

ТЕОРИЯ Г. Эккер
ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ
ПЛАЗМЫ





THEORY
OF
FULLY IONIZED
PLASMAS

GÜNTER ECKER

*Professor of Physics
Institut für theoretische Physik
Ruhr-Universität
Bochum, BRD*

1972
ACADEMIC PRESS
New York and London

Г. ЭККЕР

ТЕОРИЯ
ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ
ПЛАЗМЫ

Перевод с английского
Л. С. Богданкевич и И. С. Данилкина

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, проф. А. А. Рухадзе

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»
МОСКВА 1974

Г. Эккер — известный западногерманский физик-теоретик. Его книга «Теория полностью ионизованной плазмы» — учебный курс, в котором глубоко и систематически излагаются теоретические аспекты физики плазмы (в отсутствие внешних полей). Часть I посвящена обоснованию статистической механики для систем заряженных частиц с кулоновским взаимодействием. В этой части рассматриваются все существующие статистические методы решения данной проблемы и проводится их сравнительный анализ. В части II исследуются вопросы использования общих уравнений при решении задачи о взаимодействии электромагнитного излучения с плазмой.

Книга может служить учебным пособием для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области газовой электроники, физики плазмы и статистической физики; она полезна также научным работникам, занимающимся соответствующими проблемами.

Редакция литературы по физике

Предисловие редактора перевода

Модель газа, состоящего из заряженных частиц с кулоновским взаимодействием, или, как принято говорить, модель полностью ионизованной плазмы, — одна из математически строго обоснованных и завершенных моделей статистической механики сплошных сред. Формулировка этой модели и ее обоснование были даны в классических работах А. А. Власова, Л. Д. Ландау, Н. Н. Боголюбова, Ю. Л. Климонтовича, В. П. Силина, А. Ленарда и Р. Балеску. Особая роль в создании и развитии статистической физики плазмы принадлежит советским ученым, что должным образом отражено в предлагаемой русскому читателю книге известного западногерманского физика-теоретика Г. Эккера «Теория полностью ионизованной плазмы».

Книга Г. Эккера содержит последовательное изложение теории полностью ионизованной плазмы на основе динамического уравнения Климонтовича для плотности микроскопического распределения частиц. Исходя из этого уравнения выводятся все основные уравнения (уравнения Власова, Ландау и Ленарда — Балеску) газовой плазмы в условиях, когда энергия взаимодействия частиц мала по сравнению с их средней кинетической энергией. Такой метод позволил автору совместить достаточно высокую степень математической строгости с физически ясным и наглядным изложением теории газовой плазмы.

Следует отметить, что теория плазмы на основе динамического уравнения для плотности микрораспределения частиц уже излагалась в монографии Ю. Л. Климонтовича «Статистическая теория неравновесных процессов», вышедшей небольшим тиражом в 1963 г. в Издательстве

МГУ. С тех пор в этой области был достигнут значительный прогресс, и этот прогресс хорошо отражен в книге Г. Эккера.

Нет сомнения, что книга Г. Эккера окажется весьма полезной для специалистов, занимающихся теорией плазмы и статистической физикой, и в особенности для студентов старших курсов и аспирантов, изучающих эти области физической науки.

А. А. Рухадзе

Предисловие автора к русскому изданию

В последнее время на книжном рынке появился ряд полезных и содержательных книг, посвященных частично или полностью ионизованному газовому состоянию. Однако мне кажется, что они имеют два существенных недостатка.

Первый из них состоит в том, что нет строгого теоретического анализа таких обычных газовых разрядов, как дуговой, тлеющий, коронирующий и искровой разряды, которыми в течение некоторого времени почти не занимались, но которые в последнее время представляют значительный интерес в связи с их практическим применением.

Второй недостаток заключается в некоторой непоследовательности вывода основных законов для наиболее простого плазменного состояния — полностью ионизованной системы — из фундаментальных принципов статистической механики и электродинамики.

Работа над учебником по газовому разряду может оказаться трудной и неблагодарной задачей. Теоретические представления в этой области еще недостаточно ясны, и имеется заметное число разногласий. Наоборот, решая вторую задачу, можно достичь известной степени завершенности, определенности и последовательности. Поэтому меня привлекла возможность попробовать свои силы во второй задаче, хотя и к первой я отношусь с большим интересом.

Я надеюсь, что настоящая книга может дать аспирантам и научным сотрудникам, работающим в области физики плазмы, астрофизики и смежных областях, ту глубину понимания, которая не только приводит к удовлетворенности в работе и уверенности в себе, но и создает надежный фундамент для научно-исследовательской работы.

Я рад, что моя книга переведена на русский язык. Беглый взгляд на имена авторов библиографического списка показывает, что основная часть исследований в этой области выполнена в СССР. Такие ученые, как Н. Н. Боголюбов, Л. Д. Ландау, Ю. Л. Климонтович, — вот лишь некоторые из имен, — внесли решающий вклад в основы данного раздела науки. Более того, в настоящее время физика плазмы успешно и глубоко изучается в СССР многими широко образованными и блестящими учеными.

Я надеюсь, что мои советские коллеги сочтут эту книгу полезной для себя.

Предисловие автора к английскому изданию

Необычная сложность экспериментальных работ в области газовой электроники, с которыми я был знаком в силу прежних связей с некоторыми пионерами в данной области, всегда привлекала мое внимание. Мой интерес был направлен на анализ этих физических явлений, которые, как я вскоре осознал, требуют более глубокого понимания основных особенностей физики плазмы. На этой основе возник курс лекций, который я читал в течение многих лет главным образом в университетах Бонна и Бохума, а также в университетах Америки, которые мне иногда удавалось посещать.

По мере того как совершенствовался курс лекций, меня все более и более стала интересовать математическая строгость и четкость формулировок основных концепций физики полностью ионизованной системы. Поэтому постепенно основной акцент в моих лекциях переместился с газовой электроники на обсуждение полностью ионизованной плазмы.

В настоящее время имеются работы, в которых рассмотрены многие вопросы, относящиеся к полностью ионизованной системе при различных частных условиях. Но содержание любой из этих работ очень трудно представить в систематической и полной форме так, чтобы изложение основных теоретических способов описания равновесных и неравновесных состояний исходило из первоначальных принципов. Цель данной книги заключается в стремлении дать именно такое изложение.

Само собой разумеется, что, когда стремишься развить такой общий подход, соблюдая известную строгость, необходимо использовать единую простую модель. Поэтому в книге не рассматривались ни эффекты, вызываемые

внешними полями, ни вопросы приложения к конкретным задачам.

Книга предназначена для аспирантов и научных сотрудников, работающих в области физики плазмы, астрофизики или в смежных с ними областях. Читатель должен быть знаком с основными понятиями классической теоретической физики.

Я обязан многим людям. Это прежде всего авторы оригинальных работ, цитировавшихся или изложенных в книге. Я хотел бы особо отметить таких выдающихся ученых в области физики плазмы, как М. Розенблют, А. Кауфман, В. Кункель и П. Стэррок, которые прослушали мои лекции и участвовали в дискуссиях, принесших книге значительную пользу. Я также признателен за бесчисленные обсуждения моим сотрудникам. За критику, постоянную помощь и содействие я приношу особую благодарность К. Фишеру, Г. Фрёмлингу, К. Риману и К. Шпачеку.

Оглядываясь назад и перелистывая страницы, я чувствую, что в содержании книги есть много мест, которые можно расширить и улучшить. Но здесь, как и все другие, я вижу, насколько справедливо изречение Гёте: «Такую работу в сущности никогда нельзя завершить; ее можно лишь объявить завершенной, если с учетом времени и обстоятельств сделано все возможное».

Список обозначений

Общие замечания

1. В настоящей книге используется огромное количество функций. Имеющихся в распоряжении обозначений не хватает для того, чтобы различить их. Поэтому одно и то же обозначение функции, отличающейся аргументом, может характеризовать разные функциональные зависимости.

2. В данный список не включены обозначения, используемые для сокращений в очень небольшой части текста.

3. Переменные μ -пространства имеют индексы слева вверху в отличие от переменных Γ -пространства, у которых индексы располагаются справа внизу.

4. В нескольких случаях различные величины, смысл которых ясен из контекста, обозначаются одинаково.

Обозначения общего характера

\tilde{y} — фурье-образ функции y

\hat{y} — образ функции y в преобразовании Лапласа

y — вектор

$|y| = y$ — модуль вектора

\hat{y} — единичный вектор

y — тензор n -го ранга ($n = 2, \dots$)

$y)(y$ — диада

\mathcal{y} — оператор

$\{x, y\}$ — скобки Пуассона

\bar{y} — набор величин

$\langle y \rangle$ — среднее значение

Обозначения латинскими буквами

a — внешний термодинамический параметр

A — обобщенная сила

- \mathbf{A} — векторный потенциал
 b — прицельный параметр
 b_l — групповой интеграл порядка l
 $b_{\nu\mu}$ — коэффициент Грэда
 \mathbf{B} — вектор магнитной индукции
 B_ω — спектральная плотность излучения черного тела
 $(1 - N) B_N$ — N -й вириальный коэффициент
 B_{jk} — коэффициент прямой передачи тепла двум компонентам
 c — скорость света
 C — постоянная Эйлера
 C_v — теплоемкость
 \mathbf{D} — вектор электрической индукции
 \mathbf{D}_e — электрический дипольный момент
 \mathbf{D}_m — магнитный дипольный момент
 D_s^σ — область столкновений
 $D(k, p)$ — диэлектрическая проницаемость
 e — элементарный заряд
 ze, e_+ — заряд ионов
 $-e, e_-$ — заряд электронов
 E — полная энергия
 \mathbf{E} — вектор электрического поля
 \mathcal{E} — энергия электрона
 \mathcal{E}_V — плотность энергии в единице объема в вакууме, приходящаяся на единичный интервал угловой частоты
 \mathcal{E}_P — плотность энергии в единице объема в плазме, приходящаяся на единичный интервал угловой частоты
 f_N — функция распределения в Γ -пространстве
 $f_N^{(0)}$ — равновесная функция распределения в Γ -пространстве
 f_s — частная функция распределения порядка s
 $f^{(s)}$ — общая функция распределения порядка s
 $f_v^{(s)}$ — общая функция распределения для ν -й компоненты
 $f_v^{(1)} = f_v$ — общая одночастичная функция распределения

- \bar{f}_s — нормированная функция распределения порядка s
 f_0 — функция распределения в нулевом приближении
 f — возмущение функции распределения
 f_{ij} — функции групповых разложений
 F — свободная энергия Гельмгольца или соответственно сила
 $F_i(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ — плотность распределения Климонтовича для i -й частицы
 $F^{(k)}$ — плотность распределения Климонтовича для всех частиц сорта k
 $F(u)$ — функция распределения, зависящая от одной компоненты скорости
 \mathbf{g} — относительная скорость
 g_{ij} — парная корреляционная функция частиц i и j
 g_{ijk} — тройная корреляционная функция частиц i, j и k
 \bar{g}_{ij} — функция групповых разложений в методе Майера
 $G, \bar{G}, \bar{\bar{G}}$ — факторы Гаунта
 \hbar — постоянная Планка
 h_l — сферическая функция Ханкеля
 \mathbf{h}_μ — тепловой поток
 \mathbf{h}_μ — тензор теплового потока
 H — H -функция Больцмана
 H — гамильтониан
 \mathbf{H} — вектор магнитного поля
 H_l — функция Ханкеля
 $I({}^{(r)}f | {}^{(s)}f)$ — интеграл столкновений частиц, описываемых функциями распределения ${}^{(r)}f$ и ${}^{(s)}f$
 I_ω — интенсивность излучения
 \mathbf{j} — плотность электрического тока
 j_l — сферическая функция Бесселя
 j_ω — коэффициент излучения
 \mathbf{J} — поток в пространстве скоростей
 J_l — функция Бесселя
 \mathbf{k} — волновой вектор

- k_D — обратная дебаевская длина
 K_ν — модифицированная функция Бесселя
 l — средняя длина свободного пробега
 \mathcal{L}_0 — оператор Лиувилля
 m_+ — масса ионов
 m_- — масса электронов
 m_0 — масса покоя
 \mathbf{M} — вектор намагничения
 $M_{\mu\nu}$ — приведенная масса
 n — плотность частиц; показатель преломления
 N — полное число частиц
 p — давление
 \mathbf{p} — импульс
 \mathbf{P} — вектор поляризации
 P_N — нормированная функция распределения в конфигурационном пространстве
 P_s — частная молекулярная функция распределения порядка s
 $P^{(s)}$ — общая молекулярная функция распределения порядка s
 $P(s + 1 | s)$ — плотность условной вероятности
 \mathcal{P} — главное значение Коши
 P_j — полином Лежандра
 \mathbf{q}_μ — поток энергии
 \mathbf{q}_μ — тензор потока энергии
 q_{ij} — функция групповых разложений с учетом экранирования
 $q^{l/m}$ — термодинамический коэффициент переноса
 Q — тепловая энергия
 \mathbf{Q} — тензор рассеяния
 $\overset{2}{\tilde{\mathbf{Q}}}_e$ — электрический квадрупольный тензор
 $Q(g_{\mu\nu})$ — поперечное сечение
 \mathbf{r} — координата конфигурационного пространства
 r — расстояние
 r_0 — среднее расстояние между частицами
 r_w — классический радиус взаимодействия
 R — коэффициент отражения

- S — энтропия
 \mathbf{S} — вектор Пойнтинга
 \mathcal{S}_s — s -частичный оператор временного сдвига
 t — время
 t_c — время взаимодействия двух частиц
 T — термодинамическая температура

 u — компонента скорости
 u_p — фазовая скорость
 u_g — групповая скорость
 U — внутренняя энергия

 v — удельный объем
 \mathbf{v} — скорость
 v_T — средняя тепловая скорость
 V — объем

 $w(\Omega)$ — энергия излучения за секунду в единичном угле
 w^T — полная энергия излучения за секунду
 W — энергия
 $W(G)$ — функция распределения величины G

 x — координата конфигурационного пространства в задачах излучения

 Z — статистическая сумма (интеграл)
 Z_g — статистическая сумма (интеграл) макроканонического ансамбля
 \mathbf{Z} — вектор Герца
 $Z(\xi)$ — дисперсионная функция

Обозначения греческими буквами
 α — коэффициент поглощения
 β — автокорреляционная функция; отношение v/c
 β_k — неприводимый групповой интеграл порядка k
 γ_s — конфигурационное пространство s -й частицы
 Γ — фазовое пространство
 $\Gamma(x)$ — гамма-функция

- δ — число частиц в дебаевской сфере
 $\delta(x)$ — функция Дирака
 δ_{ij} — символ Кронекера
 Δ — оператор Лапласа
 $\Delta(x, y)$ — функция Дирихле
 ε — тензор диэлектрической проницаемости
 ε_j — функция групповых разложений
 η — коэффициент трения
 η_ω — дифференциальная излучательная способность
 η^T — полная излучательная способность
 Θ — модуль распределения Гиббса
 κ — коэффициент теплопроводности
 κ_B — постоянная Больцмана
 κ_D — постоянная Дебая
 κ_ω — коэффициент пространственного поглощения
 λ — длина волны
 λ — длина волны де Бройля, соответствующая тепловой скорости
 λ_c — средняя длина свободного пробега
 λ_D — дебаевская длина
 Λ — плазменный параметр
 μ — фазовое пространство
 μ — химический потенциал
 μ — подвижность электронов
 μ_0 — магнитная проницаемость
 ν_c — частота столкновений
 $\Pi_{св}$ — параметр связи
 $\Pi_{пл}$ — параметр плотности
 ρ — плотность массы; плотность заряда
 ρ — сопротивление
 σ — тензор проводимости
 σ — дифференциальное поперечное сечение
 τ — характерное время
 τ_c — время свободного пробега

- τ_p — период плазменных колебаний
 $\tau_{вз}$ — время взаимодействия
 τ_h — гидродинамический масштаб времени
 ψ — общая потенциальная энергия
 χ_e — электрическая восприимчивость
 χ_m — магнитная восприимчивость
 ω_p — плазменная частота
 ω_L — ларморовская частота
 Ω — телесный угол
 Φ — потенциал
 ϕ_{ij} — потенциальная энергия
 ϕ_c — характерное значение потенциальной энергии

Модель полностью ионизованной плазмы и кулоновская система

В исследуемой ниже модели полностью ионизованной плазмы электроны и ионы представляют собой устойчивые образования. Они характеризуются только массой и зарядом. При этом частицы рассматриваются как точечные.

В принципе допускается образование из электронов и ионов подсистем (атомов и молекул). Частицы в таких подсистемах характеризуются тем, что их время корреляции значительно больше среднего времени флуктуаций в системе, которое определяется отношением среднего расстояния между частицами к средней скорости частиц. Мы предполагаем, что число нейтральных подсистем настолько мало, что их влиянием можно пренебречь. Последнее исключает из рассмотрения частично ионизованные системы.

Далее, *модель полностью ионизованной плазмы* характеризуется следующими условиями:

1. Во всех случаях, кроме упомянутых выше подсистем и случая полуклассической аппроксимации выражения для статистической суммы, предполагаем, что $\hbar = 0$ (\hbar — постоянная Планка).

Общего критерия применимости классической механики вообще не существует. Пренебрежение эффектами вырождения оправдано, если выполняется неравенство

$$\lambda \ll r_0 = \left(\frac{3}{4\pi n} \right)^{1/3}. \quad (1)$$

Здесь r_0 — среднее расстояние между частицами, а λ — длина волны де Бройля, соответствующая тепловой скорости. С другой стороны, возможность пренебрежения квантовомеханическими эффектами зависит от рассматриваемых явлений. Большинство квантовомеханических

эффектов можно не учитывать, если выполняется следующее условие:

$$\lambda = \frac{h}{(2\pi m\Theta)^{1/2}} \ll r_w = \frac{e^2}{\Theta}, \quad (2)$$

где r_w — классический радиус взаимодействия. Если нарушается условие (2), то при рассмотрении процессов рассеяния, приводящих к сильным отклонениям, необходимо учитывать квантовомеханические поправки. Однако при решении этих вопросов следует помнить, что для кулоновского рассеяния классические результаты в первом приближении совпадают с квантовомеханическими.

2. Поскольку мы не рассматриваем релятивистские эффекты или магнитное взаимодействие, $v^n/c^n = 0$ для $n \geq 2$.

3. Система имеет достаточно большие размеры, так что наличие границ не влияет на поведение частиц.

4. Скорость света $c = \infty$. В той части книги, где используется это допущение, рассматриваемая полностью ионизованная плазма называется *кулоновской системой*.

Часть I

Полностью ионизованная система
в квазистатическом электромагнитном
поле. Кулоновская система

Глава 1

Равновесные состояния кулоновской системы

§ 1. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Измерения некоторой величины $F(\mathbf{p}, \mathbf{r})$, являющейся функцией переменных \mathbf{p} и \mathbf{r} рассматриваемой нами системы, приводят к понятию *наблюдаемого среднего* этой величины

$$\langle F \rangle_{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_{t'}^{t'+\tau} F(\mathbf{p}, \mathbf{r}) dt, \quad (1.1)$$

где τ — интервал измерений, а t' — время начала измерений.

Чтобы выяснить смысл понятия наблюдаемого среднего $\langle \rangle_{\tau}$, целесообразно рассмотреть эволюцию изучаемой системы в Γ -пространстве, т. е. фазовом пространстве, образованном совокупностью координат и сопряженных импульсов всех частиц системы. В этом пространстве исследуемая система представляется отдельной точкой, а ее развитие во времени — линией, называемой «фазовой траекторией».

Прямой, хотя и наивный, метод состоял бы в расчете фазовой траектории путем решения уравнений Гамильтона, описывающих поведение нашей механической системы при заданной совокупности начальных условий. Невозможность подобной процедуры ясна из очевидных принципиальных и практических соображений. Вместо этого мы воспользуемся методом, развитым Гиббсом [2]. Рассмотрим ансамбль систем, обладающих тождественными свойствами. Любой из таких виртуальных гиббсовых ансамблей представится системой точек, которая может быть описана с помощью функции плотности распределения $f_N(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ в Γ -пространстве. Предполагая, что эта функция распределения для рассматриваемого ансамбля

Гиббса, находящегося в равновесии, известна и задана функцией $f_N^{(0)}(\mathbf{p}, \mathbf{r})$, мы, следуя Гиббсу, постулируем, что *среднее по ансамблю*

$$\langle F \rangle_s = \int F(\mathbf{p}, \mathbf{r}) f_N^{(0)}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) d\mathbf{p} d\mathbf{r} \quad (1.2)$$

совпадает с наблюдаемым средним, полученным из измерений, т. е.

$$\langle F \rangle_s = \langle F \rangle_\tau. \quad (1.3)$$

Очевидно, что данный постулат предполагает следующие три допущения.

1. Наблюдаемое среднее совпадает со *средним по времени*, определяемым формулой

$$\langle F \rangle_t = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle F \rangle_\tau. \quad (1.4)$$

2. Среднее по времени $\langle F \rangle_t$ совпадает со средним по ансамблю $\langle F \rangle_s$.

3. Среднее по ансамблю может быть рассчитано с помощью функции распределения, усредненной по крупным ячейкам Γ -пространства.

Эти допущения сыграли важную роль в историческом развитии статистической физики и известны в литературе под названиями типа «эргодической гипотезы», «необратимости» или «парадокса Лиувилля».

Принимая постулат Гиббса, мы сводим задачу к нахождению средней функции распределения $f_N^{(0)}$ для виртуального ансамбля равновесных систем.

1.1. Теорема Лиувилля

Составляющие элементы ансамбля Гиббса не могут ни взаимодействовать друг с другом, ни разрушаться, ни вновь возникать. Следовательно, для любой функции распределения должно выполняться простое уравнение непрерывности

$$\int (f_N \mathbf{v}_\Gamma) \cdot d\sigma_\Gamma = - \frac{\partial}{\partial t} \int f_N d\mathbf{p} d\mathbf{r}, \quad \text{где } \mathbf{v}_\Gamma = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

или

$$\mathbf{v}_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma f_N + f_N \nabla_\Gamma \cdot \mathbf{v}_\Gamma + \frac{\partial f_N}{\partial t} = 0. \quad (1.6)$$

Используя канонические уравнения классической механики в виде

$$\nabla_\Gamma \cdot \mathbf{v}_\Gamma = 0, \quad (1.7)$$

из уравнения (1.6) находим

$$\frac{df_N}{dt} = \frac{\partial f_N}{\partial t} + \mathbf{v}_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma f_N = \frac{\partial f_N}{\partial t} + \{f_N, H\} = 0, \quad (1.8)$$

где мы использовали скобки Пуассона $\{ \}$. Соотношение (1.8) представляет собой формулировку теоремы Лиувилля.

Теперь можно высказать утверждение: стационарная функция распределения в Γ -пространстве в любом случае может выражаться лишь через инварианты движения.

Доказательство такого утверждения для любой функции распределения, удовлетворяющей уравнению Лиувилля, непосредственно следует из этого уравнения: из гамильтонова формализма известно, что всегда можно найти такое каноническое преобразование, что новые координаты и импульсы \mathbf{R} , \mathbf{P} будут константами:

$$\frac{d\mathbf{R}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{dt} = \frac{d\mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{dt} = 0. \quad (1.9)$$

В этих новых переменных уравнение Лиувилля записывается в виде

$$\frac{d}{dt} f_N(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t) = \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{R}} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{P}} \cdot \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{\partial f_N}{\partial t} = \frac{\partial f_N}{\partial t} = 0. \quad (1.10)$$

Отсюда видно, что f_N есть функция только инвариантов движения \mathbf{R} и \mathbf{P} .

Для консервативной системы таким инвариантом является функция Гамильтона H , хотя, разумеется, не только она. В зависимости от физической ситуации могут оказаться важными и другие инварианты движения. Однако, следуя Гиббсу, мы ограничимся рассмотрением лишь таких функций распределения, которые зависят только от гамильтониана.

1.2. Статистические ансамбли

Используя условие нормировки

$$\int f_N^{(0)}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) d\mathbf{p} d\mathbf{r} = 1, \quad (1.11)$$

Гиббс ввел определения следующих статистических ансамблей.

Микроканонический ансамбль — совокупность консервативных систем в Γ -пространстве с заданными энергией E , числом частиц N и внешними термодинамическими параметрами \mathbf{a} . Соответствующая ему функция распределения в фазовом пространстве есть

$$f_N^{(0)} = \frac{1}{\Omega} \delta [H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{a}) - E], \quad (1.12)$$

где Ω — нормировочный коэффициент.

Канонический ансамбль — совокупность систем в Γ -пространстве с заданными значениями статистического параметра (модуля распределения) Θ , числа частиц N и внешних параметров \mathbf{a} . Соответствующая этому ансамблю функция распределения в фазовом пространстве есть

$$f_N^{(0)} = \frac{1}{h^{3N} N! Z} \exp \left[-\frac{H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{a})}{\Theta} \right]. \quad (1.13)$$

Здесь Z — статистический интеграл (статистическая сумма), который, согласно условию нормировки (1.11), имеет вид

$$Z = \frac{1}{h^{3N} N!} \int \exp \left[-\frac{H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{a})}{\Theta} \right] d\mathbf{p} d\mathbf{r}. \quad (1.14)$$

Вывод термодинамических соотношений с помощью данной функции распределения и сравнение с термодинамической шкалой температур показывают, что параметр Θ связан с термодинамической температурой T соотношением

$$\Theta = \kappa_B T, \quad (1.15)$$

где κ_B — постоянная Больцмана.

Макроканонический ансамбль — совокупность систем в Γ -пространстве с заданными значениями двух статистических параметров Θ и m' и внешними параметрами \mathbf{a} .

Соответствующая функция распределения в фазовом пространстве для него выражается формулой

$$f_N^{(\Phi)} = \frac{1}{h^{3N} N! Z_g} \cdot \exp \left\{ -\frac{[H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{a}) - m'N]}{\Theta} \right\}. \quad (1.16)$$

Здесь результирующий статистический интеграл макроканонического распределения Z_g определяется с помощью модифицированного условия нормировки, учитывающего суммирование по всем частицам ансамбля,

$$Z_g = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{h^{3N} N!} \int \exp \left(-\frac{H - m'N}{\Theta} \right) dp dr. \quad (1.17)$$

Параметр Θ связан с температурой T соотношением (1.15). Аналогичным образом можно убедиться, что параметр m' тождествен химическому потенциалу μ .

Очевидно также, что выполняется соотношение

$$Z_g = \sum_{N=0}^{\infty} Z(N, \Theta, \mathbf{a}) \exp \left[\frac{m'N}{\Theta} \right]. \quad (1.18)$$

Интересно обсудить, какие физические системы соответствуют перечисленным ансамблям.

Микроканонический ансамбль по определению представляет собой виртуальный ансамбль систем с постоянными энергией и числом частиц. Он используется для описания термодинамически замкнутых систем.

Канонический ансамбль описывает системы с постоянным числом частиц, но с переменной энергией. Вариация энергии определяется статистическим параметром Θ . Физический смысл этой вариации энергии можно понять из рассмотрения подсистемы какой-либо микроканонической системы со многими степенями свободы. Такой анализ показывает, что распределение канонического ансамбля аналогично распределению для выделенной подсистемы и обмен энергией соответствует системе, находящейся в тепловом контакте с термостатом, температура которого определена параметром Θ .

Макроканонический ансамбль характеризуется вариациями энергии, определяемыми параметром Θ , а также вариациями числа частиц, определяемыми параметром m' .

Снова, обращаясь к рассмотрению некоторой подсистемы для микроканонической системы со многими степенями свободы, можно показать, что макроканонический ансамбль описывает такие системы, которые находятся в контакте с большим термостатом, характеризуемым параметром Θ , и большим резервуаром частиц, характеризуемым параметром m' . Таким образом, этот ансамбль соответствует термодинамически незамкнутым системам.

Функции распределения, описываемые с помощью перечисленных статистических ансамблей, совместно с постулатом Гиббса, позволяют рассчитать микроскопические и макроскопические свойства физических систем, находящихся в равновесии. Вначале мы изучим *макроскопические свойства* систем, в частности связь между статистической суммой (или интегралом) и термодинамическими потенциалами. После этого обратимся к исследованию их *микроскопических характеристик*.

§ 2. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

2.1. Соотношения между термодинамическими потенциалами и статистической суммой для канонического ансамбля

Дифференциал свободной энергии Гельмгольца определяется соотношением

$$dF = dU - TdS - SdT. \quad (2.1)$$

Совместно с первым и вторым законами термодинамики, записанными в форме

$$\begin{aligned} dQ &= dU - \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} - \mu dN, \\ dS &= \frac{dQ}{T}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

соотношение (2.1) преобразуется к виду

$$dF = \frac{F-U}{T} dT + \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} + \mu dN. \quad (2.3)$$

Здесь через \mathbf{a} снова обозначена экстенсивная обобщенная координата, а через \mathbf{A} — сопряженная ей интенсивная переменная — обобщенная сила.

Рассмотрим теперь дифференциал функции $(-\Theta \ln Z)$. Это выражение является функцией параметров Θ , \mathbf{a}

и числа частиц N . Для получения полного дифференциала применим соотношение

$$\begin{aligned} dZ &= \frac{\partial Z}{\partial N} dN + \frac{\partial Z}{\partial \Theta} d\Theta + \frac{\partial Z}{\partial \mathbf{a}} \cdot d\mathbf{a} = \\ &= \frac{\partial Z}{\partial N} dN + \frac{1}{N! h^{3N}} \int \left(\frac{H}{\Theta^2} d\Theta - \frac{1}{\Theta} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{a}} \cdot d\mathbf{a} \right) \times \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{H}{\Theta}\right) d\mathbf{p} d\mathbf{r}, \quad (2.4) \end{aligned}$$

которое есть следствие (1.14). Используя выражения для

$$U = \langle H \rangle = \frac{1}{N! h^{3N} Z} \int H \exp\left(-\frac{H}{\Theta}\right) d\mathbf{p} d\mathbf{r} \quad (2.5)$$

и

$$\mathbf{A} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{a}} \right\rangle = \frac{1}{N! h^{3N} Z} \int \frac{\partial H}{\partial \mathbf{a}} \exp\left(-\frac{H}{\Theta}\right) d\mathbf{p} d\mathbf{r}, \quad (2.6)$$

полученные согласно определению среднего значения по формуле (1.2), находим

$$\begin{aligned} d(-\Theta \ln Z) &= (-\Theta \ln Z - U) d \ln \Theta + \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial N} (-\Theta \ln Z) dN. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Теперь, предполагая по-прежнему справедливость соотношения

$$\Theta = \kappa_B T, \quad (2.8)$$

которое может быть доказано на основе определения термодинамической температурной шкалы, видим, что с точностью до констант, не представляющих интереса,

$$F = -\Theta \ln Z. \quad (2.9)$$

Это соотношение связывает статистическую сумму для канонического ансамбля с термодинамическими потенциалами. Имея выражение для свободной энергии Гельмгольца, все остальные термодинамические характеристики можно найти путем простого дифференцирования. Использо-

зую соотношение (2.3) и полагая $a = V$, получаем

$$\begin{aligned}
 A &= -p, \\
 S &= -\left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_{N, V} = \frac{\partial}{\partial T} (\Theta \ln Z) |_{N, V}, \\
 p &= -\left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_{T, N} = \frac{\partial}{\partial V} (\Theta \ln Z) |_{T, N}, \\
 \mu &= \left. \frac{\partial F}{\partial N} \right|_{T, V} = -\frac{\partial}{\partial N} (\Theta \ln Z) |_{T, V}, \\
 U &= F + TS = -\Theta \ln Z + T \frac{\partial}{\partial T} (\Theta \ln Z) |_{N, V} = \\
 &= \frac{\Theta^2}{\kappa_B} \frac{\partial}{\partial T} \ln Z |_{N, V}, \\
 C_V &= \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{N, V} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\Theta^2}{\kappa_B} \frac{\partial}{\partial T} \ln Z \right) |_{N, V}.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

2.2. Соотношения между термодинамическими потенциалами и статистической суммой для макроканонического ансамбля

В данном случае наиболее целесообразно рассмотреть величину pV , которая является термодинамическим потенциалом относительно переменных T , $V = a$ и μ . Дифференциал этой величины имеет вид

$$d(pV) = \frac{dT}{T} (pV + U - \mu N) + N d\mu + p dV, \tag{2.11}$$

что легко получить из формулы

$$F = \left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_N V + \left. \frac{\partial F}{\partial N} \right|_V N = -pV + N\mu = U - TS. \tag{2.12}$$

Левая часть формулы (2.12) представляет собой следствие теоремы Эйлера, справедливой при условии, что свободная энергия Гельмгольца есть однородная линейная функция V и N . Это предположение правильно в рамках применимости теоремы Ван-Хова.

Обратимся теперь к выражению для дифференциала величины $(\Theta \ln Z_g)$, рассматриваемой как функции параметров Θ , m' и a . Согласно определению (1.2), средние энергию и величину обобщенной силы для макрокано-

ческой системы запишем в виде

$$U = \langle H \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{Z_g N! h^{3N}} \int H \exp \left(-\frac{H - m'N}{\Theta} \right) d\mathbf{p} d\mathbf{r} \quad (2.13)$$

и

$$\mathbf{A} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{a}} \right\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{Z_g N! h^{3N}} \int \frac{\partial H}{\partial \mathbf{a}} \exp \left(-\frac{H - m'N}{\Theta} \right) d\mathbf{p} d\mathbf{r}. \quad (2.14)$$

Кроме того, поскольку N — переменная величина, среднее число частиц есть

$$\langle N \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{Z_g N! h^{3N}} \int N \exp \left(-\frac{H - m'N}{\Theta} \right) d\mathbf{p} d\mathbf{r}. \quad (2.15)$$

Используя приведенные формулы и выражение для дифференциала

$$\begin{aligned} dZ_g &= \frac{\partial Z_g}{\partial \Theta} d\Theta + \frac{\partial Z_g}{\partial m'} dm' + \frac{\partial Z_g}{\partial \mathbf{a}} \cdot d\mathbf{a} = \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N! h^{3N}} \int \left[\left(\frac{H - m'N}{\Theta^2} \right) d\Theta + \frac{N}{\Theta} dm' - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Theta} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{a}} \cdot d\mathbf{a} \right] \exp \left(-\frac{H - m'N}{\Theta} \right) d\mathbf{p} d\mathbf{r}, \quad (2.16) \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} d(\Theta \ln Z_g) &= [\Theta \ln Z_g + U - m' \langle N \rangle] d \ln \Theta + \\ &\quad + \langle N \rangle dm' - \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}. \quad (2.17) \end{aligned}$$

Применяя далее соотношения

$$\Theta = \kappa_B T, \quad m' = \mu, \quad (2.18)$$

справедливость которых может быть доказана из термодинамических определений этих величин, и сравнивая выражения (2.17) и (2.11), получаем

$$pV = \Theta \ln Z_g. \quad (2.19)$$

Представляющие интерес остальные термодинамические величины, как видно из соотношения (2.11), могут быть найдены путем простого дифференцирования. В результате мы имеем

$$\begin{aligned} S &= \left. \frac{\partial (pV)}{\partial T} \right|_{\mu, V} = \left. \frac{\partial}{\partial T} (\Theta \ln Z_g) \right|_{\mu, V}, \\ p &= \left. \frac{\partial (pV)}{\partial V} \right|_{\mu, T} = \left. \frac{\partial^3}{\partial V^3} (\Theta \ln Z_g) \right|_{\mu, T}, \\ N &= \left. \frac{\partial (pV)}{\partial \mu} \right|_{T, V} = \left. \frac{\partial}{\partial \mu} (\Theta \ln Z_g) \right|_{T, V}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} U &= \mu N + ST - pV = \\ &= \mu \left. \frac{\partial}{\partial \mu} (\Theta \ln Z_g) \right|_{T, V} + T \left. \frac{\partial}{\partial T} (\Theta \ln Z_g) \right|_{\mu, V} - \\ &\quad - V \left. \frac{\partial}{\partial V} (\Theta \ln Z_g) \right|_{\mu, T}. \end{aligned}$$

Поскольку все макроскопические термодинамические свойства рассматриваемой системы могут быть выражены через ее статистическую сумму (или интеграл), проблема определения этих макроскопических характеристик, таким образом, сводится к вычислению соответствующей статистической суммы (интеграла).

§ 3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА ДЛЯ КУЛОНОВСКОЙ СИСТЕМЫ

3.1. Постановка задачи

В предыдущем параграфе мы показали, что при расчете термодинамических характеристик различных систем центральную роль играет вычисление статистической суммы.

Без потери общности в настоящем параграфе мы можем ограничиться рассмотрением статистической суммы канонического ансамбля, так как статистическая сумма макроканонического ансамбля может быть выражена через статистическую сумму канонического ансамбля. Кроме того, оказывается достаточным рассмотреть кулоновскую систему, состоящую из равного числа N электронов и однократно заряженных ионов. На примере такой системы обнаруживаются все характерные трудности,

а используемые методы вычислений могут быть легко обобщены на случай систем с большим числом ионных компонент.

Применяя выражение (1.14) непосредственно к кулоновской системе, мы должны были бы вычислить величину

$$Z = \frac{1}{h^{6N} (N!)^2} \int \exp \left(-\frac{H}{\Theta} \right) dp dr \quad (3.1)$$

для функции Гамильтона H , определяемой соотношением

$$H = \frac{1}{2} \sum_i \left[\frac{p_{+i}^2}{m_+} + \frac{p_{-i}^2}{m_-} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,j}' \left[\frac{e^2}{|\mathbf{r}_{+i} - \mathbf{r}_{+j}|} + \frac{e^2}{|\mathbf{r}_{-i} - \mathbf{r}_{-j}|} \right] - \sum_{i,j} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_{+i} - \mathbf{r}_{-j}|}. \quad (3.2)$$

Невозможность такой процедуры очевидна. Она никоим образом не может учесть образования связанных водородоподобных состояний. Более того, учет взаимодействий противоположно заряженных частиц на малых расстояниях приводит к расходимости приведенного выражения для статистической суммы.

Причина состоит в том, что выражение (1.14) представляет собой лишь полуклассическое приближение к точному выражению для статистической суммы. Чтобы учесть вклад связанных состояний, что недоступно в рамках полуклассического рассмотрения, мы должны использовать квантовомеханическое представление для суммы по всем состояниям, т. е.

$$Z = \text{Sp} \left[\exp \left(-\frac{\mathcal{H}}{\Theta} \right) \right], \quad (3.3)$$

где \mathcal{H} — оператор Гамильтона данной системы.

Если бы при этом мы могли определить матричные элементы в самом общем случае, то получили бы точный результат для искомой статистической суммы. Однако в настоящее время мы еще далеки от подобного общего решения рассматриваемой задачи.

Вместо этого во всех практических случаях при вычислении статистической суммы для кулоновской системы явным или неявным образом используется так называемая

модель свободно-связанных состояний [2]. В модели свободно-связанных состояний предполагается, что стационарное состояние данной системы можно рассматривать как бы состоящим лишь из двух независимых групп состояний электронов и ионов: группы классических свободных состояний слабо взаимодействующих частиц, с одной стороны, и группы квантовомеханических связанных состояний сильно взаимодействующих противоположно заряженных частиц — с другой.

Разумеется, подобное приближение идет гораздо дальше, чем та упрощенная схема, которой соответствуют формулы (3.1) и (3.2). Однако, с другой стороны, оно все еще является грубым приближением действительного поведения системы. Так, в любом стационарном состоянии системы существует группа состояний частиц, которая вследствие свободно-связанных взаимодействий в действительности не может быть отнесена ни к одной из упомянутых выше групп. Это обстоятельство делает границу между «свободными» и «связанными» состояниями неопределенной. Более того, принадлежность частицы к группе «свободных» или «связанных» может зависеть от исследуемого эффекта, и при рассмотрении разных явлений можно ожидать возникновения различных границ свободно-связанных состояний.

Мы не будем здесь вдаваться в подробности вывода соответствующих этому обстоятельству соотношений. Поэтому приведем только результаты анализа, проведенного Эккером и Крёлем [2].

Эти авторы на основе квантовомеханической теории возмущений показали, что граница для свободно-связанных состояний грубо может быть охарактеризована формулой

$$\varepsilon_b = -\frac{e^2}{r_0}, \quad (3.4)$$

где ε_b — энергия пары, образуемой частицей с ближайшей к ней противоположно заряженной частицей в системе их центра масс, вычисленная в пренебрежении всеми остальными взаимодействиями. Отметим, что эта энергия соответственно имеет положительное или отрицательное значение для состояний, уровни которых находятся выше

или ниже предельного уровня невозмущенного атома. Однако подобное введение предельной энергии ϵ_b остается искусственным приемом со всей присущей ему неопределенностью.

Если пренебречь взаимодействием между двумя определенными выше группами свободных и связанных частиц, гамильтониан \mathcal{H} можно разделить на две независимые части \mathcal{H}_f и \mathcal{H}_0 , соответственно относящиеся к свободным и связанным группам. В этом случае статистическая сумма (3.3) может быть представлена в виде произведения

$$Z = Z_f Z_0 = \text{Sp} \left[\exp \left(-\frac{\mathcal{H}_f}{\Theta} \right) \right] \cdot \text{Sp} \left[\exp \left(-\frac{\mathcal{H}_0}{\Theta} \right) \right]. \quad (3.5)$$

Вводя собственные функции оператора \mathcal{H}_0 при вычислении величины Z_0 , получим

$$Z_0 = (N_0!)^{-2} \left[\left(\frac{2\pi(m_+ + m_-)\Theta}{h^2} \right)^{3/2} \sum_n \exp \left(-\frac{\epsilon_n}{\Theta} \right) \right]^{N_0}. \quad (3.6)$$

Здесь N_0 — число связанных частиц, ϵ_n — n -е собственное значение энергии для связанных состояний, и суммирование проводится по всем энергетическим уровням связанных состояний. Следует заметить, что вследствие ограничения, устанавливаемого формулой (3.4), не возникает хорошо известной расходимости статистической суммы для атома, обусловленной накоплением числа суммируемых членов в пределе $\epsilon_n \rightarrow 0$.

При вычислении величины Z_f сначала вводятся собственные функции оператора импульса и затем используется метод возмущений, развитый Кирквудом [3]. Обозначим через r_w радиус классического взаимодействия, а через λ — длину волны де Бройля. Можно показать, что когда нет ограничений по энергии и отсутствует вклад взаимодействий между частицами на расстояниях $r^2 < \lambda r_w$, то классическое выражение для статистической суммы канонического ансамбля дает вполне удовлетворительное приближение для величины Z_f . Исключение вклада ближних взаимодействий устраняет трудность, связанную с расходимостью исходного выражения, на которую было обращено внимание в начале раздела как на одно из основных препятствий его использования. Однако это не влияет на

результаты вычислений, полученные с помощью излагаемого ниже в общих чертах метода расчета Z_f путем использования групповых разложений, так как ближние взаимодействия в этом случае неявным образом исключаются.

Таким образом, в рамках модели свободно-связанных состояний выражение для полной статистической суммы кулоновской системы может быть представлено в виде произведения двух множителей, один из которых Z_0 соответствует вкладу связанных состояний, а другой, Z_f , связан с вкладом свободных состояний.

Множитель Z_0 описывается соотношением (3.6), и его вычисление не представляет каких-либо трудностей, так как энергетические уровни ε_n можно рассчитать, исходя из квантовомеханического решения задачи взаимодействия двух частиц. Поскольку нас интересует лишь вклад свободных частиц, обозначим далее число свободных электронов или ионов через N .

Следовательно, выражение для Z_f запишется в виде

$$Z_f = \frac{1}{h^{6N} (N!)^2} \int \exp \left(-\frac{H}{\Theta} \right) dp dr, \quad |\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-|^2 > r_w \lambda, \quad (3.7)$$

где функция Гамильтона H определяется из соотношения (3.2). Вычисление интеграла в выражении (3.7) по пространству импульсов тривиально. Известную проблему вследствие дальнедействующего характера кулоновских сил представляет вычисление конфигурационного интеграла по координатному пространству.

Итак, в дальнейшем мы остановимся на вычислении с помощью метода групповых разложений величины

$$Z' = \int \exp \left\{ -\frac{1}{2\Theta} \sum'_{i,j} \left(\frac{e^2}{|\mathbf{r}_{+i} - \mathbf{r}_{+j}|} + \frac{e^2}{|\mathbf{r}_{-i} - \mathbf{r}_{-j}|} \right) + \frac{1}{\Theta} \sum_{i,j} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_{-i} - \mathbf{r}_{+j}|} \right\} d\mathbf{r}. \quad (3.8)$$

Прежде, однако, напомним основные черты этого метода.

3.2. Элементы метода групповых разложений

С целью упрощения перепишем выражение (3.8) в форме

$$Z' = \int \exp \left[-\frac{1}{\Theta} \sum_{i,j} \phi_{ij} \right] d\mathbf{r}, \quad (3.9)$$

где знак потенциальной энергии ϕ_{ij} зависит от индексов в соответствии с формулой (3.8).

Теперь мы можем разложить Z' следующим образом:

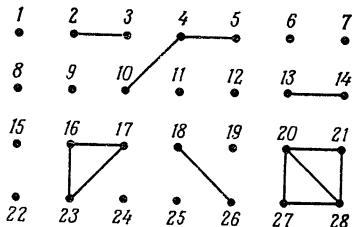
$$\begin{aligned} Z' &= \int \prod_{i,j} (1 + f_{ij}) d\mathbf{r} = \\ &= \int \left(1 + \sum f_{ij} + \sum \sum f_{ijfk} + \right. \\ &\quad \left. + \sum \sum \sum f_{ijfkilmn} + \dots \right) d\mathbf{r}, \quad (3.10) \end{aligned}$$

где использовано обозначение

$$f_{ij} = \exp \left(-\frac{\phi_{ij}}{\Theta} \right) - 1. \quad (3.11)$$

Чтобы отличать различные произведения f -функций в выражении (3.10), мы прибегнем к следующему способу описания. Представим индексы функций в виде системы пронумерованных точек на изображающей плоскости, а функции f_{ij} — в виде линий, соединяющих соответствующие точки. Пример такой диаграммы для члена вида

$$\begin{aligned} &f_{2,3} f_{4,5} f_{4,10} f_{13,14} f_{16,17} f_{20,21} f_{16,23} \times \\ &\times f_{17,23} f_{18,26} f_{20,27} f_{20,28} f_{21,28} f_{27,28} \end{aligned} \quad (3.12)$$



приведен на фиг. 1.

Определим *частную группу* как схему связей между группой пронумерованных точек на изображающей плоскости, каждая из которых прямо или косвенно связана со всеми остальными. Таким образом, частная группа характеризуется набором

Ф и г. 1. Диаграмма произведений f -функций.

ром всех пронумерованных элементов и схемой связи между ними.

Если опустить различия между элементами частной группы, то приходим к понятию *обобщенной группы*. Обобщенная группа характеризуется числом частиц разного сорта и схемой связи между ними.

Если данная группа содержит полное число элементов l , состоящих из l_k элементов сорта k , то число различных реализаций наборов $\bar{l} = \{l_1, \dots, l_k, \dots, l_\sigma\}$ из исходного набора $\bar{N} = \{N_1, \dots, N_k, \dots, N_\sigma\}$ определится соответствующим числом комбинаций

$$\prod_k \frac{N_k!}{(N_k - l_k)! l_k!}. \quad (3.13)$$

Поскольку перестановка элементов в рамках заданной группы схемы связей приводит к новому типу частной группы, то каждый из таких наборов позволяет образовать большое число частных групп. Ниже мы рассмотрим группы, состоящие лишь из одного сорта частиц. Приведем для иллюстрации ряд обобщенных групп, состоящих из четырех элементов, и укажем число содержащихся в каждой из них частных групп:

$$\begin{array}{cccccc} \square_{\text{top-left}} & \square_{\text{top-right}} & \square_{\text{diag-down}} & \square_{\text{diag-up}} & \square_{\text{diag-down+right}} & \square_{\text{diag-down+top}} \\ 12 & 3 & 6 & 12 & 4 & 1 \end{array} \quad (3.14)$$

Так как любая диаграмма типа приведенной на фиг. 1 может быть представлена в виде набора частных групп и, кроме того, любому члену разложения (3.10) можно сопоставить соответствующую диаграмму, ясно, что любой член в (3.10) может быть задан в виде набора частных групп. Этот набор будет однозначной характеристикой данного члена разложения в (3.10).

Ниже мы увидим, что во многих прикладных случаях подобной детализации не требуется. Может оказаться достаточным задать набор чисел \bar{m}_l обобщенных групп типа l , содержащихся в диаграмме, представляющей рассматриваемый член разложения (3.10). Например, для диаграммы, изображенной на фиг. 1, соответствующий

набор чисел есть

$$m_1 = 12, m_2 = 3, m_3 = 2, m_4 = 1, m_5 = 0. \quad (3.15)$$

Введем теперь определение *группового интеграла* порядка l :

$$b_l = \frac{1}{l!V} \int \sum \prod f_{ij} dr_1 \dots dr_l, \quad (3.16)$$

который окажется полезным при вычислении выражения (3.10). В подинтегральном выражении (3.16) суммируются все произведения f -функций для линий связи, которые соответствуют частным группам в рамках обобщенной группы типа l .

Очевидно, что размерность группового интеграла равна V^{l-1} . Приведем для примера первые четыре групповых интеграла

$$b_1 = \frac{1}{V} \int dr_1 = 1,$$

$$b_2 = \frac{1}{2V} \int \bullet \bullet dr_1 dr_2 = \frac{1}{2V} \int f_{12} dr_1 dr_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty f(r) 4\pi r^2 dr,$$

$$b_3 = \frac{1}{6V} \int \left[\begin{array}{c} \overset{3}{\triangle} \\ \underset{1}{\bullet} \quad \underset{2}{\bullet} \end{array} + \begin{array}{c} \overset{3}{\triangle} \\ \underset{1}{\bullet} \quad \underset{2}{\bullet} \end{array} + \begin{array}{c} \overset{3}{\triangle} \\ \underset{1}{\bullet} \quad \underset{2}{\bullet} \end{array} + \begin{array}{c} \overset{3}{\triangle} \\ \underset{1}{\bullet} \quad \underset{2}{\bullet} \end{array} \right] dr_1 dr_2 dr_3 =$$

$$= \frac{1}{6V} \int [f_{31}f_{21} + f_{32}f_{31} + f_{32}f_{21} + f_{32}f_{31}f_{21}] dr_1 dr_2 dr_3, \quad (3.17)$$

$$b_4 = \frac{1}{24V} \int \left[12 \begin{array}{c} \overset{4}{\square} \\ \underset{1}{\bullet} \quad \underset{2}{\bullet} \quad \underset{3}{\bullet} \quad \underset{4}{\bullet} \end{array} + 12 \begin{array}{c} \overset{4}{\square} \\ \underset{1}{\bullet} \quad \underset{2}{\bullet} \quad \underset{3}{\bullet} \quad \underset{4}{\bullet} \end{array} + 4 \begin{array}{c} \overset{4}{\square} \\ \underset{1}{\bullet} \quad \underset{2}{\bullet} \quad \underset{3}{\bullet} \quad \underset{4}{\bullet} \end{array} + 3 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + 6 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right] \times$$

$$\times dr_1 dr_2 dr_3 dr_4 =$$

$$= \frac{1}{24V} \int [12f_{41}f_{32}f_{21} + 12f_{42}f_{41}f_{32}f_{21} + 4f_{43}f_{42}f_{41} +$$

$$+ 3f_{43}f_{41}f_{32}f_{21} + 6f_{43}f_{42}f_{41}f_{32}f_{21} +$$

$$+ f_{43}f_{42}f_{41}f_{32}f_{31}f_{21}] dr_1 dr_2 dr_3 dr_4.$$

Обозначим через V_w величину характерного объема для области парных взаимодействий. Тогда, если выпол-

няется соотношение

$$\frac{V}{l} \gg V_w, \quad (3.18)$$

то значение группового интеграла не зависит от объема V .

Представим теперь статистический интеграл (3.9) через групповые интегралы. Для этого сначала отберем из суммы все те диаграммы, которые объединяют одни и те же изображающие точки в группы. При этом допускается, что схемы связей в таких группах могут быть неодинаковыми. Затем выберем из отобранной совокупности диаграмм все те диаграммы, которые содержат какой-либо один определенный вид частной группы. Припишем данной частной группе символ C ($1, \dots, s$), где посредством C обозначим тип схемы связи f -функций, а последовательностью $1, \dots, s$ — содержащиеся в группе частицы (изображающие точки). Тогда, рассматривая вклад этой подсистемы в выражение (3.9), можно выделить множитель, описывающий вклад выделенной схемы связей f -функций данной частной группы, в следующем виде:

$$\sum \prod f_{ij} = \left(\prod_C f_{ij} \right) R(f_{ij}), \quad (3.19)$$

где величина R учитывает вклад остальных диаграмм. Теперь можно тем же способом поступить со всеми частными группами, связывающими изображающие точки $1, \dots, s$. Каждая из них приведет к появлению члена типа (3.19). Суммируя по всем таким подгруппам и выполняя интегрирование в (3.9), находим, что рассматриваемой группе диаграмм отвечает множитель

$$(b_{il}!V) R(f_{ij}). \quad (3.20)$$

Последовательное применение данного метода дает для выбранного нами набора диаграмм множитель вида

$$\prod_l (b_{il}!V)^{m_l}. \quad (3.21)$$

Итак, мы сразу вычислили вклад всех диаграмм, связывающих одинаковые изображающие точки в группы. Следовательно, статистический интеграл Z' представится в виде суммы по всем вкладам вида (3.21).

Из полученного результата видно, что вклады подгрупп, состоящих из одинаковых наборов m_l обобщенных групп, одинаковы. Поэтому суммирование по всем таким подгруппам сводится просто к умножению на число диаграмм, имеющих тот же набор обобщенных групп. Это число равно

$$\frac{N!}{\prod_l m_l! (l!)^{m_l}}, \quad (3.22)$$

что можно получить исходя из следующих соображений. Число возможных перестановок всех частиц равно $N!$. В пределах каждой группы имеется $l!$ излишних перестановок частиц, которые должны быть исключены, так как они уже содержатся в величинах b_l . Поскольку группы из l частиц встречаются всего m_l раз, то в общей сложности необходимо исключить $(l!)^{m_l}$ перестановок. И наконец, нужно исключить перестановки целых совокупностей частных групп, которые не дают новых состояний системы.

Перемножая (3.22) и (3.21), находим вклад всех диаграмм, содержащих одинаковые наборы \bar{m}_l обобщенных групп, в виде

$$N! \prod_l \frac{(Vb_l)^{m_l}}{m_l!}. \quad (3.23)$$

Таким образом, статистический интеграл дается формулой

$$Z' = N! \sum_{\bar{m}_l} \prod_l \frac{(Vb_l)^{m_l}}{m_l!} \quad (3.24)$$

при условии

$$\sum_{l=1}^N m_l l = N, \quad (3.25)$$

представляющем следствие сохранения числа частиц.

Вычисление Z' с помощью формулы (3.24) очень сложно. К счастью, для больших значений N сумма может быть заменена максимальным ее членом T_m .

Это вытекает из соотношения

$$T_m < \frac{Z'}{N!} < T_m \nu_p, \quad (3.26)$$

где ν_p — полное число членов в сумме. Значение ν_p — *partitio numerorum* — тождественно совпадает с числом возможных представлений N в виде суммы чисел l в случае, когда их перестановка не рассматривается как новый способ представления. Оно определяется формулой

$$\ln \nu_p \approx \pi \left(\frac{2}{3} N \right)^{1/2}. \quad (3.27)$$

Анализируя выражение для логарифма соотношения (3.26) с учетом формулы (3.27) и того обстоятельства, что логарифм максимального члена, $\ln T_m$, как будет показано ниже, пропорционален N , легко удостовериться в том, что в пределе $N \rightarrow \infty$ величина T_m совпадает с $Z'/N!$.

Используя метод неопределенных множителей Лагранжа F и формулу Стирлинга, можно получить для чисел m_l следующее соотношение:

$$m_l = N v b_l F^l \quad \text{при} \quad v = \frac{V}{N}, \quad (3.28)$$

где множители F определяются из условия (3.25), записанного в виде

$$\sum_{l=1}^N l v b_l F^l = 1. \quad (3.29)$$

Следовательно, максимальный член T_m , а вместе с ним и статистический интеграл определяются выражением

$$\ln T_m = \ln \left(\frac{Z'}{N!} \right) = N \left(\sum_{l=1}^N v b_l F^l - \ln F \right) \quad (3.30)$$

совместно с условием (3.29).

В такой формулировке расчет статистического интеграла сводится к вычислению групповых интегралов. Задачу можно упростить, введя понятие неприводимых групповых интегралов. Чтобы показать, как это делается, нам понадобится ряд дополнительных общих определений.

Будем называть две изображающие точки диаграмм *непосредственно связанными*, если на линии связи между

ними нет других изображающих точек, или же связанными цепочкой порядка n , если на линии связи находятся n точек, каждая из которых не имеет иных связей. Назовем точки *многократно связанными*, если от одной точки к другой можно указать по крайней мере две совершенно независимые линии связи.

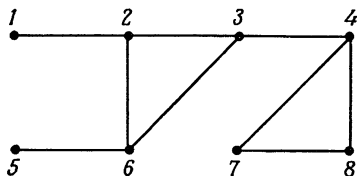
Изображающая точка диаграммы называется *независимо связанной* с n другими точками, если она связана с ними независимыми путями связи. Точка называется *узлом* порядка n , если она непосредственно связана с n другими точками, или *точкой пересечения*, если она представляет собой узел третьего или более высокого порядка. Изображающая точка называется *точкой ветвления* группы, если устранение этой точки вместе с ее линиями связи приводит к возникновению по крайней мере двух независимых групп.

Группа называется *неприводимой*, если в ней отсутствуют точки ветвления. Таким образом, в неприводимой группе каждая точка по крайней мере дважды связана с любой другой точкой.

3.3. Неприводимые группы

Чтобы свести обычные групповые интегралы к неприводимым, отметим сначала все точки ветвления рассматриваемой нами обычной группы. Для примера обратимся к диаграмме, изображенной на фиг. 2, где точки 2, 3, 4 и 6 являются точками ветвления.

Выберем теперь произвольно одну из этих точек ветвления и в выражении (3.16) введем относительные координаты для всех связанных с ней точек диаграммы. Тогда координаты точки ветвления выпадут из выражений для f -функций, отвечающих линиям связей, и дадут вклад лишь в объемный фактор. Групповой интеграл представляет собой произведение двух независимых множите-



Ф и г. 2. Диаграмма обычной группы.

лям. Групповой интеграл представляет собой произведение двух независимых множите-

лей, каждый из которых соответствует только своей части группы, полученной в результате деления исходной группы по точке ветвления. Последовательное применение этого способа ко всем точкам ветвления группы приведет, очевидно, к произведению интегралов по неприводимым группам.

Определим теперь неприводимый групповой интеграл порядка k :

$$\beta_k = \frac{1}{k!V} \int \sum \prod f_{ij} d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_{k+1}. \quad (3.31)$$

Здесь суммирование проводится по всем произведениям функций f_{ij} , соответствующим связям неприводимой группы, содержащей $(k + 1)$ точек.

Первые четыре неприводимых групповых интеграла имеют вид

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{V} \int \text{---} \bullet \text{---} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \\ \beta_2 &= \frac{1}{2V} \int \triangle d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\beta_3 = \frac{1}{6V} \int_i (3 \square + 6 \text{---} \diagup \text{---} + \text{---} \diagdown \text{---}) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_4,$$

$$\begin{aligned} \beta_4 &= \frac{1}{24V} \int (12 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + 60 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + 10 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + 60 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + 30 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \\ &+ 10 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + 15 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + 30 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + 10 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_5. \end{aligned}$$

В аналитической форме интегралы β_1 , β_2 и β_3 могут быть записаны как

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{V} \int f_{12} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \\ \beta_2 &= \frac{1}{2V} \int f_{32} f_{21} f_{13} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3, \\ \beta_3 &= \frac{1}{6V} \int [3f_{43} f_{32} f_{21} f_{14} + 6f_{43} f_{32} f_{21} f_{14} f_{31} + \\ &+ f_{43} f_{32} f_{21} f_{14} f_{31} f_{42}] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4. \end{aligned} \quad (3.33)$$

По очевидным соображениям мы здесь воздержимся от аналитического представления интеграла β_4 .

Используя описанную выше процедуру, легко показать, что между первыми четырьмя обычными групповыми интегралами и неприводимыми интегралами существуют следующие соотношения:

$$b_1 = 1, \quad b_2 = \frac{1}{2} \beta_1, \quad b_3 = \frac{1}{2} \beta_1^2 + \frac{1}{3} \beta_2, \quad (3.34)$$

$$b_4 = \frac{2}{3} \beta_1^3 + \beta_1 \beta_2 + \frac{1}{4} \beta_3.$$

В общем случае

$$b_l = \frac{1}{l^2} \sum_{\bar{n}} \prod_k \frac{(l\beta_k)^{n_k}}{n_k!}, \quad (3.35)$$

где суммируются все произведения, для которых выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{l-1} kn_k = l - 1. \quad (3.36)$$

Поскольку нас интересуют прикладные вопросы применения метода групповых разложений к кулоновским системам, мы не будем здесь приводить строгое доказательство соотношения (3.35). Подробное рассмотрение данного вопроса можно найти в любой книге, где используется метод групповых разложений (см., например, [4]).

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы выразить Z' через неприводимые групповые интегралы с помощью соотношения (3.35), которое следует подставить в выражения (3.30) и (3.29). Путем подстановки можно удостовериться, что решением уравнения (3.29) является

$$F = \frac{1}{v} \exp \left(- \sum_k \beta_k v^{-k} \right). \quad (3.37)$$

Используя выражение для F (3.37) и соотношение (3.35) в формуле (3.30) и разлагая результат в ряд по отрицательным степеням удельного объема $v = V/N$, находим окон-

чательное выражение

$$\begin{aligned} \ln \frac{Z'}{N!} &= N \left[1 - \sum_k \frac{k}{k+1} \beta_k v^{-k} + \sum_k \beta_k v^{-k} + \ln v \right] = \\ &= N \left[1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k+1} \beta_k v^{-k} + \ln v \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

3.4. Прототипы групповых разложений

В предыдущем разделе мы выразили вклад кулоновского взаимодействия в статистическую сумму через неприводимые групповые интегралы β_k . Полученное выражение (3.38) можно переписать в следующей форме:

$$\ln \left(\frac{Z'}{N!} \right) = N (1 + \ln v + S_1), \quad (3.39)$$

где основной член равен

$$S_1 = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{1+k} \beta_k v^{-k}. \quad (3.40)$$

Связь S_1 с физическими свойствами системы можно установить, перейдя к уравнению состояния, которое, согласно (2.10), имеет вид

$$\frac{p}{\Theta} = v^{-1} + \frac{\partial S_1}{\partial v}. \quad (3.41)$$

Очевидно, что величина S_1 определяет отклонения в поведении системы, связанные с кулоновским взаимодействием. Следовательно, величина S_1 должна также определять коэффициенты вириального разложения.

Обычно в литературе в качестве переменных используют плотности вместо удельных объемов и вириальные коэффициенты взамен неприводимых групповых интегралов. Этот переход в (3.39) — (3.41) нетрудно осуществить с помощью следующих преобразований:

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{v}, \quad k = N - 1, \quad S = \frac{S_1}{v}, \\ B_N &= \frac{\beta_{N-1}}{N} = \frac{1}{N!} \int \sum \prod f_{ij} d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_{N-1}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Тогда получаем

$$S = \frac{S_1}{v} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k+1} \beta_k v^{-(k+1)} = \sum_{N \geq 2} B_N n^N \quad (3.43)$$

и

$$\frac{p}{\Theta} = n + S - n \frac{\partial S}{\partial n}, \quad (3.44)$$

что дает

$$\frac{p}{\Theta} = n - \sum_{N \geq 2} (N-1) B_N n^N. \quad (3.45)$$

Из последнего соотношения следует, что величина $(1-N) \cdot B_N$ совпадает с N -м вириальным коэффициентом.

С целью простоты изложения мы до сих пор ограничивались рассмотрением однокомпонентной системы. Но такую однокомпонентную кулоновскую систему в связи с возникающей проблемой поля и энергии трудно реализовать при сколько-нибудь заметной плотности. Обычно мы встречаемся с двухкомпонентной электрон-ионной системой. К ней и будут в дальнейшем применяться результаты нашего исследования. Необходимые при этом обобщения не вносят принципиально новых проблем. Однако их следует сделать, чтобы надлежащим образом обобщить используемый перечень понятий и обозначений.

Не входя в детали строгих доказательств, мы приведем здесь результаты исследований Майера [5] и Меерона [6], которые кажутся «более или менее очевидными» при их сравнении с формулами (3.39) — (3.45) (более взыскательного читателя мы отсылаем к цитируемой литературе).

Рассмотрим систему, состоящую из σ компонент, отличающихся индексами $1, \dots, s, \dots, r, \dots, \sigma$. Пусть

$$\bar{N} = \{N_1, \dots, N_s, \dots, N_r, \dots, N_\sigma\} \quad (3.46)$$

— набор, определяющий группировку чисел частиц различных сортов, и

$$\bar{n} = \{n_1, \dots, n_s, \dots, n_r, \dots, n_\sigma\} \quad (3.47)$$

— набор, характеризующий плотности частиц рассматриваемых сортов. Используем далее соотношения

$$\bar{n}^{\bar{N}} = n_1^{N_1} n_2^{N_2} \dots n_\sigma^{N_\sigma}, \quad \bar{N}! = N_1! N_2! \dots N_\sigma!, \quad (3.48)$$

$$N = \sum_i N_i, \quad n = \sum_i n_i, \quad (3.49)$$

$$\sum_{\bar{N}(N \geq 2)} = \sum_{N \geq 2} \sum_{N_1} \sum_{N_2} \dots \sum_{N_\sigma}, \quad \text{где} \quad N = \sum_{i=1}^{\sigma} N_i, \quad (3.50)$$

а также

$$B_{\bar{N}} = B_{N_1 \dots N_\sigma} = \frac{1}{\bar{N}!} \int \sum \prod f_{ij} dr_1 \dots dr_{N-1}. \quad (3.51)$$

Здесь в соответствии с определением неприводимых групп под знаком интеграла (3.51) стоят все произведения, отвечающие диаграммам, в которых $N = \sum N_s$ изображающих точек многократно связаны.

Используя введенные обозначения в формулах для многокомпонентной системы, находим по аналогии с однокомпонентной системой, что

$$S = \sum_{\bar{N}(N \geq 2)} B_{\bar{N}} \bar{n}^{\bar{N}} \quad (3.52)$$

и уравнение состояния многокомпонентной системы есть

$$\frac{p}{\Theta} = n + S - \sum_{i=1}^{\sigma} n_i \frac{\partial S}{\partial n_i}, \quad (3.53)$$

или аналогично соответствующему уравнению (3.45)

$$\frac{p}{\Theta} = n - \sum_{\bar{N}(N \geq 2)} (N-1) B_{\bar{N}} \bar{n}^{\bar{N}}. \quad (3.54)$$

При вычислении коэффициентов B_N для рассматриваемой кулоновской системы мы сталкиваемся с характерной трудностью, связанной с вычислением групповых интегралов.

Наилучшим образом возникающая проблема проявляется на простом примере системы из частиц двух сортов. Обозначим их соответственно s и i . Второй вириальный

коэффициент B_{si} , связанный с эффектом их взаимодействия, имеет вид

$$B_{si} = \frac{1}{1 + \delta_{si}} \int_0^{\infty} 4\pi r_{si}^2 f_{si}(r_{si}) dr_{si}, \quad (3.55)$$

где δ_{si} — символ Кронекера, а r_{si} — расстояние между двумя частицами.

Для больших расстояний r_{si} функцию f_{si} можно разложить в ряд:

$$f_{si} = \exp\left(-\frac{z_i z_s}{\Theta r_{si}}\right) - 1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(-\frac{z_i z_s}{\Theta r_{si}}\right)^{\nu}, \quad (3.56)$$

где через z_i, z_s обозначены заряды частиц обоих сортов. Подставляя это выражение в (3.55), находим, что первый член разложения (3.56) приводит к расходящемуся вкладу. Возникшая проблема не столь серьезна, поскольку в нейтральной системе суммирование по всем сортам частиц перед операцией интегрирования устраняет эту расходимость. С другой стороны, следующий член разложения (3.56) также расходится, и здесь учет нейтральности системы оказывается бесполезным, ибо соответствующий вклад не зависит от знака заряда частицы. Кроме того, логарифмически расходится и третий член разложения.

Если бы мы выбрали обычный метод вычисления S — интегрирование произведений f , входящих в $B_{\bar{N}}$, суммирование по всем диаграммам, принадлежащим к одному из наборов \bar{N} , с последующим суммированием по всем возможным наборам, — то вследствие указанной расходимости операцию интегрирования нельзя было бы выполнить.

Чтобы обойти трудность, связанную с расходимостью, обусловленной вкладом дальних взаимодействий, Майер [5] предложил следующий способ.

Во-первых, можно ввести множитель, обеспечивающий формальную сходимость, в формуле для потенциала взаимодействия

$$\phi_{ij} = \frac{z_i z_j}{r_{ij}} e^{-\alpha r_{ij}} = z_i z_j g(r_{ij}). \quad (3.57)$$

В окончательном результате мы устремим α к нулю.

Во-вторых, при вычислении сумм по всем диаграммам и всем наборам частиц можно изменить последовательность суммирования, т. е. начать с суммирования по наборам частиц.

Наконец, следует ввести новую систему диаграмм, соответствующих разложению

$$f_{ij} = \exp \left[-\frac{z_i z_j g(r_{ij})}{\Theta} \right] - 1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(-\frac{z_i z_j}{\Theta} \right)^{\nu} \frac{1}{\nu!} (g_{ij})^{\nu}, \quad (3.58)$$

возникающую в том случае, когда каждому множителю g сопоставляется своя схема g -связей. В конце расчета нужно провести суммирование по всем различающимся диаграммам.

В соответствии с ограничениями, налагаемыми на группы f -представления (3.51) и свойства неприводимых групп, необходимо провести классификацию групп g -представления в выражении (3.58). Поскольку в неприводимых группах f -представления все частицы многократно связаны, это тем более верно для соответствующих им групп g -представления, которые в отличие от первых содержат многократные прямые связи.

Будем различать следующие три существенно отличающиеся группы g -представления, характеризующиеся особыми свойствами связанных с ними диаграмм.

1. Одиночная диаграмма, представляемая схемой

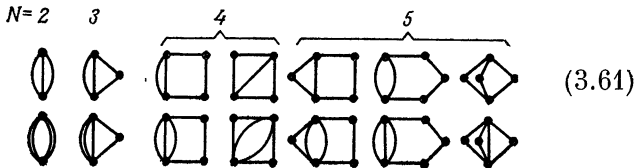
$$N=2 \quad \bullet \text{---} \bullet \quad (3.59)$$

2. Петли, характеризующиеся тем, что каждая из точек диаграммы представляет собой узел второго порядка. Некоторые из примеров петель приведены на следующих схемах:

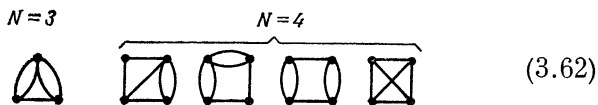
$$N = 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad (3.60)$$

3. В третью группу входят все остальные диаграммы. Она характеризуется тем, что в рассматриваемых диаграмм-

мах всегда есть две или большее число точек, связанных более чем дважды. Примерами могут служить следующие схемы:



где показаны диаграммы, содержащие лишь по две точки с числом связей больше двух. Диаграммы, показанные ниже, содержат более двух точек, имеющих связи высшего порядка:



Прототипы диаграмм 3-й группы отличаются тем, что их точки являются узлами выше второго порядка. Будем характеризовать этот прототип диаграмм символами \bar{m} и ν , где через \bar{m} обозначен набор частиц, а ν характеризует схему связей.

Все диаграммы 3-й группы могут быть классифицированы по прототипам диаграмм, если к каждому прототипу (\bar{m}, ν) отнести все диаграммы, которые можно образовать от данного прототипа путем замены прямой связи на цепочку. При этом в каждой цепочке могут оказаться произвольные последовательности различных сортов частиц.

Используя приведенную выше классификацию, можно высказать ряд следующих утверждений:

1. Одиночные диаграммы не дают вклада в статистическую сумму для нейтральной системы.

2. Вклад диаграмм типа петель приводит к закону взаимодействия Дебая — Хюккеля.

3. Суммарный вклад диаграмм 3-й группы может быть выражен только через прототипы диаграмм с помощью перехода от g -представления к q -представлению, опре-

деляемому соотношением

$$q_{ij} = \frac{1}{r_{ij}} \exp(-\kappa_D r_{ij}), \quad (3.63)$$

где

$$\kappa_D^2 = \frac{4\pi}{\Theta} \sum_i z_i^2 n_i \quad (3.64)$$

— постоянная Дебая.

Выскажем замечания по поводу изложенных утверждений.

1. Первое утверждение тривиально.

2. Доказательство второго утверждения наиболее легко выводится из доказательства третьего, на основе которого оно и будет получено.

3. Для доказательства третьего утверждения рассмотрим произвольную диаграмму в g -представлении и введем ряд обозначений.

Напомним, что через \bar{N} обозначен набор всех частиц, содержащихся в рассматриваемой g -диаграмме, а через N_s обозначено число частиц сорта s . Величина N представляет полное число всех частиц в наборе. Предположим, что g -диаграмма относится к некоторому прототипу, содержащему подгруппу с набором \bar{m} частиц из набора \bar{N} . Обозначим через m_s число частиц сорта s в подгруппе и через m полное число частиц в прототипе диаграммы.

Пусть $\bar{\mu}$ — дополнительный набор групп \bar{m} , содержащийся в наборе \bar{N} . Это означает, что набор $\bar{\mu}$ включает все частицы, расположенные в пределах связующих цепочек. Соответственно через μ_s мы обозначим число частиц сорта s , а через μ — полное число частиц в наборе $\bar{\mu}$.

Далее подразделим набор $\bar{\mu}$ на подгруппы $\bar{\mu}_i$, относящиеся к частицам в i -й цепочке. Через μ_{is} и μ_i обозначим число частиц сорта s и полное число частиц в данной цепочке.

Для характеристики структуры цепочки используем три величины. Пусть ν определяет общее число связей в прототипе диаграммы или число цепочек в g -диаграмме, а ν_s — число концов цепочек, связанных с частицами сорта s набора \bar{m} , содержащегося в прототипе диаграммы.

Обозначим через ν_{si} число прямых связей или цепочек нулевого порядка, связывающих частицы i и s в диаграмме.

Для определенных выше величин выполняются следующие тривиальные соотношения:

$$\bar{m} + \bar{\mu} = \bar{N}, \quad \bar{\mu} = \sum_i \bar{\mu}_i, \quad \nu = \sum_s \frac{1}{2} \nu_s,$$

$$N = \sum_s N_s = \sum_s (m_s + \mu_s), \quad m = \sum_s m_s, \quad \mu_i = \sum_s \mu_{si}, \quad (3.65)$$

$$\mu = \sum_i \mu_i.$$

Вклад рассматриваемых диаграмм в величины $B_{\bar{N}}$ обозначим через $B_{(m, \nu)}^{\bar{\mu}}$. Здесь нижний индекс характеризует структуру прототипа, а верхний — набор частиц в цепочках диаграммы. Соответствующий вклад определится выражением (3.51), в которое следует подставить разложение (3.58), используя введенные нами определения:

$$B_{(m, \nu)}^{\bar{\mu}} = \frac{1}{(m + \mu)!} \cdot \frac{(-1/\Theta)^\nu}{\bar{\nu}_{sr}!} \prod_s z_s^{\nu_s} \times$$

$$\times \int \prod_i \left[\prod_s \left(-\frac{4\pi}{\Theta} z_s^2 \right)^{\mu_{is}} \right] \chi_i^{(\mu_i)}(r_{kj}) dr_{\bar{m}}. \quad (3.66)$$

В этом выражении употреблено сокращенное обозначение

$$\chi_i^{(\mu_i)} = \int g(r_{k1}) g(r_{12}) \dots g(r_{(\mu_i-1)\mu_i}) g(r_{j\mu_i}) \times$$

$$\times r_{k1}^2 \dots r_{j\mu_i}^2 dr_{k1} \dots dr_{j\mu_i}. \quad (3.67)$$

Мы обращаем особое внимание на то обстоятельство, что в выражении для функции χ интегрирование проводится только по координатам частиц в цепочках, тогда как интегрирование по координатам частиц, которые принадлежат набору \bar{m} , обозначено в (3.66) символом $\int dr_{\bar{m}}$.

Следуя способу, предложенному Майером (см. стр. 49), попытаемся в соответствии с формулой (3.52) провести суммирование по наборам частиц \bar{N} , выбранным

надлежащим образом. Чтобы это можно было выполнить, необходимо, разумеется, сначала умножить величину $B_{(m,v)}^{\bar{\mu}}$ на множитель $\bar{n}^{\bar{N}}$.

Рассмотрим теперь заданные наборы частиц \bar{N} , \bar{m} , $\bar{\mu}$ и $\bar{\mu}_i$. Сохраняя их неизменными, с помощью 1) перестановок частиц внутри набора μ_{is} , 2) перестановок частиц внутри набора m_s и 3) перестановок частиц между наборами m_s и μ_s можно образовать новые диаграммы, принадлежащие к группам, дающим одинаковый вклад в величину $B_{(m,v)}^{\bar{\mu}}$.

Перестановки в пределах μ_{is} соответствуют изменению порядка частиц в цепочках. Число диаграмм, образующихся таким способом, определяется соотношением

$$\prod_i \bar{\mu}_i! . \quad (3.68)$$

Перестановки элементов в пределах m_s здесь не рассматриваются, поскольку соответствующие им новые диаграммы учтены при суммировании в выражении (3.51) как новые прототипы диаграмм.

Число новых диаграмм, возникающих от перестановок элементов между группами m_s и μ_s , описываются соотношением

$$\frac{(\overline{m+\mu})!}{\bar{m}!} \prod_i \bar{\mu}_i! . \quad (3.69)$$

Вклад всех диаграмм, образованных перестановками частиц в случаях 1) и 3), учитывается с помощью умножения величины $\bar{n}^{\bar{N}} B_{(m,v)}^{\bar{\mu}}$, определяемой формулой (3.66), на множители (3.68) и (3.69). Таким образом находим

$$\begin{aligned} [\bar{n}^{\bar{N}} B_{(m,v)}^{\bar{\mu}}]' &= \frac{\bar{n}^{\bar{m}}}{\bar{m}!} \frac{(-1/\Theta)^{\nu}}{\bar{v}_{sr}!} \prod_s z_s^{\nu s} \times \\ &\times \int \prod_i \bar{\mu}_i! \prod_s \frac{[-(4\pi/\Theta) z_s n_s]^{\mu_{is}}}{\mu_{is}!} \chi_i^{(\mu_i)} d\mathbf{r}_{\bar{m}} . \end{aligned} \quad (3.70)$$

Чтобы определить вклад, представляемый всеми диаграммами с одинаковыми длинами, но разной структурой

цепочек μ_i , просуммируем результат (3.70) по всем наборам $\bar{\mu}_i$, в которых числа μ_i постоянны. При этом используем соотношение

$$\sum_s \bar{\mu}_{si} = \mu_i = \text{const} \quad \bar{\mu}_i! \prod_s \frac{[-(4\pi/\Theta) z_s^2 n_s]^{\mu_{si}}}{\mu_{si}!} =$$

$$= \left[\sum_s \left(-\frac{4\pi}{\Theta} z_s^2 n_s \right) \right]^{\sum \mu_{si}} = (-\kappa_D^2)^{\mu_i} \quad (3.71)$$

и в результате получим

$$[\bar{n} \bar{N} B_{(m, \nu)}^{\bar{\mu}}]^n = \frac{\bar{n} \bar{m}}{\bar{m}!} \frac{(-1/\Theta)^\nu}{\bar{\nu}_{sr}!} \prod_s z_s^{\nu s} \int \prod_i (-\kappa_D^2)^{\mu_i} \chi_i^{(\mu_i)} d\mathbf{r}_m, \quad (3.72)$$

где κ_D^2 определено формулой

$$\kappa_D^2 = \sum_s \frac{4\pi}{\Theta} z_s^2 n_s. \quad (3.73)$$

В выражении (3.72) учтен вклад всех диаграмм, соответствующих данному прототипу и имеющих равные длины цепочек. Чтобы найти полный вклад всей группы диаграмм, соответствующих данному прототипу, просуммируем результат, определяемый формулой (3.72), по всем возможным длинам цепочек. Рассматриваемая операция усложняется наличием величины $\bar{\nu}_{sr}!$ в знаменателе выражения (3.72). Это связано с тем обстоятельством, что независимое суммирование для каждой цепочки дает излишне много состояний. При этом нам пришлось бы учитывать такие пары диаграмм, все отличие которых состоит лишь в том, что в них переставлены две цепочки, соединяющие одни и те же изображающие точки. Однако такого рода состояния неразличимы. Не входя подробно в детали соответствующих доказательств (см., например, [7]), мы позволим себе привести лишь результат, сводящийся к тому, что суммирование по всем цепочкам от $\mu_i = 0$ до $\mu_i = \infty$ может быть проведено независимо при условии, если в знаменатель выражения (3.72) вместо $\bar{\nu}_{sr}!$ подста-

вить величину $\bar{v}_{sr}^0!$ — число прямых связей между частицами r и s данного прототипа группы.

Учитывая это, получим выражение, описывающее вклад $S^{(P)}$ группы диаграмм, соответствующей данному прототипу, т. е.

$$[\bar{n} \bar{N} B_{(m, \nu)}^{\bar{\mu}}]^m = \frac{\bar{n}^m}{m!} \frac{(-1/\Theta)^{\nu}}{\bar{v}_{sr}^0!} \prod_s z_s^{\nu_s} \int \prod_i \chi_i d\mathbf{r}_m = S^{(P)}, \quad (3.74)$$

где функция χ_i определяется выражением

$$\chi_i(r_{kj}) = \sum_{\mu_i} (-\kappa_D^2)^{\mu_i} \tilde{\chi}_i^{(\mu_i)}(r_{kj}). \quad (3.75)$$

Рассчитаем теперь эффективное взаимодействие по закону (3.63). Применяя теорему о свертке (для преобразования Фурье) к выражению (3.67), получаем соотношение между спектральными компонентами $\tilde{\chi}_i^{(\mu_i)}(\xi)$ и $\tilde{g}(\xi)$:

$$\tilde{\chi}_i^{(\mu_i)}(\xi) = [\tilde{g}(\xi)]^{\mu_i+1}. \quad (3.76)$$

С другой стороны, из выражения (3.75) следует

$$\tilde{\chi}_i = \sum_{\mu_i} (-\kappa_D^2)^{\mu_i} \tilde{\chi}_i^{(\mu_i)}. \quad (3.77)$$

После подстановки соотношения (3.76) в (3.77) нетрудно выполнить суммирование, что дает

$$\tilde{\chi}_i = \frac{\tilde{g}}{1 + \tilde{g} \kappa_D^2}. \quad (3.78)$$

Спектральная компонента \tilde{g} (с учетом фактора α , обеспечивающего сходимость) равна

$$g(\xi) = \int_0^{\infty} r^2 g(r) \frac{\sin(\xi r)}{\xi r} dr = (\alpha^2 + \xi^2)^{-1}, \quad (3.79)$$

откуда при $\alpha \rightarrow 0$ следует, что

$$\tilde{\chi}_i = (\kappa_D^2 + \xi^2)^{-1}. \quad (3.80)$$

Наконец, обратное преобразование Фурье дает

$$\chi_i(r) = \frac{1}{r} \exp(-\kappa_D r). \quad (3.81)$$

Это соотношение доказывает справедливость ранее высказанного 3-го утверждения.

Замечание по поводу 2-го утверждения. Доказательство 2-го утверждения нетрудно связать с выводами, содержащимися в доказательстве 3-го утверждения. Рассмотрим диаграмму-петлю, состоящую из групп частиц a_s . Подобную диаграмму можно рассматривать как замкнутую цепочку. Числа a и a_s соответствуют использованным выше обозначениям μ_i и μ_{is} . Совершенно аналогично выражению (3.70) для вклада такой петли в функцию S получаем выражение

$$S^{(\bar{a}, c)} = \prod_s \left\{ \frac{[-(4\pi/\Theta) z_s^{2n_s}]^{a_s}}{a_s!} \right\} \frac{1}{4\pi} \chi^{(a-1)} (r=0). \quad (3.82)$$

Как и в предыдущем случае, мы сначала поменяем порядок всех частиц, сохранив неизменным их набор \bar{a} . Затем учтем все возможные наборы, сохранив постоянным только число частиц a . После этого просуммируем результат по всем возможным значениям a от 0 до ∞ . В результате получим

$$S^{(c)} = \sum_{a \geq 2} \frac{1}{2a} (-\kappa_D^2)^a \frac{1}{4\pi} \chi^{a-1} (r=0), \quad (3.83)$$

Осуществить суммирование в формуле (3.83) и получить непосредственно величину $S^{(c)}$ не удастся, ибо коэффициенты слагаемых имеют индексы, отличные от индексов χ , а знаменатель явно содержит индекс a . Однако, если продифференцировать величину $S^{(c)}$ по κ_D^2 , можно получить выражение

$$\begin{aligned} \frac{dS^{(c)}}{d(\kappa_D^2)} &= -\frac{1}{8\pi} \sum_{a \geq 1} (-\kappa_D^2)^a \chi^{(a)} (r=0) = \\ &= -\frac{1}{8\pi} [\chi (r=0) - \chi^0 (r=0)], \end{aligned} \quad (3.84)$$

что позволяет непосредственно перейти к функции $\chi(r)$. Имея в виду, что $\chi^{(0)}$ есть функция g , в пределе при $r \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow 0$ находим

$$\frac{dS^{(c)}}{d(\kappa_D^2)} = \frac{\kappa_D}{8\pi}, \quad (3.85)$$

откуда следует, что

$$S^{(c)} = \frac{\kappa_D^3}{12\pi}. \quad (3.86)$$

Подставив данный результат в уравнение состояния, мы получим хорошо известный закон Дебая — Хюккеля:

$$\frac{p}{\Theta} = n - \frac{\kappa_D^3}{24\pi}. \quad (3.87)$$

Рассмотренные петлевые диаграммы определяют вклад в вириальное разложение, связанный с взаимодействием по закону Дебая — Хюккеля.

3.5. Разложение по большим группам

Предложенное Майером разложение по группам в g -представлении устраняет расходимость, связанную с дальним взаимодействием. К сожалению, при этом возникает новая расходимость для областей близких взаимодействий, когда $r \rightarrow 0$. Это неудивительно, так как степенной ряд от функции $\exp(-1/r)$ при $r \rightarrow 0$ расходится.

Подобная расходимость не сказывалась на оригинальных исследованиях самого Майера, поскольку он интересовался поведением ионов в электролитах, и взаимодействия на близких расстояниях рассматривались им отдельно, что устраняло возникающую расходимость. Для исследуемой же нами кулоновской системы из точечных зарядов расходимость по-прежнему остается. Однако мы хотим подчеркнуть, что данная проблема представляет собой только лишь результат использовавшихся нами специальных математических приемов.

Чтобы избежать расходимости, возникающей на коротких расстояниях, Абэ [8] предложил использовать *разложение по большим группам*.

Для понимания этого метода достаточно рассмотреть лишь однокомпонентную систему ($z_i^a = e^2$). Полученное

ранее выражение для S можно тогда написать в виде

$$\begin{aligned}
 S &= S^{(c)} + S^{(P)} = \\
 &= S^{(c)} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{n^m}{m!} \int \sum_{\nu} \prod \left[-\frac{e^2 \chi(r_{ik})}{\Theta} \right]^{\nu r_s} \frac{1}{\nu r_s!} d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_{m-1},
 \end{aligned}
 \tag{3.88}$$

где $S^{(c)}$ есть вклад от петлевых диаграмм, соответствующий дебаевскому взаимодействию, а $S^{(P)}$ — вклад от диаграмм-прототипов. Первое суммирование в выражении (3.88) проводится по всем диаграммам-прототипам с различными числами m , а второе распространяется на все диаграммы-прототипы (ν), принадлежащие данному набору частиц \bar{m} . Поскольку при этом предполагается, что подинтегральное выражение не зависит от положения соответствующей группы частиц в пространстве, можно выполнить интегрирование по \mathbf{r}_m и возникающий в результате множитель сократить с объемным множителем, входящим в знаменатель.

Простейшая диаграмма-прототип и ее вклад в S суть

$$\begin{aligned}
 \text{---} \circ \text{---} : S^{(m, \nu)} &= S^{(2, 3)} = \frac{n^2}{2!} \int_0^{\infty} \frac{1}{3!} \left(-\frac{\chi e^2}{\Theta} \right)^3 4\pi r^2 dr = \\
 &= -\frac{e^6 n^2 \pi}{3\Theta^3} \int_0^{\infty} \frac{1}{r} \exp(-3\chi_D r) dr.
 \end{aligned}
 \tag{3.89}$$

Входящий в это выражение интеграл расходится.

Так как мы уже указывали, что возникающая в области малых расстояний расходимость обусловлена разложением в степенные ряды по g -функциям, предложенным Майером, можно надеяться, что эта расходимость устранилась, если просуммировать ряд по критическим диаграммам.

Проиллюстрируем это на примере *двуузловых диаграмм возрастающего порядка*, представленных в виде следующего ряда:

$$\text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \dots
 \tag{3.90}$$

Члены такого ряда соответствуют разложению Майера по g -функциям с той лишь разницей, что в нашем случае вместо g -функций используются функции χ . Однако для малых r эти функции совпадают друг с другом. Таким образом, можно надеяться, что суммирование по диаграммам типа (3.90) устранил упомянутую выше расходимость.

Вклад двуузловых диаграмм (3.90) может быть записан в виде

$$S^{(2)} = \frac{n^2}{2} \int_0^\infty \sum_{\nu=3}^\infty \frac{1}{\nu!} \left(-\frac{e^2\chi}{\Theta} \right)^\nu \cdot 4\pi r^2 dr =$$

$$= 2\pi n^2 \int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{e^2\chi(r)}{\Theta}} - 1 + \frac{e^2\chi(r)}{\Theta} - \frac{1}{2} \left[\frac{e^2\chi(r)}{\Theta} \right]^2 \right\} r^2 dr \quad (3.91)$$

или с учетом обозначений

$$w_0 = -\frac{1}{\Theta} e^2\chi, \quad w_l = \sum_{\nu=l}^\infty \left(-\frac{e^2\chi}{\Theta} \right)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} \quad (l > 0) \quad (3.92)$$

в виде выражения

$$S^{(2)} = \frac{n^2}{2} \int_0^\infty w_3(r) \cdot 4\pi r^2 dr, \quad (3.93)$$

которое не расходится.

Изучим теперь прототипы диаграмм с тремя узлами. Рассмотрим основные их типы



$$(3.94)$$

От каждого из этих прототипов можно образовать остальные виды путем замены двойных связей в основных диаграммах на многократные. Проведем суммирование по всем этим дополнительным группам диаграмм и исходным четырем типам (3.94). В результате получим

$$S^{(3)} = \frac{3n^3}{3!} \int w_0(12) w_2(23) w_2(31) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 +$$

$$+ \frac{n^3}{3!} \int w_2(12) w_2(23) w_2(31) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (3.95)$$

где первый член соответствует вкладу первых трех диаграмм.

Обобщение описанной выше процедуры на прототипы диаграмм с числом узлов более трех очевидно.

Снова мы видим, что вклады $S^{(P)}$ могут быть представлены как интегралы от произведений функций w_i . Это наводит на мысль о том, что в качестве упорядочивающей схемы теперь можно ввести диаграммы в w_i -представлении. Однако в противоположность диаграммам в f - и g -представлении мы должны отличать разные типы связей w_i между изображающими точками. Для этого мы используем следующие обозначения:

$$w_0 \rightarrow \text{----}; w_1 \rightarrow \text{—}; w_2 \rightarrow \text{====}; w_3 \rightarrow \text{=====}; \dots \quad (3.96)$$

Применяя данные обозначения, можно записать вклады $S^{(2)}$ и $S^{(3)}$ в виде

$$S^{(2)} = \frac{n^2}{2} \int \text{====} 4\pi r^2 dr, \quad (3.97)$$

$$S^{(3)} = \frac{n^3}{3!} \int (\text{▲} + \text{▲} + \text{▲} + \text{▲}) dx_1 dx_2.$$

Искомая функция S снова представляет собой сумму по некоторым неприводимым диаграммам, выражающуюся через групповые интегралы в w_i -представлении. В полной аналогии с методом Майера запишем выражение (3.43) для S в форме

$$S = S^{(c)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k+1} n^{k+1}, \quad (3.98)$$

где мы определили в качестве неприводимого группового интеграла в w_i -представлении величину

$$\gamma_k = \frac{1}{k!} \int \sum \prod_{k+1 \geq i > j \geq 1} w_l(i, j) \prod dx_k. \quad (3.99)$$

В сумму под интегралом (3.99) входят лишь «неприводимые w_i -диаграммы».

Соотношение (3.99) при $k = 1$ и $k = 2$ сводится к формулам (3.97). Для $k = 3$ мы имеем

$$S^{(4)} = \frac{n^4}{4!} \times \int \left(\begin{array}{c} \square + \square + \square + \square + \square + \square \\ \text{(diagrams)} \end{array} \right) dr_1 dr_2 dr_3. \quad (3.100)$$

Абэ использовал свою идею при рассмотрении электронной системы с размазанным ионным фоном. Он также вычислил член $S^{(2)}$, чтобы оценить вклад членов высшего порядка.

Непосредственное вычисление дает формулу

$$S^{(2)} = \frac{\kappa_D^4 e^2}{4\pi\Theta} \left[A + \frac{1}{12} \ln \left(\frac{\kappa_D e^2}{\Theta} \right) \right], \quad (3.101)$$

где константа A равна

$$A = \frac{1}{6} C + \frac{1}{12} \ln 3 - \frac{11}{72}. \quad (3.102)$$

Здесь через C обозначена постоянная Эйлера. Порядок величины членов третьего приближения есть

$$S^{(3)} = O((\kappa_D r_w)^5). \quad (3.103)$$

Если теперь вспомним, что вклад петлевых диаграмм был равен

$$S^{(c)} = \frac{\kappa_D^3}{12\pi}, \quad (3.104)$$

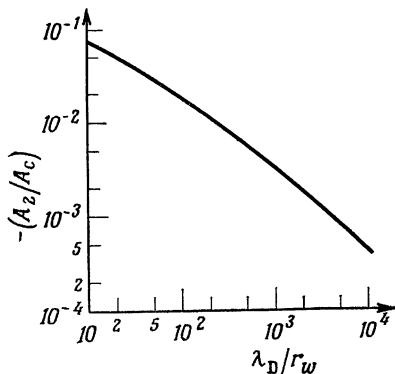
то увидим, что вклад от прототипов диаграмм второго порядка в $(\kappa_D r_w)^{-1}$ раз меньше, а от прототипов третьего порядка в $(\kappa_D r_w)^{-2}$ раз меньше по сравнению со значением $S^{(c)}$, соответствующим приближению Дебая — Хюккеля.

На фиг. 3 приведена величина отношения вкладов прототипов диаграмм и петлевых диаграмм в уравнение состояния:

$$\frac{A_2}{A_c} = \frac{S^{(2)} - n (\partial S^{(2)} / \partial n)}{S^{(c)} - n (\partial S^{(c)} / \partial n)} = \frac{0,92 - \ln(\lambda_D / r_w)}{\lambda_D / r_w}, \quad (3.105)$$

которая зависит только от отношения λ_D/r_w — дебаевского радиуса $\lambda_D = 1/\kappa_D$ к радиусу классического взаимодействия.

Вновь подчеркнем, что расходимость для области близких взаимодействий, рассмотренная Абэ и другими авторами [9], является чисто математическим эффектом



Ф и г. 3. Отношение вклада, обусловленного прототипами групп, к вкладу групп с петлевыми диаграммами в зависимости от отношения дебаевской длины к радиусу классического взаимодействия.

в разложении Майера. Ее следует отличать от расходимости принципиально физического происхождения, встречающейся при рассмотрении взаимодействия двух противоположно заряженных частиц на малых расстояниях. Последняя по происхождению связана с тем фактом, что для точечных зарядов нельзя пренебрегать квантовомеханическими эффектами. Используя свой метод разложения по большим группам, Абэ не мог встретиться с подобным явлением, поскольку он исследовал лишь однокомпонентную систему с равномерно размазанным фоном зарядов противоположного знака.

§ 4. МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КУЛОНОВСКОЙ СИСТЕМЫ

В настоящем параграфе мы рассмотрим функции распределения для кулоновской системы. Будем различать две группы этих функций. В качестве первой группы

рассмотрим распределение по таким фазовым переменным, как геометрические координаты, импульсы и внутренние состояния в фазовом пространстве. Например, мы изучим распределение по выбранному набору координат с заданными корреляциями. Вторая группа будет включать функции распределения характеристик, являющихся функциями заданного набора фазовых переменных. В качестве примера мы рассмотрим распределение микроскопических полей.

4.1. Распределение частиц в фазовом пространстве

Статистическое поведение рассматриваемой системы описывается функцией распределения для ансамбля в фазовом Γ -пространстве. Согласно модели свободно-связанных состояний, изложенной в § 1, это распределение по фазовому пространству можно представить в виде произведения двух величин. Одна из них соответствует вкладу связанных состояний, которые в общем случае должны рассматриваться на основе квантовой механики, а вторая — вкладу от свободных частиц, который может быть описан в рамках классического рассмотрения.

Поскольку проблемы, обусловленные вкладом квантовомеханических связанных состояний, здесь для нас не представляют какого-либо интереса, мы сконцентрируем внимание на классической части функции распределения.

Согласно формуле (1.13), распределение «свободных частиц» определяется функцией

$$f_N^{(0)} = \frac{1}{h^{3N} N! Z} e^{-H/\Theta}. \quad (4.1)$$

Функция Гамильтона H описывается выражением вида

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + \phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (4.2)$$

а потенциальная энергия взаимодействия ϕ — выражением

$$\phi = \frac{1}{2} \sum'_{i,j} \phi_{ij} = \frac{1}{2} \sum'_{i,j} \frac{e_i e_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (4.3)$$

Подставляя (4.2) в формулу (4.1), находим

$$f_N^{(0)} \propto \left\{ \prod_i \exp \left[-\frac{p_i^2}{2m_i\Theta} \right] \right\} e^{-\Phi/\Theta}. \quad (4.4)$$

В тепловом равновесии отсутствует корреляция между распределениями системы в конфигурационном пространстве и пространстве импульсов. Этот результат нетривиален и справедлив лишь тогда, когда потенциальная энергия не зависит от импульсов.

Благодаря отсутствию корреляций можно рассматривать распределения в координатном и импульсном пространствах независимо друг от друга.

Из соотношения (4.4) следует, что в распределении по пространству импульсов нельзя ожидать каких-либо новых эффектов. В пространстве импульсов мы будем иметь распределение Максвелла со статистическим параметром Θ , который связан со средним квадратом импульса посредством соотношения

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \frac{3}{2} \Theta. \quad (4.5)$$

Поскольку распределение Максвелла хорошо известно, обратимся к распределению в конфигурационном пространстве.

В соответствии с выражением (4.4) нормированная функция распределения в этом пространстве имеет вид

$$P_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{\exp \left[-(1/2\Theta) \sum'_{i,j} \phi_{ij} \right]}{\int \exp \left[-\frac{1}{2\Theta} \sum'_{i,j} \phi_{ij} \right] d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N}. \quad (4.6)$$

Непосредственная информация, содержащаяся в подобной функции распределения, не имеет большого практического значения, так как невозможно экспериментально достичь столь детальных сведений о системе.

Поэтому наше дальнейшее теоретическое рассмотрение будет главным образом касаться приведенных частных молекулярных функций распределения низшего порядка,

т. е. для $s = 1, 2, 3$:

$$P_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s) = \int P_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_{s+1} \dots d\mathbf{r}_N. \quad (4.7)$$

Сравнение выражений (3.9) и (4.6) показывает, что при вычислении молекулярных функций распределения можно использовать метод разложения по группам. Это было сделано рядом авторов (см., например, [10] и [11]). Однако мы не будем следовать такому способу, поскольку основные черты метода групповых разложений мы уже изучали в параграфе, посвященном вычислению статистических сумм. Поэтому мы предпочтем ознакомить читателя с рассмотрением задачи на основе цепочек уравнений для приведенных функций распределения.

4.2. Цепочки уравнений

Сначала целесообразно ввести ряд определений. Назовем *s-конфигурацией* какое-либо расположение s частиц в координатном пространстве. Число частиц сорта m обозначим через ν_m . Пусть *частная молекулярная функция распределения порядка s* в соответствии с (4.7) определяет плотность вероятности того, что s различных частиц имеют координаты $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s$.

Общая молекулярная функция распределения порядка s , представляющая особый практический интерес, определяет плотность вероятности того, что набор из s частиц характеризуется координатами $(\alpha r_1, \dots, \alpha r_{\nu_\alpha}, \dots, \sigma r_1, \dots, \sigma r_{\nu_\sigma})$. Через ν_m будем обозначать число частиц сорта m , содержащихся в рассматриваемой конфигурации. Следует заметить, что в случае частной молекулярной функции распределения P_s каждой из ν различных частиц мы должны сопоставить координатный вектор \mathbf{r}_ν . Что же касается общей молекулярной функции распределения $P^{(s)}$, то положение ν_m частиц сорта m в s -конфигурации описывается набором координатных векторов ${}^m \mathbf{r}_1, \dots, {}^m \mathbf{r}_{\nu_m}$, причем различием частиц в пределах группы ν_m пренебрегается. Очевидно, что в этом случае имеет место соотношение

$$\sum_{\mu=1}^{\sigma} \nu_\mu = s.$$

Если через $P^{(s)}$ обозначить общую молекулярную функцию распределения, через N_m — полное число частиц сорта m во всей рассматриваемой системе, а через ${}^m r_i$ — координаты i -й частицы сорта m в данной конфигурации, то общая и частная молекулярная функции распределения связаны следующим соотношением:

$$P^{(s)}(\alpha_{\mathbf{r}_1}, \dots, \alpha_{\mathbf{r}_{v_\alpha}}, \dots, \sigma_{\mathbf{r}_1}, \dots, \sigma_{\mathbf{r}_{v_\sigma}}) = \prod_m \frac{N_m!}{(N_m - v_m)!} P_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s). \quad (4.8)$$

Множитель перед величиной P_s представляет собой число возможных реализаций группы s из подгрупп с числом частиц v_m , состоящих из заданного набора N различных частиц, распределенных по подгруппам N_m ($m = 1, \dots, \sigma$).

Чтобы получить цепочку уравнений, вычислим градиент от частной молекулярной функции распределения P_s по i -й координате

$$\nabla_i P_s = -\frac{1}{\Theta h^{3N} N! Z} \int e^{-\Phi/\Theta} \sum'_{j=1}^N \nabla_i \phi_{ij} d\mathbf{r}_{s+1} \dots d\mathbf{r}_N. \quad (4.9)$$

Разобьем сумму, стоящую под интегралом, на две части, т. е.

$$\sum'_{j=1}^N = \sum'_{j=1}^s + \sum_{j=s+1}^N. \quad (4.10)$$

Первая из них — сумма по всем частицам в пределах рассматриваемой s -конфигурации, а другая — по всем остальным частицам. В результате получим

$$\begin{aligned} \nabla_i P_s = & -\frac{1}{\Theta} \sum'_{j=1}^s (\nabla_i \phi_{ij}) P_s - \\ & -\frac{1}{\Theta} \sum_{j=s+1}^N \int (\nabla_i \phi_{ij}) P_{s+1}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_j) d\mathbf{r}_j, \quad (4.11) \end{aligned}$$

или после деления правой и левой части на P_s

$$\Theta \nabla_i \ln P_s = - \sum_{j=1}^s (\nabla_i \phi_{ij}) - \sum_{j=s+1}^N \int (\nabla_i \phi_{ij}) \frac{P_{s+1}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_j)}{P_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s)} d\mathbf{r}_j. \quad (4.12)$$

Последнее соотношение и есть *цепочка уравнений*, определяющих последовательность *частных молекулярных функций распределения*.

Чтобы получить соответствующую цепочку уравнений для общих молекулярных функций распределения, подставим соотношение (4.8) в (4.12). Затем обратим внимание на то, что суммирование в (4.12) проводится как по одинаковым, так и по различающимся сортам частиц.

Однако в пределах отдельной группы частиц все члены дают одинаковые вклады в полную сумму. Следовательно, цепочку уравнений (4.12) можно записать в виде

$$\Theta \nabla_i \ln P_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s) = - \sum_{j=1}^s (\nabla_i \phi_{ij}) - \sum_k (N_k - \nu_k) \int (\nabla_i \phi_{ij}) \frac{P_{s+1}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s, {}^k \mathbf{r}_j)}{P_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s)} d {}^k \mathbf{r}_j. \quad (4.13)$$

Индекс k означает, что суммирование распространяется на все сорта частиц. С учетом соотношения

$$\frac{P_{s+1}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s, {}^k \mathbf{r}_j)}{P_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s)} = \frac{(N_k - \nu_k - 1)! P^{(s+1)}}{(N_k - \nu_k)! P^{(s)}} = \frac{1}{(N_k - \nu_k)} \frac{P^{(s+1)}}{P^{(s)}} \quad (4.14)$$

получаем *цепочку уравнений для общих молекулярных функций распределения*

$$\Theta \nabla_i \ln P^{(s)} = - \sum_{j=1}^s (\nabla_i \phi_{ij}) - \sum_k \int (\nabla_i \phi_{ij}) \frac{P^{(s+1)}(\alpha_{\mathbf{r}_1}, \dots, \sigma_{\mathbf{r}_{\nu\sigma}}, {}^k \mathbf{r}_j)}{P^{(s)}(\alpha_{\mathbf{r}_1}, \dots, \sigma_{\mathbf{r}_{\nu\sigma}})} d {}^k \mathbf{r}_j. \quad (4.15)$$

Прежде чем искать приближенное решение полученной выше цепочки уравнений для функций распределения, дадим физическую интерпретацию различных членов, входящих в эту цепочку. Это особенно необходимо, поскольку мы встретимся с такими важными для последующего рассмотрения понятиями, как *средняя сила*, *потенциал средних сил* и *средняя потенциальная энергия*.

4.3. Физическая интерпретация цепочек уравнений

Рассмотрим сначала среднюю силу, которую испытывает i -я частица s -конфигурации. Сила, действующая на i -ю частицу в N -конфигурации, есть

$$\mathbf{F}_i = - \sum_{j=1}^N{}' (\nabla_i \phi_{ij}). \quad (4.16)$$

Таким образом, для средней силы, действующей на частицу s -конфигурации, получаем выражение

$$\langle \mathbf{F}_i \rangle_s = - \frac{\int e^{-\phi/\Theta} \sum_{j=1}^N{}' (\nabla_i \phi_{ij}) dr_{s+1} \dots dr_N}{\int e^{-\phi/\Theta} dr_{s+1} \dots dr_N}. \quad (4.17)$$

С учетом (4.7) это означает, что

$$\langle \mathbf{F}_i \rangle_s = \Theta \nabla_i \ln P_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s). \quad (4.18)$$

Если затем мы определим потенциал $\langle W_i \rangle_s$ средних сил, действующих на i -ю частицу s -конфигурации с помощью соотношения

$$\langle \mathbf{F}_i \rangle_s = - \nabla_i \langle W_i \rangle_s, \quad (4.19)$$

то найдем общее выражение для функции P_s :

$$P_s = \frac{\exp \left\{ - \frac{\langle W_i \rangle_s}{\Theta} \right\}}{\int \exp \left\{ - \frac{\langle W_i \rangle_s}{\Theta} \right\} dr_1 \dots dr_s}. \quad (4.20)$$

Заметим, что выражение (4.20) имеет самый общий характер и при его выводе не использовалось никаких

допущений. [Отметим также, что плотность вероятности найти i -ю частицу в точке r_i данной s -конфигурации соответствует *распределению Больцмана*, с той лишь разницей, что *потенциальную энергию кулоновского взаимодействия* следует заменить на *потенциал средних сил*.

Следует четко отличать *потенциал средних сил*, определяемый соотношением (4.19), от *средней потенциальной энергии i -й частицы данной s -конфигурации*. Потенциальная энергия i -й частицы N -конфигурации есть

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N{}' \phi_{ij}. \quad (4.21)$$

С учетом этого обстоятельства выражение

$$\langle \phi_i \rangle_s = \frac{\int e^{-\phi/\Theta} \sum_{j=1}^N{}' \phi_{ij} dr_{s+1} \dots dr_N}{\int e^{-\phi/\Theta} dr_{s+1} \dots dr_N} \quad (4.22)$$

является определением такого важного понятия, как *средняя потенциальная энергия i -й частицы в s -конфигурации*. Здесь, как и в (4.10), мы вновь представим сумму, входящую в (4.22), в виде двух вкладов и найдем

$$\langle \phi_i \rangle_s = \sum_{j=1}^s{}' \phi_{ij} + \sum_{j=s+1}^N \int \phi_{ij} \frac{P_{s+1}(r_1, \dots, r_s, r_j)}{P_s(r_1, \dots, r_s)} dr_j \quad (4.23)$$

или, используя выражение (4.20),

$$\begin{aligned} \langle \phi_i \rangle_s &= \sum_{j=1}^s{}' \phi_{ij} + \\ &+ \sum_{j=s+1}^N \frac{\int \phi_{ij} e^{-(1/\Theta)[\langle W_i \rangle_{s+1} - \langle W_i \rangle_s]} dr_j \int e^{-(1/\Theta)\langle W_i \rangle_s} dr_1 \dots dr_s}{\int e^{-(1/\Theta)\langle W_i \rangle_{s+1}} dr_1 \dots dr_{s+1}}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Полученный результат отражает сложный характер зависимости между средней потенциальной энергией i -й частицы и потенциалом средних сил, действующих на нее.

