CONTINOUS GROUPS
of
TRANSFORMATIONS

by

Luther Pfahler Eisenhart
Dod Professor of Mathematics
in Princeton University

1933

Л. П. ЭИЗЕНХАРТ

НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Перевод с английского
М. М. ПОСТНИКОВА

*

1947
Государственное издательство
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА

ПРЕДИСЛОВИЕ

Исследование непрерывных групп преобразований, открытых Ли, привело к созданию им самим и под его влиянием Энгелем, Киллингом, Шефферсом и Шуром обширной теории. Картан в своей диссертации дал многим из их результатов более строгое обоснование. Бианки и Фубини развили геометрические приложения теории. Эта глава истории закрылась почти тридцать лет назад. Новая глава открылась около десяти лет назад вместе с углубленным развитием тензорного анализа, римановой геометрии и ее обобщений, когда непрерывные группы нашли применение в новейших физических теориях.

Эта книга излагает общую теорию Ли и его учеников и современные исследования методами тензорного исчисления при помощи понятий новой дифференциальной геометрии. Первые три главы в основном содержат результаты первого периода. Четвертая глава посвящена теории присоединенной группы и доказанным Картаном теоремам, на которых основывается классификация полупростых групп (они недавно передоказаны Вейлем и Схоутеном). Геометрические идеи используются на протяжении всей книги; пятая глава специально посвящена геометрическим приложениям теории геодезических пространства преобразований и группового пространства. Здесь, в частности, используются понятия современной дифференциальной геометрии. В заключительной главе излагается теория контактных преобразований с приложениями к геометрии и механике.

Многочисленные упражнения не ограничены непосредственным приложением формул текста, многие из них дополняют изложение, и их, собственно, надо было бы включить в более обширную книгу.

Для удобства читателя указаны источники этих упражнений. Все ссылки относятся к списку литературы в Библиографии.

При написании этой книги я получал неоценимые указания и советы от моих коллег, профессоров Боненблюста, Кнебельмана и Робертсона, а также от моего бывшего студента д-ра Т. С. Грехема, особенно в связи с четвертой главой. Корректуры читались студентами моего курса этого года и исправлялись на основе их предложений. М-р Ф. Д. Кабилло значительно облегчил мне наблюдение за печатанием книги.

Май, 1933 г.

Л. П. Эйзенхарт

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

1. Системы уравнений в частных производных. Смешанные системы. В этом и следующем параграфах мы докажем несколько теорем о дифференциальных уравнениях, которыми впоследствии воспользуемся.

Рассмотрим систему уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^i} = \psi_i^\alpha(\theta^1, \ldots, \theta^m; x^1, \ldots, x^n) \equiv \psi_i^\alpha(\theta; x), \tag{1.1}$$

$$(\alpha = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n),$$

где ψ_i^α — функции переменных θ и x. Наши исследования будут относиться к области, в которой ψ_i^α аналитичны по θ и x. Уравнения (1.1) эквивалентны системе уравнений в *полных* дифференциалах:

$$d\theta^\alpha = \psi_i^\alpha dx^i,\ (\alpha = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n). \tag{1.2}$$

В этих уравнениях мы пользуемся условием, которое примем и далее. Именно, если один и тот же индекс дважды появляется в некотором одночлене, то этот одночлен заменяет сумму членов, получающихся, когда индекс пробегает все свои значения. Таким образом, правая сторона (1.2) заменяет сумму n членов, получающихся, когда i принимает значения от 1 до n.

Условия интегрируемости системы (1.1) имеют вид:

$$\frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial x^j} + \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial \theta^\beta}\psi_j^\beta = \frac{\partial \psi_j^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial \psi_j^\alpha}{\partial \theta^\gamma}\psi_i^\gamma \begin{pmatrix} i, j = 1, \ldots, n \\ \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, m \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Заметим, что в этих уравнениях производится суммирование по β и γ от 1 до m. Если эти уравнения удовлетворяются тождественно, то система (1.1) называется *вполне* *интегрируемой*. В этом случае ее решение имеет вид:

$$\theta^\alpha = c^\alpha + \left(\frac{\partial\theta^\alpha}{\partial x^i}\right)_0 (x^i - x_0^i) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\theta^\alpha}{\partial x^i \partial x^j}\right)(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + \ldots, \qquad (1.4)$$

где $\left(\frac{\partial\theta^\alpha}{\partial x^i}\right)_0 = \psi_i^\alpha(c;\ x_0)$, а другие коэффициенты получаются дифференцированием (1.1) и подстановкой x_0, вместо x, и c, вместо θ. Следовательно, в области x, в которой сходится ряд (1.4), мы получим решение системы (1.1), определенное m постоянными. Такое решение мы обозначаем через

$$\theta^\alpha = \psi^\alpha(x^1, \ldots, x^n;\ c^1, \ldots, c^m). \qquad (1.5)$$

Если же уравнения (1.3) тождественно не удовлетворяются, то мы получаем систему F_1 уравнений, устанавливающих условия на θ, как функций от x. Если мы каждое из этих уравнений продифференцируем по x^i и заменим производные $\frac{\partial\theta^\alpha}{\partial x^i}$ их значениями из (1.1), то полученные уравнения либо будут следствиями F_1, либо составят новую систему F_2. Продолжив этот процесс, мы получим ряд систем уравнений $F_1, \ldots, F_N$, которые должны быть совместны, если уравнения (1.1) имеют решения. Если какая-нибудь система не является следствием предыдущих, то она вводит, по крайней мере, одно дополнительное условие. Таким образом, если уравнения (1.1) допускают решение, то должно существовать такое целое положительное число N, что уравнения $(N+1)$-й системы удовлетворяются в силу уравнений предшествующих N систем, иначе существовало бы более m независимых уравнений, из которых следовало бы соотношение между x^i. Из этого рассуждения следует также, что $N \leqslant m$.

Обратно, пусть существует такое число N, что уравнения, входящие в системы

$$F_1, \ldots, F_N \qquad (1.6)$$

совместны, и каждая система вводит по крайней мере одно условие, независимое от условий, накладываемых уравнениями других систем, но все уравнения системы

$$F_{N+1} \tag{1.7}$$

тождественно удовлетворяются в силу уравнений систем (1.6). Предположим, что из (1.6) следует $p\,(<m)$ независимых условий, например, вида $G_\gamma(\theta;\, x)=0$. Так как матрица $\left\|\frac{\partial G_\gamma}{\partial \theta^\alpha}\right\|$ имеет ранг p, то из этих уравнений можно выразить p переменных θ через остальные θ и x. Уравнения (при соответствующей нумерации) примут вид:

$$\theta^\sigma-\varphi^\sigma(\theta^{p+1}, \ldots, \theta^m;\, x)=0 \quad (\sigma=1, \ldots, p). \tag{1.8}$$

Дифференцированием этих уравнений получим:

$$\frac{\partial \theta^\sigma}{\partial x^i}-\frac{\partial \varphi^\sigma}{\partial \theta^\nu}\frac{\partial \theta^\nu}{\partial x^i}-\frac{\partial \varphi^\sigma}{\partial x^i}=0 \quad (\nu=p+1, \ldots, m).$$

Заменив $\frac{\partial \theta^\sigma}{\partial x^i}$ с помощью (1.1), будем иметь:

$$\psi_i^\sigma-\frac{\partial \varphi^\sigma}{\partial \theta^\nu}\psi_i^\nu-\frac{\partial \varphi^\sigma}{\partial x^i}=0. \tag{1.9}$$

Как следует из вывода систем (1.6) и (1.7), уравнения (1.9) будут удовлетворены в силу (1.6) и (1.7). Вычитанием мы получим

$$\frac{\partial \theta^\sigma}{\partial x^i}-\psi_i^\sigma-\frac{\partial \varphi^\sigma}{\partial \theta^\nu}\left(\frac{\partial \theta^\nu}{\partial x^i}-\psi_i^\nu\right)=0. \tag{1.10}$$

Из этих уравнений следует, что если функции $\theta^{p+1}, \ldots, \theta^m$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \theta^\nu}{\partial x^i}=\bar{\psi}_i^\nu(\theta^{p+1}, \ldots, \theta^m;\, x), \tag{1.11}$$

где $\bar{\psi}_i^\nu$ получены из ψ_i^ν заменой $\theta^\sigma\,(\sigma=1, \ldots, p)$ их выражениями из (1.8), то уравнения (1.1) для $\alpha=1, \ldots, p$ удовлетворяются выражениями (1.8). Так как в силу (1.8) уравнения системы F_1 удовлетворяются тождественно, то уравнения (1.11) вполне интегрируемы. Действительно, уравнения, выражающие условия их интегрируемости, в силу (1.9) принадлежат системе F_1. Следовательно, в этом случае решение существует и содержит $m-p$ произвольных постоянных.

Когда $p=m$, мы вместо (1.8) имеем $\theta^\alpha=\varphi^\alpha(x)$, а вместо (1.10) получаем, что функции θ^α удовлетворяют системе (1.1). Постоянных интегрирования в этом случае нет. Таким образом [1]):

[1.1] *Для того, чтобы система уравнений* (1.1) *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое положительное целое число* $N(\leqslant m)$, *что уравнения систем* $F_1, \ldots, F_N$ *совместны для всех значений* x^i *в некоторой области, а уравнения системы* F_{N+1} *удовлетворяются в силу предшествующих систем. Если* p — *число независимых уравнений первых* N *систем, то решение содержит* $m-p$ *произвольных постоянных.*

Из наших рассуждений видно, что если существует целое число N, удовлетворяющее условиям теоремы, то любое число, большее N, также им удовлетворяет. Однако в теореме и в ее различных применениях предполагается, что N — наименьшее целое число, удовлетворяющее условиям теоремы.

Высказанную теорему можно применять также и тогда, когда заданы p каких-то функциональных соотношений между переменными θ и x, которые должны удовлетворяться дополнительно к дифференциальным уравнениям (1.1):

$$f^\sigma(\theta;\ x)=0 \quad (\sigma=1, \ldots, p). \tag{1.12}$$

Мы говорим, что (1.1) и (1.12) составляют ***смешанную систему***. Для нее через F_0 обозначим данные соотношения, а в систему F_1 включим также соотношения, получающиеся из F_0 дифференцированием и подстановкой из (1.1). Теорема формулируется, как и выше, при условии, что системы $F_0, F_1, \ldots, F_N$ совместны, а F_{N+1} — их следствие.

Вернемся к случаю, когда (1.1) вполне интегрируема. Так как в (1.5) функции φ^α таковы, что

$$\varphi^\alpha(x_0^1, \ldots, x_0^n;\ c^1, \ldots, c^m)=c^\alpha,$$

---

1) Историю этой теоремы см. 1927, 1, стр. 17. (Сноска на библиографию в конце книги).

то якобиан

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right| \equiv \frac{\partial(\varphi^1, \ldots, \varphi^m)}{\partial(c^1, \ldots, c^m)} \tag{1.13}$$

отличен от нуля. Следовательно, уравнения (1.5) можно разрешить относительно величин c и записать в виде:

$$f^\alpha(\theta;\ x) = c^\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, m). \tag{1.14}$$

Каждая из функций f^α является интегралом системы (1.1), в том смысле, что если f^α продифференцировать по x^i, то результат, в силу (1.1), сведется к нулю. В этом смысле любая функция f^α является интегралом.

Если в любом из уравнений (1.14) мы заменим θ^α их выражениями (1.5), то мы получим тождество относительно x и c. Следовательно, каждая f^α является решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial\theta^\alpha}\psi_i^\alpha = 0, \quad (i = 1, \ldots, n;\ \alpha = 1, \ldots, m). \tag{1.15}$$

Любая функция всех f^α также будет решением этой системы. Предположим, что дополнительно к функциям f^α из (1.14) имеется решение f^{m+1} системы (1.15). Рассмотрим матрицу с $m+1$ строкой и $m+n$ столбцами:

$$\left\| \frac{\partial f^\sigma}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f^\sigma}{\partial x^n}, \frac{\partial f^\sigma}{\partial\theta^1}, \ldots, \frac{\partial f^\sigma}{\partial\theta^m} \right\| \quad (\sigma = 1, \ldots, m+1).$$

Вследствие (1.15) любой минор этой матрицы порядка $m+1$ равен нулю. Таким образом f^{m+1} является функцией $f^1, \ldots, f^m$, которые, как было выше показано, независимы.

Обратно, пусть $f^1, \ldots, f^m$ являются m независимыми решениями системы (1.15), и ранг вышеуказанной матрицы для $\sigma = 1, \ldots, m$, равен m. Тогда детерминант $\left|\frac{\partial f^\alpha}{\partial\theta^\beta}\right|$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$ отличен от нуля, так как вследствие (1.15) любой другой минор порядка m нашей матрицы является кратным $\left|\frac{\partial f^\alpha}{\partial\theta^\beta}\right|$. Поэтому соответствующая система уравнений (1.14), где c постоянны, неявно определяет θ в качестве функций от x и c. Соответственно этому

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}+\frac{\partial f^\alpha}{\partial \theta^\beta}\frac{\partial \theta^\beta}{\partial x^i}=0 \quad (\alpha, \beta=1, \ldots, m;\ i=1, \ldots, n).$$

Вычитая эти уравнения из (1.15), получаем:

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial \theta^\beta}\left(\frac{\partial \theta^\beta}{\partial x^i}-\psi_i^\beta\right)=0,$$

что эквивалентно (1.1), поскольку $\left|\frac{\partial f^\alpha}{\partial \theta^\beta}\right| \neq 0$. Называя (1.15) системой, *ассоциированной* с (1.1), имеем:

[1.2] *Даны: вполне интегрируемая система уравнений* (1.1) *и ассоциированная система* (1.15). *Если m независимых решений последней приравнять произвольным постоянным, то они неявно определят решение* (1.1). *Обратно, решение* (1.1) *определяет m независимых решений ассоциированной системы.*

Из предшествующих рассуждений следует также:

[1.3] *Если в любом решении $F(x, \theta)$ системы* (1.15) *заменить θ решениями* (1.1), *то $F(x, \theta)$ приведется к постоянной, т. е. $F(x, \theta)$ является интегралом уравнений* (1.1).

2. Линейные операторы. Полные системы линейных уравнений в частных производных. Каждое из r выражений

$$X_a f \equiv \xi_a^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv \xi_a^i p_i \quad \begin{pmatrix} a=1, \ldots, r; \\ i=1, \ldots, n \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где ξ_a^i — функции x, называется *линейным оператором* $\left(\text{здесь и далее } p_i \text{ обозначает } \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)$. По определению

$$X_a X_b f=\xi_a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\xi_b^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right)=\xi_a^i \frac{\partial \xi_b^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}+\xi_a^i \xi_b^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x^j} X_a \xi_b^j+\xi_a^i \xi_b^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Следовательно,

$$(X_a, X_b) f = X_a X_b f - X_b X_a f = (X_a \xi_b^j - X_b \xi_a^j) \frac{\partial f}{\partial x^j}. \quad (2.2)$$

Так определенный оператор $(X_a, X_b) f$ называется *оператором Пуассона*, а также *коммутатором* операторов $X_a f$ и $X_b f$. Из (2.2) имеем:

$$(X_a, X_b) f = -(X_b, X_a) f. \quad (2.3)$$

Прямым вычислением можно установить следующее *тождество Якоби:*

$$((X_a, X_b), X_c) f + ((X_b, X_c), X_a) f + ((X_c, X_a), X_b) f = 0 \quad (2.4)$$
$$(a, b, c = 1, \ldots r),$$

каковы бы ни были функции ξ_a^i, ξ_b^i и ξ_c^i.

Если положить

$$X'_a f = \lambda_a^c X_c f, \quad (2.5)$$

где λ — функции x, то

$$(X'_a, X'_b) f = (\lambda_a^c X_c, \lambda_b^d X_d) f = \lambda_a^c X_c (\lambda_b^d) X_d f -$$
$$- \lambda_b^d X_d (\lambda_a^c) X_c f + \lambda_a^c \lambda_b^d (X_c, X_d) f =$$
$$= [\lambda_a^c X_c (\lambda_b^d) - \lambda_b^c X_c (\lambda_a^d)] X_d f + \lambda_a^c \lambda_b^d (X_c, X_d) f. \quad (2.6)$$

Чтобы получить последнее выражение, нужно заменить индекс суммирования d на c, и наоборот. Очевидно, что это можно делать, так как безразлично, какой буквой обозначить индекс суммирования, называемый иногда *немым* индексом.

Рассмотрим теперь систему однородных линейных уравнений в частных производных:

$$X_a f = \xi_a^i p_i = 0 \qquad (a = 1, \ldots, r;\ i = 1, \ldots, n), \quad (2.7)$$

для которой ранг матрицы

$$M = \left\| \xi_a^i \right\| \quad (2.8)$$

равен r, т. е. уравнения которой независимы. Если $r = n$, то существует, очевидно, только одно решение (2.7)

$f = \text{const}$. При $r < n$ возможны решения, отличные от тривиального $f = \text{const}$. Из (2.2) следует, что любое решение (2.7) удовлетворяет уравнениям:

$$(X_a, X_b)f = 0 \qquad (a, b = 1, \ldots, r). \qquad (2.9)$$

Если

$$(X_a, X_b)f = \gamma^c_{ab} X_c f \qquad (a, b, c = 1, \ldots, r), \qquad (2.10)$$

где γ — функции x, то системы уравнений (2.7) и (2.9) фактически эквивалентны (2.7). Мы присоединим к (2.7) все уравнения, полученные приравниванием нулю тех коммутаторов, которые не выражаются в форме (2.10). Таким путем мы получим $s\ (\geqslant r)$ независимых уравнений. Если $s > r$, то мы повторим тот же процесс и получим систему $t\ (\geqslant s)$ уравнений. Если $t > s$, то мы продолжаем процесс далее. В конце концов мы получим либо n независимых уравнений, и в этом случае (2.7) имеет единственное решение $f = \text{const}$, либо $u\ (< n)$ уравнений, для которых справедливо (2.10) при a, b, c, принимающих значения $1, \ldots, u$. В последнем случае скажем, что полученная система *полна* и имеет порядок u. Таким образом, решение системы вида (2.7) является решением полной системы, для которой имеет место (2.10).

Если (2.7) — полная система, то полна также система

$$X'_b f = \lambda^a_b X_a f = 0, \qquad (2.11)$$

где λ — функции x с детерминантом $|\lambda^a_b|$, отличным от нуля. Действительно, из (2.10) следует, что правая сторона (2.6) линейна относительно $X_1 f, \ldots, X_r f$, которые сами в силу (2.11) линейно выражаются через операторы $X'_a f$. Следовательно, из (2.6) получаем выражения вида (2.10), что и доказывает утверждение.

Так как ранг матрицы M (2.8) равен r, то, не нарушая общности, положим, что $|\xi^b_a| \neq 0$ $(a, b = 1, \ldots, r)$. Следовательно, мы можем разрешить уравнения (2.7) относительно $p_1, \ldots, p_r$ и записать результат в виде:

$$X'_a f = p_a + \psi^t_a p_t = 0 \qquad (a = 1, \ldots r;\ t = r+1, \ldots n). \qquad (2.12)$$

Очевидно, что эти уравнения имеют вид (2.11) и, следовательно, образуют систему, эквивалентную (2.7). Полная система, представленная в таком виде, называется *якобиевой*. Если положить $X'_a f = \xi'^i_a p_i$, то

$$\xi'^b_a = \delta^b_a, \quad \xi'^p_a = \psi^p_a \quad \begin{pmatrix} a, b = 1, \ldots r; \\ p = r+1, \ldots, n \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

где символ Кронекера δ^b_a определен формулами:

$$\delta^b_a = \begin{cases} 1, & \text{если } a = b, \\ 0, & \text{если } a \neq b. \end{cases} \tag{2.14}$$

Символ Кронекера будет часто употребляться на протяжении всей книги.

Аналогично (2.10) имеем:

$$(X'_a, X'_b) f = \gamma'^c_{ab} X'_c f.$$

Из (2.2) и (2.13), следует, что

$$(X'_a, X'_b) f = (X'_a \xi'^c_b - X'_b \xi'^c_a) p_c + (X'_a \psi^t_b - X'_b \psi^t_a) p_t =$$
$$= (X'_a \psi^t_b - X'_b \psi^t_a) p_t \qquad (c = 1, \ldots, r; \; t = r+1, \ldots, n).$$

Так как $p_1, \ldots, p_r$ не входят в последнее выражение, то $\gamma'^c_{ab} = 0$, т. е. для полной системы в якобиевой форме

$$(X'_a, X'_b) f = 0.$$

Следовательно,

$$X'_a \psi^t_b - X'_b \psi^t_a = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial \psi^p_b}{\partial x^a} + \psi^q_a \frac{\partial \psi^p_b}{\partial x^q} = \frac{\partial \psi^p_a}{\partial x^b} + \psi^q_b \frac{\partial \psi^p_a}{\partial x^q} \quad \begin{pmatrix} a, b = 1, \ldots, r; \\ p, q = r+1, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Сравнивая эти уравнения с (1.3), мы замечаем, что уравнения

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^a} = \psi^p_a \quad (a = 1, \ldots, r; \; p = r+1, \ldots, n) \tag{2.15}$$

вполне интегрируемы. Кроме того, уравнения (2.12) составляют систему, ассоциированную с (2.15). Таким образом, из результатов § 1 следует, что уравнения (2.12), следовательно, и (2.7), допускают $n-r$ независимых решений, и что более $n-r$ независимых решений они иметь не могут. Итак:

[2.1] *Полная система r однородных линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка от n $(>r)$ переменных имеет точно $n-r$ независимых решений.*

3. Существенные параметры семейства функций. Рассмотрим семейство n функций f^i от n переменных $x^1, \ldots, x^n$ и от r параметров $a^1, \ldots, a^r$:

$$f^i(x^1, \ldots, x^n; a^1, \ldots, a^r) \equiv f^i(x; a) \quad (i=1, \ldots, n). \tag{3.1}$$

Пусть f^i непрерывны по x и a, так же как и их производные по этим переменным настолько высокого порядка, насколько необходимо для последующих рассмотрений. Это требование будет предполагаться выполненным на протяжении всей книги. Параметры a^α называются *существенными*, если нельзя найти $r-1$ их функций $A^1, \ldots, A^{r-1}$, таких, чтобы имели место тождества

$$f^i(x^1, \ldots, x^n; a^1, \ldots, a^r) = F^i(x^1, \ldots, x^n; A^1, \ldots, A^{r-1}).$$

Так как A являются функциями от a, то ранг матрицы Якоби $\left\| \frac{\partial A}{\partial a} \right\|$ не превосходит $r-1$. Следовательно, существует система не равных тождественно нулю функций φ^α от параметров a, удовлетворяющих уравнениям

$$\varphi^\alpha(a) \frac{\partial A^\sigma}{\partial a^\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, r; \ \sigma = 1, \ldots, r-1).$$

Таким образом, все A и их любая функция удовлетворяют уравнению

$$\varphi^\alpha(a) \frac{\partial f}{\partial a^\alpha} = 0. \tag{3.2}$$

Так как x не входят в φ^α, то функции F^i, а поэтому и f^i удовлетворяют уравнению (3.2). Обратно, пусть функции f^i удовлетворяют уравнению вида (3.2). Это уравнение, очевидно, имеет $r-1$ независимых решений $A^1, \ldots, A^{r-1}$, являющихся функциями одних a. Любое решение уравнения (3.2) является функцией этих A. Следовательно, каждая из функций f^α является функцией от x и A, т. е. параметры a не существенны. Таким образом:

[3.1] *Для того, чтобы в* (3.1) r *параметров* a^α *были существенны, необходимо и достаточно, чтобы функции* f^i *не удовлетворяли никакому уравнению вида* (3.2).

Из этого рассуждения следует также, что если функции f^i удовлетворяют полной системе $s\,(<r)$ уравнений

$$\varphi^\alpha_\sigma(a)\frac{\partial f}{\partial a^\alpha}=0 \quad (\alpha=1, \ldots, r;\ \sigma=1, \ldots, s), \tag{3.3}$$

то f^i являются функциями x и $r-s$ независимых решений этой системы, являющихся функциями одних a, и f^i выражаются, следовательно, через $r-s$ существенных параметров.

Теперь мы займемся определением числа существенных параметров данного семейства функций. Из предыдущего следует, что параметры существенны, если ранг матрицы

$$M_0=\left\|\frac{\partial f^i}{\partial a^\alpha}\right\|$$

равен r. Пусть ее ранг μ_0 меньше r. Дифференцируя систему уравнений $\varphi^\alpha\frac{\partial f^i}{\partial a^\alpha}=0$ по x^j, мы получим:

$$\varphi^\alpha\frac{\partial f^i}{\partial a^\alpha}=0, \quad \varphi^\alpha\frac{\partial f^i{}_{,j}}{\partial a^\alpha}=0, \quad f^i{}_{,j}\equiv\frac{\partial f^i}{\partial x^j}. \tag{3.4}$$

Обозначим через μ_1 ранг матрицы

$$M_1=\left\|\frac{\partial f^i}{\partial a^\alpha}, \quad \frac{\partial f^i{}_{,j}}{\partial a^\alpha}\right\|.$$

Очевидно, что $\mu_1\geqslant\mu_0$. Если $\mu_1=r$, то уравнения (3.4) допускают единственное решение $\varphi^\alpha=0$. Следовательно, параметры существенны.

Полагая

$$f^i,_{j_1 \dots j_s} \equiv \frac{\partial^s f^i}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_s}},$$

последовательными дифференцированиями (3.4) получим:

$$\varphi \frac{\partial f^i,_{j_1 \dots j_s}}{\partial a^\alpha} = 0. \tag{3.5}$$

Ранг матрицы

$$\left\| \frac{\partial f^i}{\partial a^\alpha}, \frac{\partial f^i,_j}{\partial a^\alpha}, \dots, \frac{\partial f^i,_{j_1 \dots j_s}}{\partial a^\alpha} \right\| \tag{3.6}$$

обозначим через μ_s. Таким образом мы получим последовательность рангов

$$\mu_0 \leqslant \mu_1 \leqslant \dots \leqslant \mu_s \leqslant \dots \leqslant r. \tag{3.7}$$

Если какое-нибудь μ_s равно r, то все φ равны нулю, и r параметров существенны.

Предположим, что $\mu_{s-1} < r$ и $\mu_s = \mu_{s-1}$, тогда покажем, что $\mu_{s+1} = \mu_s$. Из $\mu_s = \mu_{s-1}$ следует, что

$$\frac{\partial f^i,_{j_1 \dots j_s}}{\partial a^\alpha} = \sum \lambda \frac{\partial f^i,_{j_1 \dots j_\nu}}{\partial a^\alpha} \quad (\nu < s);$$

сумма справа пробегает элементы строки матрицы M_{s-1}. Дифференцируя по x^k, получаем, что члены $\dfrac{\partial f^i,_{j_1 \dots j_s k}}{\partial a^\alpha}$ линейно выражаются через элементы матрицы M_s, что и доказывает утверждение. Таким образом члены последовательности (3.7) либо постоянно возрастают и достигают максимума r, тогда r параметров существенны, либо они стабилизируются на некотором $\mu_s (< r)$, и тогда параметры не существенны. Покажем, что в последнем случае μ_s параметров существенны.

Так как $\mu_s < r$, и уравнения (3.4) вместе с последовательностью уравнений (3.5) имеют ранг μ_s, то $r - \mu_s$ из функций φ могут быть выбраны произвольно, причем остальные этим выбором полностью определятся. Возьмем

$\varphi^1, \ldots, \varphi^{r-\mu_s}$ функциями только одних a. Тогда

$$\varphi^\sigma = \lambda^\sigma_\rho \varphi^\rho \qquad \begin{pmatrix} \rho = 1, \ldots, r-\mu_s; \\ \sigma = r-\mu_s+1, \ldots, r \end{pmatrix}, \qquad (3.8)$$

где λ — функции a и x.

Продифференцировав последовательность уравнений (3.4), (3.5) по x^k и заметив, что $\varphi^\alpha \dfrac{\partial f^i,_{j_1 \ldots j_s k}}{\partial a^\alpha} = 0$, получим уравнения вида (3.4) и (3.5), где каждое φ^α заменено на $\dfrac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^k}$. Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi^\sigma}{\partial x^k} = \lambda^\sigma_\rho \frac{\partial \varphi^\rho}{\partial x^k},$$

т. е. φ^δ $(\delta = r-\mu_s+1, \ldots, r)$ не содержат x, поскольку φ^ρ для $\rho = 1, \ldots, r-\mu_s$ были выбраны функциями одних a. Соответственно этому существует $r-\mu_s$ независимых уравнений (3.2). Их можно получить, полагая

$$\varphi^1 = 1, \ \varphi^2 = \ldots = \varphi^{r-\mu_s} = 0;$$
$$\varphi^2 = 1, \ \varphi^1 = \varphi^3 = \ldots = \varphi^{r-\mu_s} = 0;$$

и так далее. Эти независимые уравнения образуют полную систему. Действительно, коммутатор (§ 2) любых двух из этих уравнений, приравненный нулю, имеет f^i в качестве решений, поэтому он является линейной комбинацией данных уравнений. Таким образом, данные функции выражаются через μ_s существенных параметров, и мы имеем:

[3.2] *Число существенных параметров, через которые выражаются функции* f^i $(x; a)$, *равно максимальному числу, содержащемуся в последовательности* (3.7).

Упражнения

1. Найти смешанную систему уравнений (1.1) и (1.12), для которой $u = ax + by$, $v = axy$, $w = bx^2 + ay^2$, где a и b, произвольные постоянные, являлись бы общим решением, и определить для этого случая систему F_θ.

2. Если в (1.1) функции ψ^α_i линейны и однородны по переменным θ, то этим же свойством обладают и уравнения систем

$F_1, \ldots, F_N$, и для того, чтобы (1.1) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы существовало положительное число $N (\leqslant m)$ такое, что ранг матрицы систем $F_1, \ldots, F_N$ равен $m-q$ $(q \geqslant 1)$, и тот же ранг имеет матрица систем $F_1, \ldots, F_{N+1}$.

3. Полная система, имеющая в качестве решений p независимых функций $\varphi^1, \ldots, \varphi^p$, получится, если за ξ_a^i $(a=1, \ldots, n-p)$ выбрать $n-p$ любых независимых решений уравнений:

$$\xi^i \frac{\partial \varphi^\delta}{\partial x^i} = 0 \qquad (\delta = 1, \ldots, p).$$

Все полные системы, имеющие одни и те же решения, связаны друг с другом соотношением (2.11)

4. Найти полную систему, имеющую решение $x^1x^2 + x^3$, $x^3 + x^4$.

5. Найти наиболее общую полную систему от трех переменных, допускающую решение $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$.

6. Если для полной системы r уравнений с n переменными известно s $(< n-r)$ независимых решений $\varphi^1, \ldots, \varphi^s$, и произведено преобразование координат

$$x'^a = \varphi^a, \quad x'^t = x^t \quad (a = 1, \ldots, s; \quad t = s+1, \ldots, n),$$

то новая система содержит в качестве независимых переменных только $x'^{s+1}, \ldots, x'^n$, а $x'^1, \ldots, x'^s$ можно считать параметрами.

7. Если r уравнений (2.7) образуют полную систему, то первые $r-1$ из них имеют не более $n-r+1$ независимых решений, и существуют $n-r$ независимых функций этих решений, удовлетворяющих оставшемуся уравнению.

8. Показать, что следующие две системы полны и, применив результат упражнения 7, определить решение каждой системы:

$$p_1 = 0, \quad x^i p_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3); \tag{1}$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

4. Группы и группы преобразований. Независимые переменные x^i $(i = 1, \ldots, n)$ можно трактовать как координаты в некотором n-мерном пространстве V_n, считая, что каждая система значений переменных определяет точку V_n, другими словами, упорядоченная система чисел определяет точку пространства.

Пусть $f^i(x^1, \ldots, x^n; a^1, \ldots, a^r)$ — n независимых функций независимых переменных x и r существенных параметров $a^1, \ldots, a^r$, где r конечно. Для того, чтобы функции были независимы, необходимо и достаточно, чтобы якобиан $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$ не равнялся тождественно нулю. Условия существенности параметров a указаны в § 3.

Уравнения

$$x'^i = f^i(x^1, \ldots, x^r;\ a^1, \ldots, a^r) \equiv f^i(x;\ a)$$
$$(i = 1, \ldots, n) \tag{4.1}$$

для каждой системы значений a определяют преобразование точки $P(x)$ из V_n в точку $P'(x')$. Если значения x и a таковы, что якобиан

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \neq 0, \tag{4.2}$$

то, в соответствии с теорией неявных функций [1]), уравнения (4.1) можно однозначным образом разрешить относительно x, по крайней мере, в той окрестности точки, в которой имеет место (4.2). Мы получим

$$x^i = \bar{f}^i(x';\ a) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{4.3}$$

Эти уравнения определят обратное преобразование P' в P.

Подразумевается, что функции f^i непрерывны относительно x и a, и что то же самое верно для их производных такого порядка, какой появится в дальнейших рассуждениях. Поэтому, если $P'(x')$ — образ точки $P(x)$, соответствующий определенным значениям a, то при малых изменениях a мы получим точки, принадлежащие окрестности точки P'. Соответственно этому, мы говорим, что преобразования *непрерывны*.

Символически обозначим преобразования (4.1) и (4.3), с системой значений a_1^α параметров a, через

$$T_{a_1}x = x', \quad T_{a_1}^{-1}x' = x; \tag{4.4}$$

другими словами, T_{a_1} является операцией, переводящей точку $P(x)$ в точку $P'(x')$, зависящую от P и от значений a_1^α. Применяя сначала преобразование T_{a_1}, а затем T_{a_2},

1) Fine, 1927, 4, стр. 253.

получим преобразование, обозначаемое нами через $T_{a_2}T_{a_1}$ и называемое их *произведением* [1]). Ниоткуда не следует, что произведение двух преобразований принадлежит системе (4.1), т. е. что существуют такие значения a_3^α параметров a, для которых преобразования $T_{a_2}T_{a_1}$ и T_{a_3} одинаковы. Из определения $T_{a_1}^{-1}$ следует:

$$T_{a_1}^{-1}T_{a_1}x = x, \quad T_{a_1}T_{a_1}^{-1}x' = x', \tag{4.5}$$

т. е. произведения $T_{a_1}^{-1}T_{a_1}$ и $T_{a_1}T_{a_1}^{-1}$ оставляют неподвижной каждую точку; такое преобразование называется *тождественным*. Заметим, однако, что среди преобразований (4.1) вовсе не обязано существовать обратное данному или тождественное преобразование.

Прежде чем нтти далее в изучении конкретных операторов T_a, определенных уравнениями вида (4.1), мы рассмотрим систему операторов T_a абстрактно. Они являются элементами некоторого множества объектов. Тому, что выше мы называли произведением двух операторов, соответствует операция над двумя элементами множества. Результат операции, примененной к двум элементам T_a и T_b, взятым в этом порядке, мы обозначим через T_bT_a. Множество элементов любой природы с определенной в нем операцией называется *группой* относительно этой операции, если выполнены следующие условия:

1°. Если T_a и T_b — элементы множества, то T_bT_a однозначно определен и принадлежит этому множеству.

2°. Для операции имеет место ассоциативный закон:

$$T_c(T_bT_a) = (T_cT_b)T_a,$$

т. е. элемент, полученный операцией над элементами T_bT_a и T_c, совпадает с результатом операции над элементами T_a и T_cT_b.

3°. Существует такой элемент I, называемый единицей, что для любого элемента T_a

$$T_aI = IT_a = T_a.$$

---

[1]) Раньше это произведение обозначалось через $T_{a_1}T_{a_2}$, большинство современных авторов использует приведенное обозначение.

4°. Для любого элемента T_a существует такой элемент T_a^{-1}, что

$$T_a^{-1}T_a = T_aT_a^{-1} = I.$$

Независимость этих условий рассматривалась многими авторами [1]), и для изучения этого вопроса читатель отсылается к указанным статьям.

Если удовлетворены только условия 1° и 2°, то говорят, что элементы образуют относительно операции *полугруппу*.

В качестве примера группы рассмотрим семейство всех неособенных аналитических преобразований

$$x'^i = f^i(x^1, \ldots, x^n),$$

т. е. преобразований, для которых ранг матрицы $\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|$ в рассматриваемой области переменных x равен n. Из теории неявных функций [2]) следует, что эти уравнения допускают обращение:

$$x^i = \bar{f}^i(x'^1, \ldots, x'^n).$$

Если T_1 и T_2 заданы формулами $x' = f_1(x)$ и $x' = f_2(x)$, то T_2T_1 задается формулой $x' = f_2(f_1(x))$ и, следовательно, в области, где так определенные функции регулярны, удовлетворяется условие 1°. Якобиан этих функций, равный произведению якобианов f_1 и f_2, не равен нулю для тех значений x^i, для которых оба якобиана не равны нулю. Всякий раз, когда, так же как в рассматриваемом случае, элементы множества определены уравнениями, выполняется условие 2°, потому что операция подстановки ассоциативна. Так как $x'^i = x^i$ принадлежит рассматриваемому семейству, то выполнены все условия 1° ÷ 4°, следовательно, аналитические преобразования образуют группу. Так как функции f^i можно представлять себе в виде степенных рядов по x^i, то преобразования

---

[1]) Dickson, 1905, 2; Huntington, 1905, 3; Moore, 1905, 4.

[2]) Fine, 1927, 4, стр. 253.

содержат бесконечно много произвольных постоянных и образуют *бесконечную непрерывную* группу.

Уравнения типа (4.1) содержат конечное число произвольных постоянных, и если они при непрерывном изменении параметров a определяют группу, то эта группа называется *конечной* и *непрерывной*. Прежде чем переходить к определению условий, которым должны удовлетворять (4.1) для того, чтобы они определяли группу, мы отметим, что эти условия можно получить только для ограниченной окрестности точки, к которой применяются преобразования группы. В такой точке функции f^i и их производные нужного порядка должны быть непрерывны по x и a. Кроме того, функции должны быть таковы, чтобы для некоторых значений a_0^α параметров a уравнения (4.1) сводились бы к $x'^i = x'$, так что, в частности, для этих значений a должно иметь место (4.2) и, поскольку мы имеем дело с непрерывными функциями, (4.2) имеет место и для значений a, достаточно близких к a_0^α. Соответственно этому, все дальнейшие высказывания о группе преобразований будут относиться к значениям x и a, для которых имеют место условия 1°, 2°, 3° и 4°.

Возвращаясь к уравнениям (4.1), заметим, что для того, чтобы эти уравнения удовлетворяли первому условию группы, необходимо, чтобы существовала система функций

$$a_3^\alpha = \varphi^\alpha (a_1^\alpha, a_2^\alpha), \tag{4.6}$$

определенных для любых систем значений a_1^α и a_2^α, таких, что уравнения

$$f^i [f(x;\ a_1);\ a_2] = f^i (x,\ a_3) \tag{4.7}$$

являются тождествами по x, a_1 и a_2; тогда для любых значений a_1 и a_2

$$T_{a_2} T_{a_1} = T_{a_3}. \tag{4.8}$$

Если эти условия удовлетворены, то обращение любого преобразования не будет еще обязательно членом семейства, т. е. не обязательно каждой системе значений a^α соответствует такая система $\bar{a}^\alpha$, что

$$x^i = \bar{f}^i (x';\ a) = f^i (x',\ \bar{a}), \tag{4.9}$$

где функция $\bar{f}^i$ определены (4.3), или символически

$$T_a^{-1}x' = T_{\bar{a}}x' = x. \tag{4.10}$$

Если же выполнено и это условие, то

$$T_a T_{\bar{a}} x' = x', \quad T_{\bar{a}} T_a x = x, \tag{4.11}$$

т. е. если обращение любого преобразования принадлежит семейству, то семейству принадлежит также тождественное преобразование. В этом случае существует такая система значений a_0^α, что

$$a_0^\alpha = \varphi^\alpha (a;\ \bar{a})$$

и

$$f^i (x;\ a_0) = x^i. \tag{4.12}$$

Так как в (4.1) параметры существенны, то существует только одна система значений a_0^α, соответствующая тождеству. Итак, T_{a_0} обозначает тождество I, согласно (4.11),

$$T_{a_0} = T_a T_{\bar{a}} = T_{\bar{a}} T_a,$$

так что мы дополнительно к (4.12) получаем:

$$a_0^\alpha = \varphi^\alpha (a;\ \bar{a}) = \varphi^\alpha (\bar{a};\ a), \tag{4.13}$$

и также

$$a^\alpha = \varphi^\alpha (a;\ a_0) = \varphi^\alpha (a_0;\ a). \tag{4.14}$$

Таким образом, если имеет место (4.6) и обращение любого преобразования принадлежит семейству, то преобразования образуют конечную *непрерывную группу* G_r. Если выполнено только (4.6), то преобразования образуют *конечную непрерывную полугруппу.*

Если T_{a_1} и T_{a_2} — два преобразования из полугруппы, и $T_{a_1}^{-1}$ и $T_{a_2}^{-1}$ — соответственно их обращения, то $T_{a_1}^{-1} T_{a_2}^{-1} T_{a_2} T_{a_1}$ является тождеством. Отсюда и из (4.8) мы получаем, что

$$T_{a_1}^{-1} T_{a_2}^{-1} = T_{a_3}^{-1}, \tag{4.15}$$

т. е.

[4.1] *Обращения преобразований полугруппы образуют пулугруппу.* Эти две полугруппы совпадают тогда и только тогда, когда обе являются группами.

Если мы через S обозначим преобразование, определенное уравнениями

$$y^i = \psi^i(x^1, \ldots, x^n), \tag{4.16}$$

якобиан которых $\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|$ не равен тождественно нулю, а через S^{-1} обозначим его обращение, то преобразование

$$\overline{T}_a = ST_aS^{-1} \tag{4.17}$$

называется *преобразованием, сопряженным к T_a с помощью S.* Легко показать, что если семейство преобразований удовлетворяет (4.8), то $\overline{T}_{a_2}\overline{T}_{a_1} = \overline{T}_{a_3}$. Таким образом:

[4.2] *Если семейство преобразований образует группу, то преобразования, к ним сопряженные, тоже образуют группу.*

Из (4.17) имеем:

$$T_a = S^{-1}\overline{T}_aS, \tag{4.18}$$

и, следовательно, T_a сопряжено к $\overline{T}_a$ с помощью S^{-1}. Если

$$x^i = \overline{\psi}^i(y^1, \ldots, y^n) \tag{4.19}$$

— обращение (4.16), то

$$y'^i = \psi^i(f(x;\, a)) = \psi^i[f(\overline{\psi}(y);\, a)] \tag{4.20}$$

являются уравнениями $\overline{T}_a$.

Если вместо того, чтобы считать (4.16) уравнениями, определяющими точечное преобразование V_n, мы рассмотрим (4.16) как уравнения неособенного преобразования координат, то уравнения (4.20) будут уравнениями преобразования T_a в координатах y^i. Соответственно этому предыдущая теорема показывает:

[4.3] *Групповое свойство семейства преобразований не зависит от выбора системы координат.*

Этот результат очевиден с точки зрения данного выше абстрактного определения группы, так как оно не зависит от используемой системы координат.

5. Основные дифференциальные уравнения группы. В этом параграфе мы найдем условия, которым должны удовлетворять функции f^i из (4.1), для того, чтобы преобразования составляли группу G_r, т. е., чтобы существовали функции $\varphi^\alpha(a_1, a_2)$, для которых

$$f^i(f(x;\ a_1);\ a_2) \equiv f^i(x;\ \varphi(a_1,\ a_2)). \qquad (5.1)$$

В первую очередь покажем, что

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}\right| \neq 0, \quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}\right| \neq 0. \qquad (5.2)$$

Из (5.1) следует, что

$$\frac{\partial f^i[f(x;a_1);\ a_2]}{\partial a_2^\alpha} = \frac{\partial f^i(x;\ \varphi)}{\partial\varphi^\beta}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial a_2^\alpha} \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ \ldots\ r).$$

Если $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}\right| \equiv 0$, то существует такая система функций A_2^α параметров a_1^α и a_2^α, что

$$A_2^\alpha\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial a_2^\alpha} = 0.$$

Тогда, заменяя $f^i(x;\ a_1)$ на x'^i, мы из предыдущей системы уравнений получим, что

$$A_2^\alpha\frac{\partial f^i(x';\ a_2)}{\partial a_2^\alpha} = 0,$$

т. е. в $f^i(x;\ a)$ апараметры a не являются существенными.

Если мы запишем (9.1) в виде

$$f^i(x';\ a_2) \equiv f^i[x;\ \varphi(a_1,\ a_2)], \qquad (5.3)$$

то получим

$$\frac{\partial f^i}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^j}{\partial a_1^\alpha} = \frac{\partial f^i}{\partial\varphi^\beta}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial a_1^\alpha}.$$

Если $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial a_1^\alpha}\right| \equiv 0$, то существуют такие функции A_1^α параметров a_1^α и a_2^α, что $A_1^\alpha \frac{\partial\varphi^\beta}{\partial a_1^\alpha} = 0$ и, следовательно,

$$\frac{\partial f^i}{\partial x'^j} A_1^\alpha \frac{\partial x'^j}{\partial a_1^\alpha} = 0.$$

Но якобиан $\left|\frac{\partial f(x'; a_2)}{\partial x'}\right|$ не равен тождественно нулю, следовательно,

$$A_1^\alpha \frac{\partial f^j(x; a_1)}{\partial a_1^\alpha} = 0,$$

и параметры a несущественны. Этот результат следует также из второго неравенства (5.2), если мы заметим, что в семействе обратных преобразований параметры a_1^α и a_2^α меняются ролями (см. (4.15)). Таким образом (5.2) доказано.

В силу второго неравенства (5.2), уравнения (4.6) можно разрешить относительно a_2^α, представив их в виде функций от a_1^α и a_3^α. Если эти выражения (a_2^α через a_1^α и a_3^α) подставить в (4.7), то получатся тождества относительно x, a_1 и a_3. Дифференцируя (4.7), получим

$$\frac{\partial f^i(x'; a_2)}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^j}{\partial a_1^\alpha} + \frac{\partial f^i(x'; a_2)}{\partial a_2^\beta} \frac{\partial a_2^\beta}{\partial a_1^\alpha} = 0.$$

Согласно (4.2), существуют функции $\psi_j^i(x'; a_2)$, определенные формулами:

$$\psi_i^k \frac{\partial f^i(x'; a_2)}{\partial x'^j} = \delta_j^k \quad (i, j, k = 1, \ldots, n),$$

где δ_j^k — символ Кронекера (2.14); следовательно, написанные выше уравнения эквивалентны следующим:

$$\frac{\partial x'^i}{\partial a_1^\alpha} = -\psi_j^i(x'; a_2) \frac{\partial f^j(x'; a_2)}{\partial a_2^\beta} \frac{\partial a_2^\beta}{\partial a_1^\alpha}.$$

Величины $\frac{\partial a_2^\beta}{\partial a_1^\alpha}$ являются функциями от a_1 и a_2, но с помощью (4.6) они выражаются через a_1 и a_2. Остальные величины правых частей этих уравнений являются функциями от x и a_1. Но левая сторона каждого из этих уравнений не содержит a_2^α, поэтому выражения, стоящие справа, не зависят от a_2. Следовательно, если $(a_2^\alpha)_0$ — частные значения величин a_2, и если мы положим

$$\left.\begin{aligned} \xi_b^i(x') &\equiv -\left[\psi_j^i \frac{\partial f^j(x'; a_2)}{\partial a_2^b}\right]_{a_2=(a_2)_0}, \\ A_\alpha^b(a_1) &\equiv \left(\frac{\partial a_2^b}{\partial a_1^\alpha}\right)_{a_2=(a_2)_0} \quad (b, a = 1, \ldots, r), \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

то

$$\frac{\partial x'^i}{\partial a^\alpha} = \xi_b^i(x') A_\alpha^b(a) \quad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ a, b = 1, \ldots, r \end{pmatrix}^{1)}. \tag{5.5}$$

Так как эти уравнения допускают в качестве решений $f^i(x; a)$, каковы бы ни были x, которые можно рассматривать как n произвольных постоянных, то система уравнений (5.5) вполне интегрируема. Этот факт, имеющий фундаментальное значение, позволит нам найти в § 6 условия, которым должны удовлетворять величины ξ и A.

Заметим, что детерминант $A_\alpha^b(a)$ не равен тождественно нулю.

$$|A_a^b| \neq 0. \tag{5.6}$$

В противном случае, существовала бы такая система функций A^α параметров a, что $A^\alpha A_\alpha^b = 0$, а тогда из (5.5) мы получили бы:

$$A^\alpha \frac{\partial f^i(x; a)}{\partial a^\alpha} = 0,$$

и a^α не были бы существенными (см. § 3).

---

1) В последующем индексы $a, b, c, \ldots$ принимают значения $1, \ldots, r$, а $i, j, k, \ldots$ — значения $1, \ldots, n$.

В силу (5.6) существует система функций $A_b^\alpha(a)$, определенная уравнениями

$$A_\alpha^b A_b^\beta = \delta_\alpha^\beta, \tag{5.7}$$

из которых следуют также соотношения

$$A_\alpha^b A_a^\alpha = \delta_a^b \text{ [1]}. \tag{5.8}$$

С помощью величин A_b^α уравнения (5.5) могут быть написаны в форме

$$\xi_b^i(x') = A_b^\alpha \frac{\partial x'^i}{\partial a^\alpha}. \tag{5.9}$$

Отсюда следует, что не может существовать система функций $\varphi^b(a)$ параметров a такая, для которой

$$\varphi^b(a)\xi_b^i(x') = 0, \tag{5.10}$$

так как иначе параметры a были бы несущественны (см. § 3). Поэтому не может иметь место равенство

$$c^b \xi_b^i(x) = 0, \tag{5.11}$$

где c^b—некоторые постоянные. Следовательно, между ξ_b^i нет линейной зависимости (с постоянными коэффициентами). Мы всегда будем указывать в скобках на это условие, чтобы отличать его от случая, когда ранг матрицы $\|\xi_a^i\|$ меньше r; тогда имеет место соотношение вида (5.11), где c^b—функции x (а не обязательно постоянные). Заметим, что все результаты этого параграфа равным образом применимы к полугруппам.

6. Первая основная теорема. Мы уже видели, что уравнения (5.5) вполне интегрируемы, следовательно, должны тождественно удовлетворяться условия интегрируемости. Эти условия имеют вид:

$$\left(\xi_a^j \frac{\partial \xi_b^i}{\partial x'^j} - \xi_b^j \frac{\partial \xi_a^i}{\partial x'^j}\right) A_\alpha^a A_\beta^b + \xi_b^i \left(\frac{\partial A_\beta^b}{\partial a^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha^b}{\partial a^\beta}\right) = 0. \tag{6.1}$$

---

[1] Величины A_α^a и A_a^α имеют, как будет показано в § 7, существенно различный характер; читателю советуем постоянно это помнить.

С помощью функций A_a^α, определенных уравнениями (5.7), уравнения (6.1) можно записать следующим образом:

$$\xi_a^j \frac{\partial \xi_b^i}{\partial x'^j} - \xi_b^j \frac{\partial \xi_a^i}{\partial x'^j} = c_{ab}^e \xi_e^i, \tag{6.2}$$

где

$$c_{ab}^e = A_a^\alpha A_b^\beta \left(\frac{\partial A_\alpha^e}{\partial a^\beta} - \frac{\partial A_\beta^e}{\partial a^\alpha} \right). \tag{6.3}$$

Так как (6.2) является тождеством относительно x и a, а последние не входят в ξ_b^i, то

$$\frac{\partial c_{ab}^e}{\partial a^\alpha} \xi_e^i = 0.$$

Из (6.3) следует, что c_{ab}^e не зависят от x'. Следовательно, $\frac{\partial c_{ab}^e}{\partial a^\alpha} = 0$, так как, в противном случае, мы имели бы соотношения вида (5.10). Таким образом:

[6.1] *Величины* c_{ab}^e *в уравнениях* (6.2) *и* (6.3) *постоянны.* Они называются *структурными константами* группы, некоторые авторы называют их *композиционными постоянными*. Из (6.2) следует, что

$$c_{ab}^e = -c_{ba}^e,$$

т. е. c_{ab}^e *кососимметричны* в индексах a и b.

Вследствие (5.8), уравнения (6.3) могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial A_\alpha^e}{\partial a^\beta} - \frac{\partial A_\beta^e}{\partial a^\alpha} = c_{ab}^e A_\alpha^a A_\beta^b, \tag{6.4}$$

а также, в силу (5.7), в виде:

$$A_a^\alpha \frac{\partial A_b^\beta}{\partial a^\alpha} - A_b^\alpha \frac{\partial A_a^\beta}{\partial a^\alpha} = c_{ab}^e A_e^\beta. \tag{6.5}$$

Уравнения (6.4) введены Маурером[1]).

[1]) 1888, 2, стр. 117.

Если мы напишем (4.7) в виде:

$$x''^i = f^i(x'; a_2) = f^i(x; a_3), \tag{6.6}$$

то аналогично (5.5) получим:

$$\frac{\partial x''^i}{\partial a_3^\alpha} = \xi_a^i(x'') A_\alpha^a(a_2), \qquad \frac{\partial x''^i}{\partial a_3^\alpha} = \xi_b^i(x'') A_\alpha^b(a_3),$$

соответственно тому, используем ли мы первое или второе выражение для x''^i. Если подставить второе выражение для x''^i в первую систему этих уравнений и заметить, что a_3^α являются функциями от a_1^α и a_2^α, то получится

$$\frac{\partial x''^i}{\partial a_3^\beta}\frac{\partial a_3^\beta}{\partial a_2^\alpha} = \xi_a^i(x'') A_\alpha^a(a_2).$$

Из этих двух систем уравнений следует, что

$$\frac{\partial a_3^\beta}{\partial a_2^\alpha} = A_b^\beta(a_3) A_\alpha^b(a_2), \tag{6.7}$$

так как иначе мы имели бы соотношеиие вида (5.10).

Обратно, предположим, что дана вполне интегрируемая система уравнений (5.5), для которой выполнеио (5.6), тогда имеют место (6.2) и (6.5). Так как уравнения (6.5) имеют тот же вид, что и (6.2), то, сравнивая (5.5) и (6.7), замечаем, что последние, вследствие (6.5), вполне интегрируемы. Эти уравнения допускают такое решение a_3^β, что $a_3^\beta = a_1^\beta$, когда a_2^α имеют начальные значения a_0^α, например,

$$a_3^\alpha = \varphi^\alpha(a_1;\ a_2;\ a_0), \quad a_1^\alpha = \varphi^\alpha(a_1;\ a_0;\ a_0), \quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}\right| \neq 0. \tag{6.8}$$

Предположим теперь, что система $f^i(x;\ a)$ решений (5.5) такова, что выполнено (4.2), и положим

$$x_3^i = f^i(x;\ a_3), \tag{6.9}$$

где a_3^α имеют значения (6.8). Поэтому, применяя (5.5), (6.7) и (5.8), имеем:

$$\frac{\partial x_3^i}{\partial a_2^\alpha}=\frac{\partial x_3^i}{\partial a_3^\beta}\frac{\partial a_3^\beta}{\partial a_2^\alpha}=\xi_a^i(x_3)\,A_\beta^a(a_3)\,A_b^\beta(a_3)\,A_\alpha^b(a_2)=$$
$$=\xi_b^i(x_3)\,A_\alpha^b(a^2).$$

Так как это — уравнения вида (5.5), то они имеют решения $f^i(\overline{x};\ a_2)$, где $\overline{x}$, будучи независимы от a^α, являются функциями от x^i, a_1^α и a_0^α, такими, что

$$f^i[x;\varphi(a_1;\ a_2;\ a_0)]=f^i(\overline{x};\ a_2) \qquad (6.10)$$

тождественно по x^i, a_1^α и a_2^α.

Пусть решение $f^i(x;\ a)$ таково, что для некоторой системы значений a_0^α параметров a^α, такой, что $|A_\alpha^a(a_0)|\neq 0$, мы имеем:

$$f^i(x;\ a_0)=x^i,$$

т. е. что значения a_0^α параметров a^α соответствуют тождественному преобразованию. Если мы используем эти значения a_0^α в вышеизложенном определении (6.8) функций φ^α, и если в (6.10) положим $a_2^\alpha=a_0^\alpha$, то эти тождества приведутся к $f^i(x;\ a_1)=\overline{x}^i$.

Если эти выражения для $\overline{x}^i$ подставим в (6.10), то получим (5.1). Далее, если a_1^α — значения параметров данного преобразования, то преобразование с параметрами a_2^α, определенными уравнениями:

$$\varphi^\alpha(a_1;\ a_2;\ a_0)=a_0^\alpha, \qquad (6.11)$$

является обращением данного преобразования. Полученные результаты можно сформулировать в виде следующей *первой основной теоремы* (см. § 11) теории непрерывных групп.

[6.2] *Для того, чтобы семейство n функций $f^i(x;\ a)$ от n переменных x^i и r существенных параметров a^α определяло группу, необходимо, чтобы эти функции* *удовлетворяли системе дифференциальных уравнений вида* (5.5), *где ранг матрицы, составленной из функций* $A_\alpha^a(a)$, *равен* r, *и между функциями* ξ_a^i *нет линейной зависимости (с постоянными коэффициентами).*

Обратно, если решения $f^i(x;\ a)$ *вполне интегрируемой системы уравнений вида* (5.5) *(где* A_α^a *и* ξ_b^i *удовлетворяют вышеуказанным условиям) таковы, что для некоторых значений* a_0^α, *не обращающих в нуль детерминант* $|A_\alpha^a|$, *справедливо*

$$f^i(x;\ a_0) = x^i, \tag{6.12}$$

то эти решения определяют непрерывную группу преобразований, т. е. обращение любого преобразования принадлежит группе[1]).

Покажем, что условиям второй части этой теоремы можно удовлетворить, если система (5.5) вполне интегрируема. Действительно, если $f^i(x;\ a)$ — n независимых решений такой системы, так что имеет место (4.2), и если a_0^α — значения a^α, для которых $|A_\alpha^a(a_0)| \neq 0$, то, написав уравнения преобразований T_{a_0} и $T_{a_0}^{-1}$ в виде

$$x_0^i = f^i(x;\ a_0), \quad x^i = \bar{f}^i(x_0;\ a_0),$$

получим, что уравнения преобразования $T_a T_{a_0}^{-1}$ имеют вид:

$$x'^i = f^i[\bar{f}(x_0;\ a_0);a].$$

Очевидно, что эти выражения являются решениями (5.5), в которых x^i заменены через $\bar{f}^i(x_0;\ a_0)$. Кроме того, $T_{a_0} T_{a_0}^{-1} = I$, следовательно, преобразования $T_a T_{a_0}^{-1}$ удовлетворяют условиям второй части теоремы [6.2]; действительно:

$$f^i[\bar{f}(x_0;\ a_0);\ a_0] = x_0^i.$$

Итак, мы получили теорему:

[6.3] *Если функции* ξ_a^i *и* A_α^a *удовлетворяют условиям* (6.2) *и* (6.4), *то уравнения* (5.5) *допускают неза-*

---

1) Доказательство этой теоремы является переделкой доказательства, данного Schur, 1891, 1, стр. 264—268.

висимую систему решений, определяющих группу преобразований G_r, для которой данные значения a^α, не обращающие в нуль $|A^\alpha_a|$, соответствуют тождественному преобразованию[1]).

7. Свойства структурных констант. Преобразования координат и параметров. Функции ξ^i_a, входящие в (5.5), определяют r линейных операторов (§ 2):

$$X_a f = \xi^i_a(x)\frac{\partial f}{\partial x^i} = \xi^i_a p_i. \tag{7.1}$$

Из (6.2) следует, что

$$(X_a, X_b) f = c^e_{ab} X_e f \quad (a,\ b,\ e = 1, \ldots, r). \tag{7.2}$$

Применяя тождество Якоби (2.4) к (7.2), получаем:

$$(c^e_{ab}\, c^f_{ec} + c^e_{bc}\, c^f_{ea} + c^e_{ca}\, c^f_{eb})\xi^i_f = 0.$$

Так как между ξ^i_a нет линейной независимости (с постоянными коэффициентами), то

[7.1] *Структурные константы группы удовлетворяют соотношениям*:

$$c^e_{ab} = -c^e_{ba}, \tag{7.3}$$

$$c^e_{ab}\, c^f_{ec} + c^e_{bc}\, c^f_{ea} + c^e_{ca}\, c^f_{eb} = 0. \tag{7.4}$$

Мы называем их *соотношениями Якоби*.

Если мы применим к x невырожденное преобразование вида (4.16) и (4.19), то из (5.5) будет следовать, что

$$\frac{\partial y'^i}{\partial a^\alpha} = \frac{\partial y'^i}{\partial x'^j}\xi^j_a(x') A^a_\alpha(a) = \eta^i_a(y') A^a_\alpha(a),$$

где

$$\eta^i_a(y) = \xi^j_a(x)\frac{\partial y^i}{\partial x^j}. \tag{7.5}$$

Две системы величин ξ^i_a и η^i_a, связанные соотношением типа (7.5), называются *компонентами* контравариантного

1) См. Bianchi, 1918, 1, стр. 85.

вектора V_n в соответствующих координатных системах[1]). Мы имеем:

$$Y_a f \equiv \eta_a^i(y)\frac{\partial f}{\partial y^i} = X_a f, \tag{7.6}$$

т. е. $X_a f$ при преобразованиях координат являются скалярами[2]).

Функции ξ_a^i и A_α^a были определены в (5.4). Предположим теперь, что мы определили новую систему функций ξ'^i_a формулами

$$\xi'^i_a(x) = c_a^b \xi_b^i(x), \tag{7.7}$$

где c_a^b — такие константы, что $|c_a^b| \neq 0$.

Тогда между ξ'^i_a нет линейной зависимости (с постоянными коэффициетами). Уравнениями

$$c_a^b \bar{c}_b^e = \delta_a^e, \quad c_a^b \bar{c}_e^a = \delta_e^b \tag{7.8}$$

однозначно определяется система констант $\bar{c}_a^b$.
Если теперь мы положим

$$A'^a_\alpha(a) = \bar{c}_b^a A_\alpha^b(a), \quad A'^\alpha_a(a) = c_a^b A_b^\alpha(a), \tag{7.9}$$

то (5.5) можно записать в виде:

$$\frac{\partial x'^i}{\partial a^\alpha} = \xi'^i_b(x')\, A'^b_\alpha(a),$$

так что в выборе ξ и A, согласно (7.7) и (7.9), имеется некоторая неопределенность.

Если заменить параметры a^α, положив

$$a^\alpha = \varphi^\alpha(a'^1, \ldots, a'^r), \tag{7.10}$$

где $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial a'}\right| \neq 0$, то из (5.4) получим, что

$$\xi'^i_b(x') = \xi_a^i(x')\left(\frac{\partial a_2^a}{\partial a_2'^b}\right)_{a_2' = (a_2')_0},$$

$$A'^b_\beta(a') = A_\alpha^a(a)\frac{\partial a^\alpha}{\partial a'^\beta}\left(\frac{\partial a_2'^b}{\partial a_2^a}\right)_{a_2 = (a_2)_0}.$$

---

[1]) См. 1926, 3, стр. 4.
[2]) См. 1926, стр. 6.

Следовательно, можно сказать, что замена a^α индуцирует линейное преобразование функций $\xi_a^i(x')$. Однако, ввиду отмеченной выше неопределенности, мы можем выбрать ξ_a^i, для параметров a'^α таким образом, что ξ_a^i для a'^α будут иметь вид $\xi_a^i[f(x;\ \varphi^1(a'), \ldots, \varphi^r(a'))]$, т. е. мы могли бы при замене координат считать их скалярами. Если теперь мы обозначим величины A для новых параметров через $A_\alpha'^b(a')$, то из (5.5) и аналогичного уравнения в параметрах a'^α получим:

$$\xi_b^i(x')\left[A_\beta'^b(a') - A_\alpha^b(a)\frac{\partial a^\alpha}{\partial a'^\beta}\right] = 0.$$

Вследствие замечания (5.10) имеем:

$$A_\beta'^b(a') = A_\alpha^b(a)\frac{\partial a^\alpha}{\partial a'^\beta} \quad (\alpha,\ \beta,\ b = 1, \ldots, r). \tag{7.11}$$

Следовательно, A_β^b подчиняются закону преобразования ковариантных векторов[1]) пространства S координат a_b^α. Индекс b указывает вектор, а α — компоненту. Векторы A_α^b образуют систему независимых ковариантных векторов пространства S, называемого *групповым пространством* группы G_r. Из (5.8) следует, что величины A_b^α, где индекс b указывает вектор, а индекс α компоненту, являются компонентами системы контравариантных векторов S, дуальной к системе A_α^b[2]).

Возвращаясь к рассмотрению (7.7), положим $X_a'f = \xi_a'^i(x)p_i$. Вместо (7.2) мы получим:

$$(X_a', X_b')f = c_{ab}'^e X_e'f, \tag{7.12}$$

где

$$c_{ab}'^e = c_a^{a_1} c_b^{b_1} \bar{c}_{e_1}^e c_{a_1 b_1}^{e_1}. \tag{7.13}$$

Ли называет $X_a f$ для $a = 1, \ldots, r$ *символами* группы. Мы будем называть их *базисом* группы (смысл этого

---

1) См. 1926, 3, 7.

2) См. 1926, 3, стр. 15.

выражения станет более ясным в §§ 10 и 11). Если базис преобразован согласно (7.7), то новые структурные константы даются формулами (7.13). Две r-параметрические группы, константы которых связаны соотношением (7.13), называются группами *одинаковой структуры*.

8. Полугруппы обратных преобразований. В § 4 мы уже видели, что обращения преобразований полугруппы G_r образуют полугруппу $\overline{G}_r$; в случае их совпадения G_r является группой. Сейчас мы изучим общий случай.

Для полугруппы $\overline{G}_r$ мы аналогично (5.5) получим вполне интегрируемую систему уравнений

$$\frac{\partial x^i}{\partial a^\alpha} = \overline{\xi}^i_b(x)\overline{A}^b_\alpha(a), \tag{8.1}$$

решениями которой являются указанные в (4.3) функции $\overline{f}^i(x'; a)$. Вследствие (4.15) для этого случая уравнения, аналогичные (5.1), имеют вид:

$$\overline{f}^i[\overline{f}(x'; a_2); a_1] = \overline{f}^i(x'; \varphi(a_1; a_2)). \tag{8.2}$$

Следовательно, вместо (6.7) мы получим:

$$\frac{\partial a_3^\beta}{\partial a_1^\alpha} = \overline{A}^\beta_b(a_3)\,\overline{A}^b_\alpha(a_1), \tag{8.3}$$

так как a_1 и a_2 поменялись ролями. Для значений a_0^α, для которых детерминант $|\overline{A}^b_\alpha(a)|$ не равен нулю, можно найти такую систему постоянных c^a_b, что

$$c^a_b\overline{A}^b_\alpha(a_0) = A^a_\alpha(a_0).$$

Вследствие (7.7) и (7.9), функции $\overline{\xi}^i_b$ и $\overline{A}^b_\alpha$ могут быть выбраны таким образом, что

$$\overline{A}^b_\alpha(a_0) = A^b_\alpha(a_0), \quad \overline{A}^\alpha_b(a_0) = A^\alpha_b(a_0). \tag{8.4}$$

Если мы напишем условия совместности уравнений (6.7) и (8.3), то мы получим:

$$A^b_\alpha(a_2)\overline{A}^a_\gamma(a_1)\left[\frac{\partial A^\beta_b(a_3)}{\partial a_3^\delta}\overline{A}^\delta_a(a_3) - \frac{\partial \overline{A}^\beta_a(a_3)}{\partial a_3^\delta}A^\delta_b(a_3)\right] = 0.$$

Так как это должно выполняться для всех значений a_1^α и a_2^α, то величина в скобках должна равняться нулю. Меняя индексы, имеем:

$$\frac{\partial A_b^\alpha}{\partial a^\beta}\bar{A}_a^\beta - \frac{\partial \bar{A}_a^\alpha}{\partial a^\beta}A_b^\beta = 0. \tag{8.5}$$

Для дальнейшего изучения этих уравнений мы определим функции $L_{\beta\gamma}^\alpha$ параметров a уравнениями

$$\frac{\partial A_b^\alpha}{\partial a^\gamma} + A_b^\beta L_{\beta\gamma}^\alpha = 0, \tag{8.6}$$

в силу (5.7), эквивалентными уравнениям

$$L_{\beta\gamma}^\alpha = -A_\beta^b\frac{\partial A_b^\alpha}{\partial a^\gamma} = A_b^\alpha\frac{\partial A_\beta^b}{\partial a^\gamma}. \tag{8.7}$$

Из (8.7) и (6.5) мы получаем:

$$L_{\beta\gamma}^\alpha - L_{\gamma\beta}^\alpha = c_{ab}^e A_\beta^a A_\gamma^b A_e^\alpha. \tag{8.8}$$

Если, аналогично (8.6), мы положим

$$\frac{\partial \bar{A}_b^\alpha}{\partial a^\gamma} + \bar{A}_b^\beta \bar{L}_{\beta\gamma}^\alpha = 0, \tag{8.9}$$

то из (8.5) и (8.7) найдем, что

$$\bar{L}_{\beta\gamma}^\alpha = L_{\gamma\beta}^\alpha. \tag{8.10}$$

Аналогично (6.5) имеем:

$$\bar{A}_a^\alpha\frac{\partial \bar{A}_b^\beta}{\partial a^\alpha} - \bar{A}_b^\alpha\frac{\partial A_a^\beta}{\partial a^\alpha} = \bar{c}_{ab}^e A_e^\beta, \tag{8.11}$$

и подобно (8.8),

$$\bar{L}_{\beta\gamma}^\alpha - \bar{L}_{\gamma\beta}^\alpha = \bar{c}_{ab}^e \bar{A}_\beta^a \bar{A}_\gamma^b \bar{A}_e^\alpha. \tag{8.12}$$

Из (8.10), (8.8) и (8.12), полагая $a^\alpha = a_0^\alpha$ и используя (8.4), находим:

$$\bar{c}_{ab}^e = -c_{ab}^e. \tag{8.13}$$

Сравнивая эти уравнения с (7.13), видим, что их можно получить из последних, полагая $c_b^a = -\delta_b^a$. Следовательно, данная полугруппа и полугруппа обращений ее преобразований имеют одинаковую структуру (действительно, знак минус является следствием выбора (8.4)).

Так как ранг детерминанта $|A_b^\alpha|$ равен r (§ 5), то существуют функции $\rho_a^b(a)$, определенные уравнениями

$$\bar{A}_a^\alpha = \rho_a^b A_b^\alpha. \tag{8.14}$$

ρ_a^b преобразуются как скаляры, когда параметры a^α испытывают аналитическое преобразование. В частности, из (8.4) следует

$$\rho_a^b(a_0) = \delta_a^b. \tag{8.15}$$

Если выражения (8.14) подставим в (8.9) и $\bar{L}_{\beta\gamma}^\alpha$ заменим на $L_{\gamma\beta}^\alpha$, то, вследствие (8.6), получим:

$$\frac{\partial \rho_a^b}{\partial a^\gamma} = \rho_a^e A_\alpha^b A_e^\beta (L_{\beta\gamma}^\alpha - L_{\gamma\beta}^\alpha), \tag{8.16}$$

что, в силу (8.8) и (5.8), приводится к

$$\frac{\partial \rho_a^b}{\partial a^\alpha} = c_{ef}^b \rho_a^e A_\alpha^f. \tag{8.17}$$

Условия интегрируемости этих уравнений, в силу (8.6) и (8.8), приводятся к

$$(c_{hd}^e c_{ec}^b + c_{dc}^e c_{eh}^b + c_{ch}^e c_{ed}^b)\rho_a^h A_\alpha^c A_\beta^d = 0,$$

что является тождеством, в силу соотношений Якоби (7.4). Следовательно, уравнения (8.17) вполне интегрируемы и ρ_a^b являются решениями, удовлетворяющими начальным условиям (8.15). Полная интегрируемость системы (8.17) видна также из того, что уравнения (8.9) вполне интегрируемы.

Уравнения (8.14) могут быть написаны в виде:

$$\rho_a^b = \bar{A}_a^\alpha A_\alpha^b. \tag{8.18}$$

Другая система скаляров $\bar{\rho}_a^b$ определяется формулами:

$$\bar{\rho}_a^b = \bar{A}_a^b A_a^\alpha. \qquad (8.19)$$

Мы имеем:

$$\bar{\rho}_a^b \rho_c^a = \delta_c^b. \qquad (8.20)$$

Из (8.20) и (8.17) получаем:

$$\frac{\partial \bar{\rho}_b^a}{\partial a^\alpha} = c_{eb}^d \bar{\rho}_d^a A_\alpha^e. \qquad (8.21)$$

Кроме того, из (8.8), (8.10), (8.12) и (8.13) имеем:

$$\bar{c}_{ab}^d = c_{ef}^g \bar{\rho}_a^e \bar{\rho}_b^f \rho_g^d. \qquad (8.22)$$

9. Параметрические группы G_r. В § 4 мы указали первое условие того, чтобы преобразования T_a образовывали группу:

$$T_{a_3} = T_{a_2} T_{a_1}, \qquad (9.1)$$

где параметры связаны соотношением

$$a_3^\alpha = \varphi^\alpha(a_1, a_2). \qquad (9.2)$$

Мы можем рассматривать (9.1), как определение преобразования точки с координатами a_1^α группового пространства S в точку с координатами a_3^α, порожденного преобразованием T_{a_2}. Тогда (9.2) будут уравнениями этого преобразования, а a_2^α будут параметрами. Покажем, что эти преобразования образуют полугруппу. Действительно, если мы положим

$$a_3'^\alpha = \varphi^\alpha(a_3, a_2'),$$

то мы получим

$$T_{a_3'} = T_{a_2'} T_{a_3} = T_{a_2'} (T_{a_2} T_{a_1}) = (T_{a_2'} T_{a_2}) T_{a_1} = T_{a_2''} T_{a_1},$$

где последнее выражение является следствием (9.1) и

$$a_2''^\alpha = \varphi^\alpha(a_2, a_2'). \qquad (9.3)$$

Таким образом, мы показали, что уравнения (9.2), в которых a_2 являются параметрами, определяют полугруппу преобразований, причем функции φ^α, связывающие ее параметры, те же самые, что и для полугруппы G_r. Если G_r — группа и a_0^α — значения параметров, соответствующие тождеству, то, как следует из (4.14), для этих значений параметров a_2^α, уравнения (9.2) определяют тождественное преобразование. Обратно, если уравнения (9.2) определяют группу, то и G_r — группа. Заметим еще, что уравнения (6.7) аналогичны (5.5) для G_r. Символическое уравнение

$$T_{a_3}^{-1} = T_{a_1}^{-1} T_{a_2}^{-1}$$

может также рассматриваться как определение преобразования точки с координатами a_2^α в точку с координатами a_3^α группового пространства S, преобразования, порожденного $T_{a_1}^{-1}$. (9.2) будут уравнениями этого преобразования, где a_1^α — параметры. Полагая

$$a_3'^\alpha = \varphi^\alpha(a_1', a_3),$$

будем иметь:

$$T_{a_3'}^{-1} = T_{a_1'}^{-1} T_{a_3}^{-1} = (T_{a_1'}^{-1} T_{a_1}^{-1}) T_{a_2}^{-1} = T_{a_1''}^{-1} T_{a_2}^{-1},$$

где

$$a_1''^\alpha = \varphi^\alpha(a_1', a_1).$$

Следовательно, уравнения (9.2) с параметрами a_1^α определяют полугруппу или группу, соответственно тому, будет ли G_r полугруппой или группой. В этом случае уравнения (8.3) являются уравнениями этой группы (или полугруппы), аналогичными (8.1) для $\bar{G}_r$.

Если G_r — группа, то группы, определенные (9.2), где a_2^α или a_1^α рассматриваются как параметры, называются соответственно *первой и второй параметрическими группами*. Их символы имеют вид

$$A_a f = A_a^\alpha \frac{\partial f}{\partial a^\alpha}, \quad \bar{A}_a f = \bar{A}_a^\alpha \frac{\partial f}{\partial a^\alpha}. \qquad (9.4)$$

Из § 8 следует, что эти две группы имеют ту же структуру, что и G_r (это, очевидно, верно и для полугруппы). Из (4.14) и (6.7) имеем:

$$A_b^\beta(a_1) = A_b^\alpha(a_0)\frac{\partial\varphi^\beta(a_1, a_0)}{\partial a_0^\alpha}, \tag{9.5}$$

а из (8.3) аналогично получим:

$$\bar{A}_b^\beta(a_1) = \bar{A}_b^\alpha(a_0)\frac{\partial\varphi^\beta(a_0, a_1)}{\partial a_0^\alpha}. \tag{9.6}$$

10. Однопараметрические группы. Пусть

$$x'^i = f^i(x^1, \ldots, x^n; a) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{10.1}$$

— уравнения однопараметрической группы G_1, и a_0 — значение, соответствующее тождеству, так что

$$f^i(x; a_0) = x^i. \tag{10.2}$$

Функции f^i являются решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. (5.5))

$$\frac{dx'^i}{da} = \xi^i(x')A(a), \tag{10.3}$$

удовлетворяющими начальным условиям (10.2). Если мы определим параметр t уравнением

$$t = \int_{a_0}^{a} A(a)\,da, \tag{10.4}$$

то $t = 0$ будет соответствовать тождеству, а уравнение (10.3) перейдет в

$$\frac{dx'^i}{dt} = \xi^i(x'). \tag{10.5}$$

Переписывая (4.6) и (4.14), имеем:

$$a_3 = \varphi(a_1, a_2), \quad a = \varphi(a_0, a) = \varphi(a, a_0), \tag{10.6}$$

и, аналогично,

$$t_3 = \theta(t_1, t_2), \quad t = \theta(0, t) = \theta(t, 0).$$

Ввиду способа, которым получено (6.7), функция $\varphi(a_1, a_2)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial a_3}{\partial a_2} = \frac{A(a_2)}{A(a_3)}. \tag{10.7}$$

Если мы напишем обращение уравнения (10.4) в виде

$$a = a(t), \tag{10.8}$$

то из (10.6) следует, что

$$a(\theta) = \varphi(a(t_1), a(t_2))$$

является тождеством относительно t_1 и t_2. Дифференцируя по t_2, имеем:

$$\frac{da(t_3)}{dt_3}\frac{\partial\theta}{\partial t_2} = \left(\frac{\partial\varphi(a_1, a_2)}{\partial a_2}\right)_{\substack{a_1 = a(t_1)\\ a_2 = a(t_2)}} \frac{da(t_2)}{dt_2}.$$

Ввиду (10.7) и (10.4), это приводится к $\frac{\partial\theta}{\partial t_2} = 1$. Таким образом, в силу начальных условий, мы имеем:

$$t_3 = t_1 + t_2. \tag{10.9}$$

Этот результат следует также из уравнений (10.5). Действительно, любое решение (10.5) удовлетворяет уравнениям

$$\frac{dx'^1}{\xi^1} = \ldots = \frac{dx'^n}{\xi^n},$$

общее решение которых дается $n-1$ уравнениями

$$\varphi^\alpha(x'^1, \ldots, x'^n) = c^\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, n-1), \tag{10.10}$$

где φ^α независимы, и c^α постоянны.

Не нарушая общности, мы можем предположить, что эти уравнения разрешены относительно $x'^1, \ldots, x'^{n-1}$ в виде функций от x'^n и c^α. Подставив их в $\xi^n(x')$, получим $\bar{\xi}^n(x'^n, c^1, \ldots, c^{n-1})$. Если положить

$$t + c^n = \int\frac{dx'^n}{\bar{\xi}^n} = \bar{\varphi}^n(x'^n, c^1, \ldots, c^{n-1}) =$$
$$= \varphi^n(x'^1, \ldots, x'^n),$$

где φ^n равно $\bar{\varphi}^n$ при c^α замененных на φ^α, то в дополнение к (10.10) получим:

$$\varphi^n(x'^1, \ldots, x'^n) = c^n + t. \tag{10.11}$$

Так как для $t=0$ $x'^i = x^i$, то (10.1) можно заменить соотношением

$$\varphi^i(x') = \varphi^i(x) + \delta^i_n t \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{10.12}$$

откуда следует, что закон композиции параметров дается формулой (10.9).

Если мы произведем замену координат

$$y'^i = \varphi^i(x^1, \ldots, x^n) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{10.13}$$

то уравнения (10.12) примут вид

$$y'^i = y^i + \delta^i_n t \tag{10.14}$$

и будут представлять *параллельный перенос*. Две группы с одинаковым числом переменных, преобразующиеся одна в другую при невырожденном преобразовании координат, называются *подобными*. Таким образом:

[10.1] *Любая однопараметрическая группа преобразований подобна однопараметрической группе параллельных переносов.*

Важно заметить, что часто это подобие имеет место только для ограниченной области t. Так, если мы рассмотрим группу вращений евклидовой плоскости, оператором которой является (см. упражнение 4, § 11)

$$x^1 p_2 - x^2 p_1, \tag{10.15}$$

то функции φ^i, построенные выше, в данном случае имеют вид:

$$\varphi^1 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \equiv r, \quad \varphi^2 = \arccos \frac{x^1}{r}.$$

Следовательно, в этом случае t должно принимать значения от 0 до 2π, тогда как для переносов t может принимать любые значения.

Заметим, что функции $\varphi^\alpha(x')$ в (10.10) являются решениями уравнений
$$Xf \equiv \xi^i p_i = 0, \tag{10.16}$$
и что $X\varphi^n = 1$. Следовательно, в силу (7.5), для преобразования (10.13) получим:
$$\eta^\alpha(y) = 0, \ \eta^n(y) = 1 \ (\alpha = 1, \ldots, n-1).$$
Поэтому уравнения (10.5) в координатах y имеют вид:
$$\frac{dy'^\alpha}{dt} = 0, \ \frac{dy'^n}{dt} = 1 \ (\alpha = 1, \ldots, n-1),$$
и решением их является (10.14). Вместе с тем мы доказали теорему:

[10.2] *Если $\xi^i(x)$ — компоненты контравариантного вектора, то существует координатная система, в которой компоненты вектора равны δ^i_n.*

Уравнения (10.10) определяют конгруэнцию интегральных кривых уравнений (10.5), проходящих через каждую точку. Уравнения (10.12) определяют кривую, отнесенную к параметру t, проходящую через $P(x)$. Эти кривые называются *траекториями* группы; каждая из них описывается некоторой точкой, когда к последней применяются преобразования группы.

Возвращаясь к рассмотрению уравнений (10.5), найдем их решение в виде степенных рядов по t. Очевидно, что
$$x'^i = x^i + t\xi^i(x) + \frac{t^2}{2!}\xi^j(x)\frac{\partial\xi^i(x)}{\partial x^j} + \ldots \tag{10.17}$$

Используя обозначения (10.16) и обозначая через $X^m f$ результат m-кратного применения X к f, напишем эти выражения в виде:
$$\begin{aligned} x'^i = x^i + tXx^i + \frac{t^2}{2!}X^2x^i + \ldots + \\ + \frac{t^m}{m!}X^m x^i + \ldots \end{aligned} \tag{10.18}$$

Далее, любая функция $f(x'^1, \ldots, x'^n)$, регулярная в области x^i, выражается в виде:
$$f(x') = f(x) + tXf + \ldots + \frac{t^m}{m!}X^m f + \ldots \tag{10.19}$$

Действительно,

$$f(x')=f(x)+\left(\frac{\partial f}{\partial x'^i}\frac{dx'^i}{dt}\right)_{t=0}+\ldots,$$

и искомый результат следует из (10.5). Если ряды (10.18) сходятся для $0\leqslant t\leqslant t_1$, то для этих значений t уравнения (10.18), которые мы запишем в виде

$$x'^i=F^i(x,t), \tag{10.20}$$

эквивалентны (10.1) для значений a, получаемых из (10.8). Т. е., может случиться, что (10.18) дает только часть траектории, проходящей через $P(x)$ и определенной уравнениями (10.1). При преобразовании координат (10.13) уравнения (10.20) для ограниченных значений t приобретают вид (10.14). Отсюда следует, что, если $P(x')$ — точка указанного выше отрезка траектории, то применением (10.20) к P' мы получим другой отрезок. Следовательно, повторным применением (10.20) достаточное число раз мы получаем траекторию, проходящую через $P(x)$ на всем ее протяжении, которое дается уравнениями (10.1).

Для группы вращений плоскости с символом (10.15) мы из (10.18) получим:

$$x'^1=x^1-x^2t-x^1\frac{t^2}{2!}+x^2\frac{t^3}{3!}+\ldots=x^1\cos t-x^2\sin t,$$

$$x'^2=x^2+x^1t-x^2\frac{t^2}{2!}-x^1\frac{t^3}{3!}+\ldots=x^1\sin t+x^2\cos t.$$

Следовательно, в этом случае (10.18) имеет место вдоль всей траектории.

Если в (10.17) мы заменим t на бесконечно малое δt и пренебрежем степенями δt, то получим преобразование

$$x'^i=x^i+\xi^i(x)\,\delta t, \tag{10.21}$$

называемое *инфинитезимальным преобразованием* группы G_1. При интегрировании (в смысле предшествующего абзаца) инфинитезимального преобразования получается группа G_1. Ли первый предпринял систематическое изучение строения непрерывных групп при помощи инфинитезимальных преобразований.

11. Подгруппы G_1 группы G_r. Если в уравнениях (4.1) группы G_r взять a^α функциями единственного параметра t:

$$a^\alpha = a^\alpha(t), \tag{11.1}$$

то получатся уравнения

$$x'^i = f^i(x; a^1(t), \ldots, a^r(t)) \equiv F^i(x; t) \tag{11.2}$$

∞^1 преобразований. Возникает вопрос, при каких условиях эти преобразования образуют группу G_1. Для этого должна существовать функция

$$t_3 = \theta(t_1, t_2),$$

такая, что выполняется соотношение (4.6):

$$a^\alpha(t_3) = \varphi^\alpha(a^1(t_1), \ldots, a^r(t_1);$$
$$a^1(t_2), \ldots, a^r(t_2)) \equiv \varphi^\alpha(a(t_1), a(t_2)).$$

Дифференцированием этих уравнений по t_2 получим:

$$\frac{da^\alpha(t_3)}{dt_3}\frac{\partial\theta}{\partial t_2} = \left(\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial a_2^\beta}\right)_{\substack{a_1^\alpha = a^\alpha(t_1)\\ a_2^\alpha = a^\alpha(t_2)}} \frac{da^\beta(t_2)}{dt_2},$$

что вследствие (6.7) приведется к

$$\frac{da^\alpha(t_3)}{dt_3}\frac{\partial\theta}{\partial t_2} = A_b^\alpha(a(t_3))\, A_\beta^b(a(t_2))\frac{da^\beta(t_2)}{dt_2}, \tag{11.3}$$

где

$$A_\beta^b(a(t)) \equiv A_\beta^b(a^1(t), \ldots, a^r(t)).$$

Если мы положим

$$\psi^b(t) \equiv A_\alpha^b(a(t))\frac{da^\alpha(t)}{dt}, \tag{11.4}$$

то, применив (5.7) и (5.8), уравнения (11.3) получим в виде:

$$\psi^b(t_3)\frac{\partial\theta}{\partial t_2} = \psi^b(t_2).$$

Из этих уравнений следует:

$$\frac{\psi^a(t_3)}{\psi^b(t_3)} = \frac{\psi^a(t_2)}{\psi^b(t_2)} \quad (a, b = 1, \ldots, r).$$

Так как эти соотношения должны иметь место для всех значений t_2, то обе стороны их постоянны, следовательно,

$$\psi^a(t) = e^a \psi(t),$$

где e^a — постоянные. Уравнения (11.4) принимают вид:

$$A^b_\alpha(a(t)) \frac{da^\alpha(t)}{dt} = e^b \psi(t).$$

Если мы введем новый параметр t', $t' = \int\limits_{t_0}^{t} \psi(t)\,dt$, где t_0 таково, что $a^\alpha(t_0) = \overset{\alpha}{a_0}$, ($\overset{\alpha}{a_0}$ — значения, соответствующие тождеству), то написанные выше уравнения, выраженные через новый параметр, который мы опять назовем t, приобретут вид:

$$\frac{da^\beta}{dt} = e^b A^\beta_b(a). \tag{11.5}$$

По выбору t имеем, что $t = 0$ соответствует тождественному преобразованию. Следовательно, искомые функции $a^\alpha(t)$ являются решениями (11.5) для начальных условий $a^\alpha(0) = a^\alpha_0$. Ввиду (11.5), уравнения (11.3) сводятся к

$$\frac{\partial \theta}{\partial t_2} = 1. \tag{11.6}$$

Из (4.14) следует, что $\theta(0, t_2) = t_2$ и $\theta(t_1, 0) = t_1$. Следовательно, решение (11.6) есть

$$t_3 = t_1 + t_2. \tag{11.7}$$

Обратно, если в (11.5) e^a — любая система постоянных, а функции $a^\alpha(t)$ — такие решения (11.5), что $a^\alpha(0) = \overset{\alpha}{a_0}$, то, используя (11.7), видим, что удовлетворено (11.3). Следовательно,

$$a^\alpha(t_1 + t_2) - \varphi^\alpha(a(t_1), a(t_2))$$

является функцией только t_1. Но это выражение исчезает при $t_2=0$ и любом t_1, следовательно, оно исчезает тождественно. Таким образом, если функции $a^\alpha(t)$ подставить в (11.2), то получающиеся уравнения для любой системы значений e^a определяют однопараметрическую группу, причем тождеству всегда соответствует $t=0$.

Предположим теперь, что мы имеем решение (11.5), содержащее e^a в качестве параметров и удовлетворяющее начальному условию

$$a^\alpha(0)=a_0^\alpha.$$

Тогда, используя (5.5), получаем

$$\frac{dx'^i}{dt}=\xi_a^i(x')\,A_\alpha^a(a)\,\frac{da^\alpha}{dt}=e^a\xi_a^i(x')\equiv\xi^i(x'). \tag{11.8}$$

Интегралы этих уравнений, обращающиеся в x^i при $t=0$, представим в виде степенных рядов по t (см. § 10):

$$x'^i=x^i+tXx^i+\ldots+\frac{t^m}{m!}X^m x^i+\ldots, \tag{11.9}$$

где

$$Xf=\xi^i(x)\,p_i=e^a\xi_a^i p_i. \tag{11.10}$$

Подставляя второе выражение для Xf из (11.10) в уравнения (11.9), имеем:

$$x'^i=x^i+te^aX_ax^i+\ldots+$$
$$+\frac{t^m}{m!}e^{a_1}\ldots e^{a_m}X_{a_1}\ldots X_{a_m}x^i+\ldots \tag{11.11}$$

Из структуры этих выражений следует, что a^α, являющиеся, как мы уже видели, функциями e^α и t, можно представить в виде

$$a^\alpha=\psi^\alpha(u^1,\ldots,u^r),\quad u^a=e^at. \tag{11.12}$$

Выражения для ψ^α в виде бесконечных рядов будут получены в § 12.

