АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Серия «Популярные произведения
классиков естествознания»

P. Ehrenfest

П. ЭРЕНФЕСТ

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ КВАНТЫ СТАТИСТИКА

Сборник статей

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА · 1972

В книге собраны популярные статьи выдающегося физика-теоретика Пауля Эренфеста (1880—1933), посвященные наиболее значительным проблемам современной физики. Эренфест отличался тонкой научной интуицией, был большим эрудитом, мастером научной популяризации. Все это наложило отпечаток на характер написанных им статей, не утративших своего значения до сих пор.

В последнем разделе книги собраны статьи и воспоминания ученых об Эренфесте (Эйнштейна, Ланжевена, Паули, Иоффе и др.).

Сборник работ Эренфеста издается впервые. Он адресован широкому кругу лиц, интересующихся историей физики.

Ответственные редакторы

Б. Г. КУЗНЕЦОВ и В. Я. ФРЕНКЕЛЬ

Составитель

У. И. ФРАНКФУРТ

2-3-1
36-73 НПЛ

I
ОПТИКА И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. В последнем десятилетии в физике из обсуждения отрицательных результатов целого ряда опытов, предпринятых с одной общей целью, постепенно выкристаллизовался универсальный принцип, *принцип относительности*. Опыты, о которых здесь идет речь, имели целью обнаружить влияние, которое по теории Максвелла — Лоренца должно иметь движение Земли на некоторые электрические и оптические явления. Несмотря на то что точность этих опытов была вполне достаточна для того, чтобы обнаружить эти эффекты, если бы они имели величину, предвычисленную теорией, все они дали отрицательный результат. Естественно, что в некоторых отношениях рассматриваемый принцип далеко заходит за пределы простого резюмирования наблюденных фактов, явившихся причиной его возникновения.

Большая часть его содержания может быть формулирована в виде следующего *утверждения*: если какая-нибудь лаборатория вместе со всеми находящимися в ней наблюдателями имеет прямолинейное равномерное поступательное движение, то эти наблюдатели не должны быть в состоянии хотя бы сколь угодно идеальными физическими опытами обнаружить существование и направление своего движения. Это утверждение, очевидно, есть обобщение постулата, который со времен Галилея и Ньютона лежит в основе классической механики, а именно обобщение следующего утверждения: если в *чисто механическом* процессе *все* взаимодействующие тела имеют кроме относительного движения еще общее равномерное прямолинейное поступательное движение, то течение процесса не зависит от величины этого поступательного движения.

Вопрос, какие добавочные постулаты необходимы, чтобы расширить этот *обобщенный постулат Галилея — Ньютона* до полного принципа относительности, мы оставляем пока в стороне, так как уже в этой более узкой формулировке он дает повод к целому ряду вопросов и возражений.

С каким правом можно так смело обобщать результаты нескольких чисто оптических и электрических опытов на все физические явления вообще? Можно ли вывести это обобщение из других, уже общепризнанных предположений? И что обозначают в частности слова «сколь угодно идеальный опыт»? Не возможно ли reductio ad absurdum [1] этого постулата при применении его к подходящему идеальному опыту?

Сторонники принципа относительности целесообразно ответят на это встречным вопросом: «как вы отвечаете на вполне аналогичные вопросы в случае двух других универсальных принципов, а именно первого и второго начал термодинамики»? Действительно, принцип относительности своим происхождением, своей формулировкой и способом применения во многом напоминает эти раньше установленные принципы.

2. Прежде всего первое начало тоже резюмирует длинный ряд «опытов с отрицательным результатом», утверждая, что никакая комбинация сколь угодно разнородных физических процессов не ведет к perpetuum mobile. Точно так же и второе начало термодинамики — в нем тоже чувствуется что-то вроде признания (технических) неудач, если его формулировать как теорему об ограничениях, которые имеют место при преобразовании теплоты в работу, или как утверждение, что никакая сколь угодно идеальная комбинация физических процессов не дает perpetuum mobile второго рода [2].

Еще более глубокая аналогия обнаруживается между этими предшествовавшими принципами и принципом относительности, если обратить внимание на способ их применения, на то, как из них выводятся следствия. Для того чтобы «никакие идеальные опыты не противоречили этим принципам», такие физические параметры, которые на первый взгляд стоят в совсем случайной связи, должны при более подробном рассмотрении обнаружить между собой почти невероятную *предустановленную гармонию*. В самом деле, предположим, что какой-нибудь конструктор искусным образом приводит во взаимодействие давление пара, движения, электрические токи, нагревания, электролити-

---

[1] доведение до нелепости (*лат.*).

[2] По определению Планка, perpetuum mobile второго рода есть периодически работающая машина, дающая работу за счет теплоты одного-единственного резервуара тепла, например моря.

ческие процессы, магнитные силы и т. д. при помощи системы рычагов, индукционных катушек, зубчатых колес и т. п. с целью получить perpetuum mobile первого или второго рода. Он должен заметить *с глубоким изумлением*, что из бесконечного числа возможных видов функциональных зависимостей, которые можно было бы à priori *ожидать* между этими физическими величинами, природа как бы нарочно *выбирает* как раз те, которые держат его машину в равновесии.

Наступил момент, после которого уже считается признаком недостаточной научной образованности предпринимать подобные конструкции с серьезным ожиданием успеха. Но человеческая изобретательность все-таки продолжала ощущать эти два принципа как *парадоксальное* ограничение своей деятельности, а не просто как факт, который исчерпывается двумя дифференциальными уравнениями или картинами, как, например: энергия — неуничтожаемая и несоздаваемая жидкость.

Отсюда и проистекают многочисленные попытки спекулятивной мысли, если не в *фактических* опытах, то по крайней мере в «мысленном эксперименте» (Gedankenexperiment), т. е. в фиктивном опыте со сколь угодно идеальными средствами, подойти к этой границе и если не разбить ее, то глубже понять ее сущность. Чем остроумнее конструктор комбинирует в своем «мысленном эксперименте» разнородные физические явления, тем более удивительные соотношения получает он (или его критик!) из предположения, что оба начала термодинамики и в *этом* выдуманном опыте не теряют своей силы. Именно таким путем и были получены наиболее глубокие следствия из этих двух начал.

Например, в круговом процессе Бартоли — Больцмана как будто уже является возможность построить perpetuum mobile второго рода при помощи давления, которое производит тепловое излучение абсолютно черного тела на абсолютно отражающее зеркало. Этот «мысленный эксперимент» при своем столкновении со вторым началом термодинамики приводит к закону Больцмана — Стефана, а при дальнейшей разработке — к закону смещения Вина, к законам, которые устанавливают настолько удивительные соотношения, что мы до сих пор не имеем «объяснения» для них.

3. Поучительно вспомнить именно здесь эти и многие другие особенности обоих начал термодинамики, иначе не легко приступить без предубеждения к изучению принципа

относительности и следствий из него. Действительно, без труда можно найти такие схемы опытов, которые дают результаты, на первый взгляд безусловно противоречащие обобщенному постулату Галилея — Ньютона. Сторонники принципа относительности хорошо знакомы с подобными схемами, но они à priori постулируют, что в каждом из этих опытов все физические величины должны находиться как раз в такой зависимости от скорости поступательного движения лаборатории, что для находящихся в ней наблюдателей обобщенный постулат Галилея — Ньютона был бы точно выполнен. Они называют *следствием* своего принципа, а не выдуманной ad hoc вспомогательной гипотезой, если при применении принципа к подходящим идеальным опытам получается, что действительная длина всякого идеально твердого стержня зависит от того, лежит ли он вдоль направления поступательного движения лаборатории или перпендикулярно к нему, что всякое идеально твердое тело при винтовом движении в действительности имеет определенное закручивание, что масса тела определенным образом зависит от его скорости, даже от содержания в нем различного рода энергии в данный момент, и т. д.

Иллюстрируем эти замечания применением обобщенного постулата Галилея — Ньютона к одному «мысленному эксперименту», который по существу есть не что иное, как опыт Майкельсона при до крайности идеализированной обстановке [3]. Пусть лаборатория движется со скоростью, например, $^9/_{10}$ скорости света. Находящийся в ней наблюдатель изготовляет себе *колоссально большой* пустой шар, внутренняя поверхность которого белая. В том, что все точки этой внутренней поверхности имеют одинаковое расстояние от одной точки *M*, наблюдатель убеждается сравнивая радиусы при помощи масштаба. В этом центре он возбуждает яркую искру, становится сам в центре и ждет. Сначала он ничего не видит, но спустя некоторое время световая пертурбация возвращается к нему. Если его лаборатория находилась бы в покое, то он просто увидел бы, что в определенный момент вся внутренняя поверхность шара засветится одновременно и с одинаковой яркостью. Но постулат Галилея — Ньютона требует, чтобы и в движущейся лаборатории опыт протек бы вполне «изотропно». Смотря

[3] Более подробное рассмотрение действительных условий опыта имеется в статье В. Бурсиана («Вопросы физики», 1909, № 3, стр. 284).

по тому, какие у нас воззрения на сущность распространения света, мы различно отнесемся к этому требованию. Проследим по крайней мере *три различных воззрения*.

a) Предположим, что распространение света происходит согласно *теории истечения*. Тогда искра бросает световые корпускулы, как мячики, во все стороны, и притом все с одинаковой относительной скоростью по отношению к (движущемуся) центру. Все они, следовательно, получают, как добавочное общее поступательное движение, поступательное движение центра и шара, от которого они отражаются. В этой проблеме выполнены все условия классической механики, здесь, следовательно, обобщенный постулат Галилея — Ньютона совпадает с собственно постулатом Галилея — Ньютона.

b) Допустим, что распространение света происходит согласно представлениям волновой теории, причем мы предполагаем, что лаборатория увлекает весь находящийся в ней световой эфир так, как она, например, увлекает заключающийся в ней воздух. И в этом случае, следовательно, дело идет о равномерном поступательном движении, общем *всем* (включая и эфир) взаимодействующим «телам»; следовательно, с точки зрения и этой теории мы можем согласиться, что обобщенный постулат Галилея — Ньютона будет соблюден.

c) Пусть световые волны распространяются в среде, которая не увлекается лабораторией; лаборатория скользит сквозь покоящийся эфир. Если мы в этом случае противопоставим две различные скорости лаборатории, то увидим, что здесь не имеет места поступательное движение, общее *всем* взаимодействующим телам, так как в нем не участвует эфир. Действительно, если проследим мысленно, как распространяется световой импульс в покоящемся эфире, мы увидим, что наш шар смещается относительно этого импульса. Если мы изучим с помощью чисто кинематических соображений, каким образом световой импульс отбрасывается от различных точек поверхности шара, то найдем, что световое возбуждение возвратится уже не в один момент к (движущемуся) центру шара, а в течение более продолжительного промежутка времени. Если мы назовем тот диаметр шара, который параллелен направлению движения, *осью* шара и соответственно будем употреблять обозначения «полюсы» и «экватор», то можно дать следующее описание того, что должен бы видеть наблюдатель: сначала все темно, затем он видит освещенным экватор, далее освещенный пояс смещается таким образом, что в каждый момент освещены две симметричные относительно экватора параллели, наконец он видит освещенными еще полюсы, а затем все становится вновь темно. Наблюдатель, следовательно, в состоянии узнать, что его лаборатория движется, и даже — кроме знака — установить направление этого движения.

Становятся ли, значит, сторонники принципа относительности непременно на точку зрения теории истечения, или полагают они, что лаборатория увлекает эфир в своем движении? Нет. Они ничего не имеют против предположения, что световые волны распространяются в эфире, который не увлекается лабораторией. Они в этом случае только утверждают:

Из одновременного применения обобщенного постулата Галилея — Ньютона и этого последнего предположения следует, что «шар» движущегося наблюдателя для наблюдателя, покоящегося относительно эфира, есть сплюснутый в направлении движения эллипсоид вращения [4] *с отношением осей*

$$\frac{\textit{экваториальная ось}}{\textit{ось вращения}} = 1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

(v — скорость лаборатории, c — скорость света; возможность скорости $v > c$ безусловно исключается принципом относительности).

Мы должны теперь по крайней мере в общих чертах рассмотреть вопрос, каким образом развилась такая странная точка зрения.

4. Известно, что как раз допущение покоящегося [5] светового эфира побудило Майкельсона произвести свой опыт. Вышеприведенные замечания о теории истечения или увлечения эфира вполне ясно показывают, что интерпретация полученного Майкельсоном отрицательного результата при помощи рассмотренного выше сокращения является в *логическом* отношении далеко не единственно возможной. Чисто *исторически*, однако, выбор был предугадан довольно определенно. Действительно, лет 15—20 назад, когда

---

[4] Относительно вывода этого соотношения см. вышеупомянутую статью В. Бурсиана (стр. 295).

[5] Относящиеся сюда работы более подробно разобраны в статье Д. С. Рождественского (ЖРФХО, 1906, № 38, стр. 72) или в «Обзорах по физике» за 1906 г., стр. 72.

этот вопрос стал актуальным, объяснения при помощи теории истечения или увлечения эфира казались неприемлемыми. Подобное объяснение отсутствия такого, во всяком случае очень маленького эффекта, стоявшего на самом краю тогдашнего опытного материала, привело бы зато в области давно изученных явлений к хорошо известным затруднениям [6]. С другой стороны, в это время Лоренц показал, что предположение, что эфир *не участвует* в движении тел, очень хорошо оправдывается в обширной области оптических и электрических [7] явлений. Какие-либо другие представления о механизме распространения света пока не разработаны. При таком положении вещей оставалось только или признать отрицательный результат опыта Майкельсона просто «исключением» — прием, который встречается во всех отделах физики,— или же видоизменить основные представления, которые кроме вышеупомянутого неподвижного эфира еще допускаются в теории опыта Майкельсона. Их, конечно, очень много, если принять во внимание *фактическую* обстановку опыта, но если работать с *идеализированной схемой*, представляющей его основную идею, то остающиеся предположения являются уже только *геометрически-кинематического* характера.

Лоренц и Фицджеральд (1892) решились на видоизменение как раз этих геометрически-кинематических предположений: по их примеру с тех пор допускается предположение, что в интерферометре Майкельсона отношение длин плеч изменяется, если его повертывают из одного положения относительно направления движения Земли в другое. Для того чтобы в опыте Майкельсона получился нулевой эффект, необходимо, в частности, допустить, что всякий стержень укорачивается в отношении $1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ при повороте из положения, перпендикулярного направлению движения Земли, в это направление. Этот шаг в методическом отношении явился решающим для дальнейшего развития теории!

Конечно, Лоренц чувствовал, что это предположение, как «введенное ad hoc», малоудовлетворительно. Поэтому он стремился «объяснить» еще и физически происхождение этого сокращения. «Какой бы странной ни казалась на первый

---

[6] Например, в явлении аберрации (см. статью В. Бурсиана, стр. 295).

[7] *А. Эйхенвальд.* «Вопросы физики», 1909, № 3, стр. 235.

взгляд эта гипотеза, все-таки надо согласиться, что она вовсе не так неестественна, если допустить, что действия молекулярных сил происходят через посредство эфира, аналогично тому, что мы теперь с уверенностью можем утверждать об электрических и магнитных силах. Если это так, то поступательное движение, по всей вероятности, будет влиять на взаимодействие между двумя молекулами или атомами подобным уже образом, как и на притяжение или отталкивание двух заряженных частиц. Поскольку, однако, форма и размеры твердого тела обусловливаются в последней инстанции интенсивностью молекулярных действий, то не может не произойти изменение размеров»[8] При помощи более подробного предположения о том, каким образом молекулярные силы зависят от скорости поступательного движения (см. далее предположение I), Лоренц доказывает, что твердое тело в случае поступательного движения деформируется как раз по рассмотренному выше закону. Относящиеся сюда вычисления построены так, как будто форма тела определяется той конфигурацией молекул, при которой все притягательные и отталкивательные силы находятся в равновесии. Тепловое движение молекул, значит, исключается из рассмотрения.

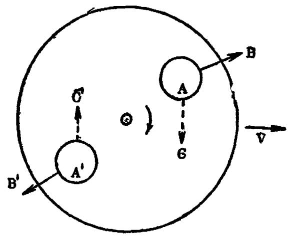
Пуанкаре[9] (1900) подверг рассуждения Лоренца критике: если уже для объяснения опыта Майкельсона необходима столь искусственная гипотеза, то новые опыты с отрицательным результатом, должно быть, заставят прибегнуть ко все новым и новым вспомогательным предположениям такого рода. Желательно было бы точно доказать для *большой* группы оптических и электрических явлений независимость их от движения Земли, исходя из немногих предположений. Новый толчок к подобному дальнейшему развитию теоретических исследований дали спустя непродолжительное время два электрических опыта Троутона и Нобля (1903)[10] и один оптический опыт, произведенный Рэлеем (1902) и Брэсом (1904)[11]. Впрочем, замечательно, что для одного из опытов Троутона и Нобля отрицательный результат вытекает уже из тех предположений, с которыми Лоренц работал в

---

[8] *H. A. Lorentz*. Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bevegten Körpern, § 91.
[9] *Poincaré*. «Rapp. du Congrès des phys.», 1900, 1, p. 1.
[10] *Trouton* and *Noble*. «Phill. Trans. Lond.», 1903, A 102.
[11] *Rayleigh*. «Phil. Mag.», 1902, 4, p. 678; *Brace*. «Phil. Mag.», 1904, 7, p. 317.

1892—1895 гг. Раньше чем перейти к обсуждению новой теории Лоренца (1904), мы более подробно разберем последнее замечание, для того чтобы нагляднее иллюстрировать теорию в ее прежнем состоянии.

Опыт был в действительности произведен над конденсатором, подвешенным так, что он мог свободно вращаться вокруг определенной оси; в следующих же рассуждениях мы будем оперировать со схематизацией этого опыта, содержащей, однако, всю сущность его.



Круглая пластинка из твердого изолирующего материала подвешивается так, что она может свободно вращаться вокруг своей оси.

На концах диаметра AA' к ней прикреплены два одинаковых металлических шарика. Если лаборатория покоится относительно эфира, то эта пластинка будет в равновесии в любом положении, причем как тогда, когда шарики не заряжены, так и тогда, когда они заряжены, например положительно. В последнем случае они *взаимно отталкиваются*. Пластинка эластически деформируется, и в этом случае взаимное притяжение молекул находится в равновесии с упомянутым отталкиванием. Это последнее как будто уже не имеет места, когда лаборатория движется. Если диаметр AA' наклонен под каким-нибудь углом к направлению движения, то по теории Максвелла — Лоренца движущиеся проводники действуют теперь друг на друга с силами, направленными примерно так, как это указано стрелками AB и $B'A'$ на рисунке [12].

[12] Их действительная величина и направление находятся, конечно, только подробным вычислением; существование такого момента вращения можно ожидать на основании следующего замечания: проводник A' вследствие своего движения производит магнит-

Эти силы имеют, следовательно, момент вращения вокруг оси пластинки. Момент этот обращается в нуль только тогда, когда AA' лежит в направлении движения (устойчивое равновесие) или перпендикулярно к нему (неустойчивое равновесие). Пластинка, следовательно, могла бы служить своего рода компасом, показывающим направление движения лаборатории.

Фактически опыт Троутона и Нобля[13] дал, как было уже сказано, отрицательный результат. Сжатие, по Лоренцу — Фицджеральду, само по себе, очевидно, недостаточно для объяснения этого отрицательного результата. Но цитируем теперь подробнее упомянутое выше предположение о влиянии движения на молекулярные притяжения и отталкивания.

П р е д п о л о ж е н и е I. Все силы притяжения и отталкивания атомов между собой и между атомами и электронами зависят от общего поступательного движения точно таким же образом, как и чисто электрические притягательные и отталкивательные силы между двумя точечными зарядами.

Это предположение, с которым Лоренц оперировал в своем объяснении сокращения тел при движении, очевидно, приводит к выводу, что и в движущейся лаборатории пластинка в любом положении должна находиться в равновесии. Действительно, если электрическое отталкивание вследствие движения имеет некоторый момент вращения, то, по той же самой причине, эластические силы деформации (молекулярные притяжения) в пластинке должны иметь момент, равный и противоположный.

5. Перейдем теперь к теории Лоренца 1904 г., которая стремится к следующей цели: показать, что во *всех* оптических и электрических явлениях *величины, принципиально доступные наблюдению*, не зависят от поступательного движения лаборатории. Что касается основных допущений, то прежде всего надо указать на такую разницу: в старой теории вопрос, зависит ли форма самого электрона от его по-

ное поле, силовые линии которого суть круги, перпендикулярные направлению движения. A движется в этом магнитном поле. Это магнитное поле действует, значит, на него в плоскости чертежа и перпендикулярно направлению движения.

[13] В фактическом опыте вместо двух заряженных шариков нашего схематического рассуждения употреблялись обкладки подвешенного конденсатора.

ступательной скорости, оставался открытым; теперь же Лоренц совершенно определенно вводит предположение.

Предположение II. Электрон, который можно себе представить в состоянии покоя шарообразным, в случае движения переходит в сплюснутый эллипсоид вращения, такой, что ось, параллельная движению, в $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ раз короче, чем ось, перпендикулярная к нему.

Эти электроны теперь обыкновенно называются электронами Лоренца; в отличие от них прежние, неизменяемые, электроны, к сожалению исчезающие, носят название электронов Абрагама [14]. Но поскольку высказано предположение II, становится ясным, что недеформирующиеся электроны Абрагама плохо подходили бы к сокращающимся телам. Действительно, это несоответствие между неизменяемыми электронами и сокращающимися телами должно было бы проявиться, между прочим, в опытах Рэлея и Брэса. Как показывает более подробное исследование этого несоответствия, наблюдатель в движущейся лаборатории должен был бы заметить следующее: в телах, по своей природе вполне изотропных, как, например, вода, должно было бы обнаружиться некоторое определенное двоякое лучепреломление, в котором направление движения является особенным. Явление это не обнаружилось, и соображения об основах теории этого опыта привели именно к предположению II.

Лоренц делает предположение II как необходимое для того, чтобы, *пользуясь им*, *объяснить нечто*; вопроса же, нельзя ли «объяснить» само это предположение при помощи более простых допущений, Лоренц, понятным образом, уже не касается. Подобное же можно сказать о двух других предположениях, на которых Лоренц основывает свою теорию 1904 г.

Предположение III. *Истинная масса электронов* зависит от скорости по тому же самому закону, как электромагнитная (кажущаяся) масса электронов.

Предположение IV (более подробное определение предположения II). В направлении, перпендикулярном направлению движения, электрон не изменяет своих размеров по сравнению с состоянием покоя.

---

[14] Абрагаму мы обязаны некоторыми фундаментальными приобретениями в теории движения этих электронов (см.: *Баумгарт*, «Вопросы физики», 1907, 1, стр. 305).

В дальнейшем новая теория Лоренца заключается в комбинировании основных максвелл-лоренцевских уравнений, которые управляют электромагнитным полем и его взаимодействием с электронами, с вышеприведенными четырьмя предположениями. *Цель* этой теории 1904 г. мы формулировали в начале этого параграфа; *метод* же, которым Лоренц достигает этой цели, исходя их указанных предположений, заключается по существу в одном аналитическом приеме. Мы должны рассмотреть его несколько подробнее, потому что как раз этот прием дает непрерывный переход к точке зрения Эйнштейна.

1910

КРИЗИС В ГИПОТЕЗЕ О СВЕТОВОМ ЭФИРЕ

Многоуважаемые слушатели!

Позвольте остановить ваше внимание на кризисе, который в настоящее время угрожает одной основной гипотезе физики. Этот кризис является, как мне кажется, ярким выразителем того своеобразного революционного настроения, которое сейчас господствует в теоретической физике.

Для большей наглядности в дальнейшем изложении я буду исходить из некоего фиктивного опыта, который для краткости можно назвать «опытом с шаром». Этот фиктивный опыт выбран мной с тем расчетом, чтобы интересующие нас стороны его выступили с особенной яркостью.

Прошу прощения за некоторую фантастичность его, которую мне для этой цели пришлось ему придать.

Представим себе полый шар, размер которого превышает не только размер Земли, но даже размер ее орбиты. Этот шар так велик, что световой луч пробегает его поперечник примерно часа за два. В самом центре этого полого шара помещается исследователь. Шар находится в покое. Исследователь производит следующий опыт: он заставляет на мгновение вспыхнуть яркий источник света и ждет, что он увидит дальше. Сперва он на мгновение увидит источник света, затем наступит темнота — на два часа, так как в течение часа свет добежит от центра до внутренних стенок полого шара, отразится от них и через час вернется к наблюдателю.

И только в этот момент наблюдатель увидит, что вся внутренность шара на мгновение осветится, затем вновь наступит темнота.

Представим себе, далее, еще второй, точно такой же полый шар. И в его центре находится исследователь. Но этот второй шар не находится в покое, а пробегает мимо нас с огромной скоростью, например со скоростью в одну десятую скорости света. Исследователь движется вместе с шаром. Этот второй исследователь, совершенно так же, как и первый, зажигает на одно мгновение источник света и точно так же наблюдает дальнейшие явления. Спрашивается: увидит ли наблюдатель в движущемся шаре также всю шаровую поверхность одновременно, или он увидит нечто иное? На этот вопрос физики различных времен ответили бы различно.

Ньютон, основываясь на своей теории истечения, сказал бы: наблюдатель в движущемся шаре увидит абсолютно то же самое, что и наблюдатель в покоящемся шаре, поскольку распространение света от лампы и отражение его от внутренней поверхности такого шара — явление чисто механическое, подобное игре в мяч; лампа бросает световые частицы в пустоту, по направлению к стене, а от стены они упруго отскакивают обратно по направлению к лампе. Подобная игра в мяч не меняется от того, где она происходит,— в неподвижной ли комнате или в комнате, движущейся с равномерной скоростью.

Френель — один из основателей современной теории света — сказал бы: нет, наблюдатель в движущемся шаре увидит нечто совсем иное, чем наблюдатель в шаре неподвижном. Он увидит следующее: сначала лампу, затем приблизительно два часа будет царить темнота; потом он увидит, как вспыхнет экватор шара (назовем так тот большой круг шара, который перпендикулярен направлению движения шара), затем ему будут видны два круга широты, расположенных симметрично по обеим сторонам экватора. Эти два светлых круга распространяются симметрично по направлению к полюсам. Наконец вспыхнут одновременно оба полюса шара; вслед за этим все снова погрузится во мрак.

Откуда берется у Френеля эта удивительная картина?

У Френеля есть следующая гипотеза о природе распространения света: все мировое пространство заполнено эфиром, который находится в покое относительно неподвижных звезд. Тела свободно движутся сквозь этот эфир, не увлекая его за собой. Когда лампа испускает свет, она изменяет состояние эфира, и возбуждаемые ею изменения передаются в эфир по всем направлениям, подобно тому как передается толчок в упругом теле.

Допустим, что полый шар с наблюдателем неподвижен относительно эфира. Световое возбуждение образует в таком случае шаровую волну, которая разбегается симметрично от центра полого шара; в некоторый момент она коснется внутренней поверхности шара и затем, симметрично сжимаясь, вернется в центр его.

Совершенно иначе дело обстоит со вторым шаром, который вместе с наблюдателем движется чрезвычайно быстро через неподвижный эфир. Наблюдатель при этом находится в таком положении, в котором он находился бы на мосту, перекинутом через мощный и равномерно текущий поток; через его быстро движущуюся шаровую лабораторию точно так же мчится неподвижный эфир. Что произойдет, однако, если мы бросим камень с моста в поток? По поверхности воды будут распространяться круговые волны, которые поток будет увлекать за собой. Точно так же вспышка света от лампы распространяется в эфире в форме шаровой волны и точно так же, как эта шаровая волна деформируется эфирным ветром, дующим через шаровую лабораторию. При этом распространение и отражение световой волны происходит уже не так симметрично относительно центра полого шара. При помощи элементарного расчета можно установить, какие части световой волны вернутся к наблюдателю раньше, какие позже.

Из этих соображений и вытекает та картина, которая была нарисована выше. А именно: наблюдатель в движущемся шаре увидит сначала экватор, затем круги широт и наконец только оба полюса. Таков прогноз, поставленный на основании гипотезы Френеля о неподвижном эфире.

Стокс предполагает, что тела увлекают с собой в своем движении находящийся в них световой эфир. Если же вместе с движущейся шаровой лабораторией перемещается и эфир, в ней заключенный, то само собой разумеется, что наблюдатель в движущемся шаре увидит то же, что и наблюдатель в шаре покоящемся.

Резюмируя все сказанное, мы приходим к следующему выводу.

Теория истечения Ньютона и теория Стокса об увлекаемом эфире говорят нам: наблюдатель в движущемся шаре видит совершенно то же самое, что и наблюдатель в покоящемся шаре.

Наоборот, теория Френеля о неподвижном эфире утверждает, что второй наблюдатель видит совершенно определенную иную картину.

Какому предсказанию следует верить?

Насколько вообще достоверны эти три различные теории света?

Что касается теории истечения Ньютона, то о ней всем известно следующее: в течение всего XVIII столетия она господствовала неограниченно. В начале XIX столетия ее внезапно и целиком вытеснила теория эфира. Как известно, веские причины заставили физиков быстро и радикально отказаться от теории истечения. Мы не можем обсуждать здесь эти причины.

Теория эфира постепенно заняла прямо-таки господствующее положение во всех областях физики. Особенно со времени работ Максвелла и Герца, которые с полной очевидностью показали, что оптические явления представляют собой не что иное, как частный случай электромагнитных волн, т. е. что световые волны не что иное, как очень короткие электромагнитные волны. Потому-то, таким образом, световой эфир явился носителем всех вообще электромагнитных явлений.

В эфирной теории существовали, однако, две различные точки зрения, между которыми спор не был решен почти до конца XIX столетия. Стоит ли эфир неподвижно, или каждое тело увлекает за собой находящийся в нем эфир? В дальнейшем изложении мы будем обе эти теории называть сокращенно теорией неподвижного эфира и теорией увлекаемого эфира.

Охарактеризуем в существенных чертах борьбу этих двух теорий и окончательную победу теории неподвижного эфира. Гипотезу об увлекаемом эфире особенно поддерживал Стокс в области оптических явлений. В частности, Стокс считал, что Земля в своем движении вокруг Солнца увлекает свой эфир за собой совершенно так же, как и воздушную атмосферу. Герц распространил в 1890 г. гипотезу об увлекаемом эфире с оптики на теорию всех электромагнитных явлений вообще. Гипотезу о неподвижном шаре поддерживал в области оптических явлений Френель. По его теории, Земля скользит сквозь неподвижный эфир при своем движении вокруг Солнца. Лоренц распространил также в 90-х годах гипотезу о неподвижном эфире с оптических явлений на электромагнитные явления вообще.

Какие решающие мотивы способствовали победе неподвижного эфира теории Френеля — Лоренца над увлекаемым эфиром теории Стокса — Герца?

1. Лоренц доказал: измеряемая астрономами аберрация света, испускаемого звездами, не согласуется с гипотезой Стокса о том, что Земля увлекает за собой свою эфирную оболочку. Если, наоборот, допустить, по Френелю, что Земля скользит сквозь неподвижный эфир, то величина наблюдаемой аберрации согласуется с теоретическим подсчетом ее.

2. Физо опытным путем установил, что скорость света в текущей воде больше, нежели в воде стоячей, и превышает ее на совершенно определенную часть скорости течения воды.

Существенное преимущество теории Лоренца заключается в том, что она смогла дать отчетливое и количественно согласное с опытными данными объяснение этого явления. Теория же увлекаемого эфира совсем противоречит результатам Физо; по этой теории скорость света в текущей воде должна, очевидно, превышать скорость света в воде неподвижной на полную скорость течения воды.

3. В то время, когда победа теории Лоренца была уже обеспечена ее многосторонними успехами, русскому физику Эйхенвальду удалось поставить еще один опыт, красиво подтверждающий эту теорию. Наэлектризованное тело при быстром движении влияет на магнитную стрелку, как магнит. Эйхенвальд подобрал такие условия опыта, при которых по теории Лоренца получается для магнитной силы одно значение, а по теории Герца — другое. И в этом случае результаты опыта резко склонились в пользу неподвижного эфира и свидетельствовали против увлекаемого эфира.

Вернемся теперь к нашему опыту с шаром и вспомним те три прогноза, которые ставят три теории света. Теория истечения Ньютона, равно как и теория Стокса — Герца, говорит: наблюдатель в движущемся шаре видит совершенно то же самое, что и наблюдатель в покоящемся шаре. Можем ли мы, однако, доверять предсказанию, основанному на теориях, от которых физики отказались? Конечно, нет. Что же говорит победоносная гипотеза о неподвижном эфире? По этой теории, как мы уже раньше видели, наблюдатель в движущемся шаре должен увидеть — благодаря эфирному ветру, дующему в его лаборатории,— нечто совсем иное, нежели наблюдатель в шаре неподвижном. Этого нам, значит, и следовало бы ожидать.

Наш опыт с шаром представляет собой в преувеличенном виде фактически произведенный опыт — знаменитый опыт Майкельсона. Майкельсон употребляет прибор лишь в несколько метров величиной, и прибор этот движется со скоростью одной десятитысячной скорости света в эфире, а именно он движется с нашей Землей, которая как раз с этой скоростью вращается вокруг Солнца. При таких невыгодных условиях Майкельсону понадобились, конечно, неизмеримо более чувствительные измерительные приспособления, нежели при нашем «опыте с шаром». Принцип, однако, в обоих случаях один и тот же.

Мне поэтому позволительно будет для простоты рассуждать так, как если бы Майкельсон на самом деле произвел непосредственно наш «опыт с шаром». Что он нашел? Удалось ли ему действительно заметить, что полюса вспыхивают позже, нежели экватор, как это должно быть по теории неподвижного эфира? Его установка была достаточно чувствительна, чтобы можно было заметить вычисленное запаздывание, если таковое существует.

Известно, что Майкельсон не нашел и следов этого ожидаемого запаздывания. Известно также, что после него и другие исследователи производили и электрические и оптические опыты, с тем чтобы констатировать существование эфирного ветра, который должен дуть в наших лабораториях, если только Земля движется сквозь неподвижный эфир. Известно, далее, что все эти опыты над эфирным ветром неминуемо приводили к ясно выраженным отрицательным результатам. Ни разу не удалось открыть хотя бы след эфирного ветра. И все же он мчится через наши лаборатории — и через этот зал — со скоростью, ровно в 1000 раз превышающей скорость курьерского поезда.

Как реагировали физики на этот всеобщий отрицательный результат всех опытов над эфирным ветром? Как отнеслись они к эфирной гипотезе?

Я постараюсь противопоставить друг другу важнейшие точки зрения; извините, что мне при этом придется повторять хорошо знакомые вещи.

Остановимся прежде всего на точке зрения Лоренца, изложенной в его работе 1904 г.; к сожалению, здесь невозможно проследить за последовательным развитием этой точки зрения.

В этой работе Лоренца сохранена как гипотеза о неподвижном эфире, так и другие основные гипотезы прежней теории. Поэтому сохраняют свое значение все те положения, в которых теория Лоренца—в первоначальном виде—одержала верх над остальными.

Новым в этой работе является систематическое применение двух, с формальной стороны простых гипотез, а именно гипотез о том, как меняются благодаря движению через эфир:

1) междумолекулярные силы;

2) геометрическая форма электронов.

Обе эти гипотезы удивительным образом в корне уничтожают противоречие между гипотезой о неподвижном эфире и резко отрицательными результатами всех опытов над эфирным ветром. Противоречие исчезло бесследно.

Исходя их вышеупомянутых основных предположений, работа 1904 г. чисто дедуктивно доказывает для очень большого класса опытов следующую теорему: допустим, что лаборатория движется сквозь эфир с произвольно большой скоростью (не превышающей, однако, скорости света). Если какой-нибудь исследователь в такой лаборатории произведет опыт, то, по его наблюдениям, этот опыт будет протекать совершенно так же, как если бы его лаборатория стояла неподвижно по отношению к эфиру. В дальнейшем изложении я буду эту теорему кратко называть «теоремой 1904 года».

Полезно продумать применение этой теоремы к совершенно специальным случаям. Тогда можно на своеобразной картине проследить, каким образом эти гипотезы в самом деле помогают скрыть от наблюдателя эфирный ветер.

Позвольте несколькими резкими штрихами набросать получающуюся при этом картину: эфирный ветер нарушает ход того явления, которое исследователь наблюдает; но тот же ветер портит, так сказать, и измерительные приборы наблюдателя: он деформирует меры длины, меняет ход часов, напряжение пружины в пружинных весах и т. п.

Все это достигается благодаря названным основным гипотезам, в частности гипотезе о том, что движение через эфир изменяет силу притяжения между молекулами.

Если поэтому исследователь наблюдает измененные эфирным ветром явления при помощи своих, тем же эфирным ветром испорченных приборов, то он увидит абсолютно то же, что увидел бы наблюдатель покоящийся, наблюдающий явления, ничем не нарушенные, при помощи ничем не испорченных приборов.

Изумительно, что это следствие можно было строго доказать для очень большой группы опытов, пользуясь таким небольшим числом основных допущений. Удивительно, что вообще оказалось возможным провести подобную непрерывную цепь рассуждений.

Было бы нескромностью с моей стороны, если бы я захотел при помощи какого-нибудь эпитета выразить оценку метода, при помощи которого Лоренц справился с этой задачей.

Что касается нашего «опыта с шаром», то на нем легко уяснить себе содержание теоремы 1904 г. На основании теории о неподвижном эфире мы полагали, что наблюдатель в движущемся шаре увидит полюсы шара позже, нежели экватор; эфирный ветер деформирует волну, посылаемую лампой. На основании же гипотезы о том, что эфирный ветер нарушает молекулярные силы, мы можем рассчитать, как эфирный ветер деформирует большой шар; как бы мы его ни поворачивали, он всегда окажется сплюснутым в направлении движения; следовательно, полюсы лежат ближе к центру, нежели экватор, и как раз на такое расстояние, что наблюдатель увидит оба полюса одновременно с экватором. Совершенно так же, как и наблюдатель в неподвижном шаре.

Основные гипотезы работы 1904 г. дают возможность и во всех остальных опытах над эфирным ветром скрыть его действие от наблюдателя.

Из сказанного видно, что работа Лоренца 1904 г. указывает возможность выхода из того затруднительного положения, в которое попала гипотеза об эфире. Но не все физики были удовлетворены этим решением.

Мы должны затронуть теперь те две точки зрения, которые опубликованы Эйнштейном в 1905 г. и Ритцем в 1908 г. К сожалению, мы не имеем возможности в рамках этой речи детально обсуждать эти точки зрения. Мы ограничимся лишь указанием на те их отличительные черты, которые определяют их значение в кризисе гипотезы об эфире.

Отрицательные следствия всех опытов над эфирным ветром приводят обоих авторов к убеждению, что эфира вообще не существует. Пространство между телами пусто. Электроны тел посылают друг другу сквозь пустоту электромагнитные импульсы и свет. Оба автора подчеркивают, что их теории возвращаются к теории истечения Ньютона и противоположны эфирной теории Лоренца.

Несмотря на эти общие черты, между точками зрения Эйнштейна и Ритца существует глубокая разница. Ее легче всего обнаружить при следующей постановке вопроса.

Один источник света A стоит перед нами неподвижно, второй источник света B движется с большой скоростью по направлению к нам. Пропустим световые лучи от обоих источников через пустую трубу, спокойно лежащую перед нами, и измерим, одинаково ли быстро оба луча пробегают через трубу. Какой мы получим результат? Эфирная теория Лоренца говорит нам: «одинаково быстро» с таким обоснованием: свет от обоих источников распространяется в одном и том же эфире.

Теория истечения Ритца, отрицающая эфир, говорит: свет от движущегося на нас источника света проходит через трубу с большей скоростью, нежели свет от источника неподвижного. Обоснование: свет от источников летит в пространство, подобно осколкам от лопнувшей бомбы. Но осколки бомбы, движущейся на нас, летят через трубу, конечно, с большей скоростью, нежели осколки бомбы, которая взрывается, спокойно лежа перед нами.

Наконец, теория истечения Эйнштейна, отрицающая эфир, говорит: одинаково быстро. Почему? Объяснение не приводится. Эйнштейн ставит это утверждение как постулат во главе своей теории, в этом и состоит его «постулат о постоянстве скорости света».

Мы видим, следовательно, что отрицающая эфир теория Эйнштейна требует того же, что и эфирная теория Лоренца. На этом основании наблюдатель должен, по теории Эйнштейна, наблюдать на движущихся мимо него мерах длины, часах и пр. те же сокращения, разности ходов и т. п., как и по теории Лоренца. Заметим при этом, что принципиально невозможен такой experimentum crucis [1], который решил бы спор в пользу той или другой теории.

В теории Ритца нет речи о сокращении твердых тел, изменениях в ходе часов и т. п. Именно потому, что она отбрасывает положение (заимствованное из эфирной теории) о постоянстве скорости света и заменяет его положением, соответствующим теории истечения Ньютона. При этом можно придумать такие experimento crucis, которые по-

---

[1] решающий опыт (*лат*).

могли бы решить вопрос или в пользу точки зрения Ритца, с одной стороны, или же в пользу взглядов Лоренца и Эйнштейна — с другой. Таким experimentum crucis мог бы прежде всего служить вышеупомянутый опыт с двумя источниками света.

Опыт этот не произведен, потому что он требует от измерительной техники такой точности, которой мы при современных наших приборах не располагаем [2].

Представим себе, однако, на мгновение, что не сегодня-завтра удастся преодолеть все трудности этого, в настоящий момент еще утопического, опыта. И положим, что — horribile dictu [3] — получился бы результат, согласный с теорией Ритца: эфирной гипотезе был бы нанесен тяжелый удар. Тогда мы охотно согласились бы, что свет бросается через пустоту, и тем самым мы встали бы вообще на точку зрения теории Ритца.

Заметьте, однако, что от нас требуют совсем иного, когда нам предлагают отрицать эфир вместе с Эйнштейном. Потому что тогда мы должны подписаться под следующими тремя положениями:

1. Источники света посылают нам световые сигналы через пустое пространство в виде самостоятельно существующих образов.

2. Скорость света должна получаться одна и та же, как при измерениях над светом от источника, на нас двигающегося, так и от источника, находящегося в покое.

3. Мы признаем, что сочетание этих обоих положений удовлетворяет нас.

Многоуважаемые слушатели! Я намеренно избегаю каких-либо определенных утверждений относительно того, какого выхода из создавшегося критического положения следует ждать. В мою задачу входило только нарисовать это

---

[2] Профессор де Ситтер (Лейденский университет) успел за это время доказать, что можно на основании астрономических наблюдений над двойными звездами с чрезвычайно большой точностью показать, что скорость, с которой до нас доносится свет от движущейся звезды, независима от скорости этой звезды — в противоречии с теорией (см.: ЖРФХО,1913, **45**, стр. 147.) Выполнение чрезвычайно затруднительных опытов, предложенных для решения выбора между теориями Ритца, с одной стороны, и Лоренца Эйнштейна, — с другой (см., например: *R. C. Tolman*. «Physical Review», 1912, **35**, p.137), представляется, таким образом, излишним.

[3] страшно сказать (*лат.*)

критическое положение и дать выражение моему убеждению, что пока у нас нет еще вполне удовлетворительного выхода из него.

Я не коснулся в настоящем изложении той сложной группы вопросов, которая, может быть, возьмет на себя в дальнейшей судьбе эфирной гипотезы наиболее видную роль,— я говорю о том запутанном клубке задач, что в настоящее время связывают с боевым названием *атомы света*. Этой группы вопросов я здесь не мог коснуться, так как они еще недостаточно выяснены. Я ограничился в этой речи лишь теми точками зрения, к которым приводят отрицательные следствия всех опытов над эфирным ветром. Для всестороннего освещения положения вещей мне было необходимо сопоставить детально разработанные теории Лоренца и Эйнштейна с набросками положений Ритца. Смерть лишила Ритца возможности развить свои идеи, и мы не знаем, как бы ему удалось преодолеть те затруднения, на которые мы наталкиваемся при первых же попытках восполнить пробелы в его работе.

Во всяком случае, следует обратить внимание на эту точку зрения, из которой исходил Ритц: он начал создавать теорию, избегая тех сокращений и иных изменений в движущихся измерительных приборах, которые так характерны для теорий Лоренца и Эйнштейна.

1913

О ТАК НАЗЫВАЕМОЙ «ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ»

(Совместно с Л. Д. Исаковым)

Во многих вопросах гидродинамики и оптики с пользой применяется, особенно за последнее время, понятие о «групповой скорости». Нельзя, однако, сказать, чтобы это понятие было хорошо выяснено и легко доступно для усвоения. В последующем мы изложим происхождение этого понятия и его применение к некоторым вопросам.

§ 1. Мы положим в основу нашего рассмотрения следующую кинематическую задачу. Пусть даны два колебательных процесса, немного отличающихся друг от друга по частоте и соответственно по скорости распространения, например две системы волн на поверхности воды. Аналитически эти два колебания, амплитуды которых мы для упрощения предположим равными, выразятся уравнениями

$$\left.\begin{aligned} y(x, t) &= \cos\left(t\,\frac{2\pi v}{\lambda} - x\,\frac{2\pi}{\lambda}\right), \\ y'(x, t) &= \cos\left(t\,\frac{2\pi v'}{\lambda'} - x\,\frac{2\pi}{\lambda'}\right). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

Рассмотрим составное колебание, получающееся от сложения этих двух колебаний:

$$z(x, t) = y(x, t) + y'(x, t).$$

Пользуясь формулой

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

мы можем представить выражение для $z(x, t)$ в следующем виде:

$$z(x, t) = 2\cos\left\{t\pi\Delta\left(\frac{v}{\lambda}\right) - x\pi\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}\cdot$$
$$\cdot\cos\left\{t\pi\left(\frac{v}{\lambda} + \frac{v'}{\lambda'}\right) - x\pi\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right)\right\}, \qquad \text{(II)}$$

где для сокращения положено

$$\frac{1}{2}\left(\frac{v'}{\lambda} - \frac{v}{\lambda}\right) = \frac{1}{2}\Delta\left(\frac{v}{\lambda}\right), \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{2}\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right). \qquad (2)$$

Таким образом, составное колебание выражается в виде произведения двух членов, причем коэффициенты при t и x в аргументе первого множителя, в силу наших основных предположений, малы по сравнению с соответствующими коэффициентами во втором. Это значит, что первый множитель гораздо медленнее изменяется при изменении t и x, чем второй.

Разберем теперь полученное выражение. Поставим себе сначала такой вопрос: какой вид представляет составное колебание z в определенный момент времени, например для $t = 0$? Примем при этом за $t = 0$ момент, когда в некоторой точке совпадают одинаково направленные максимумы обеих составляющих колебаний. Идя от этой точки в ту или другую сторону по оси x, мы вследствие различия между λ' и λ достигнем точки, где совпадают противоположно направленные максимумы и, следовательно, составное колебание равно 0, затем до места нового совпадения соответствующих максимумов и т. д. Следовательно, мы получим правильное чередование мест большой амплитуды составного колебания, разделенных промежутками, соответствующими малым амплитудам, как это видно на рис. 1. Тот же самый результат

Рис. 1

можно получить и из рассмотрения формулы (II), в которой второй множитель представляет собой обыкновенную синусоиду, характеризующую форму колебания, тогда как первый множитель, гораздо медленнее меняющийся с изменением x, мы можем рассматривать как некоторую меру для амплитуд этого колебания.

Рассмотрим теперь ту же картину с другой точки зрения, останавливая на этот раз свое внимание на колебании в одном определенном месте, например в точке $x = 0$, для различных моментов времени. Путем соображений, совершенно аналогичных приведенным выше, мы придем к заключению, что в данной точке правильно чередуются эпохи большого возбуждения с эпохами сравнительного покоя — общеизвестное явление *биений*. Ясно, что изменение колебательного процесса во времени для этого случая может быть символически представлено тем же рис. 1, который для нашего первого случая изображал распределение явления в пространстве. И здесь тот же результат даст рассмотрение формулы (II), первый множитель которой представляет собой некоторую меру для «степени возбуждения».

Если мы будем рассматривать явление для некоторой другой (определенной) точки, для которой $x > 0$, то легко видеть, что первый множитель в формуле (II) будет пробегать с течением времени те же значения, что и для точки $x = 0$, но лишь несколько позже; вводя понятие о «скорости передвижения мест большого возбуждения», мы получаем для нее величину

$$u=\frac{\Delta\left(\frac{v}{\lambda}\right)}{\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)}. \qquad \text{(III)}$$

Чтобы уяснить себе полную картину явления в пространстве и времени, станем на точку зрения наблюдателя, движущегося вдоль оси x со скоростью u. Преобразуя для этого формулу (II) при помощи подстановки

$$x'=x-ut,$$

мы приведем ее к виду

$$z=2\cos\pi\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)x'\cdot\cos(\alpha t-\beta x'). \qquad \text{(II}'\text{)}$$

Здесь второй множитель представляет синусоидальные волны, перемещающиеся относительно новой системы координат со скоростью α/β. Первый же множитель уменьшает в каждой точке x' ординату пробегающей через эту точку волны в определенном отношении, зависящем только от x', но не от t.

Итак, картина явления, рассматриваемая в целом, представляется в следующем виде: общие очертания картины колебания, определяемые первым множителем формулы (II), перемещаются со скоростью u, тогда как более детальный рисунок, вычерчиваемый отдельными волнами (второй множитель), движется с относительной скоростью α/β [1], как бы протискиваясь с этой относительной скоростью через канал переменного сечения, контуры которого определяют собой общую картину.

Нам остается только вывести окончательную формулу, связывающую скорость u со скоростями v и $v'=v+\Delta v$ отдельных волн. Подставляя в уравнение (III) вместо $\Delta\,(v/\lambda)$ и $\Delta\,(1/\lambda)$ их выражения (1) и (2), мы получаем

$$u=\frac{\frac{v'}{\lambda'}-\frac{v}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda'}-\frac{1}{\lambda}}=\frac{v'\lambda-v\lambda'}{\lambda-\lambda'}=\frac{\lambda\,(v+\Delta v)-v\,(\lambda+\Delta\lambda)}{\Delta\lambda}$$

[1] Легко понять без вычисления, что эта скорость достаточно точно равна $v-u$.

или окончательно

$$u = v - \lambda \frac{\Delta v}{\Delta \lambda}. \qquad \text{(IV)}$$

Если, следовательно, нам известна зависимость v от λ, то уравнение (IV) дает нам для любой комбинации двух волн скорости u. Когда $\Delta\lambda$ очень мало и дисперсия в рассматриваемой области длин волн не чрезмерно велика, мы можем с достаточной точностью вместо u взять ее предельное значение

$$U = \lim u_{\Delta\lambda=0} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \qquad \text{(V)}$$

Разбор свойств скорости U, вытекающих из формулы (V), очень облегчается, если воспользоваться следующим графическим построением, которое было предложено Лэмбом. Пусть нам задана кривая, изображающая функцию $v(\lambda)$ (рис. 2). В точке C этой кривой, соответствующей данной

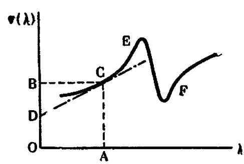


Рис. 2

абсциссе $OA = \lambda$, проведем к ней касательную, которую продолжим до пересечения с осью ординат. Тогда отрезок $OD = OB - BD = OB - BC \cdot \operatorname{tg} k = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$ изображает собой искомую скорость $U(\lambda)$.

Применяя это построение к различным случаям, мы можем отметить, между прочим, следующие особенности.

Если отсутствует дисперсия ($dv/d\lambda = 0$), то $U = v$; скорость перемещения областей наибольшего возбуждения в этом случае (и *только* в этом) совпадает со скоростью отдельных волн; это понятно и без построения, так как в случае отсутствия дисперсии и первая и вторая составляющие колебания распространяются, не смещаясь по отношению друг к другу.

Если зависимость между v и λ линейная, то U не зависит от λ; в частности, если $v = b\lambda$, то $U = 0$. Области наибольшего возбуждения остаются на одном месте в пространстве.

При очень крутом подъеме кривой $v(\lambda)$ возможны и отрицательные значения для U, т. е. места наибольшего возбуждения перемещаются в направлении, обратном перемещению отдельных волн; такой случай имеет место, например, по соседству с областями аномальной дисперсии (ср. точки E и F на рис. 2).

Все описанные явления довольно легко воспроизвести, если взять две обыкновенные гребенки, подобрав их так, чтобы «длины волн», т. е. расстояния между зубьями, у обеих гребенок были не вполне одинаковы. Накладывая гребенки друг на друга, мы увидим на просвет ряд правильно расположенных темных полос (на местах, где зубцы одной гребенки приходятся против просветов другой), разделенных светлыми промежутками (где соответственные зубцы совпадают). Светлые и темные полосы будут как раз соответствовать «областям наибольшего возбуждения» и «областям наименьшего возбуждения» в разобранном нами примере. Передвигая одну гребенку относительно другой, мы можем проследить все те особенности, которые были нами подробно разобраны выше.

§ 2. Разобранный нами кинематический вопрос впервые привлек внимание исследователей в связи с некоторыми гидродинамическими наблюдениями. Скорость распространения волн по поверхности воды зависит от длины волны. С другой стороны, нетрудно подметить, что выделенная каким бы то ни было образом «группа» волн одинаковой длины перемещается с *совершенно иной* (именно с вдвое меньшей) *скоростью*, чем отдельная волна той же длины. Мы видим, что в этом отношении существует известное сходство между этими выделенными группами и теми «областями наибольшего возбуждения», которые мы рассматривали выше.

§ 3. Несколько позже соображения того же рода получили интерес и для физики, именно в связи с вопросом о скорости света в среде, обладающей дисперсией. Мы рассмотрим этот вопрос сначала по поводу одного идеального опыта, тесно связанного с известным методом Рёмера для определения скорости света. Мы идеализируем условия метода Рёмера следующим образом: пусть междупланетное пространство наполнено неподвижной средой, которая обладает заметной дисперсией; пусть, далее, спутники Юпитера представляют собой точки (следовательно, исчезают в тени Юпитера и появляются из нее мгновенно) и испускают строго монохроматический свет, длина волны которого есть λ. При этих условиях изменение светового возбуждения во времени представится для области возле самого Юпитера кривой рис. 3. Какого же рода «скорость света» определим мы при этих условиях по методу Рёмера? Очевидно, во всяком случае, что это не будет волновая скорость $v(\lambda)$.

Рис. 3

Ведь мы не имеем никаких средств для того, чтобы отметить *отдельную* световую волну и непосредственно определить скорость ее перемещения, как мы это сделали бы для волн на воде. Мы можем, однако, нарисовать себе такую общую картину передачи возбуждения. Распространяясь от Юпитера до нас, световое возбуждение испытывает весьма сложное изменение формы; в частности, можно ожидать, что, доходя до Земли, световое возбуждение уже не сразу появляется и исчезает, но *постепенно* нарастает до заметной величины, остается неизменным некоторое время и затем так же постепенно падает ниже порога восприятия. Мы определяем, очевидно, моменты появления и исчезновения *заметного* светового возбуждения и запаздывание этих моментов при увеличении расстояния между Юпитером и Землей. Значит, в нашем идеальном опыте мы будем измерять скорость перемещения областей заметного возбуждения.

Значительно сложнее условия при измерении скорости света в диспергирующей среде по методу Физо. Здесь мы наблюдаем уже не отдельные появления и исчезновения света, а некоторый средний эффект многих таких появлений и исчезновений. Световое возбуждение, которое становится прерывистым вследствие движения зубчатого колеса, должно иметь в непосредственном соседстве с колесом и в случае строго монохроматического источника света примерно такой характер, какой представляет кривая рис. 4. При своем движении к зеркалу и обратно возбуждение опять-таки подвергается очень сложному изменению формы. Мы измеряем быстроту, с какой должны становиться один на место другого зубцы и свободные промежутки, чтобы дать наибольшую яркость или наиболее полную темноту. И по этому методу мы получаем опять-таки во всяком случае не $v(\lambda)$. Полагают, что в этом случае, как и в предыдущем, мы измеряем скорость перемещения областей заметного возбуждения.

Итак, и метод Рёмера, и метод Физо оперируют с отрезками системы волн; достаточно ясно, что с подобными же отрезками мы имеем дело и в методе Фуко, основанном на

Рис. 4

применении вращающегося зеркала. Относительно этих трех методов все достаточно согласны, что они *не* дают v. Но один метод для абсолютного определения скорости света принято, со слов Рэлея [2], ставить в исключительное положение. Это — метод аберрации. Рэлей, касаясь метода аберрации в связи с вопросом о дисперсии в космическом пространстве [3], говорит буквально следующее:

«Метод аберрации... не связан с наблюдением распространения какой-либо особенности, приданной группе волн, и поэтому не имеет никакого отношения к U. Если мы примем обычную теорию аберрации, то в результате сравнения коэффициента, найденного из наблюдения, с солнечным параллаксом мы получим v — волновую скорость».

§ 4. Однако если мы внимательно рассмотрим схематизированный метод аберрации, то увидим, что дело обстоит совсем не так, как это представлено в рассуждении Рэлея [4]. Представим себе (рис. 5) две параллельные бесконечные плоскости, с отверстием в каждой, движущиеся вместе по направлению своей длины с некоторой постоянной скоростью. Пусть на первую плоскость падают перпендикулярно световые лучи. Мы определяем угол, который должна составлять линия, соединяющая центры обоих отверстий,

---

[2] *Rayleigh*. Scientific papers, v. 1. Cambridge, 1899, p. 537.

[3] Ср.: *О. Соколов*. «Вопросы физики», 1909, 3, стр. 181.

[4] Нижеследующие соображения впервые изложены в докладе П. С. Эренфеста на заседании физического отделения Русского физико-химического общества 14 октября 1908 г.

с направлением движения, чтобы наблюдатель, стоящий сзади отверстия во второй плоскости, увидел наиболее яркий свет. При такой постановке опыта совершенно ясно, что наблюдаемый угол определяется как раз скоростью движения тех *отрезков лучей*, которые успевают проходить через отверстие в первой плоскости при ее движении. Значит, если бы в рассматриваемой среде (в данном случае — в эфире) существовала дисперсия, то мы и по этому методу не получили бы v.

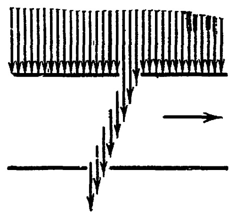


Рис. 5

Попутно следует заметить, что метод аберрации в сущности весьма близок к методу Физо. Возьмем для метода Физо такое расположение приборов: два диска, каждый с отверстием у края, насажены на общую ось длиной несколько километров и могут, таким образом, вращаться вместе. Мы можем теперь поступать двояко. Либо мы поставим оба отверстия друг против друга и будем определять ту скорость, при которой наблюдатель сзади второго диска увидит наиболее яркой светящуюся точку, помещенную перед первым диском; это будет метод Физо почти в чистом виде. Но можно также придать скорости вращения заранее некоторую определенную величину и затем менять «фазу» второго отверстия относительно первого до тех пор, пока темнота не сменится светом; такой метод принципиально не отличается от метода аберрации. Вместе с тем совершенно ясно, что по обоим методам мы определяем совершенно одну и ту же «скорость света».

§ 5. Мы пришли к выводу, что ни один из методов абсолютного определения скорости света не дает волновой скорости v. Но мы не могли дать ответа на вопрос, что же определяется этими методами. Решение этого вопроса стоит в тесной связи с весьма сложной задачей о том, как распространяется импульс определенной формы в диспергирующей среде. Довольно обширная литература по этому предмету [5] дает решения лишь для немногих случаев и притом лишь для начального промежутка времени и для мест, близких к области первоначального возмущения [6]. Между тем для нашего оптического вопроса главную роль играют как раз явления, совершающиеся в значительном отдалении от этой области. Вполне изучен лишь случай среды с линейной дисперсией ($n = a\lambda + b$), например в работах Шустера [7]. В этом случае мы имеем то очень важное обстоятельство, что всегда форма импульса периодически восстановляется, и, таким образом, действительно есть нечто, о «скорости распространения» чего можно в известном смысле говорить.

Притом эта скорость оказывается точно совпадающей с той «групповой скоростью» U, для которой мы получили выше формулу (V).

Для некоторых случаев удалось по крайней мере определить скорость волнового фронта, т. е. места, где *точно* начинается возбуждение. Но основной для нашего случая вопрос об определении мест, до которых успевает в данный момент дойти *заметное* возбуждение, до сих пор не удалось решить вследствие значительной трудности вычислений.

Ввиду такого положения дела решались прямо отождествлять всякий отрезок системы волн с той простейшей «группой», о которой мы говорили вначале; считали, таким образом, что всякий такой отрезок перемещается со скоростью U. Конечно, между понятиями «отрезок» и «группа» есть существенная разница: «группа» получается от сложения двух колебаний приблизительно одинакового периода, тогда как «отрезок» можно составить лишь из бесчисленного множества колебаний (представление произвольного возбуждения посредством интеграла Фурье).

Что касается практического применения этого упрощения, то его можно считать в некоторой мере оправданным опытами Майкельсона. Когда Юнг и Форбс в 1881 г. нашли, будто бы синие лучи распространяются в свободном эфире

---

[5] Ср.: *Rayleigh*. «Scientific Papers», v. 1, 1899, p. 322; *Voigt*. «Ann. d. Phys», 1899, **68**, p. 598; 1901, **4**, p. 203, *Lamb*. «Proc. Lond. Math. Soc.» (Sect. II), 1904, **1**, p. 473; *Laue*. «Ann. d. Phys», 1905, **18**, p. 523; *Schuster*. Boltzmann Festschrift, p. 596. См. также: *Wood*. «Phys. Optics», p. 16; *Schuster*. Theory of Optics, p. 313.

[6] Ср.: *Lamb*. Hydrodynamics, «Surface waves».

[7] См.: *Кордыш*. «Вопросы физики», 1908, **2**, стр. 319.

на 18% быстрее, чем красные, а Рэлей (l. c.[8]) воспользовался этим, чтобы поднять принципиальный вопрос — что же, собственно, определяется при абсолютном измерении скорости света в диспергирующей среде, то Майкельсон произвел измерение скорости света для красных и голубых лучей в сернистом углероде: результаты — в пределах возможной точности — оказались соответствующими формуле «групповой скорости».

Гипотетическое отождествление скорости отрезка с групповой скоростью часто оправдывают еще утверждением, что на поверхности воды произвольное возмущение действительно распространяется со скоростью U; однако точных измерений для проверки этого утверждения, по-видимому, не было сделано.

С теоретической стороны против такого применения групповой скорости для всякого случая дисперсии говорит то обстоятельство, что удалось найти такие случаи, в которых групповая скорость больше, чем скорость фронта [9]. Надо сказать, однако, что в этих случаях рассматриваются довольно необыкновенные условия (в двух — сильное поглощение, в третьем — эфир в неустойчивом равновесии), так что их нельзя еще считать окончательно говорящими против обычного применения понятия «групповой скорости» к более нормальным случаям.

1910

ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ УГОЛ АБЕРРАЦИИ МЕРОЙ ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ СВЕТА В СЛУЧАЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДИСПЕРСИИ ЭФИРА?

В учебниках оптики [1] иногда затрагивается вопрос о том, обладает ли свободный эфир заметной дисперсией. При этом обычно рассуждают примерно так: при измерении скорости света методом Рёмера имеют дело с конечными цугами волн, следовательно, этот метод дает *групповую скорость* U; наоборот, измерение *угла аберрации* дает непосредственно *фазовую скорость* V. Поскольку результаты, по-

[8] Loco citato (*лат.*) — в упомянутом (указанном) месте.
[9] *W. Voigt*, l. c.; *Laue*, l. c.; *Ehrenfest*. «Ann. d. Phys.», 1910.
[10] *R. Wood*, p. 18; *P. Drude*, p. 116; *O. D. Chwolson*, v. II, p. 246.

лученные обоими методами, совпадают, можно прийти к выводу, что при распространении света в межпланетном пространстве дисперсия отсутствует.

Предположение о том, что угол аберрации измеряет фазовую скорость, было, по-видимому, впервые выдвинуто Рэлеем [2]. В указанном месте Рэлей отмечает (в связи с опытами Юнга и Форбса, 1881), что при применении методов Физо, Фуко и Рёмера имеют дело с обрезанными цугами

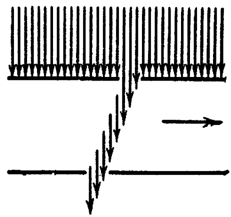


Рис. 1

волн, а поэтому получают групповую скорость U. Относительно измерения угла аберрации он говорит: «Последнее не зависит от наблюдения распространения некоторой особенности, обусловленной цугом волн, а значит, не имеет никакого отношения к U. Если мы считаем общеупотребительную теорию аберрации правильной, то результат сравнения коэффициента, найденного наблюдением, и солнечного параллакса дает V, т. е. фазовую скорость».

С помощью некоторой схематизации аберрационных измерений я хотел бы показать, что и они основаны «на наблюдении распространения некоторой особенности, обусловленной цугом волн». На рис. 1 показаны две параллельные бесконечные пластинки, каждая из которых имеет одно отверстие. Обе пластинки движутся с одинаковой постоянной скоростью направо в направлении, указанном стрелкой. На верхнюю плоскость падают перпендикулярно монохроматические световые лучи. Определяем угол, на который должно быть смещено нижнее отверстие относительно верхнего, для того чтобы до наблюдателя, находящегося под нижним отверстием и движущегося вместе с ним, доходило возможно больше света. Когда применяют понятие «световой луч», то этим уже признают безоговорочно, что указан-

[2] *Lord Rayleigh*. Scientific Papers», 1881, v. I, p. 537.

ный угол определяется скоростью, с которой *обрезанная часть световых лучей* распространяется вниз. Следовательно, если эфир обладает дисперсией, то и *измерение угла аберрации не дает фазовую скорость V*.

Если попытаться избежать применения сомнительного понятия «световой луч» и оперировать волновыми плоскостями, то получим следующую картину: верхняя пластинка вырезает — если в соответствии со смыслом приводимых здесь рассуждений пренебречь дифракцией — из каждой волновой плоскости кружок, причем эти кружки, смещенные каждый относительно предыдущего, перемещаются вниз. Если следить только за средней частью такого кружка, то она, конечно, перемещается с *фазовой скоростью*, и может показаться, что именно *эта* скорость определяет, в смысле Рэлея, на какой угол должно запаздывать нижнее отверстие, чтобы волновые кружки по возможности полностью проходили через него. Но нельзя забывать, что по мере движения волнового кружка вниз его передний (в направлении движения Земли) и задний края благодаря дисперсии постепенно изменяются так, что это трудно не заметить; такое изменение влияет на оптимальное положение нижнего отверстия.

Приведенная ниже схематизация метода зубчатого колеса Физо должна еще показать, что измерения скорости света с помощью аберрации и методом зубчатого колеса Физо для рассматриваемого здесь вопроса принципиально тождественны. Два параллельных круглых диска, перфорированных по краям, связаны длинной, быстро вращающейся осью. На правый диск перпендикулярно к нему падают плоские световые волны. При заданной постоянной угловой скорости будем менять «фазу» левого диска относительно правого до тех пор, пока левый диск не станет пропускать максимум света. (Позади левого диска выпуклая линза собирает свет в фокусе независимо от положения самого диска.) Здесь мы сразу видим, что этот метод в своей основе совпадает с аберрационной схемой, изображенной на рис. 1.

Какую же скорость измеряют всеми этими методами? После состоявшейся между несколькими английскими физиками дискуссии, в которой особое место занимал прежде всего метод вращающегося зеркала Фуко, пришли к общему мнению, что все методы (кроме аберрационного) дают «групповую скорость» U, т. е. ту скорость, с которой перемещается область наибольшего возбуждения в случае, когда рассматривается наложение двух бесконечных цугов плоских синусоидальных волн с очень близкими длинами λ и $\lambda + \Delta\lambda$. При этом, как известно, U связана с фазовой скоростью V таким образом:

$$U = V - \lambda \frac{\Delta V}{\Delta \lambda}. \tag{1}$$

В пользу этого предположения можно привести в настоящее время лишь следующие доводы.

1. Образованные цуги волн, с которыми оперируют все эти методы, можно считать созданными суперпозицией бесконечного числа бесконечно протяженных синусоидальных цугов волн всевозможных длин с подходяще выбранными фазами и амплитудами (представление произвольного прерывистого возбуждения интегралом Фурье). Суперпозиция по меньшей мере двух волновых цугов с очень близкими длинами волн λ, $\lambda + \Delta\lambda$, возможно, даст представление о том, что происходит в более сложном случае.

2. Фактически наблюдаемая скорость распространения произвольно ограниченного возмущения на поверхности воды хорошо совпадает со скоростью U.

3. Абсолютное измерение скорости света в сероуглероде (опыт Майкельсона с вращающимся зеркалом) может быть приведено в хорошее согласие с измерениями показателя преломления, как раз если допустить, что именно U является скоростью распространения [3].

4. Для среды, дисперсия которой от $\lambda = 0$ до $\lambda = \infty$ может быть представлена уравнением

$$V(\lambda) = a + b\lambda, \tag{2}$$

Шустер [4] сумел строго доказать, что любое произвольно ограниченное возмущение распространяется в ней со скоростью

$$U = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda} = a. \tag{3}$$

Во всех других случаях, кроме рассмотренного Шустером, строгое изложение вопроса о распространении ограниченного возмущения сталкивается пока, как только пытаются перейти к установлению количественных соотношений,

---

[3] Ср., например: *R. Wood*. Цит. соч.
[4] *A. Schuster*. Boltzmann Festschrift, p. 569.

с непреодолимыми трудностями. В некоторых случаях (волны на воде) все-таки удается анализировать положение в *ближайшей окрестности* области первоначального возмущения в первые моменты; но для исследуемого вопроса важно поведение именно на *большом* расстоянии. До тех пор, пока не удается преодолеть эти трудности, мы волей-неволей должны придерживаться предположения, что U вообще представляет скорость распространения ограниченных возмущений.

Но вопрос о границах, в которых это предположение справедливо, нуждается в более детальном исследовании, как свидетельствуют случаи, когда «групповая скорость» U больше, чем скорость распространения волнового фронта, т. е. той поверхности, впереди которой среда в заданный момент еще точно покоится.

Такой случай представляет, как показал В. Фойгт [5], телеграфное уравнение

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - w\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \tag{4}$$

Сюда же относится, как показал М. Лауэ [6], случай, изучаемый всеми теориями дисперсии, когда в среде распространяются волны, лежащие в области селективного поглощения.

При более детальном анализе этого случая Лауэ обращает особенное внимание на то обстоятельство, что элементарные волны, а следовательно, и так называемые группы распространяются при этом с очень сильным поглощением, отчего понятие групповой скорости вообще лишается физического смысла.

Поэтому я хотел бы кратко упомянуть об особенностях, проявляющихся в следующем случае. Пусть задана струна, бесконечно малые продольные движения которой удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta^2 u. \tag{5}$$

Это — обычная струна, но каждая ее точка выводится из положения равновесия еще некоторой силой $\beta^2 u$.

1. Покоящаяся недеформированная струна находится в положении равновесия (неустойчивого).

---

[5] *W. Voigt.* «Ann. d. Phys», 1899, 68, S. 598; 1901, 4, S. 203.
[6] *M. Laue.* «Ann. d. Phys.», 1905, 18, S. 523, § 6.

2. Первоначально ограниченное возмущение распространяется (все нарастая) со скоростью фронта α по первоначально покоящейся струне [7].

3. Бесконечно длинные синусоидальные цуги волн перемещаются без изменения формы с фазовой скоростью

$$V(\lambda) = \alpha\left(1 - \lambda^2 \frac{\beta^2}{4\pi^2\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

4. «Группы», которые возникают при суперпозиции двух бесконечно длинных синусоидальных цугов волн с длинами волн λ и $\lambda + \Delta\lambda$, перемещаются с групповой скоростью

$$U(\lambda) = \alpha\left(1 - \lambda^2 \frac{\beta^2}{4\pi^2\alpha^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда видно, что для всех значений λ, для которых V и U действительны, групповая скорость U больше скорости фронта α.

Петербург, октябрь 1910 г.

РАВНОМЕРНОЕ ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В случае не абсолютно твердых тел попытка распространения кинематики равномерного прямолинейного движения на любые виды движения приводит, на основе идей Минковского, к следующему положению.

Если тело ведет себя как не абсолютно твердое, то оно при любом движении деформируется так, что каждый из его бесконечно малых элементов испытывает с точки зрения неподвижного наблюдателя в любой момент точно такое же лоренцево сокращение (по отношению к состоянию покоя), которое соответствует мгновенной скорости центра тяжести.

[7] Этот результат может быть получен интегрированием уравнения (5) методом Римана при заданных начальных условиях (см.: *Riemann — Weber*, Bd. II, § 121; *W. Voigt*. Цит. соч.).

Когда я недавно захотел наглядно представить себе, к чему приводит это положение, то столкнулся со следствиями, которые, казалось, указывали на то, что отмеченное выше положение приводит к противоречию даже в случае некоторых очень простых видов движения.

М. Борном в появившейся недавно публикации[1] дано определение не абсолютно твердого тела, пригодное для всех видов движения. Это определение Борн связывал — в соответствии с основной идеей теории относительности — с системой координат не неподвижного наблюдателя, а (по Минковскому) с так называемым континуумом «бесконечно малых наблюдателей», которые перемещаются вместе с элементами неравномерно движущегося тела: каждому из них в соответствующей системе свой бесконечно малый элемент будет постоянно представляться недеформированным.

Оба определения не абсолютной твердости являются — если я правильно понял — эквивалентными. Поэтому достаточно указать на простейший вид движения, для которого данное первоначальное определение уже приводит к противоречию, а именно на равномерное вращение вокруг неподвижной оси.

В самом деле, пусть имеется не абсолютно твердый цилиндр C с радиусом R и высотой H. Пусть он постепенно приводится во вращение вокруг своей оси, происходящее затем с постоянной скоростью. Назовем R' радиус, который характеризует этот цилиндр с точки зрения неподвижного наблюдателя. Тогда величина R' должна удовлетворять двум противоречащим друг другу требованиям:

а) длина окружности вращающегося цилиндра по сравнению с состоянием покоя должна сократиться:

$$2\pi R' < 2\pi R,$$

поскольку каждый элемент такой окружности движется в направлении касательной с мгновенной скоростью $R'\omega$;

б) мгновенная скорость какого-либо элемента радиуса перпендикулярна его направлению; это значит, что элементы радиуса не подвергаются никакому сокращению по сравнению с состоянием покоя.

---

[1] «Теория твердого электрона в кинематике принципа «относительности». «Ann. d. Physik», 1909, 1, S. 30; см. также в этом журнале: 1909, 10, S. 814.

Отсюда следует, что

$$R' = R.$$

Замечание. Если считать, что деформация каждого элемента радиуса определяется не только мгновенной скоростью центра тяжести, но также и мгновенной угловой скоростью этого элемента, то необходимо, чтобы функция, описывающая деформацию, содержала кроме скорости света c еще одну универсальную размерную константу, или же в нее должно входить ускорение центра тяжести элемента.

II

ТЕОРИЯ КВАНТОВ И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

К ПЛАНКОВСКОЙ ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

В связи с выходом в свет «Лекций по теории теплового излучения» профессора Планка мне хотелось бы позволить себе сделать несколько замечаний, касающихся специально планковской теории излучения. Замечания эти содержатся в моей работе, которая должна появиться несколько позднее; там же будет дано более строгое обоснование высказываемых здесь положений.

§ 1. План своей теории г. Планк развивает в § 104 названной книги (стр. 100). Закон Кирхгофа об универсальности излучения плоскости может быть распространен на некоторые мысленные, абстрактно представляемые системы. В качестве такой системы г. Планк выбирает следующую модель. Один или несколько резонаторов окружены зеркальной оболочкой. Свойства резонаторов полностью отражаются линейным однородным уравнением, описывающим их колебания. Затухание возникает лишь за счет излучения, но не за счет сил трения. «Если для некоторой произвольно выбранной системы такого специального вида, испускающей и поглощающей излучение, можно указать состояние равновесия с излучением в окружающем вакууме, характеризующееся *абсолютной стабильностью* [1], то это состояние не может быть не чем иным, как только состоянием черного излучения». При этом г. Планк производит расчеты, показывающие, как наличие указанных резонаторов изменяет излучение, первоначально содержащееся в модели. Несмотря на линейность всех основных уравнений, входящих в рассмотрение, эти расчеты сопряжены с очень большими трудностями, и необходимость вникать в них препятствует получению общего представления о методе при первом чтении. Поэтому я позволю себе кратко обрисовать, как можно полученный г. Планком результат, по крайней

[1] Я счел возможным выделить эти слова, имея в виду связанные с ними дальнейшие обсуждения (ср. § 2).

мере в наиболее существенной его части, сделать более доступным пониманию с помощью способа, примыкающего к методам Рэлея и Джинса. Результат может быть сформулирован следующим образом (см. заключительный параграф книги):

1. Спектральный состав излучения, первоначально введенного в модель, не претерпевает изменений при наличии произвольного количества планковских резонаторов, а *сохраняется неопределенно долго.*

2. Поглощение и испускание излучения осцилляторами приводит к тому, что в конце концов возникает некоторое стационарное состояние, в котором для всех лучей определенной длины волны распределение интенсивностей и поляризаций по величинам и направлениям становится однородным.

Коротко говоря, в модели Планка излучение хотя и может с течением времени становиться все более неупорядоченным, но при этом оно не приближается к *черному* излучению. Для последующего обсуждения наиболее подходит такая формулировка:

Резонаторы внутри полости с зеркальными стенками приводят к тому же результату, что и в случае пустой полости, стенки которой в отдельных местах отражают свет диффузно.

Для начала можно принять без доказательства утверждение, что планковские резонаторы, рассеивая излучение, влияют на него точно так же, как диффузное отражение (с отличием только, может быть, в скорости установления равновесия) [2]. Однако поскольку здесь речь идет о том, становится ли излучение черным, особое значение приобретает первая часть полученного Планком результата. Мы хотим воспользоваться теми самыми выводами, которые были сформулированы г. Планком для других целей и состоят в следующем. Пусть зеркальная или диффузно отражающая оболочка окружает лишь чистый эфир. Тогда любой связанный с излучением процесс внутри этой оболочки является просто некоторой суперпозицией собственных колебаний полости.

---

[2] При этом точно так же, как и в кинетической теории газов, нужно иметь в виду известные возражения Лошмидта и Цермело относительно допустимости описания необратимых процессов на основе обратимой модели. Эта сторона вопроса будет подробно обсуждена в другом месте; здесь мы сознательно оставим ее без внимания, чтобы не расходиться в этом пункте с представлением Планка.