Обратим внимание на то обстоятельство, что в выражение (4.24) входят также члены, отвечающие $(s + 1)$ -конфигурации.

Теперь можно выяснить физический смысл цепочки уравнений для функций распределения. Из выражения (4.18) следует, что левая часть цепочки уравнений (4.12) представляет собой среднюю силу, действующую на i -ю частицу s -конфигурации. Первый член справа в (4.12) описывает силы, действующие со стороны остальных частиц s -конфигурации. Чтобы выяснить смысл второго члена, входящего в правую часть, рассмотрим величину P_{s+1}/P_s . Элементарные сведения из теории вероятности подсказывают, что эта величина является условной вероятностью $P(s + 1/s)$ найти $(s + 1)$ -ю частицу в элементе объема dr_{s+1} при условии, что все частицы с номерами $1, \dots, s$ находятся в элементах объема dr_1, \dots, dr_s . Таким образом,

$$P(s + 1/s) = \frac{P_{s+1}}{P_s}. \quad (4.25)$$

Согласно этому выражению, второй член в правой части (4.12) определяет среднюю силу, действующую со стороны частиц с номерами $s + 1, \dots, N$ на i -ю частицу s -конфигурации.

Итак, полученная цепочка уравнений, как мы видим, отображает тот тривиальный факт, что сила, испытываемая i -й частицей s -конфигурации, состоит из вклада от $(s - 1)$ остальных частиц s -конфигурации и средней силы, действующей со стороны всех других частиц рассматриваемой системы.

Поскольку цепочка уравнений для общей функции распределения выводится из уравнений для частной функции распределения с помощью простой подстановки, ясно, что физический смысл членов в цепочке уравнений для общих функций распределения будет таким же.

В качестве дополнения, которое нам потребуется в дальнейшем, рассмотрим, кроме того, физический смысл понятия общей молекулярной функции распределения. Известно, что вклад v_m частиц сорта m данной s -конфигурации в среднюю плотность всей системы определяется

выражением

$$\begin{aligned} \langle n \rangle_{\nu_m} &= \int P_s \sum_{j=1}^{\nu_m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_s = \\ &= \sum_{j=1}^{\nu_m} \int {}^m P_1(\mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) d\mathbf{r}_j = \nu_m {}^m P_1(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (4.26)$$

где ${}^m P_1$ относится к рассматриваемому сорту частиц m . Разумеется, этот результат не зависит от порядка s данной конфигурации.

Отсюда видно, что частная функция распределения первого порядка для частиц сорта m представляет собой средний вклад отдельной частицы сорта m в общую плотность.

Если обратиться теперь к соотношению (4.8), то из него следует, что общая функция распределения первого порядка ${}^m P^{(1)}(\mathbf{r})$ описывает вклад в среднюю плотность от всех частиц сорта m , содержащихся в системе.

Попытаемся теперь вычислить вклад в среднюю плотность от $(N - s)$ частиц, не входящих в данную s -конфигурацию. Обращаясь к формуле для условной вероятности

$$P(N/s) = \frac{P_N}{P_s}, \quad (4.27)$$

получаем вклад в среднюю плотность в виде

$$\begin{aligned} \langle n \rangle_{N-s} &= \int \frac{P_N}{P_s} \sum_{j=s+1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) d\mathbf{r}_{s+1} \dots d\mathbf{r}_N = \\ &= \sum_{s+1}^N \frac{P_{s+1}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s, \mathbf{r})}{P_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s)}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

С учетом соотношения (4.14) мы имеем

$$\begin{aligned} \langle n \rangle_{N-s} &= \sum_k (N_k - \nu_k) \frac{P_{s+1}}{P_s} = \\ &= \sum_k \frac{{}^k P^{(s+1)}(\alpha_{\mathbf{r}_1}, \dots, \sigma_{\mathbf{r}_{\nu_0}}, \mathbf{r})}{P^{(s)}(\alpha_{\mathbf{r}_1}, \dots, \sigma_{\mathbf{r}_{\nu_0}})}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

где k по-прежнему обозначает сорт частиц, находящихся в данной точке наблюдения r . Это соотношение показывает что для выделенной s -конфигурации вклад в плотность от всех остальных частиц сорта k определяется отношением ${}^k P^{(s+1)}/P^{(s)}$.

4.4. Приближенное решение цепочки уравнений для молекулярных функций распределения

Цепочка уравнений для молекулярных функций распределения приводит нас к бесконечной системе связанных интегро-дифференциальных уравнений. Получить решение этой системы в общем случае не представляется возможным. Чтобы сделать задачу разрешимой, цепочку уравнений обычно обрывают на некоторой ступени при $s = s'$, выражая $P^{(s'+1)}$ в виде более или менее обоснованной функции или функционала от $P^{(s)}$ для всех $s = 1, \dots, s'$.

Рассмотрим два наиболее важных случая.

1. *Одночастичное приближение.* В этом случае мы исследуем только первое уравнение цепочки, заменяя парные распределения произведением одночастичных функций распределения.

2. *Приближение парных корреляций.* В этом приближении мы исследуем первые два уравнения цепочки. При этом пренебрежем всеми корреляциями выше второго порядка и, кроме того, предположим, что корреляции второго порядка малы.

4.5. Одночастичное приближение

Начнем рассмотрение с первого уравнения цепочки (4.15)

$$\Theta \nabla_i \ln {}^m P^{(1)}({}^m \mathbf{r}_i) = - \sum_k \int (\nabla_i \phi_{ij}) \frac{{}^{mk} P^{(2)}({}^m \mathbf{r}_i, {}^k \mathbf{r}_j)}{{}^m P^{(1)}({}^m \mathbf{r}_i)} d {}^k \mathbf{r}_j. \quad (4.30)$$

Введем определение функции парных корреляций g_{ij} для частной молекулярной функции распределения ¹⁾:

$${}^{mk} P_2({}^m \mathbf{r}_i, {}^k \mathbf{r}_j) = {}^m P_1({}^m \mathbf{r}_i) {}^k P_1({}^k \mathbf{r}_j) [1 + g_{mk}({}^m \mathbf{r}_i, {}^k \mathbf{r}_j)]. \quad (4.31)$$

¹⁾ Следует заметить, что это не единственный способ определения функции парных корреляций (см., например, стр. 132).

С учетом (4.8) при $m \neq k$ отсюда следует, что для общей молекулярной функции распределения выполняется соотношение

$${}^{mk}P^{(2)}({}^m\mathbf{r}_i, {}^k\mathbf{r}_j) = {}^mP^{(1)}({}^m\mathbf{r}_i) {}^kP^{(1)}({}^k\mathbf{r}_j) (1 + g_{mk}). \quad (4.32)$$

В случае $m = k$ мы имеем

$${}^{kk}P^{(2)}({}^k\mathbf{r}_i, {}^k\mathbf{r}_j) = {}^kP^{(1)}({}^k\mathbf{r}_i) {}^kP^{(1)}({}^k\mathbf{r}_j) (1 + g_{kk}) \frac{N_k - 1}{N_k}. \quad (4.33)$$

В пределе, когда $N_k \rightarrow \infty$, (4.33) сводится к соотношению (4.32).

Основное условие, соответствующее одночастичному приближению, имеет вид

$$g_{mk} \equiv 0. \quad (4.34)$$

Комбинируя выражения (4.30), (4.32) и (4.34), получаем

$$\nabla_i \ln {}^mP^{(1)}({}^m\mathbf{r}_i) = -\frac{1}{\Theta} \sum_k \nabla_i \int {}^kP^{(1)}({}^k\mathbf{r}_j) \phi_{ij} d{}^k\mathbf{r}_j. \quad (4.35)$$

Отсюда видим, что основной эффект условия (4.34) состоит в сведении бесконечной цепочки уравнений к замкнутой системе с числом уравнений, равным числу имеющихся сортов частиц.

Используя выражение (4.23) совместно с (4.8), (4.32) и (4.34), находим

$${}^m\langle \phi_i \rangle^{(1)} \equiv \langle \phi_i \rangle_1 = \sum_k \int \phi_{ij} {}^kP^{(1)}({}^k\mathbf{r}_j) d{}^k\mathbf{r}_j. \quad (4.36)$$

Подставляя эту формулу в (4.35) и сравнивая полученный результат с (4.18) и (4.19), имеем

$${}^m\langle \phi_i \rangle^{(1)} = {}^m\langle W_i \rangle_1 = {}^m\langle W_i \rangle^{(1)}. \quad (4.37)$$

В рамках одночастичного приближения величина средней потенциальной энергии совпадает с потенциалом средних сил. Этот результат важен, поскольку он служит фундаментом для обоснования уравнения Больцмана — Пуассона, которое мы получим ниже. Интегрирование уравнения (4.35) с использованием соотношения (4.36)

и условий нормировки дает

$$m P^{(1)}(\mathbf{r}_i) = \frac{\exp\left(-\frac{m(\phi_i)^{(1)}}{\Theta}\right) N_m}{\int \exp\left(-\frac{m(\phi_i)^{(1)}}{\Theta}\right) d\mathbf{r}_i}. \quad (4.38)$$

Далее, вместо потенциальной энергии введем потенциал, который связан с ней соотношением

$$\Phi_j^{(1)} = \frac{k(\phi_j)^{(1)}}{e_k}. \quad (4.39)$$

Произведя такую замену в (4.36) и одновременно применяя оператор Лапласа, получим «уравнение Пуассона»

$$\Delta_i \Phi_i^{(1)} = -4\pi \sum_k e_k k P^{(1)}. \quad (4.40)$$

Теперь подставим полученный ранее результат (4.38) в уравнение (4.40) и найдем дифференциальное уравнение для среднего потенциала $\Phi_i^{(1)}$:

$$\Delta_i \Phi_i^{(1)} = -4\pi \sum_k \frac{e_k N_k \exp\left(-\frac{e_k \Phi_i^{(1)}}{\Theta}\right)}{\int \exp\left(-\frac{e_k \Phi_j^{(1)}}{\Theta}\right) d^3 r_j}. \quad (4.41)$$

Это и есть основное уравнение Больцмана — Пуассона, справедливость которого в рамках одночастичного приближения была нами доказана выше.

4.6. Уравнение Больцмана — Пуассона

Поскольку уравнение Больцмана — Пуассона линейно по высшим производным, его можно отнести к типу квазилинейных. Его характерные математические свойства идентичны свойствам уравнения Пуассона. В общем случае уравнение Больцмана — Пуассона приходится решать численно. Однако мы покажем, что пренебрежение парными корреляциями g_{ij} , необходимое для выполнения одночастичного приближения, эквивалентно требованию

$$\left| \frac{e_k \Phi_j^{(1)}}{\Theta} \right| \ll 1. \quad (4.42)$$

Поэтому линеаризация уравнения Больцмана — Пуассона вследствие условия (4.42) в рамках одночастичного приближения является вполне последовательной процедурой.

Но прежде мы хотели бы обратить внимание на то, что до сих пор мы рассматривали произвольную многокомпонентную систему. В дальнейшем без потери общности мы перейдем к рассмотрению двухкомпонентной системы, состоящей из точечных положительных (e_+) и отрицательных (e_-) заряженных частиц¹⁾. Тогда уравнение (4.41) примет вид

$$\Delta\Phi^{(1)} = -4\pi \left[\frac{e_+ N_+ \exp\left(-\frac{e_+ \Phi^{(1)}}{\Theta}\right)}{\int \exp\left(-\frac{e_+ \Phi^{(1)}}{\Theta}\right) dr} + \frac{e_- N_- \exp\left(-\frac{e_- \Phi^{(1)}}{\Theta}\right)}{\int \exp\left(-\frac{e_- \Phi^{(1)}}{\Theta}\right) dr} \right]. \quad (4.43)$$

Здесь уже без каких-либо осложнений можно опустить индекс i .

При нахождении решения воспользуемся тем обстоятельством, что вид уравнения Больцмана — Пуассона не зависит от выбора нулевой точки потенциала. Следовательно, точку отсчета потенциала можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{e_+ N_+}{\int \exp\left(-\frac{e_+ \Phi^{(1)}}{\Theta}\right) dr} = \frac{-e_- N_-}{\int \exp\left(-\frac{e_- \Phi^{(1)}}{\Theta}\right) dr} = \rho. \quad (4.44)$$

Тогда уравнение (4.43) запишется в форме

$$\Delta\Phi^{(1)} = -4\pi\rho \left[\exp\left(-\frac{e_+ \Phi^{(1)}}{\Theta}\right) - \exp\left(-\frac{e_- \Phi^{(1)}}{\Theta}\right) \right]. \quad (4.45)$$

Из уравнения (4.45) следует, что при условии (4.44) нулевая точка потенциала совпадает с точкой, где плазма нейтральна. Это не означает, что такая точка должна существовать внутри плазмы. Для математического описания тот факт, что нейтральная точка может оказаться вне плазмы, не имеет никакого значения.

¹⁾ Отметим, что e_- — отрицательная величина.

Линеаризация уравнения (4.45) дает

$$\Delta\Phi^{(1)} = + \frac{1}{D_\rho^2} \Phi^{(1)}, \quad (4.46)$$

где использовано сокращенное обозначение

$$D_\rho^2 = \frac{\Theta}{4\pi\rho(e_+ - e_-)}. \quad (4.47)$$

Дифференциальное уравнение (4.46) имеет большое число решений. Нужное решение должно удовлетворять соответствующим граничным условиям. Эти граничные условия определяются физическими требованиями и геометрией рассматриваемой задачи. Здесь мы рассмотрим только случай сферически-симметричной геометрии. Тогда решение дифференциального уравнения (4.46) можно написать как

$$\Phi^{(1)} = \frac{1}{r} \left[c_1 \exp\left(-\frac{r}{D_\rho}\right) + c_2 \exp\left(+\frac{r}{D_\rho}\right) \right]. \quad (4.48)$$

Это решение содержит две произвольные константы. Одна из них может быть определена из требования регулярности функции $\Phi^{(1)}$ при $r = 0$. Вторая определяется граничным условием при $r = R$.

В равновесном состоянии частицы не могут ни поглощаться, ни испускаться рассматриваемой сферической поверхностью. Так как рассматриваемое нами решение содержит лишь один параметр, то он должен выражаться через единственную физическую величину. Это может быть значение потенциала на поверхности или результирующий заряд всей системы, который в конечном счете определяет значение потенциала на поверхности рассматриваемого объема.

Учитывая эти два условия, т. е. заданное значение потенциала $\Phi_R^{(1)}$ на выделенной поверхности и регулярность функции $\Phi^{(1)}$ при $r = 0$, запишем решение в виде

$$\Phi_{\text{внутр}}^{(1)} = \Phi_R^{(1)} \frac{R}{r} \frac{\text{sh}(r/D_\rho)}{\text{sh}(R/D_\rho)}. \quad (4.49)$$

Здесь величина D_ρ определена формулами (4.44) и (4.47). Решение $\Phi_{\text{внутр}}^{(1)}$ относится к области $0 < r < R$, а $\Phi_{\text{внеш.}}^{(1)}$

которое мы обсудим ниже, — к области $R < r < \infty$. Будем далее иметь в виду это различие.

Уравнение Больцмана — Пуассона является дифференциальным уравнением второго порядка. Следовательно, при заданном распределении плотности заряда распределение потенциала полностью определяется условием регулярности в выделенном центре и выбором точки нулевого потенциала. В нашем случае распределение плотности частиц двух сортов описывается формулой (4.49), если заданы полные числа частиц N_+ и N_- каждого сорта. Положение нулевой точки потенциала уже выбрано согласно выражению (4.44). Следовательно, если бы числа N_+ и N_- можно было считать заданными, то выбор решения для потенциала $\Phi^{(1)}$ исключал какую бы то ни было возможность произвола.

Сомнение относительно возможности независимого определения N_+ и N_- оказывается правильным. Из первого соотношения (4.44) видно, что числа N_+ или N_- можно найти только в том случае, если задано распределение $\Phi_R^{(1)}$. Иными словами, любая из рассматриваемых величин N_+ или N_- , а также значение потенциала $\Phi_R^{(1)}$ определяются полным пространственным зарядом системы.

Обозначим полный заряд через

$$Q = e_+ N_+ + e_- N_- \quad (4.50)$$

С помощью простых вычислений, используя соотношения (4.42) и (4.44), получаем

$$\begin{aligned} Q &= e_+ N_+ \left\{ 1 - \frac{\int \exp(-e_- \Phi^{(1)}/\Theta) dr}{\int \exp(-e_+ \Phi^{(1)}/\Theta) dr} \right\} = \\ &= e_+ N_+ \left\{ 1 - \frac{V - (e_-/\Theta) \int \Phi^{(1)} dr}{V - (e_+/\Theta) \int \Phi^{(1)} dr} \right\} = \\ &= -\frac{\rho(e_+ - e_-)}{\Theta} \int \Phi^{(1)} dr = -\Phi_R^{(1)} R \int_0^R \frac{\text{sh}(r/D_\rho)}{\text{sh}(R/D_\rho)} \frac{r}{D_\rho^2} dr. \quad (4.51) \end{aligned}$$

Зная величину Q , можно также определить потенциал в области $r > R$.

Используя решение уравнения Пуассона без правой части и сшивая решение для потенциала на выделенной поверхности, находим

$$\Phi_{\text{внеш}}^{(1)} = Q \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right] + \Phi_R^{(1)}. \quad (4.52)$$

Выражения (4.49) и (4.52) представляют собой распределение потенциала в пределах всего конфигурационного пространства для заданных значений N_+ или N_- и потенциала $\Phi_R^{(1)}$ на поверхности R .

Выражение (4.47) для параметра D_ρ можно упростить. Из соотношения для ρ (4.44) и условия (4.42) вытекает

$$\rho = \frac{N_+ e_+}{V - \frac{e_+}{\Theta} \int \Phi^{(1)} dr} = \frac{-N_- e_-}{V - \frac{e_-}{\Theta} \int \Phi^{(1)} dr} \quad (4.53)$$

и, следовательно,

$$\rho = \frac{e_+ e_- (N_+ + N_-)}{(e_- - e_+) V}. \quad (4.54)$$

С помощью (4.47) получим окончательный результат:

$$\frac{1}{D_\rho^2} = - \frac{4\pi e_+ e_- (N_+ + N_-)}{\Theta V}. \quad (4.55)$$

Варьируя параметры N_+ (или N_-) и $\Phi_R^{(1)}$, можно, разумеется, получить все возможные распределения потенциала. К сожалению, классификация решений по этим параметрам не очень удобна для интерпретации и, кроме того, практически все кривые, соответствующие найденным решениям, имеют отличающиеся друг от друга нулевые точки потенциала. Заметим, однако, что рассматривавшаяся в предыдущем параграфе методика расчета была выбрана исходя лишь из ее математического удобства. Поэтому с целью более подходящего графического представления полученных результатов перенормируем распределения потенциала таким образом, чтобы все они имели нулевую точку на бесконечности, а также пронормируем значение потенциала при $r = R$ на единицу. Тогда получим

$$\frac{\Phi_{\text{внеш}}^{(1)} - \Phi_\infty^{(1)}}{|\Phi_R^{(1)} - \Phi_\infty^{(1)}|} = \frac{R}{r} \frac{\Phi_R^{(1)} \left[1 - \frac{R}{D_\rho} \text{cth} (R/D_\rho) \right]}{\left| \Phi_R^{(1)} \left[1 - \frac{R}{D_\rho} \text{cth} (R/D_\rho) \right] \right|} = - \frac{R}{r} \quad (4.56)$$

и

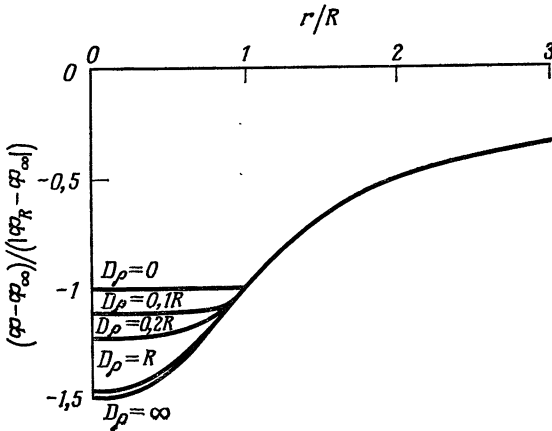
$$\frac{\Phi_{\text{внутр}}^{(1)} - \Phi_{\infty}^{(1)}}{|\Phi_R^{(1)} - \Phi_{\infty}^{(1)}|} = \frac{\Phi_R^{(1)} \left\{ \frac{R}{r} \frac{\text{sh} \left[\frac{r}{R} \cdot \frac{R}{D_{\rho}} \right]}{\text{sh} \frac{R}{D_{\rho}}} - \frac{R}{D_{\rho}} \text{cth} \left(\frac{R}{D_{\rho}} \right) \right\}}{|\Phi_R^{(1)} \left[1 - \frac{R}{D_{\rho}} \text{cth} \left(\frac{R}{D_{\rho}} \right) \right]|} \quad (4.57)$$

при условии

$$\Phi_R^{(1)} - \Phi_{\infty}^{(1)} = \Phi_R^{(1)} \left[1 - \frac{R}{D_{\rho}} \text{cth} \left(\frac{R}{D_{\rho}} \right) \right] = \frac{Q}{R}. \quad (4.58)$$

Эти результаты приведены на фиг. 4.

Из графиков видны две характерные особенности решений. Во-первых, оказывается, что глубина потенциальной



Ф и г. 4. Распределение потенциала для плазменной сферы, отнесенного к потенциалу на поверхности сферы, при различных значениях параметра D_{ρ} .

ямы зависит только от разности $N_+ - N_-$. Во-вторых, и это более удивительно, оказывается, что распределение потенциала внутри рассматриваемой кулоновской системы зависит только от средней плотности числа частиц

$(N_+ + N_-)/V$, хотя, исходя из упрощенных представлений, здесь можно было бы ожидать проявления результирующего пространственного заряда.

Любопытно проанализировать полученные результаты на примере, представляющем более общий интерес.

Наиболее широко распространенное *определение плазмы* сводится к следующему: плазма есть такая система заряженных частиц, в которой действие поля обнаруживается практически лишь в небольшой области среды вблизи ее границ — пограничном слое.

Рассмотрим, какие соотношения можно получить для подобной системы исходя из полученных нами результатов. Из выражения (4.49) ясно, что данное выше определение плазмы сводится к требованию

$$D_p \ll R. \quad (4.59)$$

В этом случае (4.51) приближенно выражается в виде

$$\frac{Q}{e_+ N_+} \approx - \frac{3(e_+ - e_-)}{\Theta} \Phi_R^{(1)} \frac{D_p}{R}. \quad (4.60)$$

Обращаясь теперь к условиям (4.59) и (4.42), мы видим, что правая часть выражения (4.60) представляет собой член второго порядка малости. В рамках используемой линейной теории он пренебрежимо мал. Следовательно, упомянутое определение плазмы по необходимости требует ее квазинейтральности, т. е.

$$N_+ e_+ \approx -N_- e_-. \quad (4.61)$$

Подставляя это условие в соотношение (4.55), получаем, что

$$\frac{1}{D_p^2} = \frac{4\pi}{\Theta} \left(\frac{N_+ e_+^2}{V} + \frac{N_- e_-^2}{V} \right) = \frac{1}{D^2} = \kappa_D^2, \quad (4.62)$$

и обнаруживаем тем самым, что параметр D , характеризующий экранирующий слой в плазме, совпадает с дебаевским радиусом λ_D .

Выскажем, наконец, ряд предостерегающих замечаний. При анализе данных результатов мы всегда должны помнить, что они получены в рамках линейного приближения. При этом также следует иметь в виду допущения,

справедливые для равновесной системы, которые исключали возможность потерь частиц на любых поверхностях, так же как и испускание их с этих поверхностей. Если хотя бы одно из этих предположений не выполняется, то толщина экранирующего слоя в плазме может отличаться от дебаевской длины, определяемой соотношением (4.62).

4.7. Приближение парных корреляций

В соответствии с данным выше определением *приближения парных корреляций* мы пренебрежем всеми корреляциями выше второго порядка, полагая корреляции второго порядка малыми:

$$g_{ij} \ll 1. \quad (4.63)$$

В рамках рассматриваемого приближения парных корреляций докажем следующие три положения:

1) существует простое соотношение между функцией распределения $P^{(s)}$ и средней потенциальной энергией $\langle \phi_i \rangle^{(s)}$ для частиц s -конфигурации, аналогичное соотношению (4.36);

2) существует обобщенное уравнение Больцмана — Пуассона для средней потенциальной энергии частиц s -конфигурации, аналогичное уравнению (4.41);

3) средняя потенциальная энергия частиц s -конфигурации может быть представлена в виде суммы эффективных потенциальных энергий парного взаимодействия для данной конфигурации. Эта эффективная потенциальная энергия зависит как от сорта двух выбранных взаимодействующих частиц, так и от системы остальных частиц, не входящих в данную s -конфигурацию. Наиболее простым частным случаем проявления этого закона является хорошо известный случай взаимодействия по закону Дебая — Хюккеля в рамках двухчастичной конфигурации.

Доказательство первого положения. Рассмотрим цепочку уравнений (4.15)

$$\begin{aligned} \Theta \nabla_i \ln P^{(s)} &= \\ &= - \sum_{j=1}^s \nabla_i \phi_{ij} - \sum_k \int (\nabla_i \phi_{ik}) \frac{P^{(s+1)}(\alpha_{\mathbf{r}_1}, \dots, \alpha_{\mathbf{r}_s}, \alpha_{\mathbf{r}_k})}{P^{(s)}(\alpha_{\mathbf{r}_1}, \dots, \alpha_{\mathbf{r}_s})} d^k \mathbf{r}_j. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Подставляя (4.14) в (4.23), мы найдем выражение для средней потенциальной энергии i -й частицы s -конфигурации

$$\begin{aligned} \langle \phi_i \rangle^{(s)} &= \langle \phi_i \rangle_s = \\ &= \sum_{j=1}^s \phi_{ij} + \sum_k \int \phi_{ij} \frac{P^{(s+1)}(\alpha_{\mathbf{r}_1}, \dots, \alpha_{\mathbf{r}_{V\sigma}}, \mathbf{r}_j)}{P^{(s)}(\alpha_{\mathbf{r}_1}, \dots, \alpha_{\mathbf{r}_{V\sigma}})} d^k \mathbf{r}_j. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Далее, применив оператор ∇_i к обеим частям выражения (4.65) и подставив полученный результат в (4.64), получим

$$\begin{aligned} \Theta \nabla_i \ln P^{(s)} &= -\nabla_i \langle \phi_i \rangle^{(s)} + \\ &+ \sum_k \int \left[\nabla_i \frac{P^{(s+1)}(\alpha_{\mathbf{r}_1}, \dots, \alpha_{\mathbf{r}_{V\sigma}}, \mathbf{r}_j)}{P^{(s)}(\alpha_{\mathbf{r}_1}, \dots, \alpha_{\mathbf{r}_{V\sigma}})} \right] \phi_{ij} d^k \mathbf{r}_j. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Для вычисления второго члена в правой части уравнения надо найти явное выражение для отношения $P^{(s+1)}/P^{(s)}$, справедливое в рамках приближения парных корреляций.

Рассмотрим выражение для частной молекулярной функции распределения порядка s в виде ¹⁾

$$P_s = \prod_i P_1(\mathbf{r}_i) \prod_{k(2)} (1 + {}^s g_{ij}) \prod_{k(3)} (1 + {}^s g_{ijk}) \prod_{k(4)} \dots \quad (4.67)$$

В этом выражении величины ${}^s g_{j \dots k}$ суть корреляционные функции системы s -частиц, характеризуемой функцией распределения P_s . При вычислениях, приведенных ниже в настоящей главе, мы используем предположение о том, что корреляционные функции ${}^s g_{i \dots k}$ для любых значений s одинаковы. Последнее является хорошим приближением до тех пор, пока $s \ll N$.

Порядок корреляционной функции характеризуется числом индексов, совпадающих с индексами коррелирующих частиц. Символ $k(q)$ указывает, что произведение следует брать по всем комбинациям индексов частиц порядка q .

В приближении парных корреляций мы пренебрегаем всеми корреляциями выше второго порядка. Тогда выраже-

¹⁾ См. примечание на стр. 73.

ние (4.67) можно переписать в виде

$$P_s = \prod_i P_1(\mathbf{r}_i) \prod_{k(2)} (1 + g_{ij}) = \frac{\prod_i P_2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)}{\prod_i [P_1(\mathbf{r}_i)]^{s-2}}. \quad (4.68)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{P_{s+1}(\dots, \mathbf{r}_j)}{P_s(\dots)} = \frac{\prod_i P_2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)}{[P_1(\mathbf{r}_j)]^{(s-1)} \prod_i P_1(\mathbf{r}_i)}, \quad (4.69)$$

или

$$\frac{P_{s+1}(\dots, \mathbf{r}_j)}{P_s(\dots)} = P_1(\mathbf{r}_j) \prod_i [1 + g_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)]. \quad (4.70)$$

Согласно соотношению (4.14), мы имеем

$$\frac{P^{(s+1)}(\dots, {}^k\mathbf{r}_j)}{P^{(s)}(\dots)} = (N_k - \nu_k) \frac{P_{s+1}(\dots, \mathbf{r}_j)}{P_s(\dots)},$$

$$P^{(2)}({}^k\mathbf{r}_j, {}^q\mathbf{r}_i) = P_2(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i) N_k N_q \text{ при } k \neq q, \quad (4.71)$$

$$P^{(2)}({}^k\mathbf{r}_j, {}^q\mathbf{r}_i) = P_2(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i) N_k (N_k - 1) \text{ при } k = q.$$

Поэтому, учитывая выражение (4.67), получаем, что при $k \neq q$

$$P^{(2)}({}^k\mathbf{r}_j, {}^q\mathbf{r}_i) = P^{(1)}({}^k\mathbf{r}_j) P^{(1)}({}^q\mathbf{r}_i) [1 + g_{kq}({}^k\mathbf{r}_j, {}^q\mathbf{r}_i)], \quad (4.72)$$

а используя это соотношение, согласно (4.70), находим

$$\frac{P^{(s+1)}(\dots, {}^k\mathbf{r}_j)}{P^{(s)}(\dots)} = \frac{N_k - \nu_k}{N_k} P^{(1)}({}^k\mathbf{r}_j) \prod_i [1 + g_{kq}({}^k\mathbf{r}_j, {}^q\mathbf{r}_i)]. \quad (4.73)$$

Второй член в правой части уравнения (4.66) теперь можно записать в виде

$$\sum_k \int \left(\nabla_i \frac{P^{(s+1)}(\dots, {}^k\mathbf{r}_j)}{P^{(s)}} \right) \phi_{ij} d {}^k\mathbf{r}_j =$$

$$= \sum_k \frac{N_k - \nu_k}{N_k} \int P^{(1)}({}^k\mathbf{r}_j) (\nabla_i g_{kq}) \phi_{ij} d {}^k\mathbf{r}_j. \quad (4.74)$$

При выводе этого уравнения в соответствии с определением приближения парных корреляций мы пренебрегли всеми произведениями g -функций. Следует заметить, что

оператор ∇_i действует лишь на координаты i -й частицы s -конфигурации \mathbf{i} , следовательно, не влияет на функции распределения первого порядка, входящие в соотношение (4.73), которые относятся к группе остальных частиц.

В предположении однородности и изотропности системы корреляционная функция g_{kq} зависит только от абсолютной величины вектора $\mathbf{r} = {}^h \mathbf{r}_j - {}^q \mathbf{r}_i$ — расстояния между i -й и j -й частицами. Это означает, что

$$\nabla_i g_{kq} = -\nabla_j g_{kq}. \quad (4.75)$$

Используя полученное равенство, находим

$$\begin{aligned} \sum_k \int \left(\nabla_i \frac{P^{(s+1)}(\dots, {}^h \mathbf{r}_j)}{P^{(s)}(\dots)} \right) \phi_{ij} d {}^h \mathbf{r}_j = & - \sum_k \frac{N_k - \nu_k}{N_k} \times \\ & \times \int P^{(1)}({}^h \mathbf{r}_j) \phi_{ij} \nabla_j [g_{kq}({}^q \mathbf{r}_i, {}^h \mathbf{r}_j)] d {}^h \mathbf{r}_j. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Потенциальная энергия взаимодействия ϕ_{ij} , согласно ее определению, также зависит только от абсолютной величины вектора \mathbf{r} . Таким образом, сместив систему координат в точку ${}^q \mathbf{r}_i$, соотношение (4.76) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sum_k \int \left(\nabla_i \frac{P^{(s+1)}}{P^{(s)}} \right) \phi_{ij} d {}^h \mathbf{r}_j = & - \sum_k \frac{N_k - \nu_k}{N_k} \times \\ & \times \int \frac{P^{(1)}(\mathbf{r}) - P^{(1)}(-\mathbf{r})}{2} [\phi_{ij}(\mathbf{r}) \nabla g_{kq}(\mathbf{r})] d \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Из предположения об однородности системы следует, что $P^{(1)}$ — постоянная величина. Поэтому

$$\sum_k \int \left(\nabla_i \frac{P^{(s+1)}}{P^{(s)}} \right) \phi_{ij} d {}^h \mathbf{r}_j = 0 \quad (4.78)$$

и, следовательно,

$$\Theta \nabla_i \ln P^{(s)} = -\nabla_i \langle \phi_i \rangle^{(s)}. \quad (4.79)$$

Просуммировав теперь результат (4.79) по всем частицам s -конфигурации, найдем уравнение

$$\Theta \nabla_i \ln P^{(s)} = - \sum_i \nabla_i \langle \phi_i \rangle^{(s)}, \quad (4.80)$$

где

$$\nabla = \sum_{i=1}^s \nabla_i \quad (4.81)$$

есть оператор ∇ в координатном пространстве s -конфигурации.

Выразим теперь правую часть уравнения (4.80) через среднюю энергию частиц s -конфигурации

$$\langle \phi \rangle^{(s)} \equiv \frac{1}{2} \sum'_{i,j} \phi_{ij} + \sum_{j,q} \int \phi_{qj} \frac{P^{(s+1)}(\dots, {}^k \mathbf{r}_j)}{P^{(s)}(\dots)} d {}^k \mathbf{r}_j + C^{(N-s)}. \quad (4.82)$$

Первый член в правой части этого выражения представляет собой энергию взаимодействия частиц данной s -конфигурации между собой, второй — среднюю энергию взаимодействия $(N - s)$ оставшихся частиц системы с частицами s -конфигурации, а последний член $C^{(N-s)}$ описывает среднюю энергию взаимодействия остальных $(N - s)$ частиц друг с другом. Величина $C^{(N-s)}$ не зависит от координат частиц, образующих рассматриваемую s -конфигурацию.

Применим оператор ∇ сначала к выражению (4.82), а затем к (4.65), после чего вычтем полученные уравнения одно из другого. В результате имеем

$$\nabla \langle \phi \rangle^{(s)} = \sum_i \nabla_i \langle \phi_i \rangle^{(s)} + \sum_{\substack{j,q,i \\ q \neq i}} \int \phi_{qj} \nabla_i \frac{P^{(s+1)}(\dots, {}^k \mathbf{r}_j)}{P^{(s)}(\dots)} d {}^k \mathbf{r}_j, \quad (4.83)$$

или с учетом (4.74)

$$\begin{aligned} \nabla \langle \phi \rangle^{(s)} &= \sum_i \nabla_i \langle \phi_i \rangle^{(s)} + \\ &+ \sum_{\substack{j,q,i \\ q \neq i}} \frac{N_h - \nu_h}{N_h} \int P^{(1)}({}^k \mathbf{r}_j) \phi_{qj} \nabla_i g_{mk}({}^m \mathbf{r}_i, {}^k \mathbf{r}_j) d {}^k \mathbf{r}_j. \end{aligned} \quad (4.84)$$

В соответствии с исходным допущением об однородности системы множитель $P^{(1)}$ по-прежнему предполагается постоянным по величине.

Здесь следует обратить особое внимание на то обстоятельство, что во втором члене в правой части уравнения (4.84) в функцию ϕ_{qj} входят координаты с индексами

(q, j) , тогда как в функции g_{mk} координаты имеют индексы (i, j) . Если бы набор индексов у координат в этих функциях был одинаков, то в силу соотношений (4.76) и (4.77) второй член можно было бы опустить. Тем не менее рассматриваемый член все же обращается в нуль, поскольку выполняется следующее равенство:

$$\int \phi_{qi} \nabla_i g_{mk}({}^m \mathbf{r}_i, {}^k \mathbf{r}_j) d^k \mathbf{r}_j = - \int \phi_{iq} \nabla_q g_{mk}({}^m \mathbf{r}_q, {}^k \mathbf{r}_j) d^k \mathbf{r}_j. \quad (4.85)$$

Чтобы убедиться в этом, вспомним, что функция g зависит только от расстояния между частицами. Следовательно, суммирование по всем значениям i и q во втором члене правой части уравнения (4.84) дает нуль.

Итак, мы показали, что

$$\sum_i \nabla_i \langle \phi \rangle^{(s)} = \sum_i \nabla_i (\phi_i)^{(s)} = \nabla \langle \phi \rangle^{(s)}. \quad (4.86)$$

Учитывая этот результат в (4.80), получаем простое соотношение между общей молекулярной функцией распределения s -го порядка и средней потенциальной энергией частиц рассматриваемой s -конфигурации:

$$\Theta \nabla \ln P^{(s)} = - \nabla \langle \phi \rangle^s. \quad (4.87)$$

Доказательство второго положения. Для вывода обобщенного уравнения Больцмана — Пуассона применим оператор ∇_i к выражению (4.65) и используем уравнение (4.78). В результате найдем

$$\nabla_i \langle \phi_i \rangle^{(s)} = \sum_{j=1}^s \nabla_i \phi_{ij} + \sum_{j=s+1}^N \int \frac{P^{(s+1)}(\dots, {}^k \mathbf{r}_j)}{P^{(s)}(\dots)} (\nabla_i \phi_{ij}) d^k \mathbf{r}_j. \quad (4.88)$$

Произведя скалярное умножение этого уравнения на оператор ∇_i и принимая затем во внимание хорошо известные соотношения теории потенциала, получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \Delta_i \langle \phi_i \rangle^{(s)} &= -4\pi \sum_{j=1}^s \delta({}^k \mathbf{r}_j - {}^q \mathbf{r}_i) e_k e_q - \\ &\quad - 4\pi \sum_{j=s+1}^N \int \frac{P^{(s+1)}}{P^{(s)}} \delta({}^k \mathbf{r}_j - {}^q \mathbf{r}_i) e_k e_q d^k \mathbf{r}_j + \\ &\quad + \sum_{j=s+1}^N \int \left(\nabla_i \frac{P^{(s+1)}(\dots, {}^k \mathbf{r}_j)}{P^{(s)}(\dots)} \right) (\nabla_i \phi_{ij}) d^k \mathbf{r}_j. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Обратим внимание на третий член, содержащийся в правой части уравнения (4.89), наличие которого обусловлено тем обстоятельством, что функция распределения плотности пространственного заряда в данном случае зависит от координаты пробной частицы ${}^k \mathbf{r}_j$. Согласно (4.87), можно написать соотношение

$$\frac{P^{(s+1)}}{P^{(s)}} = A_k \exp \left(\frac{\langle \phi \rangle^{(s+1)} - \langle \phi \rangle^{(s)}}{\Theta} \right). \quad (4.90)$$

Здесь A_k — нормировочная постоянная. Исходя из условий нормировки

$$\int P_s d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_s = 1, \quad (4.91)$$

$$\int P_1 d\mathbf{r}_1 = 1$$

и выражений (4.7), (4.8), а также (4.68) в пределах применимости приближения парных корреляций, можно получить условие

$$\int P^{(1)}({}^q \mathbf{r}_i) P^{(1)}({}^k \mathbf{r}_j) g_{qk}({}^k \mathbf{r}_j, {}^q \mathbf{r}_i) d{}^k \mathbf{r}_j d{}^q \mathbf{r}_i = 0. \quad (4.92)$$

Подставляя соотношение (4.73) в (4.90) и учитывая, что $P^{(1)}$ — константа, с помощью условия (4.92) находим выражение

$$A_k = \frac{(N_k - \nu_k) V^s}{\int \exp \left[-\frac{\langle \phi \rangle^{(s+1)} - \langle \phi \rangle^{(s)}}{\Theta} \right] d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_{s+1}}. \quad (4.93)$$

Подстановка полученного результата в уравнение (4.89) дает обобщенное уравнение Больцмана — Пуассона

$$\begin{aligned}
\Delta_i \langle \phi_i \rangle^{(s)} = & -4\pi \sum_{j=1}^s \delta({}^k \mathbf{r}_j - {}^q \mathbf{r}_i) e_k e_q - 4\pi \sum_{j=s+1}^N \int \delta({}^k \mathbf{r}_j - {}^q \mathbf{r}_i) \times \\
& \times e_k e_q V^s \frac{\exp \left[-\frac{\langle \phi \rangle^{(s+1)} - \langle \phi \rangle^{(s)}}{\Theta} \right] (N_k - \nu_k) d {}^k \mathbf{r}_j}{\int \exp \left[-\frac{\langle \phi \rangle^{(s+1)} - \langle \phi \rangle^{(s)}}{\Theta} \right] d \mathbf{r}_1 \dots d \mathbf{r}_{s+1}} + \\
& + \sum_{j=s+1}^N \frac{\int (\nabla_i \phi_{ij}) \left(\nabla_i \exp \left[-\frac{\langle \phi \rangle^{(s+1)} - \langle \phi \rangle^{(s)}}{\Theta} \right] \right) (N_k - \nu_k) V^s d {}^k \mathbf{r}_j}{\int \exp \left[-\frac{\langle \phi \rangle^{(s+1)} - \langle \phi \rangle^{(s)}}{\Theta} \right] d \mathbf{r}_1 \dots d \mathbf{r}_{s+1}}.
\end{aligned} \tag{4.94}$$

Заметим, что (4.94) содержит уже не одну функцию $\langle \phi \rangle^s$, а три различные функции $\langle \phi_i \rangle^{(s)}$, $\langle \phi \rangle^{(s)}$ и $\langle \phi \rangle^{(s+1)}$.

Обобщенное уравнение Больцмана — Пуассона является довольно сложным, и его решение можно рассмотреть только на основе метода суперпозиции средней потенциальной энергии парного взаимодействия частиц данной s -конфигурации, к изложению которого мы и перейдем.

Доказательство третьего положения. Попробуем теперь представить среднюю потенциальную энергию частиц s -конфигурации в виде суперпозиции эффективных потенциальных энергий парного взаимодействия для данной конфигурации. Запишем следующее исходное выражение:

$$\langle \phi \rangle^{(s)} = \sum_{k(2)} \bar{\nu} \phi_{qk}^{(2)} ({}^q \mathbf{r}_i, {}^k \mathbf{r}_j), \tag{4.95}$$

где через $k(2)$ обозначены все возможные парные комбинации частиц i, j в пределах s -конфигурации.

Можно ожидать, что эффективная потенциальная энергия взаимодействующей пары зависит от набора $\bar{\nu}$, образуемого частицами s -конфигурации, и, в частности, от числа s . Индекс (q, k) указывает на то, что эффективная потенциальная энергия будет также зависеть от сорта (q, k) двух взаимодействующих частиц s -конфигурации.

После того как мы учли сорт частиц (q, k) , влияние системы на эффективную энергию взаимодействия частиц в сущности сводится к действию подсистемы остающихся $(N - s)$ частиц. Имея это в виду, заметим, что из общего

приближенного соотношения

$$N_k \approx N_k - 1 \quad (4.96)$$

следует

$$\overline{v+1} \phi^{(2)} \approx \bar{v} \phi^{(2)}. \quad (4.97)$$

Используя последнее приближенное равенство, а также выражение (4.95) и линеаризуя экспоненциальную функцию (что, как мы покажем, вполне соответствует рассматриваемому приближению парных корреляций), с помощью уравнения (4.94) получаем

$$\begin{aligned} \Delta_i \sum_{j=1}^s \bar{v} \phi_{qk}^{(2)}(q_{\mathbf{r}_i}, k_{\mathbf{r}_j}) &= -4\pi \sum_{j=1}^s \delta(k_{\mathbf{r}_j} - q_{\mathbf{r}_i}) e_q e_k - \\ & \frac{4\pi \sum_k \left[e_q e_k (N_k - v_k) V^s - \sum_{l=1}^s \frac{e_q e_k}{\Theta} (N_k - v_k) V^s \bar{v} \phi_{qu}^{(2)}(q_{\mathbf{r}_i}, u_{\mathbf{r}_l}) \right]}{\int \exp \left[-\frac{\langle \phi \rangle^{(s+1)} - \langle \phi \rangle^{(s)}}{\Theta} \right] d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_{s+1}} - \\ & - \sum_{j=s+1}^N \frac{\int (\nabla_i \phi_{ij}) [(\nabla_i \bar{v} \phi_{qk}^{(2)}(k_{\mathbf{r}_j}, q_{\mathbf{r}_i}) / \Theta) (N_k - v_k) V^s d^k \mathbf{r}_j]}{\int \exp \left\{ -\frac{\langle \phi \rangle^{(s+1)} - \langle \phi \rangle^{(s)}}{\Theta} \right\} d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_{s+1}}. \quad (4.98) \end{aligned}$$

Заметим, что первый член в правой части этого уравнения содержит знак суммы со штрихом, а в остальных членах он отсутствует. Последний член не содержит суммирования по индексу l , поскольку оператор ∇_i исключает все члены, кроме тех, у которых $l = i$.

Интегрирование по частям в четвертом члене приводит к результату

$$\begin{aligned} \sum_{j=s+1}^N \frac{\left[\frac{(N_k - v_k) V^s}{\Theta} \right] \int \bar{v} \phi_{qk}^{(2)} \Delta_i \phi_{ij} d^k \mathbf{r}_j}{\int \exp \left[-\frac{\langle \phi \rangle^{(s+1)} - \langle \phi \rangle^{(s)}}{\Theta} \right] d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_{s+1}} &= \\ &= \frac{4\pi}{\Theta} \sum_{j=s+1}^N \frac{e_k e_q (N_k - v_k) V^s \int \bar{v} \phi_{qk}^{(2)}(q_{\mathbf{r}_i}, k_{\mathbf{r}_j}) \delta(q_{\mathbf{r}_i} - k_{\mathbf{r}_j}) d^k \mathbf{r}_j}{\int \exp \left[-\frac{\langle \phi \rangle^{(s+1)} - \langle \phi \rangle^{(s)}}{\Theta} \right] d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_{s+1}}, \quad (4.99) \end{aligned}$$

из которого видно, что этот член взаимно сокращается со слагаемыми $j = l, u = k$, входящими в третий член правой части уравнения (4.98). Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta_i \sum_{j=1}^s \bar{v} \phi_{qk}^{(2)}(q\mathbf{r}_i, k\mathbf{r}_j) = & -4\pi \sum_{j=1}^s \delta(k\mathbf{r}_j - q\mathbf{r}_i) e_q e_k - \\ & - \frac{4\pi \sum_k^{\overline{N-s}} e_q e_k (N_k - \nu_k) V^s}{\int \exp \left[-\frac{\langle \phi \rangle^{(s+1)} - \langle \phi \rangle^{(s)}}{\Theta} \right] d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_{s+1}} + \\ & + 4\pi \sum_k^{\overline{N-s}} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^s \frac{e_q e_k (N_k - \nu_k) V^s \bar{v} \phi_{qu}^{(2)}(q\mathbf{r}_i, u\mathbf{r}_l) / \Theta}{\int \exp \left[-\frac{\langle \phi \rangle^{(s+1)} - \langle \phi \rangle^{(s)}}{\Theta} \right] d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_{s+1}}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Эффективная энергия парного взаимодействия удовлетворяет тривиальному соотношению

$$\bar{v} \phi_{kqu}^{(2)} = \frac{e_k}{e_q} \bar{v} \phi_{qu}^{(2)}. \quad (4.101)$$

В нашем рассмотрении нормировочная постоянная в выражении (4.93) является произвольной величиной. Потребуем, чтобы

$$A_k = \frac{N_k - \nu_k}{V}. \quad (4.102)$$

Перегруппируем также слагаемые суммы по l . Тогда, учитывая соотношения (4.102) и (4.101), мы получим уравнение (4.100) в виде

$$\begin{aligned} \Delta_i \sum_{j=1}^s \bar{v} \phi_{qk}^{(2)}(q\mathbf{r}_i, k\mathbf{r}_j) = & -4\pi \sum_{j=1}^s \delta(q\mathbf{r}_i - k\mathbf{r}_j) e_q e_k - \\ & - 4\pi \sum_k^{\overline{N-s}} e_q e_k \frac{N_k - \nu_k}{V} + 4\pi \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^s \left(\sum_k^{\overline{N-s}} e_k^2 \frac{N_k - \nu_k}{\Theta V} \right) \bar{v} \phi_{qu}^{(2)}(q\mathbf{r}_i, u\mathbf{r}_l). \end{aligned} \quad (4.103)$$

Ясно, что последовательность суммирования в третьем члене правой части уравнения (4.103) не имеет значения,

Поэтому вместо суммирования по l и по соответствующему сорту частиц u мы сначала проведем суммирование по индексу j и соответствующему ему сорту частиц k .

Далее учтем, что однородная и изотропная плазма должна быть нейтральной. Это требует выполнения условия

$$\sum_k^{\bar{N}} e_k N_k = 0. \quad (4.104)$$

Используя данное соотношение, второй член правой части уравнения (4.103) можно записать в виде

$$-4\pi \sum_k^{\bar{N}-s} e_q e_k \frac{N_k - \nu_k}{V} = + \frac{4\pi e q}{V} \sum_k^{\bar{s}} \nu_k e_k \approx \frac{4\pi e q}{V} \sum_{l=1}^{\bar{s}} e_l, \quad (4.105)$$

где штрих у знака суммы означает, что в ней должен быть исключен заряд i -й частицы. Здесь также учтено, что выполняется приближенное равенство $\nu_q - 1 \approx \nu_q$.

Подставив (4.105) в уравнения (4.103), нетрудно свести их к системе уравнений того же типа для отдельных слагаемых

$$\Delta_i \bar{\nu} \phi_{qk}^{(2)}({}^q \mathbf{r}_i, {}^k \mathbf{r}_j) = -4\pi e_q e_k \delta({}^q \mathbf{r}_i - {}^k \mathbf{r}_j) + \\ + 4\pi \frac{e_k e_q}{V} + 4\pi \left(\sum_k^{\bar{N}-s} e_k^2 \frac{N_k - \nu_k}{\Theta V} \right) \bar{\nu} \phi_{qk}^{(2)}({}^q \mathbf{r}_i, {}^k \mathbf{r}_j). \quad (4.106)$$

Ниже мы покажем, что данная система уравнений (для эффективной потенциальной энергии) обладает решениями типа Дебая — Хюккеля. А это означает, что третье положение будет доказано.

Напомним его: средняя потенциальная энергия частиц данной s -конфигурации может быть представлена в виде суперпозиции потенциалов отдельных взаимодействующих пар. Потенциальная энергия каждой взаимодействующей пары может быть найдена из обобщенного уравнения Больцмана — Пуассона (4.106). Она зависит от сорта двух выбранных частиц и набора $\bar{\nu}$ групп частиц рассматриваемой s -конфигурации.

Полученный выше результат интересен во многих отношениях. Например, из него очевидно, что в виде суммы эффективных потенциальных энергий парного взаимодействия можно представить не только среднюю потенциальную энергию данной s -конфигурации, но также и взаимодействие некоторой пробной частицы с частицами этой s -конфигурации. Такой результат легко получить, если рассмотреть выделенную s -конфигурацию плюс пробная частица в виде единой системы из $(s + 1)$ частиц, а исходную s -конфигурацию — в качестве другой, отдельно существующей системы. Вычитая среднюю энергию частиц s -конфигурации из энергии частиц конфигурации ($s + 1$ пробная частица), можно заметить, что возникающая разность представляет собой сумму эффективных потенциальных энергий по всем взаимодействующим парам. Однако подобный результат верен только в том случае, если величины $\bar{v}\phi^{(2)}$ можно соответственно отождествить с величинами $\bar{v}^{+1}\phi^{(2)}$. Пренебрежение эффектом от одной частицы при вычислении этих величин не выходит за рамки общей системы допущений, использованных в настоящем параграфе [см., например, (4.97)].

Полученный результат позволяет рассчитать поле частиц s -конфигурации, действующее на пробную частицу. Пусть пробная частица имеет заряд $+1$. Будем искать поле частиц s -конфигурации, действующее на данную пробную частицу, в виде суперпозиции эффективных полей отдельных частиц s -конфигурации. Это эффективное поле пропорционально градиенту потенциала взаимодействия $\bar{v}\phi_{qk}^{(2)}$, где под q следует понимать индекс пробной частицы.

Приведенные примеры окажутся полезными при обсуждении вопроса о суммарном поле, создаваемом ионной компонентой в системе, состоящей из ионов и электронов.

4.8. Решение обобщенного уравнения Больцмана — Пуассона

Уравнение (4.106) можно упростить, если вспомнить, что функция $\bar{v}\phi_{qk}^{(2)}$ зависит только от абсолютного значения $\mathbf{r} = ({}^q\mathbf{r}_i - {}^k\mathbf{r}_j)$. Таким образом, представив потенциаль-

ную энергию в виде суммы энергий взаимодействующих пар, приведем обобщенное уравнение Больцмана — Пуассона к следующей форме:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \bar{v} \phi_{qk}^{(2)} = -4\pi e_q e_k \delta(r) + \frac{4\pi e_q e_k}{V} + \frac{1}{(\bar{v} \lambda_D)^2} \bar{v} \phi_{qk}^{(2)}, \quad (4.107)$$

где использована сокращенная запись

$$\frac{1}{(\bar{v} \lambda_D)^2} = \sum_k \frac{4\pi e_k^2 (N_k - \nu_k)}{\Theta V}. \quad (4.108)$$

Здесь величина $\bar{v} \lambda_D$ представляет собой дебаевскую длину для системы с числом частиц $N_k - \nu_k$. Общее решение уравнения (4.107) имеет вид

$$\bar{v} \phi_{qk}^{(2)} = \frac{1}{r} \left[C_1 \exp\left(-\frac{r}{\bar{v} \lambda_D}\right) + C_2 \exp\left(+\frac{r}{\bar{v} \lambda_D}\right) \right]. \quad (4.109)$$

Рассмотрим предельный случай, когда $V \rightarrow \infty$. При $r \rightarrow \infty$ потенциальная энергия $\bar{v} \phi_{qk}^{(2)}$ должна быть конечной величиной, следовательно, $C_2 = 0$. При $r \rightarrow 0$ необходимо учесть сингулярность δ -функции Дирака в уравнении (4.107), откуда следует $C_1 = e_q e_k$. В результате решение имеет вид

$$\bar{v} \phi_{qk}^{(2)} = \frac{e_q e_k}{r} \exp\left(-\frac{r}{\bar{v} \lambda_D}\right). \quad (4.110)$$

Таким образом, для частного случая $s = 2$ полученное решение совпадает с формулой Дебая.

Прежде чем закончить данный параграф, уместно сделать два дополнительных замечания.

Во-первых, выше утверждалось, что линеаризация экспоненциальных функций, входящих в выражение для потенциальных энергий взаимодействующих пар, не выходит за рамки применимости приближения парных корреляций. Чтобы проанализировать это утверждение, обратимся к выражениям (4.72) и (4.87), из которых в рамках общей применимости приближения парных корреляций

найдем

$$\begin{aligned} \frac{{}^{qk}P^{(2)}}{{}^kP^{(1)}} &= {}^kP^{(1)} [1 + g_{qk} ({}^q\mathbf{r}_i, {}^k\mathbf{r}_j)] = \\ &= \frac{N_k}{V} [1 + g_{qk}] = \frac{N_k}{V} \exp(g_{qk}) = \frac{N_k}{V} \exp\left(-\frac{\bar{v}\phi_{qk}}{\Theta}\right), \end{aligned} \quad (4.111)$$

откуда сразу следует, что

$$g_{qk} = -\frac{\bar{v}\phi_{qk}^{(2)}}{\Theta}. \quad (4.112)$$

Вместе с основным условием применимости приближения парных корреляций (4.63) это означает, что линейаризация экспоненциальных функций не только допустима, но лишь она в действительности и имеет смысл. Любые попытки улучшить теорию за счет включения членов более высокого порядка в разложении экспоненты являются заблуждением и несовместимы с используемым приближением.

Во-вторых, хотя используемый нами метод представляет собой обычную процедуру, неявно употребляемую практически во всех работах, посвященных рассмотрению данной проблемы, мы не должны пройти мимо того факта, что решение уравнения Больцмана — Пуассона было распространено нами на расстояния вплоть до $r = 0$, несмотря на то что упомянутая выше линейаризация в области малых r невозможна. В самом деле, полученное нами решение удовлетворяет условию (4.63) только в области

$$r > {}^{qk}r_w = \frac{e_q e_k}{\Theta}, \quad (4.113)$$

где ${}^{qk}r_w$ — радиус классического взаимодействия.

Поэтому константу C_1 из предельного перехода $r \rightarrow 0$ определить в действительности нельзя. Мы должны были бы определить константу C_1 , сшивая решение для полей на радиусе $r \approx {}^{qk}r_w$. Однако для выполнения такого условия непрерывности требуется знать распределение потенциала в пределах области $0 < r < {}^{qk}r_w$. В случае когда вклад третьего члена правой части уравнения (4.107) пренебрежимо мал, в данной области значений r можно было бы использовать выражение для потенциальной энергии кулоновского взаимодействия.

В области $0 < r < r_w$ упомянутый третий член представляет собой вклад от среднего заряда всех частиц, не содержащихся в s -конфигурации. Однако мы должны согласиться с тем, что в настоящее время нет теории, адекватно описывающей решения для рассматриваемых значений r . В этой области становятся важными квантово-механические эффекты и свойства отдельных частиц.

Если принять довольно правдоподобное допущение о том, что вклад от среднего заряда всех остальных частиц в этой области пространства пренебрежимо мал, то кулоновское приближение будет справедливо при условии

$$r_w = \frac{e^2}{\Theta} \ll r_0 = \left(\frac{4\pi}{3} \frac{N}{V} \right)^{-1/3}, \quad (4.114)$$

которое можно также переписать в форме неравенства

$$n \ll \frac{3}{4\pi} \left(\frac{\Theta}{e^2} \right)^3 = n_{\text{кр}}, \quad (4.115)$$

где через $n_{\text{кр}}$ обозначено значение критической плотности. Таким образом, в рамках обсуждавшегося выше предположения можно ожидать, что выражение для потенциальной энергии (4.110) является хорошим приближением для систем, плотность которых много меньше критического значения.

С другой стороны, по мере приближения к критической плотности парные корреляции оказываются уже не столь малыми и становится важным последовательный учет корреляций более высокого порядка. Поэтому требование, вытекающее из условия справедливости решения (4.110), не является дополнительным ограничением и вполне совместимо с общим условием применимости приближения парных корреляций (4.63).

4.9. Уравнение Борна — Грина

В предыдущем разделе мы нашли метод определения функций распределения в приближении парных корреляций, исходя из уравнения Больцмана — Пуассона, решение которого позволяет найти средние потенциальные энергии взаимодействующих пар. Для простейшего случая парных корреляций в двухчастичной конфигурации результат сводится к выражениям (4.110) и (4.111). В данном

разделе мы поставим целью изучить другой приближенный метод расчета функций распределения, представляющий фундаментальный интерес. Этот метод не требует рассмотрения задачи о средних потенциальных энергиях. Для краткости ограничимся исследованием лишь наиболее важного случая двухчастичной конфигурации применительно к нейтральной кулоновской системе из двух компонент, содержащих равные числа противоположно заряженных частиц. Основным уравнением здесь является уравнение Борна — Грина, которое можно вывести рассматриваемым ниже способом.

Используя выражения (4.72), (4.8) и (4.71) в рамках общего условия применимости приближения парных корреляций (4.63), мы имеем

$$\frac{P^{(3)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)}{P^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)} = \frac{P^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) P^{(2)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)}{P^{(1)}(\mathbf{r}_1) P^{(1)}(\mathbf{r}_2) P^{(1)}(\mathbf{r}_3)}. \quad (4.116)$$

Для простоты при описании рассматриваемого двухкомпонентного ансамбля введем следующие сокращенные обозначения:

$$\begin{aligned} {}^k P^{(1)}; \quad k = +, - &\rightarrow P^{(+)}, P^{(-)}; \\ {}^{qk} P^{(2)}; \quad qk = ++, +-, -- &\rightarrow P^{(++)}, P^{(+-)}, P^{(--)}. \end{aligned} \quad (4.117)$$

Используя эти обозначения и уравнение (4.11) для двухчастичной функции распределения $P^{(++)}$, получаем уравнение Борна — Грина в виде

$$\begin{aligned} \Theta \nabla_1 P^{(++)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + P^{(++)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \nabla_1 \phi_{12}^{(++)} = \\ = - \frac{P^{(++)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{P^{(+)}(\mathbf{r}_1) P^{(+)}(\mathbf{r}_2)} \int \frac{P^{(++)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) P^{(++)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)}{P^{(+)}(\mathbf{r}_3)} \times \\ \times \nabla_1 \phi^{(++)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) d\mathbf{r}_3 - \frac{P^{(++)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{P^{(+)}(\mathbf{r}_1) P^{(+)}(\mathbf{r}_2)} \times \\ \times \int \frac{P^{(+-)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) P^{(+-)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)}{P^{(-)}(\mathbf{r}_3)} \nabla_1 \phi^{(+-)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) d\mathbf{r}_3. \end{aligned} \quad (4.118)$$

Очевидно, что данное уравнение содержит кроме функции $P^{(++)}$ еще и функцию $P^{(+-)}$. Поскольку аналогичные уравнения можно получить также для функций $P^{(+-)}$ и $P^{(--)}$,

ясно, что в рассматриваемом случае действительно возникает замкнутая система их трех связанных уравнений Борна — Грина для функций $P^{(q^k)}$.

В принципе можно пытаться решить эти три связанных интегро-дифференциальных уравнения как единую систему, однако мы предпочтем хотя и менее общепринятый, зато более простой способ. Предположим, что [в обозначениях (4.117)] выполняются следующие равенства:

$$g^{(++)} = g^{(--) = -g^{(+')} = ge^2, \quad (4.119)$$

где g — функции парных корреляций, определяемые (4.31). (Конечно, мы должны показать совместность данного предположения с окончательным результатом.)

Это предположение позволяет исключить связь между уравнениями. С помощью соотношения

$$\frac{P^{(++)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)}{P^{(+)}(\mathbf{r}_i)P^{(+)}(\mathbf{r}_j)} - 1 = - \left(\frac{P^{(+')}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)}{P^{(+)}(\mathbf{r}_i)P^{(+')}(\mathbf{r}_j)} - 1 \right) \quad (4.120)$$

и выражений (4.32) и (4.119), применяя преобразование координат

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = 0, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}', \quad (4.121)$$

можно перейти от уравнения (4.118) к следующему интегро-дифференциальному уравнению для функции g :

$$\begin{aligned} \Theta \nabla g + (1 + e^2 g) \nabla \psi(\mathbf{r}) = -2ne^2 \int g(\mathbf{r}') \nabla \psi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' - \\ - 2ne^2 \int g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \nabla \psi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} \phi^{(++)} = e^2 \psi, \quad P^{(+)} = P^{(-)} = n, \\ \phi^{(+')} = -e^2 \psi, \quad \psi(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|^{-1}. \end{aligned} \quad (4.123)$$

Поскольку мы рассматриваем неограниченную в пространстве плазму в отсутствие внешнего поля (т. е. плазма однородна и изотропна), можно утверждать, что второй член в правой части уравнения (4.122) тождественно обращается в нуль. Аргументы в пользу этого вывода аналогичны изложенным на стр. 87.

Ограничимся исследованием области

$$r \gg r_w = \frac{e^2}{\Theta}. \quad (4.124)$$

Ниже мы докажем, что соотношение

$$\nabla g = O\left(\frac{g}{r} + \frac{1}{\kappa_D}\right) \quad (4.125)$$

не находится в противоречии с окончательным результатом. Принимая во внимание условие (4.124) и соотношение (4.125) в уравнении (4.122), можно пренебречь третьим членом в левой части этого уравнения по сравнению с остальными членами. Тогда получим

$$\Theta \nabla g(r) + \nabla \psi(r) = -2ne^2 \int g(r') \nabla \psi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' \quad (4.126)$$

или

$$\Theta g(r) + \psi(r) = -2ne^2 \int g(r') \psi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' + C. \quad (4.127)$$

Из предельного перехода при $r \rightarrow \infty$ следует, что $C = 0$.

Применим теперь к уравнению (4.127) преобразование Фурье и, используя теорему о свертке, найдем

$$\tilde{g}(\xi) + \frac{1}{2\pi^2 \xi^2 \Theta} = -\frac{8\pi ne^2}{\Theta \xi^2} \tilde{g}(\xi). \quad (4.128)$$

Отсюда после простых преобразований

$$\tilde{g}(\xi) = -\frac{1}{2\pi^2 (\xi^2 + \kappa_D^2) \Theta}, \quad (4.129)$$

где

$$\kappa_D^2 = \frac{8\pi ne^2}{\Theta} \quad (4.130)$$

— постоянная Дебая для рассматриваемой системы. Обратное преобразование Фурье дает

$$g = -\frac{1}{\Theta r} \exp(-\kappa_D r). \quad (4.131)$$

Таким образом, функция парной корреляции для ионов имеет вид

$$g^{(++)} = -\frac{e^2}{\Theta r} \exp(-\kappa_D r). \quad (4.132)$$

Полностью аналогичным способом могут быть получены функции корреляции $g^{(-)}$ и $g^{(+-)}$. После этого нетрудно показать, что введенное нами предположение (4.119) так же, как и соотношение (4.125), выполняется в области $r > r_w$. Последнее ограничение не является каким-либо дополнительным требованием, а есть необходимое условие применявшейся в некоторых случаях процедуры линеаризации. Интересно отметить, что (4.125) идентично условию (4.115), ограничивающему применимость рассмотренных теорий областью субкритических плотностей.

4.10. Функции распределения для характеристик системы, зависящих от фазовых переменных

До сих пор мы исследовали вопрос о том, каким образом распределены частицы данной системы по совокупности фазовых переменных. Каноническое распределение вида (4.1) по Γ -пространству позволяет вычислить распределение вероятности для любой величины, являющейся функцией фазовых переменных.

Пусть $G(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ есть такая заданная функция. Тогда функция распределения вероятности $W(G)$ для этой величины может быть выражена с помощью функции $f_N^{(0)}$ следующим образом:

$$W(G) = \int \delta(G - G(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N)) f_N^{(0)} d\mathbf{r} d\mathbf{p}. \quad (4.133)$$

Здесь интегрирование должно проводиться по всему Γ -пространству. Подставляя в (4.133) выражение (4.1), для $f_N^{(0)}$ находим

$$W(G) = \frac{\int \delta(G - G(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N)) \exp\left[-\frac{H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N)}{\Theta}\right] d\mathbf{r} d\mathbf{p}}{\int \exp\left[-\frac{H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N)}{\Theta}\right] d\mathbf{r} d\mathbf{p}}, \quad (4.134)$$

где $H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ определяется формулой (4.2). При вычислении функции распределения вероятности $W(G)$ удобно перейти от представления (4.134) к спектральной функции Фурье

$$\bar{W}_G(\xi) = \int e^{-i\xi G} W(G) dG = \int e^{-i\xi G(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N)} f_N^{(0)} d\mathbf{r} d\mathbf{p}. \quad (4.135)$$

Если \mathbf{G} — векторная величина, то, очевидно, мы имеем соответственно

$$\tilde{W}_{\mathbf{G}}(\xi) = \int e^{-i\xi \cdot \mathbf{G}} W(\mathbf{G}) d\mathbf{G} = \int e^{-i\xi \mathbf{G}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N)} f_N^{(0)} d\mathbf{r} d\mathbf{p}. \quad (4.136)$$

Дальнейшие вычисления по этим формулам возможны только в том случае, когда известен конкретный вид функции G . Поэтому ниже мы обратимся к рассмотрению такого конкретного случая.

4.11. Распределение микрополей

Одним из наиболее важных и характерных для плазмы распределений является распределение внутренних микроскопических полей. Поле, возникающее в заданной нейтральной точке наблюдения, может быть представлено в виде линейной суперпозиции полей от всех частиц данной системы:

$$\mathbf{E} = \sum_j \mathbf{E}_j(\mathbf{r}_j). \quad (4.137)$$

Подставив это выражение в (4.136), найдем спектральную функцию Фурье $\tilde{W}_{\mathbf{E}}(\xi)$ от распределения микрополей:

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{\mathbf{E}}(\xi) &= \int e^{-i(\xi \cdot \mathbf{E})} W(\mathbf{E}) d\mathbf{E} = \\ &= \int \dots \int \exp \left[-i \left(\xi \cdot \sum_j \mathbf{E}_j \right) \right] P_N d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N. \end{aligned} \quad (4.138)$$

Поскольку корреляция между импульсами и координатами в конфигурационном пространстве отсутствует, а вклады в электрическое поле от отдельных частиц не зависят от импульсов, мы проинтегрировали выражение (4.138) по всем импульсам и перешли от функции распределения $f_N^{(0)}$ в Γ -пространстве к функции распределения P_N в конфигурационном пространстве.

Трудность вычислений по формуле (4.138) связана, конечно, с наличием экспоненциального множителя перед функцией P_N .

В свете общего успеха метода групповых разложений Баранже и Мозер [13] использовали для этой цели разложение по группам в ϵ_j -представлении, определяемом

выражением

$$\varepsilon_j = e^{-i(\xi \cdot \mathbf{E}_j)} - 1. \quad (4.139)$$

Подставим данное выражение в формулу (4.138) и вычислим соответствующие произведения ε -функций. Тогда можно написать

$$\tilde{W}_{\mathbf{E}}^s(\xi) = \sum_{s=0}^N \tilde{W}_{\mathbf{E}}^s(\xi), \quad (4.140)$$

где функции $\tilde{W}_{\mathbf{E}}^s$ равны

$$\tilde{W}_{\mathbf{E}}^s(\xi) = \int \dots \int \sum_{j_1 < \dots < j_s} \varepsilon_{j_1} \dots \varepsilon_{j_s} P_N d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N. \quad (4.141)$$

Теперь, вводя, согласно формуле (4.7), частную функцию распределения, можно написать¹⁾

$$\tilde{W}_{\mathbf{E}}^s(\xi) = \frac{N!}{(N-s)!s!} \int \dots \int \varepsilon_1 \dots \varepsilon_s P_s d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_s. \quad (4.142)$$

Здесь комбинационный множитель перед интегралом отражает тот факт, что каждая группа из s частиц дает одинаковый вклад в поле и поэтому интеграл следует умножить на число возможных комбинаций N частиц по подгруппам из s частиц.

Используем теперь для функции P_s представление в виде (см. стр. 83)

$$P_s = \prod_{h(1)} P_1(\mathbf{r}_j) \prod_{h(2)} (1 + {}^s g_{jl}) \prod_{h(3)} (1 + {}^s g_{jlm}) \dots, \quad (4.143)$$

где символами $k(i)$, как и выше в (4.67), обозначены все сочетания по i частиц из набора s заданных частиц. После этого вычислим в явной форме произведения в выражении (4.143). Функция распределения P_s представляется в виде суммы членов, каждый из которых выражается произведением либо функций ${}^s g_h$ и P_1 , либо только ${}^s g_h$ или P_1 , где индекс h определяет число индексов $jl \dots m$ и, следовательно, обозначает порядок корреляционной функции.

¹⁾ Следует заметить, что здесь рассматривается система частиц лишь одного сорта. Однако в действительности нас интересует реальная плазма, состоящая из электронной и ионной компонент. Поэтому ниже мы покажем, как можно применить полученные «однокомпонентные результаты» к реальной плазме.

Рассмотрим один из таких членов. Структура этого члена, определяемая функциями ${}^s g_i$, в соответствии с используемым методом предполагает разбиение s элементов на подгруппы. В пределах каждой подгруппы элементы имеют прямые или косвенные связи. Связи между самими подгруппами отсутствуют. Проведем суммирование по всем членам, содержащим одинаковые наборы s элементов в подгруппах. Затем введем новую корреляционную функцию

$${}^s \bar{g}_i = \sum \prod {}^s g_v. \quad (4.144)$$

В этом выражении произведения под знаком суммы распространяются на любые возможные комбинации диаграмм связей для ν частиц внутри подгруппы. Например, в частном случае $\nu = 3$ такие диаграммы имеют вид



$$. \quad (4.145)$$

Вклад подобной подгруппы в искомую спектральную функцию теперь имеет вид произведения функций ${}^s \bar{g}_i$ и полностью определяется набором чисел $\bar{\nu}$, причем через ν_h обозначено число подгрупп, каждая из которых содержит h частиц. Таким образом, числа ν_h должны удовлетворять тривиальному условию нормировки

$$\sum_{h=1}^s \nu_h h = s. \quad (4.146)$$

Распространим теперь суммирование на все группы, имеющие одинаковую структуру $\bar{\nu}$, но отличающиеся распределением s элементов внутри этих подгрупп. Каждая из таких подгрупп дает одинаковый вклад в \tilde{W}_E^s . Следовательно, суммирование по рассматриваемым группам сведется к умножению на коэффициент

$$C(s) = \frac{s!}{\prod_{h=1}^s \nu_h! (h!)^{\nu_h}}. \quad (4.147)$$

Здесь в числителе содержатся все возможные перестановки s элементов, а в знаменателе с помощью первого множителя исключаются перестановки тех подгрупп, которые не должны учитываться, поскольку они представляют собой перестановку целиком всей подгруппы. Второй множитель знаменателя исключает перестановки внутри отдельной подгруппы. Напомним, что

$$P_1 = \frac{1}{V}. \quad (4.148)$$

Используя сокращенную запись

$${}^s\mathcal{E}_h(\xi) = \int \dots \int \varepsilon_1 \dots \varepsilon_h {}^s\bar{g}_h d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_h \quad (4.149)$$

и приближенное равенство

$$\frac{N!}{(N-s)!} \approx N^s, \quad (4.150)$$

получаем для спектральной функции $\tilde{W}_E(\xi)$ следующее выражение:

$$\tilde{W}_E(\xi) = \sum_{s=0}^N \frac{n^s}{s!} \left[\sum C(s) {}^s\mathcal{E}_1^{v_1} \dots {}^s\mathcal{E}_s^{v_s} \right]. \quad (4.151)$$

Здесь внутри квадратных скобок суммируются все комбинации s элементов по подгруппам v_h , состоящим из h частиц каждая и удовлетворяющим условию (4.146).

Подставив выражение (4.147) для коэффициента $C(s)$ и перегруппировав члены с учетом условия (4.146), найдем, что при постоянной плотности $n = N/V$ в пределе при $N \rightarrow \infty$ и $V \rightarrow \infty$

$$\tilde{W}_E(\xi) = \prod_{h=1}^{\infty} \sum_{v_h=0}^{\infty} \frac{1}{v_h!} \left[\frac{n^h}{h!} \mathcal{E}_h(\xi) \right]^{v_h}. \quad (4.152)$$

Поскольку в выражении (4.152) мы распространили произведение по индексу h от единицы до бесконечности, в нем содержатся члены, не входящие в исходное выражение (4.151). Однако относительный вклад этих дополнительных (неправильно учитываемых) членов равен нулю

при $N \rightarrow \infty$. Итак, получаем

$$\tilde{W}_{\mathbf{E}}(\xi) = \exp \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} \frac{n^h}{h!} \mathcal{E}_h(\xi) \right\}. \quad (4.153)$$

Здесь, следуя Баранже и Мозеру [13], в последних двух соотношениях мы использовали аппроксимацию

$$\mathcal{E}_h(\xi) = {}^s \mathcal{E}_h(\xi) \quad \text{для } s = 1, 2, 3, \dots \quad (4.154)$$

С помощью формулы (4.153) рассматриваемая нами задача сводится теперь к вычислению величин \mathcal{E}_h , определяемых формулой (4.149). Последнее, однако, представляет собой непреодолимую трудность, ибо нам неизвестны корреляционные функции \bar{g}_h при $h > 2$. Поэтому мы ограничимся приближением типа

$$\tilde{W}_{\mathbf{E}}(\xi) \doteq \exp \left[n \mathcal{E}_1(\xi) + \frac{1}{2} n^2 \mathcal{E}_2(\xi) \right], \quad (4.155)$$

надеясь лишь на то, что рассматриваемое разложение достаточно быстро сходится, так что членами более высоких порядков можно будет пренебречь.

Теория Хольтсмарка

В работе Хольтсмарка [14], в которой впервые было приведено вычисление распределения микрополей, полностью пренебрегалось всеми корреляциями. В нашем подходе это означает, что надо определить лишь член $\mathcal{E}_1(\xi)$, положив член $\mathcal{E}_2(\xi)$ тождественно равным нулю. В таком приближении спектральная функция имеет вид

$$\tilde{W}_{\mathbf{E}}(\xi) = \exp \left\{ n \int [e^{-i(\xi \cdot \mathbf{E})} - 1] dr \right\}. \quad (4.156)$$

Пусть поле задано соотношением $\mathbf{E} = -er/r^3$. Тогда, введя полярные координаты, нетрудно вычислить интеграл, входящий в выражение (4.156),

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \exp \left[i \xi \frac{e}{r^2} \cos \vartheta \right] - 1 \right\} r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \\ = -\frac{4}{15} (2\pi e \xi)^{3/2}. \end{aligned} \quad (4.157)$$

В предположении изотропности системы распределение для абсолютного значения напряженности электрического поля можно записать в виде .

$$W(E) = 4\pi E^2 W(\mathbf{E}) = \frac{2E}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(\xi E) \times \\ \times \exp\left[-\frac{4n}{15}(2\pi e\xi)^{3/2}\right] \xi d\xi. \quad (4.158)$$

Отсюда, переходя к безразмерной величине

$$\beta = \frac{E}{E_0}, \quad \text{где } E_0 = \frac{e}{r_0^2}, \quad (4.159)$$

и используя сокращенную запись $v = \xi E_0$, получаем формулу для распределения относительной величины напряженности электрического поля β :

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi\beta} \int_0^{\infty} v \sin v \exp\left[-\left(\frac{v}{\beta}\right)^{3/2}\right] dv. \quad (4.160)$$

Это распределение для малых и больших значений β имеет следующие асимптотические разложения:

$$W(\beta) \sim \frac{4}{3\pi} \beta^2 \quad \text{при } \beta \rightarrow 0 \quad (4.161)$$

и

$$W(\beta) \sim \frac{3}{2} \beta^{-5/2} \quad \text{при } \beta \rightarrow \infty. \quad (4.162)$$

В общем случае интеграл в (4.160) должен рассчитываться численными методами.

Теория, развитая Хольтсмарком, является хорошим приближением в предельных случаях высоких температур и (или) малых плотностей. Поэтому при таких условиях любая теория, учитывающая парное взаимодействие, также должна приводить к распределению Хольтсмарка.

Следует сделать одно замечание относительно расходимости второго момента $\langle E^2 \rangle$ для распределения (4.158). В противоположность широко распространенному мнению, данную расходимость нельзя устранить за счет квантовомеханических поправок. Эта расходимость, как показал Энгельманн [16], обусловлена нефизическим предположением о точечных зарядах и представляет собой принципиальный недостаток теории, применяемой для вычисления микрополей.

Приближение экранировки частиц

Эккер и Мюллер [15] впервые попытались учесть корреляции для низкочастотной компоненты электрического поля, создаваемого ионами. Авторы использовали модель некоррелированного распределения ионов с экранированным полем. В этом приближении эффективные поля определяются выражением

$$\mathbf{E} = \frac{e}{r^3} \mathbf{r} (1 + \kappa_D r) e^{-\kappa_D r}. \quad (4.163)$$

Естественно, что вследствие более сложной зависимости \mathbf{E} от r в формуле (4.163) вычисления становятся более трудными.

Подставляя выражение для поля (4.163) в (4.156) и используя обозначения

$$\bar{E} = \frac{E}{\kappa_D^2}, \quad y = \xi \kappa_D, \quad x = \kappa_D r, \quad (4.164)$$

находим спектральную функцию распределения в виде

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{\mathbf{E}}(\xi) = \exp \left\{ -3\delta \int_{E_R}^{\infty} \left(\frac{\sin y \bar{E}}{y \bar{E}} - 1 \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{(1+x)^{5/2} e^{-3x/2}}{1+[1+x]^2} \frac{d\bar{E}}{\bar{E}^{5/2}} \right\}. \quad (4.165) \end{aligned}$$

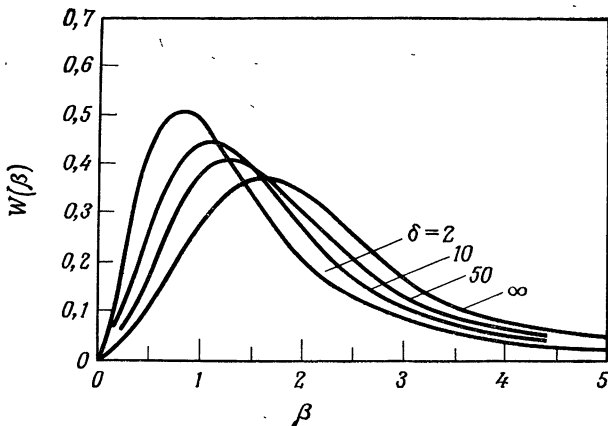
Нижний предел в интеграле учитывает ограничения, налагаемые условиями применимости теории приближения парных корреляций, что в свою очередь ограничивает рамки применимости результатов тем, что число частиц в дебаевской сфере δ должно подчиняться следующему условию:

$$\delta = \frac{1}{6 (\pi n)^{1/2} r_w^{3/2}} \gg 1. \quad (4.166)$$

Распределение микрополей, вычисленное Хольтсмарком, и результаты, полученные в приближении экранировки частиц [15], приведены на фиг. 5. Как и предполагалось, результаты Хольтсмарка соответствуют случаю $\delta = \infty$.

Влияние корреляций, учитываемое этой теорией через эффективное поле, создаваемое ионами, весьма заметно возрастает по мере того, как система приближается к критической плотности при уменьшении величины δ .

В случае низкочастотных микроскопических полей, создаваемых ионами, введение эффективного поля, которое учитывает электронную экранировку, представляется



Ф и г. 5. Распределение Хольтсмарка для микрополей в плазме ($\delta = \infty$) и распределения, в которых учтены корреляционные поправки, вычисленные в приближении экранированных частиц.

вполне оправданным. Однако не столь очевидно, что эффективная ионная экранировка учитывает как раз корреляции именно тех ионов, которые в действительности содержатся в члене \mathcal{E}_2 выражения (4.155). Именно эти соображения и лежат в основе метода групповых разложений Баранже и Мозера [13].

Учет корреляций ионов совместно с дебаевской экранировкой

Исследуя плазму, Баранже и Мозер [13] определили низкочастотную компоненту как среднее по времени поле, причем усреднение проводилось по интервалу, достаточно большому по сравнению со временем релаксации электронных флуктуаций, но малому по сравнению с характерным

временем ионных флуктуаций. Разность между определяемой таким образом низкочастотной компонентой микрополя и истинным его распределением должна, очевидно, представлять высокочастотную компоненту. Она может быть найдена с помощью соответствующих спектральных разложений истинного поля и его низкочастотной компоненты.

Без какого-либо обоснования Баранже и Мозер в качестве низкочастотного эффективного поля ввели экранированное кулоновское поле

$$\mathbf{E}_i = \frac{Z_i e}{r_i^2} \mathbf{r}_i (1 + \kappa_D r_i) \exp(-\kappa_D r_i). \quad (4.167)$$

Основой для подобного допущения может служить проведенный нами анализ уравнения Больцмана — Пуассона на стр. 93. При вычислении \mathcal{E}_2 Баранже и Мозер предположили, что функцию парной корреляции можно представить в виде

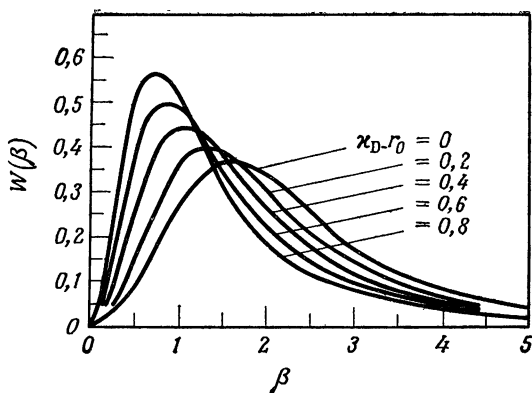
$$\bar{g}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{e^2}{\Theta} \frac{\exp[-\kappa_D r_{12}]}{r_{12}}. \quad (4.168)$$

Здесь параметр κ_D учитывает экранирующий вклад как ионов, так и электронов:

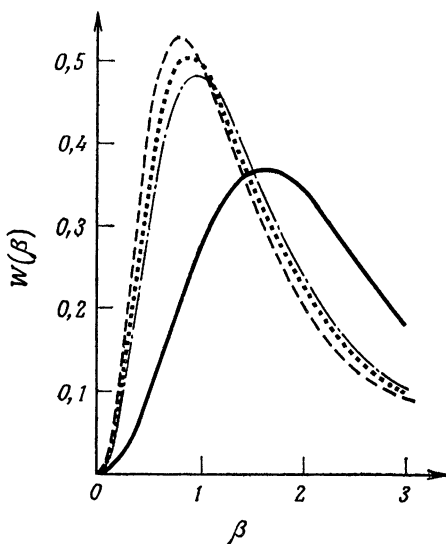
$$\kappa_D^2 = \kappa_D^- + \kappa_D^+. \quad (4.169)$$

Из проведенного выше тщательного анализа зависимости парных корреляций от характера рассматриваемой s -конфигурации, следует, что предположение о виде корреляционной функции (4.168) не очень обоснованно.

Чтобы вычислить \mathcal{E}_2 , Баранже и Мозер разложили подынтегральное выражение по сферическим гармоникам. Если ввести полярные координаты и использовать соотношения ортогональности, а также хорошо известную теорему сложения для сферических функций, то интегрирование по углам выполняется элементарно. В результате остается бесконечная сумма двойных интегралов, содержащих радиальную часть, причем аналитическое вычисление даже простейшего из этих членов невозможно. К счастью, результаты расчетов на вычислительной машине показывают хорошую сходимость данного



Ф и г. 6. Распределение микрополей, учитывающее корреляции частиц в рамках приближения Баранже и Мозера.



Ф и г. 7. Сравнение распределений, полученных для микрополей в разном приближении.

Сплошная кривая — распределение Хольцмарка; штрих-пунктирная кривая — нескорректированные результаты вычислений Баранже и Мозера; пунктирная кривая — скорректированные результаты Баранже и Мозера; штриховая кривая — распределение, полученное Эккером и Мюллером.

разложения, что позволяет получить удовлетворительное приближение уже при учете лишь первых трех членов.

Не входя в подробности численных расчетов, для изложения которых здесь нет места, приведем лишь окончательные результаты (фиг. 6). Наряду с результатами, полученными в приближении Баранже и Мозера, на фиг. 6 представлено также распределение Хольтсмарка. Следует заметить, что приведенные кривые в действительности не являются теми зависимостями, которые были вычислены самими авторами, а скорректированы с учетом ошибки, допущенной при их численных расчетах [17].

На фиг. 7 для одного из значений числа частиц в дебаевской сфере ($\delta \approx 5$) представлены результаты приближенного расчета Эккера и Мюллера и вычислений Баранже и Мозера. Обе теории дают заметные поправки к распределению Хольтсмарка. По сравнению с этой поправкой различие результатов обеих теорий по существу незначительно.

Следует также отметить, что в обоих подходах использовалась модель экранированных частиц, предложенная Эккером и Фишером [18]. Однако строгого обоснования подобной модели до сих пор еще не дано.

§ 5. ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА

5.1. Вывод теоремы для общего случая

В предыдущем параграфе мы рассмотрели распределение полной вероятности электрического микрополя для системы, находящейся в равновесном состоянии. Однако при изучении динамики поведения кулоновской системы, близкой к равновесию, особенно важное значение имеет другая величина, а именно распределение условной вероятности $W(\mathbf{E}_t/\mathbf{E}_{t+\tau})$. Данная величина определяет плотность вероятности обнаружить в заданной точке значение поля $\mathbf{E}_{t+\tau}$ в момент времени $t + \tau$, если известно значение поля \mathbf{E}_t в момент времени t . Вычислить $W(\mathbf{E}_t/\mathbf{E}_{t+\tau})$ чрезвычайно трудно, и поэтому данная проблема до сих пор еще не решена. Решить ее пытались Чандрасекар [19] и Коган и Селидовкин [20]. Более успешными оказались попытки Ростокера [21] вычислить автокорреляционную

функцию для электрического поля, определяющего характеристики явлений переноса в плазме. Автокорреляционная функция связана с распределением условной вероятности электрического поля:

$$\langle \mathbf{E}_t \rangle \langle \mathbf{E}_{t+\tau} \rangle = \int d\mathbf{E} \int d\mathbf{E}' \mathbf{E} \langle W(\mathbf{E}/\mathbf{E}', \tau) \rangle. \quad (5.1)$$

В настоящем параграфе мы выведем флуктуационно-диссипационную теорему, которая в дальнейшем может послужить основой при вычислении автокорреляционной функции. Рассмотрим задачу в общем виде. Проанализируем поведение какой-либо системы, находящейся под воздействием внешних сил, определяемых набором обобщенных внешних параметров $A_s(t)$, которые зависят только от времени и не связаны с фазовыми координатами $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ исследуемой системы. Тогда в приближении «линейного отклика» гамильтониан системы можно записать следующим образом:

$$H(\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k, t) = H_0(\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k) + \sum_s B_s(\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k) A_s(t). \quad (5.2)$$

Здесь через H_0 обозначен гамильтониан невозмущенной системы; коэффициенты B зависят только от фазовых координат $\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k$ и не содержат явно времени t .

Сначала исследуем вопрос о том, каким образом диссипация энергии данной системы может быть выражена через введенные выше величины. Диссипация в заданный момент времени определяется уравнением

$$\left\langle \frac{\partial H}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{dH}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{dH_0}{dt} \right\rangle + \sum_s \left\langle \frac{d}{dt} B_s A_s \right\rangle, \quad (5.3)$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю. Применяя теорему Лиувилля и используя канонические уравнения движения, найдем, что в линейном приближении

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial H}{\partial t} \right\rangle &= \sum_s \langle \{H_0, B_s A_s\} \rangle + \frac{d}{dt} \sum_s \langle B_s A_s \rangle = \\ &= - \sum_s \langle \dot{B}_s \rangle A_s + \frac{d}{dt} \sum_s \langle B_s A_s \rangle. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь скобками $\{ \dots, \dots \}$ обозначены скобки Пуассона. Если потребовать, чтобы значения внешних параметров A_s обращались в нуль при $t = \pm \infty$, то суммарная диссипация энергии, согласно теореме Парсеваля, равна

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{\partial H}{\partial t} \right\rangle dt = - \sum_s \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \dot{B}_s \rangle A_s dt = \\ = - \sum_s \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tilde{B}_s \rangle_\omega \tilde{A}_{s\omega}^* d\omega. \quad (5.5)$$

Свяжем теперь диссипацию энергии со спектром флуктуаций, используя выражение (5.5) и формулу Кубо [22]. Чтобы вывести формулу Кубо, обратимся сначала к уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} = - \{f_N, H\} = - \{f_N, H_0\} - \sum_s \{f_N, B_s\} A_s. \quad (5.6)$$

Вводя оператор Лиувилля

$$i\mathcal{L}_0 = \{ \dots, H_0 \}, \quad (5.7)$$

мы получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + i\mathcal{L}_0 f_N = \sum_s \{B_s, f_N\} A_s(t). \quad (5.8)$$

Преобразуя это линейное дифференциальное уравнение первого порядка в эквивалентное интегральное уравнение, находим

$$f_N = f_N^{(0)} + \sum_s \int_0^\infty e^{-i\mathcal{L}_0 \tau} \{B_s, f_N\} A_s(t - \tau) d\tau. \quad (5.9)$$

Здесь предполагается, что $f_N(t = -\infty) = f_N^{(0)}$ есть равновесное распределение, определяемое формулой $f_N^{(0)} = \exp(-H_0/\Theta)/ZN!h^{3N}$.

Уравнение (5.9) можно решить с помощью метода итерации. В рамках поставленной задачи мы ограничимся линейными по $\{A_s\}$ членами. Это означает, что в правой части этого уравнения функция f_N заменяется на $f_N^{(0)}$.

Вспомяная, что $df_N^{(0)} = -(1/\Theta) f_N^{(0)} dH_0$, а $\{B_s, H_0\} = \dot{B}_s$, получаем

$$f_N = f_N^{(0)} - \frac{1}{\Theta} \sum_s \int_0^\infty e^{-i\mathcal{L}_0\tau} f_N^{(0)} \dot{B}_s A_s(t-\tau) d\tau. \quad (5.10)$$

Поскольку величина $e^{-i\mathcal{L}_0\tau}$ коммутирует с $f_N^{(0)}$ и сдвигает значения всех переменных $\mathbf{p}_k(t)$, $\mathbf{r}_k(t)$ по времени, преобразуя их к $\mathbf{p}_k(t-\tau)$, $\mathbf{r}_k(t-\tau)$, окончательно имеем

$$f_N(t) = f_N^{(0)} - \frac{1}{\Theta} \sum_s \int_0^\infty f_N^{(0)} \dot{B}_s(\mathbf{p}_k(t-\tau), \mathbf{r}_k(t-\tau)) A_s(t-\tau) d\tau. \quad (5.11)$$

Согласно этой формуле, среднее по ансамблю от произвольной функции координат R определяется выражением

$$\langle R \rangle(t) = \langle R \rangle_0 - \frac{1}{\Theta} \sum_s \int_0^\infty \langle R(\mathbf{p}_k(t), \mathbf{r}_k(t)) \times \\ \times \dot{B}_s(\mathbf{p}_k(t-\tau), \mathbf{r}_k(t-\tau)) \rangle_0 A_s(t-\tau) d\tau. \quad (5.12)$$

Здесь величины с индексом «0» соответствуют равновесному состоянию. Выражение (5.12) и есть искомая *формула Кубо*.

Чтобы сформулировать флуктуационно-диссипационную теорему, положим $R = \dot{B}_s$. Тогда

$$\langle \dot{B}_s \rangle(t) = -\frac{1}{\Theta} \sum_{s'} \int_0^\infty \langle \dot{B}_s(\mathbf{p}_k(t), \mathbf{r}_k(t)) \times \\ \times \dot{B}_{s'}(\mathbf{p}_k(t-\tau), \mathbf{r}_k(t-\tau)) \rangle_0 A_{s'}(t-\tau) d\tau. \quad (5.13)$$

Рассмотрим теперь параметры s, s' в качестве характеристик некоторой системы точек \mathbf{r}, \mathbf{r}' пространства и заменим соответствующую сумму интегралом. Заметим, что переменные \mathbf{r}, \mathbf{r}' не следует путать с координатами частиц $\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k$.

Определяя автокорреляционную функцию по пространству и времени для стационарной и однородной системы

с помощью формулы

$$\beta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) = \langle \dot{B}(\mathbf{r}; \mathbf{p}_k(t), \mathbf{r}_k(t)) \dot{B}(\mathbf{r}'; \mathbf{p}_k(t - \tau), \mathbf{r}_k(t - \tau)) \rangle_0, \quad (5.14)$$

получаем

$$\langle \dot{B} \rangle(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\Theta} \int d\mathbf{r}' \int_0^\infty \beta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) A(\mathbf{r}', t - \tau) d\tau. \quad (5.15)$$

Используя теорему о свертке, мы можем ввести понятие «обобщенной проводимости» $C(\mathbf{k}, \omega)$, согласно формуле

$$\langle \ddot{B} \rangle(\mathbf{k}, \omega) = -k^2 C(\mathbf{k}, \omega) \tilde{\tilde{A}}(\mathbf{k}, \omega). \quad (5.16)$$

Из соотношения (5.5), если применить теорему Парсеваля к переменным \mathbf{r} , \mathbf{k} , получаем выражение для диссипации энергии

$$\begin{aligned} W &= \int d\mathbf{k} \int k^2 C(\mathbf{k}, \omega) \tilde{\tilde{A}}(\mathbf{k}, \omega) \tilde{\tilde{A}}^*(\mathbf{k}, \omega) d\omega = \\ &= \int d\mathbf{k} \int k^2 \operatorname{Re} [C(\mathbf{k}, \omega)] |\tilde{\tilde{A}}(\mathbf{k}, \omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Таким образом, величина $\operatorname{Re} [C(\mathbf{k}, \omega)]$ является основным параметром, определяющим диссипацию энергии. Из (5.15) и (5.16) следует, что

$$\Theta k^2 C(\mathbf{k}, \omega) = \int_0^\infty dt \int e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad (5.18)$$

откуда, учитывая свойство симметрии $\beta(\mathbf{r}, -t) = \beta(\mathbf{r}, t)$, находим

$$2\Theta k^2 \operatorname{Re} [C(\mathbf{k}, \omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \beta(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = (2\pi)^2 \tilde{\tilde{\beta}}(\mathbf{k}, \omega). \quad (5.19)$$

Это соотношение и представляет собой формулировку *флуктуационно-диссипационной теоремы*, связывающей параметр диссипации $\operatorname{Re} [C(\mathbf{k}, \omega)]$ с равновесным спектром флуктуаций функции отклика \dot{B}_s .

5.2. Флуктуационно-диссипационная теорема для кулоновской системы

Рассмотрим возмущение кулоновской системы, обусловленное внешним потенциалом $\Phi_{\text{внеш}}(\mathbf{r}, t)$. Тогда

$$H - H_0 = \int d\mathbf{r} \sum_i e_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \Phi_{\text{внеш}}(\mathbf{r}, t), \quad (5.20)$$

и обобщенные параметры, введенные выше, можно свести к следующим частным случаям:

$$A(\mathbf{r}, t) = \Phi_{\text{внеш}}(\mathbf{r}, t), \quad B(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k) = \sum_i e_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (5.21)$$

Используя тождество $(d/dt) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \equiv -(d/d\mathbf{r}) \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \mathbf{v}_i$, находим

$$\langle \dot{\tilde{B}} \rangle(\mathbf{k}, \omega) = -i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k}, \omega), \quad (5.22)$$

так что соотношение (5.16) примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{j}}_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) &= C(\mathbf{k}, \omega) (-i\mathbf{k} \tilde{\Phi}_{\text{внеш}}(\mathbf{k}, \omega)) = \\ &= C(\mathbf{k}, \omega) \tilde{E}_{\parallel \text{внеш}}(\mathbf{k}, \omega). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Здесь через \mathbf{j} обозначена плотность электрического тока, связанная с *внутренним* электрическим полем \mathbf{E} посредством формулы $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, где σ — проводимость. Поскольку это внутреннее поле в свою очередь связано с помощью комплексной диэлектрической проницаемости с внешним полем формулой $\varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{внеш}}$, для обобщенной проводимости получаем соотношение вида

$$C(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\sigma(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)}. \quad (5.24)$$

Если система состоит лишь из электронов с зарядами $(-e)$, автокорреляционная функция определяется выражением

$$\beta(\mathbf{r}, t) = e^2 \langle \dot{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, t) \dot{\mathbf{n}}(\mathbf{0}, 0) \rangle_0, \quad (5.25)$$

где n — значение микроскопической плотности. По аналогии с вычислениями, приведенными в § 4 гл. 6, находим

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(\mathbf{k}, \omega) &= \lim_{T, V \rightarrow \infty} \left[\frac{(2\pi e)^2}{TV} \right] \langle |\tilde{n}(\mathbf{k}, \omega)|^2 \rangle_0 = \\ &= \lim \left[\frac{(2\pi e)^2}{TV} \right] \omega^2 \langle |\tilde{n}(\mathbf{k}, \omega)|^2 \rangle_0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Итак, формулировка *флуктуационно-диссипационной теоремы* для кулоновской системы сводится к соотношению

$$\Theta \frac{k^2}{\omega^2} \operatorname{Re} \left[\frac{\sigma(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} \right] = \lim \frac{(2\pi)^4 e^2}{TV} \langle |\tilde{n}(\mathbf{k}, \omega)|^2 \rangle_0. \quad (5.27)$$

Используя выражение $\varepsilon = 1 + 4\pi i\sigma/\omega$ [см. формулу (2.35) в гл. 6], можно также придать соотношению (5.27) иную форму:

$$\lim \frac{(2\pi)^4 e^2}{TV} \langle |\tilde{n}(\mathbf{k}, \omega)|^2 \rangle_0 = \Theta \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\rho_r}{\rho_r^2 + (\rho_i + 4\pi/\omega)^2}. \quad (5.28)$$

Здесь ρ_r и ρ_i обозначают действительную и мнимую части удельного сопротивления $\rho = 1/\sigma$. Выражение (5.28) связывает фурье-компоненту спектра флуктуаций плотности с характерным параметром, определяющим диссипацию, — удельным сопротивлением ρ .

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Gibbs J. W.*, *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, Dover, New York, 1902 (см. перевод: *Дж. Гиббс*, Основные принципы статистической механики, Гостехиздат, М., 1946).
2. *Ecker G. and Kröll W.*, *Zs. Naturforsch.*, **A21**, 2012, 2033 (1966).
3. *Kirkwood J. G.*, *Journ. Chem. Phys.*, **2**, 767 (1934).
4. *Mayer J. E., Mayer M. G.*, *Statistical Mechanics*, Wiley, New York, 1940 (см. перевод: *Дж. Майер, М. Геннепм-Майер*, Статистическая механика, ИЛ, М., 1952).
5. *Mayer J. E.*, *Journ. Chem. Phys.*, **18**, 1426 (1950).
6. *Meeron E.*, *Journ. Chem. Phys.*, **28**, 630 (1958).
7. *Friedman H. L.*, *Ionic Solution Theory*, Wiley (Interscience), New York, 1962, p. 147.
8. *Abé R.*, *Progr. Theor. Phys.*, **22**, 213 (1959).
9. *Morita T.*, *Progr. Theor. Phys.*, **20**, 920 (1958).
10. *Meeron E.*, *Journ. Math. Phys.*, **1**, 192 (1960).
11. *De Witt H. E.*, *Phys. Rev.*, **140**, 466 (1965).

12. Born M., Green H. S., Proc. Roy. Soc. Ser., A188, 10 (1946).
13. Mozer B., Baranger M., Phys. Rev., 115, 521 (1959); 118, 696 (1960).
14. Holtmark J., Ann. Phys. (Leipzig), 58, 577 (1919).
15. Ecker G., Müller K. G., Zs. Phys., 153, 317 (1958).
16. Engelmann F., Zs. Phys., 169, 126 (1962).
17. Pfenning H., Trefftz E., Zs. Naturforsch., A21, 697 (1966).
18. Ecker G., Fischer K. G., Forschungsber. NRW, № 1949 (1968).
19. Chandrasekhar S., Rev. Mod. Phys., 15, 1 (1943).
20. Коган В. И., Селидовкин А. Д., Beitr. Plasmaphys., 9, 199 (1969).
21. Rostoker N., Nucl. Fusion, 1, 101 (1960).
22. Kubo R., Journ. Phys. Soc. Jap., 20, 439 (1957).

Дополнительная литература

К § 1

Ehrenfest P., Ehrenfest T., The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics, Leipzig, 1911 (Engl. Transl.: Cornell Univ. Press, Ithaca, New York, 1959).

Münster A., Prinzipien der statistischen Mechanik в книге Handbuch der Physik (ed. S. Flügge), Vol. III/2, Springer, Berlin, 1959.

Tolman R., The Principles of Statistical Mechanics, Freeman, San Francisco, California, 1938.

К § 2

Hill T. L., An Introduction to Statistical Thermodynamics, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1960).

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, изд-во «Наука», М., 1964.

Montroll E. W., Topics on statistical mechanics of interacting particles в книге La théorie des gaz neutres et ionisés (eds. C. De Witt and J. F. Detoeuf), Hermann, Paris, 1960.

К § 3

Ebeling W., Ann. Phys. (Leipzig), 19, 104 (1967).

Ebeling W., Hoffmann H. J., Kelbg G., Beitr. Plasmaphys., 3, 233 (1967).

Kelbg G., Ann. Phys. (Leipzig), 14, 394 (1964).

Kelbg G., Extensions of the Debye—Hückel limiting law; Application to ionic solutions and plasmas в книге Chemical Physics of Ionic Solutions (eds. B. E. Conway and R. G. Barradas). Wiley, New York, 1966.

К § 4

The Equilibrium Theory of Classical Fluids, (eds. H. L. Frisch, J. L. Lebowitz), Benjamin, New York, 1964.

Graboske H. C., Jr., Harwood D. J., De Witt H. E., Phys. Rev., A3, 1419 (1971).

- Gündel H.*, Beitr. Plasmaphys., **10**, 455 (1970).
Hirt C. W., Phys. Fluids, **8**, 693 (1965).
Hirt C. W., Phys. Fluids, **10**, 565 (1967).
Kirkwood J. C., Journ. Chem. Phys., **3**, 300 (1935).
Kirkwood J. C., *Boggs E. M.*, Journ. Chem. Phys., **10**, 394 (1942).
Matsuda K., Phys. Fluids, **11**, 328 (1968).
Meeron E., Journ. Chem. Phys., **27**, 1238 (1957).
Meeron E., Phys. Fluids, **1**, 139 (1958).
Meeron E., *Rodemich E. R.*, Phys. Fluids, **1**, 246 (1958).
O'Neil T., *Rostoker N.*, Phys. Fluids, **8**, 1109 (1965).
Onsager L., Chem. Rev., **13**, 73 (1943).
Веденов А. А., Термодинамика плазмы, в сб. «Вопросы теории плазмы», т. 1, М., 1963, стр. 273.
Алямовский В. Н., ЖЭТФ, **42**, 1536 (1962).
Broyles A. A., Zs. Phys., **151**, 187 (1958).
Ecker G., Zs. Phys., **148**, 593 (1957).
Hooper C. F., Phys. Rev., **149**, 77 (1966).
Hooper C. F., Phys. Rev., **165**, 215 (1968).
Jackson J. L., Phys. Fluids, **3**, 927 (1960).
Kelbg G., Ann. Phys. (Leipzig), **13**, 385 (1964).
Weise K., Zs. Phys., **183**, 36 (1965).
Weise K., Zs. Phys., **212**, 458 (1968).

К § 5

- Callen H. B.*, *Welton T. A.*, Phys. Rev., **83**, 34 (1951).
Kubo R., Some aspects of the statistical mechanical theory of irreversible processes, в книге Lectures in Theoretical Physics (eds. W. E. Brittin, L. G. Dunham), Vol. I, Wiley (Interscience), New York, 1959.
Lax M., Rev. Mod. Phys., **32**, 25 (1960).
Nyquist H., Phys. Rev., **32**, 110 (1928).
Takahashi H., Journ. Phys. Soc. Jap., **20**, 439 (1952).
Taylor J. B., Phys. Fluids, **3**, 792 (1960).
Thompson W. B., *Hubbard J.*, Rev. Mod. Phys., **32**, 714 (1960).

Глава 2

Неравновесные состояния кулоновской системы. Общее описание.

§ 1. ТОЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ

1.1. Уравнения Климонтовича

В данном параграфе мы рассмотрим истинную плотность распределения однокомпонентной системы в μ -пространстве. Очевидно, эта величина должна отличаться от соответствующей средней плотности распределения по ансамблю Гиббса.

Вклад i -й частицы в полную плотность распределения для нашей системы представим с помощью функций Дирака в виде

$$F_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)). \quad (1.1)$$

Тогда полная плотность распределения всех частиц сорта k равна

$$F^{(k)} = \sum_{i(k)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)). \quad (1.2)$$

Здесь через $i(k)$ обозначены все частицы, принадлежащие к данному сорту k .