Значения t, для которых сходятся ряды (11.11), очевидно, зависят от значений e и x. Для соответствующей области t уравнения (11.11) могут быть написаны в виде:

$$x'^i = F^i(x; u). \tag{11.13}$$

Очевидно, что, если выражения (11.12) подставить в (11.2), то получатся (11.13). Следовательно, для значений t, для которых ряды (11.11) сходятся при данных значениях e и x, уравнения (11.11) определяют преобразования данной группы G_r, и эти преобразования, по терминологии Ли, порождены в смысле § 10 соответствующим инфинитезимальным преобразованием

$$x'^i = x^i + e^a \xi^i_a(x)\,\delta t. \tag{11.14}$$

Для данных значений x в (11.11) существуют значения $u^a = e^a t$ (вообще говоря, ограниченные), для которых ряды могут быть обращены, и u^a получены, как функции x^i и x'^i. Следовательно, для любой достаточно близкой к $P(x)$ точки $P'(x')$ существует преобразование, переводящее P в P'. Если в уравнениях $x'^i = f^i(x; a)$ мы придадим параметрам a значения, для которых эти уравнения имеют смысл, то получим точку $P'(x')$, в которую переводится $P(x)$ соответствующим преобразованием. Если эти значения a таковы, что u могут быть определены посредством (11.12), т. е., если можно для данных значений a разрешить эти уравнения относительно u в виде функций от a, то определяется подгруппа G_1. Траектория этой группы, проходящая через $P(x)$, проходит и через $P'(x')$. Как мы видели в § 10, $P'(x')$ в этом случае может быть получена из $P(x)$ (при соответствующих значениях e) либо преобразованиями (11.11), либо произведением таких преобразований.

Существуют, однако, случаи, когда значения a^α, дающие P', таковы, что невозможно найти группу G_1, траектория которой, содержащая точку P, проходит через P'. Возникает вопрос, нельзя ли перейти от P к P' по некоторому множеству траекторий, т. е. при помощи некоторой системы e^a перевести P в P_1, при помощи другой системы — P_1 в P_2 и так далее.

Можно показать, что если $P(x)$ и $P'(x')$ — точки связного многообразия, то P может быть преобразовано в P' этим способом, т. е. произведением преобразований некоторых групп первого порядка[1]. Тем самым установлено, что группа G_r образована совокупностью преобразований групп G_1, порожденных инфинитезимальными преобразованиями с символами $e^a X_a f$, где e^a — произвольные постоянные. $X_a f$ называются *образующими* группы G_r. Полученные результаты могут быть сформулированы следующим образом:

[11.1] *Преобразованиями непрерывной группы G_r с символами $X_a f$ являются преобразования групп G_1, порожденных инфинитезимальными преобразованиями с символами $e^a X_a f$, где e^a — произвольные постоянные и произведения таких преобразований.*

Непрерывная группа, удовлетворяющая этим условиям, называется группой **Ли**. Ввиду предыдущих рассмотрений имеем:

[11.2]. *Для того, чтобы группа G_1, порожденная инфинитезимальным преобразованием с символом Xf, была, в той же координатной системе подгруппой G_r с символами $X_1 f, \ldots, X_r f$, необходимо и достаточно, чтобы Xf являлось линейной комбинацией (с постоянными коэффициентами) символов $X_1 f, \ldots, X_r f$.*

И, как следствие этого:

[11.3] *Для того, чтобы две системы операторов $X_a f$ и $X_a' f$ в одной и той же системе координат были символами одной группы, необходимо и достаточно, чтобы*

$$X_a' f = c_a^b X_b f, \tag{11.15}$$

где c_a^b — постоянные, и детерминант $|c_a^b|$ отличен от нуля. Если для символов $X_a' f$ обозначим через e'^a постоянные, соответствующие тому же инфинитезимальному преобразованию, что и $e^a X_a f$, то из (11.15) и (7.8) получим:

$$e'^a = \bar{c}_b^a e^b. \tag{11.16}$$

---

[1]) Schreier, 1925, 2, стр. 18, 19.

В терминах параметров a^α, введенных в (11.2), инфинитезимальное преобразование (ввиду (5.5)) определится уравнением

$$x'^i = f^i(x; a_0 + \delta a_0) = x^i + \left(\frac{\partial f^i}{\partial a^\alpha}\right)_{a^\alpha = a_0^\alpha} \delta a_0^\alpha =$$

$$= x^i + \xi_a^i(x) A_\alpha^a(a_0) \delta a_0^\alpha. \qquad (11.17)$$

Отсюда и из (11.5) имеем:

[11.4] *Если даны конечные уравнения группы, то векторы ξ^i общего инфинитезимального преобразования группы получаются пренебрежением второй и высшими степенями δt в уравнениях*

$$x^i + \xi^i \delta t = f^i(x; a_0^1 + e^1 \delta t, \ldots, a_0^r + e^r \delta t),$$

где e^a постоянные.

Рассмотрим теперь преобразование, определенное значениями $a^\alpha + \delta a^\alpha$, где a^α соответствует преобразованию (11.2),

$$x''^i = f^i(x; a + \delta a) = x'^i + \xi_a^i(x') A_\alpha^a(a) \delta a^\alpha.$$

Сравнивая этот результат с (11.7), мы видим, что если определим величины $\delta_1 a_0^\alpha$ уравнениями

$$A_\alpha^a(a_0) \delta_1 a_0^\alpha = A_\beta^a(a) \delta a^\beta,$$

то написанные выше уравнения перейдут в

$$x''^i = x'^i + \xi_a^i(x') A_\alpha^a(a_0) \delta_1 a_0^\alpha.$$

Следовательно,

$$T_{a + \delta a} = T_{a_0 + \delta_1 a_0} T_a. \qquad (11.18)$$

Мы получим тот же результат из (4.6), (4.14) и (9.5), именно:

$$a^\alpha + \delta a^\alpha = \varphi^\alpha(a; a_0 + \delta_1 a_0) = \varphi^\alpha(a; a_0) + \frac{\partial \varphi^\alpha(a; a_0)}{\partial a_0^\beta} \delta_1 a_0^\beta =$$

$$= a^\alpha + A_a^\alpha(a) A_\beta^a(a_0) \delta_1 a_0^\beta.$$

Таким же образом из (9.6) получим:

$$a^\alpha + \delta a^\alpha = \varphi^\alpha (a_0 + \delta_2 a_0; a) = \varphi^\alpha (a_0; a) + \frac{\partial \varphi^\alpha (a_0; a)}{\partial a_0^\beta} \delta_2 a_0^\beta =$$
$$= a^\alpha + \overline{A}^\alpha_a (a) \overline{A}^a_\beta (a_0) \delta_2 a_0^\beta .$$

Следовательно, для $\delta_2 a_0^a$, определенных этими уравнениями, имеем:

$$T_{a+\delta a} = T_a T_{a_0+\delta_2 a_0}. \qquad (11.19)$$

Так как $T_{a+\delta a}$ является преобразованием из окрестности T_a, то:

[11.5] *Любое преобразование группы G_r, принадлежащее окрестности T_a, может быть получено умножением T_a слева или справа на соответствующее инфинитезимальное преобразование G_r.*

Упражнения

1. Символ группы G_1 *растяжений* или *подобных* преобразований, уравнения которой гласят $x'^i = ax^i$, имеет вид $Xf = x^i p_i$.

2. Показать, что каждая следующая система уравнений определяет однопараметрическую группу, и в каждом случае найти символ и траектории:

(i) $x' = ax, \qquad y' = \dfrac{y}{a}$;

(ii) $x' = a^m x, \qquad y' = a^n y \qquad$ (m, n — целые);

(iii) $x' = \dfrac{x}{1-ax}, \qquad y' = \dfrac{y}{1-ay}$.

3. Найти конечные уравнения однопараметрических групп со следующими символами:

(i) $x^2 p + xyq$

(ii) $(x-y)p + (x+y)q$; $\qquad \left(p = \dfrac{\partial f}{\partial x}, q = \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$;

(iii) $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} + m\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

4. Для группы G_3 движений плоскости, определяемой уравнениями

$$x'^1 = a^1 + x^1 \cos a^3 - x^2 \sin a^3,$$
$$x'^2 = a^2 + x^1 \sin a^3 + x^2 \cos a^3,$$

функции

$$\left\|\begin{matrix}\xi_1^1 & \xi_2^1 & \xi_3^1\\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}1 & 0 & x'^2\\ 0 & 1 & -x'^1\end{matrix}\right\|,$$

$$\left\|\begin{matrix}A_1^1 & A_1^2 & A_1^3\\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3\\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ a^2 & -a^1 & -1\end{matrix}\right\|$$

удовлетворяют уравнениям (5.5). Соответствующие символы имеют вид:

$$X_1f = p_1,\ X_2f = p_2,\ X_3f = x^2p_1 - x^1p_2,$$

а структурные константы суть

$$c_{12}^1 = c_{12}^2 = c_{12}^3 = 0,\ c_{13}^1 = c_{13}^3 = 0,\ c_{13}^2 = -1,$$

$$c_{23}{}^1 = 1,\ c_{23}{}^2 = c_{23}{}^3 = 0.$$

5. Пользуясь эйлеровыми углами, уравнения группы G_3 вращений трехмерного пространства можно записать следующим образом:

$$x'^1 = (\cos a^1 \sin a^2 \sin a^3 + \cos a^2 \cos a^3)\, x^1 +$$
$$+ (\cos a^1 \cos a^2 \sin a^3 - \sin a^2 \cos a^3)\, x^2 + \sin a^1 \sin a^3 x^3,$$
$$x'^2 = (\cos a^1 \sin a^2 \cos a^3 - \cos a^2 \sin a^3)\, x^1 +$$
$$+ (\cos a^1 \cos a^2 \cos a^3 + \sin a^2 \sin a^3)\, x^2 + \sin a^1 \cos a^3 x^3,$$
$$x'^3 = -\sin a^1 \sin a^2 x^1 - \sin a^1 \cos a^2 x^2 + \cos a^1 x^3.$$

Уравнения (5.5) для G_3 удовлетворяются функциями

$$\left\|\begin{matrix}\xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3\\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3\\ \xi_3^1 & \xi_3^2 & \xi_3^3\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}0 & x'^3 & -x'^2\\ -x'^3 & 0 & x'^1\\ x'^2 & -x'^1 & 0\end{matrix}\right\|,$$

$$\left\|\begin{matrix}A_1^1 & A_1^2 & A_1^3\\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3\\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\cos a^3 & -\sin a^3 & 0\\ -\sin a^1 \sin a^3 & -\sin a^1 \cos a^3 & -\cos a^1\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\|.$$

Соответствующие символы имеют вид:

$$X_1f = x^3p_2 - x^2p_3,\ X_2f = x^1p_3 - x^3p_1,\ X_3f = x^2p_1 - x^1p_2,$$

и структурные константы равны:

$$c_{12}{}^3 = c_{23}{}^1 = c_{31}{}^2 = 1,\quad c_{ab}^a = -c_{ba}^a = 0 \left(\begin{matrix}a = 1,\ 2,\ 3;\\ \text{по } a \text{ не суммируется}\end{matrix}\right).$$

6. Найти символы группы G_3 вращений (упражнение 5) в полярных координатах.

7. Векторы ξ^i общего инфинитезимального преобразования *линейной* или *аффинной* группы

$$x'^i = a^i_j x^j + a^i$$

имеют вид (см. теорему [11.4]):

$$\xi^i = \alpha^i + \alpha^i_j x^j,$$

где α^i, α^i_j — произвольные постоянные. Найти также структурные константы.

8. Получить векторы группы движений трехмерного евклидова пространства, рассматривая их как специальный случай упражнения 7.

9. Векторы ξ^i общего инфинитезимального преобразования группы G_8 проективных преобразований плоскости

$$x'^i = \frac{a^i_j x^j + a^i}{b_j x^j + 1}$$

имеют вид:

$$\xi^i = \alpha^i + \alpha^i_j x^j + \alpha_j x^j x^i,$$

где α^i, α_j, α^i_j — произвольные постоянные. Найти также структурные константы.

10. Показать, что уравнения инфинитезимальных преобразований $T_{a+\delta a} T_a^{-1}$ и $T_a^{-1} T_{a+\delta a}$ имеют вид:

$$x'^i = x^i + \left(\frac{\partial f^i(y; a)}{\partial a^\alpha}\right)_{y=\bar{f}(x, a)} \delta a^\alpha,$$

$$x'^i = x^i - \left(\frac{\partial \bar{f}^i(y; a)}{\partial a^\alpha}\right)_{y=f(x, a)} \delta a^\alpha.$$

(Bianchi, 1918, 1, стр. 71—72).

11. Показать, что символ преобразования, сопряженного (§ 4) инфинитезимальному преобразвванию с символом Xf с помощью инфинитезимального преобразования с символом Yf, имеет вид:

$$Xf + \delta t\,(X, Y)\,f.$$

12. Канонические параметры. Применяя к уравнениям (6.7) рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых из (5.5) и (11.5) получено (11.8), мы увидим, что (11.5) фактически являются дифференциальными уравнениями траекторий группового пространства S первой параметрической группы. Следовательно, мы можем написать интегралы (11.5) в виде, аналогичном (11.11), именно:

$$a'^{\alpha} = a^{\alpha} + te^{a}A_{a}a^{\alpha} + \ldots +$$
$$+ \frac{t^m}{m!} e^{a_1} \ldots e^{a_m} A_{a_1} \ldots A_{a_m} a^{\alpha} + \ldots, \qquad (12.1)$$

где положено

$$A_a(a) f = A_a^{\alpha}(a) \frac{\partial f}{\partial a^{\alpha}}.$$

В частности, решения (11.5), которыми мы пользовались в § 11, с начальными условиями $a^{\alpha} = a_0^{\alpha}$ при $t = 0$, даются формулой

$$a^{\alpha} = a_0^{\alpha} + te^{a}A_{a}a_0^{\alpha} +$$
$$+ \ldots + \frac{t^m}{m!} e^{a_1} \ldots e^{a_m} A_{a_1} \ldots A_{a_m} a_0^{\alpha} + \ldots \qquad (12.2)$$

Это выражение мы напишем в другом виде, используя функции

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}(L_{\beta\gamma}^{\alpha} + L_{\gamma\beta}^{\alpha}), \qquad (12.3)$$

где функции $L_{\beta\gamma}^{\alpha}$ определены в (8.7). Другими словами, $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ получены симметрированием $L_{\beta\gamma}^{\alpha}$. Действительно, если уравнения (11.5) продифференцировать по t, то, применив (11.5) и (8.6), получим:

$$\frac{d^2 a^{\alpha}}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{da^{\beta}}{dt} \frac{da^{\gamma}}{dt} = 0. \qquad (12.4)$$

Следовательно, траектории первой параметрической группы являются геодезическими линиями пространства S с аффинной связностью [1]) $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$.

Дифференцируя (12.4) и используя для приведения те же уравнения, получаем:

$$\frac{d^3 a^{\alpha}}{dt^3} + \Gamma_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} \frac{da^{\beta}}{dt} \frac{da^{\gamma}}{dt} \frac{da^{\delta}}{dt} = 0,$$

где

$$\Gamma_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \frac{1}{3} P\left(\frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}}{\partial a^{\delta}} - \Gamma_{\varepsilon\gamma}^{\alpha}\Gamma_{\beta\delta}^{\varepsilon} - \Gamma_{\beta\varepsilon}^{\alpha}\Gamma_{\gamma\delta}^{\varepsilon}\right),$$

[1]) 1927. 1, стр. 14.

а P обозначает сумму членов, получаемых циклической перестановкой индексов β, γ, δ. Продолжив этот процесс, получим:

$$\frac{d^m a^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_m} \frac{da^{\beta_1}}{dt} \dots \frac{da^{\beta_m}}{dt} = 0,$$

где

$$\Gamma^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_m} = \frac{1}{m} P \left[\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_{m-1}}}{\partial a^{\beta_m}} - \sum_{\varepsilon=1}^{m-1} \Gamma^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_{\varepsilon-1} \gamma \beta_{\varepsilon+1} \dots \beta_{m-1}} \Gamma^\gamma_{\beta_\varepsilon \beta_m} \right].$$

Поэтому разложение

$$a^\alpha = a^\alpha_0 + \left(\frac{da^\alpha}{dt}\right)_0 t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 a^\alpha}{dt^2}\right)_0 t^2 + \dots$$

может быть написано в виде:

$$a^\alpha = a^\alpha_0 + u^a A^\alpha_a(a_0) - \frac{1}{2} (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} A^\beta_a A^\gamma_b)_0 u^a u^b -$$

$$- \dots - \frac{1}{m!} (\Gamma^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_m} A^{\beta_1}_{a_1} \dots A^{\beta_m}_{a_m})_0 u^{a_1} \dots u^{a_m} + \dots, \tag{12.5}$$

где

$$u^a = e^a t. \tag{12.6}$$

Полагая

$$y^\alpha = u^a A^\alpha_a(a_0), \quad u^a = y^\alpha A^a_\alpha(a_0), \tag{12.7}$$

вследствие (12.6) и (11.5) получаем:

$$\left(\frac{dy^\alpha}{dt}\right)_0 = e^a A^\alpha_a(a_0) = \left(\frac{da^\alpha}{dt}\right)_0,$$

следовательно,

$$y^\alpha = \left(\frac{da^\alpha}{dt}\right)_0 t. \tag{12.8}$$

Кроме того, выражения (12.5) дают:

$$a^\alpha = a^\alpha_0 + y^\alpha - \frac{1}{2} (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma})_0 y^\beta y^\gamma -$$

$$- \dots - \frac{1}{m!} (\Gamma^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_m})_0 y^{\beta_1} \dots y^{\beta_m} + \dots \tag{12.9}$$

Если мы будем исходить из другой системы координат a'^{α}, то соответственно (12.8) мы получим:

$$y'^{\alpha} = \left(\frac{da'^{\alpha}}{dt}\right)_0 t = \left(\frac{\partial a'^{\alpha}}{\partial a^{\beta}}\right)_0 y^{\beta}.$$

Отсюда и из (7.11) следует, что

$$y'^{\alpha} A'^{a}_{\alpha}(a'_0) = y^{\alpha} A^{a}_{\alpha}(a_0).$$

Таким образом, как следует из (12.7), величины u^{α} не изменяются, когда a^{α} подвергаются общему аналитическому преобразованию. Если взять линейные комбинации (7.9) с постоянными коэффициентами векторов A^{a}_{α} и A^{α}_{a}, то из (8.7) следует, что величины $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ не изменяются. Соответственно этому координаты y^{α}, определенные в (12.9), при таком преобразовании векторов A^{a}_{α} сохранят свои значения, а величины u^{a} изменятся. Действительно, обозначая новые координаты через u'^{a}, мы из (7.9) и (12.7) получим:

$$u'^{a} = \bar{c}^{a}_{b} u^{b}. \tag{12.10}$$

Мы называем u^{a} *каноническими параметрами*. Уравнения (12.10) согласуются с (11.16).

Если мы в параметрах u^{α} обозначим через U^{a}_{α} компоненты векторов, имеющих в параметрах a^{α} компоненты A^{a}_{α}, то получим:

$$U^{a}_{\alpha} = A^{a}_{\beta} \frac{\partial a^{\beta}}{\partial u^{\alpha}}. \tag{12.11}$$

Таким образом, заметив, что $u^{\alpha} = 0$ при $a^{\alpha} = a^{\alpha}_0$ из (12.5), получим:

$$U^{a}_{\alpha}(0) = \delta^{a}_{\alpha}, \quad U^{\alpha}_{a}(0) = \delta^{\alpha}_{a}. \tag{12.12}$$

Аналогично уравнениям (11.5), имеем:

$$\frac{du^{\alpha}}{dt} = e^{a} U^{\alpha}_{a}(u).$$

Из этих уравнений и из (12.6) вытекает

$$e^{\alpha} = e^{a} U^{\alpha}_{a}$$

и, следовательно,

$$u^a U_a^\alpha = u^\alpha, \quad u^\alpha U_{\alpha.}^a = u^a. \tag{12.13}$$

Заметим, что если a_0^α — координаты некоторой точки группового пространства S, то в координатах y^α, определенных (12.9), уравнения геодезических, проходящих через точку, даются формулами (12.8). Очевидно, что координаты y^α определены для той области, содержащей данную точку, в которой (12.9) сходится, и никакие две геодезические, проходящие через эту точку, не пересекаются в области еще раз. Таким образом, y^α являются нормальными координатами, с началом координат в данной точке пространства с аффинной связностью, определенной величинами $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ [1]).

Результаты предыдущих рассмотрений используются в теории непрерывных групп, однако понятием непрерывной группы мы не пользовались. Собирая эти результаты отдельно, имеем:

[12.1] *Для данной системы векторов $A_a^\alpha(a)$ в пространстве с координатами a^α определена формулами* (8.7) *аффинная связность. Любая точка, в которой детерминант $|A_a^\alpha|$ отличен от нуля, может быть взята в качестве начала системы координат канонических параметров u^a, определенных в* (12.5), *где $\Gamma_{\beta\gamma}^a$ — симметрированные коэффициенты аффинной связности. В этой системе координат компоненты U_a^α данных векторов удовлетворяют уравнениям* (12.13). *Координаты u^α не изменяются при общем аналитическом преобразовании a^α, но испытывают линейное однородное преобразование с постоянными коэффициентами, когда векторы подвергаются такому же преобразованию.*

Эти координаты часто используются и в других теориях [2]). Уравнения (12.5) для значений t, при которых ряды справа сходятся, могут быть написаны в виде (11.12), из которых следует (11.13).

1) 1927, 1, стр. 59.
2) Ср. Thomas, 1930, 4; Michal, 1929, 3.

Если ряды (11.11), переписанные в виде

$$x'^i = x^i + u^a X_a x^i + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{m!} u^{a_1} \ldots u^{a_m} X_{a_1} \ldots X_{a_m} x^i + \ldots, \qquad (12.14)$$

сходятся для этих значений t, то уравнения (11.13) эквивалентны (11.11).

13. Абелевы группы. Если для данного базиса все структурные константы равны нулю, то, как следует из (7.13), то же самое верно для любого базиса. В этом случае мы из (7.2) получаем, что $(X_a, X_b)f = 0$. В § 29 мы покажем, что любые два преобразования T_a и T_b коммутируют, т. е. $T_a T_b = T_b T_a$ тогда и только тогда, когда для символов группы выполнено это условие. Если все преобразования группы обладают этим свойством, то говорят, что группа *абелева*. Прежде чем рассматривать канонические формы неабелевых групп, мы найдем канонические выражения абелевых групп.

Для абелевых групп уравнения (6.4) дают:

$$\frac{\partial A^a_\alpha}{\partial a^\beta} - \frac{\partial A^a_\beta}{\partial a^\alpha} = 0.$$

Следовательно, существуют такие функции $A^a(a^1, \ldots, a^r)$, что

$$A^a_\alpha = \frac{\partial A^a}{\partial a^\alpha}, \qquad (13.1)$$

причем якобиан $\left|\frac{\partial A}{\partial a}\right|$ не равен тождественно нулю.

Если мы введем новую систему параметров

$$u^\alpha = A^\alpha(a^1, \ldots, a^r) \qquad (13.2)$$

и обозначим через U^a_α и U^α_a компоненты в параметрах u^α векторов с компонентами A^a_α и A^α_a в параметрах a^α, то из (13.1) и (7.11) получим:

$$U^a_\alpha(u) = \delta^a_\alpha, \quad U^\alpha_a(u) = \delta^\alpha_a. \qquad (13.3)$$

Заметим, что эти результаты согласуются с (12.13) и что, вследствие уравнений (6.4) в параметрах u^α, U имеют значения (13.13) только в случае абелевых групп. Основные уравнения (5.5) в нашем случае имеют вид:

$$\frac{\partial x'^i}{\partial u^a} = \xi^i_a(x'). \tag{13.4}$$

Уравнения (6.2) будут теперь иметь вид:

$$\xi^j_a \frac{\partial \xi^i_b}{\partial x^j} - \xi^j_b \frac{\partial \xi^i_a}{\partial x^j} = 0. \tag{13.5}$$

Мы опустили здесь штрихи. Выберем координатную систему таким образом, чтобы для вектора ξ^i_1 абелевой группы имело место (см. теорему [10.2])

$$\xi^i_1 = \delta^i_1. \tag{13.6}$$

Положив в (13.5) $a=1$ и $b=2, 3, \ldots, r$, увидим, что векторы ξ^i_b не зависят от x^1. Ранг q матрицы

$$M = \|\xi^i_a\| \quad (i=1, \ldots, n;\; a=1, \ldots, r) \tag{13.7}$$

для общих значений координат x^i называется *общим* рангом. Очевидно, что $q \leqslant r$ и $q \leqslant n$. Рассмотрим сначала случай $q=r$. Если $\xi^1_2 \not\equiv 0$, то уравнение $\xi^i_2 p_i = 0$ имеет $n-1$ независимых решений

$$\varphi^1 = x^1 + \psi^1(x^2, \ldots, x^n), \quad \varphi^\sigma(x^2, \ldots, x^n) \quad (\sigma = 3, \ldots, n);$$

если же $\xi^1_2 = 0$, то мы можем считать $\psi^1 = 0$. Обозначим через $\varphi^2(x^2, \ldots, x^n)$ решение $\xi^i_2 p_i = 1$. Тогда уравнения $x'^i = \varphi^i$ определяют невырожденное преобразование координат. В новой координатной системе, которую мы теперь опять обозначим через x^i, в силу (7.5), имеет место (13.6), а также и $\xi^i_2 = \delta^i_2$. Тогда, как следует из (13.5), другие ξ не зависят от x^1 и x^2. Возьмем теперь уравнение $\xi^i_3 p_i = 0$ и его решения

$$\varphi^1 = x^1 + \psi^1(x^3, \ldots, x^n), \quad \varphi^2 = x^2 + \psi^2(x^3, \ldots, x^n),$$
$$\varphi^\sigma(x^3, \ldots, x^n) \quad (\sigma = 4, \ldots, n).$$

Пусть $\varphi^3(x^3, \ldots, x^n)$ — решение уравнения $\xi^i_3 p_i = 1$. Произведем тогда преобразование координат $x'^i = \varphi^i$. Продолжив этот процесс, мы, наконец, получим координатную систему, в которой компоненты ξ^i_a имеют вид:

$$\xi^i_a = \delta^i_a \quad (a = 1, \ldots, r;\ i = 1, \ldots, n;\ r \leqslant n). \tag{13.8}$$

Из (13.4) мы получим конечные уравнения группы:

$$x'^\alpha = x^\alpha + u^\alpha, \quad x'^\sigma = x^\sigma \tag{13.9}$$
$$(\alpha = 1, \ldots, r;\ \sigma = r + 1, \ldots, n;\ r \leqslant n).$$

Если общий ранг q матрицы (13.7) меньше r, то перенумеровывая индексы ξ, мы можем достигнуть того, чтобы матрица $\|\xi^i_h\|$ для $h = 1, \ldots, q$ имела ранг q. Тогда в любой координатной системе

$$\xi^i_p = \varphi^h_p \xi^i_h \quad (h = 1, \ldots, q;\ p = q + 1, \ldots, r). \tag{13.10}$$

Действуя в этом случае как и прежде, мы, ввиду (13.10), получаем:

$$\xi^i_h = \delta^i_h, \quad \xi^h_p = \psi^h_p (x^{q+1}, \ldots, x^n), \quad \xi^s_p = 0 \tag{13.11}$$
$$\begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n; & h = 1, \ldots, q; \\ p = q + 1, \ldots, r; & s = q + 1, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

В этом случае уравнения (13.4) имеют вид:

$$\frac{\partial x'^h}{\partial u^\alpha} = \delta^h_\alpha, \quad \frac{\partial x'^h}{\partial u^\sigma} = \psi^h_\sigma (x'^{q+1}, \ldots, x'^h), \quad \frac{\partial x'^s}{\partial u^\alpha} = 0$$
$$\begin{pmatrix} h,\ \alpha = 1, \ldots, q; & a = 1, \ldots, r; \\ s = q + 1, \ldots, n; & \sigma = q + 1, \ldots, r \end{pmatrix}.$$

Интегралы этих уравнений суть

$$x'^h = x^h + u^h + u^\sigma \psi^h_\sigma (x^{q+1}, \ldots, x^n), \quad x'^s = x^s \tag{13.12}$$
$$\begin{pmatrix} h_1 = 1, \ldots, q; & \sigma = q + 1, \ldots, r; \\ s = q + 1, \ldots, n & \end{pmatrix}.$$

Вследствие (13.3), уравнения (6.7) в параметрах u^α имеют вид

$$\frac{\partial u^\alpha_3}{\partial u^\beta_2} = \delta^\alpha_\beta,$$

и, следовательно, вместо (6.8) получим

$$u_3^\alpha = u_1^\alpha + u_2^\alpha.$$

Этот результат согласуется с (13.9) и (13.12).

Заметим, что предыдущие результаты верны в той области, к которой применимы наши рассуждения. Таким образом, мы предполагаем существование интегралов, с помощью которых были получены канонические формы, но не изучаем природу этих интегралов, вопрос о которой, очевидно, связан с предыдущим замечанием.

14. Векторы U_α^a. Используя уравнения (6.4) в канонических параметрах, именно

$$\frac{\partial U_\alpha^a(u)}{\partial u^\beta} - \frac{\partial U_\beta^a(u)}{\partial u^\alpha} = c_{bd}^a U_\alpha^b(u)\, U_\beta^d(u), \tag{14.1}$$

мы с помощью (12.6) и (12.13) получаем:

$$\frac{dU_\alpha^a(et)}{dt} = \frac{\partial U_\alpha^a(u)}{\partial u^\beta} e^\beta = \frac{1}{t}\left[\frac{\partial U_\beta^a(u)}{\partial u^\alpha} u^\beta + c_{bd}^a U_\alpha^b(u)\, U_\beta^d(u)\, u^\beta\right] =$$

$$= \frac{1}{t}\left(\delta_\alpha^a - U_\alpha^a(et)\right) + c_{bd}^a U_\alpha^b(et)\, e^d.$$

Теперь, если мы положим:

$$\theta_\alpha^a(e;\ t) = tU_\alpha^a(et), \tag{14.2}$$

то предыдущие уравнения дадут нам

$$\frac{d\theta_\alpha^a}{dt} = \delta_\alpha^a + c_{bd}^a\, \theta_\alpha^b e^d, \tag{14.3}$$

и, вследствие уравнений (14.1), мы имеем:

$$\frac{\partial\theta_\alpha^a}{\partial e^\beta} - \frac{\partial\theta_\beta^a}{\partial e^\alpha} = c_{bd}^a \theta_\alpha^b \theta_\beta^d. \tag{14.4}$$

Решения (14.3), для которых $\left(\theta_\alpha^a\right)_{t=0} = 0$, имеют вид:

$$\theta_\alpha^a = t\left[\delta_\alpha^a + \frac{1}{2} c_{\alpha\beta_1}^a e^{\beta_1} t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(r+1)!} c_{\alpha\beta_1}^{\gamma_1} c_{\gamma_1\beta_2}^{\gamma_2} \ldots c_{\gamma_{r-1}\beta_r}^a e^{\beta_1} \ldots e^{\beta_r} t^r + \ldots\right], \tag{14.5}$$

и, следовательно,

$$U^a_\alpha(u) = \delta^a_\alpha + \frac{1}{2} c^a_{\alpha\beta_1} u^{\beta_1} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{(r+1)!} c^{\gamma_1}_{\alpha\beta_1} c^{\gamma_2}_{\gamma_1\beta_2} \ldots c^a_{\gamma_{r-1}\beta_r} u^{\beta_1} \ldots u^{\beta_r} + \ldots \qquad (14.6)$$

В силу (7.3), эти выражения согласуются с (12.13).

Если для всех значений α, β, γ от 1 до r, $|c^\gamma_{\alpha\beta}| < c$, то положив $u = \sum\limits_\alpha |u^\alpha|$, получим, что ряд в правой стороне (14.6) мажорируется рядом

$$1 + \frac{1}{2} cu + \frac{1}{3!} rc^2u^2 + \ldots + \frac{1}{(n+1)!} r^{n-1} (cu)^n + \ldots,$$

сумма которого равна [1] $(e^{cru} - 1)/cur^2 + 1 - \frac{1}{r}$. Следовательно, ряд (14.6) сходится.

Если G_r — группа, в которой тождеству соответствуют a^α_0, и векторы $\bar{A}^\alpha_a$ выбраны так, чтобы удовлетворялись соотношения (8.4), то из (12.5) следует, что канонические параметры относительно системы $\bar{A}^\alpha_a$ те же, что и относительно системы A^α_a. Это также следует из того, что ввиду (8.10), симметрирование коэффициентов $\bar{L}^\alpha_{\beta\gamma}$ и $L^\alpha_{\beta\gamma}$ приводит к одному результату. Соответственно этому, если $\bar{U}^\alpha_a$ и $\bar{U}^a_\alpha$ — компоненты в параметрах u векторов $\bar{A}^\alpha_a$ и $\bar{A}^a_\alpha$, то

$$u^\alpha \bar{U}^a_\alpha = u^a, \qquad u^a \bar{U}^\alpha_a = u^\alpha,$$
$$\bar{U}^a_\alpha(0) = \delta^a_\alpha, \quad \bar{U}^\alpha_a(0) = \delta^\alpha_a. \qquad (14.7)$$

Так как функции $\bar{U}^a_\alpha(u)$ определены (14.6), где c замещены на $\bar{c}$, то из (8.13) следует:

$$\bar{U}^a_\alpha(u) = U^a_\alpha(-u), \qquad (14.8)$$

и ввиду (5.7),

$$\bar{U}^\alpha_a(u) = U^\alpha_a(-u). \qquad (14.9)$$

---

[1] Schur, 1891. стр. 270.

Если аналогично (8.14) положить

$$\bar{U}_a^\alpha(u) = \sigma_a^b U_b^\alpha(u), \tag{14.10}$$

то при преобразовании a^α в u^α σ_a^b будут равны ρ_a^b из (8.14). Вместо (8.17) получим:

$$\frac{\partial \sigma_a^b}{\partial u^\alpha} = c_{ef}^b \sigma_a^e U_\alpha^f \tag{14.11}$$

и, вследствие (12.13):

$$\frac{d\sigma_a^b}{dt} = c_{ef}^b \sigma_a^e e^f. \tag{14.12}$$

Из (12.12) и (14.7) следует, что $\sigma_a^b(0) = \delta_a^b$. Решения (14.12), удовлетворяющие этому условию, имеют вид:

$$\sigma_a^b = \delta_a^b + c_{af_1}^b u^{f_1} + \frac{1}{2} c_{e_1 f_1}^b c_{af_2}^{e_1} u^{f_1} u^{f_2} + \\ + \frac{1}{3!} c_{e_1 f_1}^b c_{e_2 f_2}^{e_1} c_{af_3}^{e_2} u^{f_1} u^{f_2} u^{f_3} + \ldots \tag{14.13}$$

Из (14.10) и (14.9) имеем

$$U_a^\alpha(-u)\, U_\alpha^b(u) = \sigma_a^b(u)\,[1], \tag{14.14}$$

а также

$$U_\alpha^b(u) = \sigma_a^b(u)\, U_\alpha^a(-u). \tag{14.15}$$

Напишем уравнения (4.6) в канонических параметрах:

$$u_3^\alpha = \psi^\alpha(u_1;\ u_2). \tag{14.16}$$

Очевидно, ψ^α таковы, что (см. 4.14)

$$u_1^\alpha = \psi^\alpha(u_1;\ 0), \quad u_2^\alpha = \psi^\alpha(0;\ u_2). \tag{14.17}$$

Из уравнений (см. (6.7) и (8.3))

$$\frac{\partial u_3^\alpha}{\partial u_2^\beta} = U_a^\alpha(u_3)\, U_\beta^a(u_2),$$

$$\frac{\partial u_3^\alpha}{\partial u_1^\beta} = \bar{U}_a^\alpha(u_3)\, \bar{U}_\beta^a(u_1) \tag{14.18}$$

[1]) См. Schur, 1891, 1, стр. 275.

и (4.17) получим:

$$U_a^\alpha(u_1) = \left(\frac{\partial\psi^\alpha(u_1; u_2)}{\partial u_2^a}\right)_{u_2^\alpha = 0} \tag{14.19}$$

$$\overline{U}_a^\alpha(u_2) = \left(\frac{\partial\psi^\alpha(u_1; u_2)}{\partial u_1^a}\right)_{u_1^\alpha = 0},$$

что аналогично (9.5) и (9.6).

15. Вторая и третья основные теоремы. Предположим, что в V_n с координатами x^i даны r линейно независимых (с постоянными коэффициентами) полей контравариантных векторов ξ_a^i, таких, что удовлетворены уравнения (6.2), где c_{ab}^e — некоторые константы. Как прежде было показано, эти константы должны удовлетворять соотношениям (7.3) и (7.4). Покажем, что существуют такие функции A_α^a параметров $a^1 \ldots a^r$, что соответствующая система уравнений (5.5) вполне интегрируема и, следовательно, ее решения определяют группу.

С этой целью рассмотрим дифференциальные уравнения (14.3), т. е.

$$\frac{d\theta_\alpha^a}{dt} = \delta_\alpha^a + c_{df}^a \theta_\alpha^d e^f, \tag{15.1}$$

где e^f — система r параметров. Решения этих уравнений, исчезающие при $t = 0$, даются степенными рядами (14.5). Отсюда видно, что решения имеют вид:

$$\theta_\alpha^a = t f_\alpha^a (e^1 t, \ldots e^r t).$$

Из (15.1) имеем:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\theta_\alpha^a}{\partial e^\beta}\right) = c_{b\beta}^a \theta_\alpha^b + c_{df}^a e^f \frac{\partial\theta_\alpha^d}{\partial e^\beta};$$

$$\frac{d}{dt}\left(c_{bd}^a \theta_\alpha^b \theta_\beta^d\right) = c_{\alpha d}^a \theta_\beta^d + c_{b\beta}^a \theta_\alpha^b +$$

$$+ \theta_\alpha^b \theta_\beta^d e^f \left(c_{hd}^a c_{bf}^h + c_{fd}^h c_{hb}^a\right) = c_{\alpha d}^a \theta_\beta^d + c_{b\beta}^a \theta_\alpha^b + \theta_\alpha^b \theta_\beta^d e^f c_{bd}^h c_{hf}^a;$$

последнее получено из (7.3) и (7.4). Таким образом:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\theta_\alpha^a}{\partial e^\beta} - \frac{\partial\theta_\beta^a}{\partial e^\alpha} - c_{bd}^a \theta_\alpha^b \theta_\beta^d\right) = c_{hf}^a e^f \left(\frac{\partial\theta_\alpha^h}{\partial e^\beta} - \frac{\partial\theta_\beta^h}{\partial e^\alpha} - c_{bd}^h \theta_\alpha^b \theta_\beta^d\right).$$

Из (14.5) следует, что θ^a_α и $\frac{\partial\theta^a_\alpha}{\partial e^\beta}$ исчезают при $t=0$. Следовательно, когда $t=0$, правая часть полученных уравнений равна нулю. Из теории дифференциальных уравнений следует тогда для всех значений t, что

$$\frac{\partial\theta^a_\alpha}{\partial e^\beta}-\frac{\partial\theta^a_\beta}{\partial e^\alpha}=c^a_{bd}\theta^b_\alpha\theta^d_\beta.$$

Если мы положим $\theta^a_\alpha=tU^a_\alpha(u)$, где $u^\alpha=e^\alpha t$, то получим уравнения (14.1), и $U^a_\alpha(u)$ будут представляться рядами (14.6), которые, как было показано, сходятся[1]). Так как $U^a_\alpha(0)=\delta^a_\alpha$, то ранг матрицы $\|U^a_\alpha\|$ равен r. Таким образом, мы получили *вторую основную теорему Ли*:

[15.1] *Если r систем функций $\xi^i_a(x)$ удовлетворяют условиям* (6.2) *и линейно независимы (с постоянными коэффициентами), то существуют такие функции $U^a_\alpha(u)$, ранг матрицы которых равен r, что уравнения*

$$\frac{\partial x'^i}{\partial u^\alpha}=\xi^i_a(x')\,U^a_\alpha(u),$$

вполне интегрируемы. Решение $f^i(x;\,u)$ этих уравнений такое, что $f^i(x;\,0)=x^i$[2]) *определяет группу преобразований G_r, состоящую из преобразований групп G_1, порожденных ∞^{r-1} инфинитезимальными преобразованиями e^aX_af, и из произведений таких преобразований.*

В изложенном доказательстве функции ξ^i_a используются только для задания констант c^e_{ab} и тем самым условий (7.3) и (7.4). В самом деле, было показано, что если система констант удовлетворяет этим условиям, то функции U^a_α, определенные согласно (14.6), удовлетворяют уравнениям (14.1), и

$$u^\alpha U^a_\alpha=u^a,\qquad U^a_\alpha(0)=\delta^a_\alpha.$$

---

[1]) См. также Engel, 1891, 2, стр. 308—311.

[2]) Что такое решение существует, показано в § 6.

Следовательно, ранг матрицы $\|U^a_\alpha(u)\|$ равен r. Кроме того, функции $U^\alpha_a(u)$ удовлетворяют уравнениям

$$U^\alpha_a \frac{\partial U^\beta_b}{\partial u^\alpha} - U^\alpha_b \frac{\partial U^\beta_a}{\partial u^\alpha} = c^e_{ab} U^\beta_e \cdot$$

Поэтому уравнения

$$\frac{\partial y'^\alpha}{\partial u^\beta} = U^\alpha_a(y')\, U^a_\beta(u)$$

вполне интегрируемы, а их решения

$$y'^\alpha = f^\alpha(y;\ u),$$

равные y^α при $u=0$, определяют группу преобразований, не отличающуюся от первой параметрической группы, группы G_r, если за c^e_{ab} взяты структурные константы G_r. Мы получили следующую *третью основную теорему Ли:*

[15.2] *Любая система констант c^e_{ab}, удовлетворяющая условиям* (7.3) *и* (7.4), *является системой структурных констант некоторой группы.*

Заметим, что полученные результаты применимы только к той окрестности начала координат, в которой детерминант $|U^a_\alpha|$ отличен от нуля[1]).

Упражнения

1. Показать, что обращение преобразования $T_{a_0+\delta a_0}$ есть $T_{a_0-\delta a_0}$ (где a^α_0 определяет тождество), а обращения преобразований $T_{a+\delta a}T^{-1}_a$ и $T^{-1}_a T_{a+\delta a}$ имеют вид $T_{a-\delta a}T^{-1}_a$ и $T^{-1}_a T_{a-\delta a}$ соответственно.

2. Показать, что $T_{a_2+\delta a_2}T_{a_1+\delta a_1} = T_{a_2}T_{a_1}$, если δa^α_1 и δa^α_2 выбраны так, что

$$\frac{\partial \varphi^\beta(a_1, a_2)}{\partial a^\alpha_1}\,\delta a^\alpha_1 + \frac{\partial \varphi^\beta(a_1, a_2)}{\partial a^\alpha_2}\,\delta a^\alpha_2 = 0.$$

---

[1]) См. Cartan, 1930, 1, стр. 17.

В этом случае $T_{a_2}^{-1}T_{a_2+\delta a_2}$ и $T_{a_1+\delta a_1}T_{a_1}^{-1}$ являются обращениями друг друга, следовательно (упражнение 1)

$$T_{a_1+\delta a_1}T_{a_1}^{-1} = T_{a_2}^{-1}T_{a_2-\delta a_2}.$$

3. Даны два семейства преобразований

$$x'^i = f_1^i(x^1, \ldots, x^n;\ a_1^1, \ldots, a_1^r),$$
$$x'^i = f_2^i(x^1, \ldots, x^n;\ a_2^1, \ldots, a_2^r),$$

в которых a_i^α существенны. Обозначим их преобразования через T_{a_1} и T_{a_2}. Для того, чтобы $T_{a_2}T_{a_1}$ имело вид

$$x''^i = f_3^i(x^1, \ldots, x^n;\ a_3^1, \ldots, a_3^r),$$

где a_3^r существенны, в этом случае

$$a_3^\alpha = \psi^\alpha(a_1;\ a_2),$$

необходимо, чтобы функции f_1^i удовлетворяли системе уравнений вида

$$\frac{\partial x'^i}{\partial a_1^\alpha} = \xi_a^i(x')\,A_\alpha^a(a_1).$$

Показать, что для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы

$$T_{a_1} = S_{b_1}T_{(a_1)_0},\quad T_{a_2} = T_{(a_2)_0}S_{b_2},$$

где S_{b_1} и S_{b_2} — преобразования некоторой группы G_r, и $T_{(a_1)_0}$ и $T_{(a_2)_0}$ — некоторые преобразования данных семейств.

(Bianchi, 1918, 1, стр. 118)

4. Если в уравнениях $y^i = f^i(x;\ a^1, \ldots, a^r)$ параметры существенны, то максимальное число μ_s последовательности (3.7) равно r и, следовательно, $s+1$ систем уравнений

$$y^i = f^i, y^i,_{j_1} = f^i,_{j_1}, \ldots, y^i,_{j_1\ldots j_s} = f^i,_{j_1\ldots j_s}$$

могут быть разрешены относительно a^α. Если из этих уравнений исключим a^α, то получим q уравнений

$$F_\alpha(x, y, y,_{j_1}, \ldots, y,_{j_1\ldots j_s}) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, q), \tag{1}$$

где $q = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_s - r$ и ε_t — число уравнений, содержащих производные порядка t и $\varepsilon_0 = n$. Тогда $y^i,_{j_1\ldots j_{s+1}}$

выражаются в виде:

$$y^i{}_{,j_1\dots j_{s+1}} = \Phi^i_{j_1\dots j_{s+1}}(x, y, y_{,j_1}, \dots y_{,j_1\dots j_s}). \qquad (2)$$

Итак, (1) и (2) суть дифференциальные уравнения, получающиеся из $y^i = f^i(x; a)$ исключением a^α, причем последние являются общим интегралом системы (1).

5. Пусть уравнения $y^i = f^i(x; a)$ упражнения 4 определяют группу. Если $\varphi^i(x)$ и $\psi^i(x)$ — решения системы (1), то $\psi^i(\varphi(x))$ также решение. Уравнения (1) называются *определяющими дифференциальными уравнениями* группы.

6. Для общей аффинной группы $x'^i = a^i_j x^j + a^i$ определяющие уравнения (упражнение 5) суть

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = 0 \quad (i, j, k = 1, \dots, n).$$

7. Система уравнений

$$\xi^i = e^a \xi^i_a,$$

где ξ^i_a — векторы группы G_r, представляет частный случай уравнений упражнения 4. В этом случае уравнения (1) линейны и однородны относительно ξ^i и их производных до порядка s включительно, а коэффициенты являются функциями x. Эти уравнения в качестве решений допускают любую систему ξ^i_a а также и $\xi^i_a \frac{\partial \xi^j_b}{\partial x^i} - \xi^i_b \frac{\partial \xi^j_a}{\partial x^i}$. Уравнения (1) в этом случае называются *определяющими уравнениями инфинитезимальных преобразований группы.*

(Lie-Engel, 1888, 1, том 1, стр. 188.

8. Показать, что если система дифференциальных уравнений, линейных и однородных относительно ξ^i и их производных до некоторого конечного порядка, обладает тем свойством, что вместе с ξ^i_1 и ξ^i_2 также и $\xi^i_1 \frac{\partial \xi^j_2}{\partial x^i} - \xi^i_2 \frac{\partial \xi^j_1}{\partial x^i}$ является решением, и если общее решение ξ^i зависит от конечного числа r произвольных постоянных, то тогда $\xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ является общим символом некоторой группы G_r.

(Lie-Engel, 1888, 1, том 1, стр. 188).

9. Определяющие уравнения инфинитезимальных преобразований группы получаются из определяющих уравнений группы

(упражнение 4 (1)), если y^i заменить на $x^i + \xi^i \delta t$ и приравнять нулю коэффициент при δt.

(Bianchi, 1918, 1, стр. 128)

10. Найти определяющие уравнения инфинитезимальных преобразований аффинной группы (упражнение 6) и показать, что

$$\xi^i = e^i + e^i_j x^j \quad (i, j = 1, \ldots, n),$$

где e^i, e^i_j — постоянные.

11. Группа движений евклидова n-мерного пространства определяется в декартовых координатах уравнениями

$$x'^i = a^i + a^i_j x^j,$$

где a^i, a^i_j подчинены условиям

$$a^i_j a^i_k = \delta_{jk}.$$

Показать, что

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} = \delta_{jk}$$

являются определяющими уравнениями (упражнение 4).

12. Для группы движений евклидова n-мерного пространства (упражнение 11) определяющие уравнения инфинитезимальных преобразований имеют вид:

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n);$$

интегралы этих уравнений суть

$$\xi^i = b^i + b^i_j x^j, \qquad b^i_j = -b^j_i.$$

Следовательно, символы равны

$$p_i, \; x^i p_j - x^j p_i \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

13. Если группа преобразований определена не одной системой уравнений типа (4.1), а m (>1) системами уравнений

$$x'^i = f^i_{(s)}(x; a) \quad (s = 1, \ldots, m),$$

каждая из которых содержит r существенных параметров a^α_s, то говорят, что уравнения определяют смешанную группу. Показать, что в этом случае каждая система функций $f^i_{(s)}$

удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial f^i_{(s)}}{\partial a^\alpha_s} = \xi^i_a(f_{(s)})\, A^a_{(s)\alpha}(a_s),$$

где ξ^i_a, в отличие от $A^a_{(s)\alpha}$, одинаковы для всех значений s.

(Lie-Engel, 1888, 1 том 1, стр. 314)

14. Если функции $\xi^i_a(x)$ упражнения 13 таковы, что $X_a f = \xi^i_a p_i$ являются (теорема [6.3]) символами некоторой группы, и если для a^α_{s0} детерминант $|A^a_{(s)\alpha}(a_{s0})|$ отличен от нуля, то $T^{-1}_{(s)a_0} T_{(s)a}$ являются преобразованиями смешанной группы. Так как в одной из систем, например в $T_{(1)a}$, содержится тождество, то эта система является группой с символами $X_a f$ и

$$T_{(s)a} = T_{(s)a_0} T_{(1)a}.$$

15. Показать, что уравнения

$$x' = x\cos a - y\sin a,\ y' = x\sin a + y\cos a,$$
$$x' = x\cos a + y\sin a,\ y' = x\sin a - y\cos a$$

определяют смешанную группу и ее символ имеет вид $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}$. Если T_{20} обозначает второе преобразование для $a = 0$, то

$$T_{2a} = T_{20} T_{1a}.$$

16. Для того, чтобы m систем уравнений определяли смешанную группу, необходимо, чтобы все эти системы содержали одинаковое число существенных параметров.

(Lie-Engel, 1888, 1, том 1, стр. 319)

СВОЙСТВА ГРУПП. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

16. Подгруппы G_r. Мы уже видели, что для каждой системы значений постоянных e^a символ $e^a X_a f$ является символом некоторой подгруппы G_1 данной группы G_r. Возникает вопрос, можно ли найти $m (< r)$ независимых систем постоянных e_t^a, $a = 1, \ldots, r$; $t = 1, \ldots, m (< r)$, таких, чтобы

$$Y_t f = e_t^a X_a f \tag{16.1}$$

были символами подгруппы порядка m группы G_r. Так как системы эти независимы, то ранг их матрицы $\| e_t^a \|$ должен быть равен m. Мы должны также иметь:

$$(Y_t, Y_u) f = \gamma_{tu}^v Y_v f \quad (t, u, v = 1, \ldots, m), \tag{16.2}$$

где γ_{tu}^v — константы. В силу (16.1), (16.2) и (7.2),

$$e_v^c \gamma_{tu}^v = e_t^a e_u^b c_{ab}^c.$$

Следовательно, задача состоит в нахождении условий непротиворечивости этих уравнений и чисто алгебраична. Эти уравнения должны иметь решения для всех значений t и u. По предположению, ранг матрицы $\| e_t^a \|$ равен m, поэтому для данных значений t и u расширенная матрица

$$\| e_v^c, e_t^a e_u^b c_{ab}^c \| \quad (c = 1, \ldots, r; \; v = 1, \ldots, m) \tag{16.3}$$

должна быть ранга m. Таким образом, все эти матрицы для значений t и u от 1 до m должны иметь ранг m, т. е. уравнения относительно e_t^a, полученные приравниванием нулю всех детерминантов порядка $m+1$ всех $\frac{m(m-1)}{2}$ расширенных матриц, должны быть совместны и подчинены такому условию, чтобы матрица $\| e_t^a \|$ имела ранг m. Если эти условия удовлетворены, и базис $X_a f$

выбран таким образом, что $X_1 f, \ldots, X_m f$ являются символами подгруппы, то

$$(X_t, X_u) f = c^v_{tu} X_v f \quad (t, u, v = 1, \ldots, m). \tag{16.4}$$

Следовательно,

$$c^z_{tu} = 0 \qquad \begin{pmatrix} t, u = 1, \ldots, m; \\ z = m+1, \ldots, r \end{pmatrix}. \tag{16.5}$$

В качестве примера подгрупп мы укажем в группе движений трехмерного евклидова пространства абелеву подгруппу параллельных переносов G_3 и подгруппу G_3 вращений вокруг некоторой точки.

Докажем теорему:

[16.1] *Базис группы G_2 или подгруппы G_2 может быть выбран таким образом, что*

$$(X_1, X_2) f = X_2 f \quad \text{или} \quad (X_1, X_2) f = 0. \tag{16.6}$$

Для исходного базиса

$$(X_1, X_2) f = a X_1 f + b X_2 f.$$

Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, мы выберем $Y_1 f = -\frac{1}{a} X_2 f$ и $Y_2 f = X_1 f$. Если $a = 0$, $b \neq 0$, мы выберем $X_1 f = b Y_1 f$. Наконец, при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ мы положим $X_1 f = b Y_1 f$ и $X_2 f = \frac{1}{b} Y_2 f - a Y_1 f$. Имеем: $(Y_1, Y_2) f = Y_2 f$.

Пусть $u^a X_a f$ — символ G_1 в G_r. Найдем, при каких условиях символ $v^a X_a f$ другой подгруппы G_1 образует вместе с первым базис подгруппы G_2 в G_r. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$(u^a X_a, v^b X_b) f = \sigma u^a X_a f + \rho v^b X_b f. \tag{16.7}$$

Из формулы (7.2) имеем:

$$\eta^e_b (u) v^b - \sigma u^e - \rho v^e = 0, \tag{16.8}$$

где

$$\eta^e_b (u) = c^e_{ab} u^a. \tag{16.9}$$

Вследствие (7.3) $\eta^e_b(u)u^b=0$, поэтому ранг матрицы $\|\eta^e_b\|$ меньше r. Отсюда же следует, что для того, чтобы при $\sigma=\rho=0$ (16.7) удовлетворялось системой v^a, отличной от u^a, необходимо, чтобы ранг матрицы $\|\eta^e_b\|$ был меньше $r-1$. Таким образом,

[16.2]. *Для того, чтобы $u^a X_a f$ был символом некоторой G_1, содержащейся в абелевой подгруппе G_2 группы G_r, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $\|c^e_{ab}u^a\|$ был меньше $r-1$.*

Для того, чтобы при $\rho=0$, $\sigma\neq 0$ (в силу теоремы [16.1], можем считать $\sigma=1$) было выполнено (16.7), расширенная матрица $\|\eta^e_b, u^e\|$, как следует из (16·8), должна иметь тот же ранг, что и матрица $\|\eta^e_b\|$. Если этот ранг равен $r-p$, то p из v^a могут быть выбраны произвольно, а другие будут вполне определены. Если в (16.7) $\rho\neq 0$ (в силу теоремы [16.1] можно взять $\sigma=0$), то уравнения (16.8) примут вид:

$$(\eta^e_b-\rho\delta^e_b)v^b=0. \tag{16.10}$$

Если нуль является кратным корнем характеристического уравнения

$$|\eta^e_b-\delta^e_b\rho|=0, \tag{16.11}$$

то, как следует из теоремы [16.2], существуют отличные от u^a значения v^a, удовлетворяющие (16.10). Символы u^aX_a, v^aX_a порождают абелеву подгруппу G_2. Если ρ — корень (16.11), отличный от нуля, то v^a, определенные из (16.10), отличны от u^a, и мы получим такую подгруппу G_2, что.

$$(u^aX_a,\ v^bX_b)f=\rho v^aX_af.$$

В результате предыдущих исследований мы получили:

[16.3]. *Любая подгруппа G_1 из G_r содержится, по крайней мере, в одной подгруппе G_2.*

17. Абсолютные и относительные инварианты группы. Функция $F(x)$, не меняющаяся при всех преобразованиях группы G_r, т. е. такая, что $F(x') \equiv F(x)$, называется *абсолютным инвариантом* группы. Для преобразований подгруппы G_1 траектории определяются уравнениями (11.8)

$$\frac{dx'^i}{dt} = e^a \xi_a^i (x'),$$

где e^a — некоторые постоянные. Для того, чтобы F было абсолютным инвариантом этой G_1, необходимо и достаточно, чтобы

$$F(x') \equiv F(x)$$

было тождеством, если x' заменены решениями написанных выше уравнений, при начальных условиях: $x' = x$ при $t = 0$. Таким образом, мы должны иметь:

$$\frac{dF(x')}{dt} = e^a \xi_a^i (x') \frac{\partial F(x')}{\partial x'^i} = 0.$$

Если F — абсолютный инвариант G_r, то это условие должно выполняться для всех систем e^a. Поэтому:

[17.1]. *Для того, чтобы функция* $F(x^1, \ldots, x^n)$ *была абсолютным инвариантом, необходимо и достаточно, чтобы*

$$X_a F = 0 \quad (a = 1, \ldots, r). \tag{17.1}$$

Если ранг матрицы

$$M = \| \xi_a^i \| \tag{17.2}$$

равен q, то q уравнений (17.1), например

$$X_\sigma f = 0 \quad (\sigma = 1, \ldots q), \tag{17.3}$$

независимы. Остальные символы линейно выражаются через первые q. Поэтому, ввиду соотношений (7.2), система (17.1) полна. Таким образом, если $q < n$, то существует $n - q$ независимых абсолютных инвариантов и ни одного при $q = n$.

Предположим, что функция $F(x)$ не является инвариантом группы с символами $X_a f$, но инвариантна относительно преобразований с p линейно независимыми (с постоянными коэффициентами) символами

$$Y_l f = \lambda_l^a X_a f \quad (l = 1, \ldots, p),$$

где λ — постоянные, и только этих преобразований. Если в качестве базиса мы возьмем эти p символов и $r-p$ таких $X_a f$, чтобы вся система была линейно независима (с постоянными коэффициентами), то получим:

$$(Y_l, Y_m) f = \gamma_{lm}^k Y_k f + \gamma_{lm}^t X_t f. \left(\begin{matrix} k, l, m = 1, \ldots, p; \\ t = p+1, \ldots, r \end{matrix}\right).$$

Подставляя в эти тождества $f = F$, мы получаем

$$\gamma_{lm}^t X_t F = 0,$$

откуда следует $\gamma_{lm}^t = 0$, так как иначе имелись бы еще символы, для которых F инвариантно. Таким образом,

$$(Y_l, Y_m) f = \gamma_{lm}^k Y_k f.$$

Следовательно, по второй основной теореме, преобразования с символами $Y_\sigma f$ образуют группу, являющуюся *подгруппой* G_r. Этот результат может быть получен также из того рассуждения, что произведение двух преобразований, примененное к $F(x)$, оставляет ее инвариантной и, следовательно, принадлежит тому же семейству. Мы назовем эту подгруппу *подгруппой функции* $F(x)$. Из результатов начала этого параграфа следует, что число независимых функций, инвариантных относительно подгруппы, равно n минус ранг матрицы символов этой подгруппы.

Пусть даны p независимых функций $F_1, \ldots, F_p$, таких, что

$$X_a F_\alpha = 0 \left(\begin{matrix} a = 1, \ldots, r; \\ \alpha = 1, \ldots, p \end{matrix}\right) \tag{17.4}$$

для тех значений x, при которых

$$F_\alpha = 0. \tag{17.5}$$

Если мы преобразуем координаты таким образом, чтобы уравнения (17.5) в новой координатной системе приняли форму

$$x^\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, p), \tag{17.6}$$

то из (17.4) следует, что ξ_a^α равны нулю, когда $x^1, \ldots, x^p$ равны нулю. Мы обозначим это посредством

$$(\xi_a^\alpha)_0 = 0. \tag{17.7}$$

Если мы теперь возьмем первые p уравнений

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = e^a \xi_a^\alpha (x)$$

системы (11.8) и будем рассматривать величины $x^{p+1}, \ldots, x^n$ как параметры, то увидим, что решения этих уравнений при начальных значениях (17.6) будут, вследствие (17.7) и теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений, тождественно равны нулю.

Таким образом,

[17.2] *Если $X_a f$ — символы G_r, и существует система независимых функций $F_1, \ldots, F_p$, таких, что $X_a F_\alpha = 0$ для точек многообразия $F_1 = \ldots = F_p = 0$, то это многообразие преобразуется в себя при каждом преобразовании G_r.*

Говорят, что в этом случае функции F_α определяют *относительный инвариант* группы.

Теоремы [17.1] и [17.2] непосредственно доказываются рассмотрением только инфинитезимальных преобразований группы. Это можно сделать, так как мы доказали, что инвариантность при инфинитезимальных преобразованиях группы влечет инвариантность при конечных преобразованиях, ими порожденных. Мы покажем в § 51, что то же самое верно и для других типов инвариантов.

18. Обыкновенные и особые точки. Порядок преобразования в точке. Рассмотрим матрицу

$$M = \| \xi_a^i \| \tag{18.1}$$

компонент векторов группы G_r. Пусть q — ранг M для общих значений x^i, т. е. q есть *общий* ранг (§ 13).

Точки, для которых ранг M равен q, назовем *обыкновенными точками*, а точки, для которых он меньше q, *особыми* точками. Будем следующим образом различать типы особых точек. Если уравнения, полученные приравниванием нулю всех элементов (18 . 1), совместны, то мы обозначим через L_0 геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этим уравнениям, и скажем, что эти точки особые *порядка нуль*. Если такое геометрическое место существует, то координаты его точек удовлетворяют системе независимых и совместных уравнений

$$F_1 = 0, \ldots, F_s = 0.$$

При $s = n$ L_0 состоит из одной или нескольких изолированных точек. Если $s < n$, то L_0 есть многообразие размерности $n - s$. Например, для группы вращений трехмерного евклидова пространства (в § 11, упражнение 5) начало координат является геометрическим местом L_0.

Если уравнения, полученные приравниванием нулю всех миноров второго порядка матрицы M, совместны, то мы обозначим через L_1 геометрическое место точек, не принадлежащих L_0, координаты которых удовлетворяют предыдущим уравнениям. Будем называть точки этого геометрического места точками *первого порядка*. Продолжая подобным образом, мы определим геометрические места $L_0, L_1, \ldots, L_{q-1}$ особых точек. Сделанное выше замечание о строении L_0 применимо к любому геометрическому месту $L_1, \ldots, L_{q-1}$. По построению, для любой точки L_ρ ранг матрицы M равен ρ. В этом смысле геометрическим местом обыкновенных точек является L_q. Оно состоит из всех точек V_n, не принадлежащих $L_0, \ldots, L_{q-1}$, если последние существуют.

Если компоненты ξ^i преобразования регулярны в окрестности точки P_0 с координатами x_0^i, т. е. если они выражаются в виде

$$\xi^i(x) = \xi^i(x_0) + \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right)_0 (x^j - x_0^j) + \ldots, \qquad (18.2),$$

то мы скажем, что это преобразование *нулевого порядка* в P_0, если не все $\xi^i(x_0)$ равны нулю, *первого порядка*, если все

$\xi^i(x_0)$равны нулю, но существует $\left(\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\right)_0 \neq 0$, и так далее.

Если ранг M в P_0 равен q_0, то в уравнениях

$$b^a\xi^i_a(x_0) = 0 \tag{18.3}$$

q_0 величин b^a выражаются линейно и однородно через остальные $r - q_0$. Таким образом, существует $r - q_0$ линейно независимых преобразований

$$b^a X_a f \tag{18.4}$$

порядка, большего нуля в P_0, и q_0 таких преобразований нулевого порядка. Как следует из (10.21), любое инфинитезимальное преобразование порядка, большего нуля, оставляет точку P_0 неподвижной. Если последовательно применить два таких преобразования, точка P_0 остается неподвижной и, следовательно, результирующее преобразование также будет иметь ненулевой порядок. Следовательно, все инфинитезимальные преобразования порядка, большего нуля, порождают группу порядка $r - q_0$, являющуюся подгруппой G_r. Она называется *стационарной подгруппой* точки P_0.

Для того чтобы найти выражения образующих этой подгруппы, мы предположим, что индексы в (18.1) перенумерованы так, что матрица $\|\xi^i_p(x_0)\|$ $(p = 1, \ldots, q_0)$ имеет ранг q_0. Тогда

$$\xi^i_s(x_0) = a^p_s\xi^i_p(x_0) \quad \begin{pmatrix} p = 1, \ldots, q_0; \\ s = q_0 + 1; \ldots r \end{pmatrix}, \tag{18.5}$$

где a^p_s — постоянные. Следовательно, символы

$$X_s f - a^p_s X_p f, \tag{18.6}$$

будучи линейно независимыми и ненулевого порядка в P_0, порождают стационарную подгруппу в P_0 порядка $r - q_0$.

Из предыдущих рассуждений следует, что если ранг M равен r, то обыкновенные точки не допускают стационарных подгрупп, состоящих не только из тождественного преобразования. Если же ранг M меньше r, то для любой точки существует стационарная подгруппа порядка $r-q$ для обыкновенных точек и порядка $r-p$ для особых точек порядка p.

Упражнения

1. Символы общей проективной группы G_8 в координатах x и y, если мы положим $p=\frac{\partial f}{\partial x}$, $q=\frac{\partial f}{\partial y}$ (см. § 11, упражнение 9) имеют вид:

$$p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ x^2p+xyq,\ xyp+y^2q.$$

Показать, что нижеследующие символы являются символами подгрупп

(I) $\quad p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq;$

(II) $\quad xp,\ yp,\ xq,\ yq\ x^2p+xyq,\ xyp+y^2p;$

(III) $\quad o,\ q,\ xq,\ xp-yq,\ yp;$

(IV) $\quad xq,\ xp-yq,\ yp,\ x^2p+xyq,\ xyp+y^2q;$

(V) $\quad p,\ q,\ xp,\ xq,\ yq.$

(Lie-Scheffers, 1893, 1, стр. 272.)

2. Показать, что общая проективная группа плоскости не имеет подгрупп порядка 7.

(Lie-Scheffers, 1893, 1, стр. 267.)

3. G_3 с символами

$$p+xq,\ xp+2yq,\ (x^2-y)p+xyq$$

оставляет параболу $x^2-2y=0$ инвариантной.

4. Показать, что если $p,\ q,\ yq,\ xp$ — символы G_4, то $p+yq$, q и $p+yq$, yq являются символами подгрупп G_2, и что это единственные подгруппы G_2, среди символов которых содержится $p+yq$.

(Lie-Scheffers, 1893, 1, стр. 554.)

5. Если рангн матриц

$$M\,(18.1),\ M_1=\left\|\xi^i_a;\ \frac{\partial\xi^i_a}{\partial x^j}\right\|,\ M_2=\left\|\xi^i_a;\ \frac{\partial\xi^i_a}{\partial j};\ \frac{\partial^2\xi^i_a}{\partial x^j\partial x^k}\right\|,\ \ldots$$

для обыкновенной точки $P(x_0)$ равны $q_0,\ q_0+q_1,\ q_0+q_1+q_2,\ldots$, то существует q_0 независимых преобразоваиий нулевого порядка в P, q_1 — первого порядка, q_2 — второго и т. д. Существует такая матрица M_s, что

$$q_0 + q_1 + \ldots + q_s = r.$$

6. Если $X_1 f$ и $X_2 f$ имеют в $P(x_0)$ порядки h_1 и h_2, то $(X_1, X_2) f$ имеет порядок $h_1 + h_2 - 1$.

7. Для группы G_r от одной переменной последовательность рангов упражнения 5 имеет вид $0, 1, \ldots, r-1$, отсюда, согласно упражнению 6, следует, что r не больше трех.

8. Если $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ — символы преобразований некоторой G_3 от одной переменной, имеющие порядки один, два и три в некоторой обыкновенной точке, то можно выбрать новый базис так, чтобы

$$\text{(i)}\ (X_1, X_2) f = X_1 f,\ (X_1, X_3) f = 2X_2 f,\ (X_2, X_3) f = X_3 f.$$

Если координату x выбрать так, чтобы $X_1 f = p$, то символы G_3 примут вид:

$$\text{(ii)}\ p,\ xp,\ x^2 p,$$

а конечное уравнение группы

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d},$$

т. е. будет уравнением проективной группы на прямой.

Показать также, что первые два символа (ii) определяют подгруппу аффинных преобразований прямой.

(Bianchi. 1918, 1, стр. 374.)

9. Найти многообразия $L_0, L_1, \ldots$ (§ 18) группы от трех переменных x, y, z, матрица которой имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} y & -x & 0 \\ x & y & z \\ x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{Vmatrix}$$

и дать геометрическую интерпретацию результата.

10. Для группы с символами

$$X_1 f = p_1 + 2x^1 p_2 + 3x^2 p_3,\ X_2 f = x^1 p_1 + 2x^2 p_2 + 3x^3 p_3,\ X_3 f =$$
$$= p_2 + 3x^1 p_3$$ — функция $3x^1 x^2 - x^3 - 2(x^1)^3$ является относительным инвариантом и абсолютным инвариантом подгруппы с символами $X_1 f$ и $X_3 f$.

19. Инвариантные многообразия. Две точки называются *эквивалентными* относительно данной группы, если они преобразуются друг в друга хотя бы одним преобразованием группы. Подпространство V_m пространства V_n называется *инвариантным многообразием* группы, если все точки, эквивалентные с любой точкой V_m, принадлежат V_m. Таким образом, если уравнения (17.1) имеют s независимых решений $F_1, \ldots, F_s$, то уравнения

$$F_t = a_t \quad (t = 1, \ldots, s),$$

где a_t — постоянные, определяют инвариантное многообразие V_m, причем $m = n - s$, и любое из этих уравнений определяет инвариантное многообразие размерности $n - 1$.

Рассмотрим группу G_r $(r > 1)$, и пусть ранг матрицы M (18.1) в данной точке $P_0(x_0)$ равен $q_0 < n$. Пусть индексы перенумерованы таким образом, что ранг матрицы, соответствующей символам $X_e f$ $(e = 1, \ldots, q_0)$ в P_0 равен q_0. Тогда преобразования с символами $a^e X_e f$, где a — произвольные постоянные, имеют нулевой порядок в P_0. На траекториях P_0 групп G_1, определенных этими символами и проходящих через P_0, лежат точки, эквивалентные P_0 относительно G_r. Геометрическое место точек является многообразием размерности q_0 и вместе с тем многообразием наименьшей размерности, содержащим точки, эквивалентные P_0 относительно группы. Оно называется *наименьшим инвариантным многообразием* для P_0.

Используя тот факт, что стационарная подгруппа P_0 имеет порядок $r - q_0$ (§ 18), покажем, что ранг матрицы M равен q_0 в каждой точке, эквивалентной P_0. Действительно, пусть P — такая точка и T — преобразование, переводящее P_0 в P, T^{-1} — его обращение и $\overline{T}$ — любое преобразование стационарной подгруппы точки P_0; тогда

$$T\overline{T}T^{-1}(P) = P.$$

Так как для любого $\overline{T}$ это преобразование оставляет P неподвижной, то стационарная подгруппа P имеет не меньший порядок, чем стационарная подгруппа P_0. Обращая рассуждение, находим, что она имеет тот же порядок.

Отсюда следует, что если P_0 — обыкновенная точка (§ 18), то эквивалентные ей точки обыкновенны, если же P_0 — особая, то ей эквивалентны особые точки того же порядка.

Если P_0 — обыкновенная точка ($q_0 = q < n$), то существует $n - q$ абсолютных инвариантов F_σ, и наименьшее инвариантное многообразие, содержащее P_0, задается уравнениями

$$F_\sigma(x) = F_\sigma(x_0) \quad (\sigma = 1, \ldots, n - q). \tag{19.1}$$

Эти многообразия составляют L_q, определенное в § 18. Кроме того, из полученных результатов следует, что многообразие (19.1) является наименьшим инвариантным многообразием любой своей точки. Хотя уравнения (19.1) определяют инвариантное многообразие любого P_0, но оно является наименьшим многообразием точки P_0 только тогда, когда P_0 — обыкновенная точка.

Рассмотрим для примера группу вращений евклидова трехмерного пространства (§ 11, упражнение 5). Центр вращения является единственной особой точкой, и ее порядок равен нулю. Общий ранг матрицы равен двум, и функция $x^2 + y^2 + z^2$ — единственный абсолютный инвариант группы, так что наименьшим инвариантным многообразием каждой обыкновенной точки является сфера.

Если P_0 — особая точка, т. е. $q_0 < q$, то координаты любой точки, эквивалентной P_0, удовлетворяют уравнениям, получаемым приравниванием нулю всех миноров матрицы M порядка $q + 1$. Многообразие, определенное этими уравнениями, инвариантно. Если мы исключим из этого многообразия точки, для которых ранг M меньше q_0, то получим геометрическое место L_{q_0} (§ 18). Таким образом, наименьшее инвариантное многообразие любой точки L_{q_0} лежит в L_{q_0}. Конечно, наименьшее инвариантное многообразие данной точки не обязано совпадать с L_{q_0}.

Координаты x^i точек, эквивалентных P_0, находятся из уравнений

$$x^i = f^i(x_0;\ a), \tag{19.2}$$

когда a принимает все возможные значения. Вследствие (5.5) матрица

$$\left\| \frac{\partial f(x_0;\, a)}{\partial a} \right\| \tag{19.3}$$

является произведением $\left\| \xi_a^i(x) \right\|$ и невырожденной матрицы $\left\| A_\alpha^a \right\|$, и, следовательно, имеет тот же ранг, что и M в точке с координатами x' [1]). Уравнения (19.2) определяют наименьшее инвариантное многообразие точки P_0. Порядок этого многообразия равен рангу матрицы (19.3). Если q_0 — ранг этой матрицы, то q_0 уравнений (19.2) могут быть разрешены относительно q_0 величин a. Подставив эти выражения в остающиеся уравнения и придав остальным $r-q$ параметрам допустимые значения, мы получим уравнения

$$\psi_\rho(x;\, x_0) = 0 \quad (\rho = 1, \ldots, n - q_0), \tag{19.4}$$

определяющие наименьшее инвариантное многообразие точки P_0. При $q_0 = q$ уравнения (19.4) должны быть эквивалентны (19.1).

Мы только что видели, что уравнения инвариантных многообразий могут быть получены многими способами. Предположим, что независимые уравнения

$$F_1 = \ldots = F_p = 0 \tag{19.5}$$

определяют инвариантное многообразие. Многообразию принадлежат траектории, проходящие через любую его точку. Поэтому из (10.19) следует, что уравнения

$$X_a F_\alpha = 0 \quad \begin{pmatrix} a = 1, \ldots, r; \\ \alpha = 1, \ldots, p \end{pmatrix} \tag{19.6}$$

удовлетворяются координатами любой точки многообразия. Если эти уравнения удовлетворяются тождественно, то функции F_α являются абсолютными инвариантами, и мы получаем случай, уже рассмотренный в связи с уравнениями (19.1). Если же уравнения (19.6) удовлетворяются в силу

[1]) Ср. Bôcher, 1907, 1, стр. 79.

(19.5), то (как было показано в § 17) функции F_α являются относительными инвариантами. Выполнение этих условий обеспечивает инвариантность многообразия, определенного уравнениями (19.5). Очевидно, что второй случай встречается только тогда, когда все точки многообразия особые. Резюмируя полученные результаты, имеем:

[19.1] *Пусть q — ранг матрицы M* (18.1) *группы G_r. Если уравнения, полученные приравниванием нулю миноров порядка p ($<q$) матрицы M, совместны, то они определяют инвариантное многообразие группы G_r, содержащее наименьшие инвариантные многообразия любой своей точки. И при $q=n$, и при $q<n$ эти инвариантные многообразия состоят из особых точек. В случае $q<n$ существуют наименьшие инвариантные многообразия обыкновенных точек, определяемые уравнениями* (19.1).

20. Группа, индуцированная в инвариантном многообразии. Пусть V_m — инвариантное многообразие, уравнения которого даны в параметрическом виде:

$$x^i = \psi^i(y^1, \ldots, y^m). \qquad (20.1)$$

Так как каждый вектор ξ_a^i в любой точке V_m касается V_m, то он выражается в виде:

$$\xi_a^i = \eta^\sigma \frac{\partial x^i}{\partial y^\sigma} \quad (\sigma = 1, \ldots, m), \qquad (20.2)$$

где η_a^σ — функции y^σ [1]). Из (20.2) получаем

$$X_a f = \xi_a^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \eta_a^\sigma \frac{\partial f}{\partial y^\sigma} = Y_a f. \qquad (20.3)$$

Может случиться, что во всех точках V_m удовлетворяется одно или несколько уравнений вида:

$$c^a \xi_a^i = 0, \qquad (20.4)$$

[1]) См. 1926, 3, стр. 46.

где c^a — постоянные. В этом случае подгруппа G_1 с символом $c^a X_a f$ оставляет неподвижными все точки V_m. Если существует p независимых соотношений (20.4), то существует подгруппа G_p группы G_r, оставляющая неподвижной каждую точку V_m. Так как матрица $\left\|\frac{\partial x}{\partial y}\right\|$ имеет ранг m, то из (20.4) и (20.2) мы имеем:

$$c^a \eta_a^\sigma = 0. \tag{20.5}$$

Таким образом, символы $Y_a f$ линейно зависимы (с постоянными коэффициентами), и среди них существует только $r-p$ независимых. Они определяют группу Γ_{r-p}, которая называется группой, индуцированной в V_m группой G_r.

Обратно, если имеют место p соотношений (20.5), то из (20.2) следует (20.4), т. е. существует подгруппа G_p группы G_r, оставляющая неподвижной каждую точку V_m. Итак,

[20.1] *Если V_m — инвариантное многообразие группы G_r, и существует подгруппа G_p, оставляющая все точки V_m неподвижными, то группа, индуцированная в V_m, есть Γ_{r-p}. Обратное также верно.*

Если $Y_\rho f$ для $\rho = 1, \ldots, r-p$ независимы (с постоянными коэффициентами), и если

$$Y_\tau f = d_\tau^\rho Y_\rho f \quad \begin{pmatrix} \rho = 1, \ldots, r-p; \\ \tau = r-p+1, \ldots, r \end{pmatrix}, \tag{20.6}$$

то структурные уравнения индуцированной группы [см. (7.2) и (20.3)] суть

$$(Y_{\rho_1}, Y_{\rho_2}) f = (c_{\rho_1\rho_2}^{\rho_3} + c_{\rho_1\rho_2}^{\tau} d_\tau^{\rho_3})\, Y_{\rho_3} f$$
$$(\rho_1, \rho_2, \rho_3 = 1, \ldots, r-p). \tag{20.7}$$

Если V_m является наименьшим инвариантным многообразием любой своей точки, то порядок стационарной подгруппы каждой его точки равен $r-m$, но порядок индуцированной подгруппы меньше r только в случае, когда существует подгруппа, стационарная относительно любой точки V_m. Рассмотрим, например, группу вращений трехмерного пространства. Сферы с центрами в начале координат являются наименьшими инвариантными многообразиями, но не существует подгруппы, стационарной для всех точек любой из этих сфер.

В частности, если уравнения (20.1) взять в форме

$$x^\tau = \psi^\tau (x^1, \ldots, x^m) \quad (\tau = m+1, \ldots, n), \tag{20.8}$$

то из (20.2) следует

$$\xi_a^i = \eta_a^\sigma \delta_\sigma^i \quad (\sigma = 1, \ldots, m).$$

Таким образом,

[20.2]. *Если уравнения инвариантного многообразия* V_m *даны в форме* (20.8), *то символы* $Y_a f$ *индуцированной группы имеют вид*:

$$Y_a f = \xi_a^\sigma (x^1, \ldots, x^m, \psi^{m+1}, \ldots, \psi^n) \frac{\partial f}{\partial x^\sigma} \tag{20.9}$$

$$\left(\begin{array}{l} a = 1, \ldots, r; \\ \sigma = 1, \ldots, m \end{array} \right)^{1)}.$$

21. Транзитивные и интранзитивные группы. Группа называется *транзитивной*, если любые две обыкновенные точки пространства эквивалентны относительно группы (§ 19); в противном случае группа *интранзитивна*. Например, группа переносов трехмерного евклидова пространства транзитивна, а группа вращений интранзитивна. Из рассмотрения *конечных уравнений* группы G_r видно, что для транзитивности группы должно быть $r \geqslant n$ и ранг матрицы (19.3) должен быть равен n. Если $r = n$, группа называется просто *транзитивной*, в противном случае — *кратно-транзитивной* [2]).

Для интранзитивных групп существуют инвариантные многообразия порядка, меньшего n, так как в противном случае любая обыкновенная точка некоторой последова-

---

1) См. Bianchi, 1918, стр. 164—5.

2) Некоторые авторы употребляют термин „кратно-транзитивный" в значении, для которого мы в упражнении 14, § 28 употребляем термин „к раз транзитивный".

тельностью преобразований переводилась бы в любую другую обыкновенную точку. Если q — *общий ранг* матрицы M (18.1) и $q = n$, то абсолютных инвариантов группы (§ 17) не существует; следовательно, инвариантное многообразие любой обыкновенной точки является всем пространством, и группа транзитивна. Если же $q < n$, то абсолютные инварианты группы существуют, и группа интранзитивна, так как существуют инвариантные многообразия обыкновенных точек. Таким образом,

[21.1] *Группа G_r транзитивна тогда и только тогда, когда $r \geqslant n$ и общий ранг матрицы M равен n.*

Например, первая и вторая параметрические группы G_r являются просто транзитивными группами от r переменных (a^α) (см. § 9). Далее, из § 19 следует, что группа, индуцированная на инвариантном многообразии, транзитивна, если многообразие является наименьшим инвариантным многообразием любой своей точки; в противном случае она интранзитивна.

Транзитивная группа может иметь инвариантные многообразия, все точки которых должны быть особыми. Например, группа G_8 (§ 18, упражнение 10) транзитивна, а уравнение

$$3x^1x^2 - x^3 - 2(x^1)^3 = 0$$

определяет инвариантное многообразие.

В заключение этого параграфа мы выпишем несколько уравнений, которыми будем пользоваться в дальнейшем изложении. Напомним основные уравнения § 6:

$$\xi^\alpha_a \frac{\partial \xi^\beta_b}{\partial x^\alpha} - \xi^\alpha_b \frac{\partial \xi^\beta_a}{\partial x^\alpha} = c^c_{ab} \xi^\beta_c \quad \begin{pmatrix} a, b, c = 1, \ldots, r; \\ \alpha, \beta = 1, \ldots, n \end{pmatrix}. \quad (21.1)$$

Если общий ранг q матрицы M (18.1) меньше r, то перенумеруем индексы так, чтобы матрица $\| \xi^\alpha_h \|$ для $h = 1, \ldots, q$ имела ранг q, и положим

$$\xi^\alpha_p = \varphi^h_p \xi^\alpha_h \quad (h = 1, \ldots, q;\ p = q + 1, \ldots, r), \quad (21.2)$$

где φ_p^h — функции x^i. Тогда уравнения (21.1) могут быть написаны следующим образом:

$$\xi_a^\alpha \frac{\partial \xi_b^\beta}{\partial x^\alpha} - \xi_b^\alpha \frac{\partial \xi_a^\beta}{\partial x^\alpha} = (c_{ab}^h + c_{ab}^p \varphi_p^h)\xi_h^\beta . \tag{21.3}$$

Если в (21.3) положить $b = p$ и заменить ξ_p^β их выражениями (21.2), то вследствие уравнений вида (21.3), где b заменено на h, получатся соотношения:

$$X_a \varphi_p^h = \Phi_{ap}^h, \tag{21.4}$$

где

$$\Phi_{ap}^h = c_{ap}^h + c_{ap}^s \varphi_s^h - \varphi_p^g (c_{ag}^h + c_{ag}^s \varphi_s^h)$$
$$\begin{pmatrix} a = 1, \ldots, r; \\ h, g = 1, \ldots, q; \\ p, s = q+1, \ldots, r \end{pmatrix}. \tag{21.5}$$

Когда в (21.4) a принимает значения $1, \ldots, q$, то

$$X_k \varphi_p^h = \Phi_{kp}^h \quad \begin{pmatrix} h, k = 1, \ldots, q; \\ p = q+1, \ldots, r \end{pmatrix}. \tag{21.6}$$

Для значений a, равных $q+1, \ldots, r$, (21.4), ввиду (21.2) и (21.6), приводится к

$$\varphi_s^k \Phi_{kp}^h = \Phi_{sp}^h \quad \begin{pmatrix} h, k = 1, \ldots, q; \\ p, s = q+1, \ldots, r \end{pmatrix}. \tag{21.7}$$

Это основные тождества, связывающие Φ_{kp}^h. Уравнения (21.4) эквивалентны (21.6) и (21.7).

Если $q < n$, т. е. если G_r интранзитивна, то уравнения $X_a f = 0$ образуют полную систему q независимых уравнений и, следовательно, допускают $n - q$ независимых решений ψ^σ. Не нарушая общности, можно предполагать, что $\left|\frac{\partial \psi^t}{\partial u^u}\right| \neq 0$ $(t, u = q+1, \ldots, n)$.

Производя преобразование

$$x'^\lambda = x^\lambda, \quad x'^\sigma = \psi^\sigma \quad (\lambda = 1, \ldots, q;\ \sigma = q+1, \ldots, n)$$

и заметив, что ξ_a^α преобразуются как контравариантные векторы, т. е.

$$\xi_a'^\alpha = \xi_a^\beta \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}$$

в новой координатной системе, которую (опуская штрихи) опять назовем x^i, мы получим:

$$\xi_a^\sigma = 0 \quad (a = 1, \ldots, r; \; \sigma = q+1, \ldots, n). \tag{21.8}$$

В этой координатной системе для любых значений постоянных a^i уравнения

$$x^{q+1} = a^{q+1}, \ldots, x^n = a^n$$

определяют инвариантное многообразие V_q. Переписывая для этого случая уравнения (20.1), получаем:

$$x^\lambda = x^\lambda, \; x^\sigma = a^\sigma \quad (\lambda = 1, \ldots, q; \; \sigma = q+1, \ldots, n), \tag{21.9}$$

и из (20.2) следует, что $\eta_a^\lambda = \xi_a^\lambda$. Таким образом, если в ξ_a^λ положить $x^\sigma = a^\sigma$ для $\sigma = q+1, \ldots, n$, то получатся векторы группы, индуцированной в инвариантном многообразии, что согласуется с (20.9).

По предположению, матрица $\|\xi_h^\alpha\|$ $(h = 1, \ldots, q)$ имеет ранг q; следовательно, в силу (21.8), система функций ξ_μ^h $(\mu = 1, \ldots, q)$ единственным образом определена уравнениями

$$\xi_\mu^h \xi_h^\lambda = \delta_\mu^\lambda, \quad \xi_\lambda^h \xi_l^\lambda = \delta_l^h \quad (\lambda, \mu, h, l = 1, \ldots, q).[1]$$

Вследствие (21.8), уравнения (21.3) эквивалентны (21.6), и

$$\xi_h^\lambda \frac{\partial \xi_l^\mu}{\partial x^\lambda} - \xi_l^\lambda \frac{\partial \xi_h^\mu}{\partial x^\lambda} = (c_{hl}^m + c_{hl}^p \varphi_p^m)\, \xi_m^\mu$$

$$\begin{pmatrix} \lambda, \mu, h, l, m = 1, \ldots, q; \\ p = q+1, \ldots, r \end{pmatrix} \tag{21.10}$$

[1]) В связи с этими уравнениями обратите внимание на сноску, относящуюся к уравнениям (5.8).

Ввиду (21.3) уравнения (21.6) могут быть написаны в виде:

$$\frac{\partial \varphi_p^h}{\partial x^\lambda} = \Phi_{lp}^h \xi_\lambda^l \quad \begin{pmatrix} \lambda,\ h,\ l = 1, \ldots, q; \\ p = q+1, \ldots, r \end{pmatrix}. \tag{21.11}$$

Если $q = n$, т. е. если группа транзитивна, то в полученных результатах можно заменить q на n.