Амплитуды (и фазы) этих колебаний, как известно, остаются постоянными до тех пор, пока система остается замкнутой и предоставленной самой себе. «При этом не может быть речи о какой-либо тенденции к выравниванию энергий, приходящихся на отдельные парциальные колебания» (l.c., стр. 175). Эти выводы без затруднений переносятся на планковскую модель. А именно, если осцилляторы определяются исключительно заданием однородного линейного дифференциального уравнения [3], которое для них принимает г. Планк, то они по существу эквивалентны маленьким стержням из идеального проводника или соответствующего диэлектрика. Но в таком случае всякое состояние движения планковской модели опять является суперпозицией собственных колебаний этой сложной системы. Таким образом, и здесь не может быть речи о тенденции к выравниванию энергий, приходящихся на отдельные парциальные колебания [4]. Этот найденный г. Планком результат тем более важен, что он резко противоречит наглядному представлению. Действительно, планковский резонатор вследствие затухания, связанного с излучением, реагирует на колебания всех периодов, достаточно близких к периоду его собственных колебаний. Поэтому было бы естественно ожидать, что набор резонаторов, собственные частоты которых близко примыкают друг к другу и вместе охватывают весь спектр, должен постепенно превратить первоначально монохроматическое излучение в излучение непрерывного спектра [5].

---

[3] Дело обстоит иначе, если существенную роль играют молекулярные столкновения или если дифференциальные уравнения не являются линейными и однородными. См.: *П. Эренфест.* О физических предпосылках планковской теории необратимых процессов. «Wien. Ber.», 1905, **114**, S. 1301 (§ 9), а также: *М. Планк.* Лекции... (заключительный параграф и замечания к § 109).

[4] Здесь мы отождествляем «спектральное распределение» с «распределением энергии по отдельным парциальным колебаниям», что соответствует утверждениям, высказанным г. Планком в § 164—166. Что касается утверждений § 180, то в настоящий момент мы воздержимся от подробного обсуждения.

[5] Заметим, что во введении к первой работе, с которой г. Планк девять лет назад начал публикацию своей теории («Berl. Akademie», 1897, **4**, S. 11, § 7), имеется следующий абзац: «Резонатор изменяет цвет введенного в полость излучения, если под цветом понимать распределение полной интенсивности волны по различным содержащимся в ней простым периодическим колебаниям, и нужно ожидать, что и здесь его действие будет состоять в определенном выравнивании интенсивности волн различных цветов,

§ 2. Если каждому состоянию движения рассматриваемой модели приписать определенную энтропию, то при подходящем выборе выражения для энтропии можно сформулировать результат Планка следующим образом: энтропия системы возрастает до некоторой величины, которую она не может превзойти, пока система остается замкнутой и предоставленной самой себе. Но значение этой граничной величины зависит не только от полной энергии, но и от спектрального состава первоначально заключенного в модели излучения. Следующая аналогия из кинетической теории газов помогает лучше понять этот вопрос. Представим себе своеобразный идеальный газ, молекулы которого могут беспрепятственно проникать одна сквозь другую; столкновения они испытывают лишь на стенках или на «рассеивателях», которым мы сейчас дадим определение. Под «рассеивателями» подразумеваются упругие шарики молекулярных размеров, беспорядочно распределенные по объему, причем центры их считаются жестко зафиксированными. Таким образом, при каждом столкновении молекулы газа сохраняют величину скорости (энергии), направление же их движения меняется. Для такой модели можно провести полную аналогию с H-теоремой. Если мы на минуту примем H-теорему без всяких оговорок, то она означает, что первоначальная неравномерность в распределении плотности и скоростей по направлениям с течением времени выравнивается. Разумеется, о какой-либо тенденции к выравниванию энергий, приходящихся на каждую молекулу, не может быть речи. Поэтому величина энтропии H возрастает до некоторого значения, соответствующего частичному уменьшению первоначального порядка, и пока система остается замкнутой, это значение не может быть превзойдено. В обеих моделях энтропия не достигает своего «абсолютного» максимума, возможного при заданной полной энергии. Этот максимум был бы достижим только в том случае, если бы в первой модели излучение стремилось стать черным, а во второй модели распределение скоростей прибли-

---

откуда проистекают важные выводы о распределении энергии в стационарном состоянии излучения, заключенного в рассматриваемом объеме». Полностью удовлетворительное разрешение этого интересного парадокса можно получить лишь при подробном обсуждении обоих определений термина «спектральное распределение» (см. предыдущее примечание).

жалось бы к максвелловскому, что невозможно [6]. Таким образом, излучение в замкнутой модели, вообще говоря, не может перейти в то состояние, «которое отличается абсолютной стабильностью». В планковской модели набор бесконечного числа нечерных излучений оказывается полностью стабильным. Это особенно просто можно показать с помощью метода размерностей [7]. В связи с этим, когда г. Планк в нынешнем изложении основ своей теории резонаторов явным образом принимает требование «абсолютной стабильности», возникает вопрос: чем вызывается эта абсолютная стабильность или хотя бы как она себя обнаруживает?

§ 3. Мы обязаны г. Планку созданием другой теории теплового излучения, которая, если я правильно понимаю, физически не связана с резонаторной теорией и уже сейчас дала возможность получить необычайно красивый результат, а именно с очень высокой точностью найти постоянную Больцмана k ($^3/_2kT$ — средняя кинетическая энергия молекулы при температуре T). Для дальнейшего условимся называть эту теорию «теорией комплексий». Мы позволим себе воспользоваться представлением, которое более соответствует методам Рэлея и Джинса [8]. Амплитуды и фазы собственных колебаний полости с зеркальными стенками можно рассматривать в каком-то смысле как физически не связанные друг с другом, точно так же, как скорости молекул в газе в отсутствие взаимодействия. Это замечание дает повод перенести на такую систему кинетическое определение энтропии, данное Больцманом для случая смеси газов, не находящейся в равновесии. Множеству молекул одного сорта соответствует множество колебаний полости, частоты ко-

---

[6] Вместо того чтобы вводить в рассмотрение рассеиватели, можно просто считать стенки шероховатыми, аналогично случаю диффузного отражения. Но и при отражении молекул (или соответственно излучения) от гладких стенок — если только они имеют сколько-нибудь неправильную форму — конечный результат, вообще говоря, будет тем же самым, только установится он, очевидно, за более длительный промежуток времени. То, что в подобных случаях больцмановская величина H вообще может меняться (вопреки утверждениям § 18, т. I и § 75, т. II книги Больцмана «Теория газов»), будет показано в другой работе вместе с соответствующими высказываниями в отношении термодинамики излучения.

[7] *P. Ehrenfest.* «Wien. Ber.», 1905, **114**, S. 1301. Этот метод был предложен Г. А. Лоренцем в 1901 г. (см. «Труды Амстердамской академии наук»).

[8] См. цитату и обсуждение в § 165 и 166 «Лекций» Планка.

торых лежат в интервале от ν до $\nu + d\nu$. Энтропия заключенного в полости излучения дается при этом выражением [9]

$$S = \mathrm{const} - k\int\limits_0^\infty d\nu N(\nu) \iint\limits_{-\infty}^{\infty} F(\nu, f, g) \lg F(\nu, f, g)\, df\, dg. \qquad (1)$$

Здесь $N(\nu)\,d\nu$ означает полное число собственных колебаний, частоты которых находятся в пределах от ν до $\nu + d\nu$, а $N(\nu)\,d\nu\, F(f, g, \nu)\, df dg$ — число таких колебаний, которые, кроме того, в данный момент характеризуются значением переменной f в интервале от f до $f + df$ и соответствующим обобщенным импульсом g в интервале от g до $g + dg$. Если обозначить через ε_ν полную энергию одного такого собственного колебания в рассматриваемом состоянии, то

$$\varepsilon_\nu = \frac{a_\nu}{2} f^2 + \frac{\beta_\nu}{2} \dot{f}^2, \qquad (2)$$

причем

$$g_\nu = \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial \dot{f}}. \qquad (3)$$

Основная гипотеза кинетической теории комплексий при этом состоит в следующем. Если рассматриваемой системе с помощью какого-либо имеющегося в природе способа сообщить определенное количество энергии, изолировав систему, когда она придет в состояние равновесия, то в этом состоянии равновесия функция распределения F должна быть такой, чтобы значение функции S было наибольшим, какое вообще возможно при соблюдении всех дополнительных условий, характеризующих конечное состояние. (Определенный из этого требования специальный вид функции F в дальнейшем мы будем называть «граничным распределением».) Эта основная гипотеза больцмановской теории комплексий одновременно является и основной гипотезой планковской теории. В соответствии с этим упомянутые

[9] Дальнейшие замечания в связи с этим утверждением будут даны в другом месте. В моделях, обсуждавшихся в предыдущем параграфе, энтропия S может быть определена двумя различными способами. В одном случае для замкнутой модели S зависит от времени, в другом случае — нет. При выборе определения для S нужно иметь в виду замечания, сделанные М. Лауэ относительно влияния когерентности на величину энтропии (см.: *M. Laue.* «Ann. d. Phys», 1906, 20, S. 365).

дополнительные условия должны быть записаны в виде ограничений, накладываемых на функцию F [10], после чего следует искать относительный максимум величины S, варьируя функцию F с учетом этих ограничений. В качестве таких дополнительных условий во всяком случае должны быть приняты во внимание соотношения

$$\text{I.} \qquad \iint\limits_{-\infty}^{\infty} F(\nu, f, g)\, df\, dg = 1,$$

поскольку из определения F следует, что

$$N(\nu)\, d\nu = N(\nu)\, d\nu \iint\limits_{-\infty}^{\infty} F(\nu, f, g)\, df\, dg.$$

$$\text{II.} \qquad \int\limits_{0}^{\infty} d\nu N(\nu) \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_\nu F(\nu, f, g)\, df\, dg = E,$$

где E — полная энергия заключенного в полости излучения, величина которой принимается заданной. Относительно роли других условий речь пойдет ниже. Если искать относительный максимум S при учете только соотношений I и II, то вычисления получаются точно такими же, как и для случая газовой смеси [11]. В качестве граничного распределения при этом получается известное распределение Максвелла — Больцмана, из которого следует, что средняя величина энергии, приходящейся на отдельные собственные колебания, одна и та же для всех частот. Если тем же методом исследовать систему, состоящую из молекул и эфира (здесь мы не будем воспроизводить вычисление), то оказывается, что указанная средняя энергия колебаний совпадает также со средней энергией молекул. Но отсюда окончательно вытекает следующее выражение для спектральной плотности излучения, как показано Рэлеем и Джинсом путем нахождения величины $N(\nu)$ для случая кубической полости:

$$\varphi(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3}, \tag{4}$$

где c — скорость света и $^3/_2\, kT$ — средняя кинетическая энергия молекулы при температуре T. Эта формула согла-

---

[10] В принципе можно построить такие условия, для которых представление в указанном виде невозможно.

[11] Для случая одного газа все вычисления проводятся в § 142 «Лекций».

суется с опытом лишь в области больших длин волн и при высоких температурах. Следует, однако, заметить, что:

1) она имеет вид, требуемый законом смещения Вина,

$$\varphi(\nu, T) = \nu^3 f\left(\frac{T}{\nu}\right); \tag{5}$$

2) она в той же мере, как и формула излучения Планка, пригодна для точного определения постоянной Больцмана k, если только ее сравнивать с опытными данными в ее области применимости [12].

Для высоких частот спектральная формула (4) должна быть отвергнута уже потому, что при $\nu \to \infty$ она приводит к бесконечной интенсивности излучения. В связи с этим возникает вопрос: каким образом избегает этой трудности планковская теория комплексий?

§ 4. Здесь нужно прежде всего рассмотреть в самом общем виде, к чему может привести введение наряду с условиями I и II еще других дополнительных условий. То, что такие условия могут быть физически обоснованными, показывает следующее замечание, которое, впрочем, я привожу только для иллюстрации. Примем, что все процессы возбуждения излучением в природе происходят исключительно через посредство электронов, причем эти электроны обладают определенной структурой. Эта специальная структура, даже если это просто жестко фиксированный диаметр электрона [13], в принципе может привести к тому, что не всякие мыслимые основные колебания нашей полости могут быть возбуждены обычными средствами. До настоящего времени не удавалось вывести подобного рода ограничений из какой-либо физической гипотезы [14].

---

[12] См. письма Рэлея и Джинса в «Nature» (1905, 72), а также: *H. A. Lorentz*. «Amsterd. Akad.», 1903, S. 666. Полная энергия излучения, приходящаяся на интервал частот от ν_1 до ν_2, может быть найдена с высокой точностью с помощью фотометрических измерений. Число соответствующих собственных колебаний можно очень точно вычислить (в противоположность аналогичному числу Лошмидта), так что мы имеем возможность очень хорошо определить среднюю энергию одной молекулы при данной температуре.

[13] Протяженность электрона особенно сказывается при рассмотрении возбуждения собственных колебаний очень коротких длин волн.

[14] Ср. примечание 17 на стр. 49.

Однако если еще одно дополнительное условие, накладываемое на функцию $F(\nu, f, g)$, может быть выбрано произвольно, то, естественно, любую функцию F можно получить в качестве граничного распределения.

Пусть, например, третье дополнительное условие для функции имеет следующий, все еще очень специальный вид [15]:

$$\text{III.}\quad \int_0^\infty d\nu N(\nu) \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi(\nu, f, g) F(\nu, f, g)\, df\, dg = A,$$

где Φ — произвольная функция, A — константа. Для вычисления граничного распределения F мы должны записать

$$\delta H + \rho\delta(I) + \sigma\delta(II) + \tau\delta(\text{III}) = 0, \tag{6}$$

где ρ, σ, τ — неопределенные множители, которые в конечном счете находятся с помощью соотношений I, II, III. Вычисление дает

$$\lg F(\nu, f, g) + 1 + \rho + \sigma\varepsilon_\nu + \tau\Phi(\nu, f, g) = 0$$

или

$$F(\nu, f, g) = e^{-[1+\rho+\sigma\varepsilon_\nu+\tau\Phi(\nu, f, g)]}, \tag{7}$$

т. е. результат существенно зависит от вида произвольной функции Φ.

Любое желаемое спектральное распределение можно получить даже бесконечным числом различных способов, присоединяя выбранное подходящим образом соотношение III. Действительно, для этого соотношения фактически важна не сама функция F, а лишь величина

$$N(\nu) \iint_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_\nu F(\nu, f, g)\, df\, dg \tag{8}$$

для каждого ν. Поскольку путь от наблюдений до эмпирической формулы спектрального распределения, а затем от этой формулы до восстановления вариационного условия типа III никоим образом не является однозначным, то вывод спектральной формулы из вариационного условия должен рассматриваться как теоретический вывод лишь в том слу-

---

[15] Ср. примечание 10 на стр. 46.

чае, если выбранное вариационное условие в какой-то мере может быть обосновано физически. В тех случаях, в которых Больцман применял методы теории комплексий, центральным моментом является как раз обсуждение физических оснований для используемого вариационного условия [16].

§ 5. Можно специально поставить задачу получить спектральную формулу, данную г. Планком [17],

$$\varphi(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

поскольку она, как известно, очень хорошо согласуется с данными наблюдений. Согласно приведенному выше рассуждению, и в этом случае можно, конечно, произвольно выбирать различные формы для дополнительного вариационного условия. Мы рассмотрим лишь то условие, которое было выбрано г. Планком. В используемой здесь терминологии оно может быть сформулировано примерно следующим образом: собственные колебания частоты ν могут обладать лишь такими энергиями ε_ν, которые являются целыми кратными величины [18]:

$$\varepsilon_\nu^0 = h\nu = 6{,}548 \cdot 10^{-27}\,\nu \text{ эрг.} \tag{9}$$

Это равносильно тому, как будто для каждой частоты ν энергия колебаний состоит из «атомов энергии», величина которых численно равна

$$\varepsilon_\nu^0 = 6{,}548 \cdot 10^{-27}\,\nu \text{ эрг.}$$

---

[16] См., например: *Л. Больцман.* О величинах энергии, которая может быть получена при реакциях химического соединения». «Wien Ber.», 1883, 8 (II).

[17] Относительно способа, которым эта спектральная формула была получена впервые, см. заключение § 189 его «Лекций».

[18] Используя разрывную функцию Φ, это условие можно записать в виде III, а можно и более непосредственно перейти прямо к спектральной формуле. То обстоятельство, что физического объяснения этого предположения в настоящее время не существует, обсуждается г. Планком в следующих местах: § 149, 150, 158, 166 (конец) и в заключительном параграфе книги. В качестве пояснения к § 149 я хотел бы заметить, что факт наличия функции $f(\lambda T)$ в законе смещения Вина дает определенные основания ожидать, что в полную теорию будет входить некоторая универсальная константа, которая (возможно, в комбинации с постоянной Больцмана k и скоростью света c) может сделать аргумент λT безразмерным. Если, таким образом, упомянутая константа h,

Я позволю себе сформулировать это условие в таком виде, который является обычным для статистической механики. Я не имел возможности полностью сопоставить его с аналогичной формулировкой, данной г. Планком в § 150 «Лекций». Введем для собственных колебаний частоты ν изображающую плоскость (f, g). Каждому собственному колебанию на ней соответствует изображающая точка, которая характеризует мгновенное состояние системы, совершающей колебания. Указанная гипотеза атомов энергии при этом гласит, что изображающая точка собственного колебания частоты ν не может занимать произвольное положение на плоскости, а может лежать лишь на определенных кривых, а именно на семействе эллипсов

$$(\varepsilon_\nu =) \frac{a_\nu}{2} f^2 + \frac{1}{2\beta_\nu} g^2 = mh\nu. \tag{10}$$

Здесь m пробегает множество целых чисел от нуля до такого значения, выше которого величина $mh\nu$ начинает превосходить заданную величину полной энергии излучения.

После этого экскурса мы еще раз вернемся к вопросу, поставленному в конце § 3: каким образом теории Планка удается обезвредить бесконечное число ультрафиолетовых обертонов полости, так что они не забирают на себя всю энергию, даже напротив, спектральная кривая очень быстро спадает в ультрафиолете[19]? Легко понять, как в этом смысле должно проявляться выражение (9) для величины атомов энергии: согласно уравнению (9), планковские атомы энергии неограниченно возрастают с ростом ν. Конечно, это обстоятельство не вызывает серьезных физических возражений, поскольку, как показывает оценка на основе чисел, даваемых г. Планком, в области наблюдаемого излучения ε_ν^0 по порядку величины равно средней кинетической энергии молекулы при $T = 1000°$ K. Однако с методической точки зрения оно представляется немаловажным при сравнении теории Планка с теориями Рэлея — Джинса и Г. А. Лоренца.

Веезен-на-Валлензее, 28 июня 1906 г.

как видно из § 149, имеет размерность действия (т. е. энергии, умноженной на время), то происходит это только потому, что специальное выражение (9) для «атома энергии» было получено на основе применения закона смещения Вина (§ 148).

[19] См. примечание 13 на стр. 47.

ОБ ОДНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ БОЛЬЦМАНА И ЕЕ ОТНОШЕНИИ К ТЕОРИИ КВАНТОВ

Если сжимать черное или же нечерное излучение обратимо адиабатически сдвиганием окружающих его абсолютно отражающих стенок, то происходит, как известно, следующее: число колебаний ν_p и энергия E_p каждого собственного колебания полости растут во время сжатия и именно так, что для каждого из бесконечного числа собственных колебаний

$$\delta\left(\frac{E_p}{\nu_p}\right)=0 \qquad (p=1, 2, \ldots, \infty). \tag{1}$$

Соотношение (1) имеет основное значение для чисто термодинамического вывода закона смещения Вина, а также для всякой статистической теории излучения, желающей оставаться в согласии со вторым началом термодинамики [1]. Оно служит также основой для гипотезы Планка о ступенях энергии [2]

$$\frac{\varepsilon}{\nu}=0,\, h,\, 2h, \ldots \tag{2}$$

В последнее время предположение Планка (2) переносится из первоначальной области (энергия систем, колеблющихся гармонически) на быстро расширяющийся круг явлений (конечно, ощупью). Возникают два вопроса.

1. Имеет ли место при переходе от гармонически колеблющихся систем (причем движение повинуется линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами) к более общим системам «теорема адиабатического воздействия», аналогичная уравнению (1)?

2. Если да, то как ею воспользоваться при распростране-

---

[1] *P. Ehrenfest*. Welche Zuge der Liehtquantenhypothese spielen in der Theorie der Warmestrahlung eine wesenliche Rolle? «Ann. d. Phys.», 1911, **36**, S. 91, § 5. См. наст. сб., стр. 118.

[2] Для пояснения: ступени энергии формы $\frac{\varepsilon}{\nu^2}=0,\, h,\, 2h, \ldots$ повели бы к противоречию со вторым началом. Планк, как известно, пришел к гипотезе (2), проведя вычисления с общим предположением

$$\varepsilon = 0,\ f(\nu),\ 2f(\nu),\ 3f(\nu),\ \ldots$$

и потребовав затем, чтобы полученная спектральная формула нии планковой гипотезы (2) на системы, колеблющиеся негармонически?

На первый вопрос ответ утвердительный. При попытке обобщить теорему адиабатического изменения (1) я заметил, что такое обобщение, и притом поразительно широкое, непосредственно следует из одной механической теоремы, найденной независимо друг от друга Больцманом и Клаузиусом (см. § 1).

На второй вопрос я могу пока ответить только указанием примера. Встречающиеся здесь трудности — наиболее неприятная была указана мне в разговоре Эйнштейном — я изложил в §§ 2, 3, 4, не умея их устранить.

Возможно еще следующее суммарное возражение. Можно сказать: нельзя комбинировать теорему, выведенную из механических уравнений, с антимеханической гипотезой квантов. Ответ: закон смещения Вина позволяет надеяться, что результаты, полученные при рассмотрении макроскопически-адиабатических процессов из классической механики и электродинамики, и в будущей «механике квантов» останутся в силе.

§ 1. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ координаты механической системы. Пусть потенциальная энергия Ф системы зависит не только от координат q, но еще от некоторых «медленно меняющихся параметров» ν_1, $\nu_2, \ldots$ Кинетическая энергия T системы — однородная квадратичная функция скоростей $\dot{q}$. Ее коэффициенты могут зависеть не только от координат q, но и от параметров ν.

Пусть система обладает еще следующим свойством: при произвольно выбранных, но постоянных значениях параметров ν_1, $\nu_2, \ldots$ все движения системы периодические независимо от начальной фазы $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$. Период P будет, вообще говоря, зависеть не только от значений ν_1, $\nu_2, \ldots$, но и от начальной фазы (q_0, p_0) системы.

Бесконечно медленным изменением параметров ν_1, $\nu_2, \ldots$ можно всякое первоначальное движение (A) системы превратить в другое (B). Этот род воздействия на систему мы назовем «адиабатическим воздействием» на движение.

Если обозначить соответствующие периоды движения через P_A и P_B или обратные им «частоты» — через ν_A и ν_B,

---

удовлетворяла закону смещения Вина. Это требование, определяющее вид $f(\nu)$, заставляет ступени энергии удовлетворять уравнению (1) и второму началу.

средние во времени кинетические энергии — через $\overline{T}_A$ и $\overline{T}_B$, то имеет место соотношение

$$\left(\frac{\overline{T}}{\nu}\right)_A = \left(\frac{\overline{T}}{\nu}\right)_B. \qquad \text{(I)}$$

При адиабатическом воздействии на периодическую систему отношение средней во времени кинетической энергии к «частоте» остается неизменным (*теорема адиабатического воздействия*).

Если δ' обозначает бесконечное малое адиабатическое изменение, P — первоначальный период, то

$$\delta'\left(\frac{\overline{T}}{\nu}\right) = \delta' \int_0^P dt \cdot T = 0. \qquad \text{(II)}$$

(«Действие», вычисленное для одного периода, остается при адиабатическом воздействии постоянным.) Последнее уравнение не что иное, как специальный случай теоремы Больцмана, Клаузиуса и Сцили, вывод и формулировку которой можно найти в «Лекциях по механике» Больцмана (т. II, § 48 [3]).

§ 2. Замечания.

a) Если система вовсе не имеет потенциальной энергии или же ее средняя потенциальная энергия находится в неизменном отношении к кинетической [4], то одновременно с соотношением (II)

$$\delta'\left(\frac{E}{\nu}\right) = 0 \qquad \text{(II')}$$

[ср. с уравнением (I) для гармонически колеблющихся систем]. Следует заметить, что (II') правильно только в этих особенных случаях, а не вообще, как (II).

b) Очень желательно распространить теорему (I) на *не* периодические движения. Что такое распространение без особых предположений невозможно, следует опять-таки непосредственно из старых работ Больцмана [5]. Пути, изби-

---

[3] Оригинальная литература: *L. Boltzmann*. Wissensch. Abh., Bd. I, p. 23, 229; *R. Clausius*. «Pogg. Ann.», **142**, p. 433; *Szily*. «Pogg. Ann.», p. 145.

[4] Для гармонически колеблющихся систем $\overline{\Phi} = \overline{T}$, если положить потенциальную энергию в положении равновесия равной нулю.

[5] *L. Boltzmann*. Ges. Abh., Bd. II, 1877, S. 126; Vorles. ub. Mechanik,, Bd. II, S. 41.

раемому Больцманом для распространения его теоремы на непериодические системы [6], я не хотел бы следовать, так как он всецело покоится на неприемлемой [7] «Ergodenhypothese».

c) Если адиабатическое воздействие ведет к некоторым особым движениям, при которых периодическое движение начинает распадаться на два или несколько отдельных друг от друга движений, то теорема (II) должна быть соответствующим образом изменена.

Пример [8]: точка, не подверженная силам, движется в закрытой с обеих сторон трубке взад и вперед. Пусть в середине трубки бесконечно медленно возникает и растет отталкивающее силовое поле. Тогда наступает момент, когда точка с ее запасом кинетической энергии не может пройти через эту «преграду» и продолжает двигаться взад и вперед в половине трубки. Если силовое поле имеет исчезающие изменения, то кинетическая энергия окончательного движения равна таковой первоначального; «частота» же удвоилась, так как путь уменьшился вдвое. Первоначальное движение распалось во время адиабатического воздействия на две отдельные ветви.

§ 3. Покажем на примере, как можно применять «теорему адиабатического воздействия». Этот пример касается распространения планковой гипотезы (2) на вращающиеся диполи.

Твердый диполь подвешен так, что может свободно вращаться вокруг оси z. Параллельно оси x действует сильное направляющее поле. Мы рассматриваем сперва бесконечно малые качания диполя. Пусть q — угол поворота, p — соответствующий момент (произведение момента инерции и угловой скорости), ν_0 — частота качаний.

Согласно предположению (2) Планка точка, изображающая состояние диполя в плоскости (q, p), может лежать только на эллипсах, относящихся к энергиям $0, h\nu_0, 2h\nu_0, \ldots$ Для них, следовательно, имеем

$$\frac{\overline{T}}{\nu_0} = 0,\ \frac{h}{2},\ 2\frac{h}{2},\ \ldots,\ n\frac{h}{2}, \tag{3}$$

[6] Ges. Abh., Bd. III, p. 132, 139, 153.

[7] *P. u. T. Ehrenfest.* «Mathem. Encykl.», Bd. IV, S. 32, 10a. («Rosenthal Ann. d. Ph.», 1913, **42**, S. 796).

[8] Этот пример был при обсуждении вопроса указан К. Герцфельдом.

так как всегда (гармонические колебания!)

$$\overline{T} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

К энергии $\varepsilon = 0$ относится бесконечное число точек покоя и равновесия:

$$p = 0, \qquad q = 0,\ \pm 2\pi,\ \pm 4\pi,\ \pm 6\pi, \tag{5}$$

к энергии $\varepsilon = nh\nu_0$ — определенные равные эллипсы вокруг точек (5).

Воздействуем адиабатически на это начальное движение диполя посредством бесконечно медленного изменения направляющего силового поля или же момента инерции. Этим воздействием можно бесконечно малые качания превратить в качания конечной амплитуды. Затем диполь опрокидывается и начинает вращаться вправо или влево, сперва заметно неравномерно, наконец — с постоянной угловой скоростью.

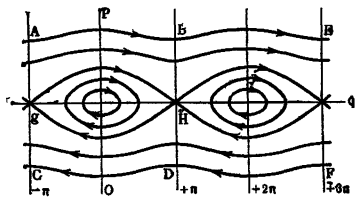


Рис. 1

Рис. 1 дает возможность уяснить себе непрерывное изменение движения, в особенности переход через особенное движение gH. Полному качанию соответствует в окончательном состоянии *двойное* вращение равномерно вращающегося диполя $(0 \leqslant q \leqslant 4\pi) ABE$. Если мы хотим определить при помощи «*теоремы адиабатического воздействия*» кинетическую энергию равномерного вращения T_1 из средней кинетической энергии $\overline{T}_0$ первоначального качания, то должны принять за «соответствующий» период время:

$$P_1 = \frac{4\pi}{\dot{q}_1} \tag{6}$$

($\dot{q}_1$ — постоянная угловая скорость диполя), за соответствующую частоту

$$\nu_1 = \frac{\dot{q}_1}{4\pi}. \tag{7}$$

Согласно (7), (1) и (3), имеем

$$\left(\frac{\overline{T}}{\nu}\right)_1 = \frac{4\pi T_1}{\dot{q}_1} = \left(\frac{\overline{T}}{\nu}\right)_0 = 0,\ \frac{h}{2},\ 2\,\frac{h}{2}, \ldots, n\,\frac{h}{2} \tag{8}$$

или ввиду того, что

$$T_1 = \frac{p_1 q_1}{2}\,. \tag{9}$$

$$p_1 = 0, \pm\frac{h}{4\pi}, \pm 2\,\frac{h}{4\pi}, \ldots, \pm n\,\frac{h}{4\pi}\,. \qquad (10)^9$$

Если мы допустим для равномерно вращающегося диполя другие значения p, то обращением описанного адиабатического процесса приходим к таким гармоническим колебаниям, значения энергии которых противоречат планковым гипотезам (3) и (2).

Если нам дано N диполей и мы желаем при данной полной энергии определить «вероятнейшее» распределение диполей по возможным родам движения (10), то нужно еще установить, какие области в плоскости (q, p) мы будем рассматривать как *равновозможные*. «Адиабатическое воздействие» превращает определенный планков эллипс в плоскости (q, p) в пару прямых линий длины 2π, расположенных симметрично над и под осью q. Если для гармонически колеблющихся диполей мы принимаем, по Планку, все определенные эллипсы за области равной вероятности, то естественно принять для равномерно вращающихся диполей эти пары линий за равновозможные области [10] (гипотеза A). Хотя это и естественно, но есть все-таки новая гипотеза. Нельзя ли обойтись без нее?

Кажется возможным следующий выход. Исходим из предположения, что N гармонически колеблющихся диполей

---

[9] В моей работе «Bemerk. betreffs der specif. Wärme zweiatomiger Gase» («Verh. d. deutsch. phys. Ges.», 1913, 15, S. 453) я по ошибке написал

$$\nu_1 = \frac{\dot{q}_1}{2\pi},\quad \text{отсюда } p_1 = \ldots \pm n\,\frac{h}{2\pi}\ldots$$

Это не имеет никакого влияния на выводы, только данное в конце численное значение момента инерции L водородной молекулы нужно разделить на 4.

[10] *P. Ehrenfest.* Bemerk. betreffs der specif. Wärme zweiatomiger Gase. «Verh. d. deutsch. phys Ges.», 1913, 15, S. 453.

(частоты ν_0) распределены «вероятнейшим» образом по планковым эллипсам. Воздействуем адиабатически, как выше описано, одновременно на все диполи. Получаем вполне определенное распределение N диполей по различным родам движения (10). Это распределение (распределение B) *иное*, чем то, которое получается как вероятнейшее из гипотезы A (распределение A). Нужно ли считать распределение B за равновесное и отбросить распределение A и гипотезу A? Замечания следующего параграфа — попытка показать, что распределение B не может считаться равновесным.

§ 4 При адиабатическом сжатии черное излучение переходит в черное же, как в присутствии (внутри сжимаемой «зеркальной» полости) «черной пылинки», так и в отсутствие такого «катализатора». Иначе мы приходим к противоречию со вторым началом термодинамики [11]. Если в сосуде с шероховатыми стенками находятся N одноатомных молекул, имеющих максвеллово распределение, и если мы будем сжимать этот идеальный газ бесконечно медленным сдвиганием стенок сосуда, то получим снова максвеллово распределение, как в предположении столкновений молекул во время сжатия, так и в том случае, если они свободно проникают друг через друга. Можно, должно быть, указать и другие примеры, в которых при «адиабатическом воздействии» на отдельные степени свободы из равновесного состояния получается равновесное же [12]. Но, вообще говоря, это не имеет места, например, для многоатомных молекул или одноатомных, подверженных действию внешнего силового поля [13].

Лейден, декабрь 1913 г.

---

[11] *M. Planck.* Wärmestrahlung, II Aufl., § 71.

[12] Оба данных примера имеют общую черту: давление зависит только от полной энергии систем и не зависит от ее распределения по различным степеням свободы.

[13] Соответственным образом можно убедиться, что канонический ансамбль газов после адиабатического воздействия, вообще говоря, не остается каноническим.

АДИАБАТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ И ИХ ТРАКТОВКА НИЛЬСОМ БОРОМ

§ 1. Работа самого Бора[1] предоставляет нам необозримое количество плодотворных применений его теории. Наслаждаясь изобилием результатов, мы должны все время помнить — об этом постоянно напоминает и сам Бор,— в чем состоит собственно проблема, с которой он борется: снятие покрова с принципов теории, которая когда-нибудь заменит «классическую». На современном этапе при формулировке этих принципов постоянно приходится пользоваться понятиями, разработанными в классической механике и электродинамике. Поэтому легко может создаться впечатление, что принцип соответствия или адиабатический принцип подготавливает некоторое «примирение» квантовой теории с классической или даже возврат к последней. Но Бор убедительно доказал, что, несмотря на их предварительную полуклассическую формулировку, эти принципы следует рассматривать как «чисто квантово-теоретические законы»[2]. Они ведут вперед, а не назад! Приглашенный обсудить здесь один из этих принципов — адиабатический, который в руках Бора стал столь замечательно острым и гибким инструментом, я затрудняюсь, как это сделать, ибо, как я думаю, пока невозможно дать более глубокое и вместе с тем более четкое объяснение адиабатического принципа, чем то, которое дал сам Бор. При этом он весьма тонко проследил органические связи[3] между адиабатическим принципом и принципом соответствия. Я вижу только одну возможность

---

[1] Для тех работ Бора, которые дальше мы будем цитировать особенно часто, введены сокращенные обозначения: I. On the quantum theory of line spectra. «Kopenhag. Akad.», 1918—1922 (нем. пер.: Ueber Quantumtheorie der Linienspektra. Braunschweig, 1923) — «К. Т. С. Л.»; II. Die Grundpostulate der Quantumtheorie «Z. Phys», 1923, 13, S. 117. —«Осн. постулаты»; III. Die Anwendungen der Quantumtheorie auf periodische Systeme (работа, которая должна была появиться в апреле 1916 г. в «Philosophical Magazine», но была опубликована впервые лишь в сборнике «Abhandlungen über Atombau. 1913—1916»). — «Применения»; IV. Предисловие к указанному сборнику (русский перевод в кн.: *Н. Бор.* Избранные научные труды, т. 1. М., «Наука», 1970, стр. 304) — «Предисловие».

[2] «Осн. постулаты», стр. 165. См. также стр. 117, 129, 139 и сноску на стр. 142.

[3] «Предисловие», стр. XVI, XVII; «Осн. постулаты», стр. 132, 146.

Нильс Бор

справиться с возложенной на меня задачей: я должен попытаться показать генезис введения в квантовую статистику «адиабатической гипотезы», формирования понятия «адиабатические инварианты» и формулировки теоремы об «адиабатической инвариантности априорного веса». Наконец, мы укажем на те места работ Бора, из которых особенно ясно видно, чем мы обязаны Бору в уточнении и углублении принципа и какие совершенно новые перспективы он открыл.

§ 2. Прежде всего необходимо подчеркнуть следующее: на путь, ведущий к адиабатическому принципу, нас привели закон излучения Больцмана и закон смещения Вина, вернее, та тайна, которая скрывалась за изящными электродинамически-термодинамическими выводами этих законов [4].

[4] Особенно захватывающим образом рассмотрел этот вопрос именно как тайну Г. А. Лоренц в 1900 г. в работе «Теория излучения и второй закон термодинамики» («Versl. Akad. Amster.», 1900, 9, p. 417; «Proc. Akad. Amster.», 1901, 3, p. 607). Развитый там

Закон смещения Вина был выведен на чисто классической основе [5]. Каким образом он оказался непоколеблемым в мире явлений излучения, антиклассический квантовый характер которых выступает всегда неумолимо? Восхищение этим фактом не уменьшается указанием на асимптотическую «пригодность» классической механики в области больших квантовых чисел, поскольку закон смещения строго выполняется и для малых квантовых чисел, т. е. малых T и больших ν. Благодаря этому удалось напасть на след с современной точки зрения особого типа «псевдоклассического» поведения квантовых систем, и анализ вывода закона смещения должен дать некоторые сведения о том, в какой мере можно еще получить правильные результаты для квантового мира с помощью классической механики (электродинамики) и классической термодинамики, а значит, статистики Больцмана. При этом надо учесть еще то обстоятельство [6], что еще в 1902 г. Рэлей вывел и применил [7] для доказательства закона излучения Больцмана одну механическую теорему, которая позволяет особенно четко резюмировать [8] все механико-электродинамические элементы в вы-

---

модельный способ рассмотрения можно специально использовать и для анализа структуры теории излучения Планка (*P. Ehrenfest*. Über die physikalische Vorraussetzungen der Planck'schen Theorie. «Wien. Ber.», 1905, **114**, S. 1301).

[5] Позволю себе привести краткие обозначения для тех своих работ, которые будут здесь чаще цитироваться: A — Zur Planckschen Strahlungstheorie. «Phys. Z.», 1906, **7**, S. 528 (наст. сб., стр. 40). B — Welche Züge der Lichtquantenhypothese spielen in der Theorie der Wärmestrahlung eine wesentliche Rolle? «Ann. Phys.», 1911, **36**, S. 91 (наст. сб., стр. 118). C — Bemerkung betreffs der spezifischen Wärme zweiatomigen Gase. «Verh. Dtsch. Phys. Ges.», 1913, **15**, S. 451. D— A mechanical theorem of Boltzmann and its relation to the theory of energy quanta. «Proc. Acad. Amster.», 1913, **16**, p. 591 (наст. сб., стр. 51). F — Zum Boltzmannschen Entropie-Wahrscheinlichkeit Theorem. «Phys. Z»., 1914, **15**, S. 657. F — On adiabatic changes of a system in connection to the quantum theory.«Proc. Acad. Amster.», 1916, **19**, p. 576; «Ann. Phys». 1916, **51**, S. 327.

[6] См. ссылку на Рэлея в работе B (стр. 94).

[7] *J. Rayleigh*. On the pressure of radiation. «Phil. Mag.», 1902, **3**, p. 338; «Scientific Papers», v. V, p. 276. Рэлей начинает с двух наглядных механических примеров: бесконечно медленное уменьшение длины нити маятника и длины поперечно колеблющейся струны путем перемещения вдоль нити или струны узкой трубки.

[8] Рэлей ограничился выводом закона излучения Больцмана. В работе B (1911) я коротко указал, что теорема Рэлея позволяет дать и наиболее удобное доказательство виновского закона смещения. Этот способ доказательства можно найти в удобном для чтения

воде закона смещения, причем значительно яснее, чем при всех обычных изложениях, в которых оперируют световыми лучами и принципом Допплера [9].

Я имею в виду следующую теорему: если собственные колебания зеркальной полости возбуждены введением в полость произвольного излучения, то при бесконечно медленном сжатии полости путем сдвигания зеркальных стенок парциальная энергия всех собственных колебаний возрастает (за счет работы сжатия против давления излучения) пропорционально частоте, т. е.

$$\frac{\varepsilon_s'}{\nu_s'} = \frac{\varepsilon_s}{\nu_s}, \tag{1}$$

где ε_s, ε_s' — энергия, а ν_s, ν_s' — частота s-го собственного колебания до и после «адиабатического» сжатия. Эта теорема Рэлея оказала существенную помощь при попытках выяснить, какое место следует собственно приписать закону смещения в теории излучения Планка. Необходимо в это вникнуть глубже, ибо именно здесь начинается — правда, вначале только в одном особом граничном случае [10] — выявление роли, которую играют адиабатические инварианты в квантовой теории вообще и в квантовой статистике в частности.

§ 3. Гипотеза ступеней энергии ($\varepsilon = 0$, $h\nu$, $2h\nu$,...) дала (1901) формулу излучения, которая удовлетворяет всем экспериментам. Но были ли все отдельные черты этой гипотезы необходимыми? Чем яснее осознается, что во всяком случае будет нелегко трактовать эту гипотезу классическими средствами, тем интереснее становится анализ вопроса, «какие черты этой гипотезы *необходимы*, чтобы добиться приемлемого вида формулы излучения вообще, а какие черты

виде со всеми подробностями в книге: *L. Brillouin*. La theorie des Quanta. Paris, 1922, p. 177. См. также: *J. Kunz*. «Phil. Mag.», 1923, **45**, p. 300.

[9] До недавнего времени я не обращал должного внимания на методически особенно интересную работу Г. А. Лоренца «Законы излучения Больцмана и Вина» («Proc. Acad. Amster.», 1901, **3**, p. 607), которую цитирует Рэлей и в которой уже дан вывод закона смещения; Лоренц избегал применения световых лучей и вместо них опирался на Фурье-разложение электромагнитного поля. Этот вывод не строится на механической аналогии и проводится чисто электродинамически, причем с особой строгостью.

[10] См. сноску 31 на стр. 69.

определяют только количественные частности». При этом оказывается несколько удобнее рассматривать распределение энергии не по «резонаторам» (Планк), а по собственным колебаниям зеркальной полости (Рэлей) [11]. Использование больцмановской теории о равномерном распределении энергии, как подчеркнул Рэлей, ведет здесь непосредственно к абсурду — «ультрафиолетовой катастрофе». Она состоит в том, что каждое из бесконечного множества ультрафиолетовых собственных колебаний полости берет на себя энергию kT, значит, в сумме бесконечную энергию. Какая черта гипотезы ступеней энергии прежде всего избавляет нас от этой ультрафиолетовой катастрофы? Проведенный Больцманом комбинаторный расчет «наивероятнейшего» распределения состояний существенно опирается на предположение, что в качестве a priori равновероятных надо брать области равного объема фазового пространства молекулы (μ-пространства); это означает, что Больцман приписывал μ-пространству повсюду одинаковый «вес». Именно с этим тесно связано то обстоятельство, что Больцман все время приходил к равномерному распределению энергии (кинетической). Планковская гипотеза ступеней энергии, наоборот, приписывает всем точкам фазового пространства резонатора нулевую энергию, и только нулевая точка ($q = p = 0$) и эллипсы $\varepsilon = h\nu$, $2h\nu$,... обладают весом. Этим Планк отклоняется от точки зрения Больцмана и освобождает равновесное излучение от равномерного распределения.

Из статистической части теории Планка ясно видно: величина образующихся ступеней с увеличением ν обеспечивает уменьшение функции распределения в ультрафиолетовой области и устраняет ультрафиолетовую катастрофу, ибо ультрафиолетовые собственные колебания получают при заданной температуре, так сказать, меньше шансов (a posteriori) уйти от нулевого уровня энергии, чем инфракрасные конкуренты с их меньшими требованиями [12].

§ 4. Для углубления анализа необходимо было бы в основу статистического расчета положить такое общее распределение веса (априорной вероятности), которое содержало бы как частные случаи распределения Больцмана и

---

[11] *P. Ehrenfest.* A; *P. Debye.* Warscheinlichkeitsbegriff in der Theorie der Strahlung. «Ann. Phys.», 1910, **33**, S. 1427.
[12] *P. Ehrenfest.* A. § 5.

Планка[13]. Пусть

$$\gamma(\nu, \varepsilon)\, d\varepsilon \tag{2}$$

обозначает «априорную вероятность» того, что собственное колебание частоты ν обладает энергией в пределах ε, $\varepsilon + d\varepsilon$, и пусть в единице объема (1 см^3) содержится

$$N(\nu)\, d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \tag{3}$$

собственных колебаний с частотой в интервале ν, $\nu + d\nu$.

Тогда для «наивероятнейшего» распределения состояний при заданной температуре T получается[14] общая энергия всех этих $N(\nu)\, d\nu$ собственных колебаний

$$\rho(\nu, T)\, d\nu = d\nu \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\int\limits_0^\infty \gamma(\nu, \varepsilon)\, \varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\, d\varepsilon}{\int\limits_0^\infty \gamma(\nu, \varepsilon)\, e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\, d\varepsilon}. \tag{4}$$

Вид получаемой формулы излучения зависит от выбора $\gamma(\nu, \varepsilon)$[15]. К более детализированному определению $\rho(\nu, T)$ ведет следующее замечание[16]. Данный Больцманом механико-статистический вывод второго начала, т. е. его вывод уравнения

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{\delta E + \delta A}{T} = k \lg W, \tag{5}$$

существенно опирается на вышеприведенное предположение, что все точки μ-пространства (фазового пространства молекулы) обладают одинаковым априорным весом. Планковская гипотеза ступеней энергии, обобщая выбор веса $\gamma(\nu, \varepsilon)$, нарушает это предположение для двумерного μ-пространства собственных колебаний. Каков наиболее общий вид $\gamma(\nu, \varepsilon)$, который еще сохраняет больцмановское соотношение (5)?

Если целенаправленным применением теоремы Рэлея (1) исследовать, при каком выборе $\gamma(\nu, \varepsilon)$ энтропия, т. е. ло-

---

[13] *P. Ehrenfest*. B, § 3.
[14] См. там же, уравнение (18).
[15] И обратно, (4) является линейным интегральным уравнением для $\gamma(\nu, \varepsilon)$, если $\rho(\nu, T)$ задано. Ср. сноску 20 на стр. 65.
[16] Там же, § 4, 5.

гарифм вероятности, произвольного черного или нечерного излучения остается инвариантной при адиабатическом сжатии зеркальной полости, то приходим к следующему выводу[17]. Необходимое и достаточное условие этого состоит в том, чтобы весовая функция $\gamma(\nu, \varepsilon)\,d\varepsilon$ содержала ε и ν только в отношении ε/ν, остающемся инвариантным при адиабатических сжатиях полости, т. е.

$$\gamma(\varepsilon, \nu)\,d\varepsilon = g(i)\,di, \tag{6}$$

где

$$i = \frac{\varepsilon}{\nu}. \tag{7}$$

И именно вследствие этого ограничения, получаемые из уравнения (4) формулы излучения для $\rho(\nu, T)$, удовлетворяют виновскому закону смещения:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,\frac{\nu\int\limits_0^\infty g(i)\,ie^{-\frac{i\nu}{kT}}\,di}{\int\limits_0^\infty g(i)\,e^{-\frac{i\nu}{kT}}\,di} = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{kT}\right). \tag{8}$$

Рассмотренная именно с такой точки зрения планковская гипотеза квантов энергии и связанное с ней статистическое утверждение означают: только те возбужденные состояния обладают отличным от нуля — и адиабатически инвариантным — весом, для которых при адиабатическом сжатии инвариантная величина (7) равна[18]

$$i = 0,\ h,\ 2h, \ldots \tag{9}$$

Именно эта черта адиабатической инвариантности в квантовой гипотезе Планка ответственна за согласие со вторым началом и в особенности за соблюдение закона смещения!

Обозначим:

$$\alpha)\ \frac{\nu}{kT} = \sigma;\quad \beta)\ \int\limits_0^\infty g(i)\,e^{-\sigma i}\,di = Q(\sigma);\quad \gamma)\ \int\limits_0^\infty g(i)\,ie^{-\sigma i}\,di = P(\sigma)$$

---

[17] Там же, § 5 и дополнение (стр. 114). Данный там вывод излишне сложен.

[18] Там же, § 13.

и учтем, что

$$\delta)\ \frac{P(\sigma)}{Q(\sigma)} = \frac{-\frac{d}{dT}[Q(\sigma)]}{Q(\sigma)} = -\frac{d}{d\sigma}[\lg Q(\sigma)].$$

Тогда (8) дает следующие интегральные уравнения для определения $g(i)$:

$$\varepsilon)\ \int_0^\infty g(i)\, e^{-\sigma i}\, di = e^{-\frac{c^3}{8\pi}\int f(\sigma) d\sigma},$$

как только формула излучения, т. е. $f(\sigma)$, известна (например, из эмпирической формулы). Так можно перейти от предсказания хода $\rho(\nu, T)$ к предсказаниям о весовой функции $g(i)$. Прежде всего можно увидеть[19], что устранение «ультрафиолетовой катастрофы» и достаточно быстрое падение кривой излучения достигается только в том случае, если при выборе веса $g(i)$ нулевое значение энергии (т. е. $i = 0$) облагать «точечным весом», а, с другой стороны, замыкающую его окрестность малой энергии облагать весом ноль (см. точную формулировку в § 8 и 9 цит. соч.). «Достаточное падение кривой излучения при ... увеличении ν осуществляется только тем, что резонаторы проявляют нечто вроде «порога возбуждения», высота которого обычно пропорциональна ν» (цит. соч., стр. 110).

Интегральные уравнения типа (ε) или расширенные «точечным весом» g_r

$$\xi)^{20}\ \sum_{r=1}^{\infty} g_r e^{-\sigma i_r} + \int_0^\infty g(i)\, e^{-\sigma i}\, di$$

равное известной функции от σ, будут играть, возможно, в будущем большую роль в квантовой статистике, если когда-нибудь идеи Бора о нестрогом квантовании[21] будут сопоставлены со вторым началом.

§ 5. *Универсальное* значение квантовой гипотезы Планка для совершенно разнородных областей физики стало столь

---

[19] Там же, §§ 8,9.

[20] Там же, уравнение (60). Это интегральное уравнение рассматривалось еще Риманом («Число простых чисел ...» См.: Ges. Werke, S. 149). См. также: *R. H. Fowler*. «Proc. Roy. Soc.», 1921, A99, p. 462; *E. Bauer*. Thèse. Paris., 1912.

[21] См. сноску 56 на стр. 75.

очевидным, в первую очередь благодаря вкладу Эйнштейна [22], что постановка вопросов, в которых преобладает критическая ориентация, должна в дальнейшем перерасти в совершенно другого рода постановку вопроса: замечательно глубокую находку Планка можно считать вполне верной для синусоидально колеблющейся степени свободы; как распространить его квантовый закон на несинусоидально колеблющиеся системы и на несколько степеней свободы? Доклад Зоммерфельда в Карлсруэ (1911) [23], доклады и дискуссии на I Сольвеевском конгрессе (ноябрь, 1911 г.) и геттингенская вольфскелевская неделя в апреле 1913 г. дают хорошее представление о тех средствах, которыми пытались браться за этот вопрос в то время.

Наиболее существенная руководящая идея привела к формулировке, которую Планк [24] еще в 1906 г. привел для своей гипотезы: эллипсы $\varepsilon = 0$, $h\nu$, $2h\nu$,.. разбивают фазовое пространство резонатора на эллиптические полосы, площадь которых уже не зависит от частоты ν резонатора, а являются универсальной константой, называемой «квантом действия» (h). Последовательные эллипсы заданы, следовательно, условиями

$$\iint dq\,dp = \int p dq = nh. \tag{10}$$

Дебай впервые (1913) [25] распространил эти квантовые предписания на несинусоидальные движения, именно на колебания, вызванные силами, несколько отклоняющимися от закона Гука, а значит, с фазовыми траекториями, уже не являющимися точно эллипсами.

§ 6. Если исходить из исследований, намеченных в § 4, то мы, естественно, вынуждены руководствоваться в дальнейшем другой точкой зрения — адиабатическими преобра-

---

[22] *А. Эйнштейн.* Об одной эвристической точке зрения, касающейся возникновения и превращения света (1905). В кн.: *А. Эйнштейн.* Собрание научных трудов, т. 3. М., 1966, стр. 92. — К теории возникновения и поглощения света (1906); там же, стр. 128. — Теория излучения Планка и теория удельной теплоемкости (1907); там же, стр. 134.— К современному состоянию проблемы излучения (1909); там же, стр. 164.

[23] *M. Planck.* «Phys. Z.», 1911, **12**, S. 1057.

[24] *M. Planck.* Vorlesungen über die Theorie de Wärmestrahlung, § 150.

[25] В кн.: «Vorträge über die kinetische Theorie der Materie», 1914, S. 27.

зованиями,— которая так превосходно себя оправдала при анализе закона смещения. Может быть, даже последующее утверждение не действительно для более общих квантовых систем: при «адиабатическом воздействии», т. е. при изменении условий движения [26], происходящем бесконечно медленно по сравнению с ходом внутренних изменений состояния, каждое «квантово-дозволенное» (по терминологии Бора — «стационарное») движение *недеформированной* системы переходит в «квантово-дозволенное» движение *деформированной* системы. Если эта «адиабатическая гипотеза» верна, то она прежде всего может помочь квантовать те общие движения системы с одной степенью свободы, которые можно получить из различных квантованных движений

$$\frac{\varepsilon}{\nu} = i = nh \quad \text{[ср. с выражением (9)]} \tag{11}$$

синусоидального резонатора путем подходящего адиабатического воздействия. Чтобы из (11) вывести таким путем квантовое условие для более общего движения, необходимо найти такую величину I, которая оставляла бы (α) адиабатически инвариантным и при таком переходе от синусоидального движения к несинусоидальному [27] и которая была бы для синусоидального начального движения тождественна $i = \varepsilon/\nu$. Затем описывают квантовое условие для начального синусоидального движения в виде

$$I = nh \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

---

[26] Например, силового поля или соответствующих кинематических условий. Название «адиабатическое» для подобных воздействий находим у Герца в «Принципах механики» (1894, § 560) и у Л. Больцмана в «Принципах механики» (1904, т. II). Оно обязано своим происхождением тому обстоятельству, что как в старых попытках найти чисто механическое (не статистическое) истолкование II начала термодинамики [«*L. Boltzmann*. Über die mechanische Bedeutung des II Hauptsatzes; «Wien. Ber.», 1866, 53, S. 195. — Zur Priorität der Auffindung der Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und dem Prinzip der kleinsten Wirkung; «Ann. Phys.», 1871, 143, S. 211.— *R. Clausis*. «Ann. Phys.», 1870, 142, S. 458.], так и в «моноциклических аналогиях» [*H. Helmholtz*. Wiss. Abh., Bd. III. 1884, S. 119—202.— *L. Boltzmann*. Wiss. Abh., Bd. III. 1884—1885, S. 122—181.— Prinzipien der Mechanik, Bd. II, § 51.] именно подобные воздействия применялись для изображения адиабатических процессов в термодинамике.

[27] По аналогии с тем, как $i = \varepsilon/\nu$ оставалось инвариантным при более специальном преобразовании синусоидального движения ν в синусоидальное движение ν'.

что в следствие (β) дозволено. И следствие (α) остается справедливым в этом виде и для более общих движений, которые адиабатически получаются из квантово-дозволенных синусоидальных движений, а значит, согласно адиабатической гипотезе, сами квантово-дозволены. При поисках I сразу получаем существенно большее: адиабатический инвариант для систем с произвольно большим числом степеней свободы, если только их движения периодичны и остаются периодичными (в общем с изменением частоты ν) при адиабатическом преобразовании. Для «интеграла действия», взятого по одному периоду, выполняется утверждение [28], что интеграл

$$\oint 2T\,dt = \frac{2\overline{T}}{\nu} \tag{13}$$

адиабатически инвариантен. Поскольку для синусодиального резонатора средняя во времени кинетическая энергия равна потенциальной энергии, а значит, $\varepsilon = 2\overline{T}$, то здесь $2\overline{T}/\nu = \varepsilon/\nu$ и является адиабатическим инвариантом [условие (13) удовлетворяет вышеназванному требованию β]. Теперь (12) принимает вид

$$I \equiv \frac{2\overline{T}}{\nu} = nh \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{14}$$

или

$$I \equiv \oint p dq = nh, \tag{15}$$

ибо для системы с одной степенью свободы

$$\int 2T dt = \int p\dot{q}\, dt = \int p dq.$$

Таким образом, из адиабатической гипотезы следует: квантовое условие Планка (10) для синусоидальных движений является квантовым условием *вообще для всех движений с одной степенью свободы, которые можно адиабатически получить из синусоидального.*

Впрочем, уже при применении к самым простым случаям возникают характерные трудности. Речь идет, например, об

---

[28] *P. Ehrenfest. D.* Уравнение (13) является прямым следствием вариационной теоремы, выведенной Больцманом и Клаузиусом как обобщение «принципа варьирующего действия» и использованной ими для механических аналогий второго начала (см. «Механику» Больцмана, т. II, № 48, и работы, приведенные в сноске 26 на стр. 67).

уверенном определении квантовых условий для свободного вращательного движения жесткой молекулы [29] вокруг неподвижной оси. Можно было бы рассмотреть несколько более общую систему: вращающийся вокруг неподвижной оси жесткий диполь, помещенный во внешнее ориентирующее поле. Если избрать произведение D дипольного момента на напряженность поля достаточно малым или достаточно большим, то мы приближаемся как угодно близко к двум граничным случаям соответственно: синусоидально колеблющемуся маятнику (для которого квантовые условия уже известны) и «свободному ротатору» (для которого квантовые условия предстоит еще вывести). Если исходить из очень большого значения D, например из квантово-дозволенного синусоидального маятника $\varepsilon/\nu = 5h$, то путем бесконечно медленного уменьшения D можно прийти к несинусоидальным колебаниям с конечной амплитудой, так что фактически речь идет об адиабатическом преобразовании. При дальнейшем уменьшении D маятниковое движение сближается с асимптотическим, являющимся граничным случаем между колебательным и вращательным движениями. Но адиабатический переход через эту границу невозможен [30], ибо при приближении к границе период бесконечно возрастает, а значит, уже не выполняется требование, чтобы изменение D происходило «бесконечно медленно в сравнении с внутренним изменением системы».

§ 7. Понятие адиабатической инвариантности оправдывает себя не только при установлении квантовых движений, но и при рассмотрении вопроса об их «весе» (априорной вероятности). Именно оно позволяет распространить полученный при анализе закона смещения результат, касающийся весовой функции $\gamma(\nu, \varepsilon)$ при синусоидальном движении [см. уравнение (6)], на более общие движения [31], т. е. для

---

[29] *P. Ehrenfest.* D (1913) и F (1916). Ср. глубокие исследования Бора, цитированные в сносках 43 (на стр. 72), 49 (на стр. 73) и 54 (на стр. 74).

[30] *P. Ehrenfest.* C, D (1913). Дополнения Г. А. Лоренца на Сольвеевском конгрессе (1911) и Н. Бьеррума (Nernst Festschrift. Halle, 1912) нуждаются в некотором изменении и более подробном обосновании.

[31] *P. Ehrenfest.* E (1914). Впрочем, необходимо указать на специфическую особенность теплового излучения, которая не свойственна в общем «наивероятнейшим» состояниям другой системы. При адиабатическом сжатии оно проходит через «наивероятнейшие» состояния (т. е. остается черным) независимо от того, об-

удовлетворения больцмановского соотношения

$$\frac{\delta Q}{T} \equiv \frac{\delta E + \delta A}{T} = k \lg W \qquad (16)$$

необходимо[32] и достаточно, чтобы весовое распределение в «μ-пространстве» было бы адиабатически инвариантным.

Пример. Если считать установленным, что для синусоидальных движений: 1) только движения (9) = (12) обладают отличным от нуля весом, а именно: 2) для всех квантовых ступеней $n=0, 1, 2 \ldots$ одним и тем же весом, то это утверждение распространяется неизменным на более общие движения, которые можно получить адиабатически из первых.

§ 8. В 1915—1916 гг. под влиянием теории атома Бора Вильсон, Планк, Зоммерфельд, Эпштейн и Шварцшильд установили квантовые условия для весьма обширного класса систем с несколькими (s) степенями свободы, именно для движений «кратно-периодических» систем[33] с кратностью $u \leqslant s$, т. е. движений, которые можно разложить в u-кратные ряды гармонических колебаний. У них декартовы координаты точек системы можно представить рядами Фурье вида

$$\xi = \sum C_{\tau_1 \ldots \tau_u} \cos 2\pi \left[(\tau_1\omega_1 + \ldots + \tau_u\omega_u) t + \gamma_{\tau_1 \ldots \tau_u}\right]. \qquad (17)$$

При каждом новом распространении квантовых условий на более широкую область всегда возникает вопрос: согласуется ли оно с адиабатической гипотезой или противоречит ей?

Прежде всего теперь покажем[34], что в квантовых условиях, данных Зоммерфельдом для «радиального» и «азимутального» импульсов движения в центральном поле

$$\int p_r\, dr = n_1 h \quad (18а), \qquad \int_0^{2\pi} p_\varphi\, d\varphi = 2\pi p_\varphi = n_2 h, \quad (18б)$$

легчается ли обмен энергией между различными степенями свободы излучения путем введения «черной пылинки» или нет. См.: *P. Ehrenfest*. D (1913), § 4; F (1916), § 8, замечание B.

[32] Если молекула обладает несколькими степенями свободы, то имеются некоторые ограничения для «необходимости».

[33] Здесь используется терминология, встречающаяся в работе Бора «Основные постулаты» (§ 2,3).

[34] *P. Ehrenfest*. F (1916), § 7.

левая часть действительно инвариантна относительно адиабатических изменений вида $f(r)$ этого центрального поля. Вместе с тем здесь уже остро проявляются те трудности, с которыми вообще сталкиваются, когда пытаются адиабатически пройти через «вырождение» системы [35].

Пример: исходя из *анизотропного* движения Лиссажу точечной массы в потенциальном поле $\Phi = \frac{1}{2}(\nu_1^2 x_1^2 + \nu_2^2 x_2^2)$ с известными квантовыми условиями $\varepsilon_1/\nu_1 = n_1 h$, $\varepsilon_2/\nu_2 = n_2 h$ путем бесконечно медленного изменения параметров ν_1, ν_2 приходят к вырождению $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ с *изотропным* упругим центральным полем $\Phi = \frac{\nu^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{\nu^2 r^2}{2}$ и дальше бесконечно медленным изменением формы—к общему центральному полю $\Phi = f(r)$ [36]. Но этим путем вообще приходят к движениям в центральном поле, которые нарушают квантовые условия (18б) для элемента поверхности. Если ν_1 и ν_2 уже были почти равны, то движение следует по фигуре Лиссажу, равномерно заполняющей прямоугольник со сторонами, параллельными x_1 и x_2, причем поверхностный момент исключительно медленно колеблется между нулем (движение почти точно вдоль диагонали прямоугольника) и определенными положительным и отрицательным максимальными значениями смещения (движение вдоль вписанного в прямоугольник эллипса с максимальной площадью). И поскольку эти своеобразные «витания» происходят неограниченно медленнее по мере приближения к изотропии $\nu_1 = \nu_2$, остается неопределенным, с каким значением поверхностного момента (Flächenmoment) приходят к изотропии. Но это случайное значение уже сохраняется в дальнейшем при переходе к общему полю $\Phi = f(r)$.

§ 9. Предположение [37], что и в квантовых условиях Эпштейна

$$\int p_1 dq_1 = n_1 h, \ldots, \int p_s dq_s = n_s h \tag{19}$$

для систем с s «разделяющимися» переменными $q_1 \ldots q_s$ левые части адиабатически инвариантны, уже требует для своего доказательства привлечения сложного математического аппарата. Дать это доказательство удалось

---

[35] Ср. исследования Бора, цитированные в сносках 54 и 55 на стр. 74.
[36] *P. Ehrenfest*. F (1916), § 9.
[37] *P. Ehrenfest*. F (1916), заключительное замечание.

Бюргерсу [38], одновременно показавшему, что сопряженные угловым переменным (по Бору — униформированные переменные)

$$w_r = \omega_r(t) + \delta_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, u) \qquad (20)$$

многократно-периодической системы (уравнение 17) моменты $I_1, I_2, \ldots, I_u$ можно всегда выбрать так[39], что они адиабатически инвариантны. Лишь при таком выборе квантовые условия Шварцшильда

$$I_1 = n_1 h \ldots, \; I_u = n_u h \qquad (21)$$

становятся определенными утверждениями, причем согласующимися с адиабатической гипотезой Бора.

Здесь еще в более общей форме выступают трудности, которые возникают при попытке адиабатического прохождения через вырождение.

§ 10. Далеко идущее разъяснение теории адиабатических преобразований и совершенно исключительное ее углубление было достигнуто благодаря большой работе Бора [40] 1918 г. и статье об основных постулатах квантовой теории, которую он недавно (1922) опубликовал [41].

Уже в 1913 г., в III части своей эпохальной работы «О строении атомов и молекул», Бор воспользовался одним адиабатическим преобразованием [42]. Он думал об образовании молекул водорода путем постепенного сближения двух нейтральных атомов и рассмотрел этот процесс, который должен был происходить бесконечно медленно по сравнению с вращением электронов в атоме на основании классической механики (аналогично H + He, He + He). В одной работе, корректурные листы которой были готовы уже в 1916 г., но опубликованной лишь в 1921 г. [43], Бор использовал дока-

[38] *J. Burgers*. Adiabat. Invarianten bij mechan. Systemen. I, II, III. «Versl. Akad. Amster.», 1917, 25, p. 849, 918, 1055; «Proc. Acad. Amster.», 1917, 20, p. 149, 158, 163; «Ann. Phys.», 1917, 52, S. 195; Het atoommodel van Rutherford-Bohr. Dissert. Leiden, 1918. — *G. Krutkow*. Bijdrage tot de theorie der adiabat. Invar. «Versl. Akad. Amster.», 1918, 27, p. 904; «Proc. Acad. Amster.» 1918, 21, p. 1112.

[39] *J. Burgers*. l. c., III. Ср.: *Н. Бор*. «Осн. постулаты», § 2, условие III и сноска 2 на стр. 131.

[40] *Н. Бор*. «К.Т.П.С.»

[41] *Н. Бор*. «Осн. постулаты».

[42] *N. Bohr*. Abhandlungen über Atombau. Braunschweig, 1921, Abh. III, § 4.

[43] *Н. Бор*. «Применения», § 1.

занную мной для периодической системы инвариантность $2\overline{T}/\nu$ для рассмотрения ряда очень интересных вопросов. Я хотел бы особенно подчеркнуть изящное замечание об адиабатической перестройке движения электронов в случае радиоактивного превращения без γ-излучения [44]. Здесь Бор расширил и доказательство адиабатической инвариантности $2\overline{T}/\nu$ на случай релятивистски меняющейся массы [45] и подробнее осветил упомянутую в § 6 трудность с перескакивающим маятником [46].

Бор предпочел название «принцип механической превращаемости»[47] более короткому «адиабатический принцип», чтобы устранить возможность неправильного толкования, будто речь идет о термодинамически-статистическом принципе [48]. Кроме того, этим названием подчеркивалось, что согласно этому принципу при известных обстоятельствах квантовая система реагирует квазиклассически, т. е. так, как будто она подчиняется классической механике именно тогда, когда на нее воздействуют извне достаточно ровно, терпеливо-осторожно, другими словами, адиабатически. Но, с другой стороны, она может показать, и действительно показывает (в общем), свои квантовые когти, как только воздействие осуществляется без достаточного терпения и осторожности. И Бор доказывает [49], что этот последний случай осуществляется, если путем даже медленного изменения условий движения (например, внешнего силового поля) перейти от «вырождения» с определенной степенью периодичности к более ограниченному «вырождению» с более высокой степенью периодичности u'. Фурье-разложения движений системы, которые вначале следовали u униформированным (угловым) переменным $w_1, w_2, \ldots, w_u$, требуют теперь дальнейших угловых переменных $w_{u+1}, w_{u+2}, \ldots, w_{u'}$, быстрота изменения которых $\omega_{u+1}, \omega_{u+2}, \ldots, \omega_{u'}$ в непосредственной окрестности вырождения исключительно мала.

Поскольку новые степени периодичности проявляются прежде всего как бесконечно медленные колебания [50], не-

---

[44] Там же, стр. 131.
[45] Там же, стр. 131, 132.
[46] Там же сноска 3 на стр. 127.
[47] *Н. Бор.* «К.Т.Л.С.», стр. 9; «Предисловие», стр. XIII.
[48] *Н. Бор.* «К.Т.Л.С», стр. 9, сноска. Но в своих последних работах Бор согласился с термином «адиабатический принцип». См.: *Н. Бор.* «Осн. постулаты», стр. 131, сноска 1.
[49] *Н. Бор.* «К.Т.Л.С.», стр. 29.
[50] Ср. выше, «пример» в конце § 8.

возможно считать изменение внешнего силового поля, в смысле адиабатического принципа, «бесконечно медленным по сравнению с внутренними движениями в системе». Соответственно этому Бор требует [51], чтобы в этом случае система в общем реагировала бы не квазиклассически, а устанавливалась бы «немеханически» по квантовым условиям

$$I_{u+1} = n_{u+1}\, h, \ I_{u+2} = n_{u+2}\, h, \ldots, \ I_{u'} = n_{u'} h,$$

которые принесли бы с собой вновь проявляющиеся медленные колебания, относящиеся к новым угловым координатам $w_{u+1}, w_{u+2}, \ldots, w_{u'}$.

Этим Бор осуществил шаг, значение которого для дальнейшего развития квантовой теории можно в полной мере оценить лишь в настоящее время. Бор установил также здесь часто обсуждавшийся контакт между адиабатическим принципом и принципом соответствия [52]. Принципом соответствия Бор руководствовался тогда, когда он настойчиво и в конце концов победоносно защищал против мнения других утверждение, что число квантовых условий системы не всегда равно числу степеней свободы s, но равно [53] степени периодичности u'. Здесь при бесконечно медленном выходе из вырождения вместе с новыми медленными колебаниями одновременно выступают, в смысле принципа соответствия, и новые квантовые числа $n_{u+1}, n_{u+2}, \ldots, n_{u'}$, изменения которых указывают на процессы перехода, которые как раз «соответствуют» этим новым колебаниям.

§ 11. Указанные здесь прокладывающие новые пути идеи Бор развил [54] во всей общности с помощью теории возмущений, а затем применяя их к важным примерам вырождений [55], а также к затронутой выше, в § 4 и 7, про-

---

[51] *Н. Бор.* «К.Т.Л.С.», стр. 31; «Предисловие», стр. XV—XVI; «Осн. постулаты», стр. 132, 146.

[52] *Н. Бор.* «Предисловие», стр. XVI; «Осн. постулаты», стр. 146.

[53] *Н. Бор.* «К.Т.Л.С.», стр. 23 (сноска), 26—27, 88, 105, 119; «Предисловие», стр. XVI !; «Осн. постулаты», стр. 120, уравнение (А), стр. 127, 145—146.

[54] См. в особенности: *Н. Бор.* «К.Т.Л.С.», стр. 29—33, 58—88! «Осн. постулаты», стр. 123—135.

[55] *Н. Бор.* «К.Т.Л.С.», стр. 101, 110, 119; «Оси. постулаты», стр. 149. Примечание о «пространственном квантовании в замечательном опыте О. Штерна и В. Герлаха».

блеме[56] «адиабатической инвариантности статистического веса»[57].

Эти результаты относятся — да простится мне нескромность таких суждений — к наиболее глубокому и вместе с тем изящному, что вообще добыто до сих пор относительно основ квантовой теории. И Бор уже позволяет нам предчувствовать, как будет проложен путь к некоторому «принципу существования и перманентности квантовых чисел», справедливость которого не будет уже связана с ограничением, что все движения рассмотренных систем «многократно-периодичны».

1906

ОБ ОДНОМ ЗАМЕЧАТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ КВАНТОВАНИЯ

(Совместно с Г. Брейтом)

1. Можно указать простые механические системы, для которых формальное приложение правил квантования приводит ко вполне определенной, но тем не менее явно нереальной картине стационарного движения. Принцип соответствия Бора[1] предоставляет возможность подойти к рассмотрению таких случаев с существенно новой точки зрения и, вероятно, позволит полностью разобраться в их решении.

---

[56] Обратите внимание на интересное использование Бором адиабатических преобразований для установления понятия разности энергии различных стационарных движений («К.Т.Л.С.», стр. 10; «Осн. постулаты», стр. 133).

[57] *Н. Бор.* «К.Т.Л.С.», стр. 11, 34—37, 107 (сноска), 133 (сноска!). «Осн. постулаты», стр. 135—137, 138! Особенное внимание следует обратить на замечание Бора о весе в случаях вырождения и о запрете таких стационарных движений, которые можно адиабатически перевести в движения, для которых установлено, что их вес равен нулю (см. отмеченные! места). Бор упростил («Осн. постулаты», стр. 136, сноска) мое доказательство «адиабатической инвариантности веса» (Е, 1914) тем, что с самого начала ограничился дискретными стационарными состояниями. Идеи Бора о не совсем точном установлении стационарных движений («К.Т.Л.С», стр. 69, 70, 85, 139, 140; «Осн. постулаты», стр. 127, 151—152; «Предисловие», стр. XVI—XVII!) сделают, возможно, необходимым возврат к моему, более сложному способу рассмотрения непрерывных распределений веса

[1] *Н. Бор.* Квантовая теория линейчатых спектров, I и II; *H. Kramers.* Intensities of spectral lines. Kopenhagen, 1919.

Примером является обсуждаемый ниже частный случай, выбранный так, чтобы по возможности упростить математический анализ [2].

2. Рассмотрим жесткий электрический диполь с моментом инерции I, свободно вращающийся в плоскости (x, y) вокруг своего центра.

Представим себе, что некоторое кинематическое устройство упруго обращает направление вращения диполя, как

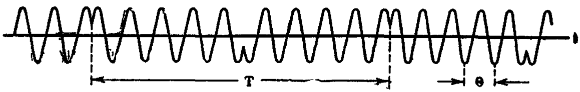


Рис. 1

только угол его поворота, отсчитываемый от оси x, достигает границ интервала

$$-f\cdot 2\pi \leqslant \varphi \leqslant f\cdot 2\pi, \tag{1}$$

где f — большое, в общем случае иррациональное число.

Будем считать заданной угловую скорость вращения диполя ω; его момент количества движения p при этом равен $I\omega$. Диполь совершает периодическое движение с периодом

$$T = 4f\,\frac{2\pi}{\omega}. \tag{2}$$

В процессе движения диполь проходит интервал углов, определяемый соотношением (1), совершая за период T $2f$ полных оборотов в одну сторону и столько же оборотов в другую [3].

В описании движения существенную роль играет «квазипериод»

$$\theta = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{3}$$

---

[2] Случай, несколько отличающийся от рассматриваемого в § 2, а именно случай жесткого диполя, подвешенного и вращающегося на упругой нити с малой жесткостью, обсуждался одним из нас с Эйнштейном еще в 1912 г. в связи с проблемой квантования движения молекулы H_2 (см. сноску [3]). Однако в рамках тогдашних представлений было невозможно разрешить указываемую здесь трудность.

[3] *P. Ehrenfest.* «Verh. d. D. Phys. Gres.», 1913, 15, S. 451.

Этот квазипериод в $4f$ раз меньше T и равен времени поворота диполя на угол 2π. Проекция электрического момента диполя на некоторую ось, лежащую в плоскости (x, y) (например, на ось x), меняется со временем так, как показано на рис. 1, причем для простоты «большое число» выбрано равным примерно 2.

3. Условие квантования для нашей системы имеет вид

$$\int p\,dq = nh \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

где под координатой q понимается угол φ, а p — момент количества движения $I\omega$, причем интеграл берется по полному периоду движения T. В нашем случае это дает

$$4f \cdot 2\pi p = nh \tag{5}$$

или

$$p = n\frac{h}{8f\pi}. \tag{6}$$

Если границы интервала (1) выбраны так, чтобы f было очень большим, то разности между последовательными значениями p в формуле (6) (а также между последовательными значениями энергии) становятся очень малыми.

4. Этот результат представляется неприемлемым. В самом деле, если мы перейдем к пределу $f \to \infty$, т. е. снимем ограничение, накладываемое на углы поворота диполя, то уравнение (4) дает, естественно, следующий результат:

$$p = m\frac{h}{2\pi}, \tag{7}$$

поскольку теперь периодом является θ. В формуле (7) p меняется конечными шагами, в то время как в предыдущем рассмотрении [см. выражение (6)] эти шаги становятся бесконечно малыми при $f \to \infty$. В этом состоит существо обсуждаемого противоречия.

5. Принцип соответствия Бора позволяет взглянуть на этот парадокс с новой точки зрения. Как и раньше, будем считать f большим числом и предположим, что допустимые значения p в действительности даются формулой (6). Выясним требования, накладываемые принципом соответствия на вероятность перехода из состояния $n = n_1$ в состояние $n = n_2$ (например, в результате взаимодействия с полем излучения). Принцип соответствия сопоставляет вероятно-

сти переходов определенным коэффициентам разложения в ряд Фурье функции, представленной графически на рис. 1, которая дает зависимость от времени x — компоненты электрического момента диполя. Разложение Фурье этой функции имеет вид

$$X = \sum_{s=1}^{\infty} A_s \cos\left(s \frac{2\pi t}{T}\right). \tag{8}$$

Гармоника, соответствующая переходу $n_1 \to n_2$, определяется соотношением

$$s = n_2 - n_1. \tag{9}$$

Из непосредственного рассмотрения рисунка или в результате простого расчета становится ясно, что амплитуды всех гармоник малы, за исключением тех, период которых приблизительно равен «квазипериоду» θ, т. е. для которых

$$\frac{T}{s} \approx \theta \tag{10}$$

или

$$s \approx 4f. \tag{11}$$

Поэтому, если f велико, все переходы имеют малую вероятность, за исключением тех, для которых приближенно выполняется соотношение

$$n_2 - n_1 \approx 4f, \tag{12}$$

т. е. с учетом (6)

$$p_2 - p_1 = (n_2 - n_1) \frac{h}{4f \cdot 2\pi} \approx \frac{h}{2\pi}, \tag{13}$$

что совпадает с интервалом между последовательными значениями p, даваемыми формулой (7) для бесконечно больших значений f.

6. Таким образом, если мы возьмем набор одинаковых систем, характеризующихся одним и тем же большим значением f, причем все они в начальный момент времени $t = 0$ находятся в состоянии покоя (так что $p = 0$), и подвергнем каждую из них независимо действию излучения черного тела, то по прошествии времени t мы будем иметь следующую картину.

А. В очень тесной последовательности значений p, допускаемых соотношением (6), заметное число систем будет находиться лишь в состояниях, для которых значения p почти совпадают с даваемыми формулой (7).

В. Переходы, которые могут совершать наши системы, почти всегда характеризуются величиной $h/2\pi$ [а не целым ее кратным, см. (13)]. Это опять-таки находится в соответствии с тем фактом, что в случае $f \to \infty$ Фурье-разложение X- (или Y)-компоненты содержит только одну основную гармонику и не содержит других, так что по принципу соответствия при этом возможны лишь переходы с $m_2 - m_1 = \pm 1$ [см. (7)].

