты обеих волн стремятся к одному и тому же значению

$$\omega_2^{(+)}|_{\beta=\infty} = \omega_2^{(-)}|_{\beta=\infty} = \omega_{2\infty} = \omega_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2}}, \quad (131)$$

причем частота первой (старой) преломленной волны $\omega_2 \equiv \equiv \omega_2^{(+)}$ при таком изменении β меняется незначительно, а частота второй преломленной волны монотонно убывает от бесконечности при $\beta\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}=1$ до значения $\omega_{2\infty}$ в (131). Интенсивности обеих трансформированных волн пропорциональны интенсивности падающей волны и с ростом скорости изменяются пропорционально квадратам частот этих волн. Коэффициенты пропорциональности R_0 и T_0 не зависят от скорости границы раздела и связаны соотношением

$$T_0 = (1 + R_0). \quad (132)$$

Это соотношение можно трактовать как условие рождения новых квантов на сверхсветовой границе раздела [11, 30]. Фактическая причина появления новых квантов точно такая же, как и рождение новых квантов при аномальном эффекте Доплера: эти кванты рождаются за счет энергии поступательного движения такой границы раздела.

Действительно, с точки зрения микроскопической теории явление отражения и преломления волн на покоящейся границе раздела рассматривается как двухэтапный процесс возбуждения элементарных излучателей падающей волной с их последующим переизлучением вторичных волн (см., например, [16] или [35]). Сложение вторичных волн происходит таким образом, что отраженная и преломленная волны излучаются только во вполне определенных направлениях. Это говорит о том, что процесс сложения вторичных волн в этих двух направлениях имеет когерентный характер, т. е. они складываются в фазе. Другим аргументом в пользу когерентных свойств отраженных и преломленных волн является то, что данный процесс можно рассматривать как явление излу-

ния Вавилова—Черенкова в обе среды от источника, движущегося вдоль границы раздела и возбуждаемого падающей волной [36, 37] (см. также [38]). Напомним, что этот источник всегда перемещается со скоростью, большей скорости света в первой среде, а при нормальном падении его скорость равна бесконечности. Кроме того, при отражении от границы раздела с плазмой коэффициент отражения, т. е. интенсивность отраженной волны, пропорционален квадрату концентрации частиц, что тоже говорит о когерентности процесса отражения.

Для покоящейся границы раздела частоты всех волн одинаковы и совпадают с частотой падающей волны. Если граница раздела начинает двигаться по покоящейся среде или вместе со средой позади нее, то микроскопическая картина отражения и преломления приобретает новые и весьма существенные спектральные особенности. Например, элементарные излучатели возбуждаются уже не с частотой падающей волны ω_0 , а с доплеровски смещенной частотой $\omega' = \gamma (\omega_0 - \mathbf{k}_0 \mathbf{u})$, $\gamma^{-1/2} = (1 - u^2/c^2)$. Поскольку граница раздела двух сред с различными преломляющими свойствами перемещается с постоянной скоростью u , а падающая на нее волна бесконечна в пространстве и во времени, то можно говорить о возбуждении элементарных излучателей с частотой ω' непрерывно в тех точках среды позади границы раздела, в которых в данный момент находится движущаяся граница раздела. Иными словами, позади границы раздела остается след возбужденных с частотой ω' элементарных излучателей, который перемещается вдогонку за уходящей³ границей раздела со скоростью u , т. е. непрерывное взаимодействие падающей волны с различными точками среды, в которых в данный момент времени оказывается движущаяся граница раздела, создает во второй среде совокупность элементарных излучателей с собственной частотой ω' , перемещающихся со скоростью u вдогонку за уходящей границей раздела. В лабораторной системе координат такие движущиеся осцилляторы излучают доплеровски смещенные частоты [38]

$$\omega_2 = \frac{\omega' \sqrt{1 - u^2/c^2}}{|1 - (\mathbf{u}/c) \mathbf{n}_2(\omega_2, \mathbf{k}_2)|}, \quad (133)$$

³ Для простоты рассматривается случай встречного движения границы раздела и падающей волны.

где ω' — собственная частота этих осцилляторов, измеренная в системе покоя границы раздела, где происходит их возбуждение, u — скорость их перемещения, а $n_2 = ck_2/\omega_2$ — показатель преломления для волн во второй среде, распространяющихся в направлении k_2 . Напомним, что если ω'_0 — собственная частота какого-либо процесса с периодом $T'_0 = 2\pi/\omega'_0$, измеренная в системе покоя осциллятора, движущейся относительно лабораторной системы со скоростью u , а ω_0 — собственная частота того же процесса с длительностью $T_0 = 2\pi/\omega_0$, измеряемая с точки зрения лабораторной системы координат, то $\omega_0 = \omega'_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$, ибо $T'_0 = T_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$. В нашем случае $\omega' \equiv \omega'_0$.

Справедливость соотношения (133) подтверждается тем, что если подставить в него выражения для ω' и для $n_2 = ck_2/\omega_2$ из данного параграфа, то оно превращается в тождество.

Возбужденные электрическим полем падающей волны элементарные осцилляторы излучают вторичные волны во все стороны с дипольной диаграммой направленности. Для покоящейся границы раздела [16, 35] в условиях стационарного взаимодействия падающей волны с непрерывно распределенными дипольными излучателями интерференция падающей волны и вторичных волн приводит к погашению падающей волны внутри второй среды и к появлению преломленной волны, уходящей от границы раздела в глубь второй среды. Иными словами, для простого случая падения волны из вакуума на среду, эта интерференция приводит к тому, что суммарное поле в среде состоит из двух волн, бегущих соответственно со скоростью света в вакууме и в среде. Первая из них погашает падающую волну в среде, а в свободном пространстве перед средой она появляется в виде отраженной волны. Вторая составляющая полного поля в среде уходит в глубь среды в виде преломленной волны, но уже с новой скоростью, равной скорости света в среде. Вся эта картина применима к отражению волн на покоящихся границах раздела.

Если же граница раздела начинает двигаться навстречу падающей волне вместе со средой позади нее или по покоящейся среде, то упомянутые выше волны, существующие позади границы, могут и не догнать уходящую от

них границу раздела; в результате этого в среде перед движущейся границей раздела уже не появится отраженная волна, а в среде позади границы раздела появится вторая преломленная волна, бегущая в направлении уходящей границы раздела. Очевидно, это будет иметь место тогда, когда компонента $v_{2gz}^{(-)}$ групповой скорости этой второй волны позади границы раздела в направлении нормали к последней будет меньше скорости самой границы раздела. Для движущегося в вакууме диэлектрика это явление всегда отсутствует, ибо разность

$$u - |v_{2gz}^{(-)}| = -\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{h(1-\beta)^2}{1+\beta h/\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad \text{где}$$

$$h = \sqrt{1 - \frac{(1-\beta)^2 \sin^2 \vartheta_0}{\varepsilon\mu (1+\beta \cos \vartheta_0)^2}}.$$

всегда отрицательна и, следовательно, $v_{2gz}^{(-)} > u$, т. е. вторая волна всегда выходит из движущегося диэлектрика в вакуум. Однако при движении границы раздела по полежащей среде из формул (95) следует, что

$$u - |v_{2gz}^{(-)}| = -\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}} \frac{1 - \varepsilon_2\mu_2\beta^2}{1 + \beta \sqrt{\varepsilon_2\mu_2} h} h,$$

где

$$h^2 = \left[1 - \frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2} \frac{\sin^2 \vartheta_0 (1 - \beta^2 \varepsilon_2\mu_2)}{(1 + \beta \sqrt{\varepsilon_1\mu_1} \cos \vartheta_0)^2} \right].$$

Поэтому при $\varepsilon_2\mu_2\beta^2 < 1$ будет $u < |v_{2gz}^{(-)}|$ и волна выходит через движущуюся границу в первую среду (напомним, что при этом $\varepsilon_1\mu_1\beta^2 < 1$). Если же $\varepsilon_2\mu_2\beta^2 > 1$, то $u > |v_{2gz}^{(-)}|$, и эта волна остается во второй среде в виде второй преломленной волны.

Хотя эти две преломленные волны и имеют один и тот же источник излучения — элементарные излучатели, возбуждаемые падающей волной, но их свойства существенно различны. Действительно, если по формулам (110) определить знак разности $(1 - \beta n_2)$, стоящей в знаменателе формулы (133) для частот, то нетрудно видеть, что для обычной преломленной волны разность $1 - \beta n_2^{(+)}$ всегда положительна, а для второй преломленной волны она всегда отрицательна. А это значит, что обычная преломленная волна является нормальной доплеровской волной, а вторая преломленная волна является аномальной

(сверхсветовой) доплеровской волной. Как известно [38], аномальные доплеровские волны, как правило, усиливаются за счет индуцированного испускания при их многократном переизлучении. Поэтому становится понятным возможное заметное увеличение коэффициента трансформации (129) во вторую преломленную волну при $\varepsilon_2 u_2 \beta^2 \rightarrow 1$. В то же время коэффициент трансформации в нормальную доплеровскую волну (обычная преломленная волна) остается практически не зависящим от скорости β . Естественно, как и ранее, энергия обеих преломленных волн забирается от энергии поступательного движения границы раздела.

Заметим, что соотношения между коэффициентами трансформации R и T для досветового и сверхсветового случаев можно записать в виде, который также подчеркнет различие между этими двумя случаями. Если воспользоваться формулами (112) и (127) для амплитуд при E -поляризации падающей волны, то нетрудно видеть, что можно записать следующие равенства:

$$\frac{|E_1|^2}{\omega_1^2} + \frac{|E_2|^2}{\omega_2^2} = \frac{|E_0|^2}{\omega_0^2}$$

— для досветового случая,

$$\frac{|E_2|^2}{\omega_2^2} = \frac{|E_2^{(-)}|^2}{(\omega_2^{(-)})^2} + \frac{|E_0|^2}{\omega_0^2}$$

— для сверхсветового случая.

Для ограниченных волновых пакетов, которые можно составить из этих плоских волн, можно ввести понятие числа квантов в пакете $N = W/h|\omega|$, где W — полная энергия электромагнитного поля в пакете длительностью τ , пропорциональная $\tau|E|^2$. Поскольку при трансформации такого пакета на движущейся границе раздела меняется и длительность пакетов τ (как $1/\omega$), то приведенные выше соотношения переходят в закон преобразования числа квантов на движущейся границе раздела [11, 30] $N_0 = (N_1 + N_2)$ — для досветового случая, $N_0 = (N_2 - N_2^{(-)})$ — для сверхсветового случая. Последнее означает, что на досветовой границе раздела сохраняется число квантов, а на сверхсветовой границе раздела — нет, т. е. такая граница рождает новые кванты. Это соответствует представленной выше картине, основанной на нормальном и аномальном эффектах Доплера.

В заключение данного пункта рассмотрим, какой вид примут формулы для частот, компонент волновых векторов и амплитуд в случае, когда скорость перемещения границы раздела стремится к бесконечности. Очевидно, бесконечная скорость перемещения такой границы попросту означает, что мы в какой-то момент времени мгновенно во всем пространстве поменяли значения параметров среды ϵ_1 и μ_1 на ϵ_2 и μ_2 . Иными словами, мы имеем случай резко нестационарной среды. В этом случае из формул (126) и (127) получим (при $\beta \rightarrow \infty$)

$$h = l = \frac{1}{\cos \vartheta_0}, \quad \omega_2 = \omega_0 \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}}, \quad \omega_2^{(-)} = -\omega_0 \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}},$$

$$k_{2x}^{(+)} = k_{2x}^{(-)} = k_{0x} = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \cos \vartheta_0, \tag{134}$$

$$k_{2x}^{(+)} = k_{2x}^{(-)} = k_{0x} = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \vartheta_0,$$

$$r_{\perp} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \left(1 - \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_1}{\mu_2 \epsilon_1}} \right),$$

$$p_{\perp} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \left(1 + \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_1}{\mu_2 \epsilon_1}} \right),$$

$$r_{\parallel} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_1}{\mu_2 \epsilon_1}} \right),$$

$$p_{\parallel} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}} \left(1 + \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_1}{\mu_2 \epsilon_1}} \right),$$

$$r_{\perp} = \frac{E_2}{E_0}, \quad p_{\perp} = \frac{E_2^{(-)}}{E_0}, \quad r_{\parallel} = \frac{H_2}{H_0} \quad \text{и} \quad p_{\parallel} = \frac{H_2^{(-)}}{H_0}.$$

Отсюда следует, что при трансформации волн в резко нестационарной среде после скачка вместо одной волны появляются две волны, имеющие один и тот же волновой вектор k_2 , совпадающий с волновым вектором падающей волны k_0 . Остальные параметры этих волн, т. е. их частоты и амплитуды, меняются согласно (134) и одинаковы для падающих волн с любым направлением ϑ_0 и с любой поляризацией.

Подводя итоги, можно сказать следующее. Полученные А. Эйнштейном [1] формулы для частоты, направления распространения и амплитуды волны, отраженной от движущегося в вакууме зеркала, остаются качественно справедливыми и в тех случаях, когда падающая и отра-

женная волны распространяются в преломляющей среде. Нужно только во всех формулах заменить скорость света на скорость распространения волн в этой среде. Если отражение на движущейся границе раздела имеет незеркальный характер, то появляется преломленная волна, уменьшающая коэффициенты отражения. Когда скорость границы раздела превышает скорости распространения волн в обеих средах, отраженная волна исчезает, а вместо нее позади границы раздела появляется вторая преломленная волна. В данной работе подробно рассмотрены все эти случаи и получены соответствующие формулы. Эти формулы позволяют оценивать возможности преобразования частот на движущихся границах раздела. Их можно использовать также для диагностики движущихся сред.

Л и т е р а т у р а

1. *Эйнштейн А.* Собр. науч. трудов, т. I. М., «Наука», 1965, с. 7, 115 и 123.
2. *Eropkin D. I.* — *Z. Phys.*, 1929, 58, N 3—4, 268.
3. *Totaro C.* — *Atti Soc. Peloritana, Sci. fis. mat. e nature.*, 1956, 2, N 1, 89.
4. *Totaro C.* — *Boll. Union Math. Ital.*, 1957, 12, N 4, 658.
5. *Landecker K.* — *Phys. Rev.*, 1952, 86, N 6, 852; Рус. пер. в кн.: Миллиметровые и субмиллиметровые волны. М., ИЛ, 1959, с. 179.
6. *Lampert M. A.* — *Phys. Rev.*, 1956, 102, N 2, 299; Рус. пер. там же, с. 145.
7. *Файнберг Я. Б., Ткалич В. С.* — *ЖТФ*, 1959, 29, № 4, 491.
8. *Болотовский Б. М., Столяров С. Н.* — *Эйнштейновский сборник 1974*. М., «Наука», 1976, с. 179.
9. *Гапонов А. В., Островский Л. А., Фрейдман Г. И.* — *Изв. вузов. Радиофизика*, 1967, 10, № 9—10, 1376.
10. *Гапонов А. В., Островский Л. А., Рабинович М. И.* — *Изв. вузов. Радиофизика*, 1970, 13, № 2, 163.
11. *Островский Л. А., Степанов Н. С.* — *Изв. вузов. Радиофизика*, 1971, 14, № 4, 489.
12. *Гавриленко В. Г.* Канд. дис. Горький, ГГУ, 1973.
13. *Кравцов Ю. А., Степанов Н. С.* — *ЖЭТФ*, 1969, 57, 1730.
14. *Гавриленко В. Г., Лупанов Г. А., Степанов Н. С.* — *ЖТФ*, 1971, 41, вып. 3, 534.
15. *Силин В. П., Рухадзе А. А.* *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред*. М., Госатомиздат, 1961.
16. *Борн М., Вольф Э.* *Основы оптики*. М., «Наука», 1970.
17. *Столяров С. Н.* — *Письма в ЖТФ*, 1976, 2, вып. 19, 880.
18. *Островский Л. А.* — *УФН*, 1975, 116, вып. 2, 315.
19. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* *Электродинамика сплошных сред*. М., Гостехиздат, 1957.

20. Паули В. Теория относительности. М.—Л., ГИТТЛ, 1947.
21. Беккер Р. Электронная теория. М.—Л., ОИПН, 1936.
22. Островский Л. А., Соломин Б. А. — Изв. вузов. Радиофизика, 1967, 10, № 8, 1183.
23. Столяров С. Н. — ЖТФ, 1963, 33, № 5, 565.
24. Столяров С. Н. — Изв. вузов. Радиофизика, 1968, 11, № 4, 543.
25. Болотовский Б. М., Столяров С. Н. — Изв. вузов. Радиофизика, 1961, 4, № 6, 1171.
26. Столяров С. Н. — Изв. вузов. Радиофизика, 1962, 5, 671.
27. Мёллер К. Теория относительности. М., Атомиздат, 1975.
28. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., «Наука», 1967.
29. Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Волны в магнитоактивной плазме. М., «Наука», 1970.
30. Сорокин Ю. М. Канд. дис. Горький, ГГУ, 1973.
31. Столяров С. Н. Канд. дис. М., ФИАН, 1963.
32. Валлис Г., Зауэр К., Зюндер Д. и др. — УФН, 1974, 113, 435.
33. Столяров С. Н. — Квантовая электроника, 1977, 4, № 4 (58), 763.
34. Bradley J., Magyar G., Richardson M. C. — Nature, 1966, 212, N 5057, 63.
35. Кизель В. А. Отражение света. М., «Наука», 1973.
36. Болотовский Б. М., Гинзбург В. Л. — Эйнштейновский сборник 1972. М., «Наука», 1974; УФН, 1972, 106, 577.
37. Франк И. М. — УФН, 1959, 68, 397; Изв. АН СССР, сер. физ., 1942, 6, 3.
38. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. М., «Наука», 1975.

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ПОНЯТИЯ ИНЕРЦИИ (НЬЮТОН, МАХ, ЭЙНШТЕЙН)

1. Введение

В последние годы заметно усилился интерес к релятивистской космологии и вопросам, связанным со структурой пространства-времени. Центральным среди них является вопрос о гравитационных и инерциальных силах, их природе, особенностях поведения и способах измерения. Имеются попытки вновь вернуться к доэйнштейновским временам и, отталкиваясь от некоторых более общих принципов, чем постулаты общей теории относительности, создать неэйнштейновские теории гравитации [1]. Отчасти эта тенденция вызвана стремлением экспериментально проверить общую теорию относительности и преодолеть трудности, связанные с описанием процесса измерения в рамках этой теории. Как правило, схема подобных экспериментов предполагает измерение релятивистских поправок к ньютоновской теории, которые описываются так называемым приближением слабого поля в теории Эйнштейна. Поэтому естественно возникает желание проанализировать возможно более широкий класс теорий, обобщающих ньютоновскую механику и дающих один и тот же классический предел. При этом часто в качестве одного из критериев, определяющих выбор различных вариантов теории тяготения, используется идея Маха о связи инерциальных свойств тел со структурой Вселенной в целом, известная как принцип Маха.

Под принципом Маха понимают различные утверждения, отражающие ту или иную часть круга идей, развивавшихся Махом в «Механике» (1883) и принявших форму новых определений массы и силы, а также нескольких «опытных принципов», сформулированных там же [2]. Список различных современных формулировок принципа Маха можно найти, например, в [3, 4] и [17]. Точка зрения Маха, нашедшая свое отражение в этих принципах, заключалась в том, что экспериментально наблюдаемы

только относительные движения, промежутки времени, ускорения и скорости. Следовательно, положения тел и движения их могут быть определены только по отношению к другим телам. В частности, ускорение какого-либо тела Мах предложил определять по отношению к центру масс тел, заполняющих всю Вселенную. Масса должна при этом играть роль коэффициента, характеризующего взаимные ускорения пар тел. Мах считал, что если имеются большие и достаточно удаленные массы, то с хорошей степенью точности с ними можно связать неподвижную (инерциальную, по Ньютону) систему отсчета. Равномерное и прямолинейное движение какого-либо тела в такой системе отсчета означает отсутствие влияния на него более близких и меньших масс по сравнению с большими массами, находящимися на бесконечности.

Анализ понятия массы как меры инерции тел, проведенный Махом, был направлен против ньютоновских представлений об абсолютном пространстве, абсолютном времени, абсолютном движении и о массе как мере количества вещества. Он сыграл роль важного эвристического принципа при создании Эйнштейном общей теории относительности. Однако все попытки использовать принцип Маха не просто в качестве общего интуитивного утверждения, но как математически строгое положение, которое можно наделить конкретным содержанием и проверить экспериментально, оканчиваются неудачей. Принцип Маха «сопротивляется» как своей математизации, так и экспериментальной проверке. Причиной этого, как нам кажется, является невозможность построить какую-либо теорию без абсолютных, т. е. аксиоматических элементов, пользуясь только величинами, измеримыми экспериментально. Тем не менее следует отдать должное Маху, который своим критическим анализом разрушил веру в неизблемость классических представлений и открыл дорогу теории относительности [5].

Структура физической теории, призванной описывать объективно существующие классы явлений, подобно структуре всякого языка, предполагает определенный способ отождествления теоретических утверждений и экспериментально наблюдаемых соотношений, причем события описываются обычно как происходящие в пространстве и времени. Поэтому предположения о структуре пространства и времени, той «координатной сетке», которая позво-

ляет нам отождествлять и различать события, играют первостепенную роль в структуре физической теории [21].

В данной статье прослеживается эволюция пространственно-временных представлений от Ньютона до Эйнштейна и роль критики Маха в создании общей теории относительности. Показано, что, несмотря на первоначальное стремление Эйнштейна реализовать в своей теории идеи Маха, принцип Маха несовместим с теорией относительности в ее современном понимании, как и с любой теорией, основанной на представлениях, не зависящих от выбора системы координат.

2. Мах и Ньютон

В идеальной теории, по представлению Маха, должна быть отражена принципиальная точка зрения, «... из которой равным образом вытекали бы и ускоренное движение, и движение по инерции», поскольку экспериментально невозможно реализовать такую систему отсчета, в которой движение данного тела было бы в точности инерциальным [2]. Ньютон сознавал эту трудность. Он писал в [6]¹: «... Возможно, что равномерного движения, которым можно было бы измерять время, нет, а все движения могут быть ускорены или замедлены». Однако он считал, что подобные трудности существуют только в относительном пространстве, т. е. в пространстве относительных положений массивных тел. Наряду с относительным пространством Ньютон пользовался представлением об абсолютном пространстве, которое «благодаря своей природе и вне связи с каким-нибудь внешним предметом ... остается всегда равным и неподвижным. Относительное пространство, — говорит далее Ньютон, — есть мера или подвижная часть первого, т. е. абсолютного пространства, которое наши чувства обозначают его положением относительно других тел и обыкновенно принимают за пространство неподвижное. ... Так мы, и не без удобства, пользуемся в области человеческих отношений относительными местами и движениями вместо абсолютных, в учении же о природе приходится абстрагировать наши чувства. Дело в том, что может оказаться и так, чтобы не существовало ни одного действительно покоящегося тела, к кото-

¹ Цитируется по переводу в [2].

рому можно было бы относить все места». Процессы в абсолютном пространстве Ньютона протекают в абсолютном времени, которое не может быть изменено в своем течении, в отличие от относительного времени, измеряемого движениями тел.

Разницу между абсолютным и относительным пространствами, а также между абсолютным и относительным движениями Ньютон видел в различии вращательного и поступательного движений. Для пояснения своей мысли он приводил, как известно, следующий опыт с вращающимся ведром. В ведро, подвешенное на сильно закрученной нити, наливают воду, и ведро отпускают. Вначале стенки ведра закручиваются быстро, но поверхность воды остается плоской, т. е. вода неподвижна. Таким образом, вначале относительное движение воды по отношению к стенкам ведра наибольшее, но абсолютного движения нет. Затем, когда вода увлекается стенками ведра, ее относительное движение по отношению к стенкам исчезает, но абсолютное становится наибольшим, на что указывает искривление поверхности воды. Поэтому абсолютное движение, или движение по отношению к абсолютному пространству, Ньютон считал истинным. «Впрочем, — отмечал он, — отличать истинные движения от мнимых очень трудно, потому что части того неподвижного пространства, в которых тела действительно движутся, не могут быть чувственно познаны».

Эти представления Ньютона о двух видах пространств и движений, которыми необходимо пользоваться при описании физических явлений, стали главным объектом критики Маха. Он писал: «Абсолютное пространство и абсолютное движение — абстрактные вещи, не обнаружимые на опыте. Все же наши основные принципы механики представляют собой . . . данные опыта об относительных положениях и движениях тел. Никто не вправе расширить сферы действия этих основных принципов за пределы опыта, . . . так как никто не сумел бы найти ему приложения».

Когда говорят, что тело K изменяет свое движение под действием другого тела K' , то имеют в виду наличие других тел A, B, C , с помощью которых можно это установить.

Если же абстрагироваться от тел A, B, C , то получится двойная ошибка. Во-первых, мы не знаем, как будут вести

себя K и K' в отсутствие A , B , C . Во-вторых, у нас не было бы средств проверить наши суждения, которые тем самым стали бы непаучны. Опыт Ньютона с вращающимся сосудом показывает только то, что относительное вращение воды по отношению к стенкам сосуда не пробуждает заметных центробежных сил, но что эти последние пробуждаются относительным вращением по отношению к массе Земли и остальным небесным телам. Никто не может сказать, как протекал бы опыт, если бы стенки сосуда становились все толще и массивнее, пока, наконец, их толщина не достигла бы нескольких миль. «Вместо того, чтобы относить движущееся тело K к пространству (в какой-нибудь системе координат), мы будем теперь прямо рассматривать его отношение к телам мирового пространства, которыми эта система координат только и может быть определена».

Таким образом, по мнению Маха, для того, чтобы освободить механику от метафизического понятия абсолютного пространства (а также и абсолютного времени), достаточно правильно выбрать систему отсчета, используя тела мирового пространства, и рассматривать движение относительно них. Однако относительное движение не может, по определению, быть равномерным или ускоренным само по себе, но лишь по отношению к некоторому другому «эталонному» движению. Изменение выбора «эталонного» движения или системы отсчета может сделать равномерное движение неравномерным, и наоборот. Следовательно, считал Мах, наша теория должна допускать равноправие ускоренных и неускоренных движений, а также не зависеть от способа отсчета времени.

Представления о структуре пространства тесно связаны с понятием инерции. Поэтому следующим объектом критики Маха стали законы Ньютона.

Краеугольным камнем классической механики является первый закон Ньютона (закон инерции): «Тело движется равномерно и прямолинейно до тех пор, пока на него не подействует сила».

Этот закон носит аксиоматический характер. Движение, о котором в нем говорится, происходит по отношению к абсолютному пространству. Инерция понимается как свойство тела сопротивляться изменению движения своей массой. Формула, выражающая количественно соотношение между воздействием на тело и изменением его дви-

жения, составляет содержание второго закона Ньютона (уравнение движения):

$$F = \frac{d}{dt}(mv). \quad (1)$$

Здесь F — сила, действующая на тело, m — инерциальная масса, v — скорость тела.

Третий закон Ньютона об ограничениях на вид возможных сил гласит: «Действие всегда равно противодействию, или действия двух тел друг на друга всегда равны и противоположным образом направлены».

Э. Мах поставил явно вопрос о существовании таких систем отсчета, в которых выполняются законы Ньютона. Эти системы отсчета называются инерциальными. Очевидно, что вращающаяся система отсчета не является инерциальной и законы Ньютона в ней не выполняются (действие не равно противодействию). Мах указал также на то обстоятельство, что в эксперименте измеряются только относительные величины: относительное положение, скорости и ускорения. Поэтому и силы, а, следовательно, и массы, могут быть определены только относительно других сил и масс, приписываемых каким-либо материальным телам. Иначе говоря, экспериментально можно определить только отношение каких-либо двух масс, действующих друг на друга, но не абсолютную величину какой-либо одной массы.

Определение массы как меры количества материи тела, данное Ньютоном, Мах считал неудовлетворительным, так как оно содержит, по его мнению, порочный круг: масса определяется произведением плотности на объем, тогда как плотность определяется только как масса единицы объема. Истинное определение массы, по Маху, может быть выведено только из динамических отношений тел.

Закон движения массы выражен у Ньютона абстрактно, без ясного обозначения системы координат, в которой его следует проверять. Это казалось Маху совершенно бессмысленным, так как выбор системы координат автоматически влечет за собой учет влияния остальных тел Вселенной на исследуемые тела. Мах писал [2]: «Я до настоящего времени остался единственным, кто относит . . . закон инерции к Земле, а для движений большого пространственного и временного протяжения — к небу»

неподвижных звезд . . . а там, где оно служить не может, просто говорю, что такого ориентирующего средства нет еще и его надо искать . . . Если мы говорим, что тело сохраняет свое направление и скорость в пространстве, то в этом заключается только краткое указание на то, что принимается во внимание весь мир». При этом Мах допускал возможность того, что изолированные тела A , B , C , . . . , задающие систему координат, играют «лишь случайную роль при определении движения тела K » и что движение определяется «. . . средой, в которой находится тело K . Но тогда, — пишет Мах, — было бы необходимо заменить абсолютное пространство Ньютона этой средой». Принимая такую точку зрения, нужно стремиться к физическому пониманию законов взаимодействия тел через эту среду «в роде электрического действия на расстоянии». «Можно считать, — пишет Мах в другом месте, — что все массы находятся в связи друг с другом. Во всех процессах природы играют роль разности неизвестных величин. . . Процессы сводятся к выравниванию этих разностей».

Определение силы у Ньютона имеет следующий вид: «Приложенная сила есть действующее на тело стремление изменить его состояние, состояние покоя или равномерного прямолинейного движения». Сравнивая это определение с первым и вторым законами Ньютона, Мах отмечает наличие тавтологии, так как эти законы, по его мнению, «следуют из определения силы».

«Третий закон без правильного определения массы непонятен, а с ним не нужен», — утверждает Мах. Но смог ли Мах, пользуясь своими идеями, преодолеть недостатки классической механики?

Мах предложил заменить определения и законы Ньютона следующими определениями и принципами.

а) Опытный принцип. «Противопоставленные друг другу тела вызывают друг в друге при известных, определенных в экспериментальной физике, условиях противоположные ускорения в направлении соединяющей их линии». (Принцип инерции здесь уже включен.)

б) Определение. «Отношение масс двух тел есть отрицательное обратное отношение их взаимных ускорений».

с) Опытный принцип. «Отношения масс не зависят от рода физических состояний тел (будь то электрические, магнитные и т. д. состояния), обуславливающих взаимное

их ускорение; они остаются одними и теми же, безразлично, получены ли они опосредованно или непосредственно».

д) Опытный принцип. «Ускорения, которые вызывают несколько тел A, B, C , в каком-нибудь теле K , друг от друга не зависят». (Отсюда непосредственно вытекает принцип параллелограмма сил.)

е) Определение. «Движущая сила есть произведение величины массы какого-нибудь тела на вызванное в нем ускорение».

Заметим, что среди этих принципов, сформулированных Махом, нет ни одной из современных форм «принципа Маха». Анализ показывает, что перечисленные принципы и определения не только не являются методологически лучшими по сравнению с классическими, как надеялся Мах, но по существу им уступают. Например, определение е) приводит к закону движения $F=ma$ (a — ускорение тела), который представляет собой лишь частный случай второго закона Ньютона. Главное методологическое отличие определений и принципов Маха от ньютоновских состоит в выдвигании на первый план понятия ускорения вместо понятия силы. Подобная замена ведет к невозможности рассматривать движения с переменной массой (например, реактивное движение). Кроме того, исчезает непосредственная связь уравнений движения с законами сохранения, тогда как второй закон Ньютона (уравнение движения (1)) можно рассматривать как закон сохранения импульса. Однако, вероятно, размышления над этими принципами привели Эйнштейна к его знаменитому принципу эквивалентности.

Большой интерес представляет маховское определение массы как динамической характеристики взаимодействий тел Вселенной. Оно опирается на ньютоновские уравнения движения и закон равновесия рычага, т. е. применимо к стационарной системе тел.

Согласно Маху, материальное тело массы μ при неускоренном движении движется не по отношению к пространству, а по отношению к центру окружающих его масс m_i , в частности по отношению к центру всех прочих масс \vec{r}_i Вселенной, находящихся от него на расстояниях \vec{r}_i . Это выражается уравнением

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \right) = 0 \quad (2)$$

и «эквивалентно утверждению о постоянстве скорости и направления μ , если только принимают во внимание достаточно много масс, достаточно далеких и больших. При этом само собой отпадает взаимное влияние более близких меньших масс» [2]. Заметим, что уравнение (2) ничего не говорит о природе сил, осуществляющих это влияние. Однако с уравнением (2) связана следующая форма принципа Маха (принадлежащая Маху): *инерция тела определяется притяжением к тяжелым массам, находящимся на бесконечности*. Это утверждение является следствием того, что в числителе левой части уравнения (2) стоит произведение масс на их расстояние от данного тела, а в знаменателе — фиксированная суммарная масса тел. Поэтому основной вклад в ускорение тела массы μ вносят тяжелые сильно удаленные от него массы. Таким образом, чем больше имеется сильно удаленных масс, тем более инерциальным является движение данного тела, или увеличение инерции данного тела происходит при скоплении тяжелых масс на бесконечности от него. Ту же мысль можно представить иначе, записывая условие равновесия всех масс Вселенной. Координаты центра масс определяются соотношением

$$\xi = \frac{\sum_i m_i r_i + \mu r_0}{\sum_i m_i + \mu}. \quad (3)$$

Полагая $\xi = 0$, получим

$$\sum_i m_i r_i + \mu r_0 = 0,$$

откуда

$$\mu = \frac{|\sum_i m_i r_i|}{|r_0|}, \quad (4)$$

где $|r_0|$ — расстояние данной массы μ от центра масс Вселенной.

Необходимо подчеркнуть, что вывод о том, что инерция тела определяется притяжением к бесконечно удаленным массам, является следствием двух утверждений: абстрактного принципа «масса данного тела определяется его взаимодействием со всеми массами Вселенной» и конкретного уравнения движения, определяющего это взаимодействие — уравнения Пьютона. Соотношение (4)

в принципе можно было бы проверять экспериментально, если бы все символы, входящие в него, означали экспериментально измеримые величины. Однако это не так, что смутно понимал и Мах. Он писал: «Мы не получаем абсолютного пространства, но в нашем распоряжении лишь ограниченное число масс и суммирование не может быть доведено до конца. Простейшие с виду принципы механики. . . основаны на незавершенном и даже недо-ступном полному завершению опыте. . . они не могут рассматриваться как математические истины. . .» Следует добавить, что в выражениях (4) или (2) мы не только не можем выполнить суммирование по всем массам Вселенной, но и не можем, оставаясь в рамках классической механики, определить те расстояния до сильно удаленных масс, которые, по Маху, дают основной вклад в инерцию тела.

Таким образом, стремясь избежать ньютоновской тавтологии в определении массы как меры количества материи, Мах пришел к определению массы как характеристики инерциального движения через взаимодействие данного тела с телами, находящимися на бесконечности. Но определение Маха также содержит логический круг, на который указал Эйнштейн: «Масса движется без ускорения, если она достаточно удалена от других тел, но мы знаем о ее достаточной удаленности от других тел только по ее движению без ускорения».

Пытаясь разорвать этот логический круг, Эйнштейн пришел к необходимости вообще отказаться от представления о выделенных типах движения или системах координат, во всяком случае для больших областей пространства и для Вселенной в целом. Он предположил, что инерциальные системы координат существуют лишь локально, причем пространство и время зависимы друг от друга и не могут, вообще говоря, рассматриваться отдельно, но должны быть объединены в одно понятие пространства-времени. Эйнштейн постулировал также, что распределение масс во Вселенной влияет на геометрию пространства-времени, а через нее — на движение пробных тел, и сформулировал принцип эквивалентности: инертная масса пробного тела равна массе тяготеющей. Вначале он думал, что нашел подходящую форму для выражения идей Маха, но впоследствии выяснилось, что принцип Маха в общей теории относительности не выполняется, и Эйнштейн от него отказался.

3. Эйнштейн и Мах

Анализируя классическую механику и критику Маха в ее адрес, Эйнштейн пришел к выводу, что «... мы не можем искать причины, по которым некоторые состояния движения имеют преимущество перед всеми другими, в телах, с которыми мы имеем дело, или в самом понятии движения; напротив, это преимущество следует рассматривать как независимое свойство пространственно-временного континуума» [7]. Отсюда следовало, что класс выделенных движений (инерциальных) должен задаваться а priori и определять геометрию пространства-времени.

В основу общей теории относительности легли следующие постулаты:

1. Пространство-время представляет собой 4-мерное риманово многообразие.

2. Поле тяготения описывается симметричным тензорным полем второго ранга на этом многообразии — метрикой $g_{\mu\nu}$ пространства-времени.

3. Траектории пробных тел — геодезические линии в пространстве-времени с метрикой $g_{\mu\nu}$.