Определим функции $\Lambda_{\beta\mu}^\alpha$:

$$\Lambda_{\beta\mu}^\lambda = \xi_h^\lambda \frac{\partial \xi_\mu^h}{\partial x^\beta} = -\xi_\mu^h \frac{\partial \xi_h^\lambda}{\partial x^\beta}, \quad \Lambda_{\beta\mu}^\sigma = 0 \tag{21.12}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda, \mu,\ h = 1, \ldots, q; \\ \beta = 1, \ldots, n; \\ \sigma = q+1, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Из (21.12) и (21.9) получаем

$$\frac{\partial \xi_h^\lambda}{\partial x^\beta} + \xi_h^\mu \Lambda_{\beta\mu}^\lambda = 0, \tag{21.13}$$

$$\frac{\partial \xi_\lambda^h}{\partial x^\beta} - \xi_\mu^h \Lambda_{\beta\lambda}^\mu = 0. \tag{21.14}$$

Из (21.12) и (21.10) имеем:

$$\Lambda_{\mu\nu}^\lambda - \Lambda_{\nu\mu}^\lambda = (c_{hc}^j + c_{hc}^p \varphi_p^j)\, \xi_\nu^h \xi_\mu^c \xi_j^\lambda$$

$$\begin{pmatrix} \lambda,\ \mu,\ \nu,\ h,\ c,\ j = 1, \ldots, q; \\ p = q+1, \ldots, r \end{pmatrix}. \tag{21.15}$$

Так как детерминант $|\xi_h^\lambda|$ отличен от нуля, то условия интегрируемости (21.13) суть:

$$\frac{\partial \Lambda_{\alpha\mu}^\lambda}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Lambda_{\beta\mu}^\lambda}{\partial x^\alpha} + \Lambda_{\alpha\mu}^\pi \Lambda_{\beta\pi}^\lambda - \Lambda_{\beta\mu}^\pi \Lambda_{\alpha\pi}^\lambda = 0$$

$$\begin{pmatrix} \alpha,\ \beta = 1, \ldots, n; \\ \lambda,\ \mu,\ \pi = 1, \ldots, q \end{pmatrix}. \tag{21.16}$$

Эти равенства выполняются тождественно, как легко проверить, подставив выражения $\Lambda_{\beta\mu}^\alpha$ из (21.12). Если в (21.16) мы заменим β на ν $(\nu=1, \ldots, q)$ и вычтем из этих уравнений соответствующие уравнения, полученные перестановкой μ и ν, то получим:

$$\frac{\partial \Lambda^{\lambda}_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Lambda^{\lambda}_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\Delta^{\lambda}_{\nu\mu} - \Delta^{\lambda}_{\mu\nu}) + \Delta^{\lambda}_{\alpha\pi} (\Delta^{\pi}_{\nu\mu} - \Delta^{\pi}_{\mu\nu}) + \\ + \Delta^{\pi}_{\alpha\nu}\Delta^{\lambda}_{\mu\pi} - \Delta^{\pi}_{\alpha\mu}\Delta^{\lambda}_{\nu\pi}.$$

Если положить

$$\Delta^{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Lambda^{\varepsilon}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \Delta^{\delta}_{\alpha\gamma}\Delta^{\varepsilon}_{\delta\beta} - \Delta^{\delta}_{\alpha\beta}\Delta^{\varepsilon}_{\delta\gamma} \qquad (21.17)$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon = 1, \ldots, n),$$

то предыдущие уравнения, вследствие вторых равенств (21.12), при $q<n$ запишутся в виде:

$$\Delta^{\lambda}_{\alpha\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\Delta^{\lambda}_{\mu\nu} - \Delta^{\lambda}_{\nu\mu}) + \Delta^{\lambda}_{\alpha\pi} (\Delta^{\pi}_{\mu\nu} - \Delta^{\pi}_{\nu\mu}) + \\ + \Delta^{\pi}_{\alpha\nu} (\Delta^{\lambda}_{\pi\mu} - \Delta^{\lambda}_{\mu\pi}) + \Delta^{\pi}_{\alpha\mu} (\Delta^{\lambda}_{\nu\pi} - \Delta^{\lambda}_{\pi\nu}).$$

Вследствие (21.13) и (21.14) эти уравнения сводятся к

$$\Delta^{\lambda}_{\alpha\mu\nu} = c^{p}_{hl} \frac{\partial \varphi^{j}_{p}}{\partial x^{\alpha}} \xi^{h}_{\nu}\xi^{l}_{\mu}\xi^{\lambda}_{j}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, n;\ p = q+1, \ldots, n; \\ \lambda, \mu, \nu, h, l, j = 1, \ldots, q \end{pmatrix}. \qquad (21.18)$$

При $q=r$ функции φ^{j}_{p} не существуют и, следовательно,

$$\Delta^{\lambda}_{\alpha\mu\nu} = 0 \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, n; \\ \lambda, \mu, \nu = 1, \ldots, r;\ r = q \end{pmatrix}. \qquad (21.19)$$

22. Подобные группы. Две группы G_r и H_r с конечными уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x}^{\alpha} = f^{\alpha}(x^1, \ldots, x^n;\ a^1, \ldots, a^r), \\ &\bar{x}'^{\alpha} = h^{\alpha}(x'^1, \ldots, x'^n;\ a'^1, \ldots, a'^r)\ (\alpha = 1, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \qquad (22.1)$$

называются *подобными*, если существует такая система r независимых функций $\varphi^\alpha(a)$, что можно найти невырожденное преобразование координат, при котором одна система уравнений (22.1) переходит в другую, если положить $a'^\alpha = \varphi^\alpha(a)$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$ во второй системе уравнений (22.1); некоторые авторы называют такие группы *эквивалентными*. Из результатов § 7 следует, при соответствующем выборе базисов, совпадение структурных констант обеих групп, т. е. обе группы имеют одинаковую структуру. Таким образом имеем:

[22.1]. *Для того чтобы две r-параметрические группы от одного и того же числа переменных были подобны, необходимо, чтобы они имели одинаковую структуру.*

Пусть $\xi_a(x)$ и $\xi_a'(x')$, векторы базисов групп G_r и H_r, выбраны таким образом, что структурные константы этих групп одинаковы. Для того чтобы группы были подобны, необходимо и достаточно, чтобы существовало невырожденное преобразование

$$x'^\alpha = \psi^\alpha(x) \tag{22.2}$$

такое, что

$$\xi_a'^\alpha = \xi_a^\beta \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}. \tag{22.3}$$

Для этого необходимо, чтобы матрицы $\|\xi\|$ и $\|\xi'\|$ имели одинаковые ранги.

Сначала мы рассмотрим случай, когда общий ранг q матрицы $\|\xi\|$ равен r. При $r < n$ координаты x^α и x'^α можно выбрать таким образом (см. § 21), что

$$\xi_a^\sigma = \xi_a'^\sigma = 0 \quad (a = 1, \ldots, r;\ \sigma = q+1, \ldots, n). \tag{22.4}$$

Беря в (22.3) $\alpha = r+1, \ldots, n$, имеем:

$$\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^h} = 0 \quad (\sigma = q+1, \ldots, n;\ h = 1, \ldots, q). \tag{22.5}$$

Следовательно, x'^σ суть функции $\varphi^\sigma(x^{r+1}, \ldots, x^n)$. Так как они независимы, то, не изменяя (22.4), мы можем принять их за новые координаты $x^{r+1}, \ldots, x^n$. Следовательно, не нарушая общности, можно считать

$$x'^{\sigma}=x^{\sigma} \quad (\sigma=q+1, \ldots, n). \tag{22.6}$$

Если в (22.3) a принимает значения от 1 до $q\,(=r)$, то эти уравнения можно записать в виде:

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}}=\xi'^{\lambda}_{a}(x')\,\xi^{a}_{\mu}(x) \; (\lambda, \mu, a=1, \ldots, r), \tag{22.7}$$

где

$$\xi^{a}_{\mu}\xi^{\lambda}_{a}=\delta^{\lambda}_{\mu}, \; \xi^{a}_{\lambda}\xi^{\lambda}_{b}=\delta^{a}_{b}. \tag{22.8}$$

Если в функциях $\xi'^{\lambda}_{a}(x')$ уравнений (22.7), в соответствии с (22.6), заменить x'^{σ} для $\sigma=q+1, \ldots, n$ на x^{σ}, то получится система дифференциальных уравнений с независимыми переменными $x^1, \ldots, x^q$ и параметрами $x^{q+1}, \ldots, x^n$. С помощью (21.13), (21.14) и аналогичных уравнений для ξ'^{λ}_{a} мы из (22.7) получим:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}}&=-\Lambda'^{\lambda}_{\pi\tau}\xi'^{\tau}_{h}\xi^{h}_{\mu}\xi'^{\pi}_{l}\xi^{l}_{\nu}+\xi'^{\lambda}_{h}\xi^{h}_{\pi}\Lambda^{\pi}_{\nu\mu}\\ &(\lambda, \mu, \nu, \pi, \tau, h=1, \ldots, q).\end{aligned}\right\} \tag{22.9}$$

Так как $q=r$, то в этом случае уравнения (21.15) дают:

$$\Lambda^{\lambda}_{\mu\nu}-\Lambda^{\lambda}_{\mu\nu}=c^{j}_{hi}\xi^{h}_{\nu}\xi^{i}_{\mu}\xi^{\lambda}_{j} \; (h, i, j=1, \ldots, r).$$

В виду этого соотношения из (22.9) следует, что условия интегрируемости (22.7) удовлетворяются тождественно. Таким образом, решение определяется заданием в качестве начальных значений $x'^1, \ldots, x'^r$ произвольных функций $x^{r+1}, \ldots, x^n$. Если они выбраны таким образом, что якобиан решений относительно $x^1, \ldots, x^r$ отличен от нуля, то эти решения вместе с (22.6) определяют невырожденное преобразование G_r в H_r. Итак, мы доказали теорему:

[22.2] *Две интранзитивные группы G_r и H_r от одного и того же числа переменных с одинаковой структурой, матрицы M которых имеют ранг r, подобны. Уравнения преобразования одной группы в другую содержат r произвольных функций.*

Если $r = n$, т. е., если группа просто транзитивна, то, вместо (22.4), (22.6) и (22.7), мы имеем только уравнения (22.7), в которых λ, μ, $a = 1, \ldots, n$. Как и выше, эти уравнения вполне интегрируемы, и их решение содержит n произвольных постоянных (начальных значений x'^i). Таким образом,

[22.3] *Две просто транзитивные группы одинаковой структуры от одного и того же числа переменных подобны, и уравнения преобразования одной в другую содержат n произвольных постоянных.*

Теперь мы рассмотрим случай $q < r$. Для группы G_r мы выбираем ξ^α_a таким образом, чтобы матрица $\|\xi^\alpha_h\|$ $(h = 1, \ldots, q)$ имела ранг q, тогда ранг матрицы $\|\xi'^\alpha_h\|$ $(h = 1, \ldots, q)$ должен быть тоже равен q. Аналогично (21.2), полагаем:

$$\xi'^\alpha_p = \varphi'^h_p \xi'^\alpha_h \quad (p = q + 1, \ldots, n). \tag{22.10}$$

Из этих уравнений и из (22.3) получаем:

$$\varphi'^h_p(x') = \varphi^h_p(x) \quad \begin{pmatrix} h = 1, \ldots, q; \\ p = q + 1, \ldots, r \end{pmatrix}. \tag{22.11}$$

Имеется $q(r - q)$ таких уравнений. Для того чтобы две группы были подобны, очевидно, необходимо, чтобы эти уравнения были совместны, и чтобы невозможно было исключением x'^i получить соотношение между x^i, и наоборот. Мы покажем, что это условие также и достаточно.

При $q < n$ мы выберем координаты x' и x таким образом, чтобы выполнялись соотношения (22.4) и (22.6). Как и в случае $q = r$, мы получим систему уравнений (22.7), в которой теперь λ, μ, $a = 1, \ldots, q$. Заменив в этих уравнениях и в (22.11) x'^σ (для $\sigma = q + 1, \ldots, n$) на x^σ, мы получим смешанную систему (§ 1) дифференциальных уравнений для $x'^1, \ldots, x'^q$ с независимыми переменными $x^1, \ldots, x^q$, содержащую $x^{q+1}, \ldots, x^n$ в качестве параметров. Как и в предыдущем случае, мы получим соотношения (22.9). Поэтому, как следует из (21.15) и (22.11), выполняются условия интегрируемости уравнений (22.7).

Из (22.11) имеем (см. (21.5)):

$$\frac{\partial \varphi_p^h}{\partial x^\lambda} = \Phi_{lp}^h \xi_\lambda^l, \quad \frac{\partial \varphi_p'^h}{\partial x'^\lambda} = \Phi_{lp}'^h \xi_\lambda'^l. \tag{22.12}$$

Продифференцировав уравнения (22.11) по x^μ ($\mu = 1, \ldots, q$) и применив (22.6), (22.7) и (22.12), получим:

$$(\Phi_{lp}'^h - \Phi_{lp}^h)\xi_\mu^l = 0.$$

Из соотношений (21.5) очевидно, что эти уравнения удовлетворяются в силу (22.11).

Таким образом, применяя к настоящему случаю общую теорию смешанных систем (§ 1), мы видим, что уравнения (22.11) образуют систему F_0, а все системы $F_1, \ldots$ являются следствиями F_0. Следовательно, решение существует, если (22.11) совместны и не дают соотношений между только x^i или только x'^i. Если (22.11) совместны и s функций $\varphi_p'^h$, скажем, $\varphi'^1, \ldots, \varphi'^s$ независимы, то s не должно быть больше q, так как должно иметь место также (22.6). Следовательно, ранг якобиана этих φ'^i по x'^σ должен быть равен $n - q + s$ и, следовательно, ранг матрицы $\left\| \frac{\partial \varphi'^\alpha}{\partial x'^\lambda} \right\|$ при $\alpha = 1, \ldots, s$ и $\lambda = 1, \ldots, q$ равен s. Таким образом, уравнения $\varphi'^\alpha = \varphi^\alpha$ могут быть разрешены относительно s координат из $x'^1, \ldots, x'^q$ в виде функций $x'^{q+1}, \ldots, x'^n; x^1, \ldots, x^n$. Не нарушая общности, можно предполагать, что это $x'^1, \ldots, x'^s$. Заменив x'^σ ($\sigma = q+1, \ldots, n$) на x^σ, мы получим:

$$x'^\alpha = \psi^\alpha(x'^{s+1}, \ldots, x'^q; x^1, \ldots, x^n) \; (\alpha = 1, \ldots, s). \tag{22.13}$$

Эти выражения аналогичны (1.8), причем $x^{q+1}, \ldots, x^n$ вошли в качестве параметров. Итак, мы имеем полную систему уравнений (аналогичную (1.11)):

$$\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\lambda} = f_\lambda^\rho(x'^{s+1}, \ldots, x'^q; x^1, \ldots, x^n)$$
$$\begin{pmatrix} \rho = s+1, \ldots, q; \\ \lambda = 1, \ldots, q \end{pmatrix}. \tag{22.14}$$

Она получается из (22.7) заменой $x'^1, \ldots, x'^s$ выражениями (22.13) и x'^σ на x^σ $(\sigma = q+1, \ldots, n)$. Решение системы (22.14) содержит $q-s$ произвольных функций параметров $x^{q+1}, \ldots, x^n$.

При $q=n$ наши рассуждения сохраняют силу, однако, нет соотношений (22.4) и (22.6) и, следовательно, (22.7) и (22.11) содержат все x^i в качестве независимых переменных.

Таким образом, мы получили следующую теорему, доказанную Ли другим способом:[1]):

[22.4] *Две r-параметрические группы одинаковой структуры от одного и того же числа переменных, для которых общие ранги матриц* $\|\xi\|$ *и* $\|\xi'\|$ *меньше* r, *подобны тогда и только тогда, когда эти ранги равны (скажем,* q*); любая пара соответствующих миноров порядка* q *имеет одинаковые ранги, и соответствующая система уравнений* (22.11) *совместна и не приводит к соотношениям между переменными какой-нибудь группы.*

23. Примитивные и импримитивные группы. В § 19 мы видели, что каждая обыкновенная точка интранзитивной группы лежит в инвариантном многообразии, преобразуемом в себя всеми преобразованиями группы, и что существует семейство инвариантных многообразий, содержащих все вместе любую обыкновенную точку (см. (19.1)). Хотя транзитивные группы не обладают этим свойством, существуют транзитивные группы, для которых можно найти семейство многообразий, содержащих все вместе любую точку, такое, что вместе с преобразованием некоторой точки одного многообразия в точку другого каждая точка первого многообразия переходит в некоторую точку второго. Простой пример такого семейства представляет для группы параллельных переносов трехмерного евклидова пространства любое семейство параллельных плоскостей, а также конгруенция параллельных линий. Таким образом, для данной группы может существовать более одного

[1]) Lie-Engel, 1888, 1, стр. 354. Eisenhart, 1932, 4

семейства, обладающего таким свойством. Ли[1]) назвал группы, обладающие такими семействами, *импримитивными*, а соответствующие многообразия семейства—*системой импримитивности*; группы, не обладающие этим свойством, он назвал *примитивными*. Например, группа движений евклидовой плоскости примитивна, потому что любая точка и направление в ней преобразуются в любую другую точку и любое в ней направление. Если бы существовали системы импримитивности, они имели бы в каждой своей точке любое данное направление.

Пусть существует система импримитивности, состоящая из многообразий размерности p. Она определяется системой уравнений

$$F_\mu = c_\mu \quad (\mu = 1, \ldots, n-p), \tag{23.1}$$

где F_μ независимы, и c_μ — произвольные постоянные, причем

$$F_\mu(f(x;\ a)) = \Phi_\mu(F_1(x), \ldots, F_{n-p}(x); a), \tag{23.2}$$

где Φ_μ—такие функции, что эти уравнения являются тождествами относительно x^i и a^α. Для изучения этого вопроса естественно рассмотреть полную систему дифференциальных уравнений в частных производных, которой удовлетворяют функции F_μ. Так как, по предположению, функции F_μ независимы, уравнения

$$b^i \frac{\partial F_\mu}{\partial x^i} = 0 \quad (\mu = 1, \ldots, n-p;\ i = 1, \ldots, n)$$

имеют p независимых систем решений b^i_α. Следовательно, уравнения

$$B_\alpha f = b^i_\alpha p_i = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, p) \tag{23.3}$$

образуют полную систему, решениями которой являются $F_1, \ldots, F_{n-p}$ и любые их функции. В частности, для всех значений a^α функции $F_\mu(f(x;\ a))$ должны быть решениями системы (23.3). Таким образом:

[23.1] *Группа имеет системами импримитивности многообразия размерности p тогда и только тогда,*

---

[1]) 1888, I том. 1, стр. 220.

когда существует такая полная система (23.3), *что* $F_\mu(f(x;\ a))$ *удовлетворяют этой системе, где* $F_\mu(x)$ $(\mu = 1, \ldots, n-p)$ — *независимые решения* (23.3).

Когда группа интранзитивна, уравнения

$$\xi^i_\alpha p_i = 0$$

образуют полную систему, и любая система импримитивности получается из системы инвариантных многообразий (§ 19).

Предположим, что уравнения группы взяты в форме

$$x'^i = x^i + tXx^i + \frac{t^2}{2}X^2x^i + \ldots,$$

где

$$Xf = e^a X_a f.$$

Тогда, как было показано в § 10,

$$F_\mu(x') = F_\mu(x) + tXF_\mu(x) + \frac{t^2}{2}X^2F_\mu(x) + \ldots \qquad (23.4)$$

Эти выражения должны удовлетворять системе (23.3), если $F_\mu(x)$ ее решения для всех значений t и e^a. Для этого необходимо, чтобы X_aF_μ были решениями (23.3), т. е.

$$X_aF_\mu = \Phi_{a\mu}(F_1, \ \ldots, \ F_{n-p}). \qquad (23.5)$$

При выполнении этого условия

$$X_bX_aF_\mu = \frac{\partial\Phi_{a\mu}}{\partial F_\nu}X_bF_\nu = \Phi_{a\mu b}(F_1, \ \ldots, \ F_{n-p}).$$

Следовательно, $x^2F_\mu, \ldots, x^mF_\mu$ являются решениями (23.3), поэтому условие (23.5) необходимо и достаточно для того, чтобы выражение (23.4) удовлетворяло уравнениям (23.3). Итак, имеем:

[23.2] *Для того, чтобы система уравнений* (23.1) *определяла систему импримитивности группы* G_r *с символами* X_af $(a = 1, \ldots, r)$, *необходимо и достаточно, чтобы* X_aF_μ *были функциями* F_ν.

Если функции F_μ являются решениями полной системы (23.3), то, вследствие (23.5), имеем:

$$(X_a, B_\alpha) F_\mu = X_a (B_\alpha F_\mu) - B_\alpha (X_a F_\mu) = 0,$$

и, следовательно, F_μ являются решениями уравнений $(X_a, B_\alpha) f = 0$. Таким образом[1],

[23.3] *Группа G_r с символами $X_1 f, \ldots, X_r f$ имеет системами импримитивности многообразия размерности p тогда и только тогда, когда существует полная система* (23.3) *такая, что*

$$(X_a, B_\alpha) f = \lambda^\beta_{a\alpha}(x) B_\beta f \quad \begin{pmatrix} a = 1, \ldots, r; \\ \alpha, \beta = 1, \ldots, p \end{pmatrix}, \qquad (23.6)$$

где $\lambda^\beta_{a\alpha}$, самое большее, — функции x^i. Если условия теоремы [23.3] выполнены, мы скажем, что полная система *допускает* группу.

Для того, чтобы эти условия представить в другой форме, произведем такое преобразование координат, чтобы в новой координатной системе уравнения системы импримитивности приняли вид $x^\mu = \mathrm{const}$ $(\mu = p+1, \ldots, n)$, тогда $b^\mu_\alpha = 0$, и полная система (23.3) приводится к $b^\beta_\alpha p_\beta = 0$ $(\alpha, \beta = 1 \ldots, p)$. Так как ранг $\|b^\beta_\alpha\|$ равен p, то, без нарушения общности, возьмем систему (23.3) в виде:

$$p_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, p),$$

т. е. примем $b^i_\alpha = \delta^i_\alpha$. Тогда из уравнений (23.6) имеем:

$$\frac{\partial \xi^\alpha_a}{\partial x^\beta} = \lambda^\alpha_{a\beta}, \quad \frac{\partial \xi^\mu_a}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \begin{pmatrix} \alpha, \beta = 1, \ldots, p; \\ \mu = p+1, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Следовательно функции ξ^μ_a не должны зависеть от $x^1, \ldots, x^p$. Это следует также из (23.5). Таким образом,

[23.4] *Для того, чтобы группа G_r имела систему импримитивности, состоящую из многообразий размерности p, необходимо и достаточно, чтобы функции*

[1]) См. Bianchi, 1918. 1, стр. 184.

$\xi^i_a(x)$*были таковы, что выражения*

$$\xi^i_a \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^i} \qquad (\mu = p+1; \; \ldots, \; n)$$

не зависят от $x'^1, \ldots, x'^p$ *в некоторой системе координат* x'^i. Для группы G_3 параллельных переносов евклидова трехмерного пространства условия теоремы выполнены, декартовы координаты будут системой x'^i. В этом случае каждое из уравнений

$$x^i = \mathrm{const}, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

определяет систему импримитивности. Любые два из этих уравнений также определяют систему импримитивности. Кроме того, если b^i_α в (23.3) постоянны, то мы имеем

$$(B_\rho, X_a) f = 0,$$

и (23.3) дает семейство параллельных плоскостей, если $\rho = 1, 2$, и конгруенцию параллельных линий, если $\rho = 1$.

24. Систатические и асистатические группы. Если общий ранг q матрицы M (18.1) меньше r, то имеют место уравнения (21.2). Для обыкновенной точки $P_0(x_0)$ образующие стационарной подгруппы имеют вид:

$$X_p f - \varphi^h_p(x_0) X_h f \; (h = 1, \ldots, q; \; p = q+1, \ldots, r). \qquad (24.1)$$

Если среди функций φ^h_p имеется $n - \rho$ независимых, то уравнения

$$\varphi^h_p(x) = \varphi^h_p(x_0) \qquad (24.2)$$

определяют многообразие V_ρ, стационарные подгруппы всех точек которого те же, что и стационарная подгруппа точки P_0. Обратно, если $P_1(x_1)$ имеет ту же стационарную подгруппу, что и $P_0(x_0)$, то из (24.1) имеем:

$$[\varphi^h_p(x_1) - \varphi^h_p(x_0)] X_h f = 0,$$

и, следовательно, P_1 принадлежит V_ρ, определенному уравнениями (24.2).

Следуя Ли[1]), мы говорим, что группа *систатична*, если стационарная подгруппа обыкновенной точки P является

1) 1888, 1, том 1, стр. 501,

также стационарной подгруппой любой точки некоторого связного многообразия, содержащего P, называемого *систатическим многообразием* точки P. Если группа этим свойством не обладает, она *асистатична*. При $q = r$ стационарная подгруппа любой точки есть тождество (§ 18) и, следовательно, такая группа систатична, и V_n есть ее систатическое многообразие. При $q < r$ асистатические группы это те группы, для которых n функций φ_p^h независимы. Если независимы только $n - \rho$ функций φ_p^h, группа систатична, и уравнения (24.2) определяют систатическое многообразие обыкновенной точки. Очевидно, что существует $\infty^{n-\rho}$ таких систатических многообразий. Пусть T — любое преобразование стационарной подгруппы точки P_0, и S — такое преобразование группы G_r, не принадлежащее этой подгруппе, что $S(P_0) = P_1$, где P_1 не принадлежит V_ρ, определенному уравнениями (24.2). Тогда STS^{-1} является преобразованием стационарной подгруппы точки P_1 и всех точек вида $S(P)$, где P — любая точка V_ρ, т. е. всех точек многообразия V'_ρ, в которое переходит V_ρ при преобразовании S. Обратно, если T' является преобразованием стационарной подгруппы точек V'_ρ, то $S^{-1}TS$ является преобразованием стационарной подгруппы точек V_ρ. Следовательно, V'_ρ — систатическое многообразие группы G_r. Таким образом,

[24.1] *Если группа G_r систатична, и общий ранг матрицы $\|\xi\|$ меньше r, то систатические многообразия образуют систему импримитивности.*

Упражнения

1. Показать, что уравнение $x^2 + y^2 = cz^2$, где c — произвольная постоянная определяет инвариантное многообразие группы G_5 (упражнение 9, § 18). Найти индуцированную на нем группу, положив

$$x = cu \cos v, \quad y = cu \sin v, \quad z = cu.$$

2. Если $X_a f$ и $Y_a f$ — символы двух просто транзитивных групп одинаковой структуры от n переменных x^i и y^i

соответственно, то уравнения

$$X_a f + Y_a f = 0$$

относительно переменных x^i и y^i образуют полную систему и допускают n независимых решений $f_i(x, y)$. Уравнения $f_i(x, y) = c_i$, где c_i — произвольные постоянные, определяют наиболее общее преобразование $X_a f$ в $Y_a f$ и обратно. (Bianchi, 1918, 1, стр. 261.)

3. Найти функции $\Lambda^{\gamma}_{\alpha\beta}$ группы G_3 вращений трехмерного евклидова пространства с символами $x^i p_j - x^j p_i$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

4. Показать, что не существует кратно транзитивных абелевых групп.

5. Найти группу, индуцированную группой упражнения 10, § 18, на инвариантном многообразии (развертывающейся поверхности Кэли):

$$x^1 = u, \quad x^2 = v, \quad x^3 = 3uv - 2u^3.$$

Найти систему импримитивности индуцированной группы.

6. Показать, что группа вращений трехмерного евклидова пространства систатична, и что прямые, проходящие через центр, являются систатическими многообразиями и системами импримитивности.

7. Показать, что концентрические сферы с центрами в начале координат являются системами импримитивности группы G_4:

$$x^i p_j - x^j p_i, \quad x^i p_i \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

8. Показать, что группы

$$\text{(I)}\ p,\ q,\ xq,\ yq;$$

$$\text{(II)}\ q,\ xq,\ yq$$

асистатичны.

25. Дифференциальные уравнения, допускающие линейные операторы. В доказательстве теоремы [23.3] никак не использовался тот факт, что операторы $X_a f$ являются символами некоторой группы G_r, так что имеет место теорема:

[25.1] *Пусть $X_1 f, \ldots, X_r f$ линейные операторы. Для того, чтобы $X_a\theta$ были решениями полной системы:*

$$A_\alpha f = a^i_\alpha p_i = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, p), \qquad (25.1)$$

где θ — решение этой системы, отличное от постоянной, необходимо и достаточно, чтобы

$$(X_a, A_\alpha) f = \lambda^{\beta}_{a\alpha} A_\beta f, \qquad (25.2)$$

где $\lambda^{\beta}_{a\alpha}$ — функции только переменных x^i.

Если эти условия выполнены, мы говорим, что полная система *допускает систему операторов*, или что она *допускает однопараметрические группы*, порожденные (в смысле § 10) этими операторами.

Из тождества Якоби (2.4), примененного к операторам $X_a f$, $X_b f$ и $A_\alpha f$, мы, вследствие (25.2), получим

$$((X_a, X_b), A_\alpha)f = (X_a\lambda^\beta_{b\alpha} - X_b\lambda^\beta_{a\alpha} + \\ + \lambda^\gamma_{b\alpha}\lambda^\beta_{a\gamma} - \lambda^\gamma_{a\alpha}\lambda^\beta_{b\gamma})\, A_\beta f. \qquad (25.3)$$

Так как это уравнение вида (25.2), то доказана теорема

[25.2] *Если полная система линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных допускает операторы $X_a f$ и $X_b f$, то она допускает также коммутатор $(X_a, X_b)f$.*

Если операторы $X_a f$ являются символами группы G_r, то применением этой теоремы мы не получим никаких новых операторов, допускаемых полной системой. Мы рассмотрим наиболее общий случай теоремы [25.1].

Так как, по предположению, система (25.1) полна, то

$$(A_\alpha, A_\beta)f = \sigma^\gamma_{\alpha\beta}A_\gamma f. \qquad (25.4)$$

Если мы положим

$$Xf = \mu^a X_a f + \nu^\alpha A_\alpha f, \qquad (25.5)$$

то

$$(X, A_\beta)f = (\mu^a\lambda^\gamma_{a\beta} + \nu^\alpha\sigma^\gamma_{\alpha\beta} - A_\beta\nu^\gamma)\, A_\gamma f - A_\beta\mu^a X_a f. \qquad (25.6)$$

В качестве первого следствия этих соотношений имеем:

[25.3] *Если полная система* (25.1) *допускает операторы $X_a f$, то она допускает также операторы $\mu^a X_a f + \nu^\alpha A_\alpha f$, где ν^α — любые функции x^i, а μ^a — любые постоянные или решения* (25.1).

Предположим, что нам дана система r операторов, допускаемых полной системой (25.1). Пусть $r + p \leqslant n$, и матрица

$$\| a^i_1, \ldots, a^i_p;\ \xi^i_1, \ldots, \xi^i_r \| \qquad (25.7)$$

имеет ранг $r+p$, тогда мы говорим, что операторы *независимы*. Если какой-нибудь оператор (25.5) допускается полной системой, то правая сторона в (25.6) должна быть линейной комбинацией $A_\alpha f$. Так как матрица (25.7) имеет ранг $r+p$, то отсюда следует, что μ^α являются или постоянными, или решениями полной системы. Таким образом, имеем:

[25.4] *Если полная система* (25.1) *допускает r независимых (в том смысле, что ранг матрицы* (25.7) *равен $r+p$) операторов $X_a f$, то для того, чтобы полная система допускала оператор $\mu^a X_a f + \nu^\alpha A_\alpha f$, необходимо и достаточно, чтобы μ^a были либо постоянными, либо решениями данной полной системы.*

Пусть мы имеем r независимых операторов. Коммутаторы каждой пары их будут, в соответствии с теоремой [25.2], операторами, допускаемыми данной полной системой. Они будут либо независимыми от данных операторов, либо выразятся в форме (25.5). При получении этим способом независимых операторов мы присоединяем их к системе и (как в § 2) продолжаем процесс составления, пока, наконец, не получим q $(\geqslant r)$ независимых (в указанном смысле) операторов; ясно, что $q+p \leqslant n$. Тогда для любых двух операторов этой системы

$$(X_a, X_b) f = \mu_{ab}^c X_c f + \nu_{ab}^\alpha A_\alpha f \qquad (a, b = 1, \ldots, q), \qquad (25.8)$$

где (см. теорему [25.4]) каждое непостоянное μ_{ab}^c является нетривиальным решением системы (25.1). Следовательно, для случая, когда $X_a f$ не являются символами некоторой группы G_q, мы можем получить одно или более нетривиальных решений. По теореме [25.1], если θ — решение, то $X_a \theta$ тоже будут решениями, и если они не будут функциями θ, мы, продолжая применять X_a, можем получать новые решения и так далее.

Как частный случай теоремы [25.1], имеем:

[25.5] *Уравнение*

$$Af = a^i p_i = 0 \qquad (25.9)$$

тогда и только тогда допускает систему операторов $X_1f, \ldots, X_rf$, *когда*

$$(X_a, A)f = \lambda_a Af \qquad (a = 1, \ldots, r). \tag{25.10}$$

В этом случае $X_a\theta$ *будет решением* (25.9), *если* θ — *некоторое решение этого уравнения.*

Если эти условия выполнены, мы (образуя коммутаторы) можем получить максимальную независимую систему операторов. Матрица

$$\| a^i, \xi_1^i, \ldots, \xi_r^i \|$$

будет иметь ранг $r+1$. Тогда (25.8) дает:

$$(X_a, X_b)f = \mu_{ab}^c X_c f + \nu_{ab} Af, \tag{25.11}$$

где μ_{ab}^c — или постоянные или решения (25.9).

Таким образом, если известны r независимых операторов, то можно получать решения прямо из соотношений (25.11). Кроме того, при $r+1 < n$ уравнение (25.9) и уравнения $X_af = 0$, как видно из (25.10) и (25.11), образуют полную систему. Существует $n-(r+1)$ независимых решений этой системы (т. е. они будут решениями (25.9)), которые находятся интегрированием системы вида (1.1).

Если известны p независимых решений (25.9), например $\theta^1, \ldots, \theta^p$, то, не нарушая общности, положим, что якобиан $\left| \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^\beta} \right|$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, p)$ отличен от нуля. Следовательно, произведя преобразование координат

$x'^\alpha = \theta^\alpha, \quad x'^\sigma = x^\sigma \qquad (\alpha = 1, \ldots, p; \; \sigma = p+1, \ldots, n),$

в новой координатной системе получим $a'^\alpha = 0$, и уравнение (25.9) перейдет в уравнение

$$a'^\sigma \frac{\partial f}{\partial x'^\sigma} = 0$$

с $n-p$ переменными, но содержащее, возможно, $x'^1 \ldots, x'^p$ в качестве параметров.

В случае, когда известны $n-1$ независимых решений, уравнение приводится к $p_1 = 0$. Это уравнение, очевидно, допускает $n-1$ независимых операторов p_α $(\alpha=2, \ldots, n)$, образующих абелеву группу. Таким образом,

[25.6] *Линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка с n переменными допускает абелеву группу порядка $n-1$.*

Для уравнения (25.9), в соответствии с теоремой [25.3], система независимых операторов дается формулой

$$\overline{X}_a f = X_a f + \nu_a A f, \tag{25.12}$$

где ν_a — любые функции x^i. Ввиду (25.10) и (25.11), имеем:

$$\overline{\xi}_a^i \frac{\partial \overline{\xi}_b^j}{\partial x^i} - \overline{\xi}_b^i \frac{\partial \overline{\xi}_a^j}{\partial x^i} = \mu_{ab}^c \overline{\xi}_c^j + \overline{\nu}_{ab} a^j,$$

где

$$\overline{\nu}_{ab} = X_a \nu_b - X_b \nu_a + \nu_a A \nu_b - \nu_b A \nu_a + \nu_b \lambda_a - \nu_a \lambda_b - \nu_c \mu_{ab}^c.$$

Пусть a^h не равно нулю. Выберем величины ν_a так, что $\xi_a^h + \nu_a\ a^h = 0$, тогда $\overline{\xi}_a^h = 0$ в каждом операторе $\overline{X}_a f$. Следовательно, если в написанных выше уравнениях мы положим $j=h$, то найдем, что $\overline{\nu}_{ab}=0$, и поэтому

$$(\overline{X}_a, \overline{X}_b) f = \mu_{ab}^c \overline{X}_c f. \tag{25.13}$$

Если μ_{ab}^c — постоянные, то $\overline{X}_a f$ являются символами некоторой группы G_r, в уравнения которой x^h входит в качестве параметра. Соответственно этому, имеем:

[25.7] *Если уравнение $Af=0$ допускает r независимых операторов $X_a f$, то либо оно допускает группу инфинитезимальных преобразований, либо решения уравнений получаются прямым вычислением (из формул* (15.13)).

Рассмотрим случай, когда $n=2$, и уравнение допускает единственный оператор Xf. Если исключим λ из двух уравнений

$$\xi^i \frac{\partial a^j}{\partial x^i} - a^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = \lambda a^j \quad (j=1,2), \tag{25.14}$$

к которым в этом случае приводятся уравнения (25.10), то получим:

$$a^2\left(\xi^i \frac{\partial a^1}{\partial x^i} - a^i \frac{\partial \xi^1}{\partial x^i}\right) - a^1\left(\xi^i \frac{\partial a^2}{\partial x^i} - a^i \frac{\partial \xi^2}{\partial x^i}\right) = 0. \tag{25.15}$$

Это может быть написано в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(a^1M)+\frac{\partial}{\partial x^2}(a^2M)=0, \tag{25.16}$$

где

$$M=\frac{1}{\xi^1a^2-\xi^2a^1}. \tag{25.17}$$

Следовательно, M есть интегрирующий множитель уравнения

$$a^2dx^1-a^1dx^2=0. \tag{25.18}$$

Поэтому решение этого уравнения, следовательно, и уравнения (25.9), находится квадратурой.

Обратно, если известен интегрирующий множитель M для уравнения (25.18), и функции ξ^1 и ξ^2 выбраны так, чтобы удовлетворить условию (25.17), то уравнение (25.16) приводится к (25.15), из которого следует (25.14). Очевидно, что если функции ξ^1 и ξ^2 удовлетворяют (25.17), то ему удовлетворят также $\xi^1+\varphi a^1$ и $\xi^2+\varphi a^2$, где φ — произвольная функция x^1 и x^2. Таким образом,

[25.8] *Если уравнение*

$$a^1p_1+a^2p_2=0 \tag{25.19}$$

допускает оператор, то его решение находится квадратурой. Если известен интегрирующий множитель сопряженного уравнения (25.18), *то можно непосредственно найти бесконечное число операторов, допускаемых уравнением* (25.19).

Если M_1 — второй интегрирующий множитель (25.18), и если мы обозначим через $\xi_1{}^1$ и $\xi_1{}^2$ функции, удовлетворяющие уравнению (25.17) с $M=M_1$, то $\rho=\frac{M}{M_1}$, ввиду того, что $\xi_1{}^i=\rho\xi^i+\sigma a^i$. Из теоремы [25.4] следует, что ρ является решением (25.19).

Мы применим теоремы [16.1] и [25.8] к нахождению канонических форм символов группы G_2 от двух переменных. Мы обозначаем через s ранг матрицы символов. Рассмотрим четыре случая. 1°. $(X_1, X_2)f=X_1f$, $s=2$. Так как уравнение $X_1f=0$ допускает оператор X_2f, то его решение может быть получено квадратурой, а тогда реше-

ние уравнения $X_1 f = 1$ также можно получить квадратурой (см. § 10). Принимая эти решения за новые координаты x и y, мы получим $X_1 f = q$, и исходное соотношение дает
$$\frac{\partial \xi}{\partial y} p + \frac{\partial \eta_2}{\partial y} q \equiv q.$$

Следовательно,
$$\xi_2 = \varphi_1(x), \quad \eta_2 = \varphi_2(x) + y,$$
где $\varphi_1 \not\equiv 0$, так как $s = 2$. Если мы положим:
$$x' = \psi(x) \equiv e^{\int \frac{dx}{\varphi_1}}, \quad y' = y - \psi \int \frac{\varphi_2}{\varphi_1 \psi} dx,$$
то в новых переменных получим:
$$X_1 f = q, \; X_2 f = xp + yq, \; (X_1, X_2) f = X_1 f. \quad (25.20)$$

2°. $(X_1, X_2) f = X_1 f$, $s = 1$. Так как $X_2 f = \rho X_1 f$, то $X_1 \rho = 1$. Таким образом, если найдено решение уравнения $\eta_1 dx - \xi_1 dy = 0$, то без квадратур могут быть получены координаты, в которых $X_1 f = q$. Тогда $X_2 f = \rho q$, и поэтому
$$\rho = \varphi(x) + y.$$

В переменных $x' = x$ и $y' = y + \varphi(x)$ символы имеют вид:
$$X_1 f = q, \quad X_2 f = yq, \quad (X_1, X_2) f = X_1 f. \quad (25.21)$$

3°. $(X_1, X_2) f = 0$, $s = 2$. По теореме (25.8), так же как в случае 1°, квадратурами могут быть найдены координаты, в которых $X_1 f = 0$. Тогда $X_2 f = \varphi_1(x) p + \varphi_2(x) q$, где $\varphi_2 \not\equiv 0$, так как $s = 2$. Если мы положим
$$x' = \psi(x) \equiv \int \frac{dx}{\varphi_1}, \quad y' = y - \int \frac{\varphi_2}{\varphi_1} dx,$$
то в новых координатах получим:
$$X_1 f = q, \quad X_2 f = p, \quad (X_1, X_2) f = 0. \quad (25.22)$$

4°. $(X_1, X_2) f = 0$, $s = 1$. Так как $X_2 f = \rho X_1 f$, то ρ является решением уравнения $X_1 f = 0$ и, так же как в случае 1°, квадратурами можно найти координаты, в которых $X_1 f = q$. Так как $s = 1$, то $X_2 f = \varphi_2(x) q$. Положив

$x' = \varphi_2(x)$, $y' = y$, в новых координатах получим

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = xq, \quad (X_1, X_2) f = 0. \qquad (25.23)$$

Итак, имеем теорему:

[25.9] *Можно выбрать координаты и базис группы G_2 так, чтобы символы этой группы приняли одну из канонических форм* (25.20), (25.21), (25.22), (25.23). *Нахождение системы координат для случая формы* (25.21) *требует решения обыкновенного дифференциального уравнения траекторий, остальные требуют только квадратур*[1]).

Мы только что видели, что решение обыкновенного дифференциального уравнения (25.18) сводится к квадратурам, если сопряженное уравнение (25.19) допускает оператор, и обратно. Это простейший пример связи, существующей между решениями обыкновенных дифференциальных уравнений и теорией непрерывных групп. Эта связь подробно изучена Ли. Он отправлялся от того факта, что большинство обыкновенных дифференциальных уравнений, которые можно проинтегрировать известными методами, допускает некоторую непрерывную группу преобразований, и что знание последней помогает при их интеграции. Большинство методов интегрирования специальны, но теория Ли дает принцип, их объединяющий. В следующих параграфах мы подробнее изложим эту теорию. Однако исчерпывающее изложение этого предмета не входит в наши намерения; для полного изучения этой теории мы отсылаем читателя к другим книгам[2]).

26. Продолженные группы. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Если, ради краткости, мы обозначим через x_1^i дифференциал dx^i, то из конечных уравнений группы G_r, именно

$$x'^i = f^i(x; a), \qquad (26.1)$$

[1]) Lie-Scheffers, 1891, 3, стр. 425: Dickson, 1924, 1, стр. 363; Franklin, 1928, стр. 119.

[2]) См. Lie, 1891, 3; Cohen, 1911, 1; Dickson, 1924, 1; Engel-Faber, 1932, 1.

будет следовать, что

$$x_1'^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j} x_1^j. \tag{26.2}$$

Уравнения (26.1) и (26.2) определяют преобразование $2n$ переменных x^i и x_1^i, содержащее r параметров. Значения a_0^α, для которых (26.1) дает тождество, соответствуют тождеству также и в (26.2). Без труда покажем, что уравнения (26.1) и (26.2) определяют группу G_r от этих $2n$ переменных, называемую *продолженной группой* для G_r. Действительно, из уравнений (4.7)

$$f^i(f(x;\, a_1);\, a_2) = f^i(x;\, a_3) \tag{26.3}$$

следует, что

$$\frac{\partial f^i(x';\, a_2)}{\partial x'^j}\,\frac{\partial x'^j}{\partial x^k} = \frac{\partial f^i(x';\, a_2)}{\partial x'^j}\,\frac{\partial f^j(x';\, a_1)}{\partial x^k} = \frac{\partial f^i(x;\, a_3)}{\partial x^k}.$$

Следовательно,

$$x''^i_1 = \frac{\partial f^i(x';\, a_2)}{\partial x'^j} x'^j_1 = \frac{\partial f^i(x;\, a_3)}{\partial x^j} x_1,$$

чем доказано групповое свойство.

Из (26.2) и (5.5) имеем:

$$\frac{\partial x_1'^i}{\partial a^\alpha} = \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial a^\alpha} x_1^j = \frac{\partial \xi_a^i(x')}{\partial x'^k}\,\frac{\partial x'^k}{\partial x^j} x_1^j A_\alpha^a(a) =$$

$$= \frac{\partial \xi_a^i(x')}{\partial x'^k} x_1'^k A_\alpha^a(a).$$

Таким образом, если мы положим:

$$\xi_{1a}^i(x;\, x_1) = \frac{\partial \xi_a^i(x)}{\partial x^k} x_1^k, \tag{26.4}$$

то

$$\frac{\partial x_1'^i}{\partial a^\alpha} = \xi_{1a}^i(x';\, x_1')A_\alpha^a(a). \tag{26.5}$$

Для продолженной группы уравнения (5.5) и (26.5) играют роль уравнений (5.5) для данной группы. Так как векторы $A^a_\alpha(a)$ не меняются при продолжении группы, то из (6.3) получаем:

[26.1] *Структурные константы продолженной группы те же, что и у данной группы.*

Так как параметрические группы определяются векторами A^a_α, то мы также имеем:

[26.2] *Первая и вторая параметрические группы продолженной группы те же, что и у данной группы.*

Аналогично (6.2), получаем

$$\xi^j_a(x)\frac{\partial\xi^i_{1b}(x;\,x_1)}{\partial x^j}-\xi^j_b\frac{\partial\xi^i_{1a}}{\partial x^j}+\xi^k_{1a}\frac{\partial\xi^i_{1b}}{\partial x^k_1}-\xi^k_{1b}\frac{\partial\xi^i_{1a}}{\partial x^k_1}=$$
$$=c^e_{ab}\,\xi^i_{1e}. \qquad (26.6)$$

Символы продолженной группы суть

$$X_{(1)\,a}f=\xi^i_a\frac{\partial f}{\partial x^i}+\xi^i_{1a}\frac{\partial f}{\partial x^i_1}. \qquad (26.7)$$

Вследствие (6.2) и (26.6) имеем:

$$(X_{(1)a},\ X_{(1)b})f=c^e_{ab}\ X_{(1)e}f, \qquad (26.8)$$

что следует также из теоремы [26.1].

В соответствии с теорией § 17, любая функция x^i и x^i_1, удовлетворяющая уравнениям

$$X_{(1)a}f=0, \qquad (26.9)$$

называется *абсолютным инвариантом* продолженной группы. Далее, если существуют p независимых функций $F_1,\ldots,F_p$ от x^i и x^i_1, таких, что

$$X_{(1)a}F_\alpha=0 \qquad (\alpha=1,\ldots,p$$

для тех значений x^i и x^i_1, для которых $F_\alpha(x;x_1)=0$, то мы говорим, что эти функции определяют *относительный инвариант* продолженной группы.

Рассмотрим, например, p независимых уравнений Пфаффа:

$$\lambda_i^\alpha x_1^i = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, p;\ i = 1, \ldots, n), \tag{26.10}$$

где λ_i^α — функции x^i. Из (26.7) и (26.4) имеем:

$$X_{(1)a}\lambda_i^\alpha x_1^i = \left(\xi_a^j \frac{\partial \lambda_i^\alpha}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi_a^j}{\partial x^i}\lambda_j^\alpha\right)x_1^i.$$

Так как правая сторона линейна относительно x_1^i, то для того, чтобы $\lambda_i^\alpha x_1^i$ было относительным инвариантом, необходимо и достаточно, чтобы

$$\xi_a^j \frac{\partial \lambda_i^\alpha}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j{}_a}{\partial x^i}\lambda_j^\alpha = \sigma_{a\beta}^\alpha \lambda_i^\beta, \tag{26.11}$$

где $\sigma_{a\beta}^\alpha$ — функции x^i.

Для того, чтобы форма Пфаффа $\lambda_i^\alpha x_1^i$ была абсолютным инвариантом, $\sigma_{a\beta}^\alpha$ в (26.11) должны равняться нулю. Рассмотрим этот случай.

Пусть общий ранг q матрицы $\|\xi_a^i\|$ равен r ($\leqslant n$). Используя результаты § 21, мы заменим уравнения (26.11) при $\sigma_{a\beta}^\alpha = 0$ следующими:

$$\frac{\partial \lambda_i^\alpha}{\partial x^l} - \lambda_m^\alpha \Delta_{il}^m = 0 \; (i = 1, \ldots, n;\ l,\ m = 1, \ldots, q). \tag{26.12}$$

Выписывая условия интегрируемости этих уравнений, мы получим:

$$\lambda_h^\alpha \Delta_{ilm}^h = 0 \; (h,\ l,\ m = 1, \ldots, q;\ i = 1, \ldots, n), \tag{26.13}$$

где Δ_{ilm}^h определены в (21.17). Но если ранг $\|\xi_a^i\|$ равен r, то Δ_{ilm}^h равны нулю (см. (21.19)). Таким образом, уравнения (26.12) вполне интегрируемы. При $r < n$ каждая система решений определяется заданием начальных значений в виде произвольных функций $x^{r+1}, \ldots, x^n$. При $r = n$ каждая система решений определена n произвольными постоянными (начальными значениями).

Таким образом,

[26.3] *Если общий ранг матрицы* $\|\xi_a^i\|$ *группы* G_r *равен* r ($\leqslant n$), *то существуют формы Пфаффа* $\lambda_i x_1^i$, *являющиеся абсолютными инвариантами продолженной группы.* λ_i *содержат* n *произвольных функций при* $r < n$ *и* n *произвольных постоянных, если* $r = n$.

Теперь рассмотрим случай, когда общий ранг q матрицы $\|\xi_a^i\|$ меньше r. Предположим, что координаты выбраны таким образом, чтобы были применимы результаты § 21. Из (26.11) для $a = 1, \ldots, q$ мы получаем систему уравнений вида (26.12). Если же в (26.11) a принимает значения $q+1, \ldots, n$, то получаемые уравнения, в силу (21.2) и (26.12), приводятся к

$$\lambda_l^\alpha \xi_h^l \frac{\partial \varphi_p^h}{\partial x^i} = 0. \qquad (26.14)$$

Если эти уравнения удовлетворены, то условия (26.13) удовлетворяются, как видно из (21.18). Таким образом, при $q < r$ задача нахождения форм Пфаффа свелась к решению уравнений (26.12) с конечными условиями (26.14), составляющими систему F_0 § 1. Система F_1 получается из (26.14) дифференцированиями и исключениями, с использованием (26.12) и (21.13). Таким образом, приемами § 1 мы в любом случае определим степень общности такого абсолютного инварианта продолженной группы.

Вернемся к рассмотрению уравнений (26.11) для случая единственного уравнения (25.18) и одного оператора Xf. Тут мы имеем:

$$\xi^j \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \lambda_j = \rho \lambda_i, \quad \lambda_1 = a^2, \quad \lambda_2 = -a^1.$$

Исключая ρ из этих двух уравнений, мы получаем уравнение (25.15).

Из предыдущих результатов, касающихся этого уравнения, мы имеем:

[26.4] *Если пфаффова форма* $\lambda_i x_1^i$ *является относительным инвариантом продолженной группы*

группы G_1 от двух переменных x^1 и x^2, то уравнение $\lambda_i x_1^i = 0$ интегрируется в квадратурах.

В этом случае мы говорим, что уравнение (25.18) допускает группу G_1, если его левая сторона является относительным инвариантом продолженной группы группы G_1.

Аналогично, мы скажем, что дифференциальное уравнение

$$F(x, y, x_1, y_1) = 0,$$

однородное относительно x_1 и y_1, допускает группу G_1, если F является абсолютным или относительным инвариантом продолженной группы. Для того, чтобы придать этому определению другую форму, мы напишем уравнение в виде:

$$f(x, y, y') = 0,\ y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y_1}{x_1}. \tag{26.15}$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial y'}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y'} = -\frac{y'}{x_1}\frac{\partial}{\partial y'},\quad \frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial y'},$$

то в случае двух переменных x и y из (26.7) и (26.4) получаем:

$$X_{(1)}f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)y' - (y')^2\frac{\partial \xi}{\partial y}\right]\frac{\partial f}{\partial y^1}. \tag{26.16}$$

Если возьмем группу G_r, то получим r символов $X_{(1)a}f$ вида (26.16) для $a = 1, \ldots, r$. Написав конечные уравнения G_r в форме:

$$\bar{x} = f(x, y; a),\quad \bar{y} = \varphi(x, y; a), \tag{26.17}$$

получим:

$$\bar{y}' = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}y'}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}y'} = \psi(x, y, y'; a). \tag{26.18}$$

Это есть конечные уравнения продолженной группы от трех переменных x, y, y'. Под действием преобразования группы G_r любая кривая плоскости переходит в кривую, а продолженная группа дает еще зависимость между на клонами касательных в соответствующих точках. Если дифференциальное уравнение (26.15) допускает G_r, то под действием преобразования группы любая интегральная кривая переходит в другую интегральную кривую.

Если $f(x, y, y')$ является абсолютным инвариантом продолженной группы G_1, т. е. если $f(x, y, y')$ является решением уравнения $X_{(1)}f=0$, в котором x, y и y' рассматриваются как независимые переменные, то мы скажем, что $f(x, y, y')$ является *дифференциальным инвариантом* первого порядка группы G_1. Для данной группы G_1, т. е. для данных ξ и η, задача отыскания ее дифференциальных инвариантов сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{dx}{\xi}=\frac{dy}{\eta}=\frac{dy'}{\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)y'-(y')^2\frac{\partial\xi}{\partial y}}.$$

Пусть $u(x, y)=c$ или, в другом виде, $y=\varphi(x, c)$ решение уравнения $\eta\,dx-\xi\,dy=0$. Подставляя это значение y в уравнение

$$\frac{dy'}{dx}=\frac{1}{\xi}\left[\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)y'-(y')^2\frac{\partial\xi}{\partial y}\right],$$

мы для определения y' в виде функции x и c получим уравнение Риккати. Легко показать, что $y'=\frac{\eta}{\xi}$ является частным решением этого уравнения и, как известно из теории уравнения Риккати, мы получаем, что общее решение этого уравнения находится квадратурами. Если мы обозначим это решение через

$$w(x, y'; c)=d,$$

где d — произвольная постоянная, то решением $X_{(1)}f=0$ будет $v(x, y, y')\equiv w(x, y', u)$, а наиболее общим решением будет любая функция $u(x, y)$ и $v(x, y, y')$. Функция $u(x, y)$ является абсолютным инвариантом G_1, т. е. кривые $u=\text{const}$ являются траекториями группы. Таким образом,

[26.5] *Если известны траектории группы G_1 от двух первменных, то ее дифференциальные инварианты первого порядка могут быть найдены квадратурами.*

Если известны конечные уравнения группы G_1, то продолженная группа находится дифференцированием и, в соответствии с § 19, определение дифференциальных инвариантов первого порядка сводится к исключению параметра a из уравнений продолженной группы.

27. Продолжения второго и высшего порядков. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. Если мы рассмотрим продолженную группу, которую теперь назовем *первым продолжением* данной группы G_r, как группу от $2n$ переменных, и образуем ее продолженную группу, которую назовем *вторым продолжением* G_r, то мы получим группу от x^i, x^i_1 и вторых дифференциалов координат x^i, которые будем обозначать x^i_2. Продолжая этот процесс, мы получаем продолжения всех порядков. Таким образом, продолжение порядка p содержит $(p+1)\,n$ переменных x^i, $x^i_1, \ldots, x^i_p$. Из способа, которым было получено (26.7), следует, что символы второго продолжения суть:

$$X_{(2)a}f = \xi^i_a \frac{\partial f}{\partial x^i} + \xi^i_{1a} \frac{\partial f}{\partial x^i_1} + \xi^i_{2a} \frac{\partial f}{\partial x^i_2}, \qquad (27.1)$$

где, вследствие (26.4),

$$\xi^i_{2a} = d\,\xi^i_{1a} = \frac{\partial^2 \xi^i_a(x)}{\partial x^j \partial x^k}\, x^j_1 x^k_1 + \frac{\partial \xi^i_a(x)}{\partial x^k}\, x^k_2. \qquad (27.2)$$

Обобщая этот результат, мы получим, что символы продолжения порядка p могут быть написаны в виде:

$$X_{(p)a}f = d^\alpha \xi^i_a \frac{\partial f}{\partial x^i_\alpha} \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, p), \qquad (27.3)$$

где положено $d^0\xi = \xi$ и $x_0 = x$. Как и для первого продолжения, имеем:

[27.1] *Структурные константы, первая и вторая параметрические группы продолжения порядка p группы G_r те же, что и у G_r.*

Из предыдущих рассмотрений следует, что матрица первого продолжения получается из $\|\xi^i_a\|$, где i обозначает строки, а a — столбцы, присоединением n строк, содержащих дифференциалы ξ^i_a. И, вообще, матрица продолжения порядка p получается из матрицы продолжения порядка $p-1$ присоединением к ней n строк, элементами которых являются дифференциалы последних ее n строк. Так как продолжение порядка p содержит $(p+1)$ n переменных, то при $(p+1)\,n > r$ это продолжение интранзитивно и, следовательно, имеет абсолютные инварианты.

Рассмотрим, например, второе продолжение группы G_3 движений двумерного евклидова пространства. Его матрица имеет вид:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & -x_2 \end{matrix} \right\|.$$

Абсолютные инварианты суть решения системы

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0, y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \\ + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0 \tag{27.4}$$

Из первых двух уравнений следует, что эти инварианты не зависят от x и y. Легко проверить, что за три независимых решения третьего уравнения можно взять

$$x_1^2 + y_1^2, \ x_1 y_2 - x_2 y_1, \ x_1 x_2 + y_1 y_2. \tag{27.5}$$

В соответствии с общей теорией полных систем, любой абсолютный инвариант второго продолжения является функцией этих трех. Первый и третий из них есть, соответственно, квадрат линейного элемента и половина его дифференциала.

Для кривой $y=f(t)$ имеем: $y_1=y'x_1$, $y_2=y''x_1^2+$ $+y'x_2$ и, следовательно, выражение

$$\frac{x_1y_2-x_2y_1}{(x_1^2+y_1^2)^{3/2}}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \tag{27.6}$$

инвариантно. Это — кривизна кривой.

Мы рассмотрим теперь общий случай двух переменных x и y. Запишем (26.16) в форме:

$$X_{(1)}f=\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\eta_1\frac{\partial f}{\partial y'}, \tag{27.7}$$

где

$$\eta_1=\frac{\partial\eta}{\partial x}-y'\frac{d\xi}{dx}, \tag{27.8}$$

а $\frac{d\eta}{dx}$ — полная проиаводная, т. е.

$$\frac{d\eta}{dx}=\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}y'.$$

Рассматривая (27.7), как символ от трех независимых переменных x, y и y', имеем:

$$\delta x=\xi\,\delta t,\quad \delta y=\eta\,\delta t,\quad \delta y'=\eta_1\delta t, \tag{27.9}$$

и (27.8) следует из

$$\delta(dy-y'dx)=0$$

и перестановочности операторов δ и d. В самом деле, вследствие (27.9) последнее уравнение дает:

$$(d\eta-\eta_1dx-y'd\xi)\,\delta t=0.$$

Аналогично, если мы рассмотрим второе предложение, вместо x_2 и y_2 используем y'' и положим $\delta y''=\eta_2\delta t$, то из

$$\delta(dy'-y''dx)=0$$

мы получим

$$\eta_2=\frac{d\eta_1}{dx}-y''\frac{d\xi}{dx}, \tag{27.10}$$

где $\frac{d\eta_1}{dx}$ — полная производная по x, т. е.

$$\frac{d\eta_1}{dx}=\frac{\partial\eta_1}{\partial x}+\frac{\partial\eta_1}{\partial y}y'+\frac{\partial\eta_1}{\partial y'}y''.$$

Вообще, имеем:

$$\eta_p = \frac{d\eta_{p-1}}{dx} - y^{(p)}\frac{d\xi}{dx}, \qquad (27.11)$$

и оператор относительно $x, y, \ldots, y^{(p)}$ имеет вид:

$$X_{(p)}f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1\frac{\partial f}{\partial y'} + \ldots + \eta_p\frac{\partial f}{\partial y^{(p)}}. \qquad (27.12)$$

Решение уравнения $X_{(p)}f = 0$ является абсолютным инвариантом продолжения порядка p группы G_1 с символом Xf и называется *дифференциальным инвариантом* p-го порядка группы G_r. Аналогичный результат имеет место для G_r, когда мы имеем решение полной системы

$$X_{(p)a}f = 0 \quad (a = 1, \ldots, r).$$

Если конечные уравнения G_r даны в виде (26.17), то конечные уравнения второго продолжения в переменных x, y, y' и y'' доставляют уравнения (26.17), (26.18) и

$$\bar{y}'' = \frac{d\bar{y}'}{dx} = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}y' + \dfrac{\partial\psi}{\partial y'}y''}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}y'}. \qquad (27.13)$$

Из общей теории следует

[27.2] *Для того, чтобы дифференциальное уравнение $F(x, y, y', y'') = 0$ допускало G_1 с символом Xf, необходимо и достаточно, чтобы F было относительным инвариантом второго продолжения группы G_1, т. е. чтобы $X_2f = 0$, когда $F = 0$.*

Далее, если $F = 0$, дано в форме $y'' = \omega(x, y, y'')$, то условие, чтобы это уравнение допускало G_1, требует, чтобы ω удовлетворяло уравнению

$$\eta_2 - \xi\frac{\partial\omega}{\partial x} - \eta\frac{\partial\omega}{\partial y} - \eta_1\frac{\partial\omega}{\partial y'} = 0, \qquad (27.14)$$

где предположено, что в η_2 y'' заменено на ω.

Обозначим через $u(x, \,)$ решение уравнения

$$Xf = \xi p + \eta q = 0. \qquad (27.15)$$

Из § 10 следует, что если $u(x, y)$ известно, то можно квадратурами построить такую функцию $v(x, y)$, что

$$\xi \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} = 1.$$

Если мы положим

$$\bar{x} = v(x, y), \quad \bar{y} = u(x, y),$$

то в координатах $\bar{x}$ и $\bar{y}$

$$Xf = p,$$

и конечные уравнения группы суть

$$\bar{x}' = \bar{x} + t, \quad \bar{y}' = \bar{y}.$$

Следовательно, $\bar{y}, \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}, \ldots, \frac{d^p\bar{y}}{d\bar{x}^p}, \ldots$ — дифференциальные инварианты. Символ продолжения порядка p в этих координатах есть

$$X_{(p)}f = p.$$

Таким образом, любой дифференциальный инвариант является функцией от

$$\bar{y}\ \bar{y}', \ldots, \bar{y}^{(p)}, \ldots$$

Итак, имеем:

[27.3] *Определение дифференциальных инвариантов группы G_1 с символом Xf сводится к решению уравнения* (27.15), ***квадратурам и дифференцированиям.***

Так как свойство инвариантности не зависит от координатной системы, то дифференциальные инварианты порядка p символа Xf имеют вид $F\left(u, \frac{du}{dv}, \ldots, \frac{d^pu}{dv}\right)$. Общее дифференциальное уравнение порядка p, допускающее G_1 с символом Xf, получается приравниванием такой функции нулю. Однако существуют исключительные случаи. Например, если в координатной системе уравнения (27.15) коэффициент при $\frac{\partial f}{\partial y^{(p)}}$ в $X_{(p)}f$ содержит множителем $y^{(p)}$, то $y^{(p)} = 0$ инвариантно относительно (27.15).

28. Дифференциальные инварианты. В §§ 26 и 27 мы рассмотрели, в частности, случай двух переменных и результат действия преобразования группы G_r на кривую $y=f(x)$ и производные $y', \ldots, y^{(p)}, \ldots$ Это — частный случай общей задачи для подпространства V_m пространства V_n, определенного уравнениями

$$x^p = \varphi^p(x^1, \ldots, x^m) \quad (p = m+1, \ldots, n). \qquad (28.1)$$

Если эти значения мы подставим в конечные уравнения группы

$$x'^i = f^i(x; a), \qquad (28.2)$$

то для каждой системы значений a получим V'_m, в которое преобразуется V_m. Для того, чтобы уравнения V'_m можно было записать в виде:

$$x'^p = \varphi'^p(x^1, \ldots, x^m) \quad (p = m+1, \ldots, n), \qquad (28.3)$$

необходимо и достаточно, чтобы первые m уравнений (28.2), когда в них x^p заменены выражениями (28.1), были разрешимы относительно $x^1, \ldots, x^m$. Полученные выражения надо подставить в последние $n-m$ уравнений (28.2). Следовательно, матрица

$$\left\| \frac{\partial f^a}{\partial x^b} + \frac{\partial f^a}{\partial x^p} \frac{\partial \varphi^p}{\partial x^b} \right\|$$

$$(a, b = 1, \ldots, m; p = m+1, \ldots, n) \qquad (28.4)$$

должна иметь ранг m. Если развернем детерминант этой матрицы по степеням $\frac{\partial \varphi^p}{\partial x^b}$, то увидим, что коэффициентами будут миноры порядка m матрицы $\left\| \frac{\partial f^a}{\partial x^i} \right\|$ $(a = 1, \ldots, m;$ $i = 1, \ldots, m)$, и что любой такой минор будет среди этих коэффициентов. Из (4.2) следует, что все вместе эти миноры не могут быть равны нулю, поэтому для общих φ^p ранг матрицы (28.4) равен m. Тем самым для таких φ^p мы доказали, что V_m преобразуется в V'_m, определенное уравнениями (28.3), в которых a^α имеют частные значения, соответствующие каждому преобразованию G_r. Из (28.1) и (28.3) имеем:

$$dx^p - \frac{\partial \varphi^p}{\partial x^a} dx^a = 0, \quad dx'^p - \frac{\partial \varphi'^p}{\partial x'^a} dx'^a = 0 \quad (28.5)$$

$$(a = 1, \ldots, m).$$

Из первой системы этих уравнений и из (28.2) получаем:

$$dx'^i = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^a} + \frac{\partial f^i}{\partial x^p} \frac{\partial \varphi^p}{\partial x^a}\right) dx^a \quad (28.6)$$

$$\begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n; \; a = 1, \ldots, m; \\ p = m+1, \ldots, n. \end{pmatrix}$$

Поэтому вторая система (28.5) записывается в виде:

$$\left[\frac{\partial f^p}{\partial x^a} + \frac{\partial f^p}{\partial x^q} \frac{\partial \varphi^q}{\partial x^a} - \frac{\partial x'^p}{\partial x'^b}\left(\frac{\partial f^b}{\partial x^a} + \frac{\partial f^b}{\partial x^q} \frac{\partial \varphi^q}{\partial x^a}\right)\right] dx^a = 0$$

$$\begin{pmatrix} a, \; b = 1, \ldots, m; \\ p, \; q = m+1, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Так как дифференциалы $dx^1, \ldots, dx^m$ произвольны, то выражения в скобках равны нулю. Получающиеся уравнения могут быть разрешены относительно $\frac{\partial x'^p}{\partial x'^b}$ в виде функций x^i, $\frac{\partial x^p}{\partial x^a}$ и a^α, ибо ранг (28.4) равен m. Если мы обозначим эти частные производные через x'^p_b и x^p_a, то решение может быть записано следующим образом:

$$x'^p_b = f^p_b(x; \; x^q_a, \; a). \quad (28.7)$$

Для того чтобы найти вторые производные от x'^p по $x'^1, \ldots, x'^m$, мы используем формулу:

$$dx'^p_b = \frac{\partial^2 x'^p}{\partial x'^b \partial x'^a} dx'^a.$$

Ввиду (28.7) и (28.5), левая сторона этого соотношения сведется к линейной функции от $dx^1, \ldots, dx^m$ с коэффициентами, которые будут функциями x^i, первых и вторых производных от $x^{m+1}, \ldots, x^n$ по $x^1, \ldots, x^m$ и a^α. В силу (28.6), правая сторона в (28.7) равна

$$\frac{\partial^2 x'^p}{\partial x'^b \partial x'^a}\left(\frac{\partial f^a}{\partial x^c}+\frac{\partial f^a}{\partial x^q}\frac{\partial \varphi^q}{\partial x^c}\right)dx^c$$

$$\begin{pmatrix} a,\ b,\ c=1, \ \ldots, m; \\ p,\ q=m+1, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Приравняв коэффициенты при дифференциалах в обеих сторонах уравнения (28.7), мы получим, при фиксированных p и b, m уравнений, которые можно разрешить относительно $\dfrac{\partial^2 x'^p}{\partial x'^b \partial x'^a}$, ибо ранг матрицы (28.4) равен m.

Используя обозначение

$$x'^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}=\frac{\partial^A x'^p}{\partial x'^{1\alpha_1}\ldots\partial x'^{m\alpha_m}} \quad (A=\alpha_1+\ldots+\alpha_m)$$

и аналогичное для производных x^p, мы можем записать полученные уравнения в виде:

$$\left.\begin{array}{l} x'^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}=f^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}(x,\ x^q_{\beta_1 \ldots \beta_m};\ a) \\ \begin{pmatrix} p,\ q=m+1, \ldots, n; \\ \alpha_1+\ldots+\alpha_m=A; \\ \beta_1+\ldots+\beta_m \leqslant A \end{pmatrix}, \end{array}\right\} \quad (28.8)$$

где $A=2$. Следовательно, любая вторая производная любого x'^p выражается в виде функции x^i, первых и вторых производных от $x^{m+1}, \ldots, x^n$ по $x^1, \ldots, x^m$ и a^α. Если мы проведем для (28.8) при $A=2$ такие же рассуждения, то получим систему (28.8) для $A=3$. Продолжая шаг за шагом этот процесс, мы получим уравнения вида (28.8) для любого целого N.

Рассмотрим теперь систему уравнений (28.2) и (28.8), когда A принимает значения $1, \ldots, N$, где N—некоторое положительное целое число. Эти уравнения определяют группу от x^i и производных $x^{m+1}, \ldots, x^n$ по $x^1, \ldots, x^n$ первого, второго, N-го порядков. Действительно, если мы в этих уравнениях придадим a^α значения a_1^α и применим описанный выше процесс к уравнениям

$$x''^i = f^i(x';\ a_2), \tag{28.9}$$

то вместо (28.8) получим:

$$x''^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = f^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}(x',\ x'^q_{\beta_1 \ldots \beta_m};\ a_2). \tag{28.10}$$

Исключая x'^i из (28.2) и (28.9), получаем (см. § 4):

$$x''^i = f^i(x;\ a_3),\quad a_3^\alpha = \varphi^\alpha(a_1;\ a_2).$$

Применив к этим уравнениям предыдущие рассуждения, мы получим:

$$x''^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = f^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}(x,\ x^q_{\beta_1 \ldots \beta_m};\ a_3).$$

Любая функция в правой стороне этих равенств должна получаться из соответствующей функции в (28.10) при замене x'^i и $x'^q_{\beta_1 \ldots \beta_m}$ выражениями (28.2) и (28.8), в противном случае мы имели бы уравнение между производными от $x^{m+1}, \ldots, x^n$ и a_1^α, a_2^α и a_3^α, чего для общих функций φ^b (28.1) быть не может. Таким образом, (28.2) и (28.8) являются уравнениями продолжения порядка N данной группы. Из предыдущих рассмотрений следует теорема

[28.1]. *Любое продолжение группы имеет ту же структуру и те же первую и вторую параметрические группы, что и данная группа.*

Функция x^i и производных от $x^{m+1}, \ldots, x^n$ по $x^1, \ldots, x^m$ порядка не выше N, равная той же функции от x'^i и тех же производных от $x'^{m+1}, \ldots, x'^n$ по $x'^1, \ldots, x'^m$ для всех преобразований продолжения порядка N, называется *дифференциальным инвариантом порядка* N данной группы G_r. Из результатов § 19 следует, что если известны конечные уравнения группы G_r, то определение дифференциальных инвариантов любого порядка N требует дифференцирований (для того, чтобы получить продолжение порядка N) и исключений параметров a^α из продолжения. Если же даны символы группы, то задача отыскания дифференциальных инвариантов приводится к отысканию решений полной системы, получаемой приравниванием нулю символов продолжения данного порядка. Перейдем к нахождению этих символов.

В § 10 мы уже видели, что $\delta x^i = \xi^i \delta t$; соответственно этому положим

$$\delta x^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = \xi^q_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} \delta t.$$

Мы должны иметь (см. § 27):

$$\delta \left(dx^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} - \sum_a^{1 \ldots m} x^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_{a-1} (\alpha_a + 1) \alpha_{a+1} \ldots \alpha_m} dx^a \right) = 0.$$

Переставляя операции δ и d, получаем:

$$d\xi^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} - \sum_a^{1 \ldots m} \xi^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_{a-1} (\alpha_a + 1) \alpha_{a+1} \ldots \alpha_m} dx^a + \\ + \sum_a^{1 \ldots m} x^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_{a-1} (\alpha_a + 1) \alpha_{a+1} \ldots \alpha_m} d\xi^a = 0. \qquad (28.11)$$

Так как $\xi^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ содержит x^i и производные порядка $N (= \alpha_1 + \ldots + \alpha_m)$ от $x^{m+1}, \ldots, x^m$, то

$$d\xi^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = \left[\frac{\partial \xi^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}}{\partial x^a} + \frac{\partial \xi^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}}{\partial x^q} \frac{\partial x^q}{\partial x^a} + \\ + \sum \frac{\partial \xi^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}}{\partial x^q_{\beta_1 \ldots \beta_m}} \frac{\partial x^q_{\beta_1 \ldots \beta_m}}{\partial x^a} \right] dx^a,$$

где $\sum$ обозначает сумму членов, для которых

$$\beta_1 + \ldots + \beta_m \leqslant N.$$

Если мы обозначим выражение в скобках через $\dfrac{d\xi^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}}{dx^a}$ и положим

$$\frac{d\xi^p}{dx^a} = \frac{\partial \xi^p}{\partial x^a} + \frac{\partial \xi^p}{\partial x^q} \frac{\partial x^q}{\partial x^a},$$

то, приравнивая нулю коэффициенты при дифференциалах $dx^1, \ldots, dx^m$ в выражении (28.11), получаем

$$\xi^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_{a+1}(\alpha_a+1)\alpha_{a+1}\ldots\alpha_m} = \frac{d\xi^p_{\alpha_1\ldots\alpha_m}}{dx^a} - \\ - \sum_b^{1\ldots m} x_{\alpha_1\ldots\alpha_{b-1}(\alpha_b+1)\ldots\alpha_m} \frac{d\xi^b}{dx^a}. \qquad (28.12)$$

С помощью этой формулы мы получаем величины ξ для любого продолжения, если они уже вычислены для предыдущего продолжения. Уравнения (27.11) являются частным случаем (28.12).

Обозначив символ продолжения порядка N через $X_{(N)}f$, будем иметь

$$X_{(N)}f = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum \xi^p_{\alpha_1\ldots\alpha_m} \frac{\partial f}{\partial x^p_{\alpha_1\ldots\alpha_m}}, \qquad (28.13)$$

где $\sum$ обозначает сумму членов, для которых $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m$ принимает значения от 1 до N. Если дана группа G_r, то, образуя этим способом для каждого символа $X_a f$ соответствующий символ $X_{(N)a}f$, мы получим r символов продолжения порядка N.

Упражнения

1. Если уравнение $Af = 0$ допускает два оператора $X_1 f$ и $X_2 f$, таких. что $X_2 f = \varphi X_1 f$, то $A\varphi = 0$.

2. Показать, что уравнение

$$Af \equiv x^1(x^2 - x^3)p_1 + x^2(x^3 - x^1)p_2 + x^3(x^1 - x^2)p_3 = 0$$

допускает операторы

$$X_1 f = x^i p_i, \quad X_2 f = \frac{1}{x^1x^2x^3} X_1 f$$

и, следовательно, $\varphi = x^1x^2x^3$ является решением уравнения. Показать, что $x^1 + x^2 + x^3$ — второе решение,

(Lie-Scheffers, 1891, 3, стр. 451.)

3. Показать, что уравнение

$$Af \equiv (\varphi + 2)p_1 - 2\varphi p_2 + \varphi p_3 = 0, \quad \varphi = x^1 - x^2 - x^3,$$

допускает два оператора

$$X_1f = p_1 + p_3, \ X_2f = (x^2 + 2x^3 + 1)(p_1 + 2p_2 - p_3),$$

и что

$$(X_1, X_2) f = \frac{2}{x^2 + 2x^3 + 1} X_2f,$$

следовательно, $x^2 + 2x^3$ есть решение $Af = 0$.

4. Если уравнение $Af \equiv a^i p_i = 0 \ (i = 1, 2, 3)$ допускает два оператора X_1f и X_2f и ранг матрицы $\|a^i, \xi_1^i, \xi_2^i\|$ равен трем, то интегрирование $Af = 0$ приводится, самое большое, к двум квадратурам.

(Lie-Scheffers, 1891, 3, стр. 444.)

5. Если $F(x)$ — абсолютный инвариант группы G_r, то $\frac{\partial F}{\partial x^i} x_1^i$ — абсолютный инвариант продолженной группы.

6. Если $F_1(x) = \ldots = F_p(x) = 0$ определяют относительный инвариант группы G_r, то эти уравнения вместе с $\frac{\partial F_\alpha}{\partial x^i} x_1^i = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, p)$ определяют относительный инвариант первой продолженной группы.

7. Показать, что $y'' = \omega(x, y, y')$ инвариантно относительно G_1 тогда и только тогда, когда уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + \omega \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

допускает первое продолжение символа Xf группы G_1.

8. Показать, что следующие уравнения инвариантны относительно соответствующих операторов:

$$y'' = F(ax + by, y'), \ bp - aq; \tag{1}$$

$$y'' = x^{n-2} F\left(\frac{y}{x^n}, \frac{y'}{x^{n-1}}\right), \ xp + nyq; \tag{2}$$

$$y''x^{n+2} + (1 - n) x^{n+1} y' = F\left(\frac{y}{x^n}, xy' - ny\right), \ x^n(xp + npq). \tag{3}$$

9. Если $u(x, y)$ — абсолютный инвариант G_1, и $v(x, y, y')$ — дифференциальный инвариант первого порядка, то $\frac{dv}{du}$ является дифференциальным инвариантом второго порядка.

(Lie-Scheffers, 1891, 3, стр. 377.)

10. Если $u\ (x, y)$ и $v\ (x, y, y')$ — инварианты G_1, то наиболее общее дифференциальное уравнение, инвариантное

относительно G_1, задается формулой

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u, v),$$

где φ — произвольная функция u и v.

(Lie-Scheffers, 1891, 3, стр. 377.)

11. Показать (см. упражнение 10), что решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего оператор, приводится к квадратурам и к решению, самое большее, двух дифференциальных уравнений первого порядка.

(Lie-Scheffers, 1891, 3, стр. 378.)

12. Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка от x и y инвариантно относительно, самое большее, восьми линейно независимых (с постоянными коэффициентами) операторов.

(Lie-Scheffers, 1891, 3, стр. 405.)

13. Дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее два оператора, может быть проинтегрировано в квадратурах.

(Lie-Scheffers, 1891, 3, стр. 457—464.)

14. Если группа G_r имеет уравнения (4.1), то уравнения

$$x'^i_\alpha = f^i(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha;\ a^1, \ldots, a^r)\ (i = 1, \ldots, n;\ \alpha = 1, \ldots, k) \qquad (\mathrm{i})$$

определяют группу G_r от nk переменных x^i_α. Если эта группа транзитивна, то любые k обыкновенных точек V_n могут быть преобразованы в k других произвольных обыкновенных точек. Если k — максимальное число, для которого выполнено это свойство, то исходная группа G_r называется *k раз транзитивной*. Символы группы (i) имеют вид:

$$X_{1a}f + \ldots + X_{ka}f,$$

где

$$X_{\alpha a}f = \xi^i(x_\alpha)\frac{\partial f}{\partial x^i_\alpha}\ (\alpha = 1, \ldots, k;\ a = 1, \ldots, r).$$

15. Для k произвольных точек с координатами x^i_α ($\alpha = 1, \ldots, k$) ранги матриц

$$M_1 = \| \xi^i_a(x_1) \|,\ M_2 = \| \xi^i_a(x_1); \xi^i_a(x_2) \|, \ldots, M_k = \| \xi^i_a(x_1); \ldots; \xi^i_a(x_k) \|$$

образуют возрастающую последовательность целых чисел $\nu_1, \nu_2, \ldots$, верхняя грань которой равна r. Если $\nu_k < r$, то существует подгруппа $G_{r-\nu_k}$, оставляющая k точек на месте. Если k — наибольшее целое число, для которого $\nu_k \geqslant nk$, то данная G_r k раз транзитивна.

16. Если в упражнении 15 ν_k меньше nk то уравнения

$$X_{1a}f + \ldots + X_{ka}f = 0$$

имеют $nk - \nu_k$ независимых решений, называемых *инвариантами k точек* x^i_α. Если k таково, что $\nu_k = r$, то система $s \geqslant k + 2$ точек не имеет инвариантов, не являющихся инвариантами меньшего числа точек.

(Bianchi, 1918, 1, стр. 336.)

17. Проективная группа G_3 от одной переменной с символами p, p, x^2p трижды транзитивна. Инвариантом четырех точек является их ангармоническое отношение

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} \cdot \frac{x_2 - x_4}{x_2 - x_3},$$

являющееся решением системы

$$\sum_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = 0, \quad x_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = 0, \quad x^2_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, 4).$$

Глава III

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДГРУППЫ

29. Группы, инвариантные относительно преобразований. Рассмотрим группу G_r с символами $X_a f$ и преобразование S:

$$\bar{x}^i = \varphi^i(x). \tag{29.1}$$

Для того, чтобы символы

$$\bar{X}_a \bar{f} = \xi^i_a(\bar{x}) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}^i} \tag{29.2}$$

порождали в переменных $\bar{x}^i$ ту же группу, что и данная группа, необходимо и достаточно, чтобы каждый оператор (29.2) был линейной комбинацией с постоянными коэффициентами (§ 11) символов, в которые переходят $X_a f$ при преобразовании (29.1). Для этого, в силу (29.1), должны тождественно удовлетворяться уравнения

$$\xi^i_a(\bar{x}) = c^b_a \xi^j_b(x) \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}. \tag{29.3}$$

Из (29.3) следует

$$\bar{X}_a \bar{f} = c^b_a X_b f, \quad \bar{f}(\bar{x}) = f(x).$$

Пусть u^a канонические параметры G_r. Положив

$$\bar{u}^a = \bar{c}^a_b u^b, \quad u^b = c^b_a \bar{u}^a, \tag{29.4}$$

где постоянные c^a_b и $\bar{c}^b_a$ связаны соотношением (см. § 7):

$$c^a_b \bar{c}^b_c = \delta^a_c, \tag{29.5}$$

получаем

$$\bar{u}^a \bar{X}_a f = u^b X_b f. \tag{29.6}$$

Следовательно, при преобразовании (29.1) уравнения (11.11) сохраняют свой вид. Таким образом, символически можно записать

$$ST_u S^{-1} = T_{\bar{u}}, \tag{29.7}$$

т. е.

$$ST_u = T_{\bar{u}} S. \tag{29.8}$$

При выполнении этих условий скажем, что *группа G_r допускает преобразование S или инвариантна относительно этого преобразования.*

Уравнения (29.3) имеют вид:

$$\xi_a^i(\bar{x}) = \xi_a^j(x) \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \tag{29.9}$$

(т. е. $c_b{}^a = \delta_b^a$) тогда и только тогда, когда (29.8) приводится к

$$ST_u = T_u S, \tag{29.10}$$

т. е., когда *S перестановочно (коммутирует)* с любым преобразованием группы.

Рассмотрим теперь случай, когда преобразование (29.1) заменено однопараметрической группой Γ_1 с символом $Xf = \xi^i p_i$. В этом случае c_a^b являются функциями параметра τ группы Γ_1, такими, что $(c_a^b)_{\tau=0} = \delta_a^b$, если $\tau = 0$ соответствует тождеству. Для того, чтобы соотношения (29.3) имели место для инфинитезимального преобразования

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i \delta t, \tag{29.11}$$

необходимо (как легко найти подстановкой), чтобы

$$\xi^j \frac{\partial \xi_b^i}{\partial x^j} - \xi_b^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + g_b^a \xi_a^i = 0, \tag{29.12}$$

где g_b^a — постоянные, определенные уравнениями

$$g_b^a = -\left(\frac{dc_b^a}{d\tau}\right)_{\tau=0} = \left(\frac{d\bar{c}_b^a}{d\tau}\right)_{\tau=0}. \tag{29.13}$$

Из (29.12) следует, что выполнение соотношений

$$(X, X_b) f + g_b^a X_a f = 0 \tag{29.14}$$

необходимо для того, чтобы группа допускала инфинитезимальное преобразование. Выберем координаты (см. теорему [10.2]) так, чтобы

$$\xi^i = \delta^i_n. \tag{29.15}$$

Тогда уравнения (29.12) примут вид:

$$\frac{\partial \xi^i_b}{\partial x^n} + g^a_b \xi^i_a = 0. \tag{29.16}$$

В этой системе координат конечные уравнения Γ_1 суть

$$\bar{x}^i = x^i + \tau\delta^i_n. \tag{29.17}$$

Если в (29.6) положим $\bar{f} = \bar{x}^i$, то, вследствие (29.17), получим:

$$\bar{u}^a \xi^i_a (\bar{x}) = u^b \xi^i_b (x). \tag{29.18}$$

Дифференцируя по τ, получаем:

$$\frac{d\bar{u}^a}{d\tau} \xi^i_a (\bar{x}) + \bar{u}^a \frac{\partial \xi^i_a (\bar{x})}{\partial \bar{x}^n} = 0. \tag{29.19}$$

Так как уравнения (29.16) являются тождествами относительно x^i, а следовательно, и относительно $\bar{x}^i$, то найденные уравнения приводятся к виду:

$$\left(\frac{d\bar{u}^a}{d\tau} - \bar{u}^b g^a_b\right) \xi^i_a (\bar{x}) = 0,$$

откуда следует, что $\bar{u}^a$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\bar{u}^a}{d\tau} = \bar{u}^b g^a_b \tag{29.20}$$

с начальными условиями $\bar{u}^a = u^a$ при $\tau = 0$.

Обратно, если уравнения (29.14) удовлетворены в какой-нибудь координатной системе, то для координатной системы, в которой (29.17) представляют конечные уравнения группы Γ_1, мы получаем уравнения (29.15). Если $\bar{u}^a$ — любая система решений (29.20), то, как показывает дифференцирование по τ, $\bar{u}^a \xi^i_a (\bar{x})$ не зависят от τ, и мы получаем (29.18), где $u^b = (\bar{u}^b)_{\tau=0}$. Отсюда, ввиду (29.17), следует (29.6). Тем самым мы доказали, что уравнения (29.14) являются и необходимыми и достаточными условиями. Таким образом,

[29.1] *Для того, чтобы группа G_r, порожденная инфинитезимальными преобразованиями с символами $X_a f$, допускала преобразования группы Γ_1 с символом Xf, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись уравнения* (29.14), *где g^a_b — некоторые постоянные.*

При получении уравнений (29.3) мы использовали тот факт, что преобразования с символами $X_a f$ порождают группу. Покажем, что предыдущая теорема верна, даже если преобразования $u^a X_a f$ (u^a — произвольные постоянные) не образуют группы. Действительно, если имеют место уравнения (29.6), где положено $(\bar{u}^a)_{\tau=0} = u^a$, то для специальной координатной системы, в которой уравнения группы Γ_1 даются формулой (29.17), имеют место и уравнения (29.18). Если в (29.19) мы положим $\tau = 0$, то получим:

$$\left(\frac{d\bar{u}^a}{d\tau}\right)_0 \xi^i_a(x) + u^a \frac{\partial \xi^i_a(x)}{\partial x^n} = 0.$$

Так как эти уравнения должны удовлетворяться для любых значений u^a, то, взяв r различных систем u^a, таких, что в каждой системе одно из u^a равно единице, а остальные равны нулю, получим уравнения вида (29.16), в которых g^b_a постоянны. Остальное доказывается так же, как и выше. Таким образом,

[29.2] *Пусть $X_a f$ — символы r инфинитезимальных преобразований. Для того, чтобы преобразования с символами $u^a X_a f$, где u^a — произвольные постоянные, допускали группу преобразований Γ_1 с символом Xf, необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения* (29.14) *при постоянных g^a_b. В этом случае группа G_1, определенная символом $u^a X_a f$, преобразуется всеми пре-*

образованиями Γ_1 *в группу* G_1, *определенную символом* $\bar{u}^a \bar{X}_a f$, *где* $\bar{u}^a$ — *такие решения уравнений* (29.20), *что* $\bar{u}^a = u^a$ *при* $\tau = 0$ [1]).

Как следствие этой теоремы мы получаем (см. вторую основную теорему):

[29.3]. *Дано r символов* $X_a f$. *Пусть каждый символ инвариантен относительно остальных; тогда символы порождают группу порядка r, инвариантную относительно любой своей подгруппы* G_1.

Рассуждением, аналогичным проведенному выше, когда мы получали (29.9) из (29.1), убедимся, что (29.9) имеет место тогда и только тогда, когда $\bar{u}^a = u^a$, т. е. любое преобразование G_r перестановочно с любым преобразованием Γ_1. Тогда из (29.20) получаем, что $g_b^a = 0$. Таким образом,

[29.4] *Для того, чтобы каждое преобразование группы с символом Xf было перестановочно с каждым преобразованием группы* G_r *с символами* $X_a f$, *необходимо и достаточно, чтобы* $(X, X_a) f = 0$ $(a = 1, \ldots, r)$.

Как следствие, имеем:

[29.5] *Для того, чтобы любые два преобразования группы* G_r *с символами* $X_a f$ *были перестановочны, необходимо и достаточно, чтобы* $(X_a, X_b) f = 0$, *т. е. чтобы структурные константы равнялись нулю*. Группа, удовлетворяющая этим условиям, называется *абелевой* (см. § 13).

Если преобразования подгруппы G_1 группы G_r перестановочны со всеми преобразованиями G_r, то она называется *центральной*. Если ее символ есть $e^a X_a f$, то $(e^a X_a, X_b) f = 0$ и, следовательно,

$$e^a c_{ab}^d = 0. \tag{29.21}$$

Эти r^2 уравнений, когда b и d принимают значения от

[1]) См. Bianchi, 1918, 1, стр. 198.