7. Следует указать на один вопрос, точное решение которого было бы важным. При обсуждении теплового равновесия наших систем мы должны знать «веса» (т. е. априорные вероятности), которые соответствуют каждому значению p. При $f \neq \infty$ естественно считать, что все значения, даваемые формулой (6), должны входить с одинаковым весом, независимо от значения и плотности числа уровней. С другой стороны, при $f \to \infty$ получается, что отличным от нуля весом обладают только те уровни, для которых выполняется условие (7) (для них этот вес оказывается одинаковым). Более тщательное рассмотрение этого вопроса, по-видимому, потребует принять во внимание тот факт, что здесь мы имеем дело с двойным предельным переходом: $t \to \infty$ (нужно бесконечно большое время для установления теплового равновесия) и $f \to \infty$. Наша неудовлетворенность имеет своими корнями неосознанное требование, чтобы результат не зависел от порядка, в котором достигаются эти два предела.

1922

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СТАТИСТИКИ БОЛЬЦМАНА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ И ЕЕ СОПОСТАВЛЕНИЕ С ИНТЕРПРЕТАЦИЯМИ ДРУГИХ НОВЫХ СТАТИСТИК

(Совместно с Г. Уленбеком)

Резюме. Волновая механика дает возможность интерпретации статистики Больцмана — Планка в той же мере, как и статистики Бозе — Эйнштейна или Ферми — Дирака. Лишь в тех случаях, когда на решения волновой механики должны быть наложены определенные требования симметрии, больцмановская статистика оказывается неприменимой.

Работы Шредингера, Ферми, Гейзенберга и Дирака [1] показали, каким образом с точки зрения волновой механики можно обосновать, с одной стороны, подход Бозе — Эйнштейна и, с другой стороны, подход Паули — Ферми — Дирака к молекулярной статистике. Мы хотели бы кратко пояснить, как на основе волновой механики можно очень естественно интерпретировать старую статистику Больцмана — Планка. Отсюда будет ясно видно, что волновая механика сама по себе никоим образом не требует отказа от больцмановской статистики. Лишь условие выбора некоторых одних решений уравнения Шредингера и отбрасывания других приводит к необходимости отвергнуть больцмановский подход.

Для пояснения достаточно ограничиться самым простейшим случаем «одномерного идеального газа». Пусть n одинаковых молекул с массой m движутся в трубе длиной l, не испытывая действия внешних сил и столкновений друг с другом. Уравнение Шредингера для такой системы имеет вид

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_N^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}E\right]\psi=0. \qquad (1)$$

Мы будем рассматривать решения этого уравнения, имеющие вид собственных функций,

$$\psi=\sin k_1x_1\cdot\sin k_2x_2\ldots\sin k_Nx_N, \qquad (2)$$

где $k_1,\ldots, k_N$ — целые числа, которые, в частности, могут равняться между собой. Соответствующее собственное значение энергии равно

$$E=\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2}+\ldots+\varepsilon_{k_N}=\sum n_s\varepsilon_s, \qquad (3)$$

где n_s — число таких k, которые имеют одно и то же значение s; каждое из таких k дает в предыдущую сумму одинаковый вклад, равный

$$\varepsilon_s=\frac{h^2}{8\pi^2 m}s^2. \qquad (4)$$

Но то же самое значение E, притом с теми же значениями чисел $k_1,\ldots, k_N$, мы будем иметь для всех тех решений, которые получаются из решения (2) различными перестановками аргументов x при фиксированных $k_1,\ldots, k_N$. Число *различных* [1] решений, которые могут быть получены таким

[1] Обратим внимание, что, например, из выражения $\sin 3x\sin 5y\times$ $\times\sin 5z$ нельзя получить нового в смысле волновой механики решения перестановкой y и z, а можно лишь перестановками x и y или x и z ($G=3!/1!2!$).

путем, равно

$$G = \frac{N!}{n_1!\, n_2! \ldots}. \tag{5}$$

Согласно Гейзенбергу, допустимыми являются лишь антисимметричные комбинации

$$\psi^{\text{antisymm}}(x_1, \ldots, x_N) = \begin{vmatrix} \sin k_1x_1 & \ldots & \sin k_1x_N \\ \vdots & & \\ \sin k_Nx_1 & \ldots & \sin k_Nx_N \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Здесь совпадение двух значений k, очевидно, исключается, так что n_s могут принимать лишь значения 0 или 1.

С другой стороны, как заметил Дирак [2], можно считать, что допустимы лишь симметричные комбинации таких ψ

$$\psi^{\text{symm}}(x_1, \ldots, x_N) = \sum \sin k_1x_{p_1} \sin k_2x_{p_2} \ldots \sin k_Nx_{p_N}, \tag{7}$$

где $p_1, \ldots, p_N$ — некоторая перестановка чисел $k_1, \ldots, k_N$ и сумма берется по всем перестановкам. Здесь произвольное число величин k может быть одинаковым, так что n_s могут принимать любые значения.

Таким образом, если считать, что при переходе от волновой механики к корпускулярной теории n_s должно означать число молекул, обладающих кинетической энергией ε_s, то предположение о допустимости лишь решений ψ^{symm} приводит к статистике Бозе — Эйнштейна (в которой много частиц могут иметь одно и то же значение энергии); допущение лишь решений ψ^{antisymm} приводит к статистике Паули — Ферми — Дирака (каждое значение энергии может принимать не более чем одна молекула); наконец, допущение *всех* решений, имеющих вид произведений (2), с очевидностью ведет к распределению Больцмана, даваемому уравнением (5) [3].

Лейден, Институт теоретических исследований, 1926 г.

---

[2] Согласно Дираку [1], допустимы решения либо (6), либо (7), выбор же между ними является в какой-то степени произвольным.

[3] В случае $N = 2$ или 3 очень наглядно геометрическое сопоставление функций ψ, ψ^{symm} и ψ^{antisymm}. Но как можно это N-мерное волновое движение изобразить в виде одномерного движения, поступательного движения молекул одномерного газа? Особенно важным этот вопрос представляется с точки зрения понимания принципа Паули. В то время как в своей первоначальной формулировке (запрет тождественных движений электронов в атоме) принцип Паули был вполне наглядным, до сих пор, насколько нам известно, не получил корпускулярной интерпретации расширенный принцип Паули (допущение только ψ^{antisymm}).

Литература

1 *E. Schrödinger*. «Phys. Zs.», 1926, **27**, S. 95; *E. Fermi*. «Nuovo Cim.», 1924, **1**, S. 145; «Atti Lincei», 1926 (6) **3**, p. 145; «Zs. f. Physik.», 1926, **36**, S. 902; *W. Heisenberg*. «Zs. f. Physik», 1926, 38, S. 411; *P. A. M. Dirac*. «Proc. Roy. Soc.», 1926, **112**, S. 661.
2 *S.N. Bose*. «Zs. f. Physik.», 1924, **26**, S. 178; *A. Einstein*. «Berl. Ber.», 1924, S. 261; 1925, S. 3, 18.

ЗАМЕЧАНИЕ О ПРИБЛИЖЕННОЙ СПРАВЕДЛИВОСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ В РАМКАХ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Из уравнения Шредингера с помощью короткой и элементарной выкладки легко получить соотношение

$$m\frac{d^2}{dt^2}\iiint d\tau\,\psi\psi^* x = \iiint d\tau\,\psi\psi^*\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

являющееся *точным* и не основанным на каких-либо приближениях. Для очень узкого волнового пакета, если его можно считать узким неопределенно долго (m порядка 1 *г*), это соотношение означает, что он испытывает ускорение, которому в смысле уравнений движения Ньютона соответствует сила $-\partial V/\partial x$.

Желательно получить по возможности простой ответ на такой вопрос: как следует воспринимать основные ньютоновские уравнения движения классической механики с позиций квантовой механики?

Благодаря целой серии новых публикаций с достаточной полнотой выяснено, что классическая механика в области макроскопических процессов остается справедливой с очень высокой степенью точности и, далее, установлены пределы ее применимости [1].

Но нам хотелось бы указать на одно, особенно простое соотношение, получаемое из уравнения Шредингера без каких-либо *пренебрежений*. Это соотношение, возможно,

[1] *L. de Broglie*. Thèse, 1924. «Journ. de Phys. et le Rad.», 1926, (6), **7**, p. 1, 32; C. R., 1925, **180**, p. 498; 1926, **183**, p. 272. — *L. Brillouin*. «Journ. de Phys. et le Rad.», 1926, 7, p. 353. — *E. Schrödinger*. «Naturwissensch.», 1926, **14**, S. 664. — *P. Debye*. «Phys. Zs.», 1927, 28, S. 170; — *W. Heisenberg*. «Zs. f. Phys.», 1927, **43**, S. 172. — *E. H. Kenndall*. «Zs. f. Phys.», 1927, **44**, S. 326.

еще более удобным образом позволит увидеть связь между волновой и классической механикой.

Ограничимся случаем одной степени свободы, когда уравнение Шредингера имеет следующий вид:

$$-\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = ih\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{1}$$

$$-\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2} + V(x)\psi^* = -ih\frac{\partial\psi^*}{\partial t}. \tag{1*}$$

Обозначим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, x\psi\psi^* \equiv Q(t), \tag{2}$$

$$ih\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x} \equiv P(t)\ [2] \tag{3}$$

и определим dQ/dt и dP/dt, используя (1) и (1*).

Подставляя и интегрируя по частям, сразу же и без каких-либо пренебрежений находим

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{m}P; \tag{4}$$

$$m\frac{d^2Q}{dt^2} = \frac{dP}{dt} = \int dx\,\varphi\varphi^*\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right). \tag{5}$$

Уравнение (5), однако, с очевидностью показывает, что, когда ширина (вероятностного) волнового пакета $\psi\psi^*$ достаточно мала (по сравнению с макроскопическими размерами), ускорение центра тяжести Q волнового пакета соответствует, по ньютоновскому уравнению, силе, действующей в месте расположения волнового пакета и равной $(-\partial V/\partial x)$.

Замечание. Постепенное расплывание волнового пакета подробно обсуждалось Гейзенбергом (см. ссылку на литературу). Его выкладки для случая движения материальной точки в одномерном пространстве без воздействия сил можно сделать еще более наглядными, сопоставив их с ана-

[2] Разложение ψ по собственным функциям $\psi = \Sigma c_n e^{\frac{iE_n t}{h}} \varphi_n(x)$ приводит к соотношению в матричном виде для $q_{nm} = e^{\frac{i}{h}(E_n - E_m)t} \times \int dx\cdot x\ \varphi_n\varphi_m$ и p_{nm}.

логичными расчетами, известными в теории теплопроводности.

А именно, уравнение Шредингера для случая $V(x) = 0$ по форме совпадает с уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \tag{6}$$

где

$$a^2 = i\frac{h}{2m}. \tag{7}$$

Подставив в его общее решение (см., например: Riemann — Weber, Bd. II)

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \psi(0, \xi) \tag{8}$$

в качестве волновой функции начального состояния

$$\psi(0, \xi) = Ce^{-\frac{\xi^2}{2\omega^2} + i\mu\xi}, \tag{9}$$

так что

$$(\psi\psi^*)_{t=0} = C^2 e^{-\frac{\xi^2}{\omega^2}} \tag{10}$$

(где μ — произвольная вещественная постоянная), можно получить точно так же, как и у Гейзенберга, выражение для последующего распределения плотности «волнового пакета»

$$\psi\psi^* = c(t)\, e^{-\frac{\left(x - \frac{h\mu}{m} t\right)^2}{\Omega^2}}, \tag{11}$$

где

$$\Omega^2 = \omega^2 + \frac{h^2 t^2}{m^2 \omega^2}. \tag{12}$$

Этому соответствует перемещение волнового пакета со скоростью $h\mu/m$ и увеличивающееся со временем расплывание. Увеличение ширины вдвое по сравнению с первоначальной (т. е. $\Omega^2 = 4\omega^2$) наступит, таким образом, через промежуток времени, равный

$$T = \sqrt{3}\,\frac{m\omega^2}{h} \qquad \left(h = \frac{6{,}6\cdot 10^{-27}}{2\pi}\right). \tag{13}$$

Для $m = 1$ г, $\omega = 10^{-3}$ см получается $T = 10^{21}$ сек; в то же время для $m = 1{,}7\cdot 10^{-24}$ г и $\omega = 10^{-8}$ см $T = 10^{-13}$ сек!

1927

III

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

УПРОЩЕННЫЙ ВЫВОД ФОРМУЛЫ ТЕОРИИ КОМБИНАЦИЙ, ЛЕЖАЩЕЙ В ОСНОВЕ ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ПЛАНКА

(Совместно с Г. Каммерлинг-Оннесом)

Мы имеем в виду выражение

$$C_P^N = \frac{(N-1+P)!}{P!\,(N-1)!}, \tag{A}$$

показывающее, сколькими различными способами N монохроматических резонаторов $R_1, R_2, \ldots, R_N$ могут быть распределены по различным ступеням энергии, соответствующим последовательным кратным $0, \varepsilon, 2\varepsilon, \ldots$ одного и того же количества энергии ε, если все резонаторы вместе должны иметь определенное количество $P\varepsilon$ энергии, целое кратное ε.

Два распределения считаются тождественными тогда и только тогда, когда 1-й резонатор при одном распределении находится на той же ступени энергии, как и при другом, также 2-й резонатор, 3-й и т. д.

На конкретном примере мы введем символическое обозначение подобного рода распределений. Пусть $N = 4$, $P = 7$. Одним из возможных распределений будет следующее: резонатор R_1 приходится на ступени 4ε (R_1 обладает энергией 4ε), R_2 — на ступени 2ε, R_3 — на ступени 0ε (т. е. вовсе не имеет энергии), R_4 — на ступени ε. Наш символ, читаемый слева направо, будет показывать распределение энергии последовательно между резонаторами R_1, R_2, R_3, R_4; здесь общая энергия резонаторов равняется 7ε. В названном частном случае наше обозначение примет такой вид:

$$\left\| \frac{\varepsilon}{} \middle| \frac{\varepsilon}{} \middle| \frac{\varepsilon}{} \middle| \frac{\varepsilon}{} \middle| \; 0 \; \middle| \frac{\varepsilon}{} \middle| \frac{\varepsilon}{} \middle| \; 00 \; \middle| \frac{\varepsilon}{} \right\|$$

или проще:

$$\| \varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon \; 0 \; \varepsilon\varepsilon \; 00 \; \varepsilon \|$$

В криогенной лаборатории Каммерлинг-Оннеса (слева направо): П. Эренфест, Г. Лоренц, Н. Бор, Г. Каммерлинг-Оннес

При любых целых значениях N и P наш символ содержит P раз знак ε и $(N-1)$ раз[1] знак 0.

Сколько различных символов можно получить таким образом из данного числа значков ε и 0?

Ответ:

$$\frac{(N-1+P)!}{P!\,(N-1)!}. \tag{1}$$

Доказательство: будем сперва рассматривать все $(N-1+P)$ значков ε .. ε, 0 ... 0 как отдельные различные индивидуумы. Тогда их можно разместить

$$(N-1+P)! \tag{2}$$

способами между значками || ||. Заметим далее, что каждые

$$(N-1)!\;P! \tag{3}$$

из этих размещений в наших обозначениях не будут отли-

[1] К этим $(N-1)$ «промежуточным стенкам» мы приходим, как только пожелаем объяснить появление множителя $(N-1)!$ в знаменателе выражения (А). Планк показывает, что искомое число распределений равняется числу «всех комбинаций с повторениями из N элементов класса P», и ссылается для доказательства на вывод соответствующей формулы в учебниках комбинаторики. Там вывод формулы (А) делается при помощи перехода «от n к $n+1$» и не способствует наглядному ее уяснению.

чаться друг от друга (и будут соответствовать распределению индивидуально различных резонаторов по тем же самым ступеням энергии); это будут все те, которые получаются друг из друга за счет перестановки между собой P значков[2] ε и $N-1$ значков 0.

Число различных символов получается, очевидно, делением выражений (2) и (3), что и требовалось доказать.

Приложение

Противопоставление гипотезы ступеней энергии Планка и гипотезы квантов энергии Эйнштейна.

Перестановка значков ε представляет чисто формальный вспомогательный прием, точно так же, как и перестановка значков 0. Нередко аналогичному, также чисто формальному приему, к которому прибегает Планк (распределение «элементов энергии» по N резонаторам), по недоразумению дают физическую интерпретацию, которая совершенно не согласуется с формулой Планка и при последовательном применении привела бы к формуле Вина.

Эта интерпретация заключается в отождествлении «элементов энергии» Планка со «световыми квантами» Эйнштейна. Сообразно с этим полагают: различие между теориями Планка и Эйнштейна состоит в том, что последний и в свободном пространстве предполагает существование независимых друг от друга квантов энергии, первый же допускает их только в материи, в резонаторах. На ошибку, лежащую в основе такого взгляда, уже не раз указывалось[3]. У Эйнштейна, действительно, играют роль P одинаковых, независимо друг от друга существующих квантов. Например, он рассматривает случай, когда они за счет необратимого процесса распространяются из пространства в N_1 см^3 в большее пространство в N_2 см^3, и находит, согласно формуле Больцмана ($S = k \ln W$), что увеличение энтропии равняется при этом[4]

$$S - S_0 = k \ln \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^P, \tag{α}$$

т. е. равняется тому же увеличению энтропии, как при соответствующем необратимом распространении P газовых молекул, так как числа способов, какими P квантов могут распределиться в пространстве сперва по N_1, а затем по N_2 ячейкам, относятся друг к другу как

$$N_1^P : N_2^P. \tag{β}$$

Если бы и у Планка задача состояла в распределении по N резонаторам P независимых друг от друга величин ε, то и у него число возможных распределений изменялось бы при переходе от N_1 и N_2 резонаторам в отношении (β) и сообразно с этим энтропия изменя-

[2] Ср. приложение.

[3] *П. Эренфест.* «Журнал Русского физико-химического общества», *1914*; *Ю. Крутков.* Там же.

[4] *A. Einstein.* «Ann. d. Phys.», 1905, 17, S, 132.

лась бы по формуле (α). Но мы знаем, что, по Планку, получается совсем иное отношение

$$\frac{(N_1-1+P)!}{(N_1-1)!\,P!} : \frac{(N_2-1+P)!}{(N_2-1)!\,P!} \tag{γ}$$

(приближающееся к (β) только при весьма больших значениях P) и соответствующая этому зависимость энтропии от N. Чем же это объясняется? Да просто следующим образом: у Планка речь идет не о действительно независимых квантах ε; расчленение кратных ε количеств энергии на отдельные ε следует у него рассматривать с оговоркой; это только такой же формальный вспомогательный прием, которым у нас является перестановка между собой значков ε и значков 0. Действительным объектом вычислений остается число различных между собой распределений N резонаторов по ступеням энергии 0, ε, 2ε, ... при данном общем количестве энергии $P\varepsilon$. Если, например, $P = 3$, $N = 2$, то Эйнштейн будет различать $2^3 = 8$ способов, по которым три (одинаковых) световых кванта A, B, C могут быть распределены в ячейках 1, 2, как это указано в прилагаемой таблице.

	A	B	C
I	1	1	1
II	1	1	2
III	1	2	1
IV	1	2	2
V	2	1	1
VI	2	1	2
VII	2	2	1
VIII	2	2	2

Планк, напротив, должен три способа II, III, V считать за один, так как все три выражают тот факт, что резонатор R_1 находится на ступени 2ε, а резонатор R_2 — на ступени ε; точно так же следует и способы IV, VI, VII считать за один; R_1 находится на ступени ε, R_3 — на ступени 2ε. Если еще принять во внимание I (R_1 имеет энергию 3ε, R_2 — 0ε) и II (R_1 имеет 0ε, R_2 — 3ε), то получим действительно

$$\frac{(N-1+P)!}{(N-1)!\,P!} = \frac{(2-1+3)!}{(2-1)!\,3!} = 4$$

различных распределений резонаторов R_1, R_2 по ступеням энергии.

Мы можем следующим образом резюмировать сказанное: точка зрения Эйнштейна неизбежно приводит к формуле (α) для энтропии и отсюда неизбежно к формуле Вина, а не к формуле Планка. Формальный прием Планка (распределение ε по N резонаторам) не может быть интерпретирован в смысле теории световых квантов Эйнштейна.

1915

О ДВУХ ИЗВЕСТНЫХ ВОЗРАЖЕНИЯХ ПРОТИВ *H*-ТЕОРЕМЫ БОЛЬЦМАНА

(Совместно с Т. А. Афанасьевой-Эренфест)

§ 1

H-теорема в обычной своей формулировке гласит: если некоторая кинетическая газовая модель в процессе своего движения проходит во времена $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ состояния

$$\ldots Z_1,\ Z_2, \ldots,\ Z_n, \ldots, \tag{A}$$

то соответствующие последовательные значения величины H удовлетворяют неравенствам

$$\ldots H_1 > H_2 > H_3 > \ldots > H_n. \tag{1}$$

Величина H здесь означает энтропию, взятую с обратным знаком.

§ 2. Возражение Лошмидта об обратимости[1]

Предварительное замечание. Пусть для некоторых двух состояний Z_z и Z'_z, во-первых, расположение молекул одинаково и, во-вторых, скорости соответствующих молекул равны по величине, но противоположны по направлению. Тогда

$$H'_z = H_z. \tag{2}$$

Кинетическая газовая модель является консервативной механической системой. Поэтому если она может совершать движение, характеризующееся последовательностью состояний (A), то в равной мере она может совершать и движение, характеризующееся последовательностью

$$\ldots Z'_n,\ Z'_{n-1}, \ldots,\ Z'_1 \ldots \tag{B}$$

При этом движении согласно (1) и (2) имеем

$$\ldots H'_n \leqslant H'_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant H'_1 \ldots \tag{3}$$

---

[1] *Loschmidt.* «Wien. Sitzungber.», 1876, Bd. II, 73, S. 139; далее см. письма: Culverwell, Burbury, Watson, Larmor, Bryan, Fitzgerald, Boltzmann. «Nature», 1894—1895, 51, p. 31, 78, 152, 175, 221, 293, 319, 413.

Таким образом, для любого движения модели, при котором H убывает от H_1 до H_n, обращением скоростей всегда можно получить движение, при котором H в обратном порядке возрастает от H_n до H_1.

§ 3. Возражение Цермело о повторяемости [2]

Как известно, г. Цермело доказал с помощью механической теоремы Пуанкаре, что поведение обычной кинетической модели полностью изолированного газа является квазипериодическим.

Пусть движение модели от состояния Z_1 до состояния Z_n описывается последовательностью (A), причем величина H уменьшается от некоторого сравнительно большого значения H_1 до меньшего значения H_n. Тогда по истечении *конечного* (хотя, возможно, и необозримо большого) промежутка времени в дальнейшем движении системы, если оно не подвергается никаким возмущениям, обязательно встретится последовательность

$$\ldots(Z_1),\ (Z_2),\ldots(Z_n),\ldots, \tag{C}$$

сколь угодно близкая к последовательности (A) по всем параметрам [3]. При этом величина H будет пробегать последовательность значений

$$\ldots\ (H_1),\ (H_2),\ldots,\ (H_n),\ldots, \tag{4}$$

где (H_z) отличается от H_z сколь угодно мало. Так как $H_1 > H_n$ и (H_1) очень близко к H_1, то

$$(H_1) > H_n. \tag{5}$$

Поэтому в процессе движения от Z_n до (Z_1) вопреки утверждению H-теоремы в приведенной выше формулировке функция H должна возрастать. Таким образом, из квазипериодичности поведения изолированной газовой модели следует, что H-теорема в этой формулировке неверна.

---

[2] *Zermelo*. «Wied. Ann.», 1896, 57, S. 485; 1896, 59, S. 793; «Phys. Zs.», 1900, 1, S. 317; «Jahresber. d. Math. Verein», 1906, S. 232.

[3] Относительно ограничений справедливости этого высказывания см. предыдущую ссылку.

§ 4. Ответ Больцмана на оба возражения[4]

Доказательство H-теоремы явно опирается на некоторые утверждения теории вероятностей. В соответствии с этим получаемые таким путем неравенства (1) нужно понимать в следующем смысле. Рассмотрим совокупность всех механически возможных движений модели, считая, что каждое движение может быть неограниченно продолжено во времени вперед и назад. Выделим такие фазы движения P_A, во время которых величина H принимает значение H_A, сильно отличающееся от минимального значения. Рассмотрим теперь последовательность состояний, очень близких к состояниям P_A. По истечении промежутка времени τ, который можно выбрать сколь угодно большим — во всяком случае таким, чтобы за это время в модели произошло много столкновений между молекулами,— система придет, вообще говоря, к отличным от H_A значениям величины H, совокупность которых мы обозначим через H_B. Могут представиться три случая:

$$H_B < H_A \text{ (I)}; \quad H_B = H_A \text{ (II)}; \quad H_B > H_A \text{ (III)}.$$

A. H-теорема вовсе не утверждает, что случай (III) невозможен.

B. Однако она утверждает, что если H_A сильно отличается от минимального значения H, то относительное число[5] таких P_A, которым соответствуют случаи (II) и (III), исчезающе мало по сравнению с числом тех P_A, которые приводят к случаю (I).

C. Утверждения теории вероятностей, лежащие в основе H-теоремы, нисколько не противоречат квазипериодичности движения изолированной модели. Напротив, они как раз предполагают[6], что величина H в течение достаточно большого промежутка времени многократно возвращается к рассматриваемым значениям, в том числе и к таким, которые больше исходного значения.

Следовательно, анализ Цермело не свидетельствует о на-

---

[4] *Больцман.* Теория газов, т. II, § 88, 89.

[5] Так как P_A образуют непрерывное множество, то мера их относительного числа не свободна от произвола. Однако в этом пункте описание Больцмана полностью соответствует описанию Цермело.

[6] Это утверждение Больцмана послужило источником многочисленных недоразумений. Мы здесь ограничимся ссылкой на обсуждение, следующее за формулой (6) § 6.

личии противоречия между уравнениями механики и использованными Больцманом утверждениями теории вероятностей [7]. Более того, здесь имеется как раз поразительное согласие между ними.

§ 5

Но если следовать Больцману в безоговорочном признании квазипериодичности, то нельзя обойти молчанием вопрос, поставленный Цермело: как же все-таки могут одновременно выполняться утверждения B и C без внутреннего противоречия? Представим себе, что движение модели начинается с такого состояния P_A, что в течение последующего промежутка времени τ значение H должно уменьшиться. Это движение может быть неограниченно прослежено и дальше; по прошествии достаточно долгого времени кривая изменения величины H обязательно поднимется до значения H_A и даже еще выше. Проведем горизонтальную прямую на уровне значения H_A. Она пересекает бесконечную кривую изменения H в таких точках, где модель в процессе своего движения принимает аномально большое значение H, равное H_A. Утверждение B означает, что если от каждой такой точки пересечения пройти направо интервал τ, то мы обнаружим там, «как правило», более низкие точки кривой. Точно так же можно было бы вместо H_A рассмотреть любое более высокое значение $H_{A'}$.

Г-н Цермело подробно излагает геометрические доводы, которые заставляют его отвергнуть такую возможность. Просто невозможно представить себе, чтобы кривая из любой точки, расположенной выше некоторого значения, «как правило», шла вниз [8]. Здесь нам придется ограничиться указанием на подробные объяснения, приводимые г. Цермело.

В этой связи нужно отчетливо представлять себе, что здесь уже дискуссия идет о чисто геометрической трудности и не имеет больше отношения к механике. Такое сведение

---

[7] Наше рассмотрение совершенно не затрагивает следующей чрезвычайно сложной проблемы: являются ли сами механические, а также теоретико-вероятностные предпосылки (частотные гипотезы), на которых основано доказательство Больцмана, внутренне непротиворечивыми? Мы ограничим нашу задачу лишь выяснением другого вопроса, настоятельно требующего разрешения, а именно: достаточно ли приведенных двух возражений для установления противоречивости больцмановской H-теоремы?

[8] См., в частности, работу Цермело в «Wied. Ann.», 1896, 59, S. 797). начиная со слов: «... Wie ich mir das aber vorstellen soll...» (.. как я, однако, должен себе это представлять...).

проблемы к чисто геометрическим рассуждениям обусловливает серьезность возражения против доказательства Больцмана. Поэтому необходимо выяснить, в каком смысле можно отстаивать утверждение о том, что поведение кривой H не согласуется с геометрическими доводами г. Цермело.

§ 6

Сделать это удается простым и естественным путем, если проследить точно такую же геометрическую трудность, следуя Больцману [9], на одном очень элементарном примере из теории вероятностей. Рассмотрим N шаров (например, 100), занумерованных последовательными натуральными числами и разложенных по двум урнам. Пусть урна A содержит P_0 шаров (например, 90), а урна B, соответственно $Q_0 = N - P_0$ шаров, причем неизвестны конкретные номера шаров, лежащих в каждой урне. Далее, пусть в некотором сосуде находятся N лотерейных билетов с номерами от 1 до N. Регулярно, с интервалом в единицу времени из сосуда вынимается лотерейный билет, просматривается и возвращается обратно. Каждый раз при этом шар, соответствующий выпавшему номеру, извлекается из той урны, в которой он находится, и перекладывается в другую урну, где он и остается до тех пор, пока снова не выпадает его номер.

Конечно, всегда более вероятно, что шар — обладатель выпавшего номера окажется в той урне, где шаров больше, чем в другой, более пустой. Поэтому пока в урне A число шаров намного больше, чем в урне B, как правило, с каждым разом шары будут переходить из урны A в B, и лишь изредка, в виде исключения, шар из B может перейти в A.

Для графического описания мы представим себе ось абсцисс помеченной эквидистантными точками, соответствующими моментам вытягивания билетов; отметке с номером z сопоставим точку с ординатой

$$\Delta_z = |P_z - Q_z|$$

(P_z и Q_z — числа шаров, находящихся в урнах A и B после z-го вытягивания, Δ_z — абсолютная величина их разности). Мы получим дискретную последовательность точек, каждая из которых лежит на две единицы выше или ниже ближайшей предшествующей (никакой третьей возможности предста-

[9] *Boltzmann*. «Nature», 1894, S. 413, 581 (заметим, что первая публикация Цермело появилась позже).

виться не может). Начальная точка, которой соответствует $\Delta_0 = 80$, лежит довольно высоко. Если точка Δ_z оказывается на той же высоте или еще выше, то, как правило, Δ_{z+1} будет ниже Δ_z. Отношение вероятностей движения вниз и вверх на z-м шаге равно

$$\frac{N+\Delta_z}{2N} : \frac{N-\Delta_z}{2N}. \tag{6}$$

Поэтому «Δ-кривая» обнаруживает явную тенденцию стремиться вниз, лишь изредка поднимаясь вверх на одну или несколько ступенек. Только после того, как она уже сильно опустится вниз (число шаров в урнах перестает сильно различаться), такие «возвратные» события становятся более частыми и скорость спуска уменьшается. Вероятность того, что некоторая последовательность вытянутых номеров снова приведет к значительному увеличению Δ, очено мала. Однако даже такая последовательность, в результате которой все N шаров соберутся в одной урне, имеет отличную от нуля вероятность. Повторяя эксперимент достаточно долго, можно добиться того, что отсутствие такого «горба» — даже и наивысшего из всех возможных — будет сколь угодно маловероятным. Можно продолжить эксперимент и дальше, так, чтобы «горб» максимальной высоты N появился много раз. Таким образом, наша «Δ-кривая» в основном будет все время идти вблизи оси абсцисс, лишь изредка отходя от нее на значительные расстояния и уж совсем редко поднимаясь на бóльшую высоту.

Горизонтальная прямая, проведенная на уровне $\Delta = 80$, пересекает кривую в точках, соответствующих тем перекладываниям, в результате которых число шаров в урнах становится равным 90 и 10. Следовательно, можно смело держать пари (ставя 9 против 1), что следующий за такой точкой шаг уменьшит величину Δ с 80 до 78. Примерно то же можно утверждать для всякой другой горизонтальной прямой, проведенной на значительной высоте.

Но, с другой стороны, невольно напрашиваются такие наглядные соображения. Если горизонтальная прямая пересекает «кривую» 10 000 раз в точках, расположенных на правом (идущем вниз) склоне горба, то она должна столько же раз пересечь эту кривую в точках, лежащих на левом (поднимающемся) склоне. Действительно, ведь чтобы эта прямая могла выйти из горба справа, она должна сначала войти в него слева. Поэтому не будет ли неосмотрительным утверждать, что следующее вытягивание номера, «как правило», ведет к спуску вниз? [10]

Кажущееся противоречие между этими чисто геометрическими рассуждениями и рассуждениями, основанными непосредственно на теории вероятностей, с очевидностью исчезает, как только мы примем во внимание чрезвычайно высокую частоту появления максимумов (имеющих вид острия) на больших высотах.

На высоте N могут быть, очевидно, только максимумы, а именно вершины вида $(N-2) \rightarrow N \rightarrow (N-2)$. На высоте $\Delta = 0$ есть только вершины-минимумы вида $2 \rightarrow 0 \rightarrow 2$. На всякой другой высоте могут встречаться четыре случая:

α) $(\Delta - 2) \rightarrow \Delta \rightarrow (\Delta - 2)$; β) $(\Delta - 2) \rightarrow \Delta \rightarrow (\Delta + 2)$;

γ) $(\Delta + 2) \rightarrow \Delta \rightarrow (\Delta - 2)$; δ) $(\Delta + 2) \rightarrow \Delta \rightarrow (\Delta + 2)$.

Их относительные частоты легко вычислить:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = \frac{N+\Delta}{N-\Delta} : 1 : 1 : \frac{N-\Delta}{N+\Delta}. \tag{7}$$

Это значит, что два последовательных подъема (β) и спуска (γ) встречаются одинаково часто. При Δ, близком к N, частота, с которой появляются вершины-максимумы (α), становится подавляюще большой, а частота появления вершин-минимумов (δ) — исчезающе малой (Δ-кривая «гладко» идет вниз). Чтобы еще яснее представить себе такое поведение Δ-кривой, найдем отношение частот появления значений Δ и $\Delta - 2$ (вычисления несложны):

$$\frac{Z(\Delta)}{Z(\Delta+2)} = \frac{N+\Delta+2}{N-\Delta}. \tag{8}$$

Мы снова видим, что если Δ близко к N, то кривая поднимается на высоту $\Delta + 2$ во много раз реже, чем на высоту

[10] Ср. следующее, высказывание: «Больцман пытался спасти H-теорему тем, что он приписывал своей H-кривой не непрерывное спадание, а некоторый, в общем равномерный ход параллельно оси z, причем возникающие на ней временами горбы встречались тем реже, чем больше их высота. Но если и можно принять, что максвелловское распределение, в соответствии с минимальным значением H, характеризуется подавляюще большой вероятностью, то все равно я никак не нахожу в этом, почти полностью симметричном ходе кривой какой-либо действительной аналогии с необратимостью процессов в природе, и мне остается совершенно непонятным, какие претензии на всеобщность может иметь неравенство $dH/dt \leqslant 0$, (Цермело сделал это замечание в недавно опубликованном реферате работы Гиббса; см.: «Mathem. Verein. Jahresber.», 1906, 15, S. 241).

Δ, в полном согласии с утверждением, что на любой значительной высоте кривая в основном имеет вершины-максимумы (при $N = 100$, $\Delta = 96$ имеем: $Z(96)/Z(98) = 196/4$).

В связи с возражением об обратимости нужно отметить следующее обстоятельство. Для Δ-кривой, неограниченно продолженной в обе стороны, вероятность шага $\Delta \to (\Delta - 2)$: а) точно равна вероятности шага $(\Delta - 2) \to \Delta$ и б) гораздо больше вероятности шага $\Delta \to (\Delta + 2)$ [это легко видеть из формул (6) и (8)]. Поэтому, с одной стороны, удовлетворяется требование обратимости и в то же время, с другой стороны, сохраняется в силе тенденция к уменьшению H.

Подводя итог, мы можем сказать:

I. «Δ-кривая» из каждой своей точки, расположенной на значительной высоте, как правило, идет вниз.

II. То же утверждение остается справедливым — и это кажется особенно парадоксальным на первый взгляд,— если эту «кривую» отразить относительно вертикальной оси или, что то же самое, пройти по ней справа налево.

Совершенно аналогично можно рассмотреть кривую, точки которой изображают результат каждой серии из n последовательных вытягиваний билетов вместо одного, только выкладки будут более длинными.

Приведенные здесь рассуждения становятся гораздо менее наглядными, если дискретную последовательность точек соединить гладкой интерполяционной кривой, что является явным произволом и не диктуется никакой необходимостью. В то время как справедливость наших утверждений о росте и убывании довольно очевидна в отношении конечных скачков, в случае рассмотрения непрерывной дифференцируемой интерполяционной кривой вопрос требует еще длительного выяснения.

§ 7.

Нам осталось еще показать, что при истолковании H-теоремы всегда можно рассматривать H-кривую как дискретную последовательность точек, подобную «Δ-кривой». Определение величины H основывается на понятии распределения скоростей молекул, т. е. числа молекул в каждом элементе объема пространства скоростей. Здесь явно фигурируют целые числа, и поэтому точный ход изменений H должен быть ступенчатым: H меняется скачком всякий раз, как какое-либо из этих целых чисел изменяется на единицу в результате столкновений молекул или их поступательного движения; в промежутках между этими моментами «кривая» идет горизонтально.

Поскольку «дифференциал времени dT» в уравнениях кинетической теории обязательно охватывает очень большое число столкновений в газе, то это соответствует тому, что из ступенчатой H-кривой по существу всегда выбираются дискретные последовательности точек. Доказательство H-теоремы и связанные с ней утверждения Больцмана о тенденции «H-кривой» идти, как правило, вниз из каждой высоко расположенной точки относятся именно к конечным разностям, связанным с этими дискретными последовательностями точек [11].

После сказанного достаточно лишь ссылки на проведенное выше обсуждение «Δ-кривой», чтобы утверждать:

Ни возражение об обратимости, ни возражение о повторяемости не являются достаточными, а вернее, вообще не имеют отношения к тому, чтобы опровергнуть утверждение Больцмана, согласно которому производная от H по времени — в смысле отношения конечных разностей — при больших значениях H с подавляющей вероятностью отрицательна [12].

1907

---

[11] Больцман, по-видимому, не всегда подчеркивал это в должной мере. Обычно он пользуется терминологией, соответствующей непрерывной дифференцируемой интерполяционной кривой. В этих случаях очень трудно избежать совершенно явиого заблуждения, будто приводимые выше утверждения относятся к производной этой непрерывной дифференцируемой интерполяционной кривой. Конечно, при таком понимании утверждения В и С (§ 4) с очевидностью противоречат друг другу. Недостатком этой терминологии является и то, что она вводит в соблазн отождествить «максимум H»; с «горизонтальным ходом кривой» (см. ссылку, указанную в примечании к § 5, стр.95), вместо того чтобы просто рассмотреть максимумы-острия. Кроме того, она дает повод необоснованно использовать предположение о повсеместном равенстве производных справа и слева и отсюда делать вывод, что из статистических предпосылок может следовать только равенство $dH/dt = 0$ (*Zermelo*, «Phys. Zs», 1900, 1, S. 319). Разумеется, никогда нельзя утверждать равенства отношений конечных разностей справа и слева. В некоторых случаях Больцман специально отмечает, что его утверждения относятся не к производным, а к отношениям конечных разностей (см., например; «Math. Ann.», 1898, 50, S. 327). Вместе с тем такая трактовка в конечных разностях является единственной имеющей смысл, если иметь в виду физическое содержание всякого исследования.

[12] Нашей целью было обсудить только одно это высказывание, изолировав его от всех других, относящихся к этой же теме. Поэто-

К ТЕОРЕМЕ БОЛЬЦМАНА О СВЯЗИ ЭНТРОПИИ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ[1]

Постановка вопроса[2]. Исследования Больцмана о механически-статистических корнях второго начала и в особенности его доказательство уравнения

$$\frac{\delta E + A_1\delta a_1 + A_2\delta a_2 + \ldots}{T} = k\delta \lg W \tag{1}$$

покоятся на определенном предположении о том, какие области «молекулярного фазового пространства» («μ-пространства»)[3] должны считаться a priori равновероятными: области, которым в μ-пространстве соответствуют равные объемы $\int dq_1 \ldots dp_r$. Другими словами, Больцман приписывает пространству (q, p) всюду одинаковый «вес»[4]

$$G(p, q) = \text{const.} \tag{2}$$

Планк, как известно, первый решился на выбор более общего $G(q, p)$, дабы избежать неизбежной иначе теоремы о равнораспределении энергии. Примыкающая к нему «теория

му мы здесь совсем не касаемся вопросов о том, в какой мере доказательство Больцмана может считаться исчерпывающим, какой специальный смысл может быть придан гипотезе устойчивого «молекулярного беспорядка», каково смысловое соотношение между количественным результатом, выражаемым H-теоремой, и высказываниями о характере «H-кривой» и т. д. Мы вернемся к этим вопросам в дальнейшем в связи с подробным обсуждением соответствующей литературы. Мы также намеренно обходим неоднократно обсуждавшийся вопрос о следствиях, вытекающих из того факта (признаваемого как Больцманом, так и Цермело), что догматическое истолкование H-теоремы (безоговорочное возрастание энтропии) в применении к изолированной газовой модели исключает квазипериодическое поведение такой модели. Несомненно, метод, которым г. Цермело воспользовался для доказательства этого факта, означает громадный шаг вперед в кинетической трактовке термодинамики.

[1] Подробное изложение появится в «Verst. d. Ak. v. Wetensch. Amsterdam». Там будут даны подробные доказательства предложений § 3 и 4.

[2] Вопрос этот формулирован нами уже в «Math. Enc.», IV, 29 (Статистическая механика), прим. 237a. Указанная там русская публикация не появилась.

[3] Называем $2r$-мерное *молекулярное* фазовое пространство μ-пространством в отличие от $2Nr$-мерного фазового пространства газа (γ-пространство). Ср. «Math. Enc.», IV, 29, § 9b и 12a.

[4] Несколько иная формулировка вопроса, избегающая понятия «весовой функции» $G(q, p, a)$, приведена в § 8.

квантов» вводит этот свободный выбор $G(q, p)$ в различнейшие области статистической физики [5]. Особенно многообещающее обобщение гипотезы Планка принадлежит Дебаю [6].

Вместе с предложением Больцмана (2) падает и данно Больцманом доказательство уравнения (1). Можно, однако, следуя примеру Планка и Эйнштейна, удержать это соотношение как *постулат*: «принцип Больцмана». Принимая во всех случаях

$$S = k \lg W \tag{3}$$

за *энтропию* или

$$F = E - kT \lg W \tag{4}$$

за *свободную энергию*, приходим непосредственно к определенным выражениям, например для теплоемкости или для сил системы «в направлении параметров $a_1, a_2, \ldots$»,

$$A_1 = -\frac{\partial F(T, a)}{\partial a_1}. \tag{5}$$

Этот изящный и плодотворный метод [7] приводит к вопросу, который, насколько мне известно, еще не обсуждался [8].

Если сделано определенное предположение о весовой функции в молекулярном фазовом пространстве, то этим вполне определено «вероятнейшее» распределение молекул рассматриваемого тела в зависимости от полной энергии E и параметров $a_1, a_2, \ldots$, а вместе с этим и сумма сил молекул в направлении, например, параметра a_1 [см. уравнение (11)]. Получаем, следовательно, прямое «*динамическое*» определение силы A_1. Наш вопрос: *для какого класса весовых функций значения $A_1, A_2, \ldots$, вычисленные непосредственно «динамически», совпадают со значениями (5), вычисленными при помощи (3) и (4) «квазитермодинамически»?*

Я приспособил здесь формулировку вопроса к обычному теперь способу изложения, принимающему уравнение (1) за *постулат*. Сущность вопроса становится более ясной при следующей формулировке, соответствующей первоначальному способу изложения Больцмана [9]:

---

[5] Ср. § 6.

[6] Ср. § 6.

[7] Схему этого метода можно найти у Планка («Vorles. über Wärmestrahl», 1913, изд. 2, § 129—132. В несколько иной форме: *P. Debye*. Zustandsgl. u. Quantenhyp. «Wolfskehlvorträge», 1913, § 2.

[8] Для частного случая: *P. Ehrenfest*. Welche Züge der Lichtquantenhypothese... «Ann. d. Phys.», 1914, 36, S. 91, § 5. См. наст. сб., стр. 126.

[9] Это и есть формулировка, данная нами в «Math. Enc.» (IV, 29, прим. 237a).

При каких весовых функциях молекулярного фазового пространства $G(q, p; a_1, a_2, \ldots)$ *выражение*

$$\delta E + A_1 \delta a_1 + A_2 \delta a_2 + \ldots, \tag{6}$$

вычисленное для «вероятнейшего» распределения, имеет

a) *вообще интегрирующие множители,*

b) *между ними такой, который при установлении связи между двумя системами имеет свойства* T^{-1}.

Нахождение наиболее общих $G(q, p, a)$ этого рода представляет затруднения, которые я не мог преодолеть (в особенности требование свойства [b]).

В дальнейшем я даю:

1) для $G(q, p, a)$ этого рода необходимое и достаточное соотношение: «*условие* δG» (§ 3, конец), которое, как мне кажется, должно *ограничивать* все будущие обобщения планковой гипотезы ступеней энергии и в силу этого может служить *путеводителем* для этих обобщений;

2) указываю при помощи этого условия обширный, вполне определенный *класс* $G(q, p, a)$, *заключающий в себе весовые функции Дебая, а следовательно, и Планка и удовлетворяющий требованиям* (*a*) *и* (*b*).

В этой заметке я ограничиваюсь такими стационарными распределениями, которые могут быть названы при выборе подходящих $G(q, p, a)$ «вероятнейшими». В дальнейшей заметке я покажу, что *некоторые из стационарных распределений, которыми теперь пользуются, не могут считаться «вероятнейшими»*; затем я разберу их отношение к принципу Больцмана, с одной стороны, а с другой — ко второму началу.

§ 1. Предположения и определения. Динамическое вычисление «количества теплоты, полученного системой» δQ.

N одинаковых молекул, каждая имеет r степеней свободы. Распределение: распределение N молекулярных фазовых точек по $2r$-мерному μ-пространству $(q_1, \ldots, q_r; p_1, \ldots, p_r)$. Энергия «газа» равна сумме энергий отдельных молекул [10]. Потенциальная энергия молекулы зависит не только от $q_1, \ldots, q_r$, но еще от двух «медленно меняющихся параметров a_1, a_2».

$$\chi(q_1, \ldots, q_r; a_1, a_2), \tag{7}$$

[10] Не легко избежать это неприятное ограничение. Ср.: «Math. Enc.», IV, 29, § 12c и прим. 38.

а следовательно, и полная энергия молекулы имеет вид

$$\varepsilon(q_1, \ldots, q_r; p_1, \ldots, p_r; a_1, a_2). \tag{8}$$

Сила молекулы в направлении a_1

$$-\frac{\partial\chi}{\partial a_1} = -\frac{\partial\varepsilon}{\partial a_1}. \tag{9}$$

Предположение [A]. При заданных значениях a_1, a_2 каждому значению полной энергии газа E соответствует одно и только одно *стационарное* распределение газа

$$f(q_1, \ldots, p_r; a_1, a_2, E). \tag{10}$$

Полная сила A_1 газа в направлении a_1 ввиду стационарности (10) равна, согласно уравнению (9),

$$A_1(E_1, a_1, a_2) = -\int d\tau f(q, p; E, a)\frac{\partial\varepsilon}{\partial a_1}, \tag{11}$$

где

$$d\tau = dq_1 \ldots dp_r, \tag{12}$$

а интегрирование по всему бесконечному μ-пространству. При бесконечно медленном переходе

$$a_1, a_2, E \to a_1 + \delta a_1, a_2 + \delta a_2, E + \delta E, \tag{13}$$

газ производит работу

$$A_1\delta a_1 + A_2\delta a_2 = -\int d\tau f\delta\varepsilon, \tag{14}$$

где

$$\delta\varepsilon(q, p, a) = \frac{\partial\varepsilon}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial\varepsilon}{\partial a_2}\delta a_2. \tag{15}$$

Определение «полученного системой тепла»

$$\delta Q = \delta E - \int d\tau f\delta\varepsilon. \tag{16}$$

Ввиду

$$E = \int d\tau f\varepsilon. \tag{17}$$

$$\delta E = \int d\tau\varepsilon\delta f + \int d\tau f\delta\varepsilon, \tag{18}$$

где

$$\delta f(p, q, E, a) = \frac{\partial f}{\partial E}\delta E + \frac{\partial f}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2}\delta a_2. \qquad (19)$$

Подставляя (18) в (16), имеем

$$\delta Q = \int d\tau \varepsilon \delta f. \qquad (20)$$

§2. Преобразование δQ для случая, когда стационарное распределение $f(q, p; E, a_1, a_2)$ может быть названо «вероятнейшим» распределением, относящимся при заданных E, a_1, a_2 к определенной весовой функции $G(q, p, a_1, a_2)$.

Условие δG.

Вопрос о том, для каких $f(q, p; E, a_1, a_2)$ величина δQ имеет вообще интегрирующие множители, может быть еще разобран в общем виде. Но примыкающее к нему требование — среди них имеется множитель, обладающий при установлении связи между двумя системами свойствами T^{-1},— получает определенное значение только тогда, когда рассматриваемые $f(q, p; E, a_1, a_2)$ подлежат тем или другим ограничениям.

Обобщаем[11] предположение Больцмана следующим образом: пусть

$$G(q_1, \ldots, p_r; a_1, a_2)\, dq_1 \ldots dp_r \qquad (21)$$

«вероятность» того, что фаза *определенной* из наших N молекул лежит в элементе $dq_1 \ldots dp_r$ μ-пространства. «Весовая функция» должна еще удовлетворять условию

$$\int d\tau G = 1, \qquad (22)^{12}$$

где интеграл распространен на все бесконечное μ-пространство. Вероятность распределения

$$\varphi(q_1, \ldots, p_r)\, d\tau \qquad (23)$$

равна тогда

$$W = \Pi (G d\tau)^{\varphi d\tau} \frac{N!}{\Pi (\varphi d\tau)!} \qquad (24)$$

[11] Уже планкова гипотеза ступеней энергии вводит весовые функции, зависящие от параметров a, например от жесткости резонаторов или собственных колебаний упругого тела. Ср. § 8 и 6.

[12] Ср. § 5.

и с обычным приближением

$$\lg W = C + \int d\tau\varphi \left[\lg \frac{G}{\varphi} + 1\right], \tag{25}$$

где C не зависит от a_1, a_2 и от выбора φ (q, p). «Вероятнейшее» распределение при добавочных условиях

$$\int d\tau\varphi = N, \tag{26}$$

$$\int d\tau\varepsilon\varphi = E \tag{27}$$

выразится так:

$$f = N \frac{e^{-\mu\varepsilon} G}{\int d\tau e^{-\mu\varepsilon} G}. \tag{28}$$

Остающийся в (28) параметр μ — лагранжев множитель добавочного условия (27) — в силу этого условия, т. е.

$$N \frac{\int d\tau e^{-\mu\varepsilon} G\varepsilon}{\int d\tau e^{-\mu\varepsilon} G} = E, \tag{29}$$

определен как функция от E, a_1, a_2

$$\mu = \mu(E, a_1, a_2). \tag{30}$$

П р е д п о л о ж е н и е [B]. Стационарное распределение f (q, p, E, a), о котором говорит предположение [A], может быть названо «вероятнейшим», т. е. имеет форму (28).

В этом случае уравнение (20) может быть приведено после простых преобразований к виду

$$\mu\delta Q = \delta(\mu E + N \lg Z) - \frac{N}{Z}\int d\tau e^{-\mu\varepsilon}\, \delta G, \tag{31}$$

где

$$Z(a_1, a_2, E) = \int d\tau e^{-\mu\varepsilon} G \tag{32}$$

и

$$\delta G(q, p, a) = \frac{\partial G}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial G}{\partial a_2}\delta a_2. \tag{33}$$

С другой стороны, если подставить распределение (28) в уравнение (25), $\lg W$ есть следующая функция от E, a_1, a_2:

$$\lg W = \mu E + N \lg Z + C', \tag{34}$$

где C' не зависит от a_1, a_2, E.

Таким образом, здесь

$$\delta \lg W = \delta(\mu E + N \lg Z). \tag{35}$$

Сравнение (31) с (35) дает

$$\mu \delta Q - \delta \lg W = \frac{N}{Z} \int d\tau e^{-\mu \varepsilon} \delta G. \tag{35a}$$

На примерах можно показать, что правая часть не всегда равна нулю[13].

Необходимое и достаточное условие[14] того, чтобы, согласно теореме Больцмана, правая часть (35 а) равнялась нулю при произвольных значениях μ и a, следующее: интеграл от δG, распространенный на слой μ-пространства, лежащий между двумя произвольными поверхностями энергии, исчезает, т. е.

$$\int_{\varepsilon(q,p,a)=B}^{\varepsilon(q,p,a)=A} d\tau \, \delta G = 0. \qquad \text{(«Условие } \delta G\text{»)}$$

§ 3. Вспомогательная геометрическая теорема. Пусть $\Phi(x_1, \ldots, x_n; a_1, a_2)$ пока еще произвольная функция $x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2$. При заданных значениях a_1, a_2 уравнение

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n; a_1, a_2) = \Phi(x_{10}, \ldots, x_{n0}; a_1, a_2) \tag{36}$$

определяет в n-мерном пространстве x'ов $(n-1)$-мерную «поверхность Φ», проходящую через произвольно выбранную точку $(x_{10}, \ldots, x_{n0})$. Пусть $\Phi(x, a)$ такова, что поверхность Φ для всех конечных значений $x_{10}, \ldots, x_{n0}, a_1, a_2$ не уходит в бесконечность и, будучи замкнутой, ограничивает n-мерный объем $i(x_{10}, \ldots, x_{n0}; a_1, a_2)$. Таким образом, при данных значениях a_1, a_2 каждой точке $x_1, \ldots, x_n$ пространства соответствует число

$$i(x_1, \ldots, x_n; a_1, a_2), \tag{37}$$

[13] Ср. § 7, примечание.

[14] Что условие δG достаточно, видно непосредственно. Для доказательства *необходимости* нужно вспомогательное предложение: если

$$\int_0^\infty dx e^{-\mu x} \Phi(x, a) = 0$$

для всех значений μ и a, то $\Phi(x, a) = 0$.

дающее объем, ограниченный поверхностью Ф, проходящей через точку $(x_1, ..., x_n)$.

Это «объемное число $x_1, ..., x_n$» претерпевает изменение

$$\delta i = \frac{\partial i}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial i}{\partial a_2}\delta a_2, \tag{38}$$

если при постоянных $x_1, ..., x_n$ изменяются параметры a_1, a_2, а вместе с ними и вид поверхностей Ф. Пусть Г функция от одного i, т. е. содержит $x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2$ только в соединении $i\,(x_1, \ldots, x_n; a_1, a_2)$:

$$\Gamma = \Gamma\,[i\,(x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2)]. \tag{39}$$

Тогда

$$\delta\Gamma = \frac{\partial\Gamma}{\partial i}\,\delta i \tag{40}$$

изменение Г при постоянстве $x_1, \ldots, x_n$ и изменении параметров a_1, a_2. Можно доказать следующую *теорему*:

$$\int\limits_{\Phi=A}^{\Phi=B}\!\!\int dx_1, \ldots, dx_n\,\delta\Gamma = 0. \tag{41}$$

где интегрирование распространено на «слой», лежащий между двумя произвольными поверхностями Ф,

$$\Phi(x, a) = A,\ \Phi(x, a) = B. \tag{42}$$

§ 4. Класс весовых функций $G\,(q, p, a) = \Gamma\,(i)$, для соответствующего «вероятнейшего» распределения которых имеет место соотношение $\mu\delta Q = \delta\lg W$. Аналогия между μ и T^{-1}.

Пусть при заданных значениях a_1, a_2

$$i\,(q_1, \ldots, p_r;\ a_1, a_2) \tag{43}$$

обозначает $2r$-мерный объем в μ-пространстве, ограниченный проходящей через точку $q_1, ..., p_r$ «поверхностью»

$$\varepsilon\,(q_1, \ldots, p_r;\ a_1, a_2) = \text{const}\ ^{15}. \tag{44}$$

---

[15] Аналогичная величина может быть определена и в $2Nr$-мерном фазовом пространстве *газа* (γ-пространство): $2Nr$-мерный объем, ограниченный в γ-пространстве проходящей через данную γ-точку «поверхностью» постоянной полной энергии E. Этой функцией $V\,(q_1, ..., p_rN;\ a)$ пользовались: *Gibbs*. «Statist.

Обобщая гипотезы Планка [16] и Дебая [17], рассматриваем те весовые функции $(q_1, \ldots, p_r; a_1, a_2)$, которые зависят от $q_1, \ldots, p_r; a_1, a_2$ только через посредство $i\,(q, \ldots, p_r; a_1, a_2)$.

Предположение [C].

$$G\,(q, p, a) = \Gamma\,(i). \tag{45}$$

В этом случае, как легко показать при помощи теоремы (41), *интеграл* (35a) *равен нулю*:

$$\int d\tau e^{-\mu\varepsilon}\,\delta G = 0, \tag{46}$$

а следовательно,

$$\mu\delta Q = \delta \lg W, \tag{47}$$

$\mu\,(E, a)$ имеет следующие свойства, аналогичные свойствам T^{-1}, где $T\,(E, a_1, a_2)$ — абсолютная температура тела:

(I) $\mu\,(E, a)$ один из (бесконечного множества) интегрирующих множителей

$$\delta Q = \delta E + A_1\delta a_1 + A_2\delta a_2; \tag{48}$$

(II) рассматриваем два тела, K' и K'':

$$\left.\begin{aligned} K' \to N' \text{ молекул; } & q'_1, \ldots, p'_r, a'_1, a'_2 \\ & \varepsilon'(p', q', a');\ G'(p', q', a') \\ K'' \to N'' \text{ молекул; } & q''_1, \ldots, p''_r, a''_1, a''_2 \\ & \varepsilon''(p'', q'', a'');\ G''(p'', q'', a'') \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Ищем «вероятнейшее» из распределений обоих тел, удовлетворяющих заданной сумме энергий тел,

$$\int d\tau'\varphi'\varepsilon' + \int d\tau''\varphi''\varepsilon'' = E. \tag{50}$$

Mech.» Kap., VIII; *A. Einstein*. «Ann. d. Phys.», 1902, **9**, S. 417; 1903, **11**, S. 170; 1904, **14**, S. 359; *P. Hertz*. «Ann. d. Phys.», 1910, **33**, S. 225, 834; «Math. Ann.» 1913, **74**, S. 153; *L. S. Ornstein*. «Arch. Néerland.», 1911, p. 159. Функция $i\,(q_1, \ldots, p_r; a_1, a_2)$ в μ-пространстве играет роль у Планка (*M. Planck*. «Theorie d. Wärmestr.» Изд. 1, 1906, § 150, конец) и у Дебая (*P. Debye*. Wolfskehlvortrag, § 3).

[16] l. c.

[17] l. c.

Тогде параметр μ для распределений обоих тел имеет одно и то же значение

$$\mu'(E', a') = \mu''(E'', a'') \tag{51}$$

[а именно равен множителю единственного добавочного условия (50)].

§ 5. Условие $\int d\tau G = 1$ в случае $G(q, p, a) = \Gamma(i)$ [18]. Если Gdr «вероятность», то должно быть выполнено условие

$$\int d\tau G = 1. \tag{52}$$

В особенности это условие не может быть отброшено, если мы захотим из аддитивности энтропии, с одной стороны, и величины $\lg W$ — с другой, доказать соотношение

$$S = k \lg W. \tag{53}$$

И относительно требования (52) весовые функции $G(q, p, a) = \Gamma(i)$ занимают особое положение. В то время как при каком-либо $g(q, p, a)$ значение распространенного на бесконечное μ-пространство интеграла

$$\int d\tau g(q, p, a) = I(a_1, a_2) \tag{54}$$

зависит от a_1, a_2, в том случае, *когда $g(q, p, a)$ зависит от q, p, а исключительно через посредство $i(q, p, a)$*,

$$\int d\tau \gamma(i) = \int_0^\infty di \gamma(i) = I_0 \tag{55}$$

есть число, не зависящее от a_1, a_2.

Можно, конечно, всегда удовлетворить условию (52) следующим выбором весовой функции:

$$G(q, p, a) = g(q, p, a) \cdot [I(a_1, a_2)]^{-1}, \tag{56}$$

$$\Gamma(i) = \gamma(i) \cdot [I_0]^{-1}. \tag{57}$$

Однако в случае (54), (56) введение или устранение *переменного множителя* $[I(a_1, a_2)]^{-1}$ может иметь решающее значение для уравнения $\mu\delta Q = \delta \lg W$; в случае же (55),

---

[18] Ср. § 8, где указано, как можно устранить это условие.

(57) *постоянный множитель* $[I_0]^{-1}$ этого значения иметь не может. Здесь нужно обратить внимание на следующее: умножение величины $G(q, p, a)$ на $\lambda(a_1, a_2)$ не меняет, согласно уравнениям (28), (29) и (20), значения f, μ, а следовательно, и $\mu\delta Q$; величина же $\delta \lg W$ приобретает, согласно (24), (25), добавочный член

$$N\delta \lg \lambda(a_1, a_2),$$

равный нулю только тогда, когда λ не зависит от a_1, a_2.

Замечание. В этом параграфе мы все время предполагали, что интегралы (54) и (55) имеют *конечные* значения, хотя они и распространены на все бесконечное μ-пространство. Ср., однако, § 6, конец.

§ 6. Встречающиеся в литературе весовые функции — частные случаи класса $G(g, p, a) = \Gamma(i)$.

1. «Веса» Больцмана: уравнение (2). Здесь $\Gamma(i)$ не зависит и от i.

2. Гипотеза Планка для резонаторов с одной степенью свободы. Здесь:

a) $r = 1$;

b) $\varepsilon(q, p, a) = \frac{1}{2}(\alpha^2 q^2 + \beta^2 p^2)$;

c) $\Gamma(i) = \begin{cases} 1 & \text{для } i(q, p, a) = 0, h, 2h, 3h\ldots \text{[19]} \\ 0 & \text{для других значений } i(q, p, a). \end{cases}$

3. Рассмотренное мной обобщение гипотезы Планка [20]:

a) $r = 1$;

b) $\varepsilon(q, p, a) = \frac{1}{2}(\alpha^2 q^2 + \beta^2 p^2)$;

c) $\Gamma(i) =$ произвольная функция $\gamma\left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)$, где $\nu = \frac{\alpha\beta}{2\pi}$.

4. Дебаево обобщение гипотезы Планка [21]:

a) $r = 1$;

b) $\varepsilon(q, p, a) = \frac{1}{2}[\chi(q, a) + \beta^2 p^2]$;

c) $\Gamma(i)$, как у Планка.

---

[19] *Планк*, l. c. Гипотеза $i = \frac{h}{2}, 3\frac{h}{2}, 5\frac{h}{2}\ldots$ дает «нулевую энергию» $\frac{h\nu}{2}$.

[20] *P. Ehrenfest*. «Ann. d. Phys.», 1911, **36**, S. 98.

[21] *P. Debye*, l. c.

5. Предложенное Лоренцем распространение гипотезы квантов на вращающиеся диполи [22].

Замечание. Во всех этих случаях интегралы $\int\limits_0^\infty di\Gamma(i)$ — расходящиеся.

§ 7. Есть ли $G(q, p, a) = \Gamma(i)$ наиболее общий класс весовых функций, для которых имеет место соотношение $\mu\delta Q = \delta \lg W$? *Это справедливо для тех $G(q, p, a)$, которые зависят от q, p только через посредство $\varepsilon(q, p)$.* Чтобы доказать это, следует заметить, что $i(q, p, a)$ остается постоянным вдоль поверхностей ε, т. е. всякая функция $G(q, p, a)$, остающаяся постоянной вдоль этих поверхностей, может принять вид $K(i, a)$. Если интеграл (35а) исчезает, то $K(i, a)$ должно удовлетворять условию

$$\int d\tau e^{-\mu\varepsilon(i, a)} \left(\frac{\partial K}{\partial i} \delta i + \frac{\partial K}{\partial a_1} \delta a_1 + \frac{\partial K}{\partial a_2} \delta a_2 \right) = 0 \qquad (58)$$

для всех значений μ, a_1, a_2, δa_1, δa_2. При помощи теоремы § 3 доказываем, что должно быть $\frac{\partial K}{\partial a_1} = \frac{\partial K}{\partial a_2} = 0$, т. е. $K(i, a)$ имеет вид $\Gamma(i)$.

Замечание. Для «молекул», имеющих *одну* степень свободы, предположение, что $G(q, p, a)$ содержит (q, p) только в виде $\varepsilon(q, p)$, вполне допустимо [23]. Для *бóльшего числа* сте-

---

[22] *H. A. Lorentz.* Solvay-Congress, 1911, Rapports, p. 447. Ср. также: *П. Эренфест.* Теплоемкость двухатомных газов. «Verh. phys. Ges.», 1913, 15, S. 451; ЖРФХО, 1914.— Об одной теореме Больцмана ... «Versl. Akad. v. Wetensch. Amsterd». 1913, 22, S. 586. ЖРФХО, 1914.

[23] Если, например, приписать плоскости (q, p) планковых резонаторов вес

$$G(q, p, a) = \frac{e^{-\varepsilon(q, p, a)}}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int dq dp e^{-\varepsilon(q, p, a)}},$$

где

$$\varepsilon(q, p, a) = \frac{1}{2}(\alpha^2 q^2 + \beta^2 p^2),$$

[это $G(q, p, a)$ удовлетворяет уравнению (52), содержит (q, p) только в виде $\varepsilon(q, p)$, *но не имеет форму* $\Gamma(i)$, где $i = \frac{2\pi}{\alpha\beta}\varepsilon$], то для такого $G(q, p, a)$ правая часть уравнения (35а) отлична от нуля.

пеней свободы оно приводит к затруднениям, которые указаны Лоренцем [24]. Я надеюсь еще вернуться к этим трудностям.

§ 8. Формулировка нашего вопроса, устраняющая понятие весовой функции $G(q, p, a)$. Доказательство уравнения (1), данное Больцманом, покоится на определенных предположениях:

a) о том, какие области фазового пространства газа («γ-пространства») должны быть сопоставлены с данным макроскопическим состоянием тела;

b) о том, что для этих областей все элементы равного объема $\int dq_1, \ldots, dp_N$, в статистических вычислениях должны считаться равноправными;

c) о том, что относительная «вероятность» двух макроскопических состояний измеряется отношением объемов тех двух областей γ-пространства, которые соответствуют [по (a)] этим двум макроскопическим состояниям.

Новшество, введенное Планком, может быть формулировано следующим образом: согласно гипотезе ступеней энергии, Планк выделяет из тех γ-областей, которые, по Больцману, соответствуют данному макроскопическому состоянию, некоторые бесконечно узкие области как *«дозволенные»*, а остальные «запрещает». *И эти дозволенные области изменяют* (это для нас особенно важно) *форму и положение в фазовом пространстве, когда при помощи изменения некоторых «внешних» параметров $a_1, a_2 \ldots$ мы изменяем жесткость или инерцию системы* [25]. Если теперь, памятуя это замечание, рассмотрим доказательство уравнения (1), данное Больцманом, или же измененные изложения Гиббса, Эйнштейна и других, то тотчас же заметим, что некоторые из употребленных при доказательстве преобразований не могут быть выполнены: встречающиеся там области интегрирования получили новые ограничения, зависящие от $a_1, a_2 \ldots$ Но не только *доказательство* уравнения (1) наталкивается

[24] *H. A. Lorentz*. Over de theorie der energie-elementen. «Versl. Akad. v. Wetensch. Amsterdam»., Febr., 1912.

[25] Пример: если при помощи уменьшения объема изменить частоты собственных колебаний зеркального куба или молекулярной решетки Борна — Дебая, то планковы эллипсы в соответствующей плоскости (q, p) *деформируются*. Также деформируются «дозволенные» области в $2N$-мерном фазовом пространстве, каждая точка которого изображает состояние N собственных колебаний.

на трудности; *само уравнение* справедливо только условно: *не при всяком выделении «дозволенных» областей уравнение* (*1*) *остается справедливым, но только тогда, когда это выделение подвергнуто определенным ограничениям* (*которые выполнены Планком и Дебаем*).

Связь с прежним способом рассмотрения восстанавливается следующими замечаниями:

1. «Весовая функция» $G(q, p, a)\, d\tau$ служит мерой «дозволенной» части фазового элемента $d\tau$ в μ-пространстве.

2. В соответствии с этим величина (24) служит мерой «дозволенной» части «γ-звезды» данного распределения φ (ср. «Math. Enc.» IV, 29, § 12 b).

3. Так как среди всех распределений, удовлетворяющих заданному значению полной энергии E, «вероятнейшее» распределение (28) дает для (24) *подавляющее* по величине значение, то можно утверждать (с пренебрежением всегда допускаемым): «дозволенная» часть γ-объема всех фазовых точек газа, удовлетворяющих заданному значению полной энергии E, измеряется величиной (24), если вместо φ подставить соответствующее «вероятнейшее» распределение (28). Этим дается оправдание для правой части (34), как меры логарифма «вероятности».

1914

ОБ ОДНОМ ПАРАДОКСЕ В ТЕОРИИ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Рассмотрим небольшую сферу, взвешенную в жидкости. Представим себе, что ведется наблюдение за ее броуновским движением, и выберем момент времени, когда сфера обладает сравнительно большой скоростью, направленной, например, вверх. Можно ли думать, что окружающая жидкость будет двигаться вместе со сферой?

Профессор Я. Д. Ван-дер-Ваальс младший и мисс Снеслейдж недавно показали [1]:

1. Как ответ на этот вопрос связан с эйнштейновской теорией броуновского движения.

2. Что статистическая теория молекулярного движения утверждает, что *подобное совместное движение не должно*

[1] «Proc. Amsterdam Acad.», p. 1322.

возникать. А именно, эта теория подразумевает, что для данного места и скорости взвешенной сферы и для данной конфигурации окружающих частиц жидкости *равные и противоположно направленные скорости таких частиц* всегда равновероятны.

Цитированные авторы уже отмечали, что этот результат в какой-то мере парадоксален, а потому подвергли его детальному обсуждению.

В последующем изложении парадоксальность этой ситуации будет еще более подчеркнута за счет рассмотрения аналогичного вопроса для максимально упрощенной модели. Мы увидим, что две тесно связанные материальные точки m_1 и m_2, из которых будет состоять наша модель, могут, с одной стороны, обладать взаимно независимыми скоростями, хотя, с другой стороны, они движутся совместно (из-за их сильной связи).

§ 2. Рассмотрим две материальные частицы с массами m_1 и m_2 и следующими свойствами:

1. Обе частицы кинематически ограничены возможностью двигаться вдоль оси x.

2. Расстояние между ними за счет действия поля сил никогда не может превосходить величины D[2]:

$$|x_2 - x_1| \leqslant D, \tag{1}$$

причем D может быть мало по сравнению с перемещением этих двух точек вдоль оси x с течением времени.

3. Пусть эта пара точек будет помещена в бесконечный одномерный объем, наполненный газом, находящимся в состоянии молекулярно-статистического равновесия. Его молекулы сталкиваются как с m_1, так и с m_2.

Пусть x_1, x_2, u_1 и u_2 будут координаты и скорости двух частиц, а $\Phi(x_1, x_2)$ обозначает потенциальную энергию сил, удерживающих их друг около друга. Тогда, рассматривая соответствующий канонический ансамбль, имеем для числа составляющих ансамбля, у которых значения x_1, x_2, u_1 и u_2 расположены в соответствующих бесконечно малых интервалах, следующую формулу.

$$\text{const}\, e^{-\frac{2\Phi(x_1, x_2)+m_1u_1^2+m_2u_2^2}{2kT}}\, dx_1dx_2du_1du_2. \tag{2}$$

[2] Пусть, например, m_1 является оболочкой, в которой заключена частица m_2.

Если значения x_1, x_2, а также u_1 фиксированы, то формула (2) дает одинаковый результат для числа составляющих ансамбля, обладающих равными по величине и противоположными по знаку скоростями u_2. Иначе говоря, равные и противоположные значения u_2 являются равновероятными, т. е. u_2 «не зависит» от u_1. С другой стороны, броуновское движение с течением времени приведет к большому смещению частиц вдоль оси x; между тем частицы останутся расположенными близко друг к другу вследствие неравенства (1). Это и есть тот парадокс, который упоминался в конце § 1.

§ 3. Оставив на время молекулярно-статистическую сторону нашей проблемы, рассмотрим следующий, чисто кинематический вопрос. Пусть за большой промежуток времени θ две точки m_1 и m_2 могут перемещаться вдоль оси x произвольным образом при ограничении только условиями: а) неравенство (1) все время выполняется; б) расстояние между конечным и начальным положениями пары точек может быть велико по сравнению с D. Это значит, что m_2 «сопровождает» m_1. Зададим теперь вопрос: значит ли это, что среднее по времени значение $\overline{u_1u_2}$ всегда положительно,

$$\overline{u_1u_2} = \frac{1}{\theta}\int\limits_0^\theta dt u_1u_2 > 0, \tag{3}$$

или же этот интеграл может быть равным нулю и даже отрицательным?

Знак интеграла (3) естественным образом указывает, в какой мере для двух точек более вероятно движение в одном или в противоположных направлениях. Однако легко заметить, что для описанного выше движения пары точек m_1m_2 неравенство (3) не обязано выполняться. Это становится очевидным из следующего примера, в котором интеграл оказывается отрицательным. На рисунке две ломаные линии изображают график изменения x от t для двух точек m_1, m_2. Мы видим, что условия (а) и (б) выполняются, но скорости u_1 и u_2 всегда имеют противоположные знаки, так что интеграл (3) отрицателен.

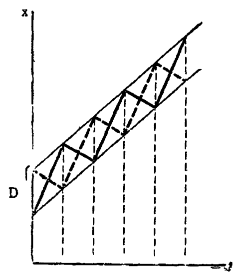
§ 4. Далее, мы имеем

$$4\overline{u_1u_2} = \overline{(u_1+u_2)^2} - \overline{(u_1-u_2)^2}. \tag{4}$$

Таким образом, знак $\overline{u_1 u_2}$ определяется тем, какой из двух членов больше.

Если движение пары точек подчиняется теореме о равнораспределении, то $\overline{u_1 u_2}$ оказывается как раз равным нулю (см. приложение).

Из сказанного очевидно, что существуют такие движения пары точек, при которых они все время остаются вблизи



друг друга и вместе с тем проходят большие расстояния, хотя в каждый момент u_2 «не зависит» от u_1. Таким образом, парадокс, описанный в § 1 и 2, является кажущимся. Поэтому нет никаких возражений против предположения Эйнштейна о том, что взвешенная в жидкости сфера в процессе броуновского движения сообщает окружающей жидкости такое же движение, как и в случае систематического перемещения под действием постоянной силы.

§ 5. Однако положительное доказательство того, что предположение Эйнштейна следует из основ статистической механики, наталкивается на следующее затруднение. Потребуем (обращаясь к нашему примеру), чтобы неравенство $u_{10} < u_1 < u_{10} + \varepsilon$ выполнялось: 1) в момент t_0, 2) в течение некоторого интервала от $t_0 - \tau$ до t_0, и попытаемся выяснить, что можно сказать в этих двух случаях о вероятности различных значений u_2.

В первом случае мы должны выделить из канонического ансамбля легко определяемый подансамбль M_1, в котором u_2 с одинаковой частотой принимает равные и противоположные значения (и, таким образом, «не зависит» от u_1).

Во втором случае из упомянутого ансамбля M_1 следует выбрать более ограниченный ансамбль M_{12}. Однако этот ансамбль M_{12} никак не удается определить.

Вместе с тем это необходимо сделать, если мы хотим выяснить, действительно ли распределение величины u_2 в нем соответствует предположению Эйнштейна.

Приложение

Положим

$$m_1 + m_2 = M; \qquad \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{M} = q_1; \qquad \frac{m_1x_1 - m_2x_2}{M} = q_2,$$

$$\frac{dx_1}{dt} = u_1; \qquad \frac{dx_2}{dt} = u_2; \tag{α}$$

$$u_1 = \frac{M}{2m_1}(\dot q_1 + \dot q_2); \qquad u_2 = \frac{M}{2m_2}(\dot q_1 - \dot q_2).$$

Тогда

$$\frac{1}{2}(m_1u_1^2 + m_2u_2^2) = \frac{M^2}{8m_1m_2}\left[\dot q_1^2 M + \dot q_2^2 M + 2\dot q_1\dot q_2(m_2 - m_1)\right].$$

Если p_1, p_2 — импульсы, соответствующие координатам q_1, q_2, то

$$\dot q_1 p_1 = \frac{M^2}{4m_1m_2}\left[M\dot q_1^2 - (m_2 - m_1)\dot q_1 q_2\right], \tag{β}$$

$$\dot q_2 p_2 = \frac{M^2}{4m_1m_2}\left[M\dot q_2^2 + (m_2 - m_1)\dot q_1\dot q_2\right] \tag{γ}$$

и, согласно теореме о равнораспределении, среднее по времени выражений (β) и (γ) равно в обоих случаях kT, так что их разность

$$\frac{M^2}{4m_1m_2}\overline{(\dot q_1^2 - \dot q_2^2)} = 0. \tag{δ}$$

С другой стороны, из (α) следует

$$\overline{u_1u_2} = \frac{M^2}{4m_1m_2}\overline{(\dot q_1^2 - \dot q_2^2)}. \tag{ε}$$

Сопоставляя (δ) и (ε), находим $u_1u_2 = 0$, что и требовалось доказать.

1917

ОБ ОДНОМ СТАРОМ ЗАБЛУЖДЕНИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ТЕПЛОВОГО РАВНОВЕСИЯ ГАЗА В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ [1]

Еще Больцман (в 1876 г. [2]) полностью опроверг давнее ошибочное утверждение о том, что в случае газа, находящегося в состоянии теплового равновесия в поле тяготения, средняя кинетическая энергия молекул в нижней части якобы должна быть большей — за счет ускорения свободного падения,— чем в верхней. Тем не менее это утверждение вновь и вновь появляется на страницах научных журналов [3].

Из кинетической теории газов, конечно, известно, что это утверждение неверно и почему оно неверно. Приходится, однако, снова выступать против этой ошибки, потому что теперь она привела даже к такому выводу: «В этом смысле данная Клаузиусом формулировка второго закона является, таким образом, неверной!» [4]

Для упрощения рассуждений и расчетов рассмотрим самый простой предельный случай: соударений молекул газа друг с другом нет, отражение при ударе о верхнюю крышку и вертикальные стенки сосуда абсолютно упругое, но с дном, которое поддерживается при постоянной температуре T, происходит обмен теплом. Это означает, что отскакивающие от дна молекулы газа имеют максвелловское распределение скоростей, соответствующее температуре T. Вместо непрерывного хода изменения потенциальной энергии $\Phi(z) = mgz$, соответствующего полю тяготения, для простоты рассуждений будем считать его ступенчатым: до середины высоты сосуда $z = H/2$ пусть $\Phi(z) = 0$, а от середины до верхней стенки пусть эта функция будет постоянной $\Phi(z) = \chi$. Если какая-либо молекула ниже этой плоскости раздела F будет иметь вертикальную составляющую скорости w_1, то после пересечения F она будет обладать меньшей скоростью, так что

$$\frac{mw_2^2}{2} = \frac{mw_1^2}{2} - \chi. \tag{1}$$

---

[1] «Zs. f. Phys.», 1923, 17, S. 421.