Прежде чем сформулировать законы движения для плотности распределения F_i , напомним некоторые правила, которым подчиняются функции Дирака. Функция Дирака не является обычной функцией, она принадлежит к группе «распределений Шварца». Соотношения, которые приводятся ниже, основываются частично на определении функции Дирака и частично на теории распределений Шварца. В тех случаях, когда соотношения не содержат интегрирования, их следует понимать символически. Итак, мы имеем

$$\delta(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a),$$

$$x\delta(x) = 0, \quad f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a),$$

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|} \quad \text{для} \quad a \neq 0, \quad (1.3)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x-a) + \delta(x+a)}{2a} \quad \text{для} \quad a > 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(a-x)\delta(x-b) dx = \delta(a-b),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x) dx = [f(x)\delta(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\delta(x) dx = -f'(0),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta^{(n)}(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0).$$

Производная функции F_i по времени определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_i}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}, \mathbf{p}} &= \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \left(\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{r}_i}\right)_{\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}_i} + \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \left(\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{p}_i}\right)_{\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{r}_i} = \\ &= -\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \left(\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{r}}\right)_{\mathbf{p}, t} - \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \left(\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{p}}\right)_{\mathbf{r}, t}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Если через \mathbf{E}_j^i обозначить поле, действующее со стороны частицы j на частицу i , то из законов классической механики находим

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}, \mathbf{p}} = -\frac{\mathbf{p}_i}{m_i} \cdot \left(\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{r}}\right)_{\mathbf{p}, t} - e_i \sum_j' \mathbf{E}_j^i \left(\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{p}}\right)_{\mathbf{r}, t} \quad (1.5)$$

или

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} = -\frac{\mathbf{p}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{r}} - e_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left\{ \sum_j' \mathbf{E}_j^i F_i \right\}, \quad (1.6)$$

поскольку \mathbf{E}_j^i не зависит от импульса частицы и имеет вид

$$\mathbf{E}_j^i = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \left(\frac{e_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right). \quad (1.7)$$

Используя свойства функции Дирака (1.3), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_j^i F_i &= -e_j \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) = \\ &= -e_j \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{p}' \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) \times \\ &\quad \times \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}_j) = -e_j \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{p}' \times \\ &\quad \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) F_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) F_j(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t). \quad (1.8) \end{aligned}$$

Таким образом, в результате подстановки (1.8) в (1.6) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m_i} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{r}} - \\ - e_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left\{ \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{p}' \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) F_i \sum_j' F_j' e_j \right\} = 0. \quad (1.9) \end{aligned}$$

Следует заметить, что в уравнении (1.9) учитывается только кулоновское взаимодействие внутри системы и пренебрегается внешними полями. Если же имеются такие поля $\mathbf{E}_{\text{внеш}}$, то в правую часть уравнения (1.6), а также в последующие формулы необходимо добавить соответствующее слагаемое. Индексом i в (1.9) можно обозначить любую частицу рассматриваемой системы. Поэтому (1.9) в действительности представляет собой систему совместных дифференциальных уравнений, порядок которой определяется числом частиц в данной системе.

В уравнениях (1.9) суммирование производится по плотностям распределений всех частиц одного и того же сорта k . Если использовать определение (1.2), то в ре-

зультате суммирования получим

$$\frac{\partial F^{(k)}}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m_k} \cdot \frac{\partial F^{(k)}}{\partial \mathbf{r}} - e_k \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left\{ \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{p}' \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \right. \\ \left. \times F^{(k)} \sum_{\nu} F^{(\nu)}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t) e_{\nu} \right\} = 0. \quad (1.10)$$

Здесь учтены слагаемые, первоначально исключенные [поэтому в (1.9) использовался знак суммы со штрихом]. Это оправдано, поскольку такие слагаемые дают пренебрежимо малый вклад по сравнению с другими $N - 1$ членами суммы. Уравнения (1.10) также представляют собой систему совместных дифференциальных уравнений. Однако порядок этой системы уравнений определяется теперь числом различных сортов частиц.

Уравнения (1.10) можно переписать в виде

$$\frac{\partial F^{(k)}}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m_k} \cdot \frac{\partial F^{(k)}}{\partial \mathbf{r}} + e_k \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \{ \mathbf{E} F^{(k)} \} = 0, \quad (1.11)$$

где

$$\mathbf{E} = - \int d\mathbf{r}' \int \sum_{\nu} F^{(\nu)}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t) e_{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{p}'. \quad (1.12)$$

Для величины \mathbf{E} выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\nu} \int F^{(\nu)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t) e_{\nu} d\mathbf{p}', \quad (1.13)$$

если вспомнить, что

$$\Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.14)$$

Уравнения (1.11) и (1.12) называются *уравнениями Климонтовича* [1] для истинной плотности распределения частиц рассматриваемой системы. Эти уравнения являются точными и свободными от приближений.

Следует заметить, что уравнения Климонтовича идентичны уравнениям Власова в статистической механике, описывающим среднюю плотность по ансамблю. Однако

уравнения Власова не являются точными и имеют ограниченную область применения. Отсюда может возникнуть вопрос, почему вообще мы ищем статистическое решение приближенных уравнений Власова, когда, как показано, те же самые уравнения описывают точное поведение истинной плотности распределения частиц рассматриваемой системы. Дело в том, что решение уравнений Климонтовича подчиняется очень жестким условиям: для любого момента времени все решения должны быть представлены в форме (1.2). Такие жесткие ограничения приводят к тому, что решение уравнений Климонтовича практически невозможно, а это в свою очередь отражает хорошо известные трудности эргодической проблемы.

§ 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, УСРЕДНЕННЫЕ ПО АНСАМБЛЮ ГИББСА

2.1. Вывод цепочки уравнений Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Йвона (ББГКИ) из уравнений Климонтовича

Как и в случае статистики равновесных систем, рассмотрим теперь виртуальный ансамбль Гиббса в Γ -пространстве, характеризующийся плотностью вероятности

$$f_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N; t). \quad (2.1)$$

Плотность вероятности i -й частицы в данной точке (${}^i\mathbf{r}$, ${}^i\mathbf{p}$) μ -пространства определяется следующим образом¹⁾:

$$f_1({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{p}; t) = \int f_N F_i d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{p}_N. \quad (2.2)$$

В более общем виде плотность вероятности найти набор частиц $(1, \dots, s)$ в точках $({}^1\mathbf{r}, \dots, {}^s\mathbf{r}, {}^1\mathbf{p}, \dots, {}^s\mathbf{p})$ дается частной функцией распределения порядка s :

$$f_s({}^1\mathbf{r}, \dots, {}^s\mathbf{r}, {}^1\mathbf{p}, \dots, {}^s\mathbf{p}; t) = \int f_N F_1 \dots F_s d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{p}_N. \quad (2.3)$$

¹⁾ Обратим внимание на разницу в написании индексов. Индекс внизу справа ($\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j$) характеризует положение частиц (точек) в Γ -пространстве. Индекс вверху слева (${}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{p}, {}^j\mathbf{r}, {}^j\mathbf{p}$) характеризует точку наблюдения в μ -пространстве, в которой мы рассматриваем эффекты от частиц i и j .

Здесь мы использовали небольшое видоизменение соотношения (1.1):

$$F_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)). \quad (2.4)$$

Чтобы получить цепочку уравнений БГКИ, которым удовлетворяет частная функция распределения f_s , необходимо умножить уравнения (1.9) на плотность вероятности (2.1) в фазовом пространстве, а затем проинтегрировать по Γ -пространству. Тогда

$$\int f_N \left\{ \left(\frac{\partial F_i}{\partial t} \right)_{i_r, i_p} + \frac{i_p}{m_i} \cdot \left(\frac{\partial F_i}{\partial i_r} \right)_{i_p, t} - e_i \frac{\partial}{\partial i_p} \cdot \left[\int d^j \mathbf{r}' \int d^j \mathbf{p}' \left(\frac{\partial}{\partial i_r} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times F_i \sum_j' F_j e_j \right]_{i_r, t} \right\} d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{p}_N = 0. \quad (2.5)$$

Плотность вероятности в фазовом пространстве $f_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N; t)$ не зависит от координат i_r, i_p , и поэтому выполнить интегрирование во втором и третьем члене левой части уравнения весьма просто.

Первый же член требует дополнительного рассмотрения. Сначала вспомним, что имеет место следующее соотношение:

$$f_N \left(\frac{\partial F_i}{\partial t} \right)_{i_r, i_p} = \left(\frac{\partial f_N F_i}{\partial t} \right)_{i_r, i_p} - F_i \left(\frac{\partial f_N}{\partial t} \right)_{i_r, i_p} = \\ = \left(\frac{\partial f_N F_i}{\partial t} \right)_{i_r, i_p} - F_i \frac{df_N}{dt} = \left(\frac{\partial f_N F_i}{\partial t} \right)_{i_r, i_p}. \quad (2.6)$$

Используя соотношение (2.6) и равенство

$$\left(\frac{\partial f_N F_i}{\partial t} \right)_{i_r, i_p} = \left(\frac{\partial f_N F_i}{\partial t} \right)_{i_r, i_p, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i} + \\ + \sum_j \left(\frac{\mathbf{p}_j}{m_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} + \dot{\mathbf{p}}_j \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j} \right)_{i_r, i_p, t} (f_N F_i), \quad (2.7)$$

получаем

$$f_N \left(\frac{\partial F_i}{\partial t} \right)_{i_r, i_p} = \left(\frac{\partial f_N F_i}{\partial t} \right)_{i_r, i_p, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i} + \\ + \sum_j \left(\frac{\mathbf{p}_j}{m_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} + \dot{\mathbf{p}}_j \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j} \right)_{i_r, i_p, t} (f_N F_i). \quad (2.8)$$

Отсюда находим

$$\int f_N \left(\frac{\partial F_i}{\partial t} \right)_{i_r, i_p} d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{p}_N = \left(\frac{\partial f_1(i_r, i_p; t)}{\partial t} \right)_{i_r, i_p}. \quad (2.9)$$

Здесь учтено, что второй член в (2.8) исчезает при интегрировании по частям и применении уравнений движения.

Окончательно, исходя из определения частных функций распределения f_s , находим уравнение для средних распределений

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{i_p}{m_i} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial i_r} - \\ - e_i \int d^j \mathbf{r}' \int d^j \mathbf{p}' \left(\frac{\partial}{\partial i_r} \frac{1}{|i_r - j_r'|} \right) \cdot \\ \cdot \frac{\partial}{\partial i_p} \sum_j' f_2(i_r, j_r', i_p, j_p'; t) e_j = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Это и есть первое уравнение цепочки зацепляющихся уравнений для функций распределения. Следующее уравнение выражает f_2 через f_3 и т. д. Прежде чем вывести такую цепочку уравнений, упростим задачу путем введения следующей частной модели.

1. Без ограничения общности допустим, что в системе имеется только один сорт частиц. Не представляет труда распространить изложенный формализм на многокомпонентную систему частиц.

2. Будем считать, что плотность вероятности в фазовом пространстве f_N является симметричной. Поскольку уравнение Лиувилля симметрично относительно координат, такое предположение всегда справедливо, если начальное распределение для f_N симметрично относительно координат частиц. Однако следует заметить, что в целом ряде интересных задач это предположение не выполняется. Например, требование симметрии нарушается в проблеме пробной частицы. С другой стороны, пользуясь развитым ниже формализмом, нетрудно написать соотношения также и для несимметричных случаев.

Используя эти упрощающие задачу допущения, величину $e_i e_j$ можно заменить на e^2 . Тогда уравнение (2.10)

запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{i\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial i\mathbf{r}} - \\ - e^2(N-1) \int d^j\mathbf{r}' \int \left(\frac{\partial}{\partial i\mathbf{r}} \frac{1}{|i\mathbf{r}-j\mathbf{r}'|} \right) \cdot \\ \cdot \frac{\partial}{\partial i\mathbf{p}} f_2(i\mathbf{r}, j\mathbf{r}', i\mathbf{p}, j\mathbf{p}'; t) d^j\mathbf{p}' = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Это уравнение является первым уравнением цепочки ББГКИ. Оно связывает частную одночастичную функцию распределения f_1 с двухчастичной функцией распределения f_2 .

Чтобы решить уравнение (2.11), мы должны получить уравнение для двухчастичной функции распределения f_2 . С этой целью рассмотрим два уравнения Климонтовича для частиц сорта i и k в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial t} + \frac{i\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial i\mathbf{r}} - \\ - e^2 \frac{\partial}{\partial i\mathbf{p}} \cdot \left\{ \int d^j\mathbf{r}' \int \left(\frac{\partial}{\partial i\mathbf{r}} \frac{1}{|i\mathbf{r}-j\mathbf{r}'|} \right) \times \right. \\ \left. \times F_i(i\mathbf{r}, i\mathbf{p}) \sum_{j \neq i} F_j(j\mathbf{r}', j\mathbf{p}') \right\} d^j\mathbf{p}' = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_k}{\partial t} + \frac{k\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial F_k}{\partial k\mathbf{r}} - \\ - e^2 \frac{\partial}{\partial k\mathbf{p}} \left\{ \int d^j\mathbf{r}' \int \left(\frac{\partial}{\partial k\mathbf{r}} \frac{1}{|k\mathbf{r}-j\mathbf{r}'|} \right) \times \right. \\ \left. \times F_k(k\mathbf{r}, k\mathbf{p}) \sum_{j \neq k} F_j(j\mathbf{r}', j\mathbf{p}') \right\} d^j\mathbf{p}' = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Умножив (2.12) на $F_k f_N$, а (2.13) на $F_i f_N$ и сложив оба уравнения, проинтегрируем полученный результат по Γ -пространству, используя при этом соотношение (2.3).

Тогда получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{i\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial i\mathbf{r}} + \frac{k\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial k\mathbf{r}} - \\ & - e^2 \int d^j \mathbf{r}' \int d^j \mathbf{p}' \int f_N \left(\frac{\partial}{\partial i\mathbf{r}} \frac{1}{|i\mathbf{r} - i\mathbf{r}'|} \right) \cdot \\ & \cdot \frac{\partial}{\partial i\mathbf{p}} F_k F_i \sum_{j \neq i} F_j ({}^j \mathbf{r}', {}^j \mathbf{p}') d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{p}_N - \\ & - e^2 \int d^j \mathbf{r}' \int d^j \mathbf{p}' \int f_N \left(\frac{\partial}{\partial k\mathbf{r}} \frac{1}{|k\mathbf{r} - j\mathbf{r}'|} \right) \cdot \\ & \cdot \frac{\partial}{\partial k\mathbf{p}} F_i F_k \sum_{j \neq k} F_j ({}^j \mathbf{r}', {}^j \mathbf{p}') d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{p}_N = 0. \quad (2.14) \end{aligned}$$

Рассмотрим два последних члена в левой части этого уравнения. Поскольку функция f_N в фазовом пространстве зависит только от переменных с нижними индексами, расположенными справа, f_N можно вносить под знак дифференцирования. Оба члена содержат слагаемые двух типов. Одни содержат F -функции, индексы которых отличаются друг от друга и довольно просто интегрируются по Γ -пространству, давая трехчастичную функцию распределения $f_3(i\mathbf{r}, {}^k \mathbf{r}, {}^l \mathbf{r}', i\mathbf{p}, {}^k \mathbf{p}, {}^l \mathbf{p}'; t)$. Другие слагаемые содержат две F -функции с совпадающими индексами:

$$\begin{aligned} & - e^2 \int d^k \mathbf{r}' \int d^k \mathbf{p}' \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{p}_N \left(\frac{\partial}{\partial i\mathbf{r}} \frac{1}{|i\mathbf{r} - k\mathbf{r}'|} \right) \cdot \\ & \cdot \frac{\partial}{\partial i\mathbf{p}} F_k ({}^k \mathbf{r}, {}^k \mathbf{p}) F_k ({}^k \mathbf{r}', {}^k \mathbf{p}') F_i (i\mathbf{r}, i\mathbf{p}) f_N (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N; t) - \\ & - e^2 \int d^i \mathbf{r}' \int d^i \mathbf{p}' \int \left(\frac{\partial}{\partial k\mathbf{r}} \frac{1}{|k\mathbf{r} - i\mathbf{r}'|} \right) \cdot \\ & \cdot \frac{\partial}{\partial k\mathbf{p}} F_i (i\mathbf{r}, i\mathbf{p}) F_i (i\mathbf{r}', i\mathbf{p}') F_k ({}^k \mathbf{r}, {}^k \mathbf{p}) \times \\ & \times f_N (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N; t) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{p}_N. \quad (2.15) \end{aligned}$$

В этом выражении интегрирование проводится сначала по координатам ${}^k \mathbf{r}'$, ${}^k \mathbf{p}'$ и $i\mathbf{r}'$, $i\mathbf{p}'$ соответственно, а затем по координатам Γ -пространства. В результате получаем

$$\begin{aligned} & - e^2 \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial i\mathbf{r}} \frac{1}{|i\mathbf{r} - k\mathbf{r}|} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial i\mathbf{p}} f_2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial}{\partial k\mathbf{r}} \frac{1}{|i\mathbf{r} - k\mathbf{r}|} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial k\mathbf{p}} f_2 \right\}. \quad (2.16) \end{aligned}$$

Подставляя эти результаты в (2.14), мы приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{i_{\mathbf{p}}}{m} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial i_{\mathbf{r}}} + \frac{k_{\mathbf{p}}}{m} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial k_{\mathbf{r}}} - \\ & - e^2 \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial i_{\mathbf{r}}} \frac{1}{|i_{\mathbf{r}} - k_{\mathbf{r}}|} \right) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial i_{\mathbf{p}}} + \left(\frac{\partial}{\partial k_{\mathbf{r}}} \frac{1}{|i_{\mathbf{r}} - k_{\mathbf{r}}|} \right) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial k_{\mathbf{p}}} \right\} - \\ & - e^2 (N-2) \int d^j \mathbf{r}' \int \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial i_{\mathbf{r}}} \frac{1}{|i_{\mathbf{r}} - j_{\mathbf{r}}'|} \right) \cdot \right. \\ & \quad \cdot \frac{\partial}{\partial i_{\mathbf{p}}} f_3(i_{\mathbf{r}}, k_{\mathbf{r}}, j_{\mathbf{r}}', i_{\mathbf{p}}, k_{\mathbf{p}}, j_{\mathbf{p}}'; t) + \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial}{\partial k_{\mathbf{r}}} \frac{1}{|k_{\mathbf{r}} - j_{\mathbf{r}}'|} \right) \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot \frac{\partial}{\partial k_{\mathbf{p}}} f_3(i_{\mathbf{r}}, k_{\mathbf{r}}, j_{\mathbf{r}}', i_{\mathbf{p}}, k_{\mathbf{p}}, j_{\mathbf{p}}'; t) \right\} d^j \mathbf{p}' = 0. \quad (2.17) \end{aligned}$$

Это и есть второе уравнение цепочки ББГКИ, которое связывает двухчастичную функцию распределения f_2 с частной трехчастичной функцией распределения f_3 .

Легко видеть, что такая процедура может быть продолжена до получения общего вида цепочки уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \frac{i_{\mathbf{p}}}{m} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial i_{\mathbf{r}}} - e^2 \sum_{i,k}^s \left(\frac{\partial}{\partial i_{\mathbf{r}}} \frac{1}{|i_{\mathbf{r}} - k_{\mathbf{r}}|} \right) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial i_{\mathbf{p}}} - \\ & - (N-s) e^2 \int d^j \mathbf{r}' \int \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial}{\partial i_{\mathbf{r}}} \frac{1}{|i_{\mathbf{r}} - j_{\mathbf{r}}'|} \right) \cdot \\ & \quad \cdot \frac{\partial}{\partial i_{\mathbf{p}}} f_{s+1}(\dots, j_{\mathbf{r}}', \dots, j_{\mathbf{p}}'; t) d^j \mathbf{p}' = 0. \quad (2.18) \end{aligned}$$

Для реальных физических задач обычно частные молекулярные функции распределения f_s не представляют интереса, так как в принципе невозможно различить между собой частицы одного и того же сорта. Значительно больший интерес представляет изучение общих функций распределения $f^{(s)}$, которые дают среднюю плотность любых s частиц в наперед заданных положениях ¹⁾. Общие

¹⁾ Для сравнения см. аналогичное рассуждение в начале § 4 гл. 1.

Функции распределения определяются следующим образом:

$$f^{(s)} = \frac{N!}{(N-s)!} f_s. \quad (2.19)$$

Вводя эти общие функции распределения $f^{(s)}$ в цепочку уравнений (2.18), приходим к окончательному виду цепочки уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(s)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \frac{i_{\mathbf{p}}}{m} \cdot \frac{\partial f^{(s)}}{\partial i_{\mathbf{r}}} - e^2 \sum_{i, k}^s \left(\frac{\partial}{\partial i_{\mathbf{r}}} \frac{1}{|i_{\mathbf{r}} - k_{\mathbf{r}}|} \right) \cdot \frac{\partial f^{(s)}}{\partial i_{\mathbf{p}}} - \\ - e^2 \int d^j \mathbf{r}' \int \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial}{\partial i_{\mathbf{r}}} \frac{1}{|i_{\mathbf{r}} - j_{\mathbf{r}}'|} \right) \cdot \\ \cdot \frac{\partial}{\partial i_{\mathbf{p}}} f^{(s+1)}(\dots, j_{\mathbf{r}}', \dots, j_{\mathbf{p}}'; t) d^j \mathbf{p}' = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

В литературе принято использовать вместо частных функций распределения f_s нормированные функции распределения \bar{f}_s , определенные следующим образом:

$$\bar{f}_s = V^s f_s. \quad (2.21)$$

Для этих функций цепочка уравнений (2.18) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \frac{i_{\mathbf{p}}}{m} \cdot \frac{\partial \bar{f}_s}{\partial i_{\mathbf{r}}} - e^2 \sum_{i, k}^s \left(\frac{\partial}{\partial i_{\mathbf{r}}} \frac{1}{|i_{\mathbf{r}} - k_{\mathbf{r}}|} \right) \cdot \frac{\partial \bar{f}_s}{\partial i_{\mathbf{p}}} - \\ - e^2 \frac{N-s}{V} \int d^j \mathbf{r}' \int d^j \mathbf{p}' \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial}{\partial i_{\mathbf{r}}} \frac{1}{|i_{\mathbf{r}} - j_{\mathbf{r}}'|} \right) \cdot \\ \cdot \frac{\partial}{\partial i_{\mathbf{p}}} \bar{f}_{s+1}(\dots, j_{\mathbf{r}}', \dots, j_{\mathbf{p}}'; t) = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Кроме того, следует заметить, что все интегралы, которые встречаются при выводе цепочки уравнений, берутся в бесконечных пределах. Если рассматривается ограниченный объем, то в цепочку уравнений следует ввести дополнительные члены, которые возникают в результате учета граничных условий. Поэтому в системе уравнений

(2.20) и соответственно (2.22) неявно подразумевается предельный переход, при котором $V \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$, но $N/V = \text{const}$.

Очевидно, чтобы получить конечную систему уравнений, необходимо оборвать цепочку уравнений. Различные кинетические приближения отличаются друг от друга прежде всего тем, как и где обрываются бесконечные цепочки уравнений. Наиболее простым приближением является полное пренебрежение корреляцией между частицами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Климонтвич Ю. Л.*, Статистическая теория неравновесных процессов в плазме, изд-во МГУ, 1964.

Дополнительная литература

Chappell W. R., Journ. Math. Phys., 8, 298 (1967).

Chappell W. R., Microscopic kinetic theory, в книге Lectures in Theoretical Physics, Vol. IX, C, Kinetic Theory (ed. W. E. Brittin), Univ. of Colorado Press, Denver, Colorado, 1967.

Wu C. S., Plasma kinetic theory in the Klimontovich formalism, в книге Lectures in Theoretical Physics, Vol. IX, C, Kinetic Theory (ed. W. E. Brittin), Univ. of Colorado Press, Denver, Colorado, 1967.

Глава 3

Неравновесные состояния кулоновской системы. Приближенное описание в отсутствие корреляций между частицами

§ 1. ПРИБЛИЖЕНИЕ ВЛАСОВА

1.1. Уравнение Власова

Рассмотрим первое уравнение цепочки (2.20), полученное в гл. 2, и обобщим его на случай нескольких сортов частиц (μ, ν, \dots)¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(1)}(\mu_{\mathbf{r}}, \mu_{\mathbf{p}}; t)}{\partial t} + \frac{\mu_{\mathbf{p}}}{m_{\mu}} \cdot \frac{\partial f^{(1)}(\mu_{\mathbf{r}}, \mu_{\mathbf{p}}; t)}{\partial \mu_{\mathbf{r}}} - \\ - e_{\mu} \sum_{\nu} \int d^{\nu} \mathbf{r}' \int d^{\nu} \mathbf{p}' \left(\frac{\partial}{\partial \mu_{\mathbf{r}}} \frac{e_{\nu}}{|\mu_{\mathbf{r}} - \nu_{\mathbf{r}}'|} \right) \cdot \\ \cdot \frac{\partial}{\partial \mu_{\mathbf{p}}} f^{(2)}(\mu_{\mathbf{r}}, \nu_{\mathbf{r}}', \mu_{\mathbf{p}}, \nu_{\mathbf{p}}'; t) = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Определяя корреляционную функцию $g_{\mu\nu}$ следующим образом²⁾:

$$\begin{aligned} f^{(2)}(\mu_{\mathbf{r}}, \nu_{\mathbf{r}}, \mu_{\mathbf{p}}, \nu_{\mathbf{p}}; t) = f^{(1)}(\mu_{\mathbf{r}}, \mu_{\mathbf{p}}; t) f^{(1)}(\nu_{\mathbf{r}}, \nu_{\mathbf{p}}; t) + \\ + g_{\mu\nu}(\mu_{\mathbf{r}}, \nu_{\mathbf{r}}, \mu_{\mathbf{p}}, \nu_{\mathbf{p}}; t), \end{aligned} \quad (1.2)$$

находим из (1.1) уравнение для общей функции распределения $f^{(1)}$ частиц сорта μ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\mu_{\mathbf{p}}}{m_{\mu}} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mu_{\mathbf{r}}} + e_{\mu} \langle \mathbf{E} \rangle \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mu_{\mathbf{p}}} = \\ = e_{\mu} \sum_{\nu} \int d^{\nu} \mathbf{r}' \int d^{\nu} \mathbf{p}' \left(\frac{\partial}{\partial \mu_{\mathbf{r}}} \frac{e_{\nu}}{|\mu_{\mathbf{r}} - \nu_{\mathbf{r}}'|} \right) \cdot \\ \cdot \frac{\partial}{\partial \mu_{\mathbf{p}}} g_{\mu\nu}(\mu_{\mathbf{r}}, \nu_{\mathbf{r}}', \mu_{\mathbf{p}}, \nu_{\mathbf{p}}'; t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

¹⁾ Латинскими буквами обозначаются различные частицы, а греческими буквами — разные сорта частиц.

²⁾ Заметим, что корреляционные функции $g_{\mu\nu}$ отличаются в данном рассмотрении от корреляционных функций, применяемых для описания равновесных систем (см. примечание на стр. 73).

где

$$\langle \mathbf{E} \rangle = - \sum_{\nu} \int d^{\nu} \mathbf{r}' \int d^{\nu} \mathbf{p}' \left(\frac{\partial}{\partial \mu_{\mathbf{r}}} \frac{e_{\nu}}{|\mu_{\mathbf{r}} - \nu_{\mathbf{r}'}|} \right) \times \\ \times f^{(1)}(\nu_{\mathbf{r}'}, \nu_{\mathbf{p}'}; t) + \mathbf{E}_{\text{внешн.}} \quad (1.4)$$

Здесь через $\mathbf{E}_{\text{внешн}}$ обозначено внешнее электрическое поле. Уравнение (1.3) в отсутствие корреляций, когда

$$g_{\mu\nu} = 0, \quad (1.5)$$

совпадает с уравнением Власова [1]

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\mu_{\mathbf{p}}}{m_{\mu}} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mu_{\mathbf{r}}} + e_{\mu} \langle \mathbf{E} \rangle \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mu_{\mathbf{p}}} = 0, \quad (1.6)$$

причем $\langle \mathbf{E} \rangle$ дается выражением (1.4).

Условие (1.5) накладывает ограничения на применимость уравнения Власова. В реальных системах это условие выполняется только приближенно. Для того чтобы обсудить, насколько существенный вклад дает член с парными корреляциями, приведем здесь некоторые результаты, которые будут получены ниже, при исследовании уравнений цепочки более высокого порядка. Мы покажем, что при определенных условиях вклад от члена, стоящего в правой части уравнения (1.3), порядка величины $f^{(1)}/\tau_c$, где τ_c — время между столкновениями электронов ¹⁾

$$\tau_c \approx \frac{\Lambda}{\omega_{p-} \ln \Lambda}. \quad (1.7)$$

Здесь

$$\omega_{p-} = \left(\frac{4\pi n e^2}{m} \right)^{1/2}; \quad \Lambda = \frac{3\Theta^{3/2}}{(4\pi n)^{1/2} e^3} = 9\delta, \quad (1.8)$$

где ω_{p-} — хорошо известная электронная плазменная частота, а Λ — плазменный параметр, который пропорционален числу частиц δ в дебаевской сфере.

Пренебрежение корреляциями возможно только при рассмотрении явлений с характерным временем τ , удовлетворяющим условию

$$\tau \ll \tau_c. \quad (1.9)$$

¹⁾ См. для сравнения определения, приведенные в приложении,

Если плотность плазмы значительно ниже критической, т. е. когда $\Lambda \gg 1$, мы можем пренебречь корреляциями вплоть до характерных времен порядка времени электронных плазменных колебаний τ_{p-} . Это очень важное замечание, поскольку большинство коллективных явлений, описываемых уравнением Власова, имеют характерные времена порядка τ_{p-} .

Чтобы оценить возможности применения приближения Власова к реальным физическим системам, в табл. 1 при-

Таблица 1

Характерные параметры для некоторых плазменных сред

Плазма (полностью ионизованная)	n , см ⁻³	Θ/k_B , К	Λ	τ_{p-} , с	τ_c , с
Межзвездный газ	1	10 ²	10 ⁷	10 ⁻⁴	10
Солнечная корона	10 ⁶	10 ⁶	10 ¹⁰	10 ⁻⁷	10
Разряд низкого давления . . .	10 ¹¹	5 · 10 ⁴	4 · 10 ⁵	4 · 10 ⁻¹⁰	2 · 10 ⁻⁶
Разряд высокого давления . . .	10 ¹⁵	5 · 10 ³	10	4 · 10 ⁻¹²	3 · 10 ⁻¹²
Термоядерная плазма	10 ¹⁶	10 ⁸	10 ⁸	10 ⁻¹²	10 ⁻⁶

ведены характерные параметры для некоторых типичных плазменных сред.

Заслуживает внимания тот факт, что Власов сам предложил некоторую гипотетическую систему, которая точно описывается уравнением Власова, — так называемую *дисперсионную модель* [2]. Эта модель основана на беспредельном разбиении каждой частицы на равные части, так что $n \rightarrow \infty$. Процесс такого разбиения подчиняется следующим условиям:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ne) = \text{const}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (nm) = \text{const}. \quad (1.10)$$

Из выражений (1.10) следует, что $e/m = \text{const}$, и поскольку тепловая скорость — постоянная величина, $\Theta \rightarrow 0$,

Совершенно очевидно, что при условиях (1.10) уравнение Власова и время плазменных колебаний τ_p остаются неизменными. То же самое справедливо и для дебаевской длины, которая является произведением времени плазменных колебаний и тепловой скорости. Из всего сказанного следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda = \infty. \quad (1.14)$$

Из этого условия и выражения (1.7) получаем $\tau_c \rightarrow \infty$, что означает отсутствие корреляций между частицами.

1.2. Общие свойства

В дальнейшем для простоты будем рассматривать однокомпонентную систему, а поэтому в уравнениях (1.4) и (1.6) опустим индексы μ и ν . При этом, чтобы избежать расходимости электрического поля в пределе $N \rightarrow \infty$ и $V \rightarrow \infty$, предположим, что в системе существует компенсирующий фон, равномерно распределенный в пространстве с полным зарядом, равным по величине и противоположным по знаку полному заряду частиц рассматриваемого сорта. Для удобства плотности частиц этого фона n_c вводится в уравнение (1.4) следующим образом ¹⁾:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{внешн}} = 4\pi n_c e = -\frac{4\pi e}{V} \int f^{(1)}(\mathbf{r}', \mathbf{v}'; t) d\mathbf{r}' d\mathbf{v}'. \quad (1.12)$$

Отсюда для однокомпонентной системы имеем следующие соотношения:

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \langle \mathbf{E} \rangle \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (1.13)$$

$$\langle \mathbf{E} \rangle = -e \int \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \left\{ \int f^{(1)}(\mathbf{r}', \mathbf{v}'; t) d\mathbf{v}' - n_c \right\} d\mathbf{r}'. \quad (1.14)$$

1. Уравнение Власова является уравнением типа Лиувилля в μ -пространстве:

$$\frac{df^{(1)}}{dt} = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1.15)$$

¹⁾ Здесь мы заменили зависимость от импульса на зависимость от скорости, как это общепринято в литературе.

Это весьма удивительный факт, поскольку при выводе соотношений (1.13) и (1.14) мы пренебрегали только взаимодействием между отдельными частицами, а не коллективным взаимодействием всех частиц. Уравнение (1.15) означает, что функция распределения $f^{(1)}$ остается постоянной вдоль траектории частицы.

2. Без ограничения общности можно представить функцию распределения $f^{(1)}$ в виде функционала $f^{(1)}(A_v)$. Подставляя этот функционал в уравнение Власова, получаем

$$\sum_v \frac{\partial f^{(1)}}{\partial A_v} \left\{ \frac{\partial A_v}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial A_v}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial A_v}{\partial \mathbf{v}} \right\} = 0. \quad (1.16)$$

Отсюда видно, что любая функция $f^{(1)}$ от интегралов движения A_v есть решение уравнения Власова. Например, если взаимодействие между частицами пренебрежимо мало и они движутся в консервативном внешнем поле, то любая функция от гамильтониана является решением уравнения Власова.

3. Легко найти производную функции H по времени, если предположить, что $f^{(1)}$ удовлетворяет периодическим граничным условиям в произвольно большом, но ограниченном объеме μ -пространства:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int f^{(1)} \ln f^{(1)} d\mathbf{r} d\mathbf{v} = \\ &= \int \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} \ln f^{(1)} d\mathbf{r} d\mathbf{v} + \int \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} d\mathbf{r} d\mathbf{v} = 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Отсюда следует, что функция H , а вместе с ней и энтропия $S = -k_B H$ являются постоянными. Уравнение Власова и его решения обратимы во времени, что легко показать, заменяя в соотношениях (1.13) и (1.14) время t на $-t$ и скорость \mathbf{v} на $-\mathbf{v}$.

4. Если распределение $f^{(1)}$ является положительно определенным в начальный момент времени, оно остается положительно определенным и для всех остальных моментов времени.

Допустим, что $f^{(1)}$ принимает отрицательные значения, тогда должна существовать точка $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$, в которой в момент времени t_0 функция $f^{(1)}$ в первый раз становится нулем.

Поскольку в окрестности этой точки функция $f^{(1)}$ положительна, в самой точке должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\nu} f^{(1)}}{\partial q_i \dots \partial q_j} &= 0 \quad \text{для всех } \nu < a, \\ \left(\Delta \mathbf{q} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right)^a f^{(1)} &= \Delta^a f^{(1)} > 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

С другой стороны, уравнение Власова может быть записано в операторной форме

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = \mathbf{c}(\mathbf{q}, t) \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbf{q}}, \quad (1.20)$$

откуда получаем производные по времени более высокого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\nu} f^{(1)}}{\partial t^{\nu}} &= \left(\mathbf{c}(\mathbf{q}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right)^{\nu} f^{(1)} + \text{члены, содержащие производные} \\ &\quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \text{ более низкого порядка, чем } \nu. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Учитывая (1.18), получаем

$$\frac{\partial^{\nu} f^{(1)}}{\partial t^{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{для } \nu < a, \\ \left(\mathbf{c}(\mathbf{q}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right)^a f^{(1)} & \text{для } \nu = a \text{ (положительно определена),} \end{cases} \quad (1.22)$$

причем следует отметить, что оператор $\partial/\partial \mathbf{q}$ действует также на $\mathbf{c}(\mathbf{q}, t)$. Однако соответствующие слагаемые не дают вклада благодаря первому соотношению (1.18). Из соотношений (1.21) и (1.18) следует, что $\partial^a f^{(1)}/\partial t^a$ — положительно определенная функция.

5. Любая функция вида

$$f^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = h(\mathbf{v}) \quad (1.23)$$

является решением уравнения Власова при условии, что выполняется соотношение $\langle \mathbf{E} \rangle = 0$. Это соотношение безусловно справедливо в линейной теории Ландау, где имеет

место следующее равенство:

$$\int h(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = n_c. \quad (1.24)$$

1.3. Линейное приближение

Нелинейное уравнение Власова можно решить только в нескольких частных случаях. Поэтому до сих пор основные усилия были направлены на решение линеаризованного уравнения Власова. Представим функцию $f^{(1)}$ в виде

$$f^{(1)} = {}^{(0)}f^{(1)} + {}^{(1)}f^{(1)}, \quad (1.25)$$

предполагая, что

$${}^{(1)}f^{(1)} \ll {}^{(0)}f^{(1)}. \quad (1.26)$$

Будем также считать, что функции ${}^{(0)}f^{(1)}$ и ${}^{(1)}f^{(1)}$ являются гладкими, так что дифференцирование и интегрирование не меняет порядок их величины. Функция распределения нулевого порядка ${}^{(0)}f^{(1)}$ предполагается однородной и стационарной, а внешние поля — равными нулю. В остальной части этой главы будем пользоваться упрощенными обозначениями:

$${}^{(0)}f^{(1)} = f_0, \quad {}^{(1)}f^{(1)} = f. \quad (1.27)$$

Тогда линеаризованные уравнения запишутся в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (1.28)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad \nabla^2\phi = -4\pi e \int f d\mathbf{v}.$$

Эти уравнения образуют систему интегро-дифференциальных уравнений для f . Для решения такой системы уравнений применяются различные методы.

§ 2. РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА

2.1. Метод собственных решений

Для того чтобы найти собственные решения системы (1.28), отделим зависимость от пространственных координат и зависимость от скорости и времени, т. е. представим f

в виде

$$f = f(\mathbf{r}) f(\mathbf{v}, t). \quad (2.1)$$

Поскольку в дальнейшем нам придется иметь дело с большим числом различных функций, невозможно для каждой из них ввести свое обозначение. Удобнее характеризовать различные функции их независимыми переменными, за исключением фурье-преобразования, которое отмечается символом \sim .

Подставляя (2.1) в (1.28) и применяя хорошо известную процедуру вычислений (метод разделения переменных), получаем функцию, характеризующую пространственную зависимость функции распределения

$$f(\mathbf{r}) = A \exp(\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{r}). \quad (2.2)$$

Чтобы обеспечить ограниченность $f(\mathbf{r})$ при всех значениях \mathbf{r} , необходимо выбрать постоянную разделения $\boldsymbol{\lambda}$ чисто мнимой величиной, т. е.

$$f(\mathbf{r}) = A \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (2.3)$$

где \mathbf{k} — действительная величина. Известно, что решения в виде нормальных мод позволяют к любому явлению в пространстве координат \mathbf{r} применить фурье-анализ:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) &= (2\pi)^{-3/2} \int \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}, \\ \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= (2\pi)^{-3/2} \int \tilde{\Omega}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Фурье-преобразование в (1.28) дает следующие дифференциальные уравнения:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \right) \tilde{f}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) = i \frac{e}{m} \tilde{\Phi}(\mathbf{k}, t) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \quad (2.5)$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t) &= -i\mathbf{k} \tilde{\Phi}(\mathbf{k}, t), \\ \tilde{\Phi}(\mathbf{k}, t) &= \frac{4\pi e}{k^2} \int \tilde{f}(\mathbf{k}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}'. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Уравнение для поля \mathbf{E} можно также получить непосредственно из (1.14) и (1.25), используя теорему свертки

из фурье-анализа и соотношение

$$\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \sim = \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (2.7)$$

Очевидно, что составляющая скорости, перпендикулярная волновому вектору \mathbf{k} ,

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{k}}(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{k}}), \quad \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (2.8)$$

входит в уравнения (2.5) и (2.6) только как параметр. Обычно эта составляющая не представляет особого интереса, а поэтому все величины в (2.5) и (2.6) удобно преобразовать согласно выражению

$$\tilde{\Omega}(\mathbf{k}, u, t) = \int \tilde{\Omega}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) \delta(u - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (2.9)$$

Здесь через u обозначена компонента скорости, параллельная вектору \mathbf{k} . В результате получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iku \right) \tilde{f}(\mathbf{k}, u, t) = \frac{i}{k} \frac{4\pi e^2}{m} \left[\int \tilde{f}(\mathbf{k}, u', t) du' \right] \frac{\partial f_0(\hat{\mathbf{k}}, u)}{\partial u}. \quad (2.10)$$

Чтобы найти собственные значения задачи, воспользуемся соотношением

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, u, t) = \tilde{f}(\mathbf{k}, u) e^{-i\omega t}, \quad (2.11)$$

которое приводит к

$$\tilde{f}(u) = \frac{1}{k^2} \frac{4\pi e^2}{m} \frac{1}{u - u_p} \frac{\partial f_0(u)}{\partial u} \int \tilde{f}(u') du', \quad (2.12)$$

где u_p — комплексная фазовая скорость, равная

$$u_p = \frac{\omega}{k}. \quad (2.13)$$

Здесь и в дальнейшем для простоты записи мы не всегда будем отмечать зависимость от величины \mathbf{k} . Фазовая скорость, вообще говоря, является комплексной величиной вследствие комплексности частоты ω . Причина этого заключается в том, что уравнение (2.12) не является самосопряженным. Из уравнения (2.12) непосредственно находим функцию распределения $\tilde{f}(u)$, поскольку интеграл в правой части этого соотношения представляет собой постоянную величину, определяемую нормировкой самой

функции распределения, которая в линейной теории проводится обычным способом.

В результате интегрирования уравнения (2.12) получаем дисперсионное соотношение

$$k^2 = \frac{4\pi e^2}{m} \int \frac{\partial f_0(u)/\partial u}{(u - u_p)} du, \quad (2.14)$$

которое определяет фазовую скорость $u_p(k)$ и частоту $\omega(k)$ как функции волнового вектора k . В общем случае интегрирование (2.14) представляется сложной проблемой, поскольку значение этого интеграла не является однозначно определенным из-за наличия полюса при $u = u_p$. В дальнейшем мы увидим, как решается эта проблема.

Рассмотрим сначала два примера, в которых такой проблемы не возникает. Это имеет место либо в случае, когда $\partial f_0(u)/\partial u = 0$ вблизи $u = u_p$, либо когда u_p — комплексная величина. Такое положение имеет место во многих практически интересных случаях.

Прежде чем перейти к обсуждению этих задач, определим функцию распределения $F(u)$ следующим образом:

$$f_0(u) = F(u) \int f_0(u') du' = F(u) n. \quad (2.15)$$

Предполагая, что полная функция распределения включает различные сорта частиц ν (вследствие многокомпонентности плазмы), запишем

$$f_{0\nu}(u) = F_\nu(u) \int f_{0\nu}(u') du' = F_\nu(u) n_\nu. \quad (2.16)$$

Плазменная частота каждой из компонент равна

$$\omega_{p\nu}^2 = \frac{4\pi e_\nu^2 n_\nu}{m_\nu}. \quad (2.17)$$

Тогда дисперсионное соотношение (2.14), обобщенное на случай многокомпонентной плазмы, запишется в виде

$$1 - \sum_{\nu=1}^N \frac{\omega_{p\nu}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F_\nu(u)/\partial u}{u - u_p} du = \varepsilon(k, \omega) = 0. \quad (2.18)$$

Конечно, теперь имеется столько кинетических уравнений, сколько компонент частиц плазмы, но все они приводят к одному и тому же дисперсионному соотношению (2.18).

В последующих параграфах мы обсудим физический смысл соотношения (2.18) для различных важных примеров.

2.2. Моноэнергетические пучки частиц с заданным направлением скорости

Рассмотрим систему пучков заряженных частиц, которые движутся в направлении вектора $\hat{\mathbf{k}}$ с различными, но строго определенными скоростями:

$$F_{\nu}(u) = \delta(u - u_{\nu}). \quad (2.19)$$

Будем считать, что ни один из этих пучков не обладает тепловым разбросом скоростей. Подставляя (2.19) в (2.18) и используя соотношения (2.1.3) ¹⁾, получаем

$$k^2 = \sum_{\nu} \frac{\omega_{p\nu}^2}{(u_{\nu} - u_p)^2}. \quad (2.20)$$

Можно показать, что условие $f(u) \ll f_0(u)$ выполняется для функции Дирака (2.19) всюду, за исключением области, в которой скорость пучка приближается к фазовой скорости u_p . Чтобы удостовериться в этом, целесообразно рассмотреть функцию Дирака как предел соответствующей истинной функции.

1. $u_{\nu} = 0$. Этот случай, когда скорости пучков всех заряженных частиц равны нулю, является особенно простым, но до некоторой степени представляет лишь теоретический интерес. Дисперсионное соотношение в этом случае принимает вид

$$\omega^2 = \sum_{\nu} \omega_{p\nu}^2 = \omega_{p0}^2. \quad (2.21)$$

Все частицы осциллируют с одной и той же частотой ω_{p0} , которую можно назвать плазменной частотой системы, причем ω не зависит от k . Поэтому групповая скорость

$$u_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (2.22)$$

¹⁾ Для ссылок на формулы другой главы здесь и далее употребляется запись тремя числами: первое обозначает номер главы, второе — параграф и третье — порядковый номер формулы. — *Прим. ред.*

в системе равна нулю. Никакие сигналы не могут распространяться через такую систему. Действительно, мы имеем дело не с волнами, а скорее с колебаниями.

2. $u_\nu \neq 0$. В этом случае k — функция фазовой скорости и определяется соотношением

$$k^2 = \sum_{\nu} \frac{\omega_{p\nu}^2}{(u_\nu - u_p)^2} = G(u_p). \quad (2.23)$$

Поскольку из комплексности фазовой скорости следует комплексность частоты, а комплексность частоты означает экспоненциальное затухание или усиление рассматриваемой моды колебаний, интересно понять, при каких условиях уравнение (2.23) имеет комплексные решения.

Уравнение (2.23) является полиномом порядка $2N$ относительно u_p . Поэтому оно имеет $2N$ решений для u_p . Эти решения могут быть как действительными, так и комплексными, причем последние всегда попарно сопряженные.

В дальнейшем, изучая число действительных решений, можно сделать выводы о числе комплексных решений. Рассмотрим функцию $G(u_p)$ для действительных значений u_p . Заметим, что при $u_p \rightarrow \infty$ функция $G(u_p)$ стремится к нулю, в то время как при приближении u_p к одному из N различных значений u_ν она стремится к бесконечности. Поскольку функция $G(u_p)$ является положительно определенной, между этими значениями u_ν она имеет $(N - 1)$ минимумов, которые соответствуют волновым числам $k_1^2, k_2^2, \dots, k_{N-1}^2$, расположенным в порядке возрастания.

Приведенный выше анализ функции $G(u_p)$ показывает, что в интервале значений $k_{\nu-1}^2 < k^2 < k_\nu^2$ уравнение (2.23) имеет 2ν действительных решений и, следовательно,

$$z_c = 2(N - \nu) \quad (2.24)$$

комплексных решений. Здесь мы имеем

$$N \geq \nu \geq 1, \quad k_0^2 = 0, \quad k_N^2 = \infty. \quad (2.25)$$

Поскольку комплексные решения попарно сопряженные, наша система будет всегда неустойчива, если среди корней k_0^2 и k_N^2 имеются комплексные решения.

Однопучковая система

Для однопучковой системы $N = 1$, $\nu = 1$ и, следовательно, $z_c = 0$, т. е. дисперсионное уравнение не имеет комплексных корней во всем интервале значений $k_0^2 - k_N^2$. Поэтому такая система является устойчивой. Дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega = ku_1 \pm \omega_p. \quad (2.26)$$

Это соотношение можно истолковать так, что в системе существуют плазменные колебания с доплеровским сдвигом частоты. Групповая скорость при этом не зависит от k и равна скорости пучка:

$$u_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = u_1. \quad (2.27)$$

Полученный результат можно интерпретировать также следующим образом: частицы пучка в системе координат, движущейся вместе с пучком, совершают обычные плазменные колебания, как и в рассмотренном случае (1) для $u_\nu = 0$. Трансляционное движение с групповой скоростью $u_g = u_1$ приводит при этом к доплеровскому сдвигу частоты.

Двухпучковая или многопучковая система

Для $N \geq 2$ всегда имеется по крайней мере два комплексных решения в интервале значений $k_{N-2}^2 < k^2 < k_{N-1}^2$.

Таким образом, система из двух или более пучков, проникающих один через другой, всегда неустойчива. Число комплексных мод колебаний уменьшается с увеличением k . Для очень больших значений k (т. е. малых длин волн) имеются только действительные решения, которые приближенно записываются в виде

$$\omega_\nu = ku_\nu \pm \omega_{p\nu}. \quad (2.28)$$

Как видно, решения (2.28) для очень малых длин волн расщепляются. Это означает, как и в случае однопучковой системы, независимое существование плазменных колебаний пучка, на которые накладывается соответствующий доплеровский сдвиг.

Система из пучков электронов и ионов

В качестве следующего примера, представляющего практический интерес, рассмотрим систему, состоящую из пучка электронов и пучка ионов и характеризующуюся следующими соотношениями:

$$\left(\frac{\omega_{p+}}{\omega_{p-}}\right)^{2/3} \ll 1, \quad \frac{u_+}{u_-} \left(\frac{\omega_{p-}}{\omega_{p+}}\right)^{2/3} \ll 1. \quad (2.29)$$

Первое условие всегда выполняется благодаря малости отношения массы электрона к массе иона. Из второго же условия следует, что направленная скорость ионов должна быть значительно меньше скорости электронов: такое положение имеет место во многих практических случаях. Дисперсионное соотношение для рассматриваемой системы записывается в виде

$$k^2 = \frac{\omega_{p-}^2}{(u_- - u_p)^2} + \frac{\omega_{p+}^2}{(u_+ - u_p)^2}. \quad (2.30)$$

Для того чтобы найти критическое значение волнового вектора $k_{кр}$, продифференцируем уравнение (2.30) по u_p :

$$\frac{dk^2}{du_p} = \frac{2\omega_{p-}^2}{(u_- - u_p)^3} + \frac{2\omega_{p+}^2}{(u_+ - u_p)^3} = 0. \quad (2.31)$$

Учитывая (2.29), получаем

$$u_p = u_- \left(\frac{\omega_{p+}}{\omega_{p-}}\right)^{2/3}. \quad (2.32)$$

Подставим это значение u_p в (2.30) и вновь используем (2.29), тогда для $k_{кр}$ найдем

$$k_{кр}^2 = \left(\frac{\omega_{p-}}{u_-}\right)^2. \quad (2.33)$$

Система из электронно-ионных пучков устойчива для значений волнового вектора $k > k_{кр}$ и неустойчива для $k < k_{кр}$.

2.3. Сферическое распределение моноэнергетических частиц по скоростям

Рассмотрим теперь моноэнергетические заряженные частицы со сферическим распределением по скоростям, проходящие через неподвижный фон, компенсирующий заряд этих частиц.

Дисперсионное уравнение, согласно (2.18), запишется в виде

$$k^2 = \omega_p^2 \int \frac{\partial F(u)/\partial u}{u - u_p} du. \quad (2.34)$$

Здесь

$$F(u) = \frac{1}{n} \int f_0(\mathbf{v}) \delta(u - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (2.35)$$

В рассматриваемом случае

$$f_0(\mathbf{v}) = An \delta(v^2 - v_0^2), \quad \text{где } A = \frac{1}{2\pi |v_0|}. \quad (2.36)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} F(u) &= A \int \delta(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2 - v_0^2) \delta(u - v_{\parallel}) v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} d\phi = \\ &= A\pi \int_0^{\infty} \delta[v_{\perp}^2 - (v_0^2 - u^2)] dv_{\perp}^2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Или после простой замены

$$F(u) = A\pi \int_{-\infty}^{v_0^2 - u^2} \delta(y) dy = A \left\{ \Delta_0(v_0^2 - u^2) + \frac{\pi}{2} \right\}, \quad (2.38)$$

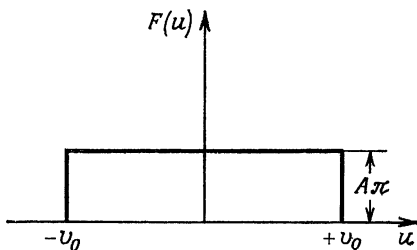
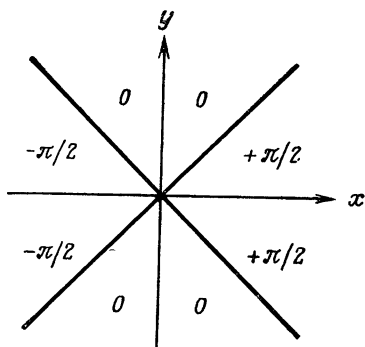
где

$$\Delta(x, 0) = \Delta_0(x) = \pi \int_{-\infty}^x \delta(t) dt - \frac{\pi}{2} \quad (2.39)$$

— частное значение функции Дирихле

$$\Delta(x, y) = \int_0^{\infty} t^{-1} \sin xt \cos yt dt. \quad (2.40)$$

На фиг. 8 для наглядности дано графическое представление функции Дирихле. Согласно (2.38) и фиг. 8, функция



Ф и г. 8. Графическое представление функции Дирихле.

Ф и г. 9. Сферически симметричные функции распределения моноэнергетических частиц со скоростью u для однокомпонентной системы.

распределения $F(u)$ имеет вид, показанный на фиг. 9. Это так называемое *распределение в виде пакета*. Оно может быть записано следующим образом:

$$F(u) = \begin{cases} A \left[\Delta_0(u + v_0) + \frac{\pi}{2} \right], & u < 0, \\ A \left[-\Delta_0(u - v_0) + \frac{\pi}{2} \right], & u > 0. \end{cases} \quad (2.41)$$

Вспомяная, что

$$\frac{d\Delta_0(x)}{dx} = \pi\delta(x), \quad (2.42)$$

находим

$$\frac{dF(u)}{du} = A\pi [\delta(u + v_0) - \delta(u - v_0)]. \quad (2.43)$$

Это приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$k^2 = A\pi\omega_p^2 \int \frac{\delta(u + v_0) - \delta(u - v_0)}{u - u_p} du = -A\pi\omega_p^2 \left(\frac{1}{v_0 + u_p} + \frac{1}{v_0 - u_p} \right). \quad (2.44)$$

Учитывая, что $F(u)$ — нормированная функция, получаем

$$k^2 = -\frac{A\pi\omega_p^2 2v_0}{v_0^2 - u_p^2} = -\frac{\omega_p^2}{v_0^2 - u_p^2} \quad (2.45)$$

или

$$\omega^2 = k^2 v_0^2 + \omega_p^2. \quad (2.46)$$

Отсюда следует, что сферически расширяющаяся система моноэнергетических частиц всегда устойчива. Произведение групповой скорости на фазовую представляет собой квадрат скорости частиц, т. е. $u_g u_p = v_0^2$.

2.4. Распределения в виде пакетов

В этом разделе мы рассмотрим более общую систему распределений в виде пакетов. Пусть $u_{1\nu}$ и $u_{2\nu}$ — наименьшее и наибольшее значения скорости u для ν -го пакета распределения. Тогда из (2.41) и (2.42) получаем

$$\frac{dF(u)}{du} = \sum_{\nu} A_{\nu} \pi [\delta(u - u_{1\nu}) - \delta(u - u_{2\nu})]. \quad (2.47)$$

Учитывая это, дисперсионное уравнение запишем в виде

$$\begin{aligned} k^2 &= \sum_{\nu} \pi A_{\nu} \omega_{p\nu}^2 \left(\frac{1}{u_{1\nu} - u_p} - \frac{1}{u_{2\nu} - u_p} \right) = \\ &= \sum_{\nu} \pi A_{\nu} \omega_{p\nu}^2 \Delta u_{\nu} \frac{1}{\langle u \rangle_{\nu} - u_p)^2 - \left(\frac{\Delta u_{\nu}}{2} \right)^2}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Здесь введены следующие обозначения:

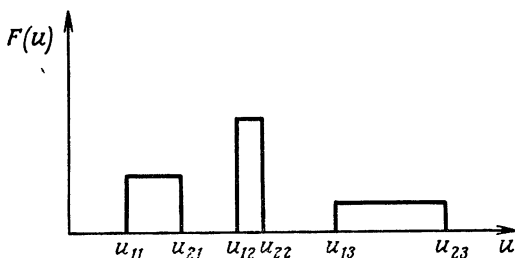
$$\langle u \rangle_{\nu} = \frac{1}{2} (u_{1\nu} + u_{2\nu}), \quad u_{2\nu} - u_{1\nu} = \Delta u_{\nu}. \quad (2.49)$$

Используя условие нормировки, $\int F(u) du = 1$, получаем

$$k^2 = \sum_{\nu} \frac{\omega_{p\nu}^2}{\langle u \rangle_{\nu} - u_p)^2 - \left(\frac{\Delta u_{\nu}}{2} \right)^2}. \quad (2.50)$$

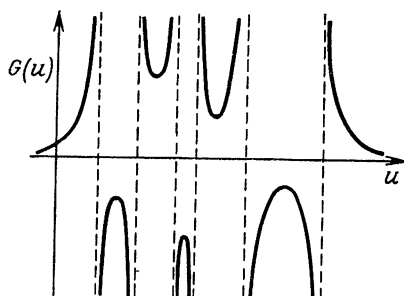
В качестве примера рассмотрим функцию распределения $F(u)$, представленную на фиг. 10. Характеристическая функция $G(u_p)$ при этом очень похожа на соответствующую

функцию для системы пучков, за исключением поведения ее в окрестности каждой средней скорости $\langle u \rangle_\nu$, внутри



Ф и г. 10. Неперекрывающиеся пакеты.

области $u_{1\nu} \leq u \leq u_{2\nu}$, где характеристическая функция принимает отрицательные значения, в то время как для отдельных пучков частиц она является всюду положительно определенной. На фиг. 11 приведен схематически гра-



Ф и г. 11. Характеристическая функция для распределения, представленного на фиг. 10.

фик характеристической функции для функции распределения $F(u)$, показанной на фиг. 10.

Из анализа, аналогичного тому, который был проведен для многопучковой системы, видно, что распределение в виде неперекрывающихся пакетов всегда неустойчиво, если число пакетов больше, чем один.

2.5. Кусочно-гладкие распределения с провалами

В данном разделе исследуются распределения произвольного вида, имеющие в некоторых областях провалы, в которых $F(u) \equiv 0$. Мы рассмотрим случаи, когда значения u_p попадают в эти провалы.

Длинноволновые ленгмюровские колебания

Рассмотрим N произвольных распределений $F_\nu(u)$, каждое из которых имеет провал, простирающийся от u_ν до ∞ . Обозначим через u_m максимальное значение скорости для всех u_ν . В дальнейшем будем считать, что $u_p \gg u_m$.

Дисперсионное соотношение (2.18) после интегрирования по частям перепишем в виде

$$k^2 = \sum_{\nu=1}^N \omega_{p\nu}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F_\nu(u)}{\partial u} \frac{1}{u-u_p} du = \sum_{\nu=1}^N \omega_{p\nu}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_\nu(u)}{(u-u_p)^2} du. \quad (2.51)$$

Подынтегральное выражение (2.51) можно представить в виде ряда

$$\frac{1}{u_p^2 \left[1 - \left(\frac{u}{u_p} \right) \right]^2} = \frac{1}{u_p^2} \sum_{\mu=0}^{\infty} (1+\mu) \left(\frac{u}{u_p} \right)^\mu. \quad (2.52)$$

Учитывая, что $u_p k = \omega$, из (2.51) находим

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=0}^{\infty} \omega_{p\nu}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\mu) \left(\frac{u}{u_p} \right)^\mu F_\nu(u) du = \\ &= \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=0}^{\infty} \omega_{p\nu}^2 (1+\mu) \left\langle \left(\frac{u}{u_p} \right)^\mu \right\rangle_\nu, \end{aligned} \quad (2.53)$$

или соответственно

$$\omega^2 = \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=0}^{\infty} \omega_{p\nu}^2 (1+\mu) \left(\frac{k}{\omega} \right)^\mu \langle u^\mu \rangle_\nu. \quad (2.54)$$

Если этот ряд оборвать при $\mu = m$, то получим неявное уравнение порядка $(m + 2)$, связывающее ω и k .

Чтобы прийти к результату Ленгмюра, который справедлив при $u_p \gg u_m$, оборвем ряд при $\mu = 2$. Используя соотношения

$$\sum_{\nu} \omega_{p\nu}^2 = \omega_{p0}^2; \quad \sum_{\nu} \omega_{p\nu}^2 \langle u^2 \rangle_{\nu} = \omega_{p0}^2 \langle u^2 \rangle \quad (2.55)$$

и условие

$$\sum_{\nu} \omega_{p\nu}^2 \langle u \rangle_{\nu} = 0, \quad (2.56)$$

окончательно получаем

$$\omega^2 = \omega_{p0}^2 \left\{ 1 + 3 \left(\frac{k}{\omega} \right)^2 \langle u^2 \rangle \right\}. \quad (2.57)$$

Условие (2.56) может быть всегда удовлетворено соответствующим выбором системы координат.

Поскольку в (2.56) мы пренебрегли членами четвертого порядка, то в правой части соотношения (2.57) следует положить $\omega = \omega_{p0}$. Тогда

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3k^2 \langle u^2 \rangle. \quad (2.58)$$

Очевидно, что соотношение (2.58) дает дисперсию, зависящую от квадрата средней скорости. Групповая скорость, согласно (2.58), определяется как

$$u_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 3 \frac{k}{\omega} \langle u^2 \rangle = 3 \frac{\langle u^2 \rangle}{u_p} = 3 \frac{k}{\omega_{p0}} \langle u^2 \rangle. \quad (2.59)$$

При этом учтено, что наше рассмотрение является последовательным для значений k , которые удовлетворяют условию

$$|k| \ll \frac{\omega_{p0}}{u_m}. \quad (2.60)$$

Ионно-звуковые волны

Рассмотрим систему, состоящую из холодных ионов и горячих электронов. Распределение ионов описывается функцией Дирака:

$$F_+(u) = \delta(u). \quad (2.61)$$

При этом провал в распределении ионов простирается от нуля до бесконечности. Электроны же описываются функцией распределения

$$\begin{aligned} F_-(u) &= c \exp\left(-\frac{m_- u^2}{2\Theta_-}\right) & \text{для } |u| > \bar{u}, \\ F_-(u) &= 0 & \text{для } |u| < \bar{u}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

где c — нормировочная постоянная. Провал в электронной функции распределения соответствует области $|u| < \bar{u}$, при этом $u_p < \bar{u}$. Простые преобразования приводят к следующему дисперсионному соотношению:

$$k^2 = -\frac{\omega_{p-}^2 m_-}{\Theta_-} \left[1 + u_p \int_{|u| > \bar{u}} c \exp\left(-\frac{m_- u^2}{2\Theta_-}\right) \frac{1}{u - u_p} du \right] + \frac{\omega_{p+}^2}{u_p^2}. \quad (2.63)$$

Разложим теперь величину $(1 - u_p/u)^{-1}$ в ряд по степеням u_p/u .

На данном этапе выберем \bar{u} в интервале

$$\left(\frac{m_-}{m_+}\right)^{1/2} \langle u \rangle_- \ll \bar{u} \ll \langle u \rangle_-. \quad (2.64)$$

Это означает, с одной стороны, что большинство электронов участвует в нашем распределении, а с другой, что выполняется условие $\bar{u} \gg u_p$. Поскольку функция распределения $F_-(u)$ является четной, из (2.63) находим

$$k^2 = -\frac{\omega_{p-}^2 m_-}{\Theta_-} + \frac{\omega_{p+}^2}{u_p^2}. \quad (2.65)$$

Отсюда следует, что

$$\omega^2 = \omega_{p+}^2 \frac{(k\lambda_{D-})^2}{1 + (k\lambda_{D-})^2}, \quad (2.66)$$

где через λ_{D-} обозначен дебаевский радиус электронов.

Для очень больших значений $(k\lambda_{D-})$ мы получаем несвязанные колебания на ионной плазменной частоте ω_{p+} . Интересен является случай, когда $(k\lambda_{D-}) \ll 1$. Диспер-

сионное соотношение тогда принимает вид

$$u_p^2 = \frac{\Theta_-}{m_+}. \quad (2.67)$$

Эта фазовая скорость совпадает со скоростью звуковых волн, распространяющихся в системе частиц с массой m_+ и тепловой энергией Θ_- в предположении, что процесс изотермический. Поэтому волны, для которых $(k\lambda_{D-}) \ll 1$, часто называют *ионно-звуковыми волнами*.

На первый взгляд может показаться удивительным то, что мы нашли структуру, подобную звуковой волне, поскольку в рассматриваемом приближении Власова отсутствуют столкновения или корреляции между частицами. С другой стороны, можно привести физические соображения, согласно которым наличие ионно-звуковой скорости вполне возможно.

Колебания ионов по сравнению с колебаниями электронов представляют собой медленный процесс. Поэтому электроны, участвующие в таких колебаниях, можно рассматривать находящимися в равновесии с потенциалом Φ :

$$n_- = n_+ = c \exp \left[\frac{e\Phi}{\Theta_-} \right]. \quad (2.68)$$

Следовательно, мы имеем

$$\frac{\nabla n_+}{n_+} = \frac{\nabla n_-}{n_-} = -\frac{e\mathbf{E}}{\Theta_-}. \quad (2.69)$$

Подставляя (2.69) в уравнение движения свободного иона, находим

$$m_+ n_+ \frac{dv_+}{dt} = en_+ \mathbf{E} = -n_+ \Theta_- \frac{\nabla n_+}{n_+} = -\nabla \frac{n_+}{\Theta_-}. \quad (2.70)$$

Сравнивая это уравнение с основным уравнением распространения звука, легко понять, почему в данном случае мы имеем «звуковое поведение» колебаний бесстолкновительной плазмы.

2.6. Произвольные распределения. Критерий Пенроуза

До сих пор нам удавалось избежать трудностей, возникающих из-за наличия пуля в знаменателе дисперсионного соотношения, так как мы ограничивались рассмот-

рением некоторых частных распределений. Теперь перейдем к рассмотрению распределений произвольного вида. Поскольку значение интеграла в дисперсионном соотношении не определено для действительных значений u_p , сосредоточим сначала внимание на комплексных фазовых скоростях. Это позволит нам сделать выводы относительно устойчивости систем с распределениями произвольного вида. Выясним, имеет ли дисперсионное соотношение (2.18) для однокомпонентной системы ($\nu = 0$) с размазанным нейтрализующим фоном

$$k^2 = G(u_p) = \omega_p^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F'_0(u)}{u - u_p} du = \omega_p^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_0(u)}{(u - u_p)^2} du \quad (2.71)$$

решение, в котором $\text{Im}(u_p) > 0$.

Экспоненциально возрастающие моды существуют, если функция $G(u_p)$ принимает действительное положительное значение где-либо в верхней полуплоскости комплексного переменного u_p . Экспоненциальное возрастание является наиболее важным случаем неустойчивости. Поэтому мы выведем необходимый и достаточный критерий для существования экспоненциально возрастающей неустойчивости и необходимое условие для устойчивости системы. Исследование, которое проводится ниже, справедливо только для совершенно гладких функций $F_0(u)$ с соответствующим поведением на бесконечности. На математическом языке это означает, что для действительных значений u должны выполняться следующие условия:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F'_0(u)^2 du < \infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |F'_0(u)| du < \infty, \quad |F'_0(u)| \leq M_1, \quad (2.72)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F''_0(u)^2 du < \infty, \quad |F''_0(u)| \leq M_2.$$

Из (2.71) и (2.72) следует, что $G(u_p)$ является голоморфной функцией в плоскости u_p с разрезом вдоль действительной оси.

Поведение этой функции на верхней границе разреза описывается следующим образом:

$$G(u_p + i0) = \omega_p^2 \left\{ \mathcal{F} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F'_0(u)}{u - u_p} du + i\pi F'_0(u_p) \right\}. \quad (2.73)$$

При написании этого соотношения использована известная формула Племяля

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mathcal{F} \frac{1}{x} \mp i\pi \delta(x) \quad (2.74)$$

(через \mathcal{F} обозначено главное значение в смысле Коши).

Справедливость выражения (2.74) очевидна из следующего равенства:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x \pm i0} dx = \int_{|x| > \varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{G_{\pm}} \frac{f(z)}{z} dz, \quad (2.75)$$

где G_{\pm} есть полуокружность малого радиуса $\varepsilon \rightarrow 0$ с центром в нуле, проведенная соответственно в верхней или в нижней полуплоскости. Отсюда получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x \pm i0} dx = \mathcal{F} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\pm\pi}^0 \frac{f(\zeta)}{\varepsilon e^{i\phi}} i\varepsilon e^{i\phi} d\phi, \quad (2.76)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x \pm i0} dx = \mathcal{F} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \mp i\pi f(0).$$

Рассмотрим условия (2.72). Из ограниченности производной $F'_0(u)$ следует условие Липшица, накладываемое на $F_0(u)$, что в свою очередь приводит к требованию ограниченности и непрерывности функции $G(u_p + i0)$. Ограниченность $G(u_p + i0)$ нетрудно получить из (2.72):

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{F} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F'_0(u)}{u - u_p} du \right| &\leq \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} |F'_0(u)| du + \left| \mathcal{F} \int_{u_p - \Delta}^{u_p + \Delta} \frac{F'_0(u)}{u - u_p} du \right|, \\ \left| \mathcal{F} \int_{u_p - \Delta}^{u_p + \Delta} \frac{F'_0(u)}{u - u_p} du \right| &\leq \left| \mathcal{F} \int_{u_p - \Delta}^{u_p + \Delta} \frac{F'_0(u_p)}{u - u_p} du \right| + \int_{u_p - \Delta}^{u_p + \Delta} \frac{M_2(u - u_p)}{u - u_p} du = \\ &= 0 + 2\Delta M_2. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $G(u_p + i0)$ ограничена, поскольку Δ — произвольная, но фиксированная величина. Здесь следует остановиться на свойствах функции $G(u_p)$, которые обнаруживаются при изучении отображения $G(u_p + i0)$ верхней границы действительной оси u_p .

Поскольку функция $G(\mathbb{R} + i0)$ ограничена и непрерывна, это отображение должно иметь вид кривой с выделенным направлением обхода. Эта кривая начинается и оканчивается на нуле в точке, где $G = 0$, потому что $G(\pm\infty) = 0$.

Далее, если G_0 — любая точка, не лежащая на $G(\mathbb{R} + i0)$, то кривая $G(\mathbb{R} + i0)$ обходит вокруг G_0 столько раз против часовой стрелки, сколько раз $G(u_p)$ принимает значение G_0 в верхней полуплоскости. Это легко показать, применяя теорему Коши. Действительно,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \left[\frac{F'(u_p)}{F(u_p)} \right] du_p = N_0. \quad (2.77)$$

Здесь N_0 — число нулей функции $F(u_p) \equiv G(u_p) - G_0$ в области, ограниченной контуром интегрирования. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{G'(u_p)}{G(u_p) - G_0} du_p = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dG}{G - G_0} = \frac{2\pi i M}{2\pi i} = M. \quad (2.78)$$

Здесь интеграл $\oint (G - G_0)^{-1} dG$ есть интеграл Стильтьеса, а M — целое число, равное числу обходов контура отображения вокруг G_0 . Таким образом, получаем $M = N_0$.

Отсюда следует, что отображение любой точки верхней полуплоскости (u_p -плоскости) должно находиться либо внутри $G(\mathbb{R} + i0)$, либо на самом контуре, поэтому внутренняя область, ограниченная контуром $G(\mathbb{R} + i0)$, является отображением верхней полуплоскости. Следовательно, $G(u_p)$ принимает положительные значения в верхней полуплоскости тогда и только тогда, когда внутри контура $G(\mathbb{R} + i0)$ содержится часть положительной действительной оси G . Это в свою очередь имеет место тогда и только тогда, если $G(\mathbb{R} + i0)$ пересекает положительную действительную ось G . Поскольку точка $G(u_p + i0)$ перемещается вдоль контура $G(\mathbb{R} + i0)$ против часовой стрелки, то, пересекая действительную поло-

жительную ось G в своем самом крайнем правом положении, она движется снизу вверх.

Это эквивалентно такому изменению знака мнимой части $\text{Im } G(u_p + i0) = \omega_p^2 \pi F'_0(u_p)$, которое соответствует минимуму функции $F_0(u)$. Кроме того, действительная часть $\text{Re } G(u_p + i0)$ в силу соотношения (2.73) может быть записана в виде

$$\text{Re } G(u_p + i0) = \omega_p^2 \mathcal{P} \int \frac{F'_0(u)}{u - u_p} du. \quad (2.79)$$

Отсюда можно сформулировать *критерий Пенроуза* [3]: для существования экспоненциально возрастающих мод необходимо и достаточно, чтобы: а) функция распределения имела по крайней мере один минимум и б) в одном из этих минимумов удовлетворялось условие

$$\mathcal{P} \int \frac{F'_0}{u - u_p} du > 0. \quad (2.80)$$

Интересно отметить, что критерий Пенроуза имеет такой же вид и для существования экспоненциально затухающих мод. Это легко можно показать из комплексно-сопряженного дисперсионного соотношения

$$\frac{k^2}{\omega_p^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F'_0(u)}{u - u_p^*} du, \quad (2.81)$$

откуда следует, что u_p является решением тогда и только тогда, когда решением является также и u_p^* .

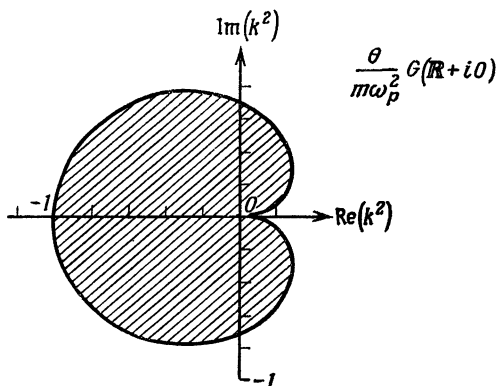
[Следуя изложению Пенроуза, найдем отображение $G(\mathbb{R} - i0)$ для нижней границы действительной оси u_p . Согласно соотношению Племеля, получаем, что $G(\mathbb{R} - i0)$ совпадает с $G(\mathbb{R} + i0)$. Однако направление обхода контура $G(\mathbb{R} - i0)$ противоположно обходу контура $G(\mathbb{R} + i0)$. $G(u_p)$ является конформным отображением и поэтому отображение любой области остается с той же самой стороны от границы контура. Следовательно, и в этом случае нижняя полуплоскость отображается во внутреннюю область $G(\mathbb{R} \pm i0)$. Исследование пересечения $G(\mathbb{R} - i0)$ в самом крайнем правом положении

с действительной осью k^2 снова приводит к соотношению (2.80), поскольку одновременно изменяется направление обхода $G(\mathbb{R} + i0)$, а также знак мнимой части.]

Проиллюстрируем применение полученных результатов на двух примерах.

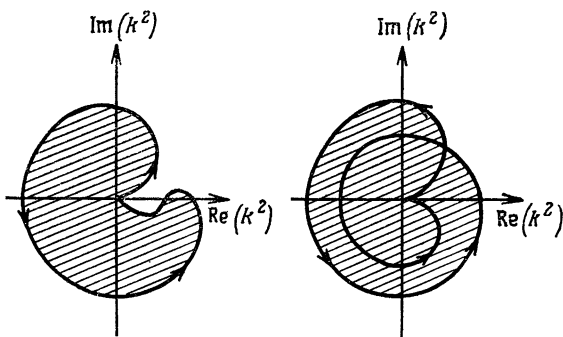
Распределения с одним максимумом

Наиболее простым случаем является распределение с одним максимумом. Исходя из первого критерия, легко получить результат Найквиста, заключающийся в том,



Фиг. 12. Отображение верхней полуплоскости u_p на плоскость k^2 для максвелловского распределения.

что функции распределения с одним максимумом не могут приводить к экспоненциально растущим колебаниям. На фиг. 12 показана кривая $G(\mathbb{R} + i0)$ для максвелловской функции распределения $F_0(u) = C \exp(-mu^2/2\Theta)$. Отображение верхней полуплоскости представляется заштрихованной областью и не содержит положительных действительных значений. На фиг. 13 приведены такие возможные кривые $G(\mathbb{R} + i0)$, которые содержат внутри себя положительные действительные значения.



Ф и г. 13. Два примера отображения плоскости u_p на плоскость k^2 для неустойчивых распределений.

Устойчивость изотропного распределения

Рассмотрим произвольную изотропную функцию распределения $f_0(v^2)$, которая является результатом дифференцирования следующей функции:

$$\begin{aligned}
 F(u) &= \int f_0(v^2) \delta(u - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{v} = \\
 &= \pi \int_0^\infty f_0(v_\perp^2 + u^2) dv_\perp^2 = \pi \int_{u^2}^\infty f_0(x) dx, \quad (2.82)
 \end{aligned}$$

т. е.

$$F'(u) = -2\pi u f_0(u^2). \quad (2.83)$$

Легко видеть, что на основании критерия Пенроуза (п. «а») такое изотропное распределение всегда устойчиво.

§ 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ПО ВРЕМЕНИ

В предыдущем параграфе был изложен метод собственных решений для анализа линеаризованного уравнения Власова. Этот метод, который иногда называют разложением по нормальным модам, весьма удобен для решения начальной задачи, если набор собственных решений является полным. Такие полные наборы собственных

решений были найдены для некоторых частных функций распределения. В случае произвольных распределений исследовались лишь такие собственные решения, которые имеют комплексные частоту и фазовую скорость. В § 5 мы рассмотрим «моды Ван Кампена», которые дополняют комплексные решения до полного набора.

3.1. Воздействие внешних возмущений

Рассмотрим случай, когда возмущения задаются внешним потенциалом $\Phi_{\text{внешн}}(\mathbf{r}, t)$, приложенным в момент времени $t = 0$. Для $t < 0$ потенциал возмущения $\Phi_{\text{внешн}} \equiv 0$; поэтому будем считать, что функция f также равна нулю при $t < 0$. Это означает, что f есть так называемая «причинная функция». Такое предположение нарушает обратимый характер нашего исследования, хотя как было показано выше, само уравнение Власова является обратимым. В соответствии с (2.5), (2.6) и (2.15) линеаризованное уравнение Власова после преобразования Фурье в конфигурационном пространстве записывается в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iku\right) \tilde{f}(u, k, t) = i \frac{e}{m} kn \left[\frac{\partial F_0(u, \mathbf{k})}{\partial u} \right] \tilde{\Phi}(k, t),$$

$$\tilde{\Phi}(k, t) = \frac{4\pi e}{k^2} \int \tilde{f}(u, k, t) du + \tilde{\Phi}_{\text{внешн}}. \quad (3.1)$$

Здесь $\tilde{\Phi}_{\text{внешн}}$ соответствует внешнему возмущению.

Прежде чем приступить к преобразованию Фурье по времени, следует удостовериться, что интегралы в преобразовании Фурье существуют. Функции, которые преобразовываются, должны быть квадратично интегрируемы. Если плазма неустойчива, что является весьма распространенным случаем, то функции экспоненциально возрастают во времени и вышеуказанное условие не может быть выполнено. Однако эту трудность довольно просто обойти. Пусть η_m — максимальное значение инкремента нарастания некоторой функции Ω в неустойчивой плазме. Рассмотрим преобразование Фурье функции

$$\Omega'(\mathbf{r}, t) = \Omega(\mathbf{r}, t) e^{-\omega_i t}, \quad (3.2)$$

где $\omega_i > \eta_m$. Функция Ω' квадратично интегрируема, так как она удовлетворяет условию $\Omega \equiv 0$ при $t < 0$. К функции Ω' поэтому можно применить действительное разложение Фурье. В результате получим

$$\tilde{\Omega}'(\mathbf{r}, \omega_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Omega(\mathbf{r}, t) e^{i\omega' t} dt = \tilde{\Omega}(\mathbf{r}, \omega). \quad (3.3)$$

Здесь

$$\omega = \omega_r + i\omega_i, \quad \text{где } \omega_i = \text{const} > \eta_m, \quad (3.4)$$

и

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Omega}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega_r = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{i\omega_i - \infty}^{i\omega_i + \infty} \tilde{\Omega}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Заметим, что в противоположность действительному преобразованию Фурье контур интегрирования в (3.5) смещается на частоту ω_i в верхнюю ω -полуплоскость.

Применяя преобразование (3.3) к уравнению (3.1), находим ¹⁾

$$(-i\omega + iku) \tilde{f}(u, k, \omega) = i \frac{e}{m} kn \left[\frac{\partial F_0(u, \hat{\mathbf{k}})}{\partial u} \right] \tilde{\Phi}(k, \omega), \quad (3.6)$$

где

$$\tilde{\Phi}(k, \omega) = \frac{4\pi e}{k^2} \int \tilde{f}(u, k, \omega) du + \tilde{\Phi}_{\text{внешн}}(k, \omega).$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{f}(u, k, \omega) = \frac{ne}{m} \frac{\frac{\partial F_0(u, \hat{\mathbf{k}})}{\partial u}}{u - \frac{\omega}{k}} \tilde{\Phi}(k, \omega) \quad (3.7)$$

и

$$\tilde{\Phi}(k, \omega) = \frac{\tilde{\Phi}_{\text{внешн}}(k, \omega)}{1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} F'_0(u, \hat{\mathbf{k}}) \left(u - \frac{\omega}{k}\right)^{-1} du}. \quad (3.8)$$

¹⁾ Знаком \approx сверху обозначается двойное пространственно-временное преобразование Фурье.

Отметим, что знаменатели выражений (3.7) и (3.8) не вызывают никаких осложнений, поскольку ω — комплексная величина.

Для устойчивой плазмы можно рассмотреть предел $\omega_i = +0$. Учитывая соотношение (2.74), тогда получаем

$$\tilde{\Phi}(k, \omega) = \frac{\tilde{\Phi}_{\text{внешн}}(k, \omega)}{1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int F'_0(u, \hat{\mathbf{k}}) \left[\mathcal{P} \left(\frac{1}{u - \frac{\omega}{k}} \right) + i\pi\delta \left(u - \frac{\omega}{k} \right) \right] du}. \quad (3.9)$$

В принципе задача решена. Так как потенциал возмущений $\tilde{\Phi}_{\text{внешн}}(k, \omega)$ задан, то из (3.8) можно найти $\tilde{\Phi}(k, \omega)$ и, подставляя эту функцию в (3.7), можно вычислить возмущенную функцию распределения.

Знаменатель выражения (3.9) представляет собой линейный отклик системы на внешнее возмущение, который в случае многокомпонентной плазмы записывается в следующей обобщенной форме:

$$\varepsilon(k, \omega) = 1 - \sum_{\nu} \frac{\omega_{p\nu}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} F'_{\nu}(u, \hat{\mathbf{k}}) \left[\mathcal{P} \left(\frac{1}{u - \frac{\omega}{k}} \right) + i\pi\delta \left(u - \frac{\omega}{k} \right) \right] du. \quad (3.10)$$

Величина $\varepsilon(k, \omega)$ тесно связана с диэлектрической проницаемостью плазмы. В этом легко убедиться для случая изотропной и однородной плазмы, для которой уравнение Пуассона имеет вид

$$\varepsilon(\omega) \Delta \tilde{\Phi} = -4\pi e \tilde{n}_{\text{внешн}} \quad (3.11)$$

или

$$\tilde{\Phi}(k, \omega) = \frac{4\pi e \tilde{n}_{\text{внешн}}(k, \omega)}{k^2 \varepsilon(\omega)} = \frac{\tilde{\Phi}_{\text{внешн}}(k, \omega)}{\varepsilon(\omega)}. \quad (3.12)$$

Сравнивая (3.12) с (3.9), находим, что $\varepsilon(k, \omega)$ есть диэлектрическая проницаемость плазмы, в которой распространяется одиночная волна с волновым вектором \mathbf{k}

и частотой ω . Однако следует заметить, что, вообще говоря, $\varepsilon(k, \omega)$ не является фурье-образом диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)$, зависящей от пространственных координат.

Рассмотрим функцию $\varepsilon(k, \omega)$ в пределе низких и высоких частот для частиц с максвелловским распределением F_{ν} .

В пределе низких частот ($\omega_r \rightarrow 0$) выражение (3.10) принимает вид

$$\varepsilon(k, \omega = 0) = 1 - \sum_{\nu} \frac{\omega_{p\nu}^2}{k^2} \int F'_{\nu}(u, \hat{\mathbf{k}}) \left[\mathcal{P} \left(\frac{1}{u} \right) + i\pi\delta(u) \right] du. \quad (3.13)$$

Конкретизируем далее вид функции распределения для различных сортов частиц системы, каждый из которых находится в тепловом равновесии:

$$F_{\nu}(u, \hat{\mathbf{k}}) = c_{\nu} \exp \left[-\frac{m_{\nu} u^2}{2\Theta_{\nu}} \right]. \quad (3.14)$$

Подставляя эту функцию в (3.13), окончательно получаем

$$\varepsilon = 1 + \sum_{\nu} \frac{\omega_{p\nu}^2 m_{\nu}}{k^2 \Theta_{\nu}} = 1 + \frac{1}{k^2 \lambda_D^2}, \quad (3.15)$$

где

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \sum_{\nu} \frac{4\pi n_{\nu} e^2}{\Theta_{\nu}}.$$

Для фурье-компоненты потенциала мы имеем

$$\tilde{\Phi}(k, \omega = 0) = \frac{4\pi e \tilde{n}_{\text{внешн}}(k, \omega = 0)}{k^2 \frac{1 + (k\lambda_D)^{-2}}{1 + (k\lambda_D)^{-2}}} = \frac{4\pi e \tilde{n}_{\text{внешн}}(k, \omega = 0)}{k^2 + \lambda_D^{-2}}. \quad (3.16)$$

С помощью теоремы свертки обратное преобразование выражения (3.16) дает

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{r}, \omega = 0) = e \int \tilde{n}_{\text{внешн}}(\mathbf{r}', \omega = 0) \frac{\exp \left(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\lambda_D} \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (3.17)$$

При получении формулы (3.17) было учтено, что

$$\frac{1}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) = \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{2\pi^2(k^2 + \lambda_D^{-2})} d\mathbf{k}. \quad (3.18)$$

Таким образом, мы нашли, что реакция плазмы на внешние квазистатические возмущения приводит к хорошо известному дебаевскому экранированию.

В пределе *высоких частот* $\omega_r \rightarrow \infty$ знаменатель в выражении (3.10) можно разложить в ряд

$$\frac{1}{u - \frac{\omega}{k}} = -\frac{k}{\omega} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{k u}{\omega}\right)^{\nu} \right]. \quad (3.19)$$

Затем, подставив функцию распределения (3.14) в (3.10), найдем

$$\varepsilon(k, \omega \rightarrow \infty) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (3.20)$$

Как и следовало ожидать, электрическая восприимчивость, пропорциональная $\varepsilon - 1$, из-за наличия инерции частиц в пределе очень высоких частот стремится к нулю как ω_p^2/ω^2 .

3.2. Начальная задача

Чтобы решить начальную задачу, рассмотрим опять уравнения (3.1), но без внешнего возмущения $\Phi_{\text{внешн}}$. При этом

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iku\right) \tilde{f}(u, k, t) = i \frac{e}{m} kn \left[\frac{\partial F_0(u, \hat{\mathbf{k}})}{\partial u} \right] \tilde{\Phi}(k, t), \quad (3.21)$$

$$\tilde{\Phi}(k, t) = \frac{4\pi e}{k^2} \int \tilde{f}(u, k, t) du.$$

Умножим эти уравнения на $\Delta_1 \exp(i\omega t)$ и проинтегрируем по t от $-\infty$ до $+\infty$. Функция Δ_1 связана с функцией Дирихле следующим образом:

$$\Delta_1 = \frac{\Delta(x, 0)}{\pi} + \frac{1}{2}. \quad (3.22)$$

Согласно (2.39), производная функции Δ_1 равна

$$\frac{d\Delta_1}{dx} = \delta(x). \quad (3.23)$$

Отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_1 e^{i\omega t} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(u, k, t) [\delta(t) + i\omega \Delta_1] e^{i\omega t} dt \quad (3.24)$$

и соответственно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_1 e^{i\omega t} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} dt = -\tilde{f}(u, k, 0) - i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_1 e^{i\omega t} \tilde{f}(u, k, t) dt. \quad (3.25)$$

Используя вместо (3.3) разложение¹⁾

$$\widehat{\Omega}(u, \mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(u, \mathbf{r}, t) \Delta_1 e^{i\omega t} dt, \quad (3.26)$$

а также выражение (3.25), можно уравнение (3.21) переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} i(ku - \omega) \widehat{\tilde{f}}(u, k, \omega) - i \frac{e}{m} kn \left[\frac{\partial F_0(u, \hat{\mathbf{k}})}{\partial u} \right] \widehat{\Phi}(k, \omega) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(u, k, t=0), \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\widehat{\Phi}(k, \omega) = \frac{4\pi e}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\tilde{f}}(u, k, \omega) du.$$

Разделив первое уравнение на $i(ku - \omega)$ и проинтегрировав по u от $-\infty$ до $+\infty$, а также используя второе уравнение (3.27), мы получим потенциал $\widehat{\Phi}(k, \omega)$, выраженный через заданное его начальное значение. При этом можно также найти $\widehat{\tilde{f}}(u, k, \omega)$ из первого уравнения (3.27). Обратное преобразование по пространству и времени дает искомые функции. Таким образом в принципе задача решена.

¹⁾ Знаком \frown сверху здесь и в дальнейшем обозначается изображение Лапласа.

Прежде чем перейти к оценкам, сделаем еще одно замечание. Вводя обозначения

$$\omega = ip, \quad p_r = \omega_i, \quad p_i = -\omega_r, \quad (3.28)$$

имеем

$$\widehat{\Omega}(u, \mathbf{r}, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-pt} \Omega(u, \mathbf{r}, t) dt. \quad (3.29)$$

Здесь $\widehat{\Omega}(u, \mathbf{r}, p)$ является теперь изображением Лапласа для функции $\Omega(u, \mathbf{r}, t)$. Конечно, мы должны отметить, что контур интегрирования обратного преобразования в p -плоскости отличается от соответствующего контура в ω -плоскости. Действительно, $p = p_r + ip_i$, где p_i изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, а p_r — постоянная величина, которая больше максимального инкремента нарастания η_m .

§ 4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА МЕТОДОМ ЛАНДАУ

4.1. Решение Ландау

Подставляя (3.28) и (3.29) в (3.27) и исключая функцию $\widehat{f}(u, k, p)$, находим выражение для потенциала

$$\widehat{\Phi}(k, p) = \frac{4\pi e}{k^2} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{f}(u, k, t=0)/(iku+p)] du}{1 - i \frac{\omega_p^2}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} [F'_0(u)/(iku+p)] du}. \quad (4.1)$$

Отсюда имеем

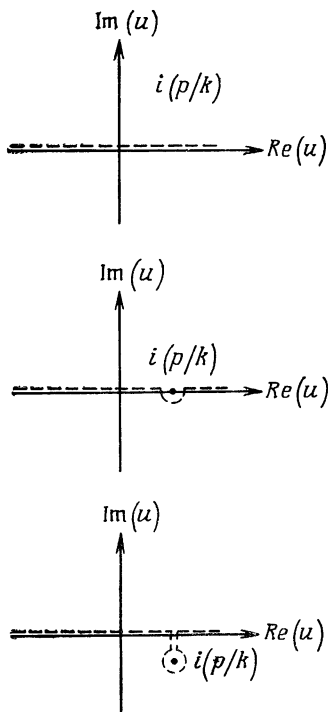
$$\tilde{\Phi}(k, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \frac{4\pi e}{k^2} \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{f}(u, k, t=0)/(iku+p)] du}{1 - i \frac{\omega_p^2}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} [F'_0(u)/(iku+p)] du} \right\} dp. \quad (4.2)$$

Отметим, что контур интегрирования представляет собой вертикальную линию в комплексной p -плоскости с $\sigma > \eta_m$, т. е. находящуюся справа от всех сингулярностей подынтегрального выражения.

Ограничимся теперь рассмотрением функций распределения вида $F_0(u)$, которые, согласно критерию Пенроуза, являются устойчивыми и поэтому не приводят к комплексным корням u_p дисперсионного соотношения. Следовательно, подынтегральное выражение (4.2) представляет собой регулярную функцию как в полуплоскости при $p_r > 0$, так и при $p_r < 0$, поэтому величину $\sigma > 0$ можно выбрать произвольным образом.

Непосредственно вычислить интеграл (4.2) невозможно, поскольку выражение под интегралом имеет разрыв на мнимой оси p , что легко видеть, если применить формулу Племяля (2.74). Поэтому мы будем следовать методу, предложенному Ландау и основанному на аналитическом продолжении функций. Помимо тех условий, которые были уже наложены на $F_0(u)$, потребуем, чтобы функции $F_0(u)$ и $\tilde{f}(u, k, t = 0)$

имели аналитическое продолжение, а функция $\widehat{\Phi}(k, p)$ достаточно быстро стремилась к нулю при $|p| \rightarrow \infty$. Накладывая эти требования, мы стремимся к тому, чтобы можно было применить теорию вычетов к вычислению интеграла (4.2), в котором путь интегрирования замыкается по большой полуокружности в отрицательной полуплоскости. В общем случае этого сделать нельзя



Ф и г. 14. Деформация контура интегрирования при аналитическом продолжении.

из-за наличия разрывов в подынтегральном выражении. Однако значение интеграла вдоль указанного контура интегрирования (от $\sigma - i\infty$ до $\sigma + i\infty$) не зависит от значений подынтегрального выражения вне этого контура. Следовательно, если можно найти аналитическое продолжение подынтегрального выражения в области, расположенной слева от пути интегрирования, то для вычисления интеграла (4.2) можно применить теорию вычетов.

Как числитель, так и знаменатель подынтегрального выражения (4.2) представляют собой комплексные интегралы. Из теоремы Коши следует, что такие интегралы становятся аналитическими, если изменить путь интегрирования так, как это показано на фиг. 14, когда p_r изменяется от положительных значений к отрицательным. Таким образом, знаменатель подынтегрального выражения (4.2) для различных значений p_r можно представить в виде

$$D(k, p) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F'_0(u)}{u - i \frac{p}{k}} du \quad \text{для } p_r > 0, \quad (4.3)$$

$$D(k, p) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[\oint \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F'_0(u)}{u - i \frac{p}{k}} du + i\pi F'_0\left(\frac{ip}{k}\right) \right] \quad \text{для } p_r = 0, \quad (4.4)$$

$$D(k, p) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F'_0(u)}{u - i \frac{p}{k}} du + 2\pi i F'_0\left(\frac{ip}{k}\right) \right] \quad \text{для } p_r < 0. \quad (4.5)$$

Аналогично строится аналитическое продолжение числителя подынтегрального выражения (4.2).

При таком аналитическом продолжении функции $D(k, p)$ ее нули могут лежать только в открытой левой p -полуплоскости¹⁾. Эти нули являются изолированными,

¹⁾ Заметим, что при таком аналитическом продолжении функция $D(k, p)$ может иметь нули, хотя предполагалось, что знаменатель в первоначальном виде никаких нулей не имеет,

поскольку существование неизолированных нулей (точек сгущения) означало бы, что $D(k, p) \equiv 0$ ¹⁾.

Применяя теорему вычетов, сдвинем путь интегрирования в обратном преобразовании Лапласа на величину $\sigma = -\alpha$ и значения интеграла в полюсах представим в виде суммы вычетов:

$$\tilde{\Phi}(k, t) = \sum_{\nu} c_{\nu} e^{p_{\nu} t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} \tilde{\Phi}'(k, p) e^{pt} dp. \quad (4.6)$$

Здесь $\tilde{\Phi}'(k, p)$ — аналитическое продолжение функции $\tilde{\Phi}(k, p)$, а c_{ν} является вычетом функции $\tilde{\Phi}'(k, p)$ в полюсе p_{ν} . Суммирование распространяется на все нули $D(k, p)$. Предполагая, что интеграл в (4.6) стремится к нулю при $\alpha \rightarrow \infty$, получаем

$$\tilde{\Phi}(k, t) = \sum_{\nu} c_{\nu} e^{p_{\nu} t} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} c_0 e^{p_0 t}. \quad (4.7)$$

Таким образом, поскольку $p_{\nu r} < 0$, начальное возмущение затухает. Это затухание называется *затуханием Ландау* [5].

Как видно из (4.7), в пределе $t \rightarrow \infty$ остается только слагаемое, обладающее наименьшей по модулю действительной частью $|p_r|$. Поэтому среди корней уравнения

¹⁾ Для максвелловской функции распределения $F_0(u)$ не выполняется предположение $\tilde{\Phi}(k, p) \rightarrow 0$ при $|p| \rightarrow \infty$. В этом случае $D(k, p)$ имеет бесконечное число нулей в левой p -полуплоскости [4], которые сгущаются на бесконечности и располагаются вблизи линий $\arg p = \pm 3\pi/4$. Однако любая вертикальная узкая полоса содержит только конечное число нулей $D(k, p)$ [14]. Отсюда следует, что обратное преобразование определяется следующим образом:

$$\tilde{\Phi}(k, t) = \sum_{p_{\nu r} > \rho} c_{\nu} e^{p_{\nu} t} + O(e^{\rho t}),$$

где p_{ν} — полюса в полосе $\rho < p_{\nu r} < 0$. Кроме того, можно показать, что вклад от пути интегрирования, сдвинутого в сторону бесконечности, становится исчезающе малым для произвольного момента времени $t > 0$, если начальное возмущение является максвелловским с температурой не ниже, чем температура основной плазмы. Однако для произвольного начального возмущения эта задача еще полностью не решена.

$D(k, p) = 0$ найдем корень p_0 с наименьшей действительной частью $|p_r|$. С этой целью разложим функцию $D(k, p)$ в степенной ряд по мнимым значениям p_i .

Это можно сделать с помощью обобщенной формулы Племеля [12]. Допустим, что функция $g(u)$ удовлетворяет всем требованиям, которые предъявлялись к функции $F_0(u)$; тогда интеграл

$$I(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{u-z} du \quad (4.8)$$

определяет регулярную функцию в верхней z -полуплоскости (конечно, также и в нижней полуплоскости). Эта функция может быть аналитически продолжена соответственно в другую полуплоскость путем разложения в степенной ряд:

$$I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n. \quad (4.9)$$

Из (4.8) для значения z_0 , лежащего в верхней полуплоскости, находим

$$I'(z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{(u-z_0)^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g'(u)}{u-z_0} du. \quad (4.10)$$

Отсюда производная n -го порядка может быть записана по индукции в виде

$$I^{(n)}(z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(u)}{u-z_0} du. \quad (4.11)$$

На основании формулы Племеля (2.74) для $z_0 = x_0 + iy_0$ можно получить

$$\lim_{y_0 \rightarrow +0} I^{(n)}(z_0) = \mathcal{F} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(u)}{u-x_0} du + i\pi g^{(n)}(x_0). \quad (4.12)$$

Отсюда следует, что при $x_0 = x$ и $y_0 = 0$

$$I(x + iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \left[\mathcal{F} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(u)}{u-x} du + i\pi g^{(n)}(x) \right]. \quad (4.13)$$

Положим $g(u) = F'_0(u)$, $x = -p_i/k$ и $y = p_r/k$; тогда разложение $D(k, p)$ по мнимым значениям p примет вид

$$D(k, p) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{ip_r}{k} \right)^n \times \\ \times \left[\mathfrak{F} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_0^{(n+1)}(u)}{u + \frac{p_i}{k}} du + i\pi F_0^{(n+1)} \left(-\frac{p_i}{k} \right) \right]. \quad (4.14)$$

Поскольку мы ищем нуль функции $D(k, p) = 0$ с наименьшим значением $|p_r|$, можно пренебречь членами с более высокими степенями p_r/k . Тогда, приравнивая правую часть (4.14) нулю, после деления мнимой и действительной частей получаем

$$\frac{k^2}{\omega_p^2} = \mathfrak{F} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F'_0(u)}{u + \frac{p_i}{k}} du + O\left(\frac{p_r^2}{k^2}\right) \quad (4.15)$$

и

$$0 = \pi F_0' \left(-\frac{p_i}{k} \right) + \frac{p_r}{k} \mathfrak{F} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_0''(u)}{u + \frac{p_i}{k}} du + O\left(\frac{p_r^3}{k^3}\right). \quad (4.16)$$

Дифференцируя (4.15) по k , находим

$$\frac{2k}{\omega_p^2} = \frac{p_i - k \frac{dp_i}{dk}}{k^2} \mathfrak{F} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_0''(u)}{u + \frac{p_i}{k}} du. \quad (4.17)$$

Исключая интегралы в (4.16) и (4.17), приходим к следующему соотношению:

$$p_r = \frac{\pi}{2} p_i \left(\frac{\omega_p}{k} \right)^2 F_0' \left(-\frac{p_i}{k} \right) \left(\frac{k}{p_i} \frac{dp_i}{dk} - 1 \right). \quad (4.18)$$

В это соотношение мы должны подставить p_i из (4.15). Для простоты ограничимся рассмотрением малых значений k . Тогда существенный вклад в интеграл дает только область $|u| \ll p_i/k$ (случай низких температур), поэтому можно разложить знаменатель в ряд по степеням uk/p_i .

Поскольку сингулярные точки подынтегрального выражения находятся в области вне круга сходимости этого ряда, существенного вклада от них в интеграл ожидать не следует. Это позволяет представить главное значение в виде

$$\frac{k^2}{\omega_p^2} \approx \frac{k}{p_i} \int_{-\infty}^{+\infty} F'_0(u) \left(1 - \frac{ku}{p_i} + \frac{k^2 u^2}{p_i^2} - \frac{k^3 u^3}{p_i^3} + \dots \right) du. \quad (4.19)$$

Отсюда после интегрирования по частям получаем

$$\frac{k^2}{\omega_p^2} \approx -\frac{k}{p_i} \int_{-\infty}^{+\infty} F_0(u) \left(-\frac{k}{p_i} + 2u \frac{k^2}{p_i^2} - 3u^2 \frac{k^3}{p_i^3} + \dots \right) du. \quad (4.20)$$

Учитывая, что $\langle u \rangle = 0$, находим

$$\frac{1}{\omega_p^2} \approx \frac{1}{p_i^2} \left(1 + 3 \langle u^2 \rangle \frac{k^2}{p_i^2} \right). \quad (4.21)$$

В нулевом приближении мы получаем решение $p_i^2 = \omega_p^2$, и в первом приближении

$$\begin{aligned} p_i &\approx \pm \omega_p \left[1 + 3 \langle u^2 \rangle \frac{k^2}{\omega_p^2} \right]^{1/2} \approx \\ &\approx \pm \omega_p \left[1 + \frac{3}{2} \langle u^2 \rangle \frac{k^2}{\omega_p^2} \right] \approx \pm \omega_p. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Это решение совпадает с формулой (2.58). В самом деле, приближение (4.15) приводит нас обратно к мнимой оси p (т. е. к действительной оси u_p). Более того, пренебрежение сингулярностью сводит уравнение (4.15) к дисперсионному уравнению, полученному для случая кусочно-гладкой функции распределения с провалами. Так же как и ранее, здесь мы ограничились рассмотрением малых значений k . Для того чтобы найти соответствующее выражение для p_r , продифференцируем выражение (4.22) по k . Простые вычисления приводят к следующему результату:

$$1 - \frac{k}{p_i} \frac{dp_i}{dk} = \frac{1 - \frac{3}{2} \langle u^2 \rangle \frac{k^2}{\omega_p^2}}{1 + \frac{3}{2} \langle u^2 \rangle \frac{k^2}{\omega_p^2}} \approx 1 - 3 \langle u^2 \rangle \frac{k^2}{\omega_p^2} \approx 1. \quad (4.23)$$

Подставляя это выражение в (4.18), имеем

$$-p_r = \pm \frac{\pi}{2} \left(\frac{\omega_p}{k} \right)^3 k F'_0 \left(\mp \frac{\omega_p}{k} \left[1 + \frac{3}{2} \langle u^2 \rangle \frac{k^2}{\omega_p^2} \right] \right). \quad (4.24)$$

Рассмотрим теперь максвелловскую функцию распределения по скоростям

$$F_0(u) = \left(\frac{m}{2\pi\Theta} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{mu^2}{2\Theta} \right). \quad (4.25)$$

Учитывая, что $m \langle u^2 \rangle = \Theta$, находим выражение для производной

$$\begin{aligned} F'_0 \left(\pm \frac{\omega_p}{k} [\dots] \right) &\approx \\ &\approx \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{m}{\Theta} \right)^{3/2} \frac{\omega_p}{k} \exp \left(-\frac{m\omega_p^2}{2k^2\Theta} - \frac{3}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Таким образом, декремент затухания имеет вид

$$-p_r = \omega_p \sqrt{\frac{\pi}{8}} (k\lambda_D)^{-3} \exp \left(-\frac{1}{2k^2\lambda_D^2} - \frac{3}{2} \right), \quad (4.27)$$

где $\lambda_D^{-2} = m\omega_p^2/\Theta$.

На фиг. 15 представлена относительная величина затухания $-p_r/\omega_p$, вычисленная по формуле (4.27). Легко видеть, что при $k\lambda_D \ll 1$ затухание очень слабое. Существенного затухания можно ожидать только в случае $k\lambda_D \approx 1$. Однако при этом полученные результаты становятся неприменимыми, поскольку при вычислениях мы предполагали, что $k\lambda_D \ll 1$.

Интересно рассмотреть возможность наблюдения затухания Ландау. С одной стороны, чтобы отличить затухание Ландау от затухания, обусловленного столкновениями, существует целый ряд экспериментальных трудностей. Затухание Ландау превалирует в том случае, когда декремент затухания $|p_r|$ много больше частоты столкновений ν_c . Это означает, что

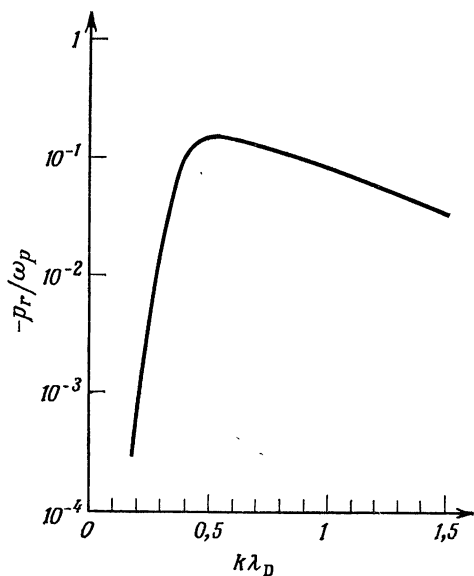
$$|p_r| \gg \nu_c \approx \frac{\ln \Lambda}{\Lambda} \omega_p \quad (4.28)$$

или

$$\frac{\Lambda}{\ln \Lambda} \frac{|p_r|}{\omega_p} \gg 1. \quad (4.29)$$

Из номограммы, приведенной на фиг. 42 (стр. 423), можно видеть, что для обычной плазмы отношение $\Lambda/\ln \Lambda$ вряд ли превышает значение 10^4 . Это означает, что $|p_r|/\omega_p \gg 10^{-4}$ и поэтому $k\lambda_D \geq 0,2$.

С другой стороны, для наблюдения затухания Ландау постоянная затухания не должна быть слишком большой,



Ф и г. 15. Постоянная затухания, вычисленная в приближении Ландау.

чтобы колебания существовали по крайней мере несколько (например, десять) периодов. Как следует из фиг. 15, это приводит к условию $k\lambda_D \leq 0,4$.

Таким образом, затухание Ландау можно обнаружить только в очень узкой области значений $k\lambda_D$, т. е. $0,2 \leq k\lambda_D \leq 0,4$. Даже если мы допустим, что отношение $\Lambda/\ln \Lambda$ принимает много большие значения, это существенно не расширит область допустимых значений $k\lambda_D$, так как $|p_r|/\omega_p$ очень быстро падает с уменьшением $k\lambda_D$.

Преыдушие вычисления являются только приближенными, поэтому приведем здесь результаты строгого

рассмотрения. Подставляя (4.25) в выражение (4.5), запишем уравнение $D(k, p) = 0$ в виде

$$\frac{k^2}{\omega_p^2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{m}{\Theta}\right)^{3/2} \times \\ \times \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u \exp\left[-\frac{mu^2}{2\Theta}\right]}{u - i\frac{p}{k}} du + 2\pi i \frac{ip}{k} \exp\left[-\frac{m}{2\Theta} \left(\frac{ip}{k}\right)^2\right] \right\}. \quad (4.30)$$

Вводя новую переменную $t = u(m/2\Theta)^{1/2}$, получаем

$$-k^2 \lambda_D^3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{t - \zeta} dt + 2i \sqrt{\pi} \zeta e^{-\zeta^2} = J(\zeta), \quad (4.31)$$

где

$$\zeta = \frac{ip}{k} \left(\frac{m}{2\Theta}\right)^{1/2}. \quad (4.32)$$

Найденные решения соответствуют $p_r < 0$, т. е. $\zeta_i < 0$.