1 до r, должны быть совместны. Следовательно, ранг матрицы

$$\| c_{ab}^{d} \|, \tag{29.22}$$

где $a(=1, \ldots, r)$ означает столбцы, а b и d — строки, должен быть меньше r. Если этот ранг равен s, то существуют $r-s$ независимых систем решений уравнений (29.21). Если мы положим $r-s=m$, то мы можем так изменить символы данной группы G_r, что $X_1 f, \ldots, X_m f$ будут символами центральных групп G_1. Следовательно, соответствующие структурные константы удовлетворяют условиям:

$$c_{ta}^{b}=0 \quad (a, b=1, \ldots, r; \ t=1, \ldots, m). \tag{29.23}$$

Так как

$$(X_t, X_u) f=0 \ (t, u=1, \ldots, m),$$

то имеем:

[29.6] *Центральные подгруппы G_1 группы G_r порождают абелеву подгруппу.*

30. Взаимные просто-транзитивные группы. Если $X_a f$ — символы группы G_r, и $Zf=\zeta^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ — символ группы G_1, то (как следует из теоремы [29.4]) для того, чтобы любое преобразование G_r было перестановочно с любым преобразованием G_1, необходимо и достаточно, чтобы

$$\xi_a^i \frac{\partial \zeta^j}{\partial x^i}-\zeta^i \frac{\partial \xi_a^j}{\partial x^i}=0. \tag{30.1}$$

В первую очередь рассмотрим случай, когда группа просто транзитивна, т. е. $r=n$ и общий ранг матрицы $\|\xi_a^i\|$ равен n. В силу (21.13), где в этом случае λ, μ, β, $h=1, \ldots, n$, уравнения (30.1) эквивалентны

$$\frac{\partial \zeta^j}{\partial x^i}+\zeta^k \Delta_{ki}^{j}=0. \tag{30.2}$$

Условия интегрируемости этих уравнений, ввиду соотношений (21.19), удовлетворяются тождественно. Следовательно, уравнения (30.2) имеют n таких решений

ζ^i_b $(b=1, \ldots n)$, что общий ранг ζ^i_b равен n. Кроме того, любое решение системы (30.2) является линейной комбинацией (с постоянными коэффициентами) этих n решений.

Если мы положим $Z_a f \equiv \zeta^i_a p_i$, то из

$$(Z_a, X_c)f = 0, \quad (Z_b, X_c)f = 0 \quad (a, b, c = 1, \ldots, n),$$

в силу тождества Якоби (2.4), следует, что

$$((Z_a, Z_b), X_c)f = 0.$$

Таким образом, $\zeta^i_a \frac{\partial \zeta^j_b}{\partial x^i} - \zeta^i_b \frac{\partial \zeta^j_a}{\partial x^i}$ есть решение (30.2) и, вследствие сделанного замечания,

$$\zeta^i_a \frac{\partial \zeta^j_b}{\partial x^i} - \zeta^i_b \frac{\partial \zeta^j_a}{\partial x^i} = \bar{c}^e_{ab} \zeta^j_e, \tag{30.3}$$

где $\bar{c}^e_{ab}$ постоянны. Следовательно, $Z_a f$ есть символы непрерывной группы $\bar{G}_r$. Очевидно, что отношеиие между группами G_r и $\bar{G}_r$ взаимно. Они называются *взаимными* группами. Из (8.5) и (30.1) следует, что первая и вторая параметрические группы любой группы G_r являются взаимными группами. Из результатов § 29 следует, что если $x'^i = \varphi^i(x)$ — преобразование группы $\bar{G}_r$, то

$$\xi^i_a(x') = \xi^j_a \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j},$$

т. е. любое преобразование $\bar{G}_r$ преобразует группу G_r с символами $\xi^i_a \frac{\partial f}{\partial x^i}$ в группу G'_r с символами $\xi^i_a \frac{\partial f}{\partial x'^i}$. Следовательно, G_r и G'_r подобны, и из теоремы [22.3] следует, что уравнения преобразования, которыми на сей раз являются уравнения группы $\bar{G}_r$, содержат n параметров. Из (22.7) следует, что эти уравнения являются интегралами вполне интегрируемой системы уравнений

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \xi^i_a(x') \xi^a_j(x) \quad (a, i, j = 1, \ldots, n). \tag{30.4}$$

Итак, имеем:

[30.1] *Если* $\xi_a^i(x)$ — *векторы просто-транзитивной группы, то уравнения* (30.4) *вполне интегрируемы, и их решения, содержащие* n *произвольных постоянных, являются преобразованиями другой просто-транзитивной группы, взаимной к данной группе.*

Возвращаясь к рассмотрению решений уравнений (30.2), мы можем написать:

$$\zeta_a^j = \psi_a^b \xi_b^j. \qquad (30.5)$$

Подставляя в (30.2) и используя (21.13), мы получим:

$$\frac{\partial \psi_a^b}{\partial x^i} \xi_b^j + \psi_a^b \xi_b^k (\Lambda_{ki}^j - \Lambda_{ik}^j) = 0.$$

Для исследуемого случая уравнения (21.15) имеют вид:

$$\Delta_{ki}^j - \Delta^j = c_{hl}^m \xi_i^h \xi_k^l \xi_m^j \quad (h, i, j, k, l, m = 1, \ldots, n). \qquad (30.6)$$

Из этих двух систем уравнений следует:

$$\frac{\partial \psi_a^b}{\partial x^i} + \psi_a^l c_{hl}^b \xi_i^h = 0. \qquad (30.7)$$

Подставив в (30.3) вместо производных ζ_a^j их выражения (30.2), получим:

$$\zeta_a^i \zeta_b^k (\Delta_{ik}^j - \Delta_{ki}^j) = \bar{c}_{ab}^e \zeta_e^j.$$

Из (30.5), (30.6) и из этих уравнений мы получаем, поскольку детерминант $|\xi_l^h|$ не равен нулю, что

$$\bar{c}_{a'}^e \psi_e^m = - c_{hl}^m \psi_a^h \psi_b^l.$$

Из (30.7) следует, что ψ_e^m не постоянны и не обращаются все в нуль, когда x^i равны нулю, так как, в противном случае, как следует из теории дифференциальных уравнений вида (30.7), они равнялись бы нулю тождественно. Так как найденные выше уравнения должны удовлетворяться тождественно, то, положив $x=0$, найдем:

$$\overline{c}_{ab}^{e}\, c_{e}^{m} = -c_{he}^{m}\, c_{a}^{h}\, c_{b}^{e},$$

где c_a^h — постоянные. Таким образом, группы G_r и $\overline{G}_r$ имеют одинаковую структуру и, следовательно, (§ 22):

[30.2] *Две взаимные просто-транзитивные группы подобны.*

Пусть теперь $r<n$, и общий ранг q матрицы $\|\xi_a^i\|$ равен r. Выбирая такую координатную систему, чтобы имело место (21.8), и проводя аналогичные рассуждения, получим, что уравнения (30.2) имеют место для $i, j, k=1, \ldots, r$ и дополнительно из (30.1)

$$\frac{\partial \zeta^\sigma}{\partial x^i}=0 \quad (\sigma=r+1, \ldots, n;\ i=1, \ldots, r). \qquad (30.8)$$

Система уравнений (30.2), ввиду (21.19), вполне интегрируема и, следовательно, ее решение определено заданием любых функций от $x^{r+1}, \ldots, x^n$ в качестве начальных значений. Таким образом, каждое решение (30.2) и (30.8) содержит n произвольных функций этих координат. Для любых двух решений имеют место уравнения вида (30.3), где теперь $\overline{c}_b^a$ являются, вообще говоря, функциями координат $x^{r+1}, \ldots, x^n$. Таким образом, хотя каждому решению соответствует символ Zf, порождающий группу $\overline{G}_1$, любое преобразование которой перестановочно с любым преобразованием G_r, эти $\overline{G}_1$ не являются подгруппами группы большего порядка.

Однако, если можно выбрать координаты так, чтобы имело место (21.8), а остальные ξ не зависели бы от $x^{r+1}, \ldots, x^n$, то можно найти решения (30.2), не содержащие этих переменных. В этом случае r операторов $Z_a f$ являются символами группы $\overline{G}_r$, взаимной к G_r. В этом случае мы, на самом деле, имеем две просто транзитивные группы с r переменными, и полученный результат согласуется с теоремой [30.1]. Таким образом,

[30.3] *Если ранг матрицы $\|\xi_a^i\|$ интранзитивной группы G_r равен r, то существуют группы $\overline{G}_1$, век-*

торы которых содержат произвольные функции, причем любое преобразование этих групп перестановочно с любым преобразованием G_r, но, вообще говоря, эти $\overline{G}_1$ не являются подгруппами группы большего порядка.

Если группа G_r транзитивна, но не просто транзитивна, мы можем, не нарушая общности, предполагать, что матрица $\|\xi^i_a\|$ $(a=1, \ldots, n)$ имеет ранг n, и что для $p=n+1, \ldots, r$ имеет место (21.2). Если в (30.1) a принимает значения от 1 до n, то мы получаем систему, эквивалентную (30.2), а для $a=n+1, \ldots, r$, уравнения (30.1), вследствие соотношений (21.11), приведутся к

$$\zeta^i \Phi^h_{lp} \xi^l_i = 0. \tag{30.9}$$

Таким образом, задача состоит в решении смешанной системы (30.2) и (30.9). Условия интегрируемости (30.2) примут вид (см. (21.17)):

$$\zeta^k \Delta^j_{kli} = 0. \tag{30.10}$$

Из (21.18) следует, что в этом случае уравнения (30.10) тождественно не удовлетворяются. Уравнения (30.9) образуют в этом случае систему F_0, указанную в § 1. Уравнения (30.10) и уравнения, получаемые из уравнений (30.9) дифференцированием и подстановкой из (30.2), составляют систему F_1. Заметим, что уравнения системы F_1 линейны и однородны относительно ζ; это же верно и для следующих систем F_2, $F_3, \ldots$. Число s независимых уравнений этих систем не превышает $n-1$. Из теоремы [1.1] следует, что для решения задачи необходимо, чтобы существовало такое положительное целое число N, что ранг матрицы систем $F_0, \ldots, F_N$ равен $n-s$ $(s>1)$ и что ранг матрицы систем $F_0, \ldots, F_{N+1}$ равен тому же. Если эти условия выполнены, то решение задачи приводится к интегрированию вполне интегрируемой системы уравнений вида (1.1) с $n-s$ функциями θ^ν, где ψ^ν линейны и однородны относительно этих переменных. Следовательно, любое решение выражается линейной функцией с постоянными коэффициентами от $n-s$ частных решений, и любая такая функция является решением. Если, теперь, существуют $n-s$ $(s>1)$ решений, то для любых двух из них имеет место (30.3), где $\overline{c}_b^a$ постоянны. Таким образом,

[30.4]. *Если группа G_r-кратно транзитивна, то, вообще говоря, не существует ни одной группы $\overline{G}_1$, каждое преодразование которой было бы перестановочно с любым преобразованием G_r. Если же существуют $s\,(>1)$ таких групп $\overline{G}_1$, то они являются подгруппами группы $\overline{G}_s$.*

Пусть теперь G_r интранзитивна, и общий ранг q матрицы $\|\xi_a^i\|$ меньше r. Выберем такие координаты, чтобы имело место (21.8). Используя (21.13), мы получаем (30.2) для $i, j, k = 1, \ldots, q$. В этом случае имеют место (30.8) для $i = 1, \ldots, q$ и $\sigma = q+1, \ldots, n$, а также (30.9) и (30.10) для $h, i, j, k, l = 1, \ldots, q$ и $p = q + 1, \ldots, r$. Здесь можно рассуждать так же, как и в случае кратно транзитивных групп, нужно только заметить, что в уравнениях типа (1.11) независимыми являются $x^1, \ldots, x^q$, а переменные $x^{q+1}, \ldots, x^n$ входят в качестве параметров. Следовательно, в решения войдут произвольные функции, и ζ^σ для $\sigma = q+1, \ldots, n$ будут произвольными функциями $x^{q+1}, \ldots, x^n$. Таким образом, имеет место теорема, аналогичная теореме [30.4], но, вообще говоря, группы $\overline{G}_1$ не будут подгруппами группы большего порядка.

Как следствие полученных результатов, мы можем высказать теорему

[30.5] *Просто транзитивная группа импримитивна. Системами импримитивности являются инвариантные многообразия подгрупп взаимной группы.*

Пусть $\overline{G}_m$ при $m \geqslant 1$ является подгруппой взаимной группы $\overline{G}_n$ просто транзитивной группы G_n, и Z_pf $(p = 1, \ldots, m)$ — ее символы, тогда очевидно, что $Z_pf = 0$ является полной системой, и так как $(X_a, Z_p)f = 0$ для

$a=1, \ldots, n$, то инвариантные многообразия $\overline{G}_m$ являются системами импримитивности G_n.

Для того, чтобы показать, что всякая система импримитивности имеет такой вид, мы заметим, что, поскольку ранг матрицы взаимной группы равен n, векторы b^i_α уравнений (23.3) линейно выражаются через ζ^i_b. Так как их можно заменить на любую линейную комбинацию, то, не нарушая общности, положим:

$$B_\alpha f = Z_\alpha f + \mu^\sigma_\alpha Z_\sigma f \quad (\alpha=1, \ldots, p;\ \sigma=p+1, \ldots, n).$$

Тогда, вследствие (30.1), уравнения (23.6) дадут

$$X_a \mu^\sigma_\alpha Z_\sigma f = \lambda^\beta_{a\alpha}(Z_\beta f + \mu^\sigma_\beta Z_\sigma f).$$

Так как операторы Zf независимы, то $\lambda^\beta_{a\alpha}=0$ и $X_a\mu^\sigma_\alpha=0$, откуда следует, что μ^σ_α постоянны, а из требования, чтобы уравнения $B_\alpha f=0$ образовывали полную систему, следует, что $B_\alpha f$ являются символами подгруппы $\overline{G}_n$.

31. Инвариантные подгруппы. Если $X_1 f, \ldots, X_m f$ $(m<r)$ — символы подгруппы G_m группы G_r, то (§ 16)

$$(X_t, X_u)f = c^v X_v f \quad (t, u, v = 1, \ldots, m). \tag{31.1}$$

Для того, чтобы любое преобразование G_r переводило элементы подгруппы G_m в ее же элементы, необходимо и достаточно (см. (29.14)), чтобы

$$(X_a, X_t)f = c^u_{at} X_u f \quad (a=1 \ldots, r;\ t, u=1, \ldots, m), \tag{31.2}$$

т. е.

$$c^p_{at}=0 \quad (a=1, \ldots, r; t=1, \ldots, m; p=m+1, \ldots, r). \tag{31.3}$$

Если эти условия удовлетворены, то G_m называется *инвариантной* или *самосопряженной* подгруппой. Сама группа и ее единица являются тривиальными примерами таких подгрупп, имеющихся в любой группе. Если группа G_r не имеет других инвариантных подгрупп, кроме самой группы и единицы, то она называется *простой*.

Из § 29 следует, что если группа G_r обладает подгруппой $G_m (m \geqslant 1)$, образованной из центральных подгрупп G_1, то G_m инвариантна в G_r. Следовательно, если матрица $\|c_{ab}^e\|$, где a обозначает столбы, а b и e — строки, имеет ранг меньший r, то группа не проста (см. § 35).

Пусть V_p — инвариантное многообразие инвариантной подгруппы G_m группы G_r и S — любое преобразование G_m. Если обозначить через V_p' образ V_p при преобразовании T группы G_r, не входящего в подгруппу G_m, то

$$TST^{-1} V_p' = V_p'.$$

Но, согласно (29.7), TST^{-1} является преобразованием G_m, поскольку G_m — инвариантная подгруппа G_r. Таким образом, V_p' — инвариантное многообразие G_m. Если подгруппа G_m оставляет на месте все точки V_p', то преобразования, сопряженные при помощи T элементам этой подгруппы, оставляют все точки V_p' на месте. Следовательно, группы, индуцированные G_m в V_p и V_p', имеют одинаковый порядок. Если T инфинитезимально, то V_p' бесконечно близко к V_p или совпадает с ним. Последний случай имеет место, если V_p *изолировано* в том смысле, что оно не принадлежит непрерывному семейству инвариантных многообразий, в которых индуцированная группа для всех этих многообразий имеет один и тот же порядок. Таким образом,

[31.1] *Если V_p — инвариантное многообразие подгруппы G_r, то образ V_p при любом преобразовании G_r, не принадлежащем подгруппе, является инвариантным многообразием этой подгруппы, и группы, индуцированные подгруппой в этих двух многообразиях, имеют один и тот же порядок. Если V_p изолировано, то его образ совпадает с V_p*[1]. Если существуют две инвариантные подгруппы G_m и $G_{m'}$ группы G_r и существует p независимых преобразований, общих обеим подгруппам, то они порождают инвариантную подгруппу G_r. Действительно, преобразование, сопряженное любому из них,

[1]) Lie-Scheffers, 1893, 1, стр. 529—531.

содержится в G_m и в $G_{m'}$ и, следовательно, принадлежит обеим подгруппам.

Предположим, что две инвариантные подгруппы G_m и $G_{m'}$ данной G_r не имеют общей нетривиальной подгруппы, и возьмем в качестве их символов $X_1 f, \ldots, X_m f$ и $X_{m+1} f, \ldots, X_{m+m'} f$. Тогда

$$(X_p, X_u) f = c^t_{pu} X_t f = c^q_{pu} X_q f$$
$$\begin{pmatrix} p, q = 1, \ldots, m; \\ t, u = m+1, \ldots, m+m' \end{pmatrix}. \qquad (31.4)$$

Так как операторы обеих подгрупп независимы, то в этом случае

$$c^t_{pu} = c^q_{pu} = 0 \quad (p, q = 1, \ldots m;$$
$$t, u = m+1, \ldots, m+m') \qquad (31.5)$$

и, следовательно, преобразования двух этих подгрупп перестановочны. Очевидно, что символы обеих групп порождают группу $G_{m+m'}$, которая будет самой группой G_r, если $m+m'=r$, или инвариантной подгруппой G_r, если $m+m'<r$. В последнем случае, ввиду (31.5), подгруппы G_m и $G_{m'}$ являются инвариантными подгруппами $G_{m+m'}$. Мы говорим, что $G_{m+m'}$ есть *прямое произведение* G_m и $G_{m'}$. Таким образом,

[31.2] *Если группа G_r обладает двумя инвариантными подгруппами, не имеющими общей нетривиальной подгруппы, то преобразования этих двух подгрупп перестановочны, и прямое произведение их либо есть сама группа G_r, либо инвариантная подгруппа группы G_r, в которой G_m и $G_{m'}$ являются инвариантными подгруппами.*

Пусть G_m и $G_{m'}$ — две инвариантные подгруппы G_r, имеющие общую подгруппу G_p. В этом случае второй и третий члены в (31.4), будучи соответственно символами G_m и $G_{m'}$, должны быть символами G_p. Следовательно, если символы выбраны таким образом, что символы G_m и

$G_{m'}$ суть

$$\left.\begin{aligned} &G_m : X_1f,\ldots,X_pf,\ X_{p+1}f,\ldots,X_mf; \\ &G_{m'} : X_1f,\ldots,X_pf,\ X_{m+1}f,\ldots,X_{m+m'-p}f, \end{aligned}\right\} \quad (31.6)$$

то

$$(X_k, X_u) = c_{ku}^h X_h f$$

$$\begin{pmatrix} k = 1,\ldots, m;\ h = 1,\ldots, p; \\ u = 1,\ldots, p, m+1,\ldots, m+m'-p \end{pmatrix}. \quad (31.7)$$

Из этого результата и из того, что G_m и $G_{m'}$ являются подгруппами, следует, что $m+m'-p$ независимых символов из (31.6) порождают группу $G_{m+m'-p}$, называемую *произведением* G_m и $G_{m'}$. В этом случае мы используем термин произведение, чтобы отличить этот случай от прямого произведения, когда не существует общей подгруппы. Очевидно, G_m и $G_{m'}$ инвариантны в $G_{m+m'-p}$, а G_p инвариантна в G_m, $G_{m'}$, $G_{m+m'-p}$ и G_r. Ясно, что $m+m'-p \leqslant r$, и если оно меньше r, то $G_{m+m'-p}$ — инвариантная подгруппа G_r. Таким образом,

[31.3] *Если две инвариантные подгруппы G_r, именно G_m и $G_{m'}$, имеют общую подгруппу G_p, то их произведение $G_{m+m'-p}$ есть либо G_r, либо ее инвариантная подгруппа. В последнем случае G_m, $G_{m'}$* и *G_p — инвариантные подгруппы $G_{m+m'-p}$* и *G_r.*

Пусть мы имеем две группы G_m и $G_{m'}$, такие, что каждая из них инвариантна относительно всех преобразований другой, но не обязательно все преобразования одной группы перестановочны со всеми преобразованиями другой. Тогда имеют место уравнения вида (31.4) с постоянными c_a^b (§ 29), из которых следует, что существует несколько, например p, независимых групп G_1, общих обеим данным. Объединяя обе системы символов, мы получим $m+m'-p$ независимых (с постоянными коэффициентами) символов. В силу (31.4) и аналогичных уравнений для каждой из данных групп, из второй основной теоремы следует, что эти символы порождают группу $G_{m+m'-p}$, и что G_m и $G_{m'}$ являются инвариантными подгруппами полученной группы, так же как и подгруппа порядка G_p, общая им обеим.

Пусть T, T_1 и T', T_1' — любые пары преобразований G_m и $G_{m'}$ соответственно; тогда $T'T$ является преобразованием группы $G_{m+m'-p}$. Кроме того, согласно предположению, $G_{m'}$ инвариантна относительно преобразований G_m, откуда следует, что $T_1T' = T_2'T_1$, где T_2' — некоторое преобразование $G_{m'}$. Следовательно,

$$T_1'T_1T'T = T_1'T_2'T_1T = T_3'T,$$

так что произведения $T'T$ образуют группу Γ. Если мы возьмем T' или T равными единице, то эти произведения будут являться преобразованиями G_m или $G_{m'}$ и, следовательно, Γ составляет всю группу $G_{m+m'-p}$, которую мы назовем *произведением* двух данных групп. Таким образом,

[31.4] *Если две группы G_m и $G_{m'}$ инвариантны одна относительно другой и их преобразования не перестановочны, то они обладают общей подгруппой G_p. Эти две группы, а также G_p, являются инвариантными подгруппами группы $G_{m+m'-p}$, порожденной независимыми (с постоянными коэффициентами) символами обеих групп. Каждое преобразование группы $G_{m'+m-p}$ является произведением преобразования G_m на преобразование $G_{m'}$* [1]).

Аналогичными рассуждениями получаем:

[31.5] *Если преобразования групп G_m и $G_{m'}$ перестановочны, то символы этих групп порождают группу порядка $m+m'$ — их прямое произведение, в котором каждая группа является инвариантной подгруппой.*

Инвариантная подгруппа называется *максимальной*, если она не является подгруппой инвариантной подгруппы большего порядка. Докажем теорему:

---

1) Bianchi, 1918, 1, стр. 204.

[31.6] *Если G_{r_1} и G_{ρ_1} — максимальные инвариантные подгруппы G_r, и если они обладают подгруппой G_p, то их произведение совпадает с G_r, т. е. $r_1+\rho_1-p=r$ и G_p — максимальная инвариантная подгруппа групп G_{r_1} и G_{ρ_1}*[1]).

Первая часть этой теоремы следует из теоремы [31.3]. Действительно, если $r_1+\rho_1-p<r$, то произведение G_{r_1} и G_{ρ_1} является инвариантной подгруппой G_r, содержащей G_{r_1} и G_{ρ_1}, что противоречит предположениям теоремы. Если G_p не максимальная инвариантная подгруппа G_{r_1}, то существует инвариантная подгруппа G_{p+k}, содержащая G_p. Рассмотрим произведение G_{p+k} и G_{ρ_1}. Вследствие (31.7), коммутатор любого символа этого произведения и символа G_{r_1} является символом G_{p+k}. Коммутатор символа этого произведения и символа G_{ρ_1} является комбинацией символов G_p и G_{ρ_1}, т. е. самой G_{ρ_1}. Таким образом, произведение является инвариантной подгруппой G_r и содержит G_{ρ_1}, в противоречие с предположением максимальности G_{ρ_1}. Следовательно, G_p максимальная инвариантная подгруппа G_{r_1} и, аналогично, G_{ρ_1}.

Если G_{r_1} и G_{ρ_1} — максимальные инвариантные подгруппы G_r, не имеющие общей подгруппы, то из приведенного рассуждения следует, что $r_1+\rho_1=r$. Кроме того, из теоремы [31.2] следует, что преобразования этих двух групп перестановочны. Далее, каждая из этих подгрупп проста. Действительно, если G_{r_1} содержит инвариантную подгруппу G_k, то, в силу рассуждения, аналогичного приведенному, символы G_k и G_{ρ_1} порождают, вопреки предположению, инвариантную подгруппу G_r, содержащую G_{ρ_1}. Таким образом,

[31.7] *Если G_{r_1} и G_{ρ_1} — максимальные инвариантные подгруппы G_r, не имеющие общей подгруппы, то $r_1+\rho_1=r$, G_{r_1} и G_{ρ_1} являются простыми группами, и преобразования одной перестановочны с преобразованиями другой. Следовательно, G_r есть прямое произведение этих подгрупп.*

---

1) Lie-Engel, 1893, 2, стр. 706.

Упражнения

1. Если серия инфинитезимальных преобразований $u^a X_a f$ допускает две группы G_1 с символами $Y_1 f$ и $Y_2 f$, то она допускает группы G_1 с символом $aY_1 f + bY_2 f$, где a и b произвольные постоянные, а также группу G_1 с символом $(Y_1, Y_2) f$.

(Bianchi, 1918, 1, стр. 197.)

2. Если семейство преобразований $x'^i = f^i(x; a)$, содержащее r существенных параметров, таково, что комбинация любых преобразований, т. е. $T_{a_2} T_{a_1}$, зависит только от r существенных параметров, то $T_a = S_b T_{a_0}$, где S_b — преобразования некоторой группы G_r, а T_{a_0} — одно из преобразований семейства. Кроме того, G_r инвариантно относительно T_{a_0}.

(Bianchi, 1918, 1, стр. 118.)

3. Показать, что, вследствие теорем [24.1] и [30.5], систатическая группа импримитивна, а примитивная группа асистатична.

(Bianchi, 1918, 1, стр. 190.)

4. G_3 со структурой

$$(X_1, X_2) f = X_1 f, \quad (X_1, X_3) f = 2X_2 f, \quad (X_2, X_3) f = X_3 f$$

проста (см. § 35). Показать, что можно выбрать такой базис, что

$$(X_1, X_2) f = X_3 f, \quad (X_2, X_3) f = X_1 f, \quad (X_3, X_1) f = X_2 f.$$

5. Если G_r имеет неинвариантную подгруппу G_{r-1}, то ее базис может быть выбран таким образом, чтобы $X_1 f, \ldots, X_{r-1} f$ были символами G_{r-1} и

$$(X_a, X_r) = c^b_{ar} X_b f, \quad (X_{r-1}, X_r) f = c^b_{r-1,r} X_b f + X_r f$$
$$\begin{pmatrix} a = 1, \ldots, r-2; \\ b = 1, \ldots, r-1 \end{pmatrix}.$$

С помощью тождества Якоби (2.4) показать, что $X_1 f, \ldots, X_{r-2} f$ суть символы некоторой G_{r-2}, инвариантной в подгруппе G_{r-1}.

(Lie-Scheffers, 1893, 1, стр. 544.)

6. Если G_r содержит простую G_{r-1}, то последняя является инвариантной подгруппой G_r (см. упражнение 5).

(Lie-Scheffers, 1893, 1, стр. 572).

7. Если G_4 имеет инвариантную подгруппу G_3 структуры

$$(X_1, X_2)f = X_1f, \quad (X_1, X_3)f = 2X_2f, \quad (X_2, X_3)f = X_3f,$$

то $(X_i, X_4)f = a_i^j X_j f$ $(i, j = 1, 2, 3)$. В силу тождества Якоби, a_i^j удовлетворяют условиям

$$2a_2^1 = a_3^2, \; a_3^3 = -a_1^1, \; a_1^2 = 2a_2^3, \; a_1^3 = a_3^1 = a_2^2 = 0.$$

Если $X_4 f$ мы заменим на $X_4' f - a_2^1 X_1 f + a_1' X_2 f + a_2^3 X_3 f$, то получим, что

$$(X_i, X_4')f = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

8. Доказать теорему [29.6] с помощью тождества Якоби.

9. Показать, что проективная группа G_6 с символами

$$X_1 f = p + yr, \quad X_2 f = xp + zr,$$
$$X_3 f = x(xp + yq + zr) - zq, \quad X_4 f = q + xr \qquad \left(r = \frac{\partial f}{\partial z}\right),$$
$$X_5 f = yq + zr, \quad X_6 f = y(xp + yq + zr) - zp$$

оставляет инвариантной поверхность $z - xy = 0$ и что символы группы Γ_6, индуцированной на ней, имеют вид p, xp, x^2p, q, yq, y^2q.

(Lie-Engel, 1893, 2, стр. 199.)

10. Для индуцированной группы Γ_6 упражнения 9 показать, что подгруппы с символами p, xp, x^2p и q, yq, y^2q являются инвариантными подгруппами Γ_6. Получить отсюда две инвариантные подгруппы G_6.

32. Изоморфизм группы. Пусть G_r и H_p — две непрерывные группы с конечными уравнениями

$$x'^i = f^i(x; a), \; y'^j = f^j(y; b)$$
$$(i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, m). \qquad (32.1)$$

Если $p = r$ и $\varphi^\alpha(a^1, \ldots, a^r)$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$ r независимых функций, то уравнения

$$b^\alpha = \varphi^\alpha(a) \qquad (32.2)$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между преобразованиями обеих групп. Соответствие называется *изоморфным*, и эти группы называются *изоморфными*, если для двух любых пар T_{a_1}, S_{b_1} и T_{a_2}, S_{b_2}, соответствующих преобразований, преобразования $T_{a_2}T_{a_1}$ и $S_{b_2}S_{b_1}$ соответствуют друг другу. Мы будем рассматривать также случай $p < r$. В этом случае соответствие (32.2) называется *гомоморфным*. При изоморфизме, если T_{a_1} — тождество, то T_{a_2} соответствует как S_{b_2}, так и $S_{b_2}S_{b_1}$, и, следовательно, так как соответствие взаимно однозначно, S_{b_1} есть тождественное преобразование. Следовательно, если S_{b_1} соответствует T_{a_1}, то $S_{b_1}^{-1}$ соответствует $T_{a_1}^{-1}$. Если в (32.1) величины b заменим их выражениями (32.2), то получим новую систему уравнений группы H_r в параметрах a:

$$y'^j = k^j(x;\ a). \tag{32.3}$$

Соответствующие преобразования определяются одинаковыми значениями a^α. Если соответствие изоморфно, то уравнения (4.6), именно $a_3^\alpha = \varphi^\alpha(a_1;\ a_2)$ должны иметь место для обеих групп. Следовательно, обе группы имеют одинаковые первую и вторую параметрические группы. Так как очевидно, что это условие достаточно, то

[32.1] *Для того, чтобы две группы были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковые параметрические группы.*

Если это условие удовлетворено, то из (14.19) следует, что векторы $U_a^\alpha(u)$ одинаковы для обеих групп, а тогда из уравнений (6.3) следует, что структурные константы обеих групп совпадают. Обратно, если последнее условие выполнено, то из (14.6) и (14.8) следует, что обе группы имеют одинаковые векторы $U_\alpha^a(u)$ и $\overline{U}_\alpha^a(u)$, а из (14.18) и (14.17), что уравнения (14.16) одни и те же для обеих групп. Таким образом,

[32.2] *Для того, чтобы две группы были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы можно было базисы этих групп выбрать таким образом, что структурные константы обеих групп совпадут.* Из результатов § 9 следует, что параметрические группы любой группы изоморфны данной группе. Из §§ 26 и 27 следует также, что любое продолжение группы ей изоморфно.

Рассмотрим теперь случай гомоморфизма, т. е. $p<r$, и предположим, что в (32.2), где теперь $\alpha=1, \ldots, p$, ранг матрицы Якоби $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right\|$ равен p. Согласно теории неявных функций, это обеспечивает существование значений a, соответствующих данным значениям b. Существует ∞^{r-p} преобразований T группы G_r, соответствующих преобравованию S группы H_p. В частности, единице H_p соответствует подгруппа G_{r-p} группы G_r. Так как любому T соответствует только одно S, то единица G_r входит в эту подгруппу, и если T_{a_1} соответствует S_{b_1}, то $T_{a_1}^{-1}$ соответствует $S_{b_1}^{-1}$. Так как $T_{a_2}T_{a_1}T_{a_2}^{-1}$ соответствует преобразование $S_{b_2}S_{b_1}S_{b_2}^{-1}$, то, взяв за S_{b_1} единицу, увидим, что при любом T_{a_2} преобразование $T_{a_2}T_{a_1}T_{a_2}^{-1}$ соответствует единице. Так как это верно для любого T_{a_1}, соответствующего единице, то

[32.3] *Если G_r и H_p $(p<r)$ — гомоморфные группы, то преобразования G_r, соответствующие тождеству группы H_p, образуют инвариантную подгруппу порядка $r-p$ группы G_r.*

Если мы подставим (32.2) во вторую формулу (32.1), то получим (32.3); это будут конечные уравнения группы H_p, в которых, однако, не все параметры существенны. Возьмем два преобразования S_{b_1}, S_{b_2} и пару соответствующих преобразований T_{a_1}, T_{a_2}. Для того, чтобы получить $T_{a_2}T_{a_1}$, используем (4.6); очевидно, если мы подставим (4.6) в уравнения (32.3), то получим преобразование $S_{b_2}S_{b_1}$. В этом смысле, аналогично случаю изоморфизма, обе группы, при соответствующем выборе базиса, имеют одинаковую структуру. Другими словами, если мы рассмотрим инфинитезимальные образующие обеих групп и обозначим их соответствующие базисы через $X_1f, \ldots, X_rf$ и Y'_1f и Y'_pf, то можно будет положить:

$$Y_af = a_a^\alpha Y'_\alpha f \quad (a=1, \ldots, r;\ \alpha=1, \ldots, p), \quad (32.4)$$

где a_a^α — постоянные, выбранные таким образом, что

$$(Y_a, Y_b) f = c_{ab}^e Y_e f \quad (a, b, e = 1, \ldots, r), \qquad (32.5)$$

где константы c_{ab}^e определяются из соотношений

$$(X_a, X_b) f = c_{ab}^e X_e f. \qquad (32.6)$$

Если мы теперь положим

$$(Y'_\alpha, Y'_\beta) f = c'^\gamma_{\alpha\beta} Y'_\gamma f \ (\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, p), \qquad (32.7)$$

то из (32.4) и (32.5) следует, что

$$a_a^\alpha a_b^\beta c'^\gamma_{\alpha\beta} = c_{ab}^e a_e^\gamma \begin{pmatrix} a, & b, & e = 1, \ldots, r; \\ \alpha, & \beta, & \gamma = 1, \ldots, p \end{pmatrix}. \qquad (32.8)$$

Обратно, если c_{ab}^e и $c'^\gamma_{\alpha\beta}$ — структурные константы двух групп G_r и H_p соответственно, и уравнения (32.8) совместны, то из (32.4) получаем (32.5). Если мы изменим базис G_r и положим (§ 7)

$$c_{ab}^e = \bar{c}_{a_1 b_1}^{e_1} \bar{c}_a^{a_1} \bar{c}_b^{b_1} c_{e_1}^e,$$

то (32.8) даст:

$$\bar{a}_{a_1}^\alpha \bar{a}_{b_1}^\beta c'^\gamma_{\alpha\beta} = \bar{c}_{a_1 b_1}^{e_1} \bar{a}_{e_1}^\gamma,$$

где $\bar{a}_{a_1}^\alpha = a_a^\alpha c_{a_1}^a$. Таким образом,

[32.4] *Если G_r и H_p — две группы со структурными константами c_{ab}^e и $c'^\gamma_{\alpha\beta}$ соответственно, то для того, чтобы эти группы были гомоморфны, необходимо и достаточно, чтобы были совместны уравнения* (32.8). Тем самым вопрос о гомоморфности групп решается средствами алгебры.

Предположим, что базисы H_p и G_r выбраны таким образом, что в (32.5)

$$Y_1 f, \ldots, Y_p f$$

независимы, и что

$$Y_a f = b_a^t Y_t f \ (a = p+1, \ldots, r; \ t = 1, \ldots, p), \ (32.9)$$

где b^t_α постоянны. Тогда каждое из $r-p$ независимых инфинитезимальных преобразований

$$X_\alpha f - b^t_\alpha X_t f \tag{32.10}$$

соответствует в группе H_p единице. Очевидно, что эти преобразования определяют подгруппу G_{r-p} группы G_r. Обратно, если λ^a — такие постоянные, что

$$Yf \equiv \lambda^a Y_a f = 0,$$

то $\lambda^t + \lambda^\alpha b^t_\alpha = 0$ и $Xf = \lambda^a X_a f = \lambda^\alpha (X_\alpha - b^t_\alpha X_t) f$ является символом подгруппы G_1 группы G_{r-p}.

Так как $(Y_i, (Y_\alpha - b^t_\alpha Y_t)) f = 0$, то имеем соотношения:

$$c^s_{i\alpha} - b^t_\alpha c^s_{it} + (c^\beta_{i\alpha} - b^t_\alpha c^\beta_{it}) b^s_\beta = 0 \qquad \left(\begin{array}{c} i = 1, \ldots, r; \\ s,\ t = 1, \ldots, p; \\ \alpha,\ \beta = p+1, \ldots, r \end{array}\right),$$

с помощью которых можно показать, что G_{r-p} — инвариантная подгруппа, что уже было установлено с помощью конечных уравнений группы. Этот результат является частным случаем теоремы

[32.5] *Если G_r и H_p $(p \leqslant r)$ гомоморфны, то подгруппе порядка m группы G_r соответствует подгруппа порядка k $(\leqslant m)$ группы H_p; подгруппе порядка m группы H_p соответствует подгруппа порядка $m + r - p$ группы G_r. Если какая-нибудь подгруппа инвариантна, то другая также инвариантна.*

Эта теорема непосредственно следует из определения гомоморфного соответствия, данного в начале этого параграфа. Точно так же, используя инфинитезимальные преобразования, получим, что, если $\lambda^i_\sigma X_i f$ для $\sigma = 1, \ldots, m$ определяют подгруппу G_r, то $\lambda^i_\sigma Y_i f$ порождают подгруппу порядка $m - s$ группы H_p, где s — число линейно независимых (с постоянными коэффициентами) образующих этой системы, соответствующих единице. Обратно, если $\lambda^i_\sigma Y_i f$ порождают подгруппу порядка m группы H_p, то $\lambda^i_\sigma X_i f$ и (32.10) будут базисом подгруппы порядка $m + r - p$ группы G_r.

33. Композиционные ряды группы. Теорема Ли-Жордана. Если группа G_r имеет максимальную инвариантную подгруппу G_{r_1}, а последняя, в свою очередь, — максимальную подгруппу G_{r_2} и так далее, то ряд

$$G_r,\ G_{r_1},\ \ldots,\ G_{r_q},\ 1 \qquad (33.1)$$

(где G_{r_q} необходимо простая группа), называется *композиционным рядом группы*, а разности

$$r - r_1,\ \ldots\ r_{q-1} - r_q,\ r_q \qquad (33.2)$$

называются *композиционными индексами группы*. Некоторые авторы называют (33.1) *нормальным рядом*. Может случиться, что группа обладает несколькими композиционными рядами. Например, если группа имеет две максимальные инвариантные подгруппы G_{r_1} и G_{ρ_1}, не имеющие общей подгруппы, то, как было показано в § 31, эти подгруппы просты, и мы получаем два композиционных ряда

$$G_r,\ G_{r_1},\ 1;\quad G_r,\ G_{\rho_1},\ 1.$$

Кроме того, так как $r_1 + \rho_1 = r$ (§ 31), то соответствующие композиционные индексы суть

$$\rho_1,\ r_1;\quad r_1,\ \rho_1.$$

Мы докажем следующую теорему, которой мы обязаны Ли и Жордану:

[33.1] *Если группа G_r обладает двумя композиционными рядами* (33.1) *и*

$$G_r,\ G_{\rho_1},\ \ldots,\ G_{\rho_p},\ 1, \qquad (33.3)$$

то композиционные индексы этих рядов образуют одну и ту же систему целых чисел, взятых, быть может, в другом порядке. В частности, число индексов одинаково.

Мы только что видели, что эта теорема справедлива, если группа обладает двумя максимальными инвариантными подгруппами, не имеющими общей (нетривиальной) подгруппы. Если $r = 2$, то это единственный случай, который может представиться, и следовательно, для $r=2$ теорема верна. Индукцией докажем теорему для случая, когда G_{r_1} и G_{ρ_1} имеет общую подгруппу Γ_p, являющуюся, согласно теореме [31.6], максимальной инвариантной подгруппой G_{r_1} и G_{ρ_1}. Мы возьмем композиционный ряд для Γ_p, например $\Gamma_p, \Gamma_{p_1}, \ldots, \Gamma_{p_s}$, 1 и рассмотрим ряд (33.1) и ряд

$$G_r,\ G_{r_1},\ \Gamma_p,\ \Gamma_{p_1}, \ldots, 1. \qquad (33.4)$$

В § 31 мы видели, что $r=r_1+\rho_1-p$. Предполагая, что теорема имеет место для рядов группы G_{r_1}, мы получим, что ряд (33.2) и ряд

$$r-r_1,\ r_1-p,\ p-p_1, \ldots, p_{s-1}-p_s,\ p_s$$

содержат одни и те же числа, возможно, в другом порядке. Точно так же индексы (33.3) совпадают с числами

$$r-\rho_1,\ \rho_1-p, \ldots, p_{s-1}-p_s,\ p_s,$$

но

$$r-r_1=\rho_1-p,\quad r-\rho_1=r_1-p.$$

Следовательно, теорема доказана и для группы G_r.

34. Фактор-группы. Предположим, что группа G_r обладает инвариантной подгруппой G_m, и что базис G_r выбран таким образом, что $X_t f$ для $t=1, \ldots, m$ составляют базис подгруппы, тогда

$$c_{ta}^{p}=0\ (a=1, \ldots, r;\ t=1, \ldots, m;\ p=m+1, \ldots, r). \qquad (34.1)$$

Рассмотрим соотношения Якоби

$$c_{pq}^{i}\,c_{is}^{t}+c_{qs}^{i}\,c_{ip}^{t}+c_{sp}^{i}\,c_{iq}^{t}=0$$
$$(p,\ q,\ s,\ t=m+1, \ldots, r;\ i=1, \ldots, r).$$

Вследствие (34.1) эти соотношения примут вид

$$c_{pq}^{u}\,c_{us}^{t}+c_{qs}^{u}\,c_{up}^{t}+c_{sp}^{u}\,c_{uq}^{t}=0 \qquad (34.2)$$
$$(p,\ q,\ s,\ t,\ u=m+1, \cdots, r).$$

По третьей основной теореме, существует группа $\overline{G}_{r-m}$, структурными константами которой являются c_{pq}^{u}. Все такие группы изоморфны, любую из них мы называем *фактор-группой* G_r по инвариантной подгруппе G_m, и символически пишем:

$$\overline{G}_{r-m} = \frac{G_r}{G_m}.$$

Обозначим базис фактор-группы через $Y_p f$ $(p=m+1, \ldots, r)$ и присоединим операторы $Y_a f \equiv 0$ для $a=1, \cdots, m$ (см. § 32). Очевидно, что G_r и $\overline{G}_{r-m}$ гомоморфны, и G_m соответствует единице $\overline{G}_{r-m}$. Таким образом,

[34.1] *Если группа G_r обладает инвариантной подгруппой G_m, то существует группа $\overline{G}_{r-m}$, гомоморфная G_r, единице которой соответствует G_m.*

Обратно, если группа $\overline{G}_{r-m}$ гомоморфна группе G_r, то она является фактор-группой G_r по инвариантной подгруппе G_r, соответствующей единице $\overline{G}_{r-m}$.

Если $\overline{G}_s$ — максимальная инвариантная подгруппа $\overline{G}_{r-m}$, то соответствующая инвариантная подгруппа G_{s+m} максимальна в G_r. Следовательно, если $\overline{G}_{r-m}$ проста, то G_m, определяющая ее как фактор-группу G_r, является максимальной инвариантной подгруппой, и обратно. Таким образом,

[34.2] *Для того, чтобы фактор-группа G_r/G_m была проста, необходимо и достаточно, чтобы G_m было максимальной инвариантной подгруппой G_r.*

Если $\overline{G}_{r-m}$ не проста, то она обладает композиционным рядом (§ 33), например:

$$\overline{G}_{r-m}, \ \overline{G}_{r-m_1}, \ \ldots, \overline{G}_{r-m_q}, \ 1,$$

где каждая подгруппа является максимальной инвариантной подгруппой предыдущей. Тогда, если G_m — простая группа, соответствующие подгруппы G_r, именно

$$G_{r-m_1+m}, \quad G_{r-m_2+m}, \cdots, G_{r-m_q+m}, \ G_m, \ 1,$$

образуют композиционный ряд. Как следствие, имеем:

[34.3] *Любая инвариантная подгруппа G_m группы G_r является членом некоторого композиционного ряда группы G_r.*

Предположим, что G_r обладает композиционным рядом

$$G_r,\ G_{r_1},\ \cdots,\ G_{r_p},\ 1. \tag{34.3}$$

Из теоремы [34·2] следует, что каждая фактор-группа

$$\overline{G}_{r_a - r_{a+1}} = G_{r_a}/G_{r_{a+1}}$$

проста. Таким путем мы получим ряд простых фактор-групп:

$$\overline{G}_{r-r_1},\ \overline{G}_{r_1-r_2},\ \cdots,\ \overline{G}_{r_{p-1}-r_p},\ \overline{G}_{r_p}. \tag{34.4}$$

Предположим теперь, что G_r обладает вторым композиционным рядом:

$$G_r,\ G_{\rho_1},\ \ldots,\ G_{\rho_p},\ 1; \tag{34.5}$$

он имеет, как было показано в § 33, то же число членов, что и (34.4). Пусть Γ_m (которая может быть единицей) — подгруппа, общая G_{r_1} и G_{ρ_1}; напомним, что Γ_m — максимальная инвариантная подгруппа групп G_{r_1} и G_{ρ_1}, причем, $r - r_1 = \rho_1 - m$. Выберем такой базис группы G_r, чтобы $X_a f$ $(a = 1, \ldots, m)$ было базисом Γ_m, $X_a f$ и $X_h f$ $(h = m+1, \ldots, r)$ — базисом G_{r_1}, $X_a f$ и $X_l f$ $(l = r_1 + 1, \ldots, r)$ — базисом G_{ρ_1}. Тогда $X_a f$, $X_h f$ и $X_l f$ — базис G_r.

Из рассуждений начала этого параграфа, в частности, из уравнений (34.2), следует, что фактор-группы G_r/G_{r_1} и G_{r_1}/Γ_m имеют структурными константами те константы группы G_r, для которых индексы принимают значения $r_1 + 1, \cdots, r$ и $m+1, \cdots, r_1$ соответственно, причем фактор-группы G_{ρ_1}/Γ_m и G_r/G_{ρ_1} имеют, соответственно, те же структурные константы. Таким образом, имеет место теорема

[34.4] *Если G_{r_1} и G_{ρ_1} — максимальные инвариантные подгруппы G_r с общей подгруппой Γ_m, то фактор-группы G_r/G_{r_1} и G_{ρ_1}/Γ_m изоморфны; это же относится и к G_r/G_{ρ_1} и G_{r_1}/Γ_m.*

В частности, если Γ_m — единичная подгруппа, то G_{ρ_1} есть фактор-группа G_r/G_{r_1}, т. е. фактор-группы ряда G_r, G_{r_1}, 1 суть G_{ρ_1} и G_{r_1}. Аналогично, фактор-группами ряда

G_r, G_{ρ_1}, 1 являются G_{r_1} и G_{ρ_1}. Мы теперь в состоянии доказать следующую теорему Гёльдера-Энгеля[1]:

[34.5] *Если группа G_r обладает двумя композиционными рядами, то фактор-группы одного ряда изоморфны фактор-группам другого, взятым, быть может, в другом порядке.*

Мы предположим, что теорема верна для групп порядков, меньших r, и докажем ее для группы порядка r. Если Γ_m обладает рядом Γ_m, Γ_{m_1}, $\cdots$, 1, то теорема верна для ряда (34.3) и ряда

$$G_r,\ G_{r_1},\ \Gamma_m,\ \cdots,\ 1, \tag{34.6}$$

так как, по предположению, она верна для G_{r_1}. Аналогично, теорема верна для (34.5) и ряда

$$G_r,\ G_{\rho_1},\ \Gamma_m,\ \cdots,\ 1. \tag{34.7}$$

Тогда она верна и для рядов (34.3) и (34.5), так как ряды (34.6) и (34.7) имеют одинаковые фактор-группы. При $r=2$ справедливость утверждения теоремы следует из теоремы [34.4], и тем самым доказательство закончено.

35. Производные группы. Рассмотрим символы $X_{ab}f$, определенные формулами

$$X_{ab}f=(X_a,\ X_b)f=c_{ab}^e X_e f. \tag{35.1}$$

Каждый из них порождает подгруппу G_1 группы G_r. Кроме того, так как

$$(X_{ab},X_{cd})f=(c_{ab}^e X_e,\ c_{cd}^h X_h)f=c_{ab}^e c_{cd}^h X_{eh}f,$$

то эти символы определяют группу, которая будет либо самой группой G_r, либо ее подгруппой. Так как

$$(X_d,\ X_{ab})f=c_{ab}^e (X_d,\ X_e)f=c_{ab}^e X_{de}f,$$

то, если эта группа является подгруппой, она инвариантна и называется *производной группой* группы G_r.

---

[1]) Lie-Engel, 1893, 2, стр. 765.

Рассмотрим матрицу

$$C=\|c^e_{ab}\|, \tag{35.2}$$

где e обозначает столбцы, а a и b — строки. Если ранг этой матрицы равен p, то любой из символов $X_{ab}f$ линейно выражается (с постоянными коэффициентами) через p других, и производная группа имеет порядок p. Если ранг равен нулю, т. е. если группа абелева, то производная группа состоит из единицы. Если ранг равен r, то производная группа совпадает с данной группой. В качестве следствия имеем:

[35.1] *Если G_r — простая группа, то ранг матрицы C равен r. Если этот ранг еньше r, то G_r не проста.*

Пусть ранг C равен $r_1(<r)$, тогда, как было показано выше, производная группа G'_{r_1} является инвариантной подгруппой. Если мы через $X_1f, \cdots, X_{r_1}f$ обозначим символы этой группы, то они и $r-r_1$ символов $X_{r_1+1}f, \cdots, X_rf$ могут быть взяты в качестве символов группы G_r. Из определения G'_{r_1} следует, что

$$(X_a, X_b)f=c^p_{ab}X_pf \quad \begin{pmatrix} a, b=1, \cdots, r; \\ p=1, \cdots, r_1 \end{pmatrix} \tag{35.3}$$

Если в этих уравнениях мы придадим a и b значения $1, \cdots, r_1, r_1+1, \cdots, r_1+h\ (h<r-r_1)$, то увидим, что символы с этими индексами образуют подгруппу G_{r_1+h}, а тогда из (35.3) (где a принимает значения от 1 до r, а b — от 1 до r_1+h) следует, что G_{r_1+h} инвариантна в G_r. Кроме того, если a принимает значения от 1 до r_1+h, а b — значения от 1 до r_1+h-1, то из (35.3) следует, что G_{r_1+h-1} инвариантна в G_{r_1+h}. Таким образом, заставив h принимать значения $r-r_1-1, r-r_1-2, \ldots, 2, 1$, мы получаем систему инвариантных подгрупп G_r:

$$G_{r-1},\ G_{r-2},\ \cdots,\ G_{r_1+1},\ G'_{r_1}, \tag{35.4}$$

каждая из которых является инвариантной подгруппой группы высшего порядка. Следовательно, если G'_{r_1} простая группа, то G_r и система (35.4) образуют композиционный ряд с индексами $1, \cdots, 1, r_1$.

G_{r-1} имеет символы $X_1f, \cdots, X_{r-1}f$, но если мы опустим не символ X_rf, а любой другой из символов $X_{r_1+1}f, \cdots, X_rf$, то мы получим другую инвариантную подгруппу порядка $r-1$. Таким образом, существуют $r-r_1$ таких подгрупп. Каждая из них в свою очередь имеет $r-r_1-1$ инвариантных подгрупп порядка $r-2$ и так далее. Итак, имеем:

[35.2] *Если производная группа G_r имеет порядок $r_1 < r$, то G_r обладает $r-r_1$ инвариантными подгруппами порядка $r-1$, каждая из которых имеет $r-r_1-1$ инвариантных подгрупп порядка $r-2$, и так далее. Все эти подгруппы содержат производную группу.*

Обратно[1]),

[35.3] *Если группа G_r имеет инвариантную подгруппу G_{r-1} порядка $r-1$, то производная группа группы G_r является либо этой подгруппой, либо подгруппой подгруппы G_{r-1} и, следовательно, ее порядок меньше r.*

Действительно, если $X_1f, \cdots, X_{r-1}f$ — символы подгруппы G_{r-1}, то

$$(X_a, X_h)f = c_{ah}^k X_kf \quad \begin{pmatrix} a=1, \cdots, r; \\ h, k=1, \cdots, r-1 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, производная группа либо совпадает с G_{r-1}, либо содержится в ней.

Из теоремы [35.3] следует, что группа не может иметь инвариантной подгруппы порядка $r-1$, если ранг матрицы C (35.2) равен r. В частности, если $r=3$ и ранг C равен трем, то группа проста. Действительно, если она имеет инвариантную подгруппу, то она должна быть первого порядка. Предположив, что X_1f — символ этой подгруппы, получим $c_{a1}^{\alpha}=0$ при $a=1, 2, 3$ и $\alpha=2, 3$, но тогда ранг C меньше 3.

Из определения производной группы очевидно, что

[35.4] *Производная группа подгруппы G_m группы G_r содержится в производной группе группы G_r.*

[1]) Bianchi, 1918, 1, стр. 212.

Если G_m — инвариантная подгруппа G_r и базис последней выбран таким образом, что $X_\alpha f$ при $\alpha = 1, \cdots, m$ составляют базис подгруппы, то в тождествах

$$((X_\alpha, X_\beta), X_a) + ((X_\beta, X_a), X_\alpha) + ((X_a, X_\alpha), X_\beta) = 0$$
$$(\alpha, \beta = 1, \cdots, m; \ a = 1, \cdots, r)$$

второй и третий члены являются символами преобразований производной группы G_m. Из этих тождеств следует, что производная группа группы G_m является инвариантной подгруппой G_r. Отсюда имеем:

[35.5] *Производная группа инвариантной подгруппы некоторой группы является инвариантной подгруппой этой группы.*

Если в (35.4) G'_{r_1} не простая группа, то ее производная группа, называемая *второй производной группой* группы G_r, может иметь порядок меньший r_1, например r_2. Так же, как и выше, мы докажем существование таких подгрупп $G_{r_1-1}, \ldots, G''_{r_2}$, что каждая из них является инвариантной подгруппой предыдущей; все они, конечно, инвариантны в G'_{r_1}. Этот процесс можно продолжать, пока следующая производная группа будет иметь порядок, меньший, чем предыдущая. Мы получим последовательность

$$G_r, G_{r-1}, \ldots, G_1, 1 \tag{35.5}$$

или

$$G_r, G_{r-1}, \ldots, G_{r_s}, 1. \tag{35.6}$$

Последний случай имеет место, если производная группа порядка $s+1$ совпадает с производной группой порядка s. В любом случае каждая группа G_h $(h = 1, \ldots, r-1)$ является инвариантной подгруппой группы G_{h+1}.

36. Разрешимые группы. Группа называется разрешимой, если существует ряд (35.5) подгрупп, такой, что каждая подгруппа G_h $(h = 1, \ldots, r-1)$ является инвариантной подгруппой группы G_{h+1}. Смысл термина „разрешимая" („интегрируемая") станет ясным в дальнейшем. Если мы обозначим через $X_1 f$ образующую группы G_1, через $X_1 f$ и $X_2 f$ — образующие группы G_2 и так далее, то мы получим:

$$(X_2, X_1) f = c_{21}^1 X_1 f,$$
$$(X_3, X_1) f = c_{31}^1 X_1 f + c_{31}^2 X_2 f,$$
$$(X_3, X_2) f = c_{32}^1 X_1 f + c_{32}^2 X_2 f,$$

и вообще

$$(X_{h+k}, X_h) f = c_{h+k,\,h}^l X_l f \tag{36.1}$$

$$\left(\begin{array}{l} h = 1, \ldots, r-1; \; k = 1, \ldots, r-h; \\ l = 1, \ldots, h+k-1 \end{array}\right).$$

Таким образом, каждое c_{ab}^l, для которого l не меньше большего из чисел a и b, равно нулю.

Из построения § 35, которым было получено (35.5), следует, что, если одна из последовательных производных групп равняется единице, то данная группа G_r разрешима. В частности, первая производная группа абелевой группы равна единице. Следовательно,

[36.1] *Любая абелева группа разрешима.*

Точно так же из теоремы [16.1] получаем

[36.2] *Любая группа G_2 разрешима.*

Обратно, если группа G_r разрешима, то, согласно теореме [36.3], ее первая производная группа содержится в группе G_{r-1} последовательности (35.5). Согласно теореме [35.4], вторая производная группа соде жится в производной группе группы G_{r-1} и, следовательно,—в G_{r-2}. Аналогично, третья производная группа содержится в G_{r-3} и так далее. Следовательно,

[36.3] *Для того, чтобы группа G_r была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое целое число p ($\leqslant r$), что производная группа порядка p есть единица.*

Если G_r разрешима и G_p — подгруппа G_r, то первая производная группа G_p содержится, согласно теореме [35.4], в первой производной группе G_r. Если эти две производные группы подобны, то G_p разрешима, если они не подобны, то по той же теореме вторая производная группа G_p содержится во второй производной группе G_r и т. д. Таким образом, вследствие предыдущей теоремы,

[36.4] *Любая подгруппа разрешимой группы разрешима.*

Смысл выражения „*разрешимая* группа" выясняется теоремой

[36.5] *Если линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных $Af=0$ от n переменных допускает разрешимую группу G_{n-1}, символы которой вместе с Af независимы, то интеграция уравнения приводится к квадратурам.* Пусть $X_1f, \ldots,$ $X_{n-1}f$ — символы группы, выбранные таким образом, что первые b символов, для любого b от 1 до $n-2$, порождают подгруппу, инвариантную в подгруппе, порождаемой первыми $b+1$ символами. Если $Af=0$ — данное уравнение, то уравнения

$$Af=0,\ X_1f=0,\ \ldots,\ X_{n-2}f=0 \qquad (36.2)$$

образуют полную систему, допускающую, ввиду выбора символов, оператор $X_{n-1}f$. Следовательно если u — решение (32.6), отличное от постоянного, то и $X_{n-1}u$, согласно теореме [25.1], тоже является решением. Если $X_{n-1}u$ было бы нулем, то система уравнений (36.2) и $X_{n-1}f=0$ не была бы независима. Следовательно, $X_{n-1}u=$ $=\varphi(u)$, так как любые два решения (36.2) являются функциями друг друга. Если мы положим $u_1=\int\frac{du}{\varphi(u)}$, то u_1 будет решением (36.2) и $X_{n-1}u_1=1$. Это уравнение и система (36.2), в которой f заменено на u_1, могут быть разрешены относительно производных u_1, например

$$\frac{\partial u_1}{\partial x^i}=u_{1i}.$$

Так как $X_1f, \ldots, X_{n-2}f$ — символы инвариантной подгруппы G_{n-2} и Af допускает группу, то

$$(X_a, X_b)\,u_1=0,\quad (X_a, A)\,u_1=0 \qquad (a, b=1, \ldots, n-1)$$

и, следовательно, $u_{1i}dx^i$ является полным дифференциалом, т. е. u_1 получается квадратурой.

Если мы заменим координаты, положив $x'^1 = u_1$, $x'^2 = x^2, \ldots, x'^n = x^n$, то в новой координатной системе уравнения (штрихи опускаем)

$$Af = 0, \quad X_1 f = 0, \ldots, X_{n-3} f = 0 \tag{36.3}$$

не содержат производных по x^1. Следовательно, можно рассматривать эти уравнения как систему от $n-1$ переменных, с параметром x^1. Так как $X_1 f, \ldots, X_{n-3} f$ — символы инвариантной подгруппы G_{n-2}, определенной выше, то мы можем применить тот же самый прием и квадратурой найти интеграл u_2, независимый от ранее найденного u_1, поскольку он содержит переменные, отличные от x^1, которое есть u_1 в используемой координатной системе. Повторяя прием, мы получаем $n-1$ квадратурами $n-1$ независимых решений уравнения $Af = 0$, т. е. полное решение. Преобразования координат, приводящие уравнения к указанному виду, требуют квадратур, дифференцирований и подстановок.

Упражнения

1. Показать, что G_4 с символами

$$p, \; xp, \; x^2p, \; q$$

и подгруппа с первыми тремя из этих символов гомоморфны.

2. Преобразования транзитивной импримитивной группы, оставляющие на месте многообразие импримитивности, составляют инвариантную подгруппу.

(Lie-Engel, 1888, 1; том 1, стр. 307.)

3. Если $u^\mu(x^1, \ldots, x^n) = c^\mu$ $(\mu = 1, \ldots, n-q)$ — уравнения систем импримитивности транзитивной импримитивной группы G_r, то

$$X_a(u^\mu) = \varphi^\mu_a(u^1, \ldots, u^{n-q})$$

(см. § 23) и $U_a f = \varphi^\mu_a \dfrac{\partial f}{\partial u^\mu}$ суть символы группы, индуцированной в каждом многообразии импримитивности V_q. Показать также, что индуцированная группа изоморфна данной группе.

(Bianchi, 1918, 1, стр. 294, 295.)

4. Фактор-группа G_r по инвариантной подгруппе G_m тогда и только тогда абелева, когда первая производная группа группы G_r содержится в G_m.

(Bianchi, 1918, 1, стр. 289.)

5. Первая производная группа является инвариантной подгруппой наименьшего порядка, фактор-группа по которой абелева.

6. Показать, что G_4 с символами

$$G_4: p,\ q,\ xq,\ x^2q$$

разрешима и что подгруппы

$$G_3: q,\ xq,\ ap+bx^2q;\quad G_2: q,\ xq;\quad G_1: q$$

инвариантны в G_4, и каждая из них является инвариантной подгруппой любой другой подгруппы большего порядка.

(Lie-Scheffers, 1893, 1, стр. 538.)

7. Если ρ не нулевой корень характеристического уравнения $\left| c^e_{ab} u^a - \rho\delta^e_b \right| = 0$, то величины v^a, определенные системой уравнений $\left(c^e_{ab} u^a - \rho\delta^e_b\right) v^b = 0$, таковы, что $u^a X_a f$ и $v^b X_b f$ определяют подгруппу G_2 группы G_r и $v^b X_b f$ является символом производной группы группы G_2 (см. § 16).

8. Если $u^a X_a f$ и $v^a X_a f$ определяют подгруппу G_2 группы G_r и $c^e_{ab} u^a v^b = u^e$, то символ ее производной группы имеет вид $u^a X_a f$. Это возможно только тогда, когда матрица $\left\| c^e_{ab} u^a \right\|$ и расширенная матрица $\left\| c^e_{ab} u^a,\ u^e \right\|$ имеют один и тот же ранг (см. § 16).

9. Базис G_3 может быть выбран так, чтобы выполнялось одно из следующих структурных соотношений:

(1) $(X_1, X_2)f = X_1 f,\quad (X_1, X_3)f = 2X_2 f,\quad (X_2, X_3)f = X_3 f;$

(2) $(X_1, X_2)f = 0,\quad (X_1, X_3)f = X_1 f,\quad (X_2, X_3)f = cX_2 f;\ (c \neq 0, 1)$

(3) $(X_1, X_2)f = 0,\quad (X_1, X_3)f = X_1 f,\quad (X_2, X_3)f = X_2 f;$

(4) $(X_1, X_2)f = 0,\quad (X_1, X_3)f = X_1 f,\quad (X_2, X_3)f = X_1 f + X_2 f;$

(5) $(X_1, X_2)f = 0,\quad (X_1, X_3)f = X_1 f,\quad (X_2, X_3)f = 0,$

(6) $(X_1, X_2)f = 0,\quad (X_1, X_3)f = 0,\quad (X_2, X_3)f = X_1 f;$

(7) $(X_1, X_2)f = 0,\quad (X_1, X_3)f = 0,\quad (X_2, X_3)f = 0.$

Все эти группы, за исключением первой, разрешимы.

(Lie-Scheffers, 1893, 1, стр. 571.)

10. Базис любой неразрешимой группы G_3 может быть выбран имеющим вид (1) упражнения 9. Показать, что эта группа G_3 изоморфна проективной группе на прямой (§ 18, упражнение 8).

11. В четырехмерном пространстве координат x^i линейные однородные преобразования $x'^i = a^i_j x^j$ оставляют инвариантной гиперсферу $\sum x'^{i2} = \frac{1}{k}$ (где k — постоянная, если $a^i_j a^i_k = \delta_{jk}$). Они, следовательно, составляют группу G_6. Существуют две подгруппы этой группы, каждая третьего порядка, для которых $x'^i x^i = \frac{\alpha}{k}$, где α — постоянная величина. Значения параметров a^α в этом случае суть

$$(1) \qquad a^i_i = \alpha \text{ (по } i \text{ не суммируется)}, \quad a^j_i = -a^i_j \ (i, j = 1, \ldots, 4)$$

и

$$(2) \qquad a_1{}^2 = a_3{}^4 \equiv \beta, \quad a_1{}^3 = a_4{}^2 \equiv \gamma, \quad a_2{}^3 = a_1{}^4 \equiv \delta,$$

или

$$(3) \qquad a_1{}^2 = a_4{}^3 = \beta, \quad a_1{}^3 = a_2{}^4 \equiv \gamma, \quad a_2{}^3 = a_4{}^1 \equiv \delta,$$

где каждый раз

$$(4) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1.$$

(Bianchi, 1902, 1, стр. 445.)

12. Показать, что инвариантными подгруппами G_6 упражнения 11 являются обе подгруппы, там указанные, и только они.

13. Если за символы группы G_6 упражнения 11 возьмем (см. § 15, упражнение 12)

$$X_{ij} f = x^i p_j - x^j p_i,$$

то символы двух инвариантных подгрупп G_6 суть

$$(X_{12} \pm X_{34}) f, \quad (X_{13} \pm X_{24}) f, \quad (X_{23} \pm X_{14}) f.$$

14. Если мы положим

$$x^\alpha = \frac{y^\alpha}{1 + \frac{K}{4} r^2}, \quad x^4 = \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{1 - \frac{K}{4} r^2}{1 + \frac{K}{4} r^2}, \quad r^2 = y^\alpha y^\alpha \ (\alpha = 1, 2, 3),$$

то эти уравнения определят гиперсферу $\sum x^{i2} = \frac{1}{K}$. Символы группы Γ_6, индуцированной группой G_6 упражнения 11, на этой гиперсфере (см. § 20) можно взять в виде:

$$X_{ab}f = Y_{ab}f = y^a \frac{\partial f}{\partial y^b} - y^b \frac{\partial f}{\partial y^a}, \quad X_{4a}f = Y_a f \quad (a, b = 1, 2, 3),$$

где векторы η_a^α для $Y_a f$ определяются формулой

$$\eta_a^\alpha = \frac{1}{\sqrt{K}} \left[\delta_a^\alpha \left(1 - \frac{K}{4} r^2\right) + \frac{K}{2} y^\alpha y^a \right].$$

(Robertson, 1932, 3, стр. 512.)

15. Показать, что векторы инвариантных подгрупп Γ_6, индуцированных подгруппами упражнения 13, могут быть записаны в виде:

$$\zeta_a^\alpha = \sqrt{K}\left(\varepsilon_{\alpha a \beta} y^\beta + \eta_a^\alpha\right), \quad \bar{\zeta}_a^\alpha = \\ = \sqrt{K}\left(\varepsilon_{\alpha a \beta} y^\beta - \eta_a^\alpha\right) \quad (a, \alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

где $\varepsilon_{\alpha a \beta}$ равняется $+1$ или -1, смотря по тому, будет ли $\alpha a \beta$ четной или нечетной перестановкой чисел 1, 2, 3, и нулю в других случаях.

Показать также, что

$$\sum_a \zeta_a^\alpha \zeta_a^\beta = \sum_a \bar{\zeta}_a^\alpha \bar{\zeta}_a^\beta = \delta^{\alpha\beta}\left(1 + \frac{K}{4} r^2\right)^2.$$

(Robertson, 1932, 3, стр. 512.)

Глава IV

ПРИСОЕДИНЕННАЯ ГРУППА

37. Линейные однородные группы и векторные пространства. Рассмотрим группу G_1, для которой функции ξ^i в некоторой системе координат имеют вид:

$$\xi^i = a^i_j x^j, \tag{37.1}$$

где a^i_j — постоянные. Если мы будем считать x^i декартовыми координатами евклидова пространства, то для того, чтобы точка $P(x)$ перешла в точку, лежащую на одной прямой с точкой P и началом координат, необходимо, чтобы было

$$Xx^i = a^i_j x^j = \rho x^i. \tag{37.2}$$

В этом случае вектор OP с компонентами x^i преобразуется в вектор того же направления. Следовательно, каждое решение системы уравнений

$$(a^i_j - \rho\delta^i_j)\, x^j = 0 \tag{37.3}$$

определяет инвариантное направление, проходящее через начало координат. Соответственно этому задача определения инвариантных направлений сводится к определению корней характеристического уравнения

$$\Delta = \left| a^i_j - \delta^i_j \rho \right| = 0, \tag{37.4}$$

где верхний индекс обозначает строки, а нижний — столбцы. Так как решения системы (37.3) определяются только с точностью до множителя, то любой вектор инвариантного направления преобразуется в вектор того же направления. Уравнение (37.4) называется ***характеристическим уравнением*** матрицы $\| a^i_j \|$.

Мы уже рассматривали векторы, выходящие из начала координат, как элементы нового пространства; это пространство мы назовем векторным пространством E_n, а x^i —

компонентами вектора. В частности, n векторов с компонентами

$$e_a^i = \delta_a^i \qquad (a = 1, \ldots, n) \tag{37.5}$$

являются единичными векторами координатных осей. Любая линейная комбинация базисных векторов является вектором пространства, причем

$$\bar{x}^i = x^a e_a^i \tag{37.6}$$

представляет любой вектор. Величины $\bar{x}^i$ называются абсолютными компонентами, а x^a — компонентами относительно базы e_a. Если за базу выбраны векторы (37.5), то $\bar{x}^i = x^i$. Таким образом, если база образована единичными векторами осей координатной системы, то абсолютные компоненты равны *относительным* компонентам в этой координатной системе или *координатам*.

Если мы перейдем к новой базе при помощи уравнений

$$e_a'^i = e_b^i c_a^b, \tag{37.7}$$

где c_a^b — любые постоянные такие, что детерминант $|c_a^b|$ отличен от нуля, то (так как $\bar{x}^i$ в (37.6) — абсолютные компоненты) для любого вектора

$$x^a = c_b^a x'^b, \quad x'^b = \bar{c}_a^b x^a, \tag{37.8}$$

где

$$c_a^b \bar{c}_d^a = \delta_d^b. \tag{37.9}$$

Таким образом, изменению базы (37.7) соответствует изменение координат (37.8), т. е. изменение относительных компонент.

Пусть n независимых векторов имеют компоненты x_h^a относительно базы e_a, тогда детерминант $|x_h^a|$ не равен нулю. Если мы теперь возьмем такие произвольные значения $x_h'^a$, что детерминант $|x_h'^a|$ не равен нулю, то уравнения

$$\bar{c}_a^b x_h^a = x_h'^b$$

могут быть разрешены относительно $\bar{c}_a^b$ и, следовательно, [37.1] *База векторного пространства может быть выбрана таким образом, что компоненты n независимых векторов имеют произвольные значения x'^a_h, с детерминантом $|x'^a_h|$, отличным от нуля.*

При замене координат (37.8) имеем:

$$\xi'^k = \xi^i \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = a^i_j x^j \bar{c}^k_i = a'^k_l x'^l,$$

где

$$a'^k_l = \bar{c}^k_i a^i_j c^j_l \qquad (37.10)$$

и, следовательно,

$$a'^k_l x'^l = \bar{c}'^k_i a^i_j x^j = \rho x^i \bar{c}^k_i = \rho x'^k.$$

Таким образом,

[37.2] *Корни характеристического уравнения инвариантны относительно изменения системы координат.*

Если x обозначает матрицу с одним столбцом, элементами которой являются x^i, а C обозначает матрицу $\|c^b_a\|$, то, согласно определению умножения матриц, первое уравнение (37.8) может быть записано в виде:

$$x = Cx'. \qquad (37.11)$$

Аналогично, если A обозначает матрицу $\|a^i_j\|$, а C^{-1} — матрицу, обратную к C, то из (37.10) имеем:

$$A' = C^{-1}AC \qquad (37.12)$$

и, следовательно,

$$(A' - I\rho) = C^{-1}(A - I\rho)\,C, \qquad (37.13)$$

где I обозначает единичную матрицу $\|\delta^i_j\|$.

Возвращаясь к рассмотрению уравнений (37.3), обозначим через ρ_1 один из корней уравнения (37.4). Мы уже видели, что ρ_1 соответствует, по крайней мере, одно инвариантное направление, т. е. векторное пространство E_1, и, в соответствии с теоремой [37.1], база может быть выбрана таким образом, что компоненты вектора x_1, удовлетворяющего уравнениям (37.3), суть $(1, 0, \ldots, 0)$.

Тогда для этой базы из уравнений (37.3) имеем

$$a_1^1 = \rho_1, \quad a_1^{i_1} = 0 \quad (i_1 = 2, \ldots, n). \tag{37.14}$$

Если к x_1 присоединить любой другой вектор x^i из E_n, не лежащий в E_1, то компоненты любого вектора пространства E_2, определенного этими двумя векторами, будут иметь вид $(\lambda + \mu)x^1, \mu x^2, \ldots, \mu x^n$. Если векторы этого пространства подвергнуть преобразованию группы G_1, то, вообще говоря, они перейдут в векторы другого пространства, проходящего через E_1. Однако, если $x^2, \ldots, x^n$ выбраны так, что

$$\left(a_{j_1}^{i_1} - \delta_{j_1}^{i_1}\rho\right) x^{j_1} = 0 \quad (i_1, j_1 = 2, \ldots, n), \tag{37.15}$$

то пространство E_2, определенное пространством E_1 и вектором x_2, с этими компонентами и произвольной первой компонентой, инвариантно относительно G_1, хотя отдельные направления в пространстве E_2 могут быть неинвариантными. Как следует из (37.14), величина ρ в (37.15) должна быть корнем характеристического уравнения (37.4). Выбрав базу таким образом, чтобы векторы x_1 и x_2 имели соответственно компоненты $(1, 0, \ldots, 0)$ и $(0, 1, \ldots, 0)$, получим (37.14), а из (37.15) будем иметь:

$$a_2^{i_2} = 0 \quad (i_2 = 3, \ldots, n). \tag{37.16}$$

Аналогично, если мы возьмем E_2 и такой вектор x_3, не лежащий в E_2, что $x_3^3, \ldots, x_3^n$ удовлетворяют уравнениям

$$\left(a_{j_2}^{i_2} - \delta_{j_2}^{i_2}\rho\right) x^{j_2} = 0 \quad (i_2, j_2 = 3, \ldots, n), \tag{37.17}$$

где, как и ранее, ρ есть корень уравнения (37.4), то E_3, определенное E_2 и вектором x^3, с произвольными координатами x_3^1 и x_3^2, инвариантно относительно преобразований группы G_1. Далее, при соответствующем выборе базы, будем иметь кроме равенств (37.14) и (37.16)

$$a_3^{i_3} = 0 \quad (i_3 = 4, \ldots, n). \tag{37.18}$$

Мы можем продолжать этот процесс, используя все время корни уравнения (37.4), окончательно имеем:

[37.3] *Преобразования линейной однородной группы G_1 оставляют инвариантной, по крайней мере, одну последовательность векторных подпространств $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}$ пространства E_n, такую, что E_k содержится в E_{k+1}.*

Мы показали также, что

[37.4] *Можно найти координатную систему, в которой матрица линейной однородной группы удовлетворяет условиям:*

$$a_j^t = 0 \quad (j = 1, \ldots, n-1;\ t = j+1, \ldots, n). \qquad (37.19)$$

Мы уже видели, что решение уравнений (37.15) определяет вместе с E_1 такое пространство E_2, что любой вектор E_2 преобразуется в вектор E_2. Мы скажем, что такой вектор инвариантен по модулю x_1, и запишем это матричным равенством

$$Ax_2 = \rho x_2 \ (\mathrm{mod}\, x_1).$$

Точно так же E_2 и решение (37.17) определяют E_3, для любого вектора которого

$$Ax_3 = \rho x_3 \ (\mathrm{mod}\, x_1,\ x_2),$$

где в обоих уравнениях ρ обозначает корень уравнения (37.4).

Если ρ_1 — кратный корень порядка ν_1 уравнения (37.4) и этот корень использован для определения векторов $x_1, \ldots, x_{\nu_1}$, то полученные результаты могут быть написаны в виде:

$$(A - I\rho_1)\, x_1 = 0,\ (A - I\rho_1)^2 x_2 = \\ = 0, \ldots,\ (A - I\rho_1)^{\nu_1} x_{\nu_1} = 0. \qquad (37.20)$$

Заметим, что в (37.15) главный минор элемента $a_{j_1}^{i_1}$ матрицы A действует на координаты $x^2, \ldots, x^n$ некоторого подпространства E_{n-1} (являющегося по терминологии Вейля *проекцией* E_n вдоль E_1), а ρ есть корень (37.4). Аналогично, в (37.17) главный минор элемента $a_{j_2}^{i_2}$ действует на $x^3, \ldots, x^n$, которые суть компоненты вектора пространства $\bar{E}_{n-2}$ (проекции E_n вдоль E_2). Точно так же при построении векторного пространства E_{p+1} теоремы [37.3] минор элемента $a_{j_p}^{i_p}$ $(i_p, j_p = p+1, \ldots, n)$ действует на векторы проекции E_n вдоль E_p.

Пусть теперь G_r — разрешимая группа линейных однородных преобразований; тогда существует такая последовательность

$$G_r, G_{r-1}, \ldots, G_1, 1,$$

что для любого $k < r$ подгруппа G_k инвариантна в G_{k+1}. Как в § 36, выберем такой базис G_r, чтобы $X_1 f$ порождало G_1, $X_1 f$ и $X_2 f$ порождали G_2 и т. д. Через A_i обозначим матрицу оператора $X_i f$. Для каждого корня характеристического уравнения A_1 мы имеем одно или большее число инвариантных направлений, определяемых равенством

$$A_1 x = \rho x. \tag{37.21}$$

Если для данного корня существует p таких инвариантных направлений, то любая линейная комбинация векторов этих направлений является решением (37.21). Следовательно, обозначая через $\rho_1, \ldots, \rho_s$ различные корни характеристического уравнения матрицы A_1, будем иметь векторные пространства $E_{p_1}, \ldots, E_{p_s}$, размерностей $p_1, \ldots, p_s$ соответственно. Каждое направление любого из этих векторных пространств инвариантно относительно группы G_1. Кроме того, никакие два из этих векторных пространств не имеют общего вектора, так как уравнения (37.21) и $A_1 x = \rho' x$ $(\rho' \neq \rho)$ не совместны. Следовательно, эти векторные пространства образуют дискретное семейство.

Так как G_1 является инвариантной подгруппой G_2, то для любого преобразования T_1 группы G_1 и преобразования T_2 группы G_2, не содержащегося в G_1, имеем:

$$T_2 T_1 T_2^{-1} = T_1',$$

где T_1' — преобразование G_1, т. е. $T_2 T_1 = T_1' T_2$. Следовательно, если E — любое из инвариантных пространств, построенных выше, и $T_2 E = E'$, то из $T_2 T_1 E = T'_1 T_2 E$ мы получим: $E' = T_1' E'$. Таким образом, E' — инвариантное пространство относительно G_1. Так как инвариантные векторные пространства образуют дискретное семейство, а изучаемые нами группы непрерывны, то E' совпадает с E. Таким образом, каждое векторное пространство E_{p_i} инвариантно относительно G_2, но не обязательно все направления такого пространства инвариантны. Применив к какому-нибудь из этих векторных пространств группу, порожденную символом $X_2 f$, т. е. матрицу A_2, мы найдем в этом пространстве, по крайней мере, одно инвариантное направление, а может быть, как в случае A_1, и подсемейство инвариантных направлений, которые, будучи инвариантны относительно G_1, будут инвариантны относительно G_2. Таким образом, для G_2 существует дискретное семейство векторных пространств, каждый вектор которых инвариантен относительно G_2. Поступая таким же образом для группы G_3 и продолжая этот процесс, мы докажем существование, по крайней мере, одного инвариантного относительно группы G_r подпространства E_1. Проектируя E_n вдоль E_1, получим $\overline{E}_{n-1}$. Применяя те же рассуждения к $\overline{E}_{n-1}$, мы получим в $\overline{E}_{n-1}$ направление, инвариантное относительно G_r. Следовательно, подпространство E_2, определяемое найденными направлениями, инвариантно относительно G_r. Теперь спроектируем E_n вдоль E_2 и повторим предыдущие рассуждения. Таким образом, мы придем к следующей теореме Ли[1]:

[37.5] *Если группа G_r линейных однородных преобразований разрешима, то существует, по крайней мере, одна последовательность инвариантных векторных подпространств $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}$, таких, что любое E_k содержится в E_{k+1}.*

Выбирая координаты, так же как в случае однопараметрической группы, мы получим:

[37.6] *Если линейная однородная группа разрешима, то можно выбрать базис таким образом, что*

$$a^t_{\alpha j} = 0 \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, r; \\ j = 1, \ldots, n-1; \ t = j+1, \ldots, n \end{pmatrix}. \quad (37.22)$$

[1]) 1893, 1, стр. 533.

38. Каноническая форма линейных однородных преобразований. Фундаментальные векторы. Приведение преобразования (37.1) с помощью однородных линейных преобразований к виду, для которого имеют место соотношения (37.19), является только первым шагом в нахождении их канонической формы. Уравнение (37.12) указывает изменение матрицы A при линейном однородном преобразовании системы координат. Таким образом, мы можем применить известные результаты о приведении матриц при преобразованиях такого рода. Приведение матрицы к нормальной форме требует знания элементарных делителей матрицы Δ (37.4), которые определяются следующим образом: пусть F_i — общий наибольший делитель миноров Δ порядка i и l_i — наивысшая степень $\rho - \rho_1$ в F_i, где ρ_1 — корень уравнения (37.4). Когда i принимает значения $1, \ldots, n$, мы получаем числа $\nu_i = l_i - l_{i-1}$, неменьшие нуля. Для значений ν_i, не равных нулю, выражения $(\rho - \rho_1)^{\nu_i}$ называются элементарными делителями Δ, соответствующими корню ρ_1. Основная теорема формулируется следующим образом:

Если элементарные делители Δ суть

$$(\rho - \rho_1)^{\nu_1},\ (\rho - \rho_2)^{\nu_2}, \ldots, (\rho - \rho_k)^{\nu_k} \qquad (\nu_1 + \ldots + \nu_k = n) \tag{38.1}$$

(ни ρ_a, ни ν_i в этих выражениях не обязательно различны), то существует такое действительное однородное преобразование переменных, что Δ принимает вид:

$$\Delta = \left| \begin{array}{cccc} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_k \end{array} \right|, \tag{38.2}$$

где M_i являются матрицами порядка ν_i

$$M_i = \begin{vmatrix} \rho_i-\rho & 1 & 0 & & \ldots 0 \\ 0 & \rho_i-\rho & 1 & 0 & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & \rho_i-\rho & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \rho_i-\rho \end{vmatrix}, \qquad (38.3)$$

а все остальные элементы Δ равны нулю [1]).

Заметим, что некоторые ρ_a в (38.1) могут быть одинаковы. Собрав в один главный минор все члены, содержащие одно и то же ρ, и обозначив через ν_a порядок корня ρ_a, получим минор, соответствующий корню ρ_a

$$M_a = \begin{vmatrix} \rho_a-\rho & e_{a_1} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \rho_a-\rho & e_{a_2} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & \ldots & \rho_a-\rho & & e_{a(\nu_a-1)} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & & \rho_a-\rho \end{vmatrix},$$

где e равны единице или нулю. Все элементы матрицы $\|a^j_i\|$, не содержащиеся в одной из матриц M_a, равны нулю.

Обозначим через x_1 вектор, удовлетворяющий уравнению (37.3) при значении $\rho = \rho_1$, т. е.

$$Ax_1 = \rho_1 x_1. \qquad (38.4)$$

Пусть A приведена к нормальной форме; тогда в этой системе координат одно решение (38.4) есть

$$x_1^i = \delta_1^i \qquad (38.5)$$

и

$$a^{b_1}_{b_1} = \rho_1, \quad a^{b_1}_{b_1+1} = e_{1b_1}, \quad a^{b_1}_c = 0 \quad \begin{pmatrix} b_1 = 1, \ldots, \nu_1; \\ c \neq b_1 \neq (b_1+1) \end{pmatrix}.$$

---

[1]) Bocher, 1907, 1, стр. 270, 271, 288, 289.

Таким образом, каждый вектор

$$x^i_{b_1} = \delta^i_{b_1} \tag{38.6}$$

удовлетворяет уравнению

$$Ax_{b_1} = \rho_1 x_{b_1} + e_{1\,[b_1-1]}\, x_{b_1-1}. \tag{38.7}$$

В частности,

$$(a^i_j - \delta^i_j \rho_1)\, x^j_2 = e_{11} x^i_1,$$

следовательно,

$$(a^k_i - \delta^k_i \rho_1)(a^i_j - \delta^i_j \rho_1)\, x^j_2 = e_{11} (a^k_i - \delta^k_i \rho_1)\, x^i_1 = 0$$

или в матричной записи

$$(A - I\rho_1)^2 x_2 = 0.$$

Вообще имеем:

$$(A - I\rho_1)^{b_1} x_{b_1} = 0 \quad (b_1 = 1, \ldots, \nu_1). \tag{38.8}$$

Мы говорим, что векторы (38.6) определяют векторное пространство E_{ρ_1} размерности ν_1, соответствующее корню ρ_1 и называемое *корневым пространством* корня ρ_1. Любой вектор этого пространства является линейной комбинацией (с постоянными коэффициентами) векторов (38.6), откуда следует, что любой вектор $\bar{x}_1$ пространства E_{ρ_1} удовлетворяет условию

$$(A - I\rho_1)^b\, \bar{x}_1 = 0 \qquad (b \leqslant \nu_1).$$

Здесь b зависит от $\bar{x}_1$. Мы будем называть векторы (38.6) *фундаментальными* векторами E_{ρ_1}, соответствующими первой, второй и т. д. строкам матрицы M_1. Любые два из этих векторов, соответствующие последовательным значениям b_1, будем называть *последовательными*.

Аналогично, векторы

$$x^i_{b_2} = \delta^i_{b_2} \quad (b_2 = \nu_1 + 1, \ldots, \nu_1 + \nu_2) \tag{38.9}$$

определяют пространство E_{ρ_2}, соответствующее корню ρ_2. Мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} &AX_{b_2} = \rho_2 x_{b_2} + e_{2[c_2-1]} x_{b_2-1},\\ &(A - I\rho_2)^{c_2} x_{b_2} = 0, \quad (c_2 = b_2 - \nu_1),\\ &(A - I\rho_2)^{c} \bar{x}_2 = 0 \quad (c \leqslant \nu_2). \end{aligned}\right\} \tag{38.10}$$

Аналогично поступаем, беря корни $\rho_3 \ldots$ Имеем:

[38.7]. *Если* x_α — *любой вектор корневого пространства* ρ_α, *то*

$$(A - I\rho_\alpha)^c x_\alpha = 0 \quad (c \leqslant \nu_\alpha). \tag{38.11}$$

Напишем уравнение (37.4) в виде:

$$\varphi(\rho) = (\rho - \rho_1)^{\nu_1} \ldots (\rho - \rho_p)^{\nu_p} = 0.$$

Существуют такие функции $\psi_a(\rho)$, что

$$\frac{1}{\varphi(\rho)} = \sum_a^{1\ldots p} \frac{\psi_a(\rho)}{(\rho - \rho_a)^{\nu_a}}.$$

Тогда

$$1 = \sum_a f_a(\rho),$$

где

$$f_a(\rho) = \psi_a(\rho) \prod_{b \neq a} (\rho - \rho_b)^{\nu_b} \quad (a, b = 1, \ldots, p).$$

Таким образом, имеет место матричное уравнение

$$I = \sum_a f_a(A), \quad f_a(A) = \psi_a(A) \prod_{b \neq a} (A - \rho_b I)^{\nu_b}. \tag{38.12}$$

Пусть x — вектор пространства, тогда

$$x = x_1 + \ldots + x_p, \tag{38.13}$$

где x_a—некоторый вектор корневого пространства корня ρ_a. Из предыдущей теоремы и определения $f_a(A)$ имеем:

$$f_a(A)\, x_b = 0 \qquad (b \neq a),$$

и тогда из первого уравнения (38.12) следует, что

$$x_b = Ix_b = f_b(A)\,x_b. \tag{38.14}$$

Следовательно,

$$f_a(A)\,x = f_a(A)\,x_a = x_a.$$

Теперь, если $(A - \rho_1 I)^h x = 0$ для $h \leqslant \nu_1$, то

$$(A - \rho_1 I)^{\nu_1} x = 0.$$

Таким образом, если мы запишем x в виде (38.13), то для $a \neq 1$ будем иметь:

$$f_a(A)\,x = 0.$$

Так как a принимает здесь значения $2, \ldots, p$, то из (38.14) следует, что $x_2 = \ldots = x_p = 0$. Следовательно,

[38.2] *Если x не нулевой вектор, для которого*

$$(A - I\rho_a)^c x = 0 \qquad (c \leqslant \nu_a),$$

то x является вектором корневого пространства ρ_a.

Предположим теперь, что σ не корень характеристического уравнения и что

$$(A - I\sigma)^c x = 0.$$

Поскольку σ не корень, существуют такие полиномы $M(\rho)$ и $N(\rho)$, что

$$M(\rho)\,(\rho - \sigma)^c + N(\rho)\,\varphi(\rho) = 1.$$

Так как это тождество для полиномов от одной переменной является непосредственным следствием правил сложения и умножения, то оно остается верным, если вместо ρ подставить матрицу, так что имеем:

$$M(A)\,(A - I\sigma)^c + N(A)\,\varphi(A) = I.$$

Так как $\varphi(A) = (A - I\rho_1)^{\nu_1} \ldots (A - I\rho_p)^{\nu_p}$, то $\varphi(A)x = 0$.