[2] *L. Boltzmann*. Wissenschaftliche Abhandlungen, 2B, S. 265 «(Wien. Ber.», 1876, 74, S. 509; 1878, 78, S. 22). Далее: *F. M. Exner*. «Ann. d. Phys.», 1902, 7, S. 683; 1902, 9, S. 967. Ответ А. Шмидту. См. также: *O. W. Richardson*. «Phil. Mag.»., 1909, 18, S. 645.

[3] *P. V. Dallwitz-Wegner*. «Zs. Phys.», 1923, 15, S. 28.

[4] Там же, стр. 286.

Ложное заключение. Каждая отдельно взятая молекула, проходящая вверх или вниз через F, имеет внизу бóльшую кинетическую энергию, чем вверху (это правильно!), и, «следовательно», средняя кинетическая энергия молекул в нижней половине сосуда будет большей, чем в верхней (это неверно!) [5].

О чем здесь забыли. Все молекулы в нижней части сосуда, для которых

$$\frac{mw_1^2}{2} < \chi, \tag{2}$$

не способны проникнуть через F. И эти «слишком медленные» молекулы способствуют тому, что средняя кинетическая энергия в нижней половине остается меньшей.

Количественно: пусть

$$f_1(w_1)\,dw_1 \text{ и } f_2(w_2)\,dw_2 \tag{3}$$

суть числа молекул, находящихся в кубическом сантиметре нижней и соответственно верхней половины сосуда и имеющих скорости, лежащие в интервале $w_1 \to w_1 + dw_1$ и соответственно $w_2 \to w_2 + dw_2$.

Тогда выражения

$$w_1 f_1(w_1)\,dw_1 \text{ и } w_2 f_2(w_2)\,dw_2 \tag{4}$$

показывают, сколько молекул этих двух сортов проникает через 1 квадратный сантиметр плоскости F за 1 секунду снизу вверх и соответственно сверху вниз.

Проследим за одной такой группой $w_1 \to w_1 + dw_1$ при ее переходе через F; она появится на другой стороне плоскости со скоростями, лежащими в интервале $w_2 \to w_2 + dw_2$, причем w_2 и w_1 будут связаны соотношением (1).

Дифференцируя (1), получим

$$w_2\,dw_2 = w_1\,dw_1. \tag{5}$$

Но поскольку речь здесь идет об одних и тех же молекулах, только рассматриваемых «снизу» или «сверху», то в этом случае оба выражения (4) должны быть равны друг

[5] Продолжение ложного заключения: каждая из отдельно взятых молекул остается в верхней половине сосуда более длительное время, чем в нижней, так как $w_2 < w_1$ (это правильно), и, «следовательно», в каждый момент вверху находится больше молекул, чем внизу?!

другу:

$$w_1 f_1(w_1)\,dw_1 = w_2 f_2(w_2)\,dw_2 \tag{6}$$

и, значит, с учетом (5), имеем

$$f_1(w_1) = f_2(w_2), \tag{7}$$

где w_2 и w_1 связаны соотношением (1).

Но в нижней части молекулы подчиняются максвелловскому распределению по скоростям, соответствующему температуре T,

$$f_1(w_1) = Ce^{-\frac{mw_1^2}{2kT}}; \tag{8}$$

отсюда, согласно (8), (7), (1), следует, что для всех $w_2 > 0$ справедливо выражение

$$f_2(w_2) = Ce^{-\frac{mw_1^2}{2kT}} = Ce^{-\frac{mw_2^2+2\chi}{2kT}} = Ce^{-\frac{\chi}{kT}}e^{-\frac{mw_2^2}{2kT}}. \tag{9}$$

Из-за симметрии для движения вверх и вниз это выполняется и для $w_2 < 0$.

Сравнение (9) и (8) даст хорошо известный результат: в верхней и нижней частях сосуда имеет место одинаковое, соответствующее температуре T распределение по скоростям и одинаковая средняя кинетическая энергия; при этом в верхней его части плотность газа в $e^{-\chi/kT}$ раз меньше, чем в нижней.

1923

КАКИЕ ЧЕРТЫ ГИПОТЕЗЫ СВЕТОВЫХ КВАНТОВ ИГРАЮТ СУЩЕСТВЕННУЮ РОЛЬ В ТЕОРИИ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ?

Гипотеза световых квантов последнее время находит применение ко все расширяющемуся кругу вопросов, многие из которых имеют лишь отдаленное отношение к проблемам теплового излучения. Однако судьбу этой гипотезы решат прежде всего экспериментальные результаты, связанные именно с новыми областями ее применения.

В настоящее время решающие данные в этом отношении еще отсутствуют. Поэтому представляется целесообразным выдвинуть ряд соображений, которые, как мне кажется, позволяют утверждать, что некоторые черты гипотезы световых квантов уже сейчас можно считать установленными, принимая во внимание особенности черного излучения. Тем самым проясняется вопрос о том, в какой мере другие черты, характерные для гипотезы световых квантов, могут рассматриваться как допускающие модификацию с точки зрения теории теплового излучения.

Сводка результатов, а также формулировка примыкающих к теме статьи вопросов приведена в § 14.

§ 1. Важнейшие свойства теплового излучения, на основе которых проводится дальнейшее исследование

I. При обратимом адиабатическом сжатии неупорядоченного излучения, находящегося в сосуде с полностью отражающими стенками, энтропия этого излучения не изменяется независимо от того, является или не является это излучение черным.

II. Закон смещения. Спектральное распределение представляется в следующей общей форме:

$$\rho(\nu, T)d\nu = \alpha\nu^3 f\left(\frac{\beta\nu}{T}\right)d\nu. \tag{1}$$

Закон смещения не конкретизирует вид функции f.

III. Справедливость уравнения Рэлея — Джинса для очень больших длин волн. Поскольку формула

$$\rho(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi k}{c^3}\nu^2 T d\nu \tag{2}$$

для очень больших длин волн (или малых значений отношения ν/T) хорошо соответствует опытным данным, мы потребуем, чтобы функция $f(\beta\nu/T)$ для малых значений аргумента вела себя как $(\beta\nu/T)^{-1}$; это значит, что должно иметь место соотношение

$$\lim_{\sigma\to 0}[\sigma f(\sigma)] = 1. \tag{3}$$

Это требование можно назвать «красным требованием». Ему не удовлетворяет формула излучения В. Вина, для которой указанный предел равен нулю.

IV. Предотвращение рэлей-джинсовской катастрофы в ультрафиолетовой области. Формула Рэлея — Джинса (2), как известно, перестает быть справедивой в области коротких длин волн, поскольку она допускает безграничный рост

$\rho(\nu, T)$ с ростом ν. В то же время для того, чтобы полная энергия излучения оставалась конечной, ρ должно стремиться к нулю быстрее, чем ν^{-1}. Это значит, что $f(\beta\nu/T)$ в формуле (1) при заданной температуре T с ростом ν стремится к нулю быстрее, чем ν^{-4}, откуда получается требование

$$\lim_{\sigma\to\infty} \sigma^4 f(\sigma) = 0, \tag{4}$$

которое мы назовем «фиолетовым требованием».

V. Усиленное фиолетовое требование. Имея в виду то обстоятельство, что при больших значениях ν/T излучение хорошо описывается формулой В. Вина

$$\rho(\nu, T) = \alpha\nu^3 e^{-\beta\frac{\nu}{T}}, \tag{5}$$

можно, не ограничиваясь условием (4), потребовать, чтобы в теории излучения допускались только такие формулы, в которых $f(\sigma)$ с неограниченным ростом σ стремилось бы к нулю быстрее любой отрицательной степени σ. Это значит, что при сколь угодно больших n должно выполняться условие

$$\lim_{\sigma\to\infty} [\sigma^n f(\sigma)] = 0 \qquad (n \text{ — любое большое}). \tag{6}$$

Требование (4), очевидно, должно выполняться строго. Что касается условия (6) — мы назовем его «усиленным фиолетовым требованием»,— то оно, напротив, представляет собой некий постулат, который выходит далеко за пределы существующих данных. Соответственно этому выводы, которые могут быть получены из (6), характеризуются гораздо меньшей строгостью по сравнению с теми, которые следуют из (4) (ср. § 8, 9).

VI. Фиолетовое требование Вина — Планка. Как известно, формула излучения Планка

$$\rho(\nu, T) = \frac{\alpha\nu^3}{e^{\beta\frac{\nu}{T}} - 1} \tag{5a}$$

при больших значениях ν/T принимает тот же вид, что и формула В. Вина (5). Иначе говоря, функция $f(\sigma)$, соответствующая формуле Планка, удовлетворяет требованию, чтобы существовала такая конечная и отличная от нуля величина L, что

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{f(\sigma)}{e^{-L\sigma}} = M, \tag{7}$$

где M — конечная и отличная от нуля константа. С методической точки зрения было бы интересно выделить в теоретических основаниях обеих этих формул такие общие черты, которые обеспечивали бы выполнение функцией $f(\sigma)$ условия (7) — «фиолетового требования Вина — Планка», гораздо более специального, чем условие (6). В связи с этим в § 12 мы проанализируем класс формул излучения, для которых $f(\sigma)$ удовлетворяет условию (7). Однако было бы, разумеется, ошибкой, исходя из хорошего согласия между данными измерений и формулами (5) и (5а) при больших значениях ν/T, заключать, что в действительности следует отвергнуть все те функции $f(\sigma)$, которые не удовлетворяют условию (7) [1].

§ 2. Вспомогательные методы, связанные с рассмотрением электромагнитного излучения

Мы будем использовать метод собственных колебаний в том виде, в каком он был впервые введен Рэлеем и Джинсом в теорию излучения полости. Однако мы можем в любой момент и без всяких затруднений перейти к рассуждениям в терминах резонаторов, использованным Планком в его работах. В отношении общей теории собственных электромагнитных колебаний полости мы сошлемся на § 165 книги Планка. Там можно найти доказательство следующих утверждений.

I. Для полого куба со стороной l и зеркальными стенками число не зависящих друг от друга собственных электромагнитных колебаний, частота которых заключена между ν и $\nu + d\nu$, дается формулой

$$N(\nu)\,d\nu = \frac{8\pi l^3 \nu^2}{c^3}\,d\nu. \qquad (8)$$

Нетрудно доказать и следующее положение [2].

II. Если размеры куба бесконечно медленно уменьшать, сближая его зеркальные стенки, то парциальная энергия каждого собственного колебания возрастает (за счет работы сжатия, совершаемой против давления излучения) в одной

[1] Ср. с замечаниями в конце § 12.

[2] Лорд Рэлей показывает, как с помощью приводимых им формул может быть получен закон Стефана — Больцмана. Уравнения же (9) и (10) данной статьи позволяют получить наиболее удобным путем закон смещения Вина.

и той же пропорции, а именно прямо пропорционально частоте ν и обратно пропорционально длине стороны куба:

$$\frac{E'_{\nu'}}{\nu'} = \frac{E_\nu}{\nu}, \tag{9}$$

$$\nu' l' = \nu l. \tag{10}$$

§ 3. Вспомогательные методы, связанные с теоретико-вероятностным подходом к проблеме

Эти методы могут быть охарактеризованы примерно следующим образом. При данном значении полной энергии, «наиболее вероятное» распределение собственных колебаний по всем возможным областям определяется тем же самым способом, каким Больцман определял — при данной полной энергии — «наивероятнейшее» распределение по всем возможным скоростям молекул газовой смеси, состоящей из многих сортов молекул. Собственные колебания одной и той же области частот $d\nu$ играют при этом роль молекул одного и того же сорта.

Метод Больцмана будет нами обобщен только в одном существенном пункте, а именно мы введем некоторую, поначалу произвольную «весовую функцию». Задаваясь вопросом об относительной вероятности того, что координаты $q_1, \ldots, q_n$ и импульсы $p_1, \ldots, p_n$ отдельных молекул лежат в какой-либо замкнутой области пространства (q, p), Больцман полагал, что эти относительные вероятности всегда пропорциональны величинам «(q, p)-объемов» таких областей. Тщательный анализ этого утверждения, приписывающего каждой индивидуальной молекуле во всем (q, p)-пространстве не зависящее от q и p значение веса, показывает, как известно, что оно должно рассматриваться во многих отношениях как простейшее, но, совершенно очевидно, не единственно возможное [3].

---

[3] К сожалению, стало обычным говорить, что больцмановский выбор весовой функции является единственно возможным в случае, если рассматриваемая система подчиняется принципу Гамильтона, а потому и теореме Лиувилля. Это к настоящему времени неискорененное утверждение является целиком неосновательным. Оно было бы справедливым только в том единственном случае, когда, кроме того, выдвинута гипотеза, согласно которой система, будучи предоставлена самой себе, в конце концов проходит «через» (!) любую точку фазового пространства, соответствующую

Возбужденное состояние некоторого собственного колебания можно характеризовать его энергией и фазой. Для каждого отдельного собственного колебания все фазы следует считать равноправными. Поэтому весовая функция не будет зависеть от фазы. Для вероятности того, что некоторое отдельное собственное колебание частоты ν обладает энергией в пределах от E до $E + dE$, мы получаем, таким образом, выражение следующего вида:

$$\gamma(\nu, E)\, dE. \tag{11}$$

Вероятность того, что из $N(\nu)\, d\nu$ собственных колебаний частоты ν какие-либо a_1, a_2, ... собственных колебаний приходятся на соответствующие области энергии dE_1, dE_2, ... [4], при этом может быть получена по методу Больцмана в виде

$$[\gamma(\nu, E_1)\, dE_1]^{a_1}\, [\gamma(\nu, E_2)\, dE_2]^{a_2} \ldots \frac{[N(\nu)\, d\nu]!}{a_1!\, a_2! \ldots}. \tag{12}$$

С помощью формулы Стирлинга отсюда можно известным способом получить выражение для логарифма этой вероятности в виде суммы интегралов от непрерывных функций. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \lg W = \mathrm{const} &+ \int_0^\infty d\nu N(\nu)\, [\lg N(\nu) - 1] + \\ &+ \int_0^\infty d\nu \int_0^\infty dE a(\nu, E) \lg \gamma(\nu, E) - \\ &- \int_0^\infty d\nu \int_0^\infty dE a(\nu, E)\, [\lg a(\nu, E) - 1]. \end{aligned} \tag{13}$$

данному значению полной энергии (эргодическая гипотеза) (ср.: «Матем. энцикл.», IV, стр. 32). Формально можно, впрочем, избежать введения весовой функции, не являющейся константой, если вместо этого ввести соответствующие дополнительные условия при нахождении минимума H (ср. *P. Ehrenfest*. «Physik. Zeitschr.», 1906, 7, S. 528).

[4] Поскольку здесь речь идет об отыскании лишь «наивероятнейшего» распределения, то мы можем заранее предположить, что распределение по фазам является равномерным и что a_1, a_2, ... зависят только от энергии E. Такие предположения недопустимы при анализе флюктуационных отклонений от наивероятнейшего распределения.

Если вид весовой функции $\varphi(\nu, E)$ уже угадан каким-либо образом, то «наивероятнейшее» распределение при данной величине полной энергии $\mathfrak{E}$ можно получить, выбирая $a(\nu, E)$ так, чтобы величина $\lg W$ была максимальной при дополнительных требованиях

$$\int\limits_0^\infty dEa(\nu, E) = N(\nu) \tag{14}$$

и

$$\int\limits_0^\infty d\nu \int\limits_0^\infty dE \cdot Ea(\nu, E) = \mathfrak{E}. \tag{15}$$

При этом имеем

$$a(\nu, E) = e^{\lambda(\nu)}\gamma(\nu, E)\, e^{-\mu E}. \tag{16}$$

Здесь $\lambda(\nu)$ и $(-\mu)$ — множители Лагранжа, соответствующие условиям (14) и (15).

Множитель $\lambda(\nu)$ определяется с помощью условия (14), если подставить в него выражение (16). Это дает

$$e^{\lambda(\nu)}\int\limits_0^\infty dE\gamma(\nu, E)\, e^{-\mu E} = N(\nu). \tag{17}$$

Из (17) и (16) получаем

$$a(\nu, E) = N(\nu)\frac{\gamma(\nu, E)\, e^{-\mu E}}{\int\limits_0^\infty dE\gamma(\nu, E)\, e^{-\mu E}}. \tag{18}$$

Множитель μ можно было бы выразить с помощью дополнительного условия (15). Но сделать это можно, естественно, лишь тогда, когда для функции $\varphi(\nu, E)$ выбран конкретный вид; после этого достаточно подставить выражение (18) в (15) и произвести все необходимые интегрирования. Как будет показано в § 6, для наших целей не обязательно выражать μ через $\mathfrak{E}$.

Для дальнейшего сделаем следующие замечания.

I. При определенном выборе $\gamma(\nu, E)$ μ зависит только от $\mathfrak{E}$, но не от ν и E, будучи множителем Лагранжа для дополнительного условия (15) [5].

II. Две различные весовые функции $\gamma_1(\nu, E)$ и $\gamma_2(\nu, E)$, которые отличаются друг от друга множителем, зависящим только от ν,

$$\gamma_2(\nu, E) = Q(\nu) \cdot \gamma_1(\nu, E), \tag{19}$$

приводят к одному и тому же наивероятнейшему распределению, поскольку $Q(\nu)$ сокращается в выражении (18). [Это связано с существованием дополнительного условия].

III. До сих пор молчаливо предполагалось, что $\gamma(\nu, E)$ всюду конечно, так что лишь конечным интервалам энергии (но не отдельным ее значениям) соответствует конечный суммарный вес В дальнейшем (см. § 7, 8, 9) мы должны будем допустить, что отдельным выделенным значениям энергии и соответствует такой вес, который обычно сопоставляется лишь конечному интервалу энергии. Рассмотрение без труда может быть распространено и на этот более общий случай. При этом в дополнение к интервалам по непрерывной области значений энергии E добавляются суммы по выделенным сингулярным ее значениям.

§ 4. Связь «наивероятнейшего» распределения с «черным» излучением и связь $\lg W$ с энтропией излучения, определенной термодинамически

Эту связь мы установим лишь частично и в неявном виде, сформулировав для этого следующие требования, накладывающие ограничения на выбор весовой функции $\gamma(\nu, E)$.

I. «Наивероятнейшее» распределение собственных колебаний по состояниям возбуждения должно приводить к энергетическому спектру, который удовлетворяет установленным в § 1 закономерностям черного излучения [6].

II. При бесконечно медленном сжатии сосуда с зеркальными стенками $\lg W$ остается постоянным независимо от исходного распределения $a(\nu, E)$.

[5] То обстоятельство, что множитель λ в противоположность μ должен зависеть от ν, объясняется тем, что «одно» условие (14) по существу представляет собой множество дополнительных условий, соответствующих различным значениям ν. Каждому из этих условий сопоставляется свой множитель Лагранжа $\lambda(\nu)$.

[6] Уравнение (1) при этом позволяет связать параметр μ в формуле (18) с T [ср. уравнение (36)].

§ 5. Весовая функция с точностью до несущественного множителя имеет вид $\gamma(\nu, E) = G\left(\frac{E}{\nu}\right)$.

Доказательство основывается на сопоставлении требования II из § 4 и утверждения II из § 2.

Пусть первоначально задано распределение $a(\nu, E)$. Будем сжимать бесконечно медленно кубический объем, ограниченный зеркальными стенками, так что длина его ребра изменится от l до l'. Положим

$$\frac{l}{l'} = m. \tag{20}$$

Если рассматривать каждое колебание в отдельности, то уравнения (9) и (10) дают

$$\nu' = m\nu, \tag{21}$$

$$E' = mE. \tag{22}$$

Собственные колебания, частота и энергия которых первоначально были в пределах от ν до $\nu + d\nu$ и от E до $E + dE$, теперь будут заключаться в пределах

$$\text{от } m\nu \text{ до } m\nu + md\nu, \text{ от } mE \text{ до } mE + mdE. \tag{23}$$

Таким образом,

$$a'(\nu', E')\, md\nu mdE = a(\nu, E)\, d\nu dE. \tag{24}$$

Отсюда

$$a'(\nu', E') = \frac{1}{m^2} a(\nu, E), \tag{25}$$

$$N(\nu') = \frac{1}{m} N(\nu). \tag{26}$$

Согласно II § 4, для всех возможных начальных распределений $a(\nu, E)$ и для всех значений m должно быть

$$\lg W' - \lg W = 0 \tag{27}$$

Из (13) и (20) — (26) следует после несложных выкладок, что для всех возможных начальных $a(\nu, E)$ и всех значений m должно выполняться соотношение

$$\int_0^\infty d\nu \int_0^\infty dE a(\nu, E) \lg \frac{\gamma(m\gamma, mE)}{\gamma(\nu, E)} + \int_0^\infty d\nu N(\nu) \lg m = 0, \tag{28}$$

или

$$\int_0^\infty d\nu \int_0^\infty dE a(\nu, E) \lg \frac{m\gamma(m\nu, mE)}{\gamma(\nu, E)} = 0, \tag{29}$$

что эквивалентно предыдущему в силу (14). Если бы в этом уравнении функция $a(\nu, E)$ могла принимать совершенно произвольный вид, то отсюда непосредственно вытекало бы, что выражение под знаком логарифма при всех значениях m должно равняться единице. Однако $a(\nu, E)$ ограничена условием (14). Чтобы теперь сделать вывод относительно выражения под логарифмом и вида функции $\gamma(\nu, E)$, заметим, что левая часть (29) должна обращаться в нуль при всех вариациях $\gamma(\nu, E)$, совместимых с условием (14). Если решить эту вариационную задачу (см. приложение А), то получим, что функция $\gamma(\nu, E)$ должна иметь вид

$$\gamma(\nu, E) = Q(\nu)\, G\left(\frac{E}{\nu}\right). \tag{30}$$

Но так как множитель $Q(\nu)$ не влияет на распределение излучения (§ 3, II), то это доказывает утверждение, содержащееся в заглавии параграфа.

§ 6. Построение функции $f\left(\beta\frac{\nu}{T}\right)$ закона смещения с помощью весовой функции $G\left(\frac{E}{\nu}\right)$

«Наивероятнейшее» спектральное распределение, дающее величину энергии излучения, содержащейся в 1 см^3 объема, может быть получено по формуле (18) в виде

$$\frac{N(\nu)}{l^3} \cdot \frac{\int_0^\infty dE \cdot Ee^{-\mu E}\gamma(\nu, E)}{\int_0^\infty dE e^{-\mu E}\gamma(\nu, E)}. \tag{31}$$

С учетом (8) и (30) это выражение принимает вид

$$\frac{8\pi\nu^3}{c^3} \cdot \frac{\frac{1}{\nu}\int_0^\infty dE \cdot Ee^{-\mu E} G\left(\frac{E}{\nu}\right)}{\int_0^\infty dE e^{-\mu E} G\left(\frac{E}{\nu}\right)}. \tag{32}$$

Если положить

$$\frac{E}{\nu} = q, \tag{33}$$

то (32) переходит в

$$\frac{8\pi\nu^3}{c^3} \cdot \frac{\int\limits_0^\infty dq \cdot qe^{-\mu\nu q} G(q)}{\int\limits_0^\infty dq e^{-\mu\nu q} G(q)} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^3 f(\nu\mu). \tag{34}$$

Чтобы теперь это выражение, в смысле требования I § 4, имело вид

$$\alpha\nu^3 f\left(\beta \frac{\nu}{T}\right), \tag{35}$$

необходимо и достаточно, чтобы параметр μ зависел от T следующим образом [7]:

$$\mu = \frac{\beta}{T}. \tag{36}$$

Вводя обозначения

$$\nu\mu = \beta \frac{\nu}{T} = \sigma, \tag{37}$$

$$\frac{\alpha c^3}{8\pi} = C, \tag{38}$$

$$Z(\sigma) = \int\limits_0^\infty dq \cdot qe^{-\sigma q} G(q), \tag{39}$$

$$N(\sigma) = \int\limits_0^\infty dq \cdot e^{-\sigma q} G(q), \tag{40}$$

можно записать (34) в виде

$$Cf(\sigma) = \frac{Z(\sigma)}{N(\sigma)}. \tag{41}$$

---

[7] Параметр μ при заданном выборе весовой функции оставался еще функцией полной энергии $\mathfrak{E}$ (§ 3, I). Утверждение (36) сводится, таким образом, к тому, что мы при определенном выборе $G\left(\frac{E}{\nu}\right)$ задаем соответствующим образом зависимость $\mathfrak{E}$ от T. Константы α и β в принципе могут быть определены из сравнения расчетного и наблюдаемого спектрального распределения.

§ 7. Введение дискретных значений веса наряду с непрерывной весовой функцией

Теперь не представляет труда отказаться от ограничения, на которое указывалось в § 3, III. Наряду с непрерывным распределением $G(q)$, при котором элементу dq соответствовало бесконечно малое значение веса $G(q)\,dq$, для точек $q_1, q_2, q_3, \ldots$ можно ввести конечные значения дискретного веса: $G_0, G_1, G_2, \ldots$ Если, согласно этому, модифицировать выводы § 3—6, то вместо (41) мы получим выражение

$$Cf(\sigma) = \frac{P(\sigma)}{Q(\sigma)}, \tag{42}$$

где приняты следующие сокращенные обозначения:

$$\sum_{r=0}^{\infty} q_r e^{-\sigma q_r} G_r + \int_0^{\infty} dq \cdot q e^{-\sigma q} G(q) = P(\sigma) \tag{43}$$

и

$$\sum_{r=0}^{\infty} e^{-\sigma q_r} G_r + \int_0^{\infty} dq \cdot e^{-\sigma q} G(q) = Q(\sigma). \tag{44}$$

Когда все G_r равны нулю, мы возвращаемся к случаю чисто непрерывного распределения, описываемого формулой (41).

З а м е ч а н и е. Во всех тех случаях, когда в процессе дифференцирования $Q(\sigma)$ по σ могут быть переставлены операции дифференцирования по σ и интегрирования (или соответственно суммирования) по q, мы, очевидно, имеем

$$Z(\sigma) = -\frac{d}{d\sigma} N(\sigma), \tag{44a}$$

$$P(\sigma) = -\frac{d}{d\sigma} Q(\sigma), \tag{44b}$$

$$Cf(\sigma) = -\frac{d}{d\sigma} \lg Q(\sigma). \tag{44c}$$

§ 8. Фиолетовое требование несовместимо со случаем чисто непрерывного распределения

Примем, что $G_0 = G_1 = G_2 = \ldots = 0$, так что $f(\sigma)$ определяется выражением (41). Вид этого выражения непосредственно показывает, что поведение $f(\sigma)$ при $\sigma \to \infty$ (в ультрафиолетовой области) зависит от того, как ведет себя

$G(q)$	$Z(\sigma)$	$N(\sigma)$	$Cf(\sigma)$
$(q-R)^N$ при $q>R$ 0 при $0<q<R$	$\frac{e^{-R\sigma}}{\sigma^{N+1}}R\Gamma(N+1)$	$\frac{e^{-R\sigma}}{\sigma^{N+1}}\Gamma(N+1)$	R
$\simeq q^N$	$\sigma^{-N-2}\Gamma(N+2)$	$\sigma^{-N-1}\Gamma(N+1)$	$\frac{N+1}{\sigma}$
Произвольная бесконечная интегрируемая функция	—	—	$\geqslant \frac{1}{\sigma^{2+\delta}}$ *

* Для таких бесконечных, но интегрируемых функций $G(q)$, которые ведут себя как $q^{-1-\varepsilon}$, оценка $\varepsilon\sigma^{-1}$, помещенная в предыдущей ячейке таблицы, является более точной. Оценка, приведенная в последней ячейке таблицы, по-видимому, может быть уточнена и в общем случае, причем, возможно, менее искусственным способом, чем это сделано в приложении В. Для наших целей, конечно, приведенная таблице оценка является достаточной.

$G(q)$ при $q=0$. Это связано с тем, что, когда σ становится очень большим, множитель $e^{-\sigma q}$ все более уменьшает те значения q, которые вносят в интеграл основной вклад.

Можно показать далее, что $f(\sigma)$ с неограниченным возрастанием σ стремится к нулю тем быстрее, чем большие значения принимает $G(q)$ по мере приближения к точке $q=0$. Это следует из приводимой ниже таблицы (построенной по данным Приложения В). В первой ее вертикальной колонке представлено поведение $G(q)$ при приближении к $q=0$; в последующих колонках дан ход $Z(\sigma)$, $N(\sigma)$ и $f(\sigma)$ с ростом σ.

$Z(\sigma)$ всегда спадает к нулю быстрее, чем $N(\sigma)$, благодаря множителю q при $G(q)$, причем влияние этого множителя оказывается тем большим, чем быстрее $G(q)$ растет по мере приближения к $q=0$. Но даже в том случае, когда $G(q)$ возрастает наиболее быстрым способом, возможным при условии, что интеграл в знаменателе $N(\sigma)$ сохраняет смысл, т. е. когда $G(q)$ — бесконечная интегрируемая функция, все же спадание $N(\sigma)$ в такой мере компенсирует спадание $Z(\sigma)$, что $f(\sigma)$ оказывается убывающей слишком медленно для того, чтобы удовлетворить фиолетовому требованию. В последнем случае $\sigma^4 f(\sigma)$ с ростом σ стремится к ∞ — в противоречии с фиолетовым требованием (4).

§ 9. Чтобы удовлетворить фиолетовому требованию или усиленному фиолетовому требованию, значение энергии $E = 0$ должно иметь некоторый дискретный вес G_0 и сверх того непрерывный вес $G(q)$ по мере приближения к $q=0$ должен стремиться к нулю быстрее, чем вторая степень q в первом случае, или соответственно быстрее любой степени q во втором случае

Точка $q = 0$ должна быть выделена за счет дискретного веса, т. е. еще в большей степени, чем в случае бесконечного, но интегрируемого непрерывного веса $G(q)$.

Доказательство.

1. Когда в точке $q = 0$ отсутствует дискретный вес (но, возможно, он имеется в каких-либо других точках), то фиолетовое требование по-прежнему остается нарушенным (см. Приложение С).

2. Если точке $q = 0$ отвечает дискретный вес G_0, то

$$\lim_{\sigma\to\infty} Q(\sigma) = G_0. \tag{45}$$

Таким образом, в то время как в выражении (41) знаменатель $N(\sigma)$ всегда стремится к нулю и тем самым замедляет спадание $f(\sigma)$, это не имеет места для знаменателя $Q(\sigma)$, входящего в выражение (42); в этом случае $f(\sigma)$ стремится к нулю так же быстро, как и числитель $P(\sigma)$.

3. Что касается скорости спадания $P(\sigma)$, то здесь необходимо иметь в виду следующее:

а) из-за множителя $q_0 = 0$ G_0 не входит в $P(\sigma)$;

б) если $G(q)$ при приближении к $q = 0$ стремится к нулю как n-я степень q, то $P(\sigma)$ при достаточно больших σ ведет себя как $Z(\sigma)$, потому что при этом в формуле (43) более медленно спадающий интеграл превосходит сумму входящего в эту формулу ряда, каждый член которого стремится к нулю быстрее любой степени σ.

Но $Z(\sigma)$ спадает как $\sigma^{-(N+2)}$, если $G(q)$ ведет себя при $q \to 0$ как q^N (ср. поведение $Z(\sigma)$ в таблице § 8).

4. Из этого замечания непосредственно следуют ответы на оба утверждения, сделанные в заглавии к настоящему параграфу.

§ 10. Нарушение красного требования может происходить лишь тогда, когда веса достаточно быстро стремятся к нулю с ростом E

Принимая во внимание теоретико-вероятностный смысл весовой функции, мы сразу ограничимся рассмотрением лишь таких дискретных и непрерывных весов, которые с неограниченным ростом E (и, следовательно, q) убывают или по крайней мере стремятся к константе.

С приближением к точке $\sigma = 0$ $Q(\sigma)$ может либо оставаться меньше некоторой (положительной) верхней границы, либо бесконечно возрастать (при $\sigma = 0$ как интеграл, так и сумма в $Q(\sigma)$ могут расходиться); однако в любом случае $Q(\sigma)$ не может при этом стремиться к нулю. Поэтому если, в соответствии с красным требованием (3), $f(\sigma)$ при $\sigma \to 0$ обращается в бесконечность как σ^{-1}, то это возможно лишь за счет того, что $P(\sigma)$ при этом стремится к бесконечности на одну степень σ быстрее, чем $Q(\sigma)$.

Таким образом, красное требование будет нарушено, если веса убывают с ростом q настолько быстро, что

$$P(\sigma) = \sum_{r=1}^{\infty} q_r G_r + \int_0^{\infty} dq \cdot qG(q) \tag{46}$$

остается конечным. Мы встретимся с таким случаем при анализе весовых функций, на которых основывается вывод формулы излучения Вина (§ 13, *II*; ср. также § 11, п. 4).

§ 11. Разъяснение предыдущих результатов на одном примере

Пусть лишь точке $q = 0$ соответствует дискретный вес $G_0 = A$; все остальные точки будем считать не имеющими дискретных весов. Непрерывный вес $G(q)$ пусть равен нулю в интервале от $q = 0$ до $q = R$ и равен B для всех $q > R$. Тогда

$$Q(\sigma) = A + Be^{-R\sigma}\sigma^{-1}, \tag{47}$$

$$P(\sigma) = -\frac{dQ}{d\sigma} = Be^{-R\sigma}(R\sigma^{-1} + \sigma^{-2}), \tag{48}$$

$$Cf(\sigma) = \frac{Be^{-R\sigma}}{\sigma} \cdot \frac{R\sigma + 1}{A\sigma + Be^{-R\sigma}}. \tag{49}$$

Замечания.

1. Зададим условие в точке $q = 0$ следующим образом: сначала положим непрерывный вес равным константе B для всех q, а затем часть этого веса, занимающую отрезок между точками $q = 0$ и $q = R$, сожмем к левому концу отрезка $q = 0$. Это соответствует тому, что в предыдущих формулах положено $A = RB$. При этом $f(\sigma)$ можно привести к виду [8]

$$Cf(\delta) = \frac{1 + \sigma^{-1}}{1 + \sigma e^{\sigma}}. \tag{50}$$

Такая функция $f(\sigma)$ удовлетворяет как красному, так и (усиленному) фиолетовому требованию [9].

2. Фиолетовое требование будет нарушено, если в формуле (49) положить $A = 0$ (т. е. устранить дискретный вес из точки $q = 0$) или $R = 0$ [при этом $G(q)$ стремится к константе при $q \to 0$, вместо того чтобы иметь в этой точке нуль второго порядка; ср. § 9]. В этих случаях имеем соответственно

$$Cf(\sigma) = R + \frac{1}{\sigma}; \tag{51}$$

$$Cf(\sigma) = \frac{1}{\frac{A}{B}\sigma^2 + \sigma}. \tag{52}$$

3. Если положить $A = R = 0$, т. е. принять для всех q одинаковый вес, то

$$Cf(\sigma) = \frac{1}{\sigma}, \tag{53}$$

---

[8] Здесь R выбрано равным единице, что эквивалентно соответствующему выбору единиц измерения E и ν.

[9] Для очень малых и очень больших σ вычисленная функция $f(\sigma)$ ведет себя так же, как и функция

$$f(\sigma) = \frac{e^{-\sigma}}{\sigma},$$

которая приводит к формуле излучения

$$\rho(\nu, T) = a\nu^2 T e^{-\beta \frac{\nu}{T}}.$$

Эта последняя формула была приведена Рэлеем в качестве эмпирического закона. При малых ν она переходит в формулу Рэлея — Джинса (2), но в отличие от нее при больших ν дает спадание к нулю бесконечно высокого порядка.

что приводит к формуле излучения Рэлея — Джинса (2).

4. Во всех рассмотренных случаях красное требование — равенство (3) — выполнялось. Оно продолжает выполняться и тогда, когда при $q > R$ $G(q) = q^N$ с $N > -2$. Но если $N \leqslant -2$, то оно уже нарушается.

5. Допущение, что $G(q)$ обращается в нуль в некотором конечном интервале, прилежащем к точке $q = 0$, является достаточным, но вовсе не необходимым для выполнения «усиленного» фиолетового требования [10].

§ 12. Отличительные черты фиолетового требования Вина — Планка

Чтобы $f(\sigma)$ с неограниченным ростом σ убывала быстрее, чем $Me^{-L\sigma}$, должно быть $G(q) = 0$ в интервале от $q = 0$ по крайней мере до $q = L$; чтобы $f(\sigma)$ убывала точно как $Me^{-L\sigma}$ нужно, кроме того, чтобы в точке $q_1 = L$ был некоторый дискретный вес.

Если, в соответствии с первым требованием, предел

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{f(\sigma)}{e^{-L\sigma}} \tag{54}$$

не равен бесконечности, то, согласно равенству (45), то же самое справедливо и для предела

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{P(\sigma)}{e^{-L\sigma}} = \lim_{\sigma\to\infty} \left[\sum_{r=1}^{\infty} q_r G_r e^{(L-q_r)\sigma} + \int_0^{\infty} dq \cdot qG(q)\, e^{(L-q)\sigma}\right]. \tag{55}$$

Но для q или q_r, меньших L, выражения $e^{(L-q_r)\sigma}$ и $e^{(L-q)\sigma}$ с ростом σ увеличиваются беспредельно.

Таким образом, чтобы предел (54) *не был бесконечным*, должны выполняться следующие условия.

a) $G(q)$ должно быть равным нулю в интервале от $q = 0$ по крайней мере до $q = L$;

b) первая отличная от q_0 точка q_1, обладающая дискретным весом, если она вообще существует, должна удовлетворять условию $q_1 \geqslant L$.

Для того чтобы, в соответствии со вторым требованием,

---

[10] Например, функция $G(q) = e^{1/q} q^{-3/2}$ приводит к $f(\sigma) = e^{-2\sqrt{\sigma}}$.

предел (54) был вместе с тем отличен от нуля, нужн› еще, чтобы [11]:

c) действительно существовала по крайней мере одна, отличная от $q_0 = 0$ точка q_1 с дискретным весом и $R = L$;

d) координата этой точки q_1 должна точно равняться L.

В то время как необходимость дискретного веса в точке $q_0 = 0$ вытекает из совершенно очевидного равенства (4), необходимость дискретного веса в другой точке $q_1 = 0$ оказалась следствием того, что мы произвольно наложили на функцию $f(\sigma)$ условие (7), которое по существу не может быть проверено экспериментально. Было бы явным злоупотреблением заключать на основании сказанного в предыдущих параграфах, что хорошее согласие результатов измерений с формулой (5), как известно, имеющее место при больших ν/T, позволяет нам отбросить все те функции $G(q)$, которые не удовлетворяют, например, условию C.

Весовая функция, лежащая в основе формулы излучения Планка, обладает всеми отмеченными выше свойствами. В следующих параграфах мы увидим, в какой мере это справедливо по отношению к весовой функции, лежащей в основе формулы В. Вина.

§ 13. Примеры к § 12

Пример I. Формула излучения Вина.

Положим [12]

$$G(q) = 0, \qquad q_r = r, \qquad G_r = \frac{1}{r!}. \tag{56}$$

При этом

$$Cf(\sigma) = \frac{\sum\limits_{r=0}^{\infty} r \frac{1}{r!} e^{-r\sigma}}{\sum\limits_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} e^{-r\sigma}} = e^{-\sigma}. \tag{57}$$

---

[11] Если бы не было ни одной другой точки с дискретным весом, то указанное требование должно было бы выполняться в отношении интеграла, входящего в (55). Но если $G(q)$ с приближением к точке $q = L$ со стороны $q > L$ стремится к нулю, к конечной константе (ср. пример § 11) или даже к интегрируемой бесконечности, во всех случаях предел интеграла равен нулю. Если же точке $q_1 = L$ приписать дискретный вес, то поведение непрерывного веса $G(q)$ при $q \geqslant L$ не имеет никакого значения для выполнения фиолетового требования, но существенно для других свойств функции $f(\sigma)$ и для выполнения красного требования.

[12] Ср. § 14, III.

а) Фиолетовое требование выполняется в виде равенства (7); весовая функция удовлетворяет условиям, приведенным в § 12.

б) Красное требование (3) не удовлетворяется. Причина в том, что весовая функция с ростом q спадает столь быстро, что бесконечный ряд в числителе $f(\sigma)$ сходится даже при $\sigma = 0$.

Пример II. Формула излучения Планка [13]

$$G(q) = 0, \qquad q_r = r, \qquad G_r = A, \tag{58}$$

$$Cf(\sigma) = \frac{\sum\limits_{r=0}^{\infty} re^{-r\sigma}}{\sum\limits_{r=0}^{\infty} e^{-r\sigma}} = \frac{1}{e^{\sigma} - 1}. \tag{59}$$

а) Фиолетовое требование, как и в примере I, выполняется в виде равенства (7).

б) Красное требование выполняется, в чем легко убедиться, разложив e^{σ} в ряд по степеням σ.

Пример III. Если точкам $q_0 = 0$ и $q_1 = 1$ сопоставить веса $G_0 = G_1 = A$ и положить $G(q)$ в интервале $0 \leqslant q \leqslant 1$ равным нулю, а при остальных q — произвольным, но удовлетворяющим условию $\lim\limits_{q \to \infty} Gq = A$, то получим функцию $f(\sigma)$, которая при $\sigma \to 0$ и $\sigma \to \infty$ ведет себя так же, как и функция $f(\sigma)$, входящая в формулу Планка.

§ 14. Резюме полученных результатов в свете гипотезы световых квантов и окончательная формулировка вопросов

1. Из представленных в § 1 общих свойств черного излучения, а в особенности из факта необходимости достаточно быстрого спадания кривой интенсивности излучения по мере безграничного роста частоты ν, мы можем получить определенные данные о поведении функции $\gamma(\nu, E)$. Отношение этих функций

$$\gamma(\nu, E_1)\,dE_1/\gamma(\nu, E_2)\,dE_2$$

измеряет относительную вероятность того, что энергия некоторого индивидуального собственного колебания

[13] *M. Planck.* Vorlesungen, § 150.

(с частотой ν) полости с излучением заключена в пределах соответствующих энергетических интервалов

$$E_1 \div E_1 + dE_1 \qquad \text{и } E_2 \div E_2 + dE_2.$$

Принимая во внимание гипотезу световых квантов, можно сделать следующие выводы.

A) $\gamma(\nu, E)$ представляет собой (с точностью до не имеющего физического значения множителя) функцию вида $G\left(\frac{E}{\nu}\right)$ (см. § 5).

B) Значению энергии $E = 0$ соответствует конечная вероятность, по порядку величины такая же, которая для других значений энергии соответствует отличному от нуля конечному интервалу энергии.

C) Области энергии, прилегающей к значению $E = 0$, соответствует исчезающе малая вероятность (относительно точной ее оценки, см. § 9, 12). Эта область исчезающе малых значений величины $G\left(\frac{E}{\nu}\right)$ выражена тем ярче, чем быстрее кривая энергии черного излучения спадает к нулю с ростом ν.

В частности, если потребовать, чтобы кривая плотности энергии с безграничным ростом величины ν/T спадала бы к нулю не медленнее, чем функция

$$\alpha\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}},$$

то для значений $0 < E < h\nu$, $G\left(\frac{E}{\nu}\right)$ должна равняться нулю (см. § 12).

D) Протяженность указанной области энергии, которой соответствует исчезающе малая вероятность, согласно пункту A, для всех собственных колебаний пропорциональна их частоте ν.

E) При переходе от терминологии Рэлея — Джинса, оперирующей с собственными колебаниями, к используемым Планком резонаторам результаты пунктов A—D можно, не претендуя на очень большую строгость, сформулировать примерно следующим образом:

Достаточно быстрое спадание кривой плотности излучения с ростом ν имеет место лишь в том случае, если резонаторы обладают неким «порогом возбуждения»[14], высота которого пропорциональна частоте резонатора.

F) Простейшее предположение о виде функции $G\left(\frac{E}{\nu}\right)$, которое совместимо с конечной высотой порога возбуждения (см. § 11), приводит к следующей формуле для спектральной плоскости излучения:

$$\rho(\nu, T) = \alpha\nu^3 \frac{1 + \sigma^{-1}}{1 + \sigma e^{\sigma}} \qquad \left(\sigma = \frac{h\nu}{kT}\right),$$

которая при $\nu \to 0$ ведет себя как $A\nu^2 T$, а при $\nu \to \infty$ — как $A\nu^2 T e^{-h\nu/kT}$.

II. Сформулируем теперь характерные черты гипотезы световых квантов, которые выявляются при подходе к проблеме, использованном Эйнштейном. В этом случае гипотеза содержит следующие предположения.

A) Резонатор частоты ν может обладать только следующими дискретными значениями энергии: 0, $h\nu$, $2h\nu$,...

B) Эти значения энергии получаются за счет сложения некоторого числа элементарных, не зависящих друг от друга порций энергии $h\nu$.

C) Такие световые кванты ведут себя подобно атомам не только в процессах испускания и поглощения света, но и существуют самостоятельно в пространстве, свободном от материи[15].

III. Что касается предположения A в пункте II, то оно согласуется с выводами A—D пункта I весьма характерным образом. Это выражается в акцентировании значения энергии, равного нулю, в исчезающе малой вероятности прилегающих значений энергии и в пропорциональности ширины этой области исчезающе малой вероятности частоты ν. Напротив, вопрос о необходимости акцентирования значения энергии, равного $h\nu$, остается нерешенным (§ 12). Это тем более относится к вопросу о дальнейшем ходе функции $G(E/\nu)$, за исключением общего характера ее поведения при больших E, вытекающего из красного требования (§ 10). Естественно, следует принимать во внимание то обстоятель-

---

[14] Г-н Планк употреблял это выражение в своей работе «Новая гипотеза об излучении» («Verh. d. Deutsch. Physik. Ges.», 1911, **13**, S. 142). Однако в его работе этому выражению придается более конкретный смысл, чем, по моему мнению, в нем содержится.

[15] См.: *A. Einstein*. «Ann. d. Phys.», 1905, **17**, S. 132 (§ 6); 1906, **20**, S. 199; «Phys. Zs.», 1909, **10**, S. 185.

ство, что наши выводы базировались лишь на данных об асимптотическом поведении функции ρ (ν, T) при стремлении величины ν/T к нулю и бесконечности.

Вопрос о справедливости предположения А может быть окончательно разрешен только в том случае, если в выражении

$$\rho(\nu, T) = a\nu^3 f\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$$

считать функцию f полностью известной [16]. В этом случае, как видно из уравнений (42) — (44с), функция $G(E/\nu)$ находится решением следующего функционального уравнения[17]:

$$\sum_{r=0}^{\infty} G_r e^{-q_r \sigma} + \int_0^{\infty} dq G(q) e^{-q\sigma} = Q(\sigma), \qquad (60)$$

где $Q(\sigma)$ следующим образом выражается через $f(\sigma)$ [см. уравнение (44с)]:

$$Q(\sigma) = e^{-\int f(\sigma) d\sigma}. \qquad (61)$$

Для иллюстрации метода я хотел бы вернуться к определению функции $G(E/\nu)$, соответствующей функциям $f(\sigma)$, входящим в спектральные формулы Планка и Вина:

$$f(\sigma) = \frac{1}{e^{\sigma} - 1} \qquad \text{и} \qquad f(\sigma) = e^{-\sigma}. \qquad (62)$$

Я буду при этом исходить из любезно сделанного мне указания, что, поскольку в обоих случаях функция $Q(\sigma)$ является периодической с чисто мнимым периодом $2\pi i$, $G(q)$ оказывается равным нулю повсюду, кроме эквидистантных точек 0, 1, 2, ... с бесконечным весом [18].

---

[16] Это обстоятельство обсуждалось мной еще в 1906 г. («Phys. Zs.», 1906, 7, S. 528), но тогда я не обратил внимания на то, что функция $\gamma(\nu, E)$ должна иметь вид $G(E/\nu)$.

[17] Приведенное функциональное уравнение — за вычетом члена с суммой в левой части — встречалось еще у Римана в работе «О распределении простых чисел...» (см. собрание трудов Римана) и было решено им с помощью интегрирования в комплексной области.

[18] Если воспользоваться терминологией Гильберта (см. «Линейные интегральные уравнения», IV. «Mitt. Göttinger. Nachr.», 1906), то это означает, что решение функционального уравнения представляется чисто дискретным спектром, тогда как непрерывный спектр отсутствует.

Записывая в нашем случае

$$Q(\sigma) = F(e^{-\sigma}) \tag{63}$$

и обращая внимание на то, что, в соответствии со сказанным, уравнение (60) принимает следующий специальный вид:

$$\sum_{r=0}^{\infty} G_r (e^{-\sigma})^r = F(e^{-\sigma}), \tag{64}$$

мы заключаем, что задача определения дискретных весов G_r сводится к нахождению разложения функции $F(e^{-\sigma})$ в ряд по степеням аргумента $e^{-\sigma}$.

IV. Допустим, что предположение А в пункте II каким-либо образом подтверждено. Что следует из этого относительно предположений В и С этого пункта? Если я не ошибаюсь, в этом отношении справедлив следующий вывод. Эйнштейновская теория световых квантов по существу отличается от планковской лишь наличием предположения С [19]. Что касается предположения В, то оно, напротив, содержится уже в самих основах планковской теории и по существу эквивалентно предположению *А*.

Этот взгляд основывается на следующем. Г. Планк приводит два различных способа получения своей формулы излучения:

а) с помощью нахождения наивероятнейшего распределения резонаторов по энергиям;

б) с помощью нахождения наивероятнейшего распределения квантов энергии по различным резонаторам (см. § 150 и соответственно § 148 книги Планка).

Эти два способа опираются соответственно на следующие два предположения:

α) каждый отдельный резонатор частоты ν может получать порции энергии: $0, h\nu, 2h\nu, \ldots$ и притом с равной вероятностью;

β) энергия излучения частоты ν распределяется между резонаторами с собственной частотой ν в виде конечных элементарных порций — квантов — с энергией $h\nu$. При этом каждый отдельный квант поглощается различными

[19] Недавно г. Планк в своей статье «К теории теплового излучения» («Ann. d. Phys.», 1910, 31, S. 758), высказываясь по поводу эйнштейновской формулировки гипотезы световых квантов, основное ударение сделал на том, что предположение С совершенно чуждо его собственной теории.

резонаторами с равной вероятностью, а различные кванты рассматриваются как существующие сами по себе и независимо друг от друга.

Но такая аргументация ошибочна. Способ β) вывода планковской формулы излучения, без сомнения, совершенно идентичен способу α). Комбинаторный аппарат этих двух способов различается только методом соединения квантов в комплексии. Однако было бы неверно думать, что метод α) опирается или заставляет опираться на предположение β).

Можно показать, что предположение β) приводит не к планковской формуле излучения, а к бесконечному множеству подобных формул, причем выбор определенной формулы из этого множества может быть произведен лишь при дополнительных требованиях.

Таким образом, эйнштейновская гипотеза световых квантов расходится с основами планковской теории не только тогда, когда вводится предположение о существовании отдельных, независимых друг от друга квантов в пустом пространстве, но уже тогда, когда в этой гипотезе делается предположение относительно величины энергии, поглощаемой резонаторами [20].

Приложение

А

[К § 2; уравнение (30).] Введем в выражения (29) и (14) следующие обозначения:

$$\frac{E}{\nu}=q, \qquad a(\nu, E)=b(\nu, q), \qquad \gamma(\nu, E)=K(\nu, q)$$

и заметим, что

$$\gamma(m\nu, mE)=K(m\nu, q).$$

Тогда выражения (29) и (14) приобретут следующий вид:

$$\int_0^\infty d\nu\cdot\nu\int_0^\infty dq b(\nu, q)\lg\frac{mK(m\nu, q)}{K(\nu, q)}=0, \tag{29'}$$

$$\nu\int_0^\infty dq b(\nu, q)=N(\nu). \tag{14'}$$

Чтобы решить упомянутую в тексте вариационную задачу, следует учесть дополнительное условие (14′) с неопределенным множителем A,

[20] К этому вопросу, который рассматривался в моем докладе на заседании Петербургского физического общества в апреле 1911 г., я намерен вернуться в другом месте.

причем надо иметь в виду, что этот множитель может зависеть от ν и от m, но не от q. При этом получается следующее условие для функции K:

$$\lg \frac{mK(m\nu, q)}{K(\nu, q)} = A(m, \nu).$$

Если здесь величину ν приравнять 1, а величину q поочередно положить равной единице и произвольному числу, отсюда получается соотношение

$$\frac{K(m, q)}{K(1, q)} = \frac{K(m, 1)}{K(1,1)}.$$

Здесь $K(1,1)$ есть некоторая константа, $K(m, 1)$ — функция одной только m, $K(1, q)$ — одной только q. Это значит, что функция K должна следующим образом зависеть от обоих своих аргументов (мы можем снова обозначить их через ν и q):

$$K(\nu, q) = Q(\nu)\, G(q).$$

Тем самым показано, что $\gamma(\nu, E)$ имеет следующий вид:

$$\gamma(\nu, q) = Q(\nu)\cdot G\left(\frac{E}{\nu}\right),$$

что и требовалось доказать.

B

(К таблице § 8.) Постановкой $\sigma q = \xi$ из (39) и (40) получаем

$$Z(\sigma) = \sigma^{-2}\int_0^\infty d\xi\cdot\xi e^{-\xi} G\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) \qquad (39')$$

и

$$\overset{\smile}{N}(\sigma) = \sigma^{-1}\int_0^\infty d\xi e^{-\xi} G\left(\frac{\xi}{\sigma}\right). \qquad (40')$$

Докажем прежде всего справедливость записанного в последней строке таблицы § 8. Требуемое неравенство

$$\frac{Z(\sigma)}{N(\sigma)} \geqslant \sigma^{-(2+\varepsilon)} \quad \text{(для достаточно больших } \sigma) \qquad (a)$$

можно с учетом (39′) и (40′) записать в следующей эквивалентной форме

$$\int_0^\infty d\xi e^{-\xi}(\xi - \sigma^{-1-\varepsilon})\, G\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) \geqslant 0 \qquad (в)$$

(для достаточно больших σ)

Разобьем этот интеграл на положительную и отрицательную части:

$$\int_0^{\sigma^{-1-\varepsilon}} = I\,(\sigma), \qquad \int_{\sigma^{-1-\varepsilon}}^{\infty} = II\,(\sigma).$$

Справедливость неравенства (*b*) и тем самым (*a*) будет, очевидно, полностью доказана, как только мы покажем, что

$$\lim_{\sigma\to\infty} II\,(\sigma) \neq 0, \tag{c}$$

$$\lim_{\sigma\to\infty} I\,(\sigma) = 0, \tag{d}$$

поскольку тогда для достаточно больших значений σ отрицательная величина I (σ) не сможет перевесить вклад всегда положительной и не стремящейся к нулю величины II (σ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА (*c*)

Величина II (σ) наверняка больше интеграла, взятого в пределах от $\sigma^{-1-\varepsilon}$ до 1. Для этого интеграла, далее, справедливо следующее неравенство:

$$\int_{\sigma^{-1-\varepsilon}}^{1} d\xi e^{-\xi}\,(\xi - \sigma^{-1-\varepsilon})\, G\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) \geqslant e^{-1} \int_{\sigma^{-1-\varepsilon}}^{1} d\xi\,(\xi - \sigma^{-1-\varepsilon})\, G\left(\frac{\xi}{\sigma}\right).$$

Но, поскольку $G(q)$ в точке $q = 0$ есть бесконечная интегрируемая функция, интеграл в правой части этого неравенства будет стремиться к отличной от нуля положительной величине.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (*d*)

Абсолютная величина I (σ) не превосходит значения следующего интеграла:

$$s\,(\sigma) = \int_0^{\sigma^{-1-\varepsilon}} d\xi\,(\sigma^{-1-\varepsilon} - \xi)\, G\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) =$$

$$= \sigma^{-\varepsilon} \int_0^{\sigma^{-2-\varepsilon}} dqG\,(q) - \sigma^2 \int_0^{\sigma^{-2-\varepsilon}} dq\cdot qG\,(q).$$

Производя во втором интеграле, стоящем в правой части этого выражения, интегрирование по частям[1] и полагая

$$\int_0^q dqG\,(q) = H\,(q),$$

[1] Условия допустимости такого преобразования в данном случае выполняются.

получаем в результате несложных промежуточных выкладок

$$s(\sigma) = \sigma^2 \int\limits_0^{\sigma^{-2-\varepsilon}} dq H(q).$$

Здесь $H(q)$ может стремиться к нулю медленнее любой сколь угодно малой положительной степени q. Однако поскольку эта функция стремится к нулю и к тому же монотонно, то для достаточно малых q $H(q)$ наверняка должно стать меньше некоторой конечной величины M. Отсюда получаем, что для достаточно больших σ

$$s(\sigma) < \sigma^2 M \sigma^{-2-\varepsilon},$$

откуда следует условие (d).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СРЕДНЕЙ СТРОКИ В ТАБЛИЦЕ § 8

Если $G(q)$ точно равно q^N, то подстановка $\sigma q = \xi$ дает непосредственно

$$N(\sigma) = \frac{1}{\sigma^{N+1}} \int\limits_0^\infty d\xi e^{-\xi} \xi^N = \frac{1}{\sigma^{N+1}} \Gamma(N+1)$$

и аналогичное выражение для $Z(\sigma)$. Если же

$$G(q) = Aq^N [1 + \varepsilon(q)],$$

где $\varepsilon(q)$ стремится к нулю при $q \to 0$, то для получения оценки нужно разбить интегралы по q, представляющие $Z(\sigma)$ и $N(\sigma)$, на две части: одна — от $q = 0$ до $q = \sigma^{-1/2}$, вторая — от $q = \sigma^{-1/2}$ до $q = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПЕРВОЙ СТРОКИ В ТАБЛИЦЕ § 8

Интегралы, представляющие $Z(\sigma)$ и $N(\sigma)$, в данном случае распространяются на интервал от $q = R$ до $q = \infty$. Если вынести множитель $e^{-R\sigma}$ за знак интеграла и в подынтегральном выражении сделать замену

$$q - R = p,$$

то получим интегралы, имеющие точно такой же вид, как во второй строке таблицы.

C

(К § 9, п. 1.) Ход доказательства. Пусть первой точкой с дискретным весом будет точка q_1. Нужно различать два типа функций $G(q)$. I. $G(q)$ может быть отличным от нуля при значениях $q < q_1$. II. Непрерывный вес $G(q)$ может быть равным нулю на всем отрезке от $q = 0$ до $q = q_1$. В обоих случаях с помощью метода, изложенного в начале § 12, можно сравнить относительную скорость убывания при достаточно больших

σ функций $Z(\sigma)$ и $q_1e^{-q_1\sigma}$ или соответственно функций $N(\sigma)$ и $e^{-q_1\sigma}$. Результат оказывается следующим. В случае I функция $q_1e^{-q_1\sigma}$ убывает быстрее $Z(\sigma)$, а $e^{-q_1\sigma}$ соответственно быстрее $N(\sigma)$; поведение функции $f(\sigma)$ при этом дается таблицей § 8. В случае II, наоборот, $Z(\sigma)$ и $N(\sigma)$ убывают быстрее, чем $q_1e^{-q_1\delta}$ и соответственно $e^{-q_1\sigma}$, даже в том случае, когда $G(q)$ с приближением к точке $q = q_1$ со стороны $q > q_1$ стремится к (интегрируемой) бесконечности. По этой причине здесь $\lim\limits_{\sigma \to \infty} f(\sigma) = q_1$. В обоих случаях фиолетовое требование оказывается нарушенным.

1911

ОБ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЯХ, ИМЕЮЩИХ МЕСТО ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ РЕНТГЕНОВЫХ ЛУЧЕЙ ЧЕРЕЗ ДВУХАТОМНЫЙ ГАЗ

Как известно, В. Фридрих [1] нашел, что пучок рентгеновых лучей, проходящий через желтый воск и другие аморфные твердые тела, дает на помещенной за ними фотографической пластинке интерференционные кольца. Жидкий парафин дает также кольцо, но оно соответствует не максимуму темноты, а точке перегиба кривой, дающей убывание темноты. Фридрих обсуждает вкратце два возможных объяснения наблюденных явлений:

a) можно думать, что твердое аморфное тело построено из малых кристалликов. Интерференционные пятна от таких различных кристалликов, направленных равномерно во все стороны, смыкаются на фотографической пластинке в кольца;

b) у твердых аморфных тел и в особенности у жидкостей «расположение частиц совершенно беспорядочное». При прохождении рентгеновых лучей через такую аморфную среду мы имеем дело с явлением, аналогичным наблюдаемому при прохождении света через стеклянную пластинку, посыпанную порошком ликоподия [2]

То обстоятельство, что жидкий парафин также дает интерференционное кольцо, Фридрих считает в пользу второго объяснения и высказывает далее предположение, что здесь «мы имеем дело с дифракцией от молекулы или атома».

---

[1] *W. Friedrich*. «Phys. Zs.», 1913, **14**, S. 317.

[2] *P. Drude*. Optik, I. 1, kap. IV; *M. Laue*. «Sitzber. d. Preuss. Akad.», 1915.

Э. Гупка[3] пытается, если я правильно понял, дать другое объяснение, в котором *среднее расстояние* молекул имеет значение «постоянной решетки».

Заслуживающее доверия введение статистических соображений, на которых должно основываться вычисление темных колец, кажется мне особенно затруднительным для жидкостей ввиду тесного расположения молекул и неизвестных связей (ассоциация) между соседними молекулами.

Поэтому я позволю себе в дальнейшем вкратце показать, что в случае прохождения рентгеновых лучей через двухатомный газ задача значительно упрощается. Не берусь судить, можно ли тут преодолеть экспериментальные трудности; если это так, то, следуя указанному пути, можно получить новые данные о положении атомов в газовой молекуле.

§ 1

Пусть на уединенную двухатомную молекулу газа падают плоские рентгеновы волны. Оба атома испускают вторичные волны, которые интерферируют во всем пространстве. Рассматриваем интерференцию в произвольной точке P плоскости E (фотографическая пластинка), расположенной нормально к направлению падения рентгеновых лучей на расстоянии D за молекулой. D мы считаем бесконечно большим по сравнению с центральным расстоянием обоих атомов молекулы, полагаемых нами ради простоты одинаковыми.

Если оси молекулы давать последовательно всевозможные направления, вращая молекулы вокруг одного из атомов A_1, то разность фаз, с которой интерферируют в точке P вторичные волны от A_1 и A_2, будет меняться, а вместе с ней будет меняться и интенсивность излучения в этом месте. Вычисляем среднюю интенсивность в точке P и спрашиваем: как изменяется эта средняя интенсивность с положением P на пластинке E?

Из соображений симметрии средняя интенсивность одинакова для всех точек P, для которых направление «молекула точка P» образует с направлением падающих рентгеновых лучей тот же угол φ. При увеличении φ средняя интенсив-

---

[3] *E. Hupka.* «Die Interferenz d. Röntgenstrahlen», 1914, 62, H. 8.

ность изменяется по колебательному закону, а именно

$$1+\frac{\sin 2\pi\rho}{2\pi\rho}, \qquad (1)^{4}$$

где

$$\rho=\frac{2a}{\lambda}\sin\frac{\varphi}{2} \qquad (2)$$

(λ — длина волны рентгеновых лучей; a — расстояние между атомами, *принимаемыми нами за точки* [5]).

Последовательные максимумы и минимумы выражения (1) относятся как

$$2:0{,}78:1{,}13:0{,}91:1{,}07$$

и лежат при

$$2\pi\rho=0;\ 4{,}49;\ 7{,}72;\ 10{,}90;\ 14{,}07.$$

Таблица дает соответствующие значения φ при различных значениях a/λ:

a/λ	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
1/2	0°	90°	—	—
1	0	41	71°	114°
2	0	21	34	50
3	0	14	22	32

§ 2

Пусть теперь освещается не одна двухатомная молекула, а некоторая масса газа; размеры освещенного количества должны быть достаточно малы по сравнению с расстоянием между газом и фотографической пластинкой E (например, 1 мм и 5 см).

Мы утверждаем [6]:

темные кольца на фотографической пластинке, если отвлечься от незначительного уменьшения резкости, продолжают изображаться выражением (1);

---

[4] См. приложение, стр. 150.

[5] Целесообразно ограничиться этим упрощением, пока опыт не дает указаний на необходимость более сложной схемы.

[6] См. приложение, стр. 150.

уменьшение резкости соответствует малым изменениям, испытываемым кольцами (1), когда центр рассмотренной в § 1 молекулы пробегает последовательно все точки малой освещенной области.

§ 3

Что касается экспериментального осуществления этих колец, то здесь мы встречаемся с весьма значительными трудностями; быть может, однако, они и преодолимы.

1. Незначительная, вероятно, интенсивность полного вторичного излучения. Во всяком случае следует брать пары, атомы которых по возможности тяжелы [7].

2. Падающее излучение должно быть по возможности однородным или же обладать таким распределением интенсивности в спектре, чтобы по меньшей мере первое кольцо не совсем расплывалось. Чтобы в последнем случае иметь возможность по распределению света и темноты вычислить a, нужно знать спектральное распределение из интерференционных картин, даваемых кристаллами.

3. Чтобы первому кольцу соответствовали бы удобные значения φ, a/λ должно непременно превосходить единицу (см. таблицу, § 1).

4. Возможно, что темные кольца, происходящие от аморфного стеклянного сосуда, содержащего пар, могут портить дело [8]. Тогда, быть может, следует заменить аморфное стекло, например, слюдой.

Приложение

Вторичные волны, посылаемые двумя атомами A, B в определенную точку P фотографической пластинки, дают там вместе смещение

$$M \sin p\,(t-\tau_A)+M \sin p\,(t-\tau_B). \qquad (\alpha)$$

Средний по времени квадрат выражения (α), распространенный на один период, равен

$$\frac{M^2}{2}\,[1+2\cos p\,(\tau_A-\tau_B)+1]=M^2\,[1+\cos p\,(\tau_A-\tau_B)]. \qquad (\beta)$$

Если атомы A и B принадлежат двум различным молекулам газа, то за время экспозиции, в силу независимости движения молекул, величина $\cos p\,(\tau_A-\tau_B)$ принимает с одинаковой частотой равные

[7] Или растворы, но здесь явления теоретически более сложны.
[8] При опытах Фридриха с желтым воском они не появлялись.

положительные и отрицательные значения, так что среднее во времени от $\cos p(\tau_A - \tau_B)$ равно нулю.

Нечто иное имеем для двух атомов, принадлежащих к одной молекуле. Здесь мы разбиваем определение среднего на два шага.

I. Всевозможные направления оси двухатомной молекулы, один из атомов которой не меняет своего положения.

II. Повторение этого определения среднего для всех положений атома внутри освещаемого газового пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕГО I

Пусть CA — падающий рентгеновский луч (рис. 1), AD — вторичный луч, идущий от атома A к точке фотографической пластинки P. Ищем геометрическое место всех положений атома B, для которых разность хода

$$CAD - EBF = \Delta$$

имеет одно и то же значение [9]. Ответ: описываем вокруг A шар с радиусом, равным постоянному расстоянию атомов $AB = a$. Пересекаем

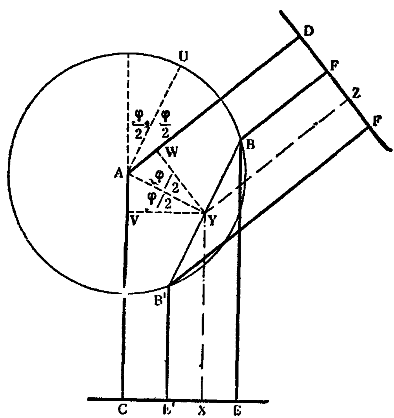


Рис. 1

этот шар плоскостью $B'YB$, перпендикулярной плоскости CAD и параллельной прямой AU [10]. Окружность BB', получающаяся от пересечения этой плоскости с шаром, и есть искомое место точек; для всех ее точек имеем

$$EBF = E'B'F'.$$

---

[9] AB настолько мало по сравнению с AP и BP, что AP и BP можно считать параллельными, а Δ — разностью хода, с которой приходят в P вторичные волны от A и B.

[10] Зеркало, параллельное плоскости $B'YB$, отражает лучи EB', XY, EB как раз в направлении $B'F'$, XZ, BF.

Все они дают одинаковую разность хода с CAD, которую можно изобразить так:

$$\Delta = XYZ - CAD$$

или, наконец, так:

$$\Delta = VAW - 2\,(AY)\sin\frac{\varphi}{2}. \qquad (\gamma)$$

В связи с этим

$$\cos p\,(\tau_A - \tau_B) = \cos\frac{p\Delta}{c}, \qquad (\delta)$$

а определение среднего I состоит в том, что (δ) интегрируется по всем поясам шара, параллельным BB'; результат делится на величину поверхности шара.

Полагаем

$$AY = h;$$

тогда имеем

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int_{-a}^{a} dh\cdot 2\pi a\cos\frac{p\Delta}{c} = \frac{1}{a}\int_{0}^{a} dh\cos\left\{\frac{2p}{c}\,h\sin\frac{\varphi}{2}\right\} =$$

$$= \frac{c}{2ap\sin\frac{\varphi}{2}}\int_{0}^{2\pi\rho} du\cos u = \frac{\sin 2\pi\rho}{2\pi\rho}.$$

Здесь для сокращения введено обозначение

$$\frac{2ap}{c}\sin\frac{\varphi}{2} = 2\pi\rho.$$

Отсюда получаем темные круги

$$M^2\left(1 + \frac{\sin 2\pi\rho}{2\pi\rho}\right),$$

о которых говорилось в § 1 [11].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕГО II

Так как расстояния от рентгеновой трубки до молекулы и от молекулы до фотографической пластинки огромны по сравнению с расстоянием $AB = a$, то мы могли до сих пор поступать так, как будто имеем дело с фраунгоферовой интерференцией. Если теперь для определения среднего II мы заставляем молекулу занимать все положения в освещенном пространстве, то эти перемещения молекулы еще практически бесконечно малы по сравнению с расстоянием от рентгеновой трубки, но не по сравнению с расстоянием от молекулы до пластинки. В связи с этим темные кольца при малом перемещении молекулы параллельно пластинке следуют за ним на равное расстояние. При перемещении перпендикулярно пластинке получается малое увеличение или уменьшение колец. Очевидно, что это незначительно размывает кольца.

1915

[11] Множитель M^2, конечно, также изменяется с φ — быть может, так, как $\cos^2\varphi$. Мы пока оставили в § 1 эту зависимость в стороне, дабы получить первый очерк вопроса.

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИИ ФРАУНГОФЕРА

(Совместно с П. С. Эпштейном)

1. В в е д е н и е. На страницах этого журнала была опубликована важная работа В. Дюане [1], в которой делается успешная «попытка сформулировать теорию отражения рентгеновских лучей кристаллами на квантовой основе без ссылок на законы интерференции». А. Х. Комптон [2], развивая соображения, высказанные Дюане в его статье, показал недавно, что сформулированная этим автором гипотеза может быть обоснована с помощью применения общих принципов теории квантов к поступательному движению кристаллической решетки.

Оба упомянутых автора рассматривают случай плоскопаралллельных пучков падающего и отраженного света (дифракция Фраунгофера) при бесконечных размерах решетки, что приводит к бесконечно узким отраженным пучкам различного порядка. Целью настоящей статьи является рассмотрение аналогичных вопросов в применении к решеткам конечной длины и другим дифрагирующим системам, причем опять мы ограничимся случаем дифракции Фраунгофера [1].

Всякая конечная решетка — в качестве крайнего ее случая можно рассмотреть систему, состоящую всего из двух рассеивающих центров,— может быть представлена, в соответствии с теоремой Фурье, в виде суперпозиции бесконечных решеток. Поэтому наша задача в математическом смысле сводится к Фурье-анализу. С другой стороны, при конечной решетке возникает, строго говоря, непрерывный спектр допустимых углов рассеяния, и в квантовой теории интенсивность лучей, рассеянных решеткой в некотором заданном направлении, определяется вероятностью того, что световой квант будет отклонен именно в этом направлении. Это приводит к мысли использовать *принцип соответствия* в качестве подходящего инструмента для нашего исследования.

2. П р а в и л а к в а н т о в а н и я Д ю а н е — К о м п т о н а. Мы сформулируем здесь правила Дюане — Комптона в обобщенной форме, в которой будет явно видна инвариантность результата по отношению к выбору системы координат. Рассмотрим трехмерную бесконечную

[1] Кроме того, мы пренебрежем незначительным изменением длины волны вследствие эффекта Комптона.

триклинную решетку с межатомными расстояниями по главным осям, соответственно равными a_1, a_2 и a_3. Согласно Комптону, при столкновении со световым квантом такая решетка может получить импульс, ортогональные проекции которого p_1, p_2, p_3 на направления главных осей q_1, q_2, q_3 удовлетворяют основному соотношению квантовой теории

$$\int p_1 dq_1 = n_1 h, \qquad \int p_2 dq_2 = n_2 h, \qquad \int p_3 dq_3 = n_3 h, \qquad (1)$$

где n_1, n_2, n_3 — целые числа и h — постоянная Планка (квант действия). Расстояния a_1, a_2, a_3 определяют пространственные периоды решетки, так что первый интеграл должен браться в пределах от q_1 до $q_1 + a_1$ и соответственно — остальные интегралы. Поэтому получаем

$$p_1 = h\frac{n_1}{a_1}; \qquad p_2 = h\frac{n_2}{a_2}; \qquad p_3 = h\frac{n_3}{a_3}. \qquad (2)$$

С другой стороны, импульс светового кванта частоты ν дается выражением $h\nu/c = h/\lambda$, где c — скорость света и λ — длина волны в вакууме, соответствующая частоте ν. Если направление распространения света составляет с главными осями решетки углы, косинусы которых равны соответственно α_0, β_0, γ_0 для падающего света и α, β, γ для отраженного решеткой, то каждый световой квант при столкновении теряет импульс, проекции которого на главные оси равны $(\alpha - \alpha_0)\,h/\lambda$, $(\beta - \beta_0)\,h/\lambda$, $(\gamma - \gamma_0)h/\lambda$.

Таким образом, закон сохранения импульса дает соотношения

$$\alpha - \alpha_0 = \lambda\frac{n_1}{a_1}, \qquad \beta - \beta_0 = \lambda\frac{n_2}{a_2}, \qquad \gamma - \gamma_0 = \lambda\frac{n_3}{a_3}, \qquad (3)$$

которые совпадают с полученными М. Лауэ из теории интерференции.

Однако выбор главных осей кристалла в качестве осей координат создает впечатление некоторого произвола. Чтобы устранить этот произвол, покажем, что если решетка при столкновении получает импульс в направлении некоторой прямой линии, проходящей через какие-либо два атома (следуя Брэггу, будем называть эту линию crystal avenue — «кристаллической аллеей»), то величина этого импульса должна удовлетворять соотношению, аналогичному (2),

$$pa = hn, \qquad (4)$$

где a — расстояние между двумя ближайшими атомами, расположенными на выбранной прямой. Переходя к главным осям, мы можем сказать, что a есть диагональ параллелепипеда с ребрами m_1a_1, m_2a_2, m_3a_3, где m_1, m_2, m_3 — целые числа, не имеющие общих делителей. Легко видеть, что

$$a = m_1a_1\cos(a_1a) + m_2a_2\cos(a_2a) + m_3a_3\cos(a_3a).$$

Используя условие (2), имеем

$$p\cos(a_1a) = \lambda\frac{n_1}{a_1}; \qquad p\cos(a_2a) = \lambda\frac{n_2}{a_2};$$

$$p\cos(a_3a) = \lambda\frac{n_3}{a_3}.$$

Умножая эти три равенства соответственно на m_1a_1, m_2a_2, m_3a_3 и складывая, получим

$$pa = (m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3)\lambda.$$

Поскольку числа m_1, m_2, m_3 не имеют общих делителей, то выражение в скобках, согласно известной теореме теории чисел, может быть сделано равным любому заданному целому числу n соответствующим выбором положительных или отрицательных целых значений чисел n_1, n_2, n_3.

3. Бесконечная линейная решетка. Начнем наше рассмотрение с простого случая одномерной решетки, элементы которой расположены по прямой; материальные точки, на которых могут рассеиваться световые кванты, будем считать распределенными на этой прямой с некоторой плотностью ρ. Расстояние, отсчитываемое вдоль прямой от некоторой фиксированной точки, обозначим через x. Для краткости будем называть ρ «электронной плотностью»; понятие решетки содержит в себе условие, чтобы эта плотность была периодической функцией x с периодом a, называемым «постоянной решетки».

Если решетка движется с постоянной скоростью в направлении оси x относительно некоторой неподвижной точки, то плотность в этой точке меняется со временем как периодическая функция, возвращаясь к исходному значению каждый раз, как решетка сместится на расстояние a или кратное a. В связи с этим Комптон принимает интервал интегрирования в квантовом соотношении $\int pdq = nh$ равным a (см. раздел 2), что приводит к условию

$$p = h\frac{n}{a}. \tag{4}$$

Если распределение электронной плотности является синусоидальным, т. е. задается формулой

$$\rho = A \sin\left(\frac{2\pi x}{a} + \delta\right), \tag{5}$$

то плотность в некоторой фиксированной точке за счет движения решетки будет изменяться со временем по закону простого гармонического колебания. По теореме Фурье любое распределение электронной плотности можно разложить в сумму синусоидальных членов; другими словами, всякую решетку — как бесконечную, так и конечную — можно представить в виде суперпозиции бесконечных синусоидальных решеток, описываемых формулами типа (5). По этой причине последний случай заслуживает более подробного изучения.

Согласно принципу соответствия [2], каждому члену в разложении Фурье-выражения для ρ соответствует некоторое квантованное изменение движения, сопровождающееся изменением импульса на величину p, даваемую формулой (4), если в ней под n/a подразумевать коэффициент при $2\pi x$ в аргументе синуса.

Поэтому если соотношение Дюане — Комптона означает, что решетка может приобрести импульс, равный целому числу h/a, то принцип соответствия позволяет пойти дальше и утверждать, что для синусоидальной решетки, описываемой формулой (5), изменение импульса может быть равно только $\pm h/a$, но не кратному этой величины [3].

Общее выражение для ρ в случае бесконечной решетки имеет вид

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{a} + \delta_n\right). \tag{6}$$

Члену этого ряда, содержащему в аргументе коэффициент n/a при $2\pi x$, соответствует изменение импульса, даваемое формулой (4) при том же значении коэффициента при h. Поэтому для такой решетки общего вида изменение

---

[2] Строго говоря, принцип соответствия должен применяться к системе решетки и падающей световой волны, поскольку в отсутствие электромагнитных волн равномерное движение решетки не приводит к излучению.