Умножим далее числитель и знаменатель в (4.31) на величину $t + \zeta$ и в зависимости от того, является функция четной или нечетной, прибавим или вычтем величину

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1. \quad (4.33)$$

В результате получим

$$J(\zeta) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta^2 e^{-t^2}}{t^2 - \zeta^2} dt + 2i \sqrt{\pi} \zeta e^{-\zeta^2}, \quad (4.34)$$

$$J(\zeta) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \zeta^2 e^{-\zeta^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(t^2 - \zeta^2)}}{t^2 - \zeta^2} dt + \frac{2\pi i}{\zeta} \right].$$

Учитывая равенство

$$\frac{e^{-A}}{A} = - \int_0^1 e^{-As} ds + \frac{1}{A}, \quad \text{где } A = t^2 - \zeta^2, \quad (4.35)$$

выражение для $J(\zeta)$ можно записать как

$$J(\zeta) = 1 + \frac{\zeta^2 e^{-\zeta^2}}{\sqrt{\pi}} \times \\ \times \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[- \int_0^1 e^{-(t^2 - \zeta^2)s} ds + (t^2 - \zeta^2)^{-1} \right] dt + \frac{2\pi i}{\zeta} \right\}. \quad (4.36)$$

Теперь проинтегрируем это выражение по t . Согласно формуле Коши, находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - \zeta^2} = \pm \frac{i\pi}{\zeta}, \quad (4.37)$$

где знак «+» соответствует значениям $\zeta_i > 0$, а знак «-» значениям $\zeta_i < 0$. Следовательно, поскольку мы рассматриваем случай $\zeta_i < 0$,

$$J(\zeta) = 1 + \zeta^2 e^{-\zeta^2} \left\{ - \int_0^1 \frac{e^{\zeta^2 s}}{\sqrt{s}} ds + \frac{i\sqrt{\pi}}{\zeta} \right\}. \quad (4.38)$$

Вводя новую переменную $v = i\zeta\sqrt{s}$, отсюда получаем

$$J(\zeta) = 1 + \zeta^2 e^{-\zeta^2} \left\{ - \frac{2}{i\zeta} \int_0^{i\zeta} e^{-v^2} dv + \frac{i\sqrt{\pi}}{\zeta} \right\} = \\ = 1 + 2i\zeta e^{-\zeta^2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_0^{i\zeta} e^{-v^2} dv \right). \quad (4.39)$$

Таким образом, окончательно имеем

$$J(\zeta) = 1 + 2i\zeta e^{-\zeta^2} \int_{-\infty}^{i\zeta} e^{-v^2} dv = -k^2 \lambda_D^3. \quad (4.40)$$

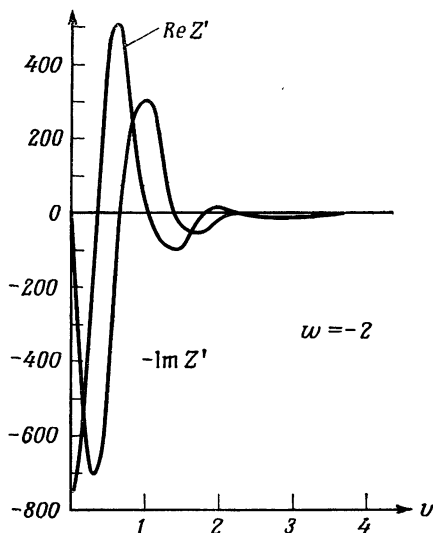
Вводя дисперсионную функцию

$$Z(\zeta) = 2ie^{-\zeta^2} \int_{-\infty}^{i\zeta} e^{-v^2} dv, \quad (4.41)$$

легко записать уравнение, соответствующее нулям $D(k, p)$, а именно

$$k^2 \lambda_D^3 = - [1 + \zeta Z(\zeta)] = \frac{1}{2} Z'(\zeta). \quad (4.42)$$

Дисперсионная функция $Z(\zeta)$ и ее производная $Z'(\zeta)$ были вычислены и табулированы Фридом и Контом [6]. Их результаты позволяют представить решения уравнения (4.42) в плоскости ζ . Обозначим $\zeta = v + iw$. Выбирая фиксированное значение w , можно получить мнимую и действительную части функции Z' в зависимости от v .



Ф и г. 16. Действительная и мнимая части функции Z' при постоянной мнимой части $w = -2$.

На фиг. 16 приведена функция Z' для значения $w = -2$. Мнимая часть производной Z' принимает ряд нулевых значений. При этом действительная часть может быть либо положительной, либо отрицательной. Если она отрицательна, то соответствующие решения должны быть отброшены; если же она положительна, то это дает возможные значения $2k^2\lambda_D^2$. Применяя этот метод для произвольных значений w , можно найти геометрическое место точек всех решений в плоскости ζ . Для получения таких кривых полезны асимптотические решения. В случае больших значений k ($k/k_D \gg 1$) корни дисперсионного уравнения велики по модулю, так что можно использо-

вать асимптотическое разложение функции $Z(\zeta)$, тогда

$$v_n w_n = \frac{\operatorname{arctg} \frac{w_n}{v_n} - \left(2n + \frac{1}{2}\right) \pi}{2},$$

$$(v_n^2 + w_n^2)^{1/2} \exp(w_n^2 - v_n^2) = \left(\frac{k}{k_D}\right)^2 \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \quad (4.43)$$

где $k_D = 1/\lambda_D$, а $n = 0, 1, \dots$. Для $n = 0$ приближенно имеем

$$v_0 = -\frac{\pi}{2w_0}, \quad -w_0 e^{w_0^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{k}{k_D}\right)^2, \quad \text{если } \frac{k}{k_D} \gg 1. \quad (4.43a)$$

Для больших чисел n все решения располагаются вблизи прямой $w = -v$ и выражаются следующим образом, если $k/k_D \gg 1$, $n \gg 1$:

$$\rho_n^2 = \left(2n + \frac{3}{4}\right) \pi, \quad \delta_n = \frac{1}{2\rho_n^2} \ln \frac{k^2 \lambda_D^2}{2\sqrt{\pi} \rho_n}, \quad (4.43b)$$

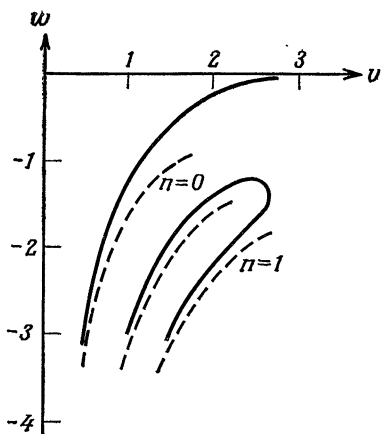
$$\zeta_n = \rho_n \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{4} + \delta_n\right)\right].$$

Для малых значений k ($k/k_D \ll 1$) мы получаем результат Ландау ($n = 0$):

$$v_0^2 = \frac{k^2 + 3k_D^2}{2k_D^2}, \quad w_0 = -\frac{v_0^4 e^{-v_0^2}}{\sqrt{\pi}}. \quad (4.44)$$

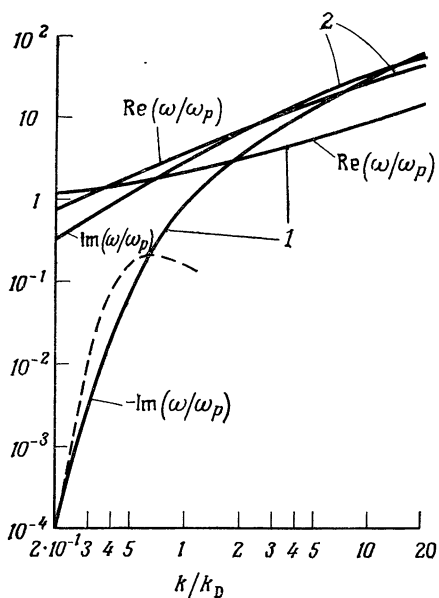
На фиг. 17 представлены физически разумные решения, соответствующие положительным (верхняя сплошная кривая) и отрицательным (нижняя сплошная кривая) значениям k_D^2 . Штриховые кривые соответствуют асимптотическим решениям.

Поскольку точкам каждой кривой на фиг. 17 отвечает определенное значение k , можно построить зависимости w и v от k/k_D . Такие кривые показаны на фиг. 18. На этой фигуре также представлено (штриховая кривая) приближенное решение Ландау (см. фиг. 15), причем данное решение для больших значений k обрывается. Более того, как видно из фиг. 18 и что можно было ожидать из данных



Ф и г. 17. Решения дисперсионного уравнения для положительных и отрицательных значений k_D^2 .

π обозначает различные моды в вычислениях по асимптотическим формулам.



Ф и г. 18. Частота и затухание продольных плазменных волн в зависимости от k/k_D .

1 — первая мода; 2 — вторая мода.

на фиг. 17, для каждого значения k имеется много решений¹⁾. Решение Ландау соответствует моде с наименьшим декрементом затухания.

Интересно отметить, что функция $Z(\zeta)$ удовлетворяет соотношению

$$Z(\zeta^*) = -Z^*(-\zeta). \quad (4.45)$$

Применяя это соотношение к (4.42), можно непосредственно убедиться в том, что если решением является ζ , то решением будет и $-\zeta^*$. А это означает, что волны, распространяющиеся в направлении векторов \mathbf{k} и $-\mathbf{k}$, затухают одинаково.

4.2. Общая физическая интерпретация затухания Ландау

Затухание и усиление продольных коллективных колебаний является для нас уже привычным, поскольку мы рассматривали нормальные колебания с комплексной частотой. При этом было установлено, что каждому комплексному решению дисперсионного уравнения соответствует комплексно-сопряженное. Поэтому мы имеем всегда одновременно затухающую и нарастающую моды.

Интересно отметить, что затухание Ландау не соответствует такой группе мод, поскольку не существует процесса усиления, соответствующего затуханию Ландау. Аналитически данное обстоятельство выражается в том, что полюса Ландау не появляются в виде пар точек ζ и ζ^* . Это в свою очередь является следствием того, что решения Ландау получаются из аналитического продолжения дисперсионной функции в плоскость отрицательных значений p_r [см. (4.3) и (4.5)]:

$$D(k, p) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F'_0(u)}{u - i \frac{p}{k}} du \quad \text{для } p_r > 0,$$

$$D(k, p) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F'_0(u)}{u - i \frac{p}{k}} du + 2\pi i F'_0\left(\frac{ip}{k}\right) \right] \quad (4.46)$$

для $p_r < 0$,

¹⁾ Как показали Хейс [7, 8] и Синз [13, 14], в этом можно легко убедиться с помощью теоремы Пикара.

в то время как комплексно-сопряженные решения получаются для дисперсионного соотношения, представленного разрывной функцией

$$\varepsilon(k, p) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_0'(u)}{u - i \frac{p}{k}} du. \quad (4.47)$$

Поэтому метод Ландау дает не только все полюса комплексных решений дисперсионного уравнения, но еще некоторые дополнительные полюса, которые называются «полюсами Ландау».

Чтобы подойти ближе к физической интерпретации явления затухания Ландау, допустим, что наша система комплексных собственных решений, о чем говорилось в начале § 3, не является полной. Мы должны дополнить ее модами с действительными значениями ω (модами Ван Кампена). Эти моды будут детально рассмотрены в следующем параграфе. Предполагая заранее, что набор решений, состоящий из комплексных решений дисперсионного уравнения и мод Ван Кампена, становится полным, любое решение уравнения Власова можно представить в виде

$$\tilde{\Phi}(k, t) = \frac{4\pi e}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(\omega, k) e^{-i\omega t} d\omega + \sum_{\nu} A_{\nu} e^{-i\omega_{\nu} t}. \quad (4.48)$$

С другой стороны, применяя метод Ландау к неустойчивой плазме, можно получить решение в виде

$$\tilde{\Phi}(k, t) = \sum_{\text{Ландау}} + \sum_{\nu} A_{\nu} e^{-i\omega_{\nu} t}. \quad (4.49)$$

Здесь первый член правой части представляет собой сумму (4.7), а второй совпадает со вторым членом, стоящим в правой части выражения (4.48). Отсюда следует, что первый член (4.49), соответствующий решению Ландау, должен соответствовать вкладу от мод Ван Кампена. Так как моды Ван Кампена принадлежат к нормальным модам с действительными значениями ω , то каждая из них является незатухающей. Однако наложение незатухающих колебаний может приводить к затуханию колебаний в результате их интерференции. Поэтому мы делаем вывод,

что затухание Ландау есть результат *перемешивания фаз в модах Ван Кампена*.

Другим вопросом, представляющим физический интерес и связанным с затуханием Ландау, является вопрос о диссипации энергии. Если мы рассмотрим устойчивую плазму, для которой существуют только затухающие решения Ландау, то в конечном состоянии системы будут отсутствовать все возмущения вызванные коллективными взаимодействиями за счет электрических сил; поэтому возникает вопрос о том, в какой вид энергии перешла электрическая энергия колебаний. Поскольку мы исследуем изолированную систему, то эта энергия может перейти только в кинетическую. Полная энергия нашей системы в пренебрежении корреляциями записывается следующим образом:

$$W = \int \frac{mv^2}{2} f^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} + \int \frac{|E|^2}{8\pi} d\mathbf{r}. \quad (4.50)$$

Поэтому изменение кинетической энергии, связанное с изменением энергии электрического поля, равно

$$\int \frac{mv^2}{2} \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} d\mathbf{r} d\mathbf{v} = -\frac{1}{8\pi} \int \frac{\partial |E|^2}{\partial t} d\mathbf{r}. \quad (4.51)$$

Если электрическое поле вычислить в первом приближении, то соответствующий энергетический член будет членом второго порядка, а поэтому, чтобы обеспечить необходимую точность в определении энергии, необходимо знать функцию $f^{(1)}$ до членов второго порядка малости. Это показывает, что существующая до сих пор линеаризованная теория является недостаточной для решения энергетической проблемы.

Вместе с тем имеется другая точка зрения на законность линейного приближения. Обратное преобразование Лапласа для $\tilde{f}(u, k, p)$ приводит к выражению [см. (3.27)]

$$\begin{aligned} \tilde{f}(u, k, t) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{i \frac{e}{m} kn F'_0(u) \widehat{\Phi}(k, p) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(u, k, t=0)}{iku + p} e^{pt} dp. \end{aligned} \quad (4.52)$$

В противоположность электрическому полю и соответствующей энергии эта функция не дает нулевого вклада при $t \rightarrow \infty$. Преобразование Фурье—Лапласа $\tilde{f}(u, k, p)$, помимо полюсов образа Фурье—Лапласа \tilde{F} , имеет еще один полюс на мнимой оси, который возникает из-за осциллирующего члена $A(u, k) \exp(-ikut)$, не испытывающего затухания.

Особенно заслуживает внимания тот факт, что частота этого явления зависит от скорости u . Если проинтегрировать \tilde{f} по u в произвольных пределах, то вновь появится затухание как результат перемешивания фаз, соответствующих членам с различными скоростями u .

Любые попытки более детально изложить энергетическую проблему приводят к нелинейной теории (см. работу [9] и приведенные в ней ссылки на литературу).

§ 5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА МЕТОДОМ ВАН КАМПЕНА

В настоящем параграфе мы рассмотрим другой метод решения уравнения Власова. Этот метод был разработан Ван Кампеном [10], который разрешил проблему, связанную с наличием полюса при $u = u_p$ в дисперсионном соотношении (2.14) с помощью теории обобщенных функций [11].

Будем исходить из преобразованного по Фурье линеаризованного уравнения Власова в отсутствие внешнего возмущения [см. (3.6)]:

$$\left[u - \frac{\omega}{k} \right] \tilde{f}(u, k, \omega) - \frac{\omega_p^2}{k^2} F'_0(u) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(u, k, \omega) du = 0. \quad (5.1)$$

Рассмотрим теперь задачу нахождения нормальных мод решений этого уравнения с действительным значением $\omega/k = \nu$, т. е. задачу, которую Ландау обошел путем введения аналитического продолжения. Чтобы решить эту задачу на собственные значения для действительных ν , запишем ν как индекс, опуская зависимость от k . Уравнение (5.1) является однородным, так что функция $\tilde{f}(u, k, \omega)$ определяется только с точностью до произвольного множителя. Поэтому можно наложить допол-

нительное условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_v(u) du = 1, \quad (5.2)$$

благодаря которому (5.1) преобразуется в уравнение

$$(u - v) \tilde{f}_v(u) = \frac{\omega_p^2}{k^2} F'_0(u). \quad (5.3)$$

Заметим, что решение этого уравнения не может быть написано в виде

$$\tilde{f}_v(u) = \frac{\omega_p^2}{k^2} F'_0(u) \frac{1}{u - v}. \quad (5.4)$$

Кроме того, следует установить однозначное правило, определяющее вклад от сингулярности. Необходимо также отметить, что для решения задачи достаточно определить $f_v(u)$ как обобщенную функцию в смысле Шварца, поскольку измеряемые величины являются усредненными, вычисленными путем интегрирования по $f_v(u)$.

Используя результаты функционального анализа, приходим к следующему соотношению:

$$\tilde{f}_v(u) = \frac{\omega_p^2}{k^2} F'_0(u) \mathcal{P} \frac{1}{u - v} + A(v) \delta(u - v), \quad (5.5)$$

где второй член в правой части представляет собой произвольное решение соответствующего однородного уравнения]

$$(u - v) \tilde{f}_v(u) = 0. \quad (5.6)$$

Из условия нормировки получаем

$$A(v) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F'_0(u)}{u - v} du. \quad (5.7)$$

В результате находим

$$\tilde{f}_v(u) = \frac{\varepsilon_2(u)}{\pi} \mathcal{P} \frac{1}{u - v} + \varepsilon_1(u) \delta(u - v). \quad (5.8)$$

Здесь мы ввели сокращенные обозначения ε_1 и $-\varepsilon_2$ для действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости (3.10), которая теперь может быть записана в пределе $\nu_i = \pm 0$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\pm}(k, \nu) &= \varepsilon_1(k, \nu) \mp i\varepsilon_2(k, \nu), \\ \varepsilon_1(k, \nu) &= 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F'_0(u)}{u - \nu} du, \\ \varepsilon_2(k, \nu) &= \pi \frac{\omega_p^2}{k^2} F'_0(\nu). \end{aligned} \quad (5.9)$$

В решении (5.8) содержится удивительный результат, что для любого ν и для любого значения волнового числа k можно найти собственную функцию $\tilde{f}_{\nu}(u)$. Спектр собственных значений уравнения Власова включает всю действительную ось. А это означает, что не существует дисперсионного соотношения $\nu = \nu(k)$.

5.1. Присоединенное уравнение Власова

Для решения начальной задачи мы должны разложить заданное начальное возмущение по собственным функциям:

$$\tilde{f}(u, t=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\nu) \tilde{f}_{\nu}(u) d\nu. \quad (5.10)$$

Так как уравнение Власова не является эрмитовым, необходимо ввести систему функций $\tilde{f}_{\nu}^{\dagger}(u)$, ортогональных модам Ван Кампена $\tilde{f}_{\nu}(u)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_{\nu}(u) \tilde{f}_{\nu'}^{\dagger}(u) du = C(\nu) \delta(\nu - \nu'). \quad (5.11)$$

Это позволяет определить коэффициенты разложения в соответствии с формулой

$$K(\nu) = \frac{1}{C(\nu)} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(u, t=0) \tilde{f}_{\nu}^{\dagger}(u) du. \quad (5.12)$$

Отсюда следует, что необходимо рассматривать также и присоединенное уравнение Власова. В общем случае оператор L^\dagger , присоединенный к линейному оператору L , определяется из уравнения

$$\int [f_1 L f_2 - f_2 L^\dagger f_1] dx = 0. \quad (5.13)$$

Из этого уравнения мы получаем, что собственные функции L и L^\dagger ортогональны:

$$\int [f_1^\dagger \lambda_2 f_2 - f_2 \lambda_1 f_1^\dagger] dx = (\lambda_2 - \lambda_1) \int f_1^\dagger f_2 dx = 0. \quad (5.14)$$

Оператор Власова содержит интегральный оператор

$$I = b(x) \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi. \quad (5.15)$$

Из равенства

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) b(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\xi) d\xi = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} b(\xi) f_1(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (5.16)$$

можно легко получить оператор, присоединенный к интегральному оператору (5.15), т. е.

$$I^\dagger = \int_{-\infty}^{+\infty} b(\xi) d\xi. \quad (5.17)$$

Таким образом, присоединенное уравнение Власова записывается в виде

$$(u - v) \tilde{f}_v^\dagger(u) - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} F'_0(u) \tilde{f}_v^\dagger(u) du = 0. \quad (5.18)$$

Это уравнение является однородным и относится к тому же типу, что и (5.1); поэтому его можно решить тем же методом, как и (5.1). В частности, на функцию $f_v^\dagger(u)$ можно наложить произвольное условие нормировки,

которое удобно выбрать следующим образом:

$$\frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} F'_0(u) \tilde{f}_v^{\dagger}(u) du = 1. \quad (5.19)$$

Используя приведенную выше аргументацию, решение уравнения (5.18) запишем в виде

$$\tilde{f}_v^{\dagger}(u) = \mathcal{F} \left[\frac{1}{u-v} \right] + B(v) \delta(u-v), \quad (5.20)$$

где $B(v)$ определяется из условия нормировки как

$$B(v) = \frac{\varepsilon_1(v)}{\varepsilon_2(v)}. \quad (5.21)$$

Соотношение ортогональности (5.11) может быть доказано в самом общем виде с помощью уравнения (5.14). Определение величин $C(v)$ отложим пока до того момента, когда будет доказана полнота набора мод Ван Кампена. Непосредственное вычисление $C(v)$ провести весьма трудно, поскольку необходимо тщательно следить за тем, чтобы не допустить изменения порядка интегрирования в членах, содержащих произведение главных частей.

5.2. Полнота набора мод Ван Кампена

Разложение (5.10) по собственным функциям можно выполнять только тогда, когда набор функций $\tilde{f}_v(u)$ является полным. Другими словами, эту задачу можно сформулировать следующим образом: при каких условиях уравнение (5.10) имеет решение для любого заданного начального возмущения $\tilde{f}(u, t=0)$?

Будем считать, что начальное возмущение, определенное только на действительной оси u , можно разбить на две части: «плюс-функцию» и «минус-функцию». Плюс-функция имеет аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость комплексного переменного, а минус-функция — в нижнюю полуплоскость. Такое разложение будет единственным при условии, что $\tilde{f}_+(\infty) = 0$. Тогда функ-

ция

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{f}(u)}{u-z} du = \begin{cases} \tilde{f}_+(z) & \text{для } z_i > 0, \\ \tilde{f}_-(z) & \text{для } z_i < 0 \end{cases} \quad (5.22)$$

определяет аналитические функции в соответствующих полуплоскостях, если $\tilde{f}(u)$ — интегрируемая функция. На основании формулы Племеля в пределе $z_i = \pm 0$ имеем

$$\tilde{f}_{\pm}(u) = \frac{1}{2\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{f}(x)}{x-u} dx \pm \frac{1}{2} \tilde{f}(u). \quad (5.23)$$

Отсюда получаем

$$\tilde{f} = \tilde{f}_+ - \tilde{f}_- \quad (5.24)$$

и

$$\frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{f}(x)}{x-u} dx = \tilde{f}_+ + \tilde{f}_-.$$

Теперь наложим на $F_0(u)$ условия, которые накладывались на эту функцию при выводе критерия Пенроуза. Подставляя в (5.10) выражение (5.8) для функции $\tilde{f}_v(u)$, получаем эквивалентное соотношение

$$\tilde{f}(u, t=0) = \varepsilon_1(u) K(u) - \frac{\varepsilon_2(u)}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K(v)}{v-u} dv \quad (5.25)$$

или, пользуясь разложением (5.24) для $K(u)$ и $\tilde{f}(u, t=0)$, находим

$$\tilde{f}_+ - \tilde{f}_- = \varepsilon_1(K_+ - K_-) - i\varepsilon_2(K_+ + K_-). \quad (5.26)$$

Отсюда и из (5.9) имеем

$$\tilde{f}_+ - \tilde{f}_- = \varepsilon_+ K_+ - \varepsilon_- K_-. \quad (5.27)$$

Уравнение (5.27) представляет собой соотношение для функции $(\varepsilon K - \tilde{f})$, состоящей из двух функций, аналитических на действительной оси и не имеющих скачка на ней. Единственной функцией, удовлетворяющей ука-

занным условиям, является константа; в нашем случае эта константа равна нулю, т. е.

$$\varepsilon(u) K(u) - \tilde{f}(u) \rightarrow 0 \quad \text{при } |u| \rightarrow \infty. \quad (5.28)$$

Отсюда мы имеем

$$\varepsilon_{\pm} K_{\pm} = \tilde{f}_{\pm}. \quad (5.29)$$

Рассмотренный метод допустим тогда и только тогда, когда величина $K_{\pm} = \tilde{f}_{\pm}/\varepsilon_{\pm}$ представляет собой плюс(минус)-функцию. А для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon_{+}(z) \neq 0$ при $z_i \geq 0$. Кроме того, из соотношения $\varepsilon_{-}(z) = \varepsilon_{+}^{*}(z) = \varepsilon_{+}(z^{*})$ получаем также неравенство $\varepsilon_{-}(z) \neq 0$ для $z_i \leq 0$. Из анализа контуров $G(\mathbb{R} \pm i0)$, проводившегося при выводе критерия Пенроуза, ясно, что полученные неравенства эквивалентны условию устойчивости распределения $F_0(u)$ в нулевом порядке. Таким образом, можно сформулировать теорему: устойчивость функции $F_0(u)$ означает полноту системы собственных функций Ван Кампена $\tilde{f}_{\nu}(u)$ для действительных значений ν .

На следующем примере мы покажем, каким образом можно обобщить предыдущий метод, включая неустойчивые состояния. Для этого к непрерывному спектру действительных значений следует добавить набор дискретных собственных значений, являющихся нулями функции $\varepsilon_{\pm}(z)$ соответственно для $z_i > 0$ и $z_i < 0$. Тогда отвечающие им нормированные собственные функции равны

$$\tilde{f}_j(u) = \frac{\varepsilon_2(u)}{\pi} \frac{1}{u - z_j}. \quad (5.30)$$

Присоединенные собственные функции при этом записываются следующим образом:

$$\tilde{f}_j^{\dagger}(u) = \frac{1}{u - z_j}. \quad (5.31)$$

Эти функции нормируются в соответствии с (5.19). Наконец, условие ортогональности изменяется вследствие добавления суммы по дискретному спектру:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{C(\nu)} \tilde{f}_{\nu}(u_1) \tilde{f}_{\nu}^{\dagger}(u_2) d\nu + \sum_j \frac{1}{C_j} \tilde{f}_j(u_1) \tilde{f}_j^{\dagger}(u_2) = \delta(u_1 - u_2). \quad (5.32)$$

Рассмотрим опять только устойчивые состояния и найдем нормировочную постоянную $C(v)$, вычисляя $K(v)$ с помощью (5.12) и сравнивая с полученным выражением

$$K(v) = \frac{\tilde{f}_+(v)}{\varepsilon_+(v)} - \frac{\tilde{f}_-(v)}{\varepsilon_-(v)}. \quad (5.33)$$

Подставляя сюда вместо $\tilde{f}_v^\dagger(u)$ выражения (5.20) и (5.21), путем простых преобразований находим

$$K(v) = \frac{\pi}{C(v)\varepsilon_2(v)} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(u, t=0) \left[\frac{\varepsilon_2(v)}{\pi} \mathcal{P} \frac{1}{u-v} + \varepsilon_1(v) \delta(u-v) \right] du = \frac{\pi}{C(v)\varepsilon_2(v)} \left[\tilde{f}_+(v) \varepsilon_-(v) - \tilde{f}_-(v) \varepsilon_+(v) \right]. \quad (5.34)$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$K(v) = \frac{\pi \varepsilon_+(v) \varepsilon_-(v)}{C(v) \varepsilon_2(v)} \left[\frac{\tilde{f}_+(v)}{\varepsilon_+(v)} - \frac{\tilde{f}_-(v)}{\varepsilon_-(v)} \right], \quad (5.35)$$

откуда, сравнивая с (5.33), окончательно получаем

$$C(v) = \frac{\pi |\varepsilon_\pm(v)|^2}{\varepsilon_2(v)}. \quad (5.36)$$

5.3. Решение начальной задачи методом разложения по собственным функциям. Сравнение с решением Ландау

Любое начальное возмущение вида (5.10) развивается во времени, согласно соотношению

$$\tilde{f}(k, u, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(v) \tilde{f}_v(u) e^{-ikvt} dv, \quad (5.37)$$

поскольку для мод Ван Кампена временная зависимость соответствует нормальным колебаниям.

Наибольший интерес представляет временная зависимость потенциала, который, согласно (3.27), содержит только функцию распределения первого порядка, проинтегрированную по скорости u . Учитывая условие нор-

мировки мод Ван Кампена, получаем функцию

$$\tilde{h}(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k, u, t) du = \int_{-\infty}^{+\infty} K(v) e^{-ikvt} dv \quad (5.38)$$

или, подставляя сюда вместо $K(v)$ выражение (5.33),

$$\tilde{h}(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e_{\pm}^{-ikvt} \left[\frac{\tilde{f}_{+}(v)}{\varepsilon_{+}(v)} - \frac{\tilde{f}_{-}(v)}{\varepsilon_{-}(v)} \right] dv. \quad (5.39)$$

Для $t > 0$ контур интегрирования от $+\infty$ до $-\infty$ можно замкнуть в нижнюю v -полуплоскость. В нижней полуплоскости функция $\tilde{f}_{-}/\varepsilon_{-}$ является регулярной, поэтому для $t > 0$ мы имеем

$$\tilde{h}(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikvt} \frac{\tilde{f}_{+}(v)}{\varepsilon_{+}(v)} dv. \quad (5.40)$$

Для функции $\tilde{h}(k, t)$ Ландау получил следующее выражение [см. (4.2)]:

$$\tilde{h}(k, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(u, k, t=0) (p+iku)^{-1} du}{\varepsilon_{+}(k, p)} dp. \quad (5.41)$$

После подстановки $p = -i\omega$

$$\tilde{h}(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} e^{-i\omega t} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{f}(u, k, t=0)}{i(ku-\omega)} du}{\varepsilon_{+}(k, \omega)} d\omega. \quad (5.42)$$

Напомним, что для устойчивой плазмы можно положить $\sigma = +0$. Тогда, вводя новую переменную $\omega = k(v+i0)$, получаем

$$\tilde{h}(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikvt}}{\varepsilon_{+}(k, v)} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{f}(u, k, t=0)}{ik(u-v-i0)} du \right] k dv. \quad (5.43)$$

Учитывая (5.22), легко видеть, что последнее выражение совпадает с выражением (5.40). Это свидетельствует

о полной эквивалентности решения начальной задачи методом Ландау и методом Ван Кампена. Нет никакого противоречия также и в том, что моды Ван Кампена являются незатухающими и не удовлетворяют дисперсионному соотношению, в то время как колебания Ландау затухают, ибо в устойчивой плазме любая физическая функция распределения представляет собой суперпозицию собственных функций Ван Кампена, а поэтому она затухает благодаря «перемешиванию фаз».

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов А. А.*, Journ. Phys. USSR, 9, 25 (1945).
2. *Власов А. А.*, Теория многих частиц, ГИТТЛ, М., 1950.
3. *Penrose O.*, Phys. Fluids, 3, 258 (1960).
4. *Denavit J.*, Phys. Fluids, 8, 471 (1965).
5. *Ландау Л. Д.*, ЖЭТФ, 16, 574 (1946).
6. *Fried B. D.*, *Conte S. D.*, The Plasma Dispersion Function, Academic Press, New York, 1961.
7. *Hayes J.*, Phys. Fluids, 4, 1387 (1961).
8. *Hayes J.*, Nuovo Cimento, 30, 1048 (1963).
9. *Einaudi F.*, *Sudan R. N.*, Plasma Phys., 11, 359 (1969).
10. *Van Kampen N. G.*, Physica, Utrecht, 21, 949 (1955); 23, 647 (1957).
11. *Мухелишвили Н. И.*, Сингулярные интегральные уравнения, изд-во «Наука», М., 1968.
12. *Jackson J. D.*, Journ. Nucl. Energy, Part C, 1, 171 (1960).
13. *Saenz A. W.*, Rep. NRL-6125, U. S. Naval Res. Lab., Baltimore, Maryland, 1964.
14. *Saenz A. W.*, Journ. Math. Phys., 6, 859 (1965).

Дополнительная литература

- Case K. M.*, *Zweifel P. F.*, Linear Transport Theory, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1967.
- Magneto-Fluid and Plasma Dynamics (ed. H. Grad), Proc. Symp. Appl. Math. (Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island), 18 (1967).
- Jackson J. D.*, Classical Electrodynamics, Wiley, New York, 1962.
- Montgomery D.*, *Tidman D.*, Plasma Kinetic Theory, McGraw-Hill, New York, 1964.
- Roos B. W.*, Analytic Functions and Distributions in Physics and Engineering, Wiley, New York, 1969.
- Stix T. H.*, The Theory of Plasma Waves, McGraw-Hill, New York, 1962 (см. перевод: *Т. Х. Стикс*, Теория плазменных волн, Госатомиздат, М., 1965).
- Wu T. Y.*, Kinetic Equations of Gases and Plasmas, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1966.

R § 1

Vlasov A. A., ЖЭТФ, 8, 291 (1938).

R § 2

Bohm D., *Gross E. P.*, Phys. Rev., 75, 1851, 1864 (1949).

Fowler T. K., Phys. Fluids, 4, 1393 (1961).

Fowler T. K., Journ. Nucl. Energy, Part C, 4, 391 (1962).

Harrison E. R., Proc. Phys. Soc. (London), 79, 317 (1962); 80, 432 (1962).

Tonks L., *Langmuir I.*, Phys. Rev., 33, 196 (1929).

R § 3 и 4

Альтшуль Л. М., *Карпман В. И.*, ЖЭТФ, 49, 515 (1965).

Backus G., Journ. Math. Phys., 1, 178 (1960).

Bernstein I. B., *Greene J. M.*, *Kruskal M. D.*, Phys. Rev., 108, 546 (1957).

Denavit J., Phys. Fluids, 9, 134 (1966).

Derfler H., *Simonen T. C.*, Phys. Fluids, 12, 269 (1969).

Drummond W. E., *Pines D.*, Nucl. Fusion Suppl., Pt. 2, 1049 (1962).

Fried B. D., *Gould R. W.*, Phys. Fluids, 4, 139 (1961).

Gary S. P., Phys. Fluids, 10, 570 (1967).

Källén G., Intuitive Analyticity, в книге Preludes in Theoretical Physics in Honor of V. F. Weisskopf (ed. A. Shalit), North-Holland Publ., Amsterdam.

McGune J. E., Phys. Fluids, 9, 2082 (1966).

Taylor E. C., Phys. Fluids, 8, 2250 (1965).

Turski A. J., Ann. Phys., 35, 240 (1965).

Веденов А. А., *Велихов Е. П.*, *Сагдеев Р. З.*, ЮФН, 73, 701 (1961).

Weitzner H., Phys. Fluids, 6, 1123 (1963); 7, 476 (1964).

Weitzner H., Comm. Pure Appl. Math., 18, 307 (1965).

R § 5

Case K. M., Ann. Phys. (New York), 7, 349 (1959).

McGune J. E., Phys. Fluids, 9, 1788 (1966).

Zelazny R. S., Ann. Phys., 19, 177 (1962).

Van Kampen N. G., Theoretical Methods in Plasma Physics, Wiley, New York, 1967.

Глава 4

Неравновесные состояния кулоновской системы с учетом корреляций между частицами

§ 1. ВЫВОД КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ИЗ ЦЕПОЧКИ УРАВНЕНИЙ БГКИ

1.1. Основные положения

Начнем рассмотрение опять исходя из цепочки уравнений БГКИ [см. (2.2.18)] для частных функций распределения. Поскольку нас интересуют только внутренние состояния кулоновской системы, мы не будем учитывать внешние силы. В докритической области, когда выполнено условие $\Lambda \gg 1$, можно ограничиться случаями $s \ll N$. Тогда цепочка уравнений представляет собой следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}_i} - \frac{1}{m} \sum_{i,k}^s \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} f_s = \\ = \frac{N}{m} \int d\mathbf{r}' \int \sum_{i=1}^s \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}') \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} f_{s+1}(\dots \mathbf{r}', \mathbf{v}'; t) d\mathbf{v}'. \quad (1.1) \end{aligned}$$

Здесь $\phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$ — потенциальная энергия взаимодействия, зависящая только от расстояния $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|$.

Вернемся к переменным Γ -пространства $(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i)$, которые обычно используются в литературе, поскольку различие между переменными μ -пространства $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{v})$ и Γ -пространства $(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i)$ было важно только в формализме Климонтовича.

Решение цепочки уравнений (1.1) представляет собой довольно известную проблему, ибо число неизвестных функций на единицу больше, чем число уравнений. Чтобы обойти эту трудность, предположим, что трехчастичные корреляции можно выразить через парные корреляции. Ниже мы обсудим решения, при которых можно ограничиться двумя первыми уравнениями цепочки (1.1), применяя разложение по малым параметрам.

Наряду с этим будут получены условия, при которых кулоновскую систему с корреляциями можно приближенно описать функциями распределения, в которых корреляции не учитываются, т. е. парную корреляционную функцию можно представить в виде (см. гл. 3).

$$f_2(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j; t) = f_1(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i; t) f_1(\mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j; t). \quad (1.2)$$

Классификация по параметру связи и плотности

Для исследования этого вопроса целесообразно вначале рассмотреть систему, в которой закон взаимодействия частиц позволяет ввести характерное значение потенциальной энергии ϕ_c и характерную область взаимодействия r_c . Будем также считать, что функции распределения рассматриваемой системы позволяют ввести характерное значение скорости v_c . Применимость полученных здесь выводов к плазме мы рассмотрим ниже.

Пронормируем цепочку уравнений (1.1) относительно r_c , v_c и ϕ_c . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\overset{\circ}{\partial} \overset{\circ}{f}_s}{\overset{\circ}{\partial} t} + \sum_{i=1}^s \overset{\circ}{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\overset{\circ}{\partial} \overset{\circ}{f}_s}{\overset{\circ}{\partial} \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i} - \Pi_{\text{св}} \sum_{i,h}^s \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i} \overset{\circ}{\phi} \cdot \frac{\overset{\circ}{\partial} \overset{\circ}{f}_s}{\overset{\circ}{\partial} \overset{\circ}{\mathbf{v}}_i} = \\ = \Pi_{\text{св}} \Pi_{\text{пл}} \int d\overset{\circ}{\mathbf{r}}' \int \sum_{i=1}^s \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i} \overset{\circ}{\phi}(\overset{\circ}{\mathbf{r}}_i, \overset{\circ}{\mathbf{r}}') \cdot \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{\mathbf{v}}_i} \overset{\circ}{f}_{s+1} d\overset{\circ}{\mathbf{v}}'. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь введены следующие безразмерные переменные:

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r_c}, \quad \overset{\circ}{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v_c}, \quad \overset{\circ}{t} = t \frac{v_c}{r_c}, \quad \overset{\circ}{\phi} = \frac{\phi}{\phi_c}, \quad \overset{\circ}{f}_s = v_c^{3s} V^s f_s. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.3) в безразмерных переменных содержит только два характерных параметра

$$\Pi_{\text{св}} = \frac{\phi_c}{m v_c^2} \quad \text{и} \quad \Pi_{\text{пл}} = n r_c^3. \quad (1.5)$$

Назовем $\Pi_{\text{св}}$ параметром связи, а $\Pi_{\text{пл}}$ — параметром плотности. Эти параметры удобны для характеристики метода разложения по малому параметру.

Если в качестве малого параметра взять величину $\varepsilon \ll 1$, то можно учесть все встречающиеся случаи различ-

ных состояний, рассматривая всевозможные комбинации следующих величин $\Pi_{\text{св}}$ и $\Pi_{\text{пл}}$:

$$\begin{aligned} 1) \Pi_{\text{св}} &= O(\varepsilon), & 1') \Pi_{\text{пл}} &= O(\varepsilon), \\ 2) \Pi_{\text{св}} &= O(1), & 2') \Pi_{\text{пл}} &= O(1), \\ 3) \Pi_{\text{св}} &= O(\varepsilon^{-1}), & 3') \Pi_{\text{пл}} &= O(\varepsilon^{-1}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Четыре комбинации $\Pi_{\text{св}}$ и $\Pi_{\text{пл}}$, возникающие из групп (2), (3) и (2'), (3') соответственно, не удовлетворяют основным условиям разложения по малому параметру. Эти четыре комбинации соответствуют критическим и надкритическим состояниям, в которых имеется сильная связь в одной или нескольких подсистемах. Такие состояния представляют интерес в случае жидкостей и твердых тел, но это выходит за рамки нашего рассмотрения, поскольку мы исследуем лишь системы, находящиеся в докритическом состоянии. Поэтому такие комбинации параметров $\Pi_{\text{св}}$ и $\Pi_{\text{пл}}$ ниже исключаются из рассмотрения.

Одна из оставшихся пяти комбинаций также должна быть исключена, поскольку, если скомбинировать пару параметров

$$3) \Pi_{\text{св}} = O(\varepsilon^{-1}) \text{ и } 1') \Pi_{\text{пл}} = O(\varepsilon), \quad (1.7)$$

мы получаем строго парное взаимодействие, потому что $\Pi_{\text{пл}} = O(\varepsilon)$. Следовательно, согласно закону сохранения энергии, значение $\Pi_{\text{св}}$ не может превышать единицы.

Таким образом, остаются следующие четыре случая:

- а) $\Pi_{\text{св}} = O(1)$, $\Pi_{\text{пл}} = O(\varepsilon)$ разреженный газ,
- б) $\Pi_{\text{св}} = O(\varepsilon)$, $\Pi_{\text{пл}} = O(\varepsilon)$ слабая связь, (1.8)
- в) $\Pi_{\text{св}} = O(\varepsilon)$, $\Pi_{\text{пл}} \geq O(1)$ дальнедействующие силы.

Эта терминология говорит сама за себя и соответствует той, которая была введена Фриманом [1].

Каждому случаю (1.8) соответствует свое кинетическое уравнение: разреженному газу — *уравнение Больцмана*; случаю слабой связи — *уравнение Ландау — Фоккера — Планка* и случаю дальнедействующих сил — *уравнение Боголюбова — Ленарда — Балеску*.

*Применимость обычных кинетических приближений
к описанию плазмы*

Исследование, проведенное выше, справедливо для систем, в которых можно вводить характерную длину взаимодействия r_c и характерное значение потенциальной энергии ϕ_c . В полностью ионизованной плазме этого сделать нельзя, поскольку взаимодействие между частицами кулоновское. Поэтому в такой плазме не существует единых значений r_c и ϕ_c , которые можно было бы использовать во всей области взаимодействия.

Однако эту трудность можно обойти, если разбить область взаимодействия на такие три части, к каждой из которых может быть применено одно из обычных уравнений.

Область $0 < r \leq O(r_w)$. Здесь через r_w обозначен классический радиус взаимодействия ¹⁾

$$r_w = \frac{e^2}{\Theta}. \quad (1.9)$$

В этой области можно ввести следующие характерные величины:

$$r_c = r_w, \quad \phi_c = \Theta, \quad v_c = \left(\frac{\Theta}{m}\right)^{1/2}, \quad (1.10)$$

поскольку при $r \ll r_w$ нет парных взаимодействий в силу закона сохранения энергии, как это указывалось выше. Отсюда следует, что

$$\Pi_{св} = 1, \quad \Pi_{пл} = \frac{9}{4\pi\Lambda^2}. \quad (1.11)$$

Так как мы рассматриваем системы, находящиеся в докритическом состоянии, то

$$\Lambda = 12\pi n \lambda_D^3 = \frac{3\Theta^{3/2}}{\sqrt{4\pi n} e^3} \gg 1, \quad (1.12)$$

¹⁾ В последующем разложении используется терминология и соотношения, приведенные в приложениях.

откуда получаем, что выражение для ε в этой области имеет вид

$$\varepsilon = \frac{9}{4\pi\Lambda^2} \ll 1, \quad (1.13)$$

а соответствующее кинетическое уравнение есть уравнение Больцмана (Б).

Область $O(r_w) < r < O(r_0)$. Чтобы установить пределы изменения параметров $\Pi_{св}$ и $\Pi_{пл}$ в этой области, вычислим сначала соответствующие значения для $r = O(r_0)$, где через r_0 обозначено среднее расстояние между частицами, равное

$$r_0 = \left(\frac{3}{4\pi n}\right)^{1/3}. \quad (1.14)$$

Характерными величинами в этом случае являются

$$r_c = r_0, \quad \phi_c = \frac{e^2}{r_0}, \quad v_c = \left(\frac{\Theta}{m}\right)^{1/2}, \quad (1.15)$$

которые приводят к следующим значениям параметров связи и плотности:

$$\Pi_{св} = \left(\frac{3}{\Lambda^2}\right)^{1/3}, \quad \Pi_{пл} = \frac{3}{4\pi} = O(1). \quad (1.16)$$

Исходя из значений r_0 и r_w , указанных выше, получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{\Lambda^2}\right)^{1/3} < \Pi_{св} < 1, \\ 1 > \Pi_{пл} > \frac{9}{4\pi\Lambda^2}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Из этих соотношений следует, что при $\Lambda \gg 1$ уравнения Ландау — Фоккера — Планка (ЛФП) дают адекватное описание лишь для центральной части области $r_w < r < r_0$, на границе же этой области они неприменимы.

Область $O(r_0) < r < \infty$. Для определения пределов изменения параметров $\Pi_{св}$ и $\Pi_{пл}$ отметим сначала, что при $r \rightarrow \infty$

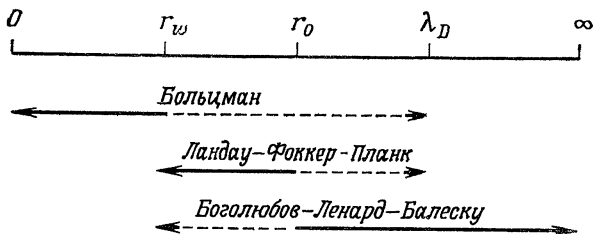
$$\Pi_{св} \rightarrow 0, \quad \Pi_{пл} \rightarrow \infty. \quad (1.18)$$

Используя предыдущие результаты, находим

$$\left(\frac{3}{\Lambda^2}\right)^{1/3} > \Pi_{\text{св}} > 0, \quad \frac{3}{4\pi} < \Pi_{\text{пл}} < \infty. \quad (1.19)$$

Отсюда следует, что при $\Lambda \gg 1$ в этой области применимо уравнение Боголюбова — Ленарда — Балеску (БЛБ).

На фиг. 19 сплошными линиями показаны области применимости различных кинетических уравнений.



Ф и г. 19. Область применимости трех кинетических уравнений (см. текст).

Однако в действительности указанные приближения справедливы и в областях, отмеченных на фиг. 19 штриховыми линиями. Это объясняется следующим образом.

У р а в н е н и е Б. Основные предпосылки приближения Больцмана при многократных столкновениях в области значений $r_w \ll r \leq \lambda_D$ не нарушаются, так как они приводят только к слабым отклонениям. Аналогично парным взаимодействиям многократные столкновения независимо можно учесть с помощью линейной теории. Поэтому больцмановское приближение справедливо вплоть до $r = O(\lambda_D)$.

У р а в н е н и е БЛБ. В методике Боголюбова — Ленарда — Балеску, которая справедлива до $r_{\text{мин}} = r_0$, проводится точный учет коллективных эффектов экранирования. Существенным ограничением данной методики является тот факт, что в ней рассматриваются лишь взаимодействия, приводящие к слабым отклонениям, а это условие нарушается только для $r < r_w$. Поэтому приближение Боголюбова — Ленарда — Балеску дает пра-

вильное описание и может быть применено вплоть до $r_{\text{мин}} = r_w$.

У р а в н е н и е ЛФП. Ландау в своей работе [16] утверждал, что его рассмотрение без учета экранировки может и должно быть справедливым вплоть до $r = O(\lambda_D)$. Ниже (см. п. 1.4), основываясь на уравнении Боголюбова — Ленарда — Балеску, мы покажем, что утверждение Ландау было правильным.

Из фиг. 19 можно сделать заключение, что ни одно из трех указанных уравнений не в состоянии описать плазму во всей области взаимодействия. Вообще говоря, это заключение правильное. Однако ниже будет показано, что отдельные области взаимодействия дают всегда пренебрежимо малый вклад, поэтому наши выводы несколько изменятся.

Покажем, что вклад от областей $0 \leq r \leq r_w$ и $\lambda_D \leq r < \infty$ пренебрежимо мал по сравнению с вкладом от области $r_w \leq r \leq \lambda_D$.

Чтобы доказать это утверждение, перепишем первые два уравнения цепочки (1.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{e}{m} \langle \mathbf{E} \rangle \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}_1} = \\ = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{\text{столкн}} = \frac{N}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int d\mathbf{r}_j \int \frac{\partial \phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_j)}{\partial \mathbf{r}_1} g_{1j}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_j, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_j; t) d\mathbf{v}_j \end{aligned} \quad (1.20)$$

и

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \right) g_{12} - \\ - \frac{1}{m} \frac{\partial \phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} \right) [f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t) + g_{12}] - \\ - \frac{N}{m} \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t)}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int d\mathbf{r}_3 \int \frac{\partial \phi_{13}}{\partial \mathbf{r}_1} g_{23} d\mathbf{v}_3 - \\ - \frac{N}{m} \frac{\partial g_{12}}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int d\mathbf{r}_3 \int \frac{\partial \phi_{13}}{\partial \mathbf{r}_1} f_1(\mathbf{r}_3, \mathbf{v}_3; t) d\mathbf{v}_3 - \\ - \frac{N}{m} \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t)}{\partial \mathbf{v}_2} \cdot \int d\mathbf{r}_3 \int \frac{\partial \phi_{23}}{\partial \mathbf{r}_2} g_{13} d\mathbf{v}_3 - \\ - \frac{N}{m} \frac{\partial g_{12}}{\partial \mathbf{v}_2} \cdot \int d\mathbf{r}_3 \int \frac{\partial \phi_{23}}{\partial \mathbf{r}_2} f_1(\mathbf{r}_3, \mathbf{v}_3; t) d\mathbf{v}_3 - \\ - \frac{N}{m} \int d\mathbf{r}_3 \int \left(\frac{\partial \phi_{13}}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial g_{123}}{\partial \mathbf{v}_1} + \frac{\partial \phi_{23}}{\partial \mathbf{r}_2} \cdot \frac{\partial g_{123}}{\partial \mathbf{v}_2} \right) d\mathbf{v}_3 = 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Здесь использовано представление f_2 и f_3 через корреляционные функции g :

$$f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; t) = f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t) + g_{12}$$

(1.22)

$$f_3(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{v}_3; t) = f_1 f_1 f_1 + f_1 g_{23} + f_1 g_{13} + f_1 g_{12} + g_{123}.$$

В уравнении (1.20) $\langle \mathbf{E} \rangle$ является самосогласованным полем в приближении Власова. Теперь используем тот факт, что во всех трех обычных методах кинетического приближения, рассматриваемых до сих пор, пренебрегалось тройной корреляционной функцией g_{123} , поэтому в (1.21) можно опустить последний член. Далее, введем безразмерные переменные (1.4) в уравнение (1.21) и получим, что для всех комбинаций рассматриваемых параметров разложение выполняется соотношение

$$g_{12} = O(\Pi_{\text{св}} f_1 f_1). \quad (1.23)$$

Так как корреляции обусловлены взаимодействием, это соотношение физически разумно. Подставляя его в (1.20), получаем уравнение, являющееся основным для дальнейших оценок:

$$\left(\frac{\delta f_1}{\delta t}\right)_{\text{столкн}} = O\left(\frac{N}{mv_c} f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) \int d\mathbf{r}_2 \times \right. \\ \left. \times \int \frac{\partial \phi_{12}}{\partial r_1} \Pi_{\text{св}} f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t) d\mathbf{v}_2\right). \quad (1.24)$$

Используя условие нормировки

$$\int f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t) d\mathbf{v}_2 = \frac{1}{V} \quad (1.25)$$

и переходя к относительным координатам $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, получаем

$$\left(\frac{\delta f_1}{\delta t}\right)_{\text{столкн}} = O\left(\frac{n}{v_c m} f_1 \int_0^\infty \frac{\partial \phi_{12}}{\partial r} \Pi_{\text{св}} r^2 dr\right). \quad (1.26)$$

Разобьем область интегрирования в (1.26) на три части, соответствующие трем областям Б, ЛФП и БЛБ, опре-

деленным выше. Тогда можно записать

$$\left(\frac{\delta f_1}{\delta t}\right)_{\text{столкн}} = O[(C_B + C_{\text{ЛФП}} + C_{\text{БЛБ}}) f_1]. \quad (1.27)$$

Оценим величину этих коэффициентов.

Область Б. $r \leq O(r_w)$. Основной вклад в интеграл (1.26) дает область вблизи r_w , поэтому на основании (1.11) можно подставить в интеграл значение $\Pi_{\text{св}} = 1$. В результате получим

$$C_B = O\left(\frac{n}{mv_c} \int_0^{r_w} \frac{e^2}{r^2} r^2 dr\right) = O(nvc r_w^2), \quad (1.28)$$

или

$$C_B = O\left(\frac{\omega_p}{\Lambda}\right), \quad (1.29)$$

где ω_p — плазменная частота системы. C_B характеризует порядок величины больцмановского корреляционного члена в области Б.

Область БЛБ. $r \geq O(\lambda_D)$. Вследствие того что дебаевское экранирование уменьшается по экспоненциальному закону, главный вклад в интеграл дает область вблизи λ_D , поэтому можно считать, что $\Pi_{\text{св}} = \Lambda^{-1}$. Оценка величины (1.26) в данной области приводит к

$$C_{\text{БЛБ}} = O\left(\frac{n}{mv_c} \int_{\lambda_D}^{\infty} \frac{e^2 \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)}{r^2} \frac{1}{\Lambda} r^2 dr\right) = O\left(\frac{ne^2}{m} \frac{\lambda_D}{vc\Lambda}\right), \quad (1.30)$$

или

$$C_{\text{БЛБ}} = O\left(\frac{\omega_p}{\Lambda}\right). \quad (1.31)$$

Это означает, что в области БЛБ корреляционный член в уравнении Боголюбова — Ленарда — Балеску по порядку величины равен корреляционному члену в уравнении Больцмана для области Б.

Область ЛФП. $O(r_w) < r < O(\lambda_D)$. В этой области параметр связи имеет порядок

$$\Pi_{\text{св}} = O\left(\frac{e^2}{r\Theta}\right). \quad (1.32)$$

Отсюда находим порядок величины корреляционного члена в уравнении Ландау — Фоккера — Планка в области ЛФП:

$$C_{\text{ЛФП}} = O \left(\frac{n}{mv_c} \int_{r_w}^{\lambda_D} \frac{e^2}{r^2} \frac{e^2}{r\Theta} r^2 dr \right) = O \left(\frac{ne^2}{m} \frac{e^2}{v_c\Theta} \ln \frac{\lambda_D}{r_w} \right), \quad (1.33)$$

или

$$C_{\text{ЛФП}} = O \left(\frac{\omega_p \ln \Lambda}{\Lambda} \right). \quad (1.34)$$

Оценка этой величины отличается от оценок соответствующих вкладов в областях Б и БЛБ на множитель $\ln \Lambda$.

Из соотношений (1.29), (1.31) и (1.34) очевидно, что если выполнено условие

$$\ln \Lambda \gg 1, \quad (1.35)$$

то основное влияние на функцию распределения оказывают соударения, приводящие к слабым отклонениям в области $r_w \ll r \ll \lambda_D$. Ниже мы будем предполагать, что условие (1.35), которое значительно строже условия $\Lambda \gg 1$, выполняется. Таким образом, сделанное выше утверждение доказано.

Выводы

На основании фиг. 19 и проведенных выше оценок можно сделать вывод, что каждое из трех указанных кинетических уравнений дает полное описание плазмы с точностью

$$\ln \Lambda \gg 1$$

при условии, что области, в которых данное приближение неприменимо, будут исключены соответствующим выбором границ таких областей, а именно:

$$\begin{array}{ll} \text{область Б} & r_{\text{макс}} = \lambda_D, \\ \text{область ЛФП} & r_{\text{мин}} = r_w, \quad r_{\text{макс}} = \lambda_D, \\ \text{область БЛБ} & r_{\text{мин}} = r_w. \end{array}$$

Важно отметить, что вышеуказанные методы можно скомбинировать таким образом, что для устранения рас-

ходимости не потребуется введения соответствующих пределов интегрирования. Символически такая комбинация может быть записана в виде

$$\left(\frac{\delta f_1}{\delta t}\right)_{\text{столкн}} = I_B + I_{\text{БЛБ}} - I_{\text{ЛФП}}. \quad (1.36)$$

Интерпретация этого метода очень простая.

В области $r < r_w$ члены столкновений Ландау — Фоккера — Планка ($I_{\text{ЛФП}}$) и Боголюбова — Ленарда — Балеску ($I_{\text{БЛБ}}$) взаимно сокращаются, точное же описание системы дает член столкновений Больцмана (I_B).

В области $r_w \leq r \leq \lambda_D$ все три члена совпадают, поэтому рассматривается вклад только от одного из них.

Наконец, в области $r > \lambda_D$ взаимно сокращаются члены столкновений Больцмана и Ландау — Фоккера — Планка; остающийся член столкновений Боголюбова — Ленарда — Балеску точно описывает столкновения в этой области и не имеет расходимости.

Уравнения такого типа, как уравнение (1.36), были получены различными авторами [2—5].

1.2. Уравнение Больцмана

Вывод уравнения Больцмана из цепочки уравнений ББГКИ

Уравнение Больцмана для разреженной системы частиц с короткодействующими силами может быть получено различными путями. Для последовательности изложения выведем это уравнение из цепочки уравнений ББГКИ.

Учитывая, что

$$P_{\text{св}} = O(1), \quad P_{\text{пл}} = O(\epsilon) \ll 1, \quad (1.37)$$

и пренебрегая снова внешними силами, запишем два первых уравнения цепочки в виде

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_1} = -\frac{N}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}} f_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}_2 \quad (1.38)$$

и

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{1}{m} \frac{\partial \phi_{12}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} \right) \right] \times$$

$$\times f_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; t) = \frac{N}{m} \int \sum_{\nu=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\nu} \phi_{\nu 3} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\nu} f_3 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{v}_3. \quad (1.39)$$

Здесь введена относительная координата $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Заметим, что в левой части уравнения (1.39) содержатся члены, совпадающие с подынтегральным выражением в правой части (1.38).

Чтобы исключить эти члены, проинтегрируем (1.39) по \mathbf{v}_2 и \mathbf{r} . Если ограничиться слагаемыми, линейными по $\Pi_{\text{пл}}$, то можно пренебречь членами, стоящими в правой части уравнения. Применяя теорему Гаусса для интегрирования по скорости, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \right) \int f_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots) d\mathbf{v}_2 d\mathbf{r} +$$

$$+ \int (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \frac{\partial f_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots)}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} d\mathbf{v}_2 =$$

$$= \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int \frac{\partial \phi_{12}}{\partial \mathbf{r}} f_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots) d\mathbf{v}_2 d\mathbf{r}. \quad (1.40)$$

Введем теперь область взаимодействия первой частицы с s -й частицей

$$D_s^\sigma = \{\mathbf{r}_s \mid |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1| < \sigma\} \quad (1.41)$$

и область, дополнительную к данной, в конфигурационном γ_s -пространстве s -й частицы

$$\bar{D}_s^\sigma = \{\mathbf{r}_s \mid |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1| > \sigma\} = \gamma_s - D_s^\sigma. \quad (1.42)$$

Через σ здесь обозначена область взаимодействия $\sigma \approx r_c$.

Далее, определим *укороченную функцию распределения* порядка s :

$$f_s^\sigma = \frac{1}{V^{N-s}} \int_{D_{s+1}^\sigma} d\mathbf{r}_{s+1} d\mathbf{v}_{s+1} \dots \int_{\bar{D}_N^\sigma} f_N d\mathbf{r}_N d\mathbf{v}_N. \quad (1.43)$$

Из (1.42) и (1.43) получаем

$$f_s^\sigma = f_s - N \int_{D_{s+1}^\sigma} d\mathbf{r}_{s+1} d\mathbf{v}_{s+1} f_{s+1} + \\ + \frac{N^2}{2} \int_{D_{s+1}^\sigma} d\mathbf{r}_{s+1} d\mathbf{v}_{s+1} \int_{D_{s+2}^\sigma} d\mathbf{r}_{s+2} d\mathbf{v}_{s+2} f_{s+2} - + \dots \quad (1.44)$$

Так как в приближении Больцмана пренебрегается функцией f_3 , то выражения для первых двух укороченных функций распределения имеют вид

$$f_1^\sigma = f_1 - N \int_{D_2^\sigma} d\mathbf{r}_2 d\mathbf{v}_2 f_2, \quad f_2^\sigma \equiv f_2. \quad (1.45)$$

Укороченная функция распределения f_s^σ дает плотность вероятности найти частицы 1, 2, ..., s в положениях $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ при условии, что ни одна из частиц $s+1, \dots, N$ не находится в области взаимодействия первой частицы. Отметим, что $f_1^\sigma(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t)$ представляет собой плотность вероятности найти частицу 1 с координатами \mathbf{r}_1 и \mathbf{v}_1 , которая не взаимодействует ни с одной из других частиц. Заметим также, что, поскольку мы выделили частицу 1 среди остальных частиц, симметрия функции f_s^σ относительно координат нарушается.

Вводя укороченные функции распределения в уравнения (1.38) и (1.40), получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \right) f_1^\sigma = N \int_{D_2^\sigma} d\mathbf{r} \int (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \frac{\partial f_2^\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots)}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{v}_2 \quad (1.46)$$

или, применяя теорему Гаусса,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \right) f_1^\sigma = N \int d\mathbf{v}_2 \oint_S f_2^\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots) (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) d\mathbf{S}, \quad (1.47)$$

где S является поверхностью сферы D_2^σ . Это уравнение представляет собой второе уравнение Грэда, получен-

ное из цепочки уравнений ББГКИ. Как показал Грэд [6], это уравнение является точным и может быть получено даже, если не пренебрегать функцией f_3 .

В приближении Больцмана, когда $\Pi_{\text{пл}} \ll 1$, можно считать, что функция f_2^{σ} совпадает с f_2 . В результате получаем уравнение

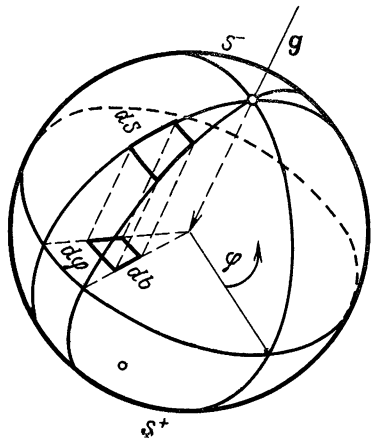
$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_1} = N \int d\mathbf{v}_2 \oint_S f_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots) (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) dS. \quad (1.48)$$

Это еще не уравнение Больцмана, но оно существенно отличается от исходного общего соотношения, приближаясь к уравнению больцмановского типа.

В общем случае предполагается, что корреляционный член учитывает плавное изменение числа частиц, находящихся в заданном состоянии в результате непрерывного влияния сил взаимодействия. Однако в (1.48) изменение числа свободных частиц (не взаимодействующих с другими) определяется в виде разности числа пар частиц, входящих в сферу взаимодействия (уменьшение свободных частиц), и числа пар частиц, покидающих сферу взаимодействия (увеличение свободных частиц). Это

обусловлено применяемым здесь методом укороченных функций распределения и разложением по параметру $\Pi_{\text{пл}}$.

Чтобы привести уравнение (1.48) к виду уравнения Больцмана, введем полярные координаты (b, φ) в диаметральной плоскости (фиг. 20) сферы S , перпендикулярной вектору относительной скорости $\mathbf{g} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. При таком описании сфера проецируется на диск C . Так как сфера



Фиг. 20. Сфера столкновений для заданных прицельных параметров.

проецируется на диск S с двух сторон, необходимо различать две полусферы:

$$\begin{aligned} S^+ &= \{\mathbf{r} \in S \mid \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} \geq 0\} = \{\mathbf{r}^+\}, \\ S^- &= \{\mathbf{r} \in S \mid \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} < 0\} = \{\mathbf{r}^-\}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Полусферы S^\pm относятся соответственно к удаляющимся и приближающимся частицам (см. фиг. 20).

Поэтому уравнение (1.48) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_1} = N \int d\mathbf{v}_2 \int_0^\sigma b db \int_0^{2\pi} g [f_2(\mathbf{r}^+, \dots) - \\ - f_2(\mathbf{r}^-, \dots)] d\varphi. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Функция $f_2(\mathbf{r}^\pm, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; t)$ пока еще не известна. До сих пор мы пользовались условием

$$\Pi_{\text{пл}} \ll 1. \quad (1.51)$$

Из этого условия можно сделать еще одно заключение. Малость этого параметра служит основанием того, что можно ограничиться только парными столкновениями. Поэтому каждая такая система, состоящая из пары частиц, может рассматриваться как замкнутая, к которой применим закон Лиувилля в виде

$$f_2(\mathbf{r}'^-, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2; t') = f_2(\mathbf{r}^+, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; t). \quad (1.52)$$

Здесь штрихом обозначены величины до столкновения, а через \mathbf{r}^+ , \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , t — соответствующие величины после столкновения.

Введем еще два ограничения. Первое из них состоит в том, что

$$\sigma \ll L, \quad \text{или} \quad \sigma \ll v_c T, \quad (1.53)$$

т. е. характерная длина L и характерное время T изменения функции f_2 велики по сравнению с длиной взаимодействия и временем взаимодействия. Если это условие выполнено, мы можем записать

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{r}'^-, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2; t') &= f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2; t), \\ f_2(\mathbf{r}^+, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; t) &= f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; t). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Второе ограничение заключается в том, что на поверхности S^- до начала столкновения частицы находятся в молекулярном беспорядке, т. е. выполняются равенства

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; t) &= f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2; t), \\ f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2; t) &= f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}'_1; t) f_1(\mathbf{r}'_1, \mathbf{v}'_2; t). \end{aligned} \quad (1.55)$$

Исходя из указанных ограничений, нарушающих обратимость кинетического уравнения, получаем уравнение Больцмана

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_1} &= N \int [f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}'_1; t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}'_2; t) - \\ &- f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2; t)] gb db d\varphi dv_2. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Другой способ получения уравнения Больцмана из уравнения Лиувилля

Уравнение Больцмана, приведенное выше, было получено методом Грэда [6]. Можно вывести уравнение Больцмана из уравнения Лиувилля, причем в основном здесь используются различные приближения. По-видимому, впервые серьезные математические попытки в этом направлении предпринял Кирквуд [7]. Основным в приближении Кирквуда является предположение о сглаживании всех процессов во времени, которое по существу приводит к тому же самому эффекту, что и введение Грэдом укороченных функций распределения. Кроме того, в результате такого предположения получается уравнение, в котором учитываются только ближние столкновения. Конечно, в качестве основного допущения в приближении Кирквуда используется также и предположение о молекулярном беспорядке.

В методе, предложенном Боголюбовым [8], уравнение Больцмана получается как первый член общего разложения. Основная идея метода Боголюбова заключается в утверждении, что функции распределения более высокого порядка f_s зависят от времени только через функцию распределения первого порядка. Чтобы это утверждение было справедливым, функция распределения s частиц, которые находятся в достаточно перемешанном состоянии, должна удовлетворять следующему соотношению:

$f_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{r}_s, \mathbf{v}_s) = f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) \dots f_1(\mathbf{r}_s, \mathbf{v}_s)$ и любая функция распределения более высокого порядка при обращении времени должна автоматически достигать такого состояния перемешивания.

Грин [9] использовал приближение, аналогичное методу Боголюбова. Имеются также другие выводы уравнения Больцмана, в которых вместо уравнения Лиувилля исходным уравнением является так называемое основное уравнение. В классической области уравнение Больцмана, например, было получено Проутом [10] и Проутом и Пригожиным [11]. Поскольку обсуждение общих свойств уравнения Больцмана не является целью настоящего исследования, читателя, интересующегося этим вопросом, мы отсылаем к статье Грэда [6], в которой дано его полное рассмотрение.

Приближение, используемое Больцманом [12]

В противоположность всем приведенным выше выводам больцмановского уравнения Больцман в своем оригинальном исследовании рассматривал однокомпонентную систему. Для того чтобы иметь возможность в последующем использовать идеи гл. 2, запишем плотность распределения в виде, данном Климонтовичем [см. (2.1.1)]:

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i(t)). \quad (1.57)$$

Пренебрегая для простоты внешними силами, имеем

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{K}F), \quad (1.58)$$

где через \mathbf{K} обозначаются все внутренние силы взаимодействия. Однако истинная плотность распределения F не рассматривалась Больцманом. Более того, он использовал среднюю плотность числа частиц, получающуюся в результате усреднения по времени и μ -пространству, т. е.

$$f_B = \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{v}}{\Delta\mu} \int \frac{dt}{\Delta T} F. \quad (1.59)$$

После соответствующего разбиения всего μ -пространства на элементы $\Delta\mu$, а времени на интервалы ΔT в результате

усреднения (1.59) получаем f_B в виде ступенчатой функции. Очевидно, чтобы это определение средней плотности имело смысл, должно выполняться следующее условие:

$$\Delta f_B \ll f_B, \quad (1.60)$$

где Δf_B — приращение функции f_B . Если это условие выполнено, то ступенчатую функцию можно заменить непрерывной. Далее во избежание сильных отклонений от средних величин необходимо потребовать, чтобы

$$f_B \Delta \mu \gg 1. \quad (1.61)$$

Учитывая указанные требования, уравнение (1.58) можно записать в виде

$$\frac{\partial f_B}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_B}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\delta f_B}{\delta t} \right)_{\text{столкн}}. \quad (1.62)$$

Здесь член, стоящий в правой части, определяется корреляциями.

В действительности основная заслуга Больцмана заключается в получении приближенной функциональной зависимости корреляционного члена от f_B в разреженном газе на основании концепции ближних столкновений.

Больцмановская концепция ближних столкновений включает несколько постулатов:

1. Взаимодействия являются короткими, сильными и редкими [$\Pi_{\text{св}} = O(1)$, $\Pi_{\text{пл}} \ll 1$]. Это означает, что: а) можно пренебречь корреляциями более высокого порядка; б) парные взаимодействия длятся в течение очень короткого времени по сравнению со временем свободного пробега, так что в любые интервалы времени все частицы являются практически невзаимодействующими; в) можно учесть эффект корреляции, если принять во внимание, что столкновения ближние.

2. Если T и L — характерные время и длина изменения f_B в конвективном μ -пространстве, то выполняются неравенства

$$T \gg \tau_c \text{ и } L \gg \lambda_c, \quad (1.63)$$

где τ_c есть среднее время между столкновениями, а λ_c — средняя длина свободного пробега.

3. Если на основании первого постулата ввести координаты взаимодействующих пар частиц до и после столкновения, то координаты пар частиц до столкновения являются стохастически независимыми (молекулярный беспорядок).

Исходя из указанных постулатов и фиг. 20, легко видеть, что столкновительный член $(\delta f_1 / \delta t)_{\text{столкн}}$ можно представить, согласно правой части (1.56), как разность членов, один из которых учитывает возникновение состояния с \mathbf{r}_1 и \mathbf{v}_1 , а другой — разрушение этого состояния.

Особенного внимания заслуживает тот факт, что в принципе результат Больцмана сильно отличается от уравнения (1.56), полученного из цепочки ББГКИ. Уже по своему смыслу функции f_1 отличаются в том и другом случае. Такое отличие находит отображение также в условиях (1.60) и (1.61), которые, если они нарушаются, могут сделать уравнение Больцмана недействительным или, более точно, сделать его неприменимым к одночастичной системе. Эти интересные проблемы и следствия из них с точки зрения экспериментальной проверки изучались различными авторами [13, 14].

1.3. Уравнение Ландау — Фоккера — Планка

Уравнение Ландау со слабой связью

Согласно приведенной классификации (1.8), уравнение Ландау характеризуется следующей величиной параметров связи и плотности:

$$P_{\text{св}} = O(\epsilon), \quad P_{\text{пл}} = O(\epsilon). \quad (1.64)$$

Сравнивая эти соотношения с основными условиями (1.37) для уравнения Больцмана, мы напомним, что уравнение Ландау можно получить из разложения уравнения Больцмана для предельного случая слабого взаимодействия. Такое разложение хорошо известно (см., например, [15]). Однако, не нарушая общую линию настоящего изложения, выведем уравнение Ландау непосредственно из цепочки уравнений ББГКИ. Это также обусловлено тем, что в последующем выводе уравнения Ленарда — Балеску мы будем исходить из такого приближения.

Используя разложение (1.22) и пренебрегая, как всегда, корреляционными функциями третьего порядка, можно первые два уравнения цепочки (1.20) и (1.21) переписать в виде ¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_1} &= \left(\frac{\delta f_1}{\delta t} \right)_{\text{столкн}} = \\ &= \frac{N}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int \frac{\partial \phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} g_{12}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{v}_2; t) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{v}_2 \quad (1.65) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \right) g_{12} &= \\ &= \frac{1}{m} \frac{\partial \phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} \right) [f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t) + g_{12}] + \\ &+ \frac{N}{m} \int \left(\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \frac{\partial \phi_{13}}{\partial \mathbf{r}_1} g_{23} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}_2} \cdot \frac{\partial \phi_{23}}{\partial \mathbf{r}_2} g_{13} \right) d\mathbf{r}_3 d\mathbf{v}_3. \quad (1.66) \end{aligned}$$

Здесь по-прежнему не учитываются внешние силы. Кроме того, в этих уравнениях пренебрегается влиянием самоогласованного поля на поток в пространстве скоростей, что дает возможность отбросить третий член в левой части уравнения (1.20) и четвертый и шестой члены в левой части уравнения (1.21). Очевидно, что для однородной системы такая процедура выполняется точно. Неоднородность системы можно считать допустимой, если соответствующее самоогласованное поле мало по сравнению со средним корреляционным полем.

Следует подчеркнуть, что малую пространственную зависимость f_1 в (1.65), (1.66) и последующих формулах следует понимать в указанном выше смысле.

Как и в случае уравнения Больцмана, мы стремимся исключить член g_{12} из (1.65) с помощью уравнения (1.66). Теперь вспомним, что в безразмерном представлении (1.4) первый член в правой части (1.66) пропорционален $\Pi_{\text{св}}$, а второй — произведению $\Pi_{\text{св}} \Pi_{\text{пл}}$. Следовательно, вторым членом в (1.66) можно пренебречь, как членом более высокого порядка малости [см. (1.64)].

¹⁾ Хотя используются частные функции распределения, но в силу основного предположения, данного на стр. 126, эффект от всех полевых частиц, представленный правой частью уравнения, записывается в виде произведения N на эффект только от одной полевой частицы с координатами $(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)$.

Физически это означает, что пренебрегается взаимодействием полевой частицы с третьей частицей, находящейся вблизи пробной частицы, что приводит к ослаблению механизма экранирования.

Учитывая (1.23), пренебрежем также членом g_{12} в правой части (1.66). Тогда мы получим уравнение в частных производных относительно функции g_{12} :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \right) g_{12} = \\ = \frac{1}{m} \frac{\partial \phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} \right) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t). \end{aligned} \quad (1.67)$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_{12} = \frac{1}{m} \frac{\partial \phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} \right) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t) + \\ + \left(\dot{\mathbf{v}}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} + \dot{\mathbf{v}}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} \right) g_{12}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

При интегрировании вдоль прямолинейных траекторий

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = \dot{\mathbf{v}}_2 = 0, \quad \mathbf{r}_{12}(t') = \mathbf{r}_{12}(t) + \mathbf{v}_{12}(t' - t) \quad (1.69)$$

второй член в правой части уравнения (1.68) дает нуль. Однако, используя приближенное интегрирование вдоль прямолинейных траекторий, следует помнить, что переменные \mathbf{r}_i и \mathbf{v}_i связаны законом Ньютона. Из оценки величины

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = O \left[\frac{1}{m} \int \frac{\partial \phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{v}_2 \right] = O \left(\frac{\phi_c}{m r_c} \right) \quad (1.70)$$

можно показать, что относительная ошибка при таком приближенном интегрировании вдоль прямолинейных траекторий порядка $\Pi_{\text{св}}$. Обозначая оставшиеся члены в правой части уравнения (1.68) через

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; t) = \\ = \frac{1}{m} \frac{\partial \phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} \right) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t), \end{aligned} \quad (1.71)$$

после интегрирования получаем

$$g_{12}(\dots; t) = \int_{-\infty}^t A(\dots; t') dt' + g_{12}(\dots; -\infty), \quad (1.72)$$

Коррелированное состояние, соответствующее времени t , получается из некоррелированного состояния $g_{12}(\dots, -\infty) = 0$ при $t = -\infty$.

Предполагая, что изменением функции f_1 на длине взаимодействия r_c ($L \gg r_c$) можно пренебречь, получаем, что подынтегральное выражение зависит только от относительного расстояния между частицами. Вводя новую переменную $\tau = t - t'$, находим

$$g_{12}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; t) = \int_0^\infty A(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{v}_1\tau, \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{v}_2\tau, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; t - \tau) d\tau. \quad (1.73)$$

Определяя поток \mathbf{J} в пространстве скоростей как

$$\left(\frac{\delta f_1}{\delta t}\right)_{\text{столкн}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \mathbf{J}, \quad (1.74)$$

из формул (1.65), (1.71) и (1.73) находим

$$\mathbf{J} = -\frac{N}{m^2} \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{v}_2 \int_0^\infty \frac{\partial \phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \times \times \left[\frac{\partial \phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} \right) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2; t) \right]_{t-\tau} d\tau. \quad (1.75)$$

Используя разложение

$$[f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2; t)]_{t-\tau} = = (f_1 f_1)_{t-\tau} \left[\frac{\partial}{\partial t} (f_1 f_1) \right]_{t-\tau} + \dots \quad (1.76)$$

и подставляя его в выражение (1.75), получаем уравнение Ландау с запаздыванием.

Если функция распределения заметно не изменяется в течение времени взаимодействия ($T \gg t_c$), можно ограничиться первым членом разложения (1.76), т. е. пренебречь запаздыванием в системе. В результате мы получим

$$\mathbf{J} = -N \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int \langle \mathbf{E} \rangle (\mathbf{E})_{\mathbf{r}_2} \left\{ f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2; t) \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t)}{\partial \mathbf{v}_1} - - f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2; t)}{\partial \mathbf{v}_2} \right\} d\mathbf{v}_2. \quad (1.77)$$

Здесь коэффициент $\langle \mathbf{E} \rangle_{\mathbf{r}_2}$ определяется выражением

$$\langle \mathbf{E} \rangle_{\mathbf{r}_2} = \int d\mathbf{r}_2 \int_0^{\infty} \mathbf{E}[\mathbf{r}_{12}] \mathbf{E}[\mathbf{r}_{12} - \mathbf{v}_{12}\tau] d\tau, \quad (1.78)$$

а \mathbf{E} является кулоновским полем.

Тензор $\langle \mathbf{E} \rangle_{\mathbf{r}_2}$ представляет собой автокорреляционный тензор второго порядка, зависящий от \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 и вычисленный в приближении прямолинейных траекторий. Индекс \mathbf{r}_2 указывает, что усреднение проводится только по \mathbf{r}_2 .

Уравнения (1.74) и (1.77) вместе представляют собой уравнение Ландау, хотя в них не приводятся еще точные значения автокорреляционных функций поля. Уравнение Ландау в виде, приведенном здесь, соответствует уравнению Больцмана для слабых взаимодействий [см. (1.8)]. Поэтому интересно отметить, что при его выводе мы вынуждены были сделать те же самые основные допущения. Действительно, условие $g_{12}(\dots; -\infty) = 0$ соответствует предположению Больцмана о начальном молекулярном беспорядке. Условия (1.53) для пространственной и временной зависимости функции распределения отражаются здесь в требованиях $L \gg r_c$ и $T \gg t_c$.

Вычисление корреляционных функций поля

Это вычисление представляет собой геометрическую задачу. Для ее решения удобно выбрать цилиндрическую систему координат с осью z , направленной вдоль вектора относительной скорости $\mathbf{g} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. Радиальную координату мы вновь обозначим через b (см. стр. 207).

В этой системе координат поле выражается следующим образом:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + \mathbf{g}\tau) = \frac{e}{[b^2 + (z - g\tau)^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} b \cos \varphi \\ b \sin \varphi \\ z - g\tau \end{pmatrix}. \quad (1.79)$$

При этом корреляционный тензор записывается как

$$\mathbf{E} |_0 \langle \mathbf{E} |_{\tau} = e^2 \{ [b^2 + z^2] [b^2 + (z - g\tau)^2] \}^{-3/2} \times \\ \times \begin{pmatrix} b^2 \cos^2 \varphi & b^2 \sin \varphi \cos \varphi & (z - g\tau) b \cos \varphi \\ b^2 \sin \varphi \cos \varphi & b^2 \sin^2 \varphi & (z - g\tau) b \sin \varphi \\ bz \cos \varphi & bz \sin \varphi & z(z - g\tau) \end{pmatrix}, \quad (1.80)$$

а элемент объема как

$$d\mathbf{r}_2 = dz b db d\varphi. \quad (1.81)$$

Что касается пределов интегрирования по прицельному параметру b , вспомним обсуждение области применимости метода Ландау — Фоккера — Планка, которое привело к значениям $b_{\text{мин}} = r_w$ и $b_{\text{макс}} = \lambda_D$. (Точное доказательство пределов применимости этого метода будет дано в п. 1.4 в связи с выводом уравнения Боголюбова — Ленарда — Балеску.) Интегрирование по углу φ в (1.80) тривиально и дает для недиагональных членов значение, равное нулю. Интегрирование по z дает для члена A_{zz} тоже нулевое значение вследствие соотношения симметрии

$$\int_0^{\infty} A_{zz}(-z, g\tau) d\tau = - \int_0^{\infty} A_{zz}(z, g\tau) d\tau. \quad (1.82)$$

Члены A_{xx} и A_{yy} интегрируются элементарно, так что корреляционные функции поля принимают вид

$$\langle \mathbf{E} \rangle \langle \mathbf{E} \rangle_{\mathbf{r}_2} = 2\pi e^2 \frac{\ln \Lambda}{g} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.83)$$

или

$$\langle \mathbf{E} \rangle \langle \mathbf{E} \rangle_{\mathbf{r}_2} = 2\pi e^2 \left(\frac{\ln \Lambda}{g^3} \right) (g\mathbf{I} - \mathbf{g})(\mathbf{g}), \quad (1.84)$$

где через \mathbf{I} обозначается единичный тензор. Подставляя этот результат и выражение (1.77) в (1.74), получаем окончательный вид уравнения Ландау [16]

$$\left(\frac{\delta f_1}{\delta t} \right)_{\text{столкн}} = 2\pi N \left(\frac{e^2}{m} \right)^2 \ln \Lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int \frac{g\mathbf{I} - \mathbf{g}}{g^3} (\mathbf{g}) \times \\ \times \left\{ f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2; t) \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t)}{\partial \mathbf{v}_1} - f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2; t)}{\partial \mathbf{v}_2} \right\} d\mathbf{v}_2. \quad (1.85)$$

Уравнение Ландау является кинетическим уравнением для случая слабого взаимодействия, не учитывающего эффекты экранирования. Интересно из цепочки уравнений БГКИ получить эквивалентное уравнение Фоккера — Планка. Это можно сделать, исходя из (1.77) и связывая корреляционные функции поля с коэффициентами переноса в пространстве скоростей.

*Связь корреляционных функций поля
с коэффициентами переноса в пространстве скоростей*

В последующем изложении мы используем два первых момента изменения скорости в единицу времени: *коэффициент динамического трения*

$$\langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle = \frac{1}{\tau_c} \frac{e}{m} \left\langle \int_0^{\tau_c} \mathbf{E} |_{t'} dt' \right\rangle \quad (1.86)$$

и *коэффициент диффузии в пространстве скоростей*

$$\langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle = \frac{1}{\tau_c} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \left\langle \int_0^{\tau_c} dt' \int_0^{\tau_c} dt'' \mathbf{E} |_{t'} \langle \mathbf{E} |_{t''} \rangle \right\rangle. \quad (1.87)$$

Здесь \mathbf{E} — полное поле, действующее на рассматриваемую частицу 1; скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по фазовым координатам всех остальных частиц; τ_c — среднее время свободного пробега, которое пропорционально величине $\tau_p \Lambda / \ln \Lambda$ [см. (3.1.7)].

Удобно рассмотреть сначала коэффициенты диффузии в пространстве скоростей. Простая замена переменной $t'' = t' + \tau$ в (1.87) дает ⁴

$$\langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle = \frac{1}{\tau_c} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int_0^{\tau_c} dt' \int_{-t'}^{\tau_c - t'} \langle \mathbf{E} |_{t'} \rangle \langle \mathbf{E} |_{t'+\tau} \rangle d\tau, \quad (1.88)$$

где подынтегральное выражение представляет собой автокорреляционную функцию поля. Оценим (1.88), используя два приближения, которые уже применялись ранее.

а) Взаимодействия на расстояниях, больших r_c , не дают вклада в интеграл, так что существует максимальное время $t_c = r_c/v_c$, в течение которого могут взаимодействовать частицы, причем

$$\langle \mathbf{E} | t' \rangle (\mathbf{E} | t'+\tau \rangle = 0 \quad \text{для } \tau > t_c. \quad (1.89)$$

б) Изменения f_1 малы в смысле, указанном выше, т. е. $f_1(t - \tau) \approx f_1(t)$, когда использовалось «приближение в отсутствие запаздывания». Точнее говоря, если T есть характерное время изменения f_1 , то условие $T \gg t_c$ приводит к тому, что $\langle \mathbf{E} | t' \rangle (\mathbf{E} | t'+\tau \rangle]$ не зависит от t' для $t' < T$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle &= \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{1}{\tau_c} \int_0^{\tau_c} dt' \int_{|t'| < t_c} \langle \mathbf{E} | 0 \rangle (\mathbf{E} | \tau \rangle d\tau = \\ &= 2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int_0^{\infty} \langle \mathbf{E} | 0 \rangle (\mathbf{E} | \tau \rangle d\tau. \end{aligned} \quad (1.90)$$

В этом выражении поле \mathbf{E} представляет собой линейную суперпозицию кулоновских полей всех частиц. Так как в методе Ландау предполагается, что тождественные полевые частицы не коррелируют между собой, коэффициент диффузии в пространстве скоростей (1.90) может быть записан как сумма N средних полей, возникающих при парных взаимодействиях, т. е.

$$\langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle = 2N \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int \langle \mathbf{E} \rangle (\mathbf{E})_{r_2} f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2; t) d\mathbf{v}_2. \quad (1.91)$$

Здесь мы использовали выражение (1.78).

Рассмотрим теперь коэффициент динамического трения

$$\langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle \doteq \frac{e}{m} \frac{1}{\tau_c} \int_0^{\tau_c} \langle \mathbf{E} [\mathbf{r}_{12}(t')] \rangle dt', \quad (1.92)$$

в котором подынтегральное выражение можно записать в виде

$$\mathbf{E} [\mathbf{r}_{12}(t')] = \mathbf{E} \left[\mathbf{r}_{12} | 0 + \mathbf{g} | 0 t' - 2 \frac{e}{m} \int_0^{t'} dt'' \int_0^{t''} \mathbf{E} [\mathbf{r}_{12}(t''')] dt''' \right]. \quad (1.93)$$

Поскольку мы ограничиваемся случаем слабых взаимодействий, приводящих только к малым отклонениям от прямолинейного пути, то имеем

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}_{12}(t')] = \mathbf{E}[\mathbf{r}_{12} + \mathbf{g}t'] - \left. \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{r}_{12}} \right|_{t'} \cdot 2 \frac{e}{m} \int_0^{t'} dt'' \int_0^{t''} \mathbf{E}|_{t''} dt''', \quad (1.94)$$

или, интегрируя по частям,

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}_{12}(t')] = \mathbf{E}[\mathbf{r}_{12} + \mathbf{g}t'] - \left. \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{r}_{12}} \right|_{t'} \cdot 2 \frac{e}{m} \int_0^{t'} (t' - t'') \mathbf{E}|_{t''} dt''. \quad (1.95)$$

Первый член, стоящий в правой части этого равенства (возникающий в приближении прямолинейных траекторий), не дает вклада в среднее значение коэффициента динамического трения (1.92). Поэтому получаем

$$\langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle = - \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{2}{\tau_c} \int_0^{\tau_c} dt' \int_0^{t'} (t' - t'') \left\langle \left. \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{r}_{12}} \right|_{t'} \cdot \mathbf{E}|_{t''} \right\rangle dt''. \quad (1.96)$$

Вводя новую переменную $\tau = t' - t''$, находим

$$\langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle = - \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{2}{\tau_c} \int_0^{\tau_c} dt' \int_0^{t'} \left\langle \frac{\partial \mathbf{E}[\mathbf{r}_{12} + \mathbf{g}t']}{\partial \mathbf{r}_{12}} \cdot \mathbf{E}|_{t' - \tau} \right\rangle \tau d\tau, \quad (1.97)$$

или, усредняя по значениям $\tau - t'$,

$$\begin{aligned} \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle &= 2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \frac{1}{\tau_c} \int_0^{\tau_c} dt' \int_0^{t'} \langle \mathbf{E}|_{\tau} \rangle \langle \mathbf{E}|_0 \rangle d\tau = \\ &= 2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int_0^{\tau_c} \left(1 - \frac{\tau}{t_c} \right) \langle \mathbf{E}|_{\tau} \rangle \langle \mathbf{E}|_0 \rangle d\tau. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Так как, согласно общему предположению, отношение $\tau_c/t_c \approx \Lambda/\ln \Lambda \gg 1$, окончательно получаем

$$\begin{aligned} \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle &= 2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int_0^{\infty} \langle \mathbf{E}|_{\tau} \rangle \langle \mathbf{E}|_0 \rangle d\tau = \\ &= 2N \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int \langle \mathbf{E} \rangle \langle \mathbf{E} \rangle_{\mathbf{r}_2} f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2; t) d\mathbf{v}_2, \end{aligned} \quad (1.99)$$

что приводит к важному соотношению между коэффициентом динамического трения и коэффициентом диффузии в пространстве скоростей:

$$\langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle. \quad (1.100)$$

Уравнение Фоккера — Планка для слабого взаимодействия

С помощью соотношений (1.91) и (1.100) легко преобразовать уравнение Ландау для слабого взаимодействия к уравнению Фоккера — Планка. С этой целью в уравнения (1.74) и (1.77) подставим выражение (1.91) и в результате получим

$$\left(\frac{\delta f_1}{\delta t} \right)_{\text{столкн}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \left[\frac{1}{2} \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}_1} - N \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int \langle \mathbf{E} \rangle \langle \mathbf{E} \rangle_{r_2} f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) \cdot \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2; t)}{\partial \mathbf{v}_2} d\mathbf{v}_2 \right]. \quad (1.101)$$

Интегрирование по частям и использование выражения (1.91) дает

$$\left(\frac{\delta f_1}{\delta t} \right)_{\text{столкн}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}_1} - \frac{1}{2} f_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle \right\}. \quad (1.102)$$

Отсюда, учитывая (1.100), находим

$$\left(\frac{\delta f_1}{\delta t} \right)_{\text{столкн}} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \{ \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle f_1 \} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot [\langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle f_1] \right\}. \quad (1.103)$$

Это уравнение является *уравнением Фоккера — Планка* для слабого взаимодействия. Впервые полученное Фоккером и Планком для случая броуновского движения больших молекул [17, 18], оно в общем случае описывает движение частиц, испытывающих большое число слабых отклонений.

Приведенный выше вывод уравнения Фоккера — Планка не совпадает с выводом, данным самими авторами. Следуя общей линии нашего изложения, мы получили

это уравнение из цепочки уравнений ББГКИ для частных значений параметров $\Pi_{\text{св}} = O(\varepsilon)$ и $\Pi_{\text{пл}} = O(\varepsilon)$. Кроме того, мы использовали приближение парных столкновений, интегрирование по прямолинейным траекториям и приближение в отсутствие запаздывания.

Для сравнения ниже приведем другой вывод уравнения, данный Чандрасекаром [19], который является более коротким и не требует приближения парных столкновений, интегрирования по прямолинейным траекториям и отсутствия запаздывания. Но при этом, как мы увидим из дальнейшего, уравнение не будет содержать всей той информации, которая была получена выше. Будем исходить из основного уравнения Чепмена — Колмогорова для марковских процессов

$$f(\mathbf{v}; t + \Delta t) = \int f(\mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}; t) P_{\Delta t}(\mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}, \Delta \mathbf{v}) d\Delta \mathbf{v}. \quad (1.104)$$

Здесь функция f есть одночастичная функция распределения однородной системы в отсутствие внешних сил. Через $P_{\Delta t}(\mathbf{v}, \Delta \mathbf{v})$ обозначена вероятность того, что частица, которая в момент времени t имела скорость \mathbf{v} , за интервал времени Δt изменит свою скорость на величину $\Delta \mathbf{v}$. Раскладывая подынтегральное выражение (1.104) в следующий ряд:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}; t) P_{\Delta t}(\mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}, \Delta \mathbf{v}) = \\ = f(\mathbf{v}; t) P_{\Delta t}(\mathbf{v}, \Delta \mathbf{v}) - \Delta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (f P_{\Delta t}) + \\ + \frac{1}{2} \left(\Delta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right)^2 (f P_{\Delta t}) - + \dots, \end{aligned} \quad (1.105)$$

из (1.104) получаем

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{v}; t + \Delta t) - f(\mathbf{v}; t)}{\Delta t} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot [\langle \Delta \mathbf{v} \rangle f] + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot [\langle \Delta \mathbf{v} \rangle \langle \Delta \mathbf{v} \rangle f] \right\} - + \dots \end{aligned} \quad (1.106)$$

При этом были использованы следующие соотношения:

$$\int \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \Delta \mathbf{v} \\ \langle \Delta \mathbf{v} \rangle \langle \Delta \mathbf{v} \rangle \end{array} \right\} P_{\Delta t} d\Delta \mathbf{v} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \Delta t \langle \Delta \mathbf{v} \rangle \\ \Delta t \langle \Delta \mathbf{v} \rangle \langle \Delta \mathbf{v} \rangle \end{array} \right\}. \quad (1.107)$$

Для $\Delta t \rightarrow 0$ уравнение (1.106) представляет собой уравнение Фоккера — Планка (1.103). В этом выводе мы использовали только два предположения, считая рассматриваемые процессы марковскими, а отклонения слабыми. Однако мы не употребили приближения парных взаимодействий, интегрирования по прямолинейным траекториям и т. д.

Тем не менее вывод уравнения Фоккера — Планка из основного уравнения Чепмена — Колмогорова формально сохраняет свою большую общность только до тех пор, пока мы не интересуемся конкретным вычислением коэффициентов переноса. Приступая к таким вычислениям, приходится делать те же самые упрощения, о которых говорится выше. Сравнивая уравнение (1.85) с уравнением Фоккера — Планка, можно записать коэффициент диффузии в виде

$$\begin{aligned} \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle &= 4\pi N \left(\frac{e^2}{m} \right)^2 \ln \Lambda \int \left(\frac{\mathbf{I}}{g} - \frac{\mathbf{g}(\mathbf{g})}{g^3} \right) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2; t) d\mathbf{v}_2 = \\ &= 4\pi N \left(\frac{e^2}{m} \right)^2 \ln \Lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \int g f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2; t) d\mathbf{v}_2, \right) \end{aligned} \quad (1.108)$$

а коэффициент динамического трения как

$$\begin{aligned} \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle \langle \Delta \mathbf{v}_1 \rangle = \\ &= 8\pi N \left(\frac{e^2}{m} \right)^2 \ln \Lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \int \frac{f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2; t)}{g} d\mathbf{v}_2. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Выражения (1.108) и (1.109) были впервые получены Розенблютом, Макдональдом и Джадом [20].

1.4. Уравнение Боголюбова — Ленарда — Балеску

Как и выше, начнем исследование с оценки кинетических параметров, основываясь на комбинации (1.8):

$$\Pi_{\text{св}}^{\dagger} = O(\varepsilon), \quad \Pi_{\text{пл}} \geq O(1). \quad (1.110)$$

Это означает, что имеется слабая связь, как и в случае уравнения Ландау — Фоккера — Планка, но теперь мы можем рассматривать не только парные столкновения.

Итак, воспользуемся в настоящем исследовании результатами, приведенными в разд. 1.3 вплоть до того места, где пренебрегается вторым членом в правой части уравнения (1.66) как величиной более высокого порядка малости. Поскольку в данном случае параметр $\Pi_{\text{пл}} \gg 0$ (1), такое пренебрежение уже больше несправедливо и следует учесть эффект парного взаимодействия третьей частицы с пробной ($\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1$) и полевой ($\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2$) частицами. В результате система уравнений запишется в виде

$$\left(\frac{\delta f_1}{\delta t}\right)_{\text{столкн}} = \frac{N}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int d\mathbf{r}_2 \int \frac{\partial \phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} g_{12} d\mathbf{v}_2 \quad (1.111)$$

11

$$g_{12}(t) = \int_0^\infty A(\mathbf{r}_1 - \mathbf{v}_1 \tau, \mathbf{r}_2 - \mathbf{v}_2 \tau, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; t - \tau) d\tau + \\ + \int_0^\infty B_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{v}_1 \tau, \mathbf{v}_1; t - \tau) d\tau + \int_0^\infty B_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{v}_2 \tau, \mathbf{v}_2; t - \tau) d\tau. \quad (1.112)$$

Здесь A определяется, как и прежде, выражением

$$A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; t) = \\ = \frac{1}{m} \frac{\partial \phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} \right] f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t), \quad (1.113)$$

а B_ν — выражением

$$B_\nu(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) = \frac{N}{m} \int d\mathbf{r}_3 \int \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu; t)}{\partial \mathbf{v}_\nu} \cdot \frac{\partial \phi_{\nu 3}}{\partial \mathbf{r}_\nu} g_{3(\nu-\nu)} d\mathbf{v}_3, \quad (1.114)$$

где $\nu = 1, 2$.

Чтобы найти g_{12} , нужно решить уравнение (1.112). При этом проблема состоит в том, что приходится решать интегральное уравнение, в котором взаимодействие полевой частицы с пробной учитывается функцией A , а изменение этого взаимодействия из-за наличия третьей частицы — функциями B_1 и B_2 .

Как и выше, предположим, что

$$t_c = \frac{r_c}{v_c} \ll T, \quad r_c \ll L. \quad (1.115)$$

Поэтому можно воспользоваться следующими соотношениями:

$$f(t - \tau) \approx f(t),$$

$$g_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, \dots) = g_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \dots) = g_{ij}(\mathbf{r}_{ij}, \dots). \quad (1.116)$$

Далее, будем считать (следуя Боголюбову [8]), что за время изменения функции f_1 функция g_{12} является квазистационарной, так что g_{12} зависит от времени только функционально через f_1 . Подробно на этом вопросе мы остановимся при рассмотрении многовременного формализма Боголюбова. Исходя из сделанных предположений, запишем интегральное уравнение (1.112) в виде

$$g_{12} = \mathbf{K}(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{v}_{12}) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} \right] f(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t) +$$

$$+ N \int d\mathbf{v}_3 \int d\boldsymbol{\rho} \mathbf{K}(\mathbf{r}_{12} - \boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}_{12}) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t)}{\partial \mathbf{v}_1} g_{23}(-\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) - \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t)}{\partial \mathbf{v}_2} g_{13}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) \right\} \quad (1.117)$$

с ядром

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{v}_{ij}) = \frac{1}{m} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \phi(\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{v}_{ij}\tau) d\tau, \quad \text{где } \mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j. \quad (1.118)$$

При получении (1.117) мы заменили переменные интегрирования в первом и втором членах, B_1 и B_2 , следующим образом:

$$\mathbf{r}_{23} = -\boldsymbol{\rho} \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_{13} = +\boldsymbol{\rho}. \quad (1.119)$$

Для решения уравнения (1.117) следует выполнить пространственное преобразование Фурье. Это сделать довольно просто, если применить теорему свертки и использовать соотношение симметрии $\tilde{g}_{12}(-\mathbf{k}) = \tilde{g}_{12}(\mathbf{k})$, которое следует из того факта, что $g_{12}(\boldsymbol{\rho})$ является действительной величиной. Фурье-образ ядра уравнения имеет вид

$$\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_{12}) = -\frac{i}{m} \int_0^\infty \mathbf{k} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{12}\tau) d\tau. \quad (1.120)$$

Вводя фактор сходимости ε , получаем

$$\begin{aligned} \tilde{K}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_{12}) &= -\frac{i}{m} \mathbf{k} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{12} - i\varepsilon)\tau] d\tau = \\ &= \frac{i}{m} \frac{\mathbf{k} \tilde{\phi}(\mathbf{k})}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{12} - i0}. \end{aligned} \quad (1.124)$$

Подставим это выражение в (1.117) и преобразуем полученное уравнение по Фурье. Тогда ¹⁾

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{12}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= \\ &= \frac{1}{m} \frac{\mathbf{k} \tilde{\phi}(\mathbf{k})}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{12} - i0} \cdot \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} \right] f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t) + \right. \\ &\quad + N (2\pi)^{3/2} \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t)}{\partial \mathbf{v}_1} \int \tilde{g}_{23}(-\mathbf{k}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) d\mathbf{v}_3 - \\ &\quad \left. - N (2\pi)^{3/2} \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t)}{\partial \mathbf{v}_2} \int \tilde{g}_{13}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) d\mathbf{v}_3 \right\}. \end{aligned} \quad (1.122)$$

С другой стороны, применяя теорему Парсеваля, в результате преобразования по Фурье уравнения (1.111) находим

$$\left(\frac{\delta f_1}{\delta t} \right)_{\text{столкн}} = -i \frac{N}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int \mathbf{k} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) \tilde{g}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) d\mathbf{k}, \quad (1.123)$$

где

$$\tilde{g}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) = \int \tilde{g}_{12}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_2. \quad (1.124)$$

Отметим, что здесь, как и раньше, функции отличаются не индексами, а аргументами.

Так как $\phi(\mathbf{r}_{12})$ является действительной функцией и зависит только от $r_{12} = |\mathbf{r}_{12}|$, то фурье-образ $\tilde{\phi}(\mathbf{k})$ также действителен. Для $\tilde{g}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1)$ имеем очевидное соотношение симметрии

$$\tilde{g}(-\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) = \tilde{g}^*(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1). \quad (1.125)$$

¹⁾ Здесь существенно отметить, что, согласно основному предположению, введенному на стр. 213 после формул (1.65) и (1.66), пространственным изменением функции распределения f_1 можно пренебречь по сравнению с пространственным изменением парной корреляционной функции.

Отсюда следует, что только мнимая часть $\tilde{g}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1)$ дает вклад в рассматриваемое кинетическое уравнение, т. е.

$$\left(\frac{\delta f_1}{\delta t}\right)_{\text{столкн}} = \frac{N}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int \mathbf{k} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) \operatorname{Im} [\tilde{g}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1)] d\mathbf{k}. \quad (1.126)$$

Для того чтобы найти эту величину $\operatorname{Im} [\tilde{g}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1)]$, проинтегрируем (1.122) по \mathbf{v}_2 . Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) &= \\ &= \frac{1}{m} \int \frac{\mathbf{k} \tilde{\phi}(\mathbf{k})}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{12} - i0} \cdot \left\{ f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2) \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)}{\partial \mathbf{v}_1} - f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)}{\partial \mathbf{v}_2} + \right. \\ &\quad \left. + (2\pi)^{3/2} N \left[\frac{\partial f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)}{\partial \mathbf{v}_1} \tilde{g}^*(\mathbf{k}, \mathbf{v}_2) - \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)}{\partial \mathbf{v}_2} \tilde{g}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) \right] \right\} d\mathbf{v}_2 \end{aligned} \quad (1.127)$$

и соответственно

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{1}{m} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) \chi(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) \right] \tilde{g}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) &= \\ &= \frac{1}{m} \int \frac{\mathbf{k} \tilde{\phi}(\mathbf{k})}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{12} - i0} \cdot \left[f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2) \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)}{\partial \mathbf{v}_1} - f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)}{\partial \mathbf{v}_2} + \right. \\ &\quad \left. + (2\pi)^{3/2} N \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)}{\partial \mathbf{v}_1} \tilde{g}^*(\mathbf{k}, \mathbf{v}_2) \right] d\mathbf{v}_2. \end{aligned} \quad (1.128)$$

Здесь введена сокращенная запись

$$\chi(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) = (2\pi)^{3/2} N \int \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{12} - i0} \cdot \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)}{\partial \mathbf{v}_2} d\mathbf{v}_2. \quad (1.129)$$

Исключим в правой части уравнения (1.128) последний член. Для этого проинтегрируем уравнение по компоненте скорости $\mathbf{v}_{1\perp}$, перпендикулярной вектору \mathbf{k} . В результате получим ¹⁾

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{1}{m} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) \chi(\mathbf{k}, u_1) \right] \tilde{g}(\mathbf{k}, u_1) &= \\ &= \frac{1}{m} \int \frac{\mathbf{k} \tilde{\phi}(\mathbf{k})}{\mathbf{k} u_{12} - i0} \left\{ f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2) \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_1, u_1)}{\partial u_1} - \right. \\ &\quad \left. - f_1(\mathbf{r}_1, u_1) \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)}{\partial u_2} + (2\pi)^{3/2} N \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_1, u_1)}{\partial u_1} \tilde{g}^*(\mathbf{k}, \mathbf{v}_2) \right\} d\mathbf{v}_2. \end{aligned} \quad (1.130)$$

¹⁾ Заметим, что величина χ зависит только от компоненты скорости u_1 .

Здесь введены следующие обозначения:

$$u_1 = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{k}}{k}, \quad u_2 = \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{k}}{k},$$

$$f(\mathbf{r}_1, u_1) = \int f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_{1\perp}, \quad \tilde{g}(\mathbf{k}, u_1) = \int \tilde{g}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_{1\perp},$$

$$u_{12} = u_1 - u_2. \quad (1.131)$$

Умножая (1.128) на $\partial f(\mathbf{r}_1, u_1)/\partial u_1$, а (1.130) на $\partial f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)/\partial u_1$ и вычитая одно уравнение из другого, получаем

$$\left[1 + \frac{1}{m} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) \chi(\mathbf{k}, u_1) \right] \left[\tilde{g}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) \frac{\partial f}{\partial u_1} - \tilde{g}(\mathbf{k}, u_1) \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right] =$$

$$= \frac{(2\pi)^{-3/2}}{mN} \chi(\mathbf{k}, u_1) \tilde{\phi}(\mathbf{k}) \left[f(\mathbf{r}_1, u_1) \frac{\partial f_1}{\partial u_1} - f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) \frac{\partial f}{\partial u_1} \right]. \quad (1.132)$$

Если взять мнимую часть от этого уравнения, то найдем искомую величину $\text{Im} [\tilde{g}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1)]$ при условии, что $\text{Im} [\tilde{g}(\mathbf{k}, u_1)] = 0$. Доказательство (несложное, но слишком длинное) последнего утверждения можно найти в приложении к оригинальной статье Ленарда [22]. Беря мнимую часть от (1.132), находим

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} \text{Im} [\tilde{g}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1)] =$$

$$= \frac{(2\pi)^{-3/2}}{mN} \left[f(\mathbf{r}_1, u_1) \frac{\partial f_1}{\partial u_1} - f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) \frac{\partial f}{\partial u_1} \right] \frac{\tilde{\phi}(\mathbf{k}) \text{Im} \chi}{\left| 1 + \frac{1}{m} \tilde{\phi} \chi \right|^2}. \quad (1.133)$$

Выражение для мнимой части функции χ можно получить из формулы Племелья:

$$\chi(\mathbf{k}, u_1) = (2\pi)^{3/2} N \mathcal{P} \int \frac{\partial f(\mathbf{r}_2, u_2)}{\partial u_2} \frac{du_2}{u_1 - u_2} -$$

$$- i\pi (2\pi)^{3/2} N \frac{\partial f(\mathbf{r}_2, u_2)}{\partial u_2} \Big|_{u_2=u_1}, \quad (1.134)$$

$$\text{Im} [\chi(\mathbf{k}, u_1)] = - (2\pi)^{3/2} \pi N \frac{\partial f(\mathbf{r}_2, u_2)}{\partial u_2} \Big|_{u_2=u_1} =$$

$$= - (2\pi)^{3/2} \pi N \frac{\partial f(\mathbf{r}_2, u_1)}{\partial u_1}.$$

Подставляя выражения (1.133) и (1.134) в (1.126), получаем уравнение

$$\left(\frac{\delta f_1}{\delta t}\right)_{\text{столкн}} = -\frac{\pi N}{m^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int \mathbf{k} \frac{[\tilde{\phi}(\mathbf{k})]^2}{|1+(1/m)\tilde{\phi}\chi|^2} \times \\ \times \left[f(\mathbf{r}_1, u_1) \frac{\partial f_1}{\partial u_1} - f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) \frac{\partial f}{\partial u_1} \right] d\mathbf{k}, \quad (1.135)$$

или

$$\left(\frac{\delta f_1}{\delta t}\right)_{\text{столкн}} = N \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int \mathbf{Q}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} \right] \times \\ \times f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_2, \quad (1.136)$$

где \mathbf{Q}_2 — тензор второго ранга

$$\mathbf{Q}_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = -\frac{\pi}{m^2} \int \frac{[\tilde{\phi}(\mathbf{k})]^2 \mathbf{k}(\mathbf{k})}{|1+(1/m)\tilde{\phi}\chi|^2} \delta[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)] d\mathbf{k}. \quad (1.137)$$

Таким образом, мы вывели *уравнение Ленарда — Балеску*. При выводе по существу был использован метод Ленарда, который исходил из уравнений Боголюбова. Одновременно с Ленардом то же самое уравнение получил Балеску [23]. Однако Балеску исходил не из уравнений Боголюбова, а получил свой результат, основываясь на диаграммной технике. Его вывод справедлив, по крайней мере для значений параметров, изменяющихся в пределах (1.17). Поэтому метод Балеску подобен методу, предложенному Ленардом.