Таким образом,

$$M(A)\,(A - I\sigma)^c x = Ix = x.$$

Но, по предположению, левая сторона этого равенства равна нулю и, следовательно, $x = 0$. Тем самым доказана теорема

[38.3] *Если $(A - I\sigma)^c x = 0$, то либо σ не есть корень, и тогда x равен нулю, либо σ — корень и x — вектор соответствующего корневого пространства.*

39. Присоединенная группа данной группы. Из уравнений (29.14) следует, что группа G_r инвариантна относительно преобразований любой своей подгруппы G_1. Если мы обозначим через $\lambda^a X_a f$, где λ^a — постоянное, символ некоторой подгруппы G_1 и положим

$$v^a = \lambda^a \tau, \tag{39.1}$$

то v^a будут каноническими параметрами этой G_1. Если u^a — канонические параметры данной группы G_r и $\bar{u}^a$ — каноническе параметры группы G_r, в которую она переходит при преобразованиях G_1, то из (29.4) следует:

$$\bar{u}^a = \sigma^a_b(v)\, u^b, \tag{39.2}$$

где σ^a_b — такие функции v, что $(\sigma^a_b)_{\tau=0} = \delta^a_b$. Это — уравнения преобразований u^a в $\bar{u}^a$, зависящие от r параметров v^a. Покажем, что эти преобразования образуют группу. Действительно, аналогично (29.7), имеют место равенства

$$T_v T_u T_v^{-1} = T_{\bar{u}}. \tag{39.3}$$

Если еще положим

$$T_{v_1} T_{\bar{u}} T_{v_1}^{-1} = T_{\bar{u}_1},$$

то

$$T_{\bar{u}_1} = T_{v_1} T_v T_u T_v^{-1} T_{v_1}^{-1} = T_{v_2} T_u T_{v_2}^{-1},$$

где

$$v_2^a = \psi^a(v;\, v_1) \tag{39.4}$$

уравнения (4.6) в канонических параметрах. Таким образом, [39.1] *Уравнения* (39.2) *определяют группу и уравнения, связывающие ее параметры, те же, что и для данной группы.*

Эта группа Г называется *присоединенной* к данной группе. Как будет позже показано, ее порядок не всегда равен r, т. е. не обязательно все параметры v^a существенны.

Из уравнений

$$T_v T_{u_1} T_{v_1}^{-1} = T_{\bar{u}_1}, \qquad T_v T_{u_2} T_v^{-1} = T_{\bar{u}_2}$$

имеем

$$T_{\bar{u}_2} T_{\bar{u}_1} = T_v T_{u_2} T_v^{-1} T_v T_{u_1} T_v^{-1} = T_v T_{u_2} T_{u_1} T_v^{-1}.$$

Таким образом, преобразования присоединенной группы определяют *автоморфизмы* данной группы, т. е. изоморфные в смысле § 32 отображения группы самой на себя, следовательно,

[39.2] *Структурные константы группы не меняются, когда канонические параметры подвергаются преобразованиям присоединенной группы.*

Если в (29.14) мы заменим символ Xf на $\lambda^a X_a f$, то, вследствие (7.2), мы получим $g_b^a = \lambda^e c_{be}^a$ и, следовательно, вместо уравнений (29.20), будем иметь уравнения

$$\frac{d\bar{u}^a}{d\tau} = \bar{u}^b \lambda^e c_{be}^a. \tag{39.5}$$

Подставив выражения (39.2) в (39.5), получим:

$$\frac{d\sigma_b^a(v)}{d\tau} = \sigma_b^d \lambda^e c_{de}^a, \tag{39.6}$$

Сравнивая этот результат с (14.12), мы видим, что функции σ_b^a совпадают с функциями (14.13). Кроме того, эти функции σ_b^a являются инвариантами, выраженными через канонические параметры, и равны функциям $\rho_b^a(a)$ из (8.14).

Таким образом, уравнения присоединенной группы могут быть записаны в виде

$$\bar{u}^a = \rho_b^a(a)\, u^b. \tag{39.7}$$

С этой точки зрения преобразования присоединенной группы изоморфны преобразованиям, связывающим системы векторов $\bar{A}_a^\alpha$ и A_a^α группового пространства.

Если мы положим

$$\eta_a^\alpha(u) = c_{ba}^\alpha u^b, \quad E_a\varphi = \eta_a^\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial u^\alpha}, \tag{39.8}$$

то уравнения (39.5) приведутся к

$$\frac{d\bar{u}^\alpha}{d\tau} = \lambda^a \eta_a^\alpha(\bar{u}), \tag{39.9}$$

откуда следует, что $E_a\varphi$ являются символами присоединенной группы [см. (11.8)].

Из (39.8) и (7.4)

$$(E_a, E_b)\varphi = (c_{ea}^f c_{fb}^c + c_{be}^f c_{fa}^c) u^e \frac{\partial\varphi}{\partial u^c} =$$
$$= c_{ab}^f c_{ef}^c u^e \frac{\partial\varphi}{\partial u^c} = c_{ab}^e E_e\varphi. \tag{39.10}$$

Следовательно,

[39.3] *Символы $E_a\varphi$ имеют те же структурные константы, что и группа G_r.*

Как следует из (39.8), для того, чтобы присоединенная группа имела порядок r, необходимо и достаточно, чтобы не существовало никакого соотношеиия вида

$$g^a c_{ba}^\alpha = 0, \tag{39.11}$$

где g^a — постоянные. Через C обозначим матрицу с r столбцами и r^2 строками:

$$C = \| c_{ba}^\alpha \|, \tag{39.12}$$

где индексы b и α указывают строки, а a — столбцы. Если матрица C имеет ранг s ($\leqslant r$), то уравнения (39.11) допускают $r - s$ независимых систем решений, и порядок присоединенной группы равен s. В этом случае существует $r - s$ линейно независимых (с постоянными коэффициентами) центральных подгрупп G_1 (§ 29).

Из (39.8) и (7.3) следует, что $u^a \eta^a_a = 0$ и, следовательно, ранг матрицы $\|\eta^a_a\|$ меньше r. Таким образом,

[39.4] *Присоединенная группа всегда интранзитивна.*

В § 16 мы видели, что если $X_1 f, \ldots, X_m f$ порождают подгруппу G_m группы G_r, то $c^z_{tu} = 0$ ($t, u = 1, \ldots, m$; $z = m + 1, \ldots, r$). Тогда из (39.10) имеем

[39.5] *Если $X_1 f, \ldots, X_m f$ порождают подгруппу G_m группы G_r, то $E_1 f, \ldots, E_m f$ порождают подгруппу присоединенной группы и обратно.*

Кроме того, если G_m инвариантна в G_r, то $c^z_{at} = 0$ ($a = 1, \ldots, r$; $t = 1, \ldots, m$; $z = m + 1, \ldots, r$), и мы имеем

[39.6] *Если $X_1 f, \ldots, X_m f$ порождают инвариантную подгруппу G_r, то $E_1, \ldots, E_m f$ порождают инвариантную подгруппу присоединенной группы и обратно.*

В этом заключается значение присоединенной группы, так как нахождение подгрупп и инвариантных подгрупп данной группы сводится к нахождению их для присоединенной группы, которая по отношению к каноническим параметрам линейна и однородна.

Подгруппе G_1 группы G_r с символом $v^a X_a f$ соответствует подгруппа Γ_1 присоединенной группы с символом $v^a E_a f$. Как и в § 37, величины v^a являются компонентами вектора в таком векторном пространстве E_r [1]), что каждое подпространство E_1 представляет G_1 в G_r, а также Γ_1 в присоединенной группе, и каждое преобразование из G_1 и Γ_1 представляется вектором E_1. Любая подгруппа G_m в G_r соответствует подгруппе присоединенной группы, представленной векторами подпространства E_m. Если векторы этого E_m подвергнуть некоторому преобразованию присоединенной группы, то E_m перейдет в новое E'_m, если только это преобразование не представляется вектором E_m, или если подгруппа G_m инвариантна в G_r.

[1]) E_r, E_1 и E_m нельзя смешивать с символами $E_a f$ присоединенной группы.

Таким образом,

[39.7] *Для того, чтобы подпространство E_m в E_r представляло подгруппу G_m из G_r, необходимо и достаточно, чтобы оно оставалось инвариантным при всех преобразованиях присоединенной группы, представляемых векторами E_m. Для того чтобы G_m была инвариантной подгруппой, необходимо и достаточно, чтобы E_m было инвариантным многообразием присоединенной группы.*

Если u_1 и u_2 любые два вектора E_r, то

$$(u_1^a X_a,\ u_2^b X_b)f = u_{12}^e X_e f \quad (a, b, e = 1, \ldots, r),$$

где

$$u_{12}^e = c_{ab}^e u_1^a u_2^b.$$

Таким образом, u_{12}, обозначаемое нами теперь через (u_1, u_2), является вектором производной группы группы G_r. Аналогично, если u_1 и u_2 — векторы подгруппы G_r, то u_{12} является вектором той же подгруппы. Далее, если u_1 — любой вектор инвариантной подгруппы G_r, а u_2 — любой вектор G_r, то u_{12} является вектором этой же подгруппы.

Вследствие тождества Якоби (7.4), для любых трех векторов u_1, u_2, u_3 имеем:

$$((u_1, u_2), u_3) + ((u_2, u_3), u_1) + ((u_3, u_1), u_2) = 0.$$

Применим это тождество к случаю, когда u_1 и u_2 — векторы инвариантной подгруппы G_m, а u_3 — любой вектор G_r. Так как подгруппа инвариантна, то (u_2, u_3) и (u_3, u_1) — векторы G_m и, следовательно, второй и третий члены написанного тождества являются векторами производной группы подгруппы G_m. Следовательно, и их сумма является вектором производной группы. Таким образом, первый член, который есть образ вектора производной группы G_m при применении преобразования группы G_r, является вектором этой производной группы. Таким образом, эта последняя есть инвариантная подгруппа группы G_r. Так как вторая производная группа подгруппы G_m связана с ее первой производной группой (если она не совпадает с ней) тем же соотношением, каким первая производная группа связана с G_m, то вторая производная группа G_m является инвариантной подгруппой G_r и так далее. Таким образом,

[39.8] *Все производные группы инвариантной подгруппы группы G_r являются инвариантными подгруппами G_r.*

В частности,

[37.9] *Все производные группы G_r являются инвариантными подгруппами G_r.*

Упражнения

1. Если в общем линейном однородном операторе $a_j^i x^j p_i$ введем неоднородные координаты $y^\alpha = \frac{x^\alpha}{x^n}$ $(\alpha = 1, \ldots, n-1)$, то получим:

$$(a_n^\alpha + a_\beta^\alpha y^\beta - a_n^n y^\alpha - a_\beta^n y^\beta y^\alpha)\frac{\partial f}{\partial y^\alpha} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n-1).$$

2. Показать, что теорема [39.2] следует из (8.22) (и 39.7).

3. Присоединенная группа простой группы G_3, для базиса которой

$$(X_1, X_2)f = X_1 f, \quad (X_1, X_3)f = 2X_2 f, \quad (X_2, X_3)f = X_3 f,$$

имеет символы:

$$E_1 f = -x^2 p_1 - 2x^3 p_2, \quad E_2 f = x^1 p_1 - x^3 p_3, \quad E_3 f = 2x^1 p_2 + x^2 p_3.$$

Эта группа оставляет на месте конус $4x^1 x^3 - (x^2)^2 = 0$.

4. Присоединенная группа абелевой группы состоит из единицы.

5. Найти присоединенные группы различных типов G_3 упражнения 9, § 36.

6. Подгруппа G_2 группы G_r принадлежит, по крайней мере, одной подгруппе G_3.

(Lie-Scheffers, 1893, 1, стр. 564.)

7. Если $u^1, \ldots, u^r$ рассматривать как однородные координаты точки пространства R_{r-1}, то каждое инфинитезимальное преобразование представляется точкой R_{r-1} и оператор $(u^a X_a, v^b X_b)$ представляется точкой $c_{ab}^e u^a v^b$. Что дает теорема [39.7] в этой интерпретации?

8. Показать с помощью упражнения 11 § 11, что, если G_1 с символом $u^a X_a f$ преобразуется преобразованиями G_1 с символом $v^b X_b f$, то точка с координатами u^a описывает в R_{r-1} кривую, касательной к которой является прямая, соединяющая эту точку с точкой $c^e_{ab} u^a v^b$.

(Lie-Scheffers, 1893, 1, стр. 471.)

9. Для группы G_4 упражнения 7 § 31 инвариантная подгруппа представляется в R_3 плоскостью $u^4 = 0$, и присоединенная группа G_4, согласно упражнению 3 и теореме (31.1), оставляет инвариантным некоторый конус. Показать, что $X_4 f$ может быть выбран таким образом, что $E_4 f$ оставляет на месте все точки плоскости $u^4 = 0$, и вывести отсюда результат упражнения 7 § 31.

(Lie-Scheffers, 1893, 1, стр. 573.)

10. В R_2, соответствующем группе G_3, уравнения $w^e = c^e_{ab} u^a v^b$ определяют коррелятивное соответствие между точкой w^a и прямой, соединяющей u^a и v^b, плюккеровы координаты которой равны $p^{ab} = u^a v^b - u^b v^a$. Эта корреляция вырождена, если группа G_3 не проста.

11. Если подгруппа G_3 группы G_4 неинвариантна, то представляющая ее плоскость R_3 преобразуется присоединенной группой G_4 в ∞^1 плоскостей, которые могут огибать конус, общую развертывающуюся поверхность или проходить через одну прямую. В каждом случае существует инвариантная конфигурация и, следовательно, не существует простой группы G_4.

(Lie-Scheffers, 1893, 1, стр. 576.)

40. Характеристическое уравнение группы. Ранг группы.

Уравнение

$$\Delta(u, \rho) \equiv |\eta^a_b(u) - \rho\delta^a_b| = 0, \tag{40.1}$$

где η^a_b определены формулами (39.8), называется *характеристическим уравнением* группы, а матрица $\Delta(u, \rho)$ — *характеристической матрицей* *).

Из § 38 следует, что характеристическая матрица не изменится, когда u^a подвергнуты однородному линейному преобразованию. На свойствах характеристической матрицы основывается классификация групп (см. § 46).

*) Отметим, что через Δ автор обозначает как характеристическую матрицу, так и ее детерминант. (*Прим. ред.*)

Так как ранг $\|\eta^e_b\|$ меньше r (§ 39), то

$$(-1)^r \Delta(u, \rho) = \\ = \rho^r - \psi_1(u)\rho^{r-1} + \ldots + (-1)^{r-1}\psi_{r-1}(u)\rho. \qquad (40.2)$$

С точностью до знака, $\psi_q(u)$ является суммой главных миноров $|\eta^e_b|$ порядка q. Таким образом, если ранг матрицы равен q, то функции ψ_s при $s > q$ равны нулю, и уравнение (40.1) имеет нулевой корень порядка, по крайней мере, $r - q$.

Из (40.2) имеем:

$$\psi_1 = \eta^a_a, \quad \psi_2 = \frac{1}{2}(\eta^a_a\eta^b_b - \eta^b_a\eta^a_b),$$

$$\psi_3 = \eta^a_{[a}\eta^b_b\eta^c_{c]} = \frac{1}{3!}(\eta^a_a\eta^b_b\eta^c_c + \eta^a_b\eta^b_c\eta^c_c + \eta^a_c\eta^b_a\eta^c_b) - \\ - \frac{1}{3!}(\eta^a_a\eta^b_c\eta^c_b + \eta^a_c\eta^b_b\eta^c_a + \eta^a_b\eta^b_a\eta^c_c)$$

и так далее. Если мы положим

$$\varphi_1 = \eta^a_a, \quad \varphi_2 = \eta^b_a\eta^a_b, \quad \varphi_3 = \eta^b_a\eta^c_b\eta^a_c \qquad (40.3)$$

и т. д., то получим

$$\psi_1 = \varphi_1, \quad \psi_2 = \frac{1}{2}(\varphi_1^2 - \varphi_2), \quad \psi_3 = \frac{1}{6}\varphi_1^3 - \frac{1}{2}\varphi_1\varphi_2 + \frac{1}{3}\varphi_3$$

и, следовательно,

$$\varphi_1 = \psi_1, \quad \varphi_2 = \psi_1^2 - 2\psi_2, \quad \varphi_3 = \psi_1^3 - 3\psi_1\psi_2 + 3\psi_3. \qquad (40.4)$$

Таким образом, φ_1 является суммой корней, φ_2 — суммой их квадратов и φ_3 — суммой их кубов. Сумма элементов главной диагонали матрицы, в нашем случае φ_1, называется *следом* матрицы.

Из определения φ_2 следует, что

$$\varphi_2 = g_{ij}u^i u^j, \quad g_{ij} = c^b_{ia}c^a_{jb}. \qquad (40.5)$$

Каждая система значений u^a определяет подгруппу G_1 данной группы G_r. Мы назовем u^a компонентами вектора u

группы G_1 в общем векторном поле E_r всех векторов группы. Корни характеристического уравнения (40.2) являются, очевидно, функциями u^a. Для общей системы значений u^a уравнение (40.2) может быть написано в виде:

$$(-1)^r \Delta(u, \rho) = \rho^{\nu_0}(\rho-\rho_1)^{\nu_1}\ldots(\rho-\rho_p)^{\nu_p},$$
$$\nu_0+\nu_1+\ldots+\nu_p = r.$$

В этом случае мы говорим, что ρ_a — *корни* уравнения. Могут существовать отдельные векторы u, для которых совпадают два или более из этих корней. Для того чтобы определить эти векторы, заметим, обозначая через D общий наибольший делитель $\Delta u \frac{\partial \Delta}{\partial \rho}$, что в общем случае уравнение $\frac{\Delta}{D}=0$ имеет $0, \rho_1, \ldots, \rho_p$ простыми корнями. Поэтому, если вектор u таков, что дискриминант $\frac{\Delta}{D}$ равен нулю, то, по крайней мере, два корня равны между собой. Такие векторы назовем *специальными*, а остальные — *регулярными*.

Пусть даны два вектора u^a и v^a, тогда

$$(u^a X_a,\ v^b X_b) f = w^h X_h f, \tag{40.6}$$

где

$$w^h = c^h_{ab} u^a u^b. \tag{40.7}$$

Далее,

$$\eta^i_j(w) = c^i_{hj} w^h = c^i_{hj} c^h_{ab} u^a u^b = (c^h_{bj} c^i_{ah} - c^h_{aj} c^i_{bh}) u^a v^b =$$
$$= \eta^i_h(u)\,\eta^h_j(v) - \eta^i_h(v)\,\eta^h_j(u). \tag{40.8}$$

Отсюда следует, что след матрицы $\eta(w)$, т. е. $\eta^i_i(w)$, равен нулю.

Если t^a — вектор, то $\eta^a_b(u)\,t^b$ можно назвать вектором, преобразованным из t^a с помощью матрицы $\eta(u)$. Предположим, что дано такое подпространство E_m в E_r, что при преобразовании любого вектора из E_m получается вектор из E_m, тогда мы говорим, что E_m инвариантно относительно $\eta(u)$. Если канонические параметры выбраны таким образом, что m векторов, определяющие E_m, имеют компоненты δ^a_p $(p = 1, \ldots, m)$, то

$$\eta^a_b(u)\,\delta^b_p = \lambda^a_q \delta^q_p \quad (p, q = 1, \ldots, m),$$

где λ^q_p — постоянные. Следовательно, $\eta^a_p(u) = 0$ для $a > m$. Пусть векторное пространство E_m инвариантно также относительно $\eta(v)$; тогда, как следует из (40.8), оно инвариантно и относительно $\eta(w)$. Далее, из (40.8) и

$$\eta^a_p(u) = \eta^a_p(v) = 0 \qquad (a > m)$$

следует

$$\eta^p_p(w) = \eta^p_q(u)\,\eta^q_p(v) - \eta^p_q(v)\,\eta^q_p(u) = 0$$
$$(p, q = 1, \ldots, m).$$

Но $\eta^p_p(w)$ является следом минора матрицы $\eta(w)$, действующего в подпространстве E_m. Так как след не зависит от выбора канонических параметров, то

[40.1] *Если $\eta(u)$ и $\eta(v)$ оставляют подпространство инвариантным, то след минора матрицы $\eta(w)$ $(w^e = c^e_{ab} u^a u^b)$, действующего в этом подпространстве, равен нулю.*

Если группа G_r имеет подгруппу G_m и $u^a X_a f$ порождает подгруппу G_1 подгруппы G_m, то u^a называется вектором группы G_m. Если базис в G_r выбран таким образом, что $X_1 f, \ldots, X_m f$ образуют базис подгруппы G_m, то для любого вектора из G_m $u^z = 0$ $(z = m+1, \ldots, r)$. Отсюда и из (16.5) следует, что $\eta^z_t(u) = 0$ для $t = 1, \ldots, m$, и характеристическая матрица Δ для u^a имеет вид:

$$\left\|\begin{array}{c|c} \eta^t_v - \rho\delta^t_v & \eta^t_z \\ \hline 0 & \eta^z_w - \rho\delta^z_w \end{array}\right\| \qquad \begin{pmatrix} t, v = 1, \ldots, m; \\ w, z = m+1, \ldots, r \end{pmatrix}.$$

Так как $\eta^t_v(u) = c^t_{sv} u^s$, где $t, v, s = 1, \ldots, m$, то $\|\eta^t_v(u)\|$ является матрицей подгруппы относительно вектора u. Таким образом,

$$\Delta = \Delta_m \,|\eta^z_w - \rho\delta^z_w|,$$

где Δ_m — характеристическая матрица подгруппы G_m. Мы можем написать

$$(-1)^m \Delta_m = \rho^m - \psi_{m,1}(u)\rho^{m-1} + \ldots + \\ + (-1)^{m-1}\psi_{m,m-1}(u)\rho.$$

Если G_m — инвариантная подгруппа, то, как следует из (31.3), $\eta^z_w(u) = 0$, и мы имеем

$$\Delta = (-1)^{r-m}\rho^{r-m}\Delta_m.$$

В этом случае $\psi_{m,a} = \psi_a$, и нуль является корнем характеристического уравнения, порядка, по крайней мере, $r-m+1$. Таким образом,

[40.2] *Если G_r имеет инвариантную подгруппу порядка m, то характеристическое уравнение группы G_r относительно векторов подгруппы имеет нулевой корень порядка, не меньшего $r-m+1$.*

В частности, так как в этом случае ψ_1 и ψ_2 для Δ и Δ_m равны, то

[40.3] *Если G_m инвариантная подгруппа G_r, то сумма корней характеристического уравнения G_m относительно вектора G_m и сумма их квадратов равны тем же суммам для характеристического уравнения G_r относительно того же вектора.*

Докажем следующую теорему Киллинга[1]):

[40.4] *Коэффициенты $\psi_k(u)$ характеристического уравнения группы являются инвариантами присоединенной группы, т. е. они удовлетворяют системе уравнений*

$$E_a f = 0 \quad (a = 1, \ldots, r). \tag{40.9}$$

Если мы положим

$$\gamma^e_b = \eta^e_b - \rho\delta^e_b,$$

[1]) 1888, 3, стр. 260.

то

$$\begin{aligned}E_a\Delta(u,\rho) &= \eta_a^k \frac{\partial\Delta}{\partial u^k} = \eta_a^k \frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_b^e}\frac{\partial\eta_b^e}{\partial u^k} = \\ &= \eta_a^k c_{kb}^e \frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_b^e} = u^d c_{da}^k c_{kb}^e \frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_b^e} = \\ &= u^d (c_{ab}^k c_{dk}^e + c_{ka}^e c_{db}^k) \frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_b^e} = \\ &= (c_{ab}^k \eta_k^e + c_{ka}^e \eta_b^k) \frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_b^e} = \\ &= (c_{ab}^k \gamma_k^e + c_{ka}^e \gamma_b^k) \frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_b^e}.\end{aligned}$$

Так как

$$\gamma_k^e \frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_b^e} = \delta_k^b\Delta, \quad \gamma_b^k \frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_b^e} = \delta_e^k\Delta,$$

то последний член написанного выше соотношения равен нулю. Таким образом, $E_a\Delta(u,\rho) = 0$, каково бы ни было ρ, и, следовательно, теорема доказана.

Мы уже видели, что функции $\psi_1, \ldots, \psi_{r-1}$ являются однородными функциями от u^α соответственно порядков $1, \ldots, r-1$. Между ними могут существовать соотношения, так что только p из них будут функционально независимы; p называется *рангом группы*. Если ранг матрицы $\|\eta_b^a\|$ равен q, то уравнения (40.9) имеют $r-q$ независимых решений и, следовательно,

$$p \leqslant r - q. \tag{40.10}$$

Но как уже было замечено, если ранг матрицы $\|\eta_b^a\|$ равен q, то уравнение $\Delta(u,\rho) = 0$ имеет нулевой корень порядка, по крайней мере, $r-q$. Таким образом, в качестве следствия из (40.10) получаем:

[40.5] *Ранг группы не превосходит порядка нулевого корня характеристического уравнения.*

Заметим, что когда все ψ_i равны нулю и, следовательно, нуль является корнем порядка r, ранг группы равен нулю.

Так как корни являются функциями ψ_i, то

[40.6] *Ненулевые общие корни характеристического уравнения как функции от u^a являются инвариантами присоединенной группы.* Так как и ψ_i являются функциями корней, то число независимых ψ_i равно числу независимых ненулевых общих корней. Таким образом,

[40.7] *Ранг группы равен числу функционально независимых ненулевых общих корней.*

Пусть $u^a X_a f$ и $v^a X_a f$ — образующие подгруппы G_2 данной группы G_r; согласно (40.6) и (40.7), имеем:

$$c_{ab}^{h}\, u^a u^b = \sigma_2 u^h + \sigma_1 v^b.$$

Если $\sigma_1 \neq 0$, то можно взять $\bar{v}^a = v^a + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} u^a$ в качестве вектора второй образующей, для которого полученное уравнение сведется к

$$(c_{ab}^{h} u^a - \delta_b^h \sigma_1)\, \bar{v}^b = 0,$$

т. е. σ_1 будет ненулевым корнем характеристического уравнения для $\eta_a^b(u)$, и $\bar{v}$ будет инвариантным вектором матрицы $\| \eta_a^b(u) \|$. Аналогично, если $\sigma_2 \neq 0$, то оно является ненулевым корнем характеристического уравнения для $\eta_a^b(v)$. Как следствие этого результата имеем:

[40.8] *Если ранг группы равен нулю, то каждая ее подгруппа G_2 абелева.*

41. Нахождение инвариантных подгрупп. Что коэффициенты ψ_a характеристического уравнения являются инвариантами присоединенной группы, может быть доказано другим способом, имеющим важные следствия.

Если канонические параметры подвергаются линейному однородному преобразованию (12.10), то, как следует из (7.13), константы c_{ij}^{k} ведут себя как компоненты тензора третьего порядка. Следовательно, величины типа $c_{ij}^{j}u^{i}$ и $g_{ij}u^{i}u^{j}$ при таких преобразованиях являются скалярами. Однако, если линейное однородное преобразование является элементом присоединенной группы, то, по теореме [39.2], c_{ij}^{k} одинаковы для обеих систем параметров u^{a} и $\bar{u}^{a}$. Следовательно,

$$c_{ij}^{j}\bar{u}^{i}=c_{ij}^{j}u^{j}, \quad g_{ij}\bar{u}^{i}\bar{u}^{j}=g_{ij}u^{i}u^{j}.$$

Так как любая функция ψ_{a} в (40.2) есть однородная функция от u^{a} с коэффициентами, являющимися функциями c_{ij}^{k}, такими, что ψ_{a} — скаляр, то все эти функции инвариантны относительно преобразований присоединенной группы.

Если некоторая комбинация величин c_{ij}^{k} получена сложением, вычитанием, умножением и свертыванием, то она называется *комитантом* присоединенной группы. Например, коэффициенты при u^{a} в любом из коэффициентов ψ_{a} характеристического уравнения группы являются комитантами. Из теоремы [39.2] следует, что

[41.1] *Комитант инвариантен при всех преобразованиях присоединенной группы.*

Предположим, что система уравнений

$$c_{j\ldots ki}^{h\ldots l}u^{i}=0, \tag{41.1}$$

где $c_{j\ldots ki}^{h\ldots l}$ — комитанты, совместна. Пусть v^{i} — любой вектор группы; если мы положим

$$\bar{u}^{i}=c_{jk}^{i}v^{j}u^{k}, \tag{41.2}$$

то $u^{i}+\bar{u}^{i}\delta t$ будет образом u^{i} при инфинитезимальном преобразовании присоединенной группы, определенном вектором v. Ввиду предыдущей теоремы, уравнение будет иметь место при замене u^{i} на $u^{i}+\bar{u}^{i}\delta t$, откуда

$$c_{j\ldots ki}^{h\ldots l}\bar{u}^{i}=0. \tag{41.3}$$

Из (40.7) следует, что $\bar{u}^{i}$ соответствует коммутатору символов $u^{a}X_{a}f$ и $v^{b}X_{b}f$. Следовательно, если уравнение

(41.1) допускает точно $m-1$ решений, отличных от $\bar{u}^i$, то, так как для любого вектора v группы E_r u^i удовлетворяет (41.3), m решений (41.1) определяют инвариантную подгруппу G_m. Таким образом:

[41.2] *Если уравнения вида* (41.1) *допускают* m *независимых решений, то последние определяют инвариантную подгруппу* G_m.

Рассмотрим уравнения

$$c_{ij}^k u^i = 0, \tag{41.4}$$

которые имеют решения, если ранг матрицы $\|c_{ij}^k\|$, (i обозначает столбцы, а j, k — строки) меньше r. Если ранг этой матрицы равен $r-m$, то группа G_r допускает m центральных подгрупп G_1 (§ 29), определяющих инвариантную подгруппу G_m. Кроме того, G_m абелева и, следовательно, разрешима.

Далее, если $c_{ij}^j \neq 0$, то уравнение

$$c_{ij}^j u^i = 0 \tag{41.5}$$

имеет $r-1$ независимых решений. Таким образом,

[41.3] *Если* $c_{ij}^j \neq 0$, *то группа* G_r *обладает инвариантной подгруппой порядка* $r-1$.

Как следствие, имеем

[41.4] *Для простой группы* $c_{ij}^j = 0$.

Другая важная инвариантная подгруппа определяется из соотношений

$$g_{ij}u^j \equiv c_{ih}^l c_{jl}^h u^j = 0. \tag{41.6}$$

Очевидно, что ее подгруппой является подгруппа группы G_r, определенная уравнениями (41.4), если последняя существует. Так как эта последняя подгруппа инвариантна в G_r, то она является также инвариантной подгруппой подгруппы, определенной уравнениями (41.6).

Инвариантная подгруппа определяется также формулой

$$c_{ijk}u^j = 0, \tag{41.7}$$

где

$$c_{ijk} = c^h_{ij} g_{hk} = c^h_{ij} c^m_{hl} c^l_{km}. \qquad (41.8)$$

Из определения следует, что c_{ijk} кососимметричны по i и j. Что они кососимметричны по j и k, видно из следующего выражения, эквивалентного правому члену равенства (41.8) (в силу соотношений Якоби (7.4)):

$$c^l_{km} (c^h_{li} c^m_{jh} + c^h_{jl} c^m_{ih}) = c^h_{li} (c^m_{jh} c^l_{km} - c^m_{kh} c^l_{jm}).$$

Следовательно c_{ijk} кососимметричны по всем индексам.

42. Разрешимые группы. Пусть G_r разрешима; если присоединенная группа имеет порядок r, то присоединенная группа разрешима, так как для образующих $E_a f$ присоединенной группы имеют место равенства вида (36.1). Если же порядок присоединенной группы равен s $(s<r)$, т. е. если G_r обладает $r-s$ независимыми центральными подгруппами (см. § 29), то мы в качестве образующих присоединенной группы выберем первые s независимых символов $E_a f$, между которыми нет линейной зависимости с постоянными коэффициентами, и обозначим их через $E_t f$. Если мы возьмем любые два оператора этой системы, например $E_t f$ и $E_u f$ $(u>t)$, то $(E_t, E_u) f = c^l_{tu} E_l f$, где, вследствие (36.1), $l<u$. Если значение l не взято из системы t, то $E_l f = a^v_l E_v f$, где a^v_l — постоянные, а v принимает значения системы t, меньшие l. Таким образом,

$$(E_t, E_u) f = d^v_{tu} E_v f,$$

где $u>t$, $v<u$ и d^v_{tu}, самое большее, являются линейными комбинациями (с постоянными коэффициентами) c^b_{tu} при $b \leqslant v$. Следовательно, имеют место условия, аналогичные (36.1), и мы имеем

[42.1]. *Присоединенная группа разрешимой группы разрешима* [1]).

---

[1]) Lie-Scheffers, 1893, 1, стр. 536.

Так как присоединенная группа линейна и однородна, то из теоремы [37.5] получаем следующую теорему Ли[1]):

[42.2] *Если группа G_r разрешима, то в векторном пространстве, представляющем присоединенную группу, существует, по крайней мере, одна последовательность инвариантных подпространств $E_1, \ldots, E_{r-1}$, таких, что любое E_k содержится в E_{k+1}.*

Рассмотрим любое из этих инвариантных подпространств, например E_h. Векторам E_h и E_{h+k} $(k=1, \ldots, r-h)$ соответствуют в группе G_r подгруппы G_h и G_{h+k}. Так как E_{h+k} содержит E_h, G_h является подгруппой G_{h+k}. Кроме того, так как E_h инвариантно при всех преобразованиях присоединенной группы, то, согласно теореме [39.7], G_h является инвариантной подгруппой группы G_r, а, следовательно, и G_{h+k}. Итак мы получили теорему Ли:[2])

[42.3] *Если группа G_r разрешима, то она обладает последовательностью таких подгрупп $G_1, G_2, \ldots, G_{r-1}$, что G_h для любого h является инвариантной подгруппой G_{h+k} для $k=1, \ldots, r-h$.*

Следовательно, образующие группы могут быть выбраны таким образом, что

$$(X_h, X_{h+k})f = c_{h\,h+k}^{l} X_l f \left(\begin{array}{l} h=1, \ldots, r-1; \\ l=1, \ldots, h; \\ k=1, \ldots, r-h \end{array}\right), \qquad (42.1)$$

откуда следует, что

$$c_{ab}^{i}=0 \text{ для } i>a \text{ или } b. \qquad (42.2)$$

Если эти условия выполнены, то

$$\eta_j^k(u) = c_{ij}^k u^i = 0 \text{ для } k>j.$$

Таким образом, элементы матрицы $\|\eta_j^k\|$, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю, и соответственно этому корни характеристического уравнения равны

---

[1]) 1893, I, стр. 536.
[2]) 1893, 1, стр. 537.

$u^i c^1_{i1}, \ldots, u^i c^r_{ir}$. Так как эти корни являются инвариантами присоединенной группы, то

$$c^a_{ij} u^i \frac{\partial}{\partial u^a}(c^e_{ke} u^k) = c^a_{ij} u^i c^e_{ae} = 0 \quad \text{(по } e \text{ не суммируется).}$$

Следовательно,

$$c^a_{ij} u^i v^j c^e_{ae} = 0 \qquad \text{(по } e \text{ не суммируется),}$$

и так как $c^a_{ij} u^i v^j$ является вектором производной группы, и любой вектор производной группы линейно выражается через такие векторы, то

[42.4] *Для разрешимой группы все корни характеристического уравнения относительно любого вектора производной группы равны нулю.* Так как $g_{ij} u^i u^j$ равна сумме квадратов корней характеристического уравнения относительно $\eta(u)$, то мы доказали необходимость условия, содержащегося в следующей теореме Картана[1]):

[42.5] *Для того чтобы группа была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы $g_{ij} u^i u^j$ равнялось нулю для любого вектора производной группы.*

Достаточность условия теоремы мы покажем в § 44.

Рассуждением по индукции докажем следующую теорему Энгеля:[2])

[42.6] *Если все корни характеристического уравнения относительно произвольного вектора группы равны нулю, то группа разрешима.*

Предполагая, что данная группа имеет разрешимую подгруппу G_m, выберем образующие группы G_r таким образом, чтобы $X_1 f, \ldots, X_m f$ порождали G_m. Через E_m обозначим векторное пространство группы G_m, а через

---

[1]) 1894, 1, стр. 47.

[2]) Lie-Engel, 2, стр. 774; Killing, 1888, 3, стр. 289.

$\bar{E}_{r-m}$ — проекцию E_r вдоль E_m. Так как G_m разрешима, то преобразования присоединенной группы, соответствующие векторам E_m, оставляют инвариантным E_m и, согласно теореме § 37, также, по крайней мере, одно направление в $\bar{E}_{r-m}$. E_m и это направление порождают подпространство E_{m+1}, которое будет инвариантно относительно преобразований присоединенной группы соответствующих векторам E_{m+1} и, следовательно, эти векторы представляют подгруппу G_{m+1} группы G_r. В соответствии с результатами § 37, используя вектор u из E_m и вектор v из E_{m+1}, не лежащий в E_m, мы получим

$$c_{ij}^k u^i v^j = \rho(u) v^k \quad (\mathrm{mod}\ E_m),$$

где $\rho(u)$ — корень характеристического уравнения G_r относительно u, по предположению, равный нулю. Таким образом, для всех векторов u из E_m

$$c_{ij}^k u^i v^j = 0, \quad (\mathrm{mod}\ E_m)$$

и, следовательно, G_m является инвариантной подгруппой G_{m+1}. Так как подгруппа G_1 разрешима, то можно повторным применением полученного результата доказать существование последовательности подгрупп вида (35.5), где каждая подгруппа есть инвариантная подгруппа предыдущей. Таким образом теорема доказана.

43. Корневые пространства матрицы $\eta(u_0)$ регулярного вектора u_0. Классификация групп Ли основывается на канонической форме, к которой приводятся структурные константы соответствующим выбором базиса. Это связано с изучением матрицы $\|\eta_b^a(u_0)\| = \|c_{ib}^a u_0^i\|$, где u_0^i — регулярный вектор группы, т. е. вектор, для которого корни $0, \rho_1, \ldots, \rho_p$ (40.1) различны. Из § 38 следует, что параметры u^a можно подвергнуть такому линейному однородному преобразованию, что в новой координатной системе матрица $\|\eta_b^a(u_0)\|$ примет вид (здесь верхний индекс обозначает строки, а нижний — столбцы):

$$
\left|\begin{array}{ccccc}
\boxed{M_0} & & & & 0 \\
& \boxed{M_1} & & & \\
& & \boxed{M_2} & & \\
& & & \ddots & \\
0 & & & & \boxed{M_p}
\end{array}\right|,
$$

$$
M_\alpha = \left|\begin{array}{ccccccc}
\rho_\alpha & \varepsilon_{\alpha 1} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & \rho_\alpha & \varepsilon_{\alpha 2} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
& & & & 0 & \rho_\alpha & \varepsilon_{\alpha[\nu_\alpha - 1]} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \rho_\alpha
\end{array}\right|, \tag{43.1}
$$

где $\rho_0 = 0$ и $\varepsilon_{\alpha i}$ равны нулю или единице. Каждому корню соответствует векторное подпространство пространства E_r размерности, равной порядку корня, называемое *корневым пространством* этого корня. Если для некоторой системы параметров мы обозначим через $e_1, \ldots, e_{\nu_0}$ фундаментальные векторы E_0 нулевого корня, через $e_{\nu_0+1}, \ldots, e_{\nu_0+\nu_1}$ — фундаментальные векторы корня ρ_1 и так далее, то в системе параметров, для которой имеет место (43.1), эти векторы имеют компоненты δ^i_a, где a принимает значения, соответствующие данному минору. Отсюда мы получаем, что если e_a и e_{a+1} — последовательные фундаментальные векторы корневого пространства корня ρ_α (a принимает значения, соответствующие матрице M_α), то (§ 38)

$$\eta(u_0)\, e_{a+1} = \rho_\alpha e_{a+1} + \varepsilon_{\alpha\beta} e_a,$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}$ есть ε из строки вектора e_a. Это векторное уравнение имеет место для любой системы параметров. Так как $\eta^a_k(u_0)u^b_0 = 0$, то u_0 можно считать первым фундаментальным вектором корневого пространства E_0.

Предположим, что e^i_a и e^i_b — фундаментальные векторы корневых пространств E_α и E_β, одинаковых или различных, т. е. a и b принимают значения, соответствующие этим корневым пространствам. Тогда $e^i_a X_i f$ и $e^i_b X_i f$ суть образующие двух подгрупп G_1 группы G_r.

Мы имеем:

$$(e^i_a X_i,\ e^j_b X_j) f = u^k_{ab} X_k f,$$

где

$$u^k_{ab} = c^k_{ij} e^i_a e^j_b$$

и, следовательно, u^k_{ab} являются компонентами некоторого вектора E_r, если только они не все равны нулю. Разыщем подпространство этого вектора. Имеем:

$$\eta^l(u_0)u^k_{ab} = c^l_{hk} u^h_0 c^k_{ij} e^i_a e^j_b = (c^k_{jh} c^l_{ki} +$$

$$+ c^k_{hi} c^l_{kj}) u^h_0 e^i_a e^j_b = \eta^k_j(u_0) e^j_b c^l_{ik} e^i_a + \eta^k_i(u_0) e^i_a c^l_{kj} e^j_b =$$

$$= (\rho_\beta e^k_b + \varepsilon_{\beta c} e^k_{b-1}) c^l_{ik} e^i_a + (\rho_\alpha e^k_a + \varepsilon_{\alpha d} e^k_{a-1}) c^l_{kj} e^j_b =$$

$$= (\rho_\alpha + \rho_\beta) u^l_{ab} + \varepsilon_{\beta c} u^l_{ab-1} + \varepsilon_{\alpha d} u^l_{a-1b}.$$

Если e_a — первый вектор E_α, то $\varepsilon_{\alpha d} = 0$ (оно может быть нулем и в других случаях). Если же e_a не первый вектор E_α, то u_{a-1b} — вектор того же вида, что и u_{ab}. Таким образом, если мы напишем полученное уравнение в виде:

$$[\eta^l_k(u_0) - (\rho_\alpha + \rho_\beta)\delta^l_k] u^k_{ab} = \varepsilon_{\beta c} u^l_{ab-1} + \varepsilon_{\alpha d} u^l_{a-1b},$$

то получим:

$$[\eta^l_k(u_0) - (\rho_\alpha + \rho_\beta)\delta^l_k]^2 u^k_{ab} = \varepsilon_{\beta c}\varepsilon_{\beta c_1} u^l_{ab-2} + (\varepsilon_{\beta c}\varepsilon_{\alpha d_1} +$$

$$+ \varepsilon_{\beta c_2}\varepsilon_{\alpha d}) u^l_{a-1\,b-1} + \varepsilon_{\alpha d}\varepsilon_{\alpha d_2} u^l_{a-2\,b}.$$

Следовательно,

$$[\eta^l_k(u_0) - (\rho_\alpha + \rho)\delta^l_k]^p u^k_{ab} = 0,$$

где $p \leqslant \nu_\alpha + \nu_\beta$, так как последней операцией является операция над первыми векторами корневых пространств, дающая ε, равные нулю. Если, вместо фундаментальных векторов e_a, e_b, мы возьмем любые векторы E_α и E_β, то получим аналогичный результат, так как любой такой вектор является линейной комбинацией (с постоянными коэффициентами) фундаментальных векторов корневых пространств. Отсюда и из теорем [38.2] и [38.3] мы получаем [1])

[43.1]. *Если u_α и u_β — векторы корневых пространств E_α и E_β, различных или одинаковых, то величины*

$$u^k_{\alpha\beta} = c^k_{ij} u^i_\alpha u^j_\beta, \quad u_{\alpha\beta} \equiv (u_\alpha, u_\beta) \tag{43.2}$$

равны нулю, если $\rho_\alpha + \rho_\beta$ не корень; если они не равны нулю, то $\rho_\alpha + \rho_\beta$ корень, и эти величины являются компонентами вектора корневого пространства этого корня. Кроме того, если $\rho_\alpha + \rho_\beta$ корень, то этот вектор, который может быть равен нулю, является вектором корневого пространства этого корня.

Выражая этот результат другими словами, мы имеем:

[43.2] *Если матрица $\eta(u_0)$ вектора u_α корневого пространства E_α действует на вектор E_β, то получающийся вектор, если он не равен нулю, является вектором корневого пространства корня $\rho_\alpha + \rho_\beta$.*

В частности, если u_α и u_β — векторы E_0, то (u_α, u_β) — также вектор E_0. Таким образом,

[43.3] *Образующие G_r, соответствующие векторам корневого пространства E_0 матрицы $\eta(u_0)$, порождают подгруппу группы G_r.*

Мы обозначим эту подгруппу через U.

Далее, если u — вектор E_0 и u_α — вектор любого другого корневого пространства E_α, то (u_α, u_β) является вектором E_α, т. е. корневые пространства матрицы $\eta(u)$ те же, что и матрицы $\eta(u_0)$. Следовательно, $\eta(u)$, действуя на вектор E_α, дает вектор этого же корневого

[1]) Cartan, 1894, 1, стр. 41; Weyl, 1926, 2, стр. 35.

пространства. В специальной системе параметров, соответствующей (43.1), фундаментальные векторы E_α имеют компоненты δ^i_a, где a принимает значения, соответствующие E_α. Тогда $\eta^i_j(u)\delta^j_a = \lambda^b_a \delta^i_b$, где λ^b_a — постоянные, а b принимает значения, соответствующие E_α. Из этих уравнений следует, что $\eta^i_a(u) = \lambda^b_a \delta^i_b$ и, следовательно, $\eta^i_a(u) = 0$, если i не принимает тех значений, которые пробегает a. Таким образом, матрица $\eta(u)$ состоит только из главных миноров, и каждый минор имеет тот же порядок, что и соответствующий минор $\eta(u_0)$, но никакие элементы этих миноров не должны быть нулями. Итак, матрица $\eta(u)$ имеет вид (43.1), где теперь

$$M_\alpha = \left| \begin{matrix} \eta^{a+1}_{a+1} & \eta^{a+1}_{a+2} & \ldots & \eta^{a+1}_{a+\nu_\alpha} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \eta^{a+\nu_\alpha}_{a+1} & \eta^{a+\nu_\alpha}_{a+2} & \ldots & \eta^{a+\nu_\alpha}_{a+\nu_\alpha} \end{matrix} \right| . \qquad (43.3)$$

Соответственно этому, характеристический детерминант $\eta(u)$ равен произведению характеристических детерминантов этих главных миноров, и порядок любого детерминанта равен порядку соответствующего корневого пространства. Таким образом, корни уравнения, полученного приравниванием нулю характеристического детерминанта матрицы M_α, являются общими корнями уравнения (40.2) и, следовательно, все эти корни равны между собой. Действительно, предположим, что два из них различны, так что уравнение имеет вид $(\rho - \rho_\alpha(u))^\mu (\rho - \bar{\rho}_\alpha(u))^\nu = 0$. Но когда u заменено на u_0, детерминант равен $(\rho - \rho_\alpha(u_0))^{\nu_\alpha}$ и, следовательно, $\rho_\alpha(u_0) = \bar{\rho}_\alpha(u_0)$, что противоречит предположенной регулярности вектора u_0. Таким образом, для любого вектора u подгруппы U характеристические детерминанты соответствующих миноров $\eta(u)$ имеют вид:

$$\rho^{\nu_0}, \ (\rho - \rho_1(u))^{\nu_1}, \ \ldots, \ (\rho - \rho_p(u))^{\nu_p}. \qquad (43.4)$$

Заметим, что если u — специальный вектор, то один или более корней совпадают. Однако векторы, соответствующие каждому минору, во всех случаях одни и те же. Но мы говорим о них, как о векторах корневых пространств матрицы $\eta(u)$ только тогда, когда u регулярен. Соответственно этому:

[43.4] *Корневые пространства матрицы $\eta(u)$, где u — регулярный вектор подгруппы U, те же самые, что и матрицы $\eta(u_0)$.*

Так как след матрицы M_α равен $\nu_\alpha\rho_\alpha$, то

$$\nu_\alpha\rho_\alpha(u) = \eta_a^a(u) = c_{ba}^a u^b \text{ (по } \alpha \text{ не суммируется)}, \qquad (43.5)$$

где a принимает значения, соответствующие корневому пространству E_α, а b принимает значения $1, \ldots, \nu_0$, так как вектор u является линейной комбинацией векторов с компонентами δ_b^i $(b = 1, \ldots, \nu_0)$. Таким образом,

[43.5] *Каждый ненулевой корень характеристического уравнения матрицы $\eta(u)$ является линейной однородной функцией компонент u*[1]*.*

Между прочим, если (u, u_a) равно нулю, где u_a — вектор корневого пространства E_α, u — вектор подгруппы U, то u не регулярен. Действительно, если u был бы регулярным вектором, то u_a был бы вектором его нулевого корневого пространства, которое в этом случае было бы размерности больше ν_0. Следовательно,

[43.6) *Если $\eta(u)$, где u регулярный вектор подгруппы U, действует на вектор некоторого корневого пространства, то получающийся вектор принадлежит этому же корневому пространству.*

Таким образом, теорема [43.1] имеет место для матрицы $\eta(u)$, где u — любой регулярный вектор подгруппы U.

Так как корни характеристического уравнения матрицы M_0 равны нулю, то, вследствие теоремы [42.6], имеем:

[43.7] *Подгруппа U, определенная некоторым регулярным вектором группы G_r, разрешима.*

---

[1]) Cartan, 1894, 1, стр. 38; Weyl, 1926, 2, стр. 358.

Так как U разрешима, ее производная группа является либо единицей, либо некоторой инвариантной подгруппой U. Векторы этой подгруппы, если она существует, суть линейные комбинации векторов вида $\bar{u}=(u, u')$, где u и u' — векторы E_0. Так как каждое корневое пространство инвариантно относительно $\eta(u)$ и $\eta(u')$, то слёд минора $\eta(\bar{u})$ для корневого пространства любого корня, согласно теореме [40.1], равен нулю, т. е. $\nu_\alpha\rho_\alpha(\bar{u})=0$ (по α не суммируется) и, следовательно, все корни равны нулю. Таким образом,

• [43.8] *Характеристическое уравнение группы относительно вектора производной группы подгруппы U имеет вид* $\rho^r=0$ [1]).

44. Каноническая форма матрицы $\eta(\mathrm{u})$. Критерий Картана разрешимости группы. Так как подгруппа U разрешима, то соответствующая ей подгруппа присоединенной группы также разрешима. Вследствие теоремы [37.5], если преобразования этой подгруппы применить к какому-нибудь корневому пространству, например, пространству корня ρ_α, то существует инвариантное E_1, которое в свою очередь содержится в инвариантном E_2, и так далее. Если мы первое из них возьмем в качестве первого фундаментального направления корневого пространства, вектор, определяющий вместе с ним инвариантное E_2, в качестве второго фундаментального вектора и т. д., то главный минор матрицы $\eta(u)$, соответствующий корневому пространству E_α, примет вид (см. § 37):

$$\begin{vmatrix} \rho_\alpha \cdots\cdots\cdots \\ 0 \;\; \rho_\alpha \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdots\cdots\cdots \rho_\alpha \end{vmatrix}, \qquad [44.1]$$

где элементы, стоящие выше главной диагонали, не играют роли в наших рассуждениях.

1) Cartan, 1894, 1, стр. 42.

Так как векторные пространства $E_1, E_2, \ldots$ в E_α, согласно предыдущему результату, инвариантны относительно подгруппы присоединенной группы, соответствующей подгруппе U, то они инвариантны относительно любой однопараметрической группы этой подгруппы, вектор которой регулярен или специален. Мы уже видели (§ 43), что, если u_α — любой вектор корневого пространства E_α и $(\bar{u}, u_\alpha) = 0$, то $\bar{u}$ — специальный вектор подгруппы U. Пусть это условие выполнено для всех векторов u_α этого корневого пространства. В частности, оно имеет место для первого фундаментального вектора e_α. Для регулярного вектора u из U

$$(u, e_\alpha) = \rho_\alpha(u)\, e_\alpha.$$

Так как по предположению $(\bar{u}, e_\alpha) = 0$ и вектор e_α независим от u, то $\rho_\alpha(\bar{u}) = 0$. Таким образом,

[44.1] *Если $\bar{u}$ — такой вектор подгруппы U, что $(\bar{u}, u_\alpha) = 0$ для всех векторов корневого пространства E_α, то $\rho_\alpha(\bar{u}) = 0$, т. е. $\bar{u}$ — специальный вектор U.*

Если $e', e'', \ldots, e^{(\nu_\alpha)}$ — фундаментальные векторы корневого пространства корня ρ_α, то (см. § 37)

$$(\eta(u) - I\rho_\alpha)\, e' = 0, \quad (\eta(u) - I\rho_\alpha)^2 e'' = 0, \ \ldots,$$
$$(\eta(u) - I\rho_\alpha)^{\nu_\alpha} e^{(\nu_\alpha)} = 0.$$

Эти уравнения эквивалентны следующим:

$$e' = \eta(u)\, \rho_\alpha^{-1} e',$$
$$e'' = \eta(u)\, \rho_\alpha^{-2}\, (2\rho_\alpha - \eta(u))\, e'' = \eta(u)\, u''_\alpha,$$
$$e''' = \eta(u)\, \rho_\alpha^{-3}\, (3\rho_\alpha^2 - 3\rho_\alpha \eta(u) + \eta^2(u))\, e''' = \eta(u)\, u'''_\alpha,$$

где $u''_\alpha, u'''_\alpha, \ldots$ — векторы корневого пространства E_α. Следовательно, для любого вектора корневого пространства, т. е. для линейной комбинации (с постоянными коэффициентами) векторов $e', e'', \ldots, e^{(\nu_\alpha)}$ из правых частей написанных уравнений, мы найдем такой вектор корневого пространства, что при действии на него матрицы $\eta(u)$ получается данный вектор. Таким образом, мы получили следующее обращение теоремы [43.6]:

[44.2] *Если* u_α — *вектор корневого пространства* E_α, *то существует единственный вектор* $\bar{u}_\alpha$ *этого же корневого пространства, такой, что* $u_\alpha = \eta(\bar{u})\, u_\alpha$, *где* u — *любой (наперед заданный) регулярный вектор подгруппы* U.

Векторы, определенные формулами (43.2), являются, очевидно, векторами производной группы G_r. Из теоремы [43.2] следует, что если такой вектор принадлежит корневому пространству E_0, то он получается либо из двух векторов E_0, либо из векторов двух корневых пространств, соответствующих корням, отличающихся только знаком. Обозначим два таких корня через $\rho_\alpha(u)$ и $\rho_{\alpha'}(u)$, а векторы их пространств соответственно через u_α и $u_{\alpha'}$; тогда $\bar{u} = (u_\alpha, u_{\alpha'})$ — вектор E_0. Характеристическое уравнение матрицы $\eta(\bar{u})$ имеет те же корневые пространства, что и $\eta(u)$, а корни пространств u_α и $u_{\alpha'}$ отличаются знаком, потому что они соответственно равны $\rho_\alpha(\bar{u})$ и $\rho_{\alpha'}(\bar{u})$.

Пусть $\rho_\beta(u)$ — любой корень характеристического уравнения $\eta(u)$, отличный от ρ_α и $\rho_{\alpha'}$. Действуя матрицей $\eta(u_\alpha)$ на любой вектор u_β корневого пространства E_β корня ρ_β, мы получаем в соответствии с теоремой [43.1] вектор или равный нулю, или являющийся вектором корневого пространства корня $\rho_\alpha + \rho_\beta$, если $\rho_\alpha + \rho_\beta$ корень. Точно так же, действуя матрицей $\eta(u_{\alpha'})$, мы получаем нулевой вектор, если $\rho_\beta - \rho_\alpha$ не корень. Так как

$$\eta(\bar{u}) = \eta(u_\alpha)\,\eta(u_{\alpha'}) - \eta(u_{\alpha'})\,\eta(u_\alpha),$$

то из сделанных замечаний следует, что если ни $\rho_\beta + \rho_\alpha$, ни $\rho_\beta - \rho_\alpha$ не являются корнями характеристического уравнения матрицы $\eta(u)$, то $\eta(\bar{u})$ превращает любой вектор корневого пространства E_β в нуль. Следовательно, по теореме [44.1], $\rho_\beta(\bar{u}) = 0$ и $\bar{u}$ — специальный вектор подгруппы U.

Рассмотрим теперь возможную последовательность корней

$$\begin{gathered}\rho_\beta - \mu\rho_\alpha, \ldots, \rho_\beta - 2\rho_\alpha, \rho_\beta - \rho_\alpha, \rho_\beta,\\ \rho_\beta + \rho_\alpha, \ldots, \rho_\beta + \lambda\rho_\alpha\end{gathered} \tag{44.2}$$

(предположив, что $\rho_\beta + (\lambda + 1)\rho_\alpha$ и $\rho_\beta - (\mu + 1)\rho_\alpha$ не являются корнями) и обозначим через $\bar{E}_\beta$ совокупность корневых пространств этих корней. Тогда $\bar{E}_\beta$ инвариантно относительно $\eta(u_\alpha)$ и $\eta(u_{\alpha'})$. Следовательно, согласно теореме [40.1], след матрицы $\eta(\bar{u})$ в $\bar{E}_\beta$ равен нулю. Но для корневого пространства любого корня след равен произведению корня на его порядок. Следовательно, след имеет вид $a\rho_\beta(\bar{u}) + b\rho_\alpha(\bar{u})$, где a и b целые. Таким образом,

[44.3] *Если u_α и $u_{\alpha'}$ — векторы двух корневых пространств, корни ρ_α и $\rho_{\alpha'}$ которых отличаются только знаком, и если $\bar{u} = (u_\alpha, u_{\alpha'})$ — общий вектор U, то $\rho_\beta(\bar{u})$ является рациональным кратным $\rho_\alpha(\bar{u})$.*

Теперь мы в состоянии доказать достаточность критерия Картана разрешимости группы (теорема [42.5]). Мы уже знаем, что, если вектор $\bar{u}$ производной группы G'_{r_1} группы G_r лежит в E_0, то он является линейной комбинацией векторов (u, u'), где u и u' лежат в E_0, и векторов $(u_\alpha, u_{\alpha'})$, где u_α и $u_{\alpha'}$ — векторы корневых пространств, корни которых отличаются только знаком. Характеристическое уравнение относительно векторов первого типа имеет, согласно теореме [43.8], только нулевые корни. Ненулевые корни характеристического уравнения относительно векторов второго типа являются рациональными кратными одного из них. Таким образом, если $g_{ij}u^iu^j$ (т. е. сумма квадратов корней) равна нулю для вектора второго типа, то все корни равны нулю. Из (43.5) следует, что любой ненулевой корень, соответствующий вектору u, являющегося линейной комбинацией векторов E_0, равен сумме корней того же корневого пространства для различных векторов комбинации. Таким образом, если $g_{ij}u^iu^j$ равно нулю для всех векторов производной группы, входящих в E_0, то все корни характеристического уравнения относительно любого такого вектора равны нулю.

Так как, согласно теореме [42.6], группа G_r разрешима, если все корни ее характеристического уравнения равны нулю, то мы должны рассмотреть только случай, когда некоторые корни не равны нулю. В этом случае для общего вектора u_0 существует некоторая система корневых пространств. Если первая производная группа G'_{r_1} совпадает с G_r, то каждый вектор E_0 является вектором производной группы. $g_{ij}u^iu^j$ исчезает для любого такого вектора, т. е., по предыдущему, все корни соответствующего характеристического уравнения равны нулю, в частности и соответствующие вектору u_0. Это противоречит предположению, что не все корни равны нулю. Таким образом, G'_{r_1} является собственной инвариантной подгруппой G_r.

Так как G'_{r_1} — инвариантная подгруппа G_r, то (если образующие этой подгруппы выбраны так же, как в § 40), сумма квадратов корней характеристического уравнения G'_{r_1} для общего вектора G'_{r_1} равна сумме квадратов корней характеристического уравнения группы G_r для того же вектора. Следовательно, мы можем применить к G'_{r_1} и второй производной группе G''_{r_1} прежнее рассуждение и получить, что G''_{r_1} является собственной подгруппой G'_{r_1}. Продолжая процесс, мы получим последовательность производных групп, кончающуюся единицей. Следовательно, G_r разрешима.

Этот результат следует только из того, что G'_{r_1} собственная инвариантная подгруппа G_r. Не нужно предположение, что G'_{r_1} производная группа G_r. Таким образом, как следствие критерия Картана, мы получаем [1]:

[44.4] *Для того, чтобы инвариантная подгруппа G_m группы G_r была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы $g_{ij}u^iu^j$ исчезала для всех векторов производной группы подгруппы G_m.*

---

[1]) 1894, 1, стр. 47.

Из этой теоремы непосредственно следует, что инвариантные подгруппы (если они существуют), определяемые уравнениями (44.4) и (41.6), разрешимы. Действительно, в любом случае $g_{ij}u^iu^j$ равно нулю для всех векторов подгруппы и, следовательно, для векторов ее производной группы. Рассмотрим теперь инвариантную подгруппу, определяемую уравнениями (41.7), т. е.

$$c_{ijk}u^i = 0, \quad c_{ijk} = c^l_{ij}g_{lk}. \tag{44.3}$$

Если u_1 и u_2 — два вектора этой подгруппы, то

$$g_{ih}\, c^h_{jk}\, u^j_1\, u^k_2 = g_{ih}\bar{u}^h = 0.$$

Так как $\bar{u}$ — вектор производной группы этой подгруппы, то из только что доказанной теоремы заключаем, что эта подгруппа разрешима. Между прочим, либо подгруппа (44.3) абелева, либо ее производная группа является подгруппой, определяемой уравнениями (41.6).

45. Полупростые группы. Группа, не содержащая разрешимых инвариантных подгрупп, кроме единичной, называется *полупростой* группой. Так как простая группа (§ 31) не имеет инвариантных подгрупп, отличных от самой себя и единицы, то простая группа порядка, большего единицы, полупроста, так что следующие ниже теоремы приложимы также к простым группам.

Так как подгруппа (41.4), если она существует, инвариантна и разрешима, то полупростая группа не может иметь центральных подгрупп G_1. Далее, подгруппа (41.6), если она существует, инвариантна и разрешима (§ 44), поэтому для полупростой группы ранг матрицы $\|g_{ij}\|$ равен r. Картан показал, что это условие также достаточно. Действительно, если G_r обладает разрешимой инвариантной подгруппой G_m, то последняя либо сама абелева, либо одна из ее производных подгрупп абелева. Так как все производные подгруппы G_m, согласно теореме [35.5], суть инвариантные подгруппы группы G_r, то в любом случае существует инвариантная абелева подгруппа G_r. Пусть символами этой подгруппы будут $X_{pf}\,(p = 1, 2, \ldots, t)$.

Тогда (см. (31.3)) $c^h_{pa}=0$ для $a=1, \ldots, r$ и $h>t$, поэтому

$$g_{ip}=c^l_{ik}c^k_{pl}=c^l_{iq}c^q_{pl}=c^s_{iq}c^q_{ps} \quad \begin{pmatrix} i, k, l=1, \ldots, r; \\ p, q, s=1, \ldots, t \end{pmatrix}.$$

Но $c^q_{ps}=0$, так как группа абелева и, следовательно, ранг матрицы $\|g_{ij}\|$ меньше r. Мы получили теорему Картана [1]:

[45.1] *Для того, чтобы группа была полупроста, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы* $\|g_{ij}\|$ *был равен* r.

Если ранг матрицы $\|g_{ij}\|$ равен r, то величины g_{ij} могут быть использованы для введения метрики в векторное пространство E_r; тогда можно будет говорить о длине векторов и об углах между ними. Например, если для двух векторов u и v $g_{ij}u^i v^j=0$, то мы говорим, что они *ортогональны*. Точно так же, если $g_{ij}u^i u^j=0$, то мы скажем, что u — *нуль-вектор*. Нуль-вектор сам себе ортогонален (см. § 47).

Как следствие предыдущего, легко доказать теорему

[45.2] *Полупростая группа является прямым произведением системы простых групп, представители которых в пространстве* E_r *попарно ортогональны*.

Теорема тривиальна, когда группа проста. Если группа полупроста, то она обладает, по крайней мере, одной инвариантной неразрешимой подгруппой. Если она имеет несколько таких подгрупп, то существует, по крайней мере, одна инвариантная группа $G_p (p<r)$, не содержащаяся в инвариантной подгруппе, отличной от G_r. Здесь $p>1$, так как иначе группа G_r не была бы полупростой, имея инвариантную подгруппу G_1, которая разрешима. Пусть $u_a (a=1, \ldots, p)$ будут p независимыми векторами, представляющими G_p, и пусть E_p — соответствующее векторное пространство. Уравнение

$$g_{ij}u^i v^j=0$$

[1] 1894, 1, стр. 52.

определяет $r-p$ независимых векторов, ортогональных E_p, порождающих пространство E_{r-p}, ортогональное E_p. Так как g_{ij} — инвариант присоединенной группы, и E_p инвариантно, то E_{r-p} также инвариантно и, следовательно, представляет инвариантную подгруппу G_{r-p}. E_p и E_{r-p} имеют общий вектор и только тогда, когда $g_{ij}u^i u^j=0$. В этом случае, согласно теореме [31.3], G_p и G_{r-p} имеют общую инвариантную подгруппу группы G_r, которая разрешима, как следует из теоремы [44.4]. Это противоречит предположению, что G_r полупроста. Таким образом, G_r является прямым произведением G_p и G_{r-p}. Кроме того, G_{r-p} проста, иначе она содержала бы инвариантную подгруппу, произведение которой с G_p было бы инвариантной подгруппой G_r, содержащей G_p, что противоречит выбору последней.

Так как G_p и G_{r-p} инвариантные подгруппы G_r и не имеют общих подгрупп (кроме единичной), то выбрав $X_h f$ $(h=1, \ldots, p)$ базисом G_p, а $X_s f$ $(s=p+1, \ldots, r)$ базисом G_{r-p}, имеем (§ 33):

$$c_{hk}^{s}=0,\quad c_{st}^{h}=0,\quad c_{hs}^{a}=0\quad \left(\begin{array}{l} a=1, \ldots, r; \\ h, k=1, \ldots, p; \\ s, t=p+1, \ldots, r \end{array}\right).$$

Следовательно,

$$g_{ks}=c_{ka}^{b}c_{sb}^{a}=c_{kh}^{b}c_{sb}^{h}=c_{kh}^{l}c_{sl}^{h}=0,$$

$$g_{hk}=c_{hl}^{m}c_{km}^{l}\quad (h, k, l, m=1, \ldots, p).$$

Из первых уравнений следует, что детерминант $|g_{ab}|$ $(a, b=1, \ldots, r)$ равен произведению детерминантов $|g_{hk}|$ и $|g_{st}|$ и, следовательно, оба эти детерминанта отличны от нуля. Отсюда и из вторых уравнений следует, что G_p полупроста. Если она проста, теорема доказана, если нет, то, применяя прежние рассуждения к G_p, в конце концов докажем теорему.

Рассмотрим любой вектор u подгруппы U и вектор u_α корневого пространства E_α. Из теоремы [44.2] следует, что существует такой вектор $\bar{u}_\alpha$ этого корневого пространства, что $\eta(u)\bar{u}_\alpha = u_\alpha$. Таким образом,

$$g_{ij}u^i u^j_\alpha = g_{ij}\, u^i c^j_{kl}\, u^k \bar{u}^l_\alpha = c_{kli}\, u^i u^k \bar{u}^l_\alpha = 0,$$

ибо c_{kli} кососимметричны по всем индексам. Соответственно этому,

[45.3] *Для полупростой группы векторы любого корневого пространства E_α ортогональны ко всем векторам E_0.*

Если u_β — вектор корневого пространства, отличного от E_0, то

$$g_{ij}\, u^i_\alpha\, u^j_\beta = g_{ij} c^i_{kl}\, u^k \bar{u}^l_\alpha\, u^j_\beta = c_{klj} u^k \bar{u}^l_\alpha u^j_\beta = c_{kjl} u^l \bar{u}^k_\alpha\, u^j_\beta =$$

$$= g_{il}\, u^l\, c^i_{kj} \bar{u}^k_\alpha u^j_\beta = g_{il} u^l (\bar{u}_\alpha,\ u_\beta)^i. \qquad (45.1)$$

Если $\rho_\alpha + \rho_\beta$ не корень, то $(\bar{u}_\alpha, u_\beta) = 0$ (§ 43), следовательно, u_α и u_β ортогональны. Если $\rho_\alpha + \rho_\beta$ — корень, например $\rho_\gamma \neq 0$, то результат, именно $g_{il} u^l u^i_\gamma$, равен нулю, согласно теореме [45.3]. Рассмотрим, наконец, случай, когда $\rho_\beta = -\rho_\alpha$, в этом случае ρ_β обозначим, как ранее, через $\rho_{\alpha'}$. Если в этом случае $g_{ij} u^i_\alpha u^j_{\alpha'} = 0$ для любого вектора $E_{\alpha'}$, то $g_{ij}\, u^i_\alpha v^j = 0$, где v^j — любой вектор E_r, поскольку в нашем рассуждении u_α и u_β могли быть векторами одного и того же корневого пространства. Таким образом, $g_{ij} u^i_\alpha = 0$, что невозможно, так как ранг $\|g_{ij}\|$ равен r. Следовательно,

[45.4] *Дана полупростая группа. Если ρ_α — корень, то $-\rho_\alpha (\equiv \rho_{\alpha'})$ также есть корень, и для любого вектора u_α корневого пространства E_α существует такой вектор $u_{\alpha'}$ корневого пространства $E_{\alpha'}$, что $g_{ij} u^i_\alpha u^j_{\alpha'} \neq 0$. Векторы любых двух различных корневых пространств ортогональны, если соответствующие корни не отличаются только знаком.*

Так как фундаментальные векторы каждого ненулевого пространства ортогональны всем фундаментальным векторам E_0, то полагая

$$\bar{g}_{ij} = g_{kl} e^k_i e^l_j, \qquad (45.2)$$

имеем:

$$\bar{g}_{ap} = 0 \quad (a = 1, \ldots, \nu_0;\ p = \nu_0 + 1, \ldots, r). \tag{45.3}$$

Если мы определим величины $\bar{g}^{ij}$ соотношениями

$$\bar{g}^{ij} g_{jk} = \delta^i_k, \tag{45.4}$$

то получим:

$$\bar{g}^{ap} = 0. \tag{45.5}$$

Ссылаясь на (43.5) и полагая

$$v_{\alpha a} = \frac{c^b_{ab}}{\nu_\alpha}, \quad v_{\alpha p} = 0 \quad \begin{pmatrix} a = 1, \ldots, \nu_0; \\ p = \nu_0 + 1, \ldots, r \end{pmatrix}, \tag{45.6}$$

мы находим (поскольку $\rho_\alpha(u)$ при изменении базиса является скаляром, а u — контравариантным вектором), что $v_{\alpha i}$ будет ковариантным вектором. Положим

$$v^i_\alpha = \bar{g}^{ij} v_{\alpha j}; \tag{45.7}$$

тогда v^i_α будут контравариантными компонентами того же вектора. Так как, вследствие (45.5)

$$v^p_\alpha = \bar{g}^{pi} v_{\alpha i} = \bar{g}^{pa} v_{\alpha a} = 0, \tag{45.8}$$

то v_α является вектором E_0. Он называется *корневым вектором* корня ρ_α. Теперь (43.5) примет вид

$$\rho_\alpha(u) = v_{\alpha a} u^a = \bar{g}_{ab} u^a v^b_\alpha. \tag{45.9}$$

В специальной координатной системе § 43 $\bar{g}_{ab} = g_{ab}$, так что сумма квадратов корней характеристического уравнения для вектора u подгруппы U равна $\bar{g}_{ab} u^a u^b$. С другой стороны, из (45.9) следует, что сумма квадратов корней равна $\sum\limits_{\alpha}^{1, \ldots, p} \nu_\alpha v_{\alpha a} v_{\alpha b} u^a u^b$.

Так как эти два выражения должны быть равны для всех векторов из U, то

$$\bar{g}_{ab} = \sum_\alpha \nu_\alpha v_{\alpha a} v_{\alpha b}.$$

Ранг матрицы $\|\bar{g}_{ab}\|$ равен ν_0 и не превосходит ранга $\|v_{\alpha b}\|$, т. е. числа независимых корневых векторов. Однако, так как эти корневые векторы лежат в E_0, то l не может быть больше ν_0. Таким образом,

[45.5] *Число линейно независимых корневых векторов равно размерности подпространства* E_0, *т. е. равно числу нулевых корней характеристического уравнения относительно регулярного вектора.*

Из (45.9) следует, что для того, чтобы в E_0 существовал вектор u такой, что все корни $\rho_\alpha(u)$ равны нулю, необходимо и достаточно, чтобы $v_{\alpha a} u^a = 0$ для любого α. Но это невозможно, так как ранг $\|v_{\alpha a}\|$ равен ν_0. Так как все корни характеристического уравнения относительно вектора производной группы U, согласно теореме [43.8], равны нулю (если только эта производная группа не единична), то

[45.6] *Подгруппа* U *абелева.*

Мы уже видели, что вместе с ρ_α также и $-\rho_\alpha (\equiv \rho_{\alpha'})$ является корнем. Следовательно, в E_0 существуют векторы $\bar{u} = (u_\alpha, u_{\alpha'})$. Все оии не нуль-векторы. Действительно, если один из них является нуль-вектором, то, согласно [40.5], сумма квадратов корней его характеристического уравнения равнялась бы нулю и, следовательно, каждый корень равнялся бы нулю. Тогда по (45.9) $\bar{u}$ был бы ортогоиален всем корневым векторам. Это, как мы только что видели, невозможно.

Пусть e_α — первый фундаментальный вектор корневого пространства E_α, тогда

$$\eta^k_i(u) e^i_\alpha = \rho_\alpha(u) e^k_\alpha. \tag{45.10}$$

Мы знаем, что существует, по крайней мере, один фундаментальный вектор $e_{\alpha'}$ корневого пространства $E_{\alpha'}$, не ортогональный e_α. Если мы умножим уравнение (45.10) на $g_{kl} e^l_{\alpha'}$ и просуммируем по k, то получим

$$c_{hil} u^h e^i_\alpha e^l_{\alpha'} = \rho_\alpha g_{kl} e^l_{\alpha'} e^k_\alpha \equiv \rho_\alpha \sigma_\alpha \qquad \text{(по } \alpha \text{ не суммируется)},$$

где σ_α — ненулевой скаляр. Если это напишем в виде:

$$g_{hk} u^h \bar{u}^k = \rho_\alpha(u) \sigma_\alpha \qquad \text{(по } \alpha \text{ не суммируется)},$$

где $\bar{u}=(e_\alpha, e_{\alpha'})$, то увидим, что $\bar{u}$ не равен нулю. Сравнивая это уравнение с (45.9) и замечая, что для базиса § 43 $\bar{g}_{hk}=g_{hk}$, мы видим, что

$$\bar{u}=(e_\alpha, e_{\alpha'})=\sigma_\alpha v_\alpha \quad (\text{по } \alpha \text{ не суммируется}), \tag{45.11}$$

т. е. $\bar{u}$ и v_α имеют одинаковое направление. Кроме того, как было показано в предыдущем абзаце, $g_{ij}u^i u^j \neq 0$. Вследствие (45.11) и (45.9) для вектора $\bar{u}$ имеем:

$$\sigma_\alpha \rho_\alpha(\bar{u})=\bar{g}_{ab}\bar{u}^a\bar{u}^b \qquad (\text{по } \alpha \text{ не суммируется}),$$

и, следовательно, так как $\bar{u}$ не нуль-вектор, то $\rho_\alpha(u)\neq 0$.

Мы теперь можем доказать следующую важную теорему:

[45.7] *Ненулевые корни характеристического уравнения полупростой группы просты. Если ρ_α корень, то $m\rho_\alpha$, где m целое число, не является корнем, если только $m\neq -1$* [1]).

Действительно, предположим, что ρ_α, $2\rho_\alpha$, ..., $s\rho_\alpha$ и $(s+t)\rho_\alpha$, $(s+t+1)\rho_\alpha$, ..., $(s+w)\rho_\alpha$ — корни, а $(s+1)\rho_\alpha$, ..., $(s+t-1)\rho_\alpha$ и $(s+w+1)\rho_\alpha$ нет. Пусть кратности этих корней равны соответственно k_1, k_2, ..., k_s, k_{s+t}, ..., k_{s+w}. Рассмотрим сумму тождеств Якоби

$$c^j_{aa'}c^p_{jp}+c^j_{a'p}c^p_{ja}+c^j_{pa}c^p_{ja'}=0,$$

где a и a' — индексы фундаментальных векторов e_α и $e_{\alpha'}$, введенные выше для системы фундаментальных векторов E_r, а p пробегает значения индексов этой системы для корневых пространств указанных корней. Так как $\bar{u}$, определенное равенством (45.11), лежит в E_0, то $c^q_{aa'}=0$ для $q>\nu_0$. Аналогично, если u_p — вектор корневого пространства корня $m\rho_\alpha$, то $(e_{\alpha'}, u_p)$— вектор корневого пространства $(m-1)\rho_\alpha$, если это корень, а (e_α, u_p)— вектор корневого пространства $(m+1)\rho_\alpha$, если это корень. Поэтому написанные выше уравнения сведутся к

$$c^b_{aa'}c^p_{bp}+c^u_{a'v}c^v_{ua}+c^{u'}_{v'a}c^{v'}_{u'a'}=0 \quad (b=1, \ldots, \nu_0),$$

[1]) Cartan, 1891, 1, стр. 55; Weyl, 1926, 2, стр. 364.

где u, v, u', v' пробегают индексы, принадлежащие корневым пространствам следующих корней

u: $0,\ \rho_\alpha, \ldots, (s-1)\rho_\alpha;\quad (s+t)\rho_\alpha, \ldots, (s+w-1)\rho_\alpha;$
u': $2\rho_\alpha, \ldots, s\rho_\alpha;\quad (s+t+1)\rho_\alpha, \ldots, (s+w)\rho_\alpha;$
v: $\rho_\alpha, \ldots, s\rho_\alpha;\quad (s+t+1)\rho_\alpha, \ldots, (s+w)\rho_\alpha;$
v': $\rho_\alpha, \ldots, (s-1)\rho_\alpha;\quad (s+t)\rho_\alpha, \ldots, (s+w)\rho_\alpha.$

Вследствие кососимметричности c^e_{ab} наши уравнения приведутся к

$$c^b_{aa'}c^p_{bp} = c^v_{ab}c^b_{a'v} \quad (b = 1, \ldots, \nu_0).$$

Так как $e^i_\alpha = \delta^i_\alpha$, то из (45.10) следует, что $c^k_{ab} = 0$, если $k \neq a$ и, следовательно, полученные уравнения приведутся к

$$c^b_{aa'}c^p_{bp} = c^a_{ba}c^b_{aa'} \quad (b = 1, \ldots, \nu_0). \tag{45.12}$$

Вектор $\bar{u}$, определенный в (45.11), равен $c^b_{aa'}$. Следовательно, левая сторона (45.12) является следом матрицы $\eta(\bar{u})$ в корневых пространствах данной системы корней, согласно (43.5) равным

$$[k_1 + 2k_2 + \ldots + sk_s + (s+t)\,k_{s+t} + \ldots + \\ + (s+w)\,k_{s+w}]\,\rho_\alpha(\bar{u}).$$

Заменив в (45.10) u на $\bar{u}$, увидим, что правая сторона (45.12) равна $\rho_\alpha(\bar{u})$. Приравнивая эти два выражения, получаем $k_1 = 1$, а остальные k_i равны нулю. Если существует более двух групп корней, результат не изменится. Таким образом, теорема полностью доказана.

46. Классификация простых и полупростых групп*) Многие результаты, полученные в этой главе, применяются при классификации полупростых групп и определении нормальных форм групп различных классов.

*) Очень простое и изящное изложение этого вопроса дано в работе: Е. Дынкин, Структура полупростых алгебр Ли, *„Успехи математических наук“* т. II, вып. 4 (1947). (*Прим. ред.*)

В 1885—1889 гг. Ли [1]) показал, что существует четыре больших класса простых групп, имеющих ту же структуру что и 1) общая проективная группа от n переменных, 2) проективная группа линейного комплекса от $2n$ переменных, 3) проективная группа гиперповерхности второй степени от $2n$ и 4) она же от $2n-1$ переменных (см. упражнения 14, 15, 16 § 46). В 1889 г. Киллинг [2]), используя характеристическое уравнение группы (§ 40), показал, что в дополнение к этим четырем классам простых групп существует только пять других возможных структур простых групп порядков 14, 52, 78, 133 и 248. Картан [3]), получив многие результаты предыдущих параграфов, доказал существование этих пяти специальных типов и показал, что они все различны. Вейль [4]) занимался той же задачей и дал для нее более геометрическое решение. Мы в общих чертах опишем некоторые следствия результатов предыдущих параграфов, служащие геометрической основной классификации.

Обозначим через $e^i_a\ (=\delta^i_a)$ для $a=1, \ldots, l\ (=\nu_0)$ независимые векторы, определяющие корневое пространство E_0 нулевого корня характеристического уравнения относительно общего вектора. По теореме [45.7], корневое пространство нулевого корня одномерно и вместе с ρ_α также и $-\rho_\alpha\,(\equiv\rho_{\alpha'})$ будет корнем, т. е. корни встречаются парами. Обозначим через $e^i_\alpha=\delta^i_\alpha$ и $e^i_{\alpha'}(=\delta^i_{\alpha'})$ векторы этих корневых пространств и предположим, что индексы α и α' для различных корней выбраны таким образом, что α принимает значения от $l+1$ до r. Если мы положим (см. § 43)

$$u_\alpha=(e_\alpha,\ e_{\alpha'}), \qquad g_{ij}e^i_\alpha e^j_{\alpha'}=\sigma_\alpha, \tag{46.1}$$

то из (45.11)

$$u_\alpha=\sigma_\alpha v_\alpha \text{ (по } \alpha \text{ не суммируется)}, \tag{46.2}$$

---

[1]) 1885, 1, стр. 130; 1886, 1, стр. 413; 1889, 3, стр. 325.

[2]) 1889, 1, стр. 48.

[3]) 1894, 1, стр. 68—95.

[4]) 1925, 1, 1926, 2.

где вектор v_α, определенный формулами (45.6) и (45.7), причем $\nu_\alpha = 1$, лежит в E_0 и является корневым вектором для пары корней ρ_α и ρ_{α}. По предыдущей теореме [45.5], из уравнений (46.1) и теоремы [45.4] имеем:

$$g_{ab} = \sum_\alpha v_{\alpha a} v_{\alpha b}, \quad g_{a\alpha} = 0, \quad g_{\alpha\alpha'} = -1, \quad g_{\alpha\beta} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a = 1, \ldots, l; \\ \alpha, \ \beta = l+1, \ldots, r; \ \beta \neq \alpha \end{pmatrix}, \tag{46.3}$$

откуда

$$g^{ab} = \sum_\alpha v^a_\alpha v^b_\alpha = \sum_\alpha u^a_\alpha u^b_\alpha, \quad g^{a\alpha} = 0,$$

$$g^{\alpha\beta} = 0 \quad (\beta \neq \alpha), \quad g^{\alpha\alpha'} = 0. \tag{46.4}$$

Так как по теореме [45.6] подгруппа U абелева, то $c^e_{ab} = 0$ для $a, b, e = 1, \ldots, l$, а по (41.8) и (46.3) $c_{abe} = 0$. Из (46.1) и (46.2) имеем

$$u^a_\alpha = c^a_{\alpha\alpha'} = -v^a_\alpha, \quad c^\beta_{\alpha\alpha'} = 0 \quad (\beta = l+1, \ldots, r). \tag{46.5}$$

Таким образом

$$c_{\alpha\alpha' a} = U_{\alpha a} = -v_{\alpha a} \tag{46.6}$$

и, вследствие (46.4),

$$c^\alpha_{a\alpha} = v_{\alpha a} = -u_{\alpha a} \text{ (по } \alpha \text{ не суммируется)}. \tag{46.7}$$

По теореме [43.1] $c^\gamma_{\alpha\beta} = 0$, если $\rho_\alpha + \rho_\beta \neq \rho_\gamma$. Отсюда и из (46.4) имеем $c_{\alpha\beta\gamma} = 0$, если $\rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma \neq 0$. Осталось показать, что при этих условиях указанные величины не нули. Действительно, Вейль [1]), используя последовательность корней (44.2), показал, что

$$c_{\alpha\beta\gamma} c_{\alpha'\beta'\gamma'} = -\frac{1}{2} \lambda (\mu + 1) \rho_\alpha (u_\alpha).$$

[1]) 1926, 2, стр. 372.

Далее Вейль[1]), показал, что при соответствующем выборе базиса $c_{\alpha\beta\gamma} = c_{\alpha'\beta'\gamma'}$ и, следовательно,

$$\left(c_{\alpha\beta\gamma} \right)^2 = -\frac{1}{2} \lambda (\mu + 1) \rho_\alpha (u_\alpha). \tag{46.8}$$

Можно доказать, что $\rho_\alpha(u_\alpha)$ отрицателен, так что $c_{\alpha\beta\gamma}$ вещественны. Вейль[2]) доказал также, что все корневые векторы являются линейными комбинациями с рациональными коэффициентами некоторых l независимых корневых векторов. Если базис выбран так, что они вещественны, то все коэффициенты c^k_{ij} будут вещественны, а $g_{ab}u^a u^b$ будет положительно определенной формой.

Возвращаясь опять к последовательности (44.2) и замечая, что каждый корень прост, мы получим:

$$(\lambda + \mu + 1) \rho_\beta (u_\alpha) + \left(\frac{\lambda(\lambda+1)}{2} - \frac{\mu(\mu+1)}{2} \right) \rho_\alpha (u_\alpha) = 0$$

и, следовательно,

$$\rho_\beta (u_\alpha) = -\frac{\lambda - \mu}{2} \rho_\alpha(u_\alpha). \tag{46.9}$$

Из (45.9) и (46.2) для $\sigma_\alpha = -1$ следует, что

$$\rho_\beta (u_\alpha) = -v_{\beta a} v^a_\alpha, \quad \rho_\alpha (u_\alpha) = v_{\alpha a} v^a_\alpha. \tag{46.10}$$

Комбинируя (46.10) и (46.9), Схоутен[3]) нашел все возможные углы между корневыми векторами и длины этих векторов. Если конфигурацию корневых векторов группы назвать ее *корневой фигурой*, то задача классификации полупростых групп сводится к отысканию всех возможных различных корневых фигур. Согласно теореме [45.2], полупростая группа является прямым произведением простых групп, представители которых в пространстве E_r попарно ортогональны. Таким образом, векторные пространства простых групп ортогональны и, следовательно, ортогональны их корневые фигуры. Тем самым, если найдены

[1]) 1926, 2, стр. 374.
[2]) 1926, 2, стр. 368.
[3]) В неопубликованных лекциях, читанных в Лейденском университете.

корневые фигуры, которые нельзя разложить в попарно-ортогональные фигуры, то они являются корневыми фигурами простых групп.

Задача отыскания простых групп определением на основе результатов Схоутена всех возможных корневых фигур была решена Грехемом, который получил результаты, установленные Картаном алгебраическими приемами. В этом исследовании используется тот факт, что отражение корневого вектора в гиперплоскости, ортогональной любому другому корневому вектору, также принадлежит корневой фигуре. Эти отражения корневой фигуры группы порождают дискретную группу, являющуюся подгруппой группы линейных преобразований, оставляющих инвариантной корневую фигуру. Это есть подгруппа дискретной группы Вейля[1]). В своем изучении полупростых групп Вейль использовал теорию *представлений* непрерывных групп. Эта теория для конечных групп построена Фробениусом[2]) и Бернсайдом[3]), обобщена на непрерывные группы Шуром[4]) и далее развита Вейлем[5]). Она состоит в сопоставлении каждой системе значений параметров a^α группы G_r неособенного одновременного преобразования $A(a)$, для которого справедлив закон композиции (4.6), в нашем случае гласящий:

$$A(a_2)\,A(a_1) = A(a_2 a_1).$$

Например, если выбраны канонические параметры группы, то ее присоединенная группа является ее представлением. Если представление транзитивно, то говорят, что оно *неприводимо*, в том смысле, что не существует подпространства инвариантного относительно всех преобразований представления. Иногда приводимое представление можно рассматривать как сумму двух или более неприводимых представлений. В этом случае одной из основных проблем является разыскание полной системы неприводи-

---

[1]) 1926, 2, стр. 367.
[2]) 1897, 2, и 1899, 1.
[3]) 1911, 2, стр. 231—242, 269—279.
[4]) 1905, 5.
[5]) 1925, 4, и 1926, 2.

мых представлений группы G_r, так как любое представление G_r можно рассматривать как сумму некоторых членов этой полной системы. Для полного изучения этого предмета читатель отсылается к указанным авторам. Мы же заметим только, что эта теория была плодотворно применена к некоторым химическим и физическим задачам [1]).

Упражнения

1. Если подгруппа G_m группы G_r разрешима, то она содержится, по крайней мере, в одной подгруппе G_r порядка $m+1$.

(Lie-Scheffers, 1893, 1, стр. 564.)

2. Если G_r имеет абелеву подгруппу G_{r-1}, то G_r разрешима.

(Lie-Scheffers, 1893, 1, стр. 584.)

3. Если G_r ранга нуль, то она содержит, по крайней мере, одну центральную подгруппу G_r.

(Killing, 1888, 3, стр. 288; Umlauf, 1891, 4, стр. 40.)

4. Если G_r ранга нуль, то порядок ее первой производной группы не превосходит $r-2$.

(Killing, 1888, 3, стр. 288; Umlauf, 1891, 4, стр. 40.)

5. Если G_r ранга нуль, то любая ее подгруппа G_1 абелева.

(Umlauf, 1891, 1, стр. 35.)

6. Любая G_r содержит по крайней мере ∞^{r-4} абелевых подгрупп G_2.

(Lie-Engel; 1893, 2, стр. 756.)

7. Вследствие упражнения 11 § 39, упражнения 6 § 36 и определения разрешимой группы, любая G_4, не имеющая простых подгрупп G_3, разрешима.

(Lie-Scheffers, 1893, 1, стр. 574.)

8. Группа G_r разрешима тогда и только тогда, когда она не содержит простой подгруппы G_3.

(Lie-Engel, 1893, 2, стр. 757.)

9. Прямое произведение двух полупростых групп есть полупростая группа.

10. Если группа порядка $r-m$ гомоморфна группе G_r нулевого ранга, то ранг ее равен нулю.