4. Уравнения поля тяготения, описывающие связь между метрикой пространства-времени и распределением материи, имеют вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (5)$$

где $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи, R — скалярная кривизна, $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса материи, κ — гравитационная константа.

Наличие κ и принцип эквивалентности позволяют в слабом гравитационном поле получить ньютоновские уравнения движения материальной точки как приближенные уравнения геодезических.

К каким следствиям ведут идеи Маха, если принять постулаты Эйнштейна? Если забыть о том, что эти постулаты не были взяты из опыта, то на первый взгляд кажется, что все пожелания Маха относительно идеальной физической теории в ОТО выполнены.

Прежде всего отпадает вопрос о том, в каких системах координат справедливы уравнения движения и поля. Уравнения в теории Эйнштейна, в отличие от уравнений Ньютона, записываются через тензорные величины и, сле-

довательно, справедливы в любой системе координат. Это свойство называется общей ковариантностью уравнений.

Во-вторых, абсолютное пространство и время, не подверженные каким-либо изменениям, отсутствуют. Структура пространства-времени явно зависит от распределения и движения вещества во Вселенной.

В-третьих, все движения пробных тел равноправны и происходят вдоль искривленных геодезических линий пространства-времени без приложения какой-либо силы. Понятие силы отсутствует, поскольку оно оказалось излишним.

В-четвертых, взаимодействие тел друг с другом происходит через гравитационное поле подобно взаимодействию зарядов в электродинамике, а не мгновенно, как в механике Ньютона, и, наконец, масса тела имеет тот же смысл, что энергия тела, и определяется его взаимодействием с веществом во всей Вселенной через геометрию пространства-времени. При этом в силу принципа эквивалентности ускорение не зависит от природы тела. Наряду с инерциальными системами координат оказывается возможным использовать неинерциальные системы, т. е. ускоренные и вращающиеся.

Однако, несмотря на то, что пространство-время в общей теории относительности не является абсолютным пространством Ньютона, оно в той же мере не является и относительным пространством Маха. Координаты в пространстве-времени Эйнштейна, как правило, не соответствуют физически измеримым расстояниям, а время — промежуткам времени. Динамическая геометрия Эйнштейна, хотя и не задана а priori, тем не менее представляет собой абсолютный элемент теории, поскольку ковариантная форма записи уравнений и тензорный анализ позволяют описать пространство-время через инвариантные величины, а следовательно, независимым от выбора системы координат образом. Например, точки пространства можно было бы «перенумеровать» с помощью инвариантных кривизн, которые в принципе являются измеримыми величинами. Для Маха, который считал, что в пустом пространстве нет «всех», такая ситуация невозможна и более того, парадоксальна: найдены «координаты», не зависящие от выбора системы координат.

По Маху, через выбор системы координат учитывается взаимодействие всей материи во Вселенной. Поль-

зуюсь инвариантными величинами, с точки зрения Маха, мы как бы игнорируем это взаимодействие. Поэтому замену поисков тех систем координат, в которых выполняются заданные уравнения движения (например, уравнения Ньютона), поисками таких уравнений, которые выполняются в любой системе координат, нельзя считать реализацией идей Маха. Напротив, инвариантное описание позволяет говорить даже о том, как вели бы себя исследуемые объекты в отсутствие остальной материи в мире, что несовместимо с представлениями Маха.

Равноправие ускоренных и неускоренных движений . . . Когда Мах писал об идеальной теории, тот ли смысл вкладывался им в эти слова, который они имеют в теории относительности?

Мах понимал равноправие движений в том смысле, что наблюдаемые эффекты, позволяющие различать между собой вращающиеся и невращающиеся тела, носят относительный, *зависящий* от выбора системы координат характер. Поэтому ему казалось возможным найти такой способ описания физических явлений, при котором «. . . относительное движение приводило бы к появлению центробежных сил». Это утверждение можно было бы назвать принципом относительности Маха. В теории Эйнштейна, напротив, принцип относительности понимается как *независимость* предсказаний теории от выбора системы координат. В результате общая ковариантность уравнений Эйнштейна, позволяющая пользоваться при вычислении эффектов произвольными системами координат, сделала различие между вращающимися и невращающимися системами с точки зрения Маха абсолютным, так как оно оказалось выраженным через такие величины, которые нельзя устранить выбором системы координат (например, хронометрические инварианты). Таким образом, возникла антимеховская ситуация.

Заметим, что общая ковариантность уравнений поля означает равноправие ускоренных и неускоренных систем координат при нахождении решений этих уравнений (симметрия уравнений поля). Сами же решения, соответствующие конкретным физическим ситуациям (вращение, поступательное движение, деформация), могут обладать меньшей степенью симметрии, чем исходные уравнения. В таком случае говорят о «спонтанном» нарушении симметрии теории. Симметрия решений является одним

из моментов, позволяющих описать разницу в конкретных физических ситуациях.

Рассмотрим теперь следствия, к которым приводит принцип Маха, если в качестве уравнений движения используются уравнения геодезических, а не уравнения Ньютона.

Имеет ли место в теории Эйнштейна эквивалентность вращения тела относительно системы неподвижных звезд и вращения звезд вокруг тела, о которой говорил Мах? Определяется ли инерция тела его взаимодействием с удаленными массами? Имеет ли место относительность инерции? Ответы на эти вопросы можно получить, анализируя уравнения движения. Уравнения геодезической, по мнению Эйнштейна, выражают единство инерции и тяготения, так как левая часть этих уравнений

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

лишь в целом имеет характер тензора (по отношению к произвольному преобразованию координат), но каждый из двух членов, взятый в отдельности, таковым не является. По аналогии с уравнениями Ньютона первый член должен рассматриваться как выражение для силы инерции, второй — как выражение для гравитационной силы. Выбирая специальным образом систему координат, можно обратить второй член в нуль. Тогда уравнение геодезической превратится в уравнение прямой линии, движение по которой соответствует, с точки зрения Ньютона, чисто инерциальному движению. Однако такая система координат существует лишь в небольшой области пространства-времени (строго говоря, в одной точке), что не позволяет описать с ее помощью всю Вселенную. Иными словами, заведомо найдутся такие точки или области во Вселенной, которым мы не сможем приписать никаких координат в данной локально-инерциальной системе отсчета и не сможем, пользуясь только одной системой координат, приять во внимание весь мир. Кроме того, интерпретация массы, по Маху, как характеристики взаимодействия данного тела с другими телами Вселенной приводит в теории Эйнштейна к следствию, прямо противоположному полученному Махом в механике. Именно, если Мах, используя уравнения Ньютона, пришел к заключению, что инерция тела определяется

в основном массами, находящимися на бесконечности от него, то из уравнений геодезической, напротив, следует, что основной вклад в массу пробного тела вносят тела, расположенные поблизости от него. Вывод, к которому пришел Эйнштейн, пользуясь принципом Маха и уравнениями геодезических, следующий [7]:

а) «инерция тела должна возрастать по мере скопления весоных масс вблизи него». Формула, полученная Эйнштейном из уравнений геодезической, имеет вид ($ds = \sqrt{g_{44}} dl$):

$$\frac{d}{dt} [(1 + \bar{\sigma}) \mathbf{v}] = \text{grad } \bar{\sigma} + \frac{d\mathbf{u}}{dt} + [\text{rot } \mathbf{u}, \mathbf{v}], \quad (6)$$

где

$$\bar{\sigma} = \frac{\kappa}{8\pi} \int \frac{\sigma dV_0}{r}, \quad u^\alpha = \frac{\kappa}{2} \int \frac{\sigma (dx^\alpha/dl)}{r} dV_0.$$

Из уравнений (6) следует, что инертная масса пропорциональна $(1 + \bar{\sigma})$ и возрастает по мере приближения весоных масс к пробному телу, тогда как у Маха из уравнений (2) и (4) следовало, что приближение остальных масс к пробному телу уменьшает его инерцию.

Экспериментальной проверке доступен не сам принцип Маха, а лишь экспериментально наблюдаемые следствия из него. Какое же из двух приведенных выше противоположных следствий принципа Маха подтверждает его? Бранс [8] считает, что Эйнштейн неверно интерпретировал вычисления, проведенные в специальной системе координат, что полученный им эффект чисто координатный и в лабораторной системе отсчета указанного эффекта не существует. Однако не существует и эффекта, предсказанного самим Махом. Если бы инерция тел на Земле определялась взаимодействием с удаленными звездами, тогда анизотропия в распределении звездной материи проявилась бы в анизотропии масс на Земле. По оценкам Коккони и Салпитера [9], анизотропия масс $\Delta m/m$, вызванная несимметричным расположением Солнечной системы относительно центра Галактики, должна составлять от $3 \cdot 10^{-10}$ до $2 \cdot 10^{-5}$. Однако эксперименты Древера, Бельтрана-Лопеца, Хьюза и других [1, 10, 11] показали, что на уровне 10^{-22} — 10^{-23} таких эффектов нет. Если вместе с Дикке предположить, что отсутствие анизотропии масс в этих экспериментах объясняется тем, что

все частицы и поля в равной мере подвержены этой анизотропии, тогда принцип Маха оказывается вообще непроверяемым в локальных экспериментах.

Другие следствия, вытекающие из соотношений (6) в соответствии с принципом Маха и отмеченные Эйнштейном [7]:

б) «ускоряющиеся массы оказывают индукционное действие на пробное тело в направлении ускорения, что описывается членом $\partial u/\partial t$ »,

с) «вращающееся полое тело должно создавать внутри себя «кориолисово поле сил», стремящееся отклонить движущиеся тела в направлении вращения, а также радиальное поле сил» (эффект Лензе—Тирринга).

Эйнштейн считал существование этих эффектов сильным аргументом в пользу идей Маха об относительности всех инерциальных воздействий. Но так ли это?

Зельдович и Новиков [12] заметили, что эти эффекты, хотя и существуют в общей теории относительности, не означают с необходимостью изменения инерциальных свойств пробного тела. Они могут быть интерпретированы как чисто координатные эффекты, в то время как инерция, понимаемая как свойство тела сопротивляться негравитационным воздействиям, не меняется.

На самом деле, здесь как и в случае следствия а), можно говорить не просто об иной интерпретации формул, но о явном противоречии выводов из принципа Маха в классической механике и в теории относительности. Это противоречие отражает невозможность совместить гипотезу близкодействия, лежащую в основе ОТО, и гипотезу дальнего действия классической механики.

Действительно, из уравнений (2) и (4) вытекают следующие утверждения: 1) локальная инерциальная система определяется некоторым средним движением удаленных астрономических объектов; 2) локальные системы отсчета, в которых законы Ньютона приблизительно справедливы (без введения кориолисовых или центробежных сил), — это те же системы, которые (приближенно) не вращаются относительно удаленных звезд; 3) движения, эквивалентные кинематически (т. е. определенные измерением угловой скорости Земли относительно фиксированных звезд), эквивалентны динамически (т. е. определенные наблюдением за движением маятника Фуко или гироскопа). Эти три практически равноценных утверждения иногда исполь-

вуют как современные формулировки принципа Маха [1, 3, 4, 16—18, 20]. Но они в действительности лишь следствия, вытекающие из утверждения Маха о том, что инерция тела определяется его взаимодействием с удаленными телами Вселенной, т. е. из уравнений Ньютона. В определенном смысле в общей теории относительности они соответствуют следствиям b) и c), выведенным из уравнений геодезической. Однако следствия, полученные Эйнштейном, означают, что локально инерциальная система вблизи вращающегося тела (или внутри сферической оболочки) вращается, т. е. ее оси, если их определить с помощью гироскопов, не направлены на одни и те же фиксированные звезды и движения, эквивалентные кинематически, неэквивалентны динамически. В теории Ньютона таких эффектов нет.

Кроме того, оказалось, что лишь в ограниченном числе космологических моделей можно ввести локальную систему отсчета так, чтобы она совпадала с системой отсчета, оси которой направлены на неподвижные звезды. Именно такие системы отсчета Мах и считал инерциальными. В общей теории относительности подобные системы отсчета существуют только в так называемых фридмановских моделях Вселенной (однородных и изотропных), в которых движение вещества происходит в радиальных направлениях от наблюдателя. Однако, как заметили Зельдович и Новиков [12], даже движение с постоянной скоростью относительно такой системы отсчета должно приводить к физическим отличиям, что не наблюдается.

Таким образом, одно и то же качественное утверждение Маха о связи локальных свойств инерции тела и распределения вещества во Вселенной при использовании разных уравнений движения привело к различным определениям инерциальной системы отсчета. Какое же из них более правильно и лучше подтверждает принцип Маха? По-видимому, ни то, ни другое. Мы лишь убедились в том, что понятие локальной инерциальной системы невозможно строго определить без использования уравнений движения, ограничиваясь только наблюдениями за окружающими телами, как хотел Мах. Иначе говоря, имеется логический круг, связывающий инерциальные системы отсчета и уравнения движения, а принцип Маха лежит вне этого круга. Например, если пренебречь вращением Земли вокруг оси и ее движением по орбите

вокруг Солнца, то неподвижная световая отсчетная на поверхности Земли, ориентированная на фиксированные звезды, является инерциальной с точки зрения классической механики и неинерциальной с точки зрения общей теории относительности. По Ньютону, инерциальна та система отсчета, в которой сумма сил, действующих на начало отсчета, равна нулю и действие равно противодействию, а в теории Эйнштейна инерциальная система должна в гравитационном поле свободно падать. Система отсчета на поверхности Земли последнему условию не удовлетворяет.

Гипотеза о движении по геодезической в римановом пространстве-времени приводит и к другим противоречиям с идеями Маха. Так, например, если принять, что инерция тела определяется его взаимодействием с другими телами Вселенной, то в пустом пространстве-времени инерция тела должна отсутствовать. Однако в общей теории относительности ситуация совершенно иная. Уравнения гравитационного поля в пустоте имеют решения. Простейшее из них — плоское пространство-время Минковского, в котором тела движутся по прямолинейным траекториям и обладают своей обычной инерцией. Наличие одной тяжелой массы приводит к пространству-времени Шварцшильда, имеющему плоскую асимптотику на бесконечности. Следовательно, и в этом случае вдали от тяготеющей массы пробное тело будет обладать инерцией относительно пустого плоского пространства. Уравнения Эйнштейна в пустоте допускают также широкий класс нетривиальных решений, в частности пространство, заполненное гравитационными волнами. В таком пространстве траектории пробного тела искривлены, несмотря на отсутствие притягивающих его других тел.

Если в правой части уравнений Эйнштейна в качестве источника поставить электромагнитный тензор энергии-импульса, можно получить решение, описывающее замкнутую область риманова пространства, имеющую конечные размеры и заполненную электромагнитным излучением [13]. Вне этой области, называемая геонем, ведет себя как тяготеющая масса, хотя никакой тяжелой массы в обычном смысле внутри нее нет («масса без массы») и нет массивных тел на бесконечности, способных создать, по Маху, инерциальную массу такого объекта. Другим примером антимеховских объектов являются элементар-

ные частицы, устроенные, подобно замкнутой Вселенной, из одного гравитационного поля, — максимоны, фридмоны [14], плаякеоны [15]. Движение пробного тела по геодезической в поле другого массивного тела противоречит идеям Маха и в смысле относительности инерции. Действительно, в отсутствие негравитационных сил мы не можем по движению пробного тела определить его массу, поскольку геодезическое движение от массы пробного тела не зависит. Однако геодезические зависят от массы источника поля, и поэтому то же самое движение пробного тела позволяет определить массу притягивающего его тела. Таким образом, относительность инерции в теории Эйнштейна отсутствует.

Итак, в общей теории относительности возможны нелепые с точки зрения Маха ситуации: наличие инерции тела относительно пустого пространства; искривление траекторий, т. е. воздействие на тело со стороны пустого пространства; притяжение к «массе без массы», т. е. наличие инерции в отсутствие каких-либо тел.

Кроме того, поскольку при нахождении решений уравнений поля существенны граничные условия, получается, что не все $g_{\mu\nu}$ -поле и, следовательно, не вся инерция тел определяется материей. Это также неудовлетворительно с точки зрения идей Маха.

Пытаясь все-таки совместить принцип Маха с теорией относительности, Эйнштейн видоизменил уравнения поля, добавив в правой части так называемый космологический член λ . Это дало ему возможность получить стационарное решение, описывающее замкнутую Вселенную, заполненную пылью без давления. Замкнутость решения позволяла избежать неприятного вопроса о граничных условиях. Эйнштейн надеялся, что модифицированные уравнения поля с $\lambda > 0$ не будут иметь решений при $T_{\mu\nu} = 0$, т. е. что в отсутствие материи будет отсутствовать и инерция в соответствии с принципом Маха. Однако де Ситтер нашел такое решение, описывающее пространство постоянной кривизны. После этого Эйнштейн отказался от λ -члена, но заметил, что, возможно, мир де Ситтера представляет собой предельный случай мира, в котором вся материя сконцентрирована на поверхности $r = \pi/2R$. Как показано в [16], такая интерпретация возможна, но при любом конечном значении времени t 3-мерное пространство выглядит свободным от материи.

Когда Гедделем было найдено решение для того же распределения вещества, что и в эйнштейновской Вселенной, но соответствующее случаю, когда материя вращается, стало ясно, что $g_{\mu\nu}$ -поле однозначно распределением вещества не определяется. Из этого обстоятельства, а также сказанного выше следует, что принцип Маха в теории относительности нельзя рассматривать как следствие одних уравнений поля. Поэтому некоторые авторы [1, 16, 17] предлагали использовать принцип Маха как дополнительное ограничение, позволяющее отбирать среди решений уравнений поля более «физические».

Существует ли такое решение уравнений Эйнштейна, которое удовлетворяет принципу Маха? Сам Мах, как мы видели, не формулировал какого-либо определенного принципа, а лишь высказал ряд качественных идей, отражающих, по его мнению, свойства инерциального движения.

Можно попытаться более четко сформулировать отдельные идеи Маха и проверить, каким из них удовлетворяет общая теория относительности. Именно с такими попытками связаны многочисленные современные формулировки принципа Маха. Каждая из этих формулировок, претендующая быть «истинным» принципом Маха, используется обычно как правило отбора «маховских» и «антимаховских» решений уравнений Эйнштейна. При этом нередко оказывается, что решения, «маховские» по одним своим свойствам, попадают в число «антимаховских» по другим. Например, эйнштейновская стационарная Вселенная является «маховской», если требуется: 1) относительность вращения, т. е. возникновение одних и тех же кориолисовых и центробежных сил независимо от того, вращается ли само пробное тело или Вселенная вокруг него (в отсутствие электромагнитного поля), или 2) инерциальная система отсчета полностью определяется через сумму плотности тензора энергии-импульса материи и гравитационного поля, а также условиями симметрии, но становится «антимаховской», если принцип Маха формулируется в следующем виде: «физически допустимы только те пространства-времени, которые полностью порождены источником». Любопытно, что такой формулировке принципа Маха не удовлетворяет ни одна модель, соответствующая $\lambda \neq 0$. Иными словами, космологический член, введенный Эйнштейном для согласо-

ния его теории с принципом Маха, оказался «антимаховским».

Обзоры современных формулировок принципа Маха и получающихся классификаций космологических моделей можно найти в [1, 3, 4, 17, 18], но здесь мы не будем далее их обсуждать, поскольку ни одному из авторов не удалось совместить принцип Маха с теорией относительности Эйнштейна, да и сам Эйнштейн после многочисленных безуспешных попыток от этого отказался.

4. Современная форма научной теории и эксперимент

Главная причина этого неуспеха, на наш взгляд, состоит в том, что Мах, призывая при построении теории избегать любых абсолютных элементов и отталкиваться только от наблюдений и феноменологии, лишил, по существу, физику какой-либо научной основы. То, что свойство инерциальности не содержится в движущихся телах и не может быть извлечено из них простым наблюдением, уже иллюстрировалось выше примером с неподвижной системой отсчета на поверхности Земли. Мы не можем сказать, инерциальна ли такая система отсчета, пока не написаны уравнения движения, а если они написаны, то ответ зависит только от уравнений движения, но не от свойств тел, образующих рассматриваемую систему. Именно: в классической механике неподвижная лоренцова система на поверхности невращающейся Земли *считается* инерциальной, в общей теории относительности — нет. Отсюда, разумеется, не следует, что свойства объективно существующей системы тел зависят от нас, но от нас зависит та система понятий, с помощью которых мы описываем эти свойства.

Система понятий, описывающих эксперимент, тесно связана со свойствами приборов и методикой измерений, но в теории она присутствует в «снятом» виде, превратившись в принципы относительности и симметрии теории, задаваемые а priori. В свою очередь, принципы относительности и симметрии определяют форму вопросов, с которыми мы обращаемся к природе и, следовательно, форму возможных ответов.

В любой физической теории можно выделить те понятия, которые образуют ее логическую основу или аксио-

матическую структуру, и те, которые, будучи производными от первых, являются теоретическими образами различных экспериментально наблюдаемых соотношений. Понятия инерции, инерциальности, пространства и времени относятся к первому типу и не могут непосредственно проверяться в эксперименте. Однако от их выбора зависят понятия силы, взаимодействия, массы, энергии и т. д., которые уже сопоставимы с результатами измерений.

Эволюция понятия инерции от Ньютона до Эйнштейна показывает, что в ней можно выделить три стадии, каждую из которых олицетворяют Ньютон, Мах и Эйнштейн.

У Ньютона инерция понимается как способность тела сопротивляться воздействию силы, стремящейся искривить его траекторию, или способность сохранять равномерное прямолинейное движение. Мах пытается выяснить природу этой способности к сопротивлению и связывает инерцию с притяжением к бесконечно удаленным звездам, отмечая, кроме того, что в действительности инерциальных (т. е. прямолинейных) траекторий не существует. Эйнштейн, стремясь выразить идеи Маха в математической форме, приходит к созданию общей теории относительности, в которой нет выделенных инерциальных траекторий, нет абсолютного пространства, масса имеет чисто геометрический смысл, а искривление траекторий определяется движением и распределением вещества во Вселенной. «Общая теория относительности есть единственный способ избежать такой нереальной вещи, как инерциальная система», — пишет Эйнштейн в «Сущности теории относительности». Однако, как выяснилось позже, принцип Маха не имеет места в теории Эйнштейна. Теория относительности оказалась теорией нового типа, в которой наиболее ясно видна роль аксиоматических, т. е. абсолютных, с точки зрения Маха, элементов теории.

Минковский, которому принадлежит идея геометрического рассмотрения пространства-времени, протестовал против употребления слова «относительность» в применении к теории, основанной на «абсолютном». Как заметил Синг, «если бы он дожился до создания общей теории относительности, то повторил бы свой протест даже в более сильных выражениях». Синг предлагает «посмотреть прямо в лицо фактам абсолютного пространства-времени» [19]. Однако абсолютность пространства-времени Эйнштейна столь же сильно отличается от абсолютности

пространства и времени Ньютона, как относительность теории Эйнштейна от относительности Маха.

В самом деле, абсолютное пространство Ньютона не связано с каким-либо внешним предметом и остается всегда постоянным и неподвижным. Оно существует независимо от нашего сознания, объективно, но лишь в том смысле, что мы не можем на него воздействовать, хотя оно проявляет себя в движении материальных тел. Риманово пространство теории Эйнштейна меняет свою геометрию в зависимости от движения вещества и, как правило, не остается неизменным и неподвижным. Тем не менее оно обладает характеристиками, позволяющими описывать его объективно, отвлекаясь от нашего влияния на него. Такими характеристиками являются инварианты римановой геометрии.

Относительность в понимании Маха — это возможность устранить какой-либо эффект или вызвать его появление, заменив одну систему координат другой. Относительность в теории относительности (как специальной, так и общей) — это выделение того класса систем координат, в которых все явления протекают *одинаково*, а следовательно, замена одной системы координат на другую *не вызывает* каких-либо новых эффектов. В теории относительности изучаются свойства именно одинаково протекающих явлений, что наделяет ее высказывания определенной степенью общности. Эффекты же, связанные только с конкретной системой координат, носят случайный характер и не рассматриваются в качестве характеристик физических систем.

Методологически ценным было указание Маха на то, что в любой физической теории необходимо точно определять смысл терминов масса, движение, сила, система отсчета и т. д. Эти понятия, по Маху, следует вводить так, чтобы они отражали способ отождествления математических переменных и величин, измеряемых экспериментально, т. е. *зависели* от этого способа. В противном случае, считал Мах, утверждения теории абстрактны и непроверяемы.

Развивая эти идеи, Эйнштейн пришел к выводу, что понятия, существенные для теории, должны вводиться способом, *не зависящим* от способа отождествления с экспериментом, т. е. инвариантным, причем, именно инвариантность гарантирует объективность теоретического опи-

сания. Принцип Маха, взятый абстрактно без уравнений движения, не может быть проверен экспериментально. Если же он применяется конкретно в совокупности с определенными уравнениями движения, то в зависимости от выбранных уравнений он может приводить к прямо противоположным следствиям. Мах использовал в своих рассуждениях упрощенные уравнения Ньютона и закон рычага. Поэтому выводы, к которым он пришел, следуют из механики Ньютона. Но кроме того, Мах сделал попытку «материализовать» силу инерции, отождествив ее с далекодействующей силой притяжения к бесконечно удаленным телам, и получить тем самым интерпретацию массы. По Ньютону, сила инерции не является реальной силой и не нуждается в интерпретации. В этом отличие точек зрения Ньютона и Маха. В теории Эйнштейна вместо материализации силы инерции мы видим «дематериализацию» силы тяготения, превращение ее в геометрию пространства-времени. Но такая «дематериализация» означает отказ от гипотезы далекодействия и переход к теоретико-полевому описанию гравитации. Понятие силы инерции как причины, порождающей массу, в ОТО отсутствует. В этом смысле идеи Маха не реализованы в ОТО. Масса в теории Эйнштейна характеризуется только искривлением окружающего ее пространства-времени.

Эволюция физических теорий существенно связана с эволюцией принципов относительности, т. е. групп симметрии пространства-времени. Группа Галилея классической механики была в специальной теории относительности заменена группой Лоренца, а затем группой Пуанкаре, включавшей группу Галилея в качестве своей подгруппы. Группа Пуанкаре, в свою очередь, была заменена группой произвольных преобразований координат в общей теории относительности. Расширение группы симметрии дало возможность включить в число инвариантов новые характеристики, игравшие роль феноменологических констант на предыдущем этапе. Масса, которая в теории Ньютона играла роль случайной для теории феноменологической константы, в релятивистской динамике стала одним из квантовых чисел. Тем самым исчезла необходимость искать искусственное объяснение ее присутствию в теории. В общей теории относительности группа произвольных преобразований координат не имеет инвариантов, но она определяет форму взаимодействий. Подобную роль играют

локальные калибровочные группы в теории сильных и слабых взаимодействий, а также в электродинамике.

Наиболее четко роль принципов симметрии и инвариантности видна в теории элементарных частиц, где изучаемые объекты столь малы, что исключают возможность применения к ним классических макроскопических понятий. Теория представлений групп симметрии (пространственно-временных и внутренних) оказалась тем аппаратом, который адекватно описывает и классифицирует элементарные частицы.

Теория элементарных частиц позволяет проиллюстрировать еще одно противоречие между современной физикой и идеями Маха. Именно, квантовая механика и теория поля пользуются такими квантовыми числами, которые не имеют наглядной или модельной интерпретации. Например, попытки модельной интерпретации спина электрона долгое время затрудняли его понимание. В то же время, следуя идеям Маха, мы должны были бы стремиться выразить спин электрона, так же как и заряд, и все константы взаимодействия, через «содержание вещества во Вселенной».

Таким образом, развитие современной физики показывает, что присутствие в теории абсолютных или аксиоматических элементов само по себе не исключает влияния свойств Вселенной на локальные процессы. Поэтому критика Маха, обращенная к теории Ньютона, не привела к желаемому результату (отмене абсолютных элементов). Напротив, оказалось, что инвариантная форма описания представляет собой своеобразный способ учета влияния окружающего мира и условий эксперимента, именно такой способ, при котором сохраняется объективность описания. Условия эксперимента входят в теорию через аксиомы о структуре пространства и времени и связанные с ними определения инерциального или свободного движения и формулируются в виде принципа относительности. Предметом изучения теории являются инвариантные свойства объектов в пространстве-времени с заданной принципом относительности группой симметрии. Тем самым выделяются те свойства объектов, которые не зависят от выбора системы координат в пространстве и времени. Иными словами, мы, следуя Маху, принимаем во внимание весь мир, но лишь для того, чтобы, в отличие от Маха, найти способ отвлечься от него

и отбросить все нелокальные воздействия, оперируя величинами, отнесенными к одной точке.

Интересно отметить, что в эволюции философских представлений о пространстве и времени также можно выделить три стадии развития, связанные с именами Ньютона, Лейбница [22] и Канта [23]. Если у Ньютона пространство существует само по себе независимо от свойств материальных тел, для которых оно служит своего рода «вместилищем», то у Лейбница пространственные отношения сводятся к взаимному расположению тел (порядку) и носят относительный характер. Канту же удалось показать, что пространство в действительности не является вполне ни тем, ни другим. С точки зрения Канта, пространство не зависит от свойств «помещенных в него» тел, хотя и не существует само по себе. Оно также не сводится к порядку тел самих по себе. Развивая идеи Эйнштейна о связи между характером взаимодействия и геометрией пространства-времени, мы можем сопоставить каждому виду взаимодействий свою геометрию. Поэтому заранее не фиксируется не только метрика пространства-времени, но и размерность его, и аффинная структура. Учет внутренних степеней свободы приводит при таком подходе к геометрии расслоенных пространств [21].

Эйнштейн отмечал, что неопределенное понятие «опыт» состоит на самом деле из двух частей: постулатов о структуре пространства-времени и законов взаимодействия физических объектов, которые обычно проверяются. Он писал [24], что в опыте мы всегда имеем сумму: геометрия + физические законы, что символически можно представить в виде $G \rightarrow G_0 + F$. В разных теориях соотношение между частями этой суммы может быть различным. Так, в классической механике G_0 соответствует абсолютной геометрии пространства-времени Галилея, а F учитывает универсальные гравитационные силы, искривляющие инерциальные траектории, описываемые прямыми линиями в геометрии G_0 . В теории Эйнштейна понятие силы отсутствует. Поэтому один из членов суммы, F , выпадает. Эксперименту соответствует чисто геометрическое содержание. При этом геометрия пространства-времени не фиксируется, а динамика процессов отражается в динамике геометрии.

Как происходит сопоставление теории и эксперимента? В современной физической теории в качестве характе-

ристик наблюдаемых объектов используются инварианты группы симметрии геометрии G_0 . Это значит, что объекты классифицируются только по тем качествам, которые они сохраняют в сходных ситуациях, например, во всех инерциальных системах отсчета. Классы возможных инерциальных систем отсчета в каждой теории указывает группа симметрии G_0 . Взаимодействие (т. е. силы) описывается с помощью инвариантных величин, имеющих определенный закон преобразования при переходе от одной системы отсчета к другой. Это позволяет сравнивать между собой результаты измерений, проведенных в разных системах отсчета, и гарантирует наличие объективного научного содержания в них. Как отмечалось в [21], выбор геометрии G_0 отражает свойства приборов, используемых в эксперименте. Ни инварианты групп, ни классы инерциальных систем отсчета не определяются «содержанием вещества во Вселенной». Более того, пока не определена структура теории и набор инвариантов, у нас нет средств для описания наблюдаемых явлений, нет языка, на котором мы могли бы говорить о Вселенной и веществе в ней независимо от наших ощущений. Такой подход полностью противоречит идеям Маха. Инварианты групп симметрии, бескоординатное описание геометрии — все это «антимаховские» понятия. Современная физика ушла от классической механики в сторону, противоположную той, куда указывал Мах. Если Мах предлагал каждый физический закон дополнять системой координат, в которой он выполняется, что могло привести в принципе к бесконечному числу различных внешне «законов», то современная теория использует только такие законы, которые выполняются в любой системе координат. В сущности, Мах подчеркивал субъективные моменты в каждом эксперименте, которые получили название координатных эффектов и не представляют научного интереса. Однако в свое время обсуждение этих эффектов было полезно, хотя бы для того, чтобы найти способ от них избавиться.

Современная форма физической теории имеет следующий вид:

1. Геометрия пространства-времени постулируется, причем соответствующая ей группа симметрии задается принципом относительности теории (глобальным или локальным).

2. Инерциальными, или свободными, движениями называются те, которые происходят вдоль траекторий групп движений пространства-времени.

3. Взаимодействие (в классических теориях — сила) рассматривается как причина, искривляющая траектории частиц, и описывается отклонением наблюдаемой траектории от траекторий группы движений пространства-времени. Принцип «действие равно противодействию» может не выполняться (пример — электродинамика).

4. Масса — один из инвариантов группы Пуанкаре, т. е. группы движений 4-мерного пространства-времени Минковского.

5. Заряд — инвариант одной из групп внутренней симметрии теории (калибровочной группы в электродинамике).

6. Система отсчета — конгруенция линий времени [25].

Два типа пространств (абсолютное и относительное), о которых писал Ньютон, с современной точки зрения можно интерпретировать как пространство данной системы отсчета, т. е. пространственноподобное сечение конгруенции линий времени, и пространство относительных положений двух систем отсчета. Поскольку все точки пространственноподобного сечения, по определению, существуют в один и тот же момент времени, пространство данной системы отсчета, действительно, не может быть чувственно познано во всех своих частях в один и тот же момент времени. Однако с течением времени можно получить сигналы от разных частей данной системы отсчета.

Более общая геометрия расслоенных пространств также использует представление о двух типах пространств, объединенных специальным образом. Именно: с каждой точкой одного из пространств, например 4-мерным римановым многообразием, ассоциируется экземпляр другого пространства — слой, точки которого соответствуют внутренним степеням свободы частицы. В частности, расслоенное пространство для механической системы можно получить, если с каждой точкой обычного (ньютоновского) пространства, точки которого соответствуют положениям центра масс системы, ассоциировать 3-мерное пространство положений протяженного тела, занимаемых его точками при вращении вокруг центра масс. Геометрия расслоенных пространств позволяет описывать чисто геометрически

не только гравитационные, но также сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия, положив в основу единой теории этих взаимодействий общий принцип построения пространства-времени, соответствующего каждому из них. В такой теории различным взаимодействиям ставятся в соответствие различные типы калибровочных полей [21]. Таким образом, современная форма физической теории позволяет реализовать программу Эйнштейна построения единой геометрической теории взаимодействий, учитывая в то же время особенности квантового подхода, основанного на классификации представлений групп внутренней симметрии элементарных частиц.

Л и т е р а т у р а

1. Гравитация и относительность. Под ред. Х. Цю, В. Гоффмана. М., «Мир», 1965.
2. *Max Э.* Механика. СПб., 1906.
3. *Pirani F. A. E.* — *Helv. phys. acta, Suppl. IV*, 1956, 198.
4. *Heller M.* — *Acta phys. polon.*, 1970, В1, 2, 123.
5. *Гинзбург В. Л.* — Эйнштейновский сборник 1973. М., «Наука», 1974.
6. *Newton I.* *Philosophiae naturalis principia mathematica.* London, 1713.
7. *Эйнштейн А.* Сущность теории относительности. М., ИЛ, 1955.
8. *Brans C.* — *Phys. Rev.*, 1962, 125, 2194.
9. *Cocconi G., Salpeter E. E.* — *Nuovo Cimento*, 1958, 10, 646; *Phys. Rev. Lett.*, 1960, 4, 176.
10. *Drewer R. W.* — *Philos. Mag.*, 1961, 6, 683.
11. *Beltran-Lopez V., Robinson H. G., Hughes V. W.* — *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1961, 6, 424.
12. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.* Релятивистская астрофизика. М., «Наука», 1967.
13. *Уилер Дж., Мизнер Ч.* Гравитация, нейтрино, Вселенная. М., ИЛ, 1962.
14. *Марков М. А.* — *ЖЭТФ*, 1966, 51; О природе материи. М., «Наука», 1976.
15. *Станюкович К. П.* — *ДАН СССР*, 1966, 168, № 4.
16. *Mal'tsev V. K., Markov M. A.* — Препринт ИЯИ АН СССР. П-0010. М., 1975.
17. *Reinhardt M.* — *Z. Naturforsch.*, 1973, 28a, 529.
18. *Gilman R. G.* — *Phys. Rev.*, 1970, D2, 1400.
19. *Синг Дж.* Общая теория относительности. М., ИЛ, 1963.
20. *Schiff L. I.* — *Rev. Mod. Phys.*, 1964, 36, N 2.
21. *Конopleва И. П., Попов В. И.* Калибровочные поля. М., Атомиздат, 1972.
22. *Лейбниц.* Polemika с Кларком. Изд-во МГУ, 1960.
23. *Кант И.* Соч. в 6-ти т., т. 3. М., 1964.
24. *Эйнштейн А.* Собр. науч. трудов, т. II. М., «Наука», 1966.
25. *Зельмапов А. Л.* — *ДАН СССР*, 1956, 197, № 6.

ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ НА РУБЕЖЕ XIX И XX ВВ.

В большинстве историко-научных работ общая теория относительности (ОТО) рассматривается фактически только как своеобразное расширение специальной теории относительности (СТО), учитывающее возможность распространения принципа относительности на гравитационные поля. При этом упускается из виду вторая важная линия, ведущая к ОТО. Речь идет о развитии собственно гравитационной проблематики. Именно на пересечении этих двух направлений движения научной мысли и возникла современная релятивистская теория тяготения. В настоящей работе мы сосредоточили основное внимание как раз на второй линии, т. е. на предпосылках ОТО, возникших в процессе эволюции проблемы тяготения.

С методологической точки зрения интересно, что анализ логико-теоретических трудностей ньютоновской теории тяготения, которые наряду с ее эмпирическими затруднениями сыграли существенную роль в генезисе ОТО, обнаруживает возможность их формулировки и истолкования как проявления особого рода несимметрий. Концепция симметрии оказывается тем самым ценным средством анализа проблемных ситуаций, возникающих в развитии научного знания. Такой квази-симметрический подход не является надуманной реконструкцией. Он вполне историчен и согласуется с теми эвристическими и методологическими приемами, которые использовал Эйнштейн в своем критическом анализе ньютоновской механики и дорелятивистской физики вообще. Эту особенность творческого мышления Эйнштейна отметил, в частности, Дж. Холтон: «Действительно, с указаний на ранее не замеченные явления формальной асимметрии или несоответствия преимущественно эстетического характера (скорее, чем, например, на загадку, поставленную необъясненными экспериментальными фактами) начинаются все три, в остальных

отношениях резко отличающиеся друг от друга, статьи 1905 г.» [30, с. 28]. Речь здесь идет о трех знаменитых статьях Эйнштейна по квантам, СТО и броуновскому движению. Вот, например, характерная фраза — начало статьи 1905 г., положившей начало СТО: «Известно, что электродинамика Максвелла в том виде, как ее в настоящее время обыкновенно понимают, в применении к движущимся телам приводит к асимметрии, которая, по-видимому, не свойственна самим явлениям» [33, с. 7]. Несомненно, здесь, как справедливо заметил Холтон, открываются большие возможности для изучения психологических особенностей эйнштейновского мышления.

Но дело, по-видимому, не только в психологии — развитие физико-математических наук в конце XIX в. подготавливало почву для нового, теоретико-инвариантного (симметричного!), подхода к пониманию и построению физических теорий, который мы связываем с именами Клейна, Пуанкаре, Эйнштейна, Минковского и др. Теория групп, кинематическая концепция геометрии (Гельмгольц), «Эрлангенская программа» Клейна, применение теоретико-групповых методов в механике (Ли, Котельников, Клейн, Гамель, Пуанкаре и др.) и кристаллографии (Шенфлис, Федоров), принцип симметрии Неймана—Миннигероде—Кюри в кристаллофизике, проблема абсолютного пространства и корректного определения инерциальной системы отсчета (К. Нейман, Э. Мах, Л. Ланге и др.), стремление аксиоматизировать механику на основе принципов относительности и сохранения (Шютц, Гамель), вопросы оптики и электродинамики движущихся сред (Герц, Лоренц, Лармор, Пуанкаре и др.) и т. д. — все это предпосылки и симптомы предстоящего утверждения теоретико-инвариантной концепции в физике [4, 5, 7].

Тем самым формулировка трудностей классической теории тяготения в терминах симметрии—асимметрии исторически вполне оправдана и может оказаться полезной при изучении возникновения ОТО.

1. Эмпирические затруднения ньютоновской теории тяготения во второй половине XIX в.

Ньютоновская теория тяготения примерно в течение столетия оставалась фактически на уровне правдоподобной гипотезы. Признанию теории препятствовали анома-

лии в движении Юпитера и Сатурна, так называемые великие неравенства, и некоторое расхождение наблюдаемого движения Луны с вычисленным на основе теории Ньютона. Трудami Эйлера, Лагранжа и особенно Лапласа эти препятствия были устранены (Лаплас, 1784, — «великие неравенства», Лаплас, 1787, — аномальное ускорение Луны [47, 73]). Затем усилиями прежде всего Лагранжа, Лапласа и Пуассона была развита «квазиполева» теория тяготения (уравнение Лапласа — 1782, уравнение Пуассона — 1813, [72, 76]). К середине XIX в. ньютоновская теория тяготения убедительно доказала свою эффективность, особенно после того, как Леверрье и Адамс открыли «на кончике пера» Нептун (1845—1846). Но Леверрье примерно в это же время (окончательные вычисления были опубликованы в 1859 г.) обнаружил аномальное вековое смещение перигелия Меркурия, не согласующееся с результатами вычислений, основанных на ньютоновской теории. Первоначально это не воспринималось как существенное затруднение теории Ньютона, возлагались большие надежды на то, что аномалия Леверрье будет объяснена каким-нибудь дополнительным, возможно, скрытым пока источником возмущений. Точно таким же способом рассчитывали объяснить и некоторые другие аномалии, прежде всего в движении узлов орбиты Венеры, перигелия Марса и некоторые небольшие нерегулярности в движении Луны. Наиболее значительный вклад в исследование различных аномалий подобного рода внесли в конце прошлого века выдающиеся небесные механики Ньюком и Тиссеран [42, 59, 70]. Они не только занимались небесно-механическими вычислениями и поиском аномалий, но и настойчиво искали способы их объяснения.

Примерно в это же время были зарегистрированы очень большие расхождения наблюдаемого движения с результатами вычислений и для кометы Энке. Видный немецкий исследователь комет Т. фон Опольцер писал в 1881 г.: «Теория Луны позволяет с некоторой вероятностью заключить, теория Меркурия — с определенностью доказать, теория кометы Энке — с полной уверенностью заявить, что теории, основанные лишь на ньютоновском законе в его современной форме, недостаточны для объяснения движения небесных тел» [78, с. 36]. Несколько забегаая вперед, заметим, что аномалии в движении кометы Энке вскоре нашли свое более или менее удовлетворительное

объяснение в работах Баклунда в рамках ньютоновской теории, нерегулярности в движении Луны были объяснены Брауном также на основе теории Ньютона [61]. Аномалии же в движении планет (прежде всего Меркурия, а также Венеры и Марса), уточненные расчетами Ньюкома и Тиссерана, несмотря на многочисленные попытки их объяснения, так и не удалось устранить к началу XX в.

Ньюком в 1895 г. и Тиссеран в 1896 г. пришли к выводу о существовании трех основных расхождений ньютоновской теории с астрономическими наблюдениями (для векового движения перигелия Меркурия—41—43", узла Венеры—10", для векового смещения перигелия Марса—8"). Особенно вызывающим было расхождение, связанное с движением Меркурия [42, 59, 70, 78].

Первоначальные надежды на объяснение этой аномалии наличием тех или иных скрытых масс—источников дополнительных возмущений так и не оправдались. Первая попытка такого рода была предпринята самим Леверрье, который предположил, что между Меркурием и Солнцем имеется еще одна планета, названная им Вулканом, впоследствии эта планета заменялась кольцом малых планет (Тиссеран), спутником Меркурия (Е. Хертль, 1894), кольцом малых планет между Меркурием и Венерой (Ньюком) и т. д. Сюда же следует отнести гипотезу о несферичности Солнца (Ауверс, Гарцер, Ньюком), которая в настоящее время вновь стала актуальной в связи со скалярно-тензорной теорией Бранса—Дикке, и детально разработанную Зеелигером гипотезу Гарцера о возмущающем воздействии зодиакального света (1891—1906) [42, 61].

Все эти гипотезы действительно приводили к дополнительному смещению перигелия Меркурия и при определенном подборе параметров скрытых масс позволяли получить значение, близкое к требуемому. Но в каждом случае возникали различного рода новые затруднения: либо возникали другие аномалии у того же Меркурия или у прочих планет, которые не соответствовали наблюдениям, либо параметры скрытых тел были таковы, что эти тела можно было бы наблюдать, а этого не удавалось сделать, либо параметры эти должны были приводить к некоторым неустойчивостям (например, неустойчивости кольца малых планет). Кроме того, для каждой из трех основных аномалий приходилось, как правило, придумать свое объяснение, а если к этим трем аномалиям

прибавить еще трудности с кометой Энке и движением Луны, которые были устранены несколько позже, то ситуация с применением ньютоновской теории тяготения к небесной механике выглядела в конце XIX и начале XX вв. отнюдь не такой благоприятной, какой она была в первой половине XIX в. Наиболее долгоживущей из этих гипотез оказалась гипотеза Зеелигера о возмущающем воздействии зодиакального света, поскольку она позволяла объяснить три основных планетных аномалии за счет соответствующего подбора параметров этого образования и потому, что точное определение его границ посредством наблюдений было затруднительным. Тем не менее большинство астрономов считали и эту гипотезу неприемлемой, полагая, что она не соответствует наблюдениям [1, 42, 61].

Таким образом, попытки преодоления эмпирических трудностей небесной механики, основанные на ньютоновской теории тяготения, не привели к успеху, и некоторые астрономы и физики стали склоняться к выводу о несовершенстве ньютоновской теории тяготения и необходимости ее замены новой теоретической схемой. Здесь уместно на время покинуть область астрономии и небесной механики, которые к концу XIX и началу XX вв. прочно зафиксировали серьезные эмпирические затруднения общепринятой теории тяготения, ставшие еще более весомыми в свете многочисленных неудавшихся попыток их преодоления в рамках этой теории.

2. Особенности развития физико-математических наук во второй половине XIX в.

Трудности ньютоновской теории не сводились лишь к эмпирическим. Некоторые ее уязвимые особенности отмечались задолго до рассматриваемого периода и отчасти осознавались самим Ньютоном, а несколько позже и классиками небесной механики, прежде всего Лапласом. Но эти недостатки (ярко выраженный феноменологизм и отсутствие наглядного эфирного или атомистического истолкования, мгновенное дальное действие, представления об абсолютном пространстве и времени) отодвигались на второй план до тех пор, пока небесная механика на основе ньютоновской теории объясняла все более тонкие эффекты в движении небесных тел и пока физические тео-

рии в области электричества, магнетизма и тепловых явлений явно уступали этой простой и могущественной теории и в предсказательной силе, и в широте охвата явлений природы, и в математическом совершенстве.

К началу второй половины XIX в. положение в физике постепенно изменилось, а к началу 70-х годов многие физические теории уже ни в чем не уступали небесной механике, в которой к этому времени обнаружили заметные расхождения с наблюдениями. Что же произошло? Нам достаточно отметить по крайней мере четыре важных сдвига, происшедших к этому времени в физике. Во-первых, возникновение в конце 40-х годов математической электродинамики Гаусса, Вебера, Ф. Неймана, а затем разработка Фарадеем и Максвеллом теории электромагнитного поля. Во-вторых, разработка закона сохранения и превращения энергии — основного синтетического начала физики (Майер, Джоуль, Гельмгольц и др., 1842—1847), получившего признание лишь к началу 60-х годов. В-третьих, построение термодинамики и особенно кинетической теории теплоты (Клаузиус, В. Томсон, Больцман, Максвелл и др., 1850—1877). В-четвертых, постепенное формирование антимеханистической оппозиции, связанное не только с неудачами в сведении электромагнетизма и термодинамики к механике, но с критикой оснований механики в работах К. Неймана, Маха, Кирхгофа, Ланге, несколько позже — Герца, Пуанкаре (1860—1880).

К этим четырем важнейшим тенденциям можно добавить еще две: 1) в геометрии благодаря открытию неевклидовых геометрий возникла идея отождествления реального физического пространства с трехмерным неевклидовым пространством постоянной кривизны, а также целое направление, названное впоследствии неевклидовой механикой (Лобачевский, Гаусс, Риман, Гельмгольц, Клиффорд, Дженочки, Шеринг, Киллинг, Тийи, Линдемман, Котельников, Андрад и др., 1868—1900 [11]); 2) бурный прогресс в звездной и галактической астрономии, связанный с разработкой новых более совершенных телескопов, спектральным изучением звезд и туманностей после открытия Кирхгофом и Бунзеном спектрального анализа в 1859 г., началом систематического применения фотографии, 1875—1880 гг. (публикация каталога всех известных к тому времени туманностей и звездных скоплений Дж. Гершеля, 1864 г., спектральные исследования

состава и скоростей звезд и туманностей В. Гаггинса, А. Секки и др., 1864—1868 и далее) [2, 8, 25, 60].

Таким образом, к началу 70-х годов XIX в. в физике, астрономии, в известном смысле даже в математике (геометрии), сложились предпосылки для формирования нового более критического отношения к ньютоновской теории тяготения. Наряду с небольшими, но весьма надежно установленными расхождениями этой теории с наблюдениями стали все более выявляться и обсуждаться трудности логико-теоретического характера. Трудности эти оказались естественно связанными с перечисленными выше основополагающими тенденциями и достижениями в развитии физики второй половины XIX в.

3. Логико-теоретические трудности ньютоновской теории тяготения

Рассмотрим основные логико-теоретические трудности, которые в той или иной мере осознавались исследователями гравитации в конце прошлого века.

Феноменологизм. Феноменологический характер ньютоновской теории тяготения отмечался многими учеными XVIII и первой половины XIX в. Некоторые из них предпринимали поэтому попытки дать то или иное эфирно-механистическое наглядное объяснение явлению тяготения, согласующееся с законом всемирного тяготения. Но выдающиеся достижения классической механики и ньютоновской теории тяготения, прежде всего в небесной механике, привели к тому, что идея центральных сил, мгновенно действующих на расстоянии, стала основополагающей во всей физике. И несмотря на отдельные попытки построения «объяснительных» эфирных гипотез о природе тяготения, «со времен Ньютона учение о тяготении было принято и развивалось, пока мало-помалу не приобрело характера, скорее, исходного факта, нежели факта, подлежащего объяснению» [20, с. 153]. Но после замечательных успехов кинетической теории газов в середине XIX в. положение постепенно меняется: «Хорошо известная теперь кинетическая теория газов представляет собой столь важный шаг на пути к объяснению с помощью движения таких свойств тел, которые представляются нами статическими, что едва ли можно удержаться от мысли, что в будущем появится полная теория материи, в которой

все свойства последней будут рассматриваться лишь как атрибуты движения» [28, с. 187] ¹. Правда, не только кинетическая теория стимулировала в середине прошлого века возобновление интереса к «объяснительным» схемам. Существенную роль при этом играли и другие быстро и успешно развивающиеся области физики, прежде всего волновая оптика, теория колебаний, учение об энергии, электродинамика.

Автор известного обзора по проблеме тяготения Ценек дал в 1903 г. следующую классификацию эфирно-механистических гипотез о природе тяготения: гидростатические, связанные в известной мере с развитием учения об энергии (Риман, Гельм, Пирсон, Ярковский и др.); колебательно-волновые, опирающиеся на достижения колебательно-волновых теорий в акустике, гидродинамике, оптике (Келлер, Челлис, К. Бьеркнес, Лиги, Корн, Деллинггаузен и др., предшественник — Гук); наконец, эфирно-ударные или кинетические гипотезы, которые в большинстве своем исходили из механистической модели тяготения, выдвинутой в конце XVIII в. Лесажем, и существенно опирались на достижения кинетической теории газов (В. Томсон, Изенкраге, Ризанек, Престон, Секки, Ваши, Кроль, Лерэ и многие другие) [78]. Такие выдающиеся физики, как В. Томсон, Максвелл, Пуанкаре, Друде, из всех механистических гипотез наиболее высоко оценивали именно кинетическую схему лесежеского типа, возлагали на нее некоторые надежды и сами принимали участие в ее разработке. В. Томсон в 1872 г. писал: «Корпускулярная теория тяжести не труднее в своих исходных допущениях, чем принятая теперь кинетическая теория газов, и она более полна, поскольку, исходя из основных допущений крайне простого характера, она объясняет все известные явления этого рода, чего нельзя сказать о кинетической теории газов, по крайней мере в нынешнем ее состоянии» [28, с. 229] ². Максвелл тремя годами позже подчеркивал: «Мы посвятили этой теории больше места, нежели, по-видимому, она заслуживает, потому что она остроумна и потому что это — единственная теория

¹ Эти слова принадлежат В. Томсону: W. Thomson. — Nature, 1884, v. 30, p. 417.

² Цитируется по [28]. — W. Thomson. — Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1872, v. 7, p. 588.

о причине тяготения, которая была настолько подробно развита, что было возможно обсуждать аргументы за и против нее» [20, с. 157].

Ниже мы еще рассмотрим кратко подход к проблеме тяготения на основе достижений электродинамики, особенно тесно связанный с преодолением другой более серьезной трудности ньютоновской теории — характерного для нее мгновенного дальнего действия. Ценнек в 1903 г. и Максвелл в 1875 г., который уже тогда дал примерно такую же классификацию основных эфирно-механических гипотез о природе тяготения [21, с. 173], пришли к выводу о неудовлетворительности всех этих гипотез, столкнувшихся с непреодолимыми затруднениями (они приводили к нарушению закона сохранения энергии, противоречили астрономическим наблюдениям и некоторым известным опытам, обладали прочими противоречивыми свойствами).

Но само появление этих гипотез свидетельствовало о наличии определенной трудности ньютоновской теории, которую мы называли феноменологизмом, трудности, которая резко контрастировала с блестящими успехами кинетической теории теплоты и атомистики во второй половине XIX в. Вместе с тем, несмотря на использование в некоторых из этих гипотез статистических методов, в целом они оставались в рамках эфирно-механистических представлений, и прогрессирующие неудачи этого «объяснительного» направления свидетельствовали о необходимости выхода за пределы классической механики и концепции эфира и поиска более глубокой основы для преодоления феноменологизма ньютоновской теории тяготения. Заметим также, что количество работ, так или иначе связанных с этим направлением в исследовании проблемы тяготения, насчитывало только за полвека, предшествующих теории относительности, более ста [1, 14, 19, 28, 42, 43, 50, 54, 60, 62, 77, 78].

Изоляционизм. Хотя в XVIII и начале XIX в. предпринималось немало попыток использовать ньютоновскую теорию тяготения для построения теорий различных физических явлений, к середине XIX в. выяснилось, что область ее действия ограничивается, по существу, небесной механикой, а тепловые, электрические, магнитные, оптические, химические и прочие процессы характеризуются взаимодействиями, не сводимыми к ньютоновскому.

Успех синтетических концепций физики, связанных с законом сохранения энергии, атомистикой, фарадеевской программой взаимосвязи всех основных физических взаимодействий, затем максвелловским синтезом электромагнетизма и оптики и, наконец, зарождающейся в конце XIX в. электромагнитной картиной мира, наводил на мысль о существовании связи гравитации с другими физическими явлениями и возможности включения ее в рамки наиболее общих физических теорий.

Экспериментаторы пытались, например, установить влияние химического состава и структуры взаимодействующих масс на силу их взаимодействия (Бейли, Крейхгауэр, Ландольт, Пойнтинг и Грэй, Хейдвайлер, Гензель, Маккензи и др.), проверить более строго зависимость силы взаимодействия от величины масс, расстояния, температуры, промежуточной среды, возможную зависимость этой силы от времени, установить явным образом связь гравитации с электромагнитными и оптическими явлениями. Из множества экспериментаторов, занимавшихся в конце прошлого века подобного рода опытами, назовем лишь наиболее известных: Фарадей, Викар, Пойнтинг, Бойс, Браун, Рихарц и Кригер-Менцель, Вильзинг, Аустин и Твинг, Йолли, Пикте, Кремье, Пойнтинг и Филлипс, Дж. Томсон, Саусернс и др. [19, 61, 77, 78]. В обзоре, написанном М. А. Левитской в 1910 г., за несколько лет до открытия ОТО, был подведен следующий итог экспериментальным исследованиям гравитации: «В общем, все указанные опытные исследования только подтверждают формулировку Ньютона как почти безошибочное выражение закона всемирного тяготения. Те незначительные отклонения, которые обнаруживаются в некоторых исследованиях, если и твердо установлены, то во всяком случае допускают возможность лишь ничтожных поправок к закону Ньютона. Вместе с тем. . . все сделанные до сих пор опытные исследования не могли обнаружить ни малейшей связи всемирного тяготения с остальными основными силами природы» [19, с. 32].

Попытки связать объяснение гравитации с различными физическими теориями также не имели успеха. Теория теплоты, кинетическая теория газов, гидродинамика и акустика, как мы видели при рассмотрении феноменологизма, не оказались плодотворными в данном случае. Ниже мы покажем, что и электродинамика, несмотря на

некоторые многообещающие результаты, не вывела гравитацию из необычного для физики второй половины XIX — начала XX в. состояния изоляции.

Итак, изоляционизм гравитации стимулировал экспериментальные и теоретические исследования проблемы. Неудачи же в этой области говорили о чрезвычайной слабости гравитационного взаимодействия в микро- и макромасштабах и удивительной универсальности этого взаимодействия, а также, возможно, об исключительном своеобразии будущей более полной теории тяготения. Подчеркнем, что количество одних лишь экспериментальных работ по проблеме гравитации, связанных прежде всего с попытками преодоления изоляционизма ньютоновской теории, исчисляется, по-видимому, многими десятками, считая лишь работы, опубликованные за полвека до создания ОТО [1, 14, 19, 28, 54, 56, 61, 77, 78].

Нельзя здесь не вспомнить об одной работе, явно опередившей свое время. Речь идет о хорошо известной теперь работе Зольднера, выполненной им в 1801 г. [64, 65]. Зольднер, исходя из корпускулярной теории света (при этом он предполагал равенство инертной и гравитационной масс световых частиц и справедливость для них ньютоновских уравнений движения), вычислил отклонение света в гравитационном поле, например Солнца. Формула Зольднера по существу совпадает с формулой Эйнштейна, полученной последним на основе лишь принципа эквивалентности и не учитывающей кривизны пространства. Эта работа прошла незамеченной прежде всего потому, что как раз в начале XIX в. усилиями Юнга и Френеля выдвинулась на первый план волновая теория света. О работе Зольднера, которая могла бы стать первой в преодолении изоляционизма гравитации, прочно забыли и вспомнили лишь после открытия ОТО [3, 47, 65].

Мгновенное дальнее действие (инстантизм). Этот изъян ньютоновской теории тяготения стал особенно очевиден в свете торжества фарадей-максвелловской программы электромагнетизма, в основе которой лежали принцип близкодействия и концепция поля. «Наивно гениальные воззрения Фарадея и математическая формулировка их Максвеллом снова выдвинули на передний план силы, действующие при прикосновении, — писал Мах в своей знаменитой «Механике», которую так высоко оценивал Эйнштейн. — Различные затруднения вызвали уже у аст-

рономов сомнения в точности закона Ньютона, и делались попытки к небольшим количественным изменениям их. Но после того как было найдено доказательство распространения во времени действия электрического, естественно, снова возник вопрос о подобных же соотношениях в случае аналогичных действий тяжести» [22, с. 154]. С попытками учесть конечность скорости распространения гравитации связывались и попытки учета скорости гравитирующих тел. Уже Лаплас получил дополнительный вклад в силу тяготения, пропорциональный отношению относительной скорости движения гравитирующих тел к скорости гравитации v/V , и, применив свои вычисления к Луне, пришел к выводу, что либо скорость гравитации должна быть в 10^8 раз больше скорости света, либо, если считать ее равной скорости света, получаются явные расхождения с наблюдениями [61, 78].

Спустя примерно полвека появилось множество работ, авторы которых пытались, подобно Лапласу, учесть скорость гравитации и скорость гравитирующих тел (Леман-Фильес, Геппергер, Оппенгейм, Оппольцер, Друде и др.) [1, 14, 19, 42, 43, 51, 58, 61, 62, 77, 78]. Эти исследователи стремились соединить преодоление инстантизма с устранением эмпирических аномалий. Некоторый успех при этом достигался лишь при допущении чрезвычайно больших скоростей распространения гравитации (у Лемана-Фильеса порядка $5 \cdot 10^6 c$, у Геппергера — порядка $0,5 \cdot 10^3 c$, где c — скорость света).

Более успешными были попытки учета скорости гравитации, основанные на замене ньютоновского закона законами, совпадающими по форме с электродинамическими законами Вебера, Римана, Гаусса [42, 77, 78, 29]. Все они в первом приближении совпадали с ньютоновским, описывали зависимость силы притяжения от скорости гравитирующих тел, причем добавка к ньютоновской силе была пропорциональна v^2/c^2 , а главное, содержали константу Вебера, равную $c\sqrt{2}$, и, таким образом, как бы учитывали скорость гравитации, отождествляемую со скоростью света c . Впрочем, законы этого типа не были, по существу, близкодействующими в полном смысле этого слова, так же как и в электродинамике. Тем не менее эти попытки создавали реальные надежды на преодоление сразу нескольких недостатков ньютоновской теории как эмпирического, так и логико-теоретического характера. Во-первых, они

частично решали проблему дальнего действия (хотя и не были полевыми), во-вторых, приводили к дополнительному смещению перигелия Меркурия, хотя и не совпадающему с наблюдаемым эффектом (закон Вебера объяснял лишь $14''$, а законы Римана и Гаусса — $28''$, т. е. примерно $1/3$ и $2/3$ наблюдаемого аномального смещения), в-третьих, они связывали гравитацию с электродинамикой, наводя на мысль о возможности построения в будущем некоторой объединенной теории тяготения и электромагнетизма. В этом направлении работали в конце прошлого века многие исследователи, особенно астрономы (Целльнер, Зеегерс, Хольцмюллер, Тиссеран, Зервус, Лиман, Леви и др.). Леви, в частности, так скомбинировал законы Вебера и Римана, включив в выражение для потенциала тяготения произвольную константу, равную $1,64$, что получил смещение перигелия Меркурия, требуемое наблюдениями.

К этому же направлению следует отнести нашумевшую впоследствии (после открытия ОТО) работу Гербера, который, опираясь на идеи Неймана, получил аналог закона веберовского типа и на его основе — формулу для смещения перигелия Меркурия, тождественную эйнштейновской и дающую, таким образом, полное объяснение аномалии Меркурия. Эта работа не осталась незамеченной, целый параграф посвятил ей Ценнек в своем известном обзоре 1903 г. [78], о ней одобрительно отзывался и Мах в 4-м издании своей «Механики» [22]. Исходные же положения Гербера и математические выкладки были недостаточно ясны и корректны, как это выяснилось в дискуссии по поводу его работы в начале 20-х годов (Зеелигер, Оппенгейм, Лауэ и др.) [45, 46, 53, 61].

Вместе с тем законы веберовского типа не решали вполне удовлетворительно проблему дальнего действия (впоследствии это было достаточно ясно показано Лауэ [53]); кроме того, после полного признания теории Максвелла подход к проблеме гравитации на основе электродинамики Вебера—Неймана представлялся анахронизмом. Именно в этот период разрабатывается электромагнитная концепция физики и появляются различные попытки включения в эту концепцию и гравитации. Воскрешается старая идея Моссоти (1836)—Целльнера (1882) о том, что гравитация — следствие кулоновского взаимодействия: это вытекало из предположения, что отталкивание двух одно-

именных зарядов несколько меньше, чем притяжение разноименных, поэтому гравитирующие нейтральные атомы должны притягиваться [77, 78]. Исходя из этого и используя теорию Максвелла, Лоренц развил электромагнитную теорию тяготения, поддержанную Вином, Гансом, Ланжевенем и др. [18, 44, 69, 75]. Эта теория не была единственной теорией такого рода — сам Лоренц, а также и другие исследователи, использовали идею Лесажа, заменив его ультрамировые частицы короткими электромагнитными волнами типа рентгеновских лучей. Различные варианты электромагнитных теорий тяготения в 90-х годах прошлого века и первом десятилетии XX в. разрабатывались Хевисайдом, Дж. Томсоном, Сазерлендом, Фишером, Томмазиной и др. [19, 62, 74, 77, 78].

Большинство из них явно уступали теории Лоренца, наиболее детально развитой. Почти все эти теории встречались с существенными затруднениями, например, с проблемой сохранения энергии, а также не объясняли планетных аномалий (последнее касалось и теории Лоренца). Открытие СТО существенным образом изменило постановку проблемы тяготения и создало новые перспективы в ее разработке. Впрочем, и после этого электромагнитные теории тяготения продолжали еще развиваться. Так, Пуанкаре в 1908 г. обсуждал некоторые из этих теорий, прежде всего теорию Лоренца, основанную на идеях Моссоли—Целльнера, и электромагнитные варианты теории Лесажа [26, 27]. Достижения и неудачи электромагнитного направления, несомненно, сыграли существенную роль в подготовке основ ОТО. Неудачи в сведении гравитации к электромагнетизму наводили на мысль о фундаментальности и специфичности гравитационного поля, об ограниченности казавшейся в ту пору универсальной электромагнитной концепции. Вместе с тем это были первые полевые теории тяготения, содержащие идеи близкого действия, которые были основополагающими при создании ОТО.

Гравитационный парадокс (финитизм).

Успехи звездной астрономии и расширение масштабов наблюдений Вселенной делало все более актуальными космологические проблемы. Единственной теоретической основой космологии оставалась ньютоновская теория тяготения, которая, однако, как это выяснили сначала

К. Нейман (1873—1874), а затем Зеелигер (1895), приводила к парадоксальной ситуации (гравитационный парадокс) [16, 57, 60, 63]. При распространении ньютоновской теории на бесконечно большие расстояния, что было вполне естественным, если считать Вселенную пространственно бесконечной, возникали непреодолимые затруднения, связанные с появлением неопределенностей и бесконечностей физических величин. Естественно поэтому назвать описанную трудность ньютоновской теории тяготения финитизмом. Первую формулировку гравитационного парадокса дал в 1874 г. К. Нейман: «Если... считать, что совокупность звезд распространяется бесконечно во все стороны, а средняя плотность этой материи постоянна, то при справедливости закона Ньютона сила, с которой эта совокупность звезд действует на наш земной шар, будет полностью неопределенна, а именно сможет иметь любое направление и величину. Ньютоновский закон приводит в таком случае к абсурдному результату и поэтому здесь неприменим» [16, с. 283--284]. Зеелигер более подробно и строго рассмотрел эту проблему и пришел к аналогичному выводу об ограниченности закона тяготения Ньютона. Применение модификаций ньютоновской теории, рассмотренных ранее, не устраняло гравитационный парадокс, и Зеелигер и Нейман предложили экспоненциальные модификации закона всемирного тяготения, восходящие к Лапласу:

$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2} e^{-\lambda r}, \quad P = k \frac{m_1 m_2}{r} e^{-\lambda r},$$

где λ имеет смысл своеобразного коэффициента поглощения гравитации, F — сила, а P — потенциал тяготения. Наличие экспоненциального множителя обеспечивало сходимость расходящихся ранее величин и устраняло гравитационный парадокс. Коэффициент λ выбирался так, чтобы вычисленное значение смещения перигелия Меркурия совпадало с наблюдаемым. Однако при этом получались сильные расхождения с другими астрономическими наблюдениями (например, получались слишком большие смещения перигелиев для Венеры, Земли и Марса). Неймановское обобщение потенциала тяготения и соответственно уравнения Пуассона

$$\Delta P - \lambda P = 4\pi k\rho$$

было использовано Эйнштейном в его первой работе по релятивистской космологии и служило ему аналогией для введения в гравитационные уравнения космологического члена [37]. Гравитационный парадокс в конце XIX в. воспринимался как существенный недостаток ньютоновской теории тяготения и подсказывал новые возможности для ее модификации. С другой стороны, после обнаружения этого парадокса, возник дополнительный критерий отбора для гравитационных теорий, обобщающих ньютоновскую. Так, например, для объяснения планетных аномалий (прежде всего смещения перигелия Меркурия) Холл в 1894 г. и Ньюком в 1895 г. воспользовались старой идеей, восходящей еще к Ньютону и Грину: вместо члена $1/r^2$ в законе всемирного тяготения они писали $1/r^{2+\delta}$, где δ порядка 10^{-7} [16, 42, 60]. При такой модификации существенно уменьшались расхождения с астрономическими наблюдениями, но трудности логико-теоретического характера оставались, в частности сохранялся гравитационный парадокс. Конечно, модификация, которая наряду с планетными аномалиями устраняла бы еще и обсуждаемый парадокс, расценивалась бы более высоко.

Предпринимались и другие попытки для устранения гравитационного парадокса. Одна из них, весьма популярная в конце прошлого века, была связана с введением понятия отрицательных масс (Фешпл, 1897) [12]. Без связи с гравитационным парадоксом эта идея обсуждалась Пирсоном в его гидродинамической теории тяготения и магнетизма уже в 1885 г. [12]. Однако гипотеза отрицательных масс не подтверждалась астрономическими наблюдениями. Фешпл объяснял это тем, что отрицательные массы в результате отталкивания их преобладающими в нашей области пространства положительными массами удалились на чрезвычайно большие расстояния, недоступные для наблюдений. Были и другие трудности у гипотезы Фешпла: необходимость приписывания весьма высокой плотности энергии в точках пространства, где напряженность поля была достаточно мала или равна нулю, и отсутствие равенства инертной и гравитационной масс. Другая попытка преодоления финитизма ньютоновской теории заключалась в замене бесконечного евклидова пространства конечным неевклидовым пространством постоянной положительной кривизны. На этом предполо-

жении мы остановимся несколько подробнее при обсуждении другой трудности ньютоновской теории тяготения, которую можно было бы назвать геометрическим абсолютизмом. Подчеркнем также, что, кроме Неймана, Зеелигера и Феппла, определенный вклад в разработку вопросов, связанных с гравитационным парадоксом, внесли Вильзинг, Гарцер, Шарлье, Ньюком и др. [16, 60].

Геометрический абсолютизм. Ньютоновская теория тяготения органически связана с ньютоновской (классической) механикой; в ней, в частности, использовались те же самые представления о пространстве и времени, что и в механике; небесная механика опиралась на ньютоновские уравнения движения, понятия массы (инертной) и т. д. Ньютоновской системе был присущ двойкий абсолютизм пространства и времени: во-первых, пространство считалось евклидовым, а пространственно-временные представления характеризовались галилей-ньютоновской симметрией; во-вторых, постулировалось существование абсолютных пространства и времени. После открытия неевклидовых геометрий естественно вставал вопрос о возможности замены евклидова пространства механики тем или иным неевклидовым пространством. Уже Гаусс и Лобачевский, как известно, обсуждали возможность эмпирической проверки геометрии пространства, а после признания и утверждения неевклидовых геометрий в конце 60-х годов возникает целое направление исследований по механике в неевклидовых пространствах (Де Фоссене, Шеринг, Тийи, Дженокки, Линдеман, А. П. Котельников, Андрад и др.). Особый интерес для теории тяготения имели работы Шеринга (1870—1873) и Киллинга (1885), в которых обсуждался вопрос о неевклидовом эквиваленте ньютоновского закона [11, 60, 61]. Шварцшильд в 1900 г. и Гарцер в 1908 г. детально рассмотрели вопрос о неевклидовости физического пространства с астрономической точки зрения, следуя при этом традициям Лобачевского и Гельмгольца [9, 32]. Вывод Шварцшильда гласил: «Можно, не вступая в противоречие с опытными фактами, вообразить себе, что мир заключен в гиперболическом пространстве с радиусом кривизны, большим 4 миллионов радиусов земной орбиты, или в эллиптическом пространстве с радиусом кривизны, большим 100 миллионов радиусов земной орбиты, причем в последнем случае приходится еще допустить

поглощение света, равное 40 звездным величинам для оборота вокруг пространства» [32, с. 67]. Последнее условие связывалось с отсутствием наблюдаемых «противообразов» светящихся объектов, которые, как отметил еще Гельмгольц, должны возникать в замкнутом неевклидовом пространстве постоянной положительной кривизны. Гарцер более детально рассмотрел случай эллиптического пространства, в частности, вопросы, связанные с возможностью обнаружения «противообразов», подчеркнул, что вывод Шварцшильда о поглощении был бы верен, если бы Солнце и Земля покоились в пространстве, а скорость света была бесконечно большой; учет этих обстоятельств должен существенно уменьшить оценку Шварцшильда. Далее Гарцер указал на важное преимущество эллиптического пространства по сравнению с бесконечно протяженными пространствами (евклидовым и гиперболическим, т. е. пространством постоянной отрицательной кривизны): в силу конечности эллиптического пространства в нем естественным образом устраняются гравитационные и фотометрические парадоксы.

Появлялась возможность модификации ньютоновской теории тяготения на основе представления о замкнутом пространстве постоянной положительной кривизны. Действительно, кривизна пространства приводила к дополнительному смещению перигелия Меркурия, но для совпадения с наблюдаемым значением требовалась слишком большая степень искривления, явно противоречащая оценкам Шварцшильда и Гарцера (радиус кривизны должен был иметь порядок 1000 радиусов земной орбиты) [42, 61].