Уравнение Ландау с учетом экранирования

Вспомним, что в силу логарифмической расходимости тензора \mathbf{Q}_2 для больших прицельных параметров Ландау пришлось вводить искусственные пределы интегрирования по прицельному параметру. При выводе кинетического уравнения Ленард и Балеску учли взаимодействие с третьей частицей и благодаря этому включили в уравнение эффекты экранирования. Поэтому можно надеяться получить из (1.136) и (1.137) уравнение Ландау, в котором не нужно вводить верхний предел интегрирования. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим цилиндрическую систему

координат с осью z , параллельной вектору относительной скорости $\mathbf{g} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, тогда

$$Q_{ij} = -\frac{\pi}{m^2} \int \delta(k_z g) \frac{[\tilde{\phi}(\mathbf{k})]^2 k_i k_j}{|1 + (1/m) \tilde{\phi} \chi|^2} k_{\perp} dk_{\perp} d\varphi dk_z. \quad (1.138)$$

Здесь \mathbf{k}_{\perp} — проекция вектора \mathbf{k} на плоскость, перпендикулярную вектору \mathbf{g} , а φ — угол ориентации вектора \mathbf{k}_{\perp} в этой плоскости. Интегрирование по k_z дает

$$Q_{ij} = \begin{cases} -\frac{\pi}{gm^2} \int \frac{[\tilde{\phi}(\mathbf{k}_{\perp})]^2 k_i k_j}{|1 + (1/m) \tilde{\phi}(\mathbf{k}_{\perp}) \chi(\varphi, \mathbf{v}_{1\perp})|^2} \times \\ \quad \times k_{\perp} dk_{\perp} d\varphi \quad \text{для } i, j \neq z, \\ 0 \quad \text{для } i = z \text{ или } j = z. \end{cases} \quad (1.139)$$

Воспользуемся разложением

$$\frac{1}{|1 + (1/m) \tilde{\phi}(\mathbf{k}_{\perp}) \chi(\varphi, \mathbf{v}_{1\perp})|^2} = \frac{i}{2 \operatorname{Im} [(1/m) \tilde{\phi}(\mathbf{k}_{\perp}) \chi(\varphi, \mathbf{v}_{1\perp})]} \times \\ \times \left[\frac{1}{1 + (1/m) \tilde{\phi}(\mathbf{k}_{\perp}) \chi(\varphi, \mathbf{v}_{1\perp})} - \frac{1}{1 + (1/m) \tilde{\phi}(\mathbf{k}_{\perp}) \chi^*(\varphi, \mathbf{v}_{1\perp})} \right] \quad (1.140)$$

и спектральной функцией для кулоновского поля:

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}_{\perp}) = \tilde{\phi}(k_{\perp}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2}{k_{\perp}^2}. \quad (1.141)$$

В результате подстановки этих соотношений в (1.139) и элементарного интегрирования получаем

$$Q_{ij} = \frac{e^4}{m^2 g} \int \hat{k}_{\perp i} \hat{k}_{\perp j} \frac{\operatorname{Im} \left[\chi(\varphi, \mathbf{v}_{1\perp}) \ln \left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Theta^2 m}{\chi e^6} \right) \right]}{\operatorname{Im} [\chi(\varphi, \mathbf{v}_{1\perp})]} d\varphi. \quad (1.142)$$

В действительности интеграл (1.139) логарифмически расходится при $k_{\perp} \rightarrow \infty$. Этой расходимости удалось избежать выше путем введения верхнего предела интегрирования

$$k_{\perp \text{ макс}} = \frac{1}{r_w} = \frac{\Theta}{e^2}. \quad (1.143)$$

Как и следовало ожидать, такая расходимость, которая своим происхождением обязана области малых прицельных параметров, недоступна теории слабого взаимодействия и не устраняется учетом в уравнении Боголюбова — Ленарда — Балеску эффекта экранирования, возникающего в результате взаимодействия с третьей частицей. С другой стороны, расходимость для малых значений k_{\perp} , которая соответствует области больших прицельных параметров и представляет собой расходимость в приближении Ландау, действительно устраняется в теории Боголюбова — Ленарда — Балеску. Это легко видеть из того факта, что именно в приближении Ландау знаменатель в (1.139) для малых значений k возрастает быстрее, чем числитель.

В выражении, стоящем под знаком \ln в (1.142), для функции χ достаточно использовать приближенное значение. Из формулы (1.129) следует, что

$$\chi(\Phi, \mathbf{v}_{\perp 1}) = O\left(\frac{m\eta}{\Theta}\right). \quad (1.144)$$

Таким образом, для Q_{ij} получаем

$$Q_{ij} = \begin{cases} -\frac{e^4\pi}{m^2g} \ln\left(1 + \frac{\Theta^3}{ne^6}\right) & \text{для } i, j \neq z, i = j, \\ 0 & \text{для остальных значений } i \text{ и } j. \end{cases} \quad (1.145)$$

Вспоминая, что

$$\frac{\Theta^3}{ne^6} = O(\Lambda^2) \geq 1, \quad (1.146)$$

и возвращаясь к произвольной системе координат, находим общее представление

$$Q_{ij} = -\frac{2\pi e^4}{m^2} \frac{(g^2\delta_{ij} - g_i g_j)}{g^3} \ln \Lambda. \quad (1.147)$$

Сравнение полученного результата с уравнением Ландау (1.85) показывает, что уравнение Боголюбова — Ленарда — Балеску действительно устраняет расходимость в уравнении Ландау, обусловленную большими прицельными параметрами без априорного искусственного введения пределов интегрирования.

Относительная ошибка, возникающая из-за использования приближенного значения χ под логарифмом в (1.142), имеет порядок отношения

$$\left| \frac{\ln \chi - \ln (r_0/r_w)^3}{\ln (r_0/r_w)^3} \right| = O \left(\left| \frac{\ln (\Theta/mv^2)}{\ln (r_0/r_w)} \right| \right). \quad (1.148)$$

Эта ошибка становится существенной только для значений $v \gg \langle v \rangle$, т. е. в области, где функция $f_1(v)$ становится очень малой по величине и поэтому не дает существенного вклада в $(\delta f_1/\delta t)_{\text{столкн.}}$.

Физическая интерпретация уравнения Боголюбова — Ленарда — Балеску

Анализируя уравнения Ландау — Фоккера — Планка (1.85) и Боголюбова — Ленарда — Балеску (1.136) и (1.137), можно видеть, что они отличаются только коэффициентами переноса Q_{ij} , которые соответственно имеют вид

$$Q_{2\text{ЛФП}} = -\frac{e^2}{m^2} \int d\mathbf{r}_2 \int_0^\infty \mathbf{E}[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2] (\mathbf{E}[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{v}_1\tau + \mathbf{v}_2\tau]) d\tau \quad (1.149)$$

и

$$Q_{2\text{БЛБ}} = -\frac{\pi}{m^2} \int \frac{[\tilde{\phi}(k)]^2 \mathbf{k}(\mathbf{k})}{|1 + (1/m)\tilde{\phi}\chi|^2} \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{12}) d\mathbf{k}. \quad (1.150)$$

Если поле \mathbf{E} в (1.149) задать в виде градиента общего потенциала ψ , то

$$e\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{\psi}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (1.151)$$

Уравнение (1.149) тогда можно переписать в виде

$$Q_{2\text{ЛФП}} = \frac{1}{m^2} \int_0^\infty d\tau \int \mathbf{k}(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{12}\tau) |\tilde{\psi}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}, \quad (1.152)$$

или

$$Q_{2\text{ЛФП}} = \frac{\pi}{m^2} \int \mathbf{k}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{12}) |\tilde{\psi}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}. \quad (1.153)$$

Сравнение (1.153) и (1.150) показывает, что уравнение Боголюбова — Ленарда — Балеску можно интерпрети-

ровать как «неэкранированное» уравнение Ландау — Фоккера — Планка, согласно которому полевые частицы действуют на пробную частицу с силой, определяемой эффективным потенциалом

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}) = \frac{\tilde{\phi}(\mathbf{k})}{1 + (1/m)\tilde{\phi}\chi}. \quad (1.154)$$

Используя спектральную функцию кулоновского потенциала

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2}{k^2}, \quad (1.155)$$

получаем соответствующий фурье-образ эффективного потенциала

$$\tilde{\psi}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2}{k^2 + \sqrt{2/\pi} (e^2/m)\chi(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1)}. \quad (1.156)$$

Чтобы дать грубую интерпретацию эффективного потенциала (1.156), представим силы, действующие на пробную частицу, в виде суперпозиции парных взаимодействий, в которых экранирование кулоновского взаимодействия учитывается путем введения эффективной диэлектрической проницаемости плазмы. С этой целью вспомним соотношение (3.3.12), в котором пространственно-временное преобразование Фурье потенциала в плазме связывается с соответствующей спектральной функцией плотности заряда \tilde{n} и диэлектрической проницаемостью ε ¹⁾. Для эффективного потенциала имеем аналогичное соотношение

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi e^2 \tilde{n}(\mathbf{k}, \omega)}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)}, \quad (1.157)$$

где ε в приближении квазистационарного поля, согласно уравнению (3.3.10), записывается следующим образом:

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{k} \cdot \partial f / \partial \mathbf{v}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega + i0} d\mathbf{v}. \quad (1.158)$$

В приближении прямолинейных траекторий плотность распределения заряда полевых электронов равна

$$n(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{v}_2 t), \quad (1.159)$$

¹⁾ В связи с этим см. стр. 163.

а соответствующая спектральная функция —

$$\tilde{n}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2). \quad (1.160)$$

Таким образом, распределение потенциала в плазме, обусловленного полевыми частицами, может быть записано в виде

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2e^2 \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2)}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)}. \quad (1.161)$$

Индекс 2 по-прежнему относится к полевой частице. Для удобства поместим начало системы координат в начальное положение полевой частицы (\mathbf{r}_{20}). Обратное преобразование Фурье по времени дает

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2}{k^2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2 t} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2)}. \quad (1.162)$$

Следовательно, потенциал полевой частицы с учетом экранирования поля плазмой, определяемый по движению пробной частицы, записывается в виде

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2}{k^2} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2)} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{12} t}. \quad (1.163)$$

Здесь введен дополнительный множитель $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{12} t)$, учитывающий то обстоятельство, что изменение во времени потенциала плазмы рассматривается по отношению к движущейся частице. Заметим, что, поскольку речь идет об использовании полученного выражения для потенциала в уравнении (1.153), то благодаря наличию в (1.153) функции Дирака $\delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{12})$ можно опустить экспоненциальный множитель в (1.163) и заменить \mathbf{v}_2 на \mathbf{v}_1 в диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2)$. Таким образом, можно записать

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2}{k^2} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1)}. \quad (1.164)$$

Подставляя сюда соотношение (1.158), получаем

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2}{k^2 + \omega_p^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot (\partial f / \partial \mathbf{v})}{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}) - i0} d\mathbf{v}, \quad (1.165)$$

что совпадает с выражением (1.156).

Читателя, интересующегося более детальным обсуждением коэффициентов «экранированного уравнения Фоккера — Планка», мы отсылаем к работе Томпсона и Хаббарда [24].

*Пределы применимости уравнения
Боголюбова — Ленарда — Балеску*

Как видно из (1.137) и (1.154), уравнение Боголюбова — Ленарда — Балеску справедливо только, если существует потенциал $\tilde{\psi}(\mathbf{k}, t)$. Такое условие совпадает с требованием, чтобы $\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1)$ не равнялось нулю. А это означает, что кривая, отображающая действительную ось $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_1$,

$$G(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{v}_1) = \omega_p^2 \int \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot (\partial f / \partial \mathbf{v})}{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v} - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_1 + i0} d\mathbf{v} \quad (1.166)$$

не пересекает положительную действительную ось в G -плоскости. Условия такого пересечения были определены Пенроузом и детально обсуждались в § 2 гл. 3.

Поэтому можно сделать заключение, что устойчивость системы в смысле Пенроуза является необходимым условием справедливости уравнения Боголюбова — Ленарда — Балеску. Важно отметить, что условие устойчивости должно выполняться для любого момента времени, причем устойчивость функции f_1 не обязательно следует из уравнения Боголюбова — Ленарда — Балеску. Однако если $f_1(\mathbf{v})$ является функцией изотропного распределения, то она остается таковой для любых моментов времени и представляет собой функцию с одним максимумом, а поэтому всегда устойчива.

§ 2. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Уравнения моментов, получаемые из уравнения Больцмана; метод Грэда

В предыдущем параграфе уравнение Больцмана было получено из цепочки уравнений БГКИ. Уравнение Больцмана для общих функций распределения $f_\mu^{(1)} = f_\mu$ в случае нескольких сортов частиц и при наличии внешних

сил имеет вид

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial t} + \mathbf{v}_\mu \cdot \frac{\partial f_\mu}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\mu} \cdot \dot{\mathbf{v}}_\mu f_\mu = \sum_\nu \int \nu v g d\mathbf{v}_\nu \int (f'_\mu f'_\nu - f_\mu f_\nu) dQ_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \nu v g &= |\mathbf{v}_\mu - \mathbf{v}_\nu| && \text{для } \nu \neq \mu, \\ \mu \mu g &= |\mathbf{v}_\mu - \mathbf{v}_{2\mu}| && \text{для } \nu = \mu, \end{aligned} \quad (2.2)$$

а через $dQ_{\mu\nu}$ обозначено дифференциальное сечение рассеяния $bdbd\phi$. Заметим, что разные сорта частиц отличаются координатами в пространстве скоростей, но не отличаются по координатам конфигурационного пространства. Это возможно только благодаря бoльцмановской концепции ближних столкновений, когда взаимодействие ограничено малыми расстояниями, так что координаты пробной и полевой частиц в конфигурационном пространстве практически совпадают.

Чтобы вывести уравнения переноса Максвелла — Больцмана из уравнения Больцмана, рассмотрим произвольную функцию $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\mu; t)$ и определим для нее соответствующую макроскопическую величину, характеризующую явление переноса,

$$\langle \Psi \rangle_{\mathbf{v}_\mu}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n_\mu(\mathbf{r}, t)} \int \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\mu; t) f_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\mu; t) d\mathbf{v}_\mu, \quad (2.3)$$

где $n_\mu(\mathbf{r}, t)$ — плотность числа частиц сорта μ , равная

$$n_\mu(\mathbf{r}, t) = \int f_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\mu; t) d\mathbf{v}_\mu. \quad (2.4)$$

Умножим уравнение (2.1) на $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\mu; t)$ и проинтегрируем по пространству скоростей \mathbf{v}_μ . Непосредственное интегрирование по частям левой части уравнения при разумном предположении, что Ψf_μ достаточно быстро стремится к нулю при $v_\mu \rightarrow \infty$, приводит к следующему выражению для конвективных членов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n_\mu \langle \Psi \rangle_{\mathbf{v}_\mu} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot n_\mu \langle \mathbf{v}_\mu \Psi \rangle_{\mathbf{v}_\mu} - \\ - n_\mu \left\{ \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \Psi \right\rangle_{\mathbf{v}_\mu} + \left\langle \mathbf{v}_\mu \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Psi \right\rangle_{\mathbf{v}_\mu} + \left\langle \dot{\mathbf{v}}_\mu \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\mu} \Psi \right\rangle_{\mathbf{v}_\mu} \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Заменяя штрихованные переменные на нештрихованные в первом члене интеграла столкновений, что можно делать в силу закона Лиувилля и инвариантности величин $\mu v g$ и $dQ_{\mu\nu}$ относительно такой замены, находим для первого члена интеграла столкновений

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{v}_\mu \int \mu v g d\mathbf{v}_\nu \int \Psi(\mathbf{v}_\mu) f_\mu(\mathbf{v}'_\mu) f_\nu(\mathbf{v}'_\nu) dQ_{\mu\nu} = \\ = \int d\mathbf{v}'_\mu \int \mu v g d\mathbf{v}'_\nu \int \Psi(\mathbf{v}'_\mu) f_\mu(\mathbf{v}_\mu) f_\nu(\mathbf{v}_\nu) dQ_{\mu\nu} = \\ = \int d\mathbf{v}_\mu \int \mu v g d\mathbf{v}_\nu \int \Psi(\mathbf{v}'_\mu) f_\mu(\mathbf{v}_\mu) f_\nu(\mathbf{v}_\nu) dQ_{\mu\nu}. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Тогда столкновительный член в правой части уравнения (2.1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} \int d\mathbf{v}_\mu \int \mu v g d\mathbf{v}_\nu \int \Psi(\mathbf{v}_\mu) (f'_\mu f'_\nu - f_\mu f_\nu) dQ_{\mu\nu} = \\ = \sum_{\nu} \int d\mathbf{v}_\mu \int \mu v g d\mathbf{v}_\nu \int [\Psi(\mathbf{v}'_\mu) - \Psi(\mathbf{v}_\mu)] f_\mu f_\nu dQ_{\mu\nu} = \\ = n_\mu \sum_{\nu} n_\nu \left\langle \left\langle \mu v g \int (\Psi' - \Psi) dQ_{\mu\nu} \right\rangle_{\mathbf{v}_\mu} \right\rangle_{\mathbf{v}_\nu}. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Приравнявая соотношения (2.5) и (2.7) друг другу, мы получаем уравнение переноса Максвелла — Больцмана

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n_\mu \langle \Psi \rangle_{\mathbf{v}_\mu} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot n_\mu \langle \mathbf{v}_\mu \Psi \rangle_{\mathbf{v}_\mu} - \\ - n_\mu \left\{ \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \Psi \right\rangle_{\mathbf{v}_\mu} + \left\langle \mathbf{v}_\mu \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Psi \right\rangle_{\mathbf{v}_\mu} + \left\langle \mathbf{v}_\mu \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\mu} \Psi \right\rangle_{\mathbf{v}_\mu} \right\} = \\ = n_\mu \sum_{\nu} n_\nu \left\langle \left\langle \mu v g \int (\Psi' - \Psi) dQ_{\mu\nu} \right\rangle_{\mathbf{v}_\mu} \right\rangle_{\mathbf{v}_\nu}. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Перечисленные ниже моменты скорости приводят к макроскопическим величинам, которые характеризуют явление переноса и имеют простой физический смысл.

1. Момент нулевого порядка $\Psi = m_\mu$ дает величину

$$\langle \Psi \rangle_{\mathbf{v}_\mu} = m_\mu, \quad (2.9)$$

которая приводит к уравнению переноса массы вещества, причем

$$\rho_{\mu} = n_{\mu} m_{\mu}, \quad \rho = \sum_{\nu} \rho_{\nu}, \quad (2.10)$$

где через ρ обозначена полная плотность массы.

2. Момент первого порядка $\Psi = m_{\mu} \mathbf{g}_{\mu}$, где

$$\mathbf{g}_{\mu} = \mathbf{v}_{\mu} - \mathbf{u} = \mathbf{v}_{\mu} - \frac{1}{\rho} \sum_{\nu} \rho_{\nu} \langle \mathbf{v}_{\nu} \rangle_{\nu} \quad (2.11)$$

приводит к уравнению переноса импульса $\rho_{\mu} \langle \mathbf{g}_{\mu} \rangle_{\nu_{\mu}}$ относительного движения.

3. Момент второго порядка $\Psi_2 = m_{\mu} \mathbf{g}_{\mu} \mathbf{g}_{\mu}$ дает уравнение переноса для тензора давлений

$$\mathbf{p}_{\mu} = \rho_{\mu} \langle \mathbf{g}_{\mu} \mathbf{g}_{\mu} \rangle_{\nu_{\mu}}, \quad (2.12)$$

который связан с гидростатическим парциальным давлением p_{μ} и температурой Θ_{μ}

$$p_{\mu} = \frac{1}{3} \text{Sp} (\mathbf{p}_{\mu}) = n_{\mu} \Theta_{\mu} \quad (2.13)$$

и с тензором напряжений

$$\overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\mu} = \mathbf{p}_{\mu} - p_{\mu} \mathbf{I}. \quad (2.14)$$

Тензор $((\mathbf{a})^n)^{\circ}$ со шпуром, равным нулю, для $n = 2, 3$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}\mathbf{a})^{\circ} &= ((\mathbf{a})^2)^{\circ} = \mathbf{a}\mathbf{a} - \frac{1}{3} \text{Sp} (\mathbf{a}\mathbf{a}) \mathbf{I}_2, \\ (\mathbf{a}\mathbf{a}\mathbf{a})^{\circ} &= ((\mathbf{a})^3)^{\circ} = \mathbf{a}\mathbf{a}\mathbf{a} - \frac{3}{5} \text{sym} (\mathbf{a} \text{Sp} (\mathbf{a}\mathbf{a}) \mathbf{I})_2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

4. Момент третьего порядка

$$\Psi_3 = m_{\mu} \mathbf{g}_{\mu} \mathbf{g}_{\mu} \mathbf{g}_{\mu}$$

дает уравнение переноса для тензора потока энергии

$$\mathbf{q}_{\mu} = \rho_{\mu} \langle \mathbf{g}_{\mu} \mathbf{g}_{\mu} \mathbf{g}_{\mu} \rangle_{\nu_{\mu}}, \quad (2.16)$$

который связан с потоком энергии

$$\mathbf{q}_{\mu} = \frac{1}{2} \rho_{\mu} \langle \mathbf{g}_{\mu} \mathbf{g}_{\mu} \cdot \mathbf{g}_{\mu} \rangle_{\nu_{\mu}} = \frac{1}{2} \text{Sp} (\mathbf{q}_{\mu}) \quad (2.17)$$

и тензором теплового потока

$$h_{\mu} = q_{\mu} - 3p_{\mu} \langle \text{sym} (g_{\mu} \mathbf{I}) \rangle_{v_{\mu}}. \quad (2.18)$$

При этом тепловой поток определяется выражением

$$h_{\mu} = q_{\mu} - \frac{5}{2} n_{\mu} \Theta_{\mu} \langle g_{\mu} \rangle. \quad (2.19)$$

*Решение цепочки уравнений переноса
методом последовательного приближения
путем разложения функции распределения*

Из уравнения Максвелла — Больцмана невозможно найти какой-либо один определенный момент $\langle \Psi \rangle_{v_{\mu}}$. Это обусловлено тем обстоятельством, что дифференциальное уравнение в левой части содержит также и моменты других порядков, например $\langle v_{\mu} \Psi \rangle_{v_{\mu}}$, характеризующие явление переноса, и, кроме того, зависимость столкновительных членов не может быть представлена в виде функции только величины $\langle \Psi \rangle_{v_{\mu}}$.

Метод последовательного приближения при решении рассматриваемой задачи заключается в следующем. Запишем систему уравнений переноса для величин $\Psi = (v_{\mu})^n$. Тогда левые части уравнений будут содержать моменты $\langle \Psi \rangle_{v_{\mu}}$, в то время как столкновительные члены, стоящие в правых частях, не могут быть представлены просто в виде функций от этих моментов $\langle \Psi \rangle_{v_{\mu}} = \langle (v_{\mu})^n \rangle_{v_{\mu}}$. Поэтому разложим функцию распределения f_{μ} и свяжем коэффициенты такого разложения $a_{h\mu}$ с моментами $\langle \Psi \rangle_{v_{\mu}}$ посредством соотношения (2.3). В результате получим столкновительные члены, выраженные через соответствующие моменты.

Этот метод приводит к цепочке уравнений для моментов $\langle (v_{\mu})^n \rangle_{v_{\mu}}$, которую следует оборвать в определенном месте. Обрыв цепочки уравнений зависит от выбора разложения и от того, насколько сложными оказываются соотношения между коэффициентами разложения и физическими моментами или столкновительными членами.

Бопп и Мейкснер предложили следующее общее разложение (см. работу Сухи [25]):

$$f_{\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_{\mu}; t) = \left\{ 1 - \mathbf{a}_{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_{\mu}} + \frac{1}{2!} \mathbf{a}_{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_{\mu}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_{\mu}} - \frac{1}{3!} \mathbf{a}_{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_{\mu}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_{\mu}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_{\mu}} + \dots \right\}^{(0)} f_{\mu}(g_{\mu}^2), \quad (2.20)$$

где $^{(0)}f_{\mu}$ — функция распределения пулевого порядка, которая выбирается очень близкой к реально существующему распределению.

Если в качестве $^{(0)}f_{\mu}$ взять распределение Максвелла

$$^{(0)}f_{\mu}(g_{\mu}^2) = \frac{n_{\mu}}{(2\pi\Theta_{\mu}/m_{\mu})^{1/2}} \exp\left(-\frac{m_{\mu}g_{\mu}^2}{2\Theta_{\mu}}\right), \quad (2.21)$$

то разложение (2.20) соответствует разложению Грэда по полиномам Эрмита, которое имеет большое значение в теории переноса (см. [6]).

Коэффициенты разложения Грэда очень просто связаны с физическими моментами. Это легко видеть, если подставить разложение (2.20) в соотношение (2.3), определяющее макроскопические коэффициенты переноса.

Непосредственное интегрирование дает

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\mu} &= \langle \mathbf{g}_{\mu} \rangle_{\mathbf{v}_{\mu}}, \\ \mathbf{a}_{\mu} &= \frac{1}{\rho_{\mu}} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\mu} = \langle \mathbf{g}_{\mu} \mathbf{g}_{\mu} \rangle_{\mathbf{v}_{\mu}} - \frac{1}{3} \langle \text{Sp}(\mathbf{g}_{\mu} \mathbf{g}_{\mu}) \rangle_{\mathbf{v}_{\mu}}, \\ \mathbf{a}_{\mu} &= \frac{1}{\rho_{\mu}} \overset{\circ}{\mathbf{h}}_{\mu} = \langle \mathbf{g}_{\mu} \mathbf{g}_{\mu} \mathbf{g}_{\mu} \rangle_{\mathbf{v}_{\mu}} - \frac{3\Theta_{\mu}}{m_{\mu}} \langle \text{sym}(\mathbf{g}_{\mu} \mathbf{I}) \rangle_{\mathbf{v}_{\mu}}, \\ \mathbf{a}_{\mu} &= \langle \mathbf{g}_{\mu} \mathbf{g}_{\mu} \mathbf{g}_{\mu} \mathbf{g}_{\mu} \rangle_{\mathbf{v}_{\mu}} - \frac{6\Theta_{\mu}}{m_{\mu}\rho_{\mu}} \text{sym}(\overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\mu} \mathbf{I}) - 3 \left(\frac{\Theta_{\mu}}{m_{\mu}}\right)^2 \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Следуя изложенному методу, можно представить столкновительные члены через коэффициенты Грэда, а следовательно [посредством соотношений (2.22)], и через моменты. Это приводит к цепочке уравнений для моментов.

Здесь следует сделать одно предостерегающее замечание. Хотя моменты и могут быть вычислены, но нельзя точно вычислить функцию распределения, даже если

ограничиться системами, которые удовлетворяют условию

$$|\langle \mathbf{g}_\mu \rangle_{\mathbf{v}_\mu}| \ll \sqrt{\frac{\Theta_\mu}{m_\mu}}. \quad (2.23)$$

Для гредовского случая сходимость разложения Боппа — Мейкснера (2.20) очень плохая. Можно показать, что все коэффициенты малы по сравнению с единицей, но они не уменьшаются по величине.

Вычисление столкновительных членов

Сначала проинтегрируем столкновительные члены по прицельным параметрам. С этой целью выразим скорости \mathbf{u} , связанные с движением центра масс, через относительные скорости частиц ${}^{\mu\nu}\mathbf{g}_G$ и ${}^{\mu\nu}\mathbf{g}$. В результате получим

$$m_\mu [(\mathbf{g}'_\mu)^n - (\mathbf{g}_\mu)^n] = M_{\mu\nu} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{M_{\mu\nu}}{m_\mu} \right)^k \times \\ \times ({}^{\mu\nu}\mathbf{g}_G)^{n-k} [({}^{\mu\nu}\mathbf{g}')^k - ({}^{\mu\nu}\mathbf{g})^k], \quad (2.24)$$

где

$${}^{\mu\nu}\mathbf{g}_G = \frac{m_\mu \mathbf{g}_\mu + m_\nu \mathbf{g}_\nu}{m_\mu + m_\nu}, \quad {}^{\mu\nu}\mathbf{g} = \mathbf{v}_\mu - \mathbf{v}_\nu, \quad (2.25)$$

а через $M_{\mu\nu}$ обозначена приведенная масса. Мы здесь не будем давать подробного вывода полученных результатов. Вообще, простые, но громоздкие алгебраические преобразования, которые не представляют особого интереса, ниже приводиться не будут.

Компоненты тензора $({}^{\mu\nu}\mathbf{g}')^k$ можно рассматривать как функции абсолютных значений ${}^{\mu\nu}\mathbf{g}$ и угла рассеяния χ . Интегрирование тензора $({}^{\mu\nu}\mathbf{g}')^k$ по азимутальному углу φ дает

$$\int ({}^{\mu\nu}\mathbf{g}')^k dQ_{\mu\nu} = \int ({}^{\mu\nu}\mathbf{g}')^k d\varphi b db = \\ = 2\pi \sum_{j=0}^k b_{kj} \text{sym} [({}^{\mu\nu}\mathbf{g})^j \circ \mathbf{I}_2^{(k-j)/2}] b db P_j(\cos \chi), \quad (2.26)$$

где коэффициенты b_{kj} равны

$$\begin{aligned} b_{kj} &= 0 \quad \text{для } k + j = 2m + 1, \\ b_{kk} &= 1, \quad b_{20} = \frac{1}{3}, \quad b_{31} = \frac{3}{5}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Теперь можно провести следующее интегрирование:

$$\begin{aligned} m_\mu \int [(\mathbf{g}'_\mu)^n - (\mathbf{g}_\mu)^n] dQ_{\mu\nu} &= -M_{\mu\nu} \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^k \binom{n}{k} \left(\frac{M_{\mu\nu}}{m_\mu}\right)^k b_{kj} \times \\ &\times \text{sym} [(\mu\nu\mathbf{g}_G)^{n-k} ((\mu\nu\mathbf{g})^j)^\circ \mathbf{I}_2^{(k-j)/2}] Q^j(\mu\nu\mathbf{g}), \end{aligned} \quad (2.28)$$

где сечение рассеяния определяется выражением

$$Q^j(\mu\nu\mathbf{g}) = 2\pi \int [1 - P_j(\cos \chi)] b db. \quad (2.29)$$

Вычисление сечения рассеяния (2.29) является простой геометрической задачей и не представляет принципиальных трудностей при условии, что известен закон взаимодействия. В наиболее простом случае, когда потенциал взаимодействия между частицами может быть представлен в виде степенного закона

$$\Phi(r) = \pm \frac{C}{r^s}, \quad (2.30)$$

сечение рассеяния можно аппроксимировать следующими функциями:

$$Q^j(\mu\nu\mathbf{g}) = \left(\frac{2C}{M_{\mu\nu}}\right)^{2/s} [A_s^j(\mu\nu\mathbf{g})]^{-4/s}. \quad (2.31)$$

Здесь A_s^j не зависит от $\mu\nu\mathbf{g}$ для $s > 1$. Для $s = 1$ имеем

$$\begin{aligned} A_1^j(\gamma_c) &= \frac{1}{4} \gamma_c^2 + \left(\frac{1 + \gamma_c}{2 + \gamma_c}\right)^2 P_j^{(j)} \left(\frac{2/\gamma_c + 2 + \gamma_c}{2 + \gamma_c}\right) \ln |1 + \gamma_c| - \\ &- \sum_{l=0}^j \frac{1}{4l!(1-l)} \left[\frac{-2/\gamma_c - 4 - 2\gamma_c}{2 + \gamma_c}\right]^l \times \\ &\times \frac{(1 + \gamma_c)^{2l-1} - 1}{2 + \gamma_c} P_j^{(l)} \left\{\frac{2/\gamma_c + 2 + \gamma_c}{2 + \gamma_c}\right\}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где

$$\gamma_c = r_c M_{\mu\nu} \mu\nu g^2 C^{-1}. \quad (2.33)$$

Усредняя столкновительный член (2.28) два раза по функциям распределения $f_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\mu; t)$ и $f_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\nu; t)$, получаем интеграл столкновений в виде, соответствующем разложению Грэда:

$$\int d\mathbf{g}_\mu \int d\mathbf{g}_\nu \exp\left(-\frac{m_\mu g_\mu^2}{2\Theta_\mu} - \frac{m_\nu g_\nu^2}{2\Theta_\nu}\right) \times \\ \times \left\{ 1 - \mathbf{a}_\mu \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_\mu} + \frac{1}{2!} \mathbf{a}_\mu : \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_\mu} \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_\mu} - \dots \right\} \times \\ \times \left\{ 1 - \mathbf{a}_\nu \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_\nu} + \frac{1}{2!} \mathbf{a}_\nu : \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_\nu} \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_\nu} - \dots \right\} \times \\ \times \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^k \binom{n}{k} \left(\frac{M_{\mu\nu}}{m_\mu}\right)^k \times \\ \times b_{kj} \text{sym}[(\mu\nu\mathbf{g}\mathbf{g})^{n-k} ((\mu\nu\mathbf{g})^j)^\circ \mathbf{I}^{(k-j)/2}] Q^j(\mu\nu\mathbf{g}). \quad (2.34)$$

Вычисление (2.34) проводится в следующем порядке. Член n -го порядка в интеграле столкновений определяется как сумма всех членов с дифференциальным оператором порядка n , причем каждый из этих членов умножается на произведение двух коэффициентов Грэда. Чтобы иметь возможность применить эти дифференциальные операторы, выразим операторы и аргументы через относительные скорости $\mu\nu\mathbf{g}$ и $\mu\nu\mathbf{g}\mathbf{g}$:

$$\mu\nu\mathbf{g}\mathbf{g} = \left(\frac{m_\mu\mathbf{g}_\mu}{\Theta_\mu} + \frac{m_\nu\mathbf{g}_\nu}{\Theta_\nu}\right) \left(\frac{m_\mu}{\Theta_\mu} + \frac{m_\nu}{\Theta_\nu}\right)^{-1}. \quad (2.35)$$

Теперь можно проинтегрировать по углу и по $\mu\nu\mathbf{g}\mathbf{g}$.

Полученный результат представляет собой сумму членов, каждый из которых пропорционален либо самим коэффициентам Грэда, либо их произведениям. Эти члены содержат множители, которые могут быть выражены в виде линейной комбинации так называемых *термодинамических коэффициентов переноса*

$$q^{lm} = \frac{2}{(m+1/2)!} \int (\gamma_{\mu\nu}^2)^{m+1/2} Q^l(\mu\nu\mathbf{g}) \exp(-\gamma_{\mu\nu}^2) \gamma_{\mu\nu}^2 d\gamma_{\mu\nu}. \quad (2.36)$$

Здесь использована сокращенная запись

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{\mu\nu g}{\gamma_0}, \quad \text{где} \quad \gamma_0 = \left(\frac{2\Theta_\mu}{m_\mu} + \frac{2\Theta_\nu}{m_\nu}\right)^{1/2}. \quad (2.37)$$

Цепочка уравнений переноса в приближении Грэда

Выше мы показали, что столкновительные члены могут быть выражены через коэффициенты Грэда и термодинамические коэффициенты переноса. Используя соотношения (2.22), представим коэффициенты Грэда через моменты. Тогда уравнение переноса, левая часть которого тривиально записывается через моменты, преобразуется к цепочке уравнений, в которые, кроме моментов, входят еще термодинамические коэффициенты переноса.

В левой части уравнений цепочки, помимо коэффициентов Грэда рассматриваемого порядка, могут содержаться только коэффициенты следующего порядка. Что касается этих членов более высокого порядка, то при выполнении условия

$$\frac{a_{k\mu}}{(Q_{\mu}/m_{\mu})^{k/2}} \ll 1 \quad (2.38)$$

цепочка уравнений обрывается на уравнениях, содержащих нечетные моменты выше третьего порядка.

В столкновительных членах, стоящих в правых частях цепочки уравнений, основной вклад дают коэффициенты Грэда рассматриваемого порядка. Если выполнено условие (2.38), то вкладом, зависящим нелинейно от коэффициентов Грэда, можно пренебречь. Малым оказывается также и дополнительный линейный вклад, если удовлетворяется условие

$$\dot{q}^{lm} \equiv q^{lm+1} - q^{lm} \ll q^{lm}. \quad (2.39)$$

Соотношение (2.39) представляет собой основное требование для обрыва правой части цепочки уравнений.

Условие (2.38) выполняется, если средние скорости частиц малы по сравнению со средними тепловыми скоростями. В дальнейшем это условие будет считаться выполненным.

Неравенство (2.39) зависит от закона взаимодействия между частицами. Это легко видеть из соотношения

$$\frac{\dot{q}^{lm}}{q^{lm}} = \frac{1-4/s}{2m+3}, \quad (2.40)$$

которое получено для закона взаимодействия вида

$$\Phi(r) = \pm \frac{C}{r^s}. \quad (2.41)$$

Если $s > 2$ и $s < -2$, то неравенство (2.39) выполняется достаточно хорошо.

Двадцатимоментное приближение

Ограничиваясь в разложении Грэда членами третьего порядка, мы имеем двадцатимоментное приближение. В этом приближении обрыв левой части уравнений является корректным, если выполнено условие (2.38). Вопрос о том, можно ли ограничиться членами третьего порядка в правой части, зависит, как указывалось выше, от закона взаимодействия между частицами. В таком приближении получаются следующие двадцать моментов: момент нулевого порядка — значение плотности; моменты первого порядка — три компоненты импульса; моменты второго порядка — шесть компонент тензора давления и моменты третьего порядка — десять компонент тензора потока энергии.

Тринадцатимоментное приближение

Это приближение получается из двадцатимоментного, если пренебречь всеми компонентами тензора потока энергии, за исключением компонент, которые определяют плотность теплового потока. В тринадцатимоментном приближении обрыв левой части цепочки уравнений не следует только из выполнения условия (2.38): здесь должны быть привлечены еще и дополнительные физические соображения.

Восьмимоментное приближение

Тринадцатимоментное приближение дает еще довольно сложную систему уравнений. Это приближение можно свести к восьмимоментному, если заменить тензор давлений гидростатическим давлением. Такой переход является последовательным, если выполнено условие (2.38)

и закон взаимодействия между частицами имеет соответствующий вид.

Ниже приводится система уравнений для восьмимоментного приближения, которая еще очень сложна. Для простоты выбираем такую систему координат, в которой скорость перемещения массы равна нулю, а также пренебрегаем членами второго порядка малости на основании (2.38). Таким образом, мы имеем:

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho_\mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \langle \mathbf{g}_\mu \rangle = 0. \quad (2.42)$$

Уравнение переноса импульса

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_\mu \langle \mathbf{g}_\mu \rangle + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot P_\mu \mathbf{I} - \rho_\mu \langle \dot{\mathbf{g}}_\mu \rangle = \rho_\mu \sum_{\nu} n_\nu M_{\mu\nu} \gamma_0 \times \\ \times \left\{ q^{111} (\langle \mathbf{g}_\nu \rangle - \langle \mathbf{g}_\mu \rangle) + \frac{\dot{q}^{111}}{\Theta_\mu/m_\mu + \Theta_\nu/m_\nu} \left(\frac{\mathbf{h}_\nu}{\rho_\nu} - \frac{\mathbf{h}_\mu}{\rho_\mu} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Уравнение переноса энергии

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} P_\mu + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{h}_\mu + \frac{5}{2} P_\mu \langle \mathbf{g}_\mu \rangle - \dot{\mathbf{g}}_\mu \cdot \rho_\mu \langle \mathbf{g}_\mu \rangle = \\ = \rho_\mu \sum_{\nu} n_\nu M_{\mu\nu} \gamma_0 \frac{q^{111}}{m_\mu + m_\nu} (\Theta_\nu - \Theta_\mu). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Уравнение переноса теплового потока

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{h}_\mu + \frac{5}{2} P_\mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\Theta_\mu}{m_\mu} \mathbf{I} = \\ = \rho_\mu \sum_{\nu} n_\nu M_{\mu\nu} \gamma_0 \left\{ \left(\frac{M_{\mu\nu}}{m_\mu} \right)^2 \dot{q}^g \left(\frac{3\Theta_\mu}{m_\mu} + \frac{3\Theta_\nu}{m_\nu} \right) (\langle \mathbf{g}_\nu \rangle - \langle \mathbf{g}_\mu \rangle) - \right. \\ \left. - \frac{1}{m_\mu + m_\nu} \left[\frac{4}{3} \frac{M_{\mu\nu}}{m_\mu} q^h \left(\frac{\mathbf{h}_\mu}{n_\mu} + \frac{\mathbf{h}_\nu}{n_\nu} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \frac{M_{\mu\nu}}{m_\nu} q^{111} \left(\frac{\mathbf{h}_\mu}{n_\mu} - \frac{\mathbf{h}_\nu}{n_\nu} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \dot{q}^g = \frac{2m_\mu^2}{3M_{\mu\nu}^2} \left[\frac{3M_{\mu\nu}^2}{2m_\mu^2} \dot{q}^{111} - 2 \frac{M_{\mu\nu}}{m_\mu} \bar{\tau} (3q^{111} - q^{212}) + \frac{9}{2} \bar{\tau}^2 q^{111} \right], \\ q^h = \frac{3m_\mu}{4M_{\mu\nu}} \left[\frac{4M_{\mu\nu}}{3m_\mu} q^{212} - \bar{\tau} \left(6q^{111} - \frac{8}{3} q^{112} - 5\dot{q}^{111} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.46)$$

где

$$\bar{\tau} = \frac{M_{\mu\nu}\Theta_{\mu} - M_{\mu\nu}\Theta_{\nu}}{m_{\nu}\Theta_{\mu} + m_{\mu}\Theta_{\nu}}.$$

Использование приближения Грэда для описания плазмы

До сих пор исследование носило общий характер, так как не конкретизировался закон взаимодействия между частицами, которым определяются коэффициенты q^{lm} и \dot{q}^{lm} . Рассмотрим теперь кулоновскую систему, в которой потенциал взаимодействия определяется кулоновским законом, т. е. формулой (2.41) с $s = 1$. Разумеется, средние скорости, обусловленные внешними полями и неоднородностями, должны быть малыми по сравнению с тепловой скоростью. Вычисление термодинамических коэффициентов переноса q^{lm} для случая $s = 1$ показывает, что величина их уменьшается с ростом номера очень медленно. Поэтому разложение столкновительных членов в ряды по моментам не является быстро сходящимся. Следовательно, применимость рассмотренного выше приближения к кулоновской системе не очевидна.

Если тем не менее считать, что восьмомоментное приближение применимо к полностью ионизованной плазме, то интересно сравнить соответствующие уравнения Грэда с уравнениями, которые использовались для описания полностью ионизованной плазмы [26, 27].

Ограничиваясь случаем $\Theta_{+} = \Theta_{-}$ и используя соотношение

$$M_{+-} \approx \frac{m_{-}}{m_{+}} \ll 1, \quad (2.47)$$

находим из общего уравнения Грэда *уравнения непрерывности* для электронной и ионной компонент

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\pm} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho_{\pm} \langle \mathbf{g}_{\pm} \rangle = 0. \quad (2.48)$$

Как показывает сравнение, уравнения, полученные в работах [26, 27], совпадают с (2.48).

Приближение Грэда дает следующее *уравнение энергетического баланса* для полного давления или соответ-

ственно температуры:

$$-\frac{\partial}{\partial t} p + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{h} - \dot{\mathbf{g}}_- \cdot \rho_- \langle \mathbf{g}_- \rangle - \dot{\mathbf{g}}_+ \cdot \rho_+ \langle \mathbf{g}_+ \rangle = 0, \quad (2.49)$$

где величина \mathbf{h} есть полная плотность теплового потока

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_+ + \mathbf{h}_-. \quad (2.50)$$

Уравнение (2.49) и в этом случае совпадает с соответствующим уравнением, используемым в указанной выше литературе.

Из разложения Грэда и при условиях (2.47) и (2.23) получаем уравнение баланса импульса для двухкомпонентной системы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_- \langle \mathbf{g}_- \rangle + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} p_- - \rho_- \dot{\mathbf{g}}_- &= -\frac{\partial}{\partial t} \rho_+ \langle \mathbf{g}_+ \rangle - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} p_+ + \rho_+ \dot{\mathbf{g}}_+ = \\ &= -m_- \gamma_0 q^{11} n_- n_+ \{ \langle \mathbf{g}_- \rangle - \langle \mathbf{g}_+ \rangle \} - \\ &\quad - \frac{2m_-}{\gamma_0} q^{11} n_- n_+ \left\{ \frac{\mathbf{h}_-}{\rho_-} - \frac{\mathbf{h}_+}{\rho_+} \right\}, \quad (2.51) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\mathbf{h}_-}{\rho_-} - \frac{\mathbf{h}_+}{\rho_+} \right\} &= -\frac{5}{4} \frac{\gamma_0}{m_- R^2} \times \\ &\times \left[q_{2-} n_+ + M_{+-} \left\{ 3q_{+-}^{11} - \frac{\sqrt{2}}{3} M_{+-} q_{--}^{212} \right\} n_- \right] \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Theta - \\ &- \frac{3\Theta q^{11}}{m_- R^2} \left[\frac{\sqrt{2}}{3} M_{+-}^3 q_{--}^{212} n_-^2 + \frac{(2M_{+-})^{1/2}}{3} q_{++}^{212} n_{+2} + 3M_{+-} q_{+-}^{11} n_- n_+ \right] \times \\ &\quad \times \{ \langle \mathbf{g}_- \rangle - \langle \mathbf{g}_+ \rangle \}. \quad (2.52) \end{aligned}$$

Здесь введены следующие сокращенные обозначения:

$$\begin{aligned} q_{+-} &= 3M_{+-} q_{+-}^{11} + \frac{4}{3} q_{+-}^{212}, \\ q_{2-} &= \frac{\sqrt{2}}{3} q_{--}^{212} + M_{+-} \left\{ 3q_{+-}^{11} - \frac{4}{3} q_{+-}^{212} \right\}, \\ q_{2+} &= \frac{(2M_{+-})^{1/2}}{3} q_{++}^{212} + M_{+-} \left\{ 3q_{+-}^{11} - \frac{4}{3} q_{+-}^{212} \right\}, \quad (2.53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^2 &= (2M_{+-})^{1/2} q_{--}^{212} q_{+-}^{11} n_-^2 + \frac{(2M_{+-})^{1/2}}{3} q_{++}^{212} q_{+-} n_+^2 + \\ &\quad + \left\{ 4M_{+-}^2 q_{+-}^{11} q_{+-}^{212} + \frac{2}{9} (M_{+-})^{1/2} q_{++}^{212} q_{--}^{212} \right\} n_+ n_-, \end{aligned}$$

С другой стороны, соответствующие уравнения, полученные Маэкером и Питерсом [26], имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_- \langle \mathbf{g}_- \rangle + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} p_- - \rho_- \dot{\mathbf{g}}_- &= - \frac{\partial}{\partial t} \rho_+ \langle \mathbf{g}_+ \rangle - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} p_+ + \rho_+ \dot{\mathbf{g}}_+ = \\ &= -v'_+ n_+ n_- \{ \langle \mathbf{g}_- \rangle - \langle \mathbf{g}_+ \rangle \} - \frac{\alpha n_+ n_-}{n_+ + n_-} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Theta. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Отсюда видно, что обе системы уравнений содержат одни и те же основные члены. Однако коэффициенты при соответствующих членах сильно различаются даже своей зависимостью от отношения плотностей.

Квазистационарное приближение, построенное Грэдом [6], приводит к следующему выражению для полной плотности теплового потока:

$$\begin{aligned} \mathbf{h} = & - \frac{5}{4} \frac{\gamma_0}{R^2} \{ 3M_+ q_{+-}^{11} n_-^2 + M_{+-}^2 q_+ n_+^2 + (q_{2-} + q_{2+}) n_+ n_- \} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Theta + \\ & + \frac{3\Theta q^{111}}{R^2} \left[-M_{+-} \left\{ 3q_{+-}^{11} - \frac{\sqrt{2}}{3} M_{+-} q_{--}^{212} \right\} n_- + q_{2+} n_+ \right] \times \\ & \times \{ \langle \mathbf{g}_- \rangle - \langle \mathbf{g}_+ \rangle \}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

в то время как соответствующее соотношение, полученное в литературе [26, 27], имеет вид

$$\mathbf{h} = - \frac{\kappa}{\kappa_B} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Theta + \alpha \Theta \frac{n_+ n_-}{n_+ + n_-} \{ \langle \mathbf{g}_- \rangle - \langle \mathbf{g}_+ \rangle \}. \quad (2.56)$$

И в этих выражениях коэффициенты при соответствующих членах резко различаются. Кроме того, весьма жестким ограничением является требование квазистационарности. Заслуживает внимания также тот факт, что если учесть магнитные поля, то в (2.55) появятся дополнительные члены,

2.2. Вывод уравнений переноса из уравнений Больцмана; метод Чепмена — Энского

Чепмен [28] и Энског [29, 30] получили систему макроскопических уравнений из основного уравнения Больцмана с помощью другого приближенного метода. Вначале ради простоты рассмотрим предложенный ими метод для случая однокомпонентной системы. Чепмен и Энског исходили из следующих трех уравнений для первых пяти моментов функции распределения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.57)$$

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right] \mathbf{u} = \frac{\rho}{m} \mathbf{F} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}_2, \quad (2.58)$$

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right] \Theta = -\frac{2}{3} m \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{q} - \frac{2}{3} m \mathbf{p}_2 : \text{sym} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (2.59)$$

(Вывод этих уравнений и соответствующая терминология были приведены выше, в п. 2.1.) Далее они рассмотрели систему, для которой функция распределения может быть представлена в виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \rho, \mathbf{u}, \Theta). \quad (2.60)$$

При этом они использовали разложение

$$f = \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu) f, \quad (2.61)$$

в котором функции $(\mu)f$ определяются методом последовательных приближений из функции $(\nu)f$ при $\nu < \mu$.

Если можно найти функцию распределения f с точностью до порядка s , то с такой же точностью можно вычислить и тензор давлений \mathbf{p}_2 , и поток энергии \mathbf{q} . Подставляя эти величины в (2.57), (2.58) и (2.59), получаем макроскопические уравнения с точностью до $(s+1)f$.

*Приближенные решения для
однокомпонентной системы*

Для уточнения разложения (2.61) запишем оператор дифференцирования по времени в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\partial_{\nu}}{\partial t}. \quad (2.62)$$

Действие операторов $\partial_{\nu}/\partial t$ на величины ρ , \mathbf{u} и Θ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_0}{\partial t} \rho &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{u}), \\ \frac{\partial_{\nu}}{\partial t} \rho &= 0 \quad (\nu > 0), \\ \frac{\partial_0}{\partial t} \mathbf{u} &= -\mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u} + \frac{1}{m} \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot {}^{(0)}\mathbf{p}_2, \\ \frac{\partial_{\nu}}{\partial t} \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot {}^{(\nu)}\mathbf{p}_2 \quad (\nu > 0), \\ \frac{\partial_0}{\partial t} \Theta &= -\mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Theta - \frac{2}{3} \frac{m}{\rho} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot {}^{(0)}\mathbf{q} - \frac{2}{3} \frac{m}{\rho} {}^{(0)}\mathbf{p}_2 : \text{sym} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}, \\ \frac{\partial_{\nu}}{\partial t} \Theta &= -\frac{2}{3} \frac{m}{\rho} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot {}^{(\nu)}\mathbf{q} - \frac{2}{3} \frac{m}{\rho} {}^{(\nu)}\mathbf{p}_2 : \text{sym} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \quad (\nu > 0). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Так как в силу соотношения (2.60) функция распределения f зависит от времени только через моменты ρ , \mathbf{u} и Θ , действие оператора $\partial_{\nu}/\partial t$ на f можно определить также в виде

$$\frac{\partial_{\nu}}{\partial t} {}^{(\mu)}f = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} {}^{(\mu)}f \right) \frac{\partial_{\nu}}{\partial t} \rho + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} {}^{(\mu)}f \right) \cdot \frac{\partial_{\nu}}{\partial t} \mathbf{u} + \left(\frac{\partial}{\partial \Theta} {}^{(\mu)}f \right) \frac{\partial_{\nu}}{\partial t} \Theta. \quad (2.64)$$

Подставляя (2.61) и (2.62) в уравнение Больцмана (2.1), получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial_0}{\partial t} + \frac{\partial_1}{\partial t} + \dots \right) ({}^{(0)}f + {}^{(1)}f + \dots) + \\ + \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) ({}^{(0)}f + {}^{(1)}f + \dots) = \\ = I ({}^{(0)}f + {}^{(1)}f + \dots | {}^{(0)}f + {}^{(1)}f + \dots). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Здесь использована сокращенная запись:

$$I({}^{(r)}f|{}^{(s)}f) = \int d\mathbf{v}_1 \int |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| \times \\ \times \{({}^{(r)}f(\mathbf{v}')({}^{(s)}f(\mathbf{v}_1) - {}^{(r)}f(\mathbf{v})({}^{(s)}f(\mathbf{v}_1))\} dQ. \quad (2.66)$$

Далее с помощью разложения (2.65) определяют функции ${}^{(\mu)}f$, приравнивая члены, стоящие в левой части и имеющие определенную сумму индексов, членам, стоящим в правой части, сумма индексов которых на единицу больше суммы индексов соответствующих членов левой части этого уравнения. Такая процедура приводит к системе уравнений

$$I({}^{(0)}f|{}^{(0)}f) = 0, \\ \frac{\partial_0}{\partial t} {}^{(0)}f + \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) {}^{(0)}f = \sum_{r+s=1} I({}^{(r)}f|{}^{(s)}f), \quad (2.67) \\ \sum_{\mu+\nu=n-1} \frac{\partial_{\mathbf{v}}}{\partial t} {}^{(\mu)}f + \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) {}^{(n-1)}f = \sum_{r+s=n} I({}^{(s)}f|{}^{(r)}f).$$

Решения этой системы интегродифференциальных уравнений не являются однозначными. Для однозначности решений должны выполняться условия

$$\int {}^{(s)}f \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \mathbf{v} \\ v^2 \end{array} \right\} d\mathbf{v} = 0 \quad \text{для } s > 0. \quad (2.68)$$

Как следует отметить, эти условия не означают, что первые пять моментов не зависят от степени приближения s , с которой производятся вычисления. Скорее функция распределения ${}^{(0)}f$ зависит от значения первых пяти моментов, вычисленных из (2.57), (2.58) и (2.59) и зависящих в свою очередь от порядка приближения s через величины ρ и q .

Нулевое приближение

В этом приближении функция распределения находится из уравнения

$$I({}^{(0)}f|{}^{(0)}f) = 0, \quad (2.69)$$

тривиальным решением которого является функция распределения Максвелла

$${}^{(0)}f = n \left[\frac{m}{2\pi\Theta} \right]^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m}{2\Theta} (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 \right\}. \quad (2.70)$$

Вычисляя тензор давлений и поток энергии для функции распределения (2.70) и подставляя найденные величины в (2.57), (2.58) и (2.59), получаем систему уравнений Эйлера

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right] \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\rho \Theta}{m} &= \frac{1}{m} \mathbf{F}, \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right] \Theta + \frac{2}{3} \Theta \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (2.71)$$

которые представляют собой гидродинамические уравнения нулевого приближения.

Приближение первого порядка

Решение в первом приближении для функции ${}^{(1)}f$ находится из уравнения

$$\left(\frac{\partial_0}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) {}^{(0)}f = I({}^{(0)}f | {}^{(1)}f) + I({}^{(1)}f | {}^{(0)}f), \quad (2.72)$$

в котором ${}^{(0)}f$ описывается распределением (2.70), причем функция ${}^{(1)}f$ должна удовлетворять условиям (2.68).

Чтобы решить уравнение (2.72), необходимо проделать ряд простых, но громоздких преобразований. Как и выше, не будем вдаваться здесь в подробности этих преобразований, в результате которых левая часть уравнения (2.72) запишется в виде

$${}^{(0)}f \left\{ \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_r \left(\frac{m}{2\Theta} \mathbf{v}_r^2 - \frac{5}{2} \right) + \frac{1}{\Theta} m \operatorname{sym} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} : (\mathbf{v}_r \mathbf{v}_r)^\circ \right\}. \quad (2.73)$$

Здесь введено обозначение $\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{u}$. Преобразование правой части (2.72) дает

$${}^{(0)}f C \left(\frac{{}^{(1)}f}{{}^{(0)}f} \right), \quad (2.74)$$

где C определяется выражением

$$C(z) = \int d\mathbf{v}_1 \int |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| {}^{(0)}f(\mathbf{v}_1) \times \\ \times \{z(\mathbf{v}'_1) + z(\mathbf{v}') - z(\mathbf{v}_1) - z(\mathbf{v})\} dQ. \quad (2.75)$$

Приравнявая (2.73) и (2.74) на основании (2.72), получаем интегральное уравнение для ${}^{(1)}f$. Однородное решение этого уравнения имеет вид

$${}^{(1)}f_H = - {}^{(0)}f \{ \alpha + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{v}_r + \gamma \mathbf{v}_r^2 \}. \quad (2.76)$$

Учитывая структуру левой части уравнения (2.72), общее решение будем искать в виде

$${}^{(1)}f = - {}^{(0)}f \left\{ \alpha + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{v}_r + \gamma \mathbf{v}_r^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \ln \Theta \right) \cdot \mathbf{v}_r x + \right. \\ \left. + \frac{1}{\Theta} m \text{sym} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} : (\mathbf{v}_r \mathbf{v}_r)^\circ y \right\}. \quad (2.77)$$

Значения постоянных α , $\boldsymbol{\beta}$ и γ определяются из условий (2.68). Поскольку $\alpha = \gamma = 0$, решение (2.77) можно переписать в виде

$${}^{(1)}f = - {}^{(0)}f \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \ln \Theta \right) \cdot \mathbf{v}_r x + \frac{1}{\Theta} m \text{sym} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} : (\mathbf{v}_r \mathbf{v}_r)^\circ y \right\}. \quad (2.78)$$

Функции $x = x(\mathbf{v}_r^2, \rho, \Theta)$ и $y = y(\mathbf{v}_r^2, \rho, \Theta)$ определяются из интегральных уравнений

$$C(\mathbf{v}_r x) = - \left(\frac{m}{2\Theta} \mathbf{v}_r^2 - \frac{5}{2} \right) \mathbf{v}_r \quad (2.79)$$

и

$$C[(\mathbf{v}_r \mathbf{v}_r)^\circ y] = - (\mathbf{v}_r \mathbf{v}_r)^\circ,$$

которые могут быть решены, если известен закон взаимодействия между частицами.

Теперь, используя функцию распределения $f = {}^{(0)}f + {}^{(1)}f$, можно вычислить тензор давлений и плотность потока энергии.

Для тензора давлений находим

$${}^{(0)}\mathbf{p}_2 + {}^{(1)}\mathbf{p}_2 = n\Theta \mathbf{I} - 2\eta \left(\text{sym} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \right)^\circ, \quad (2.80)$$

где η — коэффициент трения, определяемый выражением

$$\eta = \frac{m^2}{15\Theta} \int \mathbf{v}_r^4 y(\rho, \Theta, \mathbf{v}_r^2) {}^{(0)}f d\mathbf{v}_r. \quad (2.81)$$

Заметим, что коэффициент трения зависит только от функции y .

Для плотности потока энергии получаем

$${}^{(1)}\mathbf{q} = -\kappa \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{r}}. \quad (2.82)$$

Здесь κ — коэффициент теплопроводности, равный

$$\kappa = \frac{m}{6\Theta} \int \mathbf{v}_r^4 x(\rho, \Theta, \mathbf{v}_r^2) {}^{(0)}f d\mathbf{v}_r. \quad (2.83)$$

Отсюда видно, что коэффициент теплопроводности зависит только от функции x .

Подставляя тензор давлений (2.80) и плотность теплового потока (2.82) в (2.57), (2.58) и (2.59), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u} &= \frac{\rho}{m} \mathbf{F} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\rho}{m} \Theta - \frac{\eta}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{u} \right) + \\ &+ \eta \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u} + 2 \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\text{sym} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \right)^\circ, \quad (2.84) \\ \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Theta &= m \left(\frac{2}{3} \kappa \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Theta + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \kappa \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Theta \right) + \\ &+ \frac{4}{3} \eta m \left(\text{sym} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \right)^\circ : \left(\text{sym} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \right) - \frac{2}{3} \rho \Theta \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Эти уравнения представляют собой обобщенные уравнения Навье — Стокса. Обычные уравнения Навье — Стокса получаются из (2.84), если пренебречь всеми производными от величин κ и η :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.85a)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u} &= \frac{\rho}{m} \mathbf{F} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\rho}{m} \Theta - \frac{\eta}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{u} \right) + \\ &+ \eta \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}, \quad (2.85b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Theta = & \frac{2}{3} \kappa m \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Theta - \frac{2}{3} \rho \Theta \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{u} - \\ & - \frac{4}{3} \eta m \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{u} \right)^2 + \frac{2}{3} \eta m \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} u^2 - 2\mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u} - \right. \\ & \left. - \left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{u} \right|^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.85\text{в})$$

Приближение второго порядка

Методом Чепмена — Энскога были получены решения и во втором приближении. Эти решения являются крайне сложными и приводят к поправочным членам в выражениях для тензора давлений и плотности потока энергии. Однако из этих решений не удается получить каких-либо важных следствий общего характера (см. работу Чепмена и Каулинга [31]).

Приближенные решения для многокомпонентной системы

Основные идеи, изложенные при исследовании однокомпонентной системы, полностью применимы к случаю многокомпонентной системы. Вместо уравнений (2.57), (2.58) и (2.59) для плазмы, состоящей из σ сортов частиц, имеем систему из $(3\sigma + 4)$ уравнений: 3σ уравнений непрерывности, три уравнения для средней скорости перемещения массы и одно уравнение для средней температуры. Эти уравнения записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_k + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k) = 0, \\ \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u} = \sum_{\mu=1}^{\sigma} \frac{\rho_{\mu}}{m_{\mu}} \mathbf{F}_{\mu} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}_2, \\ \sum_{\mu=1}^{\sigma} \frac{\rho_{\mu}}{m_{\mu}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Theta = \\ = - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{q} - \frac{2}{3} \mathbf{p}_2 : \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} + \Theta \sum_{\mu=1}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\rho_{\mu}}{m_{\mu}} (\mathbf{u}_{\mu} - \mathbf{u}) \right) + \\ + \frac{2}{3} \sum_{\mu=1}^{\sigma} \frac{\rho_{\mu}}{m_{\mu}} \mathbf{F}_{\mu} \cdot (\mathbf{u}_{\mu} - \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
 n &= \sum_{\mu=1}^{\sigma} n_{\mu}, & \rho &= \sum_{\mu=1}^{\sigma} \rho_{\mu}, & \mathbf{u} &= \frac{1}{\rho} \sum_{\mu=1}^{\sigma} \rho_{\mu} \mathbf{u}_{\mu}, \\
 \Theta &= \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{\sigma} n_{\mu} \Theta_{\mu}, & \mathbf{p}_{\frac{1}{2}} &= \sum_{\mu=1}^{\sigma} \mathbf{p}_{\frac{1}{2}\mu}, & \mathbf{q} &= \sum_{\mu=1}^{\sigma} \mathbf{q}_{\mu}.
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

Основным предположением в случае многокомпонентной системы является то, что функция распределения f зависит от времени только через ρ_{μ} и средние величины \mathbf{u} и Θ .

Разложение функций распределения f_{μ} и операторы дифференцирования по времени полностью совпадают с (2.61) и (2.62). В результате для каждого сорта частиц получается уравнение типа (2.65), но с измененным столкновительным членом в правой части, который теперь записывается в виде

$$\sum_{\nu=1}^{\sigma} I(f_{\mu} | f_{\nu}). \tag{2.88}$$

Что же касается уравнений для ${}^{(0)}f_{\mu}$, то они получаются так же, как (2.67) при условиях (2.68).

*Приближение нулевого порядка для
многокомпонентной системы*

И в этом случае решением для функций распределения нулевого порядка являются смещенные распределения Максвелла

$${}^{(0)}f_{\mu} = n_{\mu} \left[\frac{m_{\mu}}{2\pi\Theta} \right]^{3/2} \exp \left(-\frac{m_{\mu}}{2\Theta} v_r^2 \right). \tag{2.89}$$

Отсюда видно, что распределения Максвелла для всех сортов частиц смещены на одну и ту же среднюю скорость \mathbf{u} , а это означает, что в таком приближении средние скорости всех компонент \mathbf{u}_{μ} совпадают со средней массовой скоростью \mathbf{u} . То же самое положение имеет место и для температуры.

Если теперь, используя (2.89), вычислить тензор давлений и плотность теплового потока и подставить резуль-

таты в уравнения (2.86), просуммировав в то же время все уравнения непрерывности для ρ_μ , то получим систему уравнений Эйлера для ρ , \mathbf{u} и Θ , соответствующую (2.71).

*Приближение первого порядка
для многокомпонентной системы*

Функции распределения первого порядка удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial_0}{\partial t} + \mathbf{v}_\mu \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m_\mu} \mathbf{F}_\mu \right) {}^{(0)}f_\mu = \\ = \sum_{\nu=1}^{\sigma} (I \{ {}^{(0)}f_\mu | {}^{(1)}f_\nu \} + I \{ {}^{(1)}f_\mu | {}^{(0)}f_\nu \}). \end{aligned} \quad (2.90)$$

Следуя методу, используемому для случая однокомпонентной системы, выразим функции распределения первого порядка через функции распределения нулевого порядка:

$$\begin{aligned} {}^{(1)}f_\mu = - {}^{(0)}f_\mu \left(A_\mu \mathbf{v}_{r\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \ln \Theta + B_\mu (\mathbf{v}_{r\mu} \mathbf{v}_{r\mu})^\circ : \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} + \right. \\ \left. + \mathbf{v}_{r\mu} \cdot \sum_{\nu=1}^{\sigma} C_\mu^\nu \mathbf{d}_\nu \right). \end{aligned} \quad (2.91)$$

Здесь введено обозначение

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_\nu = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[\frac{n_\nu}{n} \right] + \left[\frac{n_\nu}{n} - \frac{\rho_\nu}{\rho} \right] \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \ln (n\Theta) - \\ - \frac{n_\nu}{n\Theta} \mathbf{F}_\nu + \frac{\rho_\nu}{n\Theta\rho} \sum_{\lambda=1}^{\sigma} n_\lambda \mathbf{F}_\lambda. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Коэффициенты A_μ , B_μ и C_μ^ν определяются сложными интегральными уравнениями, которые получаются, если в уравнение (2.90) подставить выражение (2.91). Читателя, интересующегося данным вопросом, мы отсылаем к соответствующей литературе [32].

С помощью функции распределения первого порядка можно вычислить среднюю скорость, тензор давлений и плотность потока энергии. Для средней скорости нахо-

ДИМ

$${}^{(1)}\mathbf{u}_\mu = \frac{n^2}{n_\mu \rho} \sum_{\nu=1}^{\sigma} m_\nu D_\mu^\nu \mathbf{d}_\nu - \frac{1}{\rho_\mu} D_\mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \ln \Theta, \quad (2.93)$$

где

$$D_\mu^\nu = \frac{\rho}{3nm_\nu} \sqrt{\frac{m_\mu}{2\Theta}} \int C_\mu^\nu(\mathbf{v}_{r\mu}) \mathbf{v}_{r\mu}^2 {}^{(0)}f_\mu d\mathbf{v}_\mu, \\ D_\mu = \frac{m_\mu}{3} \sqrt{\frac{m_\mu}{2\Theta}} \int A_\mu(\mathbf{v}_{r\mu}) \mathbf{v}_{r\mu}^2 {}^{(0)}f_\mu d\mathbf{v}_\mu. \quad (2.94)$$

Эти уравнения определяют коэффициенты *подвижности, диффузии и термодиффузии*.

Тензор давлений имеет вид

$${}^{(1)}\mathbf{p} = -2\eta \left[\text{sym} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \right) \right]^\circ, \quad (2.95)$$

где η — коэффициент трения, равный

$$\eta = \frac{1}{15} \sum_{\nu=1}^{\sigma} m_\nu \int B_\nu(\mathbf{v}_{r\nu}) \mathbf{v}_{r\nu}^4 {}^{(0)}f_\nu d\mathbf{v}_\nu. \quad (2.96)$$

Наконец, находим выражение для плотности потока энергии

$${}^{(1)}\mathbf{q} = -\kappa_\Theta \frac{\partial \ln \Theta}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{\nu=1}^{\sigma} \kappa_\nu \mathbf{d}_\nu. \quad (2.97)$$

Здесь κ_Θ и κ_ν — коэффициенты теплопроводности:

$$\kappa_\Theta = \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \frac{m_\lambda}{6} \int A_\lambda(\mathbf{v}_{r\lambda}) \mathbf{v}_{r\lambda}^4 {}^{(0)}f_\lambda d\mathbf{v}_\lambda, \\ \kappa_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \frac{m_\lambda}{6} \int C_\mu^\lambda(\mathbf{v}_{r\lambda}) \mathbf{v}_{r\lambda}^4 {}^{(0)}f_\lambda d\mathbf{v}_\lambda. \quad (2.98)$$

Заметим, что полученные коэффициенты, представляющие физический интерес, зависят каждый только от какой-либо одной из величин A , B или C , которые существенным образом определяются законом взаимодействия между частицами.

Сравнение с тринадцатимоментным
приближением Грэда

При нахождении функций x и y для однокомпонентной системы из интегральных уравнений (2.79) обычно пользуются разложением этих функций по полиномам Сонина. Если ограничиться в разложении функции x первыми двумя членами, а в разложении y только первым членом, то функция распределения, найденная в первом приближении методом Чепмена — Энскога, совпадает с функцией распределения, полученной в тринадцатимоментном приближении Грэда.

Связь метода Чепмена — Энскога
с разложением Гильберта

Метод Грэда, изложенный в п. 2.1, основан на систематическом разложении Боппа — Мейкснера. Описанный выше метод Чепмена — Энскога нельзя связать просто с таким систематическим разложением. Однако дополнительные сведения по этому вопросу можно получить, рассматривая разложение Гильберта [33, 34]. С этой целью расстояние r будем измерять в единицах L (L есть характерная длина изменения функции распределения f), скорость v в единицах v_T , время t в единицах L/v_T , прицельный параметр b в единицах r_c (r_c — радиус взаимодействия), а функцию распределения нормируем на величину $L^3 v_T^3$.

Тогда уравнение Больцмана для общей функции распределения запишется в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\varepsilon} \int [f(\mathbf{r}, \mathbf{v}'; t) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2'; t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2; t)] g b d b d \varphi d \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\varepsilon} I(f|f). \quad (2.99)$$

Заметим, что все величины в этом уравнении являются безразмерными. Параметр ε называется числом Кнудсена и определяется следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi r_c^2 n L} = \frac{\lambda_c}{L}, \quad (2.100)$$

где λ_c — средняя длина свободного пробега.

Гильберт рассматривал случай малых чисел Кнудсена и использовал ε как малый параметр разложения функции распределения f в ряд

$$f = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} f^{(\nu)}. \quad (2.101)$$

Подставляя это разложение в уравнение (2.99) и собирая все члены одного и того же порядка ε , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f^{(n-1)} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f^{(n-1)} - \sum_{m=1}^{n-1} I \{ f^{(m)} | f^{(n-m)} \} = \\ = 2I \{ f^{(0)} | f^{(n)} \}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Решение этих уравнений состоит из частного решения неоднородного уравнения $f_{\text{неод}}^{(n)}$ и общего решения однородного уравнения, которое представляет собой линейную комбинацию инвариантов столкновений:

$$\begin{aligned} f^{(n)} = f_{\text{неод}}^{(n)} + \sum_{s=0}^4 f^{(n)} \gamma_s(\mathbf{r}, t) \psi_s(\mathbf{v}) f^{(0)}, \\ \psi_0 = m; \quad \psi_i = v_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad \psi_4 = v^2. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Очевидно, что для определения коэффициентов $f^{(n)} \gamma_s(\mathbf{r}, t)$ необходимо знать начальные условия. Поскольку для каждого уравнения имеется пять таких коэффициентов, должны существовать пять начальных значений для каждой функции $f^{(n)}$. В качестве таких начальных значений можно взять, например, первые пять моментов при $t = 0$:

$$\left\langle \begin{matrix} m \\ \mathbf{v} \\ v^2 \end{matrix} \right\rangle_{t=0} \equiv \int f(t=0) \begin{pmatrix} m \\ \mathbf{v} \\ v^2 \end{pmatrix} d\mathbf{v} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \left\langle \begin{matrix} m \\ \mathbf{v} \\ v^2 \end{matrix} \right\rangle_{t=0}^{(\nu)}. \quad (2.104)$$

Если отвлечься от вопросов сходимости, то можно взять произвольное разложение заданных величин $\langle \quad \rangle_{t=0}$ в ряд по $\langle \quad \rangle_{t=0}^{(\nu)}$. Действительно, Гильберт показал, что распределение в момент времени t не зависит от вида начального разложения при $t = 0$. Помимо этого, Гильберт дал необходимое условие существования и однозначности функции распределения [33, 34].

Однако в действительности вопрос о сходимости разложения (2.101) представляет большой интерес. Результаты дальнейших исследований Гильберта показали, что разложение (2.101) принадлежит к группе асимптотически сходящихся рядов. Следовательно, чтобы решить, насколько справедливо разложение Гильберта, необходимо оценить величину остаточного члена. Грэд в своих исследованиях [35] получил выражение для этого члена.

Сравнивая разложение Гильберта с методом Чепмена — Энскога, легко установить их внутреннюю связь. Грэд [35] показал, как можно использовать идеи Гильберта при рассмотрении сходимости разложения Чепмена — Энскога, и пришел к заключению, что разложение Чепмена — Энскога является также асимптотически сходящимся.

2.3. Вывод уравнений моментов из уравнения Батнагара — Гросса — Крука (БГК)

Основная проблема при выводе макроскопических уравнений — это проблема столкновительного члена в кинетических уравнениях. В этой связи представляет интерес модель, предложенная Батнагаром, Гроссом и Круком [36], которые заменили интеграл столкновений одним «релаксационным» членом. Основная идея их метода заключается в том, что малые отклонения от локального равновесного распределения всегда релаксируют к локальному равновесному распределению с постоянным временем релаксации порядка времени между столкновениями. Исходя из этого утверждения, можно записать уравнение БГК

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{{}^{\omega}f - f}{\tau_0}, \quad (2.105)$$

в котором через τ_0 обозначено характерное время релаксации, а функция

$${}^{\omega}f = n \left(\frac{m}{2\pi\Theta} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m}{2\Theta} g^2 \right) \quad (2.106)$$

представляет собой локальную равновесную функцию распределения. Сущность метода БГК заключается в том,

что вышеприведенная функция равновесного распределения содержит в качестве параметров, подобно функции Чепмена — Энскога в нулевом приближении, точные значения первых пяти моментов функции распределения. Поэтому уравнение БГК не является линейным уравнением, как это могло показаться на первый взгляд.

Поскольку уравнение БГК есть не что иное, как упрощенный вариант уравнения Больцмана, можно ожидать, что к нему применимы разложение Грэда и метод Чепмена — Энскога, описанные выше. Приведем здесь только соответствующие уравнения, полученные с помощью разложения Грэда для случая двухкомпонентной системы: *Уравнение непрерывности*

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_\mu + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho_\mu \langle \mathbf{g}_\mu \rangle = 0. \quad (2.107)$$

Уравнение переноса импульса

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_\mu \langle \mathbf{g}_\mu \rangle + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{I} p_\mu - \rho_\mu \dot{\langle \mathbf{g}_\mu \rangle} = \frac{\rho_\nu}{\tau_{\mu\nu}} \langle \mu\nu \mathbf{g} \rangle. \quad (2.108)$$

Уравнение переноса энергии

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} p_\mu + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\mathbf{h}_\mu + \frac{5}{2} p_\mu \langle \mathbf{g}_\mu \rangle \right) - \rho_\mu \langle \mathbf{g}_\mu \rangle \dot{\langle \mathbf{g}_\mu \rangle} = \\ = \frac{\rho_\mu}{\tau_\mu} \left(\langle \mathbf{g}_\mu \rangle^2 - \frac{p_\mu}{\rho_\mu} + \frac{\Theta_\mu}{m_\mu} \right) + \frac{\rho_\nu}{\tau_{\mu\nu}} \left(\langle \mu\nu \mathbf{g} \rangle^2 + \frac{\Theta_{\mu\nu}}{m_\mu} \right). \end{aligned} \quad (2.109)$$

Уравнение переноса теплового потока

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{h}_\mu + \frac{5}{2} p_\mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{I} \frac{\Theta_\mu}{m_\mu} = \frac{\rho_\mu}{\tau_\mu} \left(\langle \mathbf{g}_\mu \rangle^3 + \frac{\Theta_\mu}{m_\mu} \langle \mathbf{g}_\mu \rangle - \frac{\mathbf{h}_\mu}{\rho_\mu} \right) + \\ + \frac{\rho_\nu}{\tau_{\mu\nu}} \left(\langle \mu\nu \mathbf{g} \rangle^3 + \frac{3\Theta_{\mu\nu}}{m_\mu} \langle \mu\nu \mathbf{g} \rangle \right) + 3p \dot{\langle \mathbf{g}_\mu \rangle}. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Здесь использовались следующие сокращенные обозначения:

$$\begin{aligned} \langle \mu\nu \mathbf{g} \rangle &= a_{\mu\mu} \langle \mathbf{g}_\mu \rangle + a_{\mu\nu} \langle \mathbf{g}_\nu \rangle, \\ \Theta_{\mu\nu} &= b_{\mu\mu} \Theta_\mu + b_{\mu\nu} \Theta_\nu + D_{\mu\nu} \langle \mathbf{g}_\mu \rangle^2 + E_{\mu\nu} \langle \mathbf{g}_\mu \rangle \cdot \langle \mathbf{g}_\nu \rangle + F_{\mu\nu} \langle \mathbf{g}_\nu \rangle^2, \\ a_{\mu\mu} &= 1 - a_{\mu\nu} = 0,113 \frac{m_\mu m_\nu}{m_\mu + m_\nu}, \\ D_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} E_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} = \frac{1}{30} \frac{m_\mu m_\nu}{m_\mu + m_\nu}, \\ b_{\mu\mu} &= 1 - b_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.111)$$

где τ_{jk} — среднее время между столкновениями, а B_{jk} — коэффициент прямой передачи тепла от одной компоненты к другой.

Отсюда коэффициент трения и коэффициент теплопроводности получаются равными

$$\eta_{\mu} = 2 \frac{\Theta_{\mu} \tau_{\mu}}{m_{\mu}}, \quad \nu_{\mu} = -5 \frac{\Theta_{\mu} \tau_{\mu}}{m_{\mu}^2}. \quad (2.112)$$

Уравнения, приведенные выше, являются восьмимоментными уравнениями, редуцированными из уравнений для 35 моментов, полученных в работе [37].

Применение метода Чепмена — Энскога приводит к выражению для функции распределения в первом приближении

$${}^{(1)}f = {}^{(0)}f \tau_0 \left\{ \mathbf{g} \cdot \left(\frac{m \mathbf{g}^2}{2\Theta} - \frac{5}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \ln \Theta + \frac{m}{\Theta} (\mathbf{g} \mathbf{g})^{\circ} : \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \langle \mathbf{v} \rangle \right\}, \quad (2.113)$$

в котором при вычислении функций x и y использовался столкновительный член в форме Батнагара — Гросса — Крука. С помощью этой функции распределения можно опять получить уравнения переноса и найти уравнения Навье — Стокса, соответствующие соотношениям (2.84) и (2.85). Однако заметим, что теперь коэффициенты в этих уравнениях в силу основного предположения рассматриваемой модели зависят от феноменологической постоянной τ_0 и, следовательно, могут быть использованы для получения сведений о ее свойствах.

Введенное понятие характерного времени релаксации τ_0 может навести на мысль, что результаты, полученные из уравнения Батнагара — Гросса — Крука, должны совпадать с результатами, полученными из уравнения Больцмана для максвелловских молекул [$s = 4$ в формуле (2.30)]. Но такое заключение было бы неверным, поскольку в уравнении БГК, кроме того, используется очень упрощенная модель, в которой пренебрегается всеми деталями процесса столкновений.

Релаксационный член в модели БГК имеет лишь чисто эвристическое происхождение. Несколько авторов пытались с математической строгостью доказать его законность

[38, 39]. С помощью линеаризованной теории им удалось лишь определить условия применимости релаксационного члена типа Батнагара — Гросса — Крука.

§ 3. ОБЗОР СИСТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

До сих пор приближенное решение цепочки уравнений ББГКИ заключалось в выводе кинетических уравнений путем обрыва и преобразования этой цепочки. Такой способ был изложен в разд. 1.2—1.4. Теперь попытаемся перейти к изучению более общих методов, в которых, по крайней мере в принципе, не ограничиваются уравнениями цепочки первого или второго порядка. В каждом из этих методов возникает огромное количество проблем, которые не могут быть решены полностью в рамках настоящего исследования. Поэтому с самого начала ограничимся, как мы это сделали в § 1 гл. 1, только обзором основных идей и результатов, не останавливаясь на подробных преобразованиях при выводе формул.

3.1. Теория Боголюбова

Ниже излагаются основные результаты теории Боголюбова. Хотя эта теория первоначально была создана для разреженных систем с преобладающим парным взаимодействием, но она служит основанием также и для некоторых современных приближений, применяемых для описания плазмы.

Характерные постоянные, определяющие изменения во времени

Будем снова исходить из общей цепочки уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^s v_i \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}_i} - \frac{1}{m} \sum_{i,k}^s \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} f_s = \\ = \frac{N}{m} \int d\mathbf{r}' \int \sum_{i=1}^s \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}') \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} f_{s+1}(\mathbf{r}', \mathbf{v}'; t) d\mathbf{v}'. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Как и выше (на стр. 195), используем безразмерные переменные

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r_c}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v_c}, \quad \dot{t} = \frac{tv_c}{r_c}, \quad \dot{\phi} = \frac{\phi}{\phi_c}, \quad \dot{f}_s = v_c^{3s} V^s f_s. \quad (3.2)$$

В результате уравнения (3.1) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\partial f}_s}{\dot{\partial t}} + \sum_{i=1}^s \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\dot{\partial f}_s}{\dot{\partial \mathbf{r}}_i} - \Pi_{\text{св}} \sum_{i,k}^s \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \dot{\phi} \cdot \frac{\dot{\partial f}_s}{\dot{\partial \mathbf{v}}_i} = \\ = \Pi_{\text{св}} \Pi_{\text{пл}} \int d\dot{\mathbf{r}}' \int \sum_{i=1}^s \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \dot{\phi}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}') \cdot \frac{\dot{\partial}}{\dot{\partial \mathbf{v}}_i} \dot{f}_{s+1} d\dot{\mathbf{v}}', \end{aligned} \quad (3.3)$$

где параметры связи и плотности равны

$$\Pi_{\text{св}} = \frac{\phi_c}{mv_c^2}, \quad \Pi_{\text{пл}} = nr_c^3. \quad (3.4)$$

Оценим члены в (3.3) по порядку их величины. Для этого отметим, что

$$\dot{\phi} = O(1) \quad \text{и} \quad \dot{\mathbf{v}} = O(1), \quad (3.5)$$

а следовательно, можно использовать соотношение

$$\dot{f}_{s+1} = O(\dot{f}_s \dot{f}_1) = O(\dot{f}_s). \quad (3.6)$$

Далее предположим, что

$$\frac{\dot{\partial f}_s}{\dot{\partial \mathbf{v}}_i} = O(\dot{f}_s), \quad \frac{\dot{\partial f}_s}{\dot{\partial \mathbf{r}}_i} = \frac{r_c}{L} O(\dot{f}_s). \quad (3.7)$$

Здесь L — характерная длина макроскопических изменений. Тогда для разреженной системы с $\Pi_{\text{св}} = O(1)$ из (3.3) получаем

$$\frac{\dot{\partial f}_s}{\dot{\partial t}} = \frac{v_c}{r_c} \frac{\dot{\partial f}_s}{\dot{\partial t}} = \sum_{l=1}^3 \left(\frac{\dot{\partial f}_s}{\dot{\partial t}} \right)_l, \quad \left(\frac{\dot{\partial f}_s}{\dot{\partial t}} \right)_1 = O\left(\frac{v_c}{L} \dot{f}_s\right), \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\dot{\partial f}_s}{\dot{\partial t}} \right)_2 = (1 - \delta_{1,s}) O\left(\frac{v_c}{r_c} \dot{f}_s\right), \quad \left(\frac{\dot{\partial f}_s}{\dot{\partial t}} \right)_3 = O\left(\frac{v_c}{r_c} \Pi_{\text{пл}} \dot{f}_s\right),$$

или, определяя через характерные времена, имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\overset{\circ}{\partial} \dot{f}_s}{\partial t}\right)_1 &= O\left(\frac{\overset{\circ}{\dot{f}}_s}{\tau_h}\right), & \left(\frac{\overset{\circ}{\partial} \dot{f}_s}{\partial t}\right)_2 &= (1 - \delta_{1,s}) O\left(\frac{\overset{\circ}{\dot{f}}_s}{\tau_{вз}}\right), \\ \left(\frac{\overset{\circ}{\partial} \dot{f}_s}{\partial t}\right)_3 &= O\left(\frac{\overset{\circ}{\dot{f}}_s}{\tau_c}\right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Вошедшие в эти оценки три характерных времени в случае разреженной системы определяются как

$$\tau_h = \frac{L}{v_c}, \quad \tau_{вз} = \frac{r_c}{v_c}, \quad \tau_c = \frac{r_c}{v_c \Pi_{пл}}. \quad (3.10)$$

Обычно они имеют следующий смысл:

$\tau_{вз}$ характеризует среднюю длительность внутреннего взаимодействия между s -частицами;

τ_c обозначает среднее время между столкновениями s -частиц с другими частицами системы;

τ_h характеризует время протекания макроскопических гидродинамических процессов в системе.

Тот факт, что эти три времени имеют различный порядок величины, и составляет основу теории Боголюбова.

Чтобы оценить их величину, вспомним, что

$$v_c \approx v_T, \quad (3.11)$$

а

$$\Pi_{пл} = nr^3 \approx nqr_c = \frac{r_c}{\lambda}. \quad (3.12)$$

Здесь q — поперечное сечение столкновения, а λ — средняя длина свободного пробега. Учитывая (3.11) и (3.12), находим

$$\tau_c \approx \frac{\lambda}{v_T}, \quad \tau_{вз} \approx \frac{r_c}{v_T}. \quad (3.13)$$

Отсюда видно, что характерные времена τ_h , τ_c и $\tau_{вз}$, определяющие эволюцию функции f_s , удовлетворяют соотношениям

$$\tau_h \gg \tau_c \gg \tau_{вз}, \quad (3.14)$$

если выполнены условия

$$L \gg \lambda \gg r_c. \quad (3.15)$$

Заметим, что эти условия нарушаются в теории плазменных колебаний, где $L \approx r_c \approx \lambda_D$.

Эволюция f_s во времени

Три характерных масштаба времени, рассмотренные выше, дают возможность соответствующим образом определить эволюцию f_s во времени. Пусть в момент времени $t = 0$ имеется произвольное состояние, характеризующееся набором приведенных функций распределения $f_s(0)$.

Функция f_1 остается практически постоянной в течение времени $t \lesssim \tau_{\text{вв}}$, поскольку характерное время ее изменения порядка τ_c , а, как известно, $\tau_c \gg \tau_{\text{вв}}$. С другой стороны, для $s > 1$ все функции f_s за время $\tau_{\text{вв}}$ релаксируют к среднему значению $\langle f_s \rangle$, продолжая быстро флуктуировать около $\langle f_s \rangle$. Это явление обусловлено прямым взаимодействием выделенных s частиц. Среднее значение $\langle f_s \rangle$ зависит от функции f_1 . По истечении времени $t = O(\tau_{\text{вв}})$, за которое устанавливается это среднее значение, можно представить f_s в функциональном виде

$$f_s \approx \langle f_s \rangle = f_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s | f_1). \quad (3.16)$$

Однако очевидно, что такое представление не является вполне корректным, так как величина f_1 не может описывать отдельные флуктуации f_s около среднего значения $\langle f_s \rangle$.

В течение времени порядка τ_c изменение всех функций f_s , включая $s = 1$, определяется средним взаимодействием группы s частиц с другими частицами системы. Это взаимодействие вызывает релаксацию f_1 к распределению, которое изменяется только в зависимости от определенного набора моментов. В то же время, в силу предположения $\tau_h \gg \tau_c$, соответствующие моменты остаются постоянными в интервалах времени $O(\tau_c)$.

Интервал времени $0 < t \lesssim \tau_{\text{вв}}$ называют «синхронизационной фазой» эволюции, а интервал $\tau_{\text{вв}} < t \lesssim \tau_c$ — «кинетической фазой».

Система функциональных уравнений

Исходя из соображений, изложенных выше, Боголюбов постулирует следующую функциональную зависимость:

$$f_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{v}_s; t) = f_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{v}_s | f_1(t)). \quad (3.17)$$

Это основное предположение в теории Боголюбова. Как указывалось выше, оно приводит к некоторой потере информации.

Разумеется, предположение (3.17) само по себе не обрывает цепочки уравнений. Однако для разреженного газа можно получить ее решение методом последовательных приближений, если использовать разложение по параметру плотности $\Pi_{\text{пл}}$, эквивалентное вириальному разложению, применяемому к уравнению состояния. Дело в том, что разложение по параметру плотности эффективно обрывает цепочку уравнений на данном порядке по $\Pi_{\text{пл}}$ независимо от предположения о функциональной зависимости. Это очевидно, так как корреляционные функции более высокого порядка f_{s+1} , через которые только и происходит зацепление со следующим уравнением цепочки, мультипликативно зависят от $\Pi_{\text{пл}}$. Поэтому используем для всех функций распределения f_s ($s > 1$) разложение

$$f_s = {}^{(0)}f_s + \Pi_{\text{пл}} {}^{(1)}f_s + \Pi_{\text{пл}}^2 {}^{(2)}f_s + \dots \quad (3.18)$$

Существенно отметить, что f_1 не разлагается, а считается функциональным параметром, который аналогичен гидродинамическим величинам в методе Чепмена — Энскога.

Чтобы найти решение цепочки уравнений, необходимо знать производные по времени от функций f_s , включая $s = 1$. Представим их также в виде ряда

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = A_s^{(0)} + \Pi_{\text{пл}} A_s^{(1)} + \Pi_{\text{пл}}^2 A_s^{(2)}. \quad (3.19)$$

В силу постулата Боголюбова $f_s = f_s(\dots | f_1)$ можно ожидать, что существует соотношение между коэффициентами $A_s^{(v)}$ и $A_s^{(v)}$ для $s \geq 2$. Это соотношение следует из равенства ¹⁾

$$\sum A_s^{(v)} \Pi_{\text{пл}}^v = \frac{\partial f_s}{\partial t} = \frac{\delta f_s}{\delta f_1} \circ \frac{\partial f_1}{\partial t} = \sum \frac{\delta^{(i)} f_s}{\delta f_1} \circ A_1^{(j)} \Pi_{\text{пл}}^{i+j} \quad (3.20)$$

¹⁾ Заметим, что обозначение $(\delta f_s / \delta f_1) \circ$ соответствует оператору, который действует на $\partial f_1 / \partial t$. Если, например,

$$f_s(x_1, \dots, x_s | f_1) = \int \prod_{i=1}^m f_1(\xi_i; t) K(\xi_1, \dots, \xi_m; x_1, \dots, x_s) d\xi_i$$

и имеет вид

$$A_s^{(v)} = \sum_{i=0}^v \frac{\delta^{(i)} f_s}{\delta f_1} \circ A_1^{(v-i)}. \quad (3.21)$$

Запишем теперь цепочку уравнений БГКИ в сокращенной форме

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + i\mathcal{L}_s f_s = \Pi_{\text{пл}} \mathcal{C}_s f_{s+1}. \quad (3.22)$$

Здесь \mathcal{C}_s представляет собой корреляционный оператор, а $\mathcal{L}_s = i\{H_s, \dots\}$ — s -частичный оператор Лиувилля. Подставляя (3.18) и (3.19) в (3.21), получаем для $s=1$

$$A_1^{(0)} = -i\mathcal{L}_1 f_1, \quad A_1^{(v)} = \mathcal{C}_1^{(v-1)} f_2 \quad (3.23)$$

и для $s > 1$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^{(0)} f_s}{\delta f_1} \circ A_1^{(0)} + i\mathcal{L}_s^{(0)} f_s = 0, \\ \sum_{i=0}^v \frac{\delta^{(i)} f_s}{\delta f_1} \circ A_1^{(v-i)} + i\mathcal{L}_s^{(v)} f_s = \mathcal{C}_s^{(v-1)} f_{s+1}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Решение системы уравнений (3.23) и (3.24) до данного порядка v по $\Pi_{\text{пл}}$ в принципе заключается в следующем.

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_s}{\partial t} = \int \left[\sum_{v=1}^m \int \prod_{i \neq v} f_1(\xi_i; t) \times \right. \\ \left. \times K(\xi_1, \dots, \xi_{v-1}, \xi, \xi_{v+1}, \dots, \xi_m; x_1, \dots, x_s) d\xi_i \right] \frac{\partial f_1(\xi; t)}{\partial t} d\xi. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор $\delta f_s / \delta f_1$ равен

$$\frac{\delta f_s}{\delta f_1} = \sum_{v=1}^m \int \prod_{i \neq v} f_1(\xi_i; t) K d\xi_i,$$

а символ \circ , стоящий после $\delta f / \delta f_1$, означает интегрирование по ξ . Величина $K = \prod_i \delta(\xi_i - x_i)$ включает произведения выражений, используемых ниже в качестве начальных условий.

В нулевом порядке ($\nu = 0$) имеются уравнения

$$\begin{aligned} A_1^{(0)} &= -i\mathcal{L}_1 f_1, \\ \frac{\delta^{(0)} f_s}{\delta f_1} \circ A_1^{(0)} &= -i\mathcal{L}_s^{(0)} f_s \quad (s > 1), \end{aligned} \quad (3.25)$$

которые выражают $A_1^{(0)}$ и ${}^{(0)}f_s$ ($s = 2, \dots, n+1$) функционально через f_1 . В $(\nu+1)$ -м порядке соответственно имеют место соотношения

$$A_1^{(\nu+1)} = \mathcal{C}_1^{(\nu)} f_2, \quad (3.26)$$

$$\frac{\delta^{(\nu+1)} f_s}{\delta f_1} \circ A_1^{(0)} + i\mathcal{L}_s^{(\nu+1)} f_s = \mathcal{C}_s^{(\nu)} f_{s+1} - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{\delta^{(i)} f_s}{\delta f_1} \circ A_1^{(\nu+1-i)}.$$

Эти соотношения определяют функциональную зависимость $A_1^{(\nu+1)}$ и ${}^{(\nu+1)}f_s$ ($s = 2, \dots, n-\nu$) от f_1 ; при этом предполагается, что все $A_1^{(i)}$ и ${}^{(i)}f_s$ для $i \leq \nu$ и $s = 1, \dots, n+1-i$ уже известны из аналогичных уравнений более низкого порядка.

В частности, таким методом можно вычислить ${}^{(n-1)}f_2$, исходя из соотношения

$$A_1^{(n)} = \mathcal{C}_1^{(n-1)} f_2. \quad (3.27)$$

При этом f_1 определяется из кинетического уравнения

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \sum_{\nu=0}^n A_1^{(\nu)}(f_1) = -i\mathcal{L}_1 f_1 + \mathcal{C}_1 \sum_{\nu=0}^{n-1} {}^{(\nu)}f_2(f_1) \quad (3.28)$$

с точностью до членов порядка $\Pi_{\text{пл}}^n$. Само собой разумеется, что из (3.26) также могут быть вычислены функции распределения более высокого порядка ${}^{(\nu)}f_s$ ($\nu < n$), которые не участвовали в данном методе.

Начальные условия

Для точного решения цепочки уравнений ББГКИ, конечно, необходимо знать начальные значения f_s при $t = 0$. Такие начальные функции распределения $f_s(0)$ можно выбирать произвольно, но при этом должно вы-

полняться следующее условие:

$$f_s = a_s \int f_{s+1} dx_{s+1} dv_{s+1}, \quad (3.29)$$

где a_s — постоянная, зависящая от нормировки f_s .

На основании постулата Боголюбова о функциональной зависимости цепочка дифференциальных уравнений ББГКИ преобразуется в систему функциональных дифференциальных уравнений. Потеря общности возможных решений из-за применения приближенного метода, конечно, отражается также и на начальных условиях.

Само собой разумеется, что можно выбрать какое-либо начальное значение f_{1a} . Если, далее, положить $f_{sa} = f_{sa}(f_{1a})$, то из рассматриваемой системы функциональных уравнений можно найти общую функциональную зависимость $f_s = f_s(f_1)$, где $f_1 = f_1(t)$. Однако в силу ограничений, наложенных на процессы релаксации, нельзя произвольно выбрать начальную функциональную зависимость $f_{sa} = f_{sa}(f_{1a})$. Не так просто определить класс начальных условий, которые соответствуют действительности.

Эта проблема может быть решена путем преобразования, которое сводит систему функциональных дифференциальных уравнений (3.26) к системе дифференциальных уравнений, позволяющих ввести набор возможных начальных условий.

Боголюбов ввел s -частичный оператор временного сдвига

$$\mathcal{S}_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{v}_s; \tau) = \exp(i\tau \mathcal{L}_s), \quad (3.30)$$

в котором временной сдвиг обозначен через τ , чтобы не смешивать его с текущим временем t . Этот оператор временного сдвига описывает изменение во времени координат всех частиц, принадлежащих s -группе, только за счет внутренних взаимодействий и не учитывает взаимодействий с другими частицами.

Дифференциальные уравнения получаются из функциональных путем преобразования по τ

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{S}_1(\tau) f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = i\mathcal{L}_1 \mathcal{S}_1 f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = -A_1^{(0)} [\mathcal{S}_1(\tau) f_1], \quad (3.31)$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f_s[\mathcal{S}_1(\tau) f_1] = \frac{\delta f_s}{\delta f_1'} \circ \frac{\partial f_1'}{\partial \tau} = -\frac{\delta f_s}{\delta f_1} \circ A_1^{(0)}(f_1'), \quad (3.32)$$

$$f_1' \equiv \mathcal{S}(\tau) f_1.$$

Таким образом, второе уравнение (3.26) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} {}^{(v+1)}f_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{v}_s | f_1') + i\mathcal{L}_s {}^{(v+1)}f_s =$$

$$= \mathcal{E}_s {}^{(v+1)}f_s - \sum_{i=0}^v \frac{\delta {}^{(i)}f_s}{\delta f_1'} \circ A_1^{(v+1-i)}(f_1'), \quad (3.33)$$

причем правая часть (3.33) представляет собой хорошо известный функционал от f_1 . Боголюбов накладывает следующее условие при $\tau = \infty$:

$$\mathcal{S}_s(-\tau) f_s(\dots | \mathcal{S}_1(\tau) f_1) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{S}_s(-\tau) \prod_{n=1}^s \mathcal{S}_1(\tau) f_1(\mathbf{r}_n, \mathbf{v}_n; t), \quad (3.34)$$

которое приводит к требованиям

$$\mathcal{S}_s(-\tau) {}^{(0)}f_s(\mathcal{S}_1(\tau) f_1) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{S}_s(-\tau) \prod_{n=1}^s \mathcal{S}_1(\tau) f_1(\mathbf{r}_n, \mathbf{v}_n; t),$$

$$\mathcal{S}_s(-\tau) {}^{(v+1)}f_s(\mathcal{S}_1(\tau) f_1) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0. \quad (3.35)$$

Для однородной системы, поскольку оператор \mathcal{L}_1 не содержит потенциала взаимодействия, \mathcal{S}_1 обращается в единичный оператор. Поэтому мы имеем

$$\mathcal{S}_s(-\tau) f_s(f_1) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{S}_s(-\tau) \prod_{n=1}^s f_1(\mathbf{r}_n, \mathbf{v}_n; t). \quad (3.36)$$

Условие (3.35) есть не что иное, как обобщение предположения Больцмана о первоначальном хаосе: если двигаться по траекториям частиц s -группы, не взаимодействующих с другими частицами системы, назад в прошлое, то в силу условия (3.35) придем к некоррелированному

состоянию. Очевидно, что это условие вводит необратимость в систему уравнений. Соответствующее предположение для бесконечного будущего приводило бы к кинетическому уравнению с «неправильным направлением времени». Этот случай не является интересным, поскольку причинное рассмотрение обычно предпочитают телеологическому.

Что касается вычисления выражений (3.32) и (3.34), то в силу причин, указанных в начале данного параграфа, мы отсылаем читателя к соответствующей литературе. Укажем лишь, что для однородных систем с короткодействующими силами взаимодействия получается обобщенное уравнение Больцмана, в котором учитывается вклад в интеграл столкновений корреляций более высокого порядка. В случае неоднородных систем появляются слагаемые, учитывающие взаимное влияние интерференции столкновительного члена с конвективными членами.

3.2. Распространение теории Боголюбова на плазму

В разд. 3.1, рассматривая в общем плане приближение Боголюбова, основанное на предположении о функциональной зависимости и исчезающе малых корреляциях в бесконечно удаленном прошлом, можно было видеть, что цепочка уравнений ББГКИ в принципе решается даже для случая плотных газов. Разложение по параметру плотности соответствует последовательному учету парных, тройных и более высокого порядка корреляций.

Все свое внимание здесь мы сосредоточим на полностью ионизованной плазме. Поэтому прежде всего исследуем вопрос о применимости основного приближения в случае такой плазмы. При этом возникают трудности, как только делается *допущение о синхронизационной фазе эволюции*. В системе с короткодействующими силами время взаимодействия $\tau_{вз}$ резко отличается от характерных времен τ_c и τ_h , в плазме же это различие становится менее заметным.

Для времени внутреннего взаимодействия можно использовать следующую оценку:

$$\tau_{вз} \approx \frac{\lambda_D}{v_T} \approx \omega_p^{-1}, \quad (3.37)$$

в то время как все процессы, вызывающие изменение функции f_1 в однородной плазме, определяются временем релаксации

$$\tau_c = \frac{\Lambda}{\omega_p \ln \Lambda}. \quad (3.38)$$

Поэтому отношение этих времен равно

$$\frac{\tau_c}{\tau_{вз}} = \frac{\Lambda}{\ln \Lambda}.$$

Однако если система является неоднородной, то благодаря коллективным эффектам характерное время изменения f_1 порядка ω_p^{-1} , так что

$$\tau_h \approx \tau_{вз}. \quad (3.40)$$

Соотношения (3.39) и (3.40) показывают, что приближение Боголюбова применимо к однородной плазме, если ее плотность значительно ниже критической. В случае же неоднородной плазмы для использования гипотезы Боголюбова о синхронизационной фазе эволюции, несомненно, должны быть привлечены дополнительные аргументы, помимо исследования лишь порядка рассматриваемых здесь величин. В этой связи следует обратить внимание на тот факт, что при выводе кинетических уравнений (стр. 213) рассматривались только системы, в которых пренебрегалось самосогласованным полем по сравнению с корреляционным полем, что означало в известном смысле ограничение случаев однородной системы.

Начальные условия Боголюбова, соответствующие исчезающе малым корреляциям в бесконечно удаленном прошлом, сами по себе не являются строгим ограничением для применения их к плазме. Практически любая теория, рассматривающая корреляции многих частиц кулоновской системы, неизбежно приводит к соответствующей дебаевскому экранированию двухчастичной корреляционной функции, для которой корреляции исчезают на расстоянии порядка дебаевского радиуса. Это в какой-то степени оправдывает возможность применения начальных условий Боголюбова для времен $t > \omega_p^{-1}$.

Разложение по параметру плотности нельзя применить к плазме, поскольку параметр плотности, опреде-

ляемый как

$$\Pi_{\text{пл}} = n r_c^3 \approx n \lambda_D^3 \approx \Lambda, \quad (3.41)$$

всегда значительно больше единицы для плазмы с плотностью ниже критической. Поэтому все разложения по $\Pi_{\text{пл}}$ являются расходящимися¹⁾.

Отыскивая другой подходящий параметр разложения, заметим, что параметр связи в плазме равен

$$\Pi_{\text{св}} = \frac{\phi_c}{m v_c^2} \approx \frac{e^2}{\Theta \lambda_D} = \frac{r_w}{\lambda_D} \approx \Lambda^{-1}, \quad (3.42)$$

откуда следует, что в области ниже критической плотности мы имеем случай слабого взаимодействия. Поэтому в плазме параметр связи $\Pi_{\text{св}}$ является «хорошим параметром разложения».

Боголюбов уже в своей оригинальной работе [21] использовал разложение по параметру $\Pi_{\text{св}}$, получив уравнения для однородной плазмы. Его результаты послужили основой вывода кинетического уравнения Ленардом (см. разд. 1.4). Однако ниже мы рассмотрим приближение Гернси [40], в котором используются результаты Боголюбова, но которое является формально более общим, поскольку в нем учитываются как силы взаимодействия в системе, так и множественность столкновений.

Двойное разложение Гернси

Гернси вместо разложения по параметрам $\Pi_{\text{пл}}$ и $\Pi_{\text{св}}$ использовал соответственно двойное разложение по двум параметрам: по $\Pi_{\text{св}}$, характеризующему силу связи, и по $\Pi_{\text{пс}} = \Pi_{\text{пл}} \Pi_{\text{св}}$, учитывающему эффект корреляций. Можно показать [42], что это разложение приводит к тем же самым результатам, что и разложение по параметрам $\Pi_{\text{пл}}$ и $\Pi_{\text{св}}$.

Прежде чем перейти к двойному разложению, заметим, что в плазме параметр $\Pi_{\text{пс}} = \Pi_{\text{пл}} \Pi_{\text{св}}$ в соответствии с (3.41) и (3.42) по порядку величины равен единице.

¹⁾ В действительности разложение по параметру плотности даже в случае короткодействующих сил взаимодействия при учете соударений четырех или более частиц приводит к секулярным членам, которые могут быть устранены только чрезвычайно сложными методами сингулярной теории возмущений [41].

Чтобы обойти основную трудность, связанную с расходимостью при разложении по параметру плотности в плазме, необходимо в двойном разложении провести суммирование по всем степеням $\Pi_{\text{пс}}$. Следует отметить, что двойное разложение вводится только как промежуточная ступень, облегчающая вычисления и приводящая к большей общности.

Основной постулат Боголюбова

$$f_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{v}_s; t) = f_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{v}_s | f_1) \quad (3.43)$$

используется в двойном разложении по аналогии с (3.18) и (3.19), т. е.

$$f_s = \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \Pi_{\text{св}}^{\mu} \Pi_{\text{пс}}^{\nu} f_s^{(\mu, \nu)}(f_1), \quad s \geq 2 \quad (3.44)$$

и

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \Pi_{\text{св}}^{\mu} \Pi_{\text{пс}}^{\nu} A_s^{(\mu, \nu)}(f_1). \quad (3.45)$$

И в этом случае благодаря указанной функциональной зависимости существует связь между коэффициентами $A_s^{(\mu, \nu)}$ для $s \geq 2$ и коэффициентом $A_1^{(\mu, \nu)}$, которая следует из соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \Pi_{\text{св}}^{\mu} \Pi_{\text{пс}}^{\nu} A_s^{(\mu, \nu)} &= \frac{\partial f_s}{\partial t} = \sum_{i, j} \Pi_{\text{св}} \Pi_{\text{пс}} \frac{\delta f_s^{(i, j)}}{\delta f_1} \circ \frac{\partial f_1}{\partial t} = \\ &= \sum_{i, j, k, l} \Pi_{\text{св}}^{i+k} \Pi_{\text{пс}}^{j+l} \frac{\delta f_s^{(i, j)}}{\delta f_1} \circ A_1^{(k, l)} \end{aligned} \quad (3.46)$$

и имеет вид

$$A_s^{(\mu, \nu)} = \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{\nu} \frac{\delta f_s^{(i, j)}}{\delta f_1} \circ A_1^{(\mu-i, \nu-j)}(f_1). \quad (3.47)$$

Поскольку теперь играют роль оба параметра $\Pi_{\text{св}}$ и $\Pi_{\text{пс}}$, цепочку уравнений ББГКЙ, полученную из (3.22), можно записать в следующем символическом виде:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathcal{A} f_s = \Pi_{\text{св}} \mathcal{B} f_s + \Pi_{\text{пс}} \mathcal{C} f_{s+1}. \quad (3.48)$$

Здесь оператор

$$\mathcal{A}_s = \sum_{i=1}^s \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (3.49)$$

описывает эффекты, обусловленные потоком частиц в конфигурационном пространстве, а оператор

$$\mathcal{B}_s = \frac{v_c}{r_c} \sum_{i,j=1}^s \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} \quad (3.50)$$

учитывает взаимодействия внутри группы s частиц. Оператор \mathcal{C}_s по-прежнему описывает взаимодействие s частиц с другими частицами плазмы [см. (3.3)].

Подставляя (3.44), (3.45) и (3.47) в (3.48), получаем следующую зависимость для $s \neq 1$:

$$\sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{\nu} \frac{\delta f_s^{(i,j)}}{\delta f_1} \circ A_1^{(\mu-i, \nu-j)} + \mathcal{A}_s f_s^{(\mu, \nu)} = \mathcal{B}_s f_s^{(\mu-1, \nu)} + \mathcal{C}_s f_{s+1}^{(\mu, \nu-1)}. \quad (3.51)$$

В случае $s=1$ мы имеем

$$A_1^{(\mu, \nu)} + \delta_{0\nu} \delta_{0\mu} \mathcal{A}_1 f_1 = \mathcal{C}_1 f_2^{(\mu, \nu-1)}. \quad (3.52)$$

Эти уравнения позволяют вычислить коэффициенты методом последовательных приближений. В нулевом приближении из (3.52) получаем

$$A_1^{(0,0)} + \mathcal{A}_1 f_1 = 0, \quad (3.53)$$

а из (3.51)

$$\frac{\delta f_s^{(0,0)}}{\delta f_1} \circ A_1^{(0,0)} + \mathcal{A}_s f_s^{(0,0)} = 0. \quad (3.54)$$

В следующем приближении необходимо вычислить коэффициенты $A_s^{(0,1)}$, $A_s^{(1,0)}$ и функции $f_s^{(0,1)}$, $f_s^{(1,0)}$. Из (3.52) получаем соотношения для коэффициентов $A_1^{(0,1)}$ и $A_1^{(1,0)}$

$$A_1^{(1,0)} = 0 \text{ и } A_1^{(0,1)} = \mathcal{C}_1 f_2^{(0,0)}. \quad (3.55)$$

Из (3.51) находим уравнения для $f_s^{(0,1)}$ и $f_s^{(1,0)}$

$$\frac{\delta f_s^{(1,0)}}{\delta f_1} \circ A_1^{(0,0)} + \mathcal{A}_s f_s^{(1,0)} = -\frac{\delta f_s^{(0,0)}}{\delta f_1} \circ A_1^{(1,0)} + \mathcal{B}_s f_s^{(0,0)} \quad (3.56)$$

и

$$\frac{\delta f_s^{(0,1)}}{\delta f_1} \circ A_1^{(0,0)} + \mathcal{A}_s f_s^{(0,1)} = -\frac{\delta f_s^{(0,0)}}{\delta f_1} \circ A_1^{(0,1)} + \mathcal{E}_s f_{s+1}^{(0,0)}. \quad (3.57)$$

Уравнения (3.55) — (3.57) совместно с начальными условиями, соответствующими исчезающе малым корреляциям в бесконечно удаленном прошлом, достаточны для определения функции f_1 , необходимой для вычислений в приближении первого порядка.