(Umlauf, 1891, 4, стр. 35.)

---

[1]) См. Weyl, 1931, 1; также Wigner, 1931, 2.

11. Для того, чтобы G_r была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы

$$c^{\mu}_{i\lambda}c^{\nu}_{j\mu}c^{\lambda}_{k\nu} = c^{\lambda}_{i\mu}c^{\mu}_{j\nu}c^{\nu}_{k\lambda} \quad (i,\ j,\ k,\ \lambda,\ \mu,\ \nu = 1,\ \dots\ r).$$

(Cartan, 1894, 1, стр. 48.)

12. Общая линейная группа имеет символы P_i и $x^i p_j$ и обладает тремя инвариантными подгруппами с символами

p_i; p_i, $x^i p_i$; p_i, $x^i p_j$, $x^i p_i - x^j p_j$. (по i, j не суммируется, $i \neq j$)

(Lie-Engel, 1888, 1, стр. 562.)

13. Общая линейная однородная группа от n переменных имеет символы $x^i p_j$ и обладает инвариантными подгруппами G_1 с символами $x^i p_i$ и подгруппой с символами

$$x^i p_j,\ x^i p_i - x^j p_j. \text{ (по } i,\ j \text{ не суммируется, } i \neq j).$$

Последняя группа проста.

(Lie-Engel, 1888, 1, том 1, стр. 560—561.)

14. Общая проективная группа от n переменных имеет символы (см. упражнение 9, § 11)

$$p_i x^i p_k,\ x^i x^j p_j,$$

порядок $n(n+2)$ и проста.

(Lie-Engel, 1888, 1, том 1, стр. 560.)

15. Группа порядка $\frac{n(n+1)}{2}$ с символами

$$p_i - x^i x^j p_j,\ x^i p_j - x^j p_i \quad (i,\ j = 1, \dots, n)$$

оставляет инвариантной сферу $\Sigma\,(x^i)^2 = 1$ и, если $n \neq 3$, проста (см. упражнение 10, § 31).

(Lie-Engel, 1893, 2, стр. 354—357.)

16. Проективная группа порядка $(n+1)(2n+3)$ от $2n+1$ переменных z, x^i, y^i с символами

$$p_i - y^i r,\ q_i + x^i r,\ A + zr\left((q_i = \frac{\partial f}{\partial y^i};\ r = \frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

$$x^i q_j + x^j q_i,\ x^i p_j - y^j q_j,\ y^i p_j + y^j p_i \quad (i \neq j),$$

$$z p_i - y^i A,\quad z q_i + x^i A,\quad zA,$$

где $A = x^i p_i + y^i q_i + zr$ проста и оставляет инвариантным линейный комплекс с уравнением $dz + x^i dy^i - y^i dx^i = 0$.

(Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 522.)

Глава V

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

47. Риманово пространство. В предыдущих главах мы уже рассматривали системы значений переменных x^i, как координаты точки n-мерного многообразия V_n, и преобразования группы G_r, как непрерывные преобразования данной точки в другие точки V_n. Геометрия этого многообразия является геометрией положения, и до сих пор, исключая случай полупростых групп, мы не имели оснований ни для измерений длин, ни для сравнения направлений в двух различных точках. В этом параграфе мы определим длину и параллелизм, а в последующих параграфах мы используем эти определения в теории непрерывных групп.

Риман[1]) обобщил понятие элемента длины евклидова трехмерного пространства, определяя элемент длины V_n с помощью положительно определенной квадратичной дифференциальной формы $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, где g_{ij}, вообще говоря, — функции x^i. Так как в общей теории относительности и в других физических теориях используются квадратичные дифференциальные формы, не являющиеся положительно определенными, то мы положим в основание метрики V_n вещественную *фундаментальную квадратичную форму*

$$\varphi = g_{ij}dx^i dx^j, \tag{47.1}$$

где g_{ij} — такие фуннкции x^i, что $g_{ij} = g_{ji}$ и детерминант $|g_{ij}|$ не равен нулю, т. е.

$$g \equiv |g_{ij}| \neq 0. \tag{47.2}$$

Для данной системы дифференциалов dx^i *элемент длины* ds определяется уравнением

$$ds^2 = eg_{ij}\,dx^i\,dx^j, \tag{47.3}$$

[1]) 1854, 1.

где e — плюс или минус единица, выбранная таким образом, чтобы правая сторона была положительна. В этом смысле буква e будет употребляться и далее, ее нельзя путать с величинами, использованными в уравнениях группы (§ 11). Если ξ_i — компоненты контравариантного вектора, то квадрат его длины равен

$$\xi^2 = e g_{ij} \xi^i \xi^j. \tag{47.4}$$

Если $\xi^2 = 1$, то данный вектор называется *единичным*. Если $\xi^2 = 0$, то он называется *нуль-вектором*, если только не все его компоненты равны нулю, тогда вектор называется *нулевым*. Метрика, определенная (47.3) и (47.4), называется *римановой*, а пространство с такой метрикой — *римановым пространством*.

Если координаты подвергнуть невырожденному преобразованию

$$x'^i = \varphi^i(x), \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| \neq 0, \tag{47.5}$$

и в этих координатах форму (47.1) обозначить через $g'_{ij} dx'^i dx'^j$, то из

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j \tag{47.6}$$

получим

$$g'_{ij} = g_{lm} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j}. \tag{47.7}$$

Если $T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ — система функций от x^i, а $T'^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s}$ — от x'^i, такие, что при невырожденном преобразовании (47.5) имеют место соотношения

$$T'^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{k_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial x'^{k_2}} \cdots \frac{\partial x^{i_r}}{\partial x'^{k_r}} = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial x'^{l_s}}, \tag{47.8}$$

то эти функции в соответствующих координатных системах называются компонентами тензора, r раз контравариантного и s раз ковариантного. Из (47.7) мы видим, что g_{lm} и g'_{ij} являются в соответствующих координатных системах компонентами тензора, дважды ковариантного.

Этот тензор называется *фундаментальным тензором пространства*[1]).

Если уравнения (47.7) продифференцировать по x'^k, то полученные уравнения можно будет разрешить относительно вторых производных от x^i по x'^j и получить уравнения

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^i \partial x'^j} + \left\{ {k \atop lm} \right\} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} = \left\{ {h \atop ij} \right\}' \frac{\partial x^k}{\partial x'^h}, \tag{47.9}$$

где, определяя величины g^{ij} уравнением

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k, \tag{47.10}$$

имеем[2])

$$\left\{ {k \atop lm} \right\} = g^{kh} [lm, h], \quad [lm, h] = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{lh}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mh}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^h} \right) \tag{47.11}$$

и аналогично определяются $\left\{ {h \atop ij} \right\}'$. Величины g^{ij}, определенные (47.10), являются алгебраическими дополнениями элемента g_{ij} в детерминанте $|g_{ij}|$, деленными на этот детерминант. Написав условия интегрируемости уравнений (47.9), мы получим систему уравнений

$$R^h_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial x'^a} \frac{\partial x^j}{\partial x'^b} \frac{\partial x^k}{\partial x'^c} = R'^d_{abc} \frac{\partial x^h}{\partial x'^d}, \tag{47.12}$$

где

$$R^h_{ijk} = \frac{\partial \left\{ {h \atop ik} \right\}}{\partial x^j} - \frac{\partial \left\{ {h \atop ij} \right\}}{\partial x^k} + \left\{ {l \atop ik} \right\} \left\{ {h \atop lj} \right\} - \left\{ {l \atop ij} \right\} \left\{ {h \atop lk} \right\}, \tag{47.13}$$

и R'^d_{abc} имеют для g'_{ij} тот же вид[3]). Из (47.12) видно, что R^h_{ijk} компоненты тензора трижды ковариантного и один раз контравариантного. Он называется *тензором римановой кривизны*[4]).

---

[1]) Подробное изложение теории тензоров см. 1926, 3, стр. 1—16. (Переводится на русский язык. *Прим. ред.*)

[2]) См. 1926, 3, стр. 17—19.

[3]) См. 1926, 3, стр. 19.

[4]) О геометрической интерпретации этого тензора см. 1926, 3, стр. 81.

Если все g_{ij} постоянны, то из (47.13) следует, что $R^h_{ijk}=0$, и тогда из (47.12) видно, что компоненты этого тонзора равны нулю в любой системе координат. Обратно, можно показать, что если все компоненты этого тензора равны нулю, то существует координатная система, в которой все g_{ij} постоянны. Этот случай, очевидно, представляет обобщение трехмерного евклидового пространства, отнесенного к декартовым координатам. Поэтому пространство мы называем *евклидовым* или *плоским*, если его тензор кривизны равен нулю, а систему координат, в которой g_{ij} постоянны, называем *декартовой.*

Если уравнения (47.8) продифференцируем по x'^m, то увидим, что первые производные T' и T не удовлетворяют уравнениям вида (47.8) и, следовательно, не являются компонентами тензора. Однако, используя уравнения (47.9), можно показать, что величины

$$T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s,\,k}\equiv\frac{\partial T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}}{\partial x^k}+\sum_h^{1\ldots r}T^{i_1\ldots i_{h-1}l i_{h+1}\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\begin{Bmatrix}i_h\\ l\,k\end{Bmatrix}-$$
$$-\sum_h^{1\ldots r}T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{h-1}\,l j_{h+1}\ldots j_s}\begin{Bmatrix}l\\ j_h k\end{Bmatrix}\qquad(47.14)$$

и аналогичные выражения для T' являются компонентами тензора r раз контравариантного и $s+1$ раз ковариантного [1]). Получение таким способом нового тензора называется *ковариантным дифференцированием* относительно g_{ij}. Из (47.5) имеем:

$$g_{ij,\,k}=0,\quad g^{ij}{}_{,\,k}=0,\qquad(47.15)$$

т. е. g_{ij} и g^{ij} при ковариантном дифференцировании ведут себя как постоянные.

Если применим ковариантное дифференцирование к $T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s,\,k}$, то получим *вторую ковариантную производную* с компонентами $T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s,\,kl}$. Эти величины, в отличие

[1]) 1926, 3, стр. 28.

от случая обыкновенных вторых производных, не симметричны по индексам k и l. Но по исключении вторых производных из обоих выражений, получаются уравнения:

$$\begin{aligned} T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s, kl} - T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s, lk} &= \\ = \sum_{\alpha} T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{\alpha-1}\, m j_{\alpha+1}\ldots j_s} R^m_{j_\alpha kl} &- \\ - \sum_{\beta} T^{i_1\ldots i_{\beta-1}\, m i_{\beta+1}\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} R^{i_\beta}_{mkl}&. \end{aligned} \tag{47.16}$$

Эти уравнения известны, как тождества Риччи. Для уравнений в ковариантных производных тождества Риччи заменяют условия интегрируемости для уравнений в обыкновенных производных[1]).

В евклидовом трехмерном пространстве, отнесенном к декартовым координатам, векторы векторного поля с компонентами ξ_i параллельны, если ξ_i постоянны. В этом случае первые ковариантные производные равны нулю. Следовательно, они равны нулю в любой координатной системе, т. е.

$$\xi^i_{,j} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \xi^h \left\{ {i \atop hj} \right\} = 0. \tag{47.17}$$

Рассмотрим эти уравнения в пространстве V_n. Выписывая условия интегрируемости, получим

$$\xi^h R^i_{hjk} = 0 \tag{47.18}$$

Следовательно, система (47.17) вполне интегрируема для евклидова V_n. Поэтому существует поле векторов, параллельных любому данному вектору. Компонентами поля является решение системы (47.17), определенное компонентами данного вектора, как начальными значениями в точке, в которой задан этот вектор. Если V_n не евклидово, то уравнения (47.18) тождественно не удовлетворяются, и, следовательно, параллелизм, как он понимается в евклидовом пространстве, не имеет места для общего V_n.

---

[1]) 1926, 3, стр. 30.

Однако, если мы рассмотрим в данном пространстве V^n любую кривую C, определенную уравнением

$$x^i = \varphi^i(t),$$

где t — параметр, то уравнения

$$\xi^i_{,j}\frac{dx^j}{dt} = \frac{d\xi^i}{dt} + \xi^h \left\{ {i \atop hj} \right\} \frac{dx^j}{dt} = 0 \qquad (47.19)$$

имеют решение, определенное значениями ξ^i для $t = 0$. Если такое решение известно, то для каждой точки кривой определен вектор с компонентами ξ^i. Следуя Леви-Чивита[1]), мы говорим, что эти векторы *параллельны вдоль кривой C*. В этом смысле параллелизм *относителен*, тогда как в евклидовом пространстве он *абсолютен*.

Из (47.15) следует, что для решения уравнений (47.19) $g_{ij}\xi^i\xi^j$ постоянно и, следовательно, ξ^i отличаются, самое большее, постоянным множителем от компонент единичного вектора, если только начальные значения не являются компонентами нуль-вектора. Говорят, что два вектора в одной точке имеют одинаковое *направление*, если их соответствующие компоненты пропорциональны. Соответственно этому, если функции ξ^i удовлетворяют (47.19), то векторы с компонентами

$$\bar{\xi}^i = \xi^i \psi(t),$$

где $\psi(t)$ — любая функция t, можно считать параллельными вдоль кривой C. Из (47.19) имеем:

$$\frac{d\bar{\xi}^i}{dt} + \bar{\xi}^h \left\{ {i \atop hj} \right\} \frac{dx^j}{dt} = \bar{\xi}^i \frac{d \ln \psi}{dt}.$$

Исключая $\frac{d \ln \psi}{dt}$ из этих уравнений, мы, в качестве общих уравнений для векторов, параллельных вдоль кривой, получим (опуская черточки):

$$\xi^j \left(\frac{d\xi^i}{dt} + \xi^h \left\{ {i \atop hk} \right\} \frac{dx^k}{dt} \right) - \xi^i \left(\frac{d\xi^j}{dt} + \right.$$
$$\left. + \xi^h \left\{ {j \atop hk} \right\} \frac{dx^k}{dt} \right) = 0. \qquad (47.20)$$

---

[1]) 1917, 1; см. также 1926, 3, стр. 62—65, 74.

Так как $\frac{dx^i}{dt}$ —компоненты вектора, касательного к кривой C, то для того, чтобы касательные векторы были вдоль C параллельны, необходимо и достаточно, чтобы C была кривой, удовлетворяющей уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{dx^j}{dt}\left(\frac{d^2x^i}{dt^2}+\left\{{i \atop hk}\right\}\frac{dx^h}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right)-\\-\frac{dx^i}{dt}\left(\frac{d^2x^j}{dt^2}+\left\{{j \atop hk}\right\}\frac{dx^h}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right)=0.\end{gathered} \tag{47.21}$$

Если s — длина дуги C, то $\frac{dx^i}{ds}$ — единичный вектор и, согласно (47.19) уравнениям, которым должна удовлетворять C, примут вид:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\left\{{i \atop hk}\right\}\frac{dx^h}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0. \tag{47.22}$$

Эти кривые, называемые *геодезическими* пространства, можно назвать прямейшими линиями V_n. Они являются обобщением прямых линий евклидова пространства. Действительно, если координаты последнего декартовы, то уравнения (47.22) дадут $\frac{d^2x^i}{ds^2}=0$, т. е. уравнения прямых линий. Из вида уравнений (47.22) следует, что их интегральные кривые проходят через любую точку пространства в любом направлении. Можно показать, что они характеризуются тем свойством, что для двух достаточно близких точек существует единственная кривая семейства, соединяющая эти точки, первая вариация длины дуги которой между этими точками равна нулю. Если фундаментальная форма (47.1) положительно определенна, то длина дуги геодезической будет кратчайшим расстоянием между этими точками. Если же форма неопределенна, то это может быть, в зависимости от дальнейших свойств формы, кратчайшим или длиннейшим расстоянием.

48. Многообразия с аффинной связностью. Аффинная связность, определенная просто транзитивной группой. Пусть ξ^i_a — компоненты векторов просто транзитивной группы G_n в V_n. Тогда уравнения (21.9), где $q=n$, единственным образом определяют $\xi_i^{\ a}$ и так же, как в (21.12), имеем функции:

$$\Delta^i_{jk} = \xi^i_a \frac{\partial \xi^a_k}{\partial x^j} = -\xi^a_k \frac{\partial \xi^i_a}{\partial x^j} \quad (a, i, j, k = 1, \ldots, n). \qquad (48.1)$$

Если x^i преобразованы невырожденным преобразованием в координаты x'^i, и если ξ'^i_a — компоненты векторов в координатах x'^i, то

$$\xi^i_a = \xi'^j_a \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}. \qquad (48.2)$$

Если мы через Δ'^i_{jk} обозначим функции от ξ'^j_a, аналогичные функциям (48.1), то мы найдем:

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^j \partial x'^k} + \Delta^i_{lm} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} = \Delta'^h_{jk} \frac{\partial x^i}{\partial x'^h}. \qquad (48.3)$$

Заметим, что эти уравнения аналогичны (47.9). Из (21.15) имеем:

$$\Delta^i_{jk} - \Delta^i_{kj} = c^e_{ab} \xi^a_j \xi^b_k \xi^i_e, \qquad (48.4)$$

и, следовательно, Δ^i_{jk} не симметричны по индексам j и k, если только группа не абелева (§ 13), тогда как, вследствие (47.11), $\left\{ {k \atop lm} \right\}$ симметричны по индексам l и m. Отвлекаясь от того, что (48.3) получено из (48.1), рассмотрим общий случай, когда Δ^i_{jk} и Δ'^i_{jk} — две системы функций в соответствующих координатных системах, связанные соотношениями (48.3). Мы говорим, что каждая система этих функций определяет одну и ту же *аффинную связность*. Эти функции называются *коэффициентами* связности. Сравнивая (47.13) и (21.17), мы видим, что эти уравнения аналогичны. Поэтому тензор с компонентами Δ^h_{ijk} называется *тензором кривизны* данной аффинной связности. Аналогично (47.20) имеем уравнения:

$$\xi^j \left(\frac{d\xi^i}{dt} + \xi^h \Delta^i_{hk} \frac{dx^k}{dt} \right) - \xi^i \left(\frac{d\xi^j}{dt} + \xi^h \Delta^j_{hk} \frac{dx^k}{dt} \right) = 0. \qquad (48.5)$$

Функции ξ^i, удовлетворяющие этим уравнениям на кривой C (т. е. x^k суть функции параметра t), называются компонентами векторов в точках кривой C, *параллельных* вдоль C. А кривые, определенные уравнениями:

$$\frac{dx^j}{dt}\left(\frac{d^2x^i}{dt^2}+\Delta^i_{kl}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}\right)-$$
$$-\frac{dx^i}{dt}\left(\frac{d^2x^j}{dt^2}+\Delta^j_{kl}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}\right)=0. \qquad (48.6)$$

называются *геодезическими* линиями многообразия. Они представляют собой обобщение геодезических линий риманова пространства[1]). Таким образом, с помощью аффинной связности мы можем сравнивать направления в различных точках, хотя и не в состоянии изучать метрические свойства.

Из (21.19) следует, что для аффинной связности, определенной, с помощью формул (48.1), просто транзитивной группой, имеем:

$$\Delta^h_{ijk}=0, \qquad (48.7)$$

т. е. тензор кривизны равен нулю. Если некоторая аффинная связность удовлетворяет этому условию, то мы говорим, что пространство плоское или что оно имеет *связность нулевой кривизны.*

Вследствие (48.7) система [см. уравнения (21.13)]

$$\frac{d\zeta}{dx^j}+\zeta^h\Delta^i_{hj}=0 \qquad (48.8)$$

вполне интегрируема и, следовательно, решения определяются произвольными начальными значениями ζ^i. Из (48.5) следует, что любые два вектора такого векторного поля параллельны вдоль любой кривой, соединяющей их точки приложения. Поэтому мы говорим, что они *абсолютно параллельны.* Так же, как в случае евклидова пространства, существует n таких независимых векторных полей ζ^i_a. Из § 30 следует, что это векторы группы, взаимной с данной.

Если мы определим величины $\overline{\Delta}^i_{jk}$ уравнениями

$$\overline{\Delta}^i_{jk}=\Delta^i_{kj}, \qquad (48.9)$$

[1]) См. 1927, 1, стр. 4, 5, 13, 14.

то из (48.3) следует, что $\overline{\Lambda}^i_{kj}$ являются коэффициентами второй аффинной связности. Вследствие (48.1) и (48.9), имеем

$$\frac{\partial \xi^i_a}{\partial x^k} + \xi^j_a \overline{\Lambda}^i_{jk} = 0, \tag{48.10}$$

Эти уравнения вполне интегрируемы, и, следовательно, тензор кривизны с компонентами $\overline{\Lambda}^h_{ijk}$, определенными выражениями, аналогичными (21.17), является нулевым тензором. Сравнивая (48.10) с (48.8), мы видим, что относительно связности $\overline{\Lambda}^i_{jk}$ векторы ξ^i_a абсолютно параллельны. Таким образом:

[48.1] Для *обеих аффинных связностей, определенных просто транзитивной группой, параллелизм абсолютен* [1]).

Из (48.8) и (48.9) следует, что

$$\overline{\Lambda}^i_{jk} = -\zeta^a_k \frac{\partial \zeta^i_a}{\partial x^j} = \zeta^i_a \frac{\partial \zeta^a_k}{\partial x^j}, \tag{48.11}$$

где ζ^a_i определены уравнениями вида (21.9), т. е.

$$\zeta^a_i \zeta^j_a = \delta^j_i, \quad \zeta^a_i \zeta^i_b = \delta^a_b. \tag{48.12}$$

Таким образом, $\overline{\Lambda}^i_{jk}$ связаны с взаимной группой так же, как Λ^i_{jk} связаны с данной группой.

Если мы через Γ^i_{jk} обозначим симметрическую часть Λ^i_{jk}, т. е.

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\left(\Lambda^i_{jk} + \Lambda^i_{kj}\right), \tag{48.13}$$

то из (48.3) будет следовать, что Γ^i_{jk} удовлетворяют уравнениям вида (48.3) и, следовательно, являются коэффициентами некоторой третьей аффинной связности. Так как Γ^i_{jk} симметричны по индексам j и k, то это коэффициенты симметрической аффинной связности [2]). Как видно

---

[1]) См. 1925, 1; и также Mattioli, 1930, 2.

[2]) 1927, 1, стр. 55.

из (48.9), Γ^i_{jk} являются также симметрической частью $\overline{\Delta}^i_{jk}$.

Определим величины g_{ij} и g^{ij}:

$$g^{ij}=\zeta^i_a\zeta^i_a,\quad g_{ij}=\zeta^a_i\zeta^a_j. \tag{48.14}$$

Из этих уравнений и из (48.12) имеем:

$$g^{ij}g_{ik}=\delta^j_k \tag{48.15}$$

и

$$g^{ij}\zeta^a_i=\zeta^j_a,\quad g_{ij}\zeta^i_a=\zeta^a_j. \tag{48.16}$$

Из вторых уравнений (48.16) и (48.14) следует, что

$$g_{ij}\zeta^i_a\zeta^j_b=\delta_{ab}.$$

Следовательно, если g_{ij} принять за компоненты фундаментального тензора пространства U_n, то векторы ζ^i_a будут попарно ортогональными единичными векторами [1]).

Из (48.14) и (48.8) имеем:

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}+g^{hj}\Delta^i_{hk}+g^{ih}\Delta^j_{hk}=0, \tag{48.17}$$

вследствие чего и (48.15)

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-g_{hj}\Delta^h_{ik}-g_{ih}\Delta^h_{jk}=0. \tag{48.18}$$

Таким образом, если мы определим ковариантное дифференцирование относительно аффинной связности уравнениями, получающимися из (47.14) заменой $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ на Δ^i_{jk} и запятой на черту, то

$$g^{ij}{}_{|k}=0,\quad g_{ij|k}=0. \tag{48.19}$$

Из (48.1), (48.18) и (21.9) получаем уравнения

$$\xi^k_a\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+g_{hj}\frac{\partial \xi^h_a}{\partial x^i}+g_{ih}\frac{\partial \xi^h_a}{\partial x^j}=0, \tag{48.20}$$

значение которых выяснится в § 51.

---

[1]) 1926, 3, стр. 48.

49. Просто-транзитивные группы, определенные аффинными связностями нулевой кривизны. Мы уже видели, что если кривизна аффинной связности равна нулю, то существует система n независимых полей абсолютно параллельных векторов. Найдем условия того, что это векторы просто-транзитивной группы.

Через Ω^i_{jk} обозначим кососимметрическую часть коэффициентов Λ^i_{jk} аффинной связности, т. е.

$$\Omega^i_{jk}=\frac{1}{2}\left(\Lambda^i_{jk}-\Lambda^i_{kj}\right). \tag{49.1}$$

Из этих уравнений и из (48.13) имеем:

$$\Lambda^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+\Omega^i_{jk}. \tag{49.2}$$

Отсюда и из (21.17) получим:

$$\Lambda^h_{ijk}=B^h_{ijk}+\Omega^h_{ijk}, \tag{49.3}$$

где

$$B^h_{ijk}=\frac{\partial\Gamma^h_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial\Gamma^h_{ij}}{\partial x^k}+\Gamma^l_{ik}\,\Gamma^j_{lh}-\Gamma^l_{ij}\,\Gamma^h_{lk} \tag{49.4}$$

и

$$\Omega^h_{ijk}=\Omega^h_{ik\,|\,j}-\Omega^h_{ij\,|\,k}-\Omega^l_{ki}\,\Omega^h_{jl}-\Omega^l_{ij}\,\Omega^h_{kl}-2\Omega^l_{jk}\,\Omega^h_{il}, \tag{49.5}$$

где за чертой (как было определено в § 48) находится индекс ковариантного дифференцирования относительно $\Lambda^i_{jk}\cdot B^h_{ijk}$, определенные формулами (49.4), являются компонентами тензора кривизны симметрической связности с коэффициентами Γ^i_{jk}. Они удовлетворяют тождествам [1])

$$\begin{gathered}B^h_{ijk}+B^h_{ikj}=0,\\ B^h_{ijk}+B^h_{jki}+B^h_{kij}=0\end{gathered} \tag{49.6}$$

Если $\Lambda^h_{ijk}=0$, то из (49.3), (49.5) и (49.6) имеем [2])

$$\begin{aligned}\Omega^h_{ij\,|\,k}+\Omega^h_{jk\,|\,i}+\Omega^h_{ki\,|\,j}+2\,(\Omega^l_{ij}\,\Omega^h_{kl}+\Omega^l_{jk}\,\Omega^h_{il}+\\ +\Omega^l_{ki}\,\Omega^h_{jl}=0.\end{aligned} \tag{49.7}$$

[1]) 1927, 1, стр. 55.
[2]) См. Einstein, 1929, 2, стр. 5.

Если через ξ^i_a обозначим компоненты n полей абсолютно параллельных векторов, а ξ^a_i определим соотношениями (21.9) и положим

$$\Omega^i_{jk} = \frac{1}{2} c^e_{ab} \xi^a_j \xi^b_k \xi^i_e, \tag{49.8}$$

то величины c^e_{ab} будут скалярами и

$$c^e_{ab} + c^e_{ba} = 0. \tag{49.9}$$

Из (49.8) следует, что

$$\Omega^i_{jk|l} = 0 \tag{49.10}$$

тогда и только тогда, когда c^e_{ab} постоянны. Если (49.10) имеет место, то из (49.7) следует:

$$\Omega^l_{ij} \Omega^h_{kl} + \Omega^l_{jk} \Omega^h_{il} + \Omega^l_{ki} \Omega^h_{jl} = 0. \tag{49.11}$$

Отсюда и из (49.8) получаем соотношения Якоби (7.4). Кроме того, из (49.1), (48.1) и (49.8) имеем:

$$\xi^i_a \frac{\partial \xi^j_b}{\partial x^i} - \xi^i_b \frac{\partial \xi^j_a}{\partial x^i} = c^e_{ab} \xi^j_e.$$

Как следует из второй основной теоремы, ξ^i_a являются векторами просто-транзитивной группы. Таким образом, мы, имеем:

[49.7] *Для того, чтобы аффинная связность нулевой кривизны определяла просто-транзитивную группу, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение* (49.10).

В § 48 мы уже видели, что коэффициенты Λ^i_{jk} и $\overline{\Lambda}^i_{jk}$ аффинных связностей, определенных просто-транзитивной группой и взаимной ей группой связаны соотношением $\overline{\Lambda}^i_{jk} = \Lambda^i_{kj}$. Отсюда и из (49.2) следует, что

$$\overline{\Lambda}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Omega^i_{jk}.$$

Обратно, если коэффициенты двух аффинных связностей нулевой кривизны связаны этим соотношением, то имеют место уравнения (49.7) и уравнения, полученные из них переменой знака у Ω^i_{jk}. Следовательно, имеем (49.11) и

$$\Omega^h_{ij|k} + \Omega^h_{jk|i} + \Omega^h_{ki|j} = 0. \qquad (49.12)$$

Так как B^h_{ijk} одинаковы для обеих связностей, то $\overline{\Omega}^h_{ijk} = \Omega^h_{ijk}$, где $\overline{\Omega}^h_{ijk}$ получается из Ω^h_{ijk} переменой знака у каждого Ω^i_{jk}. Откуда, вследствие (49.5), имеем:

$$\Omega^h_{ij|k} - \Omega^h_{ik|j} = 0.$$

Из этих уравнений и из (49.12) получаем (49.10) и, следовательно, получаем:

[49.2] *Для того, чтобы несимметрическая аффинная связность нулевой кривизны определяла просто-транзитивную группу, необходимо и достаточно, чтобы связность с коэффициентами* $\overline{\Lambda}^i_{jk} = \Lambda^i_{kj}$ *имела нулевую кривизну. Тогда эта вторая связность определит просто-транзитивную группу, взаимную с группой, определенной первой связностью.*

Если $\Lambda^h_{ijk} = 0$ и имеет место (49.10), то из (49.3), (49.5) и (49.11) следует, что

$$B^h_{ijk} = \Omega^l_{jk}\, \Omega^h_{il}\,. \qquad (49.13)$$

Обратно, если выполнено это условие, то, вследствие (49.6), имеет место (49.11). Таким образом, если удовлетворено (49.10), то из (49.5) и (49.3) следует, что $\Lambda^h_{ijk} = 0$. Тем самым, имеем теорему:

[49.3] *Для того, чтобы несимметрическая аффинная связность определяла просто-транзитивную группу необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения* (49.10) и (49.13).

Если мы отметим точкой с запятой ковариантное дифференцирование относительно Γ^i_{jk}, т. е., если мы в (47.14) заменим $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ на Γ^i_{jk} и запятую на точку с запятой, то получим:

$$\Omega^h_{ij;k} = \frac{\partial \Omega^h_{ij}}{\partial x^k} + \Omega^l_{ij}\,\Gamma^h_{lk} - \Omega^h_{lj}\,\Gamma^l_{jk} - \Omega^h_{il}\,\Gamma^l_{jk} =$$

$$= \Omega^h_{ij|k} + (\Omega^l_{ij}\,\Omega^h_{kl} + \Omega^l_{jk}\,\Omega^h_{il} + \Omega^l_{ki}\,\Omega^h_{jl}). \quad (49.14)$$

Следовательно, для просто-транзитивной группы

$$\Omega^h_{ij;k} = 0. \quad (49.15)$$

Обратно, если это условие и (49.13) удовлетворены, то из (49.14) и (49.11) получим (49.10). Вследствие (49.15) из (49.13) имеем:

$$B^h_{ijk;l} = 0. \quad (49.16)$$

50. Геометрия группового пространства. Так как параметрические группы любой группы просто-транзитивны и взаимны (§ 30), то результаты предыдущих параграфов позволяют определить для группового пространства две несимметрические аффинные связности и одну симметрическую. Фактически, мы уже в § 8 пользовались коэффициентами первых двух связностей, определяя их уравнениями

$$\left.\begin{aligned} L^\alpha_{\beta\gamma} &= -A^b_\beta\,\frac{\partial A^\alpha_\beta}{\partial a^\gamma} = A^\alpha_b\frac{\partial A^b_\beta}{\partial a^\gamma}, \\ \overline{L}^\alpha_{\beta\gamma} &= -\overline{A}^b_\beta\,\frac{\partial \overline{A}^\alpha_b}{\partial a^\gamma} = \overline{A}^\alpha_b\frac{\partial \overline{A}^b_\beta}{\partial a^\gamma}. \end{aligned}\right\} \quad (50.1)$$

В силу этого определения, векторы A^α_b абсолютно параллельны относительно первой связности, а $\overline{A}^\alpha_b$—относительно второй. Кроме того, соответствующие тензоры кривизны с компонентами $L^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ и $\overline{L}^\alpha_{\beta\gamma\delta}$, определенные формулами (21.17), равны нулю, т. е.

$$L^\alpha_{\beta\gamma\delta} = 0, \quad \overline{L}^\alpha_{\beta\gamma\delta} = 0. \quad (50.2)$$

Из результатов § 48 следует, что $\overline{L}^\alpha_{\beta\gamma} = L^\alpha_{\gamma\beta}$. Следовательно, геодезические (48.6) обеих связностей совпадают и являются интегральными кривыми уравнений

$$\frac{da^\beta}{dt}\left(\frac{d^2a^\alpha}{dt^2}+\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}\frac{da^\gamma}{dt}\frac{da^\delta}{dt}\right)-\frac{da^\alpha}{dt}\left(\frac{d^2a^\beta}{dt^2}+\right.$$
$$\left.+\Gamma^\beta_{\gamma\delta}\frac{da^\gamma}{dt}\frac{da^\delta}{dt}\right)=0, \qquad (50.3)$$

где

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}=\frac{1}{2}\left(L^\alpha_{\beta\gamma}+L^\alpha_{\gamma\beta}\right) \qquad (50.4)$$

суть коэффициенты симметрической свазности, определенной параметрическими группами. Для каждой геодезической имеем:

$$\frac{d^2a^\alpha}{dt^2}+\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}\frac{da^\gamma}{dt}\frac{da^\delta}{dt}=\varphi(t)\frac{da^\alpha}{dt},$$

где $\varphi(t)$ определенная функция t. Если мы определим параметр s уравнением

$$\frac{ds}{dt}=e^{\int\varphi(t)dt},$$

то предыдущие уравнения приведутся к

$$\frac{d^2a^\alpha}{ds^2}=\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}\frac{da^\gamma}{dt}\frac{da^\delta}{dt}=0. \qquad (50.5)$$

Таким образом, вдоль каждой геодезической можно так выбрать параметр s, называемый *аффинным параметром*, что ее уравнения примут вид (50.5). Сравнивая их с (47.22), мы замечаем, что s аналогично длине дуги в римановом пространстве.

В этом параграфе мы рассмотрим геометрические свойства группового пространства S, определенные введенными аффинными связностями. Большинство результатов получено Картаном и Схоутеном[1]), развившими эту теорию, следуя указаниям автора[2]) на результаты § 48. Они ввели термины (+)-параллелизм, (—)-параллелизм и (0)-параллелизм для связностей с коэффициентами $L^\alpha_{\beta\gamma}$, $\bar{L}^\alpha_{\beta\gamma}$ и $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ соответственно. Мы также будем пользоваться этой тер-

[1]) См. 1926, 1; Cartan, 1927, 2; Schouten, 1929, 1.
[2]) 1925, 1.

минологией. Напомним, что первые два параллелизма абсолютны, тогда как третий неабсолютен. Мы называем эти связности, соответственно (+)-*связность*, (—)-*связность* и (0)-*связность*.

В силу условия (8.4) в точке пространства S с координатами a_0^α, соответствующими единице группы G_r, векторы A_a^α и $\bar{A}_a^\alpha$ совпадают. Следовательно, векторные поля A_a^α и $\bar{A}_a^\alpha$ можно представлять, как поля в S, полученные из r векторов $A_a^\alpha(a_0)$ $(=\bar{A}_a^\alpha(a_0))$ соответственно (+)-параллельным и (—)-параллельным перенесением. Векторы в общей точке связаны уравнениями (8.14). Сравнивая эти уравнения с (39.2), мы видим, что векторы первого семейства, взятые в некоторой точке, преобразуются в векторы второго семейства в той же точке некоторым преобразованием присоединенной группы.

Если точка с координатами a^α переходит при преобразовании второй параметрической группы в точку с координатами a'^α, то из (6.7) и (9.2) следует, что

$$\frac{\partial a'^\alpha}{\partial a^\beta}=A_b^\alpha(a')A_\beta^b(a). \tag{50.6}$$

Образом вектора A_a^β при преобразовании второй параметрической группы является вектор $A_a^\beta\dfrac{\partial a'^\alpha}{\partial a^\beta}$, в силу (50.6), приводящийся к $A_a^\alpha(a')$, т. е. векторы каждого векторного поля A_a^α преобразуются второй параметрической группой в векторы того же поля. Аналогично, второе семейство векторов преобразуется в себя первой параметрической группой. Таким образом,

[50.1] *Векторные поля A_a^α и $\bar{A}_a^\alpha$ преобразуются в себя, соответственно, второй и первой параметрическими группами.*

В § 12 было уже показано, что траектории первой параметрической группы являются интегральными кривыми уравнений (50.5) и что уравнениями геодезических, проходящих через точку с координатами a^α, являются (12.1). Так как геодезические обеих связностей совпадают, то уравнения этих геодезических, как траекторий второй параметрической группы, имеют вид:

$$a'^{\alpha} = a^{\alpha} + t\bar{e}^{a} \bar{A}_{a} a^{\alpha} + \ldots, \tag{50.7}$$

где необходимо

$$\bar{e}^{a} \bar{A}_{a}^{\alpha}(a) = e^{a} A_{a}^{\alpha}(a), \quad \bar{A}_{a} f = \bar{A}_{a}^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial a^{\alpha}}.$$

Геодезические, $(+)$-параллельные данной, образуют конгруэнцию, которая обычно не совпадает с конгруэнцией геодезических, $(-)$-параллельных данной. Из теоремы [50.1] следует, что кривые первой конгруэнции преобразуются друг в друга преобразованиями второй параметрической группы, а второй конгруэнции — преобразованиями первой параметрической группы.

Однопараметрическая подгруппа группы G_r получается, как мы уже видели в § 13, когда a^{α} пробегают значения, определенные формулами (12.2) при фиксированных значениях e^{a}. Таким образом, (12.2) есть уравнения геодезической, проходящей через *начало*, т. е. через точку a_0^{α}, определяющую единицу группы G_r. Если b^{α} — любая точка S, не принадлежащая этой геодезической, то уравнение

$$T_{b'} = T_{a} T_{b} \tag{50.8}$$

определяет траекторию первой параметрической группы, проходящую через b. Она является интегральной кривой системы уравнений

$$\frac{db'^{\alpha}}{dt} = \frac{\partial b'^{\alpha}}{\partial a^{\beta}} \frac{da^{\beta}}{dt} = A_{a}^{\alpha}(b') A_{\beta}^{a}(a) \frac{da^{\beta}}{dt} =$$

$$= A_{a}^{\alpha}(b') A_{\beta}^{a}(a) e^{b} A_{b}^{\beta}(a) = e^{a} A_{a}^{\alpha}(b').$$

Так как для второй параметрической группы имеют место аналогичные результаты, то

[50.2]. *Траектории однопараметрической подгруппы первой (второй) параметрической группы $(+)$-параллельны ($(-)$-параллельны) траектории, проходящей через начало (a_0^{α}) и определяющей эту подгруппу.*

Рассмотрим две упорядоченные пары точек a^α, b^α и a'^α, b'^α группового пространства S, такие, что соответствующие им преобразования группы удовлетворяют условию:

$$T_b T_a^{-1} = T_{b'} T_{a'}^{-1}. \tag{50.9}$$

Если a^α является началом a_0^α, то из (50.9) имеем $T_{b'} = T_b T_{a'}$. Отсюда и из (50.8) заключаем, что точка b'^α является образом точки a'^α при преобразовании первой параметрической группы. Если точка b^α описывает траекторию первой параметрической группы (т. е. в этом случае мы имеем однопараметрическую подгруппу этой группы), то b'^α описывает траекторию этой же группы, и обе траектории, вследствие теоремы (50.2), $(+)$-параллельны. То же самое верно для любой пары точек a', b', связанной с парой a_0, b соотношением (50.9). Любые две такие пары точек связаны соотношением (50.9). Так как геодезические являются обобщением прямых линий евклидова пространства, то мы можем говорить об отрезках ab и $a'b'$ геодезических, как о векторах. По терминологии Картана [1]) два вектора, связанные соотношением (50.9), *эквиполлентны первым образом.*

Если две упорядоченные пары точек a^α, b^α и a'^α, b'^α таковы, что

$$T_a^{-1} T_b = T_{a'}^{-1}, \tag{50.10}$$

то аналогичными рассуждениями получаем, что ab и $a'b'$ — отрезки геодезических второй параметрической группы. В этом случае векторы ab и $a'b'$ называются *эквиполлентными вторым образом* [2]). Если обе части уравнения (50.9) умножим слева на T_b^{-1} и справа на T_a', то получим:

$$T_a^{-1}\, T_{a'} = T_b^{-1}\, T_{b'}\,.$$

Следовательно,

---

[1]) 1925, 2. Для подробного изучения предмета читатель отсылается к этой статье.

[2]) Cartan, 1927, 2, стр. 5.

[50.3] *Если ab и $a'b'$ эквиполлентны первым образом, то aa' и bb' эквиполлентны вторым образом и обратно.*

Как следствие теоремы [50.2], имеем:

[50.4] *Если два вектора эквиполлентны первым или вторым образом, то они являются отрезками* $(+)$*-параллельных или* $(-)$*-параллельных геодезических.*

Пусть G_p — подгруппа G_r, и пусть все однопараметрические подгруппы G_p представимы линейными комбинациями (с постоянными коэффициентами) символов $e_s^a X_a f$ $(s=1, \ldots, p)$. В общих параметрах a^α данная геодезическая первой параметрической группы подгруппы G_p, проходящая через точку a^α, определяется уравнениями (12.1), в которых e^a заменены соответствующими комбинациями e_s^a. Геометрическое место всех этих геодезических, проходящих через точку a^α, является подпространством S_p размерности p. В канонических параметрах уравнения S_p, проходящего через начало, скажем S_{0p}, имеют вид

$$u^\alpha = c^s e_s^\alpha t, \qquad (50.11)$$

где c^s — произвольные параметры. Точка S_{0p}, отличная от начала, имеет координаты $\bar{c}^s e_s^\alpha \bar{t}$, где $\bar{c}^s$ и $\bar{t}$ имеют определенные значения. Из (12.6) следует, что геодезические первой параметрической подгруппы, проходящие через эту точку, имеют уравнения:

$$u'^\alpha = \bar{c}^s e_s^\alpha \bar{t} + c^s e_s^\alpha t.$$

Пусть A — точка на такой геодезической, соответствующая значениям c_1^s и t_1. Если за c'^s и t' возьмем значения, удовлетворяющие уравнениям

$$c'^s t' = \bar{c}^s \bar{t} + e_1^s t,$$

то геодезическая с уравнениями $u'^\alpha = c'^s e_s^\alpha t'$, проходящая через начало, содержит A. Следовательно, для точек, достаточно близких к началу, все геодезические этой подгруппы первой параметрической группы лежат в S_{0p}.

Следовательно, S_{0p} является обобщением плоскости трехмерного евклидова пространства в том смысле, что геодезические, исходящие из точки подпространства в направлениях подпространства, целиком лежат в нем. Соответственно этому, мы говорим, что S_{0p} *плоско*. Вследствие теоремы [50.1], S_p, проходящее через некоторую точку P, получается из S_{0p}, преобразованием второй параметрической группы, переводящим начало в P. Так как каждая геодезическая S_{0p} преобразуется в $(+)$-параллельную геодезическую, то S_p, проходящее через P, плоско и параллельно S_{0p}, т. е. геодезические S, проходящие через некоторую точку S_p, параллельные геодезическим S_{0p}, лежат в S_p. Эти плоские подпространства являются также обобщением вполне геодезических подпространств риманова пространства[1]).

Предыдущие результаты можно получить другим способом. Если T_u — общее преобразование подгруппы G_p, то $T_u T_a$ определяет S_p, проходящее через точку a. Для двух частных значений u, например u_1 и u_2, мы имеем:

$$T_{a_1} = T_{u_1} T_a, \quad T_{a_2} = T_{u_2} T_a.$$

Пусть точка b не лежит в S_p, тогда в S_p, проходящем через b, имеется пара точек b_1 и b_2, определенная формулами

$$T_{b_1} = T_{u_1} T_b, \quad T_{b_2} = T_{u_2} T_b.$$

Отсюда:

$$T_{a_2} T_{a_1}^{-1} = T_{u_2} T_a T_a^{-1} T_{u_1}^{-1} = T_{u_2} T_{u_1}^{-1} = T_{b_2} T_{b_1}^{-1}.$$

Следовательно, $a_1 a_2$ и $b_1 b_2$ эквиполлентны первым образом и являются отрезками $(+)$-параллельных геодезических.

Аналогично, мы получим семейство плоских S_p, $(-)$-параллельных S_{0p}. Вообще говоря, эти два семейства различны. Если они совпадают, то для каждого a и каждого u должны иметь место равенства вида $T_u T_a =$

[1]) 1926, 3, стр. 183—186.

$=T_a T_{u'}$, т. е. G_p должна быть инвариантной подгруппой. Следовательно, мы имеем:[1])

[50.3] *Если G_r обладает подгруппой G_p, то в групповом пространстве S существуют два семейства плоских многообразий p измерений таких, что многообразия первого семейства $(+)$-параллельны друг другу, а второго семейства $(-)$-параллельны. Многообразия обоих семейств одинаковы тогда и только тогда, когда G_p — инвариантная подгруппа.*

Для связности с коэффициентами $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ мы имеем систему уравнений, аналогичных (48.5), именно:

$$\xi^\beta\left(\frac{d\xi^\alpha}{dt}+\xi^\delta\Gamma^\alpha_{\delta\gamma}\frac{da^\gamma}{dt}\right)-\xi^\alpha\left(\frac{d\xi^\beta}{dt}-\xi^\delta\Gamma^\beta_{\gamma\delta}\frac{da^\gamma}{dt}\right)=0,$$

решение ξ^α которых, если мы положим

$$a^\alpha=\varphi^\alpha(t), \tag{50.12}$$

дает в каждой точке кривой C, определенной формулами (50.12), некоторый вектор. Все эти векторы (0)-параллельны вдоль C. Если в таком решении заменим ξ^α на $\xi^\alpha\psi(t)$, где $\psi(t)$ выбрано соответствующим образом, то мы получим новые функции ξ^α, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{d\xi^\alpha}{dt}+\xi^\beta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{da^\gamma}{dt}=0. \tag{50.13}$$

Мы говорим, что решение ξ^α этих уравнений, определенное начальными значениями ξ^α_0, представляет в каждой точке кривой C вектор, полученный из ξ^α_0 (0)-параллельным перенесением.

Если S_p — подпространство p измерений, то можно выбрать координаты a^α таким образом, чтобы S_p определялось уравнениями

$$a^\sigma=0 \quad (\sigma=p+1, \ldots, r). \tag{50.14}$$

Если это — плоское подпространство, то уравнения (50.5) должны иметь решения, удовлетворяющие уравнениям

[1]) Cartan и Schouten, 1926, 1, стр. 813.

(50.14) и, следовательно, должно быть:

$$\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = 0 \text{ для } a^{\sigma} = 0 \begin{pmatrix} \lambda, \mu = 1 \ldots, p; \\ \sigma = p+1, \ldots, r \end{pmatrix}. \tag{50.15}$$

Для векторов, касательных к S_p, мы должны иметь $\xi^{\sigma} = 0$. Из (50.15) следует, что, если начальные значения решения уравнений (50.13) удовлетворяют этим условиям, то сами решения им тоже удовлетворяют. Итак имеем:[1])

[50.6] *Если вектор, касательный к плоскому подпространству,* (0)-*параллельно перенести вдоль кривой подпространства, то он останется касательным вектором.*

В S_{0p}, определенном некоторой подгруппой, вектор, взятый в точке P подпространства S_{0p} и $(+)$-параллельный касательному вектору в другой точке Q, касается S_{0p} в P. Обратно, предположим, что дано плоское пространство S_{0p}, проходящее через начало и обладающее этим свойством. Тогда для определенных значений e^{a}_{s} параллельные векторные поля $e^{a}_{s}A^{\alpha}_{a}$ в точках пространства S_{0p} касаются его. В соответствии с теоремой (50.6) вектор, (0)-параллельный любому из этих векторов, касается S_{0p}, т. е. $e^{a}_{s}A^{\alpha}_{a}(e^{b}_{t}A^{\beta}_{b})_{;\alpha}$ а также и

$$e^{a}_{s}A^{\alpha}_{a}(e^{b}_{t}A_{b})_{;\alpha}, - e^{b}_{t}A^{\alpha}_{b}(e^{a}_{s}A_{a})_{;\alpha}$$

являются векторами поля. Таким образом, мы должны иметь

$$e^{a}_{s}A^{\alpha}_{a}\frac{\partial}{\partial a^{\alpha}}(e^{b}_{t}A^{\beta}_{b}) - e^{b}_{t}A^{\alpha}_{b}\frac{\partial}{\partial a^{\alpha}}(e^{a}_{s}A^{\beta}_{a}) = \gamma^{u}_{st}e^{a}_{u}A^{\beta}_{a},$$

откуда следует, что $e^{a}_{s}A_{a}f$ являются образующими подгруппы первой параметрической группы и, следовательно, $e^{a}_{s}X_{a}f$ образующие подгруппы группы G_r. Так как аналогичные результаты имеют место для $(-)$-параллелизма, то мы имеем:

---

[1]) См. Cartan, 1925, 3, стр. 40.

[50.7] *Для того, чтобы многообразие геодезических, проходящих через начало в направлениях некоторой связки размерности p, представляло подгруппу порядка p, необходимо и достаточно, чтобы многообразие было плоским и чтобы в любой точке направления, (+)-или (—)-параллельные касательным направлениям в другой точке, были тоже касательными.*

Результаты § 48, 49 непосредственно применимы к групповому пространству S_a. Если мы через $\Omega^{\alpha}_{\beta\gamma}$ обозначим кососимметрическую часть $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$, то из (8.8) получим:

$$\Omega^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} c^{e}_{ab} A^{a}_{\beta} A^{b}_{\gamma} A^{\alpha}_{e}. \tag{50.16}$$

Из уравнений, аналогичных (49.13), имеем:

$$B_{\beta\gamma} \equiv B^{\alpha}_{\beta\gamma\alpha} = \Omega^{\alpha}_{\beta\epsilon} \Omega^{\epsilon}_{\gamma\alpha}.$$

Отсюда и из (50.16), (5.7) и (46.9) получаем:

$$B_{\beta\gamma} = \frac{1}{4} g_{ab} A^{a}_{\beta} A^{b}_{\gamma} = \frac{1}{4} g_{\beta\gamma}, \tag{50.17}$$

где $g_{\beta\gamma}$ определены этим образом.

Если группа G_r полупроста, то детерминант $|g_{ab}|$, согласно критерию Картана (§ 44), отличен от нуля, т. е. и $|g_{\alpha\beta}| \neq 0$. Следовательно, для группового пространства можно использовать $g_{\alpha\beta}$ в качестве фундаментального тензора римановой метрики. Из (49.16) и (50.17) следует, что $g_{\alpha\beta;\epsilon} = 0$. В этом случае можно показать, что коэффициенты $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ совпадают с символами Кристоффеля, определенными в (47.11). Следовательно, тензор кривизны является тензором римановой кривизны. Кроме того, $B_{\beta\gamma}$ является тензором Риччи $R_{\beta\gamma}$, и в этом случае уравнения (50.17) имеют вид: $R_{\beta\gamma} = \frac{1}{4} g_{\beta\gamma}$, т. е. пространство является пространством Эйнштейна[1]). Таким образом, мы получим теорему Картана и Схоутена:[2])

---

[1]) 1926, 3, стр. 113 - 114.

[2]) 1926, 1, стр. 810; см. также Schouten, 1929, 1, стр. 271

[50.8] *Для полупростой группы* (0)-*связность группового пространства риманова. Фундаментальный тензор имеет вид*:

$$g_{\alpha\beta} = g_{ab} A^a_\alpha A^b_\beta, \tag{50.18}$$

и это пространство является пространством Эйнштейна.

Если мы положим $A_{a|\alpha} = g_{\alpha\beta} A^\beta_a$*, то

$$\begin{aligned} A^\alpha_{a|\beta;\gamma} &= g_{\alpha\beta} A^\alpha_{a;\gamma} = g_{\alpha\beta}\left(-A^\delta_a L^\alpha_{\delta\gamma} + A^\delta_a \left\{{\alpha \atop \gamma\delta}\right\}\right) = \\ &= g_{\alpha\beta} A^\delta_a \Omega^\alpha_{\gamma\delta} = g_{bc} A^b_\alpha A^c_\beta A^\delta_a c^h_{ef} A^e_\gamma A^f_\delta A^\alpha_h = \\ &= g_{hc} c^h_{ea} A^c_\beta A^e_\gamma = c_{eac} A^c_\beta A^e_\gamma, \end{aligned}$$

где c_{eac} определены формулами (41.8). Так как эти постоянные по всем индексам кососимметричны, то

$$A_{a|\beta;\gamma} + A_{a|\gamma;\beta} = 0, \tag{50.19}$$

и из (50.18)

$$g_{\alpha\beta} A^\alpha_a A^\beta_a = g_{aa}, \tag{50.20}$$

Эти результаты будут интерпретированы теоремой (52.6). Для любой группы уравнения (50.18), в которых g_{ab} — любые постоянные с детерминантом $|g_{ab}|$, отличным от нуля, могут служить для введения римановой метрики в групповое пространство. Вычисляя для $g_{\alpha\beta}$ символы Кристоффеля, получим:

$$\left\{{\alpha \atop \beta\gamma}\right\} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + g^{\alpha\delta}\left(g_{\beta\varepsilon}\Omega^\varepsilon_{\delta\gamma} + g_{\gamma\varepsilon}\Omega^\varepsilon_{\delta\beta}\right).$$

Согласно вышеизложенному, для полупростой группы $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ равны символам Кристоффеля и, следовательно, римановы геодезические совпадают с общими геодезическими. Кроме того, мы имеем:

$$g_{\beta\varepsilon}\Omega^\varepsilon_{\delta\gamma} + g_{\gamma\varepsilon}\Omega^\varepsilon_{\delta\beta} = 0.$$

Если эти уравнения умножим на $g^{\beta\delta}$ и просуммируем по β и δ, то мы получим:

$$\Omega^\delta_{\delta\gamma} = 0,$$

* Это обозначение следует отличать от ковариантного дифференцирования. *(Прим. ред.)*

и из (50.16) будет следовать, что $c^a_{ab}=0$. Для того, чтобы римановы геодезические для некоторой группы совпадали с общими геодезическими должно иметь место это же равенство[1]).

Упражнения

1. Показать, что компоненты тензора кривизны удовлетворяют тождествам

$$R^h_{ijk} = -R^h_{ikj}, \quad R^h_{ijk} + R^h_{jki} + R^h_{kij} = 0.$$

(1926, 3, стр. 21.

2. Показать, что $R^h_{hjk}=0$, а $R_{ij} \equiv R^h_{ijh}$ является симметрическим тензором второго порядка. Он называется тензором Риччи.

(1926, 3, стр. 21.)

3. Если мы положим $R_{hijk} = g_{hl}R^l_{ijk}$, то

$$R_{hijk} = -R_{ihjk} = -R_{hikj} = R_{jkhi},$$

$$g^{hl}R_{lijk} = R^h_{ijk}, \quad g^{ij}R_{hijk} = R_{hk}, \quad g^{hk}R_{hijk} = R_{ij}.$$

(1926, 3, стр. 21.)

4. Если $R_{hijk} = \rho\,(g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik})$, то ρ должно быть постоянным. Такое V_n называется пространством постоянной кривизны.

5. Когда фундаментальная квадратичная форма риманова пространства положительно определенна, то ни один из главиых миноров любого порядка матриц $\|g_{ij}\|$ и $\|g^{ij}\|$ не равен нулю.

6. Следующие свойства относятся к эквиполлентности первым или вторым образом:

1° Вектор, эквиполлентный нулевому вектору, т. е. вектору, конец которого совпадает с началом, является нулевым.

2° Любой вектор эквиполлентен самому себе.

3° Если некоторый вектор эквиполлентен второму вектору, то второй эквиполлентен первому.

4° Если два вектора эквиполлентны, то эквиполлентны также векторы им противоположные.

5° Любая точка пространства является началом одного и только одного вектора, эквиполлентного данному вектору.

6° Два вектора, эквиполлентиые третьему, эквиполлеитиы друг другу.

7° Если ab и $a'b'$ эквиполлентны также, как bc и $b'c'$, то вектор ac эквиполлентен $a'c'$.

(Cartan, 1927, 2, стр. 4.)

---

[1]) Cartan и Schouten, 1926,1.

7. Если в пространстве S определена эквиполлентность векторов, обладающая семью свойствами упражнения 6, то S можно рассматривать как групповое пространство некоторой группы. Данная эквиполлентность будет эквиполлентностью первым образом этой группы.

(Cartan, 1927, 2, стр. 7.)

8. Для того, чтобы две группы одного и того же порядка были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы можно было установить между групповыми пространствами обеих групп точечное соответствие, преобразующее какую-нибудь эквиполлентность одного пространства в какую-нибудь эквиполлентность другого.

(Cartan, 1927, 2, стр. 11.)

51. Группы движений. Уравнения Киллинга. Каждое преобразование группы трехмерного евклидова пространства сохраняет длины и углы и, следовательно, оставляет инвариантными метрические свойства пространства. Обобщая эту концепцию, мы скажем, что риманово пространство допускает группу движений (преобразований пространства в себя), если каждое преобразование оставляет инвариантными метрические свойства пространства. Для того, чтобы получить условия, накладываемые на группу движений, рассмотрим инфинитезимальные преобразования.

Если V_n с фундаментальной формой

$$\varphi = g_{ij} dx^i dx^j \tag{51.1}$$

подвергнуто инфинитезимальному преобразованию

$$x'^j = x^j + \xi^j \delta t, \tag{51.2}$$

то

$$\delta dx^i = d\delta x^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} dx^j \delta t, \quad \delta g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \xi^k \delta t. \tag{51.3}$$

Следовательно, для того, чтобы $\delta\varphi = 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\xi^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + g_{jk} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} = 0, \tag{51.4}$$

что, используя (47.15), можно записать в виде:

$$\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = 0, \text{ где } \xi_i = g_{ik} \xi^k. \tag{51.5}$$

Эти уравнения были впервые получены Киллингом и известны как *уравнения Киллинга.*

Угол между двумя направлениями, определенными соответственно $d_1 x^i$ и $d_2 x^i$, дается формулой:[1])

$$\cos\alpha = \frac{g_{ij} d_1 x^i d_2 x^j}{\sqrt{(e_1 g_{ij} d_1 x^i d_1 x^j)(e_2 g_{kl} d_2 x^i d_2 x^j}}.$$

Вследствие (51.3), имеем:

$$\delta(g_{ij} d_1 x^i d_2 x^j) = \left(\xi^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{ik}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + g_{jk}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}\right) d_1 x^i d_2 x^j \delta t$$

и, следовательно, если имеет место (51.4), то $\delta\cos\alpha = 0$. Поэтому, уравнения (51.4) необходимы и достаточны, чтобы (51.2) определяло инфинитезимальное движение.

Если (51.4) удовлетворены, и координатная система выбрана таким образом, что

$$\xi^i = \delta_1^i, \tag{51.6}$$

то уравнения (51.4) приведутся к

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} = 0. \tag{51.7}$$

Таким образом, g_{ij} не зависят от x^1 и, следовательно фундаментальная форма (51.1) не меняется при конечных преобразованиях

$$x'^1 = x^1 + t, \quad x'^j = x^j \quad (j = 2, \ldots, n) \tag{51.8}$$

группы G_1, порожденной (51.2) Таким образом:

[51.1] *Если пространство допускает инфинитезимальное движение, то оно допускает группу G_1 движений, порожденных этим инфинитезимальным движением.*

Обратно, если имеет место (51.7), то уравнения (51.4) удовлетворяются величинами (51.6) и мы имеем:

[51.6] *Для того, чтобы V_n допускало группу G_1 движений, необходимо и достаточно, чтобы существо-*

[1]) 1926, 3. стр. 38,

вала координатная система, в которой все коэффициенты g_{ij} не зависят от какой-нибудь координаты, например x^1. Тогда кривые с параметром x^1 являются траекториями движения.

Из определения движения и свойств геодезических следует, как в конце § 47, что

[51.3] *При движении пространства геодезические переходят в геодезические.*

Для того, чтобы траектории двух движений были одинаковы, необходимо и достаточно, чтобы (51.5) удовлетворялись $\bar{\xi}^i$ и ξ^i, где $\bar{\xi}^i = \rho\xi^i$. Для того, чтобы последнее соблюдалось, должно быть $\frac{\partial\rho}{\partial x^i}\xi^j + \frac{\partial\rho}{\partial x^j}\xi^i = 0$. Заменяя j на k и исключая ξ^i из этих двух уравнений, мы получаем:

$$\frac{\partial\rho}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x^k}\xi^j - \frac{\partial\rho}{\partial x^j}\xi^k\right) = 0. \qquad (51.9)$$

Отсюда следует, что ρ постоянно и мы имеем:

[51.4] *Две различные группы движений в пространстве V_n не могут иметь общих траекторий.*

Из (51.4) следует, что

[51.5] *Вместе с ξ^i_a $(a = 1, \ldots, r)$, также и $c^a\xi^i_a$, где c^a — постоянные, являются компонентами инфинитезимального движения.*

В качестве следствия имеем:

[51.6] *Если каждая из r образующих группы G_r порождает группу G_1 движений, то каждое преобразование G_r является движением.*

Если нормально к гиперповерхности V_{n-1} в V_n проведем геодезические и отложим на этих геодезических от V_{n-1} равные длины, то конечные точки образуют гиперповерхность, нормальную к геодезическим. Таким путем мы получаем семейство гиперповерхностей, называемых *геодезически параллельными* [1]. Пусть координатная

[1] См. 1926, 3, стр. 57.

система такова, что это семейство гиперповерхностей является семейством пространств $x^1 = \mathrm{const}$. Выберем за координату x^1 расстояние, измеренное от исходного V_{n-1} вдоль нормальных геодезических. Тогда

$$g_{11} = e_1, \quad g_{1j} = 0 \quad (j = 2, \ldots, n). \qquad (51.10)$$

Теперь мы в состоянии доказать теорему:

[51.7] *Если пространство V_n допускает интранзитивную группу G_r движений и если гиперповерхность V_{n-1} является инвариантным многообразием, то гиперповерхности, геодезически параллельные V_{n-1}, будут также инвариантными многообразиями.* Действительно, если V_n отнесено к только что описанной системе координат, то $x^1 = 0$ по условию инвариантно. Из (19.6) следует, что $\xi^1_a = 0$ $(a = 1, \ldots, r)$, когда $x^1 = 0$. Из (51.4) для $i = j = 1$ и из (51.10) имеем $\frac{\partial \xi^1_a}{\partial x^1} = 0$ и, следовательно, $\xi^1_a = 0$ для всех значений x^1. Теорема доказана.

Если ранг матрицы $\|\xi^i_a\|$ группы движений G_r равен $n-1$, то наименьшие инвариантные многообразия обыкновенных точек являются гиперповерхностями, т. е. многообразиями $n-1$ измерений. Если мы выберем координатную систему так, чтобы эти гиперповерхности являлись координатными гиперповерхностями $x^1 = \mathrm{const}$, к которым ортогональны другие координатные гиперповерхности, то $g_{11} \neq 0$ и $g_{1j} = 0$ для $j = 2, \ldots, n$. В этом случае $\xi^1_a = 0$, и уравнения (51.4)для $i = j = 1$ сведутся к $\xi^k_a \frac{\partial g_{11}}{\partial x^k} = 0$ $(k = 2, \ldots, n)$. Так как ранг матрицы $\|\xi^i_a\|$ равен $n-1$, то g_{11} является функцией одного x^1. При соответствующем выборе x^1 имеет место (51.10). Следовательно,

[51.8] *Если наименьшие инвариантные многообразия группы движений G_r являются гиперповерхностями, то они геодезически параллельны.*

52. Параллельные переносы. Частный подкласс движений образуют движения, траектории которых являются геодезическими. Они называются параллельными переносами и являются, очевидно, обобщением параллельных переносов евклидова пространства.

Если координаты таковы, что компоненты параллельного переноса имеют значения (51.6), то траектории (51.8) являются геодезическими. В этом случае из уравнений (47.21) и (47.11) следует, что

$$\left\{ {j \atop 11} \right\} = g^{jk} \left(\frac{\partial g^{1k}}{\partial x^1} - \frac{1}{2} \frac{\partial g^{11}}{\partial x^k} \right) = 0 \quad \begin{pmatrix} j = 2, \ldots, n; \\ k = 1, \ldots, n \end{pmatrix}. \qquad (52.1)$$

Вследствие (51.7) это условие сводится к

$$g^{jk} \frac{\partial g^{11}}{\partial x^1} = 0 \quad (j,\ k = 2, \ldots, n). \qquad (52.2)$$

Из (47.10) следует, что детерминант этих уравнений равен $\frac{g_{11}}{g}$, где g — детерминант $|g_{ij}|$. Таким образом, из (52.2) и (51.7) следует, что g_{11} постоянная, может быть, равная нулю. Обратно, если g_{11} постоянная, и имеет место (51.7), то $\left\{ {i \atop 11} \right\} = 0$ и, следовательно, траектории (51.8) геодезические. Так как форма $g_{ij}\xi^i\xi^j$ инвариантна, то она в любой координатной системе постоянна. Из (51.2) следует, что квадрат перемещения точки при движении равен $eg_{ij}\,\xi^i\xi^j\,(\delta t)^2$. Таким образом,

[52.1]. *Для того, чтобы движение было параллельным переносом необходимо и достаточно, чтобы* $g_{ij}\xi^i\xi^j = \mathrm{const}$. *В этом случае все точки сдвигаются на равные расстояния.*

Это свойство является очевидным обобщением характеристического свойства параллельных переносов евклидова пространства. Так как $a\xi^i$, где a ненулевая постоянная, — вектор той же группы G_1, что и ξ^i, то

[52.2]. *Для того чтобы* ξ^i *группы* G_1 *движений был, с точностью до постоянного множителя, единич-*

ным или нуль-вектором, необходимо и достаточно, чтобы движение было параллельным переносом.

Характеристическое свойство параллельных переносов дается теоремой:

[52.3) *Для того, чтобы поле единичных векторов или нуль-векторов определяло параллельный перенос, необходимо и достаточно, чтобы вдоль любой геодезической векторы образовывали с ней постоянный угол.*

Для того, чтобы доказать эту теорему, за параметр вдоль геодезической C мы выберем длину дуги s, так что геодезическая будет удовлетворять уравнениям (47.22). Косинус угла между вектором ξ^i и C равен $\xi_j \frac{dx^j}{ds}$ [1]). Для того, чтобы он был постоянен, необходимо чтобы

$$\frac{d}{ds}\left(\xi_j \frac{dx^j}{ds}\right) = \frac{\partial \xi_j}{\partial x^k}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^j}{ds} + \xi_j \frac{d^2x^j}{ds^2} = \xi_{j,\,k}\frac{dx^j dx^k}{ds\ ds} = 0.$$

Так как это условие должно иметь место для любой геодезической, то мы получаем (51.3). А так как ξ^i единичный или нуль-вектор, то движение является параллельным переносом. Вследствие теорем [52.2] и [52.3] имеем:

[52.4] *Траектории двух групп G_1 параллельных переносов пересекаются под постоянным углом* [2]).

Из теорем [51.5], [52.1] и [52.4] мы получаем:

[52.5] *Если ξ_a^i $(a = 1, \ldots, p)$ — векторы параллельных переносов, то таким же вектором является $c^a \xi_a^i$, где c^a — произвольные постоянные.*

Из (50.19) и (50.20) следует, что инфинитезимальные преобразования первой параметрической группы в групповом пространстве S полупростой группы являются параллельными переносами. Так как то же самое верно для второй параметрической группы, то мы получаем теорему Картана-Схоутена: [3])

---

[1]) В случае нуль-векторов это принимается за определение косинуса угла. См. 1926, 3, 38.

[2]) Bianchi, 1918, 1, стр. 501.

[3]) 1926, 1, стр. 811.

[52.6] *Инфинитезимальные преобразования первой и второй параметрических групп полупростой группы являются параллельными переносами группового пространства.*

53. Определение групп движений. Теорема [51.2] служит критерием, допускает или нет данное риманово пространство однопараметрическую группу движений. Вместо того, чтобы опираться на эту теорему, рассмотрим, при каких условиях уравнения (51.4) или им эквивалентные (51.5) допускают, по крайней мере, одно решение.

Ковариантно дифференцируя уравнения (51.5), получаем:

$$\xi_{i,\,jk}+\xi_{j,\,ik}=0. \tag{53.1}$$

Вместе с этими уравнениями имеют место и

$$\xi_{i,\,jk}+\xi_{j,\,ik}+\xi_{i,\,kj}+\xi_{k,\,ij}-(\xi_{j,\,ki}+\xi_{k,\,ji})=0.$$

Из (47.16) следует, что

$$\xi_{i,\,jk}-\xi_{i,\,kj}=\xi_h R^h_{ijk}. \tag{53.2}$$

Так что предыдущие уравнения эквивалентны следующим:

$$2\xi_{i,\,jk}+\xi_h\,(R^h_{ijk}+R^h_{jik}+R^h_{kij})=0.$$

Вследствие тождеств упражнения 1, § 50, эти уравнения сводятся к

$$\xi_{i,\,jk}=-\xi_h R^h_{kij}. \tag{53.3}$$

Вместе с этими уравнениями имеют место также (53.1) и (53.2).

Условия интегрируемости этих уравнений получаются из тождеств Риччи (см. (47.16)):

$$\xi_{i,\,jkl}-\xi_{i,\,jlk}=\xi_{h,\,j}\,R^h_{ikl}+\xi_{i,\,h}\,R^h_{jkl},$$

и имеют вид:

$$\xi_h\,(R^h_{kij,\,l}-R^h_{lij,\,k})+\xi_{h,\,l}\,R^h_{kij}-\xi_{h,\,k}\,R^h_{lij}+\xi_{h,\,j}\,R^h_{ikl}+$$
$$+\xi_{i,\,h}\,R^h_{jkl}=0. \tag{53.4}$$

Если (53.3) напишем в виде:

$$\frac{\partial \xi_{i,j}}{\partial x^k} = \xi_{h,j}\begin{Bmatrix} h \\ ik \end{Bmatrix} + \xi_{,h}\begin{Bmatrix} h \\ jk \end{Bmatrix} - \xi_h R^h_{kij} \qquad (53.5)$$

и заметим, что по определению,

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} = \xi_h \begin{Bmatrix} h \\ ij \end{Bmatrix} + \xi_{i,j}, \qquad (53.6)$$

то мы увидим, что решение (53.3) сводится к решению системы уравнений (53.5) и (53.6) от $n(n+1)$ неизвестных ξ_i, $\xi_{i,j}$, связанных условиями (51.5). Следовательно, в терминологии § 1 система смешанная, уравнения (51.5) составляют систему F_0 и (53.4) систему F_1. Если (53.4) являются следствиями (51.5), то так как последние налагают $\frac{n(n+1)}{2}$ условий, то общее решение системы содержит $\frac{n(n+1)}{2}$ параметров. Если (53.4) не следуют из (51.5), то мы дифференцируем (53.4) и рассуждаем, как в § 1. Вопрос о существовании решения и количества параметров, от которых оно зависит, сводится, согласно § 1 (см. упражнение 2, § 3), к вопросу совместности некоторой последовательности уравнений. Кроме того, если существует p независимых решений, то любое решение является их линейной комбинацией (с постоянными коэффициентами).

Мы рассмотрим случай, когда (53.4) есть следствие (51.5).

Тогда имеем:

$$R^h_{kij,l} - R^h_{lij,k} = 0. \qquad (53.7)$$

Другие члены (53.4) дают:

$$\xi_{h,p}(\delta^p_l R^h_{kij} - \delta^p_k R^h_{lij} + \delta^p_j R^h_{ikl} - \delta^p_i R^h_{jkl}) = 0,$$

откуда, в силу (51.5), следует:

$$\delta^p_l R^h_{kij} - \delta^h_l R^p_{kij} - \delta^p_k R^h_{lij} + \delta^h_k R^p_{lij} +$$
$$+ \delta^p_j R^h_{ikl} - \delta^h_j R^p_{ikl} - \delta^p_i R^h_{jkl} + \delta^h_i R^p_{jkl} = 0. \qquad (53.8)$$

Свертывая по l и p, мы получаем (см. упражнения 1,2, § 50):

$$R^h_{kij} = \frac{1}{n-1}(\delta^h_j R_{ik} - \delta^h_i R_{jk}). \qquad (53.9)$$

Умножая на g_{hl} и суммируя по h, получаем (см. упражнение 3, § 50):

$$R_{lkij} = \frac{1}{n-1}(g_{jl} R_{ik} - g_{il} R_{jk}). \qquad (53.10)$$

Умножим (53.10) на g^{ik} и просуммируем по k и i. В результате получим:

$$nR_{jl} = Rg_{jl},$$

так что из (53.10) будем иметь:

$$R_{lkij} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{lj} g_{ki} - g_{il} g_{jk}), \qquad (53.11)$$

где $R = g^{ij} R_{ij}$. Таким образом, V_n является пространством постоянной кривизны (см. упражнение 4, § 50). Из (53.9) мы имеем:

$$R^h_{kij} = \frac{R}{n(n-1)}(\delta^h_i g_{ik} - \delta^h_j g_{jk}),$$

значения которых тождественно удовлетворяют (53.8), и также (53.7), ввиду (47.15). Таким образом, имеем:

[53.1] *Уравнения Киллинга тогда и только тогда, имеют решения, содержащие* $\frac{n(n+1)}{2}$ *параметров, когда* V_n *является пространством постоянной кривизны. Во всех других случаях решения зависят от меньшего числа параметров.*

Покажем, что если $X_1 f$ и $X_2 f$ — символы двух однопараметрических групп движений, то символом такой группы является и $(X_1, X_2) f$. Если мы через ξ^i обозначим вектор последнего символа, то

$$\xi^i = \xi^k_1 \frac{\partial \xi^i_2}{\partial x^k} - \xi^k_2 \frac{\partial \xi^i_1}{\partial x^k} = \xi^k_1 \xi^i_{2,\,k} - \xi^k_2 \xi^i_{1,\,k}. \qquad (53.12)$$

Полагая $\xi_i = g_{ij}\xi^j$, из (51.5) получим:

$$\xi_i = -\xi_1^k \xi_{2k,\,i} + \xi_2^k \xi_{1k,\,i}.$$

В силу (53.3) и свойств R_{hijk} (упражнение 3, § 50), имеем:

$$\xi_{i,\,j} = \xi_1^k \xi_2^h (-R_{kijh} + R_{kjih}) - \xi_{1,\,j}^k \xi_{2k,\,i} + \xi_{2,\,j}^k \xi_{1k,\,i},$$

откуда следует (51.5). Таким образом,

[53.2] *Если $X_a f$ $(a = 1, \ldots, p)$ образующие p однопараметрических групп движений, то каждый коммутатор $(X_a, X_b) f$ для $a, b = 1, \ldots, p$ также порождает однопараметрическую группу движений.* Отсюда, и из замечаний, следующих за уравнениями (53.3) и (53.6), следует:

[53.3] *Если $X_a f$ $(a = 1, \ldots, p)$ — образующие полной системы однопараметрических групп движений, то они порождают группу G_p движений.*

Комбинируя этот результат с теоремой [51.1], получаем:

[53.4] *Пространство V_n постоянной кривизны допускает группу движений от $\frac{n(n+1)}{2}$ параметров. Во всяком другом случае группа движений пространства имеет меньшее число параметров.*

Упражнения

1. Доказать аналитически, что при движении V_n геодезические переходят в геодезические.

2. Показать, что, если (47.5) — уравнения движения пространства V_n, то в (47.7) g'_{ij} и g_{ij} — одинаковые функции x'^i, и x^i соответственно. Обратно, если для инфинитезимальных преобразований это имеет место, то уравнения Киллинга удовлетворены.

3. Показать, что уравнения (53.3) можно написать в виде:

$$\xi^i_{,\,jk} = \xi^h R^i_{jkh}.$$

4. Преобразования группы движений в любой точке имеют порядок нуль или единица.

5. V_3 с фундаментальной формой

$$\varphi = e_1 (dx^1)^2 + X_1 [e_2 (dx^2)^2 + e_3 (dx^3)^2],$$

где e_i — плюс или минус единицы, а X_1 — функция одного x^1, допускает интранзитивную группу G_3 движений, символы которой имеют вид:

p_i, $e_j x^j p_i - e_i x^i p_j$ ($i = 2$, 3; $i \neq j$; по i, j не суммируется),

(Bianchi, 1918, 1, стр. 545.)

6. V_4 с фундаментальной формой

$$e_1 (dx^1)^2 + X_1 [e_2 (dx^2)^2 + e_3 (dx^3)^2 + e_4 (dx^4)^2],$$

где e — плюс или минус единицы и X_1 — функция одного x^1, допускает интранзитивную группу G_6 движений с символами p_i, $e_j x^j p_i - e_i x^i p_j$ ($i = 2$, 3, 4; $i \neq j$; по i, j не суммируется).

(Fubini, 1904, 2, стр. 64.)

7. V_4 с фундаментальной формой

$$\varphi = (dx^1)^2 + X_1 \{ (dx^2)^2 + e^{2x^2} [(dx^3)^2 + (dx^4)^2] \},$$

где X_1 — функция только x^1, допускает интранзитивную группу G_6 движений с символами

$$p_i, \; x^j p_i - x^i p_j, \; -p_2 + x^3 p_3 + x^4 p_4,$$

$$-x^i p_2 + \frac{1}{2} [(x^i)^2 - (x^j)^2 - e^{-2x^2}] p_i + x^i x^j p_j$$

$$\left(\begin{array}{l} i, j = 3,4; \quad i \neq j); \\ \text{по } i, j \text{ не суммируется} \end{array} \right).$$

(Fubini, 1904, 2, стр. 64.)

8. V_2 допускает параллельный перенос тогда и только тогда, когда его кривизна равна нулю.

9. Если пространство обладает полем абсолютно параллельных векторов, то они являются векторами переноса.

(1926, 3, стр. 239.)

10. Векторы группы G_1 движений образуют постоянные углы с любой неминимальной геодезической.

54. Другой вид уравнений Киллинга. С помощью формул § 21 мы придадим уравнениям Киллинга вид, полезный при решении некоторых задач.

Если общий ранг q матрицы

$$M = \|\xi_a^i\| \tag{54.1}$$

меньше r, то мы перенумеруем ξ_a^i таким образом, чтобы матрица (54.1) для $a=1, \ldots, q$ имела ранг q. Когда $q<n$, мы пользуемся специальной координатной системой, в которой имеет место (21.8), и уравнения (51.4) для $a=1, \ldots, q$ сводятся к

$$\xi_h^l \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} + g_{il}\frac{\partial \xi_h^l}{\partial x^j} + g_{lj}\frac{\partial \xi_h^l}{\partial x^i} = 0 \begin{pmatrix} h, l = 1, \ldots, q; \\ i, j = 1, \ldots, n \end{pmatrix}. \tag{54.2}$$

Если эти уравнения умножить на ξ_m^h, определенные формулами (21.6), и просуммировать по h, то вследствие (21.9) и (21.12),

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} = g_{il}\Delta_{jm}^l + g_{lj}\Delta_{im}^l \begin{pmatrix} l, m = 1, \ldots, q; \\ i,\ j = 1, \ldots, n \end{pmatrix}. \tag{54.3}$$

Если $q=n$, то уравнения (54.2) имеют место для $h, l, m = 1, \ldots, n$. Если $q=r$, уравнения (54.2) или (5.43), им эквивалентные, являются единственными условиями. Однако, когда $q<r$, в дополнение к (54.2) имеют место уравнения (51.4), в которых a принимает значения $q+1, \ldots, r$. Если в эти уравнения подставим (21.2) и (21.8), то с помощью (54.3) мы получим следующую эквивалентную систему

$$\xi_h^l \left(g_{il}\frac{\partial \varphi_s^h}{\partial x^j} + g_{lj}\frac{\partial \varphi_s^h}{\partial x^i} \right) = 0 \begin{pmatrix} l, h = 1, \ldots, q; \\ s = q+1, \ldots, r; \\ i, j = 1, \ldots, n \end{pmatrix}. \tag{54.4}$$

Когда $q<r$, уравнения (54.3) и (54.4) отвечают нашей цели.

Условия интегрируемости уравнений (54.3) имеют вид:

$$g_{il}\,\Delta_{jmp}^l + g_{lj}\Delta_{imp}^l = 0 \begin{pmatrix} l, m, p = 1, \ldots, q; \\ l, j = 1, \ldots, n \end{pmatrix}, \tag{54.5}$$

где Δ^l_{jmp} определены в (21.17). Когда $q=r$ и $r\leqslant n$, мы из (21.19) заключаем, что (54.5) удовлетворяются тождественно, и, следовательно, уравнения (54.3), являющиеся в этом случае единственными уравнениями, вполне интегрируемы. Следовательно, решение определяется произвольными начальными значениями g_{ij}, которые при $n>r$ могут быть произвольными функциями переменных $x^{r+1}, \ldots, x^n$. Таким образом[1]):

[54.1] *Любая r-параметрическая группа Ли от n переменных, общий ранг матрицы* $\|\xi^i_a\|$ *которой равен* $r\,(\leqslant n)$, *является группой движений риманова пространства, фундаментальный тензор которого содержит* $\frac{n(n+1)}{2}$ *произвольных функций.*

Если $n=r$, т. е., если группа просто транзитивна, решение, как показал Бианки[2]), содержит $\frac{n(n+1)}{2}$ произвольных постоянных. В частности, если группа просто транзитивна и абелева, то можно выбрать координаты так, чтобы $\xi^i_a=\delta^i_a$ (§ 13). Тогда из (51.4) следует, что g_{ij} постоянны и, следовательно, v_n евклидово[3]).

В другой форме этот результат уже получен в § 48. Действительно, (48.20) являются уравнениями Киллинга, где g_{ij} определены (48.14) через векторы взаимной группы. Определение этих векторов зависит от n^2 произвольных постоянных, но из определения g_{ij} следует, что они зависят только от $\frac{n(n+1)}{2}$ произвольных постоянных.

Прежде чем перейти к общему случаю $q<r$, мы рассмотрим интранзитивные абелевы группы. Как было показано в § 13, координаты можно выбрать таким образом, чтобы

$$\xi^l_h=\delta^l_h,\quad \xi^s_h=0\quad \left(\begin{array}{c} h, l=1, \ldots, q; \\ s=q+1, \ldots, n \end{array}\right), \tag{54.6}$$

1) См. Fubini, 1903, 1, стр. 54.
2) 1897, 1, стр. 291.
3) См. Bianchi, 1918, 1, стр. 521.

где q — общий ранг матрицы (54.1). Из (21.5) видно, что функции Φ^h_{as} равны нулю, и из (21.11) следует, что функции φ^h_s не зависят от $x^1, \ldots, x^q$. В этом случае, как следует из (54.4), каждая система φ^h_s, т. е. φ^h_s для фиксированного s и $h = 1, \ldots, q$, удовлетворяет уравнениям:

$$g_{hi}\frac{\partial\varphi^h}{\partial x^j} + g_{hj}\frac{\partial\varphi^h}{\partial x^i} = 0. \tag{54.7}$$

Если i и j принимают значения $1, \ldots, q$, то, ввиду предыдущих результатов, эти уравнения удовлетворены. Если i принимает значения от 1 до q и j — от $q+1$ до n, то мы получаем первую систему, а если $i = j = q+1, \ldots, n$, — вторую систему следующих уравнений (по t не суммируется):

$$g_{hl}\frac{\partial\varphi^h}{\partial x^t} = 0, \quad g_{ht}\frac{\partial\varphi^h}{\partial x^t} = 0 \quad \begin{pmatrix} h, l = 1, \ldots, q; \\ t = q+1, \ldots, n \end{pmatrix}. \tag{54.8}$$

Из первой системы следует, что детерминант $|g_{hl}|$ равен нулю, так как, в противном случае, все φ^h_s были бы постоянны, что противоречит предположению. Для того, чтобы и вторая система удовлетворялась, должны выполняться соотношения

$$g_{hi} = g_{hl}A^l_i \quad (h, l = 1, \ldots, q;\ i = 1, \ldots, n),$$

откуда

$$|g_{hs}| = |g_{hl}|\,|A^l_s|,$$

где s принимает любые q значений из системы $1, \ldots, n$. Следовательно, ранг матрицы $\|g_{hi}\|$ равен самое большее $r-1$, т. е. $|g_{ij}| = 0\ (i, j = 1, \ldots, n)$, в противоречии с предположением. Поэтому $q = r$, и, используя теорему [54.1], получаем:

[54.2] *Интранзитивная абелева группа G_r является группой движений тогда и только тогда, когда ранг матрицы $\|\xi^i_a\|$ равен r. Кроме того, произвольная* *абелева группа, удовлетворяющая этому условию, является группой движений*[1]).

Мы рассмотрим теперь случай неабелевой группы, для которой $q < r$. Для этого случая мы получим смешанную систему, состоящую из уравнений (54.3) и (54.4). Последние образуют систему F_0 первого параграфа. Если группа интранзитивна, то в этих уравнениях $x^1, \ldots, x^q$ являются независимыми переменными, а $x^{q+1}, \ldots, x^n$ входят как параметры.

Из (21.18) следует, что (54.5) удовлетворены вследствие (54.4). Введем обозначение

$$A_{sij} = \xi^l_h \left(g_{il} \frac{\partial \varphi^h_s}{\partial x^j} + g_{jl} \frac{\partial \varphi^h_s}{\partial x^i} \right).$$

Из (54.3), (21.13) и (21.15) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x^m} (\xi^l_h g_{il}) = \xi^l_h \xi^{l_1}_m (c^p_{l_1 h} + c^t_{l_1 h} \varphi^p_t)\, g_{il} + \xi^l_h g_{pl} \Delta^p_{im}$$

для $h, l, l_1, m, p = 1, \ldots, q$; $t = q+1, \ldots, r$; $i = 1, \ldots, n$. Аналогично, из (21.11), (21.5) и (21.14) получаем:

$$\frac{\partial^2 \varphi^h_s}{\partial x^j \partial x^m} = \xi^{l_1}_m \left[(c^t_{l_1 s} - c^t_{l_1 p} \varphi^p_s) \frac{\partial \varphi^h_t}{\partial x^j} - (c^h_{l_1 p} + c^t_{l_1 p} \varphi^h_t) \frac{\partial \varphi^p_s}{\partial x^j} \right] + \\ + \xi^{l_1}_p \Delta^p_{jm} \Phi^h_{l_1 s}.$$

Используя эти формулы, имеем:

$$\frac{\partial A_{sij}}{\partial x^m} = \Delta^p_{im} A_{spj} + \Delta^p_{jm} A_{spi} + \xi^{l_1}_m (c^t_{l_1 s} - c^t_{l_1 p} \varphi^p_s) A_{tij}.$$

Пусть G_r интранзитивна. Из вида последних уравнений следует, что, если уравнения (54.4) совместны для частных значений $x^1, \ldots, x^n$ (например для x^i_0), и из этих уравнений определена система значений g_{il} ($i = 1, \ldots, n$; $l = 1, \ldots, q$), для которой $\| g_{il} \|$ имеет ранг q, то, приняв эти значения вместе с произвольными g_{ab} ($a, b = q+1, \ldots, n$),

[1]) См. Bianchi, 1918, 1, стр. 521.

для которых $|g_{ij}| \neq 0$, за начальные значения, получим решения g_{ij} уравнений (54.3), удовлетворяющие (54.4) для значений переменных в той окрестности начальных данных, в которой эти решения определены. Таким образом, имеем следующую теорему:

[54.3] *Пусть общий ранг q матрицы $\|\xi_a^i\|$ интранзитивной группы G_r меньше r, и пусть для рассматриваемой координатной системы $\xi_a^t = 0$ $(t = q+1, \ldots, n)$. Пусть для частных значений координат таких, что ранг матрицы $\|g_{tl}\|$ равен q, уравнения (54.4) совместны, тогда существует риманово пространство, для которого G_r является группой движений, и компоненты его тензора g_{ij} зависят, по меньшей мере, от $\frac{(n-q)(n-q+1)}{2}$ произвольных постоянных.*

Если группа кратно транзитивна, $q = n < r$, то в уравнениях (54.4) l принимает значения $1, \ldots, n$, и все начальные данные должны удовлетворять этим уравнениям. В этом случае мы имеем:

[54.4] *Если для кратно транзитивной группы существуют частные значения x^i, для которых уравнения (54.4) совместны и допускают решения g_{ij} с детерминантом $|g_{ij}|$, не равным нулю, то каждое такое решение определяет риманово пространство, группой движения которого является данная группа.*

55. Интранзитивные группы движений. Задача об интранзитивных группах движений сводится к изучению транзитивных групп с помощью следующей теоремы Фубини [1]).

[55.1] *Если пространство V_n допускает интранзитивную группу движений G_r, то группа, индуцированная в наименьшем инвариантном многообразии V_q, где q общий ранг матрицы $\|\xi_a^i\|$, имеет r параметров. Кроме того, конечные уравнения G_r при соответ-*

[1]) 1903, 1, стр. 40. Приведенное здесь доказательство второй теоремы частв принадлежит автору, см. 1932, 2, стр. 199—201.

ствующем выборе координат приводятся к уравнениям транзитивной группы q переменных.

Для доказательства первой части этой теоремы, мы напомним (§ 20), что каждая обыкновенная точка V_n лежит в наименьшем инвариантном многообразии V_q, и если порядок группы, индуцированной в V_q, не равен r, то существует подгруппа G_σ группы G_r, оставляющая все точки этого V_q неподвижными. Пусть существует инвариантное многообразие V_q^0, все точки которого лево-инвариантны относительно подгруппы G_σ группы G_r, и пусть P обыкновенная точка, не принадлежащая V_q^0. Рассмотрим V_{q+1}, составленное из бесконечного числа V_q и содержащее V_q^0 и V_q, проходящее через P. Очевидно, что V_{q+1} является инвариантным многообразием группы G_r и, в частности, подгуппы G_σ, оставляющей точки V_q^0 неподвижными. Любое движение G_r индуцирует движение в V_{q+1}, переводящее геодезические в геодезические и сохраняющее углы и длины (§ 51). Точка P лежит на некоторой геодезической V_{q+1}, нормальной к V_q^0. Эта геодезическая инвариантна относительио группы, индуцированной в V_{q+1} подгруппой G_σ, ибо углы сохраняются, а геодезические переходят в геодезические. Следовательно, P остается на месте, потому что длины не меняются. Так как P—любая точка, то G_σ должна состоять из единицы. Тем самым доказана первая часть теоремы.