В конце прошлого и начале XX в. проблема возможной неевклидовости пространства обсуждалась весьма широко и в теоретико-познавательном плане (Пуанкаре, Рассел, И. Кон, Геффлер, Мотт-Смит, Мюллер и др.) [41]. Заметим, что обсуждались также возможности использования пространств с переменной кривизной, в частности идея интерпретации физических взаимодействий как эффектов искривления пространства и, с другой стороны, обусловленности этого искривления физическими взаимодействиями. Эта геометрическая концепция физики восходит к Риману и получила развитие (хотя и на качественном уровне) в работах прежде всего Клиффорда, а также (несколько позднее и менее определенно) в тру-

дах Пуанкаре, Рассела и некоторых других исследователей [41, 60].

Таким образом, к началу XX в. идея замены евклидова пространства пространствами неевклидовыми (и, в частности, конечным замкнутым пространством постоянной положительной кривизны) представлялась вполне возможной как в теоретико-познавательном плане, так и в эмпирическом. Модификация ньютоновского закона тяготения, соответствующая пространству с постоянной положительной кривизной, устраняла гравитационный парадокс, но не могла объяснить планетные аномалии, к тому же переход к пространствам постоянной кривизны не устранял другие трудности логико-теоретического характера, прежде всего мгновенное дальное действие гравитации. Идеи же Римана и Клиффорда о глубокой связи (или даже тождестве!) эффектов кривизны пространства с физическими взаимодействиями были слишком расплывчаты и неопределенны. Разумеется, до открытия СТО (и, в частности, четырехмерной формулировки Минковского) речь могла идти только о трехмерных неевклидовых пространствах, но после выдающегося обобщения Минковского ничто не препятствовало рассмотрению четырехмерных неевклидовых пространств, особенно после того, как Клейн в 1910 г. связал идеи Минковского со своей «Эрлангенской программой» [5, 7].

Перейдем теперь к обсуждению второй стороны геометрического абсолютизма ньютоновской системы, связанного с концепциями абсолютного пространства и времени. С конца 60-х и начала 70-х годов прошлого века в связи с успехами физики и намечающимся кризисом механицизма повышается интерес к основаниям механики, возникает целое направление критического анализа и пересмотра этих оснований. Проблемы определения массы, инерциальной системы отсчета, вопросы о физическом смысле принципа инерции, корректном построении основ механики и т. д. постепенно выдвигаются на первый план и привлекают внимание таких выдающихся исследователей, как К. Нейман, Мах, В. Томсон, Кирхгоф, Максвелл, Герц, Дж. Томсон и др. Особенно глубокий критический анализ понятий абсолютных пространства, времени и движения в связи с проблемой инерции был дан Махом в его работах, начатых еще в 60-х годах. Первые

итоги этих исследований были подведены Махом в его книге «Принцип сохранения работы» (1872) и затем в его «Механике» (1883) [22, 23]. Он предложил исключить пространственно-временные абсолюты из механики и обосновывать инертные свойства тел не понятием абсолютного пространства, а воздействием на них совокупности всех удаленных масс Вселенной. Это привело его к следующей формулировке принципа инерции: «Вместо того, чтобы сказать, что направление и скорость какой-нибудь массы μ остаются в пространстве постоянными, можно также употребить выражение, что среднее ускорение массы μ относительно масс m, m', m'', \dots на расстояниях r, r', r'', \dots равно нулю, или $\frac{d^2 \sum m r}{dt^2 \sum m} = 0$.» [22, с. 195].

Именно эта формулировка дает ключ к пониманию того, что теперь со времени Эйнштейна называется принципом Маха, сыгравшим фундаментальную роль в генезисе ОТО [15, 66—68]. Заметим, что все эти идеи были развиты Махом еще в 60-х — начале 70-х годов. Эйнштейн высоко оценивал роль Маха как предшественника ОТО, это подтверждается и анализом работ Эйнштейна 1912—1915 гг. Весьма подробно этот вопрос обсуждался также в историко-научной литературе [10, 31, 49], поэтому мы ограничимся сказанным и подчеркнем лишь, что в последующие годы круг вопросов, поднятых Махом, получил развитие в работах многих физиков и философов, занимавшихся проблемами естествознания. Мах в пятом издании «Механики» писал: «Взгляд, что «абсолютное движение» есть понятие бессмысленное, бессодержательное и научно никуда не годное, — взгляд, который двадцать лет тому назад вызывал почти всеобщее осуждение, в настоящее время разделяется многими выдающимися исследователями. В качестве решительных «релятивистов» я мог бы назвать Сталло, Дж. Томсона, Л. Ланге, Лове, Мак-Грегора, Пирсона, Мансиона, Клейнпетера» [22, с. 262]. Он называет также других ученых, занимавшихся аналогичными проблемами и внесших в их разрешение определенный вклад: Штрейнца, Планка, Гельма, П. и И. Фридлиндеров, Герца. Викера, Розенбергера, Фолькмана, Лассвица, Зеелигера, Больцмана, Феппла, Клиффорда, Пикара, Пуанкаре, Дюгема, Андинга, а из более ранних исследователей — Кирхгофа, К. Неймана, Максвелла и др.

Критика этой стороны абсолютизма ньютоновской системы и подходы, предложенные Махом, Ланге и другими, были существенны и для подготовки СТО, и для перехода к релятивистской теории тяготения. В частности, с маховскими представлениями об инерции можно связать идею принципа эквивалентности, которую нетрудно увидеть, например, в следующих словах: «Нам нет вовсе надобности относить закон инерции к какому-нибудь особому абсолютному пространству. Напротив, мы видим, что как те массы, которые, согласно обычному выражению, действуют друг на друга, так и те, которые друг на друга не действуют, находятся в совершенно однородных друг к другу отношениях ускорения, и именно можно считать, что все массы находятся в связи друг с другом» [22, с. 196]. Здесь мы подходим к одной из важнейших логико-теоретических трудностей ньютоновской теории, которая, правда, осознавалась в конце прошлого века заметно слабее, чем другие, а именно к необъяснимости в рамках этой теории равенства (или пропорциональности) инертной и гравитационной масс.

Необъяснимость равенства инертной и гравитационной масс (эмпиризм). Эта трудность ньютоновской теории свидетельствовала о наличии в ней фундаментальных соотношений эмпирического характера, теоретическое осмысление которых отсутствовало. Поэтому обсуждаемую трудность можно было бы назвать условно эмпиризмом. Равенство инертной и гравитационной масс со времени Галилея и Ньютона лежит в основе классической механики и ньютоновской теории тяготения. Другой формой его выражения является принцип Галилея, согласно которому все тела при свободном падении в поле тяжести движутся с одинаковыми ускорениями. Равенство $m_g = m_{ин}$ подтверждается многократно повторенными с увеличивающейся точностью опытами с маятниками и крутильными весами (Ньютон, Бессель, Этвеш, Пекар и Фекете, Зеeman, Реннер, Дикке, Брагинский с сотрудниками и др.) [14, 60]. Точность подтверждения фундаментального равенства в опытах Дикке составляет $3 \cdot 10^{-11}$, а в опытах группы Брагинского 10^{-12} . Факт равенства $m_g = m_{ин}$ со временем стал привычным и мало у кого вызывал стремление к какому-либо его объяснению в рамках теории Ньютона. После открытия законов ньютоновского типа в области электростатики и магнитостатики (закон Ку-

лона) стала очевидной уникальность гравитационного взаимодействия, в котором роль зарядов выполняют массы тел, являющиеся универсальной динамической характеристикой тел независимо от того, обладают ли они электрическими или магнитными свойствами или нейтральны. По-видимому, эту особенность гравитации связывали с феноменологическим характером ньютоновской теории, а объяснение ей надеялись найти в атомистических и эфирно-механистических построениях, которые мы рассматривали при обсуждении феноменологизма ньютоновской теории тяготения.

Действительно, теория Лесажа, например, давала объяснение факту пропорциональности силы тяготения произведению взаимодействующих инертных масс, т. е. по существу равенству инертной и гравитационной масс. Это касается и большинства других эфирно-механистических теорий тяготения. Точно так же и теория гравитации Лоренца объясняла равенство инертной и гравитационной масс, и в этом объяснении видели существенный аргумент в пользу этой теории. Ланжевен специально подчеркивал эту черту теории Лоренца: «Если предположить, что для атома так же, как и для корпускулы (т. е. электрона. — В. В.), электромагнитная живая сила представляет собой полную кинетическую энергию, масса атома должна быть пропорциональна числу содержащихся в нем корпускул. . . То же самое относится и к силе тяготения, если принять вместе с Лоренцем, что эта последняя возникает благодаря небольшому различию между величинами притяжения зарядов противоположных знаков и отталкивания зарядов одного и того же знака. Таким образом, гипотеза, согласно которой вся инерция материи имеет электромагнитное происхождение, сразу же объясняет пропорциональность, существующую между обычной механической массой, или коэффициентом инерции, и массой астрономической, или коэффициентом ньютоновского притяжения. Оба эти коэффициента оказываются здесь пропорциональными числу заключенных в атоме корпускул» [18, с. 71].

Итак, сочетание электромагнитной теории тяготения Лоренца с электромагнитной концепцией инертной массы объясняло равенство $m_g = m_{ин}$. Таким образом, факт равенства инертной и гравитационной масс рассматривался многими теоретиками как эмпирическое соотношение в рамках ньютоновской теории, требующее объяснения в более

глубокой атомистической (эфирно-механистической, электромагнитной и т. д.) теории. Поэтому едва ли справедливы высказывания, в которых утверждается, что Эйнштейн был первым, обратившим внимание на необъяснимость равенства $m_r = m_{ин}$. Характерно замечание Инфельда: «Со времен Галилея физики знали, что все тела совершают падение с одинаковым ускорением. В наш век никто, за исключением Эйнштейна, не удивлялся больше этому закону. . . За последние три столетия развития науки Эйнштейн был первым, кто увидел в равенстве ускорений некий важный намек» [13, с. 189]. Об этом факте знали, помнили, сознавали его эмпирический характер в рамках ньютоновской теории, различными путями стремились объяснить его (прежде всего посредством разработки микроскопических и прочих объяснительных схем типа теорий Лесажа и Лоренца). Заслуга же Эйнштейна заключалась главным образом в том, что он, по существу, отказался от попыток такого рода объяснений этого факта, положив его в основу построения теории [34]. При этом обсуждаемый факт посредством характерного для Эйнштейна метода мысленного эксперимента в сочетании с релятивистскими идеями был преобразован в принцип эквивалентности, составляющий, наряду с принципом общей ковариантности, ядро ОТО. Такая методологическая процедура, своего рода инверсия, была вообще присуща Эйнштейну, достаточно вспомнить его классические работы по СТО и квантам.

Идея фундаментальности тождества инерции и гравитации восходит, как мы видели, к Маху (см. высказывание Маха на с. 265). Правда, Мах разрабатывал на этой основе новое понимание инерции, не связывая явно свое построения с проблемой тяготения.

Итак, мы рассмотрели некоторые основные трудности ньютоновской теории тяготения как эмпирического, так и логико-теоретического характера. Первые, согласно Эйнштейну, связаны с критерием внешнего оправдания, вторые — феноменологизм, изоляционизм, мгновенное дальноедействие, гравитационный парадокс, геометрический абсолютизм и необъяснимость равенства инертной и гравитационной масс — с критерием внутреннего совершенства теории.

Эйнштейн в «Автобиографических заметках» [39], анализируя недостатки классической механики вообще, за-

трагивает, в частности, и недостатки ньютоновской теории тяготения, которые в значительной мере совпадают с недостатками, присущими механике в целом. Однако из трудностей эмпирического характера он отмечает только те, которые привели к разработке СТО. Из логико-теоретических затруднений механики он обращает внимание на следующие. Первое и главное связано с выделением в механике класса привилегированных систем отсчета, именно инерциальных систем, и эта привилегированность их обеспечивается положением о существовании абсолютных пространства и времени. Положение же это (одна из сторон геометрического абсолютизма) не имеет достаточно глубоких физических оснований. Вторая трудность — мгновенное дальное действие гравитации. Третья, непосредственно связанная со второй, — это разделение энергии на две существенно различные части: кинетическую и потенциальную. Концепция поля должна была, согласно Эйнштейну, устранить эту трудность, которую в рамках механики, не прибегая к понятию поля, пытался ликвидировать Герц в своем варианте бессиловой механики. Наконец, четвертая трудность — это, по существу, необъяснимость равенства инертной и гравитационной масс [38—40].

4. Симметрический подход к трудностям классической теории тяготения

Этот подход оправдывается двумя обстоятельствами. Во-первых, тем, что он был весьма характерен для основоположника релятивистской теории тяготения — Эйнштейна, и, во-вторых, тем, что на рубеже XIX и XX вв. указанный подход, уже получивший значительное развитие в геометрии, начинает приобретать существенное значение и в физике.

Понятие симметрии в общем значительно шире, чем точно формулируемый его аналог, который фигурирует в принципах симметрии, относительности и инвариантности. Всякого рода неравноправие, несоразмерность, излишняя сложность, «несоответствия преимущественно эстетического характера» (Холтон) и т. д. можно квалифицировать как своеобразные «асимметрии». Именно с такими «асимметриями» мы встречаемся при рассмотрении феноменологизма, изоляционизма, финитизма и некоторых

других логико-теоретических трудностей ньютоновской теории тяготения.

Феноменологизм. Развитие физики в XIX в., как мы видели, привело к тому, что возникло представление о своеобразной симметрии или дополнительности между феноменологическим и объяснительным аспектами физических теорий: термодинамика и статистико-кинетическая теория в учении о теплоте, феноменологическая электродинамика и электронная теория и т. д.

Даже после возникновения полевой фарадей-максвелловской программы основным «идеалом единства» (выражение Гильберта) физики продолжала оставаться механистическая концепция, которая рассматривалась и как основа подлинно физического объяснения. В последнем десятилетии XIX в. возникает конкурирующая программа — электромагнитная концепция физики, которая многими физиками стала рассматриваться как новая основа для физического объяснения. Попытки построения эфирно-механистических и электродинамических схем в дополнение к ньютоновской феноменологической теории тяготения (как механистического, так и электромагнитного типа), как мы видели, успеха не имели. Таким образом, отсутствие непротиворечивой объяснительной схемы в области гравитации могло рассматриваться как определенная асимметрия.

Изоляционизм. Гравитация среди других взаимодействий (механических, тепловых, оптических, электрических, магнитных и др.), вследствие ее экспериментальной и теоретической изоляции, занимала явно выделенное место. Это обстоятельство можно было также истолковать как некоторую асимметрию, неравноправие между гравитацией и всеми остальными физическими взаимодействиями.

Обе эти асимметрии, впрочем, не привлекали впоследствии внимания Эйнштейна, хотя некоторым аналогом первой можно считать эмпиризм, а второй — инстантизм, недостатки классики, которым он придавал особое значение.

Инстантизм, характерный для ньютоновской теории тяготения, приводит к асимметрии в более общепринятом и строгом смысле этого слова. Мгновенное дальное действие позволяет ввести абсолютную одновременность и вместе с ней физическое основание для введения абсолютных

пространства и времени. Введение же этих абсолютов должно было облегчить построение привилегированной системы отсчета и привести, таким образом, к явному нарушению равноправия инерциальных систем отсчета. После возникновения СТО этот изъян классической теории тяготения стал особенно очевидным и серьезным. Эйнштейн придавал ему первостепенное значение в критике основ классической механики и, кстати говоря, формулировал его в терминах асимметрии: «В случае строгой справедливости закона Ньютона мы могли бы применить тяготение для мгновенной передачи сигнала из области A в область B , ибо движение тяготеющей массы в A должно было бы иметь следствием одновременное изменение гравитационного поля в B в противовес теории относительности (специальной. — $B. B.$)» [35, с. 274]. В этом же духе высказывался и Ланжевен: «Понятие «абсолютное время» было принято в ньютоновской механике именно потому, что в ней допускалось моментальное распространение причинности и т. д.» [17, с. 324].

Заметим, что бесконечно большая скорость гравитации выделяет ее среди остальных физических взаимодействий, характеризующихся конечными скоростями распространения. Это выделение также может рассматриваться как своего рода асимметрия.

Финитизм. Несимметрия, связанная с гравитационным парадоксом, заключается в отсутствии равноправия пространственно конечного и бесконечного случаев, которое должно иметь место при постулировании бесконечного евклидова пространства.

Эйнштейн эту асимметрию выразил в следующих словах: «Как бы далеко ни проникать в мировое пространство, всюду мы найдем рассеянные скопления неподвижных звезд примерно одного типа и одинаковой плотности. Это представление несовместимо с теорией Ньютона. . . Звездный мир (согласно этой теории. — $B. B.$) должен представлять собой конечный остров в бесконечном океане пространства. . .» [36, с. 583]. Иначе говоря, возникало «неправильное представление о том, что материальный мир обладает каким-то центром» [36, с. 584].

Следует подчеркнуть, что критика финитизма сыграла основную роль в генезисе релятивистской космологии (в 1917 г.), а не ОТО вообще.

Геометрический априоризм. Априоризация евклидовой симметрии пространства и времени означала неоправданное выделение евклидовой метрики среди других метрических геометрий. Как подчеркивал Эйнштейн, «развитие неевклидовой геометрии привело к осознанию того факта, что можно сомневаться в бесконечности (и добавим, евклидовости. — В. В.) нашего пространства, не вступая в противоречие с законами мышления и опытом» [36, с. 584]. Заметим, что асимметрия здесь заключается не в том, что физика отдавала предпочтение некоторой определенной геометрии, а в том, что предпочтение это при строгом эпистемологическом анализе не имело физического оправдания.

Геометрический абсолютизм, как мы видим, прочно связан с инстантизмом классики и очевидным образом может быть сформулирован в терминах асимметрии. Эйнштейн специально выделял этот недостаток ньютоновской теории, присущий, кстати говоря, и СТО. Привилегированность абсолютных пространства и времени или класса инерциальных систем отсчета не была физически обоснована: «. . . Предполагается существование бесконечного множества инерциальных систем. . . , причем эти системы отсчета предполагаются выделенными среди всех остальных жестких систем отсчета» [39, с. 268].

Несимметрию, характеризующую обе эти трудности и пространственно-временные представления ньютоновской системы, Эйнштейн формулировал еще и таким образом: «. . . Пространство (как инерциальная система) оказывает воздействие на все материальные объекты, хотя это воздействие и не вызывает ответной реакции со стороны последних» [40, с. 347]. Обсуждаемая асимметрия сыграла важнейшую роль в генезисе ОТО.

Эмпиризм. «До настоящего времени механика констатировала, но не истолковывала это важное положение (т. е. равенство инертной и гравитационной масс. — В. В.)» [36, с. 563]. Эйнштейн в этом случайном для классики совпадении видел «внутреннюю несимметрию теории, проявляющуюся в том обстоятельстве, что входящая в закон движения инертная масса входит в выражение для сил тяготения, но не в выражения для других сил» [39, с. 270].

Мы здесь сосредоточили основное внимание на трудностях именно классической теории тяготения, хотя не-

которые из них характерны и для СТО (геометрический абсолютизм прежде всего), которая, конечно, оказалась необходимой предпосылкой для построения ОТО. Кстати говоря, опыт по созданию СТО способствовал выработке характерного для Эйнштейна «симметрично-эвристического» подхода, который сыграл существенную роль в эйнштейновском анализе трудностей классической теории тяготения и разработке ОТО.

5. Связь трудностей классической теории тяготения с другими методологическими принципами

Релятивистская программа перестройки классической физики, выдвинув в число важнейших принципов относительности, способствовала одновременно оформлению и утверждению других общезначимых и методологических принципов. Некоторые из них были известны и в классике, но приобрели новое звучание в связи с теорией относительности (принципы сохранения, близкого действия, причинности и т. д.). Другие свое основное развитие получили именно в рамках релятивистской концепции (принципы наблюдаемости, соответствия и т. д.) Не углубляясь в историю формирования этих принципов, заметим, что разработка их и применение к построению физических теорий главным образом относится ко второй половине XIX в. и связана с именами Гельмгольца, Максвелла, Больцмана, Герца, Лоренца, Маха, Клиффорда, Пуанкаре, П. Кюри, Планка и др.

Использование этих принципов при построении теории или выборе между конкурирующими теоретическими схемами было весьма характерным и для Эйнштейна. Описывая ситуацию накануне открытия СТО, в своих «Автобиографических заметках» он писал: «Постепенно я стал отчаиваться в возможности доказать до истинных законов путем конструктивных обобщений известных фактов. Чем дальше и отчаяннее я старался, тем больше я приходил к заключению, что только открытие общего формального принципа может привести нас к надежным результатам. Образцом представлялась мне термодинамика. Там общий принцип был дан в предложении: законы природы таковы, что построить вечный двигатель (первого и второго рода) невозможно» [39, с. 277].

Вспомним, что и в разработке ОТО методологические принципы играли важную роль [6]. Поэтому проанализированные ранее трудности классической теории тяготения целесообразно сопоставить с теми принципами, которые входили в арсенал методологических средств Эйнштейна. Вопрос об отнесении тех или иных общих утверждений к методологическим принципам исследован еще явно недостаточно. Все же будем считать таковыми и принципы регулятивного характера, такие, как принципы симметрии, сохранения, соответствия, причинности, наблюдаемости, и такие систематизирующие утверждения, как принципы единства физического знания, объяснения и т. д. [24].

Тогда феноменологизм ньютоновской теории тяготения плохо согласуется с принципом объяснения. С другой стороны, попытки непосредственного устранения этого недостатка на эфирно-механистической или даже электромагнитной основе наталкивались на непреодолимые затруднения, связанные с резкими нарушениями принципов сохранения энергии, наблюдаемости, простоты. Это наводило на мысль о возможности принципиально иного соотношения между феноменологическим и объяснительным аспектами в области гравитации по сравнению с другими областями физики.

Ярко выраженный изоляционизм классической теории тяготения шел в разрез с прогрессирующей синтетической тенденцией второй половины XIX в. и, таким образом, с принципом единства физического знания.

Принципы объяснения, причинности, близкодействия (тесно связанные между собой) требовали преодоления инстантизма. Они указывали также на плодотворный путь к решению проблемы — использование концепции поля. Эйнштейн, кстати говоря, считал, что и СТО, и ОТО — прежде всего плоды реализации полевой программы Фарадея—Максвелла—Лоренца: «Последним шагом в осуществлении программы теории поля является общая теория относительности» [38, с. 87]. Хотя гравитационный парадокс для Эйнштейна оказался существенным после разработки основ ОТО и сыграл свою роль лишь в создании релятивистской космологии (1917), он был достаточно хорошо известен в конце прошлого века и рассматривался как существенная трудность ньютоновской теории. Можно, пожалуй, сказать, что фи-

Логико-теоретические трудности	Связь с прогрессом физико-математических наук	Попытки устранения трудностей
1	2	3
1. Феноменологизм	Кинетическая и статистическая теории теплоты, атомистика, электронная теория, 1850—1900	Эфирно-механистические теории тяготения (В. Томсон, Римап, Бьеркнес, Престон, Пирсон, Корп, Гельм и др.). См. также 3
2. Изоляционизм	Закон сохранения энергии, синтез термодинамики и кинетической теории, синтез электродинамики и оптики, 1850—1900	Экспериментальные попытки (Маккензи, Крейхгауэр, Пикте, Аустин, Ландольт, Кремье, Пойнтинг). Теоретические попытки — см. 1, 3
3. Инстантизм (мгновенное дальное действие)	Фарадей—максвелловская программа близкого действия в электродинамике, теория электромагнитного поля, 1840—1890	Учет скорости гравитации без изменения ньютоновского закона (Леман—Фильес, Геппергер). Применение действующей и максвелловской электродинамики (Вебер, Гербер, Лоренц)
4. Финитизм (гравитационный парадокс)	Прогресс наблюдательной астрономии, критика оснований механики, закон сохранения энергии, 1850—1900	Экспоненциальные модификации ньютоновского закона, отрицательные массы, использование неевклидовых геометрий (Нейман, Зеелигер и др.)

Критика пред- принятых попыток	Формулировка трудностей в тер- минах асимметрии	Связь с другими методологи- ческими прин- ципами физики	Требования к будущей теории тяготения
4	5	6	7
<p>Несоответствие с законом сохранения энергии. Ad hoc-характер. Расхождения с опытом</p> <p>Отрицательные результаты экспериментов. См. 1, 3</p> <p>Несоответствие с опытом и законом сохранения энергии. Ad hoc-характер</p> <p>Несоответствие с законом сохранения энергии, опытом. Ad hoc-характер</p>	<p>Несимметрия между феноменологическим и объяснительно-микроскопическим уровнями описания</p> <p>Привилегированное положение гравитации в ряду других взаимодействий (отсутствие связи со всеми остальными взаимодействиями, связанными между собой)</p> <p>Привилегированное положение гравитации (бесконечная скорость в отличие от других взаимодействий). Наличие выделенной системы отсчета</p> <p>Неравноправие пространственно конечного и бесконечного случаев</p>	<p>Принципы объяснения, простоты, сохранения энергии</p> <p>Принципы единства физического знания, наблюдаемости</p> <p>Принципы объяснения причинности, близкодействия</p> <p>Принципы наблюдаемости и соответствия</p>	<p>Объяснение или устранение ньютоновского феноменологизма</p> <p>Установление связи гравитации с другими взаимодействиями, законов этой связи и их опытное подтверждение</p> <p>Полевой характер гравитации</p> <p>Устранение гравитационного парадокса</p>

Логико-теоретические трудности	Связь с прогрессом физико-математических наук	Попытки устранения трудностей
1	2	3
5. Геометрический априоризм	Неевклидовы геометрии и неевклидова механика, критика основ механики, 1830—1900	Введение неевклидовых пространств в физику (Шеринг, Киллинг, Клиффорд, Рассел, Шварцшильд, Гарцер)
6. Геометрический абсолютизм	Проблема эфира, критика оснований механики, 1870—1900	Попытки устранения пространственно-временных абсолютов и переопределения понятия инерции и инерциальной системы отсчета
7. Эмпиризм (необъяснимость равенства инертной и гравитационной масс)	Критика оснований механики. Опыты Этвеша, 1870—1900	Попытки объяснения равенства $m_g = m_{ин}$ в эфирно-механистических и электромагнитных теориях тяготения, концепция инерции Маха

нитизм ньютоновской теории противоречил принципу соответствия, который, в частности, запрещает физически неоправданное сужение области применения фундаментальных законов природы.

Открытие неевклидовых геометрий и последующее их включение в схему «Эрлангенской программы» не только создали возможность введения неевклидовых пространств в физику, но и показали, что в известном смысле соответствующие им геометрии проще евклидовой [5]. Таким образом, геометрический априоризм классики (привилегированное положение евклидовой геометрии) уже в конце прошлого века был поставлен под сомнение, а принцип простоты при рациональном его истолковании даже отдавал предпочтение неевклидовым геометриям.

Геометрический абсолютизм рассматривался Эйнштейном как один из главных недостатков классики уже при

Критика пред- принятых попыток	Формулировка трудностей в тер- минах асимметрии	Связь с другими методологи- ческими при- нципами физики	Требования к будущей теории тяготения
4	5	6	7
<p>Несоответствие с опытом. Ad hoc-характер</p> <p>Отсутствие последовательной альтернативы классике, разрыв с концепцией поля.</p> <p>См. 1, 2, 3, 6</p>	<p>Физически неоправданное выделение евклидовой геометрии в ряду других метрических геометрий</p> <p>Существование пространственно-временных абсолютов, не подверженных влиянию движущихся тел и полей</p> <p>Инертная масса входит в выражение для закона тяготения, но не входит в выражения для других взаимодействий</p>	<p>Принципы простоты и соответствия</p> <p>Принципы наблюдаемости, простоты</p> <p>Принципы объяснения и единства физического значения</p>	<p>Учет возможности введения в физику неевклидовых геометрий</p> <p>Устранение пространственно-временных абсолютов</p> <p>Объяснение равенства $m_T = m_{ин}$ или использование его в качестве основы теории</p>

построении основ СТО. Важную роль при этом играл принцип наблюдаемости (или некоторый его эквивалент): «Логическое построение его (Ньютона. — В. В.) теории было бы безусловно более удовлетворительным без этого призрачного понятия (т. е. абсолютного пространства. — В. В.), тогда в законах фигурировали бы только такие объекты (материальные точки, расстояния), отношение которых к опытному восприятию вполне ясно» [38, с. 86].

Наконец, эмпиризм ньютоновской теории тяготения, связанный с отсутствием в ее рамках какого-либо объяснения факту равенства $m_T = m_{ин}$ был весьма уязвим, прежде всего с точки зрения принципов объяснения и единства физического значения.

В конце XIX и начале XX в., как мы видели, выдвигалось значительное число разнообразных эфирно-механистических, электродинамических гипотез о природе гра-

вигации. Регулятивную роль при оценке этих гипотез играли в первую очередь принцип сохранения энергии, а также принципы наблюдаемости и простоты. Последние были важны и в процессе критики большинства многочисленных объяснений эмпирических аномалий ньютоновской теории (прежде всего аномального смещения перигелия Меркурия).

Вместе с тем сами эти принципы уточнялись и углублялись в процессе критического обсуждения ньютоновской теории и ее модификаций, а затем и в процессе разработки ОТО.

Комментарий к таблице

В таблице в схематической форме представлены основные результаты работы. Каждой из семи логико-теоретических трудностей ньютоновской теории тяготения сопоставляется семь историко-научных и методологических аспектов: 1) связь с прогрессом физико-математических наук (например, осознание инстантизма было связано с развитием полевой концепции Фарадея—Максвелла в электродинамике в 60—90-х годах XIX в.); 2) попытки устранения указанной трудности (например, во второй половине XIX в. инстантизм пытались устранить путем введения скорости гравитации без изменения ньютоновской формы законов, заменой ньютоновского закона законами Вебера, Римана и т. д. или на основе электромагнитной теории Максвелла и т. д.); 3) критика этих попыток (так, перечисленные в п. 2 варианты устранения инстантизма или противоречили опыту, или не удовлетворяли закону сохранения энергии, или содержали слишком много непроверяемых *ad hoc* предпосылок); 4) формулировка указанных трудностей в терминах асимметрии (инстантизм, в частности, может рассматриваться как асимметрия двояким образом: а) все физические взаимодействия, кроме гравитации, распространяются с конечной скоростью; б) существование бесконечно большой скорости ведет к физическому оправданию абсолютного пространства и тем самым привилегированной системы отсчета); 5) связь с другими методологическими принципами (инстантизм противоречит принципам близкодействия, причинности, объяснения и т. д.); 6) требования к будущей теории (успех электромагнитной теории Максвелла указывал наиболее вероятный путь преодоления инстантизма в концепции поля); 7) решение указанной трудности в ОТО (полевой характер гравитации устранил инстантизм, присущий ньютоновской теории).

В целом таблица дает представление о формировании во второй половине XIX в. принципиальных трудностей классической теории тяготения и попытках их преодоления, оказавшихся в общем неудачными. Эти неудачи способствовали все более ясному осознанию указанных трудностей ньютоновской теории. В конце XIX и начале XX в. особое значение среди конструктивных средств физикатеоретика приобретают методологические принципы физики и прежде всего принцип симметрии. Поэтому оценка недостатков классики с точки зрения этих принципов и формулировка их в терминах асимметрии хотя и являются своего рода реконструкциями, но они, таким образом, исторически вполне оправданы. Тем более, что характерной особенностью творческого мышления Эйнштейна, на долю которого выпала решающая роль в создании современной гравитационной теории, была «чувствительность к ранее не замеченным явлениям формальной асимметрии» предшествующих теоретических построений.

Анализ логико-теоретических трудностей классики на основе концепции симметрии и методологических принципов не только доказывал необходимость кардинального преобразования ньютоновской теории тяготения. Он указывал и на конструктивные способы этого преобразования (теоретико-полевой подход к проблеме и конечная скорость распространения гравитации, тождество гравитации и инерции, устранение пространственно-временных абсолютов, использование неевклидовой геометрии и т. д.). Два последних столбца таблицы как раз и подчеркивают конструктивную роль этих трудностей.

В таблице, как и в статье вообще, основной упор сделан на теоретико-гравитационные истоки ОТО, которых все же было недостаточно для построения новой теории. Только СТО оживила гравитационные исследования и указала путь к решению проблемы, который до этого представлялся достаточно неопределенным. Но и без той большой предварительной работы, которая была проделана физиками, механиками, астрономами в области гравитации в XIX в. (особенно во второй его половине), едва ли было бы возможно построение ОТО.

Л и т е р а т у р а

1. Арзелье А. Исторические и библиографические заметки. — В кн.: Эйнштейновский сборник 1973. М., «Наука», 1974.
2. Берри А. Краткая история астрономии. М.—Л., 1946.
3. Вебер Дж. Гравитация и свет. — В кн.: Гравитация и относительность. М., 1965.

4. *Визгин В. П.* Развитие взаимосвязи принципов инвариантности с законами сохранения в классической физике. М., «Наука», 1972.
5. *Визгин В. П.* Эрлангенская программа и физика. М., «Наука», 1975.
6. *Визгин В. П.* Путь Эйнштейна к общековариантным уравнениям гравитационного поля. — В кн.: История и методология естественных наук. Физика, вып. 17. М., 1975.
7. *Визгин В. П.* Принцип симметрии. — В кн.: Методологические принципы физики. М., «Наука», 1975.
8. *Вокулер Ж.* Астрономическая фотография. М., 1975.
9. *Гарцер П.* Звезды и пространство. — В кн.: Новые идеи в математике, вып. 3. СПб., 1913.
10. *Гернек Ф.* Альберт Эйнштейн. М., 1966.
11. *Григорьян А. Т., Розенфельд Б. А.* Теория винтов и неевклидова механика. — В кн.: История механики с конца XVIII века до середины XX века. М., «Наука», 1972.
12. *Джеммер М.* Понятие массы. М., 1967.
13. *Инфельд Л.* История развития теории относительности. — В кн.: Эйнштейн и современная физика. М., 1956.
14. *Кагальникова И. П.* История развития нерелятивистских представлений о природе гравитации. — Учен. зап. Ярослав. пед. ин-та, 1963, вып. 56, с. 87.
15. *Коноплева Н. П.* Об эволюции понятия инерции — В кн.: Принцип симметрии. М., «Наука», 1978.
16. *Кучмент М. М.* Основные этапы формирования ньютоновской космологии. Канд. дис. М., 1972.
17. *Ланжевэн П.* Относительность. — В кн.: Избранные произведения. М., 1949.
18. *Ланжевэн П.* Исследования в области ионизированных газов. — В кн.: Избр. труды. М., 1960.
19. *Левитская М. А.* Всемирное тяготение с исторической точки зрения. — Журн. Рус. физ.-хим. о-ва, 1910, т. 42, отд. 2, с. 191, 215, 361; 1911, т. 43, отд. 2, с. 20.
20. *Максвелл Д. К.* Атом. — В кн.: Речи и статьи. М., 1968.
21. *Максвелл Д. К.* Притяжение. — Там же. М., 1968.
22. *Мах Э.* Механика. СПб., 1909.
23. *Мах Э.* Принцип сохранения работы. СПб., 1909.
24. Методологические принципы физики. М., 1975.
25. *Паннекук А.* История астрономии. М., 1966.
26. *Пуанкаре А.* Наука и метод. Одесса, 1910.
27. *Пуанкаре А.* Динамика электрона. — Избр. труды, т. 3. М., 1974.
28. *Розенбергер Ф.* История физики, ч. 3, вып. 2. М.—Л., 1936.
29. *Тредер Г. Ю.* Относительность инерции. М., 1975.
30. *Холтон Дж.* Новый подход к историческому анализу современной физики. — XIII Междунар. конгр. по истории науки. М., 1971.
31. *Холтон Дж.* Эйнштейн о физической реальности. — Эйнштейновский сборник 1969—1970. М., «Наука», 1970.
32. *Шварцшильд К.* О допустимой мере кривизны пространства. Новые идеи в математике, № 3, СПб., 1913.
33. *Эйнштейн А.* К электродинамике движущихся тел. — Собр. науч. трудов, т. I. М., 1965.