Кинетическое уравнение для определения функции f_1 в приближении первого порядка имеет вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = A_1^{(0,0)} + A_1^{(1,0)} + A_1^{(0,1)} = -\mathcal{A}_1 f_1 + \mathcal{E}_1 f_2^{(0,0)}, \quad (3.58)$$

где $f_2^{(0,0)}$ на основании (3.53) и (3.54) можно представить в виде функционала от f_1 .

Аналогично находится решение в приближении более высокого порядка ($\nu + \mu > 1$). Конечно, система уравнений в этом случае становится значительно сложнее.

Как уже отмечалось выше, можно ожидать разумные результаты только в том случае, когда проводится суммирование по всем значениям ν . В нулевом приближении ($\mu = 0$) такое суммирование по ν приводит к уравнению Власова. В приближении первого порядка ($\mu = 1$, а ν произвольное) Гернси получил уравнение, выведенное Ленардом из теории Боголюбова (см. стр. 276).

Согласно замечанию, сделанному в начале главы, читателя, интересующегося деталями вычисления коэффициентов и различными методами суммирования, отсылаем к работам [40, 43].

Особенного внимания заслуживает тот факт, что в теории Гернси так же, как в теории Балеску и Ленарда, кинетическое уравнение соответствует первому порядку разложения по параметру $\Pi_{св}$. Поэтому можно ожидать, что эта теория, справедливая для достаточно больших расстояний, будет неверна, если рассматривать близкие столкновения, при которых параметр связи становится порядка единицы. Кроме того, Гернси рассмотрел лишь пространственно однородную плазму. Ву и Розенберг [42] обобщили теорию Гернси на случай неоднородной плазмы. Они учли первый порядок разложения по параметру связи и все порядки по корреляционному параметру.

Формализм метода группового разложения

Ростокер и Розенблют [44] и Ишикава [45] независимо предложили метод вывода кинетических уравнений из цепочки уравнений БГКИ, основанный на групповых разложениях. Этот метод впоследствии успешно использовался другими авторами [46—48].

Изложение метода начнем с рассмотрения цепочки уравнений БГКИ, записанной в виде (3.48), причем параметры связи и плотности имеют следующий порядок величины:

$$\Pi_{\text{св}} = O(\Lambda^{-1}), \quad \Pi_{\text{пл}} = O(\Lambda), \quad \Pi_{\text{пс}} = \Pi_{\text{пл}}\Pi_{\text{св}} = O(1). \quad (3.59)$$

Ростокер и Розенблют применили к цепочке уравнений групповое разложение (1.22) в общем виде

$$f_s = \prod_{i=1}^s f_1(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i; t) + \sum'_{j,k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, k}}^s f_1 g_{jk} + \sum'_{j,k,l} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, k, l}}^s f_1 g_{jkl} + \dots \quad (3.60)$$

В результате они получили новую цепочку уравнений для одночастичной функции распределения f_1 и корреляционных функций $g_{1\dots s}$, причем первые два уравнения этой цепочки имеют вид [см. (1.20) и (1.21)]

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathcal{A}_1 f_1 = \Pi_{\text{пс}} \mathcal{E}_1(1) [(f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t) + g_{12})] \quad (3.64)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{12}}{\partial t} + \mathcal{A}_2 g_{12} + \Pi_{\text{св}} \mathcal{B}_2 (f_1 f_1 + g_{12}) = \\ = \Pi_{\text{пс}} \mathcal{E}_2 (f_1(\mathbf{r}_3, \mathbf{v}_3; t) g_{12} + g_{123}) + \Pi_{\text{пс}} \mathcal{E}_1(1) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) g_{23} + \\ + \Pi_{\text{пс}} \mathcal{E}_1(2) f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t) g_{13}. \quad (3.62) \end{aligned}$$

Здесь в операторе $\mathcal{E}_1(\mathbf{v})$ аргумент \mathbf{v} означает переменную дифференциальной части этого оператора.

До сих пор мы не использовали никакой дополнительной информации. Просто, как и в уравнениях (1.20) и (1.21), функции распределения f_s были заменены корреляционными функциями $g_{1\dots s}$.

Основное допущение Ростокера и Розенблюта, которое во многих отношениях приводит к тем же самым следствиям, что и предположение Боголюбова о функциональной зависимости, может быть сформулировано следующим образом:

$$\frac{g_{1\dots s}}{\prod_{i=1}^s f_1(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i; t)} = O(\Lambda^{-s}). \quad (3.63)$$

Помимо этого разложения, Ростокер и Розенблют использовали также разложение функции f_1 и корреляционных функций $g_{1\dots s}$ по степеням параметра (Λ^{-1}) . С учетом (3.63) это дает

$$\begin{aligned} f_1 &= {}^{(0)}f_1 + \Lambda^{-1} {}^{(1)}f_1 + \Lambda^{-2} {}^{(2)}f_1 + \dots, \\ g_{1\dots s} &= \Lambda^{-s} {}^{(0)}g_{1\dots s} + \Lambda^{-(s+1)} {}^{(1)}g_{1\dots s} + \dots \end{aligned} \quad (3.64)$$

Подставляя соотношения (3.64) в (3.61) и (3.62) и записывая последние в виде разложения по степеням параметра Λ^{-1} , получаем следующее уравнение в приближении нулевого порядка:

$$\frac{\partial {}^{(0)}f_1}{\partial t} + \mathcal{A}_1 {}^{(0)}f_1 = \mathcal{C}_1(1) [{}^{(0)}f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) {}^{(0)}f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t)]. \quad (3.65)$$

Уравнения для приближения первого порядка имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^{(1)}f_1}{\partial t} + \mathcal{A}_1 {}^{(1)}f_1 &= \mathcal{C}_1(1) [{}^{(0)}f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) {}^{(1)}f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t) + \\ &+ {}^{(1)}f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) {}^{(0)}f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t) + {}^{(0)}g_{12}] \end{aligned} \quad (3.66)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^{(0)}g_{12}}{\partial t} + \mathcal{A}_2 {}^{(0)}g_{12} &= \mathcal{B}_2 [{}^{(0)}f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) {}^{(0)}f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t)] + \\ &+ \mathcal{C}_2 [{}^{(0)}f_1(\mathbf{r}_3, \mathbf{v}_3; t) {}^{(0)}g_{12}] + \mathcal{C}_1(1) [{}^{(0)}f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) {}^{(0)}g_{23}] + \\ &+ \mathcal{C}_1(2) [{}^{(0)}f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t) {}^{(0)}g_{13}]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Решения уравнений (3.66) и (3.67) с помощью группового разложения (3.60) позволяют тривиально вычислить все функции распределения f_s с точностью до Λ^{-1} .

Хотя эту процедуру в принципе можно продолжить до произвольного порядка по параметру Λ^{-1} , но следует

признать, что с увеличением степени параметра Λ^{-1} уравнения становятся практически неразрешимыми. Уже для второго порядка уравнения являются настолько запутанными, что до сих пор не найдены их решения.

*Результаты использования метода
группового разложения*

Уравнение для приближения нулевого порядка (3.65) представляет собой хорошо известное уравнение Власова. Уравнения в первом порядке для случая однородной плазмы сводятся к тому же самому кинетическому уравнению, что и в теории Боголюбова. По крайней мере с той степенью точности, с какой предположения Боголюбова о функциональной зависимости и предположения Ростокера и Розенблюта (3.63) об ослаблении корреляций эквивалентности.

Ростокер и Розенблют [44] применили вышеизложенный формализм к задаче о пробной частице в полностью ионизованной плазме. Очевидно, что в этой задаче необходимо найти уравнения, связывающие два набора приведенных функций распределения, один из которых (ω_s) относится к пробной частице, другой (f_s) — к полевым частицам. В нулевом порядке уравнение для функции распределения пробной частицы ${}^{(0)}\omega_1$ совпадает с уравнением для функции распределения полевых частиц ${}^{(0)}f_1$. В первом порядке эволюция функции распределения пробной частицы ${}^{(1)}\omega_1$ во времени описывается уравнением типа уравнения Фоккера — Планка

$$\frac{\partial {}^{(1)}\omega_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial {}^{(1)}\omega_1}{\partial \mathbf{r}_1} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot ({}^{(0)}\omega_1 \langle \Delta \mathbf{v} \rangle) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} : ({}^{(0)}\omega_1 \langle \Delta \mathbf{v} \rangle \langle \Delta \mathbf{v} \rangle). \quad (3.68)$$

Коэффициенты Фоккера — Планка здесь определяются как

$$\langle \Delta \mathbf{v} \rangle = \frac{e_T}{m_T} \left(-n \int d\mathbf{r}_2 \int \frac{\partial \phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} {}^{(1)}f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t) d\mathbf{v}_2 - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \Delta \right) \quad (3.69)$$

и

$$\langle \Delta \mathbf{v} \rangle \langle \Delta \mathbf{v} \rangle = -2 \frac{e_T}{m_T} \Delta. \quad (3.70)$$

Индекс T относится к величинам, характеризующим пробную частицу. Тензор Δ_2 имеет вид

$$\Delta_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) = -n \int d\mathbf{r}_2 \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \left(\mathbf{P}_{12} {}^{(0)}f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t) d\mathbf{v}_2, \quad (3.71)$$

где величина \mathbf{P}_{12} определяется согласно соотношению

$$\mathbf{P}_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} {}^{(0)}\omega_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; t) = \frac{{}^{(0)}g_{12}}{{}^{(0)}f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t)}. \quad (3.72)$$

Функция распределения ${}^{(1)}f_1$ для полевых частиц подчиняется следующему уравнению, в которое подставлены уже вычисленные коэффициенты:

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^{(1)}f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial {}^{(1)}f_1}{\partial \mathbf{r}_2} - \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} \cdot \left\{ \frac{1}{V} \int d\mathbf{r}_1 \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} {}^{(0)}\omega_1 {}^{(0)}f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t) d\mathbf{v}_1 + \right. \\ \left. + n \int d\mathbf{r}_3 \int \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial \mathbf{r}_2} {}^{(1)}f_1(\mathbf{r}_3, \mathbf{v}_3; t) {}^{(0)}f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; t) d\mathbf{v}_3 \right\} = 0. \quad (3.73) \end{aligned}$$

Вышеприведенные результаты получены в предположении, что функция распределения ${}^{(0)}f_1$ является максвелловской, а парные корреляции полевых частиц соответствуют равновесному состоянию.

Отметим, что первоначальный формализм Ростокера и Розенблюта носит более общий характер и не совпадает с только что рассмотренным; уравнение, полученное с его помощью, является инвариантным по отношению к преобразованию времени. Это уравнение только позже было приведено к обычному виду.

Приближение, основанное на групповом разложении, успешно применялось для описания неоднородных систем, например, Ишикавой [45] и Гернси [48]. Оба автора рассматривали малые отклонения от равновесия, не используя предположения о пространственной однородности системы и достаточно большой величине времен релаксации. Исследования пространственно неоднородных систем являются особенно важными, так как даже малые

отклонения от однородности могут приводить к большим коллективным эффектам, как, например, в случае плазменных колебаний при наличии столкновений.

3.3. Многовременной формализм

Кинетическое уравнение для функции распределения первого порядка является уравнением вида

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = A(\mathbf{r}, \mathbf{v} | f_1), \quad (3.74)$$

где A обозначает общую функциональную зависимость от f_1 .

В § 1 мы вывели кинетическое уравнение Больцмана, уравнение Ландау — Фоккера — Планка и уравнение Боголюбова — Ленарда — Балеску путем обрыва цепочки уравнений на основе весьма грубого рассмотрения только двух характерных параметров $\Pi_{\text{св}}$, $\Pi_{\text{пл}}$. В разд. 3.1, с другой стороны, было дано более систематическое приближение Боголюбова, которое, по крайней мере в принципе, приводит к методу, позволяющему вывести кинетическое уравнение с учетом эффектов более высокого порядка. Однако теория Боголюбова, основанная на предположении о функциональной зависимости $f_s(\dots | f_1)$, использует метод, в котором не доказывается, а постулируется существование кинетического уравнения вида (3.74).

Чтобы более глубоко проникнуть в природу кинетической фазы и доказать существование кинетического уравнения, необходимо вообще отбросить постулат о функциональной зависимости. Конечно, вряд ли можно надеяться, что непосредственное применение разложения вида

$$f_s = \sum \varepsilon^{\nu} f_s^{(\nu)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{v}_s; t), \quad \text{где } \varepsilon = \Pi_{\text{св}}, \Pi_{\text{пл}}, \quad (3.75)$$

приведет к желаемому результату. Действительно, уже Боголюбов показал [8, 21], что такое упрощенное разложение по малому параметру, произведенное в цепочке уравнений, дает члены, монотонно растущие со временем. Это означает, что разложение по теории возмущений приводит к членам, которые астрономы называют «секуляр-

ными». Для того чтобы устранить трудность, связанную с такими секулярными членами, Пуанкаре [49] создал более совершенную теорию возмущений, в которой по степеням малого параметра раскладываются как функции, так и независимые переменные. Для случая нелинейных периодических систем теория возмущений, исключая секулярную зависимость, была развита Ван дер Полем (см., например, [50, 51]).

В качестве продолжения указанных работ можно привести работы Сэндри [52, 53] и Фримана [54], в которых дается новое приближение для получения необратимых уравнений, описывающих релаксацию системы многих частиц к равновесию. Эти исследования существенным образом проливают свет на понимание эволюции таких систем.

Постановка задачи

Поскольку рассматриваемая проблема основывается на понимании многовременного приближения, остановимся на этом вопросе более подробно. Как и прежде, запишем цепочку уравнений

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathcal{A}_s f_s = \Pi_{\text{св}} \mathcal{B}_s f_s + \Pi_{\text{пл}} \mathcal{C}_s f_{s+1}. \quad (3.76)$$

В случае кулоновской системы в докритическом состоянии ($\Pi_{\text{пл}} = 1$, $\Pi_{\text{св}} = \Lambda^{-1} = \varepsilon$) функции распределения f_s можно представить в виде следующего разложения:

$$f_s = \sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon^v {}^{(v)}f_s. \quad (3.77)$$

Подставляя (3.77) в (3.76) и собирая члены, пропорциональные одной и той же степени параметра ε , получаем систему уравнений

$$\frac{\partial {}^{(v)}f_s}{\partial t} + \mathcal{A}_s {}^{(v)}f_s = \mathcal{B}_s {}^{(v-1)}f_s + \mathcal{C}_s {}^{(v)}f_{s+1}. \quad (3.78)$$

Важно отметить, что система уравнений (3.78) справедлива, если только операторы, используемые в ней, не изменяют относительного порядка величины членов. Операторы, удовлетворяющие этому условию, называются «конформными».

Операторы \mathcal{B}_s и \mathcal{C}_s по порядку величины равны единице, если время измеряется в единицах времени взаимодействия $\tau_{\text{вз}} = r_c/v_c$ (см. стр. 267). В кулоновской системе время взаимодействия $\tau_{\text{вз}} \approx \omega_p^{-1}$, а поэтому операторы \mathcal{B}_s , \mathcal{C}_s и $\partial/\partial t$ являются конформными, если только функция f_s «изменяется в шкале» времени плазменных колебаний.

Если изменения во времени характеризуются временем между столкновениями

$$\tau_c \approx \omega_p^{-1} \frac{\Lambda}{\ln \Lambda} = O\left(\frac{1}{\varepsilon} \tau_{\text{вз}}\right), \quad (3.79)$$

то система уравнений (3.78) уже не пригодна. В этом случае вводится новая переменная времени $t' = \varepsilon t$ так, чтобы оператор

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} \approx \frac{\tau_c}{\tau_{\text{вз}}} \frac{\partial}{\partial t} = O\left(\frac{1}{\tau_{\text{вз}}}\right) \quad (3.80)$$

и операторы \mathcal{B}_s и \mathcal{C}_s стали конформными. Для этих операторов цепочка уравнений (3.76) записывается в виде

$$\varepsilon \frac{\partial f_s}{\partial t'} + \mathcal{A}_s f_s = \mathcal{B}_s f_s + \varepsilon \mathcal{C}_s f_{s+1}. \quad (3.81)$$

Подставляя в (3.81) разложение (3.77), получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^{(v-1)} f_s}{\partial t'} + \mathcal{A}_s^{(v)} f_s = \mathcal{B}_s^{(v)} f_s + \mathcal{C}_s^{(v-1)} f_{s+1}. \quad (3.82)$$

Очевидно, что эта система отличается от (3.78).

Таким образом, ясно, что вид разложения по малому параметру сильно зависит не только от типа системы, но также и от характера изменения рассматриваемых явлений, в частности от их изменения во времени.

Распространяя разложение, справедливое для характерного времени изменения τ_1 , на явления с характерным временем τ_2 , можно получить неверные результаты, если между τ_1 и τ_2 существует связь, зависящая от ε .

Формализм

Если стремиться к тому, чтобы разложение правильно описывало изменения, происходящие в различных временных масштабах, то необходимо явно учесть неконформ-

ность оператора дифференцирования по времени. Исходя из этого, Сэндри и Фриман [52—54] для своего метода заимствовали разложение, применяемое в методах нелинейной механики. Вместо одного характерного времени они ввели много масштабов времени, связанных со временем t соотношением

$$\frac{d\tau_{\nu}}{dt} = \varepsilon^{\nu}, \quad (3.83)$$

в котором ε — параметр малости (например, $\Pi_{\text{св}}$ или $\Pi_{\text{пл}}$).

В вышеуказанном смысле предполагается, что введенные таким образом масштабы времени должны явно различать те производные по времени, которые отличаются друг от друга на порядок величины ε . Независимость решений уравнения (3.83), обусловленная выбором начальных условий, позволяет рассматривать τ_{ν} как независимые переменные.

Логическим следствием замены t набором переменных τ_{ν} является введение «многовременных функций»

$$f_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{v}_s; t) = f_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{v}_s; \tau_0, \tau_1, \dots) \quad (3.84)$$

и оператора дифференцирования по времени

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{\nu} \varepsilon^{\nu} \frac{\partial}{\partial \tau_{\nu}}, \quad (3.85)$$

где все операторы $\partial/\partial \tau_{\nu}$ должны теперь рассматриваться как конформные. Разложение функций распределения f_s по-прежнему имеет вид

$$f_s = \sum_{\nu} \varepsilon^{\nu} f_s^{(\nu)}(\dots; \tau_0, \tau_1, \dots). \quad (3.86)$$

Из выражений (3.85) и (3.86) следует, что

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = \sum_{\nu} \varepsilon^{\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{\partial^{(\mu)} f_s}{\partial \tau_{\nu-\mu}}. \quad (3.87)$$

Обратим внимание на тот факт, что введение многовременных функций расширяет возможный класс решений. Поэтому необходимы дополнительные требования, приводящие к уменьшению произвола в выборе функций.

Таким требованием является условие «устранения секулярности», которое очень существенно для данной теории. Подставляя разложение (3.87) в цепочку уравнений (3.76) и группируя коэффициенты порядка ε^v , приходим к системе уравнений для плазмы

$$\sum_{\mu=0}^v \frac{\partial {}^{(\mu)}f_s}{\partial \tau_{v-\mu}} + \mathcal{A}_s {}^{(v)}f_s = \mathcal{B}_s {}^{(v-1)}f_s + \mathcal{C}_s {}^{(v)}f_{s+1}. \quad (3.88)$$

Очевидно, что эти уравнения не являются еще расцепленными с частью цепочки более высокого порядка, так как они содержат функцию f_{s+1} , имеющую тот же самый порядок v в разложении по малому параметру.

Само собой разумеется, что нельзя иметь дело одновременно со всеми порядками s ; поэтому Сэндри [52, 53], следуя Ростокеру и Розенблюту [44], использовал допущение, что корреляционные функции $g_{1\dots s}$, определяемые через групповое разложение

$$f_s(1, \dots, s) = \prod_{k=1}^s f_1(k) + \sum_{i,j=1}^s g_{ij} \prod_{k=1}^s f_1(k) + \dots + g_{1\dots s}, \quad (3.89)$$

упорядочены в том смысле, что они подчиняются соотношению

$$\frac{g_{1\dots s}}{f_s} = O(\varepsilon^s). \quad (3.90)$$

Это допущение отнюдь не является очевидным. В действительности можно ожидать, что соотношение (3.90) нарушается для малых расстояний между частицами.

Таким образом, цепочку уравнений (3.88) можно преобразовать в цепочку уравнений для функции f_1 и корреляционных функций $g_{1\dots s}$, используя групповое разложение (3.89). Благодаря допущению (3.90) достигается обрыв цепочки. Корреляционная функция $g_{1\dots s+1}$, содержащаяся в уравнении для $g_{1\dots s}$, не может давать связь с частью цепочки более высокого порядка, поскольку эта функция является величиной следующего порядка малости в разложении по малому параметру.

Что же касается самих вычислений, то читателю следует обратиться к оригинальной работе Сэндри [52, 53]; здесь же мы приведем только ее результаты.

Используя разложение, рассмотренное выше, и необходимое условие для исключения секулярных членов, Сэндри показал, что релаксация системы к равновесному состоянию описывается кинетическим уравнением только тогда, когда корреляционные функции удовлетворяют определенным условиям, связанным с относительными скоростями движения частиц. Одно из этих условий, которое называется условием «отсутствия параллельных движений», имеет физическое обоснование, заключающееся в том, что если система подчиняется кинетическому уравнению, то она не может иметь слишком много статистически независимых частиц, обладающих почти равными скоростями. Интуитивно кажется очевидным, что такие условия должны существовать и что релаксация в кинетическую фазу будет затруднена, если система содержит большое число частиц, находящихся в покое относительно друг друга.

Полученное кинетическое уравнение для приближения первого порядка, если начальные коэффициенты удовлетворяют указанным выше условиям, совпадает с уравнением Боголюбова, за исключением того обстоятельства, что это уравнение, как утверждает Сэндри, является полностью сходящимся для кулоновских потенциалов, в то время как уравнение Ленарда — Балеску расходится в случае малых расстояний.

Важность теории Сэндри и Фримана, использующей многовременный формализм, заключается не в получении и обосновании кинетического уравнения, а в ее большей общности и гибкости. Она дает более глубокое понимание сложной природы необратимой релаксации к равновесию.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Frieman E. A.*, Nucl. Fusion Suppl., Pt. 2, 487 (1962).
2. *Frieman E. A.*, *Book D. L.*, Phys. Fluids, 6, 1700 (1963).
3. *Hubbard J.*, Proc. Roy. Soc. Ser. A, 260, 114; 261, 371 (1961).
4. *Kihara T.*, *Aono O.*, Journ. Phys. Soc. Japan, 18, 837, 1043 (1963).
5. *Weinstock J.*, Phys. Rev., 132, 454 (1963); 133, 673 (1964).
6. *Grad H.*, в книге Handbuch der Physik (ed. S. Flügge), Vol. XII, Springer Berlin, 1958, p. 205.
7. *Kirkwood J.*, Journ. Chem. Phys., 15, 72 (1947).
8. *Боголюбов Н. Н.*, Journ. Phys. USSR, 10, 256, 265 (1946).
9. *Green M. S.*, Journ. Chem. Phys., 25, 836 (1956).

10. Prout R., *Physica* (Utrecht), **22**, 509 (1956).
11. Prout R., Prigogine I., *Physica* (Utrecht), **22**, 621 (1956).
12. Boltzmann L., *Wien. Ber.*, **66**, 213 (1872); **72**, 427 (1875).
13. Ludwig G., Müller W. J., C., Schröter J., *Physica* (Utrecht), **30**, 479 (1964).
14. Ecker G., Hölling J., *Phys. Fluids*, **6**, 70 (1963).
15. Van Kampen N. G., Felderhof B. U., *Theoretical Methods in Plasma Physics*, Wiley, New York, 1967.
16. Ландау Л. Д., ЖЭТФ, **7**, 203 1937, *Journ. Phys. USSR*, **10**, 154 (1936).
17. Fokker A. D., *Ann. Phys.*, **43**, 812 (1914).
18. Plank M., *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl.*, **324**, 1917.
19. Chandrasekhar S., *Rev. Mod. Phys.*, **15**, 1 (1943).
20. Rosenbluth M. N., McDonald W. M., Judd D. L., *Phys. Rev.*, **107**, 1 (1957).
21. Боголюбов Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике, Гостехиздат, М.—Л., 1946.
22. Lenard A., *Ann. Phys. (New York)*, **10**, 390 (1960).
23. Balescu R., *Phys. Fluids*, **3**, 52 (1960).
24. Thompson W. B., Hubbard J., *Rev. Mod. Phys.*, **32**, 714 (1960).
25. Suchy K., *Ergeb. Exakt. Naturw.*, **35**, 103 (1964).
26. Maecker H., Peters T., *Zs. Phys.*, **144**, 586 (1956).
27. Schlüter A., *Zs. Naturforsch.*, **5a**, 72 (1950); **6a**, 73 (1951).
28. Chapman S., *Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A*, **216**, 279 (1916); **217**, 115 (1917).
29. Enskog D., Thesis, Uppsala, 1917.
30. Enskog D., *Arkiv Ast. Fys.*, **16**, 1 (1921).
31. Chapman S., Cowling T. G., *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge Univ. Press, London — New York, 1952 (см. перевод: С. Чепмен, Т. Каулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ. М., 1960).
32. Kogan M. N., *Rarefied Gas Dynamics*, Plenum, New York, 1969.
33. Hilbert D., *Math. Ann.*, **72**, 562 (1912).
34. Hilbert D., *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Linearen Integralgleichungen*, Wien, 1924.
35. Grad H., *Phys. Fluids*, **6**, 147 (1963).
36. Bhatnagar P. L., Gross E. P., and Krook M., *Phys. Rev.*, **94**, 511 (1954).
37. Devanathan C., Bhatnagar P. L., *Proc. Nat. Inst. Sci. India*, **106**, 1398 (1965).
38. Gross E. P., Jackson E. A., *Phys. Fluids* **2**, 432 (1959).
39. Liepmann H. W., Narusimha R., Chahine M. T., *Phys. Fluids*, **5**, 1313 (1962).
40. Guernsey R. L., *The theory of fully ionized gases*, Thesis, University of Michigan, 1960.
41. Dorfman J. R., Cohen E. G. D., *Phys. Letters*, **16**, 124 (1965).
42. Wu T. Y., Rosenberg R. L., *Canad. Journ. Phys.*, **40**, 463 (1962).
43. Wu T. Y., *Kinetic Equations of Gases and Plasmas*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1966.
44. Rostoker N., Rosenbluth M. N., *Phys. Fluids*, **3**, 1 (1960).

45. *Ichikawa Y. H.*, Progr. Theoret. Phys., **24**, 1085 (1960).
46. *Fried B. D.*, *Wyld H. W.*, Phys. Rev., **121**, 1 (1961).
47. *Dupree T. H.*, Phys. Fluids, **4**, 696 (1961).
48. *Guernesey R. L.*, Phys. Fluids, **5**, 322 (1962).
49. *Poincaré H.*, Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Vol. I, Paris, Ch. III (см. перевод: *А. Пуанкаре*, Новые методы небесной механики, изд-во «Наука», М., 1971).
50. *Андропов А. А.*, *Хайкин С. Е.*, Теория колебаний, М.—Л., 1937.
51. *Боголюбов Н. Н.* *Крылов Н. М.*, Основные проблемы нелинейной механики, Киев, 1937.
52. *Sandri G.*, Phys. Rev. Letters, **11**, 178 (1963).
53. *Sandri G.*, Ann. Phys., **24**, 380 (1963).
54. *Frieman E. A.*, Journ. Math. Phys., **4**, 410 (1963).
55. *Montgomery D. C.*, *Tidman D. A.*, Plasma Kinetic Theory, McGraw-Hill, New York, 1964.

Дополнительная литература

Kinetic Processes in Gases and Plasmas (ed. A. R. Hochstim), Academic Press, New York, 1969.

Liboff R. L., Introduction to the Theory of Kinetic Equations, Wiley, New York, 1969.

К § 1

Aono O., Phys. Fluids, **11**, 341 (1968).

Baldwin D., Phys. Fluids, **5**, 1523 (1962).

Boltzmann L., Vorlesungen über Gastheorie, 2 Vol. Teubner, Leipzig, 1896-1898 (см. перевод: *Л. Больцман*, Лекции по теории газов, Гостехиздат, М., 1956).

Gasiotowicz S., *Neumann M.*, *Riddell R. J.*, Phys. Rev., **101**, 922 (1956).

Green M. S., Physica (Utrecht), **24**, 393 (1958).

Колмогоров А. Н., Math. Ann., **104**, 415 (1931).

Ландау Л. Д., Phys. Rev., **77**, 567 (1949).

Perkins F., Phys. Fluids, **8**, 1361 (1965).

Prigogine I., *Balescu R.*, Physica (Utrecht), **25**, 281, 302 (1959).

Prigogine I., *Balescu R.*, Physica (Utrecht), **26**, 145 (1960).

Rostoker N., Nucl. Fusion, **1**, 101 (1960).

Tchen C. M., Phys. Rev., **114**, 394 (1959).

Темко С. В., ЖЭТФ, **31**, 1021 (1956).

Weinstock J., Phys. Fluids, **10**, 127 (1967).

К § 2

Ворп F., *Meizner J.*, см. в книге: *A. Sommerfeld*, Thermodynamic and Statistic, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig (см. перевод: *А. Зоммерфельд*, Термодинамика и статистическая физика, ИЛ, М., 1955).

Cercignani C., *Mathematical Methods in Kinetic Theory*, Plenum, New York, 1969.

Hirschfelder J. O., *Curtiss C. F.*, *Bird R. B.*, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, Wiley, New York, 1954.

Kirkwood J. G., *Crawford B.*, *Journ. Phys. Chem.*, **56**, 1048 (1952).

Monchick L., *Munn R. J.*, *Mason E. A.*, *Journ. Chem. Phys.*, **45**, 3051 (1966).

Waldmann L., в книге *Handbuch der Physik* (ed. S. Flügge), Vol. XII, Springer, Berlin, 1958.

К § 3

Balescu R., *Kuezell A.*, *Journ. Math. Phys.*, **5**, 1140 (1964).

Боголюбов Н. Н. в книге *Studies in Statistical Mechanics* (eds. J. DeBoer, G. E. Uhlenbeck), North-Holland Publ., Amsterdam, 1966.

Choh S. T., *Uhlenbeck G. E.*, *The kinetic theory of phenomena in dense gases*, Thesis, University of Michigan, 1958.

Gorman D., *Montgomery D.*, *Phys. Rev.*, **131**, 7 (1963).

Kalman G., *Ron A.*, *Ann. Phys.* (N. Y.), **16**, 118 (1961).

Kaufman A. N., в книге *La Théorie des Gaz Neutres et Ionises* (eds. C. de Witt, J. F. Detoeuf), Paris, 1960.

Kritz A. H., *Ramanathan G. V.*, *Sandri G.*, *Phys. Rev. Letters*, **25**, 437 (1970).

Montgomery D., *The foundations of classical theory*, в книге *Lectures in Theoretical Physics*, Vol. IX, C, «Kinetic Theory», (ed. W. E. Brittin). University of Colorado Press, Denver, Colorado, 1967.

Oberman L., *Ron A.*, *Dawson J.*, *Phys. Fluids*, **5**, 1514 (1962).

Ron A., *Kalman G.*, *Ann. Phys.*, **11**, 240 (1960).

Sandri G., *The foundations of nonequilibrium statistical mechanics*, Notes from lectures given at Rutgers University, Spring term, 1961—1962.

Sandri G., ARAP Report № 80, Princeton, N. J. (1966).

Schram P. P. J. M., *Kinetic equations for plasmas*, Thesis, Garching, 1964.

Uhlenbeck G. E., *Ford G. W.*, *Lectures in Statistical Mechanics*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1963.

Willis C. R., *Phys. Fluids*, **5**, 219 (1962).

Часть II

Полностью ионизованная система при наличии произвольного электромагнитного поля

До сих пор рассмотрение ограничивалось кулоновской системой, взаимодействующей лишь с квазистатическими полями. В последующем изложении учитывается произвольное электромагнитное поле.

Глава 5

Излучение отдельной частицы

§ 1. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Соотношения, содержащиеся в первом параграфе данной главы, можно найти в большинстве учебников по электродинамике. Мы приводим их здесь в сконцентрированном виде в сущности лишь для удобства ссылок.

1.1. Основные уравнения электродинамики

Электромагнитное поле является векторным. Фундаментальные эксперименты, выполненные Кулоном, Био-Саваром и Фарадеем, показали, что электромагнитные явления в вакууме могут быть описаны с помощью векторов напряженности электрического поля \mathbf{E} и магнитной индукции \mathbf{B} , которые удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } \nabla \cdot \mathbf{E} &= \varepsilon_0^{-1} \rho_{\text{эфф}}, & \text{б) } \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \text{в) } \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{г) } \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j}_{\text{эфф}}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\rho_{\text{эфф}}$ обозначает плотность заряда, а $\mathbf{j}_{\text{эфф}}$ — плотность тока, которые связаны между собой уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{эфф}} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{эфф}} = 0. \quad (1.2)$$

Разумеется, величины ε_0 и μ_0 зависят от выбора системы единиц. Рассматривая кулоновскую систему в гл. 1—4, мы без какой-либо потери общности достигли значительного упрощения формул, используя систему единиц СГСЭ, в которой полагается $4\pi \varepsilon_0 = 1$.

В случае произвольной полностью ионизованной системы константы ε_0 и μ_0 играют важную роль, и, чтобы

в дальнейшем можно было использовать любую систему единиц, мы не будем конкретизировать эти константы.

Для численных расчетов приведем значения ϵ_0 и μ_0 в системе единиц МКСМ:

$$\epsilon_0 = 8,859 \cdot 10^{-12} \text{ А} \cdot \text{с} / \text{В} \cdot \text{м}, \mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ В} \cdot \text{с} / \text{А} \cdot \text{м}. \quad (1.3)$$

Максвелл впервые отметил, что система уравнений (1.1) может быть неверна, поскольку не выполняется необходимое условие $\nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{B}] = 0$. Анализируя уравнения (1.2) и (1.1г), он заключил, что (1.1г) следует заменить уравнением

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j}_{\text{эфф}} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (1.4)$$

Если же рассматривать электромагнитное поле не в вакууме, а при наличии материальной среды, то уравнения, определяющие поля \mathbf{E} и \mathbf{B} , еще остаются справедливыми. Однако мы знаем, что взаимодействие электромагнитных полей с веществом вызывает дополнительные заряды и токи, которые необходимо учитывать. Анализируя уравнение Пуассона (1.1а), получим уравнение

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0^{-1} \rho_{\text{эфф}} = \epsilon_0^{-1} (\rho_{\text{внешн}} - \nabla \cdot \mathbf{P}), \quad (1.5)$$

в котором полная эффективная плотность пространственного заряда $\rho_{\text{эфф}}$ является суммой плотности внешних зарядов $\rho_{\text{внешн}}$ и дивергенции вектора поляризации среды, взятой с отрицательным знаком. При этом соотношение

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (1.6)$$

определяет электрическую восприимчивость среды χ_e , которую, разумеется, нельзя получить из законов электродинамики, а следует вычислить исходя из свойств данной среды. С помощью соотношения (1.6) и определения вектора электрической индукции

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \quad (1.7)$$

преобразуем уравнение Пуассона к виду

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{внешн}}. \quad (1.8)$$

Индукцированные пространственные заряды и токи не сказываются на соотношениях (1.16) и (1.1в), и, сле-

довательно, в присутствии сред эти соотношения остаются неизменными.

Анализируя уравнение (1.1г), заметим, что полная эффективная плотность тока в материальной среде состоит из плотности внешних токов $\mathbf{j}_{\text{внешн}}$, плотности тока $\partial\mathbf{P}/\partial t$, обусловленной поляризацией среды, и плотности тока $\mathbf{j}_m = [\nabla \times \mathbf{M}]$, связанной с намагничиванием среды. Таким образом, уравнение (1.4) преобразуется к виду

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j}_{\text{внешн}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (1.9)$$

Введем величину магнитной восприимчивости χ_m с помощью соотношений

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (1.10)$$

и

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu H. \quad (1.11)$$

Используя (1.7), из уравнения (1.9) найдем

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{внешн}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.12)$$

Итак, приведем систему уравнений Максвелла, описывающую электромагнитное поле при наличии материальной среды:

$$\begin{aligned} \text{а) } \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, & \text{б) } \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \text{в) } \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{г) } \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \text{д) } \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E}, & \text{е) } \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \\ \text{ж) } \mathbf{B} &= \mu_0 \mu \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

К этим уравнениям добавлено соотношение, связывающее плотность тока и электрическое поле через проводимость σ . Здесь мы опустили индекс «внешн», но всюду подразумевается, что величины ρ и \mathbf{j} представляют собой плотности внешнего пространственного заряда и внешних токов.

Величины ε , μ и σ зависят от свойств материальной среды. Кроме того, они могут зависеть от времени и величины поля. В случае, когда параметры среды ε , μ

и σ зависят от длительности или соответственно от частоты процесса, но не зависят от величины поля, система уравнений (1.13) еще сохраняет свой вид для отдельной спектральной компоненты поля при преобразовании Фурье по времени. В этом случае оператор $\partial/\partial t$ следует заменить на $i\omega$, используя в качестве величин ϵ , μ и σ их значения ϵ_ω , μ_ω и σ_ω для данной частоты ¹⁾, согласно формулам

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{D}(t) \\ \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{j}(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-\tau)} \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \epsilon_\omega \\ \mu_0 \mu_\omega \\ \sigma_\omega \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{E}(\tau) \\ \mathbf{H}(\tau) \\ \mathbf{E}(\tau) \end{Bmatrix} d\omega d\tau. \quad (1.14)$$

Поскольку мы не учитываем конвекционных токов, используемые нами уравнения являются точными только для покоящихся материальных сред.

1.2. Электродинамические потенциалы

Из уравнения (1.13б) следует, что магнитная индукция \mathbf{B} может быть выражена через векторный потенциал \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.15)$$

Из (1.13в) вытекает, что электрическое поле \mathbf{E} можно представить в виде

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi. \quad (1.16)$$

Тогда остающиеся уравнения Максвелла приводят к уравнениям

$$\Delta \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon} \quad (1.17)$$

и

$$\Delta \mathbf{A} - \epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\epsilon_0 \epsilon \mu \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = -\mu_0 \mu \mathbf{j}. \quad (1.18)$$

Скалярный потенциал Φ определен с точностью до произвольной аддитивной постоянной, а векторный потенциал \mathbf{A} — с точностью до произвольной величины $\nabla \cdot \mathbf{A}$.

¹⁾ Из определения очевидно, что обратное преобразование Фурье от ϵ_ω , μ_ω и σ_ω не должно приводить к зависящим от времени функциям $\epsilon(t)$, $\mu(t)$ и $\sigma(t)$, как это могло бы показаться из формальных соотношений (1.7), (1.11) и (1.13д).

Эта свобода выбора выражения для векторного потенциала \mathbf{A} позволяет нам перейти от данной системы функций \mathbf{A} , Φ к другой системе \mathbf{A}' , Φ' . К вектору \mathbf{A} можно произвольно добавить градиент любой функции, не изменяя величины \mathbf{B} :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \psi. \quad (1.19)$$

Согласно соотношению (1.16), величина \mathbf{E} останется неизменной, если мы используем замену

$$\Phi' = \Phi + \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (1.20)$$

Соотношения (1.19) и (1.20) представляют собой так называемые *калибровочные преобразования*. Их основной смысл состоит в гарантии того, что используемые физические соотношения приводят только к таким результатам, которые могут выражаться непосредственно через поля взаимодействующих частиц и токов. В частности, если в качестве калибровки выбрать $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, то возникающее в этом случае преимущество заключается в том, что уравнение (1.17) примет простой вид уравнения Пуассона. С другой стороны, при этом весьма усложнится уравнение (1.18). Выбор указанного условия для векторного потенциала получил название *кулоновской калибровки*. Обычно гораздо чаще используется так называемая *лоренцевская калибровка*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\mu_0 \mu \sigma \Phi, \quad (1.21)$$

обладающая тем преимуществом, что ее использование приводит к симметризации обоих уравнений, определяющих потенциалы. Используя условие (1.21), получим следующие уравнения:

$$\Delta \mathbf{A} - \epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu_0 \mu (\mathbf{j} - \sigma \mathbf{E}) = -\mu_0 \mu \mathbf{j}_{\text{эл}} \quad (1.22)$$

и

$$\Delta \Phi - \epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (1.23)$$

Здесь следует напомнить, что плотность тока $\mathbf{j}_{\text{эл}}$ представляет собой лишь ту часть плотности тока, которая создается внешними электродвижущими силами. Она не содержит вклада, индуцируемого электрическими полями в проводящей среде, который описывается последним членом в левой части уравнения (1.22).

Вводя оператор Даламбера

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu, \quad (1.24)$$

перепишем уравнения для \mathbf{A} и Φ в виде

$$\square \mathbf{A} - \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu_0 \mu \mathbf{j}_{\text{эл}}, \quad (1.25)$$

$$\square \Phi - \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (1.26)$$

Эти уравнения будут основными в наших дальнейших исследованиях.

Решения для потенциалов

При рассмотрении полей в вакууме необходимо решить уравнения

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad (1.27)$$

$$\square \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.28)$$

Поскольку структура этих уравнений одинакова, можно рассмотреть единое уравнение вида

$$\square M(\mathbf{x}, t) = -a(\mathbf{x}, t). \quad (1.29)$$

Имеется множество различных способов решения этого уравнения. Один из них, например, состоит в том, чтобы, задаваясь выражениями для запаздывающих потенциалов, путем непосредственной их подстановки в уравнение (1.29) убедиться, что оно при этом удовлетворяется. Мы здесь предпочтем более дедуктивный метод, основанный на использовании преобразования Фурье:

$$\tilde{M}(\mathbf{x}, \omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} M(\mathbf{x}, t) dt. \quad (1.30)$$

Применение этого преобразования к уравнению (1.29) дает

$$\Delta \tilde{M}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{M}(\mathbf{x}, \omega) = -\tilde{a}(\mathbf{x}, \omega). \quad (1.31)$$

Частное решение неоднородного уравнения (1.31) с помощью функции Грина, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta \tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (1.32)$$

можно представить в виде следующего интеграла:

$$\tilde{M}(\mathbf{x}, \omega) = \int \tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \tilde{a}(\mathbf{x}', \omega) d\mathbf{x}'. \quad (1.33)$$

Функция Грина, удовлетворяющая уравнению (1.32) и условию обращения в нуль на бесконечности, определяется выражением

$$\tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = \frac{1}{4\pi r} e^{\pm i\omega r/c}, \quad r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|. \quad (1.34)$$

Таким образом, искомое частное решение уравнения (1.31) есть

$$\tilde{M}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\tilde{a}(\mathbf{x}', \omega)}{r} e^{\pm i\omega r/c} d\mathbf{x}'. \quad (1.35)$$

Обратное преобразование Фурье дает

$$M(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi (2\pi)^{1/2}} \iint \frac{\tilde{a}(\mathbf{x}', \omega)}{r} e^{i\omega(t \pm r/c)} d\mathbf{x}' d\omega \quad (1.36)$$

или соответственно

$$M(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{a(\mathbf{x}', t \pm r/c)}{r} d\mathbf{x}'. \quad (1.37)$$

Таким образом, для произвольно заданных плотностей внешних токов и пространственного заряда искомые потенциалы определяются формулами

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[\rho(\mathbf{x}', t)]}{r} d\mathbf{x}', \quad (1.38)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{x}', t)]}{r} d\mathbf{x}'. \quad (1.39)$$

Здесь квадратные скобки означают, что заключенные в них выражения следует брать в момент времени ($t \pm \pm r/c$).

Формулы (1.38) и (1.39) напоминают формулы для решений в статическом случае с той лишь разницей, что в выражениях для плотностей токов и пространственного заряда следует заменить время на величину $t \pm r/c$. Это означает, что при вычислении потенциалов нужно просуммировать вклады от зарядов и токов в различные моменты будущего и прошедшего времени.

В то время как суммирование по «запаздывающим вкладам» в момент времени $t - r/c$ представляется вполне разумным результатом, учитывающим, что для достижения точки наблюдения сигналу требуется конечное время r/c , по-видимому, совершенно бессмысленно учитывать вклады в поле от будущих положений заряда. Эти решения, содержащие величину $t + r/c$ и известные под названием «опережающих потенциалов», противоречат элементарному принципу причинности, устанавливающему, что никакой эффект не может предшествовать во времени его причине. По этим соображениям решениями данного типа обычно пренебрегают, хотя с математической точки зрения они вполне оправданы и представляют интерес при изучении проблемы перенормировки. Однако необходимо отчетливо сознавать, что, исключая упомянутые опережающие воздействия, мы по существу выходим за рамки содержания исходных дифференциальных уравнений.

Потенциал Герца

Уравнения Максвелла включают в себя условие сохранения заряда

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.40)$$

Уравнение (1.40) всегда выполняется, если для плотностей зарядов и токов использовать выражения

$$\rho = -\nabla \cdot \mathbf{X}, \quad \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}. \quad (1.41)$$

Аналогичным образом можно связать потенциалы Φ и A с некоторым векторным полем Z (потенциалом Герца):

$$\Phi = -\nabla \cdot Z, \quad A = \frac{1}{c^2} \frac{\partial Z}{\partial t}. \quad (1.42)$$

Это приведет к тому, что будет тождественно удовлетворяться условие лоренцевской калибровки для вакуума.

Из уравнений (1.41), (1.42) и (1.29) получим уравнение, связывающее величины Z и X :

$$\square Z(x, t) = -\frac{1}{4\epsilon_0} X. \quad (1.43)$$

Решение этого уравнения есть

$$Z(x, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[X]}{r} dx'. \quad (1.44)$$

Фурье-компонента от функции $Z(x, t)$ равна

$$\tilde{Z}_\omega(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\tilde{X}_\omega(x')}{r} e^{-i\omega r/c} dx'. \quad (1.45)$$

Очевидно, что электромагнитные поля посредством соотношений

$$E = \nabla \times [\nabla \times Z] - \frac{1}{\epsilon_0} X, \quad B = \frac{1}{c^2} \left[\nabla \times \frac{\partial Z}{\partial t} \right] \quad (1.46)$$

могут быть выражены через потенциал Герца Z .

1.3. Случай произвольного электромагнитного поля

Из соотношения (1.15) следует, что фурье-компонента вектора магнитной индукции B выражается через векторный потенциал (1.39) следующим образом:

$$\tilde{B}_\omega = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \tilde{j}_\omega(x') \frac{e^{-i\omega r/c}}{r} dx'. \quad (1.47)$$

После элементарных вычислений и обратного преобразования Фурье получим

$$B(x, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{[j] \times r}{r^3} + \frac{1}{c} \frac{[\partial j / \partial t] \times r}{r^2} \right) dx'. \quad (1.48)$$

Аналогично из соотношения (1.16) и выражений для потенциалов (1.38) и (1.39) имеем

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0\tilde{\mathbf{E}}_\omega &= - \int \tilde{\rho}_\omega \nabla \left(\frac{e^{-i\omega r/c}}{r} \right) d\mathbf{x}' - \frac{i\omega}{c^2} \int \tilde{\mathbf{j}}_\omega \frac{e^{-i\omega r/c}}{r} d\mathbf{x}' = \\ &= \int \tilde{\rho}_\omega \frac{\mathbf{r}}{r^3} e^{-i\omega r/c} d\mathbf{x}' + \frac{i\omega}{c} \int \left(\tilde{\rho}_\omega \frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{1}{cr} \tilde{\mathbf{j}}_\omega \right) e^{-i\omega r/c} d\mathbf{x}' = \\ &= \tilde{\mathbf{E}}_{\omega C} + \tilde{\mathbf{E}}_{\omega R}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Дальнейшие вычисления второго члена, входящего в правую часть формулы (1.49), несколько затруднительны. Поэтому здесь мы приведем только общую схему необходимых расчетов.

Применив преобразование Фурье к уравнению непрерывности заряда

$$\nabla' \cdot \tilde{\mathbf{j}}_\omega + i\omega \tilde{\rho}_\omega = 0, \quad (1.50)$$

этот член $\tilde{\mathbf{E}}_{\omega R}$ можно выразить только через фурье-компоненту плотности тока $\tilde{\mathbf{j}}_\omega$:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\omega R} = -\frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\mathbf{r}}{r} \left[(\nabla' \cdot \tilde{\mathbf{j}}_\omega(\mathbf{x}')) + \frac{i\omega}{c} \tilde{\mathbf{j}}_\omega(\mathbf{x}') \right] \right\} \frac{e^{-i\omega r/c}}{r} d\mathbf{x}'. \quad (1.51)$$

Затем с помощью обычных формул векторного анализа получим выражение

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{\omega R} &= \frac{1}{c} \int \{ (\tilde{\mathbf{j}}_\omega \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} - \mathbf{r} \times [\tilde{\mathbf{j}}_\omega \times \mathbf{r}] \} \frac{e^{-i\omega r/c}}{r^4} d\mathbf{x}' - \\ &\quad - \frac{i\omega}{c^2} \int \mathbf{r} \times [\tilde{\mathbf{j}}_\omega \times \mathbf{r}] \frac{e^{-i\omega r/c}}{r^3} d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (1.52)$$

или после обратного преобразования Фурье найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int \frac{[\rho] \mathbf{r}}{r^3} d\mathbf{x}' + \frac{1}{c} \int \frac{([\mathbf{j}] \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} - \mathbf{r} \times [[\mathbf{j}] \times \mathbf{r}]}{r^4} d\mathbf{x}' + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c^2} \int \frac{[[\partial \mathbf{j} / \partial t] \times \mathbf{r}] \times \mathbf{r}}{r^3} d\mathbf{x}' \right\}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Из выражений для полей (1.48) и (1.53) видно, что они содержат слагаемые с разной зависимостью от рас-

стояния r . Первые члены в правых частях этих выражений представляют собой соответственно запаздывающую магнитную индукцию и запаздывающее кулоновское поле, которые изменяются в пространстве по крайней мере как r^{-2} , в то время как последние члены, содержащие поле излучения, изменяются как r^{-1} .

Заметим, что в общем случае электромагнитные поля уже не представляют собой простого запаздывающего эквивалента решений для стационарного или статического поля, как в случае потенциалов Φ и A . Разумеется, это объясняется тем, что вследствие эффекта запаздывания оператор ∇ также неявно действует как производная по времени от запаздывающих величин. Это и только это обстоятельство приводит к появлению полей излучения.

1.4. Потенциалы Лиенара — Вихерта

Применим теперь полученные выражения для потенциалов (1.38) и (1.39) к частному случаю системы зарядов, распределенных в малой области пространства и движущихся с одинаковой скоростью. Такая система часто используется в качестве модели элементарных зарядов. Мы не будем здесь предполагать, что эти элементарные заряды являются «точечными» зарядами или обладают «абсолютно жесткой структурой», поскольку такие представления приводят к математической расходимости формул и противоречат требованиям релятивистской теории. Радиус заряда будет пониматься лишь в смысле характеристики предела применимости рассматриваемой нами макроскопической электродинамики. В качестве такого предела, в частности, можно было бы взять в случае необходимости классический радиус электрона

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} .$$

Приведем три основных положения, на которых основан вывод формул для потенциалов движущихся зарядов: 1) пространственная протяженность распределенных зарядов неограниченно мала по сравнению с расстоянием до точки наблюдения; 2) система распределенных

зарядов движется как единое целое со скоростью \mathbf{v} ; 3) полный заряд сохраняется постоянным, т. е. $\int \rho dx' = e$.

Задача носила бы совсем тривиальный характер, если бы в выражениях (1.38) и (1.39) вместо запаздывающих величин $[\rho]$, $[\mathbf{j}]$ содержались обычные значения ρ , \mathbf{j} , поскольку в таком случае можно использовать условия $r_e \ll r$ и $\int \rho dx' = \text{const} = e$. Однако здесь это исключено, так как

$$\int [\rho(\mathbf{x}', t)] dx' \neq e = \int \rho(\mathbf{x}', t) dx'. \quad (1.54)$$

При наличии движения одна и та же часть заряда дает вклад в наблюдаемый сигнал в разные моменты времени из различных мест пространства.

Нетрудно связать между собой источник сигнала, приходящего в момент $t' = t - r/c$, с долей de полного заряда e , которая дает вклад в излучение только в этот момент времени $t - r/c$. Если бы заряд покоился, то выполнялось бы соотношение

$$(de)_{v=0} = [\rho(\mathbf{x}', t)] d\sigma c dt', \quad (1.55)$$

где через $d\sigma$ обозначен элемент поверхности сферы, окружающей точку наблюдения. Реально излучающая часть заряда de в случае, когда рассматриваемая система перемещается в направлении «собирающей сферы» к точке наблюдения, будет меньше чем $(de)_{v=0}$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} de &= [\rho(\mathbf{x}', t)] d\sigma c dt' - \left[\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \rho(\mathbf{x}', t) \right] d\sigma dt' = \\ &= [\rho] \left[1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{cr} \right] d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Разрешив это соотношение относительно плотности запаздывающего заряда и подставив полученное для нее выражение в (1.38) и (1.39), найдем

$$\begin{Bmatrix} \Phi \\ \mathbf{A} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi} \int \begin{Bmatrix} \epsilon_0^{-1} \\ \mu_0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ [\mathbf{v}] \end{Bmatrix} \frac{de}{\left[r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c} \right]}. \quad (1.57)$$

Отсюда, как следствие предположения о малой пространственной протяженности заряда по сравнению с r , получаем

$$\Phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c}} \right], \quad A = \frac{e\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v}}{r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c}} \right]. \quad (1.58)$$

Описываемые этими формулами потенциалы являются *потенциалами Лиенара — Вихерта*.

Более прямой, но несколько формальный способ их вывода может быть осуществлен, если в исходные формулы ввести δ -функции Дирака:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \Phi \\ \mathbf{A} \end{array} \right\} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_0^{-1} \\ \mu_0 \end{array} \right\} \int \left[\begin{array}{l} \rho \\ \mathbf{j} \end{array} \right] \frac{d\mathbf{x}'}{r} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_0^{-1} \\ \mu_0 \end{array} \right\} \iiint \left\{ \begin{array}{l} \rho(\mathbf{x}', \tau) \\ \mathbf{j}(\mathbf{x}', \tau) \end{array} \right\} \frac{\delta(\tau - t + r/c)}{r} d\mathbf{x}' d\tau. \end{aligned} \quad (1.59)$$

В результате получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi \\ \mathbf{A} \end{array} \right\} = \frac{e}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_0^{-1} \\ \mu_0 \end{array} \right\} \int \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \mathbf{v}(\tau) \end{array} \right\} \frac{\delta(\tau - t + r/c)}{r(\tau)} d\tau. \quad (1.60)$$

§ 2. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЕЙ ИЗЛУЧЕНИЯ

2.1. Мультипольное разложение поля с помощью вектора Герца

Фурье-компонента вектора Герца (1.45), равная

$$\tilde{\mathbf{Z}}_\omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \tilde{\mathbf{X}}_\omega(\mathbf{x}') \frac{e^{-i\omega r(\mathbf{x}, \mathbf{x}')/c}}{r(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} d\mathbf{x}', \quad (2.1)$$

содержит функцию Грина $\tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$, определяемую выражением (1.34).

Ниже мы рассмотрим выражение (2.1) исходя из разложения

$$\begin{aligned} \frac{e^{-i\omega r/c}}{r} &= -i \frac{\omega}{c} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \gamma) \times \\ &\times j_l \left(-\frac{\omega |\mathbf{x}'|}{c} \right) h_l \left(-\frac{\omega |\mathbf{x}|}{c} \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

которое справедливо при $|\mathbf{x}'| < |\mathbf{x}|$. Здесь γ — угол, образуемый векторами \mathbf{x} и \mathbf{x}' , P_l — полином Лежандра порядка l , а j_l и h_l — сферические функции Бесселя и Ханкеля [4]

$$j_l(y) = \left(\frac{\pi}{2y}\right)^{1/2} J_{l+1/2}(y), \quad h_l(y) = \left(\frac{\pi}{2y}\right)^{1/2} H_{l+1/2}(y), \quad (2.3)$$

где J и H — цилиндрические функции Бесселя и Ханкеля.

Разложение (2.2) дает реальные преимущества при вычислениях только в том случае, когда можно перейти к асимптотическим формулам. Эта возможность существует в одном из следующих четырех случаев:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } |\mathbf{x}|, |\mathbf{x}'| \gg \lambda; & \text{б) } |\mathbf{x}| \gg \lambda, |\mathbf{x}'| \ll \lambda; \\ \text{в) } |\mathbf{x}| \ll \lambda, |\mathbf{x}'| \gg \lambda; & \text{г) } |\mathbf{x}|, |\mathbf{x}'| \ll \lambda; \end{array} \quad (2.4)$$

здесь $\lambda = c/\omega$ — длина исследуемой волны.

Условие (2.4а) соответствует предельному случаю поля излучения на высокой частоте при большой пространственной протяженности системы зарядов. Мы его не будем рассматривать, поскольку величина j_l ($— |\mathbf{x}'|/\lambda$) при $|\mathbf{x}'| \gg \lambda$ является периодической функцией вида

$$j_l\left(-\frac{|\mathbf{x}'|}{\lambda}\right) \rightarrow \frac{\lambda}{|\mathbf{x}'|} \sin\left(\frac{|\mathbf{x}'|}{\lambda} + \frac{l\pi}{2}\right), \quad (2.5)$$

подстановка которой в выражение (2.1) приводит к интегралам от суммы произведений

$$\tilde{X}_\omega(\mathbf{x}') P_l \sin\left(\frac{|\mathbf{x}'|}{\lambda} + \frac{1}{2} l\pi\right).$$

Кроме того, данный случай не позволяет выявить какие-либо общие характерные свойства поля излучения.

Случай (2.4б) относится к пределу $|\mathbf{x}| \gg \lambda$, характерному для низкочастотного поля излучения и распределенных зарядов, локализованных в малом участке пространства. Данный случай практически весьма интересен и позволяет, исходя из выражения (2.1), сделать ряд общих выводов. Он служит основой разложения по мультиполям Герца.

Случаи (2.4в) и (2.4г) мы здесь рассматривать не будем, поскольку вследствие ограничения $|\mathbf{x}| \ll \lambda$ ни один из них не соответствует излучению поля.

Итак, остановимся на исследовании случая (2.46), реализующегося при условии $|\mathbf{x}'| \ll \lambda \ll |\mathbf{x}|$. При этом воспользуемся асимптотическими выражениями

$$\begin{aligned}
 h_l \left(-\frac{\omega}{c} |\mathbf{x}'| \right) &= \frac{2l!}{(2l+1)!} \left(-\frac{\omega}{c} |\mathbf{x}'| \right)^l, \\
 h_l \left(-\frac{\omega}{c} |\mathbf{x}| \right) &= (-i)^{l-1} \frac{e^{-i\omega|\mathbf{x}|/c}}{\omega |\mathbf{x}|/c}.
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Подстановка выражения (2.6) в (2.2) дает ряд по мультипольным потенциалам:

$$\tilde{\mathbf{Z}}_\omega = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{Z}}_\omega^{(l)},
 \tag{2.7}$$

в котором

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{Z}}_\omega^{(l)} &= \frac{i^l}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-i\omega|\mathbf{x}|/c}}{|\mathbf{x}|} \cdot \frac{2l!}{(2l)!} \times \\
 &\times \int \left(\frac{\omega}{c} |\mathbf{x}'| \right)^l \tilde{\mathbf{X}}_\omega(\mathbf{x}') P_l(\cos \gamma) d\mathbf{x}'.
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

Выше неявно подразумевалось, что начало системы координат выбрано внутри распределенного заряда; в противном случае рассмотрение упоминавшихся четырех случаев было бы лишено смысла. С учетом этого замечания из (2.8) видно, что разложение по мультиполям учитывает вклады в излучение в убывающем порядке, поскольку величина потенциала отдельного мультиполя $\tilde{\mathbf{Z}}_\omega^{(l)}$ характеризуется параметром $\langle (|\mathbf{x}'|/\lambda)^l \rangle$.

Так как γ есть угол между векторами \mathbf{x} и \mathbf{x}' , выражение (2.8) может дать представление об угловой зависимости излучения только тогда, когда источники распределены в пространстве в виде линии, а ось координатной системы выбрана в направлении линии распределения. Для рассмотрения же общего случая воспользуемся теоремой разложения по сферическим гармоникам [5]

$$\begin{aligned}
 P_l(\cos \gamma) &= \sum_{m=0}^l a_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \vartheta) \times \\
 &\times P_l^m(\cos \vartheta') \cos m(\varphi - \varphi'),
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

$a_0 = 1, \quad a_m = 2 \text{ для } m \neq 0;$

здесь ϑ и ϑ' — полярные углы, а φ и φ' — азимутальные углы векторов \mathbf{x} и \mathbf{x}' соответственно.

Это дает ряд

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{\omega}^{(l)} = \sum_{m=0}^l \tilde{\mathbf{Z}}_{\omega}^{(l,m)}, \quad (2.10)$$

в котором члены ряда определены соотношением

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Z}}_{\omega}^{(l,m)} &= \frac{i^l}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-i\omega|\mathbf{x}|/c}}{|\mathbf{x}|} \cdot \frac{2l!}{(2l)!} a_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \vartheta) \times \\ &\times \int \left(\frac{\omega}{c} |\mathbf{x}'|\right)^l \tilde{\mathbf{X}}_{\omega}(\mathbf{x}') P_l^m(\cos \vartheta') \cos m(\varphi - \varphi') d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Мультипольные потенциалы Герца $\tilde{\mathbf{Z}}^{(l)}$ связаны с мультипольными моментами распределения зарядов. Покажем это на примере членов первого порядка, начав рассмотрение с члена $\tilde{\mathbf{Z}}_{\omega}^{(0)}$, который определен формулой

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{\omega}^{(0)} = \frac{e^{-i\omega|\mathbf{x}|/c}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x}|} \int \tilde{\mathbf{X}}_{\omega}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (2.12)$$

Используя равенство

$$\nabla' \cdot (\tilde{\mathbf{X}}_{\omega} x'_{\alpha}) = x'_{\alpha} \nabla' \cdot \tilde{\mathbf{X}}_{\omega} + \tilde{\mathbf{X}}_{\omega\alpha}, \quad (2.13)$$

а также теорему Гаусса и соотношения (1.41), найдем, что

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Z}}_{\omega}^{(0)} &= -\frac{e^{-i\omega|\mathbf{x}|/c}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x}|} \int \mathbf{x}' (\nabla' \cdot \tilde{\mathbf{X}}_{\omega}) d\mathbf{x}' = \frac{e^{-i\omega|\mathbf{x}|/c}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x}|} \langle \mathbf{x}' \tilde{\rho}_{\omega}(\mathbf{x}') \rangle = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-i\omega|\mathbf{x}|/c}}{|\mathbf{x}|} \tilde{\mathbf{D}}_e. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{D}}_e$ — электрический дипольный момент системы распределенных зарядов. Отсюда видим, что в низшем порядке потенциал Герца определяется электрическим дипольным моментом источника. Член первого порядка в потенциале Герца равен

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{\omega}^{(1)} = \frac{i}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-i\omega|\mathbf{x}|/c}}{|\mathbf{x}|} \int \frac{\omega}{c} |\mathbf{x}'| \tilde{\mathbf{X}}_{\omega}(\mathbf{x}') P_1(\cos \vartheta) d\mathbf{x}', \quad (2.15)$$

или

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Z}}_{\omega}^{(1)} &= \frac{i}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-i\omega|\mathbf{x}|/c}}{|\mathbf{x}|^2} \frac{\omega}{c} \int (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}) \tilde{\mathbf{X}}_{\omega}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \\ &= \frac{i}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-i\omega|\mathbf{x}|/c}}{|\mathbf{x}|^2} \frac{\omega}{c} \int \tilde{\mathbf{X}}_{\omega}(\mathbf{x}') (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}', \end{aligned} \quad (2.16)$$

Разложим тензор $\tilde{\mathbf{X}}_{\omega}(\mathbf{x}'$ на сумму симметричной и антисимметричной частей

$$\tilde{\mathbf{X}}_{\omega}(\mathbf{x}' = \frac{\tilde{\mathbf{X}}_{\omega}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}')}{2} (\tilde{\mathbf{X}}_{\omega} + \frac{\tilde{\mathbf{X}}_{\omega}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}')}{2} (\tilde{\mathbf{X}}_{\omega} - \dots \quad (2.17)$$

Тогда получим

$$\int \tilde{\mathbf{X}}_{\omega}(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x} \, d\mathbf{x}' = \frac{1}{2} \int \mathbf{x} \times [\tilde{\mathbf{X}}_{\omega} \times \mathbf{x}'] \, d\mathbf{x}' + \frac{1}{2} \int \{ \tilde{\mathbf{X}}_{\omega}(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{x}' (\tilde{\mathbf{X}}_{\omega} \cdot \mathbf{x}) \} \, d\mathbf{x}'. \quad (2.18)$$

Учитывая соотношение $\tilde{\mathbf{j}}_{\omega} = i\omega \tilde{\mathbf{X}}_{\omega}$, найдем вклад от антисимметричной части

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Z}}_{\omega}^{(1)} \text{ асимм} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \frac{e^{-i\omega|\mathbf{x}|/c}}{|\mathbf{x}|^2} \mathbf{x} \times \frac{1}{2} \int \tilde{\mathbf{j}}_{\omega} \times \mathbf{x}' \, d\mathbf{x}' = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \frac{e^{-i\omega|\mathbf{x}|/c}}{|\mathbf{x}|^2} \mathbf{x} \times \tilde{\mathbf{D}}_m. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{D}}$ — магнитный дипольный момент системы распределенных токов:

$$\tilde{\mathbf{D}}_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{x}' \times \tilde{\mathbf{j}}_{\omega}(\mathbf{x}') \, d\mathbf{x}'. \quad (2.20)$$

Таким образом, антисимметричная часть члена первого порядка в потенциале Герца представляет собой поле, обусловленное магнитным дипольным моментом. Физически такой момент вызван осциллирующим круговым током.

Вклад в член первого порядка вектора Герца от симметричной части

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Z}}_{\omega}^{(1)} \text{ симм} &= \frac{i}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-i\omega|\mathbf{x}|/c}}{|\mathbf{x}|^2} \frac{\omega}{c} \times \\ &\times \frac{1}{2} \int \{ \tilde{\mathbf{X}}_{\omega}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}') (\tilde{\mathbf{X}}_{\omega}) \cdot \mathbf{x} \, d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (2.21)$$

с помощью выражения

$$\nabla' \cdot (\tilde{\mathbf{X}}_{\omega} x'_{\alpha} x'_{\beta}) = (\nabla' \cdot \tilde{\mathbf{X}}_{\omega}) x'_{\alpha} x'_{\beta} + \tilde{X}_{\omega\alpha} x'_{\beta} + \tilde{X}_{\omega\beta} x'_{\alpha}, \quad (2.22)$$

теоремы Гаусса и (1.41) можно преобразовать к виду

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{\omega}^{(1)} \text{ симм} = \frac{i\omega}{8\pi\epsilon_0 c} \frac{e^{-i\omega|\mathbf{x}|/c}}{|\mathbf{x}|^2} \mathbf{x} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}_e, \quad (2.23)$$

где величина

$$\tilde{Q}_e = \int \mathbf{x}' (\mathbf{x}' \tilde{\rho}_\omega(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (2.24)$$

является электрическим квадрупольным тензором (моментом) рассматриваемой системы распределенных зарядов.

Суммируя сказанное, приходим к выводу, что член первого порядка в выражении для вектора Герца описывает вклады от магнитного дипольного и электрического квадрупольного моментов, тогда как в нулевом порядке разложения учитываются эффекты от электрического дипольного момента. Аналогично проведенному выше рассмотрению можно показать, что в общем случае l -й член разложения вектора Герца представляет собой вклад в излучение, обусловленный электрическим мультиполем $2^{(l+1)}$ -го порядка и магнитным мультиполем 2^l -го порядка.

Выражения для электромагнитных полей соответствующих мультиполей можно получить непосредственно из соотношения (1.46). Здесь мы приведем лишь некоторые необходимые нам результаты:

1. Магнитное мультипольное излучение (l, m)-го порядка любого заданного распределения зарядов в общем случае меньше электрического мультипольного излучения того же порядка примерно в $(v/c)^{-1}$ раз, где v — скорость зарядов.

2. В зоне излучения поля \mathbf{B} и \mathbf{E} направлены перпендикулярно радиусу-вектору и каждое из них убывает с расстоянием как r^{-1} .

3. Угловое распределение мультипольного излучения (l, m)-го порядка в общем случае имеет весьма сложный характер и в основном определяется членом

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (l-m) (l+m+1) |P_l^{m+1}|^2 + \\ & + \frac{1}{2} (l+m) (l-m+1) |P_l^{m-1}|^2 + m^2 |P_l^m|^2. \quad (2.25) \end{aligned}$$

4. Момент импульса, переносимый мультипольным излучением (l, m)-го порядка в единицу времени, содержит лишь z -компоненту (dL_z/dt). Отношение данной величины к излучаемой мультиполем в единицу времени энергии

$d\varepsilon/dt$ равно

$$\frac{dL_z/dt}{d\varepsilon/dt} = \frac{m}{\omega} = \frac{m\hbar}{\hbar\omega}. \quad (2.26)$$

Этот результат хотя и получен в классическом рассмотрении, имеет квантовомеханическую интерпретацию, заключающуюся в том, что фотон $\hbar\omega$, излучаемый мультиполем (l, m) -го порядка, уносит момент импульса, равный $m\hbar$.

2.2. Электромагнитное поле одиночного заряда

Электромагнитные поля, излучаемые одиночным зарядом, однозначно определены потенциалами Лиенара — Вихерта

$$\Phi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c} \right], \quad \mathbf{A} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{c^2} \left[\frac{\mathbf{v}}{r - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c} \right] \quad (2.27)$$

и соотношениями

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.28)$$

Напомним, что величины в квадратных скобках относятся к запаздывающему времени $t' = t - r/c$, а операторы ∇ и $\partial/\partial t$, входящие в соотношения (2.28), имеют смысл $\nabla|_t$ и $\partial/\partial t|_x$.

Трудности при использовании формул (2.28) и (2.27) возникают в связи с тем, что величины \mathbf{v} и \mathbf{x}' обычно задаются в виде функций от t' , так что в большинстве случаев приходится иметь дело с функциями $\Phi(\mathbf{x}, t')$ и $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t')$, а не с $\Phi(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$. Поэтому при вычислениях по формулам (2.28), по-видимому, лучше выразить операторы $\partial/\partial t|_x$ и $\nabla|_t$ через операторы $\partial/\partial t'|_x$ и $\nabla|_{t'}$. Это можно сделать с помощью соотношений

$$r = c(t - t'), \quad \left. \frac{\partial r}{\partial t'} \right|_x = -\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r}. \quad (2.29)$$

Отсюда находим

$$\left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_x = c \left(1 - \left. \frac{\partial t'}{\partial t} \right|_x \right) = \left. \frac{\partial r}{\partial t'} \right|_x \frac{\partial t'}{\partial t} \Big|_x = -\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r} \frac{\partial t'}{\partial t} \Big|_x, \quad (2.30)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{cr} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t'} \Big|_{\mathbf{x}}. \quad (2.31)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \nabla r |_{t} &= -c \nabla t' |_{t} = \nabla r |_{t'} + \frac{\partial r}{\partial t'} \nabla t' |_{t} = \\ &= \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{r} \nabla t' |_{t}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

или

$$\nabla t' |_{t} = -\frac{1}{c} \frac{\mathbf{r}}{r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/c}, \quad (2.33)$$

что приводит к формуле

$$\nabla |_{t} = \nabla |_{t'} - \frac{\mathbf{r}}{c(r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/c)} \frac{\partial}{\partial t'}. \quad (2.34)$$

Используя формулы (2.28), (2.31) и (2.34), а также сокращенные обозначения

$$\mathbf{s} = r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c} \quad (2.35)$$

и

$$\nabla s |_{t'} = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad (2.36)$$

находим выражения для электромагнитных полей

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\epsilon_0}{e} \mathbf{E} &= \frac{1}{s^3} \left(\mathbf{r} - \frac{r}{c} \mathbf{v} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{c^2 s^3} \left\{ \mathbf{r} \times \left[\left(\mathbf{r} - \frac{r}{c} \mathbf{v} \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\epsilon_0 c^2}{e} \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{s^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{cs^3} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \left[\mathbf{r} \times \left[\left(\mathbf{r} - \frac{r}{c} \mathbf{v} \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right] \right]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Отсюда видно, что

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{E}}{rc}, \quad (2.39)$$

Обратим особое внимание на то, что, хотя для простоты мы опустили квадратные скобки, все входящие в формулы величины содержат запаздывающее время.

2.3. Угловое и частотное распределение энергии, излучаемой одиночным зарядом

Анализ зависимости различных членов от r в выражениях (2.37) и (2.38) показывает, что ответственными за излучение являются вторые члены в правых частях. Это позволяет однозначно определить энергию, переносимую излучаемым полем, через вектор Пойнтинга.

Однако в данный момент нас интересует не столько вопрос о том, какое количество энергии проходит через элемент поверхности у точки наблюдения, сколько величина потери энергии данной частицы, обусловленной ее излучением в заданных пределах телесного угла и частотного интервала за единицу времени t' .

В силу сохранения энергии излучаемого поля электромагнитная энергия, проходящая через элемент телесного угла $d\Omega$ за время dt , должна быть равна потере энергии электрона, обусловленной излучением в пределах телесного угла $d\Omega$ в течение времени dt' , связанного посредством соотношения (2.31) с интервалом dt . Обозначив энергию электрона через \mathcal{E} , таким образом получим

$$-d^2\mathcal{E} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S} r^2 d\Omega dt = \hat{\mathbf{r}} \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] r^2 d\Omega dt = \varepsilon_0 c E^2 r^2 d\Omega dt. \quad (2.40)$$

Отсюда видно, что вектор Пойнтинга \mathbf{S} направлен параллельно \mathbf{r} .

Используя формулу (2.31), найдем, что

$$w(\Omega) = -\frac{d^2\mathcal{E}}{dr' d\Omega} = \varepsilon_0 c E^2 r^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{cr}\right). \quad (2.41)$$

Это дает выражение

$$w(\Omega) = \frac{e^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\{\hat{\mathbf{r}} \times [(\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{v}/c) \times \dot{\mathbf{v}}]\}^2}{(1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}/c)^5}. \quad (2.42)$$

Интегрирование выражения (2.42) по телесному углу приводит к результирующей формуле для суммарной

энергии, излучаемой электроном за одну секунду:

$$w^T = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \cdot \frac{\dot{v}^2 - [\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}]^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^3}. \quad (2.43)$$

Величина w^T тождественно совпадает с суммарным потоком излучаемой энергии за секунду, проходящим через замкнутую фиксированную поверхность, окружающую данный заряд. Заметим, однако, что величина $w(\Omega)$ не равна потоку энергии $d^2\mathcal{E}/dt d\Omega$, измеренному покоящимся наблюдателем.

До сих пор мы интересовались угловым распределением излучения. Теперь рассмотрим его спектральное распределение. Обратимся с этой целью к теореме Парсеваля, согласно которой

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E} \times \mathbf{H} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{E}}_\omega \times \tilde{\mathbf{H}}_{-\omega} d\omega = \\ &= 2 \int_0^\infty \tilde{\mathbf{E}}_\omega \times \tilde{\mathbf{H}}_\omega d\omega = 2 \int_0^\infty \mathbf{S}_\omega d\omega, \end{aligned} \quad (2.44)$$

где $\tilde{\mathbf{E}}_\omega$ и $\tilde{\mathbf{H}}_\omega$ — соответствующие фурье-компоненты величин

$$\mathbf{E} = (2\pi)^{-1/2} \int \tilde{\mathbf{E}}_\omega e^{i\omega t} d\omega, \quad \mathbf{H} = (2\pi)^{-1/2} \int \tilde{\mathbf{H}}_\omega e^{i\omega t} d\omega'. \quad (2.45)$$

Заметим при этом, что величина $\mathbf{S}_\omega = \tilde{\mathbf{E}}_\omega \times \tilde{\mathbf{H}}_\omega$ не является фурье-компонентой вектора Пойнтинга $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Величина \mathbf{W} имеет размерность энергии на единицу площади, \mathbf{S} — размерность энергии в единицу времени на единицу площади, а \mathbf{S}_ω — размерность энергии на единицу площади в единичном интервале частот.

Поскольку разложение Фурье однозначное, энергия, излучаемая в единичном интервале частот и приходящаяся на единицу площади, должна быть равной

$$2|\mathbf{S}_\omega| = 2|\tilde{\mathbf{E}}_\omega \times \tilde{\mathbf{H}}_\omega| = 2\epsilon_0 c \tilde{\mathbf{E}}_\omega^2, \quad (2.46)$$

а соответствующие потери энергии электрона в пределах единичного телесного угла определяются формулой

$$w(\Omega, \omega) = 2\varepsilon_0 c \tilde{E}_\omega^2 r^2 = \frac{2e^2 r^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \times \\ \times \left| (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \frac{\mathbf{r} \times [(\mathbf{r} - r\mathbf{v}/c) \times \dot{\mathbf{v}}]}{(r - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c)^3} dt \right|^2. \quad (2.47)$$

Движение частицы обычно описывается функцией от t' . Поэтому мы перейдем в выражении (2.47) от времени t к t' :

$$w(\Omega, \omega) = \frac{e^2}{16\pi^3 \varepsilon_0 c^3} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t' - r/c)} \frac{\hat{\mathbf{r}} \times [(\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{v}/c) \times \dot{\mathbf{v}}]}{(1 - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{r}}/c)^2} dt' \right|^2. \quad (2.48)$$

Использованное нами исходное допущение ограничивает движение заряда областью, размеры которой малы по сравнению с расстоянием до точки наблюдения. Следовательно, должны выполняться соотношения

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{r}, \quad |\mathbf{x}'| \ll |\mathbf{r}|, \quad r \approx x - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}'. \quad (2.49)$$

По тем же соображениям будем считать в рассматриваемом приближении величину $\hat{\mathbf{r}}$ постоянной. В таком случае должно выполняться следующее соотношение:

$$\frac{1}{c} \frac{\hat{\mathbf{r}} \times [(\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{v}/c) \times \dot{\mathbf{v}}]}{(1 - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{r}}/c)^2} = \frac{d}{dt'} \left(\frac{\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{v}/c}{(1 - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{r}}/c)} - \hat{\mathbf{r}} \right). \quad (2.50)$$

Интегрируя в (2.48) по частям при условии $\mathbf{v} = 0$ для $t \rightarrow \pm \infty$, с помощью соотношения (2.50) найдем

$$w(\Omega, \omega) = \frac{e^2 \omega^2}{16\pi^3 \varepsilon_0 c^3} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t' - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}'/c)} \hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}] dt' \right|^2. \quad (2.51)$$

Заметим, что здесь (и ниже) во всех формулах для спектрального распределения энергии частота должна считаться положительной, так как вклад отрицательных частот ω мы уже учли в формуле (2.44) с помощью множителя, равного 2.

Выражения (2.48) и (2.51) позволяют ответить на все вопросы относительно спектрального и углового распределения излучения движущегося заряда при условии, что точка наблюдения достаточно от него удалена.

Дипольное приближение

Одним из важнейших частных случаев, к которому приводят полученные формулы в пределе малой скорости $v/c \ll 1$, является *дипольное приближение*.

Угловое распределение энергии, излучаемой электроном в единицу времени, может быть получено с помощью выражения (2.42), которое в этом случае сводится к

$$w(\Omega) = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{v}}^2 \sin^2 \vartheta, \quad \frac{\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r}}{vr} = \cos \vartheta, \quad (2.52)$$

а соответствующее выражение для суммарной энергии имеет вид

$$w^T = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{v}^2. \quad (2.53)$$

Поток энергии в единице телесного угла, приходящийся на единичный интервал частот, в заданной точке наблюдения можно получить из формулы (2.48):

$$w(\Omega, \omega) = \frac{e^2}{16\pi^3\epsilon_0 c^3} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t'} \hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{v}}] dt' \right|^2. \quad (2.54)$$

Наконец, суммарная энергия, излучаемая во всех направлениях в единичном интервале частот, равна

$$w^T(\omega) = \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon_0 c^3} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t'} \dot{\mathbf{v}} dt' \right|^2. \quad (2.55)$$

Формула (2.52) показывает, почему данное приближение, соответствующее условию $v/c \ll 1$, называется дипольным. Выражения (2.53) и (2.55) соответственно представляют собой известные формулы Лармора и Герца.

§ 3. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

3.1. Классическое описание

Рассмотрим в исследуемой полностью ионизованной системе эффект ускорения, обусловленный парными взаимодействиями заряженных частиц. Излучение, возникающее при таких «свободно-свободных переходах», называется *тормозным*.

В последующем изложении мы будем исходить из результатов дипольного приближения, в рамках которого поля излучения описываются выражениями

$$\mathbf{E}_R = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{r} \times [\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}]}{r^3}, \quad \mathbf{B}_R = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{r}}{r^2}, \quad (3.1)$$

справедливыми в области скоростей $v \ll c$, что, таким образом, исключает релятивистские эффекты.

Выражения (3.1) показывают, что тормозное излучение связано с ускорением центра заряда. Оно отсутствует, если взаимодействующие частицы, имеющие равные отношения e/m , покоятся или движутся равномерно и прямолинейно. Следовательно, такие частицы не дают вклада в «тормозное дипольное излучение при парных столкновениях».

Заметим далее, что при столкновениях различных частиц их ускорения обратно пропорциональны их массам, поэтому мы можем пренебречь вкладом ионов в тормозное излучение по сравнению с вкладом электронов.

Чтобы рассчитать излучение электрона в процессе его прохождения вблизи иона, обладающего кратностью заряда Z , необходимо знать кинематику этого движения. К счастью, последнее представляет собой хорошо исследованную задачу. Известно, что в этом случае электрон обладает плоской траекторией и в обозначениях, приведенных на фиг. 21, зависимость r от φ может быть представлена в виде

$$\frac{1}{r} = \frac{1 - \epsilon \cos \varphi}{b_0 (\epsilon^2 - 1)}. \quad (3.2)$$

Здесь параметры b_0 и ε с помощью соотношений

$$b_0 = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m v_s^2}, \quad \varepsilon^2 - 1 = \left(\frac{b}{b_0}\right)^2 = \left(\frac{j}{m v_s b_0}\right)^2 \quad (3.3)$$

связаны с кинетической энергией падающей частицы $\frac{1}{2} m v_s^2$ и моментом импульса j (через v_s обозначена начальная скорость падающего электрона).

Из фиг. 21 нетрудно получить соотношения

$$b = b_0 \operatorname{tg} \varphi_0,$$

$$\varepsilon^2 - 1 = \operatorname{tg}^2 \varphi_0 = \operatorname{ctg}^2 (\chi/2), \quad (3.4)$$

$$\chi = \pi - 2\varphi_0,$$

откуда следует, что величина b_0 является прицельным параметром, соответствующим отклонению сталкивающегося электрона на 90° .

Для вычислений спектральной плотности излучаемой энергии используем формулу (2.55). Если выбрать систему координат, приведенную на фиг. 21,

Ф и г. 21. Геометрия столкновения частиц в случае кулоновских сил притяжения.

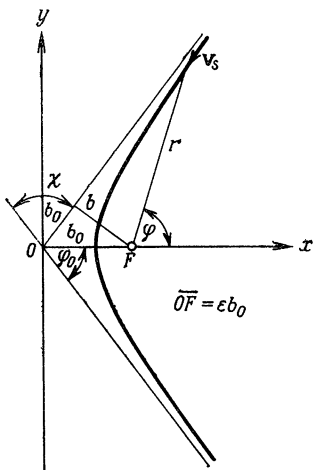
то величины \ddot{x}_ω и \ddot{y}_ω , входящие в (2.55), можно представить в следующей форме:

$$\ddot{x}_\omega = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{x}(t) \cos \omega t dt, \quad (3.5)$$

$$\ddot{y}_\omega = -i (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{y}(t) \sin \omega t dt,$$

где использованы свойства симметрии рассматриваемой системы. Выразим теперь компоненты \ddot{x} и \ddot{y} через r и φ :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m r^2} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$



Подставив этот результат в выражения (3.5), получим

$$\begin{aligned}\ddot{x}_\omega &= -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_s b} (2\pi)^{-1/2} \int_{\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0} \cos \omega t \cos \varphi d\varphi, \\ \ddot{y}_\omega &= i \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_s b} (2\pi)^{-1/2} \int_{\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0} \sin \omega t \sin \varphi d\varphi.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Здесь, используя закон сохранения момента импульса

$$\frac{r^2 d\varphi}{dt} = v_s b, \quad (3.8)$$

мы произвели замену, перейдя от dt к $d\varphi$. При вычислении интегралов в соотношениях (3.7) необходимо было бы заменить переменную t на φ . Это представляет собой элементарную, но довольно громоздкую процедуру. Она оказывается выполнимой до конца в приближении прямолинейного движения, которое будет рассмотрено ниже в данном параграфе.

При исследовании общего случая оказывается более целесообразным использовать подстановки, обычно употребляемые в небесной механике. С их помощью координаты x и y выражаются в виде явных функций некоторого надлежащим образом выбранного параметра [6]. В этом случае можно выполнить интегрирование в выражениях (3.7) и, используя (2.55), получить формулу для спектральной плотности суммарной энергии излучения

$$\begin{aligned}w^T(\omega, b, v_s) &= \left(\frac{2e^2\omega^2}{3\pi^2\epsilon_0 c^3} \right) \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_s^2} \right)^2 \times \\ &\times \left\{ \left[\frac{d}{du} K_{iQ}(u) \right]_{Q\epsilon}^2 + \frac{\epsilon^2 - 1}{\epsilon^2} [K_{iQ}(Q\epsilon)]^2 \right\} e^{\pi Q}.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Здесь параметр Q определяется соотношением

$$Q = \frac{\omega b_0}{v_s}, \quad (3.10)$$

а через $K_\nu(u)$ обозначена модифицированная функция Бесселя, которая связана с функцией Ханкеля $H_\nu^{(1)}$ [4]:

$$K_\nu(u) = \left(\frac{\pi i}{2} \right) \exp\left(\frac{\pi \nu i}{2} \right) H_\nu^{(1)}(iu). \quad (3.11)$$

Формула (3.9) дает спектральное распределение энергии в дипольном приближении в предположении о том, что можно пренебречь радиационным затуханием.

Теперь с помощью формулы для спектральной плотности энергии $w^T(\omega, b, v_s)$, излучаемой при однократном столкновении, определим величину дифференциальной излучательной способности электрона, обусловленной его столкновениями с ионами:

$$\eta_\omega(v_s) = \frac{1}{8\pi} n_+ v_s \int_0^\infty \int_0^{2\pi} w^T(\omega, b, v_s) b db d\varphi; \quad (3.12)$$

здесь множитель $1/8\pi$ связан с переходом к величине, нормируемой на единицу телесного угла и одно направление поляризации. Подставив в формулу (3.12) выражение (3.9), найдем, что дифференциальная излучательная способность электрона равна

$$\eta_\omega(v_s) = n_+ \left(\frac{e^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} \right) \left(\frac{Ze^2}{4\pi \epsilon_0 m} \right)^2 \frac{1}{v_s} [-QK_{iQ}(Q) K'_{iQ}(Q)] e^{\pi Q}. \quad (3.13)$$

Конечно, излагавшийся до сих пор общий подход к задаче об излучении одиночного заряда будет не полным, если в него не включить два широко используемых приближенных метода: приближение прямолинейного движения и низкочастотное приближение.

Приближение прямолинейного движения

При анализе интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\mathbf{v}}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.14)$$

нетрудно получить следующие оценки:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_\omega \\ \ddot{y}_\omega \end{pmatrix} = -(2\pi)^{-1/2} \frac{Ze^2}{4\pi \epsilon_0 m b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ i \frac{v_s t}{b} \sin \omega t \end{pmatrix} \frac{dt}{\left(1 + \left(\frac{v_s t}{b}\right)^2\right)^{3/2}}, \quad (3.15)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\tilde{x}}_{\omega} \\ \ddot{\tilde{y}}_{\omega} \end{pmatrix} = -(2\pi)^{-1/2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m} \begin{pmatrix} 1 \\ bv_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{для } \omega \ll \frac{v_s}{b}, \quad (3.15a)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\tilde{x}}_{\omega} \\ \ddot{\tilde{y}}_{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{для } \omega \gg \frac{v_s}{b}. \quad (3.15b)$$

Первая из приведенных выше оценок (3.15а) является результатом перемножения максимального значения подынтегральной функции на полуширину интервала интегрирования, а вторая (3.15б) объясняется интерференцией высокочастотных волн.

Следовательно, можно ожидать, что фотоны не очень большой энергии будут излучаться главным образом при косых столкновениях. Или, говоря на языке чисел, излучение в радиочастотной области для температур порядка 100—1000 градусов будет происходить преимущественно при $b \sim 10^{-2}$ см. Соотношения (3.3) и (3.4) применительно к этому случаю дают

$$\epsilon^2 \approx \operatorname{ctg}^2 \frac{\chi}{2} \approx 10^{12}. \quad (3.16)$$

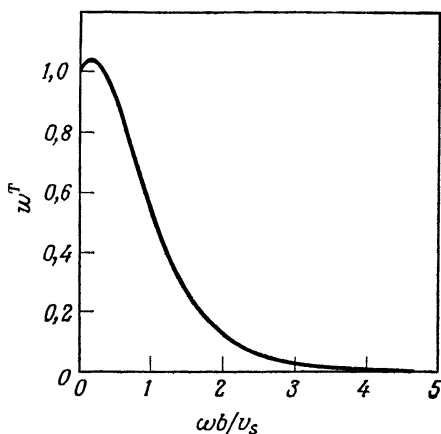
Оценка показывает, что для него хорошо выполнено условие применимости приближения прямолинейного движения. В данном приближении вычисление интегралов, входящих в выражения (3.7), не представляет труда. Однако здесь мы предпочтем рассмотреть эквивалентный предельный переход $Q \rightarrow 0$ в выражении (3.9).

При осуществлении этого предельного перехода следует обратить внимание на то, что величина $Q\epsilon$ может принимать конечное значение, несмотря на то, что Q стремится к нулю. Это вытекает из соотношений (3.3) и (3.10), согласно которым в приближении прямолинейного движения выполняется условие

$$Q\epsilon \approx \left(\frac{\omega b_0}{v_s} \right) \left(\frac{b}{b_0} \right) = \frac{\omega b}{v_s}. \quad (3.17)$$

При данном условии предельный переход для спектральной плотности энергии (3.9) приводит к формуле

$$w^T(\omega, b, v_s) = \left(\frac{2e^2\omega^2}{3\pi^2\epsilon_0 c^3} \right) \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_s^2} \right)^2 \times \\ \times \left\{ \left[\frac{dK_0(u)}{du} \Big|_{\omega b/v_s} \right]^2 + \left[K_0 \left(\frac{\omega b}{v_s} \right) \right]^2 \right\}. \quad (3.18)$$



Ф и г. 22. Спектр энергии излучения электрона, вычисленный по формуле (3.18) и нормированный на величину

$$\frac{2e^2}{3\pi^2\epsilon_0 c^3} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_s^2} \right)^2 \frac{v_s^2}{b^2}.$$

Зависимость, определяемая этой формулой, представлена на фиг. 22. Выражение для дифференциальной излучательной способности (3.13) в этом случае запишется следующим образом:

$$\eta_\omega(v_s) = n_+ \left(\frac{e^2}{6\pi^2\epsilon_0 c^3} \right) \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m} \right)^2 \frac{1}{v_s} \ln \left(\frac{2}{\gamma} \frac{4\pi\epsilon_0 m v_s^3}{\omega Z e^2} \right). \quad (3.19)$$

где $\gamma = \exp C \approx 1,781$ ($C \approx 0,577$ — постоянная Эйлера).

Низкочастотное приближение

Низкочастотная область в данном случае определяется как такая область частот, в пределах которой можно пренебречь зависимостью от времени в тригонометрических функциях, входящих в (3.7), и рассматривать их постоянными. Тогда интегрирование выражений (3.7) проводится тривиально, и в результате получаем

$$w^T(\omega, b, v_s) = \frac{Ze^2}{6\pi^2\epsilon_0 c^3} \left(\frac{2v_s}{\epsilon} \right)^2. \quad (3.20)$$

Заметим, что полученная спектральная плотность не зависит от ω . Это означает, что мы аппроксимируем процесс излучения импульсом исчезающе малой длительности.

Для количественного описания приближения, соответствующего данному выше определению низкочастотного предела, используем в общей формуле (3.9) асимптотическое представление модифицированных функций Бесселя при $\omega \rightarrow 0$. Это приводит к условию

$$(Q\varepsilon)^{-1} \gg \ln(Q\varepsilon), \quad (3.24)$$

ограничивающему применимость низкочастотного приближения. Оно выполняется при

$$Q\varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.22)$$

Очевидно, что такое условие является более сильным, чем условие применимости приближения прямолинейного движения, при котором величина $Q\varepsilon$ имеет конечное значение.

Поскольку условие $Q\varepsilon \rightarrow 0$ включает в себя как частный случай $Q \rightarrow 0$, для дифференциальной излучательной способности в низкочастотном пределе мы имеем результат (3.19), совпадающий с полученным в приближении прямолинейного движения. Отметим, что в отличие от расходящегося выражения для излучательной способности, которое можно было бы получить на основе формулы (3.20), в формуле (3.19) содержится зависимость от ω , устраняющая расходимость. Это и является причиной, позволившей нам избежать предположения о бесконечно малой длительности процесса излучения.

3.2. Некоторые результаты квантовомеханического рассмотрения

Все проводившиеся до сих пор расчеты основывались исключительно на классической теории излучения. Это также неявно подразумевалось в общих принципах, содержащихся в определении рассматриваемой нами модели плазмы. Условие $\hbar = 0$ оправдывало пренебрежение потерями энергии электрона на излучение в соответствии

с неравенством

$$\hbar\omega \ll \frac{1}{2} m v_s^2, \quad (3.23)$$

а также позволяло использовать приближенное описание движения электрона с помощью классической траектории, что справедливо только при условии

$$\lambda = \frac{\hbar}{m v_s} \ll b. \quad (3.24)$$

Приведенные выше соотношения указывают, что квантово-механические эффекты становятся важными в тех случаях, когда существенный вклад дают радиационное затухание и излучение при столкновениях с прицельными параметрами

$$b \approx \frac{\hbar}{m v_s}. \quad (3.25)$$

Поскольку упомянутые эффекты при рассмотрении тормозного излучения действительно важны, мы здесь приведем ряд результатов, полученных из квантовомеханического рассмотрения.

В этой связи заметим, что каждому шагу квантовомеханического рассмотрения можно сопоставить неразрешимую в рамках классического рассмотрения задачу, связанную со всеми характеристиками излучения, не содержащими явной зависимости от прицельного параметра.

Обычно в теории излучения зависимость от температуры, частоты и других эффектов учитывается с помощью так называемого фактора Гаунта, который определяется соотношением

$$\eta_\omega(v_s) = n_+ \left(\frac{e^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} \right) \left(\frac{Z e^2}{4\pi \epsilon_0 m} \right)^2 \frac{1}{v_s} \frac{\pi}{3^{1/2}} G(v_s, \omega). \quad (3.26)$$

Для изложенного выше классического рассмотрения фактор $G(v_s, \omega)$ был бы равен логарифмическому члену, входящему в выражение (3.19), умноженному на коэффициент $3^{1/2}/\pi$.

Квантовомеханическое рассмотрение дает для фактора Гаунта выражение

$$G(v_s, \omega) = \frac{3^{1/2}}{\pi} \frac{x \frac{d}{dx} |{}_2F_1(x)|^2}{(e^{2\pi q_s} - 1)(1 - e^{-2\pi q_f})}, \quad (3.27)$$

где

$${}_2F_1(x) = {}_2F_1(iq_s, iq_f, 1, -x).$$

Здесь параметры q_s и q_f определены соотношениями

$$q_s = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar v_s}, \quad q_f = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar v_f}, \quad (3.28)$$

а величина x — соотношением

$$x = \frac{4q_s q_f}{(q_s - q_f)^2}. \quad (3.29)$$

${}_2F_1$ — обобщенная гипергеометрическая функция в обычных обозначениях, введенных Ватсоном [4]; через v_s и v_f обозначены начальная и конечная скорости электрона, которые связаны между собой условием Борна

$$\frac{1}{2} m v_s - \frac{1}{2} m v_f^2 = \hbar \omega. \quad (3.30)$$

Приведенная выше общая формула (3.27) была получена Зоммерфельдом [8]. Вычисления с ее помощью довольно сложны, хотя она и широко используется при расчетах тормозного рентгеновского излучения в рентгеновских трубках и термоэмиссионных устройствах.

Рассмотрим снова два предельных случая низких и высоких частот.

В *низкочастотной области* (приближение прямолинейного движения)

$$\frac{\omega Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_s^3} = \frac{\omega b_0}{v_s} \ll 1 \quad (3.31)$$

выражение для фактора Гаунта принимает вид

$$G = \frac{3^{1/2}}{\pi} \left[\ln \left(\frac{2m v_s^2}{\hbar \omega} \right) - C - \operatorname{Re} \{ \psi(1 + i q_s) \} \right]. \quad (3.32)$$

Здесь C — постоянная Эйлера ($C \approx 0,577$), а ψ — логарифмическая производная от гамма-функции, $\psi(x) = d \ln \Gamma(x) / dx$. При малых скоростях электрона выражение для фактора Гаунта можно упростить:

$$G = \frac{3^{1/2}}{\pi} \ln \left(\frac{2}{\gamma} \cdot \frac{4\pi\epsilon_0 m v_s^3}{\omega Ze^2} \right). \quad (3.33)$$

Здесь $\gamma = \exp C \approx 1,781$.

Для больших скоростей электронов

$$G = \frac{3^{1/2}}{\pi} \ln \left(\frac{2mv_s^2}{\hbar\omega} \right). \quad (3.34)$$

Интересно заметить, что результат (3.33) для малых скоростей, полученный из формулы (3.26), повторяет результат классического рассмотрения, тогда как формула (3.34), вытекающая из (3.26) в пределе больших скоростей, в аргументе логарифма содержит явное проявление типично квантовых эффектов. На первый взгляд это может показаться несколько неожиданным.

Смысл этого обстоятельства заключается в том, что предел применимости приближения прямолинейного движения при малых скоростях электронов ограничивает область прицельных параметров значениями, значительно превосходящими длину волны де Бройля.

При больших скоростях электронов классический результат будет совпадать с результатом квантовомеханического рассмотрения, если в качестве минимального значения прицельного параметра выбрать длину волны де Бройля \hbar/mv_s .

Эльверт [9] на основе численных расчетов показал, что классическое рассмотрение остается справедливым даже для величин q_s порядка единицы.

В *высокочастотной области* Эльверт [10] получил формулу, которая несколько превосходит рамки применимости борновского приближения. Соответствующее выражение для фактора Гаунта имеет вид

$$G = \frac{3^{1/2}}{\pi} \frac{q_f}{q_s} \frac{1 - e^{-2\pi q_s}}{1 - e^{-2\pi q_f}} \ln \frac{q_f + q_s}{q_f - q_s}. \quad (3.35)$$

Здесь, как и прежде, величины q_s и q_f связаны между собой условием Борна (3.30), которое приводит к появлению зависимости от частоты в формуле (3.35).

Введем теперь понятие *коэффициента излучения*, который связан с дифференциальной излучательной способностью следующим образом:

$$j_\omega = \int \eta_\omega(v) f(v) dv. \quad (3.36)$$

По аналогии с определением фактора Гаунта, использованным в выражении для дифференциальной излучатель-

ной способности, при определении коэффициента излучения обычно используется *средний фактор Гаунта* $\bar{G}(\Theta, \omega)$:

$$j_{\omega} = n_{-}n_{+} \frac{Z^2 e^6}{48\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m^2} \left(\frac{m}{2\pi\Theta} \right)^{1/2} \frac{\pi}{3^{1/2}} \cdot \bar{G}(\Theta, \omega). \quad (3.37)$$

Общее выражение для этого фактора можно найти, подставив формулу (3.26) в (3.36) и сравнив полученный результат с (3.37). Аналитического решения этой задачи в общем случае не существует. Явные выражения могут быть получены лишь в двух рассматривавшихся выше предельных случаях.

В *низкочастотном приближении* для больших (но нерелятивистских) скоростей электронов фактор Гаунта определен формулой [6]

$$\bar{G}(\Theta, \omega) = \frac{3^{1/2}}{\pi} \ln \left(\frac{4}{\gamma} \frac{\Theta}{\hbar\omega} \right), \quad (3.38)$$

а для малых скоростей электронов — формулой

$$\bar{G}(\Theta, \omega) = \frac{3^{1/2}}{\pi} \ln \left[\left(\frac{2}{\gamma} \right)^{5/2} \left(\frac{\Theta}{m} \right)^{3/2} \left(\frac{4\pi\epsilon_0 m}{Ze^2 \omega} \right) \right]. \quad (3.39)$$

Интересно отметить, что формула, полученная в приближении малых энергий, справедливы вплоть до величины $q_s \approx 1$.

В *высокочастотном приближении* можно было бы воспользоваться формулой Эльверта. Однако при этом опять не удастся найти аналитическое решение. В рамках борновского приближения, используя формулу, полученную Эльвертом в пределе больших значений v_s и v_f , получим

$$G(v_s, \omega) = \frac{3^{1/2}}{\pi} \ln \frac{q_f + q_s}{q_f - q_s}, \quad (3.40)$$

откуда следует

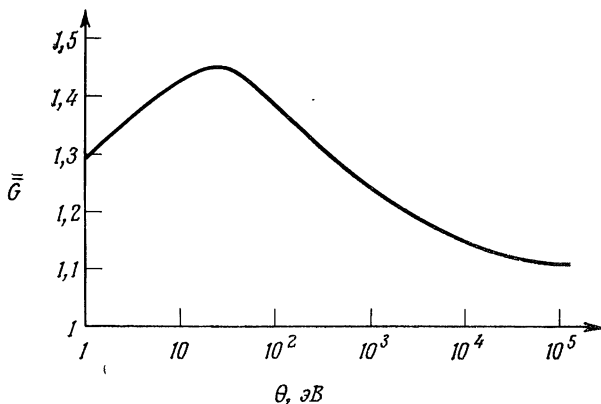
$$\bar{G}(\Theta, \omega) = \frac{3^{1/2}}{\pi} e^{-\hbar\omega/2\Theta} K_0 \left(\frac{\hbar\omega}{2\Theta} \right). \quad (3.41)$$

Здесь K_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Для очень высоких частот асимптотическое представление K_0 дает

$$\bar{G}(\Theta, \omega) = \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/2} e^{-\hbar\omega/\Theta} \left(\frac{\hbar\omega}{\Theta} \right)^{-1/2}. \quad (3.42)$$

Обратим внимание на то, что в выражении для j_ω вся зависимость от частоты целиком содержится в факторе Гаунта \bar{G} .

Суммарное излучение, приходящееся на единицу объема, времени и телесного угла (для одного направления



Ф и г. 23. Зависимость величины \bar{G} от температуры при $Z = 1$ [11]

поляризации), определяется путем интегрирования коэффициента излучения по частоте. При этом опять с помощью соотношения

$$j = n_- n_+ \left(\frac{2}{3} \pi \right)^{1/2} \frac{Z^2 e^6}{96 \pi^4 \epsilon_0^3 \hbar m c^2} \left(\frac{\Theta}{m c^2} \right)^{1/2} \bar{G} \quad (3.43)$$

вводится понятие усредненного фактора Гаунта \bar{G} .

Величина \bar{G} была численно найдена Грином [11], использовавшим формулу Зоммерфельда (3.27). Соответствующий график представлен на фиг. 23. В борновском приближении для высоких энергий электронов фактор Гаунта приближается к предельному значению $\bar{G} = 2 \sqrt{3}/\pi$.

§ 4. ЦИКЛОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Циклотронное излучение возникает при ускорении заряженных частиц в магнитных полях. В настоящем параграфе мы сделаем исключение из нашего общего пра-

вила не рассматривать внешних магнитных полей, так как циклотронное излучение представляет большой принципиальный интерес и, кроме того, по характеру аналитического рассмотрения оно тесно связано с тормозным излучением.

Расчет характеристик циклотронного излучения в постоянном магнитном поле в дипольном приближении является довольно тривиальной задачей. Интересные особенности возникают лишь в релятивистской области. Итак, используем полученную ранее общую формулу (2.51)

$$w(\omega, \Omega) = \frac{e^2 \omega^2}{16\pi^3 \varepsilon_0 c^3} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t' - \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}'}{c})} \hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}] dt' \right|^2. \quad (4.1)$$

Для вычислений по этой формуле необходимо знать скорость \mathbf{v} и координату \mathbf{x}' как функции времени. Движение частицы в релятивистском случае в любой инерциальной системе координат описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (4.2)$$

где

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} (1 - \beta^2)^{-1/2} = \frac{\mathcal{E} \mathbf{v}}{c^2}, \quad (4.3)$$

\mathcal{E} — полная энергия рассматриваемой частицы, а $\beta = \mathbf{v}/c$.

В отсутствие электрического поля из уравнения (4.2) следует, что $|\mathbf{p}| = \text{const}$. Мы пренебрегаем радиационным затуханием, что вполне допустимо для всех случаев, кроме случая частиц с ультрарелятивистскими скоростями.

При $p = \text{const}$ уравнение (4.2) описывает вращение частицы с угловой частотой

$$\omega_L = \frac{eB}{m_0} (1 - \beta^2)^{1/2} = \omega_{L0} (1 - \beta^2)^{1/2}, \quad (4.4)$$

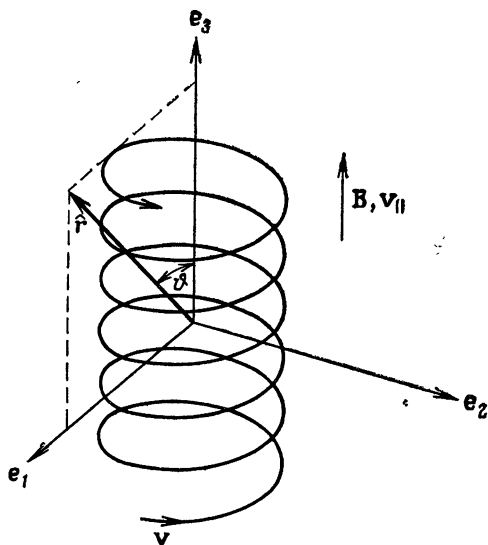
где через ω_{L0} обозначено нерелятивистское значение ларморовской частоты.

Пусть частица движется с постоянной скоростью $v_{||}$ вдоль магнитного поля. Тогда винтовая траектория рас-

смаатриваемой частицы определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_{\perp} \cos \omega_L t' \mathbf{e}_1 + v_{\perp} \sin \omega_L t' \mathbf{e}_2 + v_{\parallel} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x}' &= \frac{v_{\perp}}{\omega_L} \sin \omega_L t' \mathbf{e}_1 - \frac{v_{\perp}}{\omega_L} \cos \omega_L t' \mathbf{e}_2 + v_{\parallel} t' \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь знак заряда принят отрицательным, поскольку нас интересуют только электроны. Смысл обозначений ясен



Ф и г. 24. Винтовая траектория электрона, движущегося в однородном магнитном поле.