Для того чтобы доказать вторую часть теоремы, мы используем результаты § 54 и формулы § 21. Заметим, в частности, что координаты x^i таковы, что имеет место (21.8). Произведем невырожденное преобразование координат

$$x^l = \varphi^l(x'^1, \ldots, x'^n), \quad x^s = x'^s \begin{pmatrix} l = 1, \ldots, q; \\ s = q+1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{55.1}$$

так, чтобы компоненты $\xi_h'^l$ для $l, h = 1, \ldots, q$ перестали зависеть от $x'^{q+1}, \ldots, x'^n$. Обозначим через

$$x'^l = \varphi'^l(x^1, \ldots, x^n), \quad x'^s = x^s \tag{55.2}$$

обращение (55.1). Из уравнений (48.2) и (21.8) следует, что $\xi'^{s}_{h}=0$,

$$\text{и} \quad \xi^{l}_{h}=\xi'^{\lambda}_{h}\frac{\partial x^{l}}{\partial x'^{\lambda}}, \qquad \xi'^{\lambda}_{h}=\xi^{l}_{h}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{l}}\,^{1)}. \tag{55.3}$$

Предполагая, что новая координатная система обладает желаемым свойством, дифференцируя первую систему (55.3) по x'^{σ} и используя (21.13), вторую систему из (55.3) и тот факт, что детерминант $|\xi^{l}_{h}|$ отличен от нуля, мы получаем:

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{m}}\frac{\partial^2 x^{l}}{\partial x'^{\lambda}\partial x'^{\sigma}}+\Delta^{l}_{im}\frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{\sigma}}=0. \tag{55.4}$$

Для преобразования (55.1) имеем:

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{m}}\frac{\partial x^{m}}{\partial x'^{\mu}}=\delta^{\lambda}_{\mu}.$$

Следовательно, умножая (55.4) на $\frac{\partial x^{m}}{\partial x'^{\mu}}$, суммируя по m, мы получим:

$$\frac{\partial^2 x^{l}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\sigma}}+\Delta^{l}_{im}\frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{\sigma}}\frac{\partial x^{m}}{\partial x'^{\mu}}=0. \tag{55.5}$$

Если эти уравнения продифференцируем по x'^{λ}, с помощью (55.5) упростим полученные уравнения и вычтем из результата уравнения, полученные из него перестановкой λ и μ, то мы придем к

$$\Delta^{l}_{imp}\frac{\partial x'}{\partial x'^{\sigma}}\frac{\partial x^{m}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{p}}{\partial x'^{\lambda}}=0, \tag{55.6}$$

где Δ^{l}_{imp} определены в (21.17). Если продифференцируем уравнения (55.5) по x'^{τ} для $\tau=q+1,\cdots,n$, с помощью (55.5) упростим полученные уравнения и вычтем из результата уравнения, полученные из него перестановкой σ и τ,

[1]) В этих и следующих уравнениях h, l, m, p, λ, μ принимают значения от 1 до q; $\sigma, r=q+1,\ldots,n$; $i, a=1,\ldots,n$.

то мы придем к уравнениям, тождественно удовлетворяющимся в силу (21.16). Таким образом, (55.6) являются единственными условиями интегрируемости системы (55.5). Заменим (55.5) системой

$$\frac{\partial x^l}{\partial x'^\alpha} = \psi^l_\alpha, \quad \frac{\partial \psi^l_\mu}{\partial x'^\sigma} = \frac{\partial \psi^l_\sigma}{\partial x'^\mu} = -\Delta^l_{pm}\psi^p_\sigma\psi^m_\mu - \Delta^l_{\sigma m}\psi^m_\mu, \tag{55.7}$$

условия интегрируемости которой имеют вид

$$\left(\Delta^l_{hmp}\psi^h_\sigma + \Delta^l_{\sigma mp}\right)\psi^m_\mu\psi^p_\lambda = 0. \tag{55.8}$$

Уравнения такого вида изучены в § 1, (55.8) в терминологии § 1 является системой F_1.

Когда $q = r$, уравнения (55.8), в силу (21.19), удовлетворяются тождественно, и, следовательно, система (55.7) вполне интегрируема. Так как эта система не содержит производных ψ^l_μ по $x^1, \cdots, x^q$, то эти и высшие производные можно выбрать произвольно. При выборе начальных значений функций ψ^l_μ мы должны обеспечить невырожденность преобразования. Таким образом, мы получаем теорему:

[55.2] *Если ранг матрицы* $\|\xi^i_a\|$ *интранзитивной группы* G_r *равен* r, *то* в V_n *существует координатная система, в которой каждое* ξ^i_a *является, самое большее, функцией* $x^1, \ldots, x^r$, *и в которой наименьшие инвариантные многообразия имеют уравнения*

$$x^{r+1} = \text{const}, \cdots, x^n = \text{const}.$$

Когда $q < r$, мы должны принять во внимание уравнения (54.4). Умножим их на g^{it} для $t = q+1, \ldots, n$, просуммируем по i, тогда, так как $\xi^t_h = 0$, мы получим:

$$\xi^l_h g_{lj}\frac{\partial \varphi^h_\theta}{\partial x^i} = 0.$$

Если мы эти уравнения умножим на g^{jm}, просуммируем по j и заметим, что детерминант $|\xi^l_h|$ отличен от нуля, то найдем, что $q\,(r-q)$ функций $\overset{h}{\varphi}_s$ являются решениями $n-q$ уравнений:

$$g^{it}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}=0 \qquad \begin{pmatrix} i=1,\ldots,n; \\ t=q+1,\ldots,n \end{pmatrix}. \tag{55.9}$$

Следовательно, имеем не более q независимых функций φ.

Допустим, что q функций φ независимы, и обозначим их через $\varphi^1, \cdots, \varphi^q$. Тогда матрица $\left\|\frac{\partial\varphi^h}{\partial x^i}\right\|$ $(h=1, \ldots, q;$ $i=1, \cdots, n)$ имеет ранг q. Предположим, что якобиан $\left|\frac{\partial\varphi^h}{\partial x^l}\right|$ $(l=1, \cdots, q)$ равен нулю. Тогда существуют такие функции A_h, что

$$A_h\frac{\partial\varphi^h}{\partial x^l}=0. \tag{55.10}$$

Из (55.9) имеем:

$$g^{tu}A_h\frac{\partial\varphi^h}{\partial x^u}=0 \quad (t,\ u=q+1, \cdots, n). \tag{55.11}$$

Таким образом, если детерминант $|g_{ij}|$ не равен нулю, то $A_h\frac{\partial\varphi^h}{\partial x^u}=0$, и φ зависимы. Согласно упражнению 5, § 50, этот детерминант не может равняться нулю, если фундаментальная форма положительно определенна. Таким образом, якобиан $\left|\frac{\partial\varphi^h}{\partial x^l}\right|$, в этом случае, не равен нулю и, следовательно, преобразование, определенное формулами

$$x'^l=\varphi^l,\ x'^s=x^s \quad (l=1, \cdots, q;\ s=q+1, \cdots, n),$$

невырождено. В этой новой координатной системе (опуская штрихи) мы из уравнений (21.11) получаем для φ^l уравнения вида:

$$\Phi^h_m\xi^m_l=\delta^h_l,$$

где Φ^h_m — некоторые из функций Φ^h_{ls}, которые, являясь функциями φ^l, не зависят от $x^{q+1}, \ldots, x^n$. Из (21.9) и из этих уравнений следует, что

$$\xi^l_h=\Phi^l_h. \tag{55.12}$$

Отсюда и из (21.2) мы получаем, что все ξ^l_h являются функциями, самое большее, $x^1, \cdots, x^q$. Этот результат имеет место, когда q функций $\overset{h}{\varphi}_s$ независимы и фундаментальная форма положительно определенна; если же форма неопределенна, то он имеет место, когда якобиан $\left|\frac{\partial\varphi^h}{\partial x^l}\right|$ отличен от нуля.

Рассмотрим теперь случай, когда независимы $p\,(<q)$ функций $\overset{h}{\varphi}_s$. Обозначим их через $\varphi^1, \cdots, \varphi^p$. Если ранг матрицы Якоби этих функций по $x^1, \cdots, x^q$ меньше p, то имеют место уравнения вида (55.10) и (55.11), в которых h принимает значения от 1 до p. Следовательно, если детерминант $|g^{tu}|$ равен нулю, то ранг матрицы $\left\|\frac{\partial\varphi^h}{\partial x^i}\right\|$ меньше p, в противоречии с предположением. Если фундаментальная форма определенна, т. е. $|g^{tu}|\neq 0$, то, не нарушая общности, можно предполагать, что ранг матрицы $\left\|\frac{\partial\varphi^h}{\partial x^l}\right\|$ $(h,\ l=1, \cdots, p)$ равен p. Если мы введем новые координаты:

$$x'^{l_1}=\varphi^{l_1},\quad x'^{l_2}=x^{l_2},\quad x'^{t}=x^{t}\quad \begin{pmatrix} l_1=1, \cdots, p; \\ l_2=p+1, \cdots, q; \\ t=q+1, \ldots, n \end{pmatrix},$$

то в новой системе координат (опуская штрихи) все функции $\overset{h}{\varphi}_s$ будут функциями координат $x^1, \cdots, x^p$. Действуя, как выше, мы вместо (55.12) получим: $\xi^{l_1}_h=\Phi^{l_1}_h$, где $\Phi^{l_1}_h$ — функции $x^1, \cdots, x^p$. Произведем новое преобразование координат:

$$x^{l_1}=x'^{l_1},\quad x^{l_2}=\psi^{l_2}(x'^1, \cdots, x'^n),\quad x^s=x'^s,$$

которое есть частный случай (55.1). Вместо (55.5) получим

$$\frac{\partial^2 x^{l_2}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\sigma}}+\Delta^{l_2}_{im}\frac{\partial x^i}{\partial x'^{\sigma}}\frac{\partial x^m}{\partial x'^{\mu}}=0. \qquad (55.13)$$

В этом случае мы получаем систему уравнений (55.7), где l принимает значения $p+1, \cdots, q$. Уравнения, соответствующие (55.8), имеют вид:

$$(\Delta^{l_2}_{m_2mp}\,\psi^{m_2}_{\sigma}+\Delta^{l_2}_{\sigma mp})\,\psi^m_{\mu}\,\psi^p_{\lambda}=0,$$

где l_2, $m_2 = p+1, \cdots, q$. Так как все функции φ^h_s зависят от $x^1, \cdots, x^p$, то из (21.18) следует, что написанные выше уравнения удовлетворяются тождественно и, следовательно, система (55.13) вполне интегрируема. Итак, существует такая система координат, что $\xi^{l_2}_h$ являются функциями только от $x^1, \cdots, x^p$. Тогда из (21.2) следует, что все векторы суть функции только этих координат. Собирая вместе полученные результаты, получаем две теоремы:

[55.3] *Если пространство V_n с положительно определенной фундаментальной квадратичной формой допускает интранзитивную группу движений G_r, и общий ранг q матрицы $\|\xi^i_a\|$ меньше r, то существуют координатные системы, в каждой из которых ξ^i_a являются, самое большее, функциями $x^1, \cdots, x^q$.*

[55.4] *Пусть пространство V_n с неопределенной фундаментальной квадратичной формой допускает интранзитивную группу движений G_r. Пусть общий ранг q матрицы $\|\xi^i_a\|$ меньше r и $p(\leqslant q)$ функций φ^h_s независимы. Если в координатной системе, для которой $\xi^t_a = 0$ при $t = q+1, \cdots, n$, ранг матрицы Якоби функций φ по $x^1, \cdots, x^q$ равен p, то существуют координатные системы, в каждой из которых компоненты ξ^i_a являются, самое большее, функциями $x^1, \cdots, x^q$.*

56. Пространства V_2, допускающие группу движений. Сначала мы рассмотрим случай группы G_1 движений V_2. Возьмем компоненты ее вектора в виде (51.6) и выберем координатные кривые x^2 ортогонально x^2 геодезическим. Тогда $g_{12} = 0$ и из (51.4) мы находим, что g_{11} и g_{22} не зависят от x^1, т. е. при соответственном выборе x^2 имеем:

$$\varphi = g_{11}(dx^1)^2 + e_2(dx^2)^2; \tag{56.1}$$

отсюда, если φ определенна, то V_2 наложимо на поверхность вращения.

Для того, чтобы определить, не может ли V_2 допускать более одного движения, рассмотрим уравнения Киллинга для формы (56.1). Они сводятся к

$$\xi^2 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = 2g_{11}\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} = 0, g_{11}\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} + e_2 \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} = 0, \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} = 0.$$

Из третьего уравнения получаем, что $\xi^2 = X_1$, где X_1 — функция только x^1. Обозначая дифференцирование по этому аргументу штрихом, из первых двух уравнений получим:

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} = -X_1 \frac{\partial \ln \sqrt{g_{11}}}{\partial x^2}, \ \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} = -\frac{e_2}{g_{11}} X_1'. \qquad (56 \cdot 2)$$

Условия совместности этих уравнений имеют вид:

$$g_{11} \frac{\partial^2 \ln \sqrt{g_{11}}}{(\partial x^2)^2} = e^2 \frac{X_1''}{X_1} = c, \qquad (56.3)$$

где c постоянно, так как первый и второй члены левой части этого уравнения не зависят от x^1 и x^2 соответственно. Приравнивая нулю производную первого члена по x^2, из получающегося уравнения находим, что $\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial^2 \sqrt{g_{11}}}{(\partial x^2)^2} = k$, где k постоянное. Тогда, пользуясь упражнением 3, § 50 и (47.15), получим $R_{2112} = g_{11}k$, т. е. V_2 имеет постоянную кривизну. Для данного V_2 постоянная c в (56.3) вполне определена и общее решение уравнения $X_1'' = ce_2X_1$ содержит две произвольные постоянные. При определении ξ^1 из (56.2) вводится третья произвольная постоянная. Таким образом, общая группа есть G_3, и так как ранг $\|\xi^i_a\|$ равен двум, то группа транзитивна. Итак, мы получили теорему, общеизвестную для случая определенной формы φ [1]):

[56.1] *Фундаментальная форма поверхности, допускающей непрерывные преобразования, приводима к* (56.1), *где g_{11} не зависит от x^1. Если поверхность имеет непостоянную кривизну, то группа содержит один параметр. В случае же постоянной кривизны, полной группой является G_3.*

[1]) 1909, 1, стр. 323—326.

Спрашивается, не допускает ли V_2 подгруппу G_2 движений. В § 54 было показано, что V_2 евклидово тогда и только тогда, когда оно допускает абелеву G_2. Образующие этой группы имеют вид:

$$X_1 f = p_1, \quad X_2 f = p_2. \tag{56.4}$$

По теореме (16.1), в случае неабелевой G_2, можно выбрать базис таким образом, что

$$(X_1, X_2) f = X_1 f. \tag{56.5}$$

В силу теооемы (51.4), мы можем принять геодезические, соответствующие $X_1 f$ и $X_2 f$, за координатные линии, Тогда $\xi_1{}^2 = \xi_2{}^1 = 0$.

Из (56.5) имеем:

$$\frac{\partial \xi_2{}^2}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial \ln \xi_1{}^1}{\partial x^2} = -\xi_2{}^2.$$

Таким образом, можно так выбрать координаты, чтобы $\xi_2{}^2 = 1$, $\xi_1{}^1 = e^{-x^2}$. Тогда из (51.4) получим, что

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} = g_{11}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x^1} = 2g_{12}$$

и, следовательно,

$$g_{11} = a, \quad g_{12} = ax^1 + b, \quad g_{22} = a(x^1)^2 + 2bx^1 + c, \tag{56.6}$$

где a, b и c — постоянные. Образующие имеют вид[1]):

$$X_1 f = e^{-x^2} p_1, \quad X_2 f = p_2. \tag{56.7}$$

В этом случае кривизна V_2 равна $\frac{a}{b^2 - ac}$ [2]).

57. Пространства V_3, допускающие группу G_2 движений. Группа G_2 в пространстве V_3 интранзитивна и, как следует ив теоремы [51.4], ее наименьшими инвариантными многообразиями являются V_2. Из § 55 следует, что группа, индуцированная в любом из многообразий V_2, является G_2, а из § 56, что кривизна этих многообразий

---

[1]) См. Bianchi, 1918, 1, стр. 510.
[2]) См. 1909, 1, стр. 155.

постоянна. По теореме [51.8], они геодезически параллельны. Если их принять за поверхности $x^3 = \text{const}$, то $\xi^3_\sigma = 0$ для $\sigma = 1, 2$ и (теорема [55.2]) ξ^i_σ для $i = 1, 2$ не зависят от x^3. Мы можем записать фундаментальную форму в следующем виде (см. § 51):

$$\varphi = g_{ij}dx^i dx^j + e_3(dx^3)^2 \quad (i, j = 1, 2). \qquad (57.1)$$

Для отдельной поверхности $x^3 + \text{const}$. инфинитезимальные преобразования даются формулами (56.4) или (56.7), и, согласно предыдущим замечаниям, эти выражения являются символами G_2 в V_3.

Для того, чтобы преобразование (56.4) удовлетворяло уравнению (51.4), необходимо и достаточно, чтобы g_{ij} были функциями только x^3, подчиненными единственному условию: $g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2 \neq 0$. Для того, чтобы преобразование (56.7) удовлетворяло уравнению (51.4), необходимо и достаточно, чтобы

$$g_{11} = \alpha, \quad g_{12} = \alpha x^1 + \beta, \quad g_{22} = \alpha(x^1)^2 + 2\beta x^1 + \gamma, \qquad (57.2)$$

где α, β, γ — произвольные функции x^3, такие, что $\alpha\gamma - \beta^2 \neq 0$. В первом случае кривизна поверхностей $x^3 = \text{const}$ равна нулю, во втором — равна $\frac{\alpha}{\beta^2 - \alpha\gamma}$ (см. § 56)[1]).

С помощью этих результатов мы покажем, что V_3 не может допускать полную группу G_5 движений. Эта группа не может быть интранзигивной, так как иначе некоторое семейство поверхностей (наименьших многообразий) допускало бы G_5, что невозможно, потому что $5 > 2 \cdot \frac{3}{2}$ (§ 53). Таким образом, группа должна быть транзитивна, и стационарная подгруппа (§ 18, 20) любой точки P должна быть порядка $5 - 3 = 2$. Если бы такая G_2 существовала, то точкн постоянного геодезического расстояния от P_0 образовывали бы наименьшее инвариантное многообразие и мы имели бы семейство геодезически параллельных инвариантных многообразий. Это — только что рассмотренный случай. Из вида преобразований (56.4) и (56.7) сле-

[1]) См. Bianchi, 1918, 1, стр. 542.

дует, что все преобразования такой группы G_2 имеют нулевой порядок (§ 18) и, следовательно, не могут иметь инвариантной точки [1]).

Теперь мы в состоянии доказать следующую теорему Фубини [2]).

[57.1] *V_n при $n>2$ не допускает полной группы движений порядка* $\frac{n(n+1)}{2}-1$.

Мы докажем эту теорему индукцией, предполагая ее доказанной для V_{n-1}. Если V_n допускает группу G_r с $r=\frac{n(n+1)}{2}-1$, то последняя должна быть транзитивна. Иначе, по теореме [55.1], существовали бы многообразия размерности $n-1$ или меньше, допускающие группу того же порядка, что невозможно, так как V_{n-1} может допускать самое большее группу порядка $\frac{n(n-1)}{2}$. Если же G_r транзитивна, то существует подгруппа порядка

$$r_1=r-n=\frac{1}{2}n(n-1)-1,$$

оставляющая на месте точку P_0 и являющаяся группой движений системы ∞^1 геометрических мест точек постоянного геодезического расстояния от P_0. Но это противоречит предположению справедливости теоремы для V_{n-1}. Так как для V_3 теорема уже была получена, то все доказано.

58. Движения в многообразиях аффинной связности. В § 50 уже было замечено, что если точка группового пространства S группы G_r с координатами a^α переходит при преобразовании второй параметрической группы G_r в точку с координатами a'^α, то имеют место уравнения (50.6), т. е.

$$\frac{\partial a'^\alpha}{\partial t^\beta}=A^\alpha_b(a')A^b_\beta(a). \tag{58.1}$$

[1]) Bianchi, 1918, 1, стр. 540.
[2]) 1903, 1, стр. 54.

Продифференцировав эти уравнения по a^γ, можно с помощью (50.1) и (58.1) привести получающиеся уравнения к

$$\frac{\partial^2 a'^\alpha}{\partial a^\beta \partial a^\gamma} + L^\alpha_{\delta\varepsilon}(a') \frac{\partial a'^\delta}{\partial a^\beta} \frac{\partial a'^\varepsilon}{\partial a^\gamma} = L^\delta_{\beta\gamma}(a) \frac{\partial a'^\alpha}{\partial a^\delta}. \tag{58.2}$$

Эти уравнения аналогичны (48.3) но здесь

$$L'^\alpha_{\delta\varepsilon}(a') = L^\alpha_{\delta\varepsilon}(a), \tag{58.3}$$

т. е. L' и L — одинаковые функции a' и a соответственно. Следовательно, в окрестностях этих точек геометрия S, определенная $(+)$-связностью, одинакова. Соответственно этому, мы говорим, что каждое преобразование второй параметрической группы определяет *автоморфизм* пространства S.

Если коэффициенты Λ^i_{jk} некоторой аффинной связности таковы, что существует решение уравнений

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} + \Lambda^i_{lm}(x') \frac{\partial x'^l}{\partial x^j} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} = \Lambda^l_{jk}(x) \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}, \tag{58.4}$$

то мы говорим, что это решение определяет *автоморфизм* V_n. Из (48.6) следует, что решение этих уравнений переводит геодезические опять в геодезические. Когда такое решение зависит, по крайней мере, от одного произвольного непрерывно изменяющегося параметра, мы говорим, что пространство допускает движение (аналогично случаю движения в римановом пространстве [см. (51.3)], когда геодезические непрерывно переходят в геодезические). Так, групповое пространство S допускает вторую параметрическую группу в качестве группы движений. Кроме того, траектории этой группы являются геодезическими, и, следовательно, эти движения являются обобщением параллельных переносов риманова пространства (см. § 52). В частности, когда группа G_r проста или полупроста, то, согласно теореме [52.6], эти движения являются параллельными переносами риманова пространства.

Аналогично, можно показать, что первая параметрическая группа порождает автоморфизмы S для $(-)$-связности, коэффициентами которой являются $\bar{L}^\alpha_{\beta\gamma} = L^\alpha_{\gamma\beta}$ (см. §§ 48, 50). Таким образом, [58.1] *Первая и вторая параметрические группы являются группами параллельных переносов группового пространства S в том смысле, что они определяют автоморфизмы геометрии S определенной, соответственно, $(-)$ и $(+)$-связностью.*

Заметим (в соответствии с упражнением 2, § 53), что группа движений риманова пространства является группой автоморфизмов этого пространства.

Из (50.4) и (50.16) имеем:

$$\overset{-}{L}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} c^{e}_{ab} A^{a}_{\beta} A^{b}_{\gamma} A^{\alpha}_{e}. \tag{58.5}$$

Если эти выражения подставить в (58.2) и принять во внимание (58.1), то получим

$$\frac{\partial^2 a'^{\alpha}}{\partial a^{\beta} \partial a^{\gamma}} + \Gamma^{\alpha}_{\delta\epsilon}(a') \frac{\partial a'^{\delta}}{\partial a^{\beta}} \frac{\partial a'^{\epsilon}}{\partial a^{\gamma}} = \Gamma^{\delta}_{\beta\gamma}(a) \frac{\partial a'^{\alpha}}{\partial a^{\delta}}. \tag{58.6}$$

Поступая так же с уравнениями для $(-)$-связности, аналогичными (58.2), мы получим (58.6). Таким образом

[58.2] *Первая и вторая параметрические группы G_r являются группами автоморфизмов геометрии (0)-связности группового пространства. Они являются даже группами параллельных переносов этого пространства.*

Возвратимся к общим движениям, т. е. к уравнениям (58.4). Обозначая через Γ^{i}_{jk} и Ω^{i}_{jk} симметрическую и кососимметрическую части Λ^{i}_{jk}, мы можем (58.4) заменить на

$$\frac{\partial^2 x'^{i}}{\partial x^{j} \partial x^{k}} + \Gamma^{i}_{lm}(x') \frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{j}} \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{k}} = \Gamma^{l}_{jk}(x) \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{l}} \tag{58.7}$$

и

$$\Omega^{i}_{lm}(x') \frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{j}} \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{k}} = \Omega^{l}_{jk}(x) \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{l}}. \tag{58.8}$$

Для того, чтобы инфинитезимальное преобразование

$$x'^{i} = x^{i} + \xi^{i} \delta t \tag{58.9}$$

было движением, необходимо (как мы получаем, подставляя (58.9) в (58.7) н (58.8) и пренебрегая членами со второй и большими степенями δt), чтобы

$$\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} \xi^l + \Gamma^i_{lk} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jl} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} - \Gamma^l_{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} = 0 \quad (58.10)$$

и

$$\frac{\partial \Omega^i_{jk}}{\partial x^l} \xi^l + \Omega^i_{lk} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} + \Omega^i_{jl} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} - \Omega^l_{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} = 0. \quad (58.11)$$

Если координатная система такова, что $\xi^i = \delta^i_1$, то имеем:

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^1} = \frac{\partial \Omega^i_{jk}}{\partial x^1} = 0.$$

Когда эти условия выполнены, уравнения (58.4) удовлетворяются конечными уравнениями (51.8) группы G_1, порожденной инфинитезимальным преобразованием (58.9). Таким образом, имеем:

[58.3] *Если пространство с аффинной связностью допускает инфинитезимальное движение, то оно допускает в качестве группы движений группу, порожденную этим инфинитезимальным преобразованием*

и

[58.4] *Для того, чтобы пространство с аффинной связностью допускало группу G_1 движений, необходимо и достаточно, чтобы существовала координатная система, в которой Λ^i_{jk} не зависят от одной координаты, например x^1. Тогда координатные кривые x^1 являются траекториями движения.*

Обозначая точкой с запятой ковариантное дифференцирование относительно Γ^i_{jk}, можно записать уравнения (58.10) в виде:

$$\xi^i_{;jk} = \xi^h B^i_{jkh}, \quad (58.12)$$

где B^i_{jkh} определены в (49.4). Эти уравнения являются обобщением уравнений (53.3), см. уравнение 3, § 53. В силу (49.6), тождества Риччи (см. 47.16):

$$\xi^i_{;jk} - \xi^i_{;kj} = \xi^l B^i_{ljk},$$

удовлетворяются тождественно. Ковариантно дифференцируя (58.12) по x^l и подставляя в тождество Риччи:

$$\xi^i_{;jkl} - \xi^i_{;jlk} = \xi^i_{;h} B^h_{jkl} - \xi^h_{;j} B^i_{hkl},$$

мы получим

$$\xi^h B^i_{jkl;h} - \xi^i_{;h} B^h_{jkl} + \xi^h_{;j} B^i_{hkl} + \xi^h_{;k} B^i_{jhl} + \xi^h_{;l} B^i_{jkh} = 0. \quad (58.13)$$

Если примем во внимание (49.6) и обобщенные тождества Бианки [1]),

$$B^i_{jkl;h} + B^i_{jlh;k} + B^i_{jhk;l} = 0. \quad (58.14)$$

Уравнения (58.11) можно записать в виде:

$$\Omega^i_{jk;h}\xi^h + \Omega^i_{hk}\xi^h_{;j} + \Omega^i_{jh}\xi^h_{;k} - \Omega^h_{jk}\xi^i_{;h} = 0. \quad (58.15)$$

Задача определения однопараметрических групп движений состоит, следовательно, в решении системы уравнений

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} = \xi^i_{;j} - \xi^h \Gamma^i_{hj}, \qquad \frac{\partial \xi^i_{;j}}{\partial x^k} = \xi^h B^i_{jkh} - \xi^h_{;j}\Gamma^i_{hk} + \xi^i_{;h}\Gamma^h_{jk} \quad (58.16)$$

с $n(n+1)$ неизвестными ξ^i и $\xi^i_{;j}$, подчиненными условиям (58.15), составляющим систему F_0 смешанной системы уравнений, состоящей из (58.15) и (58.16).

Пусть ξ^i_1 и ξ^i_2 два решения этих уравнений и

$$\xi^i = \xi^h_1 \frac{\partial \xi^i_2}{\partial x^h} - \xi^h_2 \frac{\partial \xi^i_1}{\partial x^h} = \xi^h_1 \xi^i_{2;h} - \xi^h_2 \xi^i_{1;h} \quad (58.17)$$

компоненты вектора коммутатора $(X_1, X_2)f$. Покажем, что последние также являются решением. Ввиду (49.6), из (58.17) и (58.12) имеем:

$$\xi^i_{;j} = \xi^h_{1;j}\xi^i_{2;h} - \xi^h_{2;j}\xi^i_{1;h} + \xi^h_1\xi^l_2 B^i_{jhl}. \quad (58.18)$$

Ковариантно дифференцируя эти уравнения по x^k и используя (58.13) и (58.14), мы получим (58.12). Ковариантным

[1]) См. 1927, 1, стр. 56.

дифференцированием (58.13), используя (58.12), получаем:

$$\Omega^i_{jk;\,hl}\,\xi^h_1+\Omega^i_{jk;\,h}\xi^h_{1;\,l}+\Omega^i_{hk;\,l}\xi^h_{1;\,j}+\Omega^i_{jh;\,l}\xi^h_{1;\,k}-\Omega^h_{jk;\,l}\,\xi^i_{1;\,h}+$$
$$+\xi^m_1\left(\Omega^i_{hk}\,B^h_{jlm}+\Omega^i_{jh}\,B^h_{klm}-\Omega^h_{jk}\,B^i_{hlm}\right)=0.$$

Умножим эти уравнения на ξ^l_2 и просуммируем по l. Вычитая уравнения, полученные перестановкой индексов 1 и 2, и используя тождество Риччи

$$\Omega^i_{jk;\,hl}-\Omega^i_{jk;\,lh}=\Omega^i_{mk}B^m_{jhl}+\Omega^i_{jm}B^m_{khl}-\Omega^m_{jk}B^i_{mhl},$$

получаем уравнения, эквивалентные условиям, что ξ^i и $\xi^i_{;\,j}$, даваемые формулами (58.17) и (58.18), удовлетворяют (58.15). Отсюда для движений пространства аффинной связности получаем теоремы [53.2] и [53.3].

Если мы выражения (58.9) подставим в (58.4), то мы получим уравнения, получающиеся из (58.10) заменой Γ^i_{jk} на Δ^i_{jk}. Вследствие (49.1), эти уравнения можно записать в виде:

$$(\xi^i_{\,|\,j}+2\Omega^i_{jh}\xi^h)_{\,|\,k}-\xi^h\Delta^i_{jkh}=0, \qquad (58.19)$$

где, как в § 49, черта отделяет индексы, обозначающие ковариантное дифференцирование относительно Δ^i_{jk}. Уравнения (58.11) можно записать в следующем виде:

$$\xi^h\left[\Omega^i_{jk\,|\,h}+2\left(\Omega^l_{jk}\,\Omega^i_{hl}+\Omega^l_{kh}\,\Omega^i_{jl}+\Omega^l_{hj}\Omega^i_{kl}\right)\right]+$$
$$+\Omega^i_{hk}\xi^h_{\,|\,j}+\Omega^i_{jh}\xi^h_{\,|\,k}-\Omega^h_{jk}\xi^i_{\,|\,h}=0. \qquad (58.20)$$

Для того, чтобы смешанная система (58.15) и (58.16) с $n(n+1)$ неизвестными ξ^i и $\xi^i_{;\,j}$ допускала решение, содержащее $n(n+1)$ параметров, необходимо, чтобы

$$\Omega^i_{jk}=0, \qquad B^i_{jkl}=0,$$

т. е. связность должна быть симметричной и иметь кривизну нуль. В этом случае существует система координат, в которой $\Gamma^i_{jk}=0$. Следовательио, в этой системе координат уравнения (58.12) сведутся к $\frac{\partial^2\xi^i}{\partial x^i \partial x^j} = 0$, так что

$$\xi^i = a^i + a^i_j x^j,$$

и группа $G_{n(n+1)}$ движений будет общей линейной группой. Таким образом, имеем:

[58.5] *Для того, чтобы многообразие аффинной связности допускало группу движений максимального порядка, необходимо и достаточно, чтобы связность была симметричной и имела кривизну нуль. Группа движений является общей линейной группой.*

Если аффинная связность нулевой кривизны несимметрична, то существует система n полей абсолютно параллельных векторов ζ^i_a. Используя ζ^i_a, определенные формулами (48.12), мы имеем

$$\Delta^i_{jk} = \zeta^i_a \frac{\partial \zeta^a_j}{\partial x^k} = -\zeta^a_j \frac{\partial \zeta^i_a}{\partial x^k}.$$

С помощью этих выражений уравнения (58.4) можно представить в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \zeta^j_b(x) \zeta^a_i(x')\right) = 0,$$

откуда получаем:

$$\zeta^i_a(x') = a^b_a \zeta^j_b(x) \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}, \tag{58.21}$$

где a^b_a постоянные. Эти уравнения можно взять вместо (58.4) в качестве уравнений, определяющих движение в пространстве аффинной связности нулевой кривизны[1]. В этом случае уравнения (58.19) эквивалентны следующим:

$$\xi^i_{\ |j} + 2\Omega^i_{jh}\xi^h = \alpha^b_a \zeta^a_j \zeta^i_b, \tag{58.22}$$

где α^b_a постоянны. Если выражения (58.9) подставим в (58.21) и положим

$$a^b_a = \delta^b_a - \alpha^b_a \delta t, \tag{58.23}$$

то мы получим (58.22).

---

[1] См. Robertson, 1932, 3, стр. 501.

Если уравнения (58.22) имеют решение, когда $\alpha_a^b = 0$, то, для этих значений ξ^h, уравнения (58.20) приведутся к

$$\Omega^i_{jk\,|\,h}\xi^h = 0. \tag{58.24}$$

Так как кривизна равна нулю, то[1])

$$\xi^i{}_{|\,jk} - \xi^i{}_{|\,kj} = 2\xi^i{}_{|\,h}\Omega^h_{kj}.$$

Вследствие (49.7), уравнения (58.22) для $\alpha_a^b = 0$ сводятся к (58.24). Так как траектории G_1 являются интегральными кривыми уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = \xi^i,$$

то из (58.22) следует, что для $\alpha_a^b = 0$ траектории группы являются геодезическими. Следовательно, движения являются параллельными переносами.

Если X_1f и X_2f — символы однопараметрических групп параллельных переносов, то из (58.17) мы найдем, что и $(X_1, X_2)f$ является символом такой же группы. Следовательно, все параллельные переносы, если они существуют, образуют группу, являющуюся либо полной группой движений, либо ее подгруппой. Так как любое движение переводит геодезические в геодезические (см. упражнение 9 § 58), то

[58.6] *Группа параллельных переносов многообразия аффинной связности и нулевой кривизны, если она существует, является инвариантной подгруппой полной группы движений пространства или совпадает с последней.*

Порядок группы параллельных переносов не больше n Если он равен n, то аффинная связность определена в смысле § 48 этой просто транзитивной группой, а система n полей абсолютно параллельных векторов определяет взаимную группу.

---

[1]) См. 1927, 1, стр. 7.

Упражнения

1. Если риманово пространство допускает группу G_1 параллельных переносов, то поверхность, образованная совокупностью ∞^1 траекторий, имеет нулевую кривизну.

(Bianchi, 1918, 1, стр. 501.)

2. Если риманово пространство допускает систему координат, в которой $g_{ii} = \text{const}$ для $i = 1, \ldots r$, а остальные g_{ij} не зависят от $x^1, \ldots, x^r$, то пространство допускает группу G_r параллельных переносов. Координатные кривые будут ее траекториями.

3. Если риманово пространство допускает интранзитивную группу G_r движений, где $r = \frac{n(n-1)}{2}$, то наименьшие инвариантные многообразия геодезически параллельны гиперповерхностям постоянной кривизны.

(Bianchi, 1918, 1, стр. 544.)

4. Для того, чтобы инфинитезимальное преобразование переводило геодезические в геодезические, необходимо и достаточно, чтобы

$$\xi_{i,jk} = \xi^h R_{ijkh} + g_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + g_{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^j},$$

где ψ функция x^i.

(Eisenhart, 1926, 3, стр. 229.)

5. Для того, чтобы риманово пространство V_4 допускало группу G_3 вращений (упражнение 5, § 11), необходимо и достаточно, чтобы фундаментальная форма приводилась к виду:

$$A_1 dt^2 - A_2 dr^2 - r^2 A_3 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

где A_i, самое большее, функции t и r.

(Eiesland, 1925, 5, стр. 222.)

6. Риманово пространство, находящееся в геодезическом соответствии с пространством, допускающим группу G_r движений, также допускает группу G_r движений. Векторы ξ^i_a последней являются линейными комбинациями (с постоянными коэффициентами) векторов данной группы, умноженных на скаляр.

(Knebelman, 1930, 3, стр. 281.)

7. Если риманово пространство V_n допускает интранзитивную группу движений G_r, то существует $n - r$ функционально независимых пространств, конформных V_n и допускающих ту же группу движений.

(Knebelman, 1930, 3, стр. 282.)

8. Для того, чтобы пространство симметрической связности было пространством группы, необходимо и достаточно, чтобы его группа автоморфизмов имела просто транзитивную подгруппу параллельных переносов.

(Cartan, 1927, 2, стр. 95.)

9. Показать, что если ξ^i — решение (58.12), то преобразования группы G_1 с символом $\xi^i P_i$ переводят геодезические в геодезические.

(Eisenhart и Knebelman, 1927, 3, стр. 42.)

10. Фундаментальная форма, коэффициенты которой определены формулами (48.14), положительно определенна. Если же мы положим

$$g_{ij} = \sum_a e_a \zeta^a_i \zeta^a_j, \quad g^{ij} = \sum_a e_a \zeta^i_a \zeta^j_a,$$

где e_a имеют наперед заданные значения, равные плюс или минус единице, то фундаментальная форма может стать неопределенной. Написанные выражения удовлетворяют (47.10), и из них следует, что

$$g_{ij}\zeta^i_a = e_a \zeta^a_j, \quad g^{ij}\zeta^a_i = e_a \zeta^j_a, \quad g_{ij}\zeta^i_a \zeta^j_b = e_a \delta_{ab}$$

(по a не суммируется) и, следовательно, векторы ζ образуют ортогональный репер (см. 1926, 3, стр. 40).

11. Символы Кристоффеля второго рода для g_{ij} упражнения 10 имеют вид:

$$\left\{ {i \atop jk} \right\} = L^i_{jk} + g^{ih}(g_{jl}\Omega^l_{hk} + g_{kl}\Omega^l_{hj}).$$

12. Для того, чтобы уравнения (58.21) определяли движение пространства с метрикой упражнения 10 (см. упражнение 2, § 53), необходимо и достаточно, чтобы a^b_a удовлетворяли условиям:

$$\sum_a e_a a^b_a a^c_a = e_b \delta^{bc}$$

(по b не суммируется).

Для инфинитезимального движения, удовлетворяющего (58.22), условие имеет вид:

$$e_c a^c_b + e_b a^b_c = 0$$

(по b и c не суммируется).

Если эти условия выполнены, то, исключая a^b_a из (58.22) и используя (48.18), получим уравнения Киллинга (51.4).

(Robertson, 1932, 3, стр. 503.)

13. Из (58.20) и (58.22) имеем:

$$\xi^h\Omega^i_{jk\,|\,h} + a^b_a\left(\Omega^i_{hk}\zeta^a_j\zeta^h_b + \Omega^i_{jh}\zeta^a_k\zeta^h_b - \Omega^h_{jk}\zeta^a_h\zeta^i_b\right) = 0.$$

Следовательно, для группы наибольшего порядка обязательно $\Omega^i_{jk\,|\,h} = 0$ и, ввиду результатов § 49,

$$\Omega^i_{jk} = \frac{1}{2}\, c^e_{ab}\zeta^a_j\zeta^b_k\zeta^i_e,$$

где c^e_{ab} — постоянные, удовлетворяющие (7.3) и (7.4). Дальнейшие условия, с помощью упражнения 10, приводятся к

$$\sum_{a,\,b} e_a a^b_a\left[\left(\Omega^i_{hk}\zeta^a_j + \Omega^i_{jh}\zeta^a_k\right)g^{hl}\zeta^b_l - \Omega^h_{jk}\zeta^a_h\zeta^b_l g^{li}\right] = 0.$$

14. Используя результаты упражнения 12, показать, что наибольший порядок группы движений пространства с метрикой упражнения 10 равен $\frac{n(n+1)}{2}$, и что в этом случае, вследствие упражнения 13,

$$e_e c^a_{de} + (n-2)\, e_a c^e_{da} = e_a c^b_{db}\delta_{ae}$$

(по a, e не суммируется).

Отсюда следует, что, если $n = 1$ или 3, то группа является группой движений евклидова пространства.

(Robertson, 1932, 3, стр. 511.)

15. Для гиперповерхности упражнения 14, § 36 показать, что

$$ds^2 = A^2\sum (dy^\alpha)^2,$$

где

$$A = \frac{1}{1 + \frac{r^2k}{4}},$$

и что для векторов ζ^α_a и $\bar{\zeta}^\alpha_a$ упражнения 13 § 36

$$\zeta^a_\alpha = \zeta^\alpha_a A^2, \quad \bar{\zeta}^a_\alpha = \bar{\zeta}^\alpha_a A^2,$$

где

$$\zeta^a_\alpha\zeta^\beta_a = \bar{\zeta}^a_\alpha\bar{\zeta}^\beta_a = \delta^\beta_\alpha.$$

Показать также, что

$$\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma} = -\zeta^{a}_{\beta}\frac{\partial \zeta^{\alpha}_{a}}{\partial y^{\gamma}} = -\frac{k}{2}A\left(\delta^{\alpha}_{\beta}y^{\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma}y^{\beta} - \delta_{\beta\gamma}y^{\alpha} + \frac{2}{\sqrt{k}}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\right)$$

и

$$\overline{\Lambda}^{\alpha}_{\beta\gamma} = -\overline{\zeta}^{a}_{\beta}\frac{\partial \zeta^{\alpha}_{a}}{\partial y^{\gamma}} = \Lambda^{\alpha}_{\gamma\beta}.$$

Следовательно, для связностей с коэффициентами $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$ и $\overline{\Lambda}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ соответствующие системы векторов $\overline{\zeta}^{\alpha}_{a}$ и ζ^{α}_{a} определяют параллельный перенос. Параллелизм, определенный обеими системами коэффициентов, является параллелизмом Клиффорда.

(Cartan, 1924, **2**, стр. 307—308; Bortolotti, 1925, **7**, стр. 828—831.)

КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

59. Определение однородных касательных преобразований.

Систему уравнений

$$\bar{x}^i = \varphi^i(x^1, \ldots, x^n), \tag{59.1}$$

для которой ранг матрицы $\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right\|$ равен n, можно рассматривать с двух точек зрения. Именно, она определяет либо преобразование координат, либо преобразование пространства V_n с координатами x^i в себя. То же самое относится и к обращению системы (59.1), которое мы обозначим через

$$x^i = \bar{\varphi}^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n). \tag{59.2}$$

Пусть p_i (функции x) будут компонентами ковариантного векторного поля, так что компоненты того же поля в переменных $\bar{x}^i$ даются формулами[1])

$$\bar{p}_i = p_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}, \quad p_j = \bar{p}_i \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}. \tag{59.3}$$

Отсюда следуют уравнения:

$$\bar{p}_i d\bar{x}^i = p_j dx^j. \tag{59.4}$$

С помощью (59.1) и (59.2) уравнения (59.3) можно записать так:

$$\bar{p}_i = \psi_i(x^1, \ldots, x^n; p_1, \ldots, p_n), \quad p_i = \bar{\psi}_i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n; \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n). \tag{59.5}$$

---

[1]) Величины p_i, используемые в этой главе, нельзя смешивать с обозначением для $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, применявшимся в предыдущих главах. Употребление p_i в качестве обозначения для $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ будет оговариваться.

В точке P уравнение

$$p_i dx^i = 0 \tag{59.6}$$

определяет $n-1$ направлений, так что мы можем сказать, что p_i определяют элемент V_{n-1} или гиперплоскость в точке P. Поэтому, мы можем рассматривать (59.1) и (59.5) как уравнения, определяющие преобразование точек и элементов в этих точках в точки и элементы. Если, в частности, $p_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, то гиперповерхности $f(x) = \text{const}$ и их касательные гиперплоскости преобразуются в гиперповерхности $\bar{f}(\bar{x}) = \text{const}$ и их касательные гиперплоскости, где

$$\bar{f}(\bar{x}) = f(\bar{\varphi}), \ \bar{f}(\varphi) = f(x). \tag{59.7}$$

В этом случае p_i можно назвать компонентами ковариантной нормали этой гиперповерхности. Очевидно, что если две поверхности касаются в точке P, то их образы касаются в точке $\bar{P}$ (образе P).

В качестве обобщения преобразования (59.1) и (59.3) мы рассмотрим преобразования $2n$ переменных, вида:

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= \varphi^i(x^1, \ldots, x^n; \ p_1, \ldots, p_n), \\ \bar{p}^i &= \psi_i(x^1, \ldots, x^n; \ p_1, \ldots, p_n), \end{aligned} \tag{59.8}$$

такие, что для произвольных значений дифференциалов dx^i и dp_i имеют место уравнения (59.4), т. е.

$$\psi_j \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial \varphi^j}{\partial p_i} dp_i \right) = p_k dx^k. \tag{59.9}$$

Преобразования (59.8), удовлетворяющие этому условию, называются *однородными касательными преобразованиями*. Смысл этого названия выяснится позже [1]).

Из (59.9) следует, что для того, чтобы преобразование было касательным, необходимо и достаточно, чтобы

---

[1]) Дальнейшее изложение этого предмета в основном совпадает с тем, которое было дано автором несколько лет тому назад (см. 1929, 4).

φ^i и ψ_i удовлетворяли уравнениям

$$\psi_j \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} = p_i, \quad \psi_j \frac{\partial \varphi^j}{\partial p_i} = 0. \tag{59.10}$$

Из второй системы этих уравнений следует, что ранг матрицы Якоби $\left\| \frac{\partial \varphi^j}{\partial p_i} \right\|$ должен быть меньше n. Если этот ранг равен нулю, мы имеем случай (59.1) и (59.5). Если ранг равен $n-r$, то, исключая p_i из первой системы уравнений (59.8), мы получим r независимых уравнений:

$$F_\alpha(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n;\ x^1, \ldots, x^n) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, r). \tag{59.11}$$

Из (59.11) следует, что дифференциалы в преобразованной точке связаны с дифференциалами в точке $P(x^i)$ системой уравнений

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \overline{x}^i} d\overline{x}^i + \frac{\partial F_\alpha}{\partial x^j} dx^j = 0. \tag{59.12}$$

Так как условия (59.4) должны выполняться вследствие (59.12), то мы должны иметь

$$\overline{p}_i = \rho^\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial \overline{x}^i}, \quad p_i = -\rho^\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x^i}, \tag{59.13}$$

где ρ^α такие параметры, что при подстановке выражений (59.13) в первую систему уравнений (59.8) получаются тождества, если учесть также и (59.11). Из второй системы уравнений (59.13) следует, что ранг матрицы Якоби $\left\| \frac{\partial F_\alpha}{\partial x^i} \right\|$ должен быть равен r. Следовательно, r этих уравнений можно разрешить относительно ρ^α, которые, таким образом, будут линейными функциями некоторых r переменных p_i. Если эти функции подставить в остающиеся $n-r$ уравнений, то получится $n-r$ уравнений, содержащих $x^i, \overline{x}^i$ и p_i, причем последние входят линейно и однородно. Так как, разрешая (59.11) и эти новые уравнения относительно $\overline{x}$, мы получаем первую систему (59.8), то φ^i — однородные функции относительно p_j степени нуль. Следовательно,

$$p_i \frac{\partial \varphi^j}{\partial p_i} = 0. \tag{59.14}$$

Из первой системы уравнений (59.13) аналогично заключаем, что функции $\psi_i(=\bar{p}_i)$ однородны степени нуль относительно p_j.

Для того, чтобы первая система уравнений (59.10) допускала для ψ единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\|$ был равен n, т. е.

$$\left|\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}\right| \neq 0. \tag{59.15}$$

Если это условие выполнено, и решения ψ_i первой системы уравнений (59.10) подставлены во вторую систему, то мы получаем n уравнений

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi^1}{\partial p_i} & \ldots\ldots & \frac{\partial\varphi^n}{\partial p_i} & 0 \\ \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^1} & \ldots\ldots & \frac{\partial\varphi^n}{\partial x^1} & p_1 \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^n} & \ldots\ldots & \frac{\partial\varphi^n}{\partial x^n} & p_n \end{vmatrix} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Из этих уравнений следует, что

$$\frac{\partial\varphi^k}{\partial p_i} = \lambda^{ij}\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^j}, \quad \lambda^{ij}p_j = 0, \tag{59.16}$$

где λ^{ij} этим определены. Из первой системы уравнений (59.16) имеем:

$$\frac{\partial^2\varphi^k}{\partial p_h \partial p_i} = \left(\frac{\partial\lambda^{ij}}{\partial p_h} + \lambda^{il}\frac{\partial\lambda^{hj}}{\partial x^l}\right)\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^j} + \lambda^{ij}\lambda^{hl}\frac{\partial^2\varphi^k}{\partial x^j \partial x^l}.$$

Таким образом, ввиду (59.15), условия интегрируемости первой системы уравнений (59.16) принимают вид:

$$\frac{\partial\lambda^{ij}}{\partial p^h} - \frac{\partial\lambda^{hj}}{\partial p^i} + \lambda^{il}\frac{\partial\lambda^{hj}}{\partial x^l} - \lambda^{hl}\frac{\partial\lambda^{ij}}{\partial x^l} = 0.$$

Умножая на p_i, суммируя по j и замечая, что из второй системы (59.16) следуют уравнения

$$\frac{\partial\lambda^{ij}}{\partial x^l}p_j = 0, \quad \frac{\partial\lambda^{ij}}{\partial p_h}p_j + \lambda^{ih} = 0,$$

мы находим: $\lambda^{ih} = \lambda^{hi}$, т. е. λ^{ih} симметричны. Из (59.16) имеем:

$$\frac{\partial \varphi^k}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi^l}{\partial x^i} = \lambda^{ij} \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi^l}{\partial x^i}.$$

Так как λ^{ij} симметричны по i и j, то имеют место тождества:

$$(\varphi^k, \varphi^l) \equiv \frac{\partial \varphi^k}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^l}{\partial p_i} = 0. \tag{59.17}$$

Обратно, если φ^i некоторые функции x^i и p_i, удовлетворяющие (59.14), (59.15) и (59.17), и если ψ_i — функции, определенные первой системой (59.10), то для этих функций имеем:

$$\psi_j \frac{\partial \varphi^j}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i} = \psi_j \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^k}{\partial p_i} = p_i \frac{\partial \varphi^k}{\partial p_i} = 0.$$

В силу (59.13), эти функции ψ_i удовлетворяют второй системе (59.10). Таким образом, имеем[1]):

[59.1] *Для того, чтобы функции* φ^i *определяли однородное касательное преобразование* (59.8), *для которого* ψ_i *будут уже единственным образом определены, необходимо и достаточно, чтобы функции* φ^i *были однородны степени нуль относительно* p_j, *удовлетворяли* (59.17), *и*

$$\left| \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} \right| \neq 0.$$

60. Геометрические свойства однородных касательных преобразований. Рассмотрим теперь геометрическое значение уравнений (59.11) и начнем со случая, когда при исключении p_i из первой системы уравнений (59.8) получается одно уравнение

$$F(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n; x^1, \ldots, x^n) = 0. \tag{60.1}$$

В этом случае точка $P(x^i)$ преобразуется в точки гиперповерхности $\bar{\Sigma}$, представляемой уравнением (60.1), в кото-

---

[1]) Эта теорема была доказана другим способом Ли и Энгелем. 1888, 1, том 2, стр. 137.

ром x^i имеют значения, соответствующие даниой точке P. Уравнеиия (59.13) теперь сводятся к

$$\bar{p}_i = \rho \frac{\partial F}{\partial \bar{x}^i}, \quad p_i = -\rho \frac{\partial F}{\partial x^i}. \qquad (60.2)$$

Каждый выбор значеиий p_i в (59.8) определяет в точке элемент V_{n-1}, и этому выбору соответствует определеиная точка $\bar{P}$ гиперповерхности $\bar{\Sigma}$. Кроме того, из первого уравнения (60.2) видио, что образ вектора p_i является ковариаитным нормальным вектором гиперповерхности $\bar{\Sigma}$ в точке $\bar{P}$. Точно так же, если $\bar{x}^i$ данные координаты $\bar{P}$, то уравнение (60.1) определит в переменных x^i гиперповерхность Σ, все точки которой преобразуются в $\bar{P}$. В частности, из второго уравнения (60.2) следует, что выбранный вектор p_i является ковариантным нормальным вектором Σ в точке P.

Рассмотрим гиперповерхность S с уравнением

$$f(x^1, \ldots, x^n) = 0. \qquad (60.3)$$

Каждой ее точке соответствует, в силу (60.1), гиперповерхность $\bar{\Sigma}$. В частности, если мы в первом уравнении (59.8) положим $p_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, то эти уравнеиия определят гиперповерхиость $\bar{S}$, для которой координаты $\bar{x}^i$ определены через x^i, которые надо рассматривать как параметры, связанные условием (60.3). Таким образом, каждая точка $P(x^i)$ гиперповерхности S преобразуется в определенную точку $\bar{P}$ $(\bar{x}^i)$ гиперповерхиости $\bar{S}$. Перемещеиия на $\bar{S}$, соответствующие вариации координат x^i, подчиненной условию $\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = 0$, определяются формулами

$$d\bar{x}^i = \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \varphi^i}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial x^j}\right) dx^j.$$

Отсюда, согласно (59.10), следует, что $\bar{p}_i$, определяемые (59.8), для рассматриваемого случая удовлетворяют условию $\bar{p}_i d\bar{x}^i = 0$. Таким образом, если $\bar{f}(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n) = 0$ уравнение $\overline{S}$, полученное исключением x из первых уравнений (59.8) $\left(\text{в которых } p_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)$ и из (60.3), то $\overline{p}_i = \lambda \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{x}^i}$.

Если мы возьмем гиперповерхность $\overline{\Sigma}$, соответствующую точке $p(x^i)$, то точка этой гиперповерхности, определенная значениями $\overline{p}_i = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{x}^i}$, является указанной выше точкой $\overline{P}$, причем $\overline{p}_i$, даваемые уравнениями (59.8) для этих p_i, являются компонентами ковариантной нормали $\overline{\Sigma}$. Следовательно, $\overline{\Sigma}$ и $\overline{S}$ касаются в точке $\overline{P}$.

Рассмотрим теперь общий случай, когда в (59.11) $r > 1$. Из (59.13) следует, что матрица Якоби F_α по x^i обязательно имеет ранг r, то же относится и к матрице Якоби F_α по $\overline{x}^i$. Геометрически это означает, что точка $P(x^i)$ преобразуется в точки пространства $\overline{\sum}_{n-r}$ $n-r$ измерений, и что точка $\overline{P}(\overline{x}^i)$ является образом точек пространства $\sum_{n-r}$ $n-r$ измерений[1]). Каждый выбор значений p_i в точке P определяет в P элемент V_{n-1}. Этому выбору в $\overline{\sum}_{n-r}$ соответствует единственная точка $\overline{P}$, определенная первой системой уравнений (59.8). Для любого смещения из точки $\overline{P}$ в $\overline{\sum}_{n-r}$ должно быть $\frac{\partial F_\alpha}{\partial \overline{x}^i} d\overline{x}^i = 0$, и из (59.13) следует $\overline{p}_i d\overline{x}^i = 0$. Таким образом, $\overline{p}_i$ являются компонентами ковариантного нормального вектора $\overline{\sum}_{n-r}$. Ковариантным нормальным вектором подпространства V_m в некоторой точке называется ковариантный вектор λ_i пространства V_n, для которого $\lambda_i dx^i = 0$ при всех смещениях из данной точки в подпространстве V_m. Для данных значений p_i, как мы видели, $\overline{x}^i$ вполне определены, а для последних определено соответствующее $\sum_{n-r}$. Из второй системы (59.13) следует, что p_i являются компонентами кова-

---

[1]) Эти замечания вытекают из фундаментальной теоремы существования решений системы уравнений, содержащих неявные функции. См. Fine, 1927, 4, стр. 253.

риантного нормального вектора гиперповерхности $\overline{\sum}_{n-r}$ в точке P.

Так же, как и в случае $r=1$, каждая точка гиперповерхности (60.3) преобразуется в $\overline{\sum}_{n-r}$, и каждое такое многообразие касается гиперповерхности, определенной уравнением, получаемым заменой p_i на $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ в первых уравнениях (59.8) и исключением из полученных уравнений и (60.3) переменных x^i.

Пространство $\overline{\sum}_{n-r}$, определенное для некоторой точки уравнениями (59.11), мы назовем *фундаментальным многообразием* преобразования в этой точке. Мы говорим также, что два подпространства пространства V_n размерностей соответственно p и q $(p \geqslant q)$ касаются в точке P, если любой ковариантный нормальный вектор первого подпространства в точке P есть в то же время ковариантный нормальный вектор второго подпространства в той же точке. Соответственно этому, имеем:

[60.1] *Пусть точки гиперповерхности и все элементы в этих точках подвергнуты однородному касательному преобразованию. Тогда фундаментальные многообразия преобразования ее точек касаются гиперповерхности, соответствующей в этом преобразовании точкам и элементам, касательным к исходной гиперповерхности. Образы этих элементов касаются полученной гиперповерхности.*

В качестве следствия этой теоремы мы имеем, что если в некоторой точке две гиперповерхности касаются, т. е. имеют в этой точке общую ковариантную нормаль, то огибающие двух систем многообразий $\overline{\sum}_{n-r}$ точек данных гиперповерхностей касаются в точке, которая является образом данной точки. Этот результат оправдывает название касательных преобразований.

Рассмотрим подпространство S_{n-p} размерности $n-p$, определенное уравнениями

$$f_\sigma(x^1, \ldots, x^n) = 0 (\sigma = 1, \ldots, p). \qquad (60.4)$$

С каждой точкой $P(x^i)$ из S_{n-p} ассоциировано $\overline{\sum}_{n-r}$. Если в первой системе уравнений (59.8) положим

$$p_i = u^\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial x^i}, \qquad (60.5)$$

где u^σ — параметры, то мы получим координаты точки $P(\overline{x}^i)$ из $\overline{\sum}_{n-r}$. Так как функции φ^i однородны нулевой степени относительно p_i, то, по исключении x^i и u^σ из (59.8), (60.4) и (60.5), мы получим единственное уравнение для координат $\overline{x}^i$, т. е. геометрическим местом этих точек является гиперповерхность $\overline{S}$. Ее уравнения в параметрической форме имеют вид:

$$\overline{x}^i = \varphi^i\left(x^1, \ldots, x^n;\ u^\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial x^1}, \ldots, u^\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial x^n}\right), \qquad (60.6)$$

где параметрами являются как x^i, подчиненные условиям (60.4), так и отношения u^σ. Любое смещение из точки $\overline{P}$ по гиперповерхности $\overline{S}$ (для любых вариаций u^σ и для вариаций x^i, подчиненных условию $\frac{\partial f_\sigma}{\partial x^i} dx^i = 0$) определяется уравнениями

$$d\overline{x}^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} dx^j + \overline{\frac{\partial \varphi^i}{\partial p_k}}\, d\left(u^\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial x^k}\right). \qquad (60.7)$$

В этих уравнениях $\overline{\frac{\partial \varphi^i}{\partial p_k}}$ обозначают $\frac{\partial \varphi^i}{\partial p_k}$, в которых p_j заменены выражениями (60.5). Так как для любых p_i имеет место (59.10), то

$$\overline{p}_i\, d\overline{x}^i = p_j\, dx^j = u^\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial x^j} dx^j = 0.$$

Так как эти уравнения имеют место для всех смещений по $\overline{S}$, то p_i являются компонентами ковариантного нормального вектора гиперповерхности $\overline{S}$. Если координаты точки $P(x^i)$ гиперповерхности S_{n-p} подставлены в правую сторону (60.5), то так полученные p_i для всех значений u^σ являются ковариантными нормальными векторами S_{n-p} в точке P.

Таким образом, имеем:

[60.2] *Пусть точки подпространства размерности $n-p$ и все элементы в этих точках подвергнуты однородному касательному преобразованию. Тогда фундаментальные многообразия преобразования этих точек касаются гиперповерхности, которая есть образ точек и ковариантных нормальных векторов исходного подпространства. Образы этих элементов касаются полученной гиперповерхности.*

61. Определение однородных касательных преобразований их фундаментальными многообразиями. Предположим, что в V_n с координатами x^i даны r уравнений вида:

$$F_\alpha(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n;\ x^1, \ldots, x^n) = 0 \ (\alpha = 1, \ldots, r), \quad (61.1)$$

где $\bar{x}^i$ — параметры. Матрица Якоби $\left\| \dfrac{\partial F_\alpha}{\partial \bar{x}^i} \right\|$ уравнений (61.1) имеет ранг r тогда и только тогда, когда для каждой системы значений $\bar{x}^i$ уравнения (61.1) определяют многообразие $\sum_{n-r}$ размерности $n-r$. Компоненты любого ковариантного нормального вектора $\sum_{n-r}$ при соответствующих значениях параметров u^α имеют вид:

$$p_i = u^\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x^i}. \quad (61.2)$$

Каждая система u^α определяет ковариантный нормальный вектор. Для того, чтобы $n+r$ уравнений (61.1) и (61.2) можно было единственным образом разрешить относительно $\bar{x}^i$ и u^α, необходимо и достаточно, чтобы якобиан этих уравнений относительно $\bar{x}^i$ и u^α не обращался в нуль, в силу (61.1) и (61.2). Это следует из общей теории неявных функций[1]). Этот якобиан таков:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \bar{x}^1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial \bar{x}^n} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial \bar{x}^1} & \ldots & \frac{\partial F_r}{\partial \bar{x}^n} & 0 & \ldots & 0 \\ u^\alpha \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial x^1 \partial \bar{x}^1} & \ldots & u^\alpha \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial x^1 \partial \bar{x}^n} & \frac{\partial F_1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial F_r}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u^\alpha \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial x^n \partial \bar{x}^1} & \ldots & u^\alpha \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial x^n \partial \bar{x}^n} & \frac{\partial F_1}{\partial x^n} & \ldots & \frac{\partial F_r}{\partial x^n} \end{vmatrix} \tag{61.3}$$

Так как этот детерминант не содержит p_i, то он не должен обращаться в нуль вследствие одних только соотношений (61.1). Последние не содержат u^α, поэтому детерминант не должен обращаться в нуль для произвольных значений u^α. Применяя к этому детерминанту правило Лапласа, находим, что ранг матрицы $\left\| \frac{\partial F_\alpha}{\partial \bar{x}^i} \right\|$ должен быть равен r.

Так как мы интересуемся только определением $\bar{x}^i$, то мы можем применить наши результаты к решению уравнений (61.1) и уравнений, получаемых из (61.2) по исключении u^α. При соответствующей нумерации переменных x^i, вследствие предположения относительно матрицы $\left\| \frac{\partial F_\alpha}{\partial x^i} \right\|$, матрица $\left\| \frac{\partial F_\alpha}{\partial x^\beta} \right\|$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, r)$ имеет ранг r. Тогда, по исключении u^α из (61.2), мы получим

[1]) Здесь предполагается, что F_α и их первые и вторые производные непрерывны в рассматриваемой области. См. Fine, 1927, 4, стр. 253.

$n-r$ независимых уравнений:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial F_1}{\partial x^r} \frac{\partial F_1}{\partial x^\sigma} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial F_r}{\partial x^r} \frac{\partial F_r}{\partial x^\sigma} \\ p_1 \cdots p_r \; p_\sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (\sigma = r+1, \ldots, n). \qquad (61.4)$$

Для того, чтобы (61.1) и эти уравнения были разрешимы относительно $\bar{x}^i$, матрица $\left\| \frac{\partial F_\alpha}{\partial \bar{x}^i} \right\|$ уравнений (61.1) должна иметь ранг r, что мы уже получили, рассматривая детерминант (61.3). Из (61.4) очевидно, что эти решения, скажем,

$$\bar{x}^i = \varphi^i(x;\ p) \qquad (61.5)$$

таковы, что φ^i однородны нулевой степени относительно p_i. Если эти выражения подставим в (61.1), то получим тождества относительно x^i и p_i. Дифференцируя эти тождества, получим:

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial x^i} + \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial \bar{x}^j}\right) \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} = 0, \quad \frac{\partial F_\alpha}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial p_i} = 0, \qquad (61.6)$$

где $\frac{\partial F_\alpha}{\partial \bar{x}^j}$ обозначает $\frac{\partial F_\alpha}{\partial \bar{x}^j}$, в котором $\bar{x}^i$ заменены на φ^i.

Если обозначим через $\bar{u}^\alpha$ решение уравнений (61.2), в которых $\bar{x}^i$ заменены на φ^i, относительно u^α и положим

$$\psi_j = -\bar{u}^\alpha \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial \bar{x}^j}\right),$$

то из (61.2) и (61.6) получим, что ψ_i удовлетворяют условиям (59.10) и, следовательно, функции φ^i и ψ_i определяют касательное преобразование. Таким образом, имеем:

[61.1] *Если r функций F_α от $2n$ переменных $\bar{x}^i$ и x^i таковы, что детерминант* (61.3) *имеет для уравне-*

ний $F_\alpha = 0$ *и всех значений параметров* u^α *ранг* $n+r$, *то уравнения* (61.5) *и* (61.7) *определяют однородное касательное преобразование*[1]).

Рассмотрим гиперповерхность S, определенную уравнениями (60.3), и вместо (61.2) возьмем

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i} + \lambda^\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial \bar{x}^i} = 0. \tag{61.8}$$

Если уравнения (61.1) и уравнения, получаемые из (61.8) исключением λ^α, разрешить относительно $\bar{x}^i$, то получаются параметрические уравнения гиперповерхности $\bar{S}$, определенной в § 60, в которых x^i будут параметрами, подчиненными условию (60.3). Исключая из этих уравнений x^i, мы получим уравнение $\bar{f}(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n) = 0$ гиперповерхности $\bar{S}$. В соответствии с обычной теорией огибающих это уравнение можно прямо получить исключением x^i и λ^α из (61.1), (61.8) и (60.3).

Если дано касательное преобразование, определенное формулами (59.8), и построена соответствующая система уравнений (59.11), то вышеуказанные условия для соответствующего детерминанта (61.3) необходимо удовлетворены. Заметим далее, что в (61.3) переменные x^i и $\bar{x}^i$ входят симметрично. Следовательно, если мы переставим x^i и $\bar{x}^i$, то получим единственное касательное преобразование

$$x^i = \bar{\varphi}^i(\bar{x};\ \bar{p}),\quad p_i = \bar{\psi}_i(\bar{x},\ \bar{p}). \tag{61.9}$$

Это преобразование является обращением первого. Действительно, если мы возьмем точки $P(x^i)$ и $\bar{P}(\bar{x}^i)$ так, чтобы имело место (61.1), и если в (61.5) мы заменим p_i величинами (61.2), то из (59.13) будет следовать, что полученные уравнения удовлетворяются тождественно для всех значений u^α и для $\bar{p}_i$, определенных формулами

$$\bar{p}_i = -u^\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial \bar{x}^i}. \tag{61.10}$$

---

[1]) См. Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 150.

Мы получим тот же результат, если будем исходить из (61.9) и используем (61.10). Таким образом, имеем:

[61.2] *Каждое однородное касательное преобразование имеет единственное обратное касательное преобразование.*

Если даны два касательных преобразования, именно (59.8) и

$$x_1^i = \bar{\varphi}^i(\bar{x};\ \bar{p}),\quad p_{1i} = \bar{\psi}_i(\bar{x};\ \bar{p}),$$

то

$$\bar{\psi}_i d\bar{\varphi}^i = \bar{p}_i d\bar{x}^i,\quad \psi_i d\varphi^i = p_i dx^i.$$

Заменяя в первом уравнении $\bar{p}_i$ и x^i на ψ_i и φ^i, получим $\bar{\psi}_i d\bar{\varphi}^i = p_i dx^i$. Следовательно, имеет место теорема Ли [1]).

[61.3] *Совокупность однородных касательных преобразований от $2n$ переменных x^i и p_i является бесконечной группой.*

Для преобразования, обратного к (59.8), мы, аналогично (59.10), имеем:

$$p_k \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} = \bar{p}_i,\quad p_k \frac{\partial x^k}{\partial \bar{p}_j} = 0.$$

Дифференцируя первые уравнения по $\bar{x}^j$, из полученных выражений выведем:

$$\{\bar{x}^i,\ \bar{x}^j\} \equiv \frac{\partial p_k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial p_k}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} = 0.$$

Дифференцируя вторые по $\bar{p}_i$ получим:

$$\{\bar{p}_i,\ \bar{p}_j\} = 0.$$

Если теперь продифференцировать первые уравнения по $\bar{p}_j$, вторые по $\bar{x}^i$ и вычесть полученные уравнения, то найдем

$$\{\bar{p}_j,\ \bar{x}^i\} = \delta_j^i,$$

1) Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 139.

где

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \qquad (61.11)$$

Рассмотрим $2n$ независимых функций u^α $(\alpha = 1, \ldots, 2n)$ переменных x^i и p_i. Так как

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j} = \delta^i_j, \quad \frac{\partial p_i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial p_j} = \delta^i_j, \quad \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial p_j} = \frac{\partial p_j}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} = 0,$$

то

$$\sum_\alpha^{1\ldots 2n}(u^\alpha, u^\beta)\{u^\alpha, u^\gamma\} = \delta^\beta_\gamma,$$

где (u^α, u^β) определены формулами (59.17). Применяя это тождество к нашему случаю, получаем:

$$(\bar{x}^i, \bar{x}^j) = 0, \quad (\bar{p}_j, \bar{x}^i) = \delta^i_j, \quad (\bar{p}_i, \bar{p}_j) = 0.$$

Таким образом, имеет место теорема[1])

[61.4] *Для однородного касательного преобразования функции* φ^i *и* ψ_j *удовлетворяют тождествам*

$$\{\varphi^i, \varphi^j\} = \{\psi_i, \psi_j\} = 0, \quad \{\psi_j, \varphi^i\} = \delta^i_j \qquad (61.12)$$

и

$$(\varphi^i, \varphi^j) = (\psi_i, \psi_j) = 0, \quad (\psi_j, \varphi^i) = \delta^i_j. \qquad (61.13)$$

Пусть u и v — функции x^i и p_i, тогда символ (u, v), определенный формулой

$$(u, v) = \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial x^i} - \frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial p_i}, \qquad (61.14)$$

называется *скобкой Пуассона*. Как легко доказать прямым вычислением, любые три функции u, v и w удовлетворяют следующему тождеству:

$$((u, v), w) + ((v, w), u) + ((w, u), v) = 0. \qquad (61.15)$$

Оно называется *тождеством Якоби*.

---

[1]) Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 137, также Whittaker, 1927, 5, стр. 300.

Если мы подвергнем x^i и p_i однородному касательному преобразованию и обозначим через $\bar{u}$ и $\bar{v}$ образы u и v, т. е. $\bar{u}(\varphi, \psi) = u(x, p)$, то вследствие (61.13) мы будем иметь:

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial p_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}^i} - \frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{p}_i} = (u, v).$$

Таким образом,

[61.5] *Скобка Пуассона любых двух функций инвариантна при однородных касательных преобразованиях.*

Если для двух функций u и v (u, v) тождественно равно нулю, то говорят, что эти функции находятся в *инволюции*. Из (61.13) имеем:

[61.6] *Функции φ^i однородного касательного преобразования находятся в инволюции так же, как и функции ψ_i.*

62. Инфинитезимальные однородные касательные преобразования. Так как мы намерены рассматривать непрерывные группы однородных касательных преобразований, то мы начнем с изучения инфинитезимальных однородных касательных преобразований. Такое преобразование определяется уравнениями вида:

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i \delta t, \quad \bar{p}_i = p_i + \eta_i \delta t, \qquad (62.1)$$

где ξ^i и η_i — такие функции x^i и p_i, что эти уравнения удовлетворяют условиям (59.10). Это дает условия:

$$\eta_i + p_j \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = 0, \quad p_j \frac{\partial \xi^j}{\partial p_i} = 0. \qquad (62.2)$$

Положив

$$C = p_j \xi^j, \qquad (62.3)$$

вследствие (62.2), дифференцированием получим:

$$\frac{\partial C}{\partial x^i} = p_j \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = -\eta_i, \quad \frac{\partial C}{\partial p_i} = \xi^i + p_j \frac{\partial \xi^j}{\partial p_i} = \xi^i. \qquad (62.4)$$

Из (62.3) и второй системы этих уравнений имеем

$$C = p_j \frac{\partial C}{\partial p_j}, \qquad (62.5)$$

т. е. C однородно первой степени относительно p_i. Это непосредственно следует также из (62.3), так как (62.1) определяет однородное касательное преобразование. Дифференцируя (62.5) по x^i и p_i, мы, соответственно, получаем:

$$\frac{\partial C}{\partial x^i} - p_j \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial x^i} = 0, \quad p_j \frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial p_j} = 0, \qquad (62.6)$$

что, в силу (62.4), эквивалентно (62.2).

Обратно, пусть C — любая функция x^i и p_i, однородная первой степени относительно p_i; если определить ξ^i и η^i, согласно (62.4), то условия (62.2) удовлетворятся, ибо (62.6) являются следствиями (62.5). Соответственно этому[1]), имеем:

[62.1] *Любое инфинитезимальное однородное касательное преобразование определяется уравнениями вида:*

$$\bar{x}^i = x^i + \frac{\partial C}{\partial p_i}\delta t, \quad \bar{p}_i = p_i - \frac{\partial C}{\partial x^i}\delta t, \qquad (62.7)$$

где функция C однородная первой степени относительно p_i; любая такая функция C определяет инфинитезимальное однородное касательное преобразование. Функция C называется *характеристической функцией* преобразования.

Образуя дифференциалы (62.7), получаем:

$$\left.\begin{aligned} d\bar{x}^i &= dx^i + \left(\frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial x^j} dx^j + \frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial p_k} dp_k\right)\delta t \\ d\bar{p}_i &= dp_i - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^i \partial x^j} dx^j + \frac{\partial^2 C}{\partial x^i \partial p_k} dp_k\right)\delta t. \end{aligned}\right\} \qquad (62.8)$$

Уравнения (62.7) и (62.8) определяют продолженное инфинитезимальное преобразование элементов x^i, p_i, dx^i, dp_i. Для этого продолженного преобразования $p_i\,dx^i$ является инвариантом, как следует из (62.6). Таким образом, в соответствии с общей теорией групп Ли, величина $p_i dx^i$ является инвариантом конечной группы G_1, порожденной продолженным инфинитезимальным преобра-

[1]) См. Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 263.

зованием. Конечные уравнения[1]) группы G_1 являются интегралами уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial C}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial C}{\partial x^i}, \tag{62.9}$$

скажем,

$$\bar{x}^i = \varphi^i(x; p; t), \quad \bar{p}_i = \psi_i(x, p, t), \tag{62.10}$$

и их дифференциалы. Следовательно, (62.10) определяет однопараметрическую группу касательных преобразований. Из предыдущих рассмотрений следует теорема:

[62.2] *Наиболее общая однопараметрическая группа однородных касательных преобразований дается решением уравнений* (62.9), *в которых C — произвольная аналитическая функция x^i и p_i, однородная первой степени относительно p_i.*

Любой интеграл уравнений (62.19) удовлетворяет условию $C = \text{const}$. Это означает, что в $2n$-мерном пространстве координат x^i и p_i каждая интегральная кривая или *траектория* лежит в одной из гиперповерхностей $C = h$. Если в правой стороне (62.10) величинам x^i и p_i дать фиксированные значения, то эти уравнения определят некоторую интегральную кривую, расположенную на гиперповерхности, определенной значением C в данной точке. Так как C однородна первой степени относительно p_i, то φ^i будут нулевой, а ψ_j — первой степени. Следовательно, если мы заменим p_i на $\frac{p_i}{h}$, то мы получим кривую с теми же φ^i и $\bar{p}_i = \frac{\psi_i}{h}$, удовлетворяющую условию:

$$C = 1. \tag{62.11}$$

С точки зрения касательных преобразований эта замена не имеет никакого значения, так что, исключая случай $C = 0$, мы можем всегда предполагать (62.11) выполненным.

Если можно выбрать вещественные начальные значения p_i таким образом, чтобы $C = 0$, то это уравнение будет иметь место вдоль всей траектории. Такую траекто-

[1] См. Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 212.

рию мы называем *сингулярной*. В этом случае из (62.2) и $p_j\xi^j=0$ следует, что ξ^j определены только с точностью до общего множителя. Следовательно, если функция C такова, что $\frac{\partial C}{\partial p_i}$ и $\frac{\partial C}{\partial x^i}$ содержат множитель, обращающий их в нуль или бесконечность, когда $C=0$, то мы можем вычеркнуть этот множитель. Рассмотрим, например, случай, когда C является квадратным корнем из однородной квадратичной формы относительно p_i:

$$C=\sqrt{g^{ij}p_ip_j}, \tag{62.12}$$

в которой g^{ij} — функции x^k. Для несингулярных траекторий мы выберем p_i так, чтобы на них $C=1$. В этом случае уравнения (62.9) дадут

$$\frac{dx^i}{dt}=g^{ij}p_j,\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^i}p_jp_k. \tag{62.13}$$

Из (62.9) и (62.3) следует, когда $C=0$, $p_idx^i=0$. Это условие удовлетворено согласно первой системе (62.13), поэтому мы возьмем (62.13) в качестве уравнений также и сингулярных траекторий, когда такие траектории существуют. Заметим также, что $g^{ij}p_ip_j=\text{const.}$ является первым интегралом этих уравнений.

Если мы с помощью общего однородного касательного преобразования (59.8) преобразуем уравнения (62.9), положив $x'^i=\varphi^i$, $p'_i=\psi_i$, то получим:

$$\frac{dx'^i}{dt}=\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\frac{\partial C}{\partial p_j}-\frac{\partial\varphi^i}{\partial p_j}\frac{\partial C}{\partial x^j},\quad \frac{dp'_i}{dt}=\frac{\partial\psi_i}{\partial x^j}\frac{\partial C}{\partial p_j}-\frac{\partial\psi_i}{\partial p_j}\frac{\partial C}{\partial x^j}.$$

Если C' преобразованное C, то

$$\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\frac{\partial C}{\partial p_j}-\frac{\partial\varphi^i}{\partial p_j}\frac{\partial C}{\partial x^j}=\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\frac{\partial\varphi^k}{\partial p_j}-\frac{\partial\varphi^i}{\partial p_j}\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^j}\right)\frac{\partial C'}{\partial x'^k}+$$
$$+\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\frac{\partial\varphi^k}{\partial p_j}-\frac{\partial\varphi^i}{\partial p_j}\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^j}\right)\frac{\partial C'}{\partial p'_k}.$$

Вследствие (61.13), это сводится к $\frac{\partial C'}{\partial p'_i}$. Аналогично, правая стороиа второй системы уравнений равна $-\frac{\partial C'}{\partial x'^i}$.

Таким образом,

[62.3] *Пусть группа G_1 однородных касательных преобразований преобразована однородным касательным преобразованием в другую группу G_1. Тогда уравнения новой группы являются интегралами уравнений*

$$\frac{dx'^i}{dt}=\frac{\partial C'}{\partial p_i'},\quad \frac{dp_i'}{dt}=-\frac{\partial C'}{\partial x'^i},$$

где C' преобразованная характеристическая функция данной группы.

Из (62.1) и (62.4) следует, что символ Af инфинитезимального однородного касательного преобразования выражается через характеристическую функцию C следующим образом:

$$Af=\xi^i\frac{\partial f}{\partial x^i}+\eta_i\frac{\partial f}{\partial p_i}=(C,f). \qquad (62.14)$$

Упражнения

1. Однородное касательное преобразование, определенное (§ 61) уравнением $x^i\bar{x}^i+1=0$, имеет уравнения

$$\bar{x}^i=-\frac{p_i}{p_jx^j},\quad \bar{p}_i=x^ip_jx^j.$$

2. Если $F(x;p)$ и $G(x;p)$ преобразуются однородным касательным преобразованием в $\bar{F}(\bar{x},\bar{p})$ и $\bar{G}(\bar{x},\bar{p})$, то

$$p_i\frac{\partial F}{\partial p_i}=\bar{p}_i\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{p}_i}\ \text{и}\ (F,G)=(\bar{F},\bar{G}).$$

3. Пусть u — решение уравнения $(F,f)=0$; если v — любая функция, такая, что (F,v) является функцией F, то (u,v) есть решение этого же уравнения.

4. Для того, чтобы две однопараметрические группы однородных касательных преобразований, определенные функциями C_1 и C_2, коммутировали (т. е. любое преобразование одной группы было перестановочно со всеми преобразованиями другой), необходимо и достаточно, чтобы $(C_1, C_2)=0$.

5. Если $r(\leqslant n)$ независимых (с постоянными коэффициентами) инфинитезимальных однородных касательных преобразований с символами (C_a,f) для $a=1,\ldots,r$ таковы, что $(C_a,C_b)=0$. то существует однородное касательное преобразование, такое, что в новых переменных $\bar{x}^i$, $\bar{p}_i$ символы имеют вид $(\bar{C}_a,f)=\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^a}$.

(Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 267,)

6. Для того, чтобы r независимых (с постоянными коэффициентами) характеристических функций $C_1, C_2, \ldots, C_r$ определяли группу C_r однородных касательных преобразований, необходимо и достаточно, чтобы

$$(C_a, C_b) = c_{ab}^e C_e,$$

где c_{ab}^e — постоянные, удовлетворяющие соотношениям (7.3) и (7.4).

(Lie-Engel, 1888, том 2, стр. 300.)

7. Показать, что функции

$$C_1 = p_1 + p_2,\ C_2 = x^1 p_1 + x^2 p_2,\ C_3 = (x^1)^2 p_1 + (x^2)^2 p_2$$

определяют группу G_3 однородных касательных преобразований.

8. Показать, что функции

$$C_1 = p_1,\ C_2 = x^1 p_1 + \frac{x^2 p_2}{2},\ C_3 = (x^1)^2 p_1 + x^1 x^2 p_2$$

определяют группу G_3 однородных касательных преобразований с теми же структурными константами, что и у группы G_3 упражнения 7. Данная группа переходит в последнюю при преобразовании

$$\bar{x}^1 = \frac{x^1 \sqrt{p_1} + i x^2 \sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1} + i \sqrt{p_2}},\ \bar{x}^2 = \sqrt{x^1 - x^2}\,\frac{\sqrt{p_1 p_2}}{\sqrt{p_1} + i \sqrt{p_2}},$$

$$\bar{p}_1 = p_1 + p_2,\ \bar{p}_2 = 2i \sqrt{x^1 - x^2}\,\sqrt[4]{p_1 p_2}\,(\sqrt{p_1} + i \sqrt{p_2}).$$

(Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 312.)

63. Неоднородные касательные преобразования.

В своем изложении теории касательных преобразований Ли в первую очередь рассматривает преобразования вида:

$$\left.\begin{aligned} Z &= \varphi(z, x^1, \ldots, x^n; p_1, \ldots, p_n), \\ X^i &= \varphi^i(z, x; p),\ P_i = \psi_i(z, x; p), \end{aligned}\right\} \tag{63.1}$$

такие, что уравнение

$$dZ - P_i dX^i = 0 \tag{63.2}$$

удовлетворено всякий раз, когда

$$dz - p_i dx^i = 0. \tag{63.3}$$

Следовательно, аналитически задача состоит в определении функций $\varphi, \varphi^i, \psi_i$, а также функции ρ от z, x^i, p_i, таких, что

$$dZ - P_i dX^i = \rho\,(dz - p_i dx^i) \qquad (63.4)$$

для независимых значений дифференциалов dz, dx^i и dp_i. Если, в частности, мы возьмем $p_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, где f — функция x^i, то дифференциалам, удовлетворяющим (63.3), соответствуют смещения по гиперповерхности $z = f(x^1, \ldots, x^n)$ и элементы к ней касательные. Если эти значения подставим в первые $n+1$ уравнений (63.1), то, по исключении x^i, мы получим $Z = F(X^1, \ldots, X^n)$. Вследствие соотношений (63.2), в каждой точке этой гиперповерхности P_i определят касательные к ней элементы. В отличие от однородных преобразований, изученных в §§ 59—62, назовем преобразование (63.1) *неоднородным*.

Пусть в n-мерном пространстве координат x^i исключительную роль переменной z играет координата x^1. Тогда аналитически задача заключается в определении преобразований

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}^i &= \varphi^i(x^1, \ldots, x^n; p_2, \ldots, p_n), \\ \bar{p}_i &= \psi_i(x^1, \ldots, x^n; p_2, \ldots, p_n), \end{aligned}\right\} \qquad (63.5)$$

где φ^i и ψ_i таковы, что соотношение

$$\bar{p}_i d\bar{x}^i = -dx^1 + p_\alpha dx^\alpha \ (\alpha = 2, \ldots, n) \qquad (63.6)$$

имеет место для независимых значений дифференциалов dx и dp_α.

Отсюда следуют условия:

$$\psi_j \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^1} = -1, \quad \psi_j \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^\alpha} = p_\alpha, \quad \psi_j \frac{\partial \psi_j}{\partial p_\alpha} = 0 \ (\alpha = 2, \ldots, n). \qquad (63.7)$$

Сравнивая эти уравнения с (59.10), находим, что если в уравнениях однородного преобразования положить $p_1 = -1$, то получится неоднородное преобразование.

Обратно, предположим, что дана система функций, удовлетворяющих соотношениям (63.7). В функциях φ^i положим

$$p_\alpha = -\frac{p_\alpha'}{p_1'} \qquad (63.8)$$

и обозначим полученные функции через φ'^i. Так как

$$\frac{\partial\varphi'^j}{\partial p_1'} = \frac{\partial\varphi^j}{\partial p_\alpha}\frac{p_\alpha'}{(p_1')^2} = -\frac{\partial\varphi^j}{\partial p_\alpha}\frac{p_\alpha}{p_1'},$$
$$\frac{\partial\varphi'^j}{\partial p_\alpha'} = -\frac{\partial\varphi^j}{\partial p_\alpha}\frac{1}{p_1'}, \quad (\alpha = 2, \ldots, n), \tag{63.9}$$

где в первой системе уравнений производится суммирование по α, то из (63.7), (63.8) и (63.9) следует, что

$$\psi_j'\frac{\partial\varphi'^j}{\partial x^i} = p_i', \quad \psi_j'\frac{\partial\varphi'^j}{\partial p_i'} = 0,$$

где

$$\psi_j' = -p_1'\psi_j\left(x^1, \ldots, -x^n; -\frac{p_2'}{p_1'}, \ldots, -\frac{p_n'}{p_1'}\right). \tag{63.10}$$

Следовательно, функции φ'^i и ψ_i' определяют однородное касательное преобразование. Заметим, в частности, что если неоднородное преобразование получено из однородного методом, изложенным в предыдущем абзаце, то, применив к этому неоднородному преобразованию только что изложенный прием, получим исходное однородное преобразование. Отметим еще, что однородное преобразование, полученное этим способом, нельзя применить к элементам, для которых $p_1' = 0$, если только ψ_i не однородны первой степени относительно p_i. Из предыдущих рассуждений следует, что результаты § 60 имеют место и для неоднородных преобразований.

Подставив выражения (63.9) в уравнения вида (59.17), получим:

$$[\varphi^k, \varphi^l] \equiv \frac{\partial\varphi^k}{\partial P_\alpha}\left(\frac{\partial\varphi^l}{\partial x^\alpha} + P_\alpha\frac{\partial\varphi^l}{\partial x^1}\right) - $$
$$- \frac{\partial\varphi^l}{\partial P_\alpha}\left(\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^\alpha} + P_\alpha\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^1}\right) = 0. \tag{63.11}$$

Обратно, пусть дана система функций φ^i от $x^1, \ldots, x^n$, $P_2, \ldots, P_n$, удовлетворяющих этим уравнениям, и таких, что ранг их якобиана по x^i равен n. Система функций ψ_i, определяемая единственным образом первыми n уравнениями (63.7), удовлетворяет и остальным уравнениям (63.7). Действительно, умножив уравнения (63.11) на ψ_k и суммируя затем по k, получаем:

$$\psi_k \frac{\partial\varphi^k}{\partial P_\alpha}\left(\frac{\partial\varphi^l}{\partial x^\alpha} + P_\alpha \frac{\partial\varphi^l}{\partial x^1}\right) = 0. \qquad (63.12)$$

Эти уравнения имеют место для $l = 1, \ldots, n$, так как, когда $k = l$, уравнения (63.11) удовлетворяются тождественно. Разрешая первые n уравнений (63.7) относительно ψ_k, получаем:

$$\left|\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\right| \cdot \psi_k = (-1)^k \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial\varphi^{k-1}}{\partial x^1} & \frac{\partial\varphi^{k+1}}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial\varphi^n}{\partial x^1} \\ -P_2 & \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^2} & \ldots & \frac{\partial\varphi^{k-1}}{\partial x^2} & \frac{\partial\varphi^{k+1}}{\partial x^2} & \ldots & \frac{\partial\varphi^n}{\partial x^2} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ -P_n & \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^n} & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \frac{\partial\varphi^n}{\partial x^n} \end{vmatrix}$$

Детерминант справа равен детерминанту из величин [1])

$$\frac{\partial\varphi^l}{\partial x^\alpha} + p_\alpha \frac{\partial\varphi^l}{\partial x^1}$$

для $\alpha = 2, \ldots, n$; $l = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$.