34. *Эйнштейн А.* О принципе относительности и его следствиях — Собр. науч. трудов, т. I. М., 1965.
35. *Эйнштейн А.* К современному состоянию проблемы тяготения. — Собр. науч. трудов, т. I. М., 1965.
36. *Эйнштейн А.* О специальной и общей теории относительности. — Собр. науч. трудов, т. I. М., 1965.
37. *Эйнштейн А.* Вопросы космологии и общая теория относительности. — Собр. науч. трудов, т. I. М., 1965.
38. *Эйнштейн А.* Механика Ньютона и ее влияние на формирование теоретической физики. — Собр. науч. трудов, т. IV. М., 1967.
39. *Эйнштейн А.* Автобиографические заметки. — Собр. науч. трудов, т. IV. М., 1967.
40. *Эйнштейн А.* Предисловие к кн.: *Макс Джеммер.* Понятие пространства. Собр. науч. трудов, т. IV. М., 1967.
41. *Сарек М.* Philosophical impact of contemporary physics. Princeton, 1961.
42. *Chazy J.* Théorie de la relativité et la mécanique céleste, t. 1—2. Paris, 1928—1930.
43. *Drude P.* Ueber Fernwirkungen. — Ann. Phys. und Chem., 1897, Bd 62, 1.
44. *Gans R.* Gravitation und Elektromagnetismus. — Phys. Z., 1905, Bd. 6, 803.
45. *Gerber P.* Die räumliche und zeitliche Ausbreitung der Gravitation. — Ann. Physik, 1917, 52, 415.
46. *Gerber P.* Die räumliche und zeitliche Ausbreitung der Gravitation. — Z. Math. und Phys., 1898, 43, 93.
47. *Guth E.* Contribution to the history of Einstein's geometry as a branch of physics. — In: Relativity. Proc. Relativity Conf. Midwest, Ohio, Cincinnati, June 2—6 1969. New York—London, 1970.
48. *Holton J.* On the trying to understand scientific genius. — In: Thematic origins of scientific thought. Cambridge, Massachusetts, 1973.
49. *Holton J.* Mach, Einstein and the search for reality. — In: Thematic origins of scientific thought. Cambridge, Massachusetts, 1973.
50. *Isenkrahe C.* Das Rätsel von der Schwerkraft. Braunschweig, 1879.
51. *Jammer M.* Concepts of force. N. Y., 1962.
52. *Jammer M.* Concepts of space. New York—Cambridge, 1954.
53. *Laue M.* Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation. — Ann. Physik, 1917, 53, 214.
54. *Lecat M.* Bibliographie de relativité. Brussels, 1924.
55. *Lorentz H. A.* Considérations sur la pesanteur. — In: *Lorentz H. A.* Collected papers, v. 5. The Hague, 1937.
56. *Mackenzie A. S.* The laws of gravitation. N. Y., 1900.
57. *Neumann K. G.* Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze. — Abhandl. math. Kl. Kgl. Sächsischen Ges. Wiss. Leipzig, 1873, 10, 417; 1874, 11, 97.
58. *Neumann K. G.* Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen. Leipzig, 1896.
59. *Newcomb S.* The elements of the inner planets and the fundamental constants of astronomy. Washington, 1896.

60. *North J. D.* The measure of the Universe. Oxford, 1965.
61. *Oppenheim S.* Kritik des Newtonschen Gravitationsgesetzes. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd 6, t.2. Leipzig, 1922.
62. *Pyenson L. R.* The Goettingen reception of Einstein's general theory of relativity. Ph. D. Dissert., John Hopkins Univ., 1974.
63. *Seeliger H. von.* Ueber das Newtonsche Gravitationsgesetz. — *Astron. Nachr.*, 1895, 137.
64. *Soldner J.* Ueber die Ablenkung eines Lichtstrahls von seiner geradlinigen Bewegung durch die Attraktion einer Weltkörpers, an welchem er nahe vorbeigeht. — *Ann. Physik*, 1921, 65, 593.
65. *Soldner J.* Ueber die Ablenkung eines Lichtstrahls von seiner geradlinigen Bewegung durch die Attraktion einer Weltkörpers, an welchem er nahe vorbeigeht. — *Astron. Jahrb.*, Berlin, 1801, 161.
66. *Strauss M.* The Huygens—Leibniz—Mach criticism in the light of present knowledge. — In: *Strauss M.* Modern physics and its philosophy. Dordrecht, 1972.
67. *Strauss M.* On the logic of «inertial frame» and mass. — In: *Modern physics and its philosophy.* Dordrecht, 1972.
68. *Strauss M.* Einstein's theory and the critics of Newton inter-theory relations. II. — In: *Modern physics and its philosophy.* Dordrecht, 1972.
69. *Thomson J. J.* On the electric theory of gravitation. — *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1909, 15, p. 65.
70. *Tisserand F.* Mécanique céleste, v. 4. Paris, 1896.
71. *Todhunter I.* A history of the mathematical theories of attraction and figure of the Earth from time of Newton to that of Laplace. London, 1873.
72. *Tonnelat M.-A.* Histoire du principe de relativité. Paris, 1971.
73. *Whittaker E. T.* A history of the theories of aether and electricity, v. 1—2. London, 1951—1953.
74. *Wiechert E.* Die Gravitation als elektrodynamische Erscheinung. — *Ann. Physik*, 1920, 63, 301.
75. *Wien W.* Ueber die Möglichkeit einer elektromagnetischen Begründung der Mechanik. — *Ann. Physik*, 1901, 5, 501.
76. *Williams L. P.* The origins of field theory. N. Y., 1966.
77. *Woodward J.* The search for a mechanism: action-at-a-distance in gravitational theory. Ph. D. Dissert. Univ., Denver, 1972.
78. *Zenneck J.* Gravitation. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 5, T. I. Leipzig, 1903.

ПИСЬМО К. ПОППЕРУ *

Дорогой г-н Поппер! ¹

Я познакомился с Вашей статьей и в значительной мере с ней согласен **. Я не верю, однако, в возможность получения «сверхчистого случая», который позволил бы нам предсказать пространственное положение и импульс (цвет) светового кванта с «недопустимой» точностью. Метод, предложенный Вами (диафрагма с укрепленным затвором в сочетании с селективно пропускающими стеклянными фильтрами), я считаю неэффективным в принципе в силу того, что, как я уверен, фильтр действовал бы таким образом, что «размывал» положение, подобно спекгроскопической решетке ².

Моя аргументация следующая. Представим короткий световой сигнал (точное положение). Чтобы более легко увидеть результат абсорбирования фильтром, я допускаю, что этот сигнал разлагается на большое число квази-монохроматических волновых цугов W_n . Допустим, что абсорбирующие фильтры поглощают все цвета W_n , за исключением одного — W_1 . Теперь эта волновая группа будет занимать значительную пространственную область («размывание» ее положения), т. к. она является квазимонохроматической, а это значит, что фильтр будет с неизбежностью «размывать» пространственное положение.

В целом мне действительно не нравится модная в настоящее время «позитивистская» тенденция цепляться за то, что является наблюдаемым. Я считаю тривиальным то, что никто не в состоянии делать в области атомных

* Письмо А. Эйнштейна опубликовано в книге К. Поппера «Логика научного открытия» — К. Р о р р е г. The logic of scientific discovery. N. Y., 1968, p. 461—464. Пер. Э. М. Чудинова.

** Наиболее существенный момент: ψ -функция характеризует, скорее, статистический ансамбль систем, чем отдельно взятую систему. Это следует также из приведенного ниже рассмотрения. Такая точка зрения делает не обязательным проведение более детального различия между «чистым» и «нечистым» случаями. (Прим. А. Эйнштейна.)

величин предсказания с любой желаемой степенью точности, и я думаю (подобно Вам, между прочим), что теория не может быть получена из результатов наблюдений, но может быть только изобретена.

У меня нет под рукой экземпляра статьи, которую я написал совместно с Розеном и Подольским, но могу кратко сообщить Вам, о чем там идет речь.

Можно поставить следующий вопрос: является ли статистический характер наших экспериментальных данных, с точки зрения современной квантовой теории, просто результатом внешнего вмешательства в систему, осуществляемого измерением, тогда как система сама по себе, описываемая ψ -функцией, ведет себя детерминистичным образом? Гейзенберг заигрывает с этой интерпретацией, не принимая ее последовательно. Но вопрос можно поставить и так: является ли ψ -функция, которая изменяется во времени детерминистично в соответствии с уравнением Шредингера, *полным* описанием физической реальности, причем влияние наблюдения на систему (механизм которого нам полностью не известен) исключительно ответственно за тот факт, что наши предсказания имеют лишь статистический характер?

Ответ, к которому мы приходим, заключается в том, что ψ -функция не может рассматриваться в качестве полного описания физического состояния системы.

Рассмотрим сложную систему, состоящую из двух подсистем A и B , которые взаимодействуют между собой только в течение короткого времени.

Допустим, что нам известна ψ -функция сложной системы *до* взаимодействия (например, столкновения двух свободных частиц). Тогда уравнение Шредингера даст нам ψ -функцию этой системы *после* взаимодействия.

Допустим, что теперь (после взаимодействия) мы выполняем над системой A измерение, которое может быть осуществлено разными способами, зависящими от того, какие переменные мы намерены точно измерить, — например, импульс или координату. Квантовая механика дает нам тогда ψ -функцию для подсистемы B , и мы получим *разные ψ -функции, которые различаются выбранным способом измерения системы A .*

Было бы неправильным полагать, что физическое состояние B зависит от некоторого измерения системы A , которая в данное время отделена от B ; и это означает,

что две различные ψ -функции относятся к одному и тому же физическому состоянию B . Поскольку *полное* описание физического состояния должно непременно быть *однозначным* (за исключением таких несущественных вещей, как единицы измерения, выбор координат и т. д.), нельзя рассматривать ψ -функцию как *полное* описание состояния системы.

Ортодоксальный сторонник квантовой механики, скажет, что не существует такой вещи, как полное описание, а может быть только статистическое описание ансамбля систем, но не *одной отдельно взятой* системы. Но, во-первых, он должен это *сказать*, и, во-вторых, я не верю, что мы можем навсегда удовлетвориться таким расплывчатым и поверхностным описанием природы.

Следует иметь в виду, что некоторые из точных предсказаний, которые я могу получить для данной системы B (в соответствии с произвольно выбранным способом измерения A), могли бы соотноситься друг с другом тем же самым образом, как и измерения импульса и пространственного положения. Едва ли поэтому можно избежать вывода, что система B на самом деле имеет определенный импульс и определенную пространственную координату. Ибо если при свободном выборе, поступая так, я в состоянии предсказать нечто, то это нечто также должно существовать и в действительности.

Описание, подобное применяемому здесь, являющееся в принципе статистическим, может быть, по моему мнению, только временным. Я хочу вновь сказать ***, что не верю в правоту Вашего тезиса о невозможности получения статистических выводов из детерминистической теории³. Представьте себе исключительно классическую статистическую механику (газовую теорию или теорию броуновского движения). Например: материальная точка движется с постоянной скоростью по замкнутому кругу; я могу вычислить возможность ее нахождения в данный момент времени в рамках данной области окружности. То, что является существенным, просто состоит в следующем: я не знаю начального ее положения, или не знаю его точно.

С дружеским приветом,

Ваш А. Эйнштейн.

*** Имеется в виду содержание предыд. письма. (Прим. К. Поппера.)

Примечания переводчика

1. К. Поппер — видный английский философ, занимающийся главным образом проблемами логики и методологии науки. На Западе он известен как критик неопозитивизма, хотя по целому ряду вопросов его позиции близки неопозитивизму.

Публикуемое здесь письмо А. Эйнштейна К. Попперу написано 11.IX 1935 г. Оно представляет собой ответ на неопубликованную рукопись статьи К. Поппера. Факсимиле рукописного письма А. Эйнштейна на немецком языке опубликовано в виде приложения в книге К. Поппера «Логика научного открытия». Здесь же дан его перевод с английского языка.

2. К. Поппер подвергает критике интерпретацию квантовой механики, развитую в работах Гейзенберга, Борна и Бора. В частности, он отвергает принятую ими трактовку соотношения неопределенностей. По его мнению, соотношение неопределенностей не является логическим следствием основных принципов квантовой механики. Так, например, соотношение неопределенностей для энергии и времени может быть выведено из квантового постулата, определяющего энергию через произведение постоянной Планка и частоты, а для координаты и импульса — из принципа Дуана. Согласно последнему, соотношение неопределенностей связано с характером прохождения электронов через щель диафрагмы и взаимодействия с краями щели. Это взаимодействие приводит к статистическому рассеянию импульса. Если щель диафрагмы имеет фиксированные размеры Δx , то серия прохождений электронов даст рассеяние для импульса Δp . Эта трактовка, отмечает К. Поппер, расходится с соотношением неопределенностей в его копенгагенской интерпретации. Эксперименты такого рода обеспечивают большую точность, чем эта интерпретация допускает. Например, чтобы получить рассеяние импульса Δp , необходимо в каждом отдельном эксперименте определять импульс с точностью, превышающей Δp , что запрещается соотношением неопределенностей.

В статье, которая рассматривается в письме А. Эйнштейна, К. Поппер описывает идеализированный эксперимент, который должен, по его замыслу, усилить критику соотношения неопределенностей. После критики, данной А. Эйнштейном, К. Поппер признал ошибочность своего эксперимента.

3. По мнению К. Поппера, вероятностное описание может быть получено только на основе вероятностных предпосылок в тех случаях, когда вероятностные предпосылки принимаются в неявном виде, ибо сами эти законы формулируются на основе усреднения величин. В данном случае К. Поппер выражает несогласие с критикой А. Эйнштейна.

М. Борн

ТЕОРИЯ НЕДЕФОРМИРУЕМОГО ЭЛЕКТРОНА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕМАТИКЕ *¹

Памяти Германа Минковского
посвящается

Введение

Большое значение, которое имеют понятия недеформируемого твердого тела и жестких связей в механике Ньютона, теснейшим образом связано с основополагающими воззрениями на пространство и время, на которых строится эта наука. Требование, что длины должны быть сравнимы друг с другом в разные времена, прямо приводит к образованию понятия масштаба, длина которого независима от времени и движения, т. е. к понятию абсолютно твердого тела. Понятие абсолютно твердого тела оказалось плодотворным и при построении собственно динамики, ибо твердое тело можно рассматривать с достаточной простотой не только кинематически как непрерывную материальную систему с только шестью степенями свободы, но и динамически, сведя действующие на его точки силы к соответствующим «равнодействующим» силам и моментам, знания которых достаточно для описания движения. Все эти возможности покоятся в конечном счете на галилей-ньютоновской связи пространства и времени с четырехмерным многообразием

* M. B o r n. — Ann. d. Phys., 1909, 30, 1. Пер. И. Я. Итенберга и В. С. Кирсанова.

¹ Слово *starr* переводится здесь как «недеформируемый», что более всего отвечает физической сути. Поскольку *starr* в немецком языке многозначно, его перевод в ряде мест варьируется соответственно контексту. — *Прим. пер.*

(которое я, следуя Минковскому², буду называть «миром»), той связи, которая в действительности содержится в положении, что законы природы должны быть независимы не только от выбора начала координат и единиц измерения времени и от положения пространственной системы отсчета и единиц измерения длины, но также и от равномерного переноса системы отсчета при неизменных единицах измерения времени.

Именно от этих основных положений кинематики надо отказаться, если считать справедливым электродинамический принцип относительности в формулировке Лоренца, Эйнштейна, Минковского и других. Ибо здесь связь пространства и времени с «миром» другая: независимость законов природы от равномерного перемещения пространственной системы отсчета имеет место только тогда, когда также и временной параметр претерпевает изменение, обусловленное не только переносом начала координат и выбором других единиц (измерения). Это тесно связано с тем обстоятельством, что масштабы, которые при равномерном переносе сохраняют свою длину в сопутствующей им координатной системе, испытывают сокращение в направлении их скорости относительно покоящейся системы. Тем самым рушится понятие недеформируемого твердого тела, по крайней мере в понимании, соответствующем ньютоновской кинематике.

Все же соответствующее понятие не стоит исключать из новой кинематики, потому что иначе сравнение длин движущихся тел в различные моменты времени становится бессмысленным. Для систем, движущихся относительно друг друга равномерно, не возникает никаких трудностей при построении этого понятия, и названные выше авторы основополагающих работ этой теории пользуются этим обстоятельством для того, чтобы не давать особого определения понятию недеформируемости.

Трудности возникают только тогда, когда учитываются ускорения. В этом направлении имеется только одна попытка, предпринятая Эйнштейном без достаточного выяснения всех обстоятельств дела. Поэтому я попытался разработать *кинематику недеформируемых твердых тел*

² H. M i n k o w s k i. — Raum und Zeit. Phys. Ztschr., 1909, 10, 104. Знакомство с этой работой предполагается. Рус. пер. см. в кн.: Принципы относительности. М.—Л., 1935. — *Прим. пер.*

на основе постулатов относительности. Возможность такого представления ясна с самого начала, потому что ньютоновская кинематика представляет собой предельный случай новой кинематики, а именно такой случай, когда скорость света рассматривается как бесконечно большая величина. Метод, который я предлагаю, состоит в том, чтобы понятие недеформируемости (жесткости) выразить с помощью интегрального, а не дифференциального закона.

Действительно, получим сначала общие дифференциальные условия жесткости в дифференциальной форме. Они аналогичны соответствующим условиям в старой кинематике и переходят в них при $c = \infty$. Интегрирование этих условий, которое в старой кинематике весьма легко выполнимо и приводит к тому, что расстояние между жестко связанными точками (тела) оказывается постоянным, я проведу здесь лишь для случая прямолинейного ускоренного перемещения. Результат едва ли уступает простоте и наглядности старой механики и дает к тому же возможность предположить, что же получится при произвольном криволинейном и вращательном движениях. Однако этого вопроса я касаться не буду. Главный результат состоит в том, что при прямолинейном движении движение какой-либо отдельной точки твердого тела определяет, как и прежде, движение всех остальных его точек в соответствии с весьма простым законом. Иначе говоря, *тело обладает одной степенью свободы*.

Теперь возникает вопрос, не обладает ли твердое тело в новой механике, точно так же, как и в старой, некоторыми простыми свойствами, характеризующими его динамику, причем речь здесь, естественно, пойдет об электромагнитных силах.

Практическая ценность нового определения жесткости (недеформируемости) должна при этом сказаться и на динамике электрона. Большая или меньшая ясность полученного результата будет до известной степени зависеть от того, будет или нет повсеместно принят принцип относительности, так как эксперименты не дали еще никакого однозначного решения и, вероятно, не смогут дать.

Теория Абрагама, которая рассматривала движение недеформируемого (в обычном смысле) электрона в вызванном им силовом поле, привела не только к качественно удовлетворительному объяснению на чисто электрической

основе инертных свойств свободных электронов, но также привела и к некоторому количественному закону для зависимости электродинамической массы от скорости при малых ускорениях, который пока еще нельзя рассматривать как опровергнутый опытами. Но эта теория, которую навязывает электродинамике недеформируемое твердое тело старой механики, не удовлетворяет принципу относительности. Поэтому ее дальнейшее развитие, предпринятое Зоммерфельдом, П. Герцем, Герглотцем, Шварцшильдом и другими, привело к чрезвычайным математическим трудностям. Недавно Лоренц попытался согласовать теорию Абрагама с принципом относительности и для этой цели сконструировал свой «деформируемый» электрон. Именно этот электрон в соответствии с данным мною определением должен рассматриваться как недеформируемый, жесткий. Теория Лоренца, несмотря на это соответствие, дает повод к возражениям, на которые указал Абрагам, — законы нахождения равнодействующей сил, действующих на твердое тело, были некритически заимствованы из старой механики. Ниже показано, как следует модифицировать эти законы.

Формула Лоренца зависимости массы от скорости, так же хорошо подтверждаемая опытом, как и формула Абрагама, оказывается соответствующей и строгой теории. Эта зависимость, как отметил Эйнштейн и вывел я в работе³ «Инертная масса и принцип относительности» для любых потоков, есть прямое следствие кинематики и существенно не взаимосвязана с собственной электродинамической массой, «массой покоя».

Но моя теория строго доказывает зависимость массы покоя от ускорения для некоторого класса движений, которые соответствуют в качестве наиболее простых ускоренных движений равномерно-ускоренным движениям старой механики и которые я назвал «гиперболическими» движениями, а именно масса покоя оказывается постоянной до чрезвычайно больших ускорений. Для этих движений действительны уравнения движения в форме, соответствующей основным механическим уравнениям принципа относительности⁴. Но так как любое ускоренное движение

³ M. V o g n. — Ann. Phys., 1909, 28, 571.

⁴ Ср.: A. E i n s t e i n. — Ann. d. Phys., 1905, 17, 891; M. P l a n c k. — Verh. d. Deutsch. Phys. Ges., 1906, 8, 136; H. M i n-

можно аппроксимировать с помощью таких гиперболических движений, когда их ускорения резко не меняются, то получаем, таким образом, электродинамическое обоснование основных уравнений механики. Теория оказывается несостоятельной только для очень быстро меняющихся ускорений. Ибо тогда появляется наряду с сопротивлением инерции сопротивление излучения. *Следует отметить, что электрон в гиперболическом движении не имеет никакого собственного излучения, как бы велико ни было его ускорение, но ведет свое поле за собой. Это обстоятельство до сих пор было известно только для равномерно движущихся электронов. Излучение и сопротивление излучению проявляются только при отклонениях от гиперболического движения.*

Мое определение недеформируемости оказывается приспособленным к максвелловской электродинамике так же хорошо, как старое определение недеформируемости к системе галилей-ньютонической механики. В этом смысле недеформируемый электрон представляет динамически простейшее электрическое движение. Можно пойти еще дальше, утверждая, что теория дает отчетливое доказательство атомистической структуры электричества, чего никоим образом нет в теории Абрагама. Моя теория находится в согласии с атомистическим инстинктом столь большого числа экспериментаторов, что интересная попытка Леви-Чивита⁵ описать движение электричества как некую жидкость, свободно движущуюся под действием ее собственного поля и не связанную никакими кинематическими условиями, едва ли заслуживает одобрения.

Так как, по сказанному, простота динамики не уступает простоте кинематики нового недеформируемого твердого тела, то следовало бы придать этому понятию недеформируемости в системе электромагнитной картины мира то же самое фундаментальное значение, что и обычному твердому телу в системе механической картины мира.

k o w s k i. — Nachr. d. k. Ges. d. Wissensch. zu Götting, mat.-phys. Kl., 1908, 54; M. B o r n., l. c.

⁵ T. L e v i - C i v i t a. Sui campi elettromagnetici puri, bei C. Ferrarri, Venezia 1908; Sulle azione meccaniche etc.; Prendiconti d. Pr. Acad. dei Lincei 18, 5a.

Кинематика твердого тела

§ 1. Твердое тело в старой механике

Мы займемся, принимая во внимание электродинамические применения второй и третьей частей, не только жесткой системой дискретных точек, но непрерывными твердыми телами. Непрерывный поток материи может быть представлен по способу Лагранжа так, что пространственные координаты x , y , z будут функциями времени t и трех параметров ξ , η , ζ , причем для x , y , z в момент времени $t=0$, имеем

$$\begin{aligned}x &= x(\xi, \eta, \zeta, t), \\y &= y(\xi, \eta, \zeta, t), \\z &= z(\xi, \eta, \zeta, t).\end{aligned}\tag{1}$$

Система материальных точек является жесткой, когда расстояние между двумя какими-либо точками системы

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}\tag{2}$$

не зависит от времени и, следовательно, равно

$$\sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2}.$$

Тогда отсюда следует, что уравнения (1) имеют вид

$$\begin{aligned}x &= a_1 + a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta, \\y &= a_2 + a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta, \\z &= a_3 + a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta,\end{aligned}\tag{3}$$

причем величины a_α , $a_{\alpha\beta}$ есть функции времени t и матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (a_{\alpha\beta})$$

ортогональна ⁶: если \bar{A} — транспонированная матрица

⁶ Для того чтобы избежать подробного вычисления, применяют для вычисления матриц соответствующее этим соображениям очень простое и понятное без предварительной подготовки представление, которое содержится в § 11 работы Минковского «Основные уравнения электромагнитных процессов в движущихся телах».

и 1 — единичная матрица, то

$$\bar{A}A = 1. \quad (4)$$

Ради простоты обобщения этих условий для кинематики принципа относительности полезно считать, вслед за Минковским, значения переменных x , y , z , t параллельными координатами в пространстве четырех измерений, называемом «миром». В последующем рисунки будут означать плоское сечение $y=0$, $z=0$ такого четырехмерного пространства; ось x направлена по горизонтали, ось t — вверх по вертикали. Траектория некоторой точки представляется в x , y , z , t -многообразии (мире) кривой, «мировой линией», а движение некоторого тела — семейством мировых линий. Условие $dr/dt=0$ будет означать, что линия, связывающая точки пересечения каких-либо двух мировых линий с любым трехмерным образованием $t=\text{const}$, имеет постоянную длину. Это условие относится, следовательно, и к пространству $t=0$, которое «параллельно» трехмерному пространству $t=\text{const}$.

Значение этого условия жесткости для ньютоновской механики заключается в том, что оно инвариантно по отношению к преобразованиям, которые переводят уравнения движения Ньютона в самих себя. Эти преобразования при неизменности начала координат имеют вид

$$\begin{aligned} x &= k_{11}\bar{x} + k_{12}\bar{y} + k_{13}\bar{z} + k_1t, \\ y &= k_{21}\bar{x} + k_{22}\bar{y} + k_{23}\bar{z} + k_2t, \\ z &= k_{31}\bar{x} + k_{32}\bar{y} + k_{33}\bar{z} + k_3t, \end{aligned} \quad (5)$$

где $K_{\alpha\beta}$, K_α — постоянные и матрица

$$K = (k_{\alpha\beta})$$

ортогональна:

$$\bar{K}K = 1. \quad (6)$$

Эта часть преобразования, выражаемая ортогональной матрицей, означает переход от первоначальной координатной системы к другой лишь с помощью поворота вокруг начала координат, а вторая часть соответствует равномерному переносу во времени. Эта часть представляется в нашем четырехмерном мире как переход от пер-

воначальной t -оси к некоторой наклонной \bar{t} -оси. Сразу же видно (рис. 1), что при этом величина r остается неизменной.

Принцип относительности электродинамики выражает инвариантность законов природы по отношению к другим линейным преобразованиям, и величина r уже не может играть своей прежней роли. «Преобразования Лоренца»

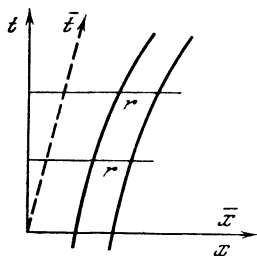


Рис. 1.

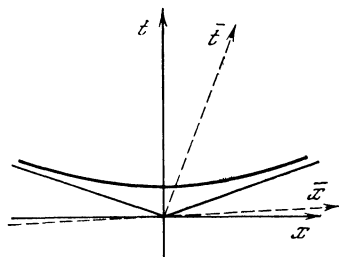


Рис. 2

связывают четыре величины x, y, z, t с четырьмя новыми величинами $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ с помощью линейных уравнений

$$\begin{aligned} x &= k_{11}\bar{x} + k_{12}\bar{y} + k_{13}\bar{z} + k_{14}\bar{t}, \\ y &= k_{21}\bar{x} + k_{22}\bar{y} + k_{23}\bar{z} + k_{24}\bar{t}, \\ z &= k_{31}\bar{x} + k_{32}\bar{y} + k_{33}\bar{z} + k_{34}\bar{t}, \\ t &= k_{41}\bar{x} + k_{42}\bar{y} + k_{43}\bar{z} + k_{44}\bar{t}, \end{aligned} \quad (7)$$

которые преобразуют выражение

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \quad (8)$$

само в себя, где c — скорость света.

При этом время (или, скорее, величина $ct\sqrt{-1}$) преобразуется наряду с координатами симметричным образом, а ось преобразования не только наклоняется, но все пространство $t=0$ получает другое положение в четырехмерном мире. Так как теперь пространство $t=\text{const}$ не переходит в пространство $\bar{t}=\text{const}$, то ни величина r , ни условие $dr/dt=0$ не инвариантны (рис. 2).

Представляется также невозможным указать аналогичное условие для двух мировых линий, так как не существует никакого трехмерного пространства, которое ведет себя по отношению к преобразованиям (7), (8) так же,

как указанное выше пространство $t = \text{const}$ ведет себя по отношению к преобразованию (5).

Поэтому, чтобы достичь необходимой общности, нам придется попытаться найти другое определение жесткости (недеформируемости) в старой кинематике. Здесь мы можем воспользоваться тем обстоятельством, что условие $r = \text{const}$, которое имеет место для двух мировых линий, отстоящих друг от друга на конечном расстоянии, можно заменить аналогичным дифференциальным условием для двух бесконечно близких линий. Если эти дифференциальные условия выполняются для всего пространства, то необходимым следствием этого факта является соотношение $r = \text{const}$.

Итак, рассмотрим расстояния между двумя бесконечно близкими мировыми линиями в момент времени t , т. е. рассмотрим элемент дуги $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$.

Введем константу ε , так что уравнение $ds^2 = \varepsilon^2$ будет описывать шар бесконечно малого радиуса. В этот шар преобразуется в результате движения, выраженного уравнениями (1), некоторый бесконечно малый эллипсоид. Это можно видеть, если величину ds^2 посредством уравнений

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta \end{aligned} \quad (9)$$

представить как квадратичную форму от $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$; пусть эта форма имеет вид

$$ds^2 = p_{11}d\xi^2 + p_{22}d\eta^2 + p_{33}d\zeta^2 + 2p_{12}d\xi d\eta + 2p_{13}d\xi d\zeta + 2p_{23}d\eta d\zeta, \quad (10)$$

причем матрица «коэффициентов деформации» $P_{\alpha\beta}$

$$P = (p_{\alpha\beta})$$

строится с помощью матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (11)$$

следующим образом:

$$P = \bar{A}A. \quad (12)$$

Назовем движение недеформируемым (жестким) в весьма малой области, если бесконечно малая область не деформируется при движении u , следовательно, все величины $p_{\alpha\beta}$ не зависят от времени. Тогда имеем дифференциальное условие жесткости

$$\frac{dp_{\alpha\beta}}{dt} = 0. \quad (13)$$

Если ξ, η, ζ — начальные значения x, y, z , то для $t=0$ матрица A равна единичной матрице 1 , тогда по (12) $P = \bar{A}A = 1$.

Этот факт представляет собой элементарную теорему дифференциальной геометрии, которая гласит, что, когда условие (13) справедливо для всего пространства, поток выражается уравнениями (3), т. е. речь в этом случае идет о движении твердого тела ⁷.

Это дифференциальное условие недеформируемости (13) легко может быть перенесено на релятивистскую кинематику.

§ 2. Дифференциальные условия недеформируемости

В дальнейшем только те величины должны иметь физический смысл, которые инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца (7), (8).

Рассмотрим теперь поток, который представим (вместо уравнений (1)) уравнениями, лучше соответствующими симметрии величин x, y, z, t , обусловленной принципом относительности:

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta, \tau), \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta, \tau), \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta, \tau), \\ t &= t(\xi, \eta, \zeta, \tau). \end{aligned} \quad (14)$$

⁷ Хотя эта теорема редко формулируется в явном виде, она является непосредственным следствием простейших аксиом.

Пусть при этом τ — собственное время, т. е. справедливо тождество

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)^2 = -c^2; \quad (15)$$

τ измерено для какого-либо «поперечного сечения» потоков.

Величины ξ , η , ζ характеризуют отдельные нити потока, однако их значения нам все еще не известны.

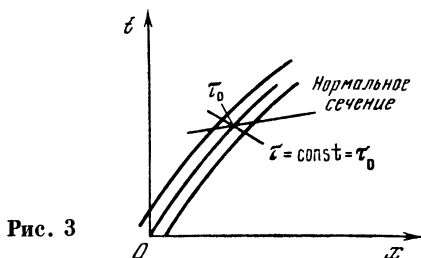


Рис. 3

Положим теперь для данного момента времени

$$\begin{aligned} x(0, 0, 0, \tau) &= \xi(\tau), \\ y(0, 0, 0, \tau) &= \eta(\tau), \\ z(0, 0, 0, \tau) &= \zeta(\tau), \\ t(0, 0, 0, \tau) &= \tau \end{aligned} \quad (16)$$

и рассмотрим нить из мировых линий, которые окружают мировую линию (16) $\xi = \eta = \zeta = 0$ (рис. 3).

Ее можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= \xi + x_\xi d\xi + x_\eta d\eta + x_\zeta d\zeta + \dots, \\ y &= \eta + y_\xi d\xi + y_\eta d\eta + y_\zeta d\zeta + \dots, \\ z &= \zeta + z_\xi d\xi + z_\eta d\eta + z_\zeta d\zeta + \dots, \\ t &= \tau + t_\xi d\xi + t_\eta d\eta + t_\zeta d\zeta + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Причем мы ограничимся линейными членами приращений $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ (которые следует рассматривать как малые, но конечные). Здесь ξ , η , ζ , τ — функции, определенные с помощью (16), а

$$x_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi}(0, 0, 0, \tau), \dots$$

Два пространственно-временных вектора с компонентами x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 называются *нормальными*, когда их направления по отношению к инвариантному гиперболическому образованию

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = -1 \quad (18)$$

являются сопряженными, когда, следовательно,

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - c^2 t_1 t_2 = 0. \quad (19)$$

Все векторы, нормальные по отношению к некоторому другому временному вектору x_1, y_1, z_1, t_1 , составляют трехмерное линейное образование, которое с помощью соответствующего преобразования Лоренца можно привести к пространству $t=0$. Назовем такое пространство *нормальным сечением* вектора.

Определенное таким образом понятие, очевидно, инвариантно по отношению к преобразованию Лоренца.

Теперь рассмотрим некоторую точку P на мировой линии $\xi = \eta = \zeta = 0$, в которой собственное время равно τ_0 . Через эту точку P проведем нормальное сечение к вектору скорости $\xi'_0, \eta'_0, \zeta'_0, t'_0$ в точке P :

$$\xi'_0(x - \xi_0) + \eta'_0(y - \eta_0) + \zeta'_0(z - \zeta_0) - c^2 t'_0(t - t_0) = 0, \quad (20)$$

где $\xi' = \frac{d\xi}{d\tau} = \left[\frac{\partial \xi}{\partial \tau} \right]_{\xi=\eta=\zeta=0}$, ..., а индекс 0 означает, что во все выражения вместо τ следует подставить τ_0 .

Выразим в (20) x, y, z, t с помощью (17) как функции $d\xi, d\eta, d\zeta$ и τ :

$$\begin{aligned} \xi' \{ \xi - \xi_0 + x_\xi d\xi + x_\eta d\eta + x_\zeta d\zeta + \dots \} + \dots \\ \dots - c^2 t'_0 \{ t - t_0 + t_\xi d\xi + t_\eta d\eta + t_\zeta d\zeta + \dots \} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Это выражение можно рассматривать как уравнение относительно τ , из которого можно найти значение собственного времени τ , принадлежащее нормальному сечению, проходящему через τ_0 , а также соседним линиям $d\xi, d\eta, d\zeta$. Так как разность $\tau - \tau_0$ мала, уравнение (2) будет линейным относительно $d\tau$. Именно получим

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \xi'_0 d\tau + \dots \\ x_\xi &= x_{\xi 0} + (x'_\xi)_0 d\tau, \dots, \\ &\dots \end{aligned} \quad (22)$$

а принимая во внимание, что, согласно (15),

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 - c^2 t'^2 = -c^2, \quad (23)$$

из (21) следует (если пренебречь всеми квадратичными членами от $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, $d\tau$):

$$\begin{aligned} c^2 d\tau' &= \xi'_0 (x_\xi^0 d\xi + x_\eta^0 d\eta + x_\zeta^0 d\zeta) + \dots \\ &\dots - c^2 t'_0 (t_\xi^0 d\xi + t_\eta^0 d\eta + t_\zeta^0 d\zeta), \end{aligned} \quad (24)$$

или, если ввести обозначения

$$\begin{aligned} x_\xi^0 d\xi + x_\eta^0 d\eta + x_\zeta^0 d\zeta &= \Xi, \\ y_\xi^0 d\xi + y_\eta^0 d\eta + y_\zeta^0 d\zeta &= \text{H}, \\ z_\xi^0 d\xi + z_\eta^0 d\eta + z_\zeta^0 d\zeta &= \text{Z}, \\ t_\xi^0 d\xi + t_\eta^0 d\eta + t_\zeta^0 d\zeta &= \text{T}, \end{aligned} \quad (25)$$

получаем

$$c^2 d\tau = \xi'_0 \Xi + \eta'_0 \text{H} + \zeta'_0 \text{Z} - c^2 t'_0 \text{T}. \quad (26)$$

Теперь рассмотрим гиперболическое тело

$$(x - \xi_0)^2 + (y - \eta_0)^2 + (z - \zeta_0)^2 - c^2 (t - t_0)^2 = \varepsilon^2, \quad (27)$$

расположенное в окрестности точки P как вокруг центра. Оно рассекает нормальное сечение (20), образуя в пересечении некоторую фигуру, которую можно считать «образом состояния покоя» нити в данном месте.