из фиг. 24. Выберем вектор $\hat{\mathbf{r}}$ в плоскости $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$. Тогда

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin \vartheta \mathbf{e}_1 + \cos \vartheta \mathbf{e}_3. \quad (4.6)$$

Подставив это выражение в (4.1), запишем экспоненциальный множитель в виде

$$\begin{aligned} \exp \left[-i\omega t' + i \frac{\omega}{c} \mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{r}} \right] &= \\ &= \exp i \left\{ \frac{\omega}{\omega_L} \beta_{\perp} \sin \vartheta \sin \omega_L t' + (\beta_{\parallel} \cos \vartheta - 1) \omega t' \right\}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

а двойное векторное произведение как

$$\hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}] = \begin{pmatrix} v_{\parallel} \sin^2 \vartheta \cos \omega_L t' - v_{\perp} \cos^2 \vartheta \cos \omega_L t' \\ -v_{\perp} \sin \omega_L t' \\ -v_{\parallel} \sin^2 \vartheta + v_{\perp} \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \omega_L t' \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Сгруппируем теперь все члены, входящие в выражение (4.8), в соответствии с их функциональной зависимостью от времени. Чтобы провести расчеты по формуле (4.1), необходимо вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-i\omega \left(t' - \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}'}{c} \right) \right] \hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}] dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ i \left[\frac{\omega}{\omega_L} \beta_{\perp} \sin \vartheta \sin \omega_L t' + (\beta_{\parallel} \cos \vartheta - 1) \omega t' \right] \right\} \times \\ &\quad \times (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \sin \omega_L t' + \mathbf{c}_3 \cos \omega_L t') dt', \quad (4.9) \end{aligned}$$

где величины \mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_2 и \mathbf{c}_3 представляют собой векторы, которые нетрудно получить с помощью (4.8). Воспользуемся теперь разложением

$$\exp(i\xi \sin \omega_L t') = \sum_{-\infty}^{+\infty} \exp(im\omega_L t') J_m(\xi), \quad (4.10)$$

$$\text{где } \xi = \frac{\omega}{\omega_L} \beta_{\perp} \sin \vartheta.$$

После этого вычисление члена, содержащего \mathbf{c}_1 , становится тривиальным, и результат сводится к δ -функции Дирака. Чтобы рассчитать член с \mathbf{c}_2 , продифференцируем (4.10) по ξ , а затем, интегрируя в (4.9), снова придем к δ -функции. Член с \mathbf{c}_3 проинтегрируем по частям, рассматривая его совместно с первой частью экспоненциального множителя как полный дифференциал. В результате получим

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= 2\pi \sum_m \left\{ \mathbf{c}_1 J_m(\xi) - i\mathbf{c}_2 J'_m(\xi) + \mathbf{c}_3 \frac{\omega}{\omega_L} \frac{1 - \beta_{\parallel} \cos \vartheta}{\xi} J_m(\xi) \right\} \times \\ &\quad \times \delta(m\omega_L - \omega(1 - \beta_{\parallel} \cos \vartheta)). \quad (4.11) \end{aligned}$$

Теперь разложим векторы \mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_2 , \mathbf{c}_3 на компоненты вдоль направлений \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 и подставим в (4.11) в (4.1).

Поскольку нас интересует излучательная способность рассматриваемой системы, рассчитаем величину излучения за единицу времени. Такая задача выглядела простой в случае тормозного излучения, когда каждое столкновение, длящееся лишь очень короткое время, можно было рассматривать как полностью завершенное и поэтому излучательная способность выражалась произведением излучения за один процесс столкновения на число столкновений в секунду.

В случае циклотронного излучения, поскольку мы пренебрегаем радиационным трением, процесс, в течение которого происходит излучение, длится от момента времени $-\infty$ до $+\infty$. Чтобы проанализировать переход от излучательной способности w к дифференциальной излучательной способности η , рассмотрим процесс излучения в течение конечного интервала времени T , а затем перейдем к пределу $T \rightarrow \infty$. Тогда переход от суммарной энергии излучения к излучательной способности характеризуется соотношением

$$\left| \int_{-T/2}^{+T/2} e^{i\bar{\omega}t'} dt' \right|^2 \rightarrow \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{i\bar{\omega}t'} dt' \right) \left(\int_{-T/2}^{+T/2} e^{-i\bar{\omega}t'} dt' \right). \quad (4.12)$$

В пределе $T \rightarrow \infty$ получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\bar{\omega}t'} dt' = 2\pi\delta(\bar{\omega}), \quad (4.13)$$

и первый член в правой части соотношения (4.12) при $T \rightarrow \infty$ и $\bar{\omega} = 0$ стремится к предельному значению, равному единице, а поэтому

$$4\pi^2\delta^2(\bar{\omega}) \rightarrow 2\pi\delta(\bar{\omega}). \quad (4.14)$$

Используя (4.14) в формулах (4.1), (4.9) и (4.11), получим выражение для излучательной способности в виде

$$\eta_{\omega}(\omega, \mathbf{v}, \vartheta) = \frac{e^2\omega^2}{8\pi^2\epsilon_0 c} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} (\beta_{\parallel} - \cos \vartheta) J_m(\xi) \\ i\beta_{\perp} \frac{d}{d\xi} J_m(\xi) \\ (\cos \vartheta - \beta_{\parallel}) J_m(\xi) \end{array} \right)^2 \times \\ \times \delta(m\omega_L - \omega(1 - \beta_{\parallel} \cos \vartheta)) \quad (4.15)$$

или в виде

$$\eta_{\omega}(\omega, \nu, \vartheta) = \frac{e^2 \omega^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\cos \vartheta - \beta_{\parallel}}{\sin \vartheta} \right)^2 J_m^2(\xi) + \beta_{\perp}^2 J_m'^2(\xi) \right\} \times \\ \times \delta[m\omega_L - \omega(1 - \beta_{\parallel} \cos \vartheta)]. \quad (4.16)$$

Члены с отрицательными m мы опустили, поскольку соответствующие им отрицательные значения ω уже были исключены (см. стр. 317).

Очевидно, что выражение для дифференциальной излучательной способности описывает линейчатый спектр, в котором, судя по виду δ -функции Дирака в формуле (4.16), частоты отдельных линий равны

$$\omega_m = \frac{m\omega_L}{1 - \beta_{\parallel} \cos \vartheta} = \frac{m\omega_{L0}(1 - \beta^2)^{1/2}}{1 - \beta_{\parallel} \cos \vartheta}. \quad (4.17)$$

Частоты этих линий кратны ларморовской частоте с учетом релятивистского фактора и доплеровского смещения вследствие движения вдоль магнитного поля, описываемого знаменателем формулы (4.17).

Угловое распределение различных гармоник является весьма сложным. Это можно видеть из формулы (4.16) и фиг. 25, где представлены несколько первых гармоник полученного разложения.

Полная излучательная способность на данной гармонике определяется формулой (см. работу Шотта [12])

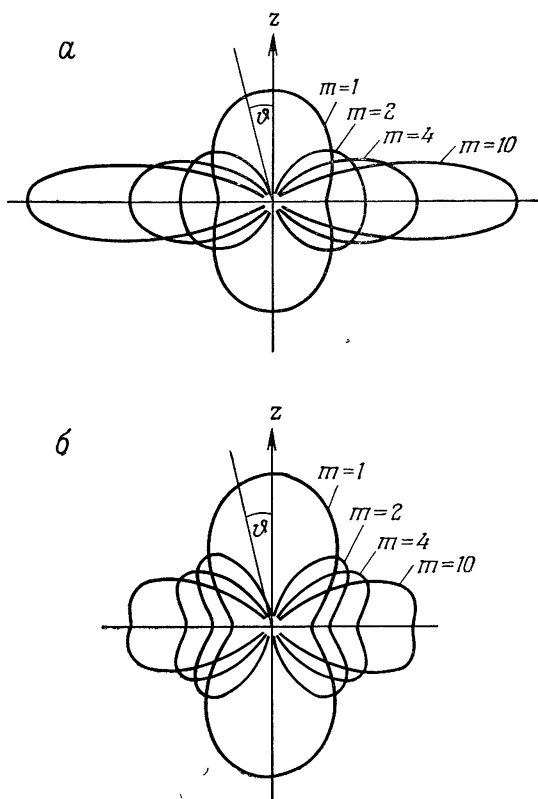
$$\eta_m^T = \frac{e^2 \omega_{L0}^2}{4\pi \epsilon_0 c} \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta_{\parallel}^2} \bar{\beta} \left[J'_{2m}(\bar{\beta}) - \frac{1}{2} \frac{1 - \beta^2}{\beta^2 - \beta_{\parallel}^2} \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\bar{\beta}} J_{2m}(x) dx \right], \quad (4.18)$$

в которой использовано обозначение

$$\bar{\beta} = \frac{2m\beta_{\perp}}{(1 - \beta_{\parallel}^2)^{1/2}} = 2m \left(\frac{\beta^2 - \beta_{\parallel}^2}{1 - \beta_{\parallel}^2} \right)^{1/2}. \quad (4.19)$$

Наконец, полная излучательная способность, равная сумме излучений по всем гармоникам, имеет вид

$$\eta^T = \frac{e^2 \omega_{L0}^2}{6\pi \epsilon_0 c} \frac{\beta_{\perp}^2}{1 - \beta^2} = \frac{e^2 \omega_{L0}^2}{6\pi \epsilon_0 c} \left\{ (1 - \beta_{\parallel}^2) \left(\frac{\mathcal{E}}{m_0 c^2} \right)^2 - 1 \right\}. \quad (4.20)$$



Ф и г. 25. Угловое распределение некоторых гармоник циклотронного излучения, нормированное на одинаковую величину суммарной интенсивности.

a — для $\beta = 0,9$; *б* — для предельного значения $\beta \rightarrow 0$,

*Циклотронное излучение системы,
находящейся в тепловом равновесии*

Для системы электронов, находящихся в тепловом равновесии, коэффициент излучения равен

$$j_m(\omega, \vartheta) = \int \eta_m(\omega, \beta, \vartheta) f(\beta) d\beta. \quad (4.21)$$

Здесь f — функция распределения. В случае, когда $\beta_{\parallel} \ll \beta_{\perp}$, выражение (4.16) имеет более простой вид:

$$\eta_m(\omega, \beta, \vartheta) = \frac{e^2 \omega^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \{ \text{ctg}^2 \vartheta J_m^2(m\beta) + \\ + \beta^2 J_m'^2(m\beta) \} \delta(\omega - m\omega_L) = \bar{\eta}_m(\beta, \vartheta) \delta(\omega - m\omega_L). \quad (4.22)$$

В результате формула (4.21) для коэффициента излучения преобразуется к

$$j_m(\omega, \vartheta) = \int \delta[\omega - m\omega_L(\beta_{\perp})] \bar{\eta}_m(\beta_{\perp}, \vartheta) f(\beta_{\perp}) d\beta_{\perp}. \quad (4.23)$$

Для скоростей электронов, когда можно пренебречь членами более высокого порядка, чем β_{\perp}^2 , максвелловское распределение имеет вид

$$f(\beta_{\perp}) = n_- \frac{m_0 c^2}{\Theta} \exp \left\{ -\frac{\beta_{\perp}^2 m_0 c^2}{2\Theta} \right\}, \quad (4.24)$$

где n_- — плотность электронов.

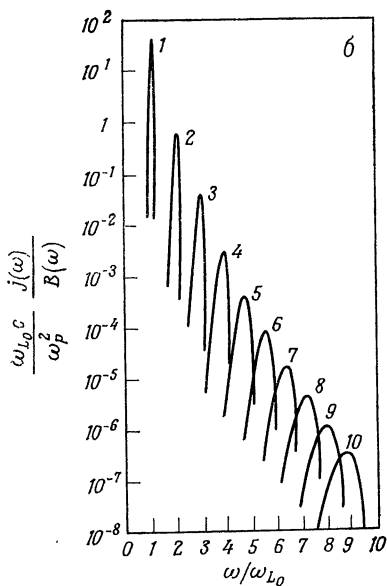
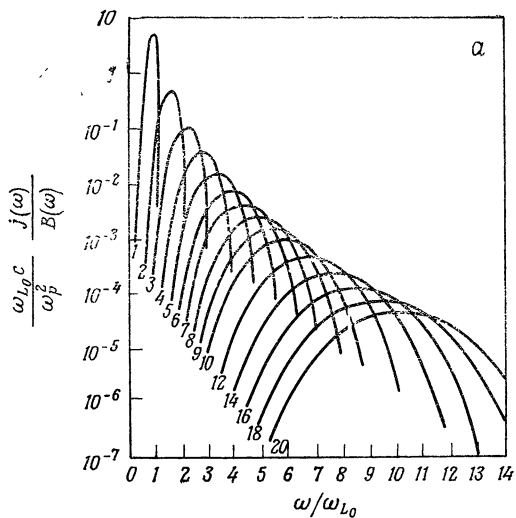
Выражения (4.23) и (4.24) были получены Хиршфильдом, Болдуином и Броуном [13, 14]. Мы приведем их окончательную формулу, в которой уже выполнено интегрирование по углу ϑ :

$$j_m(\omega) = \frac{\omega_{L0} \omega_p^2 m_0}{2\pi^2 c} \frac{1}{x} \frac{m_0 c^2}{\Theta} \exp \left[-\frac{m_0 c^2}{\Theta} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \right] \times \\ \times \left\{ J_{2m} [2m(1-x^2)^{1/2}] - (1-x^2)^{-1/2} J_{2m+1} [2m(1-x^2)^{1/2}] - \right. \\ \left. - x^{-2} (1-x^2)^{-1/2} \sum_{\nu=1}^{\infty} J_{2m+2\nu+1} [2m(1-x^2)^{1/2}] \right\}. \quad (4.25)$$

Здесь ω_p — электронная плазменная частота, а $x = \omega/m\omega_{L0}$.

На фиг. 26 представлены результаты расчетов спектра излучения для двух значений температур по формуле (4.25), нормированного относительно спектра излучения абсолютно черного тела

$$B(\omega) = \frac{\omega^2 \Theta}{2\pi^3 c^2}. \quad (4.26)$$



Ф и г. 26. Спектр циклотронного излучения системы, находящейся в тепловом равновесии, нормированный на поток излучения черного тела.

а — $\theta = 100$ кэВ; б — $\theta = 10$ кэВ.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, изд-во «Наука», М. 1967.
3. Becker R., Sauter F., Theorie der Elektrizität, Vol. 1, Teubner, Stuttgart, 1962.
4. Watson G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge Univ. Press., London and New York, 1962.
5. Handbook of Mathematical Functions, eds. M. Abramowitz, I. A. Stegun, Dover, New York, 1965.
6. Oster L., Rev. Mod. Phys., **33**, 525 (1961).
7. Bekefi G., Radiation Processes in Plasmas, Wiley, New York, 1966 (см. перевод: Дж. Бекефи, Радиационные процессы в плазме, изд-во «Мир», 1971).
8. Sommerfeld A., Atombau und Spektrallinien, Vol. II, Vieweg, Braunschweig, 1939.
9. Elwert G., Zs. Naturforsch., **A3**, 477 (1948).
10. Elwert G., Ann. Phys. (Leipzig), **34**, 178 (1939).
11. Greene J., Astrophys. Journ., **130**, 693 (1959).
12. Schott G. A., Electromagnetic Radiation, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1912.
13. Hirshfield J. L., Brown S. C., Phys. Rev., **122**, 719 (1961);
14. Hirshfield J. L., Baldwin D. E., Brown S. C., Phys. Fluids, **4**, 198 (1961).

Дополнительная литература

К § 3

- Panofsky W. K., Phillips M., Classical Electricity and Magnetism, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1955.
- Berger J. M., Phys. Rev., **105**, 35 (1957).
- Brussaard P. J., van de Hulst H. C., Rev. Mod. Phys., **34**, 507 (1962).
- Гинзбург В. Л., Распространение электромагнитных волн в плазме, изд-во «Наука», М., 1967.
- Karzas W. J., Latter R., Astrophys. Journ. Suppl. Ser., **6**, 167 (1961).
- Kramers H. A., Phil. Mag., **46**, 836 (1923).
- Scheuer P. A. G., Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **120**, 231 (1960).

К § 4

- Beard D. B., Phys. Fluids, **2**, 379 (1959); **3**, 324 (1960).
- Bekefi G., Hirschfield J. L., Brown S. C., Phys. Rev., **122**, 1037 (1961).
- Drummond W. E., Rosenbluth M. N., Phys. Fluids, **3**, 45 (1960).
- Oster L., Phys. Rev., **119**, 1444 (1960).
- Oster L., Phys. Rev., **121**, 961 (1961).
- Rosner H., Rep. AFSWC-TR-58-47, Republic Aviation Corp., Farmingdale, Lond Island, New York, 1958.
- Трубников Б. А., Phys. Fluids, **4**, 195 (1961).

Глава 6

Взаимодействие электромагнитных полей с системой многих частиц

§ 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Как мы уже видели, в качестве основы для описания кулоновской системы можно использовать цепочку уравнений ББГКИ. Исходя из этого, следует ожидать, что для полностью ионизованной системы, находящейся в произвольном электромагнитном поле, можно по аналогии с методом, изложенным в гл. 2, получить более общую цепочку уравнений. Эта цепочка уравнений должна быть более сложной, так как в ней закон кулоновского взаимодействия заменяется системой уравнений Максвелла. При выводе цепочки уравнений для частных функций распределения из уравнений Климонтовича возникает ряд усредненных характеристик поля, которые выражаются через эти частные функции распределения. В результате требуются дополнительные уравнения, которые можно получить из соответствующего усреднения уравнений Максвелла.

В отличие от метода, излагавшегося в гл. 2, мы перейдем здесь к представлению уравнений в пространстве скоростей, поскольку при наличии уравнений Максвелла формализм функции Гамильтона не дает преимуществ. Поэтому во всех последующих приложениях мы будем применять представление в пространстве скоростей, которое в той или иной мере согласуется с общей методикой, принятой в литературе.

Пусть плотность распределения отдельной i -й частицы в фазовом пространстве описывается функцией

$$F_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i(t)). \quad (1.1)$$

Дифференцируя ее, получаем

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}, \mathbf{v}} = -\mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{r}} - \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{v}}. \quad (1.2)$$

Здесь ускорение $\dot{\mathbf{v}}_i$ определяется уравнением

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \frac{e_i}{m_i} [\mathbf{E}(\mathbf{r}_i, t; \mathbf{r}_j |_{j \neq i}) + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i, t; \{\mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j\} |_{j \neq i})], \quad (1.3)$$

в котором напряженности электрического и магнитного полей \mathbf{E} и \mathbf{B} зависят не только от набора координат $\{\mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j\} |_{j \neq i}$ остальных частиц системы, но также и от внешних источников. Подставив (1.3) в (1.2), получим уравнение

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_i}{m_i} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1.4)$$

Умножим теперь уравнение (1.4) на функцию распределения по ансамблю $f_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{v}_N; t)$ и проинтегрируем его по всему фазовому пространству:

$$\int f_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{v}_N; t) \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_i}{m_i} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{v}} \right\} d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{v}_N = 0. \quad (1.5)$$

Для этого используем полученное с помощью теоремы Лиувилля соотношение (2.2.6):

$$f_N \left(\frac{\partial F_i}{\partial t} \right)_{i_r, i_v} = \left(\frac{\partial f_N F_i}{\partial t} \right)_{i_r, i_v, r_1, \dots, v_N} + \sum_j \left(\dot{\mathbf{r}}_j \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} + \dot{\mathbf{v}}_j \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j} \right) f_N F_i. \quad (1.6)$$

Интегрирование соотношения (1.6) приводит к следующему результату:

$$\int f_N \frac{\partial F_i}{\partial t} d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{v}_N = \frac{\partial f_1(i_r; i_v; t)}{\partial t}, \quad (1.7)$$

поскольку интеграл от последнего члена в правой части (1.6) обращается в нуль. Это можно показать, интегрируя его по частям и используя уравнения движения.

Рассмотрим теперь приведенные частные функции распределения

$$f_s(i_r, i_v, \dots, i_r, i_v, \dots, s_r, s_v; t) = \int f_N F_1 \dots F_s d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{v}_N \quad (1.8)$$

и усредненные величины полей $\langle \mathbf{M} \rangle_s$ порядка s

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{M} \rangle_s(\mathbf{r}, {}^1\mathbf{r}, {}^1\mathbf{v}, \dots, {}^s\mathbf{r}, {}^s\mathbf{v}; t) = \\ = \frac{\int \mathbf{M}(\mathbf{r}, \dots) f_N F_1 \dots F_s d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{v}_N}{f_s({}^1\mathbf{r}, \dots, {}^s\mathbf{v}; t)}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Используя (1.7) и (1.9) в уравнении (1.5), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{v}; t)}{\partial t} + {}^i\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_1({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{v}; t)}{\partial {}^i\mathbf{r}} + \\ + \frac{e_i}{m_i} \int d\mathbf{r}_i \int [\langle \mathbf{E} \rangle_1(\mathbf{r} = \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i; t) + \\ + \mathbf{v}_i \times \langle \mathbf{B} \rangle_1(\mathbf{r} = \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t)] f_1(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) \frac{\partial F_i}{\partial {}^i\mathbf{v}} d\mathbf{v}_i = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

или соответственно

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{v}; t)}{\partial t} + {}^i\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_1({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{v}; t)}{\partial {}^i\mathbf{r}} + \\ + \frac{e_i}{m_i} \frac{\partial}{\partial {}^i\mathbf{v}} \cdot [\langle \mathbf{E} \rangle_1(\mathbf{r} = {}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{v}; t) + \\ + {}^i\mathbf{v} \times \langle \mathbf{B} \rangle_1(\mathbf{r} = {}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{r}; {}^i\mathbf{v}; t)] f_1({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{v}; t) = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Выпишем теперь уравнения Максвелла для электромагнитных полей, создаваемых всеми частицами с номерами $j \neq i$ и внешними источниками в точке \mathbf{r} в момент времени t :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left\{ \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{j}_{\text{внешн}} + \right. \\ \left. + \sum_j' e_j \int {}^j\mathbf{v} F_j(\mathbf{r}, {}^j\mathbf{v}) d^j\mathbf{v} \right\}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0^{-1} \left\{ \sum_j' e_j \int F_j(\mathbf{r}, {}^j\mathbf{v}) d^j\mathbf{v} + \rho_{\text{внешн}} \right\}, \quad (1.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.15)$$

Чтобы найти усредненные поля $\langle \mathbf{E} \rangle_1$, $\langle \mathbf{B} \rangle_1$, умножим уравнения (1.12) — (1.15) на произведение $f_N F_i$ и про-

интегрируем по Γ -пространству. В результате получим

$$\begin{aligned} \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle_1(\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) f_1(\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) = \\ = \mu_0 \left\{ \mathbf{j}_{\text{внешн}}^- f_1(\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) + \sum_j' e_j \int \mathbf{j}\mathbf{v} f_2(\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}, \mathbf{r}, \mathbf{j}\mathbf{v}; t) d^j\mathbf{v} + \right. \\ \left. + \varepsilon_0 \left\langle \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\rangle_1(\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) f_1(\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) \right\}, \quad (1.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \langle \mathbf{E} \rangle_1(\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) f_1(\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) = \\ = - \left\langle \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right\rangle_1(\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) f_1(\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t), \quad (1.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \langle \mathbf{E} \rangle_1(\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) f_1(\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) = \varepsilon_0^{-1} \left\{ \rho_{\text{внешн}} f_1(\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) + \right. \\ \left. + \sum_j' e_j \int f_2(\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}, \mathbf{r}, \mathbf{j}\mathbf{v}; t) d^j\mathbf{v} \right\}, \quad (1.18) \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{B} \rangle_1(\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) f_1(\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) = 0. \quad (1.19)$$

Применяя далее теорему Лиувилля, найдем выражение для производных от поля по времени:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M} \right\rangle_1(\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) f_1(\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) = \\ = \int F_i \left(\frac{\partial}{\partial t} f_N \mathbf{M}(\mathbf{r}, \dots) \right)_{\mathbf{r}} d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{v}_N = \\ = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f_1(\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) \langle \mathbf{M} \rangle_1(\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) \right\}_{\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}, \mathbf{r}} + \\ + \mathbf{i}\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{i}\mathbf{r}} (f_1 \langle \mathbf{M} \rangle_1) + \int F_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} (f_N \mathbf{M}) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{v}_N. \quad (1.20) \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая соотношение

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \frac{e_i}{m_i} \left\{ \mathbf{E}_{\text{внешн}}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i; t) + \sum_j' \mathbf{E}_j^i(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j) \right\}, \quad (1.21)$$

получаем

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M} \right\rangle_1 f_1 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{i}\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{i}\mathbf{r}} + \frac{e_i}{m_i} \mathbf{E}_{\text{внешн}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{i}\mathbf{v}} \right) (f_1 \langle \mathbf{M} \rangle_1) + \\ + \frac{e_i}{m_i} \sum_j' \int d^j\mathbf{r} \int d^j\mathbf{v} \mathbf{E}_j^i(\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}, \mathbf{j}\mathbf{r}, \mathbf{j}\mathbf{v}) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{i}\mathbf{v}} [f_2(\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}, \mathbf{j}\mathbf{r}, \mathbf{j}\mathbf{v}; t) \langle \mathbf{M} \rangle_2(\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}, \mathbf{j}\mathbf{r}, \mathbf{j}\mathbf{v}; t)]. \quad (1.22) \end{aligned}$$

Входящая в выражение (1.21) величина \mathbf{E}_j^i представляет собой полное электрическое поле, создаваемое j -й частицей у i -й частицы.

Подставляя (1.22) в уравнения (1.16) — (1.19) и комбинируя их с уравнением (1.11), получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t)}{\partial t} + \mathbf{i}\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{i}\mathbf{r}} + \frac{e_i}{m_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{i}\mathbf{v}} \cdot \{[\langle \mathbf{E} \rangle_1(\mathbf{r} = \mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) + \mathbf{i}\mathbf{v} \times \langle \mathbf{B} \rangle_1(\mathbf{r} = \mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t)] f_1(\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t)\} = 0, \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle_1(\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) = & \mu_0 \left\{ \mathbf{j}_{\text{внешн}} + \right. \\ & + \frac{1}{f_1} \sum_j' e_j \int \mathbf{j}\mathbf{v} f_2(\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}, \mathbf{r}, \mathbf{j}\mathbf{v}; t) d^j\mathbf{v} + \\ & + \frac{\varepsilon_0}{f_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{i}\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{i}\mathbf{r}} + \frac{e_i}{m_i} \mathbf{E}_{\text{внешн}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{i}\mathbf{v}} \right) (f_1 \langle \mathbf{E} \rangle_1) + \\ & + \frac{\varepsilon_0}{f_1} \frac{e_i}{m_i} \sum_j' \int d^j\mathbf{r} \int \mathbf{E}_j^i \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{i}\mathbf{v}} f_2(\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}, \mathbf{j}\mathbf{r}, \mathbf{j}\mathbf{v}; t) \times \\ & \left. \times \langle \mathbf{E} \rangle_2(\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}, \mathbf{j}\mathbf{r}, \mathbf{j}\mathbf{v}; t) d^j\mathbf{v} \right\}, \quad (1.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \langle \mathbf{E} \rangle_1(\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) = & -\frac{1}{f_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{i}\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{i}\mathbf{r}} + \right. \\ & \left. + \frac{e_i}{m_i} \mathbf{E}_{\text{внешн}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{i}\mathbf{v}} \right) (f_1 \langle \mathbf{B} \rangle_1) - \\ & - \frac{e_i}{f_1 m_i} \sum_j' \int d^j\mathbf{r} \int \mathbf{E}_j^i \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{i}\mathbf{v}} [f_2(\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}, \mathbf{j}\mathbf{r}, \mathbf{j}\mathbf{v}; t) \times \\ & \left. \times \langle \mathbf{B} \rangle_2(\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}, \mathbf{j}\mathbf{r}, \mathbf{j}\mathbf{v}; t)] d^j\mathbf{v}, \quad (1.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \langle \mathbf{E} \rangle_1(\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) = \\ = \varepsilon_0^{-1} \left[\rho_{\text{внешн}} + \frac{1}{f_1} \sum_j' e_j \int f_2(\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}, \mathbf{r}, \mathbf{j}\mathbf{v}; t) d^j\mathbf{v} \right], \quad (1.26) \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{B} \rangle_1(\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t) = 0. \quad (1.27)$$

Уравнения (1.23) — (1.27) являются системой уравнений в частных производных и служат для определения функции $f_1(\mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t)$ и величин $\langle \mathbf{E} \rangle_1(\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t)$ и $\langle \mathbf{B} \rangle_1(\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{r}, \mathbf{i}\mathbf{v}; t)$.

Разумеется, эта система не замкнута, поскольку она содержит парные функции f_2 , $\langle \mathbf{E} \rangle_2$ и $\langle \mathbf{V} \rangle_2$. Для их определения необходимо сформулировать следующую систему уравнений, которая будет уже содержать тройные функции f_3 , $\langle \mathbf{E} \rangle_3$ и $\langle \mathbf{V} \rangle_3$. В результате по аналогии с методом, использовавшимся при выводе уравнений ББГКИ, мы опять придем к некоторой цепочке уравнений. Однако мы воздержимся здесь от выписывания подобной системы уравнений высших порядков, поскольку они весьма сложны по структуре и не будут использоваться в дальнейшем.

§ 2. РЕШЕНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ЛИШЬ МНОГОЧАСТИЧНЫХ КОЛЛЕКТИВНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ

2.1. Основные уравнения и их линейное приближение

В рассматриваемом приближенном методе выполняются следующие соотношения, позволяющие упростить цепочку уравнений для функций f , $\langle \mathbf{V} \rangle$ и $\langle \mathbf{E} \rangle$:

$$f_s(\mathbf{r}, \dots, \mathbf{v}; t) = \prod_{\mathbf{v}=1}^s f_1(\mathbf{v}\mathbf{r}, \mathbf{v}\mathbf{v}; t), \quad \text{где } s = 2, \dots, N, \quad (2.1)$$

$$\langle \mathbf{E} \rangle_1 = \langle \mathbf{E} \rangle_1(\mathbf{r}; t), \quad \langle \mathbf{V} \rangle_1 = \langle \mathbf{V} \rangle_1(\mathbf{r}; t), \quad (2.2)$$

$$\left\langle \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}} \right\rangle_1 = \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{E} \rangle_1, \quad \left\langle \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}} \right\rangle_1 = \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{V} \rangle_1. \quad (2.3)$$

Соотношения (2.3) можно получить из формулы (1.20), используя (2.1) и (2.2), а также теорему Лиувилля для случая отдельной частицы. С помощью данных упрощающих соотношений получим вместо уравнений (1.11) и (1.16) — (1.19) следующую систему:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + i\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial i\mathbf{r}} + \frac{e_i}{m_i} [\langle \mathbf{E} \rangle_1 + i\mathbf{v} \times \langle \mathbf{V} \rangle_1] \cdot \frac{\partial f_1}{\partial i\mathbf{v}} = 0, \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \langle \mathbf{V} \rangle_1 = \mu_0 \left[\mathbf{j}_{\text{внешн}} + \sum_j' e_j \int^j \mathbf{v} f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) d^j \mathbf{v} + \right. \\ \left. + \varepsilon_0 \frac{\partial \langle \mathbf{E} \rangle_1}{\partial t} \right], \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \langle \mathbf{E} \rangle_1 = -\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle_1}{\partial t}, \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{E} \rangle_1 = \varepsilon_0^{-1} \left[\rho_{\text{внешн}} + \sum_j' e_j \int f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) d^3\mathbf{v} \right], \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{B} \rangle_1 = 0. \quad (2.8)$$

Будем предполагать, что внешние источники полей находятся вне рассматриваемого объема.

Далее вместо частных функций распределения f_1 удобно ввести общие функции распределения [см. (2.2.19)]

$$f_{\mu}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \sum_{j(\mu)} f_1(j\mathbf{r}, j\mathbf{v}; t) \Big|_{j\mathbf{r}=\mathbf{r}}^{j\mathbf{v}=\mathbf{v}} = N_{\mu} f_1, \quad (2.9)$$

где индекс j (μ) обозначает совокупность частиц сорта μ , а N_{μ} — общее их число в системе.

Выполняя суммирование в системе дифференциальных уравнений (2.4) — (2.7), получаем

$$\frac{\partial f_{\mu}^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\mu}^{(1)}}{\partial \mathbf{r}} + \left(\frac{e}{m} \right)_{\mu} [\langle \mathbf{E} \rangle_1 + \mathbf{v} \times \langle \mathbf{B} \rangle_1] \frac{\partial f_{\mu}^{(1)}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (2.10)$$

$$\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle_1 = \mu_0 \left\{ \sum_{\nu} e_{\nu} \int \mathbf{v}' f_{\nu}^{(1)} d\mathbf{v}' + \varepsilon_0 \frac{\partial \langle \mathbf{E} \rangle_1}{\partial t} \right\}, \quad (2.11)$$

$$\nabla \times \langle \mathbf{E} \rangle_1 = -\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle_1}{\partial t}, \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{E} \rangle_1 = \varepsilon_0^{-1} \sum_{\nu} e_{\nu} \int f_{\nu}^{(1)} d\mathbf{v}', \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{B} \rangle_1 = 0. \quad (2.14)$$

Уравнения (2.10) — (2.14) описывают функцию распределения частиц $f_{\mu}^{(1)}$ и поля $\langle \mathbf{E} \rangle_1$ и $\langle \mathbf{B} \rangle_1$ в пределе исчезающе малых корреляций отдельных частиц. Для простоты мы далее опустим скобки у величин \mathbf{E} и \mathbf{B} , имея, однако, в виду, что \mathbf{E} и \mathbf{B} представляют собой усредненные величины.

Теория в приближении малых амплитуд

Приближение малых амплитуд основано на предположении, что поля \mathbf{E} , \mathbf{B} можно рассматривать настолько малыми, что они приводят лишь к небольшим отклонениям системы от положения равновесия (нулевое при-

ближение). Примем далее, что члены нулевого порядка в разложении

$$f_{\mu}^{(1)} = {}^{(0)}f_{\mu}^{(1)} + {}^{(1)}f_{\mu}^{(1)} + \dots \quad (2.15)$$

не создают каких-либо зарядов и токов, т. е.

$$\sum_{\nu} e_{\nu} \int {}^{(0)}f_{\nu}^{(1)} d\mathbf{v}' = 0, \quad \sum_{\nu} e_{\nu} \int \mathbf{v}' {}^{(0)}f_{\nu}^{(1)} d\mathbf{v}' = 0. \quad (2.16)$$

Если состояние в нулевом приближении является стационарным, то из уравнения (2.10) следует, что функция распределения нулевого порядка зависит только от \mathbf{v} . Поэтому будем считать, что ¹⁾

$${}^{(0)}f_{\mu}^{(1)} = f_{0\mu}(\mathbf{v}), \quad {}^{(1)}f_{\mu}^{(1)} = f_{1\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t). \quad (2.17)$$

Перепишем рассматриваемую систему уравнений с учетом этих обозначений в виде

$$\frac{\partial f_{1\mu}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{1\mu}}{\partial \mathbf{r}} + \left(\frac{e}{m}\right)_{\mu} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_{0\mu}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (2.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left\{ \sum_{\nu} e_{\nu} \int \mathbf{v}' f_{1\nu} d\mathbf{v}' + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\}, \quad (2.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0^{-1} \sum_{\nu} e_{\nu} \int f_{1\nu} d\mathbf{v}', \quad (2.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.22)$$

2.2. Тензор проводимости и тензор диэлектрической проницаемости

Применяя преобразование Фурье к уравнению (2.18), получаем

$$i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega) \tilde{f}_{1\mu}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{v}) + \left(\frac{e}{m}\right)_{\mu} \left\{ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) + \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) \right\} \cdot \frac{\partial f_{0\mu}}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (2.23)$$

¹⁾ Обратим внимание на то, что здесь мы ради простоты ввели для общих функций распределения обозначения (аналогичные обозначениям, введенным на стр.138), которые, однако, не следует путать с обозначениями для частных функций распределения.

Отсюда находим

$$\tilde{f}_{1\mu} = \frac{i \left(\frac{e}{m} \right)_{\mu}}{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u})} \frac{df_{0\mu}}{d\mathbf{v}} \cdot (\tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}}). \quad (2.24)$$

Здесь использовано обозначение

$$\mathbf{u} = \frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{k}}. \quad (2.25)$$

Тогда плотность тока запишется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{j}} = \sum_{\mathbf{v}} e_{\mathbf{v}} \int \mathbf{v}' \tilde{f}_{1\mathbf{v}} d\mathbf{v}' = i \sum_{\mathbf{v}} \frac{e_{\mathbf{v}}^2}{m_{\mathbf{v}}} \int \frac{\mathbf{v}'}{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{v}' - \mathbf{u})} \times \\ \times \frac{df_{0\mathbf{v}}}{d\mathbf{v}'} \cdot \boldsymbol{\kappa}_2 \cdot \tilde{\mathbf{E}}) d\mathbf{v}', \end{aligned} \quad (2.26)$$

где $\boldsymbol{\kappa}_2$ определяется формулой

$$\boldsymbol{\kappa}_2 \cdot \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}}. \quad (2.27)$$

Из уравнения (2.20) получаем

$$i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} = i\omega \tilde{\mathbf{B}} \quad (2.28)$$

или

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{u} \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}} = \frac{n}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}. \quad (2.29)$$

Здесь мы ввели показатель преломления $n = c/u$.

Подставив (2.29) в (2.27), найдем выражение для тензора $\boldsymbol{\kappa}_2$

$$\boldsymbol{\kappa}_2 = \left(\mathbf{I}_2 \left(1 - \frac{v_{\parallel}}{u} \right) + \frac{\hat{\mathbf{k}}(\mathbf{v})}{u} \right). \quad (2.30)$$

Определим теперь новую функцию распределения f_0 посредством соотношения

$$\omega_{p0}^2 f_0 = \sum_{\mathbf{v}} \frac{e_{\mathbf{v}}^2}{\varepsilon_0 m_{\mathbf{v}}} f_{0\mathbf{v}}, \quad (2.31)$$

которая отличается от f_{0v} тем, что она нормирована на единицу, поскольку

$$\omega_{p0}^2 = \sum_v \frac{e_v^2}{\epsilon_0 m_v} \int f_{0v} dv'. \quad (2.32)$$

Согласно (2.26), (2.30) и (2.31), тензор проводимости записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= i\epsilon_0 \omega_{p0}^2 \int \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u})} \left(\frac{df_0}{dv} \right) \cdot \mathbf{x} dv = \\ &= i\epsilon_0 \omega_{p0}^2 \int \frac{dv}{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u})} \mathbf{v} \left(\frac{df_0}{dv} \right) \cdot \left(\mathbf{I}_2 \left(1 - \frac{v_{\parallel}}{u} \right) + \frac{\hat{\mathbf{k}}(\mathbf{v})}{u} \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Подстановка соотношения $\tilde{\mathbf{j}} = \sigma_2 \cdot \tilde{\mathbf{E}}$ в (2.19) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{B}} &= \mu_0 \epsilon_0 \left\{ -i\omega \tilde{\mathbf{E}} + \epsilon_0^{-1} \sigma_2 \cdot \tilde{\mathbf{E}} \right\} = \\ &= \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_2 - i\omega \mathbf{I}_2 \right\} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{i\omega}{c^2} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \tilde{\mathbf{E}}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

отсюда сразу получаем выражение для тензора диэлектрической проницаемости

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{I}_2 + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \sigma_2. \quad (2.35)$$

2.3. Дисперсионное соотношение

Итак, уравнение (2.34) сводится к виду

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{B}} = -\frac{\omega}{c^2} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \tilde{\mathbf{E}}, \quad (2.36)$$

а уравнение (2.29) можно переписать в форме

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{B}} = \frac{n}{c} k [\hat{\mathbf{k}}] (\hat{\mathbf{k}} - \mathbf{I}_2) \cdot \tilde{\mathbf{E}}. \quad (2.37)$$

Вводя обозначение $\mathbf{I}_{2\perp} = \mathbf{I}_2 - \hat{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{k}})$, найдем

$$\left[nk\mathbf{I}_{2\perp} - \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega) \right] \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0. \quad (2.38)$$

Отсюда получаем дисперсионное уравнение

$$\det \left\{ n^2 \mathbf{I}_{\perp} - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}, \omega) \right\} = 0, \quad (2.39)$$

в котором тензор диэлектрической проницаемости, согласно (2.35) и (2.33), равен

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I}_{\perp} - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} \int \frac{u}{v_{\parallel} - u} \mathbf{v} \left(\frac{df_0}{d\mathbf{v}} \cdot \left[\mathbf{I}_{\perp} \left(1 - \frac{v_{\parallel}}{u} \right) + \frac{\hat{\mathbf{k}}(\mathbf{v})}{u} \right] \right) d\mathbf{v}. \quad (2.40)$$

Анализ дисперсионного уравнения труден по двум причинам. Одна из них объясняется сложным видом этого соотношения, а вторая связана с расходимостью, обусловленной знаменателем подынтегрального выражения (2.40) для действительных значений u .

Вряд ли можно что-нибудь сделать с первой трудностью, за исключением разве того, что в конце концов мы можем ограничиться рассмотрением частных случаев распределений. Что же касается второй проблемы, то существуют две области, представляющие принципиальный и практический интерес, для которых подобной проблемы расходимости не возникает. Первая область относится к большим фазовым скоростям $u \geq c$, где указанная проблема отпадает, поскольку мы не рассматриваем релятивистских частиц. Эта область интересна тем, что она позволяет судить о реакции плазмы на падающие электромагнитные волны. Вторая область относится к фазовым скоростям с конечной величиной мнимой части u_i . Плазменные волны, обладающие таким свойством, вообще говоря, непригодны для передачи сигналов. Но они представляют интерес вследствие возможности появления неустойчивых нарастающих мод, приводящих, как показал Бунеман [1] для электростатических волн, к перегруппировке скоростей частиц. В этом смысле комплексные волновые решения приводят к тем же эффектам, что и молекулярные столкновения в обычном газе.

1. Случай $u_r \geq c$. Предположим, что реальная часть фазовой скорости равна или больше скорости света, что, естественно, означает $v \ll u$.

В этом пределе

$$\kappa = \frac{\mathbf{I}}{2} \tag{2.41}$$

и имеет место соотношение

$$\epsilon = \frac{\mathbf{I}}{2} + \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} \int \mathbf{v} \left(\frac{df_0}{dv} dv \right). \tag{2.42}$$

Интегрирование по частям в данном случае приводит к простому виду тензоров диэлектрической проницаемости и проводимости

$$\epsilon = \left(1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} \right) \frac{\mathbf{I}}{2}, \quad \sigma = \frac{i\epsilon_0}{\omega} \omega_{p0}^2 \frac{\mathbf{I}}{2}. \tag{2.43}$$

При этом дисперсионное соотношение записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \det \left\{ \left(1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} \right) \frac{\mathbf{I}}{2} - n^2 \left(\frac{\mathbf{I}}{2} - \hat{\mathbf{k}} \right) \hat{\mathbf{k}} \right\} = \\ = \det \left\{ \left(1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} - n^2 \right) \frac{\mathbf{I}}{2} + n^2 \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}} \right\} = 0. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Если координата z выбрана в направлении вектора \mathbf{k} , то дисперсионное соотношение имеет вид

$$\begin{vmatrix} \left(1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} - n^2 \right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} - n^2 \right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.45}$$

Тензор, входящий в соотношение (2.45), является диагональным. Это означает, что продольные и поперечные волны не связаны между собой. Поскольку компоненты тензора, соответствующие поперечному полю, одинаковы и отличаются от компонент, связанных с продольным полем, решения для поперечных волн имеют отличающиеся от продольных волн частоты. Кроме того, поле поперечных волн может иметь произвольное направление поляризации.

Частота *продольных волн*, согласно уравнению (2.45), равна

$$\omega = \omega_{p0}. \quad (2.46)$$

Таким образом, фазовая скорость продольных волн есть

$$u = \frac{\omega_{p0}}{k}. \quad (2.47)$$

Сделанное нами предположение о том, что $v \ll u$, означает, что полученные результаты верны лишь в области значений

$$k = \frac{\omega_{p0}}{u} \ll \left(\frac{m}{\Theta} \right)^{1/2} \omega_{p0} = k_D. \quad (2.48)$$

Отметим, что найденное нами решение для электростатических волн соответствует результату, который ранее был получен в разд. 2.5 гл. 3. Однако здесь не следует ожидать проявления эффекта затухания Ландау, поскольку оно обязано своим происхождением частицам со скоростями, близкими к фазовой скорости волны.

Частоты *поперечных волн* удовлетворяют уравнению

$$\frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} = 1 - n^2 = 1 - \frac{c^2}{u^2}, \quad (2.49)$$

или

$$\frac{\omega^2}{\omega_{p0}^2} = \frac{u^2}{u^2 - c^2}. \quad (2.50)$$

Отсюда находим фазовую скорость поперечной волны

$$u^2 = \frac{c^2}{1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2}}. \quad (2.51)$$

Таким образом, для поперечных мод выполняются неравенства

$$\omega > \omega_{p0}; \quad u > c. \quad (2.52)$$

Разумеется, при этом групповая скорость $u_g = d\omega/dk$, которую можно получить из уравнения (2.49), записанного в виде

$$\omega^2 = \omega_{p0}^2 + k^2 c^2, \quad (2.53)$$

всегда меньше скорости света и определяется соотношением

$$u_g = \frac{c^2}{u} = c \left(1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} \right)^{1/2}. \quad (2.54)$$

Полученные выше результаты показывают, что плазма взаимодействует с поперечной электромагнитной волной, частота которой выше плазменной, как среда с показателем преломления, меньшим единицы. Если же частота электромагнитной волны намного превосходит плазменную частоту ω_{p0} , то показатель преломления практически равен единице. В таком случае плазма никак не влияет на распространение волны. При приближении частоты электромагнитной волны к плазменной показатель преломления убывает, быстро приближаясь к нулю.

Решения для поперечных волн в области фазовых скоростей $u > c$ и частот $\omega < \omega_{p0}$ не существуют. В отсутствие диссипации (σ — чисто мнимая величина) падающая волна на этих частотах $\omega < \omega_{p0}$ не может поглощаться. Она должна полностью отражаться от поверхности плазмы. (Это также очевидно из условия $u^2 < 0$.)

2. Случай $u_i \neq 0$; $u_r = 0$ (v_T) $\ll c$. Волны, рассматриваемые в данном случае, следует четко отличать от рассмотренных выше обычных электромагнитных волн, распространяющихся с фазовыми скоростями, равными или большими скорости света. Последние можно считать разновидностью радиоволн, модифицированных благодаря наличию плазмы. Волны, которые мы собираемся рассматривать, обладают намного меньшими фазовыми скоростями, равными по порядку величины среднеквадратичной (тепловой) скорости v_T частиц плазмы. Кроме того, предполагается, что фазовые скорости принимают комплексные значения.

Предвидя заранее, что инкремент неустойчивости для таких волн в общем случае составляет величину порядка $\omega_{p0}v_T/c$, можно сказать, что развитие этих неустойчивостей происходит гораздо менее энергично, чем развитие электростатических неустойчивостей. Таким образом, в тех случаях, когда могут возникнуть обе неустойчивости одновременно, преобладающей будет потенциальная электростатическая неустойчивость. Однако условия суще-

ствования электромагнитных неустойчивостей являются менее жесткими по сравнению с условиями существования потенциальных неустойчивостей. Поэтому во многих системах электромагнитные неустойчивости оказываются единственно возможными и, следовательно, важными.

Обратимся теперь к дисперсионному уравнению (2.39) и формуле для тензора диэлектрической проницаемости (2.40). Пусть v_3 — компонента скорости \mathbf{v} в направлении волнового вектора \mathbf{k} , а v_1 и v_2 — компоненты, перпендикулярные \mathbf{k} . Тогда дисперсионное уравнение запишется в виде

$$\det \left\{ \mathbf{I} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \mathbf{I}_\perp + \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} \int (\mathbf{v}) \left(\frac{df_0}{dv} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial v_3} \mathbf{k})}{v_3 k - \omega} \right) d\mathbf{v} \right\} = \det \mathbf{A} = 0. \quad (2.55)$$

Обозначим компоненты тензора \mathbf{A} через $A_{\mu\nu}$. Тогда можно написать, что

$$A_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \left(1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} C_{\mu\nu} + \delta_{\mu 3} \delta_{\nu 3} \frac{c^2 k^2}{\omega^2}, \quad (2.56)$$

где

$$C_{\mu\nu} = k \int \frac{v_\mu v_\nu \frac{\partial f_0}{\partial v_3}}{v_3 k - \omega} d\mathbf{v}. \quad (2.57)$$

Заметим, что тензоры \mathbf{A} и \mathbf{C} являются симметричными:

$$C_{\mu\nu} = C_{\nu\mu}, \quad A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}. \quad (2.58)$$

Напомним теперь, что мы исследуем случай $u_r \approx v_T \ll c$ и поэтому можем пренебречь единицей по сравнению с величиной $c^2 k^2 / \omega^2$, что физически означает пренебрежение токами смещения. В результате придем к выражениям

$$A_{\mu\nu} = -\frac{c^2}{\omega^2} [\delta_{\mu\nu} (k^2 + k_c^2) + k_c^2 C_{\mu\nu}], \quad \text{где } k_c = \frac{\omega_{p0}}{c} \quad (2.59)$$

для μ и ν , не равных 3, и

$$A_{33} = -\frac{c^2}{\omega^2} \left\{ -\frac{\omega^2}{c^2} + k_c^2 (1 + C_{33}) \right\}. \quad (2.60)$$

Связь между электромагнитными и электростатическими волнами отсутствует при условии

$$A_{13} = A_{23} = 0 \quad \text{или} \quad C_{13} = C_{23} = 0. \quad (2.61)$$

Это условие можно также переписать в форме

$$C_{\frac{13}{23}} = k \int \frac{v_3 \frac{d \langle v_{\frac{1}{2}} \rangle F_0(v_3)}{dv_3}}{v_3 k - \omega} dv_3 = 0, \quad (2.62)$$

где используются обозначения

$$F_0(v_3) = \int f_0 dv_1 dv_2, \quad \langle v_{\frac{1}{2}} \rangle = \frac{1}{F_0(v_3)} \int v_{\frac{1}{2}} f_0 dv_1 dv_2. \quad (2.63)$$

Тогда достаточным условием отсутствия связи между волнами, очевидно, является тождество

$$\langle v_{\frac{1}{2}} \rangle \equiv 0 \quad \text{для всех } v_3. \quad (2.64)$$

В этом случае дисперсионное уравнение для электростатических волн принимает вид

$$1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} (1 + C_{33}) = 0, \quad (2.65)$$

откуда с учетом тождества

$$1 = \int f_0 d\mathbf{v} = - \int v_3 \frac{\partial f_0}{\partial v_3} d\mathbf{v} = - \int \frac{v_3 (v_3 - u) \frac{\partial f_0}{\partial v_3}}{v_3 - u} d\mathbf{v} \quad (2.66)$$

следует

$$1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} u \int \frac{v_3 \frac{\partial f_0}{\partial v_3}}{v_3 - u} d\mathbf{v} = 0. \quad (2.67)$$

Интегрируя по частям, можно показать, что этот результат совпадает с ранее полученным дисперсионным соотношением для потенциальных электростатических волн [см. формулу (3.2.18)].

При выполнении условия (2.64) дисперсионное соотношение для электромагнитных волн может быть записано в виде

$$\left(\frac{k^2}{k_c^2} + 1 + C_{11}\right) \left(\frac{k^2}{k_c^2} + 1 + C_{22}\right) - C_{12}^2 = 0. \quad (2.68)$$

Чтобы решить это уравнение, следует сначала записать интегралы C_{11} , C_{22} и C_{12} следующим образом:

$$\int \frac{\frac{d\chi_{\mu\nu}}{dv_3} dv_3}{v_3 - u} = \frac{(v_3 - u_r) \frac{d\chi_{\mu\nu}}{dv_3} dv_3}{(v_3 - u_r)^2 + u_i^2} + iu_i \int \frac{\frac{d\chi_{\mu\nu}}{dv_3} dv_3}{(v_3 - u_r)^2 + u_i^2}, \quad (2.69)$$

где $\chi_{\mu\nu} = \langle v_\mu v_\nu \rangle F_0(v_3)$, затем выделить действительную и мнимую части в дисперсионном соотношении и из полученной системы уравнений определить действительную и мнимую составляющие частот или соответственно фазовых скоростей волн. В результате это привело бы к сложным численным расчетам. Мы же хотим получить лишь наиболее общие выводы, что можно сделать с помощью ряда оценок по порядку величины.

Перепишем выражение для коэффициентов $C_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu} &= \int \frac{\frac{d}{dv_3} \langle v_\mu v_\nu \rangle F_0(v_3) dv_3}{v_3 - u} = \\ &= \int \frac{\langle v_\mu v_\nu \rangle F_0(v_3) dv_3}{(v_3 - u)^2}, \quad \text{где } \mu = 1, 2, \quad \nu = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.70)$$

и учтем, что $|u|^2 \approx \langle v^2 \rangle$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle v_\mu v_\nu \rangle &\approx |u|^2 \approx |v_3 - u|^2, \quad \int F_0(v_3) dv_3 = 1, \\ C_{\mu\nu} &= O(1), \quad \mu = 1, 2, \quad \nu = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Из (2.67) видно, что

$$k_{\text{эм}}^2 = O(k_c^2) \ll k_{\text{эс}}^2 = O\left(\frac{\omega_{p0}^2}{\langle v^2 \rangle}\right). \quad (2.72)$$

Абсолютное значение волнового вектора $k_{\text{эм}}$ рассматриваемой электромагнитной волны много меньше величины волнового вектора $k_{\text{эс}}$ соответствующей электростатической волны. Формула (2.72) дает весьма полезную информацию для оценки величины связи электростатических

и электромагнитных волн. Для этого запишем дисперсионное соотношение, сохранив в нем все члены, в виде

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{k_c^2}{k^2} (1 + C_{11}) & \frac{k_c^2}{k^2} C_{12} & \frac{k_c^2}{k^2} C_{13} \\ \frac{k_c^2}{k^2} C_{12} & 1 + \frac{k_c^2}{k^2} (1 + C_{22}) & \frac{k_c^2}{k^2} C_{23} \\ \frac{k_c^2}{k^2} C_{13} & \frac{k_c^2}{k^2} C_{23} & -\frac{1}{n^2} + \frac{k_c^2}{k^2} (1 + C_{33}) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.73)$$

Рассмотрим вначале те волны, волновые векторы которых близки к $k_{эс}$, где $k_{эс}^2 \approx \omega_{p0}^2 / \langle v^2 \rangle$. Используя оценку коэффициентов $C_{\mu\nu}$ по порядку величины, детерминант (2.73) можно переписать в виде

$$-\frac{1}{n^2} + \frac{k_c^2}{k^2} (1 + C_{33}) = O\left(\frac{k_c^4}{k^4}\right), \quad (2.74)$$

или

$$1 + C_{33}(k, \omega) - \frac{\omega^2}{\omega_{p0}^2} = O\left(\frac{k_c^2}{k^2}\right). \quad (2.75)$$

С помощью разложения $k = k_{эс} + \Delta k$, где $k_{эс}$ представляет собой решение уравнения (2.75) с правой частью, строго равной нулю, мы получим

$$\frac{\partial C_{33}}{\partial k} \Delta k = O\left(\frac{k_c^2}{k^2}\right). \quad (2.76)$$

Полагая $\partial C_{33} / \partial k = O(C_{33} / k) = O(1/k)$ и принимая во внимание (2.72), найдем, что в соответствии с исходным предположением

$$\frac{\Delta k}{k_{эс}} = O\left(\frac{k_c^2}{k_{эс}^2}\right) \ll 1. \quad (2.77)$$

Отсюда следует, что связь электростатических и электромагнитных волн в плазме очень слабо влияет на дисперсионное соотношение для потенциальных волн и их частоты. С другой стороны, связь волн приводит к важным изменениям в соответствующем дисперсионном соотношении для электромагнитных волн. Рассмотрим в качестве примера волны, волновые векторы которых близки

к k_c , т. е. $k^2 \approx k_c^2$. Тогда в дисперсионном соотношении (2.73) все коэффициенты по порядку величины будут близки к единице и, следовательно, членами связи в этом случае пренебрегать нельзя.

2.4. Электромагнитные неустойчивости

Детальный анализ дисперсионного соотношения (2.73) при рассмотрении вопросов устойчивости плазмы является очень сложным и выходит за рамки данной книги. Поэтому здесь мы изложим результаты, полученные Каном [2], который исследовал общий случай функций распределения, обладающих центральной симметрией, когда выполняется соотношение

$$f_0(\mathbf{v}) = f_0(-\mathbf{v}). \quad (2.78)$$

Вычисления Кана показывают, что неустойчивость плазмы по отношению к поперечным волнам может иметь место для большого класса функций распределения в пространстве скоростей.

Неустойчивость заведомо развивается в тех случаях, когда не выполнены условия

$$\int_0^{\infty} v f_0(v, \vartheta, \varphi) dv = \text{const}, \quad (2.79)$$

и

$$\int_0^{\infty} v^2 f_0(v, \vartheta, \varphi) dv = \text{const}, \quad (2.80)$$

т. е. не выполнены условия, при которых число частиц, движущихся в пределах данного телесного угла, и гармоники их средней скорости не зависят от направления.

Заметим, что эти условия не означают ни изотропии распределения по скоростям, ни изотропии давления. Для того чтобы распределение было изотропным, необходимо выполнение условия

$$\int_0^{\infty} v^n f_0(v, \vartheta, \varphi) dv = \text{const} \quad (2.81)$$

для всех значений n . В частности, для изотропии давления нужно было бы потребовать выполнения условия (2.81) при $n = 4$. Тем не менее во всех практических случаях при выполнении условий (2.79) и (2.80) распределение по скоростям в плазме вряд ли будет анизотропным, если она не приготовлена каким-либо особым способом. В практических случаях трудно ожидать, чтобы функция распределения обладала таким свойством.

Исследования Кана не дают ответа на все вопросы. Из них не следует, что плазма заведомо будет устойчива, если ее функция распределения удовлетворяет условиям (2.79) и (2.80). Эти условия являются лишь необходимыми. Кроме того, они не дают возможности получить результаты, если распределение по скоростям не является центрально-симметричным. Однако Кан утверждает, что все подобные распределения неустойчивы.

Чтобы проанализировать указанные результаты, вспомним, что мы пренебрегли корреляцией. Следовательно, приведенные выше утверждения справедливы, когда рассматриваемые интервалы времени малы по сравнению с временем между столкновениями, т. е. когда [см. формулу (П.3) в приложении]

$$\omega \gg \omega_{p0} \frac{\ln \Lambda}{\Lambda}. \quad (2.82)$$

Поскольку мы приняли, исходя из соотношения (2.72), что $|\omega/u| = O(\omega_{p0}/c)$, и предположили, что $|u| = O(v_T)$, то рассматриваемые явления обусловлены волнами низких частот. Поэтому с учетом неравенства (2.82) получим

$$\frac{\omega}{\omega_{p0}} = O\left(\frac{v_T}{c}\right) \gg \frac{\ln \Lambda}{\Lambda}. \quad (2.83)$$

Отсюда вытекает, что описанные выше неустойчивости могут проявляться только при достаточно низкой плотности и высокой (но нерелятивистской!) температуре плазмы.

Фрид [3] и Фюрт [4] исследовали физический механизм усиления электромагнитных волн. Поскольку авторов интересовал лишь основной механизм, а не проявление частных деталей, они изучали поведение системы электронов в простых экспериментальных условиях,

Начнем с рассмотрения начального возмущения магнитного поля типа

$$B_z = Be^{ikhx}, \quad B_x = B_y = 0, \quad (2.84)$$

которое представляет собой волновое возмущение поля в направлении координаты x . Вектор магнитного поля направлен по оси z .

В начальный момент времени нет движения электронов в направлениях z или x . В направлении y все электроны обладают одинаковой скоростью. Тогда функция распределения электронов запишется следующим образом:

$$f_0(\mathbf{v}) = a\delta(v_x)\delta(v_z)\delta(v_y^2 - a^2) \text{ при } a > 0. \quad (2.85)$$

Электрон, имеющий начальную скорость v_y , в магнитном поле испытывает ускорение

$$\dot{v}_x = -\frac{e}{m}v_y B_z = -\omega_L v_y, \quad (2.86)$$

где $\omega_L = eB_z/m$ — переменная циклотронная частота. Вследствие этого в направлении оси x возникает поток y -компоненты импульса. Производная по времени от этого потока определяется соотношением

$$mv_y \dot{v}_x = -mv_y^2 \omega_L. \quad (2.87)$$

Проводя усреднение с помощью функции распределения $f = f_0 + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t)$ и объединяя члены первого порядка, получаем

$$\frac{\partial \langle v_y v_x \rangle}{\partial t} = -a^2 \omega_L. \quad (2.88)$$

В силу закона сохранения импульса этот поток (или давление) вызывает в соответствии с уравнением непрерывности изменение компоненты скорости $\langle v_y \rangle$:

$$\frac{\partial \langle v_y \rangle}{\partial t} = -\frac{\partial \langle v_x v_y \rangle}{\partial x}. \quad (2.89)$$

Уравнение Максвелла, содержащее $\nabla \times \mathbf{B}$, в пренебрежении током смещения сводится к соотношению

$$ikB_z = -\mu_0 j_y = +\mu_0 en_- \langle v_y \rangle. \quad (2.90)$$

Исключая с помощью этого соотношения $\langle v_y \rangle$ из уравнений (2.88) и (2.89), найдем

$$ik \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = \mu_0 e n_- \frac{\partial (a^2 \omega_L)}{\partial x} = ik \frac{\omega_p^2}{c^2} a^2 B_z. \quad (2.91)$$

Отсюда следует, что начальное возмущение B_z нарастает по экспоненциальному закону с инкрементом $\omega_p a/c$. Это согласуется с выводами, полученными Каном.

Выражение (2.91) не совпадает с результатами более общего исследования Вайбеля [5]. Тем не менее рассмотренная грубая модель с ее частным случаем начального распределения все же может дать некоторое качественное объяснение неустойчивости.

Пренебрежение током смещения $\partial \mathbf{E}/\partial t$ в уравнении (2.90) эквивалентно пренебрежению единицей по сравнению с величиной $c^2 k^2/\omega^2$ в дисперсионном соотношении. Это показывает, что токи смещения не дают вклада в развитие рассматриваемой неустойчивости. Ее механизм заключается просто в том, что начальное возмущение магнитного поля приводит к такому ускорению электронов, что возникающий поток импульса воздействует на начальное распределение токов в направлении усиления флуктуации поля. С физической точки зрения усиление начального возмущения поля можно рассматривать как сжатие (пинч-эффект) плазмы в токовые слои. Если при этом предположить, что компонента скорости v_x не равна нулю, то должен возникнуть эффект суперпозиции, обусловленный движением частиц системы в направлении оси x . Этот эффект противодействует развитию неустойчивости, полученной в отсутствие движения в направлении оси x .

§ 3. РЕШЕНИЯ С УЧЕТОМ ЭЛЕКТРОН-ИОННЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ

В предыдущем параграфе мы исследовали эффекты, возникающие в полностью ионизованной системе, без учета влияния корреляций отдельных частиц на распространение электромагнитных волн. Теперь мы займемся вопросами излучения и поглощения этих волн. В таком случае, конечно, пренебрегать полностью корреляциями частиц уже нельзя.

Выше мы уже обсуждали вопрос об излучении, связанном с одночастичными взаимодействиями. В данном параграфе мы исследуем процессы излучения и поглощения, обусловленные той частью ускорения частиц, которая приобретается при взаимодействии одновременно со всеми частицами плазмы. Эффективное поле частиц плазмы обычно представляется в виде суммы коллективного поля, входящего в уравнение Власова, и поля, обусловленного корреляциями отдельных частиц и представляемого остаточным членом правой части цепочки уравнения ББКИ. В принципе эффекты от обоих этих слагаемых могут быть названы «тормозным излучением». Разумеется, вклад в тормозное излучение, обусловленный коллективным полем, представляет собой явление, которое не может встретиться при одночастичном рассмотрении. С другой стороны, вклад в тормозное излучение за счет полей, обусловленных корреляциями, должен присутствовать в расчетах, относящихся к одночастичным процессам взаимодействия.

Нельзя доказать, что вкладом в излучение, обусловленным корреляциями частиц, можно пренебречь по сравнению с вкладом коллективных полей. Действительно, поскольку амплитуда коллективного поля может быть пренебрежимо мала во многих практически важных случаях, вероятно, будет правильным противоположное утверждение.

В принципе мы должны были бы вновь обратиться к общим уравнениям, рассмотренным в § 1, чтобы составить цепочку уравнений для величин f_2 , $\langle E \rangle_2$ и $\langle B \rangle_2$, сделав при этом ряд предположений относительно корреляций третьего порядка f_3 , $\langle B \rangle_3$ и $\langle E \rangle_3$. Однако громоздкие выкладки, приведенные в § 1, показывают, что подобная процедура малопривлекательна.

Поэтому мы прибегнем к другому, более приемлемому методу. Определим насколько возможно точно тензор проводимости для рассматриваемой системы с учетом корреляций частиц и коллективных эффектов. Затем найдем коэффициент поглощения, который связан с тензором проводимости, и из него, используя закон Кирхгофа, получим коэффициент излучения. Конечно, данный метод не строг, но он приводит к результатам, имеющим

достаточную точность для многих практических приложений.

Если можно считать, что время взаимодействия двух частиц $\tau_{вз}$ (см. разд. 1.3 гл. 4) много меньше всех других характерных времен, рассматриваемых в задаче, в частности меньше периода колебаний поля, то эффекты, связанные с корреляциями частиц, можно сравнительно просто учесть с помощью уравнения Фоккера — Планка или иных сходных методов. В исследуемой модели плазмы это эффективное время взаимодействия двух частиц порядка величины обратной плазменной частоты, т. е. $\tau_{вз} \approx \omega_{p-}^{-1}$. Поэтому можно ожидать, что метод уравнения Фоккера — Планка и другие аналогичные ему методы применимы, когда выполнено условие $\omega \ll \omega_{p-}$.

К сожалению, как мы видели выше, в области $u \geq c$, представляющей практический интерес, приходится иметь дело с частотами $\omega > \omega_{p-}$, что не позволяет использовать уравнение Фоккера — Планка. Поэтому в указанной области мы будем следовать методу, предложенному Даусоном и Оберманом [6, 7].

3.1. Модель Даусона — Обермана

Применимость модели Даусона — Обермана ограничена следующей областью частот и скоростей:

$$\omega > \frac{2\pi}{\tau_c} \approx \omega_{p-} \frac{\ln \Lambda}{\Lambda}, \quad u \gg v_T.$$

Приведем ряд предположений, которые лежат в основе этой модели.

1. Исследуемая система, как всегда, представляет собой неограниченную пространственно однородную среду, состоящую из электронов и равного числа ионов противоположного знака заряда. В среде присутствует слабое однородное электрическое поле $E_0 e^{-i\omega t}$. Предположение относительно однородности электрического поля означает, что область рассмотрения ограничена достаточно большими длинами волн или, строго говоря, рассматривается область фазовых скоростей, превосходящих среднеквадратичную скорость частиц.

2. Ионы неподвижны ($m_-/m_+ = 0$), а распределение их случайно.

3. Магнитное взаимодействие частиц пренебрежимо мало, поскольку оно по порядку величины в c^2/v^2 раз меньше величины взаимодействия, определяемого электрическим полем.

4. Движение электронов достаточно хорошо описывается уравнением Власова. Поэтому на рассматриваемые частоты налагается требование

$$\omega \gg \frac{2\pi}{\tau_c} \approx \omega_p - \frac{\ln \Lambda}{\Lambda}, \quad (3.1)$$

где τ_c — время между столкновениями.

В дипольном приближении электрон-электронные корреляции не дают вклада ни в проводимость, ни в эффекты поглощения или излучения. В системе координат, связанной с колебательным движением свободных электронов во внешнем поле, функцию распределения электронов в нулевом порядке можно рассматривать как максвелловскую. Таким образом, вообще говоря, в данном рассмотрении электрон-электронными корреляциями пренебрегается лишь до тех пор, пока они не нужны, чтобы оправдать предположение о максвелловском распределении электронов.

Запишем уравнения Власова для электронов ($m_- = m$, $e_- = -e$)

$$\frac{\partial f_{\pm}^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\pm}^{(1)}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m} \left[\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \right] \cdot \frac{\partial f_{\pm}^{(1)}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (3.2)$$

$$\Delta \Phi = \varepsilon_0^{-1} \left(e \int f_{\pm}^{(1)} d\mathbf{v} - e \sum_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \right). \quad (3.3)$$

Здесь через \mathbf{r}_j обозначены координаты ионов.

Преобразуем теперь эти уравнения, перейдя к системе координат, которая осциллирует синхронно с движением свободных электронов во внешнем электрическом поле. Соотношения, определяющие преобразование координат, имеют вид

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \frac{e}{m\omega^2} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{v} + \frac{ie}{m\omega} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (3.4)$$

Соответственно соотношения для преобразования производных запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)_{\mathbf{v}, t} &= \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}\right)_{\mathbf{v}, t}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right)_{\mathbf{r}, t} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{V}}\right)_{\mathbf{R}, t}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}, \mathbf{v}} &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{R}, \mathbf{v}} + \frac{ie}{m\omega} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}\right)_{\mathbf{v}, t} + \\ &+ \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{V}}\right)_{\mathbf{R}, t}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В результате уравнения Власова преобразуются к системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\pm}^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \frac{\partial f_{\pm}^{(1)}}{\partial \mathbf{R}} + \frac{e}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{R}} \cdot \frac{\partial f_{\pm}^{(1)}}{\partial \mathbf{V}} &= 0, \\ \Delta \Phi &= \varepsilon_0^{-1} e \left[\int f_{\pm}^{(1)} d\mathbf{V} - \sum_j \delta(\mathbf{R} - \xi e^{-i\omega t} - \mathbf{r}_j) \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь использована сокращенная запись

$$\xi = -\frac{e}{m\omega^2} \mathbf{E}_0. \quad (3.7)$$

Линеаризация уравнений (3.6) сводит эту систему к виду [см. (2.15) и (2.17)]

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{1-}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \frac{\partial f_{1-}}{\partial \mathbf{R}} + \frac{e}{m} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{R}} \cdot \frac{\partial f_{0-}}{\partial \mathbf{V}} &= 0, \\ \Delta \Phi_1 &= \frac{e}{\varepsilon_0} \left[n_- + \int f_{1-} d\mathbf{V} - \sum_j \delta(\mathbf{R} - \xi e^{-i\omega t} - \mathbf{r}_j) \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Предполагается, что функция f_{0-} имеет вид

$$f_{0-} = \frac{n_-}{(2\pi)^{3/2} V_T^3} \exp\left(-\frac{V^2}{2V_T^2}\right), \quad (3.9)$$

где V_T — среднеквадратичная скорость электронов.

Применим теперь к уравнениям (3.8) преобразование Фурье по пространству \mathbf{R} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}_{1-}}{\partial t} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{V} \tilde{f}_{1-} + i \frac{e}{m} \tilde{\Phi}_1 \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{0-}}{\partial \mathbf{V}} &= 0, \\ k^2 \tilde{\Phi}_1 &= -\frac{e}{\varepsilon_0} \left\{ (2\pi)^{3/2} n_- \delta(\mathbf{k}) + \right. \\ &+ \left. \int \tilde{f}_{1-} d\mathbf{V} - (2\pi)^{-3/2} \sum_j \exp[-i\mathbf{k} \cdot (\xi e^{-i\omega t} + \mathbf{r}_j)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

(Вследствие предположения о нейтральности невозмущенной плазмы первый и третий члены в преобразованном

по Фурье уравнении Пуассона для $\mathbf{k} = 0$ взаимно сокращаются.)

Преобразуем далее систему (3.10) в эквивалентное интегральное уравнение с помощью формального применения метода вариации произвольной постоянной. Введем обозначения

$$L = i\mathbf{V} \cdot \mathbf{k}, \quad R = -\frac{ie}{m} \mathbf{k} \cdot \left(\frac{d\mathbf{f}_{0-}}{dV} \right) \tilde{\Phi}_1[\tilde{f}_{1-}]; \quad (3.11)$$

тогда рассматриваемое дифференциальное уравнение можно записать в общем виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + L \right) \tilde{f}_{1-} = R. \quad (3.12)$$

Однородное уравнение имеет решение $S_t = \exp(-Lt)$. Примем теперь, что $\tilde{f}_{1-} = S_t g$. Тогда получим

$$\frac{\partial g}{\partial t} = S_t^{-1} R = S_{-t} R, \quad \tilde{f}_{1-} = \int_0^t S_{t-t'} R(t') dt'. \quad (3.13)$$

Потребовав, чтобы $\tilde{f}_{1-}(t = -\infty) = 0$, и используя подстановку $\tau = t - t'$, найдем

$$\tilde{f}_{1-} = \int_0^\infty S_\tau R[\tilde{f}_{1-}(t - \tau)] d\tau. \quad (3.14)$$

Подставив это выражение во второе уравнение системы (3.10), получим, что

$$k^2 \tilde{\Phi}_1 = -\frac{e}{\epsilon_0} \left\{ -\frac{ie}{m} \int_0^\infty \tilde{\Phi}_1(t - \tau) d\tau \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}\tau} \mathbf{k} \cdot \frac{d\mathbf{f}_{0-}}{dV} dV - (2\pi)^{-3/2} \sum_j \exp[-i\mathbf{k} \cdot (\xi e^{-i\omega\tau} + \mathbf{r}_j)] \right\}. \quad (3.15)$$

Интегрирование по скоростям дает

$$\begin{aligned} & \frac{kn_-}{(2\pi)^{1/2} V_T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau kV} \frac{d}{dV} \exp\left(-\frac{V^2}{2V_T^2}\right) dV = \\ & = i\tau k^2 \frac{n_-}{(2\pi)^{1/2} V_T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau kV} \exp\left(-\frac{V^2}{2V_T^2}\right) dV = \\ & = i\tau k^2 n_- \exp\left[-\frac{1}{2}(V_T k\tau)^2\right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Отсюда сразу получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1 = & -\omega_{p-}^2 \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} (V_T k \tau)^2 \right] \tau \tilde{\Phi}_1(t - \tau) d\tau + \\ & + (2\pi)^{-3/2} \left(\frac{e}{\varepsilon_0 k^2} \right) \sum_j \exp [-ik \cdot (\xi e^{-i\omega t} + \mathbf{r}_j)]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Строгое определение проводимости существует лишь для предельного случая $E_0 \rightarrow 0$, т. е. для $\xi \rightarrow 0$. Это позволяет разложить последний член в правой части выражения (3.17):

$$\begin{aligned} \sum_j \exp [-ik \cdot (\xi e^{-i\omega t} + \mathbf{r}_j)] = \\ = (1 - ik \cdot \xi e^{-i\omega t}) \sum_j \exp (-ik \cdot \mathbf{r}_j). \end{aligned} \quad (3.18)$$

(Вообще говоря, правомерность такого приближения нуждается в доказательстве, так как вследствие сингулярностей, возникающих в ионных членах, оказывается существенным вклад от очень больших значений k . Детальное исследование данного вопроса показывает, что предположение $\xi k \ll 1$ дает правильные результаты в низших порядках разложения по ξ , справедливые для любых значений k .)

Поскольку выражение (3.18) состоит из постоянной и переменной по времени части, предположим для функции $\tilde{\Phi}_1$ аналогичное представление в виде $\tilde{\Phi}_1 = \tilde{\Phi}_c + \tilde{\Phi}_{k\omega}(t)$. Подстановка этого выражения в (3.17) приводит к выражению для постоянного слагаемого в виде

$$\tilde{\Phi}_c = \frac{e}{(2\pi)^{3/2} \varepsilon_0 (k^2 + \omega_{p-}^2 / V_T^2)} \sum_j \exp (-ik \cdot \mathbf{r}_j). \quad (3.19)$$

Из структуры уравнения (3.17) также очевидно, что функция $\tilde{\Phi}_{k\omega} = C \exp (-i\omega t)$ должна удовлетворять осциллирующей части этого уравнения. Используя это обстоятельство, найдем

$$\tilde{\Phi}_{k\omega} = \frac{-ie}{(2\pi)^{3/2} \varepsilon_0 k^2} \frac{\mathbf{k} \cdot \xi}{A_{k\omega}} e^{-i\omega t} \sum_j \exp (-ik \cdot \mathbf{r}_j), \quad (3.20)$$

где

$$A_{k\omega} = 1 + \omega_{p-}^2 \int_0^{\infty} \exp\left(i\omega\tau - \frac{(k\tau V_T)^2}{2}\right) \tau d\tau. \quad (3.21)$$

Было бы, конечно, более правильным вычислять потенциал исходя из волнового уравнения, а не из уравнения Пуассона. В результате выражение для $\tilde{\Phi}_{k\omega}$ изменится на множитель $k^2/(k^2 - \omega^2/c^2)$, а выражение для $\tilde{\Phi}_c$ останется неизменным. Однако асимптотические формулы для $A_{k\omega}$ показывают, что основной вклад в общее выражение для $\tilde{\Phi}_1$ дают значения $k \approx \omega/V_T \gg \omega/c$ (см. первое предположение), так что величина корректирующего множителя близка к единице.

Получив формулу для потенциала, мы теперь можем рассчитать среднюю силу, действующую со стороны электронов на ионы. Она равна (но противоположно направлена) средней силе, действующей со стороны ионов на электроны. Чтобы вычислить плотность электронного тока и тензор проводимости, необходимо иметь выражение для этой средней силы.

Потенциал, создаваемый в точке \mathbf{r} в лабораторной системе координат, совпадает с потенциалом в точке \mathbf{R} в введенной нами движущейся системе координат, и поэтому он определяется формулой для обратного преобразования Фурье:

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \exp(i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}e^{-i\omega t}) (\tilde{\Phi}_c + \tilde{\Phi}_{k\omega}) d\mathbf{k}. \quad (3.22)$$

Подставляя в (3.22) выражения (3.19) и (3.20) и опуская члены высших порядков по ξ , имеем

$$\begin{aligned} \Phi_1(\mathbf{r}) = & \frac{e}{(2\pi)^3 \epsilon_0} \times \\ & \times \int \left\{ \frac{1}{k^2 + \omega_{p-}^2/V_T^2} + i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}e^{-i\omega t} \left(\frac{1}{k^2 + \omega_{p-}^2/V_T^2} - \frac{1}{k^2 A_{k\omega}} \right) \right\} \times \\ & \times \sum_j \exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)] d\mathbf{k}. \quad (3.23) \end{aligned}$$

Результирующее среднее поле, действующее на ионы, тогда равно

$$\langle \mathbf{E} \rangle = -\frac{1}{n_+} \sum_i \nabla_i \Phi_1(\mathbf{r}_i), \quad (3.24)$$

где суммирование проводится по всем ионам в единичном элементе объема. Это среднее поле создается только электронами, поскольку при суммировании вклад ион-ионных взаимодействий выпадает.

Используя «приближение случайной фазы», которое вытекает из предположения о случайном характере распределения ионов,

$$\sum_{i,j} \exp [ik \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] = n_+ \quad (3.25)$$

и выражение (3.23), из (3.24) получим следующее выражение для средней напряженности электрического поля:

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \frac{e}{(2\pi)^3 \epsilon_0} \int \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) e^{-i\omega t} \left(\frac{1}{k^2 + \omega_{p-}^2 / V_T^2} - \frac{1}{k^2 A_{k\omega}} \right) d\mathbf{k}. \quad (3.26)$$

Здесь также учтено, что первый член под интегралом в выражении (3.23) не дает вклада в интеграл (3.26).

Интегрирование по угловым координатам в (3.26) является тривиальным и сводит тензор $\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi})$ к единичному тензору, умноженному на $(4\pi/3) k^2$. Таким образом, результирующее выражение для средней напряженности поля можно записать в виде

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \frac{e}{6\pi^2 \epsilon_0} \boldsymbol{\xi} e^{-i\omega t} \int_0^{k_{\max}} k^4 \left(\frac{1}{k^2 + \omega_{p-}^2 / V_T^2} - \frac{1}{k^2 A_{k\omega}} \right) dk. \quad (3.27)$$

Обычный метод обрезания при $k_{\max} = 2\pi\epsilon_0 m V_T^2 / e^2$ устраняет расходимость для малых значений прицельных параметров.

В лабораторной системе координат плотность тока, который в данной модели создается только движением электронов, определяется соотношением

$$\mathbf{j} = -e \int \mathbf{v} f_1 - dv. \quad (3.28)$$

Дифференцируя его по времени и используя уравнение Власова, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = e \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \int \mathbf{v} (v f_{1-} dv - \frac{e^2}{m} (\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi_1) \times \\ \times \int \frac{df_{0-}}{dv}) (v dv). \quad (3.29)$$

В соответствии с предположением (1) здесь можно пренебречь первым членом в правой части. Тогда интегрирование по частям оставшихся членов дает

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = n_- \frac{e^2}{m} (\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{r}}). \quad (3.30)$$

Усредняя по всем возможным ионным конфигурациям, как это было сделано при выводе формулы (3.27), получаем

$$\frac{\partial \langle \mathbf{j} \rangle}{\partial t} = n_- \frac{e^2}{m} (\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \langle \mathbf{E} \rangle). \quad (3.31)$$

Вспомним теперь, что коэффициент электропроводности $\sigma(\omega)$ связывает электрическое поле и плотность тока

$$\tilde{\mathbf{j}}(\omega) = \sigma(\omega) \mathbf{E}_0(\omega). \quad (3.32)$$

Сравнивая это соотношение с преобразованием Фурье уравнения (3.31), получим выражение для комплексной проводимости

$$\sigma = i\varepsilon_0 \frac{\omega_{p-}^2}{\omega} \{1 - I(\omega)\}, \quad (3.33)$$

где

$$I(\omega) = \frac{e^2}{6\pi^2 \varepsilon_0 m \omega^2} \int_0^{k_{\max}} \left(\frac{1}{k^2 + \omega_{p-}^2/V_T^2} - \frac{1}{k^2 A_{k\omega}} \right) k^4 dk \quad (3.34)$$

— малая в рассматриваемой области частот величина порядка $1/\omega\tau_c$.

Удельное сопротивление плазмы описывается соотношением

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = - \frac{i\omega}{\varepsilon_0 \omega_{p-}^2} [1 + I(\omega)]. \quad (3.35)$$

В предельных случаях, когда $\omega/\omega_{p-} \ll 1$ или соответственно $\omega/\omega_{p-} \gg 1$, величина ρ (3.35) может быть вычислена

аналитически. В случае $\omega \ll \omega_{p-}$

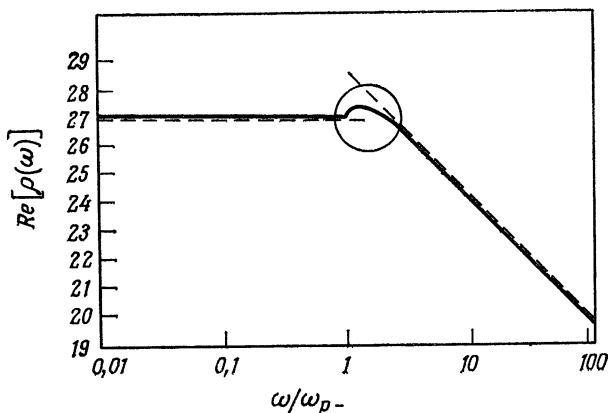
$$\rho = -\frac{i\omega}{\epsilon_0\omega_{p-}^2} \left\{ \left[1 - \left(1 - \frac{\pi}{8} \right) \frac{e^2\omega_{p-}}{2\pi\epsilon_0 m V_T^3} \right] + \right. \\ \left. + i \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{e^2\omega_{p-}^2}{24\pi\epsilon_0 m V_T^3 \omega} \left[\ln \left(\frac{2V_T k_{\text{макс}}}{\omega_{p-}} \right)^2 - 1 \right] \right\}. \quad (3.36)$$

Для $\omega \gg \omega_{p-}$

$$\rho = -\frac{i\omega}{\epsilon_0\omega_{p-}^2} \left\{ \left[1 + (2\pi)^{1/2} \frac{e^2\omega_{p-}^2}{24\pi\epsilon_0 m V_T^3 \omega} \right] + \right. \\ \left. + i \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{e^2\omega_{p-}^2}{24\pi\epsilon_0 m V_T^3 \omega} \left[\ln \left(\frac{2V_T^2 k_{\text{макс}}^2}{\omega^2} \right) - C \right] \right\}, \quad (3.37)$$

где $C \approx 0,577$ — постоянная Эйлера.

Заметим, что авторы работ [6, 7] рассчитали численными методами величину ρ во всей области изменения



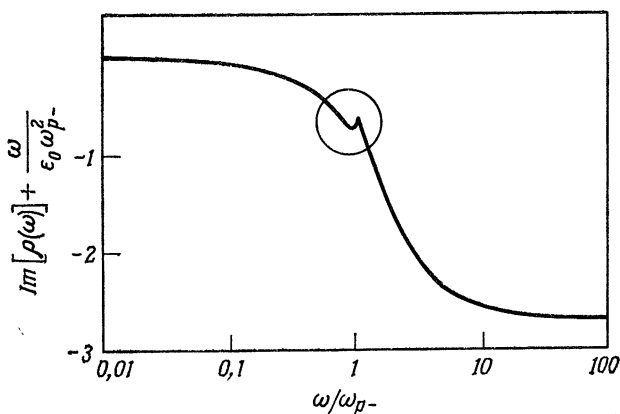
Ф и г. 27. Удельное сопротивление плазмы $\text{Re}[\rho(\omega)]$ в области частот $\omega > \nu_c$ [6].

Значения $\text{Re}[\rho(\omega)]$ нормированы на величину $\rho_0 = [\sqrt{32} e^2/3m_-(4\pi\epsilon_0)^2] \times (m_-/\Theta)^{3/2} \approx 5,8 \cdot 10^{-5} \Theta^{3/2} \Omega m$, где значения Θ даны в зВ.

частот. Их результаты для зависимости действительной и мнимой (*реактанса*) частей ρ приведены на фиг. 27 и 28. Из фиг. 27 видно, что действительная часть удельного сопротивления на частотах ниже плазменной является постоянной величиной. Это также непосредственно

следует из формулы (3.36). Сравнение данных результатов с результатами, которые мы получим в следующем параграфе для низких частот $\omega \ll \omega_p$, показывает, что на верхнем пределе частот они совпадают. Это вполне понятно, так как наши результаты верны и в области $1/\tau_c \ll \omega \leq \omega_p$.

Приведенная функциональная зависимость обнаруживает небольшое возрастание удельного сопротивления на частотах чуть выше плазменной. Даусон и Оберман



Ф и г. 28. Реактанс плазмы $\text{Im} [\rho (\omega)]$ в области частот $\omega > \nu_c$ (в тех же единицах, что и величина $\text{Re} [\rho (\omega)]$ на фиг. 27) [6]. В приведенном графике из величины $\text{Im} [\rho (\omega)]$ вычитается реактанс свободных электронов $-\omega/\epsilon_0 \omega_p^2$.

показали, что это возрастание связано с возбуждением продольных плазменных колебаний. Убывание удельного сопротивления в области высоких частот можно объяснить уменьшением эффективного поперечного сечения столкновений: столкновения с большими значениями прицельного параметра представляют собой медленный процесс и не дают вклада в высокочастотные поля. Таким образом, максимальное эффективное значение прицельного параметра составляет величину порядка V_T/ω .

Формула (3.37) и соответствующая ей зависимость на фиг. 28 показывают, что изменение реактанса можно рас-

смаатривать как результат изменения эффективной массы электронов вследствие взаимодействия с ионами. Заметим, что зависимость реактанса также обнаруживает небольшой пик вблизи плазменной частоты, что объясняется теми же причинами, что и возрастание действительной части удельного сопротивления.

Теперь, после того как мы вычислили проводимость и удельное сопротивление плазмы с учетом корреляционных эффектов, можно также решить дисперсионное уравнение (2.39)

$$\det \left(n^2 \mathbf{I}_\perp - \mathbf{I}_\parallel - \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} \boldsymbol{\sigma} \right) = 0 \quad (3.38)$$

и найти коэффициент поглощения. Он равен удвоенной отрицательной мнимой части частоты, вычисленной из дисперсионного уравнения для действительных значений волнового вектора k .

Подставим выражение (3.33) для проводимости σ в дисперсионное уравнение.

Для продольных электростатических волн получаем

$$\omega^2 = \omega_{p-}^2 [1 - I(\omega)], \quad (3.39)$$

а для поперечных электромагнитных волн

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{p-}^2 (1 - I(\omega)). \quad (3.40)$$

Принимая во внимание неравенство $|I(\omega)| \ll 1$, которое уже было использовано выше, находим из (3.39) для потенциальных электростатических волн

$$\omega = \omega_{p-} \left[1 - \frac{1}{2} I(\omega) \right], \quad (3.41)$$

а для поперечных волн, согласно (3.40), имеем

$$\omega = (k^2 c^2 + \omega_{p-}^2)^{1/2} - \frac{1}{2} \frac{\omega_{p-}^2}{\omega} I(\omega). \quad (3.42)$$

Таким образом получаем выражение для коэффициентов поглощения в виде

$$\alpha_{\parallel} = \omega_{p-} \operatorname{Im} [I(\omega)], \quad (3.43)$$

$$\alpha_{\perp} = \omega_{p-}^2 \operatorname{Im} \left[\frac{I(\omega)}{\omega} \right]. \quad (3.44)$$

Зависимость, приведенная на фиг. 27, оправдывает применимость асимптотической формулы (3.37) вплоть до частоты $\omega \approx \omega_{p-}$. Подстановка соответствующего выражения для $I(\omega)$ в (3.43) приводит к следующему соотношению для коэффициента поглощения продольных волн:

$$\alpha_{\parallel} = \left(\frac{2}{27\pi}\right)^{1/2} \omega_{p-} \frac{\ln \Lambda}{\Lambda} \left(1 - \frac{C - \ln \frac{3}{2}}{2 \ln \Lambda}\right), \quad (3.45)$$

или к соотношению

$$\alpha_{\parallel} \approx O\left(\frac{1}{\tau_c}\right). \quad (3.46)$$

Полученный результат вполне закономерен, поскольку время между столкновениями τ_c есть время релаксации возмущений, создаваемых в плазме. Вследствие сохранения импульса при электрон-электронных взаимодействиях они не могут давать вклада в механизм релаксации возмущений. Поэтому постоянная затухания продольных волн практически равна величине, обратной времени релаксации процессов при электрон-ионном взаимодействии.

Не удивительно, что в области больших длин волн затухание Ландау не проявляется. Дело в том, что в этой области длин волн мы пренебрегли «диффузионным членом» в уравнении (3.29), который в основном и отвечает за эффект затухания.

Для коэффициента поглощения по. еречных волн имеем

$$\alpha_{\perp} = \left(\frac{2}{27\pi}\right)^{1/2} \frac{\omega_{p-}^3}{\omega^2} \frac{\ln[(\omega_{p-} - \Lambda)/\omega]}{\Lambda} \left[1 - \frac{C - \ln \frac{3}{2}}{2 \ln[(\omega_{p-} - \Lambda)/\omega]}\right]. \quad (3.47)$$

Поскольку мы интересуемся в общем областью плотностей плазмы, достаточно низких по сравнению с критической плотностью, должно выполняться условие $\ln \Lambda \gg 1$. Поэтому

$$\alpha_{\perp} \approx O\left(\frac{\omega_{p-}^3}{\omega^2} \frac{1}{\tau_c}\right). \quad (3.48)$$

Таким образом, при рассмотрении электромагнитных волн в плазме, где в первую очередь интересны области

$u > c$ и $\omega > \omega_{p-}$, затухание поперечных мод колебаний меньше затухания продольных мод. Из дальнейшего будет ясно, что этот эффект зависит от частоты, причем физическое происхождение такой зависимости уже объяснялось при обсуждении выражения для удельного сопротивления.

Теперь, получив необходимое представление о коэффициенте поглощения, вернемся к исследованию вопроса о коэффициенте излучения. При этом мы будем интересоваться главным образом поперечными волнами.

В соответствии с законом Кирхгофа мощность, излучаемая из единицы объема, связана с произведением плотности энергии на коэффициент поглощения. Это соотношение базируется на принципе детального равновесия для каждой моды колебаний. Кроме того, оно может быть получено исходя из флуктуационно-диссипационной теоремы.

Таким образом, при вычислении коэффициента излучения используем выражения для α_{\perp} и плотности энергии поперечных мод колебаний. Чтобы найти выражение для плотности, рассмотрим число поперечных мод dn_k в интервале $(k, k + dk)$, приходящееся на единицу объема. Оно определяется формулой ²⁴

$$dn_k = \pi^{-2} k^2 dk. \quad (3.49)$$

(Здесь k — возможные значения волновых векторов в кубическом элементе объема $V = L^3$, образующие в пространстве k -векторов решетку с постоянной $2\pi/L$. Поперечные волны имеют два направления поляризации.)

Плотность распределения поперечных мод, приходящаяся на единичный интервал частот, описывается формулой

$$\frac{dn_{\omega}}{d\omega} = \pi^{-2} k^2(\omega) \frac{dk}{d\omega}, \quad (3.50)$$

в которой следует учитывать дисперсионное соотношение для поперечных волн

$$k^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_{p-}^2)}{c^2}. \quad (3.51)$$

Поправки к данному дисперсионному соотношению, связанные с эффектами поглощения, имеют порядок $\omega\tau_0$.

Чтобы найти плотность энергии, приходящейся на единицу объема и единичный интервал угловой частоты, нужно приписать каждой моде колебаний некоторое определенное значение энергии. Допустим, что для плазмы, близкой к равновесию, эта энергия равна Θ . Грубым обоснованием такого допущения могут служить следующие соображения.

Рассмотрим равновесную плазму, заключенную в ящик большого объема. Чтобы избежать существенного отражения энергии для лучей, проникающих в плазму, будем считать, что пограничный слой плазмы, с одной стороны, достаточно размыт. С другой стороны, пусть этот слой представляет собой резкую границу раздела, чтобы были справедливы законы преломления Снелля. Тогда очевидно, что ширина падающего перпендикулярно поверхности плазмы луча, описываемая в вакууме телесным углом $d\Omega_V$, будет внутри плазмы изменяться и описываться телесным углом $d\Omega_p$. При этом в соответствии с законом дифракции имеем

$$\frac{d\Omega_p}{u^2} = \frac{d\Omega_V}{c^2}. \quad (3.52)$$

Таким образом, выполняется соотношение

$$k_0^2 d\Omega_V = k^2 d\Omega_p, \quad (3.53)$$

где k и $k_0 = \omega/c$ — волновые числа для волн в плазме и вакууме. Непрерывность потока энергии на границе можно в этом случае записать в виде равенства

$$d\Omega_V \mathcal{E}_V c = d\Omega_p \mathcal{E}_p u_g. \quad (3.54)$$

Здесь \mathcal{E}_V и \mathcal{E}_p — плотности энергии, приходящейся на единицу объема и единичный интервал частот, в вакууме и плазме, а величина u_g — групповая скорость волн в плазме. Поделив равенство (3.54) на (3.53), получим

$$\frac{\mathcal{E}_V c}{k_0^2} = \frac{\mathcal{E}_p u_g}{k^2}. \quad (3.55)$$

Отсюда, учитывая тривиальное соотношение

$$u_g dk = c dk_0, \quad (3.56)$$

найдем, что

$$\frac{\mathcal{E}_p}{k^2 dk} = \frac{\mathcal{E}_V}{k_0^2 dk_0}. \quad (3.57)$$

Величина $k^2 dk$ по существу определяет число мод n_k в интервале волновых чисел $(k, k + dk)$.

Таким образом, из равенства (3.57) следует, что в рамках принятых допущений энергия, приходящаяся на одну моду колебаний, одна и та же в плазме и вакууме и для каждой моды с заданным направлением поляризации равна Θ .

Из (3.57) с помощью формулы (3.51) найдем выражение для плотности энергии излучения, приходящейся на единственный интервал частот,

$$\mathcal{E}_p(\omega) = \Theta \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \left(1 - \frac{\omega_{p-}^2}{\omega^2}\right)^{1/2}. \quad (3.58)$$

Теперь, используя закон Кирхгофа, получим формулу для коэффициента излучения через произведение плотности энергии (3.58) на коэффициент поглощения:

$$j(\omega) = \frac{\Theta}{\pi^2 c^3} \left(1 - \frac{\omega_{p-}^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \omega_{p-}^2 \omega \operatorname{Im} [I(\omega)] \approx \\ \approx \frac{1}{\tau_c} \frac{\omega_{p-}^2 \Theta}{c^3} \left(1 - \frac{\omega_{p-}^2}{\omega^2}\right)^{1/2}. \quad (3.59)$$

Найденный коэффициент излучения определяет интенсивность тормозного излучения, обусловленного электрон-ионными взаимодействиями при учете коллективных эффектов. Электрон-электронными взаимодействиями здесь пренебрегается. Это вполне оправдано, так как известно, что в рамках дипольного приближения электронные корреляции не дают вклада в тормозное излучение.

3.2. Описание процессов с помощью уравнения Фоккера — Планка

Применимость рассматриваемого метода ограничена областью частот и скоростей

$$\omega < \omega_{p-}, \quad u \gg v_T.$$

Хорошо известно, что в системах с дальнедействующими силами эффект накопления большого числа малых отклонений, обусловленных дальними столкновениями, более

важен, чем влияние нескольких столкновений, приводящих к большим отклонениям. Этот эффект от дальних столкновений можно учесть с помощью интеграла столкновений Ландау, применимость которого в соответствии с разд. 1.3 гл. 4 определяется неравенствами $\omega < \omega_{p-}$, $\ln \Lambda \gg 1$. Уравнение первого порядка цепочки ББГКИ, включающее корреляционный член, записанный в форме Ландау [см. формулы (1.74) и (1.77) в гл. 4], в случае многокомпонентной плазмы имеет вид

$$\frac{\partial f_{\nu}^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\nu}^{(1)}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m_{\nu}} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_{\nu}^{(1)}}{\partial \mathbf{v}} = \sum_{\nu} I(f_{\nu}^{(1)} | f_{\nu}^{(1)}),$$

$$I(f_{\nu}^{(1)} | f_{\nu}^{(1)}) =$$

$$= \Gamma_{\nu} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int \frac{g_{\nu}^2 \mathbf{I} - g_{\nu}}{g_{\nu}^3} (g_{\nu}) \left(f_{\nu}^{(1)} \frac{\partial f_{\nu}^{(1)}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{m_{\nu} f_{\nu}^{(1)}}{m_{\nu}} \frac{\partial f_{\nu}^{(1)}}{\partial \mathbf{v}} \right) d\mathbf{v}_{\nu}, \quad (3.60)$$

$$\Gamma_{\nu} = - \frac{e^4 (m_{\nu} + m_{\nu})}{16\pi \varepsilon_0^2 m_{\nu}^2 m_{\nu}} \ln \left[\frac{4\pi \varepsilon_0 m_{\nu} m_{\nu} \langle g_{\nu}^2 \rangle \lambda_D}{e^2 (m_{\nu} + m_{\nu})} \right].$$

Здесь в интеграле столкновений использованы обозначения, принятые в § 2 гл. 4.

Содержащееся в данном уравнении суммирование по ν распространяется на электроны и ионы. Величиной $g_{\nu} = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\nu})$ обозначена относительная скорость.

Используемая нами для изучения «области низких частот» физическая модель не отличается от использовавшейся в предыдущем разделе модели для «области высоких частот». Поэтому приведенные на стр. 363 предположения (1) — (4) здесь сохраняют свою силу, с той лишь разницей, что вместо упомянутого в пункте (4) уравнения Власова мы используем теперь уравнение Фоккера — Планка, а вместо ранее рассмотренной области частот исследуем область частот $\omega < \omega_{p-}$. Кроме того, в качестве функции распределения нулевого порядка используем распределение Максвелла в лабораторной системе координат.

Линеаризуем уравнение (3.60) [см. (2.15) и (2.17)], положив

$$f_{\nu}^{(1)} = f_{0-} + f_{1-}, \quad f_{\nu}^{(1)} = f_{0+}. \quad (3.61)$$

Это приводит к разбиению интеграла столкновений на сла-
гаемые

$$I(f_{0-}|f_{0-}) + I(f_{0-}|f_{0+}) + I(f_{0-}|f_{1-}) + \\ + I(f_{1-}|f_{0-}) + I(f_{1-}|f_{0+}). \quad (3.62)$$

Первые два члена определяют функцию распределения нулевого порядка и вследствие предположения о том, что f_0 — максвелловская функция распределения, обращаются в нуль. Следующие два члена описывают влияние электрон-электронных столкновений на возмущение и в дипольном приближении не дают никакого вклада. Поэтому нас будет интересовать лишь последний член.

Левая часть уравнения (3.60) линеаризуется обычным способом.

Предположение (2) позволяет упростить интеграл столкновений с ионами:

$$I(f_{1-}|f_{0+}) = \Gamma_+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{v^2 \mathbf{I} - \mathbf{v}(\mathbf{v})}{v^3} \cdot \frac{\partial f_{1-}}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int f_{0+} d\mathbf{v}', \\ \Gamma_+ = - \frac{e^4}{16\pi\epsilon_0^2 m_-^2} \ln \left(\frac{4\pi\epsilon_0 m_- \langle v^2 \rangle \lambda_D}{e^2} \right). \quad (3.63)$$

Интегрирование по \mathbf{v}' в результате дает ионную плотность n_+ . Уравнение (3.60) с линеаризованной левой частью принимает вид

$$\frac{\partial f_{1-}}{\partial t} - \frac{e\mathbf{E}}{m_-} \cdot \frac{\partial f_{0-}}{\partial \mathbf{v}} = \Gamma_+ n_+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{v^2 \mathbf{I} - \mathbf{v}(\mathbf{v})}{v^3} \cdot \frac{\partial f_{1-}}{\partial \mathbf{v}}. \quad (3.64)$$

Здесь вследствие ограничения, налагаемого на фазовую скорость сверху, мы опять опустили диффузионный член $\mathbf{v} \cdot \partial f_{1-} / \partial \mathbf{r}$. Функция f_{0-} есть распределение Максвелла

$$f_{0-} = n_- \left(\frac{m_-}{2\pi\Theta} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m_- v^2}{2\Theta} \right). \quad (3.65)$$

Если ввести безразмерную переменную

$$\mathbf{U} = \mathbf{v} \left(\frac{m_-}{\Theta} \right)^{1/2}, \quad (3.66)$$

то кинетическое уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\partial f_{1-}}{\partial t} + \left(\frac{e^2}{m_- \Theta} \right)^{1/2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{U} f_{0-} = \left(\frac{m_-}{\Theta} \right)^{3/2} \Gamma_+ n_+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \cdot \frac{U^2 \mathbf{I} - \mathbf{U}(\mathbf{U})}{U^3} \cdot \frac{\partial f_{1-}}{\partial \mathbf{U}}. \quad (3.67)$$

В правой части этого уравнения член столкновений записан в виде произведения безразмерного выражения типа дивергенции, представляющего диффузию в пространстве скоростей, на частоту столкновений

$$2\nu_c = \left(\frac{m_-}{\Theta}\right)^{3/2} n_+ \Gamma_+ = \frac{3}{4} \omega_{p-} \frac{\ln \Lambda}{\Lambda}. \quad (3.68)$$

Будем искать решение уравнения (3.67) в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad f_{1-} = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{U} A(U) e^{-i\omega t} = \tilde{f}_{1-} e^{-i\omega t}. \quad (3.69)$$

Подстановка этих выражений в (3.67) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} -i\omega \mathbf{U} \cdot \mathbf{E}_0 + \left(\frac{e^2}{m_- \Theta}\right)^{1/2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{E}_0 \frac{f_{0-}}{A} = \\ = \frac{\nu_c}{2U^3} \frac{\partial}{\partial U} \cdot (U^2 \mathbf{I} - \mathbf{U})(\mathbf{U}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{U} \cdot \mathbf{E}_0. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Здесь мы воспользовались особым свойством тензора $U^2 \mathbf{I} - \mathbf{U})(\mathbf{U})$, состоящим в том, что он проецирует любой вектор на плоскость, перпендикулярную \mathbf{U} .

Вследствие этого оказывается возможным вынести скалярные величины U^3 , $A(U)$ из-под дифференциального оператора, определяющего диффузию. Используя равенство

$$\frac{\partial}{\partial U} \cdot (U^2 \mathbf{I} - \mathbf{U})(\mathbf{U}) = 2\mathbf{U} - 3\mathbf{U} - \mathbf{U} = -2\mathbf{U}, \quad (3.71)$$

получаем

$$A(U) = -i \left(\frac{e^2}{m_- \Theta}\right)^{1/2} f_{0-} \left(\omega + \frac{i\nu_c}{U^3}\right)^{-1}. \quad (3.72)$$

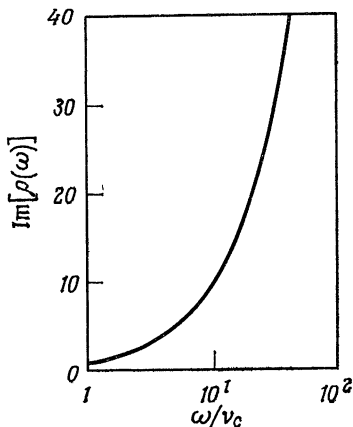
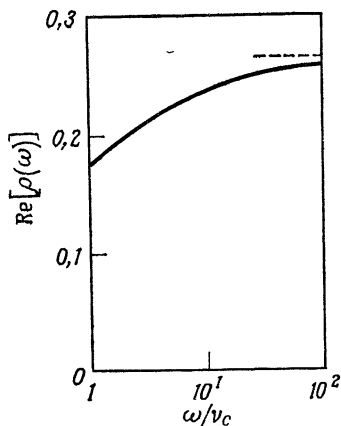
Теперь мы можем найти плотность тока

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{j}}_\omega = -e \int \mathbf{v} \tilde{f}_{1-} d\mathbf{v} = -e \left(\frac{\Theta}{m_-}\right)^2 \int \mathbf{U} A(U) \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{U} dU = \\ = -\frac{4\pi}{3} e \left(\frac{\Theta}{m_-}\right)^2 \int_0^\infty U^4 A(U) dU \mathbf{E}_0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Подставляя в эту формулу выражения (3.72) и (3.65) и учитывая определение проводимости σ , получаем

$$\sigma(\omega) = \frac{i}{3} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \epsilon_0 \omega_{p-}^2 \int_0^\infty \frac{U^4 \exp(-U^2/2)}{\omega + i\nu_c/U^3} dU. \quad (3.74)$$

На фиг. 29 и 30 приведены частотные зависимости для действительной и мнимой частей удельного сопротивления $\rho = 1/\sigma$, вычисленные по формуле (3.74).



Ф и г. 29. Удельное сопротивление плазмы $\text{Re} [\rho (\omega)]$ в области частот $\omega < \omega_{p-}$, нормированное на величину $v_c/\epsilon_0\omega_{p-}$.

Штриховая кривая (область больших частот) соответствует низкочастотному пределу зависимости, показанной на фиг. 27.

Ф и г. 30. Реактанс $\text{Im} [\rho (\omega)]$ в области частот $\omega < \omega_{p-}$ (в тех же единицах, что и на фиг. 29).

Зная выражение для σ (3.74), из решения дисперсионного уравнения

$$\det \left[n^2 \mathbf{I}_\perp - \mathbf{I}_\parallel \left(1 + \frac{i\sigma}{\epsilon_0\omega} \right) \right] = 0 \quad (3.75)$$

мы можем определить коэффициент поглощения.

Частота продольных волн, полученная из этого уравнения, равна

$$\omega_\parallel = - \frac{i\sigma}{\epsilon_0}, \quad (3.76)$$

или, учитывая (3.74),

$$\omega_\parallel = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \omega_{p-}^2 \int_0^\infty \frac{U^4 \exp(-U^2/2)}{\omega_\parallel + i v_c/U^3} dU. \quad (3.77)$$

Соответственно частота *поперечных волн* определяется выражением

$$\omega_{\perp}^2 = k^2 c^2 - \frac{i\omega_{\perp}\sigma}{\epsilon_0}, \quad (3.78)$$

или после подстановки (3.74) выражением

$$\omega_{\perp}^2 = k^2 c^2 + \frac{1}{3} \omega_{p-}^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} \frac{U^4 \exp(-U^2/2)}{1 + i\nu_c/\omega_{\perp} U^3} dU. \quad (3.79)$$

Коэффициент поглощения выражается, как обычно, удвоенной мнимой частью ω с отрицательным знаком.

Для асимптотических случаев $\omega \ll \nu_c$, $\omega \gg \nu_c$ ($\omega, \nu_c \ll \omega_{p-}$) все вычисления можно провести в аналитической форме. При анализе этих случаев используем для краткости следующее обозначение:

$$C_m = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} U^m \exp\left(-\frac{U^2}{2}\right) dU = \begin{cases} (m-1)(m-3)\dots 1 & \text{для четных } m, \\ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} (m-1)(m-3)\dots 2 & \text{для нечетных } m. \end{cases} \quad (3.80)$$

Случай $\omega \ll \nu_c$. Проводимость σ имеет вид

$$\sigma = \frac{1}{3} \left(\frac{\epsilon_0 \omega_{p-}^2}{\nu_c}\right) (C_7 + \frac{i\omega}{\nu_c} C_{10}). \quad (3.81)$$

Это выражение при $\omega=0$ приводит по существу к обычному соотношению для подвижности электронов, обусловленной эффектом близких соударений и определяемой формулой $\mu_- = \sigma(\omega=0)/en_-$, т. е.

$$\mu_- = \frac{C_7}{3} \left(\frac{e\langle\lambda\rangle}{m_- \nu_T}\right). \quad (3.82)$$

Здесь $\langle\lambda\rangle$ — эффективная длина свободного пробега, а ν_T — тепловая скорость электрона.

Для частоты продольных волн мы имеем

$$\omega_{\parallel} = -\frac{i\omega_{p-}^2 C_7 \nu_c}{3\nu_c^2 + C_{10}\omega_{p-}^2}. \quad (3.83)$$

Поскольку $\nu_c \ll \omega_{p-}$, можно приближенно записать

$$\omega_{\parallel} \approx -i \frac{C_7}{C_{10}} \nu_c = -\frac{i\alpha_{\parallel}}{2}, \quad (3.84)$$

откуда видно, что ω_{\parallel} — чисто мнимая величина, а ν_c характеризует время релаксации возмущений, равное $2/\alpha_{\parallel}$.