Так как, по крайней мере, одна из функций ψ_i не равна нулю, то один из этих детерминантов не нуль, и, следовательно, из (63.12) следует, что $\psi_k \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial P_\alpha} = 0$. Таким образом, мы имеем:

[63.1] *Для того, чтобы система функций φ^i от $x^1, \ldots, x^n$; $p_2, \ldots, p_n$ определяла неоднородное касательное преобразование, в котором x^1 играет особую роль, необходимо и достаточно, чтобы матрица Якоби φ^i по x^j имела ранг n, и $[\varphi^k, \varphi^l] = 0$. Функции ψ_i преобразования определяются тогда единственным образом* [2]).

Из (63.10) и (63.8) имеем:

$$\frac{\partial\psi'_j}{\partial x^i} = -p'_1 \frac{\partial\psi_j}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial\psi'_k}{\partial p'_1} = -\psi_k + \frac{\partial\psi_k}{\partial p^\alpha} p_\alpha; \quad \frac{\partial\psi'_k}{\partial p'_\alpha} = \frac{\partial\psi_k}{\partial p_\alpha}.$$

---

[1]) Fine, 1905, 1, стр. 505.

[2]) Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 124.

Следовательно, из (61.13) для φ' и ψ' получим (в обозначениях (63.11)):

$$[\psi_j, \psi_k] = \psi_j \frac{\partial \psi_k}{\partial x^1} - \psi_k \frac{\partial \psi_j}{\partial x^1}, \quad [\psi_k, \varphi^j] = \delta^j_k + \psi_k \frac{\partial \psi^j}{\partial x^1}. \quad (63.13)$$

Уравнения (63.11) и (63.13) также получатся, если мы разрешим уравнения (59.14) и $\psi_j = \frac{\partial \psi_j}{\partial p_i} p_i$ относительно $\frac{\partial \psi^j}{\partial p_1}$ и $\frac{\partial \psi_j}{\partial p_1}$; положим затем $p_1 = -1$, что даст

$$\frac{\partial \psi^j}{\partial p_1} = \left(p_\alpha \frac{\partial \varphi^j}{\partial p_\alpha}\right)_{p_1 = -1}, \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial p_1} = \left(P_\alpha \frac{\partial \psi_j}{\partial p_\alpha} - \psi_j\right)_{p_1 = -1},$$

и, наконец, подставим это в (61.13).

Эти результаты применимы к преобразованиям в форме (63.5). Чтобы получить их также для (63.1) и (63.4), допустим, что в (63.5) i принимает значения $0, 1, \ldots, n$, и положим $\varphi^0 = Z$, $x^0 = z$, $p_0 = -1$, $\rho = -\frac{1}{\psi_0}$, $P_\alpha = -\frac{\psi_\alpha}{\psi_0}$ для $\alpha = 1, \ldots, n$. Теперь в уравнениях (63.11) и (63.13) k и l принимают значения $0, 1, \ldots, n$. Используя эти уравнения, получим из (61.13) следующие соотношения для касательного преобразования (63.1):

$$[Z, X^\alpha] = [X^\alpha, X^\beta] = [P_\alpha P_\beta] = 0, \quad [P_\alpha, X_\beta] = 0, \quad [P_\alpha X^\alpha] = \rho,$$
$$[P_\alpha, Z] = \rho P_\alpha. \quad (63.14)$$
$$(\alpha \neq \beta)$$

В этих уравнениях скобки определены (63.11), в которых α принимает теперь значения[1]) $1, \ldots, n$.

Пусть ранг матрицы Якоби $\left\| \frac{\partial \varphi^i}{\partial p_\alpha} \right\|$ уравнений (63.5) равен $n - r$. Исключением p_i из первых n этих уравнений мы получим уравнения

$$F_\sigma(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n; x^1, \ldots, x^n) = 0 \quad (\sigma = 1, \ldots, r).$$

[1]) Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 122.

Используя (63.6), мы, аналогично (59.13), получаем:

$$\bar{p}_i = u^\sigma \frac{\partial F_\sigma}{\partial \bar{x}^i}, \quad 1 = u^\sigma \frac{\partial F_\sigma}{\partial x^1}, \quad p_\alpha = -u^\sigma \frac{\partial F_\sigma}{\partial x^\alpha}.$$

Обратно, если дана система уравнений $F_\sigma = 0$, то, так же как в § 61, можно показать, что она определяет неоднородное касательное преобразование, при условии, если для произвольных значений параметров u^σ ранг детерминанта (61.3) равен $n+r$. Определение функций φ^i преобразования сводится тогда к решению уравнений $F_\sigma = 0$ и (61.4), в которых $p_1 = -1$, относительно x^i. При этом переменные перенумерованы так[1]), чтобы ранг матрицы $\left\| \frac{\partial F_\sigma}{\partial x^r} \right\|$ был равен r.

Для инфинитезимальных преобразований (62.1), в которых $p_1 = -1$, уравнения (63.7) дают:

$$\left.\begin{aligned} \eta_i - \frac{\partial \xi^1}{\partial x^i} + p_\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i} &= 0, \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial p_\alpha} - p_\beta \frac{\partial \xi^\beta}{\partial p_\alpha} &= 0 \quad (\alpha, \beta = 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \qquad (63.15)$$

Полагая

$$W = p_\alpha \xi^\alpha - \xi^1,$$

приведем эти уравнения к виду

$$\eta_i = -\frac{\partial W}{\partial x^i}, \quad \xi^\alpha = \frac{\partial W}{\partial p_\alpha}, \quad \xi^1 = p_\alpha \frac{\partial W}{\partial p_\alpha} - W,$$

Обратно, если W — любая функция $x^1, \ldots, x^n$ и $p_2, \ldots, p_n$, то эти выражения удовлетворяют (63.15). Таким образом[2]),

[63.2] *Наиболее общее инфинитезимальное неоднородное касательное преобразование определяется*

[1]) См. Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 155.
[2]) См. упражнение 3, § 68.

уравнениями вида:

$$\left.\begin{aligned}\delta x^1 = \left(p_\alpha \frac{\partial W}{\partial p_\alpha} - W\right)\delta t, \quad \delta x^\alpha = \frac{\partial W}{\partial p_\alpha}\delta t,\\ \delta p_i = -\frac{\partial W}{\partial x^i}\delta t,\end{aligned}\right\} \tag{63.16}$$

где W — *произвольная функция* $x^1, \ldots, x^n; p_2, \ldots, p_n$.

64. Неоднородные касательные преобразования в узком смысле. Рассмотрим частный случай, когда в уравнениях (63.5) функция φ^1 имеет вид $x^1 + \varphi^1(x^2, \ldots, x^n; p_2, \ldots, p_n)$, а функции φ^α $(\alpha = 2, \ldots, n)$ не содержат x^1. Тогда уравнения (63.7) сведутся к

$$\psi_1 = 1, \quad \psi_\beta \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^\alpha} = p_\alpha + \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^\alpha}, \quad \psi_\beta \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial \varphi^1}{\partial p_\alpha}. \tag{64.1}$$

Следовательно, функции ψ_α не содержат x^1. Кроме того, уравнения (63.11) в этом случае имеют вид:

$$(\varphi^\beta, \varphi^\gamma) \equiv \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial p_\alpha}\frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial p_\alpha} = 0 \tag{64.2}$$

и

$$(\varphi^1, \varphi^\beta) = p_\alpha \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial p_\alpha} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 2, \ldots, n). \tag{64.3}$$

Вследствие теоремы (63.1) имеем[1]:

[64.1] *Если* $n-1$ *независимых функций* φ^α *переменных* $x_2, \ldots, x^n$*:* $p_2, \ldots, p_n$ *удовлетворяют соотношениям* (64.2) *и* φ^1 — *любая функция этих же переменных, удовлетворяющая* (64.3), *то уравнения*

$$\bar{x}^1 = x^1 + \varphi^1, \quad \bar{x}^\alpha = \varphi^\alpha, \quad \bar{p}_\alpha = \psi_\alpha \quad (\alpha = 2, \ldots, n), \tag{64.4}$$

где ψ_α *единственным образом определены соотношениями* (64.1), *определяют касательное преобразование, для которого*

$$d\bar{x}^1 - \bar{p}_\alpha\, d\bar{x}^\alpha = dx^1 - p_\alpha\, dx^\alpha \tag{64.5}$$

[1]) См. Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 129.

и, следовательно,

$$\bar{p}_\alpha d\bar{x}^\alpha = p_\alpha dx^\alpha + d\varphi^1. \tag{64.6}$$

Мы называем такое преобразование *неоднородным касательным преобразованием в узком смысле.*

Если φ^α однородные функции нулевой степени относительно p_i, то уравнения (64.3) принимают вид $(\varphi^1, \varphi^\beta) = 0$. Рассматриваемые относительно φ^1, как линейные дифференциальные уравнения в частных производных, эти уравнения, как можно показать с помощью тождеств Якоби (61.15), образуют полную систему. Следовательно, эти уравнения допускают $n - 1$ независимых интегралов. Вследствие (64.2) φ^α являются их независимыми интегралами. Таким образом, φ^1 есть произвольная функция φ^α, например $F(\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$. В этом случае мы из (64.1) имеем:

$$\left(\psi_\beta - \frac{\partial F}{\partial \varphi^\beta}\right)\frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^\alpha} = p_\alpha, \qquad \left(\psi_\beta - \frac{\partial F}{\partial \varphi^\beta}\right)\frac{\partial \varphi^\beta}{\partial p^\alpha} = 0,$$

так что преобразование, в сущности, однородно.

Заметим также, что для неоднородных преобразований в узком смысле уравнения (63.13) можно переписать в виде:

$$(\psi_\alpha, \varphi^1) = \psi_\alpha - p_\beta \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial p_\beta}, \qquad (\psi^\beta, \varphi^\alpha) = \delta^\alpha_\beta, \; (\psi_\alpha, \psi_\beta) = 0. \tag{64.7}$$

Из этих уравнений следует, что для неоднородных касательных преобразований в узком смысле имеет место теорема (61.5). Ранг якобиана φ^α по p_i равен $n - 1 - r$, где $r \geqslant 0$. Если мы исключим p_i из первых n уравнений (64.4), то получим:

$$\bar{x}^1 - x^1 = F(\bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n; \; x^2, \ldots, x^n) \tag{64.8}$$

и r уравнений

$$F_\sigma(\bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n; \; x^2, \ldots, x^n) = 0 \quad (\sigma = 1, \ldots, r), \tag{64.9}$$

Эти две системы уравнений появляются здесь вместо уравнений (59.11) однородного случая. Используя (64.5), мы вместо (59.13) получаем:

$$\bar{p}_\alpha = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}^\alpha} + \rho^\sigma \frac{\partial F_\sigma}{\partial \bar{x}^\alpha}, \quad p_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial x^\alpha} - \rho^\sigma \frac{\partial F_\sigma}{\partial x^\alpha}. \quad (64.10)$$

Обратно, если систему уравнений (64.9) и вторую из систем (64.10) можно разрешить относительно $\bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$; $\rho^1, \ldots, \rho^r$ в виде функций x^i и p_i, то уравнения, получающиеся при подстановке этих решений в (64.8) и в первую из систем (64.10), определят неоднородное преобразование в узком смысле. Условия, которым удовлетворяют $F, F_1, \ldots, F_r$, можно получить так же, как в § 61[1]).

Для инфинитезимального неоднородного преобразования в узком смысле функция W не содержит x^1, и, следовательно,

[64.2] *Наиболее общее инфинитезимальное неоднородное касательное преобразование в узком смысле определяется уравнениями вида*

$$\left.\begin{aligned} \delta x^1 = \left(p_\alpha \frac{\partial W}{\partial p_\alpha} - W\right)\delta t, \quad \delta x^\alpha = \frac{\partial W}{\partial p_\alpha}\delta t, \\ \delta p_\alpha = -\frac{\partial W}{\partial x^\alpha}\delta t, \end{aligned}\right\} \quad (64.11)$$

где характеристическая функция W есть произвольная функция $x^2, \ldots, x^n$; $p_2, \ldots, p_n$.

В этом случае вместо (64.6) мы имеем:

$$\bar{p}_\alpha d\bar{x}^\alpha = p_\alpha dx^\alpha + d\left(p_\alpha \frac{\partial W}{\partial p_\alpha} - W\right)\delta t,$$

с точностью до членов высшего порядка относительно δt. Таким образом, если W однородная функция нулевой степени относительно p_i, то преобразование однородно (см. § 62).

Из результатов § 62 следует, что каждое инфинитезимальное преобразование этото типа порождает группу G_1 неоднородных преобразований в узком смысле, конечные

[1]) Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 156.

уравнения которой являются интегралами уравнений:

$$\frac{dx^1}{dt} = p_\alpha \frac{\partial W}{\partial p_\alpha} - W, \quad \frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{\partial W}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial x^\alpha}. \quad (64.12)$$

Из (64.6) следует, что произведение двух неоднородных преобразований в узком смысле является преобразованием того же типа. Следовательно, произведения некоторого неоднородного преобразования в узком смысле и преобразований некоторой группы G_1 таких же преобразований составляют новую группу $\bar{G}_1$ неоднородных преобразований в узком смысле, уравнения которой поэтому имеют вид:

$$\frac{d\bar{x}^1}{dt} = \bar{p}_\alpha \frac{\partial \overline{W}}{\partial \bar{p}_\alpha} - \overline{W}, \quad \frac{d\bar{x}^\alpha}{dt} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial \bar{p}_\alpha}, \quad \frac{d\bar{p}_\alpha}{dt} = -\frac{\partial \overline{W}}{\partial \bar{x}^\alpha}.$$

Но в силу (64.2), (64.3) и (64.7), $\overline{W} = W$, т. е. $\overline{W}$ является образом W при данном неоднородном преобразовании в узком смысле.

Уравнения (64.12), за исключением первого, являются общими уравнениями Гамильтона для консервативной голономной динамической системы, функция Гамильтона которой не содержит времени t. Следовательно, применяя к этим уравнениям преобразование вида (64.4), где φ^α удовлетворяют (64.2), а φ^1 — уравнениям (64.3), мы получим новую систему Гамильтона[1]), функция Гамильтона которой является преобразованной первоначальной функцией Гамильтона.

Присоединив первое уравнение (64.12) к уравнениям Гамильтона консервативной голономной системы, для которых W не содержит времени, мы получим уравнение

$$\frac{dx^1}{dt} = p_\alpha \frac{dx^\alpha}{dt} - W,$$

правая сторона которого является функцией Лагранжа данной динамической системы.

65. Однородные касательные преобразования максимального ранга. Из второй системы уравнений (62.6)

---

[1]) См. Jacobi, 1837, 1, стр. 67.

следует, что ранг гессиана функции $C(\neq 0)$ по p_i, т. е. $\left|\frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial p_j}\right|$, равен самое большее $n-1$. Полагая

$$H = \frac{1}{2} C^2, \qquad (65.1)$$

имеем

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = C \frac{\partial C}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} = C \frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial p_j} + \frac{\partial C}{\partial p_i} \frac{\partial C}{\partial p_j}. \qquad (65.2)$$

Из второй системы этих уравнений следует, что гессиан функции H по p_i равен [1])

$$C^{n-1} \begin{vmatrix} C & -\frac{\partial C}{\partial p_1} & \ldots & -\frac{\partial C}{\partial p_n} \\ \frac{\partial C}{\partial p_1} & \frac{\partial^2 C}{\partial p_1^2} & \ldots & \frac{\partial^2 C}{\partial p_1 \partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial C}{\partial p_n} & \frac{\partial^2 C}{\partial p_1 \partial p_n} & \ldots & \frac{\partial^2 C}{\partial p_n^2} \end{vmatrix}. \qquad (65.3)$$

Если мы умножим последние n строк этого детерминанта на $p_1, \ldots, p_n$, соответственно, и прибавим элементы остальных строк к соответствующим элементам последней строки, то, вследствие (62.5) и (62.6), ее элементы примут вид C, $0, \ldots, 0$. Следовательно, для того, чтобы ранг гессиана фуикции H по p_i был равен n, необходимо, чтобы детерминант, получаемый из (65.3) вычеркиванием первого столбца и последней строки, имел ранг n. Если столбцы последиего детерминанта умножим на $p_1, \ldots, p_n$, соответственно, и первые $n-1$ столбцов прибавим к последнему, то элементы последнего столбца примут вид $C, 0, \ldots, 0$. Таким образом, ранг этого детерминанта равен n только тогда, когда детерминант $\left|\frac{\partial^2 C}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\right|$ для $\alpha, \beta = 1, \ldots, n-1$, имеет ранг $n-1$.

Повторив рассуждения, используя любую из последних n строк детерминанта (65.3) так же, как мы исполь-

1) См. Fine, 1905, 1, стр. 505.

зовали последнюю, мы найдем, что для того, чтобы ранг детерминанта (65.3) был равен n, необходимо, чтобы каждый минор порядка $n-1$ гессиана функции C по p_i был ранга $n-1$. Но это уже будет иметь место, если ранг хотя бы одного минора равен $n-1$. Действительно, если $\left|\frac{\partial^2 C}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\right|$ для $\alpha, \beta = 1, \ldots, n-1$ имеет ранг $n-1$, то из уравнений

$$p_i \frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial p_\alpha} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n; \ \alpha = 1, \ldots, n-1)$$

следует, что каждый детерминант порядка $n-1$ матрицы $\left\|\frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial p_\alpha}\right\|$ имеет ранг $n-1$. Применяя то же рассуждение к уравнениям $p_i \frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial p_\sigma} = 0$, где $i = 1, \ldots, n$, а σ равно n и любым $n-2$ числам $1, \ldots, n-1$, придем к заключению, что если ранг гессиана функции C по p_i равен $n-1$, то любой минор порядка $n-1$ имеет ранг $n-1$.

Итак, имеем:

[65.1] *Ранг гессиана функции C по p_i равен $n-1$ тогда и только тогда, когда ранг гессиана функции H по p_i равен n.*

Не нарушая общности, положим (§ 62)

$$C = 1. \tag{65.4}$$

Тогда, в силу (65.1), уравнения (62.9) можно написать в виде:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}. \tag{65.5}$$

Если мы предположим, что C удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, то ранг гессиана функций H по p_i равен n и, следовательно, первую систему уравнений (65.5) можно разрешить относительно p_i в виде функций x^i, $\dot{x}^i$, где $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$. Так как H однородная функция p_i второй степени, то эти решения однородны первой степени относительно $\dot{x}^i$. Если эти выражения для p_i подставим в H, то мы получим функцию K от x^i и $\dot{x}^i$, однородную второй степени от $\dot{x}^i$, Таким образом,

$$K(x; \dot{x}) = H(x; p). \tag{65.6}$$

Дифференцируя K по $\dot{x}^i$, вследствие (65.5) получаем:

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \dot{x}^i} = \dot{x}^j \frac{\partial p_j}{\partial \dot{x}^i}. \tag{65.7}$$

Следовательно, по теореме Эйлера:

$$2K = \dot{x}^i \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^i} = \dot{x}^j \dot{x}^i \frac{\partial p_j}{\partial \dot{x}^i} = \dot{x}^j p_j. \tag{65.8}$$

Из (65.7) и этого уравнения имеем:

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^i} = \frac{1}{2}\left(p_i + \dot{x}^j \frac{\partial p_j}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{1}{2} p_i + \frac{1}{2} \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^i}$$

и, следовательно,

$$p_i = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^i}. \tag{65.9}$$

Из (65.6), (65.5) и (65.8) имеем:

$$\frac{\partial K}{\partial x^i} = \frac{\partial H}{\partial x^i} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x^i} = \frac{\partial H}{\partial x^i} + \dot{x}^j \frac{\partial p_j}{\partial x^i} = \frac{\partial H}{\partial x^i} + 2\frac{\partial K}{\partial x^i}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial K}{\partial x^i} + \frac{\partial H}{\partial x^i} = 0. \tag{65.10}$$

Если мы через D обозначим функцию x^i и $\dot{x}^i$, получающуюся при подстановке в C выражений (65.9) вместо p_i, т. е. решений уравнений (65.5), то получим:

$$K = \frac{1}{2} D^2, \quad D = 1. \tag{65.11}$$

Последнее является следствием (65.4). Из (65.9) имеем:

$$p_i = \frac{\partial D}{\partial \dot{x}^i}, \tag{65.12}$$

а из (65.10)

$$\frac{\partial D}{\partial x^i} + \frac{\partial C}{\partial x^i} = 0. \tag{65.13}$$

Если теперь выражения (65.12) подставим во вторую систему уравнений (62.9), то, ввиду (65.13), получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial D}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial D}{\partial x^i} = 0. \tag{65.14}$$

Таким образом, уравнения (65.12) и (65.14) в переменных x^i и $\dot{x}^i$ заменяют уравнения (62.9).

Обратно, если дана функция D от x^i и $\dot{x}^i$, однородная первой степени относительно $\dot{x}^i$, такая, что

$$D(x; \dot{x}) = 1, \tag{65.15}$$

и ранг гессиана функции D по $\dot{x}^i$ равен $n-1$, то уравнения (65.9) можно разрешить относительно $\dot{x}^i$, получив однородные функции первой степени относительно p_i. Повторением вышеописанного процесса мы получим первую систему (62.9) тогда, как вторая будет следовать из (65.12) и (65.14).

Если мы возьмем фиксированную точку $P(x^i)$ нашего пространства, то первая система уравнений (62.7) определит близкую точку, зависящую от выбора p_i, подчиненных условию (65.4). Уравнение геометрического места этих точек получается исключением p_i из первой системы (62.7) и из (65.4). Если ранг гессиана функции C по p_i равен $n-1$, то это исключение выполняется способом, которым мы вывели (65.11). Следовательно, если y^i — координаты, в которых точка P является началом координат, так что $y^i = \bar{x}^i - x^i$, то из (62.7) и (62.9) следует, что $y^i = \dot{x}^i \delta t$. Таким образом, уравнение нашего геометрического места имеет вид:

$$D(x; y) = \delta t, \tag{65.16}$$

ибо D однородная функция первой степени относительно $\dot{x}^i$. Точно так же из этого свойства D и (65.12) следует, что

$$p_i = \frac{\partial D(x; y)}{\partial y^i}. \qquad (65.17)$$

Следовательно, p_i являются компонентами ковариантного нормального вектора гиперповерхности (65.16), которая называется *элементарной гиперповерхностью* преобразования для точки P.

Пусть X^i текущие координаты; касательная гиперповерхность в точке определяется формулой

$$p_i (X^i - y^i) = 0$$

или

$$p_i X^i = w, \qquad (65.18)$$

где, ввиду (62.7) и (62.5),

$$w = p_i \frac{\partial C}{\partial p^i} \delta t = C \delta t. \qquad (65.19)$$

Следовательно, (65.18), где w имеет значение (65.19), является тангенциальным уравнением элементарной гиперповерхности[1]).

66. Геометрические свойства непрерывных групп максимального ранга. Волны. Рассмотрим конечные уравнения

$$\bar{x}^i = \varphi^i (x; p; t), \quad \bar{p}_i = \psi_i (x; p; t) \qquad (66.1)$$

группы G_1 однородных касательных преобразований, для которой ранг гессиана характеристической функции C по p_i равен $n-1$. Если функции φ^i, т. е. решения (62.9), написать в виде степенных рядов по t, то станет очевидным, что ранг якобиана φ^j по p_i равен $n-1$. Следовательно, исключая p_i из первой системы уравнений (66.1), мы получим:

$$F(\bar{x}; x; t) = 0. \qquad (66.2)$$

---

[1]) Vessiot, 1906, 1, стр. 262; также Levi-Civita и Amaldi, 1927, 6, стр. 452, 462.

Для заданных значений x^i это уравнение определяет гиперповерхность, зависящую от параметра t, точки которой являются образами точки $P(x)$ для данных значений t. Из выражения функций φ^i в виде степенных рядов по t следует, что эта гиперповерхность для $t=0$ сводится к точке. Для других значений t уравнение (66.2) определяет семейство гиперповерхностей, которые можно интерпретировать как волны, исходящие из точки P, причем t обозначает время, прошедшее с начала возникновения волны.

Если в первой системе уравнений (66.1) мы дадим x^i и p_i фиксированные значения, то эти уравнения определят кривую — геометрическое место соответствующих точек волн. Аналогично. вторая система уравнений (66.1) определит ковариантный нормальный вектор волн в этих точках. Эти кривые мы назовем *траекториями волнового движения*. Если для начальных значений $C=0$, то мы называем траекторию *сингулярной*. Несингулярные траектории являются интегралами уравнений (65.14). Вдоль сингулярной траектории $\bar{p}_i d\bar{x}^i = 0$ (§ 62). Следовательно, такая траектория касается гиперповерхности (66.2) в точках пересечения с ней. Подставляя в (66.2) вместо x^i такое решение и дифференцируя получающееся тождество по t, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{x}^i}\frac{d\bar{x}^i}{dt}+\frac{\partial F}{\partial t}=0.$$

Таким образом, сингулярные траектории пересекают (66.2) в точках гиперповерхности

$$\frac{\partial F}{\partial t}=0,$$

т. е. в точках касания (66.2) со своей огибающей, соответствующей параметру t.

Исключая точки огибающей гиперповерхностей (66.2), мы можем решить (66.2) относительно t:

$$f(\bar{x};\,x)-t=0, \tag{66.3}$$

причем $f(x;\, x) = 0$. Так как преобразования образуют группу, то f должна быть такова, чтобы

$$f\left(\bar{x} + \frac{\partial C}{\partial \bar{p}_i}\,\delta t;\; x\right) - (t + \delta t) = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial C}{\partial \bar{p}_i} = 1, \tag{66.4}$$

где

$$\bar{p}_i = \rho\,\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i}. \tag{66.5}$$

Так как C однородная функция первой степени относительно p_i и $C = 1$, то $\rho = 1$ и, следовательно, f является решением уравнения

$$C\left(\bar{x};\; \frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right) = 1. \tag{66.6}$$

Кроме того, f является полным интегралом, так как содержит n параметров x^i, подчиненных условию $f(x;\, x) = 0$.

Перейдем к обратной задаче определения траекторий по полному интегралу уравнения (66.6), например $\varphi\,(\bar{x};\, a^1, \ldots, a^{n-1})$, где ни одна из a^i не аддитивна. В силу этого требования, якобиан функций φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial a^\alpha}$ $(\alpha = 1, \ldots, n-1)$ по $\bar{x}^i$ не равен нулю. Таким образом, уравнения

$$\varphi\,(\bar{x};\, a) + a^n - t = 0, \tag{66.7}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a^\alpha} = b_\alpha, \tag{66.8}$$

где a^n и b_α — произвольные постоянные, допускают решение

$$\bar{x}^i = \varphi_1{}^i\,(a^1, \ldots, a^n;\; b_1, \ldots, b_{n-1}, t). \tag{66.9}$$

Обозначим через ψ_i функции от a^i, b_i, t и h, получающиеся при подстановке $\varphi_1{}^i$ вместо $\bar{x}^i$ в правые части уравнений

$$\bar{p}_i = h\,\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}^i}, \tag{66.10}$$

где h — произвольная постоянная. Покажем, что φ_1^i и ψ_i составляют решение уравнений (62.9). Действительно, если мы в (66.7) и (66.8) подставим (66.9) и продифференцируем получающиеся тождества по t, то получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}^i} \frac{d\overline{x}^i}{dt} - 1 = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^\alpha \partial \overline{x}^i} \frac{d\overline{x}^i}{dt} = 0. \qquad (66.11)$$

Аналогично, если мы функцию φ подставим в (66.6) и продифференцируем получающееся тождество по a^α и $\overline{x}^i$, то, вследствие (66.10), получим:

$$\frac{\partial C}{\partial \overline{p}_i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x}^i \partial a^\alpha} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \overline{x}^i} + h \frac{\partial C}{\partial \overline{p}_j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x}^j \partial \overline{x}^i} = 0. \qquad (66.12)$$

Из (66.11), (66.4) и первой системы (66.12) мы имеем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}^i} \left(\frac{d\overline{x}^i}{dt} - \frac{\partial C}{\partial \overline{p}_i} \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x}^i \partial a^\alpha} \left(\frac{d\overline{x}^i}{dt} - \frac{\partial C}{\partial \overline{p}_i} \right) = 0,$$

что эквивалентно первой системе уравнений (62.9), так как детерминант для полученных уравнений является упомянутым якобианом, который не равен нулю. Отсюда и из (66.10) и второй системы уравнений (66.12) получаем:

$$\frac{d\overline{p}_i}{dt} = h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^j} \frac{d\overline{x}^j}{dt} = h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^j} \frac{\partial C}{\partial \overline{p}_j} = - \frac{\partial C}{\partial \overline{x}^i}.$$

Если мы через x^i и p_i обозначим значения $\overline{x}^i$ и $\overline{p}_i$ при $t = 0$, то из (66.7) и (67.8) получим:

$$a^n = -\varphi(x; a), \quad b_\alpha = \frac{\partial}{\partial a^\alpha} \varphi(x; a^1, \ldots, a^{n-1}), \qquad (66.13)$$

а из (66.10)

$$p_i \frac{\partial}{\partial x^j} \varphi(x; a) - p_j \frac{\partial}{\partial x^i} \varphi(x; a) = 0. \qquad (66.14)$$

Существует $n-1$ независимых уравнений (66.14). Они определяются $n-1$ величинами a^α, как функциями от x^i и p_i, однородными нулевой степени относительно p_i. Тогда a^n и b_α будут даны выражениями (66.13) в виде функций этих же величин, и из (66.9) мы получим первую систему уравнений (66.1). Для $t=0$ из (66.6) и (66.10) имеем:

$$C\left(x;\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\frac{1}{h}\,C(x;\ p)=1.$$

Следовательно, вторая система уравнений (66.1) получается подстановкой выражений для $\bar{x}^i$, a^α и b_α в виде функций от x^i и p_i в уравнения

$$\bar{p}_i=C(x;p)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \tag{66.10'}$$

однородные первой степени относительно p_i.

Из (66.7) и (66.13) имеем:

$$\varphi(\bar{x};\ a)-\varphi(x;\ a)-t=0. \tag{66.15}$$

Для заданных значений p_i определяемые формулами (66.10′) $\bar{p}_i$ являются компонентами ковариантного нормального вектора гиперповерхности (66.15), соответствующей данному значению t. Согласно (66.5), эти компоненты являются в то же время компонентами ковариантного нормального вектора гиперповерхности (66.3). Таким образом, последняя является огибающей гиперповерхностей (66.15), где p_i рассматриваются как параметры, для того же значения t. Так как a^α суть независимые функции отношений $\frac{p_\alpha}{p_n}$, то огибающая гиперповерхностей, когда эти отношения рассматриваются как параметры, совпадает с огибающей, соответствующей параметрам a^α. Если теперь мы исключим a^α из (66.15) и

$$\frac{\partial\varphi(\bar{x};\ a)}{\partial a^\alpha}-\frac{\partial\varphi(x;\ a)}{\partial a^\alpha}=0,$$

то получим уравнение (66.3).

Рассмотрим некоторую гиперповерхность

$$F(x^1,\ \ldots,\ x^n)=0, \tag{66.16}$$

где F неприводима. Из результатов §§ 60, 61 следует, что огибающая волн, излученных каждой точкой этой гиперповерхности и взятых в момент t, определяется уравнением

$$\bar{x}^i = \varphi^i\left(x; \frac{\partial F}{\partial x}; t\right), \tag{66.17}$$

где x^i связаны соотношением (66.16). Кроме того

$$\bar{p}_i = \psi_i\left(x; \frac{\partial F}{\partial x}; t\right) \tag{66.18}$$

являются в каждой точке компонентами ковариантного нормального вектора. Когда t меняется, огибающие образуют серию волновых фронтов, свойства которой определяются *начальной гиперповерхностью* (66.16). Исключая x^i из (66.16) и (66.17), мы найдем уравнения волновых фронтов

$$\Phi(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n; t) = 0. \tag{66.19}$$

Исключая точки огибающей этих гиперповерхностей, мы можем так же, как в случае (66.2), заменить (66.19) на

$$\psi(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n) - t = 0. \tag{66.20}$$

Из тех рассуждений, которые применялись нами к уравнениям (66.3), следует, что ψ является решением уравнения (66.6). ψ есть общий интеграл, определенный соотношением (66.16) между параметрами x^i в полном интеграле $f(\bar{x}, x)$, ибо (66.20) является огибающей гиперповерхностей (66.3), когда параметры связаны соотношением (66.16). Таким образом, волны (66.3) и волновые фронты (66.20) удовлетворяют принципу Гюйгенса.

Если в (66.17) подставим координаты x^i точки P гиперповерхности (66.16), то получающиеся уравнения определят кривую — геометрическое место точек прикосновения волновых фронтов с волнами, излученными P, когда t меняется. Так определенные кривые являются траекториями движения волнового фронта. Очевидно, что они являются интегралами кривыми уравнений (65.14).

Для фиксированного значения t гиперповерхность (66.20) является огибающей гиперповерхностей (66.7), в которых a^α суть функции x^i, определенные $n-1$ уравнениями

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi(x;\,a)}{\partial x^j}-\frac{\partial F}{\partial x^j}\frac{\partial \varphi(x;\,a)}{\partial x^i}=0, \qquad (66.21)$$

а x^i подчинены условию $F=0$. Если из (66.21), первого уравнения (66.13) и $F=0$ исключить x^i, то получится соотношение

$$\psi(a^1,\ \ldots,\ a^{n-1})=a^n.$$

Следовательно, для a^α, связанных этим соотношением, огибающей (66.7) является (66.20). Обратно, для любого такого соотношения, огибающая гиперповерхностей

$$\varphi(x;\,a)+\psi(a)=0$$

является начальной гиперповерхностью (66.16) волн (66.15).

Для того, чтобы рассмотреть также случай сингулярных траекторий группы G_1, определенной характеристической функцией C, мы рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$C\left(\bar{x};\,\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}\right)=0. \qquad (66.22)$$

Пусть дан интеграл φ этого уравнения, содержащий $n-2$ произвольных постоянных $a^1,\ \ldots,\ a^{n-2}$, ни одна из которых не аддитивна. Рассмотрим $n-1$ уравнений

$$\varphi(\bar{x};\,a)=b,\quad \frac{\partial\varphi(\bar{x},\,a)}{\partial a^\sigma}=b_\sigma\quad (\sigma=1,\ \ldots,\ n-2), \qquad (66.23)$$

где b, b_σ — произвольные постоянные. Для каждой системы значений a^α и b_α эти уравнения определяют кривую, вдоль которой дифференциалы удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^i}\,d\bar{x}^i=0,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial a^\sigma\,\partial\bar{x}^i}\,d\bar{x}^i=0.$$

Если мы определим функции p_i формулами (66.10), то из (66.22) будет следовать, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial C}{\partial p_i}=0,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial a^\sigma\,\partial\bar{x}^i}\frac{\partial C}{\partial p^i}=0.$$

Так как ранг матрицы из $\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^i}$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial a^\sigma\,\partial\bar{x}^i}$ равен $n-1$, то из вышеуказанной системы уравнений получаем:

$$\frac{d\bar{x}^1}{\frac{\partial C}{\partial\bar{p}_1}} = \ldots = \frac{d\bar{x}^n}{\frac{\partial C}{\partial\bar{p}_n}} = \rho,$$

где ρ множитель пропорциональности. Из (66.10) и второй системы (66.12) имеем:

$$d\bar{p}_i = h\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{x}^i\,\partial\bar{x}^j}\,d\bar{x}^j = -\rho\frac{\partial C}{\partial\bar{x}^i}\,.$$

Следовательно, кривые (66.23) являются интегралами (62.9).

Для того, чтобы получить кривые, проходящие через точку $P(x)$, заменим (66.23) на

$$\varphi(\bar{x};\,a) - \varphi(x;\,a) = 0,\quad \frac{\partial\varphi(\bar{x};\,a)}{\partial a^\sigma} - \frac{\partial\varphi(x;\,a)}{\partial a^\sigma} = 0. \quad (66.24)$$

Так как в этом случае p_i должны удовлетворять условию $C(x;\,p) = 0$, то для определения a^α в виде функций x^i и отношений p_i служат $n-2$ уравнений (66.14). Если эти a^α подставить в (66.24), то получатся уравнения сингулярных траекторий. p_i будут даны формулами (66.10), в которых h определяется из

$$p_i = h\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\,.$$

67. Приложение к геодезическим риманова пространства. Рассмотрим риманово пространство с метрикой

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j. \quad (67.1)$$

Вследствие (47.10) и (47.11), уравнения (47.22) неминимальных геодезических пространства примут вид:

$$g_{ij}\frac{d^2x^j}{ds^2} + [jk;\,l]\,\frac{dx^j}{ds}\,\frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (67.2)$$

Рассмотрим теперь группу G_1 касательных преобразований с характеристической функцией

$$C = \sqrt{g^{ij} p_i p_j}. \tag{67.3}$$

В этом случае имеют место уравнения (62.13). Когда траектории несингулярны, из (62.13) и (67.1) следует, что $t = s$. Таким образом,

$$\frac{dx^i}{ds} = g^{ij} p_j, \quad \frac{dp_i}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^i} p_j p_k. \tag{67.4}$$

Вследствие (47.10) и первой системы (67.4), имеем

$$p_i = g_{ij} \frac{dx^j}{ds}. \tag{67.5}$$

Подставляя эти выражения во вторую систему (67.4), мы получим уравнения (67.2).

Если форма (67.1) неопределенна, то существуют такие вещественные значения p_i, что

$$g^{ij} p_i p_j = 0. \tag{67.6}$$

Так же, как и ранее, из (62.13) мы получаем уравнения (67.2) с s, замененным на t, а из первой системы (62.13) и (67.6) следует, что $g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0$, т. е. кривые являются минимальными геодезическими. Таким образом,

[67.1] *Для группы G_1 с характеристической функцией* (67.3) *несингулярные траектории являются неминимальными геодезическими риманова пространства с фундаментальной формой* (67.1) *и $t = s$, а сингулярные траектории суть минимальные геодезические пространства.*

Для случая неминимальной геодезической уравнение (66.6) имеет вид:

$$g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} = 1. \tag{67.7}$$

Из результатов § 66 следует, что если $\varphi(x; a^1, \ldots, a^{n-1})$ является полным интегралом уравнения (67.7), то соответствующие уравнения (66.8) определят $n-1$ гиперповерхностей, пересекающихся по неминимальным геодезическим. Кроме того, из (66.11) и (67.4) следует, что для фиксированных значений a^α эти геодезические являются ортогональными траекториями гиперповерхностей $\varphi = \text{const}$ [1]). Точно так же, если форма (67.1) неопределенна, и $\varphi(x; a^1, \ldots, a^{n-1})$ — интеграл уравнения

$$g^{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} = 0,$$

то вторая система уравнений (66.23) определяет минимальные геодезические.

Пусть $\varphi(\bar{x}, a^1, \ldots, a^{n-1})$ — интеграл уравнения (67.7). Исключением a^α из уравнений

$$\varphi(\bar{x}; a) - \varphi(x; a) - s = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi(\bar{x}; a)}{\partial a^\alpha} - \frac{\partial\varphi(x; a)}{\partial a^\alpha} = 0, \tag{67.8}$$

в которых x^i фиксированы, получим уравнения

$$f(\bar{x}; x) - s = 0, \tag{67.9}$$

которые определят гиперповерхности, ортогональные к геодезическим, проходящим через точку $P(x)$. Каждая из этих гиперповерхностей является геометрическим местом точек, отстоящих от P на одно и то же расстояние s, измеренное по геодезическим. Поэтому мы назовем их *геодезическими гиперсферами* пространства. Функция f есть решение (67.7), и геодезические являются интегралами уравнений

$$\frac{d\bar{x}^1}{g^{1j}\dfrac{\partial f}{\partial \bar{x}^j}} = \ldots = \frac{d\bar{x}^n}{g^{nj}\dfrac{\partial f}{\partial \bar{x}^j}}.$$

Пусть

$$\psi^\alpha(\bar{x}; x) = b^\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, n-1)$$

интегралы этих уравнений. Если мы положим

$$y^\alpha = \psi^\alpha, \quad y^n = f(\bar{x}; x)$$

[1]) 1926, 3, стр. 58.

и обозначим через $a_{ij}\,dy^i dy^j$ результат преобразования формы (67.1), то

$$a^{\alpha n}=g^{ij}\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}=0,\quad a^{nn}=g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}=1.$$

Следовательно, форма (67.1) принимает вид:

$$ds^2=[(dy^n)^2+a_{\alpha\beta}dy^\alpha dy^\beta],$$

и гипероповерхности $y^n=\text{const.}$ будут геодезическими гиперсферами с центрами в $P(x)$.

Пусть x^i и p_i, определенные формулами (67.5), подвергнуты некоторому однородному касательному преобразованию (59.8) максимального ранга, и пусть $\bar{C}$ — результат преобразования C. Тогда $\bar{C}$ однородна первой степени относительно $\bar{p}_i$. Из результатов § 62 следует, что уравнения (67.4) преобразуются в

$$\frac{d\bar{x}^i}{ds}=\frac{\partial\bar{C}}{\partial\bar{p}_i},\qquad \frac{d\bar{p}^i}{ds}=-\frac{\partial\bar{C}}{\partial\bar{x}^i}. \tag{67.10}$$

Определим функции $\bar{g}^{ij}$ формулами

$$\bar{g}^{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2(\bar{C}^2)}{\partial\bar{p}_i\,\partial\bar{p}_j}. \tag{67.11}$$

$\bar{g}^{ij}$ будут однородными функциями нулевой степени относительно $\bar{p}_i$. Из второй системы уравнений (62.6) следует, что

$$\bar{g}^{ij}\bar{p}_i\bar{p}_j=\bar{C}^2. \tag{67.12}$$

Если p_i таковы, что $\bar{C}\neq 0$, то $\bar{C}=1$, и уравнения (67.10) можно переписать в виде

$$\frac{d\bar{x}^i}{ds}=\bar{g}^{ij}\bar{p}_j,\qquad \frac{d\bar{p}_i}{ds}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\bar{g}^{jk}}{\partial x^i}\bar{p}_j\bar{p}_k, \tag{67.13}$$

ибо, вследствие (67.11),

$$\frac{\partial\bar{g}^{jk}}{\partial\bar{p}_i}\bar{p}_j\bar{p}_k=\frac{1}{2}\frac{\partial^3\bar{C}^2}{\partial\bar{p}_i\partial\bar{p}_j\partial\bar{p}_k}\bar{p}_j\bar{p}_k=0.$$

Ввиду (65.1), первая система (67.10) дает:

$$\dot{\bar{x}}^i \equiv \frac{d\bar{x}^i}{ds} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{P}_i}.$$

Так же, как и в § 65, эти уравнения можно разрешить относительно $\bar{p}_i$ в виде функций $\bar{x}^i$ и $\dot{\bar{x}}^i$, однородных первой степени относительно последних. Обозначим через $\bar{K}$ и $\bar{D}$ функции, получающиеся при подстановке в $\bar{H}$ и $\bar{C}$ этих выражений для $\bar{p}_i$. Так как $\bar{D}^2$ однородна второй степени относительно $\dot{\bar{x}}^i$, то, согласно (65.9) и теореме Эйлера, имеем:

$$\bar{p}_i = \frac{\partial \bar{K}}{\partial \dot{\bar{x}}^i} = \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{D}^2}{\partial \dot{\bar{x}}^i} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{D}^2}{\partial \dot{\bar{x}}^i \partial \dot{\bar{x}}^j}\dot{\bar{x}}^j = \bar{g}_{ij}\dot{\bar{x}}^j, \tag{67.14}$$

где $\bar{g}_{ij}$ определены формулой:

$$\bar{g}_{ij} \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial_2 \bar{D}^2}{\partial \dot{\bar{x}}^i \partial \dot{\bar{x}}^j}.$$

Очевидно, что $\bar{g}_{ij}$ функции $\bar{x}^i$ и $\dot{\bar{x}}^i$, однородные нулевой степени относительно последних. Из (67.13) и (67.14) следует $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$. Из этого результата, (67.13) и (67.12) получаем, что $\bar{D}^2 = \bar{g}_{ij}\dot{\bar{x}}^i\dot{\bar{x}}^j$. Так как

$$\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\dot{\bar{x}}^k = \frac{\partial \bar{g}_{ik}}{\partial \dot{\bar{x}}^j}\dot{\bar{x}}^j = 0,$$

то, вследствие (65.13), из второй системы (67.10) получим

$$g^{ij}\frac{d^2\bar{x}^j}{ds^2} + [jk, i]\frac{d\bar{x}^j}{ds}\frac{d\bar{x}^k}{ds} = 0,$$

где $[jk, i]$ определены формулами (47.11), в которых g_{ij} заменены $\bar{g}_{ij}$. Таким образом, траектории, определенные уравнениями (67.10), являются геодезическими того пространства с обобщенной римановой метрикой $ds^2 = \bar{g}_{ij}dx^i dx^j$, в которое преобразуется данное риманово пространство[1]).

[1]) Пространства с обобщенной римановой метрикой были изучены Einsler, 1918, 2; Berwald, 1925, 6, том 34, стр. 213.

68. Приложение к динамике. Рассмотрим консервативную динамическую систему, ни связи, ни потенциальная энергия V которой не зависят от времени t. Пусть существует n независимых переменных x^i, тогда кинетическая энергия выражается формулой

$$T = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j,$$

где g_{ij} функции x^i, зависящие от масс системы. Функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - V.$$

Подставляя ее в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0.$$

находим, что получаемое уравнение можно, используя (47.11), записать в виде:

$$g_{ij} \ddot{x}^j + [jk, i] \dot{x}^j \dot{x}^k + \frac{\partial V}{\partial x^i} = 0. \qquad (68.1)$$

Эти уравнения допускают первый интеграл

$$\frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + V = E, \qquad (68.2)$$

где E — постоянная энергии.

Если мы положим

$$p_i = g_{ij} \dot{x}^j, \qquad \dot{x}^j = g^{ij} p_j, \qquad (68.3)$$

то из уравнения (68.2) получим:

$$g^{ij} p_i p_j = 2(E - V).$$

Таким образом, если мы возьмем за характеристическую функцию группы G_1 однородных касательных преобразований функцию[1])

$$C = \sqrt{\frac{g^{ij} p_i p_j}{2(E - V)}} = 1, \qquad (68.4)$$

---

[1]) Эта задача для движения частицы изучалась Lie, 1889, 2, стр. 145—56; и для более общего случая Vessiot, 1906, 1, стр. 266—268.

то уравнения преобразований будут иметь вид:

$$\frac{dx^i}{ds}=\frac{1}{2(E-V)}g^{ij}p_j,\quad \frac{dp_i}{ds}=-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{E-V}g^{jk}\right)p_jp_k, \tag{68.5}$$

где параметр s задан уравнением (см. § 67)

$$ds^2=2(E-V)g_{ij}dx^i dx^j. \tag{68.6}$$

Функция Гамильтона динамической системы есть

$$H=p_i\dot{x}^i-L=\frac{1}{2}g^{ij}p_ip_j+V$$

и, следовательно, уравнения Гамильтона имеют вид:

$$\frac{dx^i}{dt}=g^{ij}p_j,\quad \frac{dp_i}{dt}=-\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^j}p_jp_k+\frac{\partial V}{\partial x^i}\right).$$

Эти уравнения эквивалентны (68.5) с соотношением

$$\frac{ds}{dt}=2(E-V), \tag{68.7}$$

выполняющимся вдоль любой траектории. Мы получили известный результат, что траектории энергии E данной системы находятся во взаимно однозначном соответствии с геодезическими линиями пространства с фундаментальной формой (68.6).

Из результатов § 67 следует, что если φ любое решение уравнения

$$g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}=2(E-V), \tag{68.8}$$

то ортогональные траектории гиперповерхностей $\varphi=\text{const.}$ являются геодезическими. Если $\varphi(x;a^1,\ldots,a^{n-1})$ — полный интеграл этого уравнения, то, по исключении a^α из соответствующих уравнений (67.8), получающиеся уравнения (67.9) определяют геодезические гиперсферы с центром в $p(x)$.

Рассмотрим случай единственной частицы массы m и напишем (68.2) в виде:

$$m\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2=2(E-V), \tag{68.9}$$

где ds_0 элемент длины пространства частицы. Тогда из (68.6) имеем:

$$ds^2 = 2m(E - V)\,ds_0^2 \qquad (68.10)$$

и, следовательно,

$$s = \int \sqrt{2m(E-V)}\,ds_0 = \int mv\,ds_0.$$

Таким образом, s является действием, и динамические траектории являются экстремалями интеграла действия.

С точки зрения оптики (в соответствии с принципом Ферма) эти траектории совпадают с лучами света, проходящими через изотропную неоднородную среду с показателем преломления $\sqrt{2m(E-V)}$. В соответствии с этим принципом $s = k\tau$, где τ время, а k множитель пропорциональности. Тогда скорость света равна

$$u = \frac{ds_0}{dt} = \frac{k}{\sqrt{2(E-V)}}. \qquad (68.11)$$

Сравнивая это с (68.9), имеем

$$u = \frac{k}{mv}. \qquad (68.12)$$

Из (68.10) следует, что пространства с метриками (68.6) и ds_0 конформны. Следовательно, в метрике ds_0 траектории, проходящие через точку $p(x)$, ортогональны к гиперповерхностям (67.9). Полагая $k = E$, запишем уравнение этих гиперповерхностей в виде

$$f(\bar{x};\, x) - E\tau = 0. \qquad (68.13)$$

Из (68.7) следует, что вдоль любой траектории соотношение между временем t частицы и временем τ света дается формулой:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{2(E-V)}{E}. \qquad (68.14)$$

Упражнения

1. Показать, что

$$\bar{x} = x - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad \bar{y} = y + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad \bar{p} = p$$

определяют группу G_1 неоднородных касательных преобразований в узком смысле, каждое из которых точку переводит в окружность. Показать, что характеристической функцией является $\sqrt{1+p^2}$.

2. Найти касательное преобразование трехмерного пространства, определенное формулой

$$\bar{z}+z+x\bar{x}+y\bar{y}=0,$$

и показать, что оно преобразует точку в ее полярную плоскость относительно параболоида $x^2+y^2+2z=0$.

3. Если уравнение (59.4) с $p_1=-1$ записать в виде

$$d\bar{x}^1-P_\alpha\,dx^\alpha=\rho\,(dx^1-p_\alpha\,dx^\alpha)\qquad(\alpha=2,\ldots,h),$$

то в этом случае уравнения (63.16) примут вид:

$$\delta x^1=\left(p_\alpha\frac{\partial W}{\partial p_\alpha}-W\right)\delta t,\qquad \delta x^\alpha=\frac{\partial W}{\partial p_\alpha}\delta t,$$
$$\delta p_\alpha=-\left(\frac{\partial W}{\partial x^\alpha}+p_\alpha\frac{\partial W}{\partial x^1}\right)\delta t$$

и символом группы G_1, порожденной этим инфинитезимальным преобразованием, будет

$$[W,f]-W\frac{\partial f}{\partial x^1}.$$

(Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 255).

4. Если инфинитезимальное неоднородное касательное преобразование с характеристической функцией W преобразовать общим касательным преобразованием (63.), то характеристическая функция получающегося преобразования равна ρW.

(Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 277.)

5. Если A_1f и A_2f — символы инфинитезимальных неоднородных касательных преобразований с характеристическими функциями W_1 и W_2, то $(A_1, A_2)f$ является символом преобразования с характеристической функцией $[W_1, W_2]$.

6. Символ группы G_1 неоднородных касательных преобразований в узком смысле с характеристической функцией $W(x;p)$ имеет вид:

$$(W,f)+\left(p_\alpha\frac{\partial W}{\partial p_\alpha}-W\right)\frac{\partial f}{\partial x^1}.$$

7. Если Af_1 и Af_2 — символы неоднородных касательных преобразований в узком смысле с характеристическими функциями W_1 и W_2, то $(A_1, A_2)f$ является символом неоднородного преобразования в узком смысле с характеристической функцией (W_1, W_2).

8. Для того, чтобы неоднородное касательное преобразование оставляло инвариантным $dx^1 - p_\alpha dx^\alpha$ ($\alpha = 2, \ldots, n$), необходимо и достаточно, чтобы оно было неоднородным в узком смысле.

9. Если $n-1$ независимых функций φ^α переменных $x^1, \ldots, x^n$; $p_2, \ldots, p_n$ удовлетворяют уравнениям $(\varphi^\alpha, \varphi^\beta) = 0$, то решение системы (64.3) находится квадратурой.

(Lie-Engel, 1888, том 2, стр. 127, 128.)

10. Показать, во-первых, что (61.12), где $i, j = 2, \ldots, n$, имеет место для неоднородных преобразований в узком смысле (64.4), и, во-вторых, что (61.12) эквивалентно требованию, чтобы $dp_\alpha \delta x^\alpha - \delta p_\alpha dx^\alpha$, где dp_α, dx^α и δp_α, δx^α произвольны, было инвариантом таких преобразований.

11. Показать, что числовое значение якобиана неоднородного преобразования в узком смысле равно единице и, следовательно, объем области пространства координат $x^1, \ldots, x^n$, $p_1, \ldots, p_n$ является инвариантом такого преобразования.

12. Показать, что интеграл

$$I_1 = \int dp_\alpha \, dx^\alpha,$$

распространенный по двумерной области пространства координат x^i и p_i (называемого x, p-пространством), является инвариантом неоднородных преобразований в узком смысле.

(Born, 1925, 8, стр. 40.)

69. Функциональные группы. В § 64 были получены условия, которым должны удовлетворять функции φ^i и ψ_j для случая неоднородных касательных преобразований в узком смысле. В связи с обратной задачей[1]) определения систем функций, удовлетворяющих этим условиям, возникают некоторые вопросы о системах функций $2n$ переменных x^i и p_i.

Пусть дано s таких независимых функций $F_1, \ldots, F_s$. Образуем их скобки (F_α, F_β). Если какие-нибудь полученные функции не являются функциями данных, то мы присоединим их к исходной системе и таким образом получим систему s_1 независимых функций. Поступая так же с новой системой, получим систему s_2 независимых функций и так далее. Так как существует не больше $2n$ не-

---

[1]) См. Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 178—210; также Vivanti, 1904, 1, стр. 255—264.

зависимых функций x^i и p_i, то мы в конце концов получим $r(\leqslant 2n)$ независимых функций, функциями которых являются все остальные наши функции. Мы имеем:

$$s \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant r \leqslant 2n.$$

Если Φ_1 и Φ_2 — любые две из этих r функций, то из тождества

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial F_\alpha} \frac{\partial \Phi_2}{\partial F_\beta} (F_\alpha, F_\beta) \tag{69.1}$$

следует, что (Φ_1, Φ_2) является функцией системы. Таким образом, мы получаем систему каждая функция которой является функцией r независимых функций системы, причем (F_α, F_β) для любых двух функций F_α и F_β системы является функцией этих же r независимых функций. Вследствие (69.1), если к этой системе присоединить любую функцию от ее функций, то полученная система будет обладать теми же свойствами.

Говорят, что такая система функций образует *функциональную группу ранга* r. r будет рангом якобиана функций группы. r независимых функций называются *базисом* группы. Вследствие (69.1), любые r независимых функций группы являются базисом, так что, меняя эти функции, мы меняем базис, но не группу.

Если подсистема функций функциональной группы образует функциональную группу, то мы называем последнюю *подгруппой* данной группы. Пусть две группы рангов r и s имеют общими p независимых функций. В этом случае можно выбрать базисы F_α и G_β таким образом, чтобы $F_\sigma = G_\sigma\,(\sigma = 1, \ldots, p)$. Тогда мы должны иметь

$$(F_\sigma, G_\tau) = \varphi_{\sigma\tau}(F_1, \ldots, F_r) = \psi_{\sigma\tau}(G_1, \ldots, G_s)$$
$$(\sigma, \tau = 1, \ldots, p).$$

Но $\varphi_{\sigma\tau}$ и $\psi_{\sigma\tau}$ должны быть одинаковыми функциями $F_1, \ldots F_\sigma$, так как иначе существовали бы соотношения между $F_{d+1} \ldots, F_r$ и $G_{p+1}, \ldots, G_s$. Таким образом,

[69.1] *Общие функции двух функциональных групп составляют подгруппу в каждой группе.*

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$(F_\alpha, f) = 0, \tag{69.2}$$

где F_α составляют базис функциональной группы. Из тождества Якоби (61.15) имеем:

$$(F_\alpha, (F_\beta, f)) - (F_\beta, (F_\alpha, f)) = ((F_\alpha, F_\beta), f). \tag{69.3}$$

Так как (F_α, F_β) функции F_α, то из (69.1) следует, что правая сторона (69.3), в силу (69.2), равна нулю и, следовательно, уравнения (69.2) образуют полную систему. Таким образом, они имеют $2n-r$ независимых решений f_σ ($\sigma = 1, \ldots, 2n-r$). Из тождества Якоби для F_α, f_σ и f_τ следует, что (f_σ, f_τ) является решением (69.2) и, следовательно, функцией f_σ. Таким образом, f_σ являются базисом функциональной группы ранга $2n-r$. Каждая функция f_σ находится в инволюции (§ 61) или *коммутирует* со всеми F_α. Таким образом:

[69.2] *Функциональная группа ранга r определяет другую функциональную группу ранга $2n-r$, функции которой находятся в инволюции с функциями данной группы.*

Две такие группы называются *взаимными.*

Функция группы, находящаяся в инволюции со всеми элементами группы, называется *сингулярной*. Из определения подгруппы следует, что независимые сингулярные функции группы образуют базис некоторой подгруппы данной группы. Так как сингулярные функции принадлежат взаимной группе, то, вследствие теоремы [69.1], имеем:

[69.3] *Подгруппа сингулярных функций является также подгруппой взаимной группы.*

Если все функции группы сингулярны, группа называется *коммутативной*. Вследствие теорем [69.2] и [69.3], в этом случае $r \leqslant n$.

Для того, чтобы определить число независимых сингулярных функций группы, заметим, что для функции Φ

базисных функций $F_1, \ldots, F_r$ имеем:

$$(F_\alpha, \Phi) = \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial \Phi}{\partial F_\beta}\frac{\partial F_\beta}{\partial x^i} - \frac{\partial F_\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \Phi}{\partial F_\beta}\frac{\partial F_\beta}{\partial p_i} = \tag{69.4}$$

$$= (F_\alpha, F_\beta)\frac{\partial \Phi}{\partial F_\beta}.$$

Следовательно, если Φ сингулярна, то она должна быть решением системы r уравнений

$$\varphi_\alpha \Phi \equiv \varphi_{\alpha\beta}\frac{\partial \Phi}{\partial F_\beta} = 0, \tag{69.5}$$

где $\varphi_{\alpha\beta}$ определены формулой:

$$\varphi_{\alpha\beta} = (F_\alpha, F_\beta). \tag{69.6}$$

Вследствие (69.4), коммутатор системы (69.5) равен:

$$\big(F_\alpha, (F_\beta, \Phi)\big) - \big(F_\beta, (F_\alpha, \Phi)\big) = \big((F_\alpha, F_\beta), \Phi\big) =$$

$$= (\varphi_{\alpha\beta}, F_\gamma)\frac{\partial \Phi}{\partial F_\gamma} = \frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}}{\partial F_\delta}\varphi_\delta \Phi.$$

Таким образом, уравнения (69.5) образуют полную систему, и мы имеем:

[69.4] *Если ранг матрицы* $\|(F_\alpha, F_\beta)\|$ *равен* $r - m$, *то в группе существуют* m *независимых сингулярных функций, определяющих подгруппу ранга* m.

Так как матрица $\|(F_\alpha, F_\beta)\|$ косо-симметрична, то при нечетном r ее ранг меньше r и, следовательно, функциональная группа нечетного ранга имеет, по крайней мере, одну сингулярную функцию.

В § 64 уже было отмечено, что скобки (F_α, F_β) инвариантны при неоднородных касательных преобразованиях в узком смысле. Следовательно ранг и число независимых сингулярных функций являются инвариантами неоднородных касательных преобразований в узком смысле.

Покажем, что базис некоммутативной функциональной группы можно выбрать таким образом, что (F_α, F_β) будут равны 0 или 1. Так как группа некоммутативна, то существует несингулярная функция, например, F_1. Если $\Phi(F_1, \ldots, F_r)$ решение уравнения

$$\varphi_{1\alpha}\frac{\partial\Phi}{\partial F_\alpha} = -1,$$

где $\varphi_{1\alpha}$ определены формулами (69.6) и не все равны нулю, поскольку F_1 несингулярна. Так как $\varphi_{11}=0$, то это решение не может быть функцией только F_1. Обозначая независимые функции F_1 и Φ соответственно через φ^1 и ψ_1, имеем $(\psi_1, \varphi^1)=1$. Возьмем φ^1, ψ_1 и $r-2$ других независимых функций за базис группы и рассмотрим два уравнения

$$\left.\begin{aligned} (\varphi^1, \Phi) &= \frac{\partial\Phi}{\partial\psi_1} + (\varphi^1, F_\sigma)\frac{\partial\Phi}{\partial F_\delta} = 0,\\ (\psi_1, \Phi) &= -\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi^1} + (\psi_1, F_\sigma)\frac{\partial\Phi}{\partial F_\sigma} = 0\\ &\qquad (\sigma = 3, \ldots, r). \end{aligned}\right\} \qquad (69.7)$$

Эти уравнения, очевидно, независимы. Так как

$$(\varphi^1, (\psi_1, \Phi)) - (\psi_1, (\varphi^1, \Phi)) = ((\varphi^1, \psi_1), \Phi) = (-1, \Phi) = 0,$$

то они образуют полную систему. Обозначим через $\bar F_3, \ldots, \bar F_r$ любые $r-2$ независимых решений — функций φ^1, ψ_1, $F_3, \ldots, F_r$. Из тождеств Якоби следует, что $(\bar F_\sigma, \bar F_\tau)$ является решением (69.7) и, следовательно, $\bar F_\sigma$ для $\sigma=3, \ldots, r$ порождают подгруппу данной группы. Если она коммутативна, то

$$(\psi_1\ \varphi^1) = 1,\ (\varphi^1, \bar F_\sigma) = (\psi_1, \bar F_\sigma) = (\bar F_\sigma, \bar F_\tau) = 0.$$

Если эта подгруппа некоммутативна, мы применим к ней те же рассуждения. Продолжая процесс, мы используем все функции или придем к коммутативной подгруппе. Таким образом [1]),

[69.5] *Для некоммутативной функциональной группы ранга r существует базис* $\varphi_1, \ldots, \varphi^{m+q}$; $\psi_1, \ldots,$

---

[1]) Lie-Engel, 1888, том 2, стр. 199, 200.

ψ_m $(2m+q=r,\ q<r)$ *такой, что*

$$(\varphi^\lambda, \varphi^\mu)=0,\ (\psi_\alpha, \psi_\beta)=0,\ (\psi_\alpha, \varphi^\lambda)=\delta^\lambda_\alpha \qquad (69.8)$$
$$(\lambda,\ \mu=1,\ \ldots,\ m+q;\ \alpha,\ \beta=1,\ \ldots,\ m).$$

Если группа коммутативна, то мы имеем только функции φ^λ $(\lambda=1,\ \ldots,\ r)$, совпадающие с первоначальными функциями F_λ. Если базис выбран таким образом, что имеют место соотношения (69.8), то говорят, что функциональная группа имеет *канонический вид*.

Когда базис некоммутативной функциональной группы удовлетворяет (69.8), причем $q>0$, то функции $\varphi^{m+1},\ \ldots,$ φ^{m+q} принадлежат взаимной группе. Кроме того, если опустить одну из этих функций, например φ^{m+1}, то оставшиеся функции определят некоторую подгруппу данной группы. Тогда φ^{m+1} будет функцией группы, взаимной к этой подгруппе, и эта взаимная группа должна содержать такую функцию G, что $(\varphi^{m+1}, G)\neq 0$, ибо, в противном случае, взаимная группа подгруппы была бы взаимной группой данной группы. Следовательно, можно так выбрать базис взаимной группы подгруппы, чтобы существовала функция ψ_{m+1}, независимая от функций исходной группы и такая что $(\psi_{m+1}, \varphi^{m+1})=1$. Присоединяя ψ_{m+1} к функциям данной группы, мы получим группу ранга $r+1$, для которой имеет место (69.8) при $\alpha,\ \beta=1,\ \ldots,\ m+1$, и подгруппой которой является данная группа. Повторяя q раз этот прием, мы придем к группе порядка $r+q\,(=2(r-m))$, подгруппой которой является данная группа, и для которой имеет место (69.8) при $\lambda,\ \mu,\ \alpha,$ $\beta=1,\ \ldots,\ r-m$. В силу последней системы уравнений (69.8), эта группа не имеет сингулярных функций. Ее взаимная группа обладает тем же свойством, базис ее можно выбрать так, чтобы уравнения (69.8) выполнялись для $\lambda,\ \mu,\ \alpha,\ \beta=r-m+1,\ \ldots,\ n$. Функции этих двух взаимных групп удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{aligned}(\varphi^i, \varphi^j)=0,\quad (\psi_i, \psi_j)=0,\\ (\psi_j, \varphi^i)=\delta^i_j\quad (i,\ j=1,\ \ldots,\ n),\end{aligned}\right\} \qquad (69.9)$$

и суть функции группы ранга $2n$, подгруппой которой является первоначальная группа. Если в (69.8) $q=0$, то, присоединяя взаимную группу, получаем группу ранга $2n$, для которой выполнено (69.9). Таким образом, имеем:

[69.6] *Некоммутативная функциональная группа ранга r является подгруппой группы ранга $2n$, базис которой можно выбрать так, чтобы тождественно удовлетворялись условия* (69.9).

Вследствие теоремы [64.1] и уравнений (64.7), функции такого базиса определяют неоднородное касательное преобразование в узком смысле.

Пусть даны две функциональные группы одного и того же ранга с одним и тем же числом сингулярных функций. Обозначим их базисы через $F_\alpha(x, p)$ и $F'_\alpha(x', p')$ соответственно. В силу теоремы [69.6], для первой группы можно построить группу ранга $2n$, функции базиса которой тождественно удовлетворяют уравнениям (69.9). Таким же образом мы получим другую группу ранга $2n$, базисные функции $\varphi'^i(x', p')$, $\psi'_i(x', p')$ которой удовлетворяют этим же условиям. В соответствии с результатами § 64, можно найти такие функции $\varphi^0(x, p)$ и $\varphi'^0(x', p')$, что уравнения

$$\bar{x}^0 = x^0 + \varphi^0(x, p), \quad \bar{x}^i = \varphi^i(x, p), \quad \bar{p}_i = \psi_i(x, p);$$
$$\bar{x}'^0 = x'^0 + \varphi'^0(x', p'), \quad \bar{x}'^i = \varphi'^i(x', p'), \quad \bar{p}'_i = \psi'_i(x', p')$$

определяют два неоднородных касательных преобразования в узком смысле. Теперь уравнения

$$x'^0 + \varphi'^0 = x^0 + \varphi^0, \quad \varphi'^i = \varphi^i, \quad \psi'_i = \psi_i$$

определяют касательное преобразование, переводящее одну группу в другую. Таким образом, в силу замечаний абзаца, следующего за теоремой [69.4], имеем [1])

[69.7] *Для того, чтобы две функциональные группы переводились одна в другую неоднородным касательным преобразованием в узком смысле, необходимо и доста-*

[1]) Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 204.

точно, чтобы они имели одинаковые ранги и одно и то же число независимых сингулярных функций.

70. Однородные функциональные группы. Пусть $H_1, \ldots, H_r$ базис функциональной группы ранга r, и пусть H_α для $\alpha = 1, \ldots, r$ однородные функции степени m_α относительно p_i. В этом случае группа называется *однородной*. Если F функция H_α, то из теоремы Эйлера следует, что

$$p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} = p_i \frac{\partial F}{\partial H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i} = \sum_\alpha m_\alpha H_\alpha \frac{\partial F}{\partial H_\alpha}.$$

Так как правая сторона является функцией H_α, то величина $p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}$ является либо функцией группы, либо нулем. Обратно, покажем, что при выполнении этого условия для любого F все функции группы однородны. По предположению,

$$p_i \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i} = \Omega_\alpha \quad (H_1, \ldots, H_r) \quad (\alpha = 1, \ldots, r). \qquad (70.1)$$

Если $\Omega_\alpha = 0$, для любого α, то все функции группы однородны нулевой степени. Так как в этом случае (H_α, H_β) степени -1, то (H_α, H_β) не может быть функцией H_α и, следовательно, в этом случае группа коммутативна.

Если не все Ω_α равны нулю, то из тождества

$$p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} = p_i \frac{\partial F}{\partial H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i} = \Omega_\alpha \frac{\partial F}{\partial H_\alpha}$$

следует, что если $H_1, \ldots, H_{r-1}$ $r-1$ независимых решений уравнения $\Omega_\alpha \frac{\partial F}{\partial H_\alpha} = 0$, то все эти решения однородные функции нулевой степени. Обозначим через $\overline{H}_r$ решение уравнения $\Omega_\alpha \frac{\partial F}{\partial H_\alpha}$, оно принадлежит группе и является однородной функцией первой степени. Следовательно, имеем [1]):

[1]) Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 215.

[70.1] *Для того, чтобы функциональная группа была однородна, необходимо и достаточно, что для любой функции F группы выражение $p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}$ было либо функцией группы, либо нулем.*

И также:

[70.2] *Для однородной функциональной группы существует базис, функции которого либо все нулевой степени относительно p_i, тогда группа коммутативна, либо одна функция базиса первой степени, а остальные нулевой.*

Докажем теорему [1]):

[70.3] *Взаимная группа однородной функциональной группы однородна.*

Действительно, если F функция взаимной группы, то

$$\frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, r). \tag{70.2}$$

Действуя на это уравнение оператором $p_j \frac{\partial}{\partial p_j}$, используя (70.2) и тождество

$$p_j \frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial p_j \partial p_i} = (m_\alpha - 1) \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i},$$

находим, что $p_j \frac{\partial F}{\partial p_j}$ является решением (70.2) и, следовательно, функцией взаимной группы. Так как это верно для любого F, то как было показано выше, взаимная группа однородна.

Теорема [69.5], очевидно имеет место для некоммутативных однородных групп, причем выбор функций φ^λ и ψ_α можно сделать более специальным. Если мы в качестве базиса, в соответствии с теоремой [70.2], возьмем такие функции $N_1, \ldots, N_{r-1}, H$, что H будет первой, а N_i нулевой степени, то одна из N_i, например N_1, несингулярна, так как иначе группа была бы коммутативной:

1) Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 217.

Имеем:

$$(H,\ N_\alpha)=\theta_\alpha(N),$$
$$H(N_\alpha,\ N_\beta)=\theta_{\alpha\beta}(N)\quad (\alpha,\ \beta=1,\ \ldots,\ r-1),$$

ибо каждый член этих уравнений есть однородная функция нулевой степени. Функция $\psi=H\Omega(N)$ удовлетворяет соотношению $(\psi_1,\ N_1)=1$, если Ω является решением уравнения

$$H\theta_{\alpha 1}\frac{\partial\Omega(N)}{\partial N_\alpha}+\theta_1\Omega(N)=1.$$

Так как не все функции $\theta_{\alpha 1}$, θ_1 равны нулю, поскольку N_1 несингулярна, то существует несингулярная функция ψ_1 первой степени относительно p_i, которой можно заменить H в данном базисе. Если φ^1 решение уравнения

$$\frac{\partial\varphi^1}{\partial N_\alpha}(\psi_1,\ N_\alpha)=1, \tag{70.3}$$

то функция $\varphi^1(N)$ удовлетворяет соотношению $(\psi_1,\ \varphi^1)=1$. Так как не все (ψ_1,N_α) равны иулю, то такая функция существует. Так же, как § 69, в качестве базиса мы можем взять функции

$$\varphi^1,\ \psi_1,\ \overline{H}_3,\ \ldots,\ \overline{H}_r,\quad \text{где}\quad (\varphi^1,\ \overline{H}_\sigma)=(\psi_1,\ \overline{H}_\sigma)=0$$

для $\sigma=3,\ \ldots,\ r$, причем $\overline{H}_\sigma$ составляют базис некоторой подгруппы. Таким путем мы приходим к базису

$$\psi_1,\ \ldots,\ \psi_m,\ \varphi^1,\ \ldots,\ \varphi^m,\ H_1,\ \ldots,\ H_q\quad (2m+q=r),$$

в котором ψ_i первой степени, φ^i нулевой, а H_i образуют базис коммутативной подгруппы данной группы и выбраны в соответствии с теоремой [70.2]. Если все H_i нулевой степени, то обозначим их через $\varphi^{m+1},\ \ldots,\ \varphi^{m+q}$. Если H_1 первой степени, а остальные нулевой, то за базис возьмем функции $H_1,H_1H_2,\ \ldots,\ H_1H_q$ и обозначим их через $\psi_{m+1},\ \ldots,\ \psi_{m+q}$. Все ψ_i однородные функции первой степени.

Таким образом,

[70.4] *Для некоммутативной однородной группы можно найти базисные функции, удовлетворяющие* *условиям:*

$$(\varphi^\lambda, \varphi^\mu) = (\psi_\alpha, \psi_\beta) = 0, \quad (\psi_\alpha, \varphi^\lambda) = \delta_\alpha^\lambda, \qquad (70.4)$$

где

$$\lambda, \mu = 1, \ldots, m+q; \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, m$$

или

$$\varkappa, \mu = 1, \ldots, m; \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, m+q \quad (2m+q) = r.$$

φ^λ — *функции нулевой степени, а* ψ_α — *первой.*

Если группа коммутативна и все ее функции нулевой степени, то $(\varphi^\alpha, \varphi^\beta) = 0$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, r)$. Если же функции не нулевой степени, то за базис могут быть выбраны функции первой степени, и мы будем иметь $(\psi_\alpha, \psi_\beta) = 0$. Теорема [70.4] определяет *канонический вид* базиса.

Возвратимся к случаю некоммутативной группы, базис которой $\psi_1, \ldots, \psi_m, \varphi^1, \ldots, \varphi^{m+q}$ удовлетворяет условиям (70.4). Если так же, как в § 69, возьмем подгруппу, получающуюся удалением φ^{m+1} из базиса, и рассмотрим группу, взаимную к этой подгруппе, то φ^{m+1} окажется ее несингулярной функцией. Существует функция ψ_{m+1} этой взаимной группы, имеющая первую степень и такая, что $(\psi_{m+1}, \varphi^{m+1}) = 1$. Она определяется так же, как ψ_1 определялось уравнением (70.3). Кроме того, ψ_{m+1} не принадлежит первоначальной группе, и если ее присоединить к базису этой группы, то мы получим группу ранга $r+1$, удовлетворяющую условиям (70.4) для

$$\alpha, \beta = 1, \ldots, m+1.$$

Данная группа является ее подгруппой. Повторяя этот прием q раз, получим группу ранга $2(m+q)$, базис которой удовлетворяет условиям (70.4) для $\lambda, \mu, \alpha, \beta = 1, \ldots, m+q$. Она содержит данную группу в качестве подгруппы и не имеет сингулярных функций. Присоединяя к базису этой группы канонический базис ее взаимной группы, мы получим группу ранга $2n$, базис которой удовлетворяет тождествам:

$$(\varphi^i, \varphi^j) = (\psi_i, \psi_j) = 0, \quad (\psi_i, \varphi^j) = \delta_i^j \quad (i, j = 1, \ldots, n). \qquad (70.5)$$

Если проведем рассуждение для группы, имеющей базис (70.4) с λ, $\mu = 1, \ldots, m$; α, $\beta = 1, \ldots, m+q$, то мы придем к тому же результату. Таким образом, имеем[1]:

[70.5] *Некоммутативная однородная функциональная функция ранга r является подгруппой однородной группы ранга $2n$, обладающей базисом, для которого тождественно удовлетворяются условия* (70.5). φ^i *однородные функции нулевой степени, а* ψ_i — *первой.*

Если однородную группу ранга r подвергнуть однородному касательному преобразованию, то из теоремы [61.5] следует, что ее ранг, число независимых сингулярных функций и число независимых сингулярных функций нулевой степени не изменится. Пусть даны две однородные группы одинакового ранга с одним и тем же числом независимых сингулярных функций нулевой степени. И пусть базисы соответствующих групп ранга $2n$ удовлетворяют условиям (70.5). Уравнения $\varphi'^i = \varphi^i$ и $\psi'_i = \psi_i$ определят однородное касательное преобразование, переводящее одну группу в другую. Таким образом, имеем[1]:

[70.6] *Для того, чтобы две однородные функциональные группы переводились одна в другую однородным касательным преобразованием, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковые ранги, одно и то же число сингулярных функций и одно и то же число сингулярных функций нулевой степени.*

Упражнения.

1. Показать, что если ξ^i_a — векторы группы G_r точечных преобразований, то функции $\xi^i_a P_i$ порождают одиородную функциональную группу. Определить число независимых сингулярных функций этой группы.

2. Для того, чтобы функциональная группа имела m независимых сингулярных функций, необходимо и достаточно, чтобы между функциями этой группы и ее взаимной группы существовало m независимых функциональных соотношений.

---

[1]) Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 225.
[2]) Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 226.

3. Пусть $F_\alpha(x; p)$ и $\overline{F}_\alpha(\overline{x}; \overline{p})$ — базисы двух функциональных групп. Тогда и только тогда существует неоднородное касательное преобразование в узком смысле, переводящее $F_1, \ldots, F_r$ в $\overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_r$ когда (F_α, F_β) и $(\overline{F}_\alpha, \overline{F}_\beta)$ одни и те же функции F_α и $\overline{F}_\alpha$ соответственно.

(Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 209.)

4. Показать, что константы $s, s_1, \ldots$ семейства функций (см. § 69 являются инвариантами неоднородного касательного преобразования в узком смысле. Эти постоянные и число независимых сингулярных функций семейства называются *числовыми инвариантами*.

5. Для того, чтобы функции $F_1(x; p), \ldots, F_r(x; p)$ переводились неоднородным касательным преобразованием в узком смысле соответственно в $\overline{F}_1(\overline{x}; \overline{p}), \ldots, \overline{F}_r(\overline{x}; \overline{p})$, необходимо и достаточно, чтобы их числовые инварианты (упражнение 4) были равны, и все зависимые функции и скобки Пуассона второй системы выражались бы таким же образом, как соответствующие функции первой системы.

6. Если $F_\alpha(x; p)$ образуют базис функциональной группы ранга r, то функции $\varphi_{\alpha\beta}$, определенные формулами (69.6), тождественно удовлетворяют уравнениям:

$$\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\alpha} = 0$$

$$\varphi_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_{\gamma\delta}}{\partial F_\alpha} + \varphi_{\alpha\gamma} \frac{\partial \varphi_{\delta\beta}}{\partial F_\alpha} + \varphi_{\alpha\delta} \frac{\partial \varphi_{\beta\gamma}}{\partial F_\alpha} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \ldots, r),$$

где вторая система является следствием (61.15).

7. Если $\varphi_{\alpha\beta}$ данные функции r переменных F_α, удовлетворяющие уравнениям упражнения 6, то существует такое число n, что функции F_α выражаются через $2n$ переменных $x^1, \ldots, x^n$; $p_1, \ldots, p_n$ и образуют функциональную группу, для которой имеет место (69.6) Определение F_α требует решения системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

(Lie-Engel, 1888, 1, т. 2, стр. 235—252.)

8. Показать, что функции $\varphi_{\alpha\beta} = c^\gamma_{\alpha\beta} F_\gamma$, где $c^\gamma_{\alpha\beta}$ — постоянные, удовлетворяющие (7.3) и (7.4), удовлетворяют условиям упражнений 6, 7 и, следовательно, определяют функциональную группу.

9. С помощью результатов § 29, 39 показать что если $C_1, \ldots, C_r$ — характеристические функции группы G_r однородных касательных преобразований и

$$\overline{x}^i = \varphi^i(x; p; a), \quad \overline{p}_i = \psi_i(x; p; a)$$

конечные уравнения группы, то

$$C_a(\overline{x}; \overline{p}) = w_a^b(a) C_b(x; p) \quad (a, b = 1, \ldots, r).$$

Показать также, что эти уравнения определяют линейную однородную группу Γ_r, где C_α — переменные, a^β — параметры. Символы этой группы имеют вид $c_{ab}^e C_e \frac{\partial f}{\partial C_b}$.

(Lie-Engel, 1888, 1, том 2, стр. 333.)

10. Число сингулярных функций однородной функциональной группы определяется рангом матрицы $\|(H^\alpha, H^\beta)\|$. Сингулярные функции нулевой степени должны удовлетворять уравнениям

$$(H^\alpha, H^\beta) \frac{\partial f}{\partial H^\beta} = 0, \quad H^\beta \frac{\partial f}{\partial H^\beta} = 0.$$

БИБЛИОГРАФИЯ

1837. 1. Jacobi, C. G. J. Note sur l'intégration des equations différentielles de la dynamique. *Comptes Rendus,* **5,** стр. 61—67.

1854. 1. Riemann, B., Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Gesammelte Werke, 1876, стр. 254—269. Переиздано H. Weyl, Springer, Berlin, 1919.

1885. 1. Lie, S., Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuirliche, endliche Gruppe gestatten. *Math. Annalen,* **25,** стр. 71—151.

1886. 1. Lie, S., Untersuchungen über Transformationsgruppen. *Archiv für Math. og Natuv.,* **10.,** стр. 74—128, 353—413.

1888. 1. Lie, S. and Engel, F., Theorie der Transformationsgruppen, s. 1 and 2. Teubner, Leipzig, Reprinted in 1930.

2. Maurer, L., Ueber allgemeinere Invariantensysteme. *Bayer. Akad. d. Wiss., Ber.,* **18,** стр. 103—150.

3. Killing. W., Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen. *Math. Annalen,* **31,** стр. 252—290.

1889. 1. Killing, W., Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, II. *Math. Annalen,* **33,** стр. 1—48.

2. Lie, S., Die infinitesimalen Berührungstransformationen der Mechanik. *Sächs. Akad. d. Wiss., Ber.,* 41, стр. 145—156.

3. Lie, S., Ueber irreducible Berührungstransformationsgruppen. *Sächs. Akad. d. Wiss., Ber.,* **41,** стр. 320—327.

1891. 1. Schur, F., Zur Theorie der endlichen Transformationsgruppen. *Math. Annalen,* **38,** стр. 263—286.

2. Engel, F., Die kanonische Form der Parametergruppen. *Sächs. Akad. d. Wiss., Ber.,* **43,** стр. 308—315.

3. Lie, S. and Scheffers, G., Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transfor-

mationen. Teubner, Leipzig.

4. Umlauf, K. A., Ueber die Zusammensetzung der endlichen continuierlichen Transformationsgruppen, insbesondre der Gruppen vom Range Null. Inaug. Diss., Leipzig.

1892. 1. Killing, W., Ueber die Grundlagen der Geometrie. *Journal für die reine und angew. Math.* (Grelle), **109**, стр. 121—186.

1893. 1. Lie, S. and Scheffers, G., Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen. Teubner, Leipzig.

2. Lie, S. and Engel, F., Theorie der Transformationsgruppen, **3**. Teubner, Leipzig. Reprinted in 1930.

1894. 1. Cartan, E., Sur la structure des groupes de transformations finis et continus. Thèse, Nony, Paris.

1897. 1. Bianchi, L., Sugli spazii a tre dimensioni che ammettono un gruppo cintinuo di movimenti. Soc. Italiana delle Scienze, *Mem. di mat.*, ser. **3**, **11**, стр. 267—352.

2. Frobenius, G., Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, I. *Preus. Akad. Sitz. Ber.*, стр. 994—1015.

1899. 1. Frobenius, G., Ueber die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, II. *Preus. Akad., Sitz. Ber.*, стр. 482—500.

1902. 1. Bianchi, L., Lezioni di geometria differenziale. Второе издание. I. Spoerri, Pisa.

1903. 1. Fubini, G., Sugli spazii che ammetono un gruppo continuo di movimenti. *Annali di mat.*, ser. 3, **8**, стр. 39—81.

1904. 1. Vivanti, G., Leçons élémentaires sur la théorie des groupes de transformations. Gauthier-Villars, Paris.

2. Fubini G., Sugli spazii a quattro dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti. *Annali di Math.*, ser. 3, **9**, стр. 33—90

1905. 1. Fine, H. B., A college algebra. Ginn and Company, Boston.

2. Dickson, L. E., Definitions of a group and a field of independent postulates. *Amer. Math. Soc., Trans.*, **6**, стр. 198—204.

3. Huntington, E. V., Note on the definitions of abstract-groups and of fields by sets of independent postulates. *Amer. Math. Soc., Trans.*, **6**, стр. 181—197.
4. Moore, E. H., On a definition of abstract groups, *Amer. Math. Soc., Trans.*, **6**, стр. 179—180.
5. Schur, I., Neue Begründung der Theorie der Gruppencharactere. *Preus. Akad., Sitz. Ber.*, стр. 406—432.

1906. 1. Vessiot, E., Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact infinitésimals. *Soc. Math. de France, Bull.*, **34**, стр. 230—269.

1907. 1. Bôcher, M., Introduction to higher algebra. Macmillan New York.

1909. 1. Eisenhart, L. P., A treatise on the differential geometry of curves and surfaces. Ginn, Boston.

1911. 1. Cohen, A., An introduction to the Lie theory of one-parameter groups. Heath, New York.
2. Burnside, W., The theory of groups, Второе издание. Cambridge University Press.

1917. 1. Levi-Civita, W., Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e consequente specificazione geometrica della curvatura Riemaniana. *Circ. mat. di Palermo, Rendic.*, **42**, стр. 173—205.

1918. 1. Bianchi, L., Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni. Spoerri, Pisa.
2. Finsler, P., Ueber Kurven und Flächen in allgemeinen Raümen. Inaug. Diss., Göttingen.

1924. 1. Dickson, L. E., Differential equations from the group standpoint, *Annals of Math., ser.* 2, **25**, стр. 287—378.
2. Cartan, E., Les récentes généralizations de la notion d'espace. *Bull. des Sci. Math.*, **48**, стр. 294—320.

1925. 1. Eisenchart, L. P., Linear connections of a space which are determined by simply transitive groups. *Nat. Acad. Sci., Proc.*, **11**, стр. 246—250.
2. Schreier, O., Abstrakte kontinuierliche Gruppen. Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität, **4**, стр. 15—32.
3. Cartan, E., La géometrie des espaces de Riemann. Mémorial de Sciences Mathématiques, fasc. 9. Gauthier-Villars, Paris.

4. W e y l, H., Theorie der Darstellung kontinuierlichen halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, I. Math. Zeits., **23**, стр. 271—309.
5. E i e s l a n d, J., The group of motions of an Einstein space. *Amer. math. Soc., Trans.*, **27**, стр. 213—245.
6. B e r w a l d, L., Ueber Parallelübertragung in Raümen mit allgemeiner Massbestimmung. *Deut. Math. Verein., Jahresber.*, **34**, стр. 213—220.
7. B o r t o l o t t i, E., Parallelismo assoluto e vincolato negl S_3. a curvatura costante. *R. Ist., Veneto di sci., Atti.* **84**, стр. 821—858.
8. B o r n, M., Vorlesungen über Atommechanik, I. Springer, Berlin.

1926. 1. C a r t a n, E. and S c h o u t e n, J. A., On the geometry of the groupmanifold of simple and semi-simple groups. *Akad. van Wetens., Amsterdam, Proc.*, **29**, стр. 803—815.
2. W e y l, H., Theorie der Darstellung kontinuierlichen halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, II. *Math. Zeits.*, **24**, стр. 328—395.
3. E i s e n h a r t, L. P., Riemannian geometry. Princeton University Press.

1927. 1. E i s e n h a r t, L. P., Non-Riemannian geometry. *Colloquium Publications of the Amer. Math. Soc.*, **8**, New York.
2. C a r t a n, E., La géométrie des groupes de transformations. *Journal de Math.* ser. 9, **6**, стр. 1—119.
3. E i s e n h a r t, L. P. and K n e b e l m a n, M. S., Displacements in a geometry of paths which carry paths into paths. *Nat. Acad. Sci., Proc.*, **13**, стр. 38—42.
4. F i n e, H. B., The calculus. Macmillan, New York.
5. W h i t t a k e r, E. T., Analytical dynamics. Cambridge University Press.
6. L e v i - C i v i t a, T. and A m a l d i, U., Lezioni di meccanica razionale, **2**, г. 2, стр. 452—469. Zanichelli, Bologna.

1928. 1. F r a n k l i n, P., The cononical form of a one parameter group. *Annals of Math.*, ser. 2, **29**, стр. 113—122.

1929. 1. S c h o u t e n, J. A., Zur Geometrie der kontinuierlichen Transformationsgruppen, Math. Annalen, **102**, стр. 244—272.
2. E i n s t e i n, A., Zur einheitlichen Feldtheorie. *Preus. Akad. Sitz. Ber.*, стр. 2—8.

3. Michal, A., Scalar extensions of an orthogonal ennuple of vectors. *Amer. Math., Monthly*, **37**, стр. 529—533.

4. Eisenhart, L. P., Contact transformations. *Annals of Math.*, ser. 2, **30**, стр. 211—249.

1930. 1. Cartan, E., La théorie des groupes finis et continus et l'anallysis situs. Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. 42. Gauthier-Villars, Paris.

2. Mattioli, G. D., Sulla determinazione delle varietà riemanniane che ammettono gruppi semplicemente transitivi di movimenti. *Accad. naz. dei lincei, Rendic.*, ser. 6, **11**, стр. 369—371.

3. Knebelman, M. S., On groups of motions in related spaces. *Amer. Jour. of Math.*, **52**, стр. 280—282.

4. Thomas, T. Y., On the unified field theory, I. *Nat. Acad. Sci. Proc.*, **16**, стр. 761—776.

1931. 1. Weyl, H., The theory of groups and quantum mechanics. Translated by H. P. Robertson. Methuen and Co., London.

2. Wigner, E., Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik der Atomspektren. Vieweg, Braunschweig.

1932. 1. Engel, F., and Faber, K., Die Liesche Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Teubner, Leipzig.

2. Eisenhart, L. P., Intransitive groups of motions. *Nat. Acad. Sci., Proc.*, **18**, стр. 193—202.

3. Robertson, H. P., Groups of motions in spaces admitting absolute porallelism. *Annals of Math.*, ser. 2. **33**, стр. 496—521.

4. Eisenhart, L. P., Equivalent continuous groups. *Annals of Math*, ser. 2, **33**, стр. 665—670.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА V

Геометрические свойства

ГЛАВА VI

Касательные преобразования