[3] Мы должны включить в рассмотрение знак минус, поскольку выражение (5) можно переписать в виде $-A\sin(-2\pi x/a - \delta)$.

импульса может происходить очень большим числом способов. Помимо этого принцип соответствия дает информацию об относительной вероятности различных возможных изменений импульса: вероятность того, что решетка получит импульс nh/a, пропорциональна квадрату коэффициента при соответствующем члене ряда, т. е. A_n^2.

Как отмечалось в разделе 2, изменение импульса, которое получает решетка при столкновении со световым квантом, определяет направление вылета кванта согласно соотношению

$$\alpha - \alpha_0 = \lambda \frac{n}{a}. \tag{7}$$

Поэтому высказанное выше утверждение относительно вероятностей различных значений импульса означает, что интенсивность спектра n-го порядка пропорциональна A_n^2.

Чтобы показать, что эти условия находятся в согласии с интерференционной теорией решеток, нам нужно установить, что эта теория дает тот же самый результат для синусоидальной решетки, т. е. что распределение электронной плотности, описываемое формулой

$$\rho = A_m \sin \frac{2\pi m x}{a}, \tag{8}$$

приводит к возникновению двух бесконечно острых отраженных пучков под углами, определяемыми из равенства (7) при $n = \pm m$, причем интенсивность этих пучков пропорциональна A_m^2. Доказать это не составляет труда. Действительно, вклад элемента dx решетки в амплитуду света, испускаемого в направлении α, пропорционален выражению

$$\rho e^{i \frac{2\pi}{\lambda} x (\alpha - \alpha_0)} dx. \tag{9}$$

Полная амплитуда равна

$$S = C A_m \int \sin\left(2\pi m \frac{x}{a}\right) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} x (\alpha - \alpha_0)} dx. \tag{10}$$

Оценим это выражение сначала для случая конечной решетки, принимая пределы интегрирования равными $\pm N$, а затем перейдем к пределу $N \to \infty$. Имеем

$$S = \frac{iCA_m}{2\pi}\left\{\frac{\sin\left(\frac{m}{a}-\frac{\alpha-\alpha_0}{\lambda}\right)Na}{\frac{m}{a}-\frac{\alpha-\alpha_0}{\lambda}} - \frac{\sin\left(\frac{m}{a}+\frac{\alpha-\alpha_0}{\lambda}\right)Na}{\frac{m}{a}+\frac{\alpha-\alpha_0}{\lambda}}\right\}.$$

Отсюда видно, что амплитуда пропорциональна A_m и имеет два максимума в направлениях, определяемых соотношением $\alpha-\alpha_0 = \pm m\lambda/a$. Величина амплитуды в максимуме пропорциональна N, и при бесконечно большом N вся энергия полностью сосредоточивается в направлениях максимумов, которые становятся бесконечно узкими. Таким образом, описание фраунгоферовской дифракции на бесконечной синусоидальной решетке оказывается тождественным с точки зрения классической теории и с точки зрения описанной выше теории световых квантов. Так как всякая линейная дифрагирующая система может быть составлена из бесконечных синусоидальных решеток, такая тождественность имеет место для всех случаев дифракции Фраунгофера. Итак, рассмотрение, содержащееся в первой половине этого раздела, является буквальным переводом теории фраунгоферовской дифракции на язык квантовой теории. В следующем разделе мы постараемся применить этот общий подход к некоторым частным случаям.

4. Линейная точечная решетка. С математической точки зрения синусоидальная решетка, рассмотренная в предыдущем разделе, является простейшим случаем. Однако такую решетку невозможно физически осуществить, поскольку в некоторых ее точках плотность оказывается отрицательной, что приводит к изменению фазы рассеянного света на половину периода. В качестве основного примера в большинстве учебников рассматривается точечная решетка. Электронная плотность ρ в функции x для такой решетки графически изображается серией эквидистантных пиков, ширина которых очень мала по сравнению с расстоянием a между ними.

Бесконечная точечная решетка. В этом случае распределение может быть представлено аналитически в виде ряда Фурье. Коэффициенты разложения, вычисленные известным способом, оказываются одинаковыми для всех низших членов. Если высота пика равна C, а ширина c, то разложение для ρ имеет вид (6) с коэффициентами $A_0 = Cc/a$, $A_n = 2Cc/a$. Это означает, что спектры различных порядков, возникающие от такой решетки, имеют одинаковую интенсивность, поскольку интенсивность спектра n-го порядка пропорциональна A_n^2. Нас не должно беспокоить то обстоятельство, что приведенные выражения для A_n оказываются неправильными при больших n, потому что соответствующие члены все равно не представляют физического интереса: хотя теоретически и возможны такие большие изменения импульса, но в действительности они не будут происходить ввиду того, что падающий световой квант не обладает достаточным для этого импульсом.

Конечная точечная решетка. Здесь нам необходимо вместо ряда использовать интеграл Фурье. Если за начало координат ($x = 0$) взять середину решетки, то для электронной плотности имеем выражение

$$\rho(x) = \int_0^\infty A(\omega) \cos 2\pi\omega x \, d\omega, \tag{11}$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\beta) \cos 2\pi\omega\beta d\beta. \tag{12}$$

Таким образом, решетка представляется в виде суперпозиции бесконечного числа синусоидальных решеток с периодами $a' = 1/\omega$. Согласно результатам раздела 3, каждая такая решетка испускает луч света в направлении, определяемом соотношением

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{\lambda}{a'} = \lambda\omega, \tag{13}$$

причем интенсивность этого луча дается квадратом амплитуды $A(\omega)$. Формула (12) позволяет легко найти величину интенсивности. Считая, что $\rho(\beta)$ отлично от нуля только в точках расположения пиков $\beta = ma$, получим

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{Cc}{a} \sum_{m=-U}^{U} \cos 2\pi m\omega a = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{Cc}{a} \cdot \frac{\sin N\pi a\omega}{\sin \pi a\omega},$$

где $N = 2U + 1$ — полное число пиков в нашей решетке. Чтобы получить распределение интенсивности рассеянного решеткой света по направлениям, достаточно возвести в квадрат выражение для A, подставив в него значение ω из формулы (13):

$$A^2 = 4\frac{C^2c^2}{\pi^2a^2}\cdot\frac{\sin^2\frac{N\pi a}{\lambda}(\alpha-\alpha_0)}{\sin^2\frac{\pi a}{\lambda}(\alpha-\alpha_0)}. \tag{14}$$

Полученный результат полностью совпадает с классической интерференционной формулой.

В частном случае $N = 2$ из формулы (14) следует хорошо известное распределение, соответствующее интерференции двух диполей:

$$A^2 = 16\cos^2\frac{\pi a}{\lambda}(\alpha-\alpha_0). \tag{15}$$

5. Пространственная решетка. Обобщение на случай трех измерений не требует привлечения каких-то новых соображений. Если обозначить через x_1, x_2, x_3 координаты вдоль каких-либо трех кристаллических осей триклинной решетки, то распределение электронной плотности в произвольной решетке такого типа, да и вообще в любой системе, может быть представлено в виде суммы членов вида

$$\begin{aligned}\rho_{m_1m_2m_3} = A_{m_1m_2m_3}\sin\left(2\pi m_1\frac{x_1}{a_1}+\delta_{m_1}\right)\times\\ \times\sin\left(2\pi m_2\frac{x_2}{a_2}+\delta_{m_2}\right)\sin\left(2\pi m_3\frac{x_3}{a_3}+\delta_{m_3}\right),\end{aligned} \tag{16}$$

так что нам достаточно обсудить случай, когда распределение плотности описывается этим выражением.

Применяя принцип соответствия аналогично тому, как мы это делали в случае линейной решетки, приходим к выводу, что такая решетка может приобрести лишь такой импульс, ортогональные проекции которого на направления осей x_1, x_2, x_3 даются формулами (2) при $n_1 = \pm m_1$, $n_2 = \pm m_2$, $n_3 = \pm m_3$. Согласно проведенному в разделе 2 анализу, это означает, что направление импульса, получаемого решеткой, совпадает с направлением одной из четырех «кристаллических аллей», косоугольные компоненты которых вдоль главных осей равны $\pm m_1a_1$, $\pm m_2a_2$, $\pm m_3a_3$, причем скорость для каждого из этих направлений является вполне определенной (с точностью до знака, который может быть любым).

Направление вылета светового кванта дается соотношениями (3). Так как α, β, γ не независимы, то отсюда вытекает условие для величины λ. Таким образом, отражение будет происходить лишь в том случае, если длина волны удовлетворяет условию Лауэ — Брэгга, причем это условие должно выполняться абсолютно точно. При этом решетка определяет восемь различных направлений, в которых с равной вероятностью может испускаться отраженный свет.

Чтобы доказать полную эквивалентность результатов квантовой теории и классического подхода для трехмерного распределения плотности, достаточно установить, что теория интерференции дает тот же самый результат в случае распределения (16). В классической теории средняя амплитуда в направлении (α, β, γ) пропорциональна модулю выражения

$$\iiint \rho e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[x_1(\alpha-\alpha_0)+x_2(\beta-\beta_0)+x_3(\gamma-\gamma_0)]}\,dx_1dx_2dx_3. \tag{17}$$

Подставляя ρ в виде (16), мы находим, что выражение (17) распадается на произведение трех сомножителей, каждый из которых дается формулой типа (10), обсуждавшейся в разделе 3. Из этого обсуждения вытекает, что весь отраженный свет испускается в тех самых восьми направлениях, которые были найдены на основе квантовой теории. Это доказывает в общем виде тождественность результатов в обоих подходах для любой возможной системы, и нам больше нет необходимости заниматься исследованием специальных примеров.

6. Заключение. Приведенное здесь рассмотрение ограничивается случаем дифракции Фраунгофера и не учитывает небольшого изменения длины волны из-за эффекта Комптона. Кроме того, здесь анализируются лишь изменения импульса и совершенно не принимаются во внимание возможные изменения момента количества движения и других квантовых величин в системе. Последнее ограничение представляется естественным, поскольку только импульс прямо связан с направлением движения светового кванта, которое в основном и является предметом нашего обсуждения. Что касается ограничения случаем дифракции Фраунгофера, то оно, напротив, не является необходимым, и мы надеемся распространить нашу теорию на более общие случаи.

Таким образом, ситуация в оптике оказывается следующей:

1. Явления фотоэффекта и эффекта Комптона могут быть объяснены только с помощью гипотезы световых квантов.

2. Явление дифракции Фраунгофера может рассматриваться как на основе волновой теории света, так и с помощью представления о световых квантах в комбинации с принципом соответствия.

3. Когерентные явления не поддаются попыткам объяснения с точки зрения квантовой теории.

Следует напомнить, однако, что принцип соответствия Бора содержит все существенные черты волновой теории в форме, пригодной для квантовой теории. Поэтому наше рассмотрение скорее можно назвать приспособительной перестройкой, а не полным отказом от волновой теории.

1924

Литература

1. *W. Duane*. «Proc. Nat. Acad. Sci.», Washington, 1923, **9**, 159.
2. *A. H. Compton*. «Proc. Nat. Acad. Sci.», Washington, 1923, **9**, p. 359.

ЗАМЕЧАНИЯ К КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ [1]

(Совместно с П. С. Эпштейном)

1. О дифракции Фраунгофера. Прежде чем заниматься рассмотрением дифракции Френеля, мы сформулируем некоторые выводы нашей предыдущей статьи [1], посвященной описанию дифракции Фраунгофера, в новой форме, допускающей обобщения. Главным вопросом, обсуждавшимся в этой статье, было распределение интенсивности света, рассеянного некоторой дифракционной оптической системой под заданным углом к падающему пучку. «Электронная плотность» оптической системы считалась не-

[1] Публикация этой статьи, написанной в 1924 г., откладывалась из-за занятости авторов другой работой. Сделанное недавно открытие Дэвиссона и Джермера [2] вызывает новый прилив интереса и придает особое значение проблеме корпускулярной дифракции.

которой функцией координат, причем система координат могла выбираться произвольно. Будем использовать прямоугольную систему координат x y, z и обозначим косинусы углов между направлением падающего луча и координатными осями соответственно через α_0, β_0, γ_0.

Общее выражение для электронной плотности при этом может быть записано в виде тройного интеграла Фурье

$$\rho(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_3 \times$$
$$\times A_{\omega_1\omega_2\omega_3} \cos(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z - \delta_{\omega_1\omega_2\omega_3}), \quad (1)$$

где

$$A_{\omega_1\omega_2\omega_3} e^{i\delta_{\omega_1\omega_2\omega_3}} = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dw \times$$
$$\times \rho(u, v, w) \cos(\omega_1 u + \omega_2 v + \omega_3 w). \quad (2)$$

Это значит, что действительную электронную плотность всегда можно представить как суперпозицию бесконечных трехмерных синусоидальных решеток; каждая такая элементарная решетка состоит из однородных плоских слоев, перпендикулярных направлению $\dfrac{\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}}$.

С другой стороны, в разделе 3 предыдущей статьи мы видели, что средняя амплитуда вторичного излучения, испускаемого в направлении (α, β, γ), дается выражением

$$S(\alpha, \beta, \gamma) = C \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \rho e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[x(\alpha-\alpha_0)+y(\beta-\beta_0)+z(\gamma-\gamma_0)]}. \quad (3)$$

Выражения A и S совпадают (с точностью до постоянного множителя C), если

$$\omega_1 = 2\pi\frac{\alpha-\alpha_0}{\lambda}; \qquad \omega_2 = 2\pi\frac{\beta-\beta_0}{\lambda}; \qquad \omega_3 = 2\pi\frac{\gamma-\gamma_0}{\lambda}. \quad (4)$$

Это означает, что за рассеянный пучок (3) несет ответственность та из бесконечного числа элементарных решеток, для которой коэффициенты ω_1, ω_2, ω_3 удовлетворяют соотношению (4). Если мы рассмотрим частный случай, когда структура решетки такова, что A имеет конечную величину для значений аргументов, даваемых формулой (4), и равно нулю при всех остальных значениях ω_1, ω_2, ω_3, то из сравнения (2) и (3) следует, что интенсивность дифрагированного света будет отличной от нуля лишь в направлении (α, β, γ). Общий случай может рассматриваться как суперпозиция таких частных случаев, при этом каждая элементарная решетка рассеивает свет в одном-единственном направлении.

Систему координат целесообразно выбрать некоторым определенным образом с учетом направления рассеянного луча. Будем считать направления падающего и рассеянного луча известными и составляющими между собой угол 2φ; выберем за ось x биссектрису угла между вторичным лучом и отрицательным направлением вдоль исходного луча, за ось y — биссектрису смежного угла (между положительными направлениями обоих лучей), а за ось z — перпендикуляр к осям x и y. При этом будем иметь $\alpha = \cos\varphi$, $\alpha_0 = -\cos\varphi$, $\beta = \beta_0 = \sin\varphi$, $\gamma = \gamma_0 = 0$. Соотношения (4) принимают вид

$$\omega_1 = 4\pi\frac{\cos\varphi}{\lambda}, \qquad \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = 0. \tag{5}$$

Отсюда следует, что плоские слои той решетки, которая ответственна за данный рассеянный луч, лежат перпендикулярно оси x, т. е. в таком положении по отношению к падающему и рассеянному лучам, которое соответствует регулярному отражению от этих слоев. Постоянная этой решетки a связана с ω_1 соотношением $2\pi/a = \omega_1$ и, следовательно, удовлетворяет условию Брэгга

$$2a\cos\varphi = \lambda. \tag{6}$$

Выражение (3) для интенсивности отраженного луча принимает более простой вид

$$S = C\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\rho e^{i\omega_1 x}. \tag{7}$$

В работе [1, раздел 2] было показано, что в процессе отражения x — компонента импульса световой волны меняется на величину h/a для каждого кванта энергии $h\nu$.

2. Дифракция Френеля с классической точки зрения. Мы будем применять ту же степень точности, которая используется в большинстве книг, содержащих изложение принципа Гюйгенса (см.,

например, [3]), т. е. будем считать, что амплитуда первичной волны на расстоянии r от источника O дается выражением e^{ikr}/r. Если такая волна падает на некоторую дифракционную структуру, характеризующуюся электронной плотностью ρ, то каждый элемент этой структуры превращается в источник вторичного излучения, испускаемого в соответствии с тем же законом. Поэтому в некоторой точке O' интенсивность рассеянного или дифрагированного света определяется модулем хорошо известного выражения

$$S = C \iiint \frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(r+r')}}{rr'} \rho\, dx\, dy\, dz, \tag{8}$$

где r означает расстояние от источника O до рассеивающего элемента $dx\, dy\, dz$; r' — расстояние от этого элемента до точки O'; интегрирование распространяется на весь объем дифракционной структуры.

В этом случае оказывается возможным получить выражение, аналогичное формуле (7), если ввести вместо декартовых координат x, y, z новые криволинейные координаты, одной из которых является $\xi = r + r'$. Это можно сделать следующим образом. Обозначив длину отрезка OO' через f, выберем начало декартовых координат в середине этого отрезка и направим ось x вдоль линии OO'. Новые координаты ξ, η, φ определим соотношениями

$$\begin{gathered} x = \frac{1}{2f}\xi\eta, \qquad y = \frac{1}{2f}\sqrt{\xi^2 - f^2}\sqrt{f^2 - \eta^2}\cos\varphi, \\ z = \frac{1}{2f}\sqrt{\xi^2 - f^2}\sqrt{f^2 - \eta^2}\sin\varphi. \end{gathered} \tag{9}$$

Поверхности $\xi = \mathrm{const}$ образуют семейство софокусных вытянутых эллипсоидов вращения, а поверхности $\eta = \mathrm{const}$ — ортогональное семейство софокусных гиперболоидов. Мы имеем

$$\xi = r + r', \qquad \eta = r - r'. \tag{10}$$

Элементы длины вдоль координатных линий ξ, η, φ даются выражениями

$$\begin{gathered} ds_\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - f^2}}\, d\xi, \qquad ds_\eta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{f^2 - \eta^2}}\, d\eta, \\ ds_\varphi = \frac{1}{2f}\sqrt{\xi^2 - f^2}\sqrt{f^2 - \eta^2}\, d\varphi, \end{gathered} \tag{11}$$

а элемент объема соответственно

$$dV = \tau(\xi, \eta, \varphi)\, d\xi\, d\eta\, d\varphi = \frac{\xi^2 - \eta^2}{8f} d\xi\, d\eta\, d\varphi. \tag{12}$$

Величина угла ψ между направлением радиус-вектора r и нормалью к эллипсоиду $\xi = \text{const}$ дается формулой

$$\cos\psi = \sqrt{\frac{\xi^2 - f^2}{\xi^2 - \eta^2}}. \tag{13}$$

С учетом этих соотношений имеем $\tau/rr' = 1/2\, f$, так что формула (8) принимает вид

$$S = \frac{C}{2f} \int_f^\infty d\xi \int_{-f}^{f} d\eta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\xi}. \tag{14}$$

Аналогия со случаем, рассмотренным в предыдущем разделе, простирается довольно далеко. Как и там, мы можем здесь представить ρ в виде разложения Фурье аналогично формуле (1). Единственным отличием будет то, что вследствие конечности пределов изменения η (от $-f$ до f) и φ (от 0 до 2π) два интегрирования должны быть заменены суммированиями

$$\rho(\xi, \eta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} n_2 \sum_{n_3=-\infty}^{\infty} n_3\, A_{\omega_1 n_2 n_3} \cos\Big(\omega_1 \xi + \\ + \frac{\pi}{f} n_2 \eta + n_3 \varphi - \delta_{\omega_1 n_2 n_3}\Big), \tag{15}$$

$$A_{\omega_1 n_2 n_3} e^{-i\delta_{\omega_1 n_2 n_3}} = \frac{1}{8\pi^2 f} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-f}^{f} dv \int_0^{2\pi} dw \rho(u, v, w) \times \\ \times e^{i\left(\omega_1 u + \frac{\pi}{f} n_2 v + n_3 w\right)}. \tag{16}$$

Мы опять видим, что распределение плотности может быть представлено суперпозицией тройного бесконечного множества криволинейных элементарных решеток. Сравнение (16) и (14) показывает в близкой аналогии с разделом 1, что ответственность за вторичный пучок несет только та решетка, для которой

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad n_2 = 0, \qquad n_3 = 0. \tag{17}$$

Отсюда следует, что эта элементарная решетка представляет собой синусоидальную последовательность однородных слоев, характеризующихся условием $\xi = \text{const}$; эти слои имеют форму эллипсоидов вращения с общей фокальной осью OO'. Поскольку постоянная решетки удовлетворяет соотношению $\omega = 2\pi/a$, то мы видим, что в этом случае

$$a = \lambda. \tag{18}$$

При переходе от одного слоя к другому параметр ξ меняется на постоянную величину, равную длине волны. Такая решетка обладает свойством переводить сферическую волну, расходящуюся из точки O, в волну, сходящуюся в точку O'.

3. Импульс первичной и вторичной волн. В этом разделе мы продолжим аналогию со случаем дифракции Фраунгофера и покажем, что в процессе отражения от эллипсоидальной решетки преобладают передачи импульса, полностью аналогичные тем, которые были обнаружены Дюане для плоской решетки. Назовем ξ-импульсом лагранжеву переменную, канонически сопряженную с ξ. Величину ξ-импульса, которой обладает первичная волна, можно найти следующим образом. Рассмотрим элемент $d\sigma$ поверхности одного из эллипсоидов $\xi = \text{const}$ и зададимся вопросом, какое количество ξ-импульса dp_ξ проходит через этот элемент за короткий интервал времени dt за счет первичной волны. Если бы элемент поверхности внезапно стал полностью поглощающим, он поглотил бы все излучение, падающее на него, и таким образом приобрел бы импульс dp_ξ за время dt. Поскольку импульс есть интеграл от силы по времени, то мы имеем

$$dp_\xi = f_\xi dt, \tag{19}$$

где через f_ξ обозначена лагранжева обобщенная сила, действующая на поглощающий элемент со стороны первичной волны. Если под действием этой силы элемент смещается в направлении линии ξ, так что параметр ξ получает приращение $d\xi$, то работа силы равна

$$dW = f_\xi d\xi. \tag{20}$$

С другой стороны, та же самая работа может быть выражена через обычную силу в декартовой системе F_ξ, действующую на элемент в направлении нормали вследствие светового давления, так что она равна

$$dW = F_\xi ds_\xi. \tag{21}$$

Сравнивая эти два выражения для dW, получаем $f_\xi = F_\xi \frac{ds_\xi}{d_\xi}$ и

$$dp_\xi = F_\xi \frac{ds_\xi}{d\xi} dt. \tag{22}$$

Сила F_ξ, как известно из теории светового давления [4], дается выражением[2] $F_\xi dt = \cos\psi \frac{dE}{c}$, где dE означает величину энергии, падающей на поверхность $d\sigma$ за время dt, а ψ — угол с нормалью, определяемый формулой (13). Отсюда следует, что

$$dp_\xi = \frac{\cos\psi}{c} \cdot \frac{ds_\xi}{d\xi} dE. \tag{23}$$

Из формул (11) и (13) раздела 2 видно, что $\cos\psi \frac{ds_\xi}{d\xi} = \frac{1}{2}$, так что

$$dp_\xi = \frac{dE}{2c}. \tag{24}$$

Так как это соотношение справедливо для любого тонкого пучка, то оно выполняется и для всякой первичной волны конечных размеров

$$p_\xi = \frac{E}{2c}. \tag{25}$$

Другими словами, порция падающей волны, имеющая энергию E, обладает ξ-импульсом, пропорциональным этой энергии, причем коэффициент пропорциональности равен $^1/_2c$.

Переходя от первичной волны ко вторичной, заметим, что условия их распространения полностью симметричны. Различие состоит лишь в том, что вторичная волна является сходящейся, так что ξ-импульс для нее имеет противоположный знак. Поэтому мы можем написать

$$p'_\xi = -\frac{E}{2c}. \tag{26}$$

[2] Множитель 2 в формуле Планка [4] возникает из-за того, что там рассматривается идеально отражающий элемент, в то время как у нас он идеально поглощающий.

Если энергия E, первоначально содержавшаяся в первичной волне, в результате отражения от элементов решетки переходит в сходящуюся вторичную волну, то этот акт отражения связан с передачей ξ-импульса, равной $p_\xi - p'_\xi = E/c$. В частном случае, если мы рассмотрим количество отраженной энергии $E = h\nu$, имеем

$$\Delta p_\xi = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \tag{27}$$

В разделе 2 мы видели, что $\gamma = a$, т. е. что длина световой волны равна постоянной решетки, ответственной за отражение. Поэтому последнее соотношение можно записать в форме

$$\Delta p_\xi a = h, \tag{28}$$

в которой ясно видна его полная аналогия с правилом Дюане для величины изменения импульса в случае дифракции Фраунгофера.

4. Интерпретация результатов с помощью световых квантов. Рассмотрим задачу, поставленную в начале раздела 2, с точки зрения теории световых квантов. Световые кванты частоты ν испускаются источником O. Они могут отражаться разными способами элементами оптической системы, окружающей источник и имеющей заданное распределение электронной плотности ρ. Однако если аналогия со случаем, обсуждавшимся в разделе 1, имеет место также и в смысле применимости принципа соответствия, мы должны ожидать, что вероятность вылета отраженного светового кванта в направлении точки определяется тем же самым членом в разложении Фурье (15), который в классической теории был ответственным за превращение первичной волны во вторичную, сходящуюся к точке O'. Выражаясь более определенно, принципы, положенные в основу статьи [1], позволяют ожидать, что эта вероятность будет пропорциональна квадрату амплитуды $A_{\omega_1 n_2 n_3}$, определяемой формулами (16) и (17), т. е. соответствующей той решетке, которая ответственна за отражение в точку O'.

«Механизм» отражения можно описать следующим образом. Предположим, что наша оптическая система способна двигаться так, чтобы все поверхности $\xi = \text{const}$ перемещались в направлении нормалей к ним, оставаясь по-прежнему софокусными эллипсоидами. Обсуждавшиеся выше столкновения световых квантов с решеткой как раз и сообщают ей движение такого типа. Для величины ξ-импульса Δp_ξ, которую система может приобрести в результате столкновения со световым квантом, мы должны ввести то же самое квантовое ограничение, как и в случае, рассмотренном в работе [1]:

$$\int \Delta p_\xi d\xi = h,$$

где интегрирование производится по периоду соответствующей решетки, равному, согласно (18), $a = \lambda$. Мы опять получаем соотношение (28)

$$\Delta p_\xi a = h.$$

Механический смысл ξ-импульса, получаемого системой, можно пояснить следующим образом. Пусть m — плотность массы в некоторой точке нашей системы. Тогда кинетическая энергия элемента объема dV при его движении в направлении линии ξ будет равна

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{ds_\xi}{dt}\right)^2 dV = \frac{1}{2}\, m\left(\frac{ds_\xi}{d\xi}\right)^2 \dot{\xi}^2 dV.$$

Отсюда ξ-импульс этого элемента $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m\left(\dfrac{ds_\xi}{d\xi}\right)^2 \dot{\xi} dV$, а полный ξ-импульс всей системы равен

$$p_\xi = \int m\left(\frac{ds_\xi}{d\xi}\right)^2 \dot{\xi} dV,$$

где интеграл берется по всему объему системы.

Так как импульс сообщается системе световым квантом, то последний должен испытывать потерю величины ξ-импульса, равную $\Delta p_\xi = \dfrac{h}{a} = \dfrac{h}{\lambda} = \dfrac{h\nu}{c}$. Как мы видели в разделе 2, обычный декартов импульс M_ξ в направлении ξ связан с ξ-импульсом соотношением $M_\xi \dfrac{ds_\xi}{d\xi} = p_\xi$, так что изменение ξ-компоненты декартова импульса светового кванта при столкновении, учитывая равенство $\dfrac{ds_\xi}{d\xi}\cos\psi = \dfrac{1}{2}$, можно записать в виде

$$\Delta M_\xi = 2\cos\psi \Delta p_\xi = \frac{2h\nu}{c}\cos\psi. \qquad (29)$$

Световой квант обладает прямолинейным импульсом $h\nu/c$ в направлении его движения. В момент прохождения им поверхности $\xi = \mathrm{const}$ нормальная к поверхности компонента импульса равна $h\nu \cos\psi/c$, а тангенциальная — $h\nu \sin\psi/c$. Из равенства (29) видно, что при столкновении тангенциальная составляющая импульса не меняется, а нормальная составляющая уменьшается на величину $2h\nu \cos\psi/c$ и становится равной $-h\nu \cos\psi/c$, т. е. равна с обратным знаком ее значению до столкновения. Это изменение соответствует регулярному отражению от поверхности $\xi = \mathrm{const}$ и, следовательно, направляет квант в другой фокус поверхности O'.

Такое рассмотрение показывает, что если мы имеем некоторую структуру, состоящую из элементарных эллипсоидальных решеток, то все световые кванты, выходящие из фокуса O, будут отражены в фокус O'. В разделе 2 мы видели, что точно такое условие выполнялось в случае световых волн, подчиняющихся классической теории. Если структура является более сложной, то принцип соответствия утверждает, что вероятность такого отражения светового кванта пропорциональна квадрату амплитуды $A_{\omega_1 n_2 n_3}$ соответствующей решетки, обеспечивающей это отражение. С другой стороны, согласно формуле (14), интенсивность волны, сходящейся в точке O', выражается той же самой величиной $A^2_{\omega_1 n_2 n_3}$. Таким образом, классическая теория и изложенный выше подход, основанный на квантовой теории, дают тождественные результаты.

5. Ограничения теории. На первый взгляд может показаться, что согласие между классической и квантовой теорией в случае дифракции Френеля нисколько не хуже, чем в случае дифракции Фраунгофера. Однако более внимательное рассмотрение показывает, что между этими двумя случаями имеется существенное различие. Для объяснения дифракции Фраунгофера мы представляли электронную плотность в виде суперпозиции элементарных решеток единственным образом, независимым от падающих и отраженных лучей. Различные типы отражения мы могли интерпретировать как столкновения с отдельными элементарными решетками. Другое дело при описании дифракции Френеля: здесь разложение Фурье (15) было приспособлено к одному определенному положению источника света и точки наблюдения. Система элементарных решеток в этом случае больше не является универсальной, и даже

если зафиксируем источник света в некотором определенном положении, то все равно мы должны иметь различные системы решеток для каждой отдельной точки, в которой измеряется интенсивность. Попытка разрешения этой трудности путем приписывания всем таким системам равной вероятности и постулирования возможности столкновения светового кванта со всеми составляющими решетками этих систем несостоятельна по следующим причинам. Число таких решеток есть бесконечная величина высшего порядка, и если в интересующее нас отражение вносит вклад только одна из них, то интенсивность отраженного луча будет бесконечно малой. С другой стороны, через каждую точку пространства проходят световые кванты, которые были отражены в бесконечное множество других точек пространства, и естественно возникает вопрос, почему эти кванты не дают вклада в интенсивность в первой точке. Поэтому ясно, что дифракция Френеля не может быть объяснена на основе чисто корпускулярного подхода. Световому кванту необходимо приписать свойства фазы и когерентности, подобные свойствам волн в классической теории [3].

1927

Литература

1. *P. S. Epstein* and *P. Ehrenfest*. «Proc. Nat. Acad. Sci.», 1924, **10**, p. 133.
2. *Davisson* and *Germer*. «Nature», 1927, **119**, p. 558.
3. «Enzyklopädie der Math., Wiss.».
4. *M. Planck*. Theorie der Wärmestrahlung, формула (64).

---

[3] С тех пор, как были написаны эти строки, работы де Бройля и Шредингера значительно приблизили нас к решению этой проблемы.

НЕКОТОРЫЕ НЕЯСНЫЕ ВОПРОСЫ, КАСАЮЩИЕСЯ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Некоторые вопросы и замечания относительно: a) роли мнимой единицы в уравнении Шредингера и в теории преобразований; b) неполной аналогии между фотоном и электроном; c) более доступного изложения «спинорного исчисления».

Ниже сформулированы некоторые вопросы, которые, по-видимому, должны равным образом волновать каждого лектора, которому приходится знакомить с основами квантовой механики заинтересованных и приученных к критическому восприятию слушателей. Эти вопросы, особенно в предлагаемом изложении, можно было бы отмести как «бессмысленные», если заботиться о спокойной жизни. Правила хорошего тона вроде бы даже требуют этого. И именно поэтому кто-то должен взять на себя такой неблагодарный труд и поставить их в твердой уверенности, что всегда найдутся ученые, владеющие искусством давать на эти «бессмысленные» вопросы не только вполне осмысленные, но даже совсем ясные и простые ответы.

A. Мнимая единица в уравнении Шредингера и в перестановочных соотношениях Гейзенберга — Борна.

Имеется большой и четко систематизированный комплекс экспериментальных исследований, свидетельствующих о том, что электромагнитное поле можно описывать двумя вещественными векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$ или, если угодно, комплексным вектором $\vec{M} = \vec{H} + i\vec{E}$, который удовлетворяет следующим уравнениям, содержащим мнимую единицу:

$$\frac{1}{ic} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{M}, \qquad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{M} = i\rho.$$

На основе аналогии с этим случаем возникает желание выяснить и в какой-то мере обосновать аксиоматически, почему волны де Бройля — Шредингера требуют для своего описания по меньшей мере два действительных скаляра или их удобного сочетания в виде комплексного скаляра ψ. Последующее удвоение числа компонентов при квантовомеханическом рассмотрении спина полностью и отчетливо обосновано Паули.

З а м е ч а н и я.

1. Первые работы де Бройля и Шредингера еще совершенно четко позволяли рассчитывать на достаточность описания с помощью *одного* (курсив автора) вещественного скаляра[1]. Если там при случае и вводился для удобства комплексный временно́й множитель при рассмотрении синусоидальной волны, то вместе с тем отчетливо подчеркивалось, что по окончании расчетов следует принимать в рассмотрение только вещественную часть[2].

Впоследствии, когда левая часть уравнения Шредингера окончательно получает свой мнимый коэффициент[3], это, конечно, становится уже невозможным.

Дальнейшее ознакомление с тем, как различные авторы затем при более «учебном» изложении освещали этот момент, также не вносит ясности[4].

2. В вопросе о роли мнимой единицы в перестановочных соотношениях и во всей теории преобразований было бы очень полезно получить отчетливое представление о том, какой смысл имеет переход от вещественных рядов Фурье к комплексным рядам, содержащийся еще в старой формулировке принципа соответствия, данной Бором, и означает ли он нечто большее, чем просто прием для упрощения записей.

В. Пределы аналогии между фотоном и электроном.

В случае строго монохроматических световых волн поле E, H непосредственно дает для различных областей пространства относительные вероятности наличия в них фотона, так как «количество» фотонов отличается от энергии, которую они несут, только фиксированным здесь множителем $h\nu$.

Но как только дело касается немонохроматического поля излучения, эта однозначная связь между локальными значениями E и H и локальной вероятностью наличия фотона исчезает. В этом случае дополнительно требуется

---

[1] *Л. де Бройль*. Волновая механика. Лейпциг, 1929, стр. 64—65; *Э. Шредингер*. Работы по волновой механике. Лейпциг, 1927, стр. 26.

[2] *Э. Шредингер*. См. предыдущую ссылку.

[3] Там же, стр. 141, 142 и 154.

[4] Например: *А. Зоммерфельд*. Дополнительный том по волновой механике, стр. 8 и 46; *Х. Вейль*, стр. 44; *Я. Френкель*, стр. 60. Даже сам В. Паули (том. II, стр. 1820, 1821) вроде бы старается «не дразнить гусей».

Фурье-анализ поля E, H, т. е. существенно нелокальная операция, содержащая интегрирование по всему пространству.

Вот пример уже неприятного, но все еще достаточно скромного нарушения аналогии:

Для материальной частицы значения функции ψ, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям, определяют непосредственно локальные значения плотности вероятности наличия этой частицы. Напротив, это не так для удовлетворяющих максвелловским уравнениям полей $(H + iE)$, характеризующих фотон.

Однако нарушение аналогии в принципе оказывается еще более глубоким. Классические уравнения Максвелла представляют собой обычную теорию поля в четырехмерном пространстве x, y, z, t. В первоначальной концепции де Бройля казалось естественным, что «волны материи» также должны подчиняться четырехмерной теории поля, четким подтверждением которой считались интерференционные эксперименты простейшего типа. Но мы лишились (быть может, не навсегда?!) веры в возможность такой теории поля, после того как Шредингер для описания взаимодействия n электронов должен был использовать обобщение ψ-функции на $3n$-мерное «конфигурационное» пространство, причем все сделанные до этого попытки сохранить четырехмерный континуум потерпели неудачу [5].

Итак, возникает вопрос: каким образом при изложении «Введения в квантовую механику» следует рассматривать «аналогию между фотоном и электроном?» При нынешнем

---

[5] Мы уже привыкли забывать о возникающем здесь глубоком конфликте с одним из наших фундаментальных физических представлений, а именно с представлением о том, что прямая первичная взаимосвязь осуществляется в природе только между такими величинами, описывающими состояние, которые принадлежат к бесконечно близко расположенным точкам t, x, y, z. Шредингеровское же дифференциальное уравнение для двух электронов, напротив, требует взаимосвязи t-величин в бесконечно малой области t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 — континуума, в которой $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)^2}$ может быть равно любому количеству километров. Мы должны все время помнить о том, какой необычной теорией дальнодействия является волновая теория Шредингера, если мы хотим сохранить свою приверженность к четырехмерной теории близкодействия.

Для понимания этого весьма полезны некоторые мысленные эксперименты, придуманные Эйнштейном, но никогда не публиковавшиеся.

состоянии квантовой механики ни в коем случае не позволительна роскошь так просто игнорировать эти сравнения, оказавшиеся столь полезными в эвристическом отношении.

Замечания.

1. Выводимый из оператора Лапласа Δ линейный оператор $\sqrt{\Delta}$, который использовали Ландау и Пайерлс[6] в качестве некоего вспомогательного средства для описания фотонов, является не дифференциальным, а интегральным, т. е. существенно нелокальным оператором[7]. Когда эти авторы сопоставляют шредингеровским $\psi\psi^*$ не $H+iE$, $H-iE$, а свои F и F^*, то необходимо постоянно иметь в виду, что шредингеровская функция удовлетворяет дифференциальному уравнению, в то время как F Ландау — Пайерлса удовлетворяет (крайне элегантным образом) интегральному уравнению

$$\frac{1}{c}\dot{F} = -\sqrt{\Delta}F.$$

А вот и признание самих Пайерлса и Ландау: «...величину $F^*\frac{1}{\sqrt{\Delta}}F$ нельзя определять как плотность вероятности, так как она не является положительно определенной». Хуже про нее как будто и не скажешь! И если я правильно понимаю, то все последующие работы не принесли никаких изменений в освещение затронутого здесь вопроса[8].

2. Хотелось бы четко выяснить, что означает возможность измерения только $\psi\psi^*$, но не самой функции ψ, в то время как в случае электромагнитного поля, кроме $\frac{1}{2}(E^2+H^2)$, можно измерять также E и H по отдельности. Не идет ли здесь речь о некоей асимметрии, которая может сохраниться и в том случае, когда взаимодействие «материи» и «электромагнитного поля» будет представлено в теории лучше, чем это сделано сейчас?

3. Все виртуозные рассуждения относительно какой-то особой аналогии между уравнениями Максвелла и Дирака, если я правильно себе представляю, абсолютно ни к чему не приводят.

С. Более доступное изложение «спинорного исчисления».

В развитии механики и физики часто существенную по-

---

[6] *L. Landau u. R. Peierls.* «Zs. f. Phys.», 1930, **62**, S. 188.

[7] См. уравнение (4) цитированной работы Ландау и Пайерлса.

[8] См., например: *J. Solomon.* «Ann. d. Phys.», 1931, **16**, S. 411.

мощь оказывали аналогии между векторами и векторными полями, на первый взгляд совершенно различными; имеется обширный запас такого рода аналогий. Этого нельзя сказать о тензорах второго и более высоких рангов, для которых накопленный запас аналогий в 1900—1905 гг. был значительно меньшим; такое состояние существенно тормозило развитие физики. Все это живо припоминается, если посмотреть статью Абрагама в IV томе «Математической энциклопедии», изданном в 1900 г. (стр. 14). Это чувствуется даже в знаменитом рассмотрении специальной теории относительности Минковским (1908), когда он обозначает асимметричный тензор поля второго ранга как «пространственно-временно́й вектор второго рода». Только с выходом «Учебника кристаллофизики» Фогта (1910) и особенно после изложения тензорного исчисления Эйнштейном в его «Формальных основах общей теории относительности» (1914) можно считать это затруднение преодоленным физиками в той части, которая относится к тензорам.

Что же теперь можно сказать о спинорах?! Физики, знакомые с набросками теории спиноров, сделанными ван дер Верденом [9] главным образом в связи с «Теорией групп и квантовой механикой» Вейля[10], должны испытывать к нему большую признательность. Но все еще ощущается нехватка тоненькой книжечки, по которой было бы удобно одновременно изучать спинорное и тензорное исчисления.

Замечания.

1. На забавно ли, что физики (после 20-летнего господства специальной и 10-летнего — общей теории относительности!) только из работы Паули по волновой механике вращающегося электрона и из примыкающей к ней работы Дирака с тревогой узнали о том, что изотропное пространство и мир Эйнштейна — Минковского, кроме тензоров, могут быть еще заселены мистическими спинорами. И следствием первого испуга было не только все написанное по поводу якобы возможной «максвеллизации» уравнений Дирака. За этим последовало еще и весьма глубокомысленное применение спина электрона в качестве «гирокомпаса для эйнштейновской параллельности в отдаленных точках». Порядок

---

[9] «Gött. Nachr.», 1929, S. 100.

[10] См. также: *Б. ван дер Верден.* Метод теории групп в квантовой механике, 1932, стр. 82; *O. Laporte a. G. Uhlenbeck.* «Phys. Rev.», 1931, 37, S. 1380.

здесь был наведен впоследствии Фоком[11], который с должной аккуратностью и строгостью распространил методику расчетов параллельного переноса с тензоров на спиноры.

2. Не мог ли бы кто-нибудь, кто в действительности овладел этими материалами, снизойти до того, чтобы в удобочитаемой для нас — представителей старшего поколения физиков — форме изложить, что́ же известно для группы действительных вращений в любом многомерном пространстве[12] относительно топологии групп, их двузначного неприводимого представления и относящихся к ним спинороподобных величин, в особенности, конечно, для действительной группы вращения четырехмерного пространства. (Связь между тензорами и квазиспинорами для этого случая.) Ясный, незаумный обзор результатов уж очень желателен, даже если методы доказательств и будут даны лишь в общих чертах!

3. Нельзя ли с помощью компетентной дискуссии разъяснить, насколько правильно предположение Вейля («Теория групп и квантовая механика», стр. 142) о том, что в физике фундаментальную роль играют только такие тензоры, компоненты которых преобразуются по неприводимым представлениям в группы вращения или соответственно в группы Лоренца? (Тензор энергии и напряжений дираковского электрона дает нам, как я слышал от Уленбека, обратный тому пример.) Если принять предположение Вейля, то желательно, чтобы та самая «тоненькая книжица о спинорном и тензорном исчислениях» затрагивала бы и этот вопрос.

4. Не могут ли спиноры наряду с тензорами играть какую-то роль при классификации взаимосвязей явлений в кристаллах на основе линейных однородных уравнений (см. упомянутую выше книгу Фогта)?

1932

---

[11] «Zs. f. Phys.», 1929, 57, S. 261.

[12] См.: *H. Weyl.* «Math. Zs.», 1925, 23, S. 270; 1926, 24, S. 328, 377, 789.

IV
ИСТОРИЯ ФИЗИКИ. О СОВРЕМЕННИКАХ

ВОЗМОЖНО ЛИ ОПРЕДЕЛИТЬ ПОНЯТИЕ «ФИЗИКА»?
(Ответ профессору О. Д. ХВОЛЬСОНУ)

Но стараться определить какую-нибудь науку, это значит согласиться быть непонятым, потому что наука не может быть определена каким-либо характерным и бросающимся в глаза свойством, как какой-нибудь материальный предмет или геометрическая фигура.

М. Пулье. *Элементы физики* (*1840*)

§ 1. Предварительные замечания

1. Та фраза во введении к моему реферату «Магнетон», против которой обращается профессор О. Д. Хвольсон, выглядит — вместе с последующими строчками — так:

«Но, по всей видимости, теперь наступает время, когда магнитные явления в весомой материи снова займут внимание физиков; по-видимому, и с магнетизмом произошла теперь метаморфоза, которая из числа просто «явлений неорганизованной материи», составляющих якобы предмет физики (см. § 1 всех учебников физики), возвела его в разряд действительных предметов истинного физического исследования. Некоторые очень определенные идеи начинают вносить порядок в хаос магнитных явлений благодаря прекрасным и богатым результатами работам французских физиков, появившимся в течение последних 5—6 лет».

2. При словах «см. § 1 всех учебников физики» я имел в виду прежде всего тот учебник, по которому меня учили в гимназии: определение, которое главный вес полагает в различии между организованной и неорганизованной материей, требовалось от нас на экзамене[1].

[1] *S. Wallentin*. Lehrbuch der Physik. Wien. 1894. С благодарностью вспоминая о составителе, который был вместе с тем и моим учителем, я спешу подчеркнуть, что эта книга содержит в чрезвычайно ясной, интересной и вполне современной форме весьма богатый материал. Но § 1 этой книги характеризуется следующими предложениями: «§ 1. При помощи наших чувств мы

3. Выражение «всех» было, как справедливо замечает профессор О. Д. Хвольсон, преувеличением. Я должен был к нему прибавить какой-нибудь ограничивающий атрибут. Потому что в самом деле Г. А. Лоренц, например, в своем «Учебнике физики» (1906) не дает ни этого, ни какого-либо другого определения физики. Точно так же в «Handbuch der Physik» Винкельмана (1906; см. статью Ауэрбаха, служащую вступлением к этой книге). А как думали об определениях физики уже и некоторые более старые авторы, видно из приводимого мной эпиграфа. Впрочем, и выражения «§ 1» и «учебники» были неточны.

4. Спешу исполнить требование профессора О. Д. Хвольсона — назвать пять или шесть учебников, которые при определении физики центр тяжести вкладывают в слова «неорганизованная материя». Так как я не знаю, для чего это профессору О. Д. Хвольсону нужно, то исполняю его требование буквально.

1) Названный выше мой гимназический учебник (1894); 2) *Péclet*. Eléments de physique. Paris, 1847. «Физика имеет предметом изучение общих свойств неорганизованных тел...» (следует замечание о невесомых); 3) «Physikalisches Wörterbuch von Gehler», 1825, Bd. VIII, p. 498. «Физиология, которую можно также назвать физикой органических тел...»; 4) *G. Lamé*. Cours de physique. Paris, 1837; 5) *Mo-*

узнаем, что подле нас существуют тела природы, т. е. наполненные веществом или материей пространства. Совокупность всего воспринимаемого нашими чувствами мы называем природой, изучение которой подлежит наукам о природе (Naturwissenschaften) ... Естественная история и учение о природе (Naturlehre) обнимают органические тела, которые сами обладают средствами для изменения в пространстве и во времени (?!), и неорганические тела, у которых таковые отсутствуют. Учение (Naturlehre) о телах неорганических разделяется на физику и химию, смотря по тому, рассматриваются ли изменения внешнего состояния или же изменения в самом существе тел. Физику мы разделяем на механику и на молекулярную физику ... последняя занимается движениями мельчайших частей тела (учение о волнах, акустика, оптика, теплота, магнетизм и электричество)».

За этим следуют параграфы об «общих свойствах тел»—таких, как «непроницаемость» (водолазный колокол), «скважность» (пример: исчезновение части спирта в парах воды при смешивании обеих жидкостей !!). Несколькими страницами позже начинается уже действительно механика и физика; с этого места книга становится все более содержательной и интересной.

К сожалению, наш учитель придавал большое значение тому, чтобы мы умели справляться со всем этим аристотелевским ритуалом.

usson. Physik auf Grundlage der Erfahrung. Zürich, 1870; 1 Aufl. 1857; 6) «Encyklopaedie der Physik von Karsten», 1869, p. 64. «Физиология есть учение о природе организованных тел, физика — учение о природе неорганизованных тел (Naturlehre von den organisierten... nichtorganisierten Körpern)».

Профессор О. Д. Хвольсон дает приводимым им строчкам такое толкование, как будто я ими хочу дать понять, что мне известно какое-то особенное определение физики, которое я считаю удовлетворительнее того, которое профессор Хвольсон предпосылает своему курсу физики. Это недоразумение. Я вынужден сделать нижеследующие разъяснения [2]. Ими я надеюсь устранить это основное недоразумение и в то же время ответить на связанные с этим замечания профессора О. Д. Хвольсона.

А. Относительно определения физики

1. Я всегда полагал и теперь полагаю, что вопрос о ценности того или другого определения понятия «задача физики» выяснился бы лишь в том случае, если бы из этого определения делалось какое-нибудь употребление.

Ни об одном из таких определений мне неизвестно, чтобы оно где-нибудь применялось [3].

2. Я всегда полагал и теперь полагаю, что с точки зрения интересов преподавания в средней школе все мне известные определения физики должны быть признаны даже вредными или, по крайней мере, опасными [4].

---

[2] Мои суждения основываются на опыте, который я собрал не в качестве учителя, а исключительно в качестве ученика.

[3] 1. Составляет ли определение физики «фундамент», на котором «строится наука»?!! (см. абзац 9 статьи профессора О. Д. Хвольсона). Сам Эвклид, придававший определениям отнюдь немаловажное значение при построении своей геометрии, едва ли согласился бы, что определение геометрии составляет фундамент, на котором строится геометрия. 2. Может ли какое-нибудь определение физики приобрести, так сказать, юридическое значение (например, при распределении Нобелевских премий)? 3. Да и сами авторы курсов физики, принявшие «слишком широкое» или «слишком узкое» определение физики, не остановятся из-за этого перед тем, чтобы, с одной стороны, не включить в свой курс чисто химических явлений и, с другой стороны, чтобы рассматривать диоптрику глаза.

[4] Опасность я вижу в том, что ученик не заметит пропасти, лежащей между определениями таких понятий, как «физика», и опре-

В. Относительно описания особенностей физического исследования

1. Я не знаю, возможно ли предпослать курсу физики наглядное изображение характерных особенностей физического исследования; и если это возможно, то желательно ли. Но я во всяком случае полагаю, что ни одно мне известное определение не имеет ничего общего с такого рода изображением.

2. Противопоставление «различных определений физики», как они встречаются в учебниках различных эпох [5], могло бы, пожалуй, косвенным образом помочь освещению исторического развития этой области исследования, которую мы называем физикой.

После сказанного едва ли нужно подчеркивать, что инкриминируемыми мне словами я решительно не имел намерения указывать на превосходство одного какого-либо определения физики перед другим или намекать на какое-то «свое собственное определение».

делениями, при помощи которых вводятся понятия «день», «плотность», «давление», «грамм», что он и на эти последние перенесет то легкомысленное отношение, какое у него естественно может сложиться по отношению к первым, если он заметит, что они никогда не бывают ему нужны.

[5] Для иллюстрации приведу два примера.

I. В «Dictionnaire de physique» иезуита Rimé-Henri Pauliany статья «Физика» начинается словами: «Эта наука имеет предметом тело в его естественном состоянии, т. е. вещество длинное, широкое и глубокое. Рассматривать, может ли всемогущий отнять у тела его длину, ширину и глубину, значит желать остановить развитие физики. Мы верим, что он это может; однако мы воздержимся заниматься таким вопросом, как физика. Тело, лишенное своих трех измерений и сохранившее только требование (l'exigence) протяженности, было бы скорее объектом метафизики, нежели физики».

II. В английском переводе курса голландского физика Гравезанда (1747) находится многочленное определение задачи физики. При этом понятие «закон природы» определяется следующим образом: «Определение 4. Закон природы есть правило и закон, о которых богу было угодно, чтобы известные движения всегда, т. е. во всех случаях, происходили бы по ним». Интересно сравнить с этим то, что Мах 160 годами позже говорит о тех же законах природы: по своему происхождению «законы природы суть ограничения, которые мы под влиянием опыта предписываем своему ожиданию» («Erkenntnis und Urrthum», p. 449).

§ 2

Только такое недоразумение могло затемнить тот простой смысл, который имели мои слова, что благодаря работам Ланжевена — Вейсса область ферромагнитных явлений, до тех пор безнадежно хаотическая, начинает проясняться и что таким образом и эта область начинает превращаться в тот род физики, который нас увлекает, в «истинную» физику, которая, разумеется, так же мало «определима», как «физика в более широком смысле» (несмотря на различные ее «определения» в § 1 всех учебников физики).

К сожалению, профессор Хвольсон как раз там обрывает цитирование моих слов, где я хочу, правда, не определить, но зато объяснить, что́ я в данном случае называю «истинной физикой»; в его цитате нет слов «некоторые очень определенные идеи начинают вносить порядок в хаос (ферро) магнитных явлений».

§ 3

Но очевидно, что именно эти слова составляют главную суть моего введения. Дело в том, что это введение не было декорацией[6], а должно было, напротив того, выполнить очень для меня существенную задачу; я невольно предполагал у читателя вкус, сходный с моим (кто может иначе?!). И вот, имея в виду интересы читателя, я только в том случае мог рассчитывать обратить его внимание на данные работы, если я открыто скажу ему: я знаю очень хорошо, что тебе, так же как и мне, ферромагнетизм неинтересен, пока нельзя подойти к нему с освещающей идеей [7].

1911

---

[6] Потому-то я тщательно и избегал украшать его гирляндами знаменитых имен, а назвал только те, которые мне необходимо было назвать. Однако профессор Хвольсон несправедливо напоминает мне имена Ампера и Вебера, будто я забыл точно отметить место, которое работы их в данной области занимают.

[7] Развивая идею Кюри, работы Ланжевена и Вейсса приводят к количественно формулированной теории, которая связывает между собой, с одной стороны, идеи Вебера и гипотезу «внутреннего магнитного поля» и, с другой стороны, максвелл-больцмановскую теорию теплового движения молекул. Они дают нам в области пара- и ферромагнитных состояний как раз то, что в области газообразного и жидкого состояния дали работы Ван-дер-Ваальса: количественную теорию непрерывности между пара- и ферромагнитным состоянием и соответствующей «критической точки» — и притом теорию удивительно простую.

Профессор О. Д. Хвольсон иронически относится к энтузиазму, с которым я говорю об этих работах (см. последний абзац его статьи). Его суждение о теории Ланжевена — Вейсса (см. «Курс физики», т. IV, глава восьмая, § 13, конец; § 10, конец) действительно гораздо более сдержанно, и сообразно с этим, излагая результаты работ Кюри о температурных изменениях ферромагнетизма (см. там же, § 8) и парамагнетизма (§ 12), он избегает упомянуть об идее, руководившей Кюри при его работах: именно об аналогии с учением Ван-дер-Ваальса относительно непрерывности между жидким и газообразным состоянием.

Здесь не место защищать мое мнение о значении работ Ланжевена — Вейсса. Но я должен подчеркнуть, что я его по-прежнему придерживаюсь.

ЛЮДВИГ БОЛЬЦМАН[1]

> То, что существуют такие мельчайшие частицы (молекулы), благодаря взаимодействию которых образуются чувственно воспринимаемые нами тела, является, конечно, только гипотезой, — в той же мере, как гипотезой является объяснение всего наблюдаемого нами на небе существованием огромных, удаленых на большие расстояния небесных тел. Тот факт, что кроме меня существуют еще другие люди, способные радоваться и страдать, в сущности тоже гипотеза.
>
> *Из «Популярных лекций» Л. Больцмана*

В то время, когда Больцман был еще студентом в Вене, кинетическая теория газов уже достигла высокой степени развития и использовала сложный математический аппарат, хотя лишь незадолго до этого Клаузиус и Максвелл (в 1857 и соответственно в 1859 гг.) опубликовали свои основополагающие работы. Кинетическое объяснение диффузии, теплопроводности, внутреннего трения и т. п. уже допускали экспериментальную проверку и подтверждение. Сопоставление теории с данными наблюдений позволило определить численное значение таких, например, величин, как скорость, диаметр и масса молекулы, которые также не поддавались непосредственным измерениям. В Вене кинетическая теория имела двух выдающихся представителей в лице учителя Больцмана — Стефана и Лошмидта, ставшего впоследствии его другом. (В 1865 г. вышла в свет знаменитая работа Лошмидта о размерах молекул воздуха.) Многие высказывания Больцмана позволяют сделать вывод о том, что тесное общение[2] с обоими этими физиками

---

[1] Больцман родился 20 января 1844 г. в Вене. Учился в Венском университете; с 1867 г. работал ассистентом у Стефана, с 1869 г.— профессор теоретической физики в Граце, с 1873 г.— профессор математики в Вене (в этот период читал наряду с другими курсами теорию чисел), с 1876 г. — профессор экспериментальной физики в Граце, с 1889 г. — профессор теоретической физики в Мюнхене, с 1894 г.— в Вене, с 1900 г.— в Лейпциге, с 1902 г.— снова в Вене. Свою первую работу «Двнжение электричества на кривых поверхностях» Больцмаи опубликовал в 1865 г. Умер 6 сентября 1906 г. в Дуано под Триестом.

[2] См. в «Популярных лекциях» Больцмана (стр. 96) его слова, посвященные памяти Стефана: «Когда я (в те времена еще студент университета) тесно общался со Стефаном, то первое, что он мне дал, были статьи Максвелла и, в дополнение к ним, учебник английской грамматики, поскольку я в то время еще ни слова не понимал по-английски.

имело большое значение для его быстрого и глубокого проникновения в круг тех идей, где он впоследствии сам прокладывал новые пути.

Состояние теории в то время могло создать впечатление, что новичку только и оставалось заняться либо усовершенствованием в области экспериментов, либо уточнениями тех приближенных методов расчетов, которые кинетическая теория предложила для определения теплопроводности, диффузии и т. п. В то время — на начальных этапах исследований — как раз и предстояло преодолеть трудности, которые препятствовали успеху экспериментов Стефана и всепроникающей силе максвелловских расчетов.

Однако Больцман свои работы по кинетической теории сразу же начал с совершенно новой проблемы и на 21-м году жизни открыл буквально необъятное поле деятельности, на котором в последующие годы трудились только он сам, а позднее Максвелл. Названную проблему можно приблизительно сформулировать следующим образом: Гельмгольц показал, что первый закон термодинамики (закон сохранения энергии) может быть получен как следствие, если допустить, что все физические процессы по своей природе являются чисто механическими. Тогда закон сохранения энергии представляет собой не что иное, как давно известный из механики закон (принцип) «живых сил». Далее, Клаузиус сформулировал второй основной закон термодинамики (закон энтропии, закон о неполном превращении тепла в работу). Все физические процессы, при которых происходит образование тепла, подчинены этому закону. В частности, это относится и к газам. Но, с другой стороны, все свойства газов соответствуют кинетической теории, если эти газы рассматривать как механические системы определенной структуры. Не следует ли на этом основании считать, что по своей основе и второй основной закон термодинамики является чисто механическим принципом? Кинетическая теория уже смогла дать механическую интерпретацию температуре: два приходящих в соприкосновение тела выравнивают свои температуры благодаря соударениям их молекул. Средняя кинетическая энергия для обоих тел принимает одинаковое значение. Уже это одно служило важным указанием для поисков другого механического принципа, который соответствовал бы закону энтропии.

В 1866 г. Больцман публикует свою первую по этому поводу работу — «Механический смысл второго закона термодинамики». В ней был разработан оригинальный вариационный принцип, приложимый для обобщенной механической системы, который приводил к поразительной аналогии с уравнением термодинамики [3]:

$$\frac{dQ}{T} = dS.$$

Этим результатом Больцман был, однако, удовлетворен сравнительно недолго. Вскоре стало понятным, что в случае совершенно общей механической системы по существу нельзя производить разделения между теплом и другой формой энергии. Как раз с этим противоречием имеет дело закон энтропии. Таким образом, возникла новая постановка проблемы, которую можно сформулировать так: каковы должны быть общие механические аксиомы для того, чтобы можно было получить «механическое» толкование закона энтропии? Такие допущения должны иметь достаточно общий характер, чтобы охватить процессы не только в газах, но и в жидкостях и твердых телах. Поэтому представилось целесообразным выбрать те из относящихся к газам допущений кинетической теории, принятых для объяснения их свойств, которые наиболее общим образом определяют их состояние с термодинамической точки зрения. Итак, публикации последующих пяти лет были посвящены следующей проблеме, носящей вспомогательный характер: каким образом в случае нагретого тела, находящегося в состоянии теплового равновесия, распределяется энергия между различными молекулами (и атомами в молекулах) — в виде кинетической энергии трансляционного, вращательного и внутреннего движения молекул или в виде потенциальной энергии молекул и атомов в них?

Результаты, полученные здесь Больцманом, потрясают своей смелостью и громадной плодотворностью для дальнейшего развития теорем, предложенных в специальных формах частично Клаузиусом, частично Максвеллом (распределение Максвелла — Больцмана по закону e^{-hE}; далее, теорема о том, что в состоянии теплового равновесия в каждом теле средняя кинетическая энергия для всех степеней

---

[3] Детальное рассмотрение этой аналогии и границ ее применимости можно найти у Больцмана в его «Лекциях по механике» (т. 2, § 42 и далее).

свободы имеет одинаковое значение, которое пропорционально абсолютной температуре). Для получения этих результатов Больцману пришлось сформулировать ряд новых механических понятий и принципов (например, эргодическую гипотезу).

С помощью этих результатов была построена новая основа для решения главной проблемы. В 1871 г. была опубликована статья Больцмана «Аналитическое доказательство второго закона термодинамики на основе принципа равновесия живых сил». Было показано, что уравнение Карно— Клаузиуса

$$A = \frac{T_2 - T_1}{T_1} Q,$$

определяющее, какое количество тепла в обратимом циклическом процессе может быть превращено в механическую работу, само по себе основано на простых законах, согласно которым общая энергия системы (включая, например, и то количество тепла, которое было только что к ней подведено) будет распределяться между молекулами. Эти законы в свою очередь основываются на законах механики и статистических закономерностях, которые следует учитывать при столь неупорядоченном движении молекул. Уже самые первые положения кинетической теории по своей природе являются статистическими (таково, например, число молекул, ударяющихся в единицу времени о стенку, и т. д.). Статистическим следует считать и толкование теплового равновесия (в этом случае при любых положениях и любом состоянии движения число молекул, которые в единицу времени в результате соударений покидают соответствующую область скоростей, всегда равно числу поступающих в нее за то же время). Однако точное определение границ, в пределах которых уравнение Карно— Клаузиуса основывается лишь на механических законах и за пределами которых — на статистических законах движения молекул, представляло собой задачу необычайно трудную и исключительную по своей важности. Здесь уже проскальзывает мысль о том, что «закон энтропии представляет собой вероятностный закон». Этот закон в последующих трудах Больцмана получил исключительно углубленное толкование. Указанными работами Больцмана были преодолены трудности, связанные с обратимыми переходами между равновесными состояниями. Уже в следую-

Л. Больцман с группой учеников и сотрудников. Грац, 1887 г. Сидят (слева направо): Аулингер, А. Этингсгаузен, Л. Больцман, И. Клеменчич, Хаусманингер. Стоят: В. Нернст, Ф. Штрейнтц, С. Аррениус, Тихе

щем (1872) году появилась его знаменитая работа, посвященная H-теореме, в которой решалась также чрезвычайно тяжелая проблема, относящаяся к необратимым процессам. Относительно этого случая закон энтропии гласил: если предоставить систему, выведенную из состояния термического равновесия, самой себе, то при последующем турбулентном процессе энтропия будет увеличиваться до тех пор, пока не достигнет наибольшей величины, характерной для данных условий (заданная общая энергия, величина объема сосуда и т. п.). Эта величина будет определять новое равновесное состояние. В указанной работе была предложена функция H, аргументами которой были кинетические параметры. Эта функция является кинетической интерпретацией энтропии. Больцман исходил при ее построении из состояния движения молекул, отличающегося от состояния статистического равновесия. Таким образом, получалось, что число молекул, которые, например, вследствие соударений выбывают из каких-либо состояний, будет отличаться от числа тех молекул, которые за то же время перейдут в соответствующие состояния. Благодаря этому число молекул, находящихся одновременно в одинаковом состоянии движения, не остается постоянным; такое положение будет сохраняться до тех пор, пока не будет достигнуто статистическое равновесие.

Это непостоянство числа молекул изменяет аргументы функции H. Величина H определяет меру имеющего место отклонения от статистического равновесия. Доказательство Больцманом H-теоремы приводит к утверждению: величина H изменяется вследствие неупорядоченного движения молекул всегда в одном определенном направлении, пока она не достигнет своего предельного значения H_0, соответствующего новому равновесному состоянию.

Для получения данных об изменениях аргументов функции H необходимо в первую очередь рассчитать, как часто в единицу времени происходят соударения между различного рода молекулами. Этот расчет основан (так же как у Клаузиуса и Максвелла) на использовании понятия о вероятности встречи перемещающихся навстречу друг другу молекул. При этом подсчет, выполненный на основе H-теоремы, со всей очевидностью свидетельствует, что указанная выше тенденция к изменению H только в одном направлении имеет место потому, что за частоту различных соударений принималась именно та величина, которая по законам теории вероятности в действительности была наиболее вероятной. Случай какого-либо противоположного хода изменения H (иными словами, случайное уменьшение энтропии) представляется соответственно как чрезвычайно маловероятный, но не невозможный. Таким образом, характер изменения энтропии для необратимых процессов имеет также вероятностную основу.

Еще через 5 лет (в 1877 г.) появляется новая работа Больцмана, которая с точки зрения развития этих вероятностных представлений является кульминационной. Ее название — «К вопросу о связи второго закона механической теории тепла с теорией вероятности».

Тривиальный пример в некоторой степени пояснит, о каком обширном понятии идет здесь речь. Допустим, что огромное число молекул кислорода и водорода находится в некотором сосуде. Подставим далее, что объем этого сосуда разделен на 1000 равных частей и молекулы распределены так, что каждая данная молекула находится в определенной (одной из 1000) части объема. Осуществим теперь новое распределение молекул, отличное от предыдущего, и будем это делать до тех пор, пока не исчерпаем все возможные различные распределения [4]. Можно показать, что подавляющее большинство всех таких распределений весьма близко соответствует равномерному заполнению обоими газами всего сосуда. Распределения, которые заметным образом отклоняются от указанного, будут встречаться тем реже, чем больше величина такого отклонения. Если обозначить относительную частоту таких отклонений как их «вероятность», то можно сформулировать следующее положение: равномерное заполнение сосуда обоими газами в огромное количество раз «вероятнее», чем любое неравномерное. С другой стороны, любое неравномерное заполнение стремится (вследствие диффузии) к тому, чтобы стать равномерным: необратимый процесс диффузии представляет собой как раз такой переход из «невероятного» в «вероятное» состояние.

Таким образом, упомянутая работа Больцмана показывает, как это положение следует распространить на всяческие необратимые процессы: каждый необратимый процесс переводит систему из состояния A с энтропией S_A в состояние B с бо́льшим значением энтропии S_B, и это означает, что из-за неупорядоченного движения молекул состояние A с вероятностью W_A переходит в состояние B с бо́льшей вероятностью W_B, причем

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{\ln W_A}{\ln W_B}\,[5] .$$

Энтропия какого-либо теплового состояния пропорциональна логарифму числа всех различающихся между собой способов, которыми имеющимися молекулами можно создать заданное тепловое состояние.

[4] Два распределения называются одинаковыми в том случае, когда каждая из определенным образом пронумерованных молекул находится в одних и тех же (из числа 1000) частях объема.

[5] Очень четкое и простое изложение этой теории имеется в книге Планка «Лекции о тепловом излучении», 1906, § 128—144.

Три указанные работы [6], относящиеся к 1871, 1872 и 1877 гг. и взятые вместе, дают решение вопроса, который поставил перед собой Больцман в начале своей деятельности и ответ на который таков: закон энтропии является одновременно и статистическим и механическим. Большое количество других публикаций Больцмана по теории газов можно рассматривать как плоды огромного труда, выполненного по существу во имя получения этого ответа. Обилие результатов, полученных им попутно (например, распределение по закону e^{-hE}), повлекло за собой возникновение совершенно новых методов решения таких проблем кинетической теории, которые до тех пор либо вообще не рассматривались (например, следствия из уравнения диссоциации, относящиеся к кинетике), либо решались только очень несовершенными методами (например, отклонения от закона $pV = RT$).

Несмотря на неимоверно тяжелый путь, пройденный Больцманом и рассмотренный нами здесь, серия этих его работ представляет удивительно цельную картину.

Больцман как бы видит и осязает молекулы в их неупорядоченном движении. В этом хаосе он сумел указать на строгие закономерности, существование которых гарантируется известными термодинамическими законами. Вопреки трудностям, с которыми ему пришлось вначале столкнуться, вопреки кажущимся противоречиям [7] Больцман остается при убеждении, что существовавшие в то время гипотезы относительно строения тел и законы механики вполне достаточны для толкования закона энтропии.

Трудность заключалась здесь в нахождении и разработке математического аппарата, пригодного для описания движения молекул с компромиссных, если можно так выразиться, позиций. Существенно было использовать представления о хаотичности движения; вместе с тем рассматриваемые явления должны были сохранять черты механического процесса. Во всех этих работах центр тяжести приходился не на создание новых гипотез, а на извлечение определенных обобщенных следствий из гипотез, принятых ранее.

---

[6] Все упомянутые работы содержатся в отчетах о заседаниях Венской академии.

[7] По поводу этих парадоксов см.: *Больцман*. Лекции по теории газов, т. II, § 88 и далее.

Другая большая проблема, которая связана с именем Больцмана, также относится к началу его деятельности. И снова здесь речь шла о том, чтобы дать механическую трактовку законов такого обширного раздела физики, каким является теория электромагнитного поля. Здесь узловым вопросом являлось как раз создание необходимых гипотез, касающихся сокровенной структуры эфира. Пожалуй, ни Больцману, ни другим (в частности, английским) физикам, вплотную занимавшимся этой проблемой, не удалось разработать ее удовлетворительного механического толкования. Но, несмотря на это, попытки Больцмана являются неотъемлемой и общей частью его творчества. Они находятся в субъективной связи [8], пожалуй, с его едва ли не гораздо более многочисленными и увенчанными исключительным успехом попытками механической интерпретации тепловых явлений. И здесь его работы также тесно смыкаются с кругом интересов Максвелла. От Фарадея перенял Максвелл стремление рассматривать электромагнитные явления как возмущения и объяснять их, исходя из того, что они имеют место не только в телах, но и в разделяющем их пространстве. Максвелл создал очень детализированную модель структуры эфира. Эта модель, по его представлениям, включала в себя наполненные жидкостью ячейки, передающие друг другу вращательное движение с помощью расположенных между ними фрикционных роликов. Вращение ячеек соответствовало магнитному возбуждению поля, а смещение роликов — электрическому [9]. Эта модель помогла Максвеллу при формулировке его уравнений, описывающих законы распространения электрических и магнитных возбуждений в эфире и материальных телах. С созданием этих уравнений открылось новое поле деятельности, которому Максвелл посвятил все свои силы. Законы классической электродинамики, законы Фарадея, законы распространения света должны были вытекать из этих уравнений. Эти основополагающие уравнения были обобщены далее на движущиеся тела и т. д. В этой дедуктивной части работы Максвелла Больцман принял

[8] См.: «Развитие методов теоретической физики» в кн.: «Популярные лекции», стр. 188 и далее, особенно середину стр. 8.

[9] См. об этом представлении в «Популярных лекциях» (стр. 11), а также в книге О. Лоджа «Новые взгляды на электричество».

участие своими экспериментальными исследованиями [10]. Однако основные интересы Больцмана были устремлены в направлении тех же работ Максвелла, которые давали возможность механического толкования электрических процессов.

После того как Максвелл получил свои уравнения, он уже больше не возвращался к указанной им частной модели структуры эфира. В формулировке, данной Максвеллом в развитой им теории (в главной работе его на эту тему), приводятся и эвристически используются лишь самые общие аналогии из числа тех, которые существуют между электромагнитными эффектами типа самоиндукции (при изменяющихся токах) и инерционными реакциями, имеющими место у очень широкого класса механических систем (при изменениях скоростей). Этим аналогиям между поведением «циклических систем» и взаимодействием переменных токов (рассмотренным во второй части второго тома «Электричества и магнетизма») самим Максвеллом ни в коей мере не отводится существенной роли.

Больцмановское представление теории Максвелла исходит в первую очередь как раз из этих аналогий (в отличие от всех остальных представлений этой теории). В больцмановских лекциях вначале довольно много внимания уделено удивительным процессам, которые могут иметь место в относительно очень простых, чисто механических системах (бициклах). Здесь имеются в виду процессы и реакции только такого типа, которые нельзя ожидать от механических систем, поскольку под «механической системой» невольно подразумевается система типа планетарной. При изучении этой системы фантазия Больцмана должна была развиваться все более и более в направлении приближения к конструкции механизма, свободного даже в незначительных мелочах от каких-либо противоречий и способного смоделировать сложнейшие свойства светового эфира. Модель с ячейками и трущимися роликами безусловно никогда этому требованию не отвечала. Однако никогда не отбрасывалась и мысль о возможности получения модели эфира с помощью какой-либо другой конструкции. С этой точки зрения упомянутые выше аналогии с циклическими систе-

---

[10] «К вопросу о диэлектрической постоянной газов и серы». В этой работе в первую очередь исследовался вопрос об указанной Максвеллом связи между коэффициентом преломления и диэлектрической проницаемостью.

мами могли бы служить в качестве исходной (и достаточно общей) точки. Поэтому их подробное обсуждение составляет ядро больцмановских лекций по электромагнетизму, накладывая свой специфический отпечаток на всю их структуру.

Однако создать такую модель до настоящего времени не удалось. В электронной теории недавно были близки к тому, чтобы использовать указанные аналогии, но в смысле как раз противоположном — для электромагнитного толкования механических явлений (особенно для случая инертной массы). Больцман радостно и без промедления приветствовал эту попытку [11].

Механические модели являлись тем материалом, который Больцман любил использовать в своих трудах. Он неоднократно подчеркивал, насколько важно для получения удовлетворения от какого-либо открытия наличие некоего зримого (чувственного — sinnlich) воздействия того или иного материала, на котором это открытие сделано.

«Если бы меня, как некогда Солона, спросили — кто самый счастливый смертный, то я без колебаний назвал бы Колумба. И не потому, что другие открытия не идут в сравнение со сделанным им (вспомните хотя бы Гутенберга). Нет, потому что счастье должно обусловливаться чувственным воздействием, а именно это и имело место у Колумба в наивысшей степени» («Популярные лекции», стр. 409).

Глубокая взаимосвязь движений и реакций, вызываемых силами и движениями, разыгрывалась в фантазии Больцмана до непосредственной осязаемости и доставляла ему, очевидно, колоссальное эстетическое наслаждение. Это ощущается в многочисленных местах его «Лекций» — по механике, теории газов и особенно по электромагнетизму. В лекциях и на семинарах он никогда не удовлетворялся одними только резюмирующими или аналитическими характеристиками механической модели. Ее строение и движение прослеживалось им до мельчайших подробностей. Если, например, представлялась возможность охватить различные нити кинематических связей, то ход его мыслей всегда направлялся так, чтобы не допустить спутывания этих нитей.

---

[11] См.: «Лекции по механике», т. II, стр. 139.

Подобным же образом и в его выдающихся трудах, результаты которых охватывают колоссальные области, каждый простой пример рассматривается исчерпывающе и с большой любовью. Такой подход делает все рассуждения Больцмана необычайно живыми: способ рассмотрения примера, который при его чрезвычайной простоте всегда содержит все характерные черты большой проблемы, дает представление о колоссальном труде, который проделала неиссякаемая фантазия Больцмана, для того чтобы наконец получить такой далеко идущий результат.

Мы не можем останавливаться на многочисленных, более обособленных работах Больцмана, хотя и среди них имеются такие основополагающие, как вывод закона излучения, получившего название закона Стефана — Больцмана (1884). Создается впечатление, что бóльшая часть этих работ возникла из попыток распространения разработанных им весьма общих идей на простейшие механические модели. На одной из таких простых моделей в 1884 г. Больцман продемонстрировал недостаточность предложенной Гельмгольцем аналогии между моноциклическим движением и термодинамикой, а двадцать лет спустя он же, независимо от предшественников и на той же самой модели, показал, что в случае голономных координат уравнение Лагранжа приобретает дополнительные члены. Больцман подобным же образом очень быстро нащупал пробел в математической теории движения твердых тел в жидкости. Можно было бы еще привести многочисленные примеры (типа разобранного в его статье «Вопрос, касающийся примера из механики Герца»), снова и снова показывающие, как научные труды Больцмана окрашены тем эстетическим наслаждением, которое доставляла ему возможность проследить взаимное проникновение движений и сил.

Будет ли в дальнейшем этот механический подход при изложении результатов, полученных Больцманом, заменен на какой-либо другой? Приведет ли, например, дальнейшее развитие термодинамики излучения к тому, что в будущем представлении о теплообмене и тепловом равновесии роль соударений между молекулами отступит на второй план, уступив место новой трактовке процесса? Это или какое-нибудь еще более значительное изменение представлений о тепловом равновесии также будет нуждаться в новом толковании закона энтропии, как механического и статистического принципа, на иной основе, с использованием моделей, существенно отличающихся от тех, которые составляли фундамент больцмановских работ.

Такой переход к новым формам, «чувственное воздействие» которых не имеет ничего общего с чувственным воздействием первоначальных форм, по-видимому, уготован многим выдающимся научным достижениям. Даже таким, для которых первоначальные формы и «инструментовка» глубоко обоснованы художественным вкусом их создателя, как это в высокой степени имело место в случае работ Больцмана.

Геттинген, октябрь 1906 г.

ПРОФЕССОР Г. А. ЛОРЕНЦ КАК ИССЛЕДОВАТЕЛЬ (1853 — 18 июля — 1923)

Это чудесно: отыскивать истину, пропагандировать науку и — по мере своих возможностей — вносить в нее свой вклад.

Лоренц. *Речь при приступлении к обязанностям ректора, 1900 г.*

Когда мы произносим имя Лоренца — какой образ возникает в нашем сознании, что пробуждается в нашей памяти?

Те, кто знают Лоренца лично, скажут: прежде всего это его глаза. Из-под густых темных бровей его обрамленного сединой лица они излучают свой свет, вечно юные, полные спокойствия и благожелательной мудрости, смотрят на нас с живым пониманием. И все это осенено улыбкой, доброжелательно-иронический оттенок которой сразу же приглушает всякое неуместное преувеличение.