Частота поперечных волн определится формулой

$$\omega_{\perp}^2 = k^2 c^2 - i \frac{\omega_{p-}^2 \omega_{\perp}}{\nu_c} \left(C_7 + i \frac{\omega_{\perp}}{\nu_c} C_{10} \right). \quad (3.85)$$

В результате для мнимой частоты ω_{\perp} получим

$$\text{Im}(\omega_{\perp}) = -\frac{1}{2} C_7 \frac{\omega_{p-}^2}{\nu_c} = -\frac{\alpha_{\perp}}{2}. \quad (3.86)$$

Напомним, что по предположению $\omega_{p-}/\nu_c = \ln \Lambda/\Lambda \ll 1$. Отсюда видим, что найденное решение не удовлетворяет нашему первоначальному требованию, согласно которому $\omega \ll \nu_c$. Поэтому можно заключить, что для описания рассматриваемого круга явлений уравнение Ландау оказывается непригодным.

Случай $\omega \gg \nu_c$. Проводимость σ здесь записывается в виде

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{3} i \epsilon_0 \frac{\omega_{p-}^2}{\omega} \left(C_4 - i \frac{\nu_c}{\omega} C_1 \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \epsilon_0 \frac{\omega_{p-}^2}{\omega^2} \nu_c + i \epsilon_0 \frac{\omega_{p-}^2}{\omega}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

В пределе, когда $\nu_c/\omega \rightarrow 0$, это выражение приводит к проводимости, определяемой свободными электронами.

Частота продольных волн в рассматриваемом случае есть

$$\omega_{\parallel}^2 = \omega_{p-}^2 \left(1 - \frac{1}{3} i \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\nu_c}{\omega_{\parallel}} \right). \quad (3.88)$$

Если частота столкновений $\nu_c \rightarrow 0$, то это дисперсионное уравнение дает для рассматриваемой системы при $\nu_T \ll \ll \omega/k$ решение $\omega_{\parallel}^2 = \omega_{p-}^2$.

Мнимая часть ω_{\parallel} определяет коэффициент поглощения, обусловленного затуханием за счет столкновений:

$$\text{Im}(\omega_{\parallel}) = -\frac{1}{6} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \nu_c = -\frac{\alpha_{\parallel}}{2}. \quad (3.89)$$

Частота поперечных волн в данном случае равна

$$\omega_{\perp}^2 = k^2 c^2 + \omega_{p-}^2 - i \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{\omega_{p-}^2 \nu_c}{\omega_{\perp}} \right). \quad (3.90)$$

Эта формула отличается от дисперсионного соотношения для системы, в которой отсутствуют корреляции частиц, только наличием мнимой части. Коэффициент поглощения при этом определяется мнимой частью частоты

$$\text{Im}(\omega_{\perp}) = -\frac{1}{6} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\omega_p^2 - \nu_c}{k^2 c^2 + \omega_p^2} = -\frac{\alpha_{\perp}}{2}. \quad (3.91)$$

Однако, поскольку из формулы (3.90) следует, что $|\omega_{\perp}| \geq \omega_p$, то это нарушает наше исходное предположение относительно условий применимости уравнения Ландау. Поэтому данный результат представляется недостаточно обоснованным.

§ 4. УЧЕТ КОЛЛЕКТИВНЫХ ЭФФЕКТОВ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ И ПРОЦЕССОВ ИЗЛУЧЕНИЯ В ОДНОЧАСТИЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ. РАССЕЯНИЕ СВЕТА

В § 2 настоящей главы процессы, связанные с динамикой частиц и их излучением, рассматривались как коллективные эффекты. В этом приближении тензор диэлектрической проницаемости описывает когерентные эффекты реакции системы на воздействие электромагнитных волн, а сама система рассматривается в виде некоторой непрерывно распределенной среды.

В § 3 тот же метод описания с позиций коллективных эффектов использовался для электронов и динамики их движения и излучения. Однако ионы при этом рассматривались в виде совокупности отдельных частиц, причем учитывались корреляции электронов, связанные с распределением ионов.

Данный параграф отличается от предыдущих главным образом тем, что излучение, обусловленное электронами, будет описываться как одночастичный процесс (по сравнению с которым излучение от ионов является пренебрежимо малым). Это позволит нам учесть процессы рассеяния света. Динамика же частиц в тех случаях, когда это потребуется, будет учитываться лишь через коллективные эффекты. Вследствие этого обсуждавшееся в предыдущем разделе тормозное излучение окажется вне рамок рассмотрения данного параграфа.

4.1. Излучение плазмы, обусловленное отдельными электронами

Процессы рассеяния представляют особый интерес для световых волн, ибо их частоты $\omega \gg \omega_{p0}$ и они проникают в плазму, не вызывая относительно сильной реакции среды, обусловленной коллективными эффектами. Известно, что для таких частот когерентные эффекты реакции плазмы на излучение пренебрежимо малы и ее тензор диэлектрической проницаемости можно считать единичным. Следовательно, электроны в этом случае можно рассматривать как частицы, помещенные во внешнее электрическое поле. Зададим это поле в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp [i (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}' - \omega_0 t)]. \quad (4.1)$$

Тогда ускорение пробного электрона запишется как

$$\ddot{\mathbf{x}}' = -\frac{e}{m_-} \mathbf{E}_0 \exp [i (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}' - \omega_0 t)], \quad (4.2)$$

поскольку в силу указанного выше условия $\epsilon = 1$ можно пренебречь ускорением, связанным с коллективными взаимодействиями частиц, а также ускорением, обусловленным взаимодействием с отдельными частицами, которое приводит к рассмотренному в § 3 эффекту тормозного излучения.

При получении соотношения (4.2) предполагалось также выполнение ряда других упрощающих допущений. Так, движение электрона считается нерелятивистским, т. е.

$$\dot{x}'^2 \ll c^2. \quad (4.3)$$

Кроме того, предполагается, что можно пренебречь воздействием на электрон магнитного поля световой волны. Это означает, что должны выполняться следующие два более строгих условия:

$$v_T \ll c, \quad \frac{eE_0}{m_- \omega_0 c} \ll 1. \quad (4.4)$$

Здесь второе условие также означает, что максимальная амплитуда a колебаний электрона в электрическом поле волны должна быть много меньше длины волны:

$$k_0 a = \frac{a}{\lambda} \ll 1, \quad \text{где } a = \frac{eE_0}{m_- \omega_0^2}. \quad (4.5)$$

Наконец, для справедливости соотношения (4.2) требуется, чтобы интенсивность рассеянной световой волны была много меньше интенсивности падающей волны. Как будет видно из результатов, это условие обычно хорошо выполняется.

С помощью соотношения (4.2) можно рассчитать излучение пробного электрона, обусловленное его ускорением в поле внешней электромагнитной волны, т. е. эффект ее рассеяния. Это можно сделать, вычислив соответствующую величину вектора Пойнтинга. Вектор Пойнтинга \mathbf{S}_ω определяется фурье-компонентами полей, излучаемых ускоряющимся в волне электроном. Эти поля находятся с помощью потенциалов Лиенара — Вихерта, которые в общем случае имеют вид

$$\mathbf{A} = -\frac{e\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{x}}'(t')}{r(t') - \dot{\mathbf{x}}'(t') \cdot \mathbf{r}(t')/c}, \quad (4.6)$$

$$\Phi = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r(t') - \dot{\mathbf{x}}'(t') \cdot \mathbf{r}(t')/c}. \quad (4.7)$$

Здесь для краткости введены обозначения

$$t' = t - \frac{r(t')}{c}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}', \quad (4.8)$$

где время t и координата \mathbf{x} относятся к точке наблюдения, а \mathbf{x}' характеризует положение источника излучения. Соответствующие выражения для полей определяются формулами

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}} - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \times \mathbf{A}. \quad (4.9)$$

В частности, согласно формуле (5.2.39), для излучаемой части электромагнитного поля мы имеем

$$\mathbf{E} = \frac{c}{r} \mathbf{B} \times \mathbf{r}. \quad (4.10)$$

Это позволяет нам вычислить лишь магнитное поле рассеянной волны.

Поскольку нас интересует поле в волновой зоне, откуда следует, что $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$, можно использовать при-

ближенное соотношение

$$t' \approx t - \frac{x}{c} + \frac{\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}'(t')}{xc} \approx t - \frac{x}{c} + \frac{\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}' \left(t - \frac{x}{c} \right)}{xc}, \quad (4.11)$$

в котором мы пренебрегли всеми членами более высокого порядка по сравнению с линейными членами по x'/x .

Пренебрегая также членами порядка $\dot{x}'x'/cx$, можно написать выражение для векторного потенциала в следующем простом виде:

$$\mathbf{A} \approx -\frac{e\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{x}}'(t')}{r(t')} \approx -\frac{e\mu_0}{4\pi x} \dot{\mathbf{x}}'(t'). \quad (4.12)$$

Разумеется, в данном случае нельзя, формально руководствуясь условиями (4.4), пренебречь эффектами, определяемыми векторным потенциалом (4.12). Дело в том, что здесь порядок v/c имеет основной член, тогда как ранее речь шла о пренебрежении в выражении (4.2) магнитным полем, учет которого приводил бы лишь к поправке порядка v/c . С помощью формулы (4.12) найдем магнитное поле, связанное с полем излучения,

$$\mathbf{B} = \frac{e\mu_0}{4\pi x} \left[\ddot{\mathbf{x}}'(t') \times \frac{\partial t'}{\partial \mathbf{x}} \right], \quad (4.13)$$

которое, используя соотношение (4.11), запишем в иной форме:

$$\mathbf{B} = \frac{e\mu_0}{4\pi cx^2} [\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}'(t')]. \quad (4.14)$$

Подставим теперь сюда величину ускорения, определяемого формулой (4.2), и найдем

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{e^2}{m_-} \frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{x}}{x^2} \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}'(t') - i\omega_0 t'). \quad (4.15)$$

Поскольку условие (4.5) позволяет также пренебречь членами порядка $\dot{x}'x'/c\lambda$ в аргументе функций \mathbf{x}' (но не в величине $\omega_0 t'$), мы можем опустить третий член разложения (4.11) для t' .

Для краткости обозначим

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 - \frac{\omega_0}{c} \frac{\mathbf{x}}{x} = \mathbf{k}_0 - |\mathbf{k}_0| \frac{\mathbf{x}}{x}. \quad (4.16)$$

Тогда, используя формулу (4.11), перепишем выражение (4.15) в виде

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{e^2}{m_-} \frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{x}}{x^2} \times \exp \left\{ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' \left(t - \frac{x}{c} \right) - i \left(t - \frac{x}{c} \right) \omega_0 \right\}. \quad (4.17)$$

(Следует заметить, что здесь величина $t - x/c$ является аргументом функции \mathbf{x}' .)

Отсюда видно, что в рамках рассматриваемого приближения амплитудный множитель не содержит каких-либо поправок первого порядка, зависящих от координаты электрона. Однако такие поправки входят в фазовый множитель, играющий основную роль в явлениях интерференции.

Очевидно, что волновой вектор \mathbf{k} состоит из двух равных по величине векторов, угол между направлениями которых образует угол рассеяния ϑ . Абсолютная величина волнового вектора равна

$$|\mathbf{k}| = 2 \frac{\omega_0}{c} \sin \frac{\vartheta}{2}. \quad (4.18)$$

Само собой разумеется, что в формулу (4.17) следует подставить траекторию пробного электрона $\mathbf{x}'(t)$ с учетом воздействия электромагнитной волны и микроскопических полей среды.

При простой траектории пробной частицы смысл выражения (4.17) довольно прозрачен и легко интерпретируется. Если, например, пробная частица представляет собой свободный электрон, движущийся с постоянной скоростью v , то по характеру экспоненциального множителя в выражении (4.17) нетрудно увидеть, что в этом случае магнитное поле совпадает с полем дипольного излучения со смещенным значением частоты $\omega_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$. Это смещение частоты можно интерпретировать как результат двух эффектов. Согласно разложению волнового вектора (4.16), один эффект связан с движением пробной частицы относительно электромагнитной волны, а другой — с движением пробной частицы (как источника излучения) относительно точки наблюдения. Оба упомянутых эффекта дают соответствующие доплеровские сдвиги.

Если же траектория пробной частицы вследствие наличия флуктуирующего электрического микрополя более сложна, то в этом случае следует ожидать появления не только смещения частоты, но и дисперсии. Кроме того, имеющееся различие в скоростях частиц рассматриваемой плазмы, конечно, приводит к разбросу частот по целому спектру.

Из принципа суперпозиции для электромагнитных волн следует, что величину магнитного поля, создаваемого всеми электронами плазмы, можно получить простым суммированием выражений (4.17) по всем частицам:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{e^2}{m_-} \frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{x}}{x^2} \times \sum_j \exp \left\{ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'_j \left(t - \frac{x}{c} \right) - i \left(t - \frac{x}{c} \right) \omega_0 \right\}. \quad (4.19)$$

Обратимся теперь к анализу частот рассеянных волн.

В этой связи воспользуемся формулой (5.2.46), которая гласит, что излучаемая в единичном интервале частот энергия, приходящаяся на единицу площади, равна ¹⁾

$$\mathbf{S}_\omega = \tilde{\mathbf{E}}_\omega \times \tilde{\mathbf{H}}_\omega^* = \frac{1}{\mu_0} \tilde{\mathbf{E}}_\omega \times \tilde{\mathbf{B}}_\omega^*, \quad (4.20)$$

откуда, с учетом формулы (4.10), получаем

$$\mathbf{S}_\omega = \frac{c}{\mu_0} |\tilde{\mathbf{B}}_\omega|^2 \frac{\mathbf{r}}{r} \approx \frac{c}{\mu_0} |\tilde{\mathbf{B}}_\omega|^2 \frac{\mathbf{x}}{x}. \quad (4.21)$$

Чтобы приблизить результат к потребностям физического эксперимента, следует усреднить выражение (4.21) по ансамблю. Это дает

$$\langle \mathbf{S}_\omega \rangle = \frac{c}{\mu_0} \frac{\mathbf{x}}{x} \langle \tilde{\mathbf{B}}_\omega \cdot \tilde{\mathbf{B}}_\omega^* \rangle. \quad (4.22)$$

Выразим, как это принято в литературе, произведение спектральных функций \mathbf{B} в формуле (4.22) через автокорреляционную функцию величины \mathbf{B} . Для случая стационарной системы это можно сделать в самом общем виде.

¹⁾ Заметим, что, поскольку мы не использовали представление полного решения в виде комбинации гармоник с положительными и отрицательными частотами, в данном выражении следует опустить множитель, равный 2.

Пусть $\mathbf{V}(t)$ является функцией статистических параметров рассматриваемой системы. Тогда мы можем определить автокорреляционную функцию (во времени) как среднее по ансамблю:

$$\beta(\tau) = \langle \mathbf{V}(t + \tau) \cdot \mathbf{V}(t) \rangle. \quad (4.23)$$

Поскольку мы рассматриваем стационарную задачу, автокорреляционная функция не зависит от времени t . Поэтому выражение (4.23) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \beta(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \langle \mathbf{V}(t + \tau) \cdot \mathbf{V}(t) \rangle dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \langle \mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{V}[-(\tau - t)] \rangle dt. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Используя формулу (4.24), будем рассматривать предельный случай $T \rightarrow \infty$. Применим теперь теорему о свертке и найдем фурье-образ $\tilde{\beta}(\omega)$ от функции $\beta(\tau)$. Напомним, что если $\tilde{f}(\omega)$ является фурье-образом от функции $f(\tau)$, то $\tilde{f}(-\omega)$ представляет собой фурье-образ от $f(-\tau)$. Кроме того, для действительной функции $f(\tau)$ должно иметь место соотношение $\tilde{f}(-\omega) = \tilde{f}^*(\omega)$. В результате мы получаем

$$\tilde{\beta}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \langle \tilde{\mathbf{V}}(\omega) \cdot \tilde{\mathbf{V}}^*(\omega) \rangle. \quad (4.25)$$

Подставив полученный результат в выражение (4.22), найдем

$$\langle \tilde{\mathbf{S}}_{\omega} \rangle = \frac{\langle \mathbf{S}_{\omega} \rangle}{T} = \frac{c}{2\pi\mu_0} \frac{\mathbf{x}}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} \langle \mathbf{V}_r(t + \tau) \cdot \mathbf{V}_r(t) \rangle d\tau. \quad (4.26)$$

Здесь индексом r обозначена действительная часть \mathbf{V} .

Величина $\langle \tilde{\mathbf{S}}_{\omega} \rangle$ равна интенсивности рассеянных волн, излучаемых единичным объемом в единичном интервале частот при данном значении ω за единицу времени. Таким образом, выражение (4.26) представляет собой формулу Винера — Хинчина,

Если дифференциальное сечение рассеяния σ_ω определить с помощью соотношения

$$\sigma_\omega(\omega_0, \Omega) = \frac{2x^2 \langle \bar{S}_\omega \rangle}{c\epsilon_0 E_0^2}, \quad (4.27)$$

то, подставив в это соотношение формулу (4.26) и выражение для действительной части поля из (4.19), получим

$$\begin{aligned} \sigma_\omega = \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \right)^2 \left(\frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{x}}{E_0 x} \right)^2 \times \\ \times \int e^{i\omega\tau} \left\langle \sum_{j, l} \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j^l(t + \tau) - \omega_0(t + \tau)] \times \right. \\ \left. \times \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_l^j(t) - \omega_0 t] \right\rangle d\tau. \quad (4.28) \end{aligned}$$

(Здесь, поскольку мы рассматриваем стационарные процессы, можно опустить член x/c , характеризующий временной сдвиг.)

Применим в (4.28) правило сложения для тригонометрических функций, тогда

$$\begin{aligned} \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j^l(t + \tau) - \omega_0(t + \tau)] \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_l^j(t) - \omega_0 t] = \\ = \frac{1}{2} \cos\{\mathbf{k} \cdot [\mathbf{x}_j^l(t + \tau) + \mathbf{x}_l^j(t)] - \omega_0(2t + \tau)\} + \\ + \frac{1}{2} \cos\{\mathbf{k} \cdot [\mathbf{x}_j^l(t + \tau) - \mathbf{x}_l^j(t)] - \omega_0\tau\}. \quad (4.29) \end{aligned}$$

Усреднение по ансамблю приводит к обращению в нуль первого из двух членов в правой части соотношения (4.29), поскольку вероятность любого состояния однородной системы не должна зависеть от смещения координат всех частиц на один и тот же вектор Φ . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \sigma_\omega = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \right)^2 \left(\frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{x}}{E_0 x} \right)^2 \times \\ \times \int e^{i\omega\tau} \left\langle \sum_{j, l} \cos\{\mathbf{k} \cdot [\mathbf{x}_j^l(t + \tau) - \mathbf{x}_l^j(t)] - \omega_0\tau\} \right\rangle d\tau. \quad (4.30) \end{aligned}$$

Полученный результат может быть использован в качестве исходной формулы для вычисления интенсивности излучения рассеянных волн.

Прежде чем перейти к конкретным вычислениям, свяжем результат (4.30) с плотностью частиц, как это обычно

делается в литературе по данному вопросу и в некоторых случаях может оказаться полезным. Рассмотрим с этой целью микроскопическую плотность частиц

$$n_-(\mathbf{x}', t) = \sum_j \delta[\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_j(t)]. \quad (4.31)$$

Суммирование здесь проводится по всем частицам, заключенным в единице объема. Преобразование Фурье от $n_-(\mathbf{x}', t)$ по пространственной координате дает

$$\tilde{n}_-(\mathbf{k}, t) = (2\pi)^{-3/2} \sum_j \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'_j(t)), \quad (4.32)$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} \langle \tilde{n}_-(\mathbf{k}, t + \tau) \tilde{n}_-^*(\mathbf{k}, t) e^{+i\omega_0\tau} \rangle = \\ = (2\pi)^{-3} \sum_{j, l} \langle \cos\{\mathbf{k} \cdot [\mathbf{x}'_j(t + \tau) - \mathbf{x}'_l(t)] - \omega_0\tau\} \rangle - \\ - i (2\pi)^{-3} \sum_{j, l} \langle \sin\{\mathbf{k} \cdot [\mathbf{x}'_j(t + \tau) - \mathbf{x}'_l(t)] - \omega_0\tau\} \rangle. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Первый член в правой части соотношения (4.33) представляет собой четную, а второй — нечетную функции τ . Это можно установить с помощью формального соотношения

$$M(t; -\tau) = M(t + \tau; -\tau) = \pm M(t; \tau), \quad (4.34)$$

которое вытекает из рассмотрения аргументов тригонометрических функций в (4.33), при учете независимости операции усреднения по ансамблю от времени и перестановки индексов суммирования.

Перепишем теперь формулу (4.30) в виде

$$\begin{aligned} \sigma_\omega = \frac{(2\pi)^3}{4\pi} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \right)^2 \left(\frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{x}}{E_0 x} \right)^2 \times \\ \times \int \langle \tilde{n}_-(\mathbf{k}, t + \tau) \tilde{n}_-^*(\mathbf{k}, t) \rangle \times \\ \times [e^{i(\omega - \omega_0)\tau} + e^{i(\omega + \omega_0)\tau}] d\tau. \end{aligned} \quad (4.35)$$

С помощью соотношений (4.23) и (4.25) мы можем теперь преобразовать формулу для σ_ω к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \sigma_\omega = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \right)^2 \left(\frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{x}}{E_0 x} \right)^2 \frac{2\pi^2}{T} \times \\ \times [\langle |\tilde{n}_-(\mathbf{k}, \omega - \omega_0)|^2 \rangle + \langle |\tilde{n}_-(\mathbf{k}, \omega_0 + \omega)|^2 \rangle]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Это и есть искомый результат для дифференциального сечения рассеяния, выраженный через флуктуации плотности частиц. Отметим по обстоятельству, что автокорреляционные функции $\langle | \tilde{n}_-(\mathbf{k}, \omega \pm \omega_0) |^2 \rangle$ зависят от волнового вектора $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 - \omega_0 \mathbf{x} / c\lambda$ [см. (4.16)].

Из выражения (4.36) следует, что, если плотность электронов n_- постоянна, рассеяние в среде отсутствует, поскольку в таком случае мы имеем

$$\begin{aligned} \tilde{n}_-(\mathbf{k}, \omega \pm \omega_0) &= (2\pi)^2 \delta(\mathbf{k}) \delta(\omega \pm \omega_0) = \\ &= (2\pi)^2 \delta\left(\mathbf{k}_0 - \frac{\omega_0 \mathbf{x}}{c\lambda}\right) \delta(\omega \pm \omega_0). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Это означает, что электромагнитные волны излучаются лишь в направлении волнового вектора падающей волны и на той же частоте.

Итак, мы видим, что рассеяние волн обусловлено только флуктуациями. Нетрудно убедиться из формул (4.36) и (4.16), что флуктуации плотности с волновым вектором \mathbf{k}_f на частоте ω_f дают вклад в рассеяние только тех волн, частоты и волновые векторы которых удовлетворяют условию

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_f + \frac{\omega_0 \mathbf{x}}{c\lambda}, \quad \text{где } \omega_0 = |\omega \pm \omega_f|. \quad (4.38)$$

Так же как при рассмотрении комбинационного рассеяния, эти два условия, если их умножить на постоянную Планка, можно интерпретировать как законы сохранения импульса и энергии соответственно для системы световых квантов и плазмонов. [В действительности, однако, согласно закону сохранения импульса, вместо ω_0 в правой части первого соотношения (4.38) должно было бы стоять ω . Это отличие связано с тем, что мы пренебрегали членами порядка $\dot{x}x'/c\lambda$.]

Обычно флуктуации плотности имеют частоты, меньшие или почти равные плазменной частоте. Поскольку, согласно исходному допущению, $\omega_0 \gg \omega_{p0}$, вряд ли можно ожидать, что спектр флуктуаций может дать существенный вклад в рассеяние на частотах $\omega_f > \omega_0$. Поэтому нетрудно заключить, что при положительных значениях частоты можно пренебречь вторым членом в квад-

ратных скобках в правой части формулы (4.36). Соответственно первый член не будет давать вклада в рассеяние для отрицательных значений частот.

Следовательно, чтобы определить дифференциальное сечение рассеяния, необходимо сосредоточить внимание на вычислении члена

$$\frac{1}{T} \langle |\tilde{n}_-(\mathbf{k}_f, \omega_f)|^2 \rangle. \quad (4.39)$$

Конечно, подобное рассмотрение можно было бы точно так же начать с анализа автокорреляционной функции, входящей в выражение для σ_ω (4.35).

4.2. Рассеяние в отсутствие корреляций

Поставленную задачу легко решить, если пренебречь корреляциями. Предположим также, что траектории частиц в плазме прямолинейные. Запишем преобразование Фурье от плотности частиц, согласно (4.32), в виде

$$\begin{aligned} \tilde{n}_-(\mathbf{k}_f, \omega_f) = (2\pi)^{-3/2} \sum_j \exp(-i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{x}_j) (2\pi)^{-1/2} \times \\ \times \int \exp[i(\omega_f - \mathbf{k}_f \cdot \mathbf{x}_j)t] dt \end{aligned} \quad (4.40)$$

или соответственно

$$\tilde{n}_-(\mathbf{k}_f, \omega_f) = (2\pi)^{-1} \sum_j \exp(-i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{x}_j) \delta(\omega_f - \mathbf{k}_f \cdot \dot{\mathbf{x}}_j). \quad (4.41)$$

Отсюда найдем, что

$$\langle |\tilde{n}_-(\mathbf{k}_f, \omega_f)|^2 \rangle = (2\pi)^{-1} \langle n_- \rangle \langle [\delta(\omega_f - \mathbf{k}_f \cdot \mathbf{v})]^2 \rangle_{\mathbf{v}}. \quad (4.42)$$

Здесь учтено, что в формуле (4.41) множитель перед δ -функцией обращает в нуль все члены в произведении (4.42), за исключением членов с одинаковыми индексами. Поэтому в выражение (4.42) в результате входит полное число электронов, равное средней плотности $\langle n_- \rangle$.

Заметим, что усреднение по ансамблю в правой части выражения (4.42) проводится лишь по пространству скоростей. Если через $f(\mathbf{v})$ обозначить распределение по скоростям, нормированное на единицу, то можно получить

оценку возникающего при усреднении интеграла

$$\frac{1}{T} \int [\delta(\omega_f - \mathbf{k}_f \cdot \mathbf{v})]^2 f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \frac{1}{k_f} F\left(\frac{\omega_f}{k_f}\right) \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \bar{\omega} \rightarrow 0}} \frac{\delta(\bar{\omega})}{T}, \quad (4.43)$$

в котором функция F определена соотношением

$$F(u) = \int f(\mathbf{v}) \delta\left(u - \frac{\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{v}}{k_f}\right) d\mathbf{v}. \quad (4.44)$$

Значение предела в соотношении (4.43), согласно (4.24), равно

$$(2\pi)^{-1} \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \bar{\omega} \rightarrow 0}} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{i\bar{\omega}t} dt = \frac{1}{2\pi}. \quad (4.45)$$

Тогда мы получим

$$\frac{1}{T} \langle |\tilde{n}_-(k_f, \omega_f)|^2 \rangle = \frac{\langle n_- \rangle}{(2\pi)^2} \frac{1}{k_f} F\left(\frac{\omega_f}{k_f}\right), \quad (4.46)$$

и после подстановки этого результата в (4.36) найдем искомое выражение для дифференциального сечения рассеяния:

$$\begin{aligned} \sigma_\omega(\omega_0, \Omega) &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right)^2 \left(\frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{x}}{E_0 x} \right)^2 \times \\ &\times \frac{\langle n_- \rangle}{\left| \mathbf{k}_0 - \frac{\omega_0 \mathbf{x}}{cx} \right|} \left[F\left(\left| \mathbf{k}_0 - \frac{\omega_0 \mathbf{x}}{cx} \right| \right) + F\left(\left| \mathbf{k}_0 - \frac{\omega_0 \mathbf{x}}{cx} \right| \right) \right]. \quad (4.47) \end{aligned}$$

Последующее интегрирование по частоте ω с учетом нормировки функции F дает выражение для суммарного дифференциального сечения рассеяния от всех электронов, содержащихся в единице объема, а именно:

$$\begin{aligned} \sigma(\omega_0, \Omega) &= \langle n_- \rangle \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right)^2 \left(\frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{x}}{E_0 x} \right)^2 = \\ &= \langle n_- \rangle \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right)^2 \sin^2 \delta. \quad (4.48) \end{aligned}$$

Здесь δ — угол, образуемый векторами \mathbf{E}_0 и \mathbf{x} (который следует отличать от угла рассеяния, образуемого векторами \mathbf{k}_0 и \mathbf{x}).

Наконец, разделив полученное выражение на среднюю плотность $\langle n_- \rangle$ и проинтегрировав результат по телесному углу для всех точек наблюдения, найдем полное сечение рассеяния волн одним электроном

$$\sigma^T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_e^2. \quad (4.49)$$

Это широко известная формула для томсоновского сечения рассеяния, в которой через r_e обозначен классический радиус электрона.

Оценивая данный результат, можно заключить, что пренебрежение корреляциями частиц в конце концов не столь уж плохое приближение.

4.3. Рассеяние при наличии корреляций, обусловленных коллективными эффектами

К сожалению, экспериментальные данные по рассеянию электромагнитных волн от ионосферы совершенно не соответствуют результату, полученному нами в предыдущем разделе. Допплеровский сдвиг частот рассеиваемого ионосферой излучения, по-видимому, свидетельствует о том, что рассеяние происходит не на флуктуациях электронов, а скорее на флуктуациях ионов, хотя наше основное предположение о том, что электроны рассеивают электромагнитные волны значительно сильнее, чем ионы, абсолютно правильно.

Это расхождение должно вызываться корреляциями электронов и ионов. Качественно данный эффект можно объяснить следующим образом.

Рассмотрим электрон, движущийся в системе, состоящей из электронов и ионов. Он вызовет смещение соседних с ним электронов, тогда как медленные положительно заряженные ионы не подвергнутся практически никакому воздействию. Следовательно, движение электрона сопровождается движением облака пространственного положительного заряда, обусловленного образованием электронной «дырки». Суммарная система, состоящая из электронного заряда и положительного экранирующего заряда, обусловленного электронной «дыркой», является ней-

тральной. Поэтому в данном случае никакого рассеяния не должно наблюдаться.

С другой стороны, медленно движущиеся ионы приводят к смещению как соседних электронов, так и ионов. В этом случае эффекты экранирования наполовину связаны с ионами и наполовину — с электронами. Следовательно, рассеяние волн такой системой соответствует рассеянию, обусловленному примерно половиной эффективного электронного заряда, который движется со скоростью иона и вместе с тем обнаруживает характерные свойства электронного заряда.

Конечно, в случае быстрых ионов эффект экранировки от других ионов может составить меньше половины суммарного эффекта экранировки, и в результате быстрые ионы могут привести к более сильному рассеянию, чем медленные. Последнее обстоятельство объясняет, почему доплеровский сдвиг частот волн, рассеиваемых плазмой, не описывается простым гауссовым распределением, которое можно было бы ожидать исходя из максвелловского распределения частиц по скоростям. Так как в плазме может существовать интенсивный фон флуктуаций вблизи электронной и ионной плазменных частот, обусловленный коллективными эффектами, то вблизи этих частот также можно ожидать появления соответствующих пиков рассеяния.

Следует отметить, что приведенная выше интерпретация эффектов рассеяния справедлива лишь в области длин волн

$$\lambda \gg \lambda_D. \quad (4.50)$$

В противном случае дебаевская сфера поляризации не может синфазно двигаться с пробной частицей и простые соображения, основанные на эффектах нейтрализации заряда, окажутся несправедливыми.

Строгое изложение вопросов рассеяния света, включающее учет корреляций, выходит за рамки данной книги. Даже приближенное рассмотрение с использованием весьма упрощенной модели, представляющей лишь эвристическую ценность (метод пробных частиц), все еще остается весьма громоздким и сложным. Эта модель рассматривалась Розенблютом и Ростокером [8], Берштей-

ном, Трианом и Вининком [9]. Здесь мы ограничимся лишь тем, что приведем полученные ими результаты.

Модель пробной частицы применима к плазме, которая предполагается существенно однородной и стационарной. Таким образом основные допущения сводятся к выполнению условий

$$L \gg \lambda_D, \quad \frac{1}{\tau} \ll \omega_{p0}, \quad (4.51)$$

где L и τ представляют собой характерные длину и время для рассматриваемой задачи. При вычислении автокорреляционной функции учет влияния электромагнитных волн приводит лишь к возникновению эффектов второго порядка малости. Поэтому приведенные выше условия (4.51) не означают требования $\lambda \gg \lambda_D$.

В рамках модели пробной частицы предполагается, что эффективная плотность электронов определяется вкладом от плотности некоррелированных точечных электронов, движущихся по прямолинейным траекториям с постоянной скоростью, а также вкладом, обусловленным стационарным статистически распределенным зарядом сопровождающих электроны поляризации, и вкладом дебаевских сфер поляризации, связанных с ионами. Предполагается, что ионы также движутся с постоянной скоростью по прямолинейным траекториям. Обсуждение вопросов применимости данной модели можно найти в работах различных авторов (см., например, работу Ростокера и Розенблюта [10]).

Теория, основанная на изложенной выше модели пробной частицы, дает возможность получить выражение для пространственно-временной фурье-компоненты плотности $\tilde{n}_-(\mathbf{k}, \omega)$, которая определяет нормированное дифференциальное сечение рассеяния

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\omega(\omega_0) &= \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \cdot \frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{x}}{E_0 x} \right)^{-2} \frac{\sigma_\omega(\omega_0, \Omega)}{4\pi^3} = \\ &= \lim \frac{1}{2\pi T} \langle |\tilde{n}_-(\mathbf{k}, \omega - \omega_0)|^2 \rangle. \quad (4.52) \end{aligned}$$

[Напомним, что в соответствии с утверждением на стр. 393 мы отбросили второй член в правой части формулы (4.36).]

Результат вычислений с помощью модели пробной частицы можно представить в виде

$$\bar{\sigma}_\omega(\omega_0) = - \left(\frac{\langle n_- \rangle}{\pi} \right) k^2 \lambda_{D-}^2 \operatorname{Im} \Xi(\omega, k). \quad (4.53)$$

В этом выражении функция Ξ определяется формулой $\Xi(\omega, k) =$

$$= \frac{1}{\omega} \frac{\left(1 - \frac{\omega_{p+}^2}{k^2} \int \frac{[dF_+(u)/du] du}{u - (\omega/k) - i0} \right) \left(\frac{\omega_{p-}^2}{k^2} \int \frac{[dF_-(u)/du] du}{u - (\omega/k) - i0} \right)}{1 - \frac{\omega_{p+}^2}{k^2} \int \frac{[dF_+(u)/du] du}{u - (\omega/k) - i0} - \frac{\omega_{p-}^2}{k^2} \int \frac{[dF_-(u)/du] du}{u - (\omega/k) - i0}}, \quad (4.54)$$

где F_+ и F_- — одномерные максвелловские функции распределения ионов и электронов, нормированные на единицу. Контур интегрирования должен быть смещен вниз относительно сингулярной точки подынтегрального выражения.

Качественный характер поведения интенсивности рассеянных электромагнитных волн можно понять, если рассмотреть характерные свойства функции Ξ , заданной выражением (4.54). Читателя, интересующегося данным вопросом, мы отсылаем к соответствующей литературе [9].

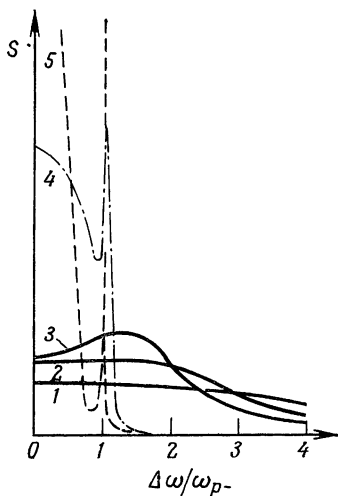
Для сравнения полученных результатов с экспериментальными наблюдениями удобно исследовать зависимость от угла рассеяния ϑ , зафиксировав параметры ω_{p-} и m_-/m_+ . При этом изменение угла рассеяния отражается на изменении величины

$$k = 2 \frac{\omega_0}{c} \sin \frac{\vartheta}{2}. \quad (4.55)$$

Рассмотрим сначала область длин волн, удовлетворяющих условию $k^2 \lambda_{D-}^2 \gg 1$. В этом случае спектр рассеяния, в сущности, определяется доплеровским сдвигом частот, обусловленным некоррелированными электронами [заметим, что здесь не выполнено условие (4.50)]. В качестве типичного примера рассеяния в случае $kv_{T-} = = 3\omega_{p-}$ на фиг. 31 (кривая 1) приведена схематически зависимость интенсивности рассеяния от частотного сдви-

га. Поскольку величина kv_{T-} равна примерно полуширине (ω_h) спектра, обусловленного доплеровским сдвигом, следует ожидать, что $\omega_h \approx 3\omega_{p-}$.

При уменьшении угла рассеяния ϑ уменьшается также значение величины k . Кривая 2 на фиг. 31 соответствует случаю $kv_{T-} = \omega_{p-}$, когда в процессе рассеяния еще доминирует вклад электронов. Она свидетельствует о более



Ф и г. 31. Интенсивность рассеянного излучения $S(k, \Delta\omega)$ в зависимости от частотного сдвига при изменении величины $k\lambda_{D-}$. (Пояснение к кривым 1—5 см. в тексте.)

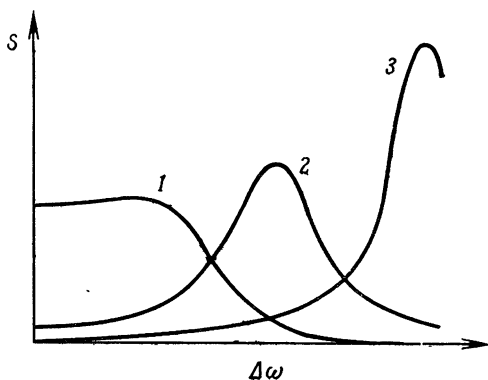
узкой полуширине спектра и о большем уровне интенсивности рассеяния. При этом кривая интенсивности, по мере ее сужения и возрастания интенсивности в максимуме, становится более плоской. Площадь, ограниченная этой кривой и осью абсцисс, определяющая полную интенсивность рассеянных волн, остается такой же, как и в случае $kv_{T-} = 3\omega_{p-}$.

Кривые 3 и 4 на фиг. 31, вычисленные соответственно для значений $kv_{T-}/\omega_{p-} = 0,3$ и $0,2$, характеризуют процесс рассеяния при дальнейшем уменьшении k . Сначала появляется максимум, лежащий справа от электронной плазменной частоты. Этот пик вблизи плазменной электронной частоты затем сужается и возрастает, все более при-

ближаясь по частоте к плазменной. В то же время возникает второй пик в центре линии. Эти два пика четко отделяются друг от друга. Пик в центре линии становится все более высоким и узким. Его полуширина соответствует разбросу тепловых скоростей ионов и по порядку величины равна kv_{T+} . Площадь, ограниченная центральным пиком и осью абсцисс, приблизительно совпадает с площадью, ограниченной кривой 1 в случае $kv_{T-}/\omega_{p-} = 3$. Отделившийся от него пик по частоте при-

ближается к электронной плазменной частоте, сужается и быстро возрастает по высоте с уменьшением kv_{T-} .

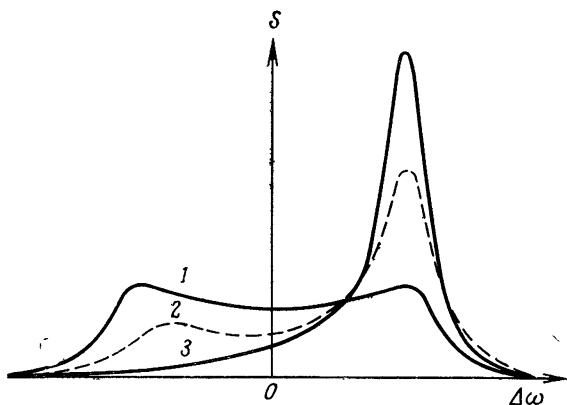
Если значения k задать еще меньше, то центральный пик станет совсем узким, так как при этом преобладают эффекты доплеровского уширения, обусловленные ионами. Здесь также образуется максимум, отделяющийся от центра, как показано на графиках фиг. 32. Этот боковой максимум связан с наличием в плазме ионных колебаний.



Ф и г. 32. Интенсивность рассеянного излучения $S(k, \Delta\omega)$ в зависимости от частотного сдвига при различной электронной и ионной температуре: $\Theta_- = \Theta_+$ (кривая 1); $\Theta_- = 5\Theta_+$ (кривая 2); $\Theta_- = 10\Theta_+$ (кривая 3).

Изложенная выше качественная интерпретация может быть подтверждена результатами исследований плазмы с неодинаковой ионной и электронной температурой. Эти результаты показаны на фиг. 32 в виде кривых 2 и 3 для отношений температур, равных соответственно 5 и 10. Как видно из кривых, с ростом электронной температуры максимум интенсивности рассеяния сужается и сдвигается на крыло линии спектра. За это явление опять-таки ответственны коллективные флуктуации ионов. Согласно вычислениям, проведенным в гл. 3, при этом следует ожидать возникновения «флуктуаций большой амплитуды», обусловленных ионными звуковыми волнами с фазовыми скоростями $\omega_f/k = \sqrt{\Theta_-/m_+}$.

Важность рассматриваемых явлений при рассеянии волн в плазме, обусловленных коллективными эффектами, также видна на примере результатов, представленных на фиг. 33. Схематические профили линий, приведенные на этой фигуре, относятся к случаям, когда функции



Ф и г. 33. Интенсивность рассеянного излучения $S(k, \Delta\omega)$ для различных дрейфовых скоростей u электронов относительно ионов. $u = 0$ (кривая 1); $u = 1/2v_{T-}$ (кривая 2); $u = v_{T-}$ (кривая 3).

распределения ионов и электронов по скоростям несколько смещены относительно друг друга. Это означает, что электроны дрейфуют относительно ионов. Наиболее интересно здесь то, что показанные на фигуре кривые не обладают симметрией. Один из пиков интенсивности рассеяния быстро возрастает с ростом дрейфовой скорости. Напомним, что, согласно расчетам, проведенным в гл. 3, электроны, дрейфующие относительно ионов, вызывают неустойчивость, обусловленную коллективными эффектами.

Кривые на фиг. 33 соответствуют такому положению, когда состояние неустойчивости еще не достигнуто, так как в противном случае пик в правой части спектра возрастал бы до бесконечности.

Основные результаты

Просуммируем изложенные выше результаты по рассеянию света в плазме при наличии корреляций, полученные в приближении модели пробной частицы.

1. При больших значениях $k\lambda_{D-}$ профиль линии рассеянной волны может быть описан эффектом доплеровского уширения, обусловленным некоррелированными электронами. Это не вызывает сомнений, поскольку в данном случае не выполняется условие $\lambda \gg \lambda_{D-}$.

2. При уменьшении $k\lambda_{D-}$ на профиле линии появляются два максимума, один — правее электронной плазменной частоты, а другой — в центре линии. По мере дальнейшего уменьшения $k\lambda_{D-}$ эти максимумы раздвигаются. Полуширина пика вблизи центра соответствует доплеровскому уширению вследствие теплового движения ионов. Образование максимумов в спектре обусловлено двумя эффектами. Один из них состоит в том, что возбуждение коллективных мод колебаний вблизи плазменной частоты вызывает сильный эффект рассеяния вблизи этой частоты. Другой эффект связан с тем, что при уменьшении $k\lambda_{D-}$ начинает выполняться условие $\lambda \gg \lambda_{D-}$ и, в соответствии с этим, возрастает значение ионных корреляций. Таким образом, в полном согласии с качественной интерпретацией, изложенной выше, основная часть профиля сужается до ширины, которая определяется доплеровским уширением, обусловленным средней скоростью теплового движения ионов.

3. Полуширина пика в спектре рассеянной волны вблизи электронной плазменной частоты определяется затуханием Ландау. В рамках модели пробной частицы данный результат неудивителен, так как в данном случае мы рассматриваем влияние только коллективных эффектов. Однако в действительности полуширина этого пика должна была бы быть существенно большей, поскольку в области $k\lambda_{D-} \ll 1$ вклад от эффектов столкновений превосходит вклад от эффектов затухания Ландау (см. стр. 173).

4. При очень малых значениях $k\lambda_{D-}$ на центральном пике вновь возникает боковой максимум. Это явление связано с коллективными эффектами ионов, аналогичными

электронным флуктуациям, ответственным за пик вблизи ω_p .

5. Боковой максимум смещается на крыло линии спектра и сужается при возрастании электронной температуры выше температуры ионов. Это можно понять, если вспомнить, что в плазме возбуждаются коллективные ионные колебания с фазовой скоростью $\omega_f/k = \sqrt{\Theta_-/m_+}$.

6. При наличии относительного дрейфового движения электронов и ионов профиль линии спектра становится асимметричным и один из пиков сильно возрастает. Этот эффект тоже связан с возбуждением коллективных ионных волн. Как уже указывалось в гл. 3, относительный дрейф электронов и ионов может приводить даже к неустойчивости.

4.4. Применение флуктуационно-диссипационной теоремы

Как мы видели выше, эффекты, обусловленные корреляциями частиц, в теории рассеяния света все еще не удается учесть достаточно последовательно. Кроме того, мы показали на стр. 392, что рассеяние существенным образом зависит от спектра флуктуаций, имеющих в системе.

Весьма последовательным шагом было бы установление связи между результатами теории рассеяния и вычислениями проводимости с помощью флуктуационно-диссипационной теоремы (см. § 5 гл. 1):

$$\Theta \frac{k^2}{\omega^2} \operatorname{Re} \left[\frac{\sigma(k, \omega)}{\varepsilon(k, \omega)} \right] = \lim_{TV} \frac{(2\pi)^4 e^2}{TV} \langle |\tilde{n}(k, \omega)|^2 \rangle_0. \quad (4.56)$$

Однако подобные попытки, по-видимому, плодотворны только в том случае, когда используется теория проводимости, более точно учитывающая динамику движения ионов, чем подход, изложенный в настоящей книге.

§ 5. ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

5.1. Уравнение переноса излучения

Теперь, вычислив макроскопические величины, определяющие поведение электромагнитных волн в полностью ионизованной системе, обратимся к изучению распростра-

нения электромагнитной энергии в среде, которую можно охарактеризовать комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_\omega(\mathbf{r})$ со слабой зависимостью от пространственной координаты. Точнее говоря, потребуем, чтобы выполнялось основное условие применимости геометрической оптики

$$\frac{\lambda}{L} \ll 1. \quad (5.1)$$

Здесь L — характерная длина изменения величины $\varepsilon_\omega(\mathbf{r})$.

Из уравнений Максвелла для сплошной среды

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{H}}_\omega &= 0, & \nabla \cdot (\varepsilon_\omega \tilde{\mathbf{E}}_\omega) &= 0, \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{H}}_\omega &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_\omega \tilde{\mathbf{E}}_\omega, & \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}_\omega &= i\omega\mu_0 \tilde{\mathbf{H}}_\omega \end{aligned} \quad (5.2)$$

получим волновое уравнение

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_\omega(\mathbf{r}) \tilde{\mathbf{E}}_\omega + \nabla \left(\frac{\nabla \varepsilon_\omega}{\varepsilon_\omega} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_\omega \right) = 0. \quad (5.3)$$

В рамках приближения геометрической оптики мы можем (локально) задать решение в виде плоской волны, распространяющейся в направлении \mathbf{s} , и, учитывая условие (5.1), опустить третий член в выражении (5.3). Тогда

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}_\omega}{\partial s^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_\omega \tilde{\mathbf{E}}_\omega = 0. \quad (5.4)$$

С помощью метода Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна (ВКБ) найдем приближенное решение в виде

$$\tilde{\mathbf{E}}_\omega(s) = \mathbf{C}_\omega \exp \left(i \frac{\omega}{c} \int \sqrt{\varepsilon_\omega} ds \right) \quad (5.5)$$

для электрического поля и соответственно

$$\tilde{\mathbf{H}}_\omega(s) = \mathbf{D}_\omega \exp \left(i \frac{\omega}{c} \int \sqrt{\varepsilon_\omega} ds \right) \quad (5.6)$$

для магнитного поля. Из этих решений получаем абсолютную величину вектора Пойнтинга

$$S = (2\pi)^{-1} \int \tilde{\mathbf{E}}_{\omega_1} \tilde{\mathbf{H}}_{\omega_2}^* \exp[-i(\omega_1 - \omega_2)t] d\omega_1 d\omega_2. \quad (5.7)$$

Усреднение по периоду времени, достаточно большому по сравнению с периодами всех колебаний, дающих вклад

в выражение (5.7), приводит к формуле

$$\langle S \rangle = \pi^{-1} \operatorname{Re} \left\{ \int_{\omega_1, \omega_2 > 0} \tilde{E}_{\omega_1} \tilde{H}_{\omega_2}^* \exp[-i(\omega_1 - \omega_2)t] d\omega_1 d\omega_2 \right\}. \quad (5.8)$$

Подставив сюда решения в виде (5.5) и (5.6), найдем

$$\begin{aligned} \langle S \rangle = \pi^{-1} \operatorname{Re} \left\{ \int_{\omega_1, \omega_2 > 0} C_{\omega_1} D_{\omega_2}^* \exp \left[-\frac{1}{2} \int (\kappa_{\omega_1} + \kappa_{\omega_2}) ds \right] \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ i \left[c^{-1} \int (\omega_1 n_{\omega_1} - \omega_2 n_{\omega_2}) ds - (\omega_1 - \omega_2)t \right] \right\} d\omega_1 d\omega_2 \right\}. \quad (5.9) \end{aligned}$$

Здесь мы ввели показатель преломления n_ω и коэффициент пространственного поглощения κ_ω :

$$n_\omega = \operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon_\omega} \quad \text{и} \quad \kappa_\omega = \frac{2\omega}{c} \operatorname{Im} \sqrt{\varepsilon_\omega} \approx \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left[\frac{\sigma(\omega)}{n_\omega} \right]. \quad (5.10)$$

Рассмотрим теперь волновой пакет, содержащий частоты ω_1 и ω_2 , близкие к ω . Тогда можно использовать приближенное равенство $\kappa_{\omega_1} + \kappa_{\omega_2} \approx 2\kappa_\omega$. В результате мы имеем

$$\frac{n_{\omega_1} \omega_1}{c} - \frac{n_{\omega_2} \omega_2}{c} = (\omega_1 - \omega_2) \frac{d}{d\omega} \frac{n_\omega \omega}{c} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{u_g(\omega)}, \quad (5.11)$$

где $u_g(\omega)$ — локальная групповая скорость для волны с частотой ω . Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \langle S \rangle_\omega = \pi^{-1} \exp \left[- \int \kappa_\omega ds \right] \operatorname{Re} \int_{\omega_1, \omega_2 > 0} C_{\omega_1} D_{\omega_2}^* \times \\ \times \exp \left[i(\omega_1 - \omega_2) \left(\int \frac{ds}{u_g(\omega)} - t \right) \right] d\omega_1 d\omega_2. \quad (5.12) \end{aligned}$$

Следовательно, величина $\langle S \rangle_\omega$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \langle S \rangle_\omega}{\partial s} = -\kappa_\omega \langle S \rangle_\omega - \frac{1}{u_g(\omega)} \frac{\partial \langle S \rangle_\omega}{\partial t} \quad (5.13)$$

и описывает перенос энергии излучения данным волновым пакетом в заданном направлении.

Суперпозиция таких волновых пакетов, распространяющихся в направлениях, близких к s , дает узкий пучок лучей в пределах небольшого телесного угла $\Delta\Omega$. При

этом интенсивность излучения равна

$$I_{\omega} = \frac{\langle S \rangle_{\omega}}{\Delta\Omega \Delta\omega}. \quad (5.14)$$

Используя закон Снелля, записанный в виде

$$n_{\omega}^2 \Delta\Omega = \text{const}, \quad (5.15)$$

а также уравнение (5.13) и формулу (5.14), получим уравнение переноса излучения¹⁾

$$\frac{1}{u_g} \frac{\partial}{\partial t} \frac{I_{\omega}}{n_{\omega}^2} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{I_{\omega}}{n_{\omega}^2} = -\kappa_{\omega} \frac{I_{\omega}}{n_{\omega}^2}. \quad (5.16)$$

Очевидно, что в правой части уравнения (5.16) представлены эффекты поглощения волн и отсутствуют эффекты излучения и рассеяния. Это не удивительно, поскольку в уравнениях Максвелла (5.2) не учитываются ни тепловое излучение, ни флуктуации. Если же учесть эффекты излучения, то вместо (5.16) мы получим уравнение

$$\frac{1}{u_g} \frac{\partial}{\partial t} \frac{I_{\omega}}{n_{\omega}^2} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{I_{\omega}}{n_{\omega}^2} = \frac{j_{\omega} - \kappa_{\omega} I_{\omega}}{n_{\omega}^2}, \quad (5.17)$$

в котором через j_{ω} обозначен коэффициент излучения (т. е. мощность излучения на частоте ω единицей объема среды в единичный телесный угол в направлении луча s и в единичном интервале времени и частоты). В это уравнение мы можем подставить выражение для коэффициента излучения, полученное в гл. 5. Для системы, близкой к равновесной, можно использовать закон Кирхгофа, согласно которому

$$j_{\omega} = n_{\omega}^2 \kappa_{\omega} B_{\omega}. \quad (5.18)$$

Здесь B_{ω} — спектральная плотность излучения черного тела, определяемая формулой Планка:

$$B_{\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3 c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/\Theta} - 1} \approx \frac{\omega^2}{4\pi^3 c^2} \Theta. \quad (5.19)$$

¹⁾ Обратим внимание на то обстоятельство, что используемое в нашем выводе приближение геометрической оптики в действительности недостаточно для решения вопроса о том, следует ли ввести величину n_{ω}^{-2} под знак дифференциального оператора $\partial/\partial s$ или оставить вне его. При более строгом выводе надо учитывать член уравнения (5.3), содержащий величину $\tilde{\mathbf{E}}_{\omega} \cdot \nabla \epsilon_{\omega}$. Для этого необходимо учесть различие направлений поляризации волн и использовать ВКБ-метод в приближении более высокого порядка по λ/L .

[Соотношение (5.19) учитывает два возможных направления поляризации.]

Если в уравнение переноса также включить эффекты рассеяния, то — по аналогии с уравнением Больцмана — можно представить вклад этих процессов рассеяния в виде дополнительного «члена столкновений» в правой части уравнения (5.17)

$$\left(\frac{1}{n_{\omega}^2} \frac{\delta I_{\omega}}{\delta s} \right)_{\text{расс}} = \frac{1}{n_{\omega}^2} \int [I_{\omega'}(\Omega') - I_{\omega}(\Omega)] \times \\ \times \sigma_{\omega'}(\omega, \Omega' - \Omega) d\omega' d\Omega'. \quad (5.20)$$

Здесь $\sigma_{\omega'}(\omega, \Omega' - \Omega)$ — дифференциальное сечение рассеяния, определяемое формулой (4.27).

5.2. Замечания по поводу граничных условий

Уравнение переноса, рассмотренное выше, следует дополнить граничными условиями. Получение этих граничных условий — довольно сложная задача. Предположим, что плазма ограничена объемом V . Тогда распределение полей излучения вне этого объема дает граничные условия для решения уравнения переноса.

Обычно в плазме вблизи границы образуется особый пограничный слой. В таком пограничном слое параметры плазмы меняются настолько сильно, что это исключает возможность описания поля с помощью полученного уравнения переноса. Наличие подобного пограничного слоя и представляет основную проблему при формулировке граничных условий, которая в общем случае до сих пор еще не может быть решена. Однако существуют два случая, которые могут быть рассмотрены и в то же время представляют принципиальный интерес: случай поверхности разрыва и случай нормального падения волны. Если поверхностный слой можно рассматривать как поверхность разрыва, то данная проблема решается тривиальным образом с помощью формул Френеля для отражения волн. В случае же нормального падения волн при наличии пограничного слоя конечной толщины ($0 < a < a$), когда поле в нем может быть описано с помощью комплексной диэлектрической проницаемости, уран-

нение (5.3) принимает вид

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + k^2(x) E = 0, \quad \text{где } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x). \quad (5.21)$$

Предположим далее, что $k(x) \equiv k_0$ при $x \leq 0$, а при $x \geq a$ $k(x) \equiv k_1$. Тогда решения уравнения (5.21) можно записать как

$$E = E_0 (e^{ik_0 x} + \rho e^{-ik_0 x}) \quad \text{для } x \leq 0$$

и

$$E = E_0 \tau e^{ik_1 x} \quad \text{для } x \geq a. \quad (5.22)$$

Здесь ρ и τ — коэффициенты отражения и прохождения для амплитуд (но не интенсивностей!) полей.

Чтобы найти решение уравнения (5.21) в интервале значений x $[0, a]$, используем несколько модифицированный по форме обычный метод медленно меняющейся фазы (см. [11]), в соответствии с которым будем искать решение в виде

$$E(x) = A \exp \left\{ i \int [k(x) - \phi(x)] dx \right\}. \quad (5.23)$$

Это приводит к дифференциальному уравнению Риккати для $\phi(x)$:

$$\phi' + 2ik\phi = k' + i\phi^2. \quad (5.24)$$

Можно ожидать, что величина $\phi(x)$ в большинстве случаев мала, поскольку при $\phi(x) \equiv 0$ решение (5.23) переходит в решение, совпадающее с приближением ВКБ. Логарифмическое дифференцирование выражений (5.22) и (5.23) с последующим их приравнованием при $x = a$ дает граничное условие

$$\phi(a) = 0, \quad (5.25)$$

а при $x = 0$ — коэффициент отражения

$$\rho = \frac{\phi(0)}{2k_0 - \phi(0)}. \quad (5.26)$$

Таким образом, рассматриваемая задача будет решена, если с помощью уравнения (5.24) и условия (5.25) мы сможем определить $\phi(0)$.

В общем случае найти решение дифференциального уравнения Риккати в явном виде невозможно, поэтому

мы перейдем к эквивалентному интегральному уравнению, которое можно решить методом итераций.

Используя метод вариации произвольной постоянной и условие (5.25), найдем

$$\phi(x) = \exp \left[-2i \int_0^x k(\xi) d\xi \right] \int_a^x \exp \left[2i \int_0^z k(\xi) d\xi \right] \times \\ \times [k'(z) + i\phi^2(z)] dz. \quad (5.27)$$

Если ϕ мало, то можно рассматривать лишь линейное приближение. Тогда

$$\phi(0) = - \int_0^a \exp \left[2i \int_0^z k(\xi) d\xi \right] k'(z) dz \quad (5.28)$$

и коэффициент отражения определяется простым соотношением $\rho = \phi(0)/2k_0$. Поскольку интенсивность рассматриваемой волны равна EE^* , то обычный коэффициент отражения для интенсивности волны равен $R = \rho\rho^*$. Это приводит к окончательному результату для R :

$$R = \frac{1}{4} \left| \frac{1}{k_0} \int_0^a \exp \left[2i \int_0^x k(\xi) d\xi \right] k'(x) dx \right|^2 = \\ = \frac{1}{4} \left| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(0)}} \int_0^a \exp \left[2i \frac{\omega}{c} \int_0^x \varepsilon^{1/2}(\xi) d\xi \right] \frac{d\sqrt{\varepsilon}}{dx} dx \right|^2. \quad (5.29)$$

В пределе, когда $a \rightarrow 0$, из (5.29) вытекает обычная формула Френеля

$$\lim_{a \rightarrow 0} R = \left| \frac{\sqrt{\varepsilon(a)} - \sqrt{\varepsilon(0)}}{2\sqrt{\varepsilon(0)}} \right|^2. \quad (5.30)$$

Входящую в (5.29) величину

$$\bar{\rho}(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(0)}} \frac{d\sqrt{\varepsilon(x)}}{dx}, \quad (5.31)$$

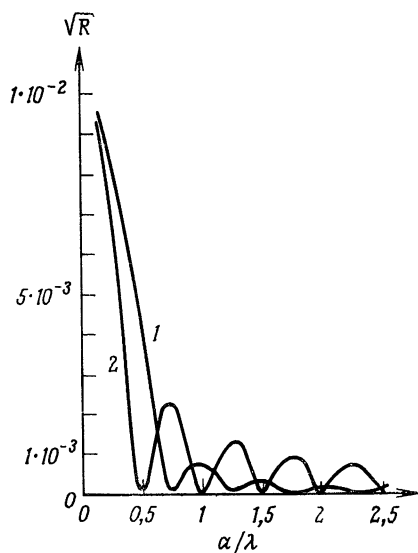
согласно формуле Френеля (5.30), можно трактовать как «дифференциальный коэффициент отражения». Этот диф-

ференциальный коэффициент отражения умножается на

$$\exp \left[2i \frac{\omega}{c} \int_0^{\infty} \sqrt{\varepsilon(\xi)} d\xi \right], \quad (5.32)$$

которая учитывает поглощение (через мнимую часть $\text{Im} \sqrt{\varepsilon}$) и явления интерференции в выделенном нами слое плазмы.

Конечно, рассмотренное линейное приближение не может учитывать влияние на коэффициент отражения R



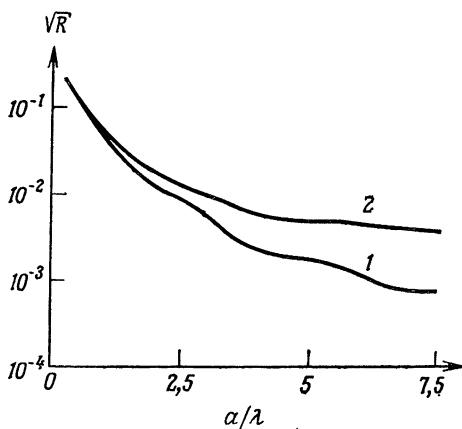
Ф и г. 34. Коэффициент отражения R как функция толщины пограничного слоя плазмы a , измеренной в длинах волны λ ; $\omega_{p1} = 0,2 \omega$, $\Lambda_1 = \infty$.

1 — для распределения (5.33) плотности электронов в слое; 2 — для линейного распределения плотности электронов в слое.

эффектов отражения внутри пограничного слоя. Учет многократного отражения требует использования полного выражения (5.27) для ϕ .

В общем случае оказывается более удобным использовать численные решения дифференциального уравнения

Риккати. Нами были проведены такие вычисления для пограничного слоя плазмы с изменением плотности по



Ф и г. 35. Коэффициент отражения R как функция толщины пограничного слоя плазмы a , измеренной в длинах волны λ ; $\omega_{p1} = 0,8 \omega$.
кривая 1 — $\Lambda_1 = \infty$; кривая 2 — $\Lambda_1 = 10$.

закону

$$n_-(x) = \frac{1}{2} n_1 \left[1 - \cos \frac{\pi x}{a} \right]. \quad (5.33)$$

При этом использовались упрощенные выражения для диэлектрической проницаемости:

$$\operatorname{Re} \varepsilon \approx 1 - \frac{\omega_{p-}^2}{\omega^2}, \quad \operatorname{Im} \varepsilon \approx \frac{1}{8} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\omega_{p-}^3}{\omega^3} \frac{\ln \Lambda}{\Lambda} \approx \frac{1}{\Lambda} \frac{\omega_{p-}^3}{\omega^3}. \quad (5.34)$$

На фиг. 34 и 35 приведены зависимости для коэффициента отражения соответственно при $\omega_{p1}/\omega = 0,2$ и $\omega_{p1}/\omega = 0,8$ для величины Λ_1 , равной 10 и ∞ .

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Bunemann O., Phys. Rev., 115, 503 (1959).
2. Kahn F. D., Journ. Fluid Mech., 14, 321 (1962).
3. Fried B. D., Phys. Fluids, 2, 337 (1959).

4. *Furth H. P.*, Phys. Fluids, 6, 48 (1963).
5. *Weibel E. S.*, Phys. Rev. Letters, 2, 83 (1959).
6. *Dawson J.*, *Oberman C.*, Phys. Fluids, 5, 517 (1962).
7. *Dawson J.*, *Oberman C.*, Phys. Fluids, 6, 394 (1963).
8. *Rosenbluth M. N.*, *Rostoker N.*, Phys. Fluids, 5, 776 (1962).
9. *Bernstein I. B.*, *Trehan S. K.*, *Weenink M. P. H.*, Nucl. Fusion, 4, 61 (1964).
10. *Rostoker N.*, *Rosenbluth M. N.*, Phys. Fluids, 3, 1 (1960).
11. *Geffcken W.*, Ann. Phys. (Leipzig), 40, 835 (1941).

Дополнительная литература

- Bekefi G.*, Radiation Processes in Plasmas, Wiley, New York (1966)
(см. перевод: *Дж. Бекефи*, Радиационные процессы в плазме, изд-во «Мир», 1971).
- Dawson J.*, Lecture Notes, Princeton University, Princeton, N. J., 1964.
- Dawson J.*, в книге Advances in Plasma Physics, Vol. I (eds. A. Simon, W. B. Thompson), Wiley (Interscience), New York, 1968
(см. перевод в сборнике «Физика высокотемпературной плазмы», изд-во «Мир», 1972).
- Dupree T. H.*, Phys. Fluids, 6, 1714 (1963).
- Dupree T. H.*, Phys. Fluids, 7, 923 (1964).
- Birmingham T.*, *Dawson J.*, *Oberman C.*, Phys. Fluids, 8, 297 (1965).
- Bernstein I. B.*, *Trehan S. K.*, Nucl. Fision, 1, 3 (1961).
- Ramsden S. A.*, в книге Physics of Hot Plasmas (eds. B. J. Rye, J. C. Taylor), Oliver and Boyd, Edinburgh, 1970.
- Kofink W.*, Ann. Phys. (Leipzig), 1, 119 (1947).
- Rawer K.*, Ann. Phys. (Leipzig), 35, 385 (1939).
- Margenau H.*, Phys. Rev., 109, 6, 1958.

Приложение

Характерные параметры плазмы

Теория плазмы имеет дело с рядом характерных параметров. Исследование зависимости этих параметров от свойств системы представляет интерес не только для численных расчетов, но также и для приближенных теоретических методов. Поэтому в дальнейшем мы рассмотрим некоторые из этих характерных параметров и приведем их взаимные соотношения и численные значения.

С точки зрения применений, по-видимому, целесообразно подробнее рассмотреть характерные параметры плазмы. С этой целью исследуем характерные времена и характерные длины отдельно при взаимодействии пробной частицы определенной скорости с каждым сортом частиц системы.

Рассмотрим равновесную, нейтральную систему, состоящую из двух сортов частиц с плотностью $n_+ = n_- = n$ при заданной температуре Θ . Пусть частицы являются однозарядными и характеризуются массой m_μ . Величины, свободные от индекса, относятся к исследуемому сорту частиц.

Очевидно, что характерные параметры взаимодействия пробной частицы с каким-либо сортом частиц должны выражаться только через n и Θ . Это означает, что их внутреннюю связь можно выразить через один удобно выбранный параметр, например Λ .

Характерные частоты и длины

При исследовании кулоновской системы в отсутствие корреляций имеется единственная характерная частота — это частота плазменных колебаний

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}}. \quad (\text{II.1})$$

Соответствующей характерной длиной для плазмы в отсутствие корреляций является *дебаевский радиус*

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\Theta}{4\pi n e^2}} = \frac{v_{T\mu}}{\omega_{p\mu}}. \quad (\text{П.2})$$

Если учитываются слабые корреляции, то дополнительной характерной частотой является *частота столкновений*

$$\nu_c = \frac{3}{\sqrt{2}} \omega_p \frac{\ln \Lambda}{\Lambda}. \quad (\text{П.3})$$

Характерная длина, соответствующая этой частоте столкновений, есть *средняя длина свободного пробега*

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{2\Theta}{m}} \frac{1}{\nu_c}. \quad (\text{П.4})$$

Помимо средней длины свободного пробега, для описания плазмы с учетом корреляций используются классический радиус взаимодействия

$$r_w = \frac{e^2}{\Theta} \quad (\text{П.5})$$

и *среднее расстояние между частицами*

$$r_0 = \left(\frac{4\pi n}{3} \right)^{-1/3}. \quad (\text{П.6})$$

Частота столкновений и средняя длина свободного пробега характеризуют довольно грубым образом явление релаксации, обусловленное корреляционными эффектами. Для более точного различия эффектов релаксации имеется бесконечное число релаксационных времен, зависящих от рассматриваемых физических процессов. Ниже мы дадим общую формулировку этих времен релаксации для произвольной цилиндрически симметричной комбинации моментов скорости. При вычислениях (см. [55] к гл. 4) обычно используются следующие три эффективные частоты: *характерная частота изменения скорости направленного движения*

$$\nu_s(u) = -\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} u_{\parallel}, \quad (\text{П.7})$$

характерная частота рассеяния импульса

$$v_d(u) = \frac{1}{u^2} \frac{\partial}{\partial t} u^2, \quad (\text{П.8})$$

характерная частота изменения энергии

$$v_E(u) = \frac{1}{u^2 - u_0^2} \frac{\partial}{\partial t} u^2, \quad (\text{П.9})$$

где u — скорость пробной частицы, а u_0 соответствует скорости, для которой $\partial u^2 / \partial t = 0$. Кроме того, определим также средние времена и длины, характеризующие пробную частицу с данной скоростью:

$$\langle \tau_i \rangle = \int \bar{f}_M(u) \frac{1}{v_i(u)} 4\pi u^2 du, \quad (\text{П.10})$$

$$\langle \lambda_i \rangle = \int \bar{f}_M(u) \frac{u}{v_i(u)} 4\pi u^2 du, \quad (\text{П.11})$$

где $\bar{f}_M(u)$ — функция распределения Максвелла. Здесь мы предпочитаем использовать средние времена, поскольку средние частоты при $m/m_\mu \rightarrow 0$ стремятся к бесконечности. Этот эффект обусловлен в силу расходимости кулоновского поперечного сечения вкладом от очень малых скоростей.

Общий формализм

Разложим функцию распределения по скоростям для пробной частицы $\bar{f}(\mathbf{v})$ по сферическим гармоникам:

$$\bar{f}(\mathbf{v}) = \sum_l {}^{(l)}f(v) P_l(\cos \theta), \quad (\text{П.12})$$

где $\cos \theta = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})/vu$. Рассмотрим произвольную функцию $s(\mathbf{v})$, которую также представим через сферические гармоники:

$$s(\mathbf{v}) = \sum_l s_l(v) P_l(\cos \theta). \quad (\text{П.13})$$

Тогда изменение во времени скорости, усредненной по данной функции, обусловленное соударениями с частицами сорта μ , определяется следующим выражением:

$$\left(\frac{\partial \langle s \rangle}{\partial t} \right)_\mu = 4\pi \sum_l \frac{1}{2l+1} \int_0^\infty v^2 s_l(v) I({}^{(l)}f | \bar{f}_\mu) dv. \quad (\text{П.14})$$

Член столкновений Фоккера — Планка в случае цилиндрически симметричных возмущений имеет вид (см. [20] к гл. 4)

$$I^{(l)} f | \bar{f}_\mu = l(l+1) \alpha_\mu^{(l)} f + \frac{m}{m_\mu v^2} \frac{d}{dv} (\beta_\mu^{(l)} f) + \frac{1}{v^2} \frac{d}{dv} \left(\gamma_\mu \frac{d^{(l)} f}{dv} \right). \quad (\text{П.15})$$

Здесь величины α_μ , β_μ и γ_μ определяются следующим образом:

$$\alpha_\mu = \frac{8\pi^2 e^4}{3m^2 v^3} \ln \Lambda \left[\frac{1}{v^2} \int_0^v v_1^4 \bar{f}_\mu(v_1) dv_1 - 2v \int_v^\infty v_1 \bar{f}_\mu(v_1) dv_1 - 3 \int_0^v v_1^2 \bar{f}_\mu(v_1) dv_1 \right], \quad (\text{П.16})$$

$$\beta_\mu = \frac{4\pi e^2}{m} \ln \Lambda \int_0^v v_1^2 \bar{f}_\mu(v_1) dv_1, \quad (\text{П.17})$$

$$\gamma_\mu = \frac{1}{3} \left(\frac{4\pi e^2}{m} \right)^2 \ln \Lambda \left[\frac{1}{v} \int_0^v v_1^2 \bar{f}_\mu(v_1) dv_1 + v^2 \int_v^\infty v_1 \bar{f}_\mu(v_1) dv_1 \right]. \quad (\text{П.18})$$

Используя выражение (П.15), из (П.14) после интегрирования по частям получаем

$$\left(\frac{\partial \langle s \rangle}{\partial t} \right)_\mu = 4\pi \sum_l \frac{1}{2l+1} \left[l(l+1) \int_0^\infty \alpha_\mu v^2 {}^{(l)} f s_l dv - \frac{m}{m_\mu} \int_0^\infty \beta_\mu \frac{ds_l}{dv} {}^{(l)} f dv + \int_0^\infty \frac{d}{dv} \left(\gamma_\mu \frac{ds}{dv} \right) {}^{(l)} f dv \right]. \quad (\text{П.19})$$

Чтобы исследовать задачу пробной частицы, будем считать, что распределение $f(\mathbf{v})$ имеет вид

$$\bar{f}(\mathbf{v}) = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad (\text{П.20})$$

с коэффициентами разложения

$${}^{(l)} f(v) = \frac{2l+1}{4\pi v^2} \delta(v-u). \quad (\text{П.21})$$

Подставляя это выражение для коэффициентов ${}^{(l)}f(v)$ в (П.19), получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \langle s(u) \rangle\right)_\mu = \sum_{-l} \left[l(l+1) \alpha_\mu s_l(u) - \frac{m}{m_\mu} \frac{\beta_\mu}{u^2} \frac{ds_l}{du} + \frac{1}{u^2} \frac{d}{du} \left(\gamma_\mu \frac{ds_l}{du} \right) \right]. \quad (\text{П.22})$$

Определим следующие величины:

$$\begin{aligned} \nu_{1\mu}(u) &= -2\alpha_\mu(u) = \frac{\nu_c}{y^3} \left[\operatorname{erf}(x) \left(1 - \frac{1}{2x^2} \right) + \frac{1}{\sqrt{\pi} x} e^{-x^2} \right], \\ \nu_{2\mu}(u) &= \frac{\beta_\mu(u)}{u^3} = \frac{\nu_c}{y^3} \left[\operatorname{erf}(x) - \frac{2x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \right], \\ \nu_{3\mu}(u) &= -\frac{1}{u^3} \frac{d\gamma_\mu}{du} = \frac{\nu_c}{y^3} \left[\frac{\operatorname{erf}(x)}{2x^2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left(x + \frac{1}{2x} \right) \right], \\ \nu_{4\mu}(u) &= \frac{\gamma_\mu(u)}{u^4} = \frac{\nu_c}{y^3} \frac{1}{2x} \left[\operatorname{erf}(x) - \frac{2x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.23})$$

Учитывая то, что $y^2 = mu^2/2\Theta$, а $x^2 = m_\mu y^2/m$, в результате паходим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} \langle s(u) \rangle\right)_\mu &= - \sum_l \left[\frac{l(l+1)}{2} \nu_{1\mu} + \frac{m}{m_\mu} \nu_{2\mu} u \frac{d}{du} + \right. \\ &\quad \left. + \nu_{3\mu} u \frac{d}{du} - \nu_{4\mu} u^2 \frac{d^2}{du^2} \right] s_l(u). \quad (\text{П.24}) \end{aligned}$$

Из этого уравнения следует, что все релаксационные частоты могут быть составлены из четырех характерных частот: частоты $\nu_{1\mu}$, описывающей главным образом эффекты рассеяния, $\nu_{2\mu}$, описывающей эффекты изменения величины по модулю, и частот $\nu_{3\mu}$ и $\nu_{4\mu}$, которые учитывают поправки за счет движения частиц, взаимодействующих при столкновении с пробной частицей.

В соответствии с определениями характерных частот (П. 7), (П. 8) и (П. 9) релаксационные частоты, определяющие изменение направленного движения, рассеяние импульса и изменение энергии, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \nu_{s\mu} &= \nu_{1\mu} + \frac{m}{m_\mu} \nu_{2\mu} + \nu_{3\mu}, \\ \nu_{d\mu} &= 2\nu_{1\mu}, \\ \nu_{e\mu} &= \frac{2u^2}{u^2 - u_0^2} \left(\frac{m}{m_\mu} \nu_{2\mu} + \nu_{3\mu} - \nu_{4\mu} \right). \end{aligned} \quad (\text{П.25})$$

Результаты

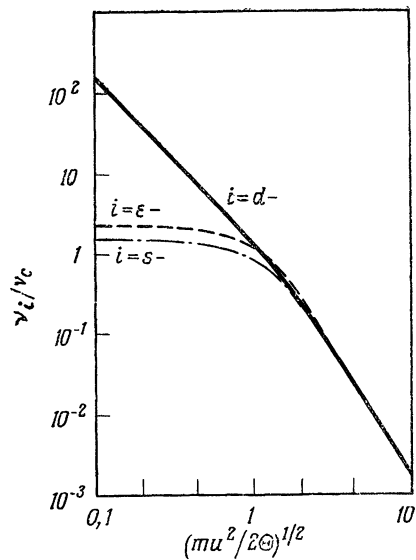
Более полная информация о полученных результатах представлена на фиг. 36—39. На фиг. 36 и 37 приведены характерные релаксационные частоты и длины для пробного электрона, движущегося в электронном газе (или для пробного иона в ионном газе). На фиг. 38 и 39 даны соответствующие величины для электронов, рассеянных протонами. Результаты для релаксации ионов в электронном газе здесь не приводятся, так как эти эффекты пренебрежимо малы по сравнению с эффектами рассеяния ионов в ионном газе.

Зависимости, представленные на фиг. 36—39, относятся к области значений $u \lesssim v_{T\mu}$. Однако на основании изменения кулоновского поперечного сечения по закону u^{-4} легко получить соответствующие зависимости и для значений скоростей $u > v_{T\mu}$.

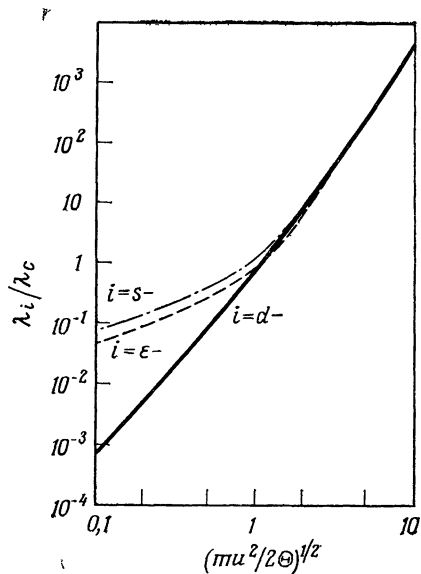
Можно ожидать, что релаксационные частоты одновременного взаимодействия с двумя сортами частиц можно получить путем сложения соответствующих результатов, приведенных на фиг. 36 и 37 или на фиг. 38 и 39. Это справедливо только для процессов изменения скорости направленного движения и рассеяния импульса. Что же касается релаксации энергии, то легко видеть, что величина u_0 , определенная согласно (П.9), не является средней тепловой скоростью и, в частности, зависит от отношения масс m/m_μ . Это в принципе исключает возможность сложения результатов для определения характерной частоты изменения энергии. С другой стороны, время изменения энергии, представленное на фиг. 36, является определяющим, так как соответствующим вкладом от ионной компоненты можно пренебречь, во всяком случае из-за большой величины отношения масс.

На фиг. 41 показана зависимость скорости u_0 от отношения масс m/m_μ . Следует отметить один интересный результат, что скорость u_0 , для которой нет изменения средней энергии, всегда меньше средней тепловой скорости, от которой она заметно отличается даже в случае $m = m_\mu$.

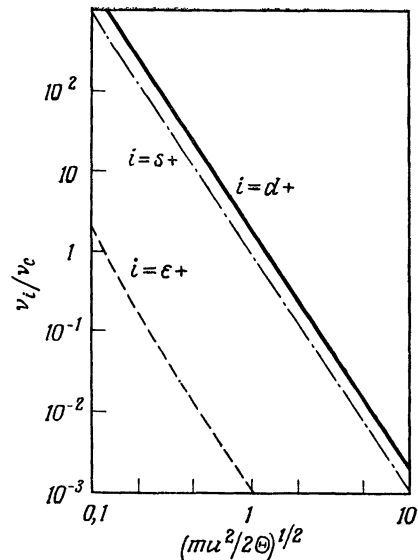
Для того чтобы облегчить вычисление релаксационных частот для других физических явлений, отличающихся



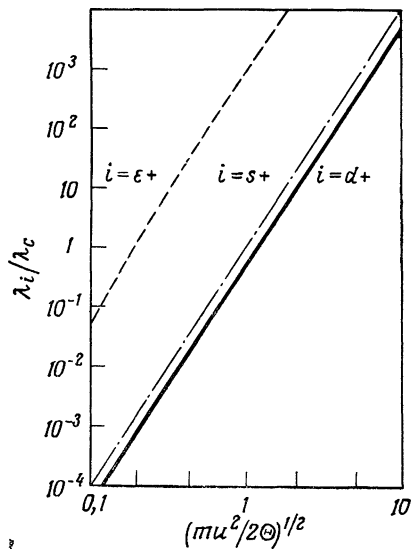
Ф и г. 36. Характерные частоты изменения скорости направленного движения v_s , рассеяния импульса v_d и изменения энергии для электронов со скоростью u при столкновении с тепловыми электронами с температурой Θ .



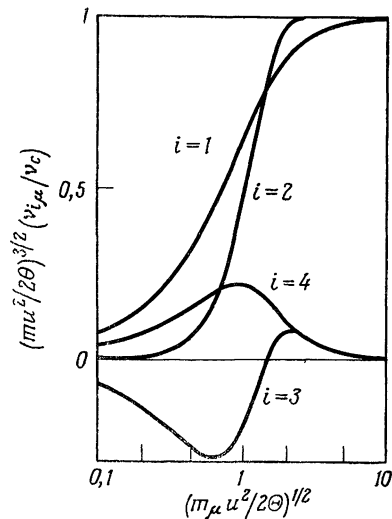
Ф и г. 37. Характерные длины λ_s , λ_d и λ_ϵ для электронов со скоростью u при столкновении с тепловыми электронами с температурой Θ .



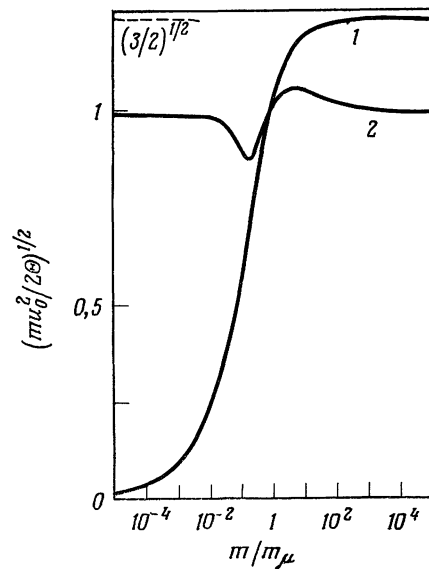
Ф и г. 38. Характерные частоты v_s , v_d и v_ϵ для электронов со скоростью u при столкновении с тепловыми протонами с температурой Θ .



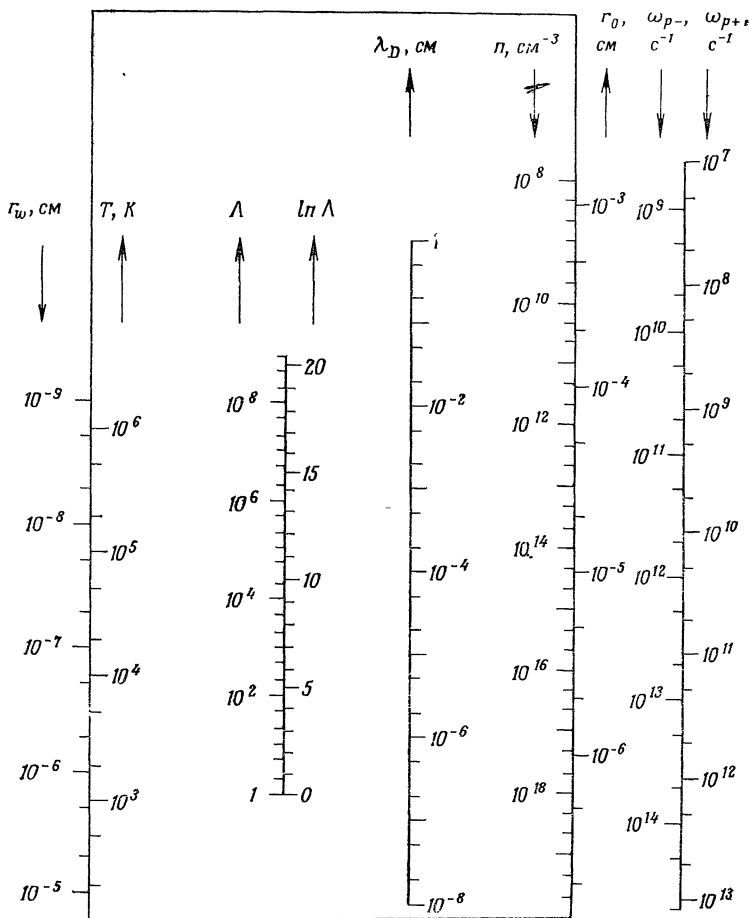
Ф и г. 39. Характерные длины λ_s , λ_d и λ_ϵ для электронов со скоростью u при столкновении с тепловыми протонами с температурой Θ .



Ф и г. 40. Зависимость частот $\nu_{1\mu}$, $\nu_{2\mu}$, $\nu_{3\mu}$ и $\nu_{4\mu}$, вычисленная по формулам (П.23) и (П.24), от скорости пробной частицы u .



Ф и г. 41. Зависимость скорости пробной частицы u_0 (при которой $\partial u^2/\partial t = 0$) от отношения масс m/m_μ . 1 — столкновения с частицами только массы m ; 2 — столкновения с одинаковым числом частиц массы m и m_μ .



Ф и г. 42. Номограмма для вычисления значений некоторых характерных параметров (λ_D , Λ , $\ln \Lambda$, а следовательно, и λ_c).

Внешние шкалы номограммы непосредственно связывают величины r_w с температурой $T = \Theta/k_B$ и r_0 , ω_{p-} и ω_{p+} с плотностью n .

от тех, которые представлены на фиг. 36—39, на фиг. 40 приведена зависимость четырех частот $\nu_{1\mu}$, . . . , $\nu_{4\mu}$ от скорости пробной частицы и от отношения масс. На номо-

грамме (фиг. 42) и в табл. 3 представлены также соответствующие усредненные характерные величины.

Таблица 2

Соотношения между характерными длинами

	r_w	r_0	λ_D	λ_c
r_w	1	$3^{1/3} \Lambda^{-2/3}$	$3\Lambda^{-1}$	$9/2 \frac{\ln \Lambda}{\Lambda^2}$
r_0	$3^{-1/3} \Lambda^{2/3}$	1	$3^{2/3} \Lambda^{-1/3}$	$3^{5/3} \ln \Lambda / 2\Lambda^{4/3}$
λ_D	$1/3 \Lambda$	$3^{-2/3} \Lambda^{1/3}$	1	$3 \ln \Lambda / 2\Lambda$
λ_c	$2\Lambda^2/9 \ln \Lambda$	$2\Lambda^{4/3}/3^{5/3} \ln \Lambda$	$2\Lambda/3 \ln \Lambda$	1

Таблица 3

Средние величины для столкновения электронов

Сорт частиц, с которыми сталкивается пробный электрон	$\frac{\langle \lambda_i \rangle}{\lambda_c}$			$\langle \tau_i \rangle v_c$		
	$i = s$	$i = d$	$i = e$	$i = s$	$i = d$	$i = e$
Электроны	2,45	2,31	1,84	1,70	1,45	1,24
Протоны	3,75	1,88	$3,44 \cdot 10^3$	2,26	1,13	$2,07 \cdot 10^3$
Электроны и протоны	1,43	1,03	1,84	0,91	0,63	1,24

Предметный указатель

- Абэ, разложение по большим группам 58
Ансамбль Гиббса 23
— — канонический 26, 27
— — макроканонический 26, 27
— — микроканонический 26, 27
- Батнагара — Гросса — Крука уравнение 262
Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Ивона (ББГКИ) цепочка уравнений 127, 129, 194, 204, 265
— — — безразмерный вид 195
— — — вывод 124
— — — групповое разложение 280
Боголюбова — Ленарда — Балеску уравнение 196, 199, 223, 276
— — интерпретация 232
— — пределы применимости 235
Боголюбова многовременной формализм 225
— начальные условия 275
— теория 265, 275
— — основное предположение 269
— — применимость к плазме 274
Больцмана предположение о первоначальном хаосе 273
Больцмана — Пуассона уравнение 75
— — обобщенное 87, 89, 94
Больцмана распределение 70
Больцмана уравнение 196, 198, 209
— — вывод 204
— — — Больцмана 210
— — обобщенное 274
— H -теорема 136
Боппа — Мейкснера разложение 240, 260
Борна — Грина уравнение 97
- Ван Кампена метод 183
Ван Кампена моды 181
— — перемешивание фаз 182, 192
— — полнота набора 187
Ван-Хова теорема 30
Взаимодействия время 208
— длина 208
— классический радиус 20, 197
— потенциал 242
Вириальные коэффициенты 46
Власова уравнение 133, 282
— — линеаризованное 138
- Власова уравнение общие свойства 135
— — присоединенное 185
— — решение Ландау 166
— — — метод Ван Кампена 183
— — — — нормальных мод 183
— — — — разложение Фурье 159
Волновое уравнение, функция Грина 300
Восьмомоментное приближение 245
Восприимчивость магнитная 297
— электрическая 296
Времена характерные 267
- Гамильтона функция, кулоновская система 33
Гаунта фактор 326
— — средний 329
Герца потенциал 302
— — разложение по мультиполям 307
— формула 318
Гернси двойное разложение 276
Гиббса ансамбль 23
Гидродинамические уравнения 253, 255
Гильберта разложение 260
Грэда коэффициенты 240
— метод 235
— приближение 244
— разложение 240
— уравнение, второе 206
Грина функция 301
Группа, классификация связей 42, 43
— метод суммирования Майера 49
— неприводимая 43
— обобщенная 38
— обычная 43
— точка ветвления 43
— частная 37
— f -представления 37
— g -представления 50
— q -представления 51
— w -представления 61
Групповое разложение 37
— — многокомпонентной системы 48
— — по большим группам 58
— — прототипы 46
— — распределения микрополей 101
— — цепочки уравнений ББГКИ 280
Групповой интеграл 39
— — неприводимый 44

- Давление гидростатическое парциальное, тензор 238
 Даламбера оператор 300
 Дальнействующие силы 196
 Даусона — Обермана модель 363
 Двадцатимоментное приближение 245
 Дебаевская сфера 107
 Дебаевский радиус 63, 81, 152, 415
 Дебаевское экранирование 202
 Дебая постоянная 52
 — формула 94
 Дебая — Хюккеля закон 51, 58
 Де Бройля длина волны 19, 35
 Декремент затухания 173
 Диаграмма двуузловая 59
 — одиночная 50
 — петлевая 50
 — прототип 51
 Дирака функция, общие свойства 120
 Дирихле функция 146
 Дисперсионная модель 134
 — функция 176
 — асимптотическое разложение 178
 Дисперсионное уравнение в случае распределения в виде пакетов 148
 — — — сферического распределения моноэнергетических частиц 146
 Дисперсионное уравнение для ионно-звуковых волн 153
 — — — ленгмюровских волн 150
 — — — поперечных (электромагнитных) волн 352, 356, 373, 382
 — — — продольных (электростатических) волн 141, 352, 355, 373
 — — — пучков частиц с заданным направлением скорости 142
 — — — распределения в виде пакета 148
 — — — связанных волн 357
 — — — холодной плазмы 351
 — — — общий вид 350
 — — — при учете поглощения 373
 Диссипация энергии 113, 182
 Диэлектрическая проницаемость 162, 233
 — — в пределе высоких частот 164
 — — в пределе низких частот 163
 Диэлектрическая функция $D(k, p)$, аналитическое продолжение 168
 Допплеровский сдвиг 388
- Закон Снелля 407
 Затухание, обусловленное столкновениями 173
 Зоммерфельда формула 327
- Излучательная способность 334, 335
 — — дифференциальная 322, 334
 Излучение одиночного заряда, энергия 315
 — — — в пределе малой скорости (дипольное приближение) 318
- Излучение одиночного заряда, торозное 319
 — — — суммарное 330
 — — — циклотронное 335
 — плотность энергии 377
 — при учете коллективных эффектов 362, 377
 — уравнение переноса 407
 — — — граничные условия 408
 — черного тела 407
 Импульс относительного движения 238
 Инварианты движения 25
 — столкновений 261
 Интеграл столкновений 209
 — — разложение по моментам 240
 Ионно-звуковые волны 153
- Калибровочные преобразования 299
 Квадрупольный тензор (момент), электрический 312
 Квазинейтральность 81
 Кинетические уравнения 196, 263
 — — отсутствие корреляций, см. Власова уравнение 133
 — — для плазмы 197
 — — — неоднородной 279, 283
 — — область применимости 199
 — — определение 284
 — — условия существования 289
 Кинетическая фаза 268, 284, 289
 Кирхгофа закон 377, 407
 Климонтовича плотность распределения 120, 210
 — уравнения 123
 Кнудсена число 260
 Конфигурация s -66
 Конформные операторы 285
 Коэффициент динамического трения 218, 221
 — диффузии 259
 — — в пространстве скоростей 218, 221
 — излучения 328, 375, 377, 407
 — отражения 410
 — поглощения 373, 381, 406
 — подвижности 259
 — теплопроводности 255, 259, 264
 — термодиффузии 259
 — трения 255, 259, 264
 Коэффициенты вириальные 46
 — переноса, термодинамические 243
 Критическая плотность 96, 276
 Кубо формула 114
 Кулоновская калибровка 299
 Кулоновская система, микроскопические свойства 63
 — — определение 20
 — — функция Гамильтона 33
- Ландау затухание 169, 173, 403
 — — область экспериментального наблюдения 174
 Ландау уравнение 216
 — — с запаздыванием 215

- Ландау уравнение с учетом экранирования 229
 Ландау — Фоккера — Планка уравнение 196, 200, 212
 Лармора формула 318
 Ларморская частота, релятивистская 331
 Ленарда — Балеску уравнение 229, 289
 Ленгмюровские волны 150
 Лиенара — Вихерта потенциалы 307, 313, 386
 Линейный отклик 112
 Лиувилля закон 208
 — оператор 113
 — уравнение 25
 Лоренцевская калибровка 299
- Майера метод 49
 Макроскопические уравнения 235
 — — применимость к плазме 247
 Максвелла — Больцмана уравнения переноса 235
 Максвелла распределение 65, 264
 — уравнения 297, 342
 Марковские процессы 222
 Модель свободно-связанных состояний 34
 Молекулярный беспорядок 209
 Момент дипольный магнитный 311
 — — электрический 310
 Многовременной формализм 284
 «Многовременные функции» 287
 Мультипольное разложение поля излучения 307
- Навье — Стокса уравнение 255
 Начальные условия Боголюбова 273, 275
 Неустойчивость пучковая 144
 — электромагнитная 358
- Обобщенная координата 28
 — сила 28
 Однокомпонентная система, плотность распределения 120
 Одночастичное приближение 73
 Опережающие потенциалы 302
 Отсутствие параллельных движений, условие 289
- Параметр малости 196
 — плотности 195, 212, 223, 266, 275, 280
 — связи 195, 212, 266, 276, 280
 Пенроуза критерий 157
 Плазма, определение 81
 — характерные параметры 134, 414, 420
 Плазменные колебания, возбуждение 372
- Плазменный параметр 133, 203
 Плазменная частота 133, 414
 Планка формула 407
 Племеля формула 155
 — — обобщенная 170
 Плотность массы 238
 Плотность распределения в Г-пространстве 23
 — — для однокомпонентной системы в μ -пространстве 120
 — — заряда 233
 — — по ансамблю Гиббса 124
 — теплового потока 249
 Показатель преломления 348, 406.
 Полевые частицы 233
 Потенциал Герца 303
 — запаздывающий 302
 — Лиенара — Вихерта 307, 313
 — опережающий 302
 — термодинамический 28, 30
 — средних сил 69
 — электродинамический 298
 — эффективный 233
 Потенциальная энергия 70
 — — средняя 69, 87
 — — эффективная для взаимодействующих пар 89
 — — формула Дебая 94
 Поток тепловой 239
 — — плотности 248
 — — энергии 238
 — — плотности 255
- Предельные случаи излучения 308
 Приближение в отсутствие запаздывания 219, 222
 — парных корреляций 82
 — прямолинейных траекторий 214, 220, 322
 — случайной фазы 369
 — экранировки частиц 107
 Прицельный параметр 320
 Пробная частица 282
 Проводимость 116, 297
 — комплексная 370
 — обобщенная 115
- Пространство импульсов 65
 — конфигурационное 65
 Г-Пространство 23
 μ -Пространство 210
 Прототипы диаграмм 51
 — групповых разложений 46
 Пуассона скобки 25
 — уравнение 75
 Пучки частиц с заданным направлением скорости 142
 — неустойчивость 143, 144, 404
 — электрон-ионные 145
- Равновесие локальное, функция распределения 262
 Разложение вириальное 47
 — по большим группам, Абе 58
 — — мультиполям Герца 307
 — — параметру плотности 269, 275
 Распределение Больцмана 70
 — в виде пакета 147

- Распределение для функции фазовых переменных 100
 — кусочно-гладкое с провалами 150
 — Максвелла 65
 — микрополей 101
 — в отсутствие корреляций (Хольтсмарка) 105
 Рассеяние света в отсутствие корреляций 394
 — — дифференциальное сечение 391
 — — доплеровский сдвиг 388, 400
 — — профиль линии 403
 — — учет коллективных (ионных) эффектов 397
 Расходимость на больших расстояниях 49, 230
 — — малых расстояниях 59, 63, 289
 Реактанс 371, 381

 Самосогласованное поле 201
 Свободная энергия Гельмгольца 28
 Свободно-свободные переходы 319
 Свободные состояния 34
 Связанные состояния 34
 Секулярность, устранение 288
 Секулярные члены 284
 Сечение рассеяния дифференциальное 236, 391
 — — в отсутствие корреляций 395
 — — — выражение через флуктуации плотности 392, 393
 — — — нормированное 398
 — — — полное, томсоновское 396
 Синхронизационная фаза 268
 — — эволюции 274
 Слабая связь 196, 223
 Сопротивление плазмы, удельное 117, 370, 381
 Среднее наблюдаемое 23
 — по ансамблю 24
 — по времени 24
 Среднее расстояние между частицами 18, 415
 Средняя длина свободного пробега 211, 260, 267
 — сила 69
 Статистическая сумма (интеграл), расходимость 35, 36
 — — канонического распределения 26
 — — макроканонического распределения 27
 — — метод групповых разложений 37
 — — модель свободно-связанных состояний 34, 35
 — — полуклассическое приближение 33
 Столкновения ближние 209
 — многократные 199
 — парные 208
 Сумма по состояниям 33
 Сфера столкновений 207

 Температура 238
 — термодинамическая шкала 26

 Тензор давлений 238
 Тензор диэлектрической проницаемости 349
 — напряжений 238
 — потока энергии 238
 — проводимости 349
 — теплового потока 239
 Теория Хольтсмарка 105
 Термодинамические потенциалы 28, 30
 Томсоновское сечение рассеяния 396
 Тормозное излучение в высокочастотном приближении 329
 — — — низкочастотном приближении 329
 — — квантовомеханические поправки 325
 — — приближение прямолинейных траекторий 322
 — — приближение Фоккера — Планка 377
 — — учет коллективных эффектов 361
 — — формула Зоммерфельда 327
 — — — Эльверта 328
 Точка ветвления 43
 — пересечения 43
 Точки диаграмм, схемы связей 43
 Тринадцатомоментное приближение 245, 260

 Узел порядка n 43
 Уравнение баланса импульса 248
 — — энергетического 248
 — волнового 300
 — для слабого взаимодействия, Ландау 212
 — Фоккера — Планка 221
 Уравнение непрерывности 246, 247, 263
 — переноса излучения 407
 — — импульса 246, 263
 — — теплового потока 246, 263
 — — энергии 246, 263
 — состояния 28, 46
 — — вириальное разложение 46, 47
 — — при взаимодействии по закону Дебая — Хюккеля 58
 Уравнения Эйлера 253, 259
 Условная вероятность 72
 Устойчивость изотропного распределения 159
 — — критерий Пенроуза 157
 — пучков частиц 144
 — распределения с одним максимумом 158

 Фазовая траектория 23
 Фазовое пространство 23
 Фаз перемешивание 182, 192
 Флуктуации плотности 393
 Флуктуационно-диссипационная теорема 111, 117, 404
 Фоккера — Планка уравнение 221, 281
 Функция автокорреляционная 112, 390

- Функция, автокорреляционная магнитного поля 389
 — — плотности 392
 — — электрического поля 216
 — корреляционная 102, 281
 — — тройная 201
 — парных корреляций 73, 109
 Функция распределения в конфигурационном пространстве 66
 — — Г-пространстве 23
 — — канонического ансамбля 26
 — — макроканонического ансамбля 27
 — — микроканонического ансамбля 26
 — — нормированная 65, 130
 — — общая 66, 73, 130
 — — приведенная 65
 — — разложение 83
 — — — Боппа — Мейкснера 240
 — — — Града 240
 — — укороченная 205
 — — функциональная зависимость от f_1 268
 — — частная 66, 124, 194
 Функция χ 53
- Характерная частота изменения скорости направленного движения 415
 — — — энергии 416
 — — — рассеяния импульса 416
 Характерные времена 267, 420, 421
 — — для плазмы 274, 275
 — — параметры 134, 414, 420, 421
 Химический потенциал 27
- Цепочка порядка n 43
 Цепочка уравнений БГКИ 129
- Цепочка уравнений для функций распределения равновесного состояния 68
 — — решение в одночастичном приближении 73
 — — — — приближение парных корреляций 82
 — — обрыв 244
 — — переноса 239
 — — приближение Града 244
 Циклотронное излучение 330
 — — линейчатый спектр 335
 — — системы в тепловом равновесии 336
- Частота столкновений 415
 Чепмена — Колмогорова уравнение 222
 Чепмена — Энскога метод 250, 260
 — — для многокомпонентной системы 256
 — — — однокомпонентной системы 251
- Электродинамические потенциалы 298
 Электромагнитные волны, связь с электростатическими волнами 357
 — — неустойчивости 358
 — — поля, общие формулы 303
 Эльверта формула 328
 Энергия излучения отдельной частицы 315
 Энтропия 28, 136
 Эргодическая гипотеза 24
 Эффективное поле 109
 Эффекты экранирования 108, 202, 214, 231, 275
 — — коллективные 201

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА	5
ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ	7
ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ	9
СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ	11
МОДЕЛЬ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ И КУЛОНОВ- СКАЯ СИСТЕМА	19

Часть I. Полностью ионизованная система в квази- статическом электромагнитном поле. Кулоновская система

<i>Глава 1.</i> Равновесные состояния кулоновской системы . . .	23
§ 1. Исходные положения	23
1.1. Теорема Лиувилля	24
1.2. Статистические ансамбли	26
§ 2. Макроскопические свойства	28
2.1. Соотношения между термодинамическими потен- циалами и статистической суммой для кано- нического ансамбля	28
2.2. Соотношения между термодинамическими потен- циалами и статистической суммой для макро- канонического ансамбля	30
§ 3. Статистическая сумма для кулоновской системы	32
3.1. Постановка задачи	32
3.2. Элементы метода групповых разложений	37
3.3. Неприводимые группы	43
3.4. Прототипы групповых разложений	46
3.5. Разложение по большим группам	58
§ 4. Микроскопические свойства кулоновской системы	63
4.1. Распределение частиц в фазовом пространстве	64
4.2. Цепочки уравнений	66
4.3. Физическая интерпретация цепочек уравнений	69
4.4. Приближенное решение цепочки уравнений для молекулярных функций распределения	73
4.5. Одночастичное приближение	73
4.6. Уравнение Больцмана — Пуассона	75

4.7. Приближение парных корреляций	82
4.8. Решение обобщенного уравнения Больцмана — Пуассона	93
4.9. Уравнение Борна — Грина	96
4.10. Функции распределения для характеристик системы, зависящих от фазовых переменных	100
4.11. Распределение микрополей	101
§ 5. Флуктуационно-диссипационная теорема	111
5.1. Вывод теоремы для общего случая	111
5.2. Флуктуационно-диссипационная теорема для кулоновской системы	116
Литература	117
 <i>Глава 2. Неравновесные состояния кулоновской системы.</i>	
Общее описание	120
§ 1. Точные уравнения для плотности распределения одно-компонентной системы	120
1.1. Уравнения Климонтовича	120
§ 2. Распределения, усредненные по ансамблю Гиббса	124
2.1. Вывод цепочки уравнений Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Ивона (ББГКИ) из уравнений Климонтовича	124
Литература	131
 <i>Глава 3. Неравновесные состояния кулоновской системы.</i>	
Приближенное описание в отсутствие корреляций между частицами	132
§ 1. Приближение Власова	132
1.1. Уравнение Власова	132
1.2. Общие свойства	135
1.3. Линейное приближение	138
§ 2. Решения линейного уравнения Власова	138
2.1. Метод собственных решений	138
2.2. Моноэнергетические пучки частиц с заданным направлением скорости	142
2.3. Сферическое распределение моноэнергетических частиц по скоростям	146
2.4. Распределения в виде пакетов	148
2.5. Кусочно-гладкие распределения с провалами	150
2.6. Произвольные распределения. Критерий Пенроуза	153
§ 3. Преобразование Фурье по времени	159
3.1. Воздействие внешних возмущений	160
3.2. Начальная задача	164
§ 4. Решение уравнения Власова методом Ландау	166
4.1. Решение Ландау	166
4.2. Общая физическая интерпретация затухания Ландау	180
§ 5. Решение уравнения Власова методом Ван Кампена	183

5.1. Присоединенное уравнение Власова	185
5.2. Полнота набора мод Ван Кампена	187
5.3. Решение начальной задачи методом разложения по собственным функциям. Сравнение с решением Ландау	190
Литература	192
Глава 4. Неравновесные состояния кулоновской системы с учетом корреляций между частицами	194
§ 1. Вывод кинетических уравнений из цепочки уравнений ББГКИ	194
1.1. Основные положения	194
1.2. Уравнение Больцмана	204
1.3. Уравнение Ландау — Фоккера — Планка	212
1.4. Уравнение Боголюбова — Ленарда — Балеску	223
§ 2. Макроскопические уравнения	235
2.1. Уравнения моментов, получаемые из уравнения Больцмана; метод Грэда	235
2.2. Вывод уравнений переноса из уравнений Больцмана; метод Чепмена — Энскога	250
2.3. Вывод уравнений моментов из уравнения Батнагара — Гросса — Крука (БГК)	262
§ 3. Обзор систематических методов	265
3.1. Теория Боголюбова	265
3.2. Распространение теории Боголюбова на плазму	274
3.3. Многовременной формализм	284
Литература	289
 Часть II. Полностью ионизованная система при наличии произвольного электромагнитного поля	
Глава 5. Излучение отдельной частицы	295
§ 1. Общие уравнения электромагнитного поля	295
1.1. Основные уравнения электродинамики	295
1.2. Электродинамические потенциалы	298
1.3. Случай произвольного электромагнитного поля	303
1.4. Потенциалы Лиенара — Вихерта	305
§ 2. Общие соотношения для полей излучения	307
2.1. Мультипольное разложение поля с помощью вектора Герца	307
2.2. Электромагнитное поле одиночного заряда	313
2.3. Угловое и частотное распределение энергии, излучаемой одиночным зарядом	315
§ 3. Тормозное излучение	319
3.1. Классическое описание	319
3.2. Некоторые результаты квантовомеханического рассмотрения	325
§ 4. Циклотронное излучение	330
Литература	339

<i>Глава 6. Взаимодействие электромагнитных полей с системой многих частиц</i>	340
§ 1. Основные уравнения	340
§ 2. Решение при наличии лишь многочастичных коллективных корреляций	345
2.1. Основные уравнения и их линейное приближение	345
2.2. Тензор проводимости и тензор диэлектрической проницаемости	347
2.3. Дисперсионное соотношение	349
2.4. Электромагнитные неустойчивости	358
§ 3. Решения с учетом электрон-ионных корреляций	361
3.1. Модель Даусона — Обермана	363
3.2. Описание процессов с помощью уравнения Фоккера — Планка	377
§ 4. Учет коллективных эффектов движения частиц и процессов излучения в одночастичном приближении. Рассеяние света	384
4.1. Излучение плазмы, обусловленное отдельными электронами	385
4.2. Рассеяние в отсутствие корреляций	394
4.3. Рассеяние при наличии корреляций, обусловленных коллективными эффектами	396
4.4. Применение флуктуационно-диссипационной теоремы	404
§ 5. Процессы переноса излучения	404
5.1. Уравнение переноса излучения	404
5.2. Замечания по поводу граничных условий	408
Литература	412
<i>Приложение. Характерные параметры плазмы</i>	414
Предметный указатель	424

Г. Эккер

ТЕОРИЯ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

Редактор А. Н. Куксенко

Художник В. И. Шаповалов Художественный редактор Е. Н. Самойлов
Технический редактор Л. П. Бирюкова Корректор Е. Г. ЛитвакСдано в набор 23/XI 1973 г. Подписано к печати 29/IV 1974 г.
Бумага № 1 84×108¹/₃₂=6,75 бум. л. 22,68 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 21,24.
Изд. № 2/6983

Цена 2 р. 28 к. Зак. 01291

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного знамени Московская типография № 7
«Искра революции» Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной
торговли.

Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9