Подставим в (27) вместо x , y , z , t их выражения (17), а затем заменим ξ , η , ζ , t , x_ξ ... их выражениями (22). Тогда получим

$$\begin{aligned} (\xi'_0 d\tau + x_\xi^0 d\xi + x_\eta^0 d\eta + x_\zeta^0 d\zeta)^2 + \dots \\ \dots - c^2 (t_0 d\tau + t_\xi^0 d\xi + t_\eta^0 d\eta + t_\zeta^0 d\zeta)^2 = \varepsilon^2. \end{aligned} \quad (28)$$

В это уравнение входит величина $d\tau$, находящаяся на нормальном сечении и являющаяся, согласно (26), функцией $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$. Тогда (28) переходит в

$$\begin{aligned} \left\{ \left(1 + \frac{\xi'_0}{c^2} \right) \Xi + \frac{\xi'_0 y'}{c^2} \text{H} + \frac{\xi'_0 \delta_0}{c^2} \text{Z} - \xi'_0 t'_0 \text{T} \right\}^2 + \dots \\ \dots - c^2 \left\{ \frac{t^2 y'_0}{c^2} \Xi + \frac{t_0 y'_0}{c^2} \text{H} + (1 - t_0'^2) \text{T} + \frac{t_0 \delta_0}{c^2} \text{Z} \right\}^2 = \varepsilon^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Итак, образ состояния покоя выражается квадратичной формой от $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$. Так как точка P ($\xi = \eta = \zeta = 0$, $\tau = \tau_0$) выбрана произвольно, нулевые индексы можно опустить, а вместо ξ' , ... писать x_τ , ... Тогда (29) можно записать в виде:

$$(c_{11}d\xi + c_{12}d\eta + c_{13}d\zeta)^2 + (c_{21}d\xi + c_{22}d\eta + c_{23}d\zeta)^2 + (c_{31}d\xi + c_{32}d\eta + c_{33}d\zeta)^2 + (c_{41}d\xi + c_{42}d\eta + c_{43}d\zeta)^2 = \varepsilon^2. \quad (30)$$

Прямоугольная матрица $C = (c_{\alpha\beta})$, состоящая из четырех строк и трех столбцов, равна произведению матриц S и A , составленных из производных функций (14):

$$C = SA; \quad (31)$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 + \frac{x_\tau^2}{c^2} & \frac{x_\tau y_\tau}{c^2} & \frac{x_\tau z_\tau}{c^2} & -\frac{x_\tau t_\tau}{ic} \\ \frac{y_\tau x_\tau}{c^2} & 1 + \frac{y_\tau^2}{c^2} & \frac{y_\tau z_\tau}{c^2} & -\frac{y_\tau t_\tau}{ic} \\ \frac{z_\tau x_\tau}{c^2} & \frac{z_\tau y_\tau}{c^2} & 1 + \frac{z_\tau^2}{c^2} & -\frac{z_\tau t_\tau}{ic} \\ -\frac{t_\tau x_\tau}{ic} & -\frac{t_\tau y_\tau}{ic} & -\frac{t_\tau z_\tau}{ic} & 1 - t_\tau^2 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$A = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \\ ict_\xi & ict_\eta & ict_\zeta \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Сгруппируем в квадратичной форме (30) члены с $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, тогда получим

$$p_{11}d\xi^2 + p_{22}d\eta^2 + p_{33}d\zeta^2 + 2p_{12}d\xi d\eta + 2p_{13}d\xi d\zeta + 2p_{23}d\eta d\zeta, \quad (34)$$

причем

$$P = (p_{\alpha\beta}) = \bar{C}C = \bar{A}\bar{S}SA. \quad (35)$$

С помощью уравнения (15), из которого следует, что детерминант S обращается в нуль, можно это соотношение (35) еще более упростить. Легко проверить прямым вычислением, что

$$\bar{S}S = S \quad (36)$$

и тогда (33) переходит в

$$P = \bar{A}SA. \quad (37)$$

Это выражение аналогично выведенному в § 1 уравнению (12). Шесть величин $p_{\alpha\beta}$ могут быть названы «коэффициентами деформации», которые должны были бы играть важную роль в теории упругости, соответствующей принципу относительности.

Мы назовем нить недеформируемой в весьма малой области, если ее образ состояния покоя не зависит от собственного времени τ . Это означает, что для нее существуют шесть уравнений

$$\partial p_{\alpha\beta} / \partial \tau = 0.$$

Если эти уравнения выполняются для всего пространства, то мы имеем дело с движением твердого тела.

Итак, мы нашли общие дифференциальные условия недеформируемости. Так как они сами построены с помощью таких величин, которые инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца, то несомненно обладают теми же свойствами.

§ 3. Уравнение неразрывности и несжимаемый поток

Если ρ — плотность потока (1), то она связана с компонентами скорости

$$w_x = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad w_y = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad w_z = \frac{\partial z}{\partial t} \quad (39)$$

с помощью уравнения неразрывности. Его можно вывести двумя способами. По способу Эйлера рассматриваются ρ , w_x , w_y , w_z как функции от x , y , z , t ; тогда уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho w_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho w_z}{\partial z} = 0. \quad (40)$$

По способу Лагранжа рассматриваются x , y , z , ρ как функции ξ , η , ζ , t ; тогда уравнение имеет вид

$$\partial \rho \Theta / \partial t = 0, \quad (41)$$

где Θ — функциональный определитель

$$\Theta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}. \quad (42)$$

Связь между двумя формами выражается тождеством

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho w_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho w_z}{\partial z} = \frac{1}{\Theta} \frac{d\rho\Theta}{dt}. \quad (43)$$

С помощью уравнений (14) можно показать, что обе формы уравнения неразрывности подходят для описания потока как функции собственного времени.

Прежде всего, очевидно, имеем

$$w_x = \frac{x_\tau}{t_\tau}, \quad w_y = \frac{y_\tau}{t_\tau}, \quad w_z = \frac{z_\tau}{t_\tau}. \quad (44)$$

Если заменим, кроме того, ρ «плотностью покоя»

$$\rho^* = \rho/t_\tau, \quad (45)$$

то (40) переходит в

$$\frac{\partial \rho^* x_\tau}{\partial x} + \frac{\partial \rho^* y_\tau}{\partial y} + \frac{\partial \rho^* z_\tau}{\partial z} + \frac{\partial \rho^* t_\tau}{\partial t} = 0. \quad (46)$$

Мы получили аналог формулы (41), для которого докажем справедливость тождества

$$\frac{\partial \rho^* x_\tau}{\partial x} + \frac{\partial \rho^* y_\tau}{\partial y} + \frac{\partial \rho^* z_\tau}{\partial z} + \frac{\partial \rho^* t_\tau}{\partial t} = \frac{1}{D} \frac{\partial \rho^* D}{\partial \tau}, \quad (47)$$

которое соответствует тождеству (43). Функциональный определитель D равен

$$D = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta & x_\tau \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta & y_\tau \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta & z_\tau \\ t_\xi & t_\eta & t_\zeta & t_\tau \end{vmatrix}. \quad (48)$$

Заменим для краткости

x, y, z, t через x_1, x_2, x_3, x_4 ;

ξ, η, ζ, τ через $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$.

Тогда мы имеем в левой части (47)

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \frac{\partial (\rho^* \partial x_{\alpha} / \partial \xi_4)}{\partial x_{\alpha}} &= \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial (\rho^* \partial x_{\alpha} / \partial \xi_4)}{\partial \xi_{\beta}} \frac{\partial \xi_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} = \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \left(\rho^* \frac{\partial^2 x_{\alpha}}{\partial \xi_{\beta} \partial \xi_4} + \frac{\partial \rho^*}{\partial \xi_{\beta}} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial \xi_4} \right) \frac{\partial \xi_{\beta}}{\partial x_{\alpha}}. \end{aligned}$$

Если мы обозначим теперь в детерминанте D дополнительный для элемента $\partial x_{\alpha} / \partial \xi_{\beta}$ минор через $S(\partial x_{\alpha} / \partial \xi_{\beta})$, то с помощью последовательного дифференцирования уравнений (14) по x_{α} и решения полученных таким образом линейных уравнений получим

$$\frac{\partial \xi_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} = \frac{S(\partial x_{\alpha} / \partial \xi_{\beta})}{D}. \quad (49)$$

Если подставим это в (47), то, согласно правилам для операций с определителями, получим

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \frac{\partial \left(\rho^* \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial \xi_4} \right)}{\partial x_{\alpha}} &= \frac{1}{D} \sum_{\alpha, \beta} \left\{ \rho^* \frac{\partial^2 x_{\alpha}}{\partial \xi_{\beta} \partial \xi_4} S \left(\frac{\partial x_{\alpha}}{\partial \xi_{\beta}} \right) + \frac{\partial \rho^*}{\partial \xi_{\beta}} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial \xi_4} S \left(\frac{\partial x_{\alpha}}{\partial \xi_{\beta}} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{D} \left\{ \rho^* \frac{\partial D}{\partial \xi_4} + \frac{\partial \rho^*}{\partial \xi_4} D \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \left(\rho^* \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial \xi_4} \right)}{\partial x_{\alpha}} = \frac{1}{D} \frac{\partial \rho^* D}{\partial \xi_4},$$

а это и есть доказываемое тождество (47).

Тогда условие неразрывности можно написать в виде

$$\partial \rho^* D / \partial \tau = 0. \quad (50)$$

Формулы (46), (47) и (50) инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца.

Величина

$$\rho^* D = \rho_0 \quad (51)$$

зависит только от ξ , η , ζ ; если значение D для $\tau=0$ равно 1 (что всегда можно принять), то ρ_0 — «начальное значение плотности покоя».

В старой кинематике поток считается несжимаемым, если ρ постоянно, независимо от времени t . В новой кине-

матике мы дадим определение следующим образом: *поток несжимаем, когда плотность покоя ρ^* постоянна, т. е. не зависит от собственного времени τ .*

Из (46) и (50) получаются две формы условия несжимаемости.

Прежде всего можно (46) записать так:

$$\rho^* \left(\frac{\partial x_\tau}{\partial x} + \frac{\partial y_\tau}{\partial y} + \frac{\partial z_\tau}{\partial z} + \frac{\partial t_\tau}{\partial t} \right) + \frac{\partial \rho^*}{\partial x} x_\tau + \frac{\partial \rho^*}{\partial y} y_\tau + \frac{\partial \rho^*}{\partial z} z_\tau + \frac{\partial \rho^*}{\partial t} t_\tau = 0,$$

или

$$\rho^* \left(\frac{\partial x_\tau}{\partial x} + \frac{\partial y_\tau}{\partial y} + \frac{\partial z_\tau}{\partial z} + \frac{\partial t_\tau}{\partial t} \right) + \frac{\partial \rho^*}{\partial t} = 0. \quad (52)$$

Пусть теперь ρ^* не зависит от τ , тогда получаем первую форму условия несжимаемости

$$\frac{\partial x_\tau}{\partial x} + \frac{\partial y_\tau}{\partial y} + \frac{\partial z_\tau}{\partial z} + \frac{\partial t_\tau}{\partial t} = 0. \quad (53)$$

Из (50) получается сразу вторая форма

$$\partial D / \partial \tau = 0. \quad (54)$$

Затем, если D для $\tau=0$ равно 1, то D тождественно равно 1 и по (51) $\rho^* = \rho_0(\xi, \eta, \zeta)$.

§ 4. Прямолинейный перенос твердого тела

Проинтегрируем теперь дифференциальные условия недеформируемости (38) для простейшего случая прямолинейного перемещения. Если учтем, что в этом случае условие недеформируемости должно быть идентично условию несжимаемости, то найдем благодаря этому не только доказательство того, что наше определение недеформируемости имеет смысл, но и одновременно метод интегрирования.

Положим

$$y = \eta, \quad z = \zeta \quad (55)$$

и предположим, что x и t зависят только от ξ и τ . Тогда из (32) и (33) получаем

$$S = \begin{pmatrix} i + \frac{r_\tau}{c^2} & 0 & 0 & -\frac{x_\tau t_\tau}{ic} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{t_\tau x_\tau}{ic} & 0 & 0 & 1 - t_\tau^2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} x_\xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ ict_\xi & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если теперь составить матрицу $P = \bar{A}SA$, то легко найти

$$P = \begin{pmatrix} (x_\xi t_\tau - x_\tau t_\xi)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда шесть условий жесткости сведутся к одному уравнению

$$\frac{d}{d\tau}(x_\xi t_\tau - x_\tau t_\xi) = 0. \quad (56)$$

С другой стороны, детерминант (48) будет равен

$$D = \begin{vmatrix} x_\xi & 0 & 0 & x_\tau \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_\xi & 0 & 0 & t_\tau \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\tau \\ t_\xi & t_\tau \end{vmatrix}. \quad (57)$$

Тем самым условие несжимаемости

$$\frac{dD}{d\tau} = 0$$

оказывается идентичным условию недеформируемости (56). Вследствие этого его можно заменить другой формулировкой (53) условия несжимаемости, которая в данном случае принимает вид

$$\frac{\partial x_\tau}{\partial x} + \frac{\partial t_\tau}{\partial t} = 0. \quad (58)$$

Теперь проинтегрировать это уравнение не представляет труда. Если положить

$$x_\tau = p, \quad t_\tau = -q, \quad (59)$$

то имеем для p, q два уравнения:

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial t} = 0, \quad p^2 - c^2 q^2 = -c^2. \quad (60)$$

Эти уравнения эквивалентны одному дифференциальному уравнению в частных производных для некоторой функции двух независимых переменных. Если положить

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad q = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (61)$$

то первое уравнение (60) превращается в тождество, а второе переходит в

$$\varphi_t^2 - c^2 \varphi_x^2 = -c^2. \quad (62)$$

Простейшее решение этого уравнения получим, если положим φ_t и φ_x равными постоянным γ и $-\delta$, которые должны удовлетворять условию

$$\gamma^2 - c^2 \delta^2 = -c^2. \quad (63)$$

Тогда имеем

$$p = x_\tau = \gamma, \quad q = -t_\tau = -\delta,$$

откуда следует

$$x = W(\xi) + \gamma\tau, \quad t = V(\xi) + \delta\tau, \quad (64)$$

где W и V — произвольные функции ξ . Вследствие уравнения (63) форма уравнений (64) остается неизменной, если x и t подвергнуть преобразованиям Лоренца.

Уравнения (64) вместе с (55) описывают прямолинейное равномерное движение. Функции $W(\xi)$, $V(\xi)$ определяются с помощью значений, которые должны иметь x и t при $\tau=0$. Здесь нельзя предположить, что $x=\xi$ для $\tau=0$, но можно функции $W(\xi)$, $V(\xi)$ определить таким образом, что формулы (64) будут представлять преобразование Лоренца, которое переводит тело в состояние покоя, т. е. следует положить

$$x = \alpha\xi + \gamma\tau, \quad t = \beta\xi + \delta\tau, \quad (65)$$

причем должно выполняться условие

$$\alpha^2 - c^2\beta^2 = 1, \quad \alpha\gamma - c^2\beta\delta = 0, \quad \gamma^2 - c^2\delta^2 = -1. \quad (66)$$

Поскольку в (62) одна из двух величин φ_t , φ_x зависит от t , то и другая должна зависеть от t . В этом случае интегрирование уравнения (62) легко выполнить с помощью преобразований Лежандра. А именно можно ввести величину

$$\varphi_t = p \quad (67)$$

в качестве независимой переменной наряду с x и из (67) вычислить t как функцию x и p . Затем вместо φ введем новую неизвестную функцию

$$\psi(p, x) = \varphi - pt,$$

так что

$$\psi_p = \varphi_t t_p - pt_p - t = -t, \quad \psi_x = \varphi_x + \varphi_t t_x - pt_x = \varphi_x. \quad (68)$$

Поэтому (62) переходит в следующее уравнение для $\psi(p, x)$:

$$p^2 - c^2\psi_x^2 = -c^2;$$

это уравнение можно сразу же проинтегрировать. Получим

$$\psi_x = \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}} = q, \quad \psi = qx - \omega(p),$$

где ω — произвольная функция.

Отсюда, дифференцируя по p и принимая во внимание (68), получаем

$$\frac{p}{c^2 q} x - \omega'(p) = -t. \quad (70)$$

Если вычислить отсюда p как функцию t и подставить в уравнение $\varphi = \psi + pt$, то имеем искомое общее решение (62)

$$\varphi = qx - \omega(p) + pt. \quad (71)$$

В силу (59) и (61) теперь очевидно, что

$$\frac{x_x}{t_x} = \frac{dx}{dt} = -\frac{\varphi_t}{\varphi_x}.$$

Отсюда следует, что каждое уравнение $\varphi = \text{const} = -\xi$ представляет собой мировую линию некоторой точки твер-

дого тела. Из (70) и (71) находим следующее выражение для мировых линий:

$$\frac{p}{c^2} x + qt = q\omega', \quad qx + pt = \omega - \xi, \quad (72)$$

или, решив эти уравнения относительно x и t , найдем

$$x = q(\omega - \xi) - pq\omega', \quad t = -\frac{p}{c^2}(\omega - \xi) + q^2\omega'. \quad (73)$$

Здесь уравнения, соответствующие мировым линиям твердого тела, получены благодаря тому, что x и t заданы как функции независимых переменных ξ , p . Обсудим теперь это положение.

Прежде всего следует заметить, что прямолинейное поступательное движение зависит только от одной произвольной функции некоторого аргумента $\omega(p)$. Поэтому можно сказать, что здесь, как и в старой кинематике, следует учитывать только одну степень свободы. Существенно при этом использование независимых переменных $p = x_\tau$, которые также и в дальнейшем имеют большое значение. Далее, когда $c = \infty$, уравнения (73) переходят в уравнения старой кинематики, соответствующие прямолинейному перемещению. В этом случае $q = \sqrt{1 + p^2/c^2}$ становится равным 1, а из второго уравнения (73) следует, что p зависит только от t для $c = \infty$, так что первое уравнение принимает вид

$$x = \xi + \alpha(t).$$

Наконец, перейдем к описанию мировых линий в плоскости x , t . Ясно, что (72) и (73) имеют вид преобразований Лоренца и их инверсии⁸, которые переводят переменные x , y в переменные $x = \omega - \xi$, $t = q\omega'$:

$$\begin{aligned} x &= qx + \frac{p}{c} ct, & x &= q\bar{x} - \frac{p}{c} c\bar{t}, \\ c\bar{t} &= \frac{p}{c} x + qct, & ct &= \frac{p}{c} \bar{x} + qc\bar{t}, \end{aligned} \quad (74)$$

потому что коэффициенты преобразований удовлетворяют в силу (60) условиям (66). Мы имеем, следовательно, некоторое зависящее от параметра p семейство преобразований

⁸ Преобразования, обратного преобразованию Лоренца. — Прим. пер.

Лоренца. Движение, или, скорее, соответствующий ему пучок мировых линий, можно описать следующим образом. Дадим ξ некоторое определенное значение ξ_1 , так что x и t будут, согласно уравнениям (73), явными функциями p , а сами уравнения будут описывать мировую линию точки ξ_1 . Компонента мирового вектора скорости по оси x равна p , а по оси t — q . Теперь с помощью данной кривой ξ_1 опишем весь набор кривых. Сделаем это следующим образом: проведем в некоторой точке p кривой нормальную

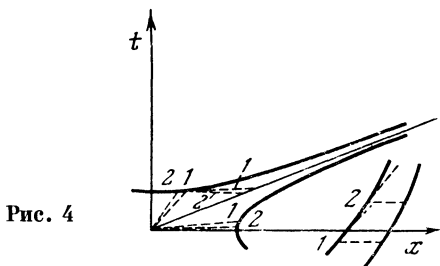


Рис. 4

(в смысле § 2) прямую, которая вместе с касательной составит x - и t -ось новой преобразованной системы координат. На оси x этой системы отложим отрезок $\xi_1 - \xi$. Сместим теперь систему координат вдоль кривой ξ_1 , так что точка ξ опишет мировую линию, соответствующую значению параметра, равному ξ . Получается, что все точки таких нормалей (или осей x), соответствующих данному значению p , будут иметь одинаковую скорость (рис. 4).

Итак, прямолинейное движение твердого тела происходит таким образом, что, если какая-либо точка (тела) переходит в состояние покоя, все остальные точки, испытав то же преобразование, переходят также в состояние покоя. Этим преобразованием, переводящим тело в состояние покоя, как раз и является (74). Прямые, соответствующие постоянной скорости $p = \text{const}$, всегда, за исключением равномерного движения, имеют огибающую, служащую границей равномерности. При заданных размерах тела кривизна мировой линии не может превышать определенного предела, и наоборот. Из этого следует, что твердое тело является обязательно конечным по всем направлениям и оно должно быть тем меньше, чем больше достигнутое им ускорение. В этом мы видим первое указание

на фундаментальное значение атомистики для новой динамики. Твердое тело содержит вещество с плотностью покоя ρ^* , причем эта плотность независима от ρ и есть функция только ξ , η , ζ , которую обозначим через $\rho_0(\xi, \eta, \zeta)$.

§ 5. Гиперболическое движение

Мы получим простейшее среди различных равномерных поступательных движений, если положим в (72) и (73) произвольную функцию $\omega=0$. Тогда имеем

$$x = -q\xi, \quad t = \frac{p}{c^2}\xi. \quad (75)$$

Если исключить отсюда p , то получим

$$x^2 - c^2t^2 = \xi^2. \quad (76)$$

Отсюда видно, что мировые линии в плоскости xt и в параллельных ей плоскостях $y=\eta$, $z=\zeta$ суть гиперболы, которые имеют в качестве асимптот прямые, соответствующие скорости света, проходящие через начало координат

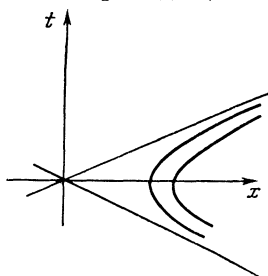


Рис. 5

и пересекающие ось x на расстоянии ξ от начала координат. Пучок таких гипербол (рис. 5) представляет собой движение, при котором твердое тело, двигаясь из бесконечности, приближается к начальной точке, поворачивается и снова удаляется в бесконечность, при этом его скорость сначала уменьшается от скорости света c до нуля и после поворота вновь возрастает до c . Это движение, аналогичное до некоторой степени равномерно ускоренному движению старой кинематики, назовем для краткости *гиперболическим движением*.

Так как начало координат выбрано произвольно, то гиперболы

$$(x - \alpha)^2 - c^2(t - \beta)^2 = \xi^2 \quad (77)$$

не представляют в действительности никакого другого движения. Скорости отличаются от нуля только при $t=0$. Итак, мы можем ограничиться формулами (75), (76).

Такое гиперболическое движение оказывается не только кинематически, но также и динамически простейшим. Это тесно связано с тем обстоятельством, что любая мировая линия в каждой своей точке P соприкасается с некоторой такой гиперболой, «гиперболой кривизны», что вектор, направленный из ее центра в точку P , по модулю равен $b=c^2/\xi$, представляет собой вектор ускорения в точке P мировой линии. Действительно, вычислим компоненты ускорения гиперболического движения. Прежде всего найдем

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} = 0. \quad (78)$$

Для вычисления x - и t -компонент примем во внимание уравнения

$$\begin{aligned} \xi_t &= -p, & p_t &= \frac{c^2 q^2}{\xi}, \\ \xi_x &= -q, & p_x &= \frac{pq}{\xi}. \end{aligned} \quad (79)$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} = p_\tau = p_x x_\tau + p_t t_\tau = \frac{pq}{\xi} p - \frac{c^2 q^2}{\xi} q.$$

Далее получаем

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} = b_x = -qb \quad (80)$$

и также

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} = b_t = \frac{p}{c^2} b, \quad (81)$$

где

$$b = \sqrt{b_x^2 - c^2 b_t^2} = \frac{c^2}{\xi} \quad (82)$$

— модуль ускорения.

Из (80)—(82) следует указанное выше утверждение.

Следовательно, ускорение, соответствующее каждой мировой линии гиперболического движения, постоянно по модулю; в этом оно аналогично равномерно-ускоренному движению старой механики (которое представляется

параболическими мировыми линиями). Следовательно, оно является простейшим движением и всякое другое движение может быть аппроксимировано с помощью гиперболических движений. Основываясь на этом, мы хотим в последующем более подробно исследовать динамику гиперболического движения и прежде всего попытаемся определить силу, с которой при этом движении электрически заряженное твердое тело действует само на себя. Результат можно будет рассматривать как приближенное решение для всех тех движений, при которых модуль вектора ускорения изменяется незначительно.

Глава вторая

Поле твердого электрона при гиперболическом движении

§ 6. Запаздывающие потенциалы и напряженности

Силы, возникающие при движении электрических зарядов и входящие в уравнения движения этих зарядов, выводятся с помощью вспомогательных величин — запаздывающих потенциалов и напряженностей. Мы хотим выписать выражения для этих величин, полезные в дальнейшем. Пусть электрический ток задан уравнениями (14) и начальное значение его плотности покоя (ср. § 3, (51)) $\rho_0(\xi, \eta, \zeta)$.

Тогда запаздывающие потенциалы выразятся так:

$$4\pi\Phi_x(x, y, z, t) = \iiint \left[\frac{\bar{\rho}_0 \bar{x}_\tau}{(x - \bar{x}) \bar{x}_\tau + (y - \bar{y}) \bar{y}_\tau + (z - \bar{z}) \bar{z}_\tau - c^2 (t - \bar{t}) \bar{t}_\tau} \right]_{h=0} \times d\bar{\xi} d\bar{\eta} d\bar{\zeta}, \quad (83)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$4\pi\Phi(x, y, z, t) = \iiint \left[\frac{c \bar{\rho}_0 \bar{t}_\tau}{(x - \bar{x}) \bar{x}_\tau + (y - \bar{y}) \bar{y}_\tau + (z - \bar{z}) \bar{z}_\tau - c^2 (t - \bar{t}) \bar{t}_\tau} \right]_{h=0} \times d\bar{\xi} d\bar{\eta} d\bar{\zeta},$$

при этом $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ и $\bar{x}_\tau, \bar{y}_\tau, \bar{z}_\tau, \bar{t}_\tau$ есть функции (14) и соответственно их производные по τ , зависящие от аргумен-

тов ξ , $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$; в квадратные скобки вместо τ следует подставить ее выражение через $x, y, z, t, \xi, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$, которое получается при решении (относительно τ) уравнения

$$h = (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2 - c^2(t - \bar{t})^2 = 0, \quad (84)$$

а именно следует выбрать такое однозначно определенное решение ⁹, для которого $t > \bar{t}$. В последующих параграфах будет кратко обсуждено, как выражение (83), которое, пожалуй, для непрерывных потоков в такой форме еще не употреблялось, связано с обычными формулами для запаздывающих потенциалов.

Электрическая напряженность \mathfrak{E} и магнитная \mathfrak{M} с помощью потенциалов задаются векторными уравнениями:

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z) - \text{grad } \Phi, \quad (85)$$

$$\mathfrak{M} = \text{rot} (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z).$$

Потенциалы (83) есть решения уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} \text{div } \Phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial t^2} - \Delta \Phi_x = \frac{\rho^*}{c} x_\tau, \quad (86)$$

.

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \Phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi = \rho^* t_\tau,$$

причем именно такие решения, для которых величина

$$\text{div } \Phi = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (87)$$

обращается в нуль.

Уравнения (86) есть уравнения Лагранжа для вариационной задачи относительно тех самых функций $\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z, \Phi$, для которых интеграл

$$W = \iiint \left\{ \frac{1}{2} (\mathfrak{M}^2 - \mathfrak{E}^2) - \frac{\rho^*}{c} (\Phi_x x_\tau + \Phi_y y_\tau + \Phi_z z_\tau) \right\} dx dy dz dt, \quad (88)$$

взятый по области G множества значений x, y, z, t , имеет экстремум; при этом величины тока и потенциалов на границах области G считаются заданными.

⁹ Это уравнение имеет одно и только одно такое решение, ибо скорость потока не может достигнуть скорости света. Ср.: Н. М и н к о w s k и, I. с. (Anm. p. 7).

§ 7. Сравнение выражений
для запаздывающих потенциалов

Можно заметить, что выражения (83) для потенциалов есть суперпозиция элементарных потенциалов, которые обуславливаются отдельными движущимися точками тока. Для последних, согласно Льенару и Вихерту, имеем

$$4\pi\varphi_x = \left[\frac{ew_x}{cr \left(1 - \frac{w_r}{c}\right)} \right]_{t-\bar{t}=\frac{r}{c}},$$

.

$$4\pi\varphi = \left[\frac{e}{r \left(1 - \frac{w_r}{c}\right)} \right]_{t-\bar{t}=\frac{r}{c}}.$$

Здесь e — заряд точки

$$x = \bar{x}(t), \quad y = \bar{y}(t), \quad z = \bar{z}(t), \tag{90}$$

образующей поле; далее,

$$r = \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2} \tag{91}$$

есть расстояние этой точки от точки x, y, z , в которой вычисляется воздействие;

$$w_r = \frac{1}{r} \{ (x - \bar{x})w_x + (y - \bar{y})w_y + (z - \bar{z})w_z \} \tag{92}$$

есть компонента скорости в направлении r ; в квадратные скобки следует подставить для t значение \bar{t} , которое получается из уравнения

$$t - \bar{t} = r/c. \tag{93}$$

Теперь мы будем рассматривать непрерывный поток; тогда мировую линию (90) следует заменить семейством мировых линий, для которого функции (90) приобретают вид (1) благодаря введению трех параметров ξ, η, ζ , и, кроме того, e следует заменить на плотность $\rho(\xi, \eta, \zeta)$. Тогда величины $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \varphi$ становятся еще и функциями ξ, η, ζ , и их можно проинтегрировать по всему пространству. При этом надо иметь в виду, что

$$dx dy dz = \Theta d\xi d\eta d\zeta,$$

а плотность ρ связывается с начальной плотностью ρ_0 с помощью функционального определителя Θ : $\rho_0 = \rho \Theta$

(см. § 3 (41)). Получающиеся выражения легко привести к виду (83). Для этого надо лишь записать уравнения точки, создающей поле, в виде

$$x = \bar{x}(\tau), \quad y = \bar{y}(\tau), \quad z = \bar{z}(\tau), \quad t = \bar{t}(\tau), \quad (94)$$

где τ — собственное время, а также заменить ρ на плотность покоя ρ^* . Тогда уравнение (93) переходит в

$$h = (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2 - c^2(t - \bar{t})^2 = 0, \quad (95)$$

из которого однозначно определяется τ при дополнительном условии $t > \bar{t}$.

Легко установить связь выражений (83) с обычно употребляемыми выражениями для потенциалов, которые записываются так:

$$4\pi\Phi_x = \iiint \frac{d\bar{x}d\bar{y}d\bar{z}}{r} \left[\frac{\rho w_x}{c} \right]_{\bar{t}=t-\frac{r}{c}},$$

.

$$4\pi\Phi = \iiint \frac{d\bar{x}d\bar{y}d\bar{z}}{r} [\rho]_{\bar{t}=t-\frac{r}{c}}.$$

При этом предполагается, что поток представляется уравнениями в форме (1). Далее,

$$r = \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2},$$

а в квадратные скобки в качестве аргументов необходимо подставить \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} , $\bar{t}=t - r/c$.

Интегрирование в (96) следует распространить на все заряды, а так как заряды движутся, интеграл должен вычисляться в пределах, зависящих от времени. Переход от выражений (96) к выражениям (83) заключается теперь только в том, чтобы получить интегралы с постоянными пределами. Это можно сделать следующим образом.

Заменим в уравнениях потока (1) t на $\bar{t}=t - r/c$. Тогда получим уравнения

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} \{ \xi, \eta, \zeta, \bar{t}(x, \bar{y}, \bar{z}, t) \}, \\ \bar{y} &= \bar{y} \{ \xi, \eta, \zeta, \bar{t}(x, \bar{y}, \bar{z}, t) \}, \\ \bar{z} &= \bar{z} \{ \xi, \eta, \zeta, \bar{t}(x, \bar{y}, \bar{z}, t) \}, \\ \bar{t} &= \bar{t} \{ \xi, \eta, \zeta, \bar{t}(x, \bar{y}, \bar{z}, t) \}, \end{aligned} \quad (97)$$

которые связывают \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} с ξ , η , ζ и, очевидно, задают то самое преобразование, которое приводит интегралы (96) к постоянным пределам, потому что эти преобразования представляют \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} как функции их начальных значений для указанного в (96) момента времени. Чтобы вычислить функциональный определитель преобразования (97)

$$\Delta = \left[\frac{\partial (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial (\xi, \eta, \zeta)} \right]_{t=\text{const}}, \quad (98)$$

обозначим производную от \bar{x} по ξ при постоянном \bar{t} через $(\partial \bar{x} / \partial \xi)_t$, при постоянном t — через $(\partial \bar{x} / \partial \xi)_t$. Дифференцируя уравнения (97) по ξ , η , ζ , получим систему из трех уравнений с одинаковыми коэффициентами. Например, при дифференцировании по ξ

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} \right)_t = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} \right)_t + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}} \left\{ \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} \right)_t + \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \right)_t + \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi} \right)_t \right\},$$

$$\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \right)_t = \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \right)_t + \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} \left\{ \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} \right)_t + \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \right)_t + \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi} \right)_t \right\},$$

$$\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi} \right)_t = \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi} \right)_t + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}} \left\{ \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} \right)_t + \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \right)_t + \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi} \right)_t \right\},$$

или

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} \right)_t \left(1 + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{x}} \right) + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \right)_t \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{y}} + \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi} \right)_t \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} \right)_t,$$

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} \right)_t \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \right)_t \left(1 + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{y}} \right) + \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi} \right)_t \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \right)_t,$$

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} \right)_t \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \right)_t \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{y}} + \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi} \right)_t \left(1 + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{z}} \right) = \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi} \right)_t.$$

К этой системе уравнений добавятся еще две системы, в которых ξ заменено соответственно на η и ζ . Если обозначить матрицы через

$$P = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} \right)_t & \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \right)_t & \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi} \right)_t \\ \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} \right)_t & \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} \right)_t & \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \eta} \right)_t \\ \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \zeta} \right)_t & \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \zeta} \right)_t & \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} \right)_t \end{pmatrix}, \quad (99)$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial r}{\partial \bar{x}} & \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial r}{\partial \bar{y}} & \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial r}{\partial \bar{z}} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial r}{\partial \bar{x}} & 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial r}{\partial \bar{y}} & \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial r}{\partial \bar{z}} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial r}{\partial \bar{x}} & \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial r}{\partial \bar{y}} & 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial r}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix}, \quad (100)$$

$$R = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{\xi}}\right)_{\bar{t}} & \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{\xi}}\right)_{\bar{t}} & \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\xi}}\right)_{\bar{t}} \\ \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{\eta}}\right)_{\bar{t}} & \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{\eta}}\right)_{\bar{t}} & \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\eta}}\right)_{\bar{t}} \\ \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{\zeta}}\right)_{\bar{t}} & \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{\zeta}}\right)_{\bar{t}} & \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}}\right)_{\bar{t}} \end{pmatrix}, \quad (101)$$

то можно свести наши девять уравнений в матричное уравнение

$$PQ = R.$$

Отсюда следует соотношение между детерминантами:

$$|P| |Q| = |R|. \quad (102)$$

Из (98) очевидно, что

$$|P| = \Delta. \quad (103)$$

Далее, из (42) (см. § 3):

$$|R| = [\Theta]_{\bar{t}=t-\frac{r}{c}}. \quad (104)$$

Наконец, легко видеть, что

$$\begin{aligned} |Q| &= 1 + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial r}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial r}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial r}{\partial \bar{z}} \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{c} \left(\bar{w}_x \frac{\partial r}{\partial \bar{x}} + \bar{w}_y \frac{\partial r}{\partial \bar{y}} + \bar{w}_z \frac{\partial r}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned}$$

и согласно (92) можно написать

$$Q = \left[1 - \frac{w_r}{c} \right]_{\bar{t}=t-\frac{r}{c}}. \quad (105)$$

Тогда имеем

$$\Delta = \left[\frac{\Theta}{1 - \frac{w_r}{c}} \right]_{\bar{t}=t-\frac{r}{c}}. \quad (106)$$

Если это значение подставить в (96) и учесть, что по § 3, (41) можно подставить

$$\rho\Theta = \rho_0(\xi, \eta, \zeta),$$

то получим

$$4\pi\Phi_x = \iiint \rho_0(\xi, \eta, \zeta) \left[\frac{w_x}{cr \left(1 - \frac{w_r}{c}\right)} \right]_{t-t-\frac{r}{c}} d\xi d\eta d\zeta, \dots \dots \dots (107)$$

$$4\pi\Phi = \iiint \rho_0(\xi, \eta, \zeta) \left[\frac{1}{r \left(1 - \frac{w_r}{c}\right)} \right]_{t-t-\frac{r}{c}} d\xi d\eta d\zeta.$$

Если заменить w_x через x_τ/t_τ и т. д., как на с. 315, то формулы (107) сразу же переходят в выражения (83). В этих формулах содержится фактически только начальная плотность ρ_0 .