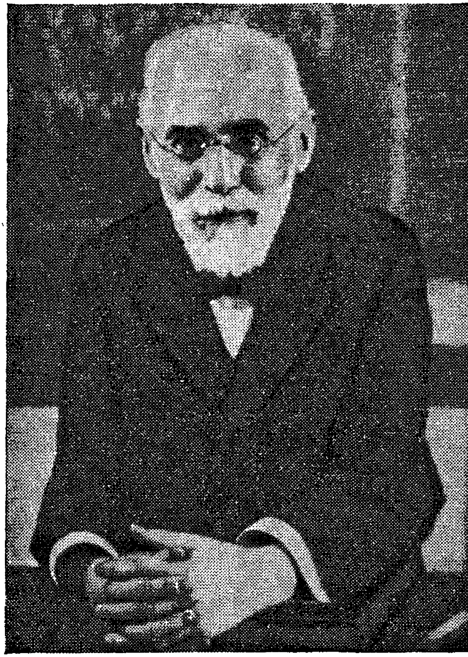
В наших ушах должно, вероятно, звучать то разнообразие звуковых нюансов, с которыми выдающиеся люди, принадлежащие к различным национальностям, называют имя Лоренца. Когда это имя произносит американец, француз, русский или скандинав, когда оно звучало или звучит в устах Больцмана, Планка или Эйнштейна,— несомненно каждый из них имеет в виду своего собственного Лоренца. Когда это имя упоминает голландец, он делает это с гордостью и одновременно мягко, словно боясь, как бы «господин Лоренц не услышал, что разговор идет о нем».

Для нас, представителей более молодого поколения, имя Лоренца как физика естественно и прежде всего связывается с понятием эфира. Но он глубоко воздействовал и на развитие всей физики своей теорией электронов, завершив ею теорию электромагнитных и оптических явлений (теорию Максвелла — Лоренца) и проложив дорогу к теории относительности Лоренца — Эйнштейна.

Лоренцу было немногим более двадцати лет, когда 11 декабря 1875 г. он защитил в Лейдене докторскую диссертацию, называвшуюся «К теории отражения и преломления света». И ему еще не было двадцати пяти лет, когда он стал профессором в Лейдене. Речь, произнесенная им 25 января 1878 г. при вступлении в эту должность, называлась «Молекулярные теории в физике». Доставляет удовольствие представить себе, как выглядел Лоренц,— юный студент и девятнадцатилетний учитель вечерней школы в Арнхеме, углубленный в работы Френеля по оптике и в только что появившиеся статьи Максвелла и Гельмгольца, посвященные электромагнитным явлениям. Если он когда-нибудь сам согласится об этом рассказать — сколь бесценным это будет для любого представителя нового поколения физиков-теоретиков!

Мы, относящиеся к этому более молодому поколению, имели прекрасную возможность изучить — в особенности на работах Лоренца, Хевисайда и Г. Герца — то, что мы считаем существеннейшим ядром теории Максвелла. Но как обстояли дела с самим Лоренцем? Если спросить при случае у представителя старшего поколения, каково было в то время, т. е. около 1873 г., читать работы Максвелла, то хотя в его глазах и появится нечто вроде юношеского блеска, отражающего любовь его молодости, однако он даст нам понять, что максвелловский «Трактат», изданный в 1873 г., был чем-то вроде интеллектуального первобытного леса, почти непроходимого в своем буйном и нетронутом великолепии.

Двадцатилетний Лоренц должен был исключительно глубоко проникнуть в сущность работ своих великих предшественников — Френеля, Максвелла и особенно Гельмгольца, чтобы написать свою диссертацию так, как он это сделал!



Гендрик Антон Лоренц

Для нее характерен прежде всего четкий и вместе с тем осторожный критицизм: если световые волны являлись механическими колебаниями «упругого эфира» (в соответствии с идеями Френеля, Неймана или Коши), то при их отражении, например, от поверхности стекла наряду с уже известными явлениями и в дополнение к ним должны были возникать и специальные явления, которые, как было установлено экспериментом, на самом деле места не имели («продольные» световые волны). После такого критицизма следовала уже чисто положительная программа. Лоренцу удалось показать, что это противоречие с опытом совершенно устраняется, как только световые волны начинают рассматривать как электромагнитные, а не как механические — в согласии с теорией Максвелла. Волновая теория света, плодотворность которой была столь блестяще продемонстрирована в исследованиях Христиана Гюйгенса (1678), Томаса Юнга (примерно 1800 г.) и Огюста Френеля (в десятилетие 1815—1825 гг.), тем самым была освобождена от подстерегавших ее опасностей.

Естественно, что сейчас, когда мы знакомимся с этой диссертацией, написанной Лоренцем пятьдесят лет назад, особый интерес для нас представляет возможность взглянуть на нее с точки зрения им же самим созданной электронной теории. И нельзя не удивляться, когда убеждаешься, как в те дни его ум, для которого прежде всего характерно стремление к ясности, находил более естественным мышление в терминах, соответствовавших гельмгольцевской теории «действия на расстоянии», чем в рамках фарадей-максвелловской контактной теории поля, теории, с которой в то время не очень считались.

В своей работе Лоренц, по-видимому, не принимает различные гипотезы Максвелла (и тем более сам не использует их для дальнейших заключений в духе Максвелла) до тех пор, пока в качестве пробного камня он предварительно и с успехом не переводит их на язык теории действия на расстоянии!

Это вынуждает его к проведению более глубокого анализа рассматриваемых явлений. Результат его работы продолжает его глубоко занимать: диссертация заключает в себе контуры замечательной идеи, которая позднее будет столь характерной для лоренцевской электронной теории, отличая ее от параллельно развивавшихся; именно эта идея и приведет его теорию к торжеству. Мы имеем в виду четкое разделение той роли, которую в каждом данном случае оптических или электромагнитных явлений, возникающих в куске стекла или металла, играют «эфир» с одной стороны, и «весомая материя» (ponderable matter) — с другой.

В своих вычислениях Максвелл исходил из того, что «эфир в пустом пространстве» и «эфир в стекле» представляют собой две среды с разными электромагнитными свойствами. Лоренцевская электронная теория гораздо глубже проникла в детали этих явлений. Более того, она в наибольшей степени подчеркнула тот факт, что все весомые тела состоят из дискретных молекул. Она выдвинула следующую гипотезу: эфир, заполняющий пространство между молекулами, а также и пространство, занимаемое самими молекулами, обладает в точности такими же свойствами, какими он характеризуется в пространстве, свободном от материи. При движении куска стекла или течении жидкости молекулы движутся через эфир, совершенно не увлекая его за собой. Но в чем тогда причина тех изменений, которые претерпевают световые волны, когда они проникают в кристалл или поток быстро текущей воды? Согласно Лоренцу, дело заключается в том, что молекулы содержат подвижные электрические заряды, электроны. Световые волны, будучи волнами электромагнитными, раскачивают эти электроны. В результате электроны в свою очередь оказываются источниками электромагнитных волн. Эти вторичные волны интерферируют с первичными, что и приводит к указанным различиям.

Чрезвычайное волнение испытываешь, прослеживая шаг за шагом развитие этой смелой атаки, которая разворачивается на страницах работы Лоренца. Мы вынуждены воздержаться здесь от такого анализа; мы можем лишь кратко указать на несколько примеров того решающего успеха, которого достиг Лоренц, исходя из указанной концепции. В его второй статье как раз и излагаются два замечательных результата, полученных им все еще на языке действия на расстоянии.

Первый результат. Если приблизить молекулы друг к другу, сближая тем самым и электрические заряды, которые в них имеются, за счет, например, охлаждения куска стекла или сжатия газа, то взаимодействие этих зарядов усилится. Поэтому показатель преломления вещества меняется в зависимости от плотности, причем может быть произведен строгий подсчет соответствующего изменения, подсчет, который согласуется с данными опыта.

Второй результат. Поскольку электрические заряды внутри молекул обладают определенной инерцией, они поразному реагируют на колебания различной частоты, характерные для красной и фиолетовой частей спектра. Таким образом, мы получаем знаменитое объяснение нормальной и аномальной дисперсии.

Итак, Лоренц ответил на два из длинного ряда вопросов, которые сам он сформулировал на последних страницах своей диссертации в качестве дальнейшей программы работ. Здесь же мы встречаемся с еще одной — в то время едва намеченной (!) — проблемой, которую Лоренцу не удавалось решить, хоть и работал он над ней двадцать или, если хотите, даже тридцать лет, а именно с проблемой о том, какое влияние оказывает движение материального тела на происходящие в нем электромагнитные или оптические явления. Вот выдающаяся по своей значимости, сложнейшая проблема, решить которую, помимо Лоренца, пытались другие физики очень высокого класса, в отличие от него, однако, так и не достигшие успеха на этом пути!

Укажем хотя бы на один замечательный результат этих исследований: на лоренцевскую теорию «коэффициента увлечения Френеля» (1892). Пропустим луч света в движущийся поток воды, например, в точности по направлению движения. Он будет двигаться тогда со скоростью, превышающей скорость света в стоячей воде. Насколько возрастет эта скорость? Если, как предполагали Стокс и Герц, каждое тело увлекает «свой собственный эфир» вдоль направления своего движения, возрастание скорости должно равняться полной скорости движения потока воды. Но как раз в 1818 г. Френель имел возможность заключить на основе астрономических наблюдений (согласно которым измеренный «угол аберрации» оказывается независящим от оптических особенностей установки наблюдателя), что скорость света может увеличиться лишь на величину, составляющую совершенно определенную часть скорости потока (эта часть зависит от показателя преломления среды). Позднее прямые эксперименты Физо полностью подтвердили это наблюдение. Каким же образом теперь объяснить теоретически эту головоломку — «частичное увлечение световых волн»? Или, более точно, как совместить это с фундаментальной идеей Френеля, которую Лоренц принял и для своих построений, а именно, что эфир совсем не увлекается телами? Когда Лоренц наконец получил возможность показать, что частичное увлечение световых волн, постулированное Френелем, осуществляется, причем со всеми ожидавшимися количественными особенностями, за счет взаимной интерференции волн, исходящих от движущихся совместно с молекулами воды электронов, с одной стороны, и волн в полностью неподвижном эфире — с другой, это было, вероятно, большим, замечательным в его жизни моментом и можно позавидовать ощущениям, которые он при этом испытал! Тот способ, с помощью которого Лоренц разграничил роли, исполняемые подвижными электронами и неподвижным эфиром, ознаменовал его первую большую победу. Но и все позднейшие эксперименты, особенно эксперименты русского физика Эйхенвальда (1900-е годы), вновь и вновь свидетельствовали против другого типа идей.

«Неподвижный эфир» мыслится Лоренцем, как он уже мыслился Френелем, неподвижным относительно некой системы отсчета, связанной с определенными звездами. Другие физики принимали, напротив, что Земля в своем движении вокруг Солнца в большей или меньшей степени увлекает за собой эфирную оболочку. Прежде чем Лоренц с полной определенностью отдал предпочтение френелевской идее и начал проводить свои теоретические построения на ее основе, он с исключительной глубиной и с разных сторон исследовал (в 1886 г.) следующий вопрос: чему учит нас существование известной в астрономии аберрации света от определенной звезды, когда мы наблюдаем ее с нашей, летящей в пространстве Земли? И действительно, он проверял эту, важную для всей своей теории, опору снова и снова. Еще с 1881 г. в теории неподвижного эфира существовала одна большая и обескураживающая трудность — опыт Майкельсона. Если Земля движется через эфир, не увлекая его за собой, это значит, что имелся и имеется эфирный ветер, продувающий наши земные лаборатории со скоростью порядка 30 км/сек. Это составляет одну десятитысячную часть скорости света, так что луч света, подвергаясь влиянию этого ветра при своем стремительном движении сквозь измерительную аппаратуру, «сдувается» лишь на исключительно малую величину. Вместе с тем существуют определенные факторы, которые уменьшают ожидаемый эффект еще в 10 000 раз. Но этот результирующий «эффект второго порядка», связанный с существованием эфирного ветра, все же должен проявляться, в то время как опыт Майкельсона доказал его отсутствие.

С 1886 г. Лоренц пытается преодолеть эту трудность. В итоге в своей статье того же года он показывает, что измерения Майкельсона были недостаточно точными для того, чтобы с определенностью установить фатальное отсутствие эффекта второго порядка. Но уже в 1887 г. Майкельсон закрывает эту возможность увеличением точности своих измерений. Что же дальше?

«Я думал об этих опытах долго и безуспешно, и наконец я оказался способным представить только одну возможность для выхода из создавшегося положения». Так писал Лоренц в 1892 г., решая эту загадку с помощью своей прославленной «гипотезы сокращения» («контракционной гипотезы»). Если принять, что в процессе движения в эфире все твердые тела, в частности и остов майкельсоновской установки, сокращаются на определенную величину в направлении своего движения, то отрицательный результат опыта Майкельсона получит немедленное объяснение.

Таким образом, это препятствие было наконец преодолено, и Лоренц смог уверенно развить свою электронную теорию дальше. Но теперь оставался вопрос, который не давал ему покоя: может ли наблюдаться равномерное движение лаборатории через эфир с помощью какого-либо иного опыта, отличного от опыта Майкельсона?

В 1895 г. в своем «Опыте построения теории электрических и оптических явлений в движущихся телах» он показал, что в соответствии с его электронной теорией все «эффекты первого порядка», т. е. все эффекты, которые должны быть просто пропорциональны скорости эфирного ветра, исчезают, автоматически компенсируясь. Не будь этой компенсации, указанные эффекты должны были бы быть значительными и их можно было бы сравнительно просто продемонстрировать.

В 1904 г., т. е. девятью годами позднее, в своей статье «Электромагнитные явления в системах, движущихся с произвольной скоростью, несколько меньшей скорости света» Лоренц сумел показать, что если принять, что электроны сами по себе испытывают отмеченное выше сокращение в процессе своего движения и если их инертная масса зависит от их скорости весьма сходным (с этим сокращением) образом, тогда во всех экспериментах эффекты, связанные с наличием эфирного ветра, исчезают — не только в первом приближении, но и полностью. Формулируя результат Лоренца более образно, можно сказать: из него следует, что явления, подлежащие измерению, возмущаются за счет наличия эфирного ветра, но в то же время такое же возмущение распространяется и на стержни, часы и вообще на все лабораторные измерительные приборы, причем как раз таким образом, что результаты измерений «возмущенными» приборами «возмущенных» объектов в движущейся лаборатории будут совпадать с результатами, полученными с невозмущенными приборами в покоящейся лаборатории.

Эти исследования Лоренца стали классическими как по своим методам, так и по результатам. Они содержат в виде теорем и логических выводов то, что в обобщенном виде Эйнштейн выбрал в качестве постулатов при построении своей теории относительности в 1905 г. И формулы для сокращения, с помощью которых Лоренц столь искусно сделал возможным переход от данных измерений, произведенных с помощью стержней и часов в покоящейся лаборатории, к таким же данным, полученным в движущейся лаборатории,— эти формулы получили еще более глубокое содержание в виде «преобразований Лоренца» в эйнштейновской теории относительности, особенно позднее — в основаниях эйнштейновской же общей теории относительности и тяготения.

Исключительно приятно читать, как сам Лоренц высказывается (например, в своей книге «Теория электронов» и в различных лекциях) о взаимоотношении, которое, в его понимании, существует между эйнштейновским принципом относительности и его собственными исследованиями, и сравнить затем эти высказывания с тем, что, с другой стороны, говорит на эту тему сам Эйнштейн. В частности, в своей вступительной лекции «Эфир и теория относительности», произнесенной по случаю получения звания профессора Лейденского университета, Эйнштейн высказал свою точку зрения на место работ Лоренца в истории воззрений на эфир в немногих, но тщательно отточенных и выразительных словах.

Мы лишены возможности обсуждать тот существенный вклад, который внесен Лоренцем в эйнштейновскую теорию в последние годы. Мы отметим только обобщение эйнштейновской теории тяготения, произведенное им с помощью вариационного принципа (1915 и 1916 гг.), которое немедленно показало свою чрезвычайную плодотворность. Более того, в статье, опубликованной несколько месяцев тому назад, Лоренц в исключительно ясной форме представил весьма абстрактное математико-философское построение, с помощью которого некоторые авторы пытались недавно обобщить общую теорию относительности дальше.

Мы проследили за одним из направлений лоренцевских исследований. Каким образом связаны с ним другие его открытия и как эти исследования связаны друг с другом?

Осенью 1896 г. Зееман, работая в лаборатории Каммерлинг-Оннеса в Лейдене, сделал выдающееся открытие. Он обнаружил оптический эффект, носящий ныне его имя: ему удалось в процессе спектроскопических наблюдений за светом, испускаемым натриевым пламенем, установить, что характерная желтая линия натрия расширяется, когда пламя помещается в сильное магнитное поле. Теория электронов, созданная Лоренцем, оказалась способной объяснить эффект Зеемана немедленно вслед за его открытием и, более того, разъяснить его далеко идущие следствия. Лоренц сразу же предсказал, что края расширившейся линии должны обладать определенной поляризацией и что более сильные магнитные поля расщепят эту линию совершенно определенным образом. В дополнение к этому теория показывала, как может быть вычислено отношение заряда излучающего электрона (в то время он все еще назывался «ионом») к его массе — с помощью измерения величины расщепления. Последующие опыты Зеемана подтвердили предсказания Лоренца и привели к следующему результату: масса электрона более чем в 1000 раз меньше, чем масса легчайшего атома — водорода.

Как все мы знаем, эта замечательная и исключительно плодотворная работа двух голландских физиков была удостоена одной из первых Нобелевских премий.

Двойная взаимосвязь существует между работой Лоренца и открытием Зеемана.

Во-первых, еще в 1883 г., в какой-то мере в связи со своей диссертационной работой, Лоренц установил наличие соответствия между двумя типами воздействия, оказываемого магнитным полем: электрический эффект (Холл-эффект) и оптический эффект (эффект Керра). И когда Камерлинг-Оннес организовал свою лабораторию, он сконцентрировал работу своих студентов в двух направлениях. Одно из них было посвящено молекулярным теориям Ван-дер-Ваальса, а другое, если понимать его достаточно широко,— охватывало круг идей, высказанных в лоренцевских работах. Исследования молодого Зеемана относились именно к этому магнито-оптическому направлению и увенчали его открытием Зееман-эффекта.

Во-вторых, на покоящийся электрон действует только электрическая сила. Когда, однако, он приходит в состояние движения, то на него воздействует и магнитное поле. Естественно, что эта вторая сила играет главную роль в лоренцевской теории электрических явлений (1892, 1895). Студенты-физики и инженеры-электрики во всем мире называют эту силу «силой Лоренца». Но это та же самая сила, которая действовала на колеблющийся электрон в натриевом пламени, когда Зееман включал магнитное поле (1896).

Лоренц всегда любил размышлять о той невидимой роли, которую играют атомы в физических явлениях. Мы уже говорили, что необходимость привела его к четкому разделению между эфиром и весомой материей, и его вступительная речь «Молекулярные теории в физике» (1878) свидетельствовала о том, какое очаровывающее воздействие оказали на него блестящие исследования Максвелла, Больцмана (1870-е годы) и Ван-дер-Ваальса (Лейденская диссертация, 1873 г.).

В 1881 г. Лоренц в короткой заметке прояснил кажущееся противоречие между работами Максвелла и Ван-дер-Ваальса, использовав при этом метод, который оказался столь плодотворным впоследствии. В том же году он показал, как упорядоченные макроскопические явления, подобные, например, распространению звуковых волн в газах, влияют на хаотическое движение отдельных молекул в газе. В 1887 г. стимулируемый глубоким вопросом, поставленным Каммерлинг-Оннесом, он исследовал больцмановский вывод H-теоремы, т. е. знаменитое доказательство того факта, что энтропия газа на самом деле может только возрастать, но никогда не уменьшаться за счет хаотических соударений между молекулами. Уточнение, введенное Лоренцем в этот вопрос, и статья Больцмана, непосредственным образом к нему относящаяся, впервые представили вывод этой фундаментальной теоремы в той форме, которая нам, представителям более молодого поколения, известна из книг. Мы вынуждены, однако, отказать себе в удовольствии даже перечислить многие превосходные достижения Лоренца, связанные с его многолетней работой в области молекулярной теории газов, разбавленных растворов (1892) и твердых тел (1920). Мы могли бы в первую очередь указать, например, на разъяснение, внесенное им в трудную проблему теплового движения и тока электронов внутри металлических тел (1904), и на связанные с этими исследованиями работы по поглощению и испусканию металлами тепловых лучей (1903). Последняя работа Лоренца снова имеет прямое отношение к методическим и замечательным его исследованиям, опубликованным еще в 1901 г. и относящимся к формулам Больцмана и Вина из теории излучения. К тому же циклу работ относятся и обсуждения, в которых он принимал участие при различных обстоятельствах, в частности в процессе дискуссий между участниками Сольвеевских конгрессов в Брюсселе, которые он открывал и которыми руководил.

Во всех только что перечисленных публикациях выделяются особенности, столь характерные и для лейденских лекций, которые Лоренц читает здесь по понедельникам: работы Лоренца образуют целую сеть идей, которая связывает между собой самые отдаленные разделы физики. И не только в своей исследовательской работе, но и в преподавательской деятельности, т. е. как устно, так и письменно, он непрерывно продолжает плести эту «сеть» дальше, совершенствуя ее в процессе работы и в то же время уменьшая величину ячеек своей «сети». Все это делается с видимым удовольствием, без спешки, с твердой верой в безусловную значимость этой работы, неизменной целью которой всегда было стремление к внутренней ясности и в то же самое время — нежелание, чтобы она была слишком уж «философской». Таким образом, представляется, что эта «сеть» всегда стоит перед глазами Лоренца. И ныне не может появиться ни одного нового экспериментального открытия и ни одной новой теоретической идеи, которые не охватывались бы какой-либо частью лоренцевской «сети». На все эти новости сам Лоренц реагирует с неизменным юношеским интересом, а не с априорной симпатией или антипатией, как это обычно случается с нами. Нет, его ясный и пристальный взгляд, его уверенная техника, с помощью которой он разрешает встающие перед ним трудности, или стремительным обходным маневром, или, если в этом появляется необходимость, с помощью сложнейших вычислений, наконец, его необъятный опыт — все это позволяет ему, мягко улыбаясь, увидеть, в чем состоит сущность проблемы и как выглядит ее решение, найденное пришедшим к нему физиком. Как правило, Лоренц предпочитает сам продумывать вопрос, которому посвящена та или иная статья, прежде чем приступать к ее чтению. Такой путь для него наиболее прост: для него это и приятный отдых, и упражнение, в процессе которых, как он любит с явным удовольствием говорить нам на своих лекциях, «всегда возникает несколько хорошеньких вопросов». А когда потом он решает их, его «сеть» снова увеличивается — одновременно с увеличением его мастерства,— и новые идеи становятся достоянием его живого ума.

Радуясь каждому фундаментальному продвижению вперед, сам Лоренц встраивается в спектр развивающейся физики. Время от времени он выбирает из потока новых идей и завихрений то, что, по его мнению, уже созрело для ясного разъяснения. Вместе с тем он так же проницательно обращает внимание на те «горячие точки», в которых он ощущает внутренние противоречия между установленными положениями, или же пробелы, которые пока что остаются незаполненными. И все это исходит из естественного желания более глубоко понять проблему, исходит из глубины его сердца, свободного от какой-либо заботы о собственном престиже.

Этим и определяется то исключительное место, которое занимает среди физиков нашего времени Лоренц — замечательный «старейшина физической науки».

Всякий раз, когда Эйнштейн приезжает в Лейден, он с живым нетерпением думает о предстоящей встрече с Лоренцем; он всегда стремится получить возможность изложить ему свои новые соображения: «Меня сейчас страшно занимает, что скажет об этом Лоренц!» И где бы ни был расположен процветающий центр физических исследований — в Париже, Геттингене, в больших американских университетах, в Кембридже, Лондоне и т. д., все мечтают увидеть Лоренца своим гостем, чтобы он смог продискутировать с ними свою точку зрения на старые и новые проблемы физики и чтобы сами физики смогли продемонстрировать ему результаты своих собственных исследований.

Потому что во всем мире самые талантливые физики стремятся услышать, «что скажет об этом Лоренц».

1923

ПРИВЕТСТВЕННАЯ РЕЧЬ ПРИ ВРУЧЕНИИ ПРОФЕССОРУ В. ПАУЛИ МЕДАЛИ ЛОРЕНЦА

Вам, г. Паули, известна та роль в развитии физики, которую сыграла деятельность Г. А. Лоренца. В той же мере вам лично знакомо то особенное влияние, которое он оказывал на своих молодых коллег всех наций.

Но если бы вы ко всему этому еще знали об его отношении к Голландии и к нашей Академии! Тогда бы вы поняли, как много чувств вызывает у нас здесь упоминание имени Лоренца. Поэтому ученый, научные достижения которого отмечаются медалью Лоренца, вызывает у нас совершенно особенные чувства. И именно сейчас об этом хочется сказать со всей откровенностью.

Сегодняшним — вторым по счету — награждением медалью Лоренца наша Академия хочет отметить ученого, открывшего глубокий по смыслу «принцип исключения». И это открытие — если воспользоваться словами, определяющими статус медали,— «оказало большое влияние на развитие науки». Сказанное ясно всякому, кто следил за развитием теоретической физики в течение последнего десятилетия.

Нас восхищает красота и загадочность этого принципа и плодотворность его применения в самых различных разделах физики. Не менее были мы восхищены и тем путем, которым вы пришли к этому открытию в вашей знаменитой статье, опубликованной в январе 1925 г., увидев, как вы ввели ваш «принцип исключения». Принцип, который мы по-другому называем «запретом Паули» [1]. Там это сказано вами так: в атоме (в сильном внешнем поле) никакие два электрона не могут находиться в одном и том же квантовом состоянии. Если какой-либо электрон оказался в некотором определенном квантовом состоянии, то это квантовое состояние для всех остальных электронов «исключено» или «запрещено».

На первый взгляд может показаться, что принцип Паули важен только для тех, кто изучает распределение электронов на орбитах в боровских моделях атомов или атомные спектры. И это впечатление, на первый взгляд, подтверждается названием статьи. Она даже так и называется: «К вопросу о связи закономерности электронных групп в атоме со сложной структурой спектров». Но этот принцип, который кажется понятным только для посвященных, проникает и в нашу повседневную жизнь! Нельзя удержаться от того, чтобы не пояснить сказанное простым примером.

Возьмем в руки кусок металла. Или же камень. Стоит только немного задуматься, как удивишься тому, что это количество материи занимает не такой уж малый объем. Ведь молекулы-то должны быть упакованы совсем плотно, и атомы в молекулах — тоже. Хорошо, но почему же атомы сами такие большие?!

Рассмотрим, например, боровскую модель в случае атома свинца. Почему из 82 электронов атома только такое небольшое их число движется по близким к ядру кванто-

---

[1] «Pauli-Verbot». В дальнейшем, в соответствии с установившейся терминологией,— *принцип Паули* (*прим. ред.*).

На съезде физиков в Комо, 1927 г. Слева направо: В. Паули, Дж. Франк, Ф. Пашен

вым орбитам, а все остальные — по все более удаленным орбитам? Ведь притяжение их 82 единицами положительных зарядов атомного ядра достаточно сильно. Так что значительно большее число электронов из этих 82 могло бы быть перетянутым на внутренние орбиты еще до того, как их взаимное отталкивание сделалось бы достаточно сильным. Что же мешает атому стать гораздо меньшим по размеру?!

Ответ: только *принцип Паули*, ибо «не может быть двух электронов в одном и том же квантовом состоянии»! Поэтому-то атомы и являются столь разбухшими, поэтому-то камень, кусок металла и т. д. столь велики по объему!

Вы, г. Паули, должны согласиться с тем, что даже частичной отменой вашего принципа запрета вы могли бы избавить нас от многих забот повседневности, например от транспортной проблемы наших улиц.

Но принцип Паули господствует не только в архитектуре атомов, периодической системе элементов и структуре спектров. Таинственным и завлекающим образом принцип Паули обнаруживается за кулисами самых различных явлений в физике и химии. Из-за него у нас есть, например, два сорта молекул водорода (орто- и параводород), и без преувеличения можно сказать, что всякие фокусы с валентностями в химии своим возникновением в этом мире обязаны принципу Паули. Решающим образом проявляется он и в магнитных свойствах материи, и в электропроводности, и в удельной теплоемкости металлов.

Почему электроны проводимости в металлах имеют такую огромную кинетическую энергию? Даже и в случае самых низких температур, даже уже при абсолютном нуле? Да только потому, что принцип Паули препятствует тому, чтобы они медленно двигались по более удобным квантовым орбитам! Это же утверждение принято формулировать так: потому что в этом мире, где господствует принцип Паули, электроны должны подчиняться статистике Ферми —Дирака.

Поистине большим напряжением сил и с помощью исключительно остроумного анализа явлений удалось вам прийти к великому открытию четвертого квантового числа электрона и тем самым — к принципу Паули.

Вас увлекла загадка аномального эффекта Зеемана, кроющаяся в множителе Ланде g и в полуцелых значениях квантовых чисел. С упорством и самоотречением, граничащими с упрямством, вы отказались прежде всего от спасительной помощи заманчивых модельных представлений. В рамках предельно возможного вы феноменологически проанализировали закономерности аномального эффекта Зеемана. И на этом пути в апреле 1923 г. вам удалось установить инвариантность приведенных сумм энергий при изменении магнитного поля.

На оттиске статьи, который вы прислали мне в то время, вы написали следующее: «Это паршивенькая (scheußliche) работа!» Мне хочется надеяться, что нынешний Паули, став старше, рассматривает эту работу более молодого Паули менее юмористически, но зато с бóльшим уважением.

Для того чтобы прийти к взаимному упорядочению термов в слабых и сильных полях, в следующей работе (октябрь 1923 г.) вы все же еще раз обратились к помощи принятой в те времена модели атома. Я имею в виду, что вы как ни в чем не бывало допустили возможность описания излучающего электрона в атоме с помощью обычных трех квантовых чисел, взвалив вину за все грехи на атомный остов. Но во всяком случае вы даете понять читателю, насколько вы сами не доверяете этой так называемой эрзац-модели (Ersatz-modell). Окончательно эту модель вы уничтожили годом позже — в декабре 1924 г. Сделано это было с помощью настолько же остроумных, насколько и убедительных доводов, в которых вы сопоставили релятивистскую поправку к массе с аномальным эффектом Зеемана.

И вот тогда вы со всей отчетливостью осознали: *ответственным за магнитно-механическую аномалию является не атомный остов, а излучающий электрон!* Остальная часть атома смогла вздохнуть свободно: вы освободили ее от пресловутого «немеханического принуждения» и от «принципа разветвления», который злые языки в узком кругу с удовольствием называли «принципом отчаяния»[2].

Непосредственно вслед за этим (январь 1925 г.) вы смогли уже опубликовать свое огромной важности открытие: состояние *электрона характеризуется не тремя, а четырьмя квантовыми числами — и в атоме (в сильном поле) не может быть двух электронов в одном и том же квантовом состоянии.* Принцип Паули был открыт!

По-видимому, это открытие вас обрадовало. Я сказал «по-видимому», так как мы, читатели, слышим главным образом о том, чем вы все еще не довольны. Особенно сильное ударение вы сразу же сделали на том, что не смогли дать физическое истолкование четвертому квантовому числу электрона.

Пожалуй, будет забавно, если я вспомню один из биографических моментов, который, может быть, остался незамеченным или же уже забыт сегодня некоторыми из наших друзей. Я имею в виду следующее: за полгода до этого вы опубликовали в «Naturwissenschaften» письмо по поводу совершенно неизвестной в те времена сверхтонкой структуры спектров. Вы предложили нам смелую гипотезу относительно атомного ядра: что именно оно должно обладать вращательным моментом. Эта гипотеза с тех пор стала путеводной звездой для глубокой и необычайно разросшейся области исследований. Так что вы открыли момент вращения ядра или, как мы говорим, пользуясь современной терминологией, «спин ядра». Ну, а как же реагировал че-

---

[2] Каламбур: разветвление — Verzweigung, отчаяние — Verzweiflung (*прим. ред.*).

ловек, открывший этот спин ядра, когда ему впоследствии для истолкования загадочного четвертого квантового числа электрона был предложен его спин?

И вот, как доносит молва, вы эту нежную новорожденную идею встретили не с очень-то большой радостью, а этак настороженно, «по-пауливски»! Но, конечно, спин электрона уже давно простил вам это, поначалу опасное для его существования, недружелюбие, потому что вы же, г. Паули, сразу вслед за этим и с такой любовью ввели этот самый спин электрона в мир волновой механики. Более того, из-за него вы одарили физику совершенно новым классом математических величин — спинорами.

Вот таким образом эти ваши работы повлекли за собой появление очень многих направлений исследований. Позвольте мне лишь кратко упомянуть о некоторых из них, так как они непосредственно приводят нас к последним достижениям физики сегодняшнего дня. Я имею в виду превосходную работу Гейзенберга, в которой он показывает нам, как должна выглядеть осмысленная формулировка принципа Паули на языке волновой механики. Его работа учит нас тому, что в природе удивительным образом нельзя реализовать все допустимые волновые решения, описывающие движение электронов, и что это возможно только для так называемых антисимметричных решений! Почему же именно для антисимметричных, а не, например, для симметричных? Вы, г. Паули, часто и упорно напоминали нам о том, что это «именно» является оскорбительным вызовом природы по отношению к теоретической физике.

В самом деле: современная квантовая механика описывает мировую машину (Weltmaschine) так, как будто она одинаково готова всегда играть либо только с симметричными решениями, либо только с антисимметричными решениями, проявляя безразличие в их выборе. И только где-то потом приклеивается заключительное примечание: «де-факто природа играет только с антисимметричными решениями». Это, конечно, позор. Но мы-то здесь как раз и находимся на границе последних достижений нынешней физики. И всякий раз, как только атомное ядро при бета-распаде «поставляет миру новый электрон», каждый раз мы с сердцебиением должны дожидаться, будет ли новый электрон послушно следовать принципу Паули, или он высокомерно нарушит фигуру антисимметричного танца своих старших собратьев.

К сожалению, я не имею возможности именно сегодня говорить здесь о других ваших достижениях, например о вашей формуле для взаимодействия между полем излучения и свободным электроном, или о вашем удивительном обобщающем докладе, или о бесчисленных важных и стимулирующих идеях, которые вы щедро рассыпаете во время устных дискуссий! Я сожалею об этом, ведь тогда можно было бы так хорошо помучить вас каскадом похвал, не разбавленных сопутствующими колкостями.

Ведь и сами вы, г. Паули, тоже не очень любите баловать своих друзей. Позвольте же по этому случаю вашему большому и близкому другу выбраться за пределы обычного и столь тщательно взвешенного словарного запаса и приемов речи. Ведь вы должны же были быть подготовлены к тому, чтобы увидеть его сегодня среди многих других ваших друзей на этом торжестве.

Да, г. Паули, вам все же не удастся помешать всем вашим коллегам высоко ценить ваши заслуги и даже любить вас, а значит, желать вам всего наилучшего в вашей работе и личного счастья.

Профессор Паули! Сегодня, поскольку я удостоен чести вручить вам медаль Лоренца, мне приятно вспомнить о том, как высоко ценил вас сам Лоренц за остроту вашего ума, за ясность и честность и за ту чрезвычайную заботливость, с которой вы всегда следили за тем, чтобы заслуги других исследователей получали должную оценку.

1929

ИЗ ПЕРЕПИСКИ ЭРЕНФЕСТА С ЛОРЕНЦЕМ

Лоренц — Эренфесту

20 апреля 1912 г.

Глубокоуважаемый коллега,

я был очень огорчен, получив печальное известие о смерти Лебедева [1] [1]. Это известие глубоко ранило меня, так как я высоко ценил его работы, а его кончину рассматриваю как тяжелую потерю для всей нашей науки. Я пишу Вам в связи с этим, во-первых, потому, что Лебедев обращался ко мне, чтобы выяснить возможность получения для его московской лаборатории, которая сейчас, к сожалению, должна работать в таких тяжелых условиях, материальной поддержки из средств Сольвеевского фонда и, во-вторых, так как я предполагаю, что это Вы побудили его обратиться к нам с этим письмом, после того как узнали от профессора Зоммерфельда о названном фонде.

Поскольку, однако, создание его только намечалось, я не ответил Лебедеву, о чем сейчас очень печалюсь. Если бы я знал об его болезни, я бы написал ему сразу же, и хотя мой ответ и не был бы вполне определенным, возможно, он доставил бы ему радость.

Теперь фонд, к счастью, скоро начнет функционировать, а потому я хотел бы у Вас конфиденциально спросить: объединены ли сейчас московские физики вместе и кто осуществляет там общее руководство их работой? Мне также хотелось бы услышать от Вас, если это возможно, несколько известных имен из этой группы физиков (относится ли к ней Эйхенвальд?) и узнать, существует ли перспектива дальнейшей работы по лебедевской программе.

Я хочу воспользоваться этой возможностью, чтобы выразить Вам свою признательность за любезную присылку Вашей прекрасной и обстоятельной энциклопедической статьи, касающейся вопросов, глубоко меня интересующих. После того как уже много лет назад я имел удовольствие в течение краткого времени видеть Вас и Вашего друга Ритца здесь, в Лейдене, наши пути не пересекались. Я располагаю только оттиском работы — Вашей и Вашей супруги [2].

Поскольку, однако, теперь я интересуюсь не только научной работой, но и самими судьбами людей, ее выполняющими,

---

[1] Примечания к переписке см. на стр. 227.

я был бы очень рад узнать из Вашего ответного письма также и о том, как складывалась Ваша дальнейшая жизнь, где Вы сейчас работаете? Приняли ли Вы русское подданство?

В надежде на то, что Вы не сочтете меня нескромным, я пребываю с дружескими чувствами и глубоким уважением.

Г. А. Лоренц

Только что я получил последний номер «Physikalische Zeitschrift» и увидел из Вашего обстоятельного критического рассмотрения вопросов, связанных с эфиром, что Вы все еще считаете предпочтительным круг идей Вашего так рано ушедшего друга [3].

Лоренц — Эренфесту

13 мая 1912 г.

Глубокоуважаемый господин доктор!

Сердечно благодарю Вас за дружеский и подробный ответ на мои вопросы; я ожидаю с живым интересом дальнейшей информации, которую Вы любезно обещали мне сообщить. Что касается моих вопросов о Вас и Вашем теперешнем положении, то Вы сейчас увидите, что, задавая их, я имел при этом и заднюю мысль. А именно, в течение этого года я собираюсь заменить свою профессуру в здешнем университете на экстраординатуру, так что на мое место необходим ординарный профессор теоретической физики. Я могу при этом остановить свой выбор не только на голландце, но и на иностранном коллеге. Так как я очень высоко ценю Ваши работы за ту основательность, ясность и остроумие, с которыми они написаны, я подумал также и о Вас.

Поскольку все это еще неопределенно и вполне возможно, что наш факультет в конце концов предпочтет выбрать когоʼлибо из молодых голландцев, я прошу Вас пока что об этом не говорить. Вместе с тем, поскольку я узнал от проф. Зоммерфельда, что и Вы подумывали о переходе в какойлибо университет, я и почел за лучшее не умалчивать больше об этой возможности.

Я только хотел бы Вас дружески просить: если Вы, возможно, получите в ближайшее время приглашение в какой-либо другой университет, сообщите мне об этом и по возможности отложите Ваше решение до тех пор, пока я смогу Вам ответить.

Я надеюсь, что это письмо Вы не сочтете нескромным. Вам не нужно будет указывать мне детали, а равно и имена: я же не заставляю Вас долго ждать.

Извините, пожалуйста, меня за эти строки, которые, наверное, излишни (хотя бы потому, что я совсем не знаю, готовы ли Вы и Ваша супруга жить в нашей стране), а также за то, что я — в силу высказанных причин — пишу Вам в такой осторожной форме.

Я бы не делал этого, если бы не был твердо убежден, что для любого университета было бы большой удачей получить Вас. Но мы должны честно взвесить все наши возможности.

С дружескими пожеланиями и глубоким уважением,

Преданный Вам *Г. А. Лоренц.*

Эренфест — Лоренцу

6 [19] мая 1912 г.

Глубокоуважаемый господин профессор!

Я хочу прежде всего признаться, что Ваше письмо было для меня сюрпризом столь же неожиданным, сколь и радостным. Извините меня поэтому, если я не сумею придать своему ответу чисто деловую форму; я постараюсь вместо этого наиболее добросовестным образом представить Вам отчет о положении, в котором я нахожусь.

Прежде всего я хотел бы вернуться к делам, связанным с Лебедевым. Я не смог поехать в Москву, как собирался. Все же я могу на основании своего опыта сказать следующее. Лебедевская лаборатория — под руководством Лазарева — на ходу. На *один* год существование лаборатории гарантировано; в дальнейшем все зависит от того, получат ли они в Москве в свое распоряжение денежные средства. Именно с этой точки зрения, как я в самом деле полагал, материальная (даже незначительная) поддержка со стороны Сольвеевского фонда может иметь решающее значение. Исследования, которые собирался проводить сам Лебедев в области магнетизма, *не* будут продолжены. Наоборот, там господствует твердое намерение совершенно не проводить далее большую программу работ, которую Лебедев наметил для своих учеников. Это все, что я могу сказать. Во всяком случае, я хотел бы заметить, что Лазарева можно найти по адресу проф. Брауна в Страссбурге.

Отвечая на Ваше письмо, могу сказать следующее.

I. Если исключить крайне маловероятное конкурирующее приглашение из Швейцарского университета, я безусловно собираюсь принять приглашение голландского университета. В случае, если все же последует приглашение из Швейцарии, то рассмотреть голландское приглашение надо будет, принимая во внимание языковые трудности и специальные обстоятельства, с ним связанные. *Примечание*: поскольку я являюсь «Konfessionslos'ом» («не придерживающимся никакой веры») со времени моей женитьбы (раньше же я был иудейского вероисповедания), для меня совершенно исключена возможность получения должности приват-доцента в России и профессора в Австрии и Германии. Во избежание недоразумений я хотел бы подчеркнуть, что мне чужды любые проявления какой-либо демонстрационности или пропаганды в вопросах вероисповедания. Однако по австрийским законам брак между христианами и нехристианами ни в какой форме невозможен; это и объясняет то, что оба мы с женой в качестве людей «без веры» смогли оформить наш гражданский брак. Повторное принятие какого-либо вероисповедания было бы для нас, однако, невыносимым.

II. Одним из университетов с обучением на немецком языке [4] (к сожалению, я оказался при таких обстоятельствах для него неподходящим) я был примерно две недели тому назад конфиденциальным образом запрошен, не мог ли бы я принять возможное от них предложение — в качестве преемника ординарного профессора (и не послал бы я в этом случае мои работы и т. д.). В то же время мне было указано, что в случае моего возвращения к иудейскому вероисповеданию министерство мое приглашение, без сомнения, утвердило бы, но если бы я, напротив, остался «Konfessionlosigkeit» («не придерживающейся никакой веры»), добиться разрешения министерства было бы абсолютно невозможно. Несмотря на это, конкурсная комиссия все же поддержала бы мое приглашение и подвергла бы обсуждению создавшуюся ситуацию. Я ответил (несколько дней назад), что такое возможное приглашение я готов принять и вслед за этим выслал туда (за несколько дней до получения Вашего письма) свои работы. Эта чисто формальная возможность, надо надеяться, будет очень скоро похоронена! (Я хочу еще со всей ясностью добавить, что в любом университете я чувствовал бы себя очень тревожно; невзирая на большие трудности, связанные с изучением нового языка, университет типа Лейденского, несомненно был бы предпочтительней[1]).

III. Незадолго до получения Вашего письма я получил предложение занять должность доцента в одном очень интересном немецком университете, в который я ранее не мог попасть из-за отсутствия вакансии [6]. Это предложение я принял с оговоркой — «если я не получу между тем какого-либо другого приглашения».

IV. Я хочу в ответ на Ваше письмо дать о себе некоторые автобиографические сведения.

Я родился в Вене в 1880 г. Австрийский подданный; родной язык — немецкий. После окончания в Вене классической гимназии мое образование протекало следующим образом.

1899—1900, 1900—1901 — Венский университет (особенно подчеркиваю больцмановский семинар, а также семинары Лампа, Егера, Швайдлера и Хазенёрля).

1901—1902, Зима 1902/03 — Университет в Геттингене (особенно подчеркиваю влияние Абрагама, Клейна и Гильберта).

С 1903 по 1906 г.— после краткого пребывания в Лейдене — снова в Вене (у Больцмана и Хазенёрля) [7].

1904 г.— получил докторскую степень у Больцмана на основе защиты диссертации (тема ее выбрана самостоятельно) о квазиголономном характере движения твердых тел в жидкостях (не опубликована) [8].

1906—1907 гг.— Геттинген (особенно — Гильберт).

1907—1912 гг.— Петербург (особенно — математик Стеклов).

Большое влияние на мое развитие имело общение с моими близкими друзьями: Г. Герглотцем (еще с гимназических лет), В. Ритцем [5] и А. Иоффе (в Санкт-Петербурге), а также возможность совместной работы с моей женой — особенно по вопросам, которые требовали абстрактного анализа.

Помимо теоретической физики я вплотную занимался только механикой и некоторыми областями математики. К сожалению, я никогда не предпринимал самостоятельных экспериментальных исследований, несмотря на мой живой интерес к эксперименту.

Электромеханический факультет Политехнического института в Петербурге (с оплатой за счет излишков своего бюджета) пригласил меня в 1910 г. прочесть специальный курс дифференциальных уравнений для лаборантов-ассистентов и студентов последнего года обучения (на русском языке). Однако я не имел возможности занять там официальное положение в качестве преподавателя.

Вышеизложенными сведениями я исчерпал все существенные вопросы. Отвечая на них, я был ободрен Вашим двукратным приглашением и вышел за пределы того, что Вы спрашивали. Извините, если соответствующий материал и объем достигли несоразмерной величины.

Для последних десяти лет моей жизни характерно ощущение какой-то невольной безродности. Я с давних пор убежден, что, за исключением случаев необыкновенной одаренности, полный расцвет способностей возможен только тогда, когда люди, с которыми обычно приходится иметь дело, воспринимаются тобой не как чужие. В этом отношении в Вене я чувствовал и чувствую себя чужим более, чем где-либо. Гораздо более «дома» я чувствовал себя в кругу моих геттингенских друзей, а также — позднее — в немецкой Швейцарии. Да даже среди рыбаков Ширмоникуга [9], с которыми я провел немногим более недели, мне было куда уютнее, чем в Вене (несмотря на более чем неудовлетворительное знание голландского языка).

Вместе с тем несомненно, что Россия могла бы стать моей родиной в самом глубоком значении этого слова, если бы я получил здесь постоянную преподавательскую работу где бы то ни было. Несмотря на мое недостаточное владение языком, я не ощущаю себя чужим в кругу здешних людей (исключая политических чиновников).

К сожалению, нам удается получить лишь весьма несовершенный суррогат вместо регулярной преподавательской работы. Моей жене предоставлялась возможность участвовать в работах по очень важным реформам, связанным с математическим образованием в России. Я имел — в качестве члена редакционной коллегии «Журнала Русского физико-химического общества» — довольно увлекательную область деятельности; она позволяла мне поддерживать контакт практически со всеми молодыми русскими физиками. Кроме того, нам удалось организовать физический дискуссионный клуб, который в течение трех лет собирался раз в две недели и практически объединял всех молодых физиков и физико-химиков (около 20 человек) Петербурга для очень живого обмена мнениями; большей частью это происходило у нас в квартире. Кроме того, был еще и небольшой студенческий семинар, который вот уже полтора года еженедельно собирается или у нас, или же самостоятельно.

Несмотря на то что эти наши неофициальные занятия действуют на меня очень стимулирующе и доставляют радость, мы должны, наконец, обдумать создавшееся положение (в связи с развалом Московского университета), при котором для меня оказывается невозможным какая-либо постоянная преподавательская деятельность. А без такой серьезной работы я боюсь оказаться в состоянии застоя; я ощущаю все возрастающую дезорганизованность моих занятий; кроме того, для меня понятие «работать» неотделимо от возможности устного изложения моих соображений. Впрочем, нам нужно также принять во внимание, что доходы от нашего собственного (унаследованного) состояния недостаточны сами по себе для должного воспитания двоих наших детей — даже если мы будем все больше и больше ограничивать собственные потребности.

В силу всего сказанного я и начал в течение примерно последнего года обдумывать, где бы за границей я смог получить доцентуру. Некоторые обстоятельства, сопутствовавшие этим поискам, вызвали у меня ощущение полной их бесперспективности. Два примера: оба физика одного из немецких университетов безоговорочно потребовали, чтобы я, несмотря на сделанную у Больцмана докторскую диссертацию, приобрел бы еще и немецкую степень доктора наук. Вместе с тем соответствующий статут позволяет в виде исключения допускать к преподаванию лиц, имеющих и не немецкую докторскую степень. Оба указанных физика отклонили, однако, соответствующее предложение ходатайствовать об этом перед факультетом. Далее. Когда меня — благодаря любезному содействию Дебая — проинформировали, могу ли я надеяться на доцентуру в Цюрихском университете, я получил определенный и окончательный ответ: «Нет!».

По существу только личная встреча с Эйнштейном побудила меня продолжить поиски работы: он сказал мне, что он сам и проф. Вейсс хотят выхлопотать для меня доцентуру в Цюрихском политехническом институте. Это, однако, конечно, еще не означает, что их хлопоты будут успешными: теперь, после приглашения туда Эйнштейна, ученый совет может с легкостью протестовать против предоставления места доцента по кафедре теоретической физики в Политехническом институте, поскольку уже приглашение самого Эйнштейна было расценено как «роскошь» для института.

Несмотря на эти неясные перспективы, мы начали свертывать наше хозяйство, чтобы осенью переехать в Цюрих: уже одно сознание возможности по крайней мере некоторое время поработать рядом с Эйнштейном очень меня соблазняет. С другой стороны, меня сильно угнетает полная неопределенность всего этого предприятия (Эйнштейн, впрочем, взял на себя труд, связанный с хлопотами по подысканию для меня пристанища где-либо еще, но все это, однако, висит в воздухе). Следует также принять во внимание, каким серьезным шагом для меня самого и особенно для моей жены является решение об окончательной разлуке с Россией. В разгар всего этого хаоса переживаний пришли теперь упомянутые выше запросы и особенно Ваше письмо, которое произвело на меня при этих обстоятельствах особенно глубокое и ободряющее впечатление, независимо от того, приведет ли оно с какому-либо практическому результату или нет.

Я — с Вашего разрешения — воспользуюсь возможностью известить Вас о любом предстоящем решении.

Извините, пожалуйста, форму и размеры этого письма.

С искренним уважением

П. Эренфест.

Мой адрес: Петербург, Лопухинская ул., 7а.

Лоренц — Эренфесту

Телеграмма, 16 (29) сентября 1912 г.

Эренфест избран профессором в Лейдене. Искренне поздравляю. Письмо последует. Лоренц.

Лоренц — Эренфесту

Гарлем, 29 сентября 1912 г.

Дорогой коллега,

Вы, я надеюсь, уже получили телеграмму, в которой я сообщил Вам о том, что Вы утверждены в звании профессора. Теперь, наконец, я могу — еще раз! — принести Вам свои поздравления. Уверен, что Ваша деятельность в Лейдене принесет Вам чувство удовлетворения и приведет к самым прекрасным результатам как в области научной работы, так и в преподавании. От всего сердца надеюсь, что Вы и Ваша семья на новом месте будете во всех отношениях чувствовать себя счастливыми! Моя жена просит передать самые сердечные поздравления Вам и Вашей супруге!

Эренфест — Лоренцу [10]

31 октября 1912 г.

...В моем кабинете наведен порядок в первом приближении. Позвольте мне перечислить его достоинства: в нем 5 окон, но он теплый, так как подогревается газовой печкой. Имеется писчая и промокательная бумага, тушь и чернила, а также и 2 стола, 2 стула, кушетка и настольная электрическая лампа; есть даже доска.

Если Вы готовы примириться с этим инвентарем, а также и с нашей кухней, которая во многом подобна полевой (и сервируется к тому же в совершенно пустой комнате, украшенной только подаренными Вами цветами!), — итак, если Вы готовы примириться со всем этим, мы будем очень рады видеть Вас у себя. Моя комната, действительно вполне сносна, но я боюсь, что очень плохим будет, к сожалению, наш стол. Но, быть может, Вы все же остановитесь у нас, вместо того чтобы ездить взад и вперед в Гарлем?..

Эренфест — Лоренцу

5 декабря 1912 г.

...Даже моя первая беспорядочно построенная лекция (это был чистейшей воды скандал!!) не смогла надолго повергнуть меня в уныние. Вот что страшно меня смутило на этой лекции. Я начал ее, сказав несколько слов о том, что, мне кажется,— коль скоро с сегодняшнего дня начинаются каникулы — я не очень удачно выбрал время для того, чтобы начать свой курс. Поэтому я собираюсь использовать этот первый час просто для рассказа о том, о чем я намерен рассказывать на протяжении последующих лекций. А теперь представьте, пожалуйста, мою тревогу: еще тогда, когда я произносил это вступление, все они уже что-то записывали (что??!!!) в свои тетради. Иными словами, вместо их глаз, которые я надеялся видеть, я видел около дюжины хорошо причесанных макушек.

Я просто не могу найти слов, чтобы описать Вам, в какой степени я был всем этим смущен. Я все более и более приходил в состояние растерянности, а они все с бо́льшим увлечением писали! По прошествии десяти минут я чувствовал себя как бедный маленький заяц, который в отчаянии убегает от преследующих его гончих, причем чем быстрее он несется, тем быстрее мчатся и они. И в какой-то момент — я сейчас не помню, когда именно,— я сказал им, что, возможно, я попытаюсь приготовиться к тому, что кое-кто из них будет записывать мою следующую лекцию. А на этот раз, в этот первый час моего курса, когда я хотел бы только набросать очень приблизительный его эскиз, я совершенно не подготовлен к такому его восприятию.

Однако голландцы очень добрые по природе люди! Все студенты немедленно отложили в сторону свои перья и наконец-то я смог начать с ними говорить! Вместо двенадцати или пятнадцати причесок (каждая из которых, конечно, тоже была отмечена своей индивидуальностью) я увидел ровно столько же лиц и вдвое больше глаз. Но теперь уж вся лекция пропала, а я хотел продемонстрировать им такой важный метод — я хотел показать, как можно осуществить непрерывный переход от одной проблемы к другой, хотя поначалу обе они казались совершенно различными. Я получил удовлетворение только от одного — в конце этого часа я не видел ничего, кроме веселых и не напряженных лиц. Но они совершенно ничего не поняли — кроме того, что я указал им на несколько учебников, названия которых они старательно записали...

Эренфест — Лоренцу

17 июня 1914 г.

....Я слышал (случайно!!), что мы оказываемся не в состоянии не только обеспечить стипендией Струика, но что мы потеряем стипендию, необходимую еще и Бюнингу! Профессор Лоренц! Это действительно просто невозможно! Бюнингу совершенно необходимо выдавать стипендию — он исключительно энергичный и ясно мыслящий работник, с очень четко выраженной инициативой, а к тому же еще и необычайно милый человек. Я уверен, что если б Вы увидели его, Вы бы тоже оценили его очень высоко.

В связи со всем этим я хочу указать и еще на одно обстоятельство: в будущем году у нас будет еще и физик (Бюнинг — химик), который закончит свои кандидатские экзамены, и которого я и Кюнен очень ценим. Это — Костер. Он в прошлом учитель и живет на свои сбережения, которых, насколько я знаю, ему хватит как раз на год. По моей инициативе он уже сдал 3 предварительных экзамена — и сдал их очень хорошо. И все это за первый год своего обучения; скоро он сдаст все кандидатские экзамены. Но затем ему надо предоставить возможность спокойно работать (он очень трудодолюбив и занимается физикой с большой охотой). Струик, думается, также заслуживает нашего внимания (я не знаком с ним лично). Так что факультету следовало бы пробудиться от спячки и действовать более энергично. Вы понимаете, профессор Лоренц, что об этих вещах я откровенно говорю только Вам и де Ситтеру, так как я опасаюсь за других, но я действительно должен сказать, что все это дело решено необычайно бюрократическим образом, поскольку по крайней мере я правильно его понимаю.

Конечно, мне могут сказать: перестаньте постоянно совать свой нос во все дела. Но, говоря по правде, я поступаю так не из самонадеянности. И как часто, однако, когда я думаю о том, почему тот или иной действительно талантливый студент не оправдывает — в той мере, в какой это можно было с определенностью от него ожидать, — возлагавшихся на него надежд, я незамедлительно наталкиваюсь на несколько одних и тех же типичных причин: трудности государственной службы, необходимость поездок, отсутствие контакта с товарищами — студентами, изучающими ту же область знаний (последние теперь быстро налаживаются, и это в случае самых молодых студентов приносит богатые плоды; клуб Гюйгенса сейчас — это очень живое сообщество студентов: математиков, физиков, химиков и астрономов); далее — экзаменационная система и экономические трудности (самым наихудшим ее следствием является упомянутая необходимость поездок).

Быть может, я совершенно неправ, может быть, на самом деле все обстоит наилучшим образом, а, может быть, причины, о которых я говорил, коренятся совсем не там, где я их вижу. (Мое мнение, естественно, формируется на основании сравнения с ситуацией, имеющей место в Вене, Петербурге, Геттингене). Разумеется, я не забываю, что мне могут сказать: «Прежде всего делайте свою работу хорошо и проникновенно, и вы увидите, что и без всяких организационных мероприятий все окружающие вас молодые студенты также будут работать».

Да, я, быть может, и ошибаюсь, но я прошу Вас поверить: я чувствую себя просто вынужденным вмешиваться в те или иные дела, когда они представляются мне тесно связанными с развитием студентов, с которыми я непосредственно контактирую.

Вопрос о стипендиях, безусловно, относится к этой категории дел. Если же здесь не может быть сделано больше того, что я способен увидеть, тогда я действительно думаю, что необходимо приступать к их решению гораздо более энергично. Я имею в виду при этом — не так абстрактно, не так бюрократически, но, скорее, конкретно. Люди, обладающие возможностями для решения вопроса, должны быть поставлены в известность о положении дел, а людям, вовлеченным в это дело, ситуация должна быть разъяснена ясно, а не совершенно формально. Я надеюсь, что это требование не является полностью анархичным. Ведь то, что я хотел сказать, сводится к следующему: это должно быть им с несомненностью очевидно, чтобы начало их беспокоить хотя бы в такой степени, в какой их беспокоят их собственные неприятности, пусть даже уменьшенные в 10000 раз! (Но я не хотел бы рисковать, утверждая что-либо в такой степени варварское и грубое).

Пожалуйста, извините меня за то, что я продолжаю Вас беспокоить...

Из письма П. С. Эренфеста к А. Д. Фоккеру

(от 2 февраля 1929 г.)

...Лоренц, действительно должен был заниматься массой разнообразных дел. Единственная возможность, которая позволяла ему находиться в их курсе, состояла в тщательном планировании своего собственного времени. Если вы хотели подробно поговорить с ним, то, независимо от предмета разговора — научного или личного, он спрашивал прежде всего, срочное ли это дело, чтобы определить подходящее время для встречи. Как только он убеждался, что на самом деле лучше было бы обсудить этот возникший у вас вопрос поскорее, он каким-либо образом устраивал так, чтобы встреча состоялась в самое ближайшее время или, возможно, даже в тот самый день невзирая на то, что этот день у него и без того был перегружен. И как раз в том случае, когда вопрос касался трудных личных проблем, вам было особенно приятно получить приглашение Лоренца зайти к нему для разговора домой, в Гарлем. Вы приходили туда в указанное время, обдумав уже как можно более подробно, что же вам хотелось спросить у Лоренца, чтобы отнять у него ровно столько времени, сколько представляется вам совершенно необходимым. Лоренц спускался вниз, чтобы встретить вас, вместе с ним вы шли поздороваться с его женой; затем он предлагал выпить чашку чая и — в милом противоречии с вашим намерением экономить его время, намерением, с которым вы пришли в его дом,— вы спокойно сидели уже за другой чашкой чая, а он просил рассказать о том, как поживают ваша жена и дети. И вы беседовали с ним о многих других делах. А Лоренц до тех пор не приглашал Вас подняться наверх, к нему в кабинет, пока у него не появлялась уверенность, что вы уже освободились от чувства напряженности и спешки...

Лоренц с улыбкой придвигает к столу удобное кресло для своего гостя и всячески старается, чтобы вы себя чувствовали как можно свободнее. Усаживаясь на свое место за столом, он — шуткой или каким-либо другим способом — облегчает начало трудного или очень делового разговора и действительно достигает того, чего хочет: вы не только чувствуете себя чрезвычайно комфортабельно, сидя в мягком кресле, но и ощущаете себя окруженным атмосферой участия — очень деловой и в то же время преисполненной светлым и теплым доброжелательством.

Вы начинаете говорить о своем деле и о трудностях, стоящих перед вами. По ходу вашего рассказа Лоренц задает вопросы, свидетельствующие об его исключительной восприимчивости. Постепенно он начинает распутывать, углублять и прояснять картину. Любые драматически звучащие замечания рассеиваются его улыбкой. Вы чувствуете, что вы раскрыли свою душу в такой степени, в какой это редко случалось в течение всей вашей прошлой жизни. Наконец, вы высказались до конца. Теперь пришло время просить у Лоренца совета, того самого совета, ради которого вы и приехали к нему. Но к своему удивлению вы замечаете, что вам уже не нужно «просить совета»: с помощью своих вопросов этот удивительный человек помог нам понять наши побуждения и взвесить их важность, так что мы чувствуем себя уверенными в нашем решении.

Примечания к переписке

1. Петр Николаевич Лебедев скончался в Москве 14 марта 1912 г. Его преемником по лаборатории, функционировавшей в университете Шанявского, стал Петр Петрович Лазарев (1878—1942).

2. Статья П. С. Эренфеста и Т. А. Афанасьевой-Эренфест «О концептуальных основаниях статистической механики» была опубликована на немецком языке в «Энциклопедии математических наук», издававшейся Феликсом Клейном, в 1912 г., затем — в переводе на французский (выполненном Э. Борелем) — в 1913 г. и, наконец, в 1959 г. в США вышел ее перевод на английский.

3. Статья Эренфеста (в точном переводе с немецкого) называлась «К вопросу о ненужности светового эфира» и была опубликована в «Physikalische Zeitschrift» (1912, **13**, стр. 317).

4. «Один из университетов с преподаванием на немецком языке» — это «Немецкий университет» в Праге. В другом, Пражском, университете преподавание велось на чешском языке.

5. Имеется в виду Вальтер Ритц (1878—1909).

6. Эренфест имеет в виду приглашение, полученное им из Мюнхена от А. Зоммерфельда.

7. Одновременно в эти первые годы пребывания в университете Эренфест учился в Венской высшей технической школе.

8. Рукописный текст диссертации Эренфеста воспроизведен в издании его избранных трудов, вышедших в 1959 г. в Голландии под редакцией М. Клейна.

9. Ширмоникуг — один из островов у побережья Голландии.

10. Это и последующие письма воспроизведены (в переводе с английского) по книге М. Клейна («Paul Ehrenfest. The Making of a Theoretical Physicists», v. I. Amsterdam — London, 1970).

В. Я. ФРЕНКЕЛЬ

ЛОРЕНЦ И ЭРЕНФЕСТ

Со студенческих лет Эренфест находился в самом тесном контакте с выдающимися физиками — своими современниками. Причина этого — наряду, конечно, с недюжинными способностями Эренфеста — заключается в том, что на рубеже двух веков число физиков было очень невелико и все они довольно хорошо знали друг друга не только по работам, печатавшимся в нескольких (порядка десяти), наиболее широко распространенных и повсеместно читаемых журналах, но и по личным контактам, осуществлявшимся в рамках конференций и съездов, а также странствований студентов — особенно, как это подчеркивал Борн, немецких — из одного университета в другой. И все же, если обратиться к личности Эренфеста, нельзя не удивиться, с каким широким кругом крупнейших ученых связывали его узы тесной дружбы (как это было в случае Ритца, Эйнштейна, Бора, Борна), и чувства глубокой взаимной симпатии и уважения. На этом высоком уровне человеческих взаимоотношений Эренфест находился с Каммерлинг-Оннесом, Планком, Смолуховским, Герглотцем, Паули, Ферми, Шредингером и Дираком. Глубоко чтимыми учителями Эренфеста — прямыми и косвенными — были Больцман, Феликс Клейн, Лоренц, Гильберт, Минковский; в числе его учеников следует назвать имена Ю. А. Круткова, Крамерса, Уленбека, Гаудсмита. В России он стал ближайшим другом А. Ф. Иоффе и испытал на себе глубокое влияние от знакомства с П. Н. Лебедевым, В. А. Стекловым и др.; позднее, уже в годы Советской власти, он был тесно связан с П. Л. Капицей, Л. Д. Ландау, Л. И. Мандельштамом, И. Е. Таммом, В. А. Фоком, Я. И. Френкелем, Л. В. Шубниковым...

В случае людей с ярко выраженной человеческой и научной индивидуальностью часто оказывается возможным провести интересные сопоставления их судеб и проследить за их влиянием друг на друга, если, конечно, они были современниками; в противном случае такое влияние является односторонним (и бывает очень сильным и глубоким). Изучение подобных «парных взаимодействий» всегда привлекательно для историков. Комбинаторика, которой так любил заниматься Эренфест, красноречиво свидетельствует о практической необозримости подобного числа комбинаций из n по 2 (причем $n \gg 1$). Из этого кладезя можно черпать интересный и поучительный материал для подобного рода «парных эссе». В случае Эйнштейна, например, много писалось о влиянии на его личность и творческую манеру философов (Спинозы, Маха), физиков (прежде всего, конечно, Галилея и Ньютона), писателей (Достоевского) и композиторов (Баха, Моцарта). В последнем случае, правда, лучше говорить не о прямом влиянии, а о своеобразном созвучии, резонансной настроенности духовного облика Эйнштейна, определивших возможность таких воздействий. В неменьшей степени интересны сопоставления особенностей научного стиля Эйнштейна с такими физиками, его современниками, как Больцман, Планк, Бор, Эренфест и многие, многие другие.

Возвращаясь же к Эренфесту, заметим, что и здесь исключительно велико число таких взаимных влияний. Среди них особое место занимают отношения, сложившиеся с Эренфестом у Лоренца. Их переписка, лишь небольшая часть которой приведена выше, насчитывает многие десятки писем, бережно сохраняемых в голландских архивах.

В годы студенчества Эренфеста Лоренц уже имел общеевропейскую известность; личное их знакомство состоялось весной 1903 г. В апреле этого года Эренфест и его товарищ Вальтер Ритц (швейцарец, обучавшийся в Геттингене) совершили совместную поездку в Лейден. Надо сказать, что Лейден того времени славился не только Лоренцем, но и Каммерлинг-Оннесом, директором криогенной лаборатории, в которой велись захватывающе интересные исследования низкотемпературных свойств твердых тел. И вот вместе с Ритцем Эренфест придумал остроумный метод выбора тем для диссертационных работ: они брали учебник физики и обращались к предметному указателю. Один зачитывал собранные там термины, а другой добавлял сакраментальное: «при низких температурах».

Именно на лекциях Лоренца Эренфест приобщился к проблеме излучения черного тела и распределения энергии в нем; стимулируемый этими лекциями, он познакомился с трудами Планка. В течение нескольких недель, проведенных в Голландии, были заложены основы его интереса к этим вопросам, ставшим предметом его собственных исследований на протяжении последующего десятилетия. Из записных книжек Эренфеста (выдержки из которых воспроизведены или пересказаны в книге М. Клейна [1] [1]) мы узнаем, что он много путешествовал по новой для него стране, приглядываясь к ее особенностям, к ее людям. Это не мешало ему и много читать, в частности Льва Толстого, на которого Эренфесту указала Татьяна Алексеевна Афанасьева, годом позднее ставшая его женой.

Заключительным аккордом этой поездки было посещение Лоренца в его квартире, где Эренфест провел навсегда запомнившийся ему вечер. Он вспомнил о нем позднее, в 1912 г., в одном из писем к Лоренцу и был приятно удивлен, узнав, что и великий голландец не забыл этот визит юного студента (см. первое из публикуемых здесь писем Лоренца). А тогда, в весенние дни 1903 г., гуляя по Лейдену и его окрестностям, Эренфест, конечно, и не предполагал, что спустя каких-то 9 лет вернется сюда — в качестве преемника Лоренца!

Лоренц принял решение оставить профессуру в Лейдене в 1911 г. Естественно, что он более чем внимательно относился к проблеме выбора преемника на свою кафедру. Он не написал Эренфесту о том, что, до того как обратиться к нему с предложением занять эту кафедру, он вел соответствующие переговоры с Эйнштейном,— можно думать, что Эйнштейн был одним из тех, кто рекомендовал ему связаться с Эренфестом. Столь же закономерно, что, получив принципиальное согласие Эренфеста переехать в Голландию, Лоренц только после этого написал разным физикам с просьбой поделиться своими впечатлениями о своем возможном преемнике. Среди этих физиков был и Зоммерфельд. В ответном письме он так охарактеризовал Эренфеста: «Он мастерски читает лекции. Мне трудно назвать другого человека, который говорил бы с таким блеском и умел бы так зачаровывать аудиторию. Полные смысла фразы, остроумные замечания, диалектический ход рассуждений — все это имеется в его арсенале и составляет своеобразие его манеры. Даже то, как он ведет записи на доске, у него получается по-особому. Он фиксирует на ней для своих слушателей все содержание лекции и делает это исключительно прозрачным способом. Он знает, как сделать наиболее трудные вещи конкретными и ясными. Язык математики он переводит в зримые, простые и понятные картины... Я нахожусь под впечатлением контакта с ним, бо́льшим, чем от знакомства с его работами, и это впечатление сводится к тому, что он очень заботится о фактической стороне физики. В своих статьях он — гораздо больше, чем просто логично и диалектически рассуждающий человек. Математика сама по себе для него не интересна. В личных беседах он проявил себя гораздо более многосторонним, чем в публикациях. За экспериментальными данными он следит постольку, поскольку они связаны с принципиальными проблемами» [1].

Определяющим в решении, принятом Лоренцем, было, вероятно, все же непосредственное знакомство с работами Эренфеста и прежде всего со статьей из «Математической энциклопедии» Феликса Клейна. Сам строй этой статьи красноречиво свидетельствовал о выдающемся преподавательском даре Эренфеста, об его умении излагать предмет не только так, как это делается, когда проблема по существу уже решена и выбирается изящный и кратчайший метод ее представления, не сохраняющий чаще всего того последовательного, шаг за шагом, пути, который к такому решению привел. Эренфест, конечно, владел искусством решения подобных «задач на экстремум», т. е. умел находить

---

[1] См. литературу на стр. 232.

минимально короткий путь от постановки вопроса к ответу на него. Но он умел также взглянуть на задачу глазами менее искушенных, вступающих на научное поприще или впервые знакомящихся с данным кругом идей. То, что Зоммерфельд называет «диалектически-логическим подходом Эренфеста», другие лица, общавшиеся с Эренфестом, называют «сократической» его манерой; слушатели подводятся им к решению задачи методом наводящих вопросов, методом, который был развит Сократом и Платоном.

В воспоминаниях о Лоренце подчеркивается, что он был блестящим лектором, однако его лекции, рассчитанные на подготовленную аудиторию, были слишком гладкими: он не акцентировал внимание на трудных вопросах, требовавших преодоления неких логических барьеров. Это было быстрое продвижение вперед по тщательно проложенной, укатанной дороге. Лекции Эренфеста были, скорее, бегом с препятствиями. Ровные участки перемежались трудно преодолимыми; Эренфест не только сглаживал или, тем более, обходил их — напротив, он подробно описывал причины, которыми такое препятствие порождалось, подчеркивал его неизбежность — в рамках старой логической схемы — и как бы призывал аудиторию объединенными усилиями расчистить путь для нового броска.

Дочь Лоренца, сравнивая своего отца и Эренфеста, подчеркивает и то различие, которое проявлялось в их отношении к студентам и начинающим сотрудникам [2]. Если Лоренц видел, что кто-либо из них перестает интересоваться физикой, отдавая предпочтение другим наукам, он никогда не оказывал давления на такого человека, даже если и считал его способным. Это не было проявлением равнодушия, а, вероятно, соответствовало убеждению, что всякое вмешательство в чужую судьбу — если только о таком вмешательстве его, Лоренца, не просят — не может дать положительного эффекта. Эренфест, напротив, считал себя обязанным бороться за то, чтобы отошедший по тем или иным соображениям от физики молодой человек вновь вернулся к ней и вернулся как можно скорее — иначе будет упущено время [2]. Сопоставляя эти подходы, нельзя не вспомнить определения, которое Бор дал глубоким и тривиальным истинам. Если высказывание, противоположное представленному, имеет смысл, мы имеем дело, по Бору, с глубокой истиной; если оно абсурдно — налицо тривиальность. Каждый из подходов — и эренфестовский и лоренцевский — имеет свои плюсы и минусы, и нельзя вынести однозначное суждение о большей или меньшей ценности того или другого!

Эренфест одинаково высоко чтил своих учителей — Больцмана, Клейна, Лоренца, но, конечно, к Лоренцу он испытывал совершенно особые чувства, которые можно с полным основанием назвать сыновними. В одном из первых писем, отправленных А. Ф. Иоффе из Лейдена, под свежим впечатлением от встречи и с Голландией, и с Лоренцем, он говорит, что сердечность и понимание, которые он встретил со стороны Лоренца, заставили его подумать о том, что так вот разговаривает отец с вернувшимся издалека сыном, когда он хочет передать ему все свои дела.

С самого момента приезда Эренфеста в Лейден Лоренц договорился с ним о том, что Эренфест и Татьяна Алексеевна, его жена, будут еже-

---

[2] Можно привести пример, когда, впрочем, Эренфест отступил от своего правила и способствовал отходу своего ученика от физики. Этим учеником был Ян Тимберген; учитель благословил его на

недельно бывать в его доме в Гарлеме (расположенном в 25 минутах езды от Лейдена), и действительно, каждый четверг, от 7 до 10 часов вечера супруги Эренфесты проводили у Лоренцев. В то же время и Лоренц принял приглашение Эренфестов и после своей еженедельной лекции в Лейдене, читавшейся по понедельникам, бывал в их доме на улице Белых Роз.

Но и помимо этих встреч — в полной аналогии с тем, что было в Петербурге с А. Ф. Иоффе,— Эренфест очень часто и подробно писал Лоренцу, советуясь с ним, делясь с ним научными новостями, своими собственными идеями — своеобразным первым приближением к будущим публикациям, своими тревогами, сомнениями, радостями. И неизменно получал развернутый ответ — по просьбе, очевидно, Эренфеста написанный по-голландски и всегда начинавшийся теплым обращением «Amico!» («Друг!»).

Для мятущегося, неуверенного в себе Эренфеста поддержка Лоренца была бесценной, а признательность, которую он испытывал к старшему другу и наставнику,— безграничной. Недаром же Эйнштейн свою статью памяти Лоренца начал словами: «В начале нашего столетия физики-теоретики всего мира с полным правом смотрели на Г. А. Лоренца как на своего наставника» [3]. Эренфест часто бывал резок в обращении, не имел обыкновения сглаживать углы, не скрывал своего недовольства каким-либо поступком (или суждением) своего знакомого, если считал этот поступок достойным порицания. Но одновременно он полагал естественным не утаивать и свои добрые чувства, своей радости успехами друзей. Чувством восхищения Лоренцем наполнены и письма, и официальные речи Эренфеста, ему посвященные,— будь то лекция, прочитанная при вступлении на должность профессора Лейденского университета, или доклад, сделанный на торжествах, связанных с 50-летием со дня присуждения Лоренцу этим университетом степени доктора.

В годы, когда А. Ф. Иоффе, А. Н. Крылов, Д. С. Рождественский — первые полпреды советской науки на Западе — начали важнейшую работу по восстановлению и налаживанию связей с зарубежными коллегами, Эренфест привлек Лоренца к хлопотам по обеспечению успеха этой миссии советских физиков. Огромный авторитет, которым Лоренц пользовался в то время среди физиков во всем мире, его рекомендательные письма были, по словам В. М. Чулановского, «ключом ко всем замкам». Большую помощь советским ученым оказали Лоренц и Эренфест в получении виз (в частности, голландских). Они организовали сбор оттисков, журналов и книг; целые ящики с научной литературой были безвозмездно переданы советским научным учреждениям — институтам Иоффе и Рождественского, Петроградскому университету.

Когда (в середине 20-х годов) был создан фонд Лоренца, средства из которого выделялись для молодых теоретиков, одна из первых стипендий этого фонда была, по решению его кураторов (в число которых входили в то время и Лоренц, и Эренфест), предоставлена И. Е. Тамму. Игорь Евгеньевич Тамм приехал в Лейден в конце ян-

---

занятия математической экономикой — предметом, которым сам Эренфест очень интересовался. Ради нее Тимберген оставил физику, хотя и в ней проявил большие способности. Решение принесло свои плоды: Тимберген был первым, кто получил (в 1969 г.) Нобелевскую премию по экономическим наукам.

варя 1928 г.; в ближайший понедельник, 30 января, он собирался присутствовать на очередной лекции Лоренца. Но лекция не состоялась: Лоренц заболел. А еще через несколько дней, 4 февраля 1928 г., его не стало. И. Е. Тамм вспоминает, как в день похорон Лоренца, 9 февраля, в Голландию съехались физики всей Европы: среди них были и Эйнштейн, и Резерфорд, и Ланжевен, и многие другие. Первым в числе лиц, выступивших с речами на траурной церемонии, был Пауль Эренфест, представлявший Голландию.

Смерть Лоренца его потрясла, на следующий день после похорон он тяжело заболел и не скоро оправился. Судя по последующей переписке Эренфеста с друзьями и коллегами, эта рана так и не затянулась до последних дней его жизни. Более того, можно думать, что проживи Лоренц дольше, его поддержка и то огромное влияние, которое он имел на Эренфеста (и которое так рельефно выступает в опубликованных выше письмах), предотвратили бы его трагическую и безвременную гибель.

Литература

1. *M. Klein.* Paul Ehrenfest, v. I. Amsterdam — London, 1970.
2. *H. A. Lorentz.* Impressions of his Life and Work. Edited by C. L. de Haas-Lorentz. Amsterdam, 1957.
3. В кн.: *Г. А. Лоренц.* Старые и новые проблемы физики. М., «Наука», 1970.

V
СТАТЬИ И ВОСПОМИНАНИЯ ОБ ЭРЕНФЕСТЕ

А. ЭЙНШТЕЙН

ПАМЯТИ ПАУЛЯ ЭРЕНФЕСТА

В наши дни люди с выдающимися качествами так часто кончают жизнь самоубийством, что мы уже не видим в этом ничего необычного. Но решение расстаться с жизнью проистекает, вообще говоря, из неспособности (а иногда и из отвращения) приспособиться к новым и более трудным внешним условиям. Отказ прожить жизнь до естественного конца вследствие нестерпимых внутренних конфликтов — редкое сегодня событие среди людей со здоровой психикой; иное дело среди личностей возвышенных и в высшей степени душевно возбудимых. Из-за такого внутреннего конфликта скончался наш друг Пауль Эренфест. Те, кто были знакомы с ним так же хорошо, как было дано мне, знают, что эта чистая личность пала жертвой главным образом такого конфликта совести, от которого в той или другой форме не гарантирован ни один университетский профессор, достигший пятидесятилетнего возраста.

Мы познакомились 25 лет тому назад. Он посетил меня в Праге, куда приехал прямо из России; как еврей, он был лишен там возможности преподавать в высших учебных заведениях. Поэтому он искал себе поле деятельности в Центральной или Западной Европе. Но об этом мы говорили мало, потому что почти все наше внимание поглотило состояние науки того времени. Мы оба отдавали себе отчет, что классическая механика и теория электрического поля оказались недостаточными для объяснения явлений теплового излучения и молекулярных процессов (статистическая теория), но не создавалось впечатления, чтобы Эренфест видел путь выхода из этого положения. Логическая брешь в планковской теории излучения, которой мы тем не менее восхищались, была для нас очевидной. Мы обсуждали также теорию относительности, которую он воспринял хотя и несколько скептически, но отдавая ей должное со свойственной ему способностью критического суждения. За несколько часов мы стали настоящими друзьями, будто наши чаяния и мечты были одинаковыми. Нас соединила тесная дружба, продолжавшаяся до его смерти.

Его величие заключалось в чрезвычайно хорошо развитой способности улавливать самое существо теоретического понятия и настолько освобождать теорию от ее математического наряда, чтобы лежащая в ее основе простая идея проявлялась со всей ясностью. Эта способность позволяла ему быть бесподобным учителем. По этой же причине его приглашали на научные конгрессы, ибо в обсуждения он всегда вносил изящество и четкость. Он боролся против расплывчатости и многословия; при этом пользовался своей проницательностью и бывал откровенно неучтив. Некоторые его выражения могли быть истолкованы как высокомерные, но его трагедия состояла именно почти в болезненном неверии в себя. Он постоянно страдал от того, что у него способности критические опережали способности конструктивные. Критическое чувство обкрадывало, если так можно выразиться, любовь к творению собственного ума даже раньше, чем оно зарождалось.

Вскоре после нашей первой встречи в карьере Эренфеста произошел решительный поворот. Наш высокочтимый наставник Лоренц, желая удалиться от регулярного преподавания в университете и видя в Эренфесте вдохновенного учителя, рекомендовал его в качестве своего преемника. Перед ним, еще молодым, открылось замечательное поле деятельности. Он не только был самым лучшим профессором из людей нашей профессии, которого я знал, но его страстно занимали становление и судьба людей, особенно его студентов. Понимать других, завоевать их дружбу и доверие, помогать тому, кто был стеснен внешней или внутренней борьбой, ободрять молодые таланты — все это было его истинным призванием, даже больше, чем углубление научных вопросов. В Лейдене его любили и уважали студенты и коллеги. Они знали его абсолютную преданность делу преподавания и постоянную готовность прийти на помощь. Не должен ли он был быть счастливым человеком?

На самом деле он был несчастнее всех бывших мне близкими людей. Причина состояла в том, что он не чувствовал себя на уровне той высокой задачи, которую должен был выполнять. Чем помогало ему всеобщее уважение? Его постоянно терзало объективно необоснованное чувство несовершенства, часто лишавшее его душевного покоя,

П. Эренфест, 1924 г. Теневое фото

столь необходимого для того, чтобы вести исследования. Он так страдал, что был вынужден искать утешения в развлечениях. Частые бесцельные путешествия, увлечение радио и многие другие черты его тревожной жизни происходили не от потребности покоя или безвредных маний, а скорее от странной и настойчивой потребности к бегству, вызванной психическим конфликтом, о котором мы говорили.

В последние годы это состояние обострилось из-за удивительно бурного развития теоретической физики. Всегда трудно преподавать вещи, которые сам не одобряешь всем сердцем; это вдвойне трудно фанатически чистой душе, для которой ясность — все. К этому добавлялась все возрастающая трудность приспосабливаться к новым идеям, трудность, которая всегда подстерегает человека, перешагнувшего за пятьдесят лет. Не знаю, сколько читателей этих строк способны понять эту трагедию. Но все-таки она была главной причиной его бегства из жизни.

Мне кажется, что тенденция чрезмерно критиковать самого себя связана с впечатлениями детства. Умственное унижение и угнетение со стороны невежественных и эгоистичных учителей производят в юной душе опустошения, которые нельзя загладить и которые оказывают роковые влияния в зрелом возрасте. О силе такого впечатления у Эренфеста можно судить по тому, что он отказался доверить какой-нибудь школе своих нежно любимых детей.

Бо́льшую, чем у большинства людей, роль сыграли в жизни у Эренфеста его отношения с друзьями. Его симпатии и антипатии, основанные на суждениях морального порядка, фактически властвовали над ним. Самой сильной привязанностью в его жизни была жена и помощница, личность исключительно сильная и смелая, равная ему по интеллекту. Возможно, что ее ум не был столь проворным, гибким и чувствительным, как его собственный, но ее уравновешенность, независимость, стойкость перед трудностями, цельность мысли, чувства и действия были для него благодеянием, за которое он платил обожанием и любовью, какую мне не часто приходилось видеть в жизни. Случайная отчужденность между ними была страшным экспериментом, против которого его уже раненая душа была неспособна бороться.

Мы, чьи жизни обогащались силой и цельностью его ума, доброжелательностью и теплотой его щедрой души и в не меньшей мере его юмором и сарказмом, знаем, что потеряли с его смертью. Он продолжает жить в своих студентах и в тех, чьи помыслы направлял.

1934

П. ЛАНЖЕВЕН

ИЗ РЕЧИ НА ОТКРЫТИИ VII СОЛЬВЕЕВСКОГО КОНГРЕССА

(22 октября 1933 г.)

...Поскольку речь идет об отсутствующих, нам следует вспомнить о Пауле Эренфесте. Пауль Эренфест должен был присутствовать здесь, и ничто не сравнится с горем, потрясшим нас, когда месяц назад мы узнали о трагическом решении, которое он счел необходимым принять. Многие из присутствующих здесь были его учениками, и все — его друзьями. Мы знали, сколь активной была его деятельность, насколько глубок его ум, знали теплоту его сердца и надежность его дружбы; мы дважды видели его на наших физических конгрессах, и в первый раз это было в 1921 г., когда мы обсуждали вопрос об атомах и электронах. Его энтузиазм был тогда особенно велик. Конгресс 1921 г., проходил, если можно так выразиться, под знаком принципа соответствия. Наш Бор, который здесь сейчас присутствует, не смог тогда приехать, но находился с Эренфестом в тесном и постоянном контакте. Я вспоминаю те дни, когда Эренфест приходил после получения письма от Бора и словно приносил отзвук тех его мыслей, которые тогда развивались в Копенгагене. Он вкладывал в это радость и теплоту, глубоко нас волновавшие. Сам он не смог прибыть на следующий конгресс, задержавшись в Соединенных Штатах, но он вернулся в 1927 г. на конгресс, посвященный электронам и фотонам и проходивший в отличие от 1921 г. под знаком принципа неопределенности. В сравнении со всеми предшествующими физическими конгрессами на этом собрании столкновение идей, я бы даже сказал — смешение идей, достигло своего максимума. Эренфест, который так способствовал бережному сохранению связи между старыми и новыми идеями, был среди присутствующих. Он был, в каком-то смысле, душой этих собраний, ясно осознавая — больше, чем кто-либо из нас,— стоящие перед нами трудности. Я помню, как однажды, после перерыва между заседаниями, позволившего нам немного передохнуть, мы обнаружили по возвращении в зал на черной доске написанную его прекрасным почерком цитату из Библии, напоминающую, что на Вавилонской башне люди говорили на разных языках и перестали понимать друг друга. Так, в свойственной ему живой манере, он охарактеризовал этот момент нашей общей жизни. Эренфест был в самом сердце драмы современной физики.

Я радовался возможности вновь увидеть его здесь и испытать то стимулирующее влияние, которое Эренфест оказывал при общении со своими учениками и со своими друзьями. Нам не суждено больше увидеть его: драма нашей физики воплотилась в Эренфесте в трагедию, которая погубила большой ум и большое сердце. Я знаю, что те, кого он оставил после себя, найдут в нашей семье поддержку и утешение, столь всем нам необходимые. Моим святым долгом было воскресить в памяти его образ и сказать, как нам будет его недоставать на собраниях, которые начинаются сегодня.

Г. УЛЕНБЕК, С. ГАУДСМИТ, Г. ДИКЕ

ПАУЛЬ ЭРЕНФЕСТ

Неожиданное известие о смерти проф. Пауля Эренфеста из Лейденского университета было большим ударом и источником глубокой печали для его многочисленных друзей во всем мире. Сейчас, когда боль, подобно тяжелому камню, придавила наши сердца, трудно попытаться перечислить особенности его привлекательного характера и его большого ума. Может быть, это были его честность и его столь сильное и вместе с тем скромное желание помочь. Каждый мог рассчитывать на его поддержку; это особенно относится к его студентам, но не ограничивалось одними только физиками. Хорошо известны его активные и пассивные интересы к музыке, безграничное и восходившее к самому его детству восхищение Бахом.

В физике — науке, которая очаровала его уже в годы юности, его удивительно ясный ум давал ему возможность выявлять самые существенные стороны любой физической проблемы («der springende Punkt» или «Patentanspruch» [1], как он обычно говорил). В этом была его сила и это было основным источником вдохновения для его учеников и для всех тех, кому выпала привилегия общаться с ним.

[1] «Поворотный пункт» (буквально — точка, где начинается трещина) или «право на вопрос» (*нем.*).

Эта черта вместе с характеризовавшими его дружественностью и скромностью обеспечивала такой большой успех семинару в Лейдене, который стал местом собраний физиков всех стран. Поэтому же Эренфеста всегда приглашали на все важные физические конгрессы и съезды. Именно таким путем — даже в большей степени, чем благодаря своим собственным опубликованным статьям,— он мог оказывать существенное влияние на развитие современной теоретической физики.

Все, кто имел счастье работать с ним, всегда будут помнить его «сократические» дискуссии и то, сколь полезными они были для прояснения их собственных идей. Он не любил все ненужные наукообразности и неясности и всегда знал — с помощью своей терминологии и простых моделей,— как сделать проблему возможно более anschaulich [2]. Присущий ему интерес к вопросам преподавания определял особую для него привлекательность молодых людей, вступающих на путь науки. Он оказывал им поддержку и заражал своим исключительным энтузиазмом, который играл такую большую роль в их дальнейшем росте и развитии.

Пауль Эренфест родился в Вене в 1880 г. Там он стал одним из выдающихся учеников Людвига Больцмана. Он разъяснил ряд любопытных трудностей и парадоксов, которые все еще оставались в работе Больцмана, составлявшей труд его жизни,— в кинетической интерпретации второго закона термодинамики. В своей знаменитой статье, опубликованной в «Энциклопедии математических наук» (т. IV, 1911), Пауль и Татьяна Эренфесты окончательно продемонстрировали, что в работе Больцмана отсутствуют внутренние противоречия. Большой интерес к статистической теории привел его к активному участию в развитии квантовой теории. «Адиабатическая гипотеза» Эренфеста была существенным шагом вперед.

П. Эренфест работал в Геттингене и провел много времени в России. В 1912 г. он был приглашен покойным Г. А. Лоренцем в качестве его преемника по кафедре теоретической физики Лейденского университета. В 1924 и 1930 гг. он посещал Соединенные Штаты, читал лекции в Пазадене и вел теоретический семинар в Мичиганском университете.

[2] Наглядной (*нем.*),

Общие сдвиги — политические и экономические — послевоенной Европы и особенно недавняя трагическая судьба многих из дорогих его сердцу друзей в Германии глубоко его угнетали.

Смерть Эренфеста, оплакиваемого всеми, кто его знал,— непоправимая потеря для его учеников.

В. ПАУЛИ

ПАУЛЬ ЭРЕНФЕСТ

25 сентября с. г. при трагических обстоятельствах Пауль Эренфест привел в исполнение свое, ошеломившее его семью, его друзей и знакомых роковое решение сбросить с себя ставшее для него непомерно тяжелым бремя жизни. Но мы сохраним память об его роли в науке и об его облике свободной от тех ощущений неполноценности и тревоги, которые в последние годы все более и более омрачали его душу. Это облик человека, искрящегося одухотворенностью и остроумием, вступающего в дискуссию остро критически, но одновременно и с глубоким пониманием основ научного мышления, человека, умевшего направить внимание на какой-то существенный вопрос, который до этого оставался совсем незамеченным или же был затронут недостаточно.

Эренфест родился 18 января 1880 г. в Вене, где и учился в университете. Там от своего учителя Больцмана воспринял он тот решающий импульс, который навсегда сделал кинетическую теорию материи и статистическую механику излюбленным предметом его творчества. За дальнейшим развитием этой дисциплины, последовавшим под знаком возникновения квантовой теории, он всегда следил очень внимательно, и ему удалось в ее отдельных существенных разделах решающим образом способствовать этому развитию.

Широким кругам Эренфест стал известен сначала благодаря своей большой статье для энциклопедии «Основы статистического подхода к механике», которую он совместно с женой, Т. Эренфест-Афанасьевой, написал в России, где проработал в течение нескольких лет. В упомянутой энциклопедической статье, которая и по сей день представляет собой в высшей степени ценное справочное пособие, Эренфест не столько подчеркивал представление о статистической теории теплоты как о каком-то от всего оторванном цельном учении, сколько защищал от всяческих искажений взгляды Больцмана и доказывал их непротиворечивость и определенность, в особенности — его знаменитой H-теоремы о возрастании энтропии в статистическом смысле. При этом Эренфесту удалось во многом продвинуться вперед — даже по сравнению с превосходным прежним изложением H-теоремы, принадлежащим Г. А. Лоренцу; в особенности он подчеркнул необходимость различия между «тонкой» и «грубой» (т. е. распределенной по конечному числу ячеек) плотностью в фазовом пространстве, без которого невозможно строгое общее обоснование H-теоремы.

Именно это обстоятельство сыграло существенную роль в решении Г. А. Лоренца рекомендовать Эренфеста в качестве своего преемника в Лейдене (Голландия) И там Эренфест проработал с 1912 г. до конца жизни, развернув активную педагогическую деятельность, передавая многим молодым ученикам свое страстное увлечение физикой.

Когда благодаря основополагающим работам Планка, Эйнштейна, Дебая и др. в быстром темпе развилась квантовая теория, возникла определенная проблема, дальнейшая последовательная разработка которой привела Эренфеста к его наиболее выдающемуся открытию. Эта проблема в собственной его формулировке (как часто бывало, очень выразительной в смысле грубой наглядности и поучительности) звучит так: «Как смог закон смещения Вина, опирающийся на фундамент классической теории, остаться непоколебленным под натиском квантовой теории?» Для того чтобы иметь общую отправную позицию, пригодную как для классической, так и для квантовой теории, Эренфест вводит прежде всего понятие статистического априорного веса — величины, на которую следует умножать различные области фазового пространства при расчетах интегралов (или соответственно сумм) по состояниям, необходимых для построения термодинамических функций. В первоначально рассмотренном Планком на базе классической теории специальном случае гармонического осциллятора (который, как известно, при излучении черного тела приводит, если снова воспользоваться выражением Эренфеста, к «ультрафиолетовой катастрофе») все области фазового пространства, соответствующие данной общей энергии, имеют одинаковый вес, в то время как по квантовой теории в расчет следует принимать только те области, энергия которых имеет квантованное значение $E_n = nh\nu + E_0$ (где E_0 — нулевая энергия, а ν — частота осциллятора). Для этих областей вес уже считается одинаковым. Эренфест исследовал наиболее общую весовую функцию $g\,(E, \nu)$, которая согласовывалась с законом смещения Вина, и пришел к следующему результату:

$$g\,(E,\nu) = f\,(E/\nu),$$

т. е. к выводу о том, что весовая функция зависит от аргумента, являющегося частным от деления энергии осциллятора на его частоту. Для получения закона смещения Вина было вполне достаточно введенных Планком элементарных значений энергии, прямо пропорциональных частоте.

Каков был физический смысл этого результата? Ответ на это дали дальнейшие работы Эренфеста, в которых он обратил внимание на так называемые адиабатические процессы, характеризующиеся термодинамически и статистически тем, что к системе извне подводится только работа, а не тепло, а механически характеризующиеся требованием о том, чтобы система благодаря «бесконечно медленному» изменению внешних параметров все время оставалась в состоянии равновесия. Под «бесконечно медленным» понимается здесь такое относительное изменение значений параметров системы во времени, которое пренебрежимо мало по сравнению с порядком величин периодов, характеризующих движение системы (которая считается периодической или квазипериодической). А далее Эренфест показал, во-первых, что при таких адиабатических процессах статистическая весовая функция вообще должна оставаться инвариантной при условии, что статистически определенная энтропия в этом процессе не изменяет своей величины; последнее же требование вытекает из термодинамических соображений (*принцип адиабатической инвариантности априорных весов*). Во-вторых, он показал, исходя из прежних соображений Рэлея, что именно выражение E/ν будет оставаться инвариантным при адиабатических изменениях собственной частоты осциллятора или — если говорить о собственных колебаниях полости с излучением — при ее адиабатическом сжатии, когда этот процесс рассматривается на основе классической механики. Для любой, периодически изменяющейся механической системы величина E/ν должна быть заменена интегралом от удвоенной кинетической энергии, взятым по периоду системы T:

$$\int_0^T 2E_{\text{кин}} dt.$$

Это привело Эренфеста к установлению адиабатической гипотезы, согласно которой квантовые условия всегда должны быть такими, чтобы целочисленные кратные кванта действия соответствовали адиабатическим инвариантам классической механики

Об использовании адиабатической гипотезы в качестве эвристического вспомогательного способа для нахождения условий квантования в случае сложных систем и об особенной роли так называемых вырожденных систем, о том, как она отчетливо проявилась в появившихся вслед за построением Бором его модели атома, как в работах самого Бора, так и других, Эренфест написал на страницах настоящего журнала по случаю 10-летнего юбилея боровской модели атома (1923, № 11, стр. 543). Сегодня в связи с 20-летним юбилеем боровской модели атома мы можем добавить к этому, что адиабатическая гипотеза Эренфеста сохранила свое значение и в волновой механике. Только теперь ударение делается не на применимость классической механики к адиабатическим преобразованиям системы (так как уже при описании стационарных состояний системы даже в общем случае классическая механика оказалась недостаточной), а скорее на доказанное впервые в общем виде Борном волновомеханическое положение, согласно которому при адиабатическом преобразовании системы она при фиксированных значениях внешних параметров всегда остается в определенном стационарном возможном состоянии (в то время как при быстром неадиабатическом внешнем воздействии в общем случае переходы системы из одного состояния в другое происходят за счет так называемого встряхивающего действия — Schüttelwirkung).

Хотя создание адиабатической гипотезы является главным вкладом Эренфеста в квантовую статистику, здесь следует обсудить и другое его достижение в этой области, которое несмотря на то, что оно менее известно, является также чрезвычайно важным. Речь идет о написанной им совместно с В. Ткалом работе по теории химических констант [1]. Здесь критический взгляд Эренфеста был обращен на то,

[1] «Proc. Amst.», 1920, **23**, стр. 162; «Ann. d. Physik», 1921, **65**, стр. 602.

кажущееся тривиальным, обстоятельство, что энтропия двойного количества газа при неизменности его плотности и температуры получается в два раза большей по сравнению с одинарным количеством газа, в то время как по правилам классической статистики в случае расчета термодинамических функций применительно к идеальным газам результат должен быть иным. Только с помощью необоснованного и произвольного по понятиям того времени деления соответствующей вероятности на $N!$ (где N — число имеющихся молекул) можно было получить хорошее совпадение с упомянутым феноменологическим результатом. И Эренфест сумел правильно понять, что это «темное место» (dunkle Punkt) с делением термодинамической вероятности на $N!$ связано с невозможностью перевести обратимым способом некоторое количество газа в удвоенное и тем самым определить энтропию, а значит, здесь остается место для произвола в определении. Далее он показал, что теория равновесия при диссоциации газов может быть обоснована совершенно независимо от этого «темного места», если рассмотреть действительно возможные обратимые процессы диссоциации молекул, сводя все к фазовому пространству в соответствии с количеством фиксированных атомов (или атомных групп). При этом впервые было указано для определения величины химических констант на значение типа симметрии молекулы — количества тех перестановок одинаковых атомов в молекуле, которые могут быть получены жестким ее вращением.

Что касается прояснения упомянутого «темного места», то достигается оно лишь путем применения волновой механики к системе, состоящей из N одинаковых частиц (например, заключенных в полость молекул газа), и к их стационарным состояниям. Для заданной энергии отдельных частиц при отсутствии взаимодействия между ними в конфигурационном пространстве возможно существование $N!$ различных собственных функций системы. Но в природе оказывается возможной (если мы здесь для простоты будем пренебрегать незначительным усложнением, обусловленным наличием ядерного спина) только одна-единственная линейная комбинация этих собственных функций — либо симметричная, либо антисимметричная. Поэтому количество невырожденных состояний всего газа в $N!$ раз меньше, чем то, которое ожидалось первоначально, и «темное место» благодаря этому проясняется.

Исторически сложилось так, что постепенному развитию этого понимания Эренфест весьма существенно способствовал еще один раз. Прежде чем была создана волновая механика конфигурационного пространства, т. е. когда еще было невозможно говорить о стационарных состояниях всего газа, Эйнштейн, дополняя соображения Бозе об энтропии полости с излучением, рассматриваемым как газ, состоящим из световых квантов, предложил метод подсчета состояний одноатомного газа, который привел к новому методу расчета энтропии идеального газа и тем самым — к теории вырождения газа. Отсюда в дальнейшем выяснилось, что она идентична той теории, которая вытекает из предположения о том, что в природе могут существовать только состояния газа с симметричными собственными функциями для координат частиц. В первой работе Бозе и Эйнштейна авторы, однако, отнюдь не имели ясного представления о том, на чем могут базироваться их соображения, и именно Эренфест указал им на то, что в своих рассуждениях они в неявном виде отказались от общепринятого допущения о статистически независимом поведении атомов газа.

Изложенное выше следует рассматривать только как иллюстрацию характера деятельности и мышления П. Эренфеста. Невозможно в рамках одной статьи исчерпывающим образом рассказать о том электризующем влиянии, которое от него исходило. Здесь мы можем только вскользь упомянуть о его вкладе в теорию интерференционных явлений, возникающих при рассеянии рентгеновского излучения на многоатомных молекулах; в теорию осмотического давления; в теорию броуновского движения (упрекнув его при этом, возможно с достаточным правом, в чрезмерно большом пристрастии к маленьким парадоксам); об его известной волново-механической теореме о классическом движении центра волнового пакета, о стимулирующем влиянии на возникновение спинорного исчисления (с его математической стороны), наконец, об его вкладе в разъяснение физических основ специальной теории относительности на раннем этапе ее развития, особенно в связи с понятием «скорости сигнала», а также и о вступительной речи в Лейдене («К вопросу о кризисе гипотезы светового эфира»), в которой он пытался воздать должное противоречащей опыту и несостоятельной, но привлекательной по исходным предпосылкам теории своего рано умершего друга В. Ритца, известного открытием комбинационного принципа для спектров.

Эренфеста его размышления в те времена привели также к поднятому специальной теорией относительности (и не получившему ответа в электродинамике Максвелла — Лоренца) вопросу относительно «структуры» электрона, природы и величины его собственной энергии. (Он посвятил этому вопросу маленькую заметку, касающуюся вращательного момента, действующего на движущийся в электромагнитном поле эллипсоидальный электрон.) Этот вопрос, о котором с тех пор надолго забыли, сегодня вновь всплыл на поверхность и находится в центре внимания и обсуждения. И вот здесь я позволю себе закончить личным воспоминанием о критическом вмешательстве Эренфеста во время одной из дискуссий. Это произошло, когда Дирак только что опубликовал свою первую работу по теории излучения, в которой проквантовал электромагнитное поле. Эренфест сразу же обратил внимание всех на то, что эта теория натолкнется на затруднение, связанное с бесконечной собственной энергией электрона, так как она сама существенным образом использует значения потенциалов поля в месте нахождения электрона, и ее следует, по принципу соответствия, воспринимать как толкование классической теории точечного электрона.

Это та самая сложность, которая в процессе дальнейшего развития квантовой электродинамики в самом деле оказалась весьма неприятной и которую до сих пор не удалось устранить.

Если еще раз, оглянувшись, посмотреть на роль, сыгранную Эренфестом в науке, он предстанет перед нами живым свидетельством непреходящей истины, согласно которой научно-объективная критика во всей своей отточенности всегда действует стимулирующе и плодотворно, если она продумана последовательно и до конца.

Х. А. КРАМЕРС

ПРОФЕССОР П. ЭРЕНФЕСТ

Теоретическая физика потеряла одного из способнейших, полных энергии своих представителей: 25 сентября 1933 г. умер Пауль Эренфест, профессор теоретической физики Лейденского университета. Он родился в Вене и начал там учиться у Больцмана. Из Вены он направился в Геттинген, где познакомился со своей будущей женой, г-жой Т. Эренфест-Афанасьевой. В сотрудничестве с г-жой Эренфест он предпринял исчерпывающее критическое исследование принципов, лежащих в основе кинетической теории материи,— задача, которая привлекала его еще во время пребывания в Вене. Разъяснение определенных парадоксов, связанных с больцмановской H-теоремой (1907), и обширная статья о статистической механике в «Энциклопедии математических наук» (1912) свидетельствуют о плодотворности их совместной деятельности. Упомянутая работа была написана в России, где Эренфесты жили в течение нескольких лет.

В 1912 г. Эренфест был приглашен в Лейден, чтобы занять кафедру теоретической физики, освободившуюся с уходом в отставку Лоренца. За исключением непродолжительных отлучек (лекционные турне в США и России), он работал и преподавал в Лейдене вплоть до своей смерти. Из его научных работ этого периода мы можем отметить предсказание интерференционной картины, образуемой рентгеновскими лучами при прохождении через двухатомный газ (1915), его работу по адиабатическим инвариантам в квантовой теории (1916); можно порекомендовать его собственный, поистине восхитительный обзор этой проблемы, опубликованный в «Naturwissenchaften» [и его квантово-механическую теорему о движении волновых пакетов (1927)].

Интеллектуальный энтузиазм Эренфеста и его врожденное желание поделиться с другими (особенно с молодыми работниками) всем тем, что он понял, а в равной мере и всеми вопросами, на которые он считал необходимым найти ответ, были необычным явлением для флегматичных голландцев. В противоположность обычным принципам преподавания, он заражал студентов своим энтузиазмом, с которым обрушивался на аванпосты империи физики, где уже велась битва с двумя великими загадками — относительностью и квантовой теорией. В то же время он не забывал брать с собой учеников на свой «наблюдательный пункт», с которого он мог показать и объяснить им — с присущим ему мастерством — те области, которые были уже завоеваны. Наконец, он учил их важности внимательного отношения к деталям; своей любовью к деталям и упорством в доведении до конца малейших неясностей — до тех пор, пока каждая элементарная логическая нить не будет распутана,— всем этим он подавал нам пример величайшей научной ценности.

Успех Эренфеста как воспитателя физиков был неразрывно связан с его критической жилкой. Как может учитель разъяснить нечто, чего он сам полностью не понимает? В гармонии с собственными идеалами Эренфест всю свою жизнь настаивал на соблюдении очевидного правила изложения научной информации, заключающегося в том, что лектор или автор статьи должны понимать, что они говорят или пишут, и должны быть понятыми своей аудиторией. Читатели «Nature», которым не выпала привилегия встречаться с Эренфестом, могут считать подобный идеал донкихотским, но те, кто знал его, вспомнят, что наряду с его честностью и серьезностью он всегда был готов к шутке или мальчишескому смеху. Лекции, на которых слушателям нельзя было прервать изложение вопросом, были, как правило, ему ненавистны особенно в тех случаях, когда лектором был он сам. Тех, кто вступал с Эренфестом в личный контакт, поражало богатство его натуры: ему была дорога любая область истинной духовной культуры. Глубоко человечное и художественное чувство, которое всегда осеняло его мысли и поступки, делало его высоко ценимым другом для многих, и оно же привлекало к нему многочисленных преданных друзей, которые в последние годы жизни Эренфеста хотели бы видеть его счастливым гораздо более часто.

Х. А. КРАМЕРС

ФИЗИКИ КАК СТИЛИСТЫ

Уважаемые слушатели!

Вот уже 22 года прошло с тех пор, как мой предшественник Эренфест произнес в этом зале свою вступительную речь. Большинство из вас знали его при жизни, и, конечно, многие из присутствующих были в числе его слушателей. Я и сам еще только начинающим студентом был среди тех, кто слушал его с напряженным вниманием, стараясь запомнить все, о чем он говорил, и прежде всего то, ка́к он это говорил. И в самом деле, в нашей памяти от его вступительной речи осталась не только ясная картина определенных и фундаментальных понятий релятивистской теории, но и незабываемое ощущение того, что «здесь с нами говорил живой человек». Эта человеческая сторона его доклада, нечто индивидуальное и только ему одному свойственное и произвели на нас такое глубокое впечатление.

Как несколькими словами выразить первое впечатление, производимое личностью Эренфеста? В свое время сам я не мог подобрать для этого ничего лучшего, чем слова Шекспира: «Nature has from'd strange fellows in her time»*, причем для более подробной мотивировки и объяснения этой недостаточно точной характеристики я мог бы добавить словесные образы, которыми он пользовался в своем докладе для разъяснения проблемы распространения света в пустом пространстве, а также и воспроизвести те жесты, с помощью которых, как он полагал, эти образы воплощаются в живые картины — в буквальном смысле этих слов.

В студенческие годы, когда я начал непосредственно общаться с Эренфестом, я мог по праву называть его своим учителем. Позднее же я пользовался преимуществом теплой дружбы с ним. Мне все отчетливее раскрывались особенности его живого и сложного характера, его личности во всей ее возвышенности и со всем ее трагизмом. Никто в мире, по-видимому, не понимал этих особенностей, в такой степени, как он сам, и сознание этого безусловно не облегчало его жизни. Но оставим сегодня эту тему! Я хотел бы засвидетельствовать здесь, что близкое знакомство с Эренфестом всех, кто тесно общался с ним в качестве учеников или кол-

* «Родит природа странных людей». (*В. Шекспир.* Венецианский купец, акт 1, сц. 1; пер. Т. Н. Щепкиной-Куперник.)

лет, приносило превосходные плоды, если только эти люди в какой-то меньшей или большей степени обладали способностью без ущерба для себя воспринимать влияние совершенно своеобразной личности. И как часто мы думали о нем с любовью в течение этого первого года после его кончины, то укрепляя и облегчая воспоминаниями наши сердца, то снова чувствуя грусть.

Я намеренно говорил в первую очередь о его учениках и коллегах, так как нам лучше всего известно отношение Эренфеста, как человека, к предмету своих занятий. Это его отношение не носило чисто рассудочного характера, оно было намного глубже. Об Эренфесте с бо́льшим, чем об остальных исследователях, правом можно сказать, что все стороны его человеческого характера были тесно переплетены с его восприятием предмета его занятий, с его манерой работать.

Еще много лет назад, в студенческие годы, я спрашивал себя, не проявлялась ли в статьях Эренфеста эта тесная связь его человеческого облика с его специальностью. В то время Эренфест посвятил некоторые из своих лекций новейшим исследованиям в области квантовой теории. Тогда мы находились по существу у самой колыбели этой теории. В ней было так много противоречий, что каждый шаг вперед — в попытке продвинуться для лучшего ее понимания — делался словно по скользкому льду. Эренфест был одним из немногих, кто осмеливался на такие шаги и справлялся с этим, не падая. Существовала глубокая пропасть между новой методикой расчетов, введенной Планком и Эйнштейном, и основополагающими принципами классической физики. Не все замечали эту пропасть или, точнее говоря, не все физики соглашались с тем, что эта пропасть так глубока и опасна для классической физики. Тонкие мыслители, такие, как Лоренц, смогли отчетливо выявить угрожающий характер встречающихся здесь трудностей, а Эренфест поставил перед собой задачу очертить их контуры точным и критическим образом. И в какой убедительной манере сумел он показать нам в своих лекциях тот путь, который был им проложен, для того чтобы правильно поставить и четко и ясно сформулировать вопросы, на которые требовалось здесь дать ответ! Мы же, будучи свидетелями всего этого, понимали, каким образом приходит он к отчетливому ответу на тот или иной вопрос. А затем мы открывали некоторые собственные работы Эренфеста и читали их с тем же настроением, с каким мы слышали его суждения по этому поводу на лекциях. И далее возникал вопрос, о котором я сейчас и хочу сказать: в какой мере проявлялась индивидуальность Эренфеста в его опубликованных работах?

Суждения, размышления и заключения в этих работах изложены лаконичным научным стилем, в полном соответствии со стилем современной научной литературы. *Ныне* стиль этот таков, что собственный характер автора отступает на второй план; однако перестает ли он при этом нести печать его индивидуальности? Этот вопрос я ставил перед собой и позже, изучая статьи не только Эренфеста, но и других авторов.

В добрые старые времена, лет двести—триста тому назад, научный стиль по сравнению с нынешним был куда менее лаконичным. Скажем, Кеплер или Галилей разукрашивали свои творения вступлениями в духе Гомера, отточенными предложениями, в которых сравнивали свои взгляды со взглядами предшественников или противников; не испытывала недостатка в доводах ad hominem [1] система их доказательств.

Нечто очень похожее было и в приборах, которыми эти исследователи пользовались в своих работах. Вплоть до XIX столетия такие приборы были обычно снабжены всяческими украшениями и орнаментами, приятными для глаза. Резные или отлитые подставки линз и микроскопов, если ограничиться одним примером, зачастую были совершенными произведениями искусства. И считалось само собой разумеющимся, что физические приборы в той же мере, как ратуши и дворцы, должны быть сделаны не только целесообразно, но и красиво. Точно такие же принципы были и у авторов научных трудов.

О красоте формы чистой рациональности в те времена вряд ли имели представление.

При таком положении дел очень часто проявлялась индивидуальность авторов. Конечно, в не настолько сильной степени, чтобы эту индивидуальность можно было бы прочувствовать с достаточной полнотой. Только по личным письмам можно по-настоящему узнать самоотверженно преданного Кеплера и в такой же мере увидеть эгоцентричного

---

[1] Применительно к человеку (*лат.*) — доказательство, рассчитанное на чувства убеждаемого (*прим. ред.*).

Тихо. Но их научные труды все же несут на себе печать индивидуальности.

При чтении произведений старых исследователей, написанных ими в педагогических целях более популярно, читатель с особой силой испытывает своеобразное наслаждение, которое может доставить нам общение только с действительно великим человеком. «Discorsi» («Беседы») Галилея, пожалуй, являют собой прекраснейший образец этого стиля.

На протяжении XIX столетия все это становилось совершенно другим. Формировался такой стиль, который исключал любые человеческие чувства, не носившие чисто рациональный характер. Вы понимаете, что тем самым идеал научного стиля в том смысле, в каком он — в большей или меньшей степени подсознательно — представляется сегодня иным авторам, выявляется исключительно в негативном плане.

Было бы очень интересно выяснить при случае, что же действительно представляет собой этот идеал стиля, насколько расходятся взгляды по этому вопросу, сложились ли — и в какой мере — для него некие нормы. Ответ на вопрос, что́, собственно, имеют в виду, считая ту или иную статью хорошо или плохо написанной, не так уж и прост, как это может показаться на первый взгляд.

Такой человек, как Эренфест, специально обдумывал проблемы стиля. Это заключение следует не только из его высказываний, но, очевидно, и из того, что стиль или, точнее, построение его работ далеко не всегда было одинаковым. В своей серьезной статье, написанной в 1914 г. и касающейся адиабатической гипотезы в квантовой теории, он достиг, пожалуй, самой крайней противоположности изящному дивертисменту. Четкая наглядность, убедительное разделение различных аргументов, строгий порядок распределения материала по параграфам и подпараграфам позволяют считать эту статью идеально написанным по форме произведением. Но мне кажется, что то, что́, собственно, он хотел сказать и, конечно, даже сказал внимательному читателю, по своему существу все же выходит из этих жестких рамок.

Характер изложения в этой работе и ее содержание очень напоминают противоборство с неким невидимым врагом.

Полностью отвлекаясь, однако, от этого, возможно неправильного, утверждения, я все же хотел бы задать вопрос. В какой мере читатель такого рода статьи ощущает присутствие живой индивидуальности автора? Конечно, в очень незначительной степени. Признавая это, я далек от мысли сетовать по этому поводу или кого-либо упрекать. Подавляющее большинство совершенных работ, относящихся к специальной литературе, написано очень лаконично и в большей или меньшей степени безлико. И тем не менее странно наблюдать, как некоторые ученые для получения представления о незнакомом им авторе пытаются разглядеть за строчками научных статей его живое лицо и не могут отрешиться при этом от особенностей своего собственного характера. И как часто это приводит к тому, что они сильно ошибаются в своих оценках!

Нет, по научным публикациям многому в этом смысле не научишься. Хотя иногда здесь все же удается добиться кое-какого успеха. Мне кажется, что когда я читаю названия некоторых эренфестовских статей, сформулированные им в виде вопросов, я как бы слышу самого живого Эренфеста.

«Является ли угол аберрации мерой фазовой скорости в случае существования дисперсии эфира?» и «Какие черты гипотезы световых квантов играют существенную роль в теории теплового излучения?» — спрашивал он в «Annalen der Physik» в 1910 г. Мне кажется, я слышу голос Эренфеста, когда читаю, как в 1911 г. он говорил об увлекательной широкой области вопросов, связанных с «относительно жесткими телами»; особенно достойным внимания документом такого рода является его статья, написанная в 1932 г., «Некоторые неясные вопросы, относящиеся к квантовой механике», где он от собственного имени и от имени многих других выступает против определенной легковесности, бесспорно утвердившейся в современной литературе по атомной теории. Заключается эта легковесность в том, что многие, главным образом молодые, люди в упоении от потока новых открытий с большой сноровкой пекут утверждения и формулы, а некоторыми рассуждениями и результатами оперируют так, как будто в них все предельно ясно, хотя там нет ничего похожего на по-настоящему ясное и критическое толкование проблемы. В этой статье проявились некоторые, достойные восхищения черты характера Эренфеста — его честность и великолепный юмор.

Я мог бы без труда привести множество примеров, относящихся к научным статьям и книгам, в которых, по-моему, отчетливо чувствуется личное своеобразие их авторов.

В ходе рассуждений Эйнштейна, например, часто можно встретить неожиданный поворот мысли. Он напоминает такой впечатляющий прием, когда в произведении великого композитора неожиданно возникает новая тема. Такие скачки характерны для эйнштейновского гения. Некоторые считают, что это отличает литературный стиль трудов Эйнштейна. Может быть, однако, это и самообман. Но несомненно то, что многие другие особенности его натуры отражаются в стиле его чисто научных работ. Так, например, в статье, написанной, кажется, в 1914 г., где он «дополнение при корректуре» начинает словами: «Последующие размышления привели...», усматриваю черту его характера, которую, за неимением более подходящего слова, придется назвать наивностью.

При чтении отчета об удавшемся эксперименте, интересном своей новизной или сложностью, специалист в этой области всегда чувствует, что́ за экспериментатор стоит за этой работой. Существуют очень различные способы, которыми можно «хорошо» осуществлять эксперимент. Различие это, конечно, обусловлено духовными особенностями характера экспериментатора. Специалист чувствует их очень тонко. Они напоминают ему о том, что термин «искусство эксперимента» не так уж и плох. Здесь «искусства» значительно больше, чем это может в большинстве случаев показаться постороннему.

Все же в экспериментальных статьях главным образом выявляется определенный метод проведения работы и только очень редко — отдельная личность. Но бывает и по-другому. Ведь как часто по поводу какой-либо новой статьи Резерфорда можно услышать: «Вот это снова настоящий Резерфорд!»

Позвольте мне теперь перейти к одному физическому вопросу, связанному с обсуждаемой здесь темой. Суть его — проблема внешнего формирования физической теории. В качестве введения я хотел бы привести здесь одно небольшое рассуждение.

В такой области науки, какой является теоретическая физика, часто приходится сталкиваться с ситуациями, в которых предписывается различать «содержание» и «форму» результатов и методов, находящихся в распоряжении науки. Я не говорю об этом различии, понимаемом в философском смысле; скорее, здесь имеется в виду узкотехнический аспект. Вы знаете, что характер и способ изложения физической теории могут со временем существенно измениться — без того, чтобы изменилось или расширилось ее содержание.

Под формулировкой или формой теории я, например, подразумеваю тот способ, которым в монографиях или учебниках на каком-то этапе читателям давалось представление об определенной области знаний; как в них назывались встречающиеся там понятия и вообще какие понятия принимались там как уже известные. Но одновременно я имею в виду и стиль изложения, которым пользовались, картину явлений, которую представляли, применяя данную теорию. В первые годы или десятилетия после разработки новой теории могло случиться и так, что эта форма была еще совершенно неясной. Разные авторы рассматривали одинаковые вопросы весьма различающимися способами, различающимися в такой степени, что для самих авторов и их современников важнейшим и жгучим вопросом считался вопрос о том, какая форма является лучшей. Или же вопрос ставился еще более резко: какая формулировка правильна, а какая ошибочна. Отсутствие единства взглядов в этом смысле является бесспорным признаком существования нерешенных проблем, которые тесно связаны с разобранными ранее. После того как, быть может, лишь через несколько лет и эти проблемы в какой-то степени были разрешены, находится также и формулировка, удовлетворяющая всех. Тогда создается communis opinio[2], академическая точка зрения на соответствующую область.

В качестве примера к сказанному напомним, с каким трудом читается «Treatise» («Трактат») Максвелла, в котором он излагает основы своей теории.

Я вспоминаю, что Каммерлинг-Оннес рассказывал, какой головоломной работой было для него в молодости изучение Максвелла.

А сегодня? Благодаря работам многочисленных физиков в конце прошлого столетия электродинамика, освобожденная от всего побочного, предстает перед нами в ясном и простом изложении.

Можно было бы назвать несколько имен — Герца, Хевисайда, но, мне кажется, я имею право сказать, что больше всего мы обязаны здесь Лоренцу. Работы Лоренца по электронной теории исключительно ясно показывают нам, чтó у Максвелла существенно, а чтó — нет. И только некоторые термины, подобные, например, току смещения, напоминают

[2] Общее мнение (*лат.*).

об определенных фазах, которые проходила теория при Максвелле и Фарадее и которые сегодня, по-видимому, представляют только методический интерес. У Лоренца всегда точно известно, что́ он имеет в виду, хотя, естественно, и не все проблемы разрешены. При чтении его статьи для энциклопедии и его «Теории электронов» ваш ум ощущает успокоение и, несмотря на всю неопределенность, чувствует ровную уверенность, которая излучалась Лоренцем в равной мере и при непосредственном общении с ним.

Таким образом, мы снова вернулись к вопросу об индивидуальности физика. Общепризнанная форма классической электродинамики с ее точными определениями и ясными модельными представлениями дышит духом Лоренца. Но в то же время содержание ее «безлико». Расчетный аппарат, необходимый для вывода того или иного положения или проверки теории, никоим образом не связан с личными качествами какого-либо физика. В максвелловские времена он был таким же, как и сегодня.

В течение последних десяти лет физика занимается вопросом создания формальных своих основ, представляющим огромный интерес как для самой науки, так и для ее преподавания. Благодаря совместным усилиям группе физиков-теоретиков удалось удовлетворительным образом объяснить свойства атома. Мы можем утверждать, что нам известны те основные положения, с помощью которых объясняется наибольшая часть всех химических и физических явлений. Нельзя сказать, что такое объяснение удается дать во всех случаях. Только очень небольшое количество химических процессов можно по-настоящему количественно проверить или рассчитать заранее. Я думаю, что неспециалисту не будет интересно, если мы ему точно укажем, какие из результатов физических и химических измерений можно (или нельзя) рассчитать, опираясь на основные законы. Перед нами лежит еще необозримое поле деятельности. Но мы убеждены, что такие простые в своей сущности основы квантовой теории будут вполне достаточными для рассмотрения всех этих во́просов. Имеющиеся здесь трудности носят *только*, как это принято у нас говорить, математический характер. Эта ситуация аналогична задаче движения планет и лун в солнечной системе. Мы убеждены, что простые законы ньютоновской механики позволяют с большой точностью определить расчетным путем расположение этих небесных тел для какого-либо будущего момента времени. Трудности здесь чисто математической природы; с точки зрения физики здесь никаких неясностей нет.

Выше я говорил о том, что *большая часть* физических и химических процессов может быть объяснена на основе квантовой теории. Но есть некоторое количество явлений, пытаясь представить которые мы еще блуждаем в потемках. К их числу относятся главным образом такие, которые связаны со структурой атомных ядер.

По этой теме в последние годы благодаря различным принципиально новым гениальным экспериментам наука приобрела огромный фактический материал, относящийся к этой проблеме; теоретики с трудом могут в нем разобраться. И даже в той части квантовой теории, которая, грубо говоря, «сделана», все еще имеются своеобразные «белые пятна». Применению этой теории к обычным физическим и химическим процессам эти пробелы, к счастью, не мешают. Неопределенность, причиной которой они служат, количественно пренебрежимо мала.

Если же теперь задаться вопросом о форме, в которой должно быть представлено читателям и слушателям построение системы понятий и правил современной квантовой теории, то мы столкнемся с очень различающимися точками зрения. На лекции у профессора Новомыслящего (Neophilos) мы услышим, что для хорошего понимания современной теории не следует больше верить ни единому слову классической физики и что мы никогда не справимся с ее усвоением, пока не выбросим за борт все устаревшие догмы, такие, как причинность всего происходящего, строгая определенность явления и т. д. Затем он перейдет, возможно, к лекции по некоммутативной алгебре, т. е. разъяснит, что результат умножения может измениться, если поменять местами сомножители.

Обучаясь же у профессора Старомыслящего (Paleophilos), мы, может случиться, сначала основательно повторим классическую физику, и в первую очередь теорию колебаний. Затем нам покажут уравнения колебаний нового типа, которые по математической природе не очень отличаются от уже известных обычных, и немножко потренируют нас в методике их решения. А потом еще покажут, что характер наших уравнений полностью согласуется с классическим описанием строго закономерного временно́го хода, и наконец последует властный приказ, касающийся способа, которым решение этих уравнений можно увязать с результатом физических измерений. В этом приказе мы услышим слово «вероятность» и вспомним, что и в классической физике, а именно в статистической механике, результаты расчетов той или иной величины были связаны с вероятным ее значением, которое определялось физиком при измерении.

Хочу надеяться, что у находящихся среди вас непосвященных создалось впечатление, что оба преподавателя придерживаются разных взглядов и что их утверждения противоречивы. Во всяком случае, в мои намерения входило его создать. Но оба они излагали своеобразными способами одну и ту же теорию. Ученики обоих смогут, если только они обладают необходимой сноровкой, благополучно разобраться в вопросах атомной теории, и их предсказания относительно результатов экспериментов будут (если они правильно проведут расчет) совершенно точно совпадать между собой. Этому соответствует на самом деле тот факт, что форма квантовой теории сегодня еще не выкристаллизовалась, в то время как ее содержание уже определено.

Почему же так происходит? Повторяя сделанное выше замечание, я прежде всего хотел бы сказать, что такое положение дел указывает нам на то, что квантовая механика тесно связана с нерешенными проблемами физики. На них я тоже уже намекал, когда говорил о существовании некоторых пробелов, в большинстве приложений не приводящих к трудностям, но которые становятся отчетливо видными благодаря тому, что теория оказывается неприменимой для описания атомных ядер. В этой неприменимости проявляется загадка «существования» мельчайших известных нам материальных частичек — электронов, протонов, нейтронов и загадочность их свойств. И те, кто всерьез стремится к наилучшей формулировке квантовой теории, должны будут сразиться с загадкой этого сфинкса.

Положение, в котором они оказываются, не похоже на положение тех, кто в свое время способствовал формированию классической электродинамики. В некотором смысле оно даже очень странным образом от него отличается. В современной специальной литературе и современных учебниках значительно оживленнее, чем это имело место в течение уже многих последних лет, занимаются «философствованием». С подобной ситуацией можно было, пожалуй, встретиться только почти сто лет тому назад. То было время романтики. Тогда исследователи, прежде всего в германских странах, разбавляли свои специальные труды метофизическими рассуждениями. Эрстед, например, экспериментирует и тут же все растолковывает. Молодой Гельмгольц в своем труде о сохранении энергии бодро «гегельянствует». А в наши дни статьи буквально кишат рассуждениями о причинности, детерминизме, о противоречии субъективного и объективного и тому подобном.

Вам понятно, конечно, что при таком положении дел индивидуальность характера исследователя проявляется в литературе сильнее, чем это можно было ожидать при других условиях. Да, личность определенного ученого оказывается в состоянии даже наложить свой отпечаток на всю специальную литературу.

Самым убедительным примером этого рода, пожалуй, является влияние Нильса Бора. Мало кто в такой степени, как он, заботился о формулировке законов современной квантовой теории. Это связано с одной глубокой чертой его характера. Однажды сам он так сказал о себе: «Мой метод работы состоит в том, что я стремлюсь сказать то, что сам я, собственно, не могу еще сказать, так как этого не понимаю». Таким образом, его мыслительный аппарат оказывается ареной непрекращающейся борьбы за четкие формулировки. Для того чтобы привлечь сюда указанное выше различие между формой и содержанием теории, я хотел бы сказать еще следующее: достижение новых результатов, обогащение содержания науки является у Бора итогом его борьбы за форму. Способ его мышления постоянно представляет собой борьбу такого рода. Мы хотели этим сказать, что Бор все свои силы сосредоточил на проблеме созидания формы современной квантовой теории, что именно он так много потрудился над объединением всех великих открытий де Бройля, Гейзенберга, Шредингера и Дирака, а также и тех работ, которые явились венцом его собственных трудов 1913—1925 гг., что он стремился придать всей квантовой теории максимально гармоничное единство.

Борьба за форму продолжается, и я говорил уже, с чем это связано. В ней принимают участие многие физики, каждый в меру своих сил. Я, наверно, зашел бы далеко в сторону, если бы занялся подробным анализом того типично индивидуального, что имеется в воззрениях Бора, но все же коечто мне по этому поводу хочется сказать.

Есть такое фундаментальное положение: того, что не может быть сказано ясно и остается непонятным, лучше по этой причине и не говорить. На первый взгляд против этого трудно возражать. Это является правилом, которое, конечно, должно быть самим сердцем принято каждым автором научной работы. Но вот статьи Бора по основам квантовой теории постоянно это правило попирают; у читателя, знакомящегося впервые с его стилем, создается впечатление, что здесь нет ни определений, ни воззрений, ни выводов, которые были бы точными и четкими. Бор не находит возможности думать совершенно точно; язык, этот экипаж мышления, является у него экипажем без колес, его со всех сторон дергают, да к тому же и возница почти слеп. Но нет! У Бора он видит лучше, чем у многих других, стиль которых формально больше приближается к идеалу ясной точности. Наше мышление никогда не сможет проявиться с той остротой, к которой мы стремимся, а вот ход мыслей Бора по своей сути настолько остер, настолько критичен, насколько этого мы могли бы себе пожелать. Его экипаж может оставаться неуклюжим, но он не совершает никаких причудливых и опрометчивых движений. Он не скатится на скользкий лед приукрашивания проблем звучными метафизическими примерами, и когда нужно кое в чем предостеречь или что-то оговорить, то тут у Бора оказывается достаточно необходимых слов.

Только с большой неохотой отказываю я себе в удовольствии привести вам некоторые примеры. Это заняло бы много времени. Я ограничусь только указанием на один типичный пример — на речь Бора, прочитанную для неспециалистов и носящую название «Свет и жизнь» (1933). Внимательный читатель работ Бора не только поймет, насколько тщательно все было им продумано и какую борьбу пришлось ему выдержать с неизвестным, но и одновременно почувствует само существо его индивидуальности, которая наложила свой отпечаток на целый этап истории развития физики.

Г. Э. УЛЕНБЕК

ВОСПОМИНАНИЯ О ПРОФЕССОРЕ П. ЭРЕНФЕСТЕ

Мне оказана высокая честь присуждением медали Эрстеда за достижения в преподавании физики. Очень радостно — и это явилось для меня приятной неожиданностью — получить признание за свою повседневную работу. Это особенно приятно, когда занимаешься преподаванием, которое является достаточно «абстрактным» занятием, состоящим только в том, что вы что-то рассказываете, и при котором так редко доводится испытать чувство, что вам удалось сделать нечто существенное.

Естественно, что в подобных случаях награжденный старается разобраться в том, что́ именно ему удалось столь удачно сделать, особенно если он, как и большинство его товарищей — преподавателей физики, не учился ни в каком педагогическом заведении и даже не слушал лекций по педагогике, так что, во всяком случае официально, он не знает и, наверное, никогда не зна́л, как нужно учить. Я говорю именно «официально», потому что лично я отчетливо ощущаю то обстоятельство, что меня учили тому, как нужно преподавать, преимущественно примером, но вместе с тем и определенными указаниями. Человеком, который учил меня, был покойный Пауль Эренфест, профессор Лейденского университета в Голландии, который, по моему мнению, является действительно выдающимся педагогом. Поэтому мне представляется вполне уместным на этом заседании попытаться рассказать о некоторых его методах и об очень характерных приемах, которыми он пользовался, обучая студентов.

1. Позвольте мне начать с техники чтения лекций. Я как сейчас слышу восклицания Эренфеста, произносимые на типичном для него смешанном немецко-голландском языке и обращенные к студенту, выступающему перед аудиторией:

— Пожалуйста, начинайте писать в левом верхнем углу доски!

— Пожалуйста, не стирайте до тех пор, пока ваши слушатели не увидят написанное!

— Пожалуйста, не говорите, уткнувшись в доску! — и т. д.

Все это, быть может, довольно тривиальные вещи, но стоит немного походить на заседания Американского физического общества, чтобы убедиться в том, как часто грешат именно против этих простых правил. Но, разумеется, эти правила касаются лишь чисто внешней стороны лекционной техники. Что же касается способа изложения самого предмета лекций, то здесь мы учились главным образом на самих лекциях Эренфеста. Нелегко сразу сказать, что делало их столь великолепными. Отчасти, без сомнения, это была их ясность. Но это отнюдь не все. Лоренц, например, отличался также удивительной ясностью в своих лекциях, но его лекции были зачастую столь «гладкими», что было очень трудно уловить центр тяжести всей аргументации. Поэтому часто в конце лекции можно было потерять нить и забыть, для чего все это делается. Этого никогда не случалось на лекциях Эренфеста. Он всегда подчеркивал сам и требовал, чтобы подчеркивали другие решающий момент аргументации Он всегда спрашивал: «В чем здесь соль?» — или же говорил: «Почему вы упоминаете об этом здесь? Это вам кажется забавным или это действительно существенно?». В результате такого подхода я помню до сих пор первопричины многих затруднений, особенно в вопросах статистической механики, с которыми приходилось сталкиваться в те времена и с которыми нередко сталкиваются и в наши дни.

Знаменитую эренфестовскую ясность изложения не следует смешивать со строгостью. Действительно, он редко давал строгое формальное доказательство. Но он всегда умел дать всеобъемлющий обзор предмета изложения, ясно выделив завершенные вопросы и вопросы, остающиеся открытыми. Эренфест любил повторять: сначала разъяснить, а потом доказывать. И он всегда начинал с того, что набрасывал доказательство или делал какое-либо утверждение правдоподобным настолько, что слушатели могли осознать его «на пальцах». Он был всегда находчив и остроумен в изобретении простых моделей, которые помогали уяснению существенных черт аргументации. (Вспомните модель «дерево на ветру» для объяснения H-теоремы и модель для объяснения природы необратимых процессов).

Он любил говорить, что тот, кто может получить логическим путем из заданных предположений только необходимый результат, не понимает самого вывода. Потому что в этом случае «он может танцевать только на одной ноге». Следует всегда видеть все связи данной теоремы, так что последовательное овладение предметом весьма похоже на распутывание сети.

П. Эренфест и Э. Вирсма (слева), ок. 1933 г.

Он любил повторять, что все наиболее глубокие концепции оказывались неизбежно легковесными и что вся логическая последовательность ведет к дьяволу. Но, конечно, каждый должен пытаться выяснить положение вещей и должен задавать вопросы. Эренфест любил вопросы и часто заканчивал лекции или статьи серией вопросов. Многие из нас помнят одну из последних статей Эренфеста «Некоторые неясные вопросы, касающиеся квантовой механики» и в свое время немало извлекли из нее и из тех ответов, которые были в связи с ней даны Паули.

2. Во-вторых, разрешите мне несколько остановиться на том курсе обучения в Лейдене, каким он был в 20-х годах. К слушанию лекций Эренфеста приступили несколько месяцев спустя после первого кандидатского экзамена. В первый год Эренфест изгалал теорию Максвелла и всегда завершал ее электронной теорией и частью теории относительности. Второй год был посвящен статистической механике, которая оканчивалась изложением теории строения атома и квантовой теории. Лекции происходили по три или четыре часа в неделю, и между ними были большие перерывы. Таким образом, объем изложения был намного меньше того, что излагается в современных условиях. Эренфест никогда не давал и не придумывал задачи; он просто в них верил. Он считал, что имеют ценность лишь те задачи, которые естественно

возникают перед самим студентом. Все внимание было всегда сосредоточено на физических идеях и логической структуре теории. И я должен сказать, что, хотя, быть может, нас не учили тому, как надо считать, мы твердо знали, в чем состоят настоящие проблемы физики. Трудно рассказать, как это достигалось. Одна из причин несомненно состояла в отсутствии технических деталей. Тщательно рассматривались только основы, и их систематически вкладывали в головы студентов; в оставшееся время Эренфест делал удивительно краткий, так сказать с птичьего полета, обзор всех текущих новостей с наиболее характерными результатами и ссылками, умело пробуждая интерес студентов. На мой взгляд, это лучший метод преподавания предмета, значительно лучший, чем строгое, полное и систематическое изложение, принятое в настоящее время в наших университетах. Что касается меня лично, то, проводя даже самые элементарные курсы физики, я добивался наибольшего успеха, комбинируя тщательное изучение основ с беседами со студентами на темы, не являющиеся для них обязательными.

Второй причиной являлся семинар, который проводился в течение всего года, каждый вторник вечером. Он напоминал священнодействие. Студент, однажды допущенный на семинар, должен был посещать его обязательно. Эренфест даже проверял посещаемость. Этот семинар всегда был кульминационной точкой недели. При первом посещении казалось очень трудным разобраться в том, что происходит на семинаре, но очень быстро участник семинара постигал «жаргон» и, таким образом, получал возможность по крайней мере устного знакомства с новейшими исследованиями. Дискуссии всегда носили поощрительный характер и часто протекали весьма оживленно. Было всегда поучительно (хотя иногда и не совсем приятно, особенно если докладчиком были вы) услышать Эренфеста, подводящего итоги дискуссии, а часто и всего доклада, так что каждый, в том числе и докладчик, в конце концов понимал, зачем это все нужно.

3. В заключение я хотел бы сказать несколько слов о том, что сделано Эренфестом, вероятно, для самой главной проблемы образования — именно для проблемы подготовки студента к самостоятельным исследованиям. Он работал обычно только с одним студентом и практически ежедневно, во второй половине дня. Он обсуждал с этим студентом либо проблему, над которой он в данное время работал, либо свежую статью в периодике, которую ему хотелось детально разоб-

рать. Работа продвигалась быстро, причем использовалась доска. Когда на доске уже не оставалось места, основные пункты заносились в блокноты. Я лично убедился в том, что если в начале таких занятий все усваивалось, если можно так выразиться, кончиками пальцев, то к концу занятия вы были уже смертельно измучены. Особенно это происходило потому, что необходимо было следить за всеми подробностями; величайшим грехом считалось сказать, что вы поняли некоторый пункт, в то время когда на самом деле этого не было. Это обстоятельство всегда в конце концов обнаруживалось! Удивительно было то, что спустя некоторое время усталость исчезала, а год спустя вы уже работали на равных правах. И постепенно к студенту начинало закрадываться подозрение, что он знает предмет даже лучше Эренфеста. Этот момент и означал, что студент встал на свои собственные ноги и стал физиком. Я пробовал применить этот метод, в той степени, в какой я мог его применять при работе со своими студентами, и я могу признаться, что я больше всего был удовлетворен, когда некоторые из них мне говорили о том, что они испытывали сходные ощущения при работе со мной, особенно чувство крайнего утомления в начале обучения.

Я думаю, что метод Эренфеста исходил из того, что одним из основных требований к исследованию является вера в себя или, если хотите, мужество[1]. И метод Эренфеста, единственный из всех мне известных, позволяет студенту приобрести это качество. Весьма показательно, что в некоторый момент обучающийся чувствует себя по крайней мере равным своему учителю! Эренфест недаром говорил: «Почему у меня такие хорошие студенты? Да потому, что я сам не очень умный».

Чтобы точно следовать его правилам, нужно не только обладать его дидактическими способностями, но также выдерживать практиковавшееся им соотношение: студент — преподаватель, равное единице,— правило, от которого мы все больше и больше отклоняемся в настоящее время. Я не берусь сказать, что посоветовал бы Эренфест перед лицом сегодняшнего кризиса в обучении. Я хотел бы иметь воз-

[1] Это относится даже к таким выдающимся ученым, как Э. Ферми. В статье, посвященной памяти Ферми, Б. Понтекорво рассказывает о том, что Ферми обрел уверенность в себе именно в период пребывания в Лейдене, благодаря общению с Эренфестом. Ферми считал, что это было самое ценное приобретение для него во время обучения за границей.

можность спросить его об этом. Но несомненно, что его совет не был бы отказом или даже ослаблением персональных отношений студента со своим учителем. В его время не существовало задачи массового научного образования или по крайней мере она имела второстепенное значение. Если вдруг у него оказывалось значительное количество студентов, он пытался, и обычно ему это удавалось, возложить на каждого из них ответственность за обучение тех, кто был менее подготовлен. Он организовал, например, физический клуб, который носил отнюдь не случайное название «Лейденская банка», где наиболее подготовленные студенты вели семинары по возможности в том же стиле, в каком он сам проводил семинары для них. Руководители таких семинаров должны были сообщать ему о появлении способных студентов.

Возможно, надежда на то, что нечто подобное может быть осуществлено в наших колледжах, является чистой утопией. Однако я думаю, что все это вполне заслуживало упоминания, поскольку, как я уже отмечал, индивидуальный метод Эренфеста является в своем роде единственным.

А. Ф. ИОФФЕ

ДОПОЛНЕНИЕ К «ВОСПОМИНАНИЯМ О ПРОФЕССОРЕ П. ЭРЕНФЕСТЕ» Г. Э. УЛЕНБЕКА

Павел Сигизмундович Эренфест оказал большое влияние не только на физиков Голландии, где он после Лоренца занимал кафедру теоретической физики, но и на развитие советской физики. То обстоятельство, что он занял по настоянию самого Лоренца его кафедру, составило впоследствии трагедию его жизни. Он считал себя недостойным такого высокого положения и думал, что узурпировал место более достойного, всякий раз, когда выдвигался один из его учеников. Настойчиво он искал выхода, пытался, например, получить кафедру в Сибири или на Урале. Для Ленинграда, Москвы и Киева он видел физиков, которых считал много выше себя, в частности Л. Д. Ландау. Эренфест погиб в год захвата власти в Германии Гитлером.

А между тем именно во времена Эренфеста Лейден сделался мировым центром теоретической физики, куда приезжали поучиться или побеседовать с Эренфестом все лучшие физики. Во втором этаже его дома была комната, на белой стене которой оставляли свои подписи те, кто в ней жил. Здесь были и Эйнштейн, и Бор, и немцы, и американцы, и англичане, и, конечно, русские, которые особенно были близки сердцу Павла Сигизмундовича.

Несколько лет Павел Сигизмундович жил в Петербурге, сдал одним из первых после 25-летнего перерыва магистерский экзамен, но к чтению лекций в университете не был допущен. Только Политехнический институт — тогда самый передовой — решился предоставить ему необязательный курс дифференциальных уравнений математической физики. И что это был за курс! Ни в одном изложении этого классического предмета не сочетались физика с математикой в такое гармоническое целое.

Помню, когда во время своих магистерских экзаменов я высказал академику Стеклову некоторые из обобщений Эренфеста (сославшись на него), это произвело сильное впечатление и, думаю, надолго определило мнение Стеклова о моей математической эрудиции.

Еще больше давали семинары, происходившие под руководством или даже только при участии Эренфеста, или беседы с ним. Уленбек это убедительно показал.

Я помню семинар в Лейдене, где тот же Уленбек, тогда еще начинающий физик, изложил гипотезу о вращающемся электроне и о «спине» как четвертой координате в схеме Паули. Можно с уверенностью сказать, что для самих докладчиков (Гаудсмита и Уленбека) физический смысл их гипотезы полностью выяснился лишь в ходе дискуссии, в результате вопросов и ответов Эренфеста.

Лично для меня общение с Эренфестом имело громадное значение. За все годы пребывания в С.-Петербурге он ежедневно в письмах излагал свои мысли, а дважды в неделю мы обсуждали их вместе с другими физическими вопросами у него на квартире. Эти письма и сейчас хранятся у меня.

Эренфест жил интересами русской науки, любил ее и уважал, что он доказал позже, став после революции и блокады связующим звеном молодой советской физики с Западом.

С благодарностью вспоминаю, сколько энергии вложил Эренфест для обеспечения научных командировок нынешних академиков В. А. Фока и Д. В. Скобельцына.

В краткой заметке трудно рассказать о значении и своеобразии вклада Эренфеста в развитие физики.

Мы обязаны ему физическим пониманием H-теоремы Больцмана (учителя Эренфеста), квантовой гипотезы Планка, закона смещения Вина и его обобщения в адибатических инвариантах, механизма термоэлектродвижущихся сил и многих других принципиальных основ современной физики. До сих пор лучшим изложением статистической физики является статья в «Энциклопедии математических наук», написанная П. С. Эренфестом вместе с его женой Татьяной Алексеевной Афанасьевой-Эренфест.

В лице Павла Сигизмундовича физика потеряла один из самых светлых умов; он умел в каждом физическом вопросе показать его суть, умел видеть в физике не разрозненные факты, а цельную взаимосвязанную картину захватывающей красоты и стройности. Для нас это был верный друг советской науки, друг и учитель многих советских физиков.

По всему миру рассеяны ученые, обязанные Эренфесту своим интересом к проблемам физики. Закончу с чего начал: деятельность Эренфеста наложила свою печать на развитие физики не только печатными его трудами, но и личным влиянием.

А. Ф. ИОФФЕ

ПАВЕЛ СИГИЗМУНДОВИЧ ЭРЕНФЕСТ

Еще в мюнхенском кафе я встретился с Эренфестом, представителем Геттингенской школы. Мы подружились в Петербурге, куда он вскоре переехал вместе с женой, русским математиком Татьяной Алексеевной Афанасьевой, и дочерью Таней, «Таней-штрих», как он ее называл. Павел Сигизмундович Эренфест был исключительной личностью. Небольшого роста, с коротко стриженными волосами, короткой черной бородкой и яркими глазами, подвижный и веселый, он легко сходился с людьми. Тонкий музыкант, он умел вскрывать в музыке Баха веселые танцевальные мотивы и придавать ей неожиданное звучание. В этом отношении он был похож на Эйнштейна. Страстный и увлекающийся по природе, он стремился управлять собой, не допуская к себе ни малейшего снисхождения. Он не мог относиться равнодушно ни к чему, с чем сталкивался в жизни. С болезненной чувствительностью он реагировал на любые ошибки или беспринципные поступки. Эренфест отличался исключительным остроумием, которым он пересыпал свои доклады и лекции, и как тогда оживали и становились наглядными самые запутанные вопросы! Многие его остроты и до сих пор сохранились, а некоторые настолько удачны, что хочется их напомнить.

С Паули часто случались какие-либо несчастья, и ему нередко говорили: от вас лучше подальше, как бы не попасть в беду. А Эренфест предложил рассматривать это явление как частный случай общего положения «несчастье никогда не приходит в одиночку».

Однажды Эренфест, Бор и Паули вели длинный разговор. Нильс Бор с Эренфестом сидели на диване, а Паули все ходил взад и вперед по комнате, что раздражало Бора. Тогда Эренфест спросил Бора: «Отдаешь ли ты себе отчет, что́ тебя раздражает— это разочарования в моменты его поворотов?»

На всех языках, кроме, пожалуй, немецкого, Эренфест говорил с ошибками и с акцентом; но незнакомые слова он заменял такими удачными, простыми и привычными, что они становились яснее правильных и надолго запоминались.

Мы оба жили в Петербурге, но далеко друг от друга: я в Лесном, а он на Аптекарском острове. Два раза в неделю мы обсуждали интересовавшие нас вопросы физики, обычно у него на квартире, иногда при участии других физиков. А в промежутке между встречами он ежедневно посылал мне письма в 6—12 страниц с изложением своих мыслей и вычислений. Эти письма сохранились у меня и сейчас.

Способность Павла Сигизмундовича к критическому анализу и строгой, физически ясной формулировке оказала большое влияние на мое научное развитие. Ему же было обязано зарождение в Петербурге современной теоретической физики. Со всей решительностью он выступал против формализма университетской физики, против ее вождей. За то он и не смог добиться права преподавать в университете, хотя даже сдал там магистерские экзамены. Только Политехнический институт избрал его доцентом и разрешил читать курс дифференциальных уравнений математической физики. И что это был за курс! Математика неотделимая от физики, математика как метод проникновения в механизм явлений, как средство обобщения аналогичных процессов. Казалось, вся физика становится прозрачной в свете новых, «эренфестовых» лучей.

Но эти лекции не нашли продолжения. Обиженное университетское начальство так и не допустило его к преподаванию. А нравы в Петербургском университете в то время были особые. За 25 лет ни один физик не мог сдать магистерских экзаменов. Тот, кто пытался преодолеть их, погибал, подавленный горами математических книг и все новыми требованиями. В течение многих лет на кафедрах Петербургского университета работали физики, не выдвинувшие ни одной новой проблемы, не подготовившие в университете ни одного магистра физики, не говоря уже о докторах. Самостоятельной научной работы по существу не велось. Наивысшим достижением считалось повторение эксперимента, описанного в «Philosophical Magazin». И это в то время, когда рядом с университетом в Петербурге работали Попов, Крылов, Голицын, Гершун, Миткевич и другие!

Эту «стену» пробила по взаимному согласию группа молодежи: Рожанский, Рождественский и я; в нашу группу включился и Эренфест. Мы потребовали от факультета и добились того, что требования по математике утверждались факультетом, тогда как раньше от физиков каждый из математиков мог потребовать все, что ему было угодно. По существу для сдачи магистерских экзаменов вместо знаний требовалось изучение серий книг.

В Москве в 1909 г. шел съезд русских естествоиспытателей и врачей, на котором П. Н. Лебедев докладывал о световом давлении на газы и о других своих работах. Для узкого круга он прочел с присущим ему артистическим талантом юмористический научный доклад в стиле петербургского физика И. И. Боргмана. На одном из заседаний съезда обсуждались вопросы оптики, а лучший ее представитель — Дмитрий Сергеевич Рождественский в это время в Петербурге готовился к магистерским экзаменам. Павел Сигизмундович в ярких красках описал порядки, принятые на экзаменах, и вред, который они приносят русской науке. Потрясенный нелепостью создавшегося положения, он расплакался, вызвав сочувствие большинства аудитории.

В годы пребывания Эренфеста в Петербурге вокруг него группировалась вся талантливая молодежь. Именно это и сыграло главную роль в развитии современной теоретической физики в Петербурге.

Но в России, которую он любил, среди русских физиков, с которыми он подружился, Павлу Сигизмундовичу не нашлось места. Его пригласили профессором в Голландию, в Лейденский университет. Но он навсегда остался нашим верным другом, другом советской физики, с которой не порывал ни на один день и которой помогал всеми доступными ему средствами. Когда в начале 1921 г. мы с Д. С. Рождественским и А. Н. Крыловым приехали за границу, выполняя поручение В. И. Ленина о восстанавлении научных связей, решающую помощь нам оказал Эренфест, имевший широкие связи среди заграничных ученых. Он даже мобилизовал их на сбор для советских физиков библиотеки вышедших во время блокады физических книг и журналов. Благодаря ему многие советские физики получили возможность вести научные работы в Лейдене — у него, у Каммерлинг-Оннеса и де Хааса в единственной в те годы криогенной лаборатории. В Лейдене работали Обреимов, Шубников, Архангельский, Чулановский, Крутков, Арсеньева и др.

Эренфест высоко ценил и постоянно пропагандировал работы советских ученых и всемерно помогал им до самой своей смерти в 1933 г. Он также пытался использовать свои личные связи с нацистским физиком Штарком и другими влиятельными германскими физиками и математиками, чтобы облегчить положение ученых с антифашистским прошлым или с «недостаточно арийской» биографией. Он же всячески старался помочь их устройству за пределами Германии.

Из наших бесчисленных научных дискуссий особенно вспоминаются геометрический анализ частной теории относительности в форме, приданной ей Минковским, совместная статья о чем так и не была направлена в печать, и обсуждение теории лучистой энергии. Последнее имело два последствия: Эренфест пришел к знаменитой теории адиабатических инвариантов, а я — к статистической теории фотонов и к выводу о неизбежности для излучения другой статистики, совпадающей, как оказалось, с положениями статистики Бозе — Эйнштейна. Этот вывод был позже обоснован Ю. А. Крутковым во время его пребывания у Эренфеста в Лейдене.

Такой выдающийся физик, как Лоренц, высоко ценил П. С. Эренфеста. В опубликованной Эренфестом вместе с Татьяной Алексеевной в «Математической энциклопедии» статье об основах статистической термодинамики наглядно проявилась необычайная глубина и ясность их мысли. Когда Лоренц по возрасту вышел в отставку, он предложил Эренфесту занять его место в Лейденском университете. Павел Сигизмундович считал себя недостойным такого высокого положения. Лоренц был общепризнанным главой теоретической физики всего мира, а кафедра физики в Лейдене была центром научной мысли. Но, обещав свою повседневную помощь, Лоренц все же убедил Павла Сигизмундовича согласиться. Эренфест был избран и высоко поднял значение Лейденской школы, из которой вышли многие голландские ученые и откуда большое число физиков всех стран вынесло новые идеи, новые методы исследования.

Семинар Эренфеста привлекал ученых отовсюду. Сделать доклад и выдержать дискуссию у Эренфеста было большой честью, а содержание доклада при этом обогащалось десятками непредвиденных возможностей. Я помню, например, доклад Гаудсмита и Уленбека о вращающемся электроне. Только после обсуждения у Эренфеста выяснилась связь их работы с принципом Паули и создалась почва для дальнейшего развития атомных спектров. Уленбек навсегда сохранил самую теплую память о своем учителе.

Не только семинар, но и сам Эренфест стал «притягательным центром» для крупнейших физиков мира. Они приезжали в комнатку в верхнем этаже дома Эренфеста и жили в ней, а потом расписывались на белой стене. Здесь можно было увидеть имена физиков, начиная от Бора и Эйнштейна; здесь были представители всех стран, от Советского Союза до США. Немало возникших здесь идей получило потом развитие и оставило свой след в истории физики. Везде можно проследить участие Эренфеста: в углублении проблемы, в более четкой ее постановке и т. д.; и это хорошо понимали все его знаменитые собеседники. Но самого Эренфеста с самого переезда в Лейден не покидало ощущение своей неполноценности, мысль, что кафедру Лоренца должен был бы занять более крупный ученый.

Еще незадолго до смерти в 1933 г. он приезжал ко мне в Ленинград и обсуждал возможность переезда в СССР. Но он категорически отклонял вопрос о Ленинграде и Москве, о Киеве и Харькове, где он видел физиков-теоретиков, которых считал выше себя. В особенности Л. Д. Ландау и И. Е. Тамма в Москве, Е. М. Лифшица в Харькове и В. А. Фока в Ленинграде он считал несравнимыми с собой. Он ставил вопрос о Свердловске, о Томске или Саратове, где он надеялся быть полезным. Переубедить его мне не удалось. Я надеялся добиться этого через несколько месяцев, когда собирался приехать в Лейден, с помощью его коллег и физиков Европы, знавших его роль в развитии физики. Но я опоздал: за месяц до моего приезда Эренфест покончил с собой.

ПРИЛОЖЕНИЯ

У. И. ФРАНКФУРТ, А. М. ФРЕНК

НАУЧНОЕ ТВОРЧЕСТВО ЭРЕНФЕСТА

ОБЩИЙ ОБЗОР НАУЧНОГО НАСЛЕДИЯ ЭРЕНФЕСТА

Первая из опубликованных работ Эренфеста «О вычислении поправок на объем в уравнении Ван-дер-Ваальса» [42] [1] относится к 1903 г. Проблема, поставленная Эренфестом, тесно связана с работами Максвелла, Ван-дер-Ваальса, Л. Больцмана и Г. А. Лоренца.

В 1866 г. Максвелл применил новый метод при изучении кинетических явлений в газах. Он рассматривал молекулы газа как группы тел, отталкивающихся друг от друга силой, направление которой проходит близко от центра тяжести молекул и величину которой можно представить функцией расстояния между центрами тяжести. Максвелл пришел к выводу, что отталкивающая сила должна быть обратно пропорциональна пятой степени этого расстояния. В 1873 г. Ван-дер-Ваальс предложил уравнение состояния, учитывая как конечность объема молекул, так и наличие сил сцепления между ними. Найденное уравнение точно описывало поведение реального газа лишь при высоких температурах и малых давлениях. Лоренц учел наличие и отталкивательных сил между молекулами. Поиски уравнения состояния, наиболее близкого к экспериментальным результатам, усилились. Одновременно рос и интерес к теоретическим обоснованиям существующих уравнений. В «Лекциях по теории газов» Больцман уделил специальную главу выводу уравнения состояния для реальных газов с помощью теоремы вириала. Он анализировал понятие вириала, вычислил вириал действующего на газ внешнего давления, определил вероятности присутствия пар молекул с заданными расстояниями между центрами. Вычислив затем вириал, связанный с конечной протяженностью молекул, и вириал ваальсовских сил сцепления, Больцман нашел модифицированное уравнение Ван-дер-Ваальса. Больцман привел и метод Лоренца, подвергнув его анализу.

В своей первой работе Эренфест проявил творческий интерес к исследованиям Больцмана и Лоренца. Он указывает, что их методы вывода уравнений состояния приводят к одинаковому результату. Корни же этого соответствия он усматривает в том, что Лоренц исходит из распределения скоростей Максвелла, а Больцман — из установленного им закона вероятности определенной конфигурации. Больцман нашел для произвольно выбранного момента времени число пар молекул газа, у которых расстояние между центрами молекул лежит между σ и $\sigma + d\sigma$. Эренфест доказал, каким путем можно получить те же результаты, исходя из максвелловского метода

[1] В квадратных скобках даны ссылки на список работ Эренфеста (см. стр. 344).