§ 8. Вычисление потенциалов при гиперболическом движении

Вычислим теперь потенциалы (83) для гиперболического движения

$$x = -q\xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta, \quad t = \frac{p}{c^2}\xi. \quad (108)$$

Так как $y_\tau = z_\tau = 0$, то $\Phi_y = \Phi_z = 0$. В (108) мы имеем в качестве независимой переменной наряду с ξ, η, ζ также и величину p (вместо τ), поэтому уравнение (84) $h=0$ можно рассматривать как уравнение для p . Оно запишется в виде

$$(x + \bar{q}\xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 - c^2 \left(t - \frac{\bar{p}\xi}{c^2} \right)^2 = 0. \quad (109)$$

Если ввести обозначения

$$s = x^2 - c^2 t^2 = \xi^2, \\ k = -\frac{1}{2\xi} (s + \xi^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2), \quad (110)$$

то (109) можно записать следующим образом:

$$\bar{p}t + \bar{q}x = k,$$

кроме того, $\bar{p}^2 - c^2\bar{q}^2 = -c^2$. Из этих уравнений можно вычислить \bar{p} и притом выбрать такое значение \bar{p} , для которого $t > \bar{t}$. Если подставить во второе уравнение значение

$$\bar{p} = \frac{k - \bar{q}x}{t},$$

следующее из первого, то получим квадратное уравнение для \bar{q}

$$\bar{q}^2 - \bar{q} \frac{2kx}{s} = -\frac{k^2 + c^2t^2}{s}.$$

Отсюда следует

$$\bar{q} = \frac{1}{s}(kx \pm ct\sqrt{k^2 - s}).$$

Если мы обозначим для краткости положительный корень через

$$B = \sqrt{k^2 - s} \quad (111)$$

и вычислим \bar{p} , то получим

$$\bar{p} = -\frac{c}{s}(kct \pm Bx), \quad \bar{q} = \frac{1}{s}(kx \pm Bct).$$

Здесь надо выбрать тот знак, который соответствует наименьшему значению \bar{t} . Так как $\bar{t} = \bar{p}\bar{\xi}/c^2$, то получается

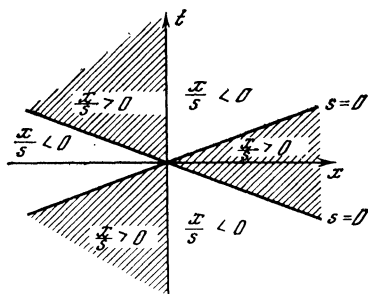


Рис. 6

следующий результат (при этом полагаем, что электрон движется вправо от начала координат $x=0$, т. е. $\bar{\xi} > 0$): для всех точек, для которых $x/s > 0$, следует взять знак «плюс»; для всех точек, для которых $x/s < 0$, следует взять знак «минус». Распределение тех и других точек изображено на рис. 6.

В дальнейшем мы будем считать, что, как правило, $x/s > 0$; только такие точки могут быть внутренними точ-

ками электрона при гиперболическом движении. Для них, следовательно, надо взять положительное значение корня B . Если же все-таки придется рассматривать и такие точки, для которых $x/s < 0$, то нам всюду надо будет заменить $+B$ на $-B$. Итак, имеем

$$\begin{aligned}\bar{p} &= -\frac{c}{s}(kct + Bx), \\ \bar{q} &= -\frac{1}{s}(kx + Bct).\end{aligned}\tag{112}$$

Вычислим теперь знаменатель под знаком интегралов в (83) для этих значений \bar{p} , \bar{q} . Так как $y_\tau = z_\tau = 0$, $x_\tau = p$, $t_\tau = -q$, то он примет вид

$$(x + \bar{q}\xi) \bar{p} + c^2 \left(t - \frac{\bar{p}}{c^2} \xi \right) \bar{q} = x\bar{p} + c^2 t \bar{q} = -cB.$$

Подставляя это в (83), получим

$$\begin{aligned}4\pi\Phi_x(x, y, z, t) &= \iiint \frac{\bar{p}_0}{sB} (kct + Bx) d\xi d\eta d\bar{z}, \\ &\dots\dots\dots \\ 4\pi\Phi(x, y, z, t) &= \iiint \frac{\bar{p}_0}{sB} (kx + Bct) d\xi d\eta d\bar{z}.\end{aligned}\tag{113}$$

Полагая

$$\begin{aligned}\psi_1(s) &= \frac{1}{s} \iiint \bar{p}_0 d\xi d\eta d\bar{z} = \frac{e}{s}, \\ \psi_2(s) &= \frac{1}{s} \iiint \bar{p}_0 \frac{k}{B} d\xi d\eta d\bar{z},\end{aligned}\tag{114}$$

где e — полный заряд электрона, получим

$$\begin{aligned}4\pi\Phi_x &= \psi_1(s) x + \psi_2(s) ct, \\ &\dots\dots\dots \\ 4\pi\Phi &= \psi_2(s) x + \psi_1(s) ct,\end{aligned}\tag{115}$$

где ψ_1 и ψ_2 — функции, выражающие зависимость s только от x и t . Эти потенциалы удовлетворяют, в частности, уравнению $\text{div } \Phi = 0$; так как $\partial s / \partial x = 2x$, $\partial s / \partial t = -2c^2 t$, имеем

$$\begin{aligned}4\pi \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} &= \psi_1 + 2\psi_1' x^2 + 2\psi_2' c t x, \\ &\dots\dots\dots \\ 4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \psi_1 c - 2\psi_2' c^2 t x - 2\psi_1' c^3 t^2,\end{aligned}$$

следовательно ¹⁰,

$$\operatorname{div} \Phi = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} (\psi_1 + s' \psi_1').$$

Но $\psi' = -e/s^2$, следовательно,

$$\operatorname{div} \Phi = 0. \quad (116)$$

Для дальнейшего использования перепишем выражение для потенциалов (115) иначе. Учтем при этом, что, согласно (108), $x = -q\xi$, $t = (p/c^2)\xi$ и, следовательно, $s = \xi^2$.

Введем вместо ψ_1 , ψ_2 следующие обозначения:

$$4\pi\bar{\Phi}_x = -\xi\psi_1 = -\frac{e}{\xi},$$

$$4\pi\bar{\Phi} = -\xi\psi_2 = -\frac{1}{\xi} \iiint \bar{\rho}_0 \frac{k}{B} d\xi d\eta d\bar{\zeta}. \quad (117)$$

Тогда вместо (115) можно написать

$$\Phi_x = q\bar{\Phi}_x - \frac{p}{c}\bar{\Phi}, \quad \Phi = -\frac{p}{c}\bar{\Phi}_x + q\bar{\Phi}. \quad (118)$$

Функции Φ_x , Φ связаны со вспомогательными функциями $\bar{\Phi}_x$, $\bar{\Phi}$ с помощью тех же самых преобразований Лоренца, которые для твердого тела связывают состояния движения и покоя (с. 308 (74)). Назовем поэтому Φ_x , Φ потенциалами покоя. Они являются функциями только от ξ , η , ζ и не зависят больше от p . Из соотношений (118) вытекает, что поле электрона движется вместе с ним. Для наблюдателя, движущегося вместе с электроном, потенциалы покоя зависят только от координат ξ , η , ζ , относительно которых электрон покоится. Выпишем выражение для скалярного потенциала покоя Φ в явном виде:

$$4\pi\bar{\Phi}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{\xi} \iiint \bar{\rho}_0 \frac{1}{r} \frac{r^2 + 2\xi\bar{\xi}}{\sqrt{r^2 + 4\xi\bar{\xi}}} d\xi d\eta d\bar{\zeta}, \quad (119)$$

где

$$r^2 = (\xi - \bar{\xi})^2 + (\eta - \bar{\eta})^2 + (\zeta - \bar{\zeta})^2. \quad (120)$$

Если точка, для которой вычисляются потенциалы, лежит в области $x/s < 0$, то следует выбрать вместо знака «минус» знак «плюс». При $\xi = 0$ $\bar{\Phi}_x$ и Φ обращаются в бес-

¹⁰ В оригинале пишется $\log \Phi$. Символ в науке не прижился. — Прим. пер.

конечность. В этом случае гиперболическое движение становится вырожденным. Тем не менее напряженности, как мы увидим, остаются всюду конечными и определенными во всем множестве x, y, z, t .

§ 9. Напряженности при гиперболическом движении

Вычислим теперь напряженности из выражений (115) для потенциалов в соответствии с формулами (85). Получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_x}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, & \mathfrak{E}_y &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, & \mathfrak{E}_z &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ \mathfrak{M}_x &= 0, & \mathfrak{M}_y &= \frac{\partial \Phi_x}{\partial z}, & \mathfrak{M}_z &= -\frac{\partial \Phi_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (121)$$

Найдем также из (115), принимая во внимание (110),

$$4\pi \frac{\partial \Phi_x}{\partial t} = c\psi_2 - 2\psi_1'c^2tx - 2\psi_2'c^3t^2,$$

$$4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \psi_2 + 2\psi_2'x^2 + 2\psi_1'ctx.$$

Наконец, имеем

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{1}{2\pi} (\psi_2 + s\psi_2'). \quad (122)$$

Отсюда следует, что \mathfrak{E}_x зависит, кроме η, ζ , только от s , т. е. от ξ , но не от p . Поэтому z -компонента напряженности электрического поля остается постоянной вдоль мировой линии электрона.

Если вычислить \mathfrak{E}_x , то получится

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{1}{\pi} \iiint \bar{\rho}_0 \frac{\xi^2 (r^2 - 2\xi(\xi - \bar{\xi}))}{r^3 (r^2 + 4\xi\bar{\xi})^{3/2}} d\xi d\bar{\eta} d\bar{z}, \quad (123)$$

где r определяется выражением (120).

\mathfrak{E}_x не обращается в бесконечность при $\xi=0$. Оказывается возможным продолжить \mathfrak{E}_x вдоль прямых $\xi=0$, т. е. вдоль прямых $x+ct=0$ и $x-ct=0$.

При этом в области $x/s < 0$ знаменатель, тождественно равный B^3 , должен изменить свой знак на противоположный. Затем следует полагать, что действительные значения ξ в уравнениях (108) соответствуют гиперболам, нормальным¹¹ к оси x в плоскости xt , а чисто мнимые значе-

¹¹ Т. е. симметричным относительно этой оси. — Прим. пер.

ния ξ изображают гиперболы, нормальные к оси t . Выражения в скобках в числителе и знаменателе для \mathfrak{E}_x можно записать в виде

$$\xi^2 - \bar{\xi}^2 + (\eta - \bar{\eta})^2 + (\zeta - \bar{\zeta})^2,$$

$$[\xi^2 + \bar{\xi}^2 + (\eta - \bar{\eta})^2 + (\zeta - \bar{\zeta})^2]^2 - 4\xi\bar{\xi}^2.$$

В них входит ξ только в квадрате, так что они и для чисто мнимых значений ξ являются действительными. Далее, знаменатель не может равняться нулю в области интегрирования, т. е. для $\xi^2 > 0$; если подставить $\xi = i\alpha$, то он становится равным

$$[-\alpha^2 + \xi^2 + (\eta - \bar{\eta})^2 + (\zeta - \bar{\zeta})^2]^2 + 4\alpha^2\xi^2 > 0.$$

Таким образом, \mathfrak{E}_x определено во всей xt -плоскости.

Наконец, вычислим остальные компоненты поля.

Имеем

$$\mathfrak{E}_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{x}{4\pi} \frac{\partial\psi_2}{\partial\eta} = q \frac{\xi}{4\pi} \frac{\partial\psi_2}{\partial\eta},$$

$$\mathfrak{E}_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{x}{4\pi} \frac{\partial\psi_2}{\partial\zeta} = q \frac{\xi}{4\pi} \frac{\partial\psi_2}{\partial\zeta},$$

$$\mathfrak{M}_y = \frac{\partial\Phi_x}{\partial z} = \frac{ct}{4\pi} \frac{\partial\psi_2}{\partial\zeta} = \frac{p}{c} \frac{\xi}{4\pi} \frac{\partial\psi_2}{\partial\zeta},$$

$$\mathfrak{M}_z = -\frac{\partial\Phi_x}{\partial y} = -\frac{ct}{4\pi} \frac{\partial\psi_2}{\partial\eta} = -\frac{p}{c} \frac{\xi}{4\pi} \frac{\partial\psi_2}{\partial\eta}.$$

Теперь легко находим

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial\eta} = -8 \iiint \bar{\rho}_0 \frac{\xi^2 (\eta - \bar{\eta})}{r^3 (r^2 + 4\xi\bar{\xi})^{3/2}} d\xi d\bar{\eta} d\bar{\zeta},$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial\zeta} = -8 \iiint \bar{\rho}_0 \frac{\xi^2 (\zeta - \bar{\zeta})}{r^3 (r^2 + 4\xi\bar{\xi})^{3/2}} d\xi d\bar{\eta} d\bar{\zeta}.$$

Таким образом, y - и z -компоненты напряженности зависят, кроме η, ζ , не только от выражения $\xi^2 = x^2 - c^2t^2$, но также и от x и t ; поэтому их можно рассматривать как функции от ξ, η, ζ, p .

В областях, где $x/s < 0$, в выражениях (126) надо снова изменить знак.

Очевидно, что y - и z -компоненты напряженности не обращаются в бесконечность при $\xi=0$. Мы не будем подробно останавливаться на процессах, протекающих в поле в неподвижной системе координат. Однако сразу же видно,

что \mathcal{E}_y и \mathcal{E}_z обращаются в нуль при $x=0$ и силовые линии в этом случае параллельны оси x ; \mathcal{M}_y и \mathcal{M}_z обращаются в нуль при $t=0$; это происходит в то мгновение, когда электрон поворачивает назад и поэтому в этот момент покоится. Отсюда следует, что поле электрона в действительности движется вместе с ним, так как магнитное поле мгновенно исчезает в тот момент, когда электрон останавливается.

§ 10. Запись волнового уравнения, потенциалов и напряженностей в движущейся системе координат

Уравнения (118), которые мы получили для запаздывающих потенциалов, дают возможность записать волновые уравнения (86) в координатной системе, сопутствующей электрону, т. е. привести их к независимым переменным ξ, η, ζ .

Преобразуем с целью упрощения вычислений вместо дифференциальных уравнений (86) вариационную задачу (88).

Прежде всего нам надо преобразовать компоненты напряженностей поля (121).

По (79)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_x}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_x}{\partial \xi} \xi_t + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_x}{\partial p} p_t = - \frac{\partial \Phi_x}{\partial \xi} \frac{p}{c} + \frac{\partial \Phi_x}{\partial p} \frac{cq^2}{\xi},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial \Phi}{\partial p} p_x = - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} q + \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{pq}{\xi}.$$

Введем теперь потенциалы покоя $\bar{\Phi}_x, \bar{\Phi}$ с помощью известных нам соотношений (118)

$$\Phi_x = q\bar{\Phi}_x - \frac{p}{c} \bar{\Phi},$$

$$\Phi = - \frac{p}{c} \bar{\Phi}_x + q\bar{\Phi}.$$

Тогда, очевидно,

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial \xi} = q \frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \xi} - \frac{p}{c} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = - \frac{p}{c} \frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \xi} + q \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi},$$

и аналогичные выражения получим для производных по η, ζ .

Кроме того:

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial p} = \frac{p}{c^2 q} \bar{\Phi}_x - \frac{1}{c} \bar{\Phi} + q \frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial p} - \frac{p}{c} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial p},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{1}{c} \bar{\Phi}_x + \frac{p}{c^2 q} \bar{\Phi} - \frac{p}{c} \frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial p} + q \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial p}.$$

В результате получаем

$$-\mathfrak{E}_x = \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_x}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi} \left(\bar{\Phi} - cq \frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial p} \right),$$

$$-\mathfrak{E}_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{p}{c} \frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \eta} + q \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta},$$

$$-\mathfrak{E}_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{p}{c} \frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \zeta} + q \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \zeta}.$$

$$\mathfrak{M}_x = 0,$$

$$\mathfrak{M}_y = \frac{\partial \Phi_x}{\partial z} = q \frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \zeta} - \frac{p}{c} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \zeta},$$

$$-\mathfrak{M}_z = \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} = q \frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \eta} - \frac{p}{c} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta}.$$

Отсюда

$$\mathfrak{M}^2 - \mathfrak{E}^2 = -\left[\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \left(\bar{\Phi} - cq \frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial p} \right) \right]^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \eta} \right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \zeta} \right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \zeta} \right)^2.$$

Кроме того, имеем

$$\frac{\rho^*}{c} (\Phi_x x_\tau + \Phi_y y_\tau + \Phi_z z_\tau - \Phi t_\tau) =$$

$$= -\rho^* \left(\frac{p}{c} \Phi_x + q \Phi \right) = -\rho^* \bar{\Phi}.$$

Наконец, функциональный определитель принимает вид

$$\frac{\partial(x, y, z, t)}{\partial(\xi, \eta, \zeta, p)} = -\frac{\xi}{c^2 q}.$$

Поэтому условие вариационной задачи (88) запишется следующим образом:

$$W = \iiint \left\{ \frac{\xi}{2c^2 q} \left[\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \left(\bar{\Phi} - cq \frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial p} \right) \right)^2 - \right. \right.$$

$$\left. - \left[\left(\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \eta} \right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta} \right)^2 \right] - \left[\left(\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \zeta} \right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \zeta} \right)^2 \right] \right\} +$$

$$+ \frac{\xi}{c^2 q} \rho^* \bar{\Phi} \} d\xi d\eta d\zeta dp = \min.$$

Отсюда получаем дифференциальные уравнения электродинамики, записанные в системе координат, участвующей в гиперболическом движении,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \left(\bar{\Phi} - cq \frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial p} \right) \right\} - \frac{\xi}{q} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_z}{\partial \zeta^2} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \xi \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} + \bar{\Phi} - cq \frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial p} \right\} + \xi \left\{ \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \zeta^2} \right\} - \\ - \left\{ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \left(\bar{\Phi} - cq \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial p} \right) \right\} = \rho^* \xi. \end{aligned} \quad (133)$$

Этим уравнениям должны удовлетворять также выражения (117) для потенциалов покоя, полученные в § 8. Но эти потенциалы не зависят от p , так же как и плотность $\rho^* = \rho_0(\xi, \eta, \zeta)$. Следовательно, они являются «статическими потенциалами» по отношению к ускоренной координатной системе. Опуская производные по p , получим из (139) дифференциальные уравнения электростатики в системе отсчета, участвующей в гиперболическом движении

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_z}{\partial \zeta^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} \right) + \xi \left(\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{\bar{\Phi}}{\xi} = \rho_0 \xi. \end{aligned} \quad (134)$$

Но, кроме того, потенциалы $\bar{\Phi}_x, \bar{\Phi}$ удовлетворяют уравнению $\text{div } \bar{\Phi} = 0$. Это уравнение преобразуется в

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \left(\bar{\Phi}_x - qc \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial p} \right) = 0. \quad (135)$$

Если $\bar{\Phi}_x, \bar{\Phi}$ не зависят от p , то имеем

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \xi} + \frac{\bar{\Phi}_x}{\xi} = 0. \quad (136)$$

Теперь мы хотим показать, что выражения (117) или (119) удовлетворяют соответственно уравнениям (134) и (136).

Для $\bar{\Phi}_x = -\frac{1}{4\pi} \frac{e}{\xi}$ это ясно с самого начала; удовлетворяются и первые уравнения (134) и (136).

Для $\bar{\Phi}$ мы используем его выражение (119). Покажем, что это выражение — точный аналог электростатического потенциала

$$4\pi U(\xi, \eta, \zeta) = \iiint \frac{\bar{\rho}}{r} d\xi d\eta d\zeta$$

и что оно играет ту же роль в дифференциальном уравнении

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} \right) + \xi \left(\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{\bar{\Phi}}{\xi} = f(\xi, \eta, \zeta), \quad (137)$$

что и обычный потенциал U в уравнении

$$\Delta U = f(\xi, \eta, \zeta).$$

Прежде всего, симметричная относительно двух видов переменных ξ, η, ζ и $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ функция

$$\frac{1}{r} \frac{1}{\xi \bar{\xi}} \frac{r^2 + 2\xi \bar{\xi}}{\sqrt{r^2 + 4\xi \bar{\xi}}}$$

есть решение однородного уравнения (137) ($f=0$), которое соответствует решению $1/r$ для $\Delta u=0$. В том, что она действительно удовлетворяет уравнению, можно убедиться с помощью вычислений, правда, довольно длинных. Кроме того, она имеет для $r=0$, т. е. $\xi=\bar{\xi}, \eta=\bar{\eta}, \zeta=\bar{\zeta}$, сингулярность порядка $1/r$, и множитель при $1/r$ становится равным $1/\xi$ для $r=0$. Конечно, при этом должны быть исключены значения $\xi=0, \bar{\xi}=0$. Эти значения, естественно, сами являются особыми точками для дифференциального уравнения (137). Из такого поведения нашей функции, являющейся общим решением однородного уравнения, следует, как и в теории потенциала, что если f определена для $\xi \geq 0$, то выражение

$$4\pi \bar{\Phi}(\xi, \eta, \zeta) = \iiint \frac{f(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})}{r} \frac{1}{\xi \bar{\xi}} \frac{r^2 + 2\xi \bar{\xi}}{\sqrt{r^2 + 4\xi \bar{\xi}}} d\bar{\xi} d\bar{\eta} d\bar{\zeta}$$

удовлетворяет неоднородному уравнению (137) (только тогда, разумеется, когда ξ отлично от нуля). Если подставить сюда выражение f через его значение $\rho_0 \xi$, которое соответствует по (134) движущимся зарядам, то приходим снова к (119). Различные знаки в различных окрестностях точки, создающей поле, определяются из тех соображений, что потенциалы $\Phi_x, \bar{\Phi}$, составленные из $\bar{\Phi}_x, \bar{\Phi}$, должны быть в неподвижной координатной системе запаздывающими потенциалами, но не опережающими. Итак, можно однозначно определить потенциалы покоя $\bar{\Phi}_x, \bar{\Phi}$ с помощью дифференциальных уравнений (134), (136), учитывая их поведение на бесконечности, по аналогии с обычным ста-

тическим потенциалом. Однако я не буду здесь подробно обсуждать этот вопрос.

Теперь заметим, что $\bar{\Phi}_x$ не зависит от p, η, ζ , так что из (127), (128) для напряженности поля получим следующие выражения через потенциалы покоя:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_x &= \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} + \frac{\bar{\Phi}}{\xi}, & \mathfrak{M}_x &= 0, \\ \mathfrak{E}_y &= -q \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta}, & \mathfrak{M}_y &= -\frac{p}{c} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \zeta}, \\ \mathfrak{E}_z &= -q \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \zeta}, & \mathfrak{M}_z &= \frac{p}{c} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta}.\end{aligned}\tag{138}$$

Легко видеть, что эти выражения идентичны (122), (124), (125).

Введем, следуя Минковскому, кроме потенциалов покоя, еще и *напряженности покоя*¹².

Электрическая напряженность покоя определяется так:

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{E}}_x &= t_\tau \mathfrak{E}_x + \frac{1}{c} (y_\tau \mathfrak{M}_z - z_\tau \mathfrak{M}_y), \\ \bar{\mathfrak{E}}_y &= t_\tau \mathfrak{E}_y + \frac{1}{c} (z_\tau \mathfrak{M}_x - x_\tau \mathfrak{M}_z), \\ \bar{\mathfrak{E}}_z &= t_\tau \mathfrak{E}_z + \frac{1}{c} (x_\tau \mathfrak{M}_y - y_\tau \mathfrak{M}_x).\end{aligned}\tag{139}$$

К этому добавится выражение для *электрической работы покоя*

$$A = x_\tau \bar{\mathfrak{E}}_x + y_\tau \bar{\mathfrak{E}}_y + z_\tau \bar{\mathfrak{E}}_z.\tag{139*}$$

Далее, *магнитная напряженность покоя* определяется так:

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{M}}_x &= t_\tau \mathfrak{M}_x - \frac{1}{c} (y_\tau \mathfrak{E}_z - z_\tau \mathfrak{E}_y), \\ \bar{\mathfrak{M}}_y &= t_\tau \mathfrak{M}_y - \frac{1}{c} (z_\tau \mathfrak{E}_x - x_\tau \mathfrak{E}_z), \\ \bar{\mathfrak{M}}_z &= t_\tau \mathfrak{M}_z - \frac{1}{c} (x_\tau \mathfrak{E}_y - y_\tau \mathfrak{E}_x)\end{aligned}\tag{140}$$

¹² Под этим следует понимать работу сил электрического поля в системе координат, связанной с электроном, т. е. в системе, относительно которой электрон покоится. Аналогично следует понимать и остальные родственные термины. Дословный перевод соответствующих немецких определений сохранен для краткости. — *Прим. пер.*

и магнитная работа покоя

$$B = x_{\tau} \mathfrak{M}_x + y_{\tau} \mathfrak{M}_y + z_{\tau} \mathfrak{M}_z. \quad (140^*)$$

Если сюда подставить выражение (138) и учесть, что

$$x_{\tau} = p, \quad t_{\tau} = -q, \quad y_{\tau} = z_{\tau} = 0,$$

то получим

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{E}}_x &= -q \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} + \frac{\bar{\Phi}}{\xi} \right), & \bar{\mathfrak{M}}_x &= 0, \\ \bar{\mathfrak{E}}_y &= \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta}, & \bar{\mathfrak{M}}_y &= 0, \\ \bar{\mathfrak{E}}_z &= \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \zeta}, & \bar{\mathfrak{M}}_z &= 0, \\ \bar{A} &= p \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} + \frac{\bar{\Phi}}{\xi} \right), & B &= 0. \end{aligned} \quad (141)$$

Магнитная напряженность покоя и работа покоя, как и следовало ожидать, равны нулю. А электрическая напряженность покоя и работа покоя выводятся только из потенциалов покоя.

Из выражения (119) для $\bar{\Phi}$ находим следующие явные выражения для электрической напряженности покоя:

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{E}}_x &= \frac{q}{\pi} \iiint \bar{\rho}_0 \frac{\xi^2 [r^2 - 2\xi(\xi - \xi)]}{r^3 (r^2 + 4\xi\xi)^{3/2}} d\xi d\eta d\zeta, \\ \bar{\mathfrak{E}}_y &= -\frac{2\xi}{\pi} \iiint \bar{\rho}_0 \frac{\xi^2 (\eta - \eta)}{r^3 (r^2 + 4\xi\xi)^{3/2}} d\xi d\eta d\zeta, \\ \bar{\mathfrak{E}}_z &= -\frac{2\xi}{\pi} \iiint \bar{\rho}_0 \frac{\xi^2 (\zeta - \zeta)}{r^3 (r^2 + 4\xi\xi)^{3/2}} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (142)$$

и работа покоя \bar{A} получается из $\bar{\mathfrak{E}}_x$ с помощью замены q на p . Эти выражения справедливы во всяком случае и внутри самого электрона.

Если сравнить выражения (141) с уравнениями (108), то получим, что величины

$$\bar{\mathfrak{E}}_x, \bar{\mathfrak{E}}_y, \bar{\mathfrak{E}}_z, \frac{1}{c^2} \bar{A},$$

среди которых только величины

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} + \frac{\bar{\Phi}}{\xi}, \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \zeta} \quad \text{и} \quad p, \quad q$$

зависят от ξ , η , ζ , составлены точно так же, как и x , y , z , t из ξ , η , ζ и p , q .

Отсюда следует, что

$$\bar{\mathfrak{E}}_x, \bar{\mathfrak{E}}_y, \bar{\mathfrak{E}}_z \frac{1}{c^2} \bar{A}$$

при преобразованиях Лоренца преобразуются точно так же, как x , y , z , t , т. е. как пространственно-временной вектор первого рода.

Глава третья

ДИНАМИКА НЕДЕФОРМИРУЕМОГО ЭЛЕКТРОНА ПРИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ

§ 11. Равнодействующие силы и уравнения движения

Известно, что произведение плотности покоя на электрическую напряженность покоя, определенную в предыдущих параграфах, является пондеромоторной силой поля и ее следует рассматривать как аналог обычных механических сил.

В абрагамовской теории твердого электрона, так же как и в лоренцовской теории «деформируемого» электрона, уравнения движения свободного электрона с обычной массой строятся следующим образом. С помощью интегрирования по пространству, заполненному электроном для некоторого момента t , находятся равнодействующие пондеромоторных сил как внешних, так и обусловленных полем, создаваемым самим электроном (или соответственно равнодействующие моментов, если учитываются вращения), и затем сумма этих равнодействующих полагается равной нулю.

Естественно, такой метод не соответствует избранному нами пути. Ибо построенные таким образом равнодействующие, очевидно, зависят от выбранной системы отсчета. Мы должны попытаться найти такие уравнения движения, которые инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца.

Уже один вид выражений (141) и (142) для напряженностей покоя, определяемых самим электроном, и заме-

чение на с. 330 об их поведении при преобразованиях Лоренца указывают, каким способом надо строить равнодействующую, чтобы уравнения движения были инвариантными относительно преобразований Лоренца, т. е. чтобы сама равнодействующая преобразовывалась как пространственно-временной вектор первого рода. Мы будем понимать под равнодействующей некоторого силового поля интеграл от произведения покоящегося заряда и напряженности покоя по состоянию покоя электрона, т. е. по ξ, η, ζ при постоянном ρ .

Мы не будем останавливаться на том, как определить равнодействующие моментов в случае, когда допустимы вращения.

Далее, условимся, что уравнения движения недеформируемого электрона строятся на основе следующего предположения: недеформируемый электрон движется так, что равнодействующая его собственного поля равна и противоположна равнодействующей внешнего поля.

Прежде чем вычислять равнодействующую собственного поля для гиперболического движения, сделаем некоторое замечание о законах сохранения энергии и импульса.

В соответствии с основными уравнениями электромагнитного поля справедливы, как известно, следующие тождества:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} = \rho^* \bar{\mathcal{E}},$$

.

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial t} = \rho^* \bar{A}.$$

При этом

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{1}{2} (\mathcal{E}_x^2 - \mathcal{E}_y^2 - \mathcal{E}_z^2) + \frac{1}{2} (\mathcal{M}_x^2 - \mathcal{M}_y^2 - \mathcal{M}_z^2), \\ X_y &= \mathcal{E}_x \mathcal{E}_y + \mathcal{M}_x \mathcal{M}_y, \\ X_z &= \mathcal{E}_x \mathcal{E}_z + \mathcal{M}_x \mathcal{M}_z, \end{aligned} \tag{144}$$

к чему следует добавить две системы из трех уравнений для соответствующих компонент максвелловских напряженностей. Далее,

$$\mathcal{S} = c[\mathcal{E}\mathcal{M}] \tag{145}$$

руемый именно вследствие того самого закона, согласно которому по изложенной здесь теории равномерно движущееся твердое тело кажется деформированным из некоторой покоящейся системы отсчета. Если здесь определять равнодействующие и т. д. как интегралы при постоянном t , то получаются совершенно различные значения, в зависимости от системы отсчета, положенной в основу. Уравнения (143), конечно, инвариантны, т. е. сохраняют свою форму, когда координаты подвергаются преобразованиям Лоренца, но лишь тогда, когда одновременно некоторым образом преобразуются и величины $X_x, \dots, \mathfrak{E}_x, \dots, W$. Это обстоятельство вызывает кажущееся появление энергии деформации и количества движения, на что обратили внимание Планк и Абрагам. Поэтому в релятивистской кинематике величина равнодействующей, полученная с помощью интегрирования при постоянном t , а также величины работы, напряженности и излучения не имеют никакого смысла. Отсутствием учета этого обстоятельства тотчас же объясняются противоречия в теории Лоренца.

Мы можем сказать, что локализация (в прежнем смысле) энергии и импульса в эфире не соответствует принципу относительности. Но для вывода уравнения движения нам вовсе не нужно подробно останавливаться на законах сохранения энергии и импульса. Более того, данного на с. 331 определения вполне достаточно. Закон сохранения энергии тогда добавится к грем уравнениям движения как зависимое от них высказывание, что сумма работ равнодействующих сил внешнего и внутреннего поля всегда равна нулю.

§ 12. Равнодействующая внутренних сил при гиперболическом движении

Получим теперь из выражений (141) или (142) результирующие внутренних сил покоя. Если обозначить элемент объема $d\xi d\eta d\zeta$ через $d\omega$, то получим

$$K_x^{(i)} = \int \rho_0 \bar{\mathfrak{E}}_x d\omega = \frac{q}{\pi} \iint \rho_0 \bar{\rho}_0 \frac{\xi^2 [r^2 - 2\xi \cdot \xi - \xi^2]}{r^3 (r^2 + 4\xi\xi)^{3/2}} d\omega d\bar{\omega},$$

$$K_y^{(i)} = \int \rho_0 \bar{\mathfrak{E}}_y d\omega = -\frac{2}{\pi} \iint \rho_0 \bar{\rho}_0 \frac{\xi \xi^2 (\eta - \bar{\eta})}{r^3 (r^2 + 4\xi\xi)^{3/2}} d\omega d\bar{\omega},$$

$$K_z^{(i)} = \int \rho_0 \bar{\mathfrak{E}}_z d\omega = -\frac{2}{\pi} \iint \rho_0 \bar{\rho}_0 \frac{\xi \xi^2 (\zeta - \bar{\zeta})}{r^3 (r^2 + 4\xi\xi)^{3/2}} d\omega d\bar{\omega}.$$

Суммарная работа $K^{(i)}$ получается из $K_x^{(i)}$ с помощью замены q на $-p$.

Рассмотрим прежде всего интеграл $K_x^{(i)}$. Возьмем вместо координаты ξ , которая отсчитывается ст точки пересечения асимптот гиперболического движения, координату какой-либо точки a электрона и поэтому заменим ξ на $a + \xi$, ξ на $a + \xi$.

В дальнейшем покажем, что электрон должен иметь центр. Выберем этот центр в качестве начала координат. Тогда под интегралом будет стоять выражение

$$\frac{(a + \xi)^2 [r^2 - 2(a + \xi)(\xi - \xi)]}{r^3 [r^2 + 4(a + \xi)(a + \xi)]^{3/2}},$$

которое нам предстоит исследовать.

Согласно уравнению (82), ускорение центра a равно

$$b = c^2/a. \quad (149)$$

Подставим его в написанное выше выражение, которое можно теперь рассматривать как функцию ускорения

$$f = \frac{(c^2 + \xi b) [br^2 - 2(c^2 + \xi b)(\xi - \xi)]}{r^3 [r^2 b^2 + 4(c^2 + \xi b)(c^2 + \xi b)]^{3/2}}. \quad (150)$$

Если обозначить это выражение как функцию точек $P(\xi, \eta, \zeta)$, $\bar{P}(\xi, \eta, \zeta)$, через $f(P, \bar{P})$, то можно разложить f на симметричную и кососимметричную части:

$$f(P, \bar{P}) = f_1(P, \bar{P}) + f_2(P, \bar{P}),$$

где

$$f_1 = \frac{1}{2} [f(P, \bar{P}) + f(\bar{P}, P)] - \text{симметричная,}$$

$$f_2 = \frac{1}{2} [f(P, \bar{P}) - f(\bar{P}, P)] - \text{кососимметричная часть.}$$

Тогда ясно, что интеграл $\iint \rho_0 \bar{\rho} f_2(P, \bar{P}) d\omega d\bar{\omega}$ тождественно равен нулю.

Следовательно, можно ограничиться рассмотрением только f_1 . Тогда получим

$$f_1 = \frac{br^2 [(c^2 + \xi b)^2 + (c^2 + \xi b)^2] + 2(\xi - \xi)(c^2 + \xi b)(c^2 + \xi b)}{2r^3 [r^2 b^2 + 4(c^2 + \xi b)(c^2 + \xi b)]^{3/2}}. \quad (151)$$

Тем самым шестикратный интеграл $K_x^{(i)}$ становится пропорциональным b . Если bq обозначить, согласно (80),

через b_x , а в выражении работы $K^{(i)}$ br заменить на $c^2 b_t$, то можно написать

$$K_x^{(i)} = -\mu b_x, \quad K^{(i)} = -c^2 \mu b_t. \quad (152)$$

При этом масса покоя μ зависит только от ускорения центра a , т. е. от величины b :

$$\begin{aligned} \mu = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\rho \bar{\rho}}{r^3 [r^2 b^2 + 4(c^2 + \xi b)(c^2 + \xi b)^{3/2}] \times} \\ \times \{r^2 [c^2 + \xi b]^2 + (c^2 + \xi b)^2 + 2(\xi - \bar{\xi})^2 \times \\ \times (c^2 + \xi b)(c^2 + \bar{\xi} b)\} d\omega d\bar{\omega}. \end{aligned} \quad (153)$$

Так как b зависит только от первоначальной координаты центра a , то оно постоянно при любом гиперболическом движении. Поэтому и μ при любом гиперболическом движении является постоянной, зависящей только от формы электрона и распределения его заряда.

Из (151) получим уравнение движения для координаты x , положив сумму внутренней силы $K_x^{(i)}$ и внешней $K_x^{(a)}$ равной нулю; точно так же $K^{(i)} + K^{(a)} = 0$ есть уравнение для энергии. Отсюда

$$\mu b_x = K_x^{(a)}, \quad \mu b_t = \frac{1}{c^2} K^{(a)}. \quad (154)$$

Теперь остается показать, что можно задать внешнее поле таким образом, что оно будет в состоянии поддерживать устойчивое гиперболическое движение. Это можно осуществить с помощью электрической силы E_x , действующей в направлении x и не зависящей от времени и места приложения. Тогда сила покоя по (139) запишется в виде $\bar{E}_x = t_\tau E_x = -qE_x$, а работа покоя $A = x_\tau E_x = pE_x$, и если \bar{E}_x постоянна, то интегрирование $\rho_0 \bar{E}_x$ и ρA по ξ, η, ζ дает

$$K_x^{(a)} = -qeE_x, \quad K^{(a)} = peE_x.$$

Эта сила в состоянии поддерживать гиперболическое движение с ускорением b , если выбрать

$$E_x = \frac{\mu}{e} b. \quad (155)$$

Если внешнее силовое поле меняется лишь незначительно, так что внутри электрона его можно считать постоянным, то возникающее движение будет незначи-

тельно отличаться от гиперболического. Если мы также и в этом случае будем считать справедливыми уравнения (154), то должны пренебречь излучением.

Следовательно, для незначительно изменяющихся, но как угодно больших ускорений, имеем следующие уравнения движения и энергии:

$$\mu \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} = t_\tau e E_x, \quad \mu \frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} = \frac{1}{c^2} x_\tau e E_x, \quad (156)$$

причем x и t берутся относительно центра электрона.

Эти уравнения инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца и имеют форму уравнений механики, описывающих движения материальной точки.

Будем считать μ константой (справедливость этого допущения обсуждается в следующем параграфе) и введем «обычную» массу с помощью соотношения

$$m = \mu t_\tau = \frac{\mu}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad (157)$$

затем, заменив дифференцирование по τ дифференцированием по t , получим

$$\frac{\partial m w_x}{\partial t} = e E_x, \quad \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{1}{c^2} e E_x w_x. \quad (158)$$

Первое из этих уравнений — уравнение движения, записанное в форме, аналогичной ньютоновским уравнениям старой механики, второе — уравнение энергии. Величина $c^2 m$ соответствует кинетической энергии старой механики. Зависимость массы m от скорости задается формулой Лоренца (157). Более существенной, чем эта зависимость, которая справедлива в новой кинематике также и для обычной (не электромагнитной) массы, является зависимость массы покоя μ от величины ускорения в соответствии с формулой (153). В следующем параграфе мы обсудим ее подробнее.

Но прежде мы еще должны рассмотреть y - и z -компоненты внутренней силы.

Если применить к $K_y^{(i)}$ те же рассуждения, что и к $K_x^{(i)}$, благодаря которым мы разделили подынтегральные выражения на симметричную и кососимметричную части, то получим

$$K_y^{(i)} = - \frac{2}{\pi} b \iint \rho_0 \bar{\rho}_0 \frac{(\eta - \bar{\eta})(\xi - \bar{\xi})(c^2 + b\xi)(c^2 + b\bar{\xi})}{r^3 \{r^2 b^2 + 4(c^2 + b\xi)(c^2 + b\bar{\xi})\}} d\omega d\bar{\omega}. \quad (159)$$

Аналогичное выражение справедливо для $K_z^{(i)}$. Если предположить ускорение b малым, то имеем

$$[K_y^{(i)}]_0 = - \frac{b}{4\pi c^2} \iint \rho_0 \bar{\rho}_0 \frac{(\eta - \bar{\eta})(\xi - \bar{\xi})}{r^3} d\omega d\bar{\omega}. \quad (160)$$

Теперь будем полагать, что при исчезающе малом ускорении электрон не порождает никаких боковых сил¹³.

В противном случае уже при квазистационарном переносе были бы необходимы внешние боковые силы, для того чтобы поддерживать прямолинейное движение. Это, однако, противоречит наблюдениям над катодными лучами и лучами Беккереля, которые без всяких внешних боковых воздействий распространяются прямолинейно.

Но если $[K_y^{(i)}]_0 = 0$, то распределение заряда должно быть симметричным по отношению к плоскостям $\xi = 0$ или $\eta = 0$. Точно так же это распределение должно быть симметричным и относительно плоскостей $\xi = 0$ или $\zeta = 0$, если $[K_z^{(i)}]_0 = 0$.

Далее, так как направление движения электрона является произвольным, то распределение заряда должно быть симметрично относительно любой плоскости, проходящей через центр. Следовательно, заряд располагается концентрическими слоями вокруг центра.

Из результатов наблюдений, говорящих, что для поддержания прямолинейного квазистационарного движения не требуется никаких внешних боковых сил, следует, что электрон имеет центр, вокруг которого заряд располагается концентрическими слоями.

Но раз так, то сразу же из (159) получается, что $K_y^{(i)}$ обращается в нуль для любых значений b ; то же самое верно и для $K_z^{(i)}$. Поэтому окончательный вывод можно сформулировать следующим образом.

Электрон, имеющий в гиперболическом движении какое угодно ускорение, не порождает никаких боковых сил.

Тем самым с помощью электродинамики получена недостающая часть закона инерции.

Этот результат можно распространить и на движения с незначительно меняющимся ускорением, рассматривая то же приближение, в котором для таких движений справедливы уравнения (156) и (158). Тот факт, что из поведе-

¹³ Т. е. сил, направленных под углом к направлению движения. В этом случае $K_y^{(i)}$ и $K_z^{(i)}$ равны нулю. — Прим. пер.

ния электрона при квазистационарном переносе можно сделать вывод о существовании в нем центра, вокруг которого концентрическими слоями располагается заряд, является дальнейшим подтверждением атомистической природы электричества. Я думаю, что никакая другая теория не демонстрировала наличие столь тесной связи между атомистикой и принципами электродинамики.

§ 13. Электродинамическая масса покоя

Прежде всего вычислим массу покоя для квазистационарных движений, т. е. для исчезающе малых величин b . Если подставить в выражение (153) $b=0$, то оно переходит в

$$\mu_0 = \frac{1}{8\pi c^2} \left\{ \iiint \frac{\rho_0 \bar{\rho}_0}{r} d\omega d\bar{\omega} + \iiint \rho_0 \bar{\rho}_0 \frac{(\xi - \bar{\xi})^2}{r^3} \right\} d\omega d\bar{\omega}.$$

Первый из этих двух интегралов — электростатическая энергия электрона

$$4\pi U = \iiint \frac{\bar{\rho}_0 \rho_0}{r} d\omega d\bar{\omega}. \quad (161)$$

Второй интеграл вследствие центральной симметрии электрона можно представить в виде $\iiint \rho_0 \bar{\rho}_0 \frac{(\eta - \bar{\eta})^2}{r^3} d\omega d\bar{\omega}$ или в виде

$$\iiint \bar{\rho}_0 \rho_0 \frac{(\zeta - \bar{\zeta})^2}{r^3} d\omega d\bar{\omega}.$$

Если просуммировать эти три выражения, то получим снова $4\pi U$. Поэтому второй интеграл равен $\frac{4}{3}\pi U$, и для массы покоя при квазистационарном движении получаем выражение

$$\mu_0 = \frac{2}{3c^2} U. \quad (162)$$

Если, в частности, электрон — равномерно заряженный шар радиуса R , то получим

$$\mu_0 = \frac{1}{6\pi} \frac{e^2}{Rc^2}, \quad (163)$$

где e — полный заряд.

Этот результат совпадает со значениями, даваемыми всеми другими теориями ¹⁴.

Если движение уже неквазистационарно, то следует использовать для μ общее выражение (153). Тогда можно μ разложить по степеням b

$$\mu = \mu_0 + b\mu_1 + b^2\mu_2 + \dots \quad (164)$$

Докажем, что коэффициент μ_1 при b равен 0. Для него находим следующее выражение:

$$\mu_1 = -\frac{1}{16\pi c^2} \iiint \rho_0 \bar{\rho}_0 \frac{(\xi + \bar{\xi})(r^2 + (\xi - \bar{\xi})^2)}{r^3} d\omega d\bar{\omega}.$$

Так как заряд электрона распределен по концентрическим слоям, то каждому набору значений $\xi, \eta, \zeta; \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ соответствуют значения $-\xi, \eta, \zeta; -\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$, для которых подынтегральное выражение принимает противоположные значения. Следовательно, $\mu_1 = 0$.

Далее, находим, что

$$\begin{aligned} \mu_2 = -\frac{1}{32\pi c^6} \iiint \rho_0 \bar{\rho}_0 \left\{ 3r + 2 \frac{\xi^2 + \bar{\xi}^2 + 6\xi\bar{\xi}}{r} + \right. \\ \left. + \frac{(\xi - \bar{\xi})^2 (3\xi^2 + 3\bar{\xi}^2 + 10\xi\bar{\xi})}{r^3} \right\} d\omega d\bar{\omega}. \end{aligned} \quad (165)$$

Эта величина чрезвычайно мала по сравнению с μ_0 , ибо при бесконечном убывании радиуса электрона R μ_2 сходится, как и R , к нулю. Кроме того, в формулу для μ_2 скорость света входит в шестой степени в знаменателе. Поэтому мы можем сказать, что в разложении в ряд для массы покоя

$$\mu = \mu_0 + b^2\mu_2 + \dots \quad (166)$$

коэффициент при μ_2 настолько мал по сравнению с μ_0 , что при рассмотрении ускорения квадратичный член практически уже не должен учитываться.

Поэтому во всех практических случаях массу покоя можно рассматривать как константу. Ее значение μ_0 выражается посредством формулы (162).

¹⁴ Ср.: В. М. А б р а х а м. Theorie d. Elektrizität 2. 2 Aufl., p. 179, Formel (117 c). Там расчет ведется в других единицах.

Наша формула переходит в абрагамовскую $\mu_0 = \frac{4}{5} \frac{e^2}{Rc^2}$, если заменить e через $\sqrt{4\pi} e$.

Тем самым построены основы динамики прямолинейного движущегося электрона с помощью электромагнитной теории. Естественно, область применимости этой теории можно расширить благодаря тому, что прямолинейные движения можно заменить равномерным переносом в нужном направлении, так как для этого нужно лишь перейти от одной координатной системы к другой с помощью преобразований Лоренца, относительно которых наши уравнения движения остаются инвариантными. Теория описывает поэтому отклонение электронов в электрическом поле, которое имеет иное направление, чем скорость электронов, но которое не слишком быстро меняется во времени и пространстве. С другой стороны, эта теория не годится непосредственно для описания отклонений в магнитном поле, однако легко видеть, что в случае квазистационарных движений она справедлива также и для этих отклонений.

К ДИСКУССИИ О ТВЕРДОМ ТЕЛЕ В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

С тех пор как Эйнштейн и Планк привели в соответствие с принципом относительности динамику материальной точки, целый ряд авторов попытался сделать дальнейший шаг, а именно, соответствующим образом преобразовать также и динамику твердого тела. Поскольку старые кинематические условия твердости несовместимы с преобразованиями Лоренца, то прежде всего встал вопрос о создании нового определения твердого тела. Впервые такое определение было дано М. Борном¹, который тем самым положил начало разработки всей этой проблемы. После того как Эренфест², Герглотц³ и Нетер⁴ показали, что это первое определение допускает лишь три степени свободы для движения твердого тела, он опубликовал еще второе определение, которое дает уже шесть степеней свободы. В заключение своей критики борновского определения Нетер предложил определить твердое тело как структуру, обладающую девятью степенями свободы. Эта мысль хорошо согласуется с тем представлением мира, которое предложил Минковский. Ведь остающаяся всегда конгруэнтной трехмерная геометрическая структура будет в четырехмерном пространстве обладать числом степеней свободы, равным $4+3+2+1=10$; однако из общего числа пространственно-временных переменных следует вычесть один произвольный параметр, служащий для различения положения, так что в результате остается лишь девять степеней свободы.

Все три предложения содержат одну общую мысль (которую следует признать безусловно правильной), что

* M. L a u e. — Phys. Zs., 1911, 12, 85. Пер. И. Д. Рожанского.

¹ M. B o r n. — Ann. d. Phys., 1909; 30, 1; Götting. Nachr., 1910, 161; W. V. I g n a t o w s k i. — Ann. d. Phys., 1910, 33, 607.

² P. E h r e n f e s t. — Phys. Zs., 1909, 10, 918; 1910, 11, 1127.

³ G. H e r g l o t z. — Ann. d. Phys., 1910, 31, 393.

⁴ F. N o e t h e r. — Ann. d. Phys., 1910, 31, 919.

в противоположность бесконечно большому числу степеней свободы деформируемого тела, твердое тело может обладать лишь конечным числом их (при этом, само собой разумеется, тело мыслится как некий континуум). Теперь мы покажем, что принцип относительности исключает эту возможность на основе динамических соображений и поэтому любая попытка в этом направлении является бесперспективной. Однако, чтобы устранить возможные недоразумения, следует подчеркнуть, что в определенных условиях тело, конечно, может двигаться без изменения формы, отнесенной к движущей вместе с ним системе; это доказывается хотя бы на примере равномерно ускоренного (гиперболического) движения. Ведь и в классической гидродинамике какая-то частица жидкости может подчас двигаться таким образом, как если бы она была твердой. Однако ни для какого тела такое движение не может быть наиболее общим возможным движением; наоборот, мы покажем на примере, что с любым телом могут происходить такие процессы, когда число кинематических степеней свободы оказывается бесконечно большим.

При этом будем исходить из положения, которое было сформулировано еще Эйнштейном⁵ в той форме, что для всех физических действий распространение со скоростью, превышающей скорость света, является исключенным. Мы положим в основу рассмотрения четырехмерный мир Минковского (где $u=ct$ является четвертой координатой), в котором каждая мировая точка определяет место и время какого-то события, и выскажем следующее утверждение: все события, которые могут рассматриваться как действия некоторого события, описываемого мировой точкой O , представлены мировыми точками последующего конуса или мировыми точками по ту сторону O , а все события, которые могут быть причинами события O , представлены мировыми точками предшествующего конуса или мировыми точками, лежащими по эту сторону O . *Точки промежуточной области не могут находиться ни в какой причинной связи с O .* Доказывается это утверждение следующим образом. Точка P промежуточной области может быть по отношению к O предшествующей или следующей во времени точкой, в зависимости от выбора

⁵ A. Einstein. — Ann. d. Phys., 1905, 17, 891.

системы отсчета. Таким образом, закон природы, который должен связать события O и P , в одной части систем представит O в качестве причины, а P в качестве следствия, а в другой — P в качестве причины, а O в качестве следствия. Этому, однако, противоречит принцип относительности, согласно которому законы природы во всех системах должны иметь одну и ту же форму.

Теперь предположим, что некоторое тело сначала покоится в системе K^0 ; это означает, что мировые линии точек этого тела являются параллельными прямыми. Лишь от мировой точки O приводящая в O мировая линия начинает постепенно отклоняться от своего прежнего направления. Это возмущение будет иметь своим следствием соответствующие возмущения в ходе всех других мировых линий, но лишь начиная с того момента, когда эти линии войдут в последующий конус от O . До этого они будут находиться в промежуточной области, или даже по эту сторону O , и таким образом не могут оказаться под воздействием возмущения в точке O .

Подобные возмущения могут возникнуть не только в одной точке O , но и в n точках O_i , лежащих в некотором плоском пространстве $u_0 = U$. В этом случае всегда будет пространство $u_0 = U + \Delta U$ ($\Delta U > 0$), в котором его n сечений с последующими конусами точек O_i еще не перекрываются, но, наоборот, полностью исключаются. Движение тела в момент времени

$$t_0 = \frac{U + \Delta U}{c}$$

будет тогда, очевидно, иметь n степеней свободы. Часть тела, не принадлежащая ни к одному из сечений, будет покоиться в системе K^0 , в то время как в частях, представленных сечениями, будет превалировать одно движение, не зависящее от других возмущений, которое, разумеется, обладает по крайней мере одной степенью свободы. Число n точек возмущения может быть сколь угодно большим; таким образом, число кинематических степеней свободы тела не имеет верхней границы.

В ньютоновской механике имеется, как известно, и другое определение твердости, еще лучше соответствующее физической сути дела; согласно этому определению, твердое тело рассматривается как предельный случай деформируемого тела, обладающего очень большими ко-

эффицисентами упругости. Этот граничный переход можно осуществить и в теории относительности; правда, он приведет не к твердому, а лишь к очень слабо деформируемому телу, которое при этом, может быть, будет обладать весьма простыми свойствами. Во всяком случае, эта задача — и тут мы переходим к выводу, уже сделанному Планком⁶, — может быть решена лишь на основе теории упругости, приведенной в соответствие с теорией относительности.

Необходимость приписывать каждому телу, какова бы ни была его природа, возможность изменения формы может быть наглядным образом пояснена с помощью примера, которым в устных беседах пользовался Эйнштейн и который был приведен Зоммерфельдом в дискуссии на собрании естествоиспытателей в Кенигсберге⁷. При этом мы будем пользоваться все время одной и той же системой счета. В этой системе покоится линейка, в то время как другая линейка, составляющая с первой угол α , движется со скоростью перпендикулярно ее направлению. Точка пересечения обеих линеек передвигается вдоль первой из них со скоростью $v = q/\sin\alpha$, причем, если даже q имеет весьма скромную величину (например 1 см/сек), мы можем путем выбора достаточно малого α получить скорость v , превышающую скорость света. Этот чисто геометрический вывод не зависит ни от какой физической теории. Противоречит ли такое положение дела эйнштейновскому положению, что физические действия не могут распространяться со сверхсветовой скоростью?

Разумеется, нетрудно установить в различных точках покоящейся линейки такие устройства, которые, срабатывая в тот момент, когда над ними проходит точка пересечения с другой линейкой, приводили бы к тем или иным физическим событиям. Это, однако, нисколько не противоречит упомянутому выше положению Эйнштейна. Потому что эти события не находятся друг с другом в причинно-следственной связи, но все они являются следствиями причин, вызываемых равномерным движением второй линейки. Например, мы можем удалить любое

⁶ M. Planck. — Phys. Zs., 1910, 11, 294.

⁷ Phys. Zs., 1910, 11, 975. Я не могу не упомянуть, что неоднократно обсуждал эти вопросы с Зоммерфельдом.

количество установленных устройств, тем не менее оставшиеся будут и в дальнейшем функционировать так же, как и раньше.

По другому обстояло бы дело, если бы можно было реализовать следующий случай. В какую-то точку B покоящейся линейки мы снова помещаем одно из названных устройств. Первоначально покоится также и вторая линейка; на этой стадии пересечение будем считать совпадающим с точкой A первой линейки. Однако вслед за этим в A происходит какое-то событие, которое становится причиной того, что вторая линейка практически моментально начинает двигаться по всей своей длине с определенной выше скоростью q . Точка пересечения пробегает в этом случае покоящуюся линейку, будучи сигналом события в A , и произведенное этим движением событие в B есть действие причины, каковой следует считать событие в A ; в этом случае перенос от A к B совершается со сверхсветовой скоростью v .

Почему подобный эксперимент не может быть осуществлен? Дело в том, что механизм переноса в этом случае неизбежно не срабатывает. Вторая линейка, которая в результате исходящего из A импульса должна быть мгновенно приведена в движение, не сможет остаться прямой, но выгнется в точке A . Скорость, с которой исходящее из A возмущение первоначального состояния будет передаваться другими точками линейки, сама не может превысить скорость света, поэтому удаленные части линейки будут вначале находиться в покое, пока за какое-то время возмущение не дойдет и до них. Результат, к которому мы пришли выше, а именно $v > c$, справедлив лишь для таких движений, при которых линейка остается прямой, а для только что описанного эксперимента этот результат недостижим. Теорию этого эксперимента можно математически разработать лишь на основе теории упругости.

Здесь имеется далеко идущая аналогия со случаем распространения света, уже рассмотренным Зоммерфельдом (см. цит. соч.). Чисто периодические, а следовательно, неограниченные во времени ряды волн не могут служить сигналом для наступления какого-либо события. Тем самым то обстоятельство, что при определенных условиях (например, в диспергирующих средах или в аномальных областях спектра) фазовая скорость регулярных

синусоидальных волн может оказаться большей c , еще не означает противоречия с теорией относительности. С другой стороны, обрезанный (с одной стороны или с обеих сторон) ряд волн — а в более общем случае любое нарушение регулярности колебаний — может представлять собою некий сигнал. Однако во всех подобных случаях фронт возмущения распространяется точно со скоростью c , а само возмущение бывает вначале настолько малым, что его главная, заметная часть в большинстве случаев приходит позднее.

Неограниченной строго периодической последовательности волн соответствует в нашем механическом примере равномерное, а следовательно, и неограниченное во времени движение линейки; нарушению же регулярной периодичности колебаний соответствует ускорение при переходе из состояния покоя в состояние движения (а в более общем случае — любое изменение скорости). Процессы первого рода в обоих рассмотренных примерах непригодны для того, чтобы быть сигналами; наоборот, процессы второго рода могут служить ими, однако они передаются в лучшем случае со скоростью света.

К ВОПРОСУ О ТРАКТОВКЕ ИГНАТОВСКИМ БОРНОВСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА*

Для большей ясности я позволю себе констатировать:

1. Может ли тело, удовлетворяющее борновскому определению твердости, перейти из состояния покоя в состояние равномерного вращения? Я, Герглотц и Нетер¹ показали: *нет!* Игнатовский утверждал², что из его вычислений следует ответ: *да*. Мои возражения³ вынудили его признать⁴: а) что из его вычислений, относящихся к этому вопросу, не следует ничего подобного, б) что его утверждение неверно само по себе.

2. Может ли борновское тело выполнять криволинейно-поступательные движения? Герглотц и Нетер показали: *да*. Игнатовский утверждал, что из его вычислений вытекает возможность только прямолинейно-поступательных движений. Письменное возражение Нетер вынудило его признать: а) что из его вычислений, относящихся к этому вопросу, не следует ничего подобного, б) что его утверждение неверно само по себе⁵.

3. Допустим, что процесс сигнализации Ω происходит таким образом, что ряд (покоящихся друг по отношению к другу) наблюдателей B_1 мог бы сделать следующее высказывание: с помощью процесса Ω мы можем во всех направлениях посылать друг к другу сигналы со скоростью c , превышающей скорость света. Означало ли бы это для некоторого соответствующим образом движущегося наблюдателя «телеграфирование в прошлое»? Эйнштейн, с простотой и ясностью, которые должны были бы устранить любые дальнейшие недоразумения в этом вопросе, показал⁶: *да*. Вопреки редакционному предупреждению со

* Phys. Zs., 1911, 12, 412. Пер. И. Д. Рожанского.

¹ P. Ehrenfest. — Phys. Zs., 1909, 10, 918; G. Herglotz. — Ann. d. Phys., 1910, 31, 393; F. Noether. — Ann. d. Phys., 1910, 31, 607.

² Ann. d. Phys., 1910, 33, 607.

³ Phys. Zs., 1910, 11, 1127.

⁴ Phys. Zs., 1911, 12, 164.

⁵ Ann. d. Phys., 1911, 34, 373.

⁶ Jahrb. d. Radioaktiv, 1907, 4, 411.

стороны В. Вина⁷, Игнатовский опубликовал свое противоположное мнение, которое, очевидно, неверно.⁸

В своей работе «Твердое тело и принцип относительности» Игнатовский не получил никаких новых результатов, за исключением сформулированных выше трех неверных утверждений. После этого можно понять, что автор — оставляя рассмотрение слишком четко определяемого «релятивистски-твердого» тела — переходит теперь⁹ к весьма спорной области «релятивистски-упругого» тела. Имеют ли ряды формул, опубликованные до сих пор Игнатовским, какое-либо отношение к программе Планка, на которую он неоднократно ссылается? Это можно будет, по-видимому, установить в не очень далеком будущем¹⁰.

⁷ См. прим. к § 6 в работе Игнатовского, 1910, 33, 607.

⁸ Графическое представление в плоскости Минковского ($x, \tau=ct$) позволяет легко обозреть положение вещей. Фундаментальная координатная система $Ox_2, O\tau_2$ выбирается с точки зрения наблюдателя B_2 . $O\tau_1$ — «мировая линия» наблюдателя B_1 , зарегистрированная наблюдателем B_2 . Ox_1 — совокупность всех мировых точек, которые, с точки зрения наблюдателя B_1 , одновременны с мировой точкой O ($\tau_1=0$), OP и ON — линии, изображающие путь двух сигналов, о которых B_1 мог бы сказать: «я сигнализирую из O в обе стороны со скоростью, значительно превышающей скорость света» (ведь OP и ON примерно совпадают с «линией одновременности» наблюдателя B_1 , т. е. с его точки зрения они распространяются «почти с бесконечной скоростью»). Относительно пары мировых точек N и O наблюдатели B_1 и B_2 могли бы сделать следующие высказывания: B_1 — событие O ($\tau_1=0$) является причиной N (τ_1 при $ON_1 > 0$), B_2 — событие N ($\tau_2=ON_2 < 0$) является причиной O ($\tau_2=0$). Это следствие допущения существования сигналов, распространяющихся со сверхсветовой скоростью, есть именно то, на что обратил внимание Эйнштейн в указанной работе и что в недавнее время стало обозначаться выражением «телеграфирование в прошлое». Если бы Игнатовский рассмотрел выводы § 6 своей работы не только для случая бесконечно большой, но также для случая «почти бесконечно большой» скорости, и проследил распространение противоположно направленных сигналов из средней точки его стержня, он увидел бы, что все, что он писал в § 6 о замечании Эйнштейна по поводу сверхсветовой скорости и что он докладывал в Кенигсберге, — неверно. О том же, что специальное устройство, которое Игнатовский приводит в этом месте своей работы в качестве примера сигнализации, вообще не может считаться сигнализацией, показал уже Лауэ (Phys. Zs., 1911, 12, 85).

⁹ Phys. Zs., 1911, 12, 164.

¹⁰ То, что В. Варичак написал в Phys. Zs. (1911, 12, 168) относительно движущихся борновских тел, представляется мне неверным. В целях уяснения этого вопроса и сокращения дискуссии, я хочу достичь взаимопонимания с ним в процессе частной переписки, с тем чтобы уже после этого мы смогли опубликовать совместную заметку об истинном положении дела.

К ТРАКТОВКЕ
БОРНОВСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТВЕРДОСТИ
(ОТВЕТ П. ЭРЕНФЕСТУ)*

По поводу заметки П. Эренфеста ¹ о моей работе ² я хотел бы сказать следующее. Я совсем не намеревался дать в ней объяснение перехода от состояния покоя к состоянию равномерного вращения цилиндра. Мое замечание по этому поводу, которое встретило возражение П. Эренфеста ³ и которое я взял назад ⁴, не имело никакого отношения к главной цели моей работы и поэтому не должно было рассматриваться как ее результат. Что касается моего замечания в отношении прямолинейного переносного движения, на которое обратил мое внимание Ф. Нетер и которое я исправил ⁵, то оно основывалось на непонимании с моей стороны того обстоятельства, что под криволинейным переносным движением в теории относительности понимают нечто другое, чем в обычной механике.

Поскольку эти недоразумения были таким образом исчерпаны, меня очень удивило, что Эренфест снова к ним возвращается.

Главной целью моей работы ⁶ был элементарный вывод борновского условия твердости; одновременно с этим я хотел показать значение синхронных измерений. Потому что, когда мы последовательно измеряем любой движущийся элемент объема, мы можем составить о нем некоторое суждение в каждый данный момент лишь постольку, поскольку мы его измеряем синхронно. В связи с этим

* Phys. Zs., 1911, 12, 606. Пер. И. Д. Рожанского.

¹ Phys. Zs., 1911, 12, 412.

² Ann. d. Phys., 1910, 33, 607.

³ Phys. Zs., 1910, 11, 1127.

⁴ Phys. Zs., 1911, 12, 164.

⁵ Ann. d. Phys., 1911, 34, 373.

⁶ Ann. d. Phys., 1910, 33, 607.

я хотел бы указать еще на одну мою статью ⁷, в которой выведены соотношения между элементами линии, плоскости и объема, измеренными синхронно с точки зрения различных координатных систем.

Я скажу еще пару слов по поводу сверхсветовой скорости. Из примера, приведенного в § 6 моей работы ⁸, следует, что изгородь движется со сверхзвуковой скоростью. Этот пример я приводил в моем кенигсбергском докладе ⁹, но я никогда не называл этот случай сигнализацией ¹⁰. Такое обозначение приписывается мне П. Эренфестом совершенно неверно. Что касается существования такой скорости вообще, то П. Эренфест ошибается, когда он ее отрицает ¹¹. Ведь то, что в одной системе кажется одновременным, не будет таковым в другой системе. Когда в некоторой движущейся системе мы одновременно (для этой системы) подыдем движущийся вместе с ней стержень, то для покоящегося наблюдателя это понятие не будет одновременным. Отсюда изгородь и т. д. *При этом никакая материальная точка не движется со сверхсветовой скоростью.* В остальном изгородь может двигаться в одном направлении. Я привел этот пример ¹² для того, чтобы разъяснить пример В. Варичака ¹³ с паузой.

Сказанным выше я считаю исчерпанными все возникшие вопросы и, учитывая тон, принятый по отношению ко мне П. Эренфестом, считаю себя вынужденным отказаться от всякой дальнейшей дискуссии.

⁷ Archiv. für Mathematik und Physik, 1911, 17, 4; 1911, 18, 17.

⁸ Ann. d. Phys., 1910, 33, 607.

⁹ Phys. Zs., 1910, 11, 972.

¹⁰ Там же, с. 975.

¹¹ Phys. Zs., 1911, 12, 412.

¹² Phys. Zs., 1911, 12, 414. Я хотел бы здесь исправить опечатку, вкрадшуюся в эту работу. Во второй колонке, строка 15 сверху, вместо слова «стержень» должно стоять «полоса».

¹³ Phys. Zs., 1911, 12, 168.

УДК 530.12

Переписка А. Эйнштейна и М. Бессо (1903—1955). «Эйнштейновский сборник, 1975—1976». М., «Наука», 1978, с. 5.
Публикуется вторая часть переписки, начало которой опубликовано в «Эйнштейновском сборнике 1974».

УДК 530.12

Можно ли рассматривать релятивистское изменение масштабов длины и времени как результат действия некоторых сил? Фейнберг Е. Л. «Эйнштейновский сборник, 1975—1976». М., «Наука», 1978, с. 43.

Анализируются ответы на вопрос, указанный в названии статьи, которые встречаются в фундаментальных трудах по специальной теории относительности, с одной стороны, и в популярной и учебной литературе — с другой. Показано, что положительный ответ возможен и правилен. Сведение вопроса к чистой кинематике, на чем настаивают некоторые авторы, отрицающие допустимость динамического подхода, несправедливо ограничивает понимание физического содержания теории и в конкретных приложениях может повести к парадоксам и даже ошибкам. Взаимоотношение кинематического и динамического толкования, на которое указывали основатели теории относительности, разъясняется на физических примерах.

Ил. 3. Библ. 25 назв.

УДК 530.12.

К вопросу о «запаздывании» релятивистского сокращения движущихся тел. Сыроватский С. И. «Эйнштейновский сборник, 1975—1976». М., «Наука», 1978, с. 78.

Рассмотрена одномерная задача о движении плоского слоя зарядов под действием плоской электромагнитной волны. Установлено, что в тех случаях, когда физическое тело (масштаб), с помощью которого проводится измерение длин, изменяет состояние своего движения, формулы релятивистского преобразования длины будут справедливы лишь спустя время, необходимое для восстановления внутреннего равновесного состояния этого тела.

Ил. 1. Библ. 4 назв.

УДК 530.12

Физика черных дыр: от Эйнштейна до наших дней. Фролов В. П. «Эйнштейновский сборник, 1975—1976». М., «Наука», 1978, с. 82.

Обзор содержит подробное изложение широкого круга вопросов, связанных с проблемой черных дыр, таких как: история вопроса, структура пространства-времени при наличии черных дыр, черные дыры и полужамкнутые миры, проблема собственной энергии в общей теории относительности, свойства черных дыр, проблема предельной массы нейтронных звезд и гравитационный коллапс, возможность наблюдения черных дыр, массивные и сверхмассивные черные дыры, квантовые процессы в черных дырах, гипотеза реликтовых черных дыр и ее возможные космологические следствия. Большое внимание уделено изложению результатов, полученных в этой области в последние годы, и еще не решенным проблемам.

Ил. 14. Библ. 224 назв.

УДК 530.12

Граничные задачи электродинамики движущихся сред. Столяров С. Н. «Эйнштейновский сборник, 1975—1976». М., «Наука», 1978, с. 152.

Получены формулы для амплитуд, частот и направлений распространения всех волн, возникающих при отражении и преломлении плоской монохроматической волны на движущихся нормально самим себе границах раздела. Подробно рассмотрена трансформация волн на движущемся в вакууме диэлектрике, в частном случае — на движущейся плазме, а также на резком скачке бегущего по покоящейся среде параметра. В последнем случае отдельно обсуждено досветовое и сверхсветовое перемещение фронта параметра по покоящейся среде. Проанализирована роль дисперсии среды при трансформации на релятивистских границах раздела.

Ил. 1. Библ. 38 назв.

УДК 530.12

Об эволюции понятия инерции (Ньютон, Мах, Эйнштейн). К о н о п л е в а Н. П. «Эйнштейновский сборник, 1975—1976». М., «Наука», 1978, с. 216.

Прослеживается эволюция пространственно-временных представлений от Ньютона до Эйнштейна и роль критики Маха в создании общей теории относительности. Показано, что, несмотря на первоначальное стремление Эйнштейна реализовать в своей теории идеи Маха, принцип Маха, связывающий инерцию с действием особого рода сил, несовместим с теорией относительности в ее современном понимании, как и с любой теорией, основанной на представлениях, не зависящих от выбора системы координат.

Библ. 25 назв.

УДК 530.12

Теория тяготения на рубеже XIX и XX вв. В и з г и н В. П. «Эйнштейновский сборник, 1975—1976». М., «Наука», 1978, с. 245.

Рассматриваются эмпирические и логико-теоретические трудности ньютоновской теории тяготения в конце XIX в. Отмечено, что осознание последних было вызвано прогрессом физики во второй половине XIX в. Подчеркнута их важная роль в возникновении предпосылок релятивистской теории тяготения. Трудности логико-теоретического характера сформулированы как определенные асимметрии; подобное понимание недостатков классической теории близко к эйнштейновскому.

Библ. 78 назв.

УДК 530.12

Письмо К. Попперу. Э й н ш т е й н А. «Эйнштейновский сборник, 1975—1976». М., «Наука», 1978, с. 283.

Ответ А. Эйнштейна на неопубликованную рукопись статьи К. Поппера.

УДК 530.12

Дискуссия о твердом теле. Б о р н М., Л а у э М., Э р е н ф е с т П., И г н а т о в с к и й В. «Эйнштейновский сборник, 1975—1976». М., «Наука», 1978, с. 287.

С возникновением теории относительности появились серьезные затруднения в трактовке понятия недеформируемого твердого тела. Возникла проблема построения кинематики недеформируемых твердых тел на основе постулата относительности. Этой проблеме посвящены работы М. Борна, М. Лауэ, П. Эренфеста, В. Игнатовского.

Ил. 6.



ЭЙНШТЕЙНОВСКИЙ
СБОРНИК

1975 · 1976

В сборнике собраны переводы статей М. Борна, М. Лауэ и других ученых по проблемам физики твердого тела в теории относительности.

В сборник вошли также статьи, посвященные вопросам трактовки релятивистских изменений масштабов длины и времени как результата действия сил, о сокращении движущихся тел, физики черных дыр. Публикуется продолжение переписки А. Эйнштейна и М. Бессо, часть которой помещена в «Эйнштейновском сборнике, 1974».

Издание рассчитано на научных работников, преподавателей, студентов и широкие круги читателей, интересующихся современной физикой и историей физики.