В 1904 г. Эренфест подготовил диссертацию [43] «О движении твердых тел в жидкости и механика Герца». Диссертация не была опубликована. В работе 1905 г., посвященной планковской теории необратимых процессов излучения, Эренфест вновь обращается к методам и идеям Г. А. Лоренца. В 1906 г. П. и Т. Эренфесты опубликовали статью, посвященную анализу и критике теории возрастания энтропии, развитой Дж. Гиббсом в его «Статистической механике». Эренфест уже в то время обращался к исследованию наиболее трудных и важных проблем статистической физики и теории излучения. С 1906 г. его интересы обращены к актуальной в то время проблеме изменчивости массы электрона [48]. В 1901 г. Кауфман для измерения отношения e/m использовал β-лучи, в которых заряженные частицы обладали большими скоростями. Из его опытов вытекало, что β-лучи разных скоростей обладают различными значениями отношения заряда к массе. Считая одинаковым заряд всех частиц, Кауфман получил, что масса β-частицы изменяется с изменением ее скорости. В 1902 г. Абрагам рассматривал электрон как твердый шарик, весь заряд которого равномерно распределен либо по поверхности, либо по объему. Согласно этой модели, он получил определенные формулы для продольной и поперечной массы. В 1904 г. Бухерер выдвинул гипотезу, что в покое заряд имеет вид сферы, но при движении деформируется в направлении движения. Заряд, изменяя свои поперечные размеры, превращается в эллипсоид вращения. Ланжевен разработал свой вариант деформируемого электрона. В 1904 г. Лоренц предположил, что при изменении формы электрона поперечные размеры не изменяются, но меняется объем. Кауфман в 1906 г. вновь провел серию опытов по определению e/m для β-лучей. Его измерения подтверждали теорию Абрагама и противоречили теориям Бухерера, Ланжевена, Лоренца и Эйнштейна. Анализируя эти работы, Эренфест указал на необходимость выяснить вопрос о стабильности той или иной модели электрона. Условие стабильности выполнимо для модели Абрагама. В дальнейшем более тщательно проведенные опыты подтвердили правильность эйнштейновских представлений и оказались несовместными с теорией Абрагама, но работа молодого Эренфеста не лишилась своего значения при методическом анализе вопроса.

Осенью 1906 г. Эренфест публикует статью, посвященную памяти Л. Больцмана, скончавшегося 6 сентября того же года. Давая глубокий анализ творчества замечательного физика, Эренфест прежде всего отмечает, что в работе Больцмана «Механический смысл второго закона термодинамики» разработан оригинальный вариационный принцип для весьма общих механических систем, который приводит к поразительной аналогии между механическими и термодинамическими системами. Отмечая наиболее существенное в творчестве Больцмана, Эренфест пишет далее, что «публикации последующих пяти лет были посвящены проблеме, носящей вспомогательный характер: каким образом в случае нагретого тела, находящегося в состоянии теплового равновесия, распределяется энергия между различными молекулами (и атомами в молекулах)— в виде ли кинетической энергии трансляционного, вращательного и внутреннего движения молекул или в виде потенциальной энергии молекул и атомов в них?» [2] Эренфест показывает, как с помощью этих результатов был заложен фундамент для решения основной задачи термодинамики. Особо он отмечает работы 1871, 1872 и 1877 гг. Боль-

[2] См. наст. сб., стр. 183.

шой проблемой, связанной с именем Больцмана, Эренфест считает проблему механических аналогий и моделей электромагнитного поля.

Наметив основные направления в творчестве Больцмана, Эренфест писал: «Мы не можем останавливаться на многочисленных, более обособленных работах Больцмана, хотя и среди них имеются такие основополагающие, как вывод закона излучения, получившего название закона Стефана — Больцмана»[3].

В работе П. и Т. Эренфестов «О двух известных возражениях против H-теоремы Больцмана», опубликованной в 1907 г. [56], дана обычная формулировка H-теоремы, рассмотрено возражение Лошмидта об обратимости и возражение Цермело о повторяемости. Тут же изложен ответ Больцмана на оба возражения. Утверждения теории вероятности, лежащие в основе H-теоремы, не противоречат квазипериодичности рассматриваемой модели газа. Предполагается, что в течение достаточно большого промежутка времени величина H многократно возвращается и к таким значениям, которые больше исходного. Интересно привести, в несколько модифицированной форме, схему с шарами, предложенную авторами.

Пусть имеются две урны — белая и черная. В урнах находится четное число n пронумерованных шаров. В черной — x шаров, а в белой — $n - x$. В третьей урне находится n шаров, пронумерованных от 1 до n. Через равные промежутки времени из третьей урны вынимается и снова кладется назад один из шаров. Одновременно из одной урны в другую перекладывается шар с тем же номером. Вероятность вынуть из третьей урны шар с номером, соответствующим номеру шара, лежащего в черной урне («черный» шар), равна $\frac{x}{n}$. Вероятность «белого» шара равна $\frac{n-x}{n}$. Если $x > n - x$, то относительная вероятность появления «черного» шара $\frac{x}{n-x} > 1$. По мере уравнивания числа шаров в обеих урнах вероятности появления «черного» и «белого» уравниваются. «Если начертить кривую, нанося абсолютную величину разности $|x - (n - x)| = |\Delta|$ на оси ординат, а число выниманий шара из третьей урны (пропорциональное времени) — по оси абсцисс, то оказывается, что при весьма маловероятном начальном распределении, указанном выше, кривая идет вниз почти без колебаний; они появляются вблизи $|\Delta| = 0$. Первая часть процесса кажется «макронаблюдателям» (каковыми мы все являемся в отношении природы) необратимой; только вблизи положения равновесия колебания укажут на то, что в действительности мы имеем дело с обратимым процессом»[4].

В работе 1909 г. «Принцип Ле Шателье — Брауна и термодинамические законы взаимности» [63] Эренфест стремится найти критерий применения принципа таким образом, чтобы получать правильные знаки для ожидаемых эффектов. Ле Шателье в работе 1884 г. и Ф. Браун в работе 1887 г. индуктивно сформулировали принцип, плодотворно использовали его в своих экспериментах. В 1888 г. Браун пытался доказать его. Вопрос о знаке процесса не был ими выяснен. Эренфест общей формулировке принципа предпосылает пример: идеальный газ подвергают сжатию; при изотермическом сжатии получают изменение

[3] Там же, стр. 194.
[4] *К. Шефер*. Теория теплоты, ч. 2. М., ГТТИ, 1933, стр. 117.

объема $\delta_I V$. При адиабатическом сжатии на ту же величину δp — изменение объема $\delta_{II} V$:

$$|\delta_{II} V| < |\delta_I V|.$$

Во втором случае параметр T, определяющий состояние, как бы способствует объему усилить свое сопротивление давлению. На ряде конкретных примеров Ле Шателье и Браун высказали свой принцип. «Пусть устойчивое равновесие термической системы определяется какими-либо параметрами a, b, c, ... Пусть при этом все параметры, кроме двух, например ρ и σ, не могут изменяться. Внешняя причина (в примере — увеличение давления δp) действует непосредственно на параметр ρ (в примере — V). Другому параметру (в примере — T) в одном случае не дают изменяться (опыт I), а в другом ему предоставлена свобода — «он предоставлен самому себе» (опыт II). Принцип утверждает: во втором случае сопряженный параметр σ изменяется в таком направлении, что благодаря этому изменение непосредственно заданного параметра ρ становится по численной величине меньше, чем в том случае, когда мы сохраняем σ неизменным:

$$|\delta_{II}\rho| < |\delta_I\rho|$$

($\delta_I\rho$ — при неизменном σ, $\delta_{II}\rho$ — при «σ представленном самому себе»). Итак, благодаря содействию параметра «сопротивление системы внешнему воздействию возрастает» [63, стр. 348]. Эренфест на ряде других примеров обнаружил несостоятельность обычной формулировки. Он показал также несостоятельность доказательства принципа, данного Брауном. Возвращаясь к рассмотренному примеру идеального газа, Эренфест анализирует взаимосвязанные явления: расширение при нагревании, охлаждение при расширении. Возможными параметрами прежде всего являются объем, температура, давление, энтропия. Другие параметры не рассмотрены. Сопоставлено и анализировано восемь возможных комбинаций четырех параметров. Эренфест показывает, что при переходе от одной системы параметров к другой могут обратиться физический смысл того, какой опыт считать первым, а также интерпретация знака окончательных неравенств. Эренфест приходит к выводу: «...если вообще возможна вполне удовлетворительная формулировка принципа Ле Шателье — Брауна, то не иначе, как при точном ограничении выбора системы параметров» [63, стр. 353]. На примере упругого прямоугольного параллелепипеда, характеризуемого параметрами температуры, высоты, ширины, толщины, Эренфест показал, каким образом знак неравенства связан с выбором параметров.

Работа П. и Т. Эренфестов «Мысленные основы статистического понимания в механике» [66] находится в прямой связи с работой Больцмана и Набла «Кинетическая теория материи» и посвящена главным образом основным понятиям и методам статистической физики. Во введении отмечено, что ранние работы кинетической теории газов базировались на двух группах гипотез —«Механико-структурных» и «гипотез вероятности». На основе этих гипотез в работах А. Кренига (1856), Р. Клаузиуса (1857), Д. К. Максвелла (1859) была развита кинетическая трактовка уравнений состояния, диффузии, теплопроводности и трения. Толчком к интенсивной дискуссии об основах теории послужила H-теорема Больцмана (1872). Согласно этой теореме, существует некоторая функция H координат и импульсов частиц, однозначно характеризующая состояние замкнутой макроскопической системы, монотонно убывающая со временем при необратимых процессах и остающаяся постоянной при равновесном состоянии. Величина H пропорциональна энтропии S, взятой с обратным знаком. Энтропия может или возрастать, или оставаться постоянной. И. Лошмидт (1876), Э. Цермело (1896), возражая Больцману, указывали на невозможность привести в соответствие необратимость тепловых процессов с обратимостью механического движения частиц. Под влиянием критики Больцман уточнил свою теорему. Однако некоторые исследователи (Пуанкаре, Бриллюэн, Липпманн и др.) полагали, что возражения Лошмидта — Цермело вскрывают противоречия, имеющие место и в модифицированной статистической трактовке. Эренфесты предприняли глубокий анализ H-теоремы и показали ряд ее особенностей, носящих вероятностный характер. Ими подробно рассмотрен вопрос о Г- и μ-пространствах. Рассматривая систему — газ из N молекул, заключенных в замкнутом пространстве и взаимодействующих по определенному закону,— можно состояние газа изобразить точкой в фазовом пространстве σN-измерений. Три измерения соответствуют пространственным координатам и три измерения — импульсу каждой молекулы. Точка, описывающая систему в этом пространстве, движется по поверхности $(\sigma N - 1)$-измерений. Для рассматриваемого пространства Эренфесты ввели название Г-пространства. Случай, когда фазовое пространство описывает поведение только одной молекулы газа, назвали μ-пространством. Ими рассмотрен переход от одного пространства к другому, возможный лишь тогда, когда механическая система, определяемая функцией Гамильтона, обладает специальными свойствами. В своем обзоре Эренфесты рассмотрели газовую модель и ее фазу, теорему Лиувилля, механические свойства газовой модели, газовую модель как эргодическую систему. Содержание эргодической гипотезы претерпевало изменения. В начале 70-х годов XIX в. Больцман высказал ее в том смысле, что поверхность постоянной энергии фазового пространства образована единственной траекторией системы. С течением времени траектория фазовой точки проходит через все точки поверхности. Больцман столкнулся с необходимостью доказать, что среднее по времени от функции координат и импульсов системы за бесконечно большой промежуток времени должно быть равным значению этой функции в равновесном состоянии. По существу это требовало вычислить среднее по времени значение функции состояния системы и сравнить его с усредненной функцией состояния по совокупности фаз. Трудности, которые возникали при этом, и побудили Больцмана к созданию приведенной гипотезы, что система проходит через все состояния, характеризующиеся одним и тем же значением полной энергии, независимо от начального состояния. П. и Т. Эренфесты отмечали, что если бы эргодическая гипотеза была доказана строго, то это означало бы, что законы статистической механики с ее вероятностными представлениями могут быть сведены к обычным механическим представлениям.

П. и Т. Эренфесты высказывали квазиэргодическую гипотезу, утверждающую, что при достаточно длительном продолжении движения во времени изолированная система сколь угодно близко подходит к любой заданной фазовой точке, совместимой с энергией системы. В 1913 г. А. Розенталь и М. Планшерель на основе теории множеств показали, что не может существовать ни одной эргоидной системы в смысле Больцмана. Нейман и Биркгоф посвятили ряд исследований анализу эргодической гипотезы.

В 1963 г. теоретик К. Хуанг писал: «Попытки вывода статистической механики до настоящего времени шли в двух основных направлениях. Одни исследователи ставили себе целью доказательство эргодической гипотезы, другие же стремились получить основное кинетическое уравнение. Из этих двух направлений только второе, по-видимому, может удовлетворить сформулированным выше требованиям» [5]. Далее Хуанг указывает, что до настоящего времени эргодическая гипотеза была доказана как в классической, так и в квантовой механике при некоторых предположениях, которые слишком абстрактны, чтобы допускать простую формулировку, и выполнимость которых сама по себе требует доказательства. Во всех физических экспериментах мы усредняем не по бесконечным промежуткам времени, а по конечным интервалам, которые в макроскопических масштабах очень малы» [6]. «Правдоподобно», что малые макроскопические интервалы можно рассматривать как бесконечно большие по сравнению, например, со временем свободного пробега молекулы или другими временами молекулярных процессов, но «правдоподобность» не является доказательством. «Ясно,— пишет Хуанг,— что такое доказательство нельзя сделать без полного использования деталей молекулярной динамики. Однако методы, применявшиеся для доказательства эргодической гипотезы, основывались как раз на стремлении обойти детали молекулярной динамики. Таким образом, этот поход, по-видимому, может стать физически более удовлетворительным только при привлечении новых методов исследования» [7]. Проблема, которую вслед за Больцманом и Максвеллом ставили П. и Т. Эренфесты, сохранила свою значимость.

В 1912 г. Эйкен сделал открытие, что молекулярная теплоемкость водорода с понижением температуры до 35° абсолютной шкалы падает от значения в 5 кал при комнатной температуре до 3 кал. При низких температурах водород ведет себя как одноатомный газ, обладающий тремя степенями свободы. В 1913 г. Эйнштейн и Штерн опубликовали работу, в которой, опираясь на опыты Эйкена, приводили агрументы в пользу гипотезы о молекулярном возбуждении при абсолютном нуле. В 1914 г. Эренфест напечатал статью «Заметка о теплоемкостях двухатомных газов», где подробно анализировал работу Эйнштейна и Штерна, рассматривавших вращающуюся молекулу как резонатор Планка с переменной частотой. Угловая скорость $2\pi\nu$ молекулы тем больше, чем большей кинетической энергией она обладает. Каждому значению температуры соответствует определенное значение частоты. Энергия

$$\varepsilon = \frac{L}{2}\,[2\pi\nu\,(T)]^2. \qquad (1)$$

Дифференцируя (1) по T, получают ту часть теплоемкости водорода, которую привносит вращение молекулы вокруг одной оси.

При определении зависимости ν от T и использовании уравнения

$$\varepsilon = \frac{L}{2}\,(2\pi\nu)^2 = P\,(\nu, T) \qquad (2)$$

[5] *К. Хуанг*. Статистическая механика. М., «Мир», 1966, стр. 225.

[6] Там же, стр. 226 (см. также: Scuola Internacionale di Enrico Fermi. Corso XIV. «Ergodic Theory», N. Y., 1962).

[7] Там же.

мы, по старой теории Планка, имеем

$$P_{\mathrm{I}} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \tag{3}$$

а по новой теории

$$P_{\mathrm{II}} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} + \frac{h\nu}{2}. \tag{4}$$

Согласие с опытами Эйкена мы получаем лишь посредством формулы (4). При статистическом подходе к определению ν (T) нужно учитывать отклонения частоты от ее вероятнейшего значения. Изложив работу Эйнштейна и Штерна, Эренфест писал: «При таком состоянии вопроса нелишне указать вкратце, какой ход C_k получается при другом способе вычисления, который может в статистическом отношении быть доведен до конца» [70, стр. 52—53]. Вычисление проводится при следующих предположениях.

1) Выполнимо соотношение

$$\frac{L}{2}(2\pi\nu)^2 = \frac{nh\nu}{2}. \tag{5}$$

Дозволенная фазовая область состоит из точки $q = p = 0$ и пар отрезков

$$p = \pm\frac{h}{2\pi}; \quad \pm\frac{2h}{2\pi}; \quad \pm\frac{3h}{2\pi}; \tag{6}$$

где q — угол поворота молекул, p — соответствующий момент.

2) При статистическом рассмотрении точка $p = q = 0$ и каждая пара отрезков (6) считается равновозможной фазовой областью.

После ряда выкладок Эренфест получил для теплоемкости от двух вращений молекулы

$$C_{2R} = 2Nk\sigma^2 \frac{d^2}{d\sigma^2}[\lg Q(\sigma)], \tag{7}$$

где

$$\sigma = \frac{h^2}{8\pi^2 LkT}, \qquad Q(\sigma) = 1 + e^{-\sigma} + e^{4\sigma} + \ldots + e^{-h2\sigma}.$$

Кривая хода теплоемкости дает хорошее совпадение с кривой Эйкена.

В 1914 г. Эренфест опубликовал статью «К теореме Больцмана о связи энтропии с вероятностью» [72], в которой подверг анализу механико-статистические корни второго начала и особенно детально — доказательство Больцманом уравнения

$$\frac{\delta E + A_1\delta a_1 + A_2\delta a_2 + \ldots}{T} = k\delta \lg W. \tag{8}$$

Доказательство уравнения (8), данное Больцманом, покоится, отмечает Эренфест, на предположениях: «а) о том, какие области фазового пространства газа (μ-пространства) должны быть сопоставлены с данным макроскопическим состоянием тела; б) о том, что для этих областей все элементы равного объема $\int dq_1 \ldots dp_{N_2}$ в статистических вычислениях должны считаться равноправными; в) о том, что относительная «вероятность» двух макроскопических состояний измеряется отношением объемов тех двух областей γ-пространства, которые соответствуют [по (а)] этим двум макроскопическим состояниям» [72, стр. 334]. Это же можно выразить, прибегая к понятию весовой функции. Пространству (q, p) приписывают всюду одинаковый вес:

$$G(p, q) = \text{const}. \tag{9}$$

Планк отказался от предположения (9), он выделил из γ-областей, соответствующих, по Больцману, данному макроскопическому состоянию, некоторые бесконечно узкие области как «дозволенные». Эренфест отмечает, что одновременно с отказом от предположения (9) лишается своего основания и доказательство уравнения (8).

Следуя примеру Планка и Эйнштейна, можно соотношение (8) удержать как «постулат Больцмана». Принимая $S = k \lg W$ за энтропию или $F = E - kT \lg W$ за свободную энергию, можно непосредственно прийти к определенным выражениям для теплоемкости или для сил системы в направлении параметров a_i:

$$A_i = -\frac{\partial F(T, a)}{\partial a_i}. \tag{10}$$

«Этот изящный и плодотворный метод приводит к вопросу, который, насколько мне известно, еще не обсуждался. Если сделано определенное предположение о весовой функции в молекулярном фазовом пространстве, то этим вполне определено «вероятнейшее» распределение молекул рассматриваемого тела в зависимости от полной энергии E и параметров $a_1\ a_2, \ldots$, а вместе с этим и сумма сил молекул в направлении, например, параметра a_1. Получаем, следовательно, прямое «динамическое» определение силы A_1. Наш вопрос: для какого класса весовых функций значения $A_1, A_2, \ldots$, вычисленные непосредственно, «динамически» совпадают со значениями (10), вычисленными при помощи (8) и (9) «квазитермодинамически» [72, стр. 322—323]. Если (8) не принимать за постулат, то формулировка вопроса такая: «При каких весовых функциях молекулярного фазового пространства $G(q, p, a_1, a_2)$ выражение $\delta E + A_1 \delta a_1 + A_2 \delta a_2$, вычисленное для «вероятнейшего» распределения, имеет: а) вообще интегрирующие множители, б) между ними такой, который при установлении связи между двумя системами имеет свойства T^{-1}» [72, стр. 323]. В том же году совместно с Каммерлинг-Оннесом Эренфест дал упрощенный вывод формулы теории комбинаций, лежащей в основе теории излучения Планка [73].

В 1923 г. Эренфест опубликовал статью «Профессор Г. А Лоренц как исследователь (1853—18 июля — 1923)» [96], где прослежена эволюция взглядов Лоренца по коренным проблемам физики. В своей докторской диссертации, отмечает Эренфест, Лоренц не принимает и сам не пользуется гипотезами Максвелла для дальнейших заключений, «пока в качестве пробного камня он предварительно и с успехом не переведет их на язык теории действия на расстоянии». Эренфест отмечает также четкое разделение Лоренцем роли «эфира» и «весомой материи» в каждом из электромагнитных явлений, возникающих в куске стекла или металла.

В отличие от Максвелла, исходившего из представления об «эфире в пустом пространстве» и «эфире в стекле» как о двух средах с разными электромагнитными свойствами, Лоренц создает совершенно новое представление о тождественном себе повсюду эфире. Изменения, претерпеваемые световыми волнами, проникающими в вещество, есть результат взаимодействия первичных волн и волн, создаваемых подвижными электрическими зарядами под воздействием волн первичных. Эренфест излагает два замечательных результата, к которым пришел Лоренц на основе этих представлений. Третья проблема, поставленная молодым Лоренцем, потребовала от него тридцать лет упорного труда. Суть проблемы в том, какое влияние оказывает движение материального тела на происходящие в нем электромагнитные явления. Разграничение роли, исполняемой подвижными электронами и неподвижным эфиром, привело Лоренца к победе. Эренфест сумел показать, что уже в первых работах Лоренца содержались ростки его будущей многогранной деятельности.

В 1923 г. В. Дюане сделал попытку сформулировать на квантовой основе теорию отражения рентгеновских лучей. А. Комптон развил соображение Дюане. Они рассматривали случай плоскопараллельных пучков падающего и отраженного света при бесконечных размерах решетки. Такое рассмотрение приводит к бесконечно узким отраженным пучкам различного порядка. П. С. Эпштейн и Эренфест [98] рассмотрели тот же вопрос в применении к решеткам конечной длины. Они обсудили вопрос о распределении интенсивности света, рассеянного некоторой дифракционной оптической системой под заданным углом к падающему лучу. Появление работ Дэвиссона и Джермера возбудило интерес авторов к написанной, но не опубликованной работе [114], которая была напечатана ими в 1927 г. В их первой работе было показано, как использовать метод Дюане. Метод можно перенести на дифракцию Фраунгофера, если дифрагирующее тело представить в виде ряда Фурье. Аналогию можно провести и для дифракции Френеля.

В 1925 г. Эренфест рассмотрел вопрос о диамагнитной восприимчивости диамагнитного газа [105]. В то время Паули дал объяснение этого явления на основе предположений: 1) вне магнитного поля атом как целое не обладает магнитным моментом; 2) в магнитном поле электронное облако совершает прецессию Лармора вокруг силовых линий. В этом случае восприимчивость для грамм-атома $\chi=-2{,}85\cdot10^{10}\,\Sigma\bar{r}_i^2$ ($\bar{r}_i^2$ — среднее по времени значение квадрата расстояния электрона от ядра). Эренфест при некоторых дополнительных предположениях рассмотрел этот вопрос для случая висмута.

В 1927 г. Эренфест совместно с Уленбеком публикует статью, посвященную волновомеханической интерпретации статистики Больцмана наряду с новыми статистиками Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака [110]. Эренфест доказывает, что волновая механика сама по себе не приводит еще к изменению статистики Больцмана. Лишь когда принимают, что из всей совокупности волновомеханических собственных функций существует лишь симметрическая или антисимметрическая часть, тогда приходится отказаться от статистики Больцмана. В том же году он публикует статью об эйнштейновском парадоксе.

В 1927 г. Эренфест опубликовал статью, посвященную приближенной пригодности классической механики в рамках квантовой механики [115]. Он стремился возможно элементарнее ответить на вопрос о соотношении квантовой и классической механики. Он отмечает, что после возникновения квантовой механики многими исследованиями выяснено, в чем и насколько далеко классическая механика в значительном приближении остается верной. Приведено элементарное соотношение, следующее без всяких пренебрежений из уравнений Шредингера и позволяющее сделать более обозримыми взаимозависимости классической и квантовой механики. Для случая одной степени свободы уравнение Шредингера можно представить в виде

$$\begin{aligned} -\frac{h^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V(x)\psi=-ih\frac{\partial\psi}{\partial t}, \\ -\frac{h^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}+V(x)\psi^*=-ih\frac{\partial\psi^*}{\partial t}. \end{aligned} \tag{11}$$

Напомним, что $\psi\psi^* dx$ есть вероятность найти частицу с координатами, лежащими между x и $x+dx$, а $\bar{x}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\psi\psi^* dx$.

Обозначим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx x\psi\psi^*=Q(t), \tag{12}$$

$$ih\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}=P(t). \tag{13}$$

Вычислив $\frac{dQ}{dt}$ и $\frac{dP}{dt}$, помня, что при отыскании производной по времени x является не функцией времени, а независимой переменной, находим

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{1}{m}P,$$

$$m\frac{d^2Q}{dt^2}=\frac{dP}{dt}=\int dx\psi\psi^*\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right).$$

Эренфест приводит примеры, поясняющие переход от квантовой механики к классической. Если масса частицы равна 1 г, а ширина пакета $\omega=10^{-3}$ см, то ширина удвоится лишь через промежуток времени $T=10^{21}$ сек. В течение этого времени центр тяжести пакета будет двигаться по классической траектории. Для массы такого порядка справедлива классическая механика. Если рассмотреть массу, на много порядков меньшую, $m=1{,}7\cdot10^{-24}$ г и ширину пакета $\omega=10^{-8}$ см, то удвоение ширины пакета произойдет через $T=10^{-13}$ сек., и классическая механика окажется неприемлемой. Эренфест своим исследованием показал, что динамические переменные в классической и квантовой механике подчиняются одним и тем же уравнениям, но в квантовой механике эти уравнения имеют место для операторов и средних значений.

В двух работах 1929 г., посвященных термодинамике и кинетике термоэлектрических явлений в кристаллах [118, 119], Эренфест и Рутгерс особо подробно остановились на открытом Бриджменом эффекте, называемом «внутренним эффектом Пельтье». Ими показано, что в термодинамической теории термоэлектрических явлений, развитой В. Томсоном, имеются члены, учитывающие этот эффект. В формулах же Фогта отсутствуют члены, позволяющие учитывать этот эффект. Теория Лоренца позволяет кинетически трактовать этот эффект, если принять, что средний свободный пробег электронов зависим от скорости и что эта зависимость меняется с изменением направления их движения. На границе двух кусков кристаллов с различными ориентировками осей мы имеем различные энергетические состояния, что и обусловливает «внутренний эффект Пельтье».

В 1933 г. Эренфест обратился к вопросу о фазовых превращениях. Поводом к этому послужили измерения Кеезома и его сотрудников характеристического протекания теплоемкости при температуре жидкого гелия. Мы приведем соотношения, полученные Эренфестом, в несколько модифицированной форме. Само понятие фазового превращения есть обобщение понятия об изменении агрегатного состояния вещества. Плавление, испарение, возгонка, ряд случаев перехода кристаллов из одной модификации в другую относятся к фазовым превращениям первого рода. Они характеризуются тем, что при этих переходах скачком изменяется плотность вещества и внутренняя энергия. Превращения эти сопровождаются поглощением и выделением скрытой теплоты перехода. К фазовым превращениям второго рода относятся такие процессы, как переход сверхпроводников из нормального состояния в сверхпроводящее, переход ферромагнитных металлов из ферромагнитного состояния в парамагнитное и т. д. При фазовых превращениях второго рода скачкообразно меняются теплоемкость C_p, сжимаемость β, температурный коэффициент расширения γ.

Если обратиться к дифференциальному выражению функции Гиббса

$$dG = -SdT + Vdp;$$

$$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p; \qquad V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T,$$

то легко усмотреть, что при фазовом превращении первого рода производные первого порядка от функции Гиббса меняются скачкообразно. При фазовых превращениях второго рода объем и энтропия системы остаются неизменными, первые производные функции Гиббса меняются непрерывно, но вторые производные меняются скачком. Соотношения, полученные Эренфестом в простейших случаях, можно записать в виде

$$\frac{dp}{dT} = \frac{(C_p)_f - (C_p)_i}{TV(\gamma_f - \gamma_i)}, \tag{14}$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\gamma_f - \gamma_i}{(\beta_T)_f - (\beta_T)_i}. \tag{15}$$

Характеризуя особенности фазовых превращений n-го рода, К. Хуанг в 1963 г. писал: «Эренфест ввел определение фазового перехода n-го рода как такого перехода, для которого в точке перехода

$$\frac{\partial^n G_1}{\partial T^n} \neq \frac{\partial^n G_2}{\partial T^n} \text{ и } \frac{\partial^n G_1}{\partial p^n} \neq \frac{\partial^n G_2}{\partial p^n},$$

а все производные более низкого порядка равны друг другу. Не считая хорошо известного фазового перехода газ — жидкость, известен только один пример фазового перехода, который удовлетворял бы схеме Эренфеста,— это фазовый переход второго рода в сверхпроводниках» [8]. Хуанг приводит примеры: фазовое превращение в ферромагнетиках в точке Кюри, превращение, связанное с упорядочиванием в бинарных сплавах, λ-переход в жидком гелии, которые не укладываются в схему Эренфеста.

В краткой статье невозможно обсудить все вопросы, рассмотренные Эренфестом на протяжении его тридцатилетней плодотворной деятельности. Нами рассмотрена только часть работ и то весьма кратко. Подробный и обстоятельный анализ ряда работ Эренфеста можно найти в книге Мартина Клейна «Пауль Эренфест» [9].

Переходим к рассмотрению отдельных проблем.

ЭРЕНФЕСТ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Свою первую работу Эренфест опубликовал в 1903 г., последнюю — в 1933 г. Таким образом, его творчество относится к периоду становления квантовой теории, около сорока его работ так или иначе были связаны с теми проблемами, которые возникали и разрешались в процессе развития квантовой теории. Вклад отдельных работ в становление квантовых представлений весьма различен — от отдельных замечаний и уточнений до фундаментальных идей, но их всех объединяет одна характерная черта, обусловленная в значительной мере особенностями личности Эренфеста. Как отмечал Крамерс [10], у Эренфеста влияние характера на стиль научных работ проявлялось сильнее, чем у большинства других физиков. Можно было бы добавить, что в работах по квантовой теории такое влияние прослеживается более явственно, чем, скажем, в его работах по теории относительности.

Эту характерную черту Эренфест достаточно четко охарактеризовал сам, когда, будучи в Москве в 1924 г. на съезде русских физиков, так ответил на вопрос о том, что отличает Эйнштейна и Бора от других физиков: «И Эйнштейн, и Бор исключительно хорошо знают классическую физику, они, так сказать, пронизаны классическим знанием. Они знают, они любят, они чувствуют классику так, как не может этого делать обыкновенный физик. Меньше всего они готовы признать новое только потому, что это — новое. Скорее их можно назвать консерваторами — с такой бережностью они относятся к классическим объяснениям, к каждому кирпичику здания классической физики. Но для них новые вещи являются необходимостью потому, что они хорошо знают старое и отчетливо видят невозможность старого, классического объяснения» [11].

---

[8] *К. Хуанг.* Статистическая механика, стр. 47—48.
[9] *M. Klein.* Paul Ehrenfest, v. I. Amsterdam, 1970.
[10] См. наст. сб., стр. 249.
[11] Цит. по кн.: *А. А. Андронов.* Собрание трудов. М., 1956, стр. 444.

Не удивительно, что именно эту черту Эренфест отметил первой. Через месяц после его смерти, открывая VII Сольвеевский конгресс, Поль Ланжевен говорил, что Эренфест «способствовал бережному сохранению связи между старыми и новыми идеями» [12]. Подтверждение этому можно найти во всех его работах по квантовой теории. Их можно объединить в три группы: 1) работы по теории излучения Планка и квантовой теории света Эйнштейна; 2) работы по адиабатическим инвариантам и теории атома Бора; 3) работы по квантовой механике и квантовой статистике.

Если не считать двух небольших заметок [8, 10], в которых Эренфест возражал против доказательной силы вывода Джинсом закона смещения Вина на основе метода размерностей, то первая серия его статей относится к логическому анализу теории излучения Планка. Работа 1905 г. [4], представленная Венской академии Больцманом, называется «О физических предпосылках планковской теории необратимости процессов излучения». В ней рассматриваются четыре работы Планка 1900—1901 гг., общим результатом которых было установление правильной формулы распределения энергии в спектре черного излучения [13]. В год, когда Эренфест поступил в Венский университет (1899), только что закончилась продолжавшаяся более двух лет дискуссия между Больцманом и Планком по проблеме необратимости в процессах излучения.

Первая из четырех названных работ Планка и была собственно обзором этой дискуссии. Пытаясь решить задачу распределения энергии в спектре черного излучения, Планк на первом этапе надеялся, что для этого достаточны общие законы максвелловской электродинамики, которым подчиняется взаимодействие между излучением и набором осцилляторов в замкнутой полости. Он думал, что испускаемое осциллятором излучение будет отличаться от поглощаемого, а следовательно, подобная система может перейти в равновесное состояние без внешнего воздействия [14]. Больцман решительно возражал против этого заключения Планка. Он указал, что необратимые процессы нельзя получить из уравнений Максвелла, подобно тому как их нельзя получить и из уравнений механики. Если в них изменить на обратный знак времени, а в случае движущихся зарядов — и знак напряженности магнитного поля, то форма уравнений не меняется, а значит, чисто электромагнитные явления по самому существу обратимы. Полученная Планком необратимость была результатом лишь специально подобранных частных начальных условий. Тогда Планк вынужден был ввести дополнительное допущение (гипотезу так называемого естественного излучения) для ограничения возможностей электродинамических процессов, благодаря чему в этих процессах появлялась необратимость. Но и это не дало желаемых результатов. «Я ввел,— писал Планк в своей

---

[12] См. наст. сб., стр. 237.

[13] *M. Planck*. Über irreversible Strahlungsvorgänge. «Ann. Phys.», 1900, 1, S. 69—122; Entropie und Temperatur strahlender Wärme. Ibidem, 719—733; Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum. «Ann. Phys.», 1900, 4, S. 553—563; Über irreversibile Strahlungsvorgänge (Nachtrag). «Ann Phys.», 1901, 6, S. 818—831.

[14] *А. М. Френк*. Теория теплового излучения в работах Больцмана. В кн.: *Л. Больцман*. Статьи и речи. М., 1970, стр. 354; *М. Клейн*. Макс Планк и начало квантовой теории. УФН, 1967, 92, стр. 681.

научной автобиографии,— некоторое особое условие — гипотезу об естественном излучении, которая в теории излучения играет такую же роль, как и гипотеза о молекулярном беспорядке в кинетической теории газов... Однако вычисления все более отчетливо показывали, что в моем понимании узлового пункта проблемы все еще отсутствует основное звено. Мне не оставалось ничего другого, как подойти к проблеме еще с противоположной стороны — с точки зрения термодинамики» [15].

Но даже после этого Планк фактически «угадал» правильную формулу для спектрального распределения и лишь позже, исходя из уже оправдавшего себя на опыте закона, пытался выяснить его физический смысл, используя больцмановское соотношение между энтропией и вероятностью. Фактически на этот путь Больцман указывал еще в 1897 г.: «Было бы очень интересно вывести и для теплового излучения закон, подобный закону возрастания энтропии, исходя при этом из общих законов излучения и следуя тем же принципам, что и в теории газов. Я был бы рад, если этому помогли бы рассуждения Планка о законах рассеяния плоских электрических волн на очень малых резонаторах» [16]. Теория должна была еще выяснить, каким путем содержащееся в полости произвольное излучение переходит в равновесное состояние черного излучения, соответствующее максимуму энтропии. К этому Планк пришел лишь в конце 1900 г. с помощью гипотезы квантования энергии резонаторов. В этом основное содержание остальных, рассмотренных Эренфестом статей Планка.

Ученик Больцмана и участник его семинара в Вене (1899—1901), студент в Геттингене (1901—1903), слушатель лекций Лоренца по теории излучения в Лейдене (1903), Эренфест как никто другой был подготовлен к восприятию и критическому анализу указанных выше проблем.

Основной вопрос, который Эренфест ставит в работе [4], заключается в следующем: каковы те взаимно независимые гипотезы, которые позволили Планку найти для каждой температуры однозначно определенное распределение энергии в спектре черного излучения? Строя теорию необратимых процессов излучения, Планк искал функцию, которая для системы осцилляторов и излучения в замкнутой полости играла роль энтропии. Эта функция при любых процессах в системе должна была обладать свойством меняться только в одну сторону (либо возрастать, либо убывать) до некоторого экстремального значения, достигаемого, когда в системе устанавливается стационарное состояние. Знание этой функции позволило бы, как считал Планк, определить распределение энергии по частотам для стационарного состояния (черного излучения).

Эренфест показал, что в действительности найденная Планком функция Σ не обладает всеми необходимыми свойствами, если только не вводить дополнительных гипотез, не содержащихся в максвелловской электродинамике. Эта функция может привести к формуле излучения, только если «предварительно будет доказано, что:

а) во всех возможных в планковской модели «естественных» состояниях их функция Σ может только возрастать или оставаться постоянной;

---

[15] *М. Планк*. Научная автобиография. В сб.: «Макс Планк (1858—1958)». М., 1958, стр. 24.

[16] *L. Boltzmann*. Über irreversible Strahlungsvorgänge. «Berl. Ber.», 1897, S. 1016—1018.

б) при заданной общей энергии функция Σ только тогда остается постоянной во времени, когда ставшее стационарным состояние излучения обладает однозначно определенным спектральным распределением».

Если первое утверждение полностью подтверждалось исследованиями Планка, то второе принципиально не может быть доказано из уравнений, лежащих в основе его теории, т. е. уравнений электромагнитного поля Максвелла и уравнений колебания для осциллятора. Пользуясь методом, введенным Лоренцем, Эренфест показал, что линейность этих уравнений не позволяет получить однозначного спектрального распределения из требования стационарности. Между энтропией и планковской функцией Σ имеется, таким образом, существенная разница. Если изолированная термическая система меняется до тех пор, пока ее энтропия перестает возрастать, причем конечное состояние однозначно определено, то планковская модель (осцилляторы + поле излучения в полости) тоже меняется, пока Σ уже не возрастает, но при этом в конечных состояниях возможно бесконечное множество спектральных распределений с заданной общей энергией. Единственность в теории Планка достигается лишь введением дополнительного независимого требования, например чтобы Σ не менялась не только при действительных процессах, но и при любых бесконечно малых виртуальных изменениях состояния системы.

Вскрыв трудности теории необратимых процессов Планка, Эренфест в этой первой работе почти не касается квантовой гипотезы. Лишь в конце он отмечает, что в третьей из анализируемых работ Планк, возвращаясь к статистическому методу определения энтропии, пользуется не имеющей аналога в больцмановской теории гипотезой, которую Эренфест формулирует следующим образом: «...энергия излучения различных цветов состоит из мельчайших частиц энергии величины $E_\nu = \nu \cdot 6{,}55 \cdot 10^{-27}$ эрг·сек, где ν — частота соответствующего цвета». Эта формулировка весьма любопытна[17], если иметь в виду, что сам Планк квантовал только энергию резонаторов, а не поля излучения. Вспомним, что за 8 месяцев до того, как Больцман представил работу Эренфеста Венской академии, Эйнштейн закончил свою знаменитую статью «Об одной эвристической точке зрения, касающейся возникновения и превращения света», в которой была выдвинута гипотеза квантов света (поля излучения). И хотя, по-видимому, Эренфест не знал работу Эйнштейна или не обратил на нее внимания (во всяком случае, она не цитировалась им ни в работе 1905 г., ни в следующей — 1906 г.), формулировка Эренфеста ближе к эйнштейновской, чем к планковской. Трудно сказать, видел ли Эренфест разницу между приведенной им формулировкой квантовой гипотезы и планковской. В 1906 г. Эйнштейн показал, что фактически и в теории Планка неявно содержится гипотеза о квантовании поля[18].

В работе [9], написанной в 1906 г. как некоторый комментарий к вышедшим в том же году «Лекциям по теории излучения» Планка, Эренфест продолжает обсуждение круга проблем, которые рассмат-

---

[17] На это обратил внимание М. Клейн в книге: *M. J. Klein.* Paul Ehrenfest, v. I. Amsterdam, 1970, p. 234.

[18] *У. И. Франкфурт, А. М. Френк.* Истоки теории излучения Эйнштейна. «Эйнштейновский сборник 1969—1970 гг.» М., «Наука», 1970, стр. 288.

ривались и в работе [4]. С помощью метода собственных колебаний, использованного до него Рэлеем и Джинсом и позже (1910) Дебаем, Эренфест приходит к выводу, что классическая статистика приводит к формуле Рэлея — Джинса, противоречащей опыту для больших частот. Возникает вопрос о том, каким образом устранить бесконечное значение энергии, вытекающее из этой формулы. Можно ввести различные дополнительные требования, но во всяком случае принятое ad hoc условие должно быть хоть в какой-то мере обосновано физически, и центральными моментом как раз и должно стать обсуждение этих физических оснований новой гипотезы, в частности, например, квантовой гипотезы Планка. Эренфест вновь приводит формулировку, отличную от планковской, считая, что именно такой вид является «обычным для статистической механики». Намек, что у него не было «возможности полностью сопоставить его с аналогичной формулировкой, данной Планком», показывает, как нам представляется, понимание Эренфестом различия между обеими формулировками. Но можно думать, что в то время у него не было еще четкого ответа на вопрос, в чем состоит это различие.

Л. С. Полак [19] писал, что основная идея Эренфеста о рассмотрении идеального газа, заключенного в полости при анализе явлений излучения, является предвосхищением статистики световых квантов и послужила истоком работы Дебая 1910 г. [20] Реферируя в 1911 г. работу Дебая для «Журнала Русского физико-химического общества», Эренфест подчеркивал два момента: отказ от планковских резонаторов и перенос идей комбинаторики с энергии резонаторов на собственные колебания полости, заполненной черным излучением. Однако новый метод вывода формулы распределения Планка оставлял, как пишет Эренфест, неизвестным механизм, с помощью которого центры испускания и поглощения «перерабатывают энергию порциями, кратными определенным элементарным количествам».

Следующей в рассматриваемой первой серии является большая статья 1911 г. «Какие черты гипотезы световых квантов играют существенную роль в теории теплового излучения?» [24]. «Из всех выполненных в последние годы работ о законе излучения,— писал М. Лауэ,— эта наиболее глубоко вникает в саму суть хода идей, ведущих к трем основным законам излучения: Рэлея — Джинса, Планка, Вина» [21].

Статья писалась непосредственно перед Сольвеевским конгрессом 1911 г., в период, когда проблема излучения и квантов со всеми ее успехами и противоречиями не просто стала наиболее острой: ее уже нельзя было обойти. В отличие от принятой обычно терминологии Эренфест под «гипотезой световых квантов» понимает не утверждение Эйнштейна о квантовании поля излучения, а вообще идею о квантах энергии, независимо от того, к чему они относятся. А ведь подход Эйнштейна считался наиболее радикальным и был далеко не общепринятым, о чем свидетельствовали возражения Лоренца, Планка, Вина и других ведущих теоретиков. Эренфест не высказывает в статье своего отношения к этому подходу, не ссылается на Эйнштейна и лишь в конце сравнивает точки зрения Планка и Эйнштейна, обещая еще раз вернуться к этому вопросу. Тем не менее первая фраза, намекающая на выход

---

[19] *Л. С. Полак.* Квантовая физика от М. Планка до Н. Бора (1900—1913 гг.). В сб.: «Макс Планк». М., 1958, стр. 175, 177

[20] *P. Debye.* «Ann. Phys.», 1910, 33, p. 1427.

[21] *M. Laue.* «Fortschritte der Physik», 1911, 76, Abt. II, S. 328.

квантовых идей из рамок теории излучения, наводит на мысль, что возврат Эренфеста к обсуждению квантовой гипотезы произошел не без влияния Эйнштейна, которому, собственно, и принадлежали основные работы по квантам в период между опубликованием работ Эренфеста [9] и [24]. В начале 1912 г. состоялась первая личная встреча Эренфеста с Эйнштейном. Вспоминая много лет спустя эту встречу, Эйнштейн писал: «Мы оба отдавали себе отчет, что классическая механика и теория электрического поля оказались недостаточными для объяснения явлений теплового излучения и молекулярных процессов (статистическая теория), но не создавалось впечатления, чтобы Эренфест видел путь выхода из этого положения. Логическая брешь в планковской теории излучения, которой мы тем не менее восхищались, была для нас очевидной» [22].

Основной вопрос, который ставит себе Эренфест,— это выяснение того, что́ в квантовой теории излучения можно считать окончательно установленным, а что еще может быть подвергнуто изменению. При этом он приходит к следующему фундаментальному выводу: применение классической больцмановской статистики с ее непрерывной функцией распределения к излучению с неизбежностью приводит к формуле Рэлея — Джинса, а следовательно, к «ультрафиолетовой катастрофе» [23]. Пожалуй, в столь явном виде этот вывод впервые был сформулирован Эренфестом, хотя еще до этого подобное утверждение встречается у Лоренца, который посвятил ему основную часть своего доклада на Сольвеевском конгрессе. Окончательное признание этого факта произошло лишь после работ Пуанкаре 1912 г.

Эренфест показал, что единственным способом избавления от катастрофы (выполнение, по выражению Эренфеста, «фиолетового требования») является принятие гипотезы о распределении, отличном от больцмановского в том смысле, что оно должно допускать отличную от нуля вероятность лишь для определенных точек фазового пространства системы [24], что равносильно допущению квантования энергии. Вот это и можно было считать окончательно установленным. Однако выполнение этого требования, равносильного отказу от формулы Рэлея — Джинса, не ведет однозначно к какой-либо определенной формуле излучения, например формуле Планка, вывод которой требует выполнения особого «фиолетового требования Вина — Планка» [25].

Обратим внимание на реферат, опубликованный Эренфестом в 1911 г. в «Журнале Русского физико-химического общества» [11]. В 1910 г. Эйнштейн и Хопф, отвечая на высказывавшиеся предположения о неправомерности применения статистики к излучению, показали, что формулу Рэлея — Джинса можно получить, применяя закон равномерного распределения не к излучению, а только к осцилляторам, находящимся в равновесии с излучением. Таким образом, ультрафиолетовая катастрофа обусловлена не применением статистики к излучению, она скрыта гораздо глубже. В своем реферате об этой работе

---

[22] *А. Эйнштейн*. Памяти Пауля Эренфеста. См. наст. сб., стр. 233.

[23] Термин впервые введен Эренфестом в рассматриваемой работе.

[24] Введенное здесь Эренфестом понятие весовой функции оказалось весьма плодотворным и сыграло большую роль в дальнейших исследованиях.

[25] Мы не приводим подробностей, поскольку статья печатается в настоящем сборнике.

Эренфест подчеркивает как раз вывод авторов о том, что следует отказаться от предположения, будто механизм испускания и поглощения световой энергии осцилляторами может быть описан при помощи обычной электродинамики, и что необходимы новые предположения, например типа планковской гипотезы квантов энергии. Здесь идеи Эйнштейна и Хопфа смыкаются с результатом, полученным Эренфестом из других соображений.

Другим существенным результатом Эренфеста является доказательство того факта, что весовая функция зависит не от энергии и частоты в отдельности, а от их отношения, т. е. $\gamma(\nu, E) = G(E/\nu)$. В этом можно усмотреть первый шаг на пути к кругу идей, связанных с адиабатическим принципом — основным вкладом Эренфеста в квантовую теорию. «Известно,— пишет Л. Розенфельд,— что историческое значение статьи Эренфеста значительно превосходит ту цель, которую он себе непосредственно ставил. Эренфест восхищен тем замечательным фактом, что сохранение классического закона смещения в квантовой теории было обусловлено адиабатическим характером тех превращений, которые лежат в основе этого закона. Именно это замечание привело его на путь «адиабатической гипотезы» или «принципа механической трансформируемости», который должен будет позволить написать условия квантования механических систем и определить статистические веса стационарных состояний» [26].

Анализируя в заключительной части подход Эйнштейна к вопросу о квантовании энергии, Эренфест подчеркивает один существенный момент, на который до него не обращали внимания. Именно гипотезы квантования энергии у Планка и Эйнштейна отличаются не только тем, что у Эйнштейна кванты света могут существовать самостоятельно в пространстве, свободном от вещества, но и тем, что даже дискретные значения энергии осцилляторов достигаются за счет сложения некоторого числа *независимых* друг от друга элементарных порций энергии. Планк не считал, что энергия, распределяющаяся по N осцилляторам, состоит из независимых квантов энергии, иначе он пришел бы к иной формуле излучения, например Вина. В самой работе Эренфеста нет ясного указания на это обстоятельство, но в его записных книжках этого времени (запись от 21 марта 1911 г.) приводятся комбинаторные формулы, являющиеся следствием этих двух подходов [27]. Более обстоятельно этот вопрос обсуждается в работе [32], написанной Эренфестом совместно с Каммерлинг-Оннесом. Рассмотрев наглядный смысл комбинаторной формулы числа сочетаний из P элементов по N с повторениями (именно эту формулу использовал Планк для расчета числа возможных распределений P квантов энергии по N резонаторам), Эренфест подчеркивает два момента: формальный характер приема Планка и необходимость отличать кванты энергии Планка от световых квантов Эйнштейна, ибо применение статистики Больцмана к независимым квантам приводит к формуле Вина, а не Планка. Гипотеза световых квантов была сформулирована Эйнштейном именно в результате рассмотрения свойств излучения в виновской области ($h\nu \ll kT$). Попытки обоснования формулы Планка в конечном итоге обязательно сталкивались с необходимостью введения некоторых дополнительных допущений, позволявших вместо формулы Вина получить формулу

[26] *L. Rosenfeld*. La première phase de l'evolution de la theorie des Quanta. «Osiris», 1936, 2, p. 193.
[27] *M. Klein*. Paul Ehrenfest. v. I, p. 255.

Планка. Физические основы этих допущений явно или неявно были связаны с осмысливанием корпускулярно-волнового дуализма свойств излучения, проявляющегося в двучленной флуктуационной формуле Эйнштейна [28]. Одной из попыток подобного рода было предположение Иоффе и Натанзона о существовании «световых молекул».

Высказанная Эренфестом идея была выяснена в дискуссии Вольфке — Круткова. Крутков в совершенно общем виде доказал тезис Эренфеста о том, что допущение независимости световых квантов ведет к формуле Вина. Поднятый Эренфестом вопрос нашел решение после создания квантовой статистики Бозе — Эйнштейна, в которой фундаментальную роль играет принцип тождественности частиц.

Небольшая работа 1913 г. «Заметка, касающаяся удельной теплоемкости двухатомных газов» [29] посвящена анализу статьи Эйнштейна и Штерна «Некоторые аргументы в пользу гипотезы о молекулярном возбуждении при абсолютном нуле» [29]. Эйнштейн в этот период много сил уделял выяснению физических предпосылок, лежащих в основе установленной им на основе формулы Планка двойственности свойств электромагнитного излучения. В своей так называемой второй теории Планк допустил, что испускание света происходит квантами, а поглощение — непрерывно. Одним из следствий этой теории было наличие у резонатора энергии $h\nu/2$ при абсолютном нуле. Эйнштейн и Штерн показали, что, исходя из существования нулевой энергии, можно получить формулу Планка, не делая допущения о дискретности какихлибо величин (при этом, правда, они замечают, что другие трудности, разрешаемые квантовой гипотезой, не удастся устранить этим методом). Другая часть их статьи посвящена рассмотрению удельной теплоемкости при низких температурах. Оказалось, что предположение о нулевой энергии позволяет объяснить экспериментально обнаруженный ход теплоемкости вблизи абсолютного нуля для определенного класса систем, например состоящих из вращающихся двухатомных молекул (квантование вращения молекул было рассмотрено Нернстом в 1911 г.). Правда, в дискуссии на II Сольвеевском конгрессе в 1913 г. Эйнштейн уже выдвинул ряд возражений против существования нулевой энергии, если ее трактовать как энергию дебаевских колебаний. Он сказал: «Должен также по этому поводу заметить, что аргументы, которые мы с Штерном привели в пользу наличия энергии при абсолютном нуле, я уже не считаю приемлемыми. Развивая приведенные нами соображения по поводу закона излучения Планка, я пришел к выводу, что этот путь, основанный на гипотезе энергии при нулевой температуре, приводит к противоречиям» [30]. Правильное понимание вопроса о нулевой энергии могло быть достигнуто только после установления принципа Паули.

Если Эйнштейна здесь интересовали главным образом сами основы квантовой теории, то Эренфест обратил внимание в первую очередь на теорию теплоемкости. Он показал, что экспериментальные данные Эйкена, на которые опирался Эйнштейн, можно объяснить и без введения нулевой энергии.

---

[28] См.: *А. Френк.* Теория излучения Эйнштейна. «Эйнштейновский сборник 1971 г.». М., «Наука», 1972.

[29] *А. Эйнштейн.* Собрание научных трудов, т. III, стр. 314.

[30] «La structure de la matière. Rapports et discussions de la reunion tenue a Bruxelles en 1913». Paris, 1921, p. 108.

Вторая серия работ Эренфеста (1913—1916) начинается с известной статьи «Об одной механической теореме Больцмана и ее отношении к теории квантов» [32]. Главная тема этой серии — адиабатические инварианты.

В самом начале развития атомной физики возник вопрос о том, каким образом можно использовать механические законы в трактовке тех явлений, особенностью которых является наличие дискретных стационарных состояний, и какие именно понятия классической механики должны быть при этом использованы. Особенно большую роль при разработке методов атомной физики сыграло понятие «действие» [31].

«Действие» в классической механике имеет размерность произведения количества движения на перемещение или энергии на время. Если для системы известно выражение функции Лагранжа $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, то действие $S = \int\limits_{t_0}^{t} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt$. Определяемая таким образом величина действия обладает тем свойством, что среди всех возможных кинематических перемещений системы из одного положения в другое, близкое к первому, совершаемых за тот же промежуток времени, действительное есть то, для которого действие наименьшее. Величину действия можно определить, если для заданной системы известно выражение функции Гамильтона $H(p_i, q_i, t)$.

Понятие «действие» позволило построить понятие адиабатического инварианта. Адиабатический инвариант i_k представляет собой приращение функции действия R при таком изменении одной из обобщенных координат S, после которого эта координата возвращается к исходному значению.

А. Зоммерфельд писал, что на I Сольвеевском конгрессе в 1911 г. Лоренц поставил перед Эйнштейном вопрос о том, «как поддерживаются колебания нити, длина которой сокращается, когда нить натянута между двумя пальцами, причем последние все время стремятся придать ей натянутое положение. Если вначале имелась в точности необходимая энергия, которая соответствовала частоте колебания, то к концу процесса, после того как частота повышается, энергия становится уже недостаточной. Эйнштейн сразу же дал правильный ответ. Нить должна сокращаться бесконечно медленно, тогда энергия будет расти пропорционально частоте и все время будет существовать необходимое количество энергии» [32]. Зоммерфельд добавил, что ответ Эйнштейна перекрывается адиабатической гипотезой Эренфеста.

Рассмотрим предварительно пример с маятником [33], который позволит нам яснее осмыслить гипотезу Эренфеста. Пусть маятник состоит из проходящей сквозь кольцо нити, к которой подвешена масса m (рис. 1). Перемещая кольцо, мы меняем длину маятника l. Кольцо перемещаем адиабатически (достаточно медленно). При любом положении кольца уравнения движения такие же, как при его неподвиж-

---

[31] *М. Борн.* Лекции по атомной механике, т. 1. Харьков — Киев, 1934.

[32] *Л. Бриллюэн.* Атом Бора. Л.— М., 1935, стр. 21.

[33] *Reyleigh.* On the pressure of vibrations. «Phil. Mag.», 1902, **3**, p. 338.

ном положении. Период колебания маятника

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{1}$$

Натяжение нити $F = mg\cos\theta$. (2)

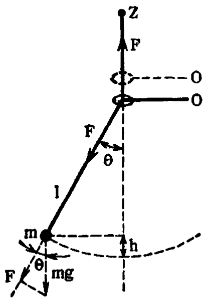


Рис. 1

Составляющая по оси x силы, действующей на кольцо,

$$f_x = F\sin\theta. \tag{3}$$

Составляющая силы по оси z

$$f_z = F - F\cos\theta = F(1-\cos\theta), \tag{4}$$

среднее значение

$$\bar{f}_x = 0, \quad \text{а } \bar{f}_z = \overline{F(1-\cos\theta)} = F\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2} + \ldots\right) = F\frac{\overline{\theta^2}}{2}.$$

При малом θ $F = mg\cos\theta = mg$. Полагая $\theta_{max} = \alpha$, имеем $\overline{\theta^2} = \frac{\alpha^2}{2}$; среднее $\bar{f}_z = \frac{1}{4}mg\,\alpha^2$.

В момент, когда маятник достигает своего крайнего положения, его потенциальная энергия $E = mgh = mgl(1-\cos\alpha)$,

$$E = \frac{mgl}{2}\alpha^2 = \frac{4\bar{f}_z l}{2},$$

$$\bar{f}_z = \frac{1}{2}\cdot\frac{E}{l}.$$

При медленном поднятии кольца производится работа

$$dW = \bar{f}_z dl = \frac{1}{2}\cdot\frac{E}{l}\,dl.$$

Колеблющаяся система теряет энергию

$$dE = -dW = -\frac{1}{2}\frac{E}{l}\,dl,$$

$$\frac{dE}{E} = -\frac{dW}{E} = -\frac{1}{2}\frac{dl}{l}.$$

Изменение длины маятника приводит к изменению периода:

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{2}\cdot\frac{dl}{l}; \qquad \frac{dE}{E} + \frac{d\tau}{\tau} = 0.$$

$$E\tau = \text{const}. \tag{5}$$

Эта величина $E\tau$ остается постоянной лишь при адиабатических изменениях.

Колебания струны. Примером адиабатической инвариантности может служить натянутая струна, совершающая поперечные колебания. Струна закреплена в точке P и проходит сквозь кольцо

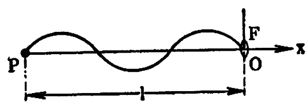


Рис. 2

O, которое способно смещаться в направлении Px (рис. 2). Длина струны — l, скорость распространения поперечной волны вдоль струны — v. При наличии между точками P и O n пучностей и $n-1$ узлов имеем

$$l = \frac{n\lambda}{2}, \qquad \lambda = v\tau,$$

где τ — период

$$\tau = \frac{\lambda}{v} = \frac{2l}{nv}.$$

Рэлей нашел, что средняя сила, с которой колеблющаяся система действует на кольцо,

$$F = \frac{E}{l};$$

E — энергия колебания системы. При медленном перемещении кольца изменение носит адиабатический характер. Работа dW, произведенная кольцом, оказывается равной энергии, потерянной колеблющейся системой

$$dW = -dE = \frac{E}{l}\,dl, \qquad \frac{dE}{E} = -\frac{dl}{l},$$

но

$$\frac{d\tau}{\tau}=\frac{dl}{l}, \qquad -\frac{dE}{E}=\frac{d\tau}{\tau} \text{ и } E\tau=\text{const}.$$

Само название «адиабатическая гипотеза» заимствовано из термо динамики, где адиабатическим процессом называется процесс, при котором система не поглощает и не отдает тепла. Система при этом может производить работу лишь за счет изменения своей внутренней энергии. Адиабатическое изменение в термодинамике рассматривается как последовательность термодинамически равновесных состояний. Адиабатические инварианты в физике рассматриваются как характеристики движения системы, не выходящего за пределы некоторой области, и остаются неизменными при очень медленном изменении внешних условий. Исторически учение о величинах, которые при рассматриваемых изменениях остаются неизменными, восходит к Л. Больцману. Формула Больцмана гласит:

$$\Delta Q=\frac{1}{\tau}2\delta\int T dt=\frac{1}{\tau}2\delta(\overline{T}\tau),$$

где $\overline{T}$ — среднее значение кинетической энергии системы, τ — период. Для адиабатического процесса $\Delta Q=0$; отсюда имеем: $\tau\overline{T}=\text{const}$ — адиабатический инвариант.

В 1914 г. Эренфест опубликовал статью «Об одной механической теореме Больцмана и ее отношении к теории квантов» [32]. Он указывает на известное в то время положение, что если сжимать излучение обратимо адиабатически сдвиганием ограничивающих его абсолютно отражающих стенок, то число колебаний ν_p и энергия E_p каждого колебания полости растут так, что

$$\delta\left(\frac{E_p}{\nu_p}\right)=0.$$

Эренфест ставит два вопроса. Первый из них: имеет ли «теорема адиабатического воздействия» место при переходе от гармонически колеблющихся систем к более общим системам? Второй — более сложный: как пользоваться теоремой адиабатичности при распространении гипотезы Планка на негармонические колебания? Дав утвердительный ответ на первый вопрос, Эренфест строит пример для второго.

В 1916 г. Эренфест вновь обратился к этой проблеме, но наиболее подробно рассмотрел ее в 1923 г. [34]

Очень наглядно гипотезу Эренфеста об адиабатической инвариантности пояснил Зоммерфельд. Имеется механическая система с любым начальным состоянием движения, которое может быть проквантовано. Постепенно включают произвольное внешнее силовое поле и бесконечно медленно изменяют состояние системы. Можно также бесконечно медленно изменять состояние системы путем изменения внутренних

---

[34] *Л. А. Глебов.* К развитию теории адиабатических инвариантов Эренфеста. «Вопросы истории естествознания и техники». М., 1961, стр. 57—60.

параметров системы (размеров, массы, заряда и т. д.). Первоначальное состояние переходит в новое. «Это новое состояние системы при новых условиях является состоянием, полностью описанным в квантовом отношении, если последнее имело место для начальной системы при данных начальных условиях; в обеих системах фигурируют одни и те же квантовые числа» [35].

Другой аспект гипотезы Эренфеста рассмотрел М. Борн. Он писал: «Именно поэтому Эренфест имеет огромную заслугу перед развитием квантовой теории, установив постулат, позволяющий дать определение квантовым величинам. Мысль Эренфеста основана на том, что атомные системы рассматривают не изолированно, как было до этого времени, но принимаются во внимание и внешние воздействия» [36]. Эренфест выставил требование, «чтобы, где только возможно и насколько возможно, при воздействии внешних влияний сохранилась классическая механика. Поэтому необходимо исследовать, в какой степени это возможно, не впадая в противоречия с принципами квантовой теории» [37].

В 1923 г. Эренфест опубликовал работу «Адиабатические преобразования в квантовой теории и их трактовка Нильсом Бором» [90]. В этой работе показано, какими путями понятия «адиабатический инвариант», «адиабатическая гипотеза» и формулировка теоремы об «адиабатической инвариантности априорного веса» были введены в квантовую механику и квантовую статистику. Эренфест не ставит перед собой задачу исследовать развитие понятия адиабатической инвариантности в целом, и поэтому он прежде всего подчеркивает, что «на путь, ведущий к адиабатическому принципу, нас привели закон излучения Больцмана и закон смещения Вина, вернее, та тайна, которая скрывается за изящными электродинамическими-термодинамическими выводами этих законов». Уже в теореме Рэлея (1902) речь идет об адиабатическом сжатии излучения, наталкивающем на мысль о расширении понятия адиабатического инварианта вне пределов механики. Это расширение провел Эренфест в своих фундаментальных исследованиях об адиабатической инвариантности. В работе 1923 г. он указал, что хотя из адиабатической гипотезы и следует, что квантовое условие Планка для синусоидальных движений является квантовым условием вообще, для всех тех движений с одной степенью свободы, которые можно адиабатически получить из синусоидальности, однако трудности возникают и в случаях примеиения к простым системам. Примером может служить определение квантовых условий для свободного вращательного движения жесткой молекулы. Несколько более общая система— вращающийся вокруг неподвижной оси жесткий диполь, помещенный во внешнее ориентирующее поле. Эренфест доказывает, что понятие адиабатической инвариантности оправдывает себя не только при установлении квантовых движений, но и при анализе вопроса о «весе априорной вероятности». Охарактеризовав роль адиабатических представлений в теории излучения, Эренфест углубил проблему. Он писал: «Каждое «квантово-дозволенное» (по терминологии Бора — «стационарное») движение недеформированной системы переходит в «квантово-дозволенное» движение деформированной системы». Следствия, выте-

---

[35] *А. Зоммерфельд.* Строение атома и спектры. М., 1956, стр. 299—300.
[36] *М. Борн.* Лекции по атомной механике, т. I, стр. 56.
[37] Там же.

кающие из расширенного Эренфестом понятия адиабатической инвариантности, были исключительно важны для развития квантовой теории в переходный период от теории Бора к механике Шредингера — Гейзенберга. В работе Эренфеста дан глубокий анализ вклада Бора в теорию адиабатических инвариантов.

В 1913 г. появились знаменитые работы Бора, положившие начало совершенно новому направлению развития квантовой теории. Эренфест сразу увидел, с какой коренной перестройкой основных представлений физики связаны новые идеи Бора. В августе 1913 г. он писал Лоренцу: «Работа Бора по квантовой теории формулы Бальмера (в «Phil. Mag.») привела меня в отчаяние. Если это — путь достижения цели, я должен отказаться от занятий физикой» [38]. В записных книжках и письмах Эренфеста этого времени нет никаких указаний на то, что он пытался как-то освоиться с теорией Бора. Как пишет Клейн [39], лишь после длительной беседы во время их первой встречи Эренфест проникся идеями Бора и в дальнейшем стал их восторженным пропагандистом; очень близкими стали и их личные отношения. Эта встреча произошла в 1919 г. в Лейдене, на защите диссертации учеником Эренфеста Крамерсом, который потом несколько лет работал в Копенгагене у Бора. Но еще в 1917 г. на XVI конгрессе нидерландских естествоиспытателей и врачей Эренфест выступил с докладом «Атомная модель Резерфорда—Бора» [40]. Но во всяком случае на работы 1913—1916 гг. идеи Бора никакого влияния не оказали. В 1921 г. на III Сольвеевском конгрессе Эренфест не только прочитал доклад заболевшего Бора «Применение квантовой теории к проблеме атома», но и выступил с собственным докладом «Принцип соответствия» [97], а в дискуссии отвечал на многочисленные вопросы по обоим докладам.

Сам ход дискуссии показывает, что многие участники конгресса — а среди них были наиболее видные физики того времени — еще недостаточно оценили значение обоих принципов — соответствия и адиабатической инвариантности. Это был период, когда Бор и его школа пытались разрешать многие проблемы атомной физики — строение сложных атомов и молекул, периодичность свойств атомов, интенсивность спектральных линий, поляризации излучения — с помощью сформулированного Бором в 1918 г. принципа соответствия между результатами квантовой и классической теорий в области больших квантовых чисел. Изложив общие основы теории строения атома Бора, Эренфест говорил, что Бор «добивается, насколько это возможно, чтобы его модель атома подчинялась классическим законам (принцип инерции, закон Кулона). Там, где это невозможно (излучение), он стремится установить возможно более широкое соответствие между движениями в атоме и его излучением. Для нахождения этого соответствия он руководствуется следующим эвристическим принципом: если приписывать квантовым числам системы все возрастающие значения, то испущенное излучение асимптотически стремится к тому излучению, которое система должна бы испускать по классическим законам». В заключение Эренфест говорил, что принцип соответствия позволяет в какой-либо

---

[38] Цит. по кн. М. Клейна, стр. 278.

[39] Там же, стр. 279.

[40] Труды этого конгресса, к сожалению, остались для нас недоступными. Сведения о докладе Эренфеста нами почерпнуты из «Fortschritte der Physik im Jahren 1917».

мере приблизиться к той будущей теории, которая устранит трудности, встречающиеся, когда явления излучения пытаются рассматривать, применяя одновременно квантовые методы и классические законы. Вместе с тем он предупреждал, что условие соответствия ни в коей мере нельзя считать уже окончательно установленным. Позже Бор писал об этом конгрессе: «Эренфест любезно согласился изложить мою статью, к которой он добавил очень ясное резюме существенных моментов, касающихся аргументации принципа соответствия. Благодаря тому что для Эренфеста характерен был острый критический подход, наряду с дружеской поддержкой любого, даже самого скромного успеха, его изложение правильно отразило состояние наших идей в это время, так же как и ощущение того, что приближается решающий успех» [41].

Эвристическую ценность принципа соответствия Эренфест показал в написанной совместно с Г. Брейтом статье [85]. Они рассмотрели парадокс, возникающий при определении стационарных состояний многократно-периодических систем. Трудность заключалась в том, что в этом случае энергия и статистический вес стационарных состояний при формальном учете строгого решения классических уравнений движения зависят только от микроскопических свойств движения. А это значит, что при подходе к пределу, где строгими являются только микроскопические свойства, возникают прерывности. Вблизи этого предела влияние микропериода исчезает и уравнения движения нельзя строго применять к описанию макроскопических свойств. Эренфест и Брейт на примере диполя, направление вращения которого регулярно меняется, показали, что излучающиеся «обертоны» вызывают переходы, соответствующим большим изменениям стационарного состояния. Они приближенно соответствуют переходам между стационарными состояниями свободно вращающегося диполя. Применение принципа соответствия позволило показать, что вероятность других переходов, которые должны были бы существовать согласно обычным правилам квантования механических систем, весьма мала. Эта интересная работа, обратившая внимание на существенный пункт квантовой теории, получила высокую оценку Бора.

Об интересе Эренфеста к теории Бора свидетельствовала и его небольшая заметка [44] о различии между спектрами изотопов. Астон воспользовался для объяснения различия между спектрами изотопов любых элементов формулой частоты, выведенной Бором с учетом массы ядра для водорода. Эренфест привел ряд возражений, в которых отмечалась сложность картины движения электронов в многоэлектронных атомах.

К 1922—1923 гг. относятся две работы, написанные совместно с Эйнштейном. В первой [87] было показано, что результаты опыта Штерна и Герлаха нельзя объяснить с точки зрения существовавших тогда квантовых представлений. Действительно, как известно, правильное объяснение могло быть дано только после введения понятия спина. Во второй статистические закономерности, установленные Эйнштейном в 1905 г., были распространены на случай, когда в элементарном процессе участвует одновременно несколько квантов, это позволяло глубже понять взаимодействие между излучением и материальными частицами.

---

[41] *Н. Бор.* Избранные научные труды, т. II, М., «Наука», 1971, стр. 598.

В статье 1924 г., написанной совместно с Р. Толмэном, Эренфест вводит термин «слабое квантование» для случаев, когда применение метода фазовых интегралов приводит к неверным значениям для статистического веса. Выявленные здесь трудности опять-таки сводились, как выяснилось вскоре, к необходимости учета тождественности частиц, т. е. к необходимости создания новой, квантовой статистики.

Даже после создания статистики Бозе — Эйнштейна Эренфеста не переставал занимать вопрос о логических основах теории излучения Планка, о соотношении между квантовыми и волновыми свойствами излучения. Это проявилось как в его выступлениях на IV съезде русских физиков в сентябре 1924 г. [39], так и в статье, посвященной эйнштейновским флуктуациям энергии [106, 107] в поле излучения. Его уже волнует вопрос, почему статистика Бозе — Эйнштейна в одном случае (поле излучения) применяется, а в другом (кристаллическая решетка) нет.

В создании квантовой механики Эренфест непосредственного участия не принял. Из работ, написанных после 1925 г., к интересующей нас проблеме относятся только три статьи [110, 115, 126]. В первых двух Эренфест вновь и вновь возвращается к излюбленной своей теме: каковы отношения между классическим и квантовым — между больцмановской и квантовой статистикой, между ньютоновской и волновой механикой.

После того как Шредингер, Ферми, Гейзенберг и Дирак показали, что обе квантовые статистики естественным образом вписываются в аппарат квантовой механики, Эренфест [60] пытался выяснить, как можно интерпретировать в рамках новых представлений статистику Больцмана. Он пришел к выводу, что последняя оказывается неприемлемой, только если на решения волнового уравнения накладывать дополнительное требование симметрии (симметричные или антисимметричные решения). Но Эренфест еще не видел, что не накладывать этого требования нельзя.

Более существенна работа 1927 г. [115], в которой была установлена теорема, вошедшая во все учебники квантовой механики под названием *теоремы Эренфеста*. В ней устанавливается прямая связь между средним значением производной по времени от момента количества движения и средним значением градиента потенциальной энергии, взятого с обратным знаком, и показывается, что это соотношение совпадает с классическим. Правда, Эренфест выражался еще в терминах волнового пакета, но это не меняет сути дела. Как отмечает Джеммер [42], выражение Эренфестом второго закона Ньютона в квантово-механических терминах произвело большое впечатление на физиков и способствовало принятию ими идей квантовой механики. Теорема Эренфеста была обобщена на консервативные системы с произвольным числом частиц Руарком.

В 1931—1932 гг. Эренфест прочитал цикл лекций по волновой механике, которые были изданы Казимиром в 1932 г. Многие слушатели Эренфеста впоследствии вспоминали, что чрезвычайное внимание уделялось логической структуре теории и выяснению существа физических идей, лежащих в основе теории. Естественно, что в начале 30-х годов, когда педагогически целесообразное изложение квантовой

---

[42] *M. Jammer*. The conceptual development of quantum mechanics. New York, 1966.

механики еще только создавалось, Эренфест болезненно воспринимал некоторые формальные приемы, которые оказались полезными в расчетах, но физическая сущность которых еще не была четко установлена. И хотя его работа 1932 г. «Некоторые неясные вопросы, относящиеся к квантовой механике» [126] возникла скорее как результат педагогических раздумий, она затронула, как отметил Паули в своих ответах [43], весьма тонкие вопросы, которые действительно оставались невыясненными. Анализ этой работы, как и замечательной статьи Паули, ответившего на большинство вопросов Эренфеста, невозможно дать в настоящем издании. Отметим только, что в свое время эти статьи были по достоинству оценены. Крамерс пишет, что в этой статье Эренфест «от своего собственного имени и от имени многих других выступает против определенной легковесности, бесспорно утвердившейся в современной литературе по атомной теории. Заключается эта легковесиость в том, что многие, главным образом молодые, люди в упоении от потока новых открытий с большой сноровкой пекут утверждения и формулы, а некоторыми рассуждениями и результатами оперируют так, как будто в них все предельно ясно, хотя там нет ничего похожего на по-настоящему ясное и критическое толкование проблемы» [44]. Уленбек вспоминает: «Многие из нас помнят одну из последних статей Эренфеста «Некоторые неясные вопросы, относящиеся к квантовой механике» и в свое время немало извлекли из нее и из тех ответов которые были в связи с ней даны Паули» [45].

Один из вопросов Эренфеста — это был скорее призыв, чем вопрос,— заключался в подчеркивании необходимости дать более доступное для физиков изложение спинорного исчисления. Паули считал себя недостаточно компентентным в этих вопросах, и на призыв откликнулся Эйнштейн. Статья «Полувекторы и спиноры», написанная им совместно с В. Майером, начинается так: «При всем громадном значении, которое приобрело в молекулярной физике понятие спинора, введенное Паули и Дираком, нельзя утверждать, что математический анализ этих понятий уже сейчас удовлетворяет нашим требованиям. Поэтому П. Эренфест и один из нас энергично настаивали на том, чтобы сосредоточить усилия для восполнения этого пробела. Эти усилия привели к результатам, которые, по нашему мнению, удовлетворяют всем требованиям ясности и естественности и не содержат непрозрачных искусственных приемов» [46]. Во второй статье, «Уравнения для полувекторов», они писали: «Мы с благодарностью отмечаем здесь, что эти исследования мы предприняли по настойчивому требованию Эренфеста дать логически простой и прозрачный анализ спиноров» [47].

Стимулирующее действие Эренфеста на работу других физиков в области квантовой теории неоднократно отмечалось его учениками и друзьями. Гаудсмит и Уленбек писали о помощи и поддержке, которую оказал им их учитель в работе по проблеме спина, Бор и Эйнштейн говорили, что беседы с Эренфестом помогли им при разработке наиболее сложных вопросов теории излучения и спектров. Понимая существен-

---

[43] *W. Pauli*. Einige die quantenmechanik betreffenden Erkundigungsfragen. «Zs. Phys.», 1933, 80, S. 573—586.
[44] См. наст. сб., стр. 253.
[45] Там же, стр. 263.
[46] *А. Эйнштейн*. Собрание научных трудов, т. III, стр. 535.
[47] Там же, стр. 568.

ное значение для науки спора между Бором и Эйнштейном по фундаментальным проблемам квантовой механики, Эренфест стремился к возможно более полному выявлению обеих точек зрения и стимулировал их дискуссию на V и VI Сольвеевских конгрессах (1927, 1930). «Сольвеевский конгресс 1930 г. был последним случаем,— писал Бор,— когда в наших дискуссиях с Эйнштейном мы могли воспользоваться присутствием Эренфеста, подзадоривавшего нас к спору и вместе с тем выступавшего в качестве посредника» [48]. Серьезную поддержку оказал Эренфест и советским физикам, работавшим в области квантовой теории [49].

Отношение Эренфеста к квантовой механике было достаточно сложным. Эйнштейн писал: «В последние годы это состояние обострилось из-за удивительно бурного развития теоретической физики. Всегда трудно преподавать вещи, которые сам не одобряешь всем сердцем; это вдвойне трудно фанатически чистой душе, для которой ясность — все. К этому добавлялась все возрастающая трудность приспосабливаться к новым идеям, трудность, которая всегда подстерегает человека, перешагнувшего за пятьдесят лет» [50].

И. Я. ИТЕНБЕРГ

ЭРЕНФЕСТ И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Начало научного творчества П. Эренфеста совпало с становлением теории относительности. Хотя в его работах в этой области и не содержалось фундаментальных результатов, они способствовали разъяснению физических основ теории относительности.

В начале XX в. одним из центральных вопросов, волновавших физиков, был вопрос об электроне. Надежно было установлено не только существование электрона, но и зависимость его массы от скорости, в особенности после опытов В. Кауфмана. В работах Г. Лоренца и М. Абрагама были получены аналитические выражения для этой зависимости, основанные на определенных предположениях о форме электрона. Абрагам считал, что электрон обладает неизменной шарообразной формой («твердый электрон») с равномерным объемным или поверхностным распределением заряда. Лоренц ввел представление о деформируемом в процессе движения электроне. Электрон сокращается в направлении движения тем больше, чем больше скорость, но при этом не изменяются размеры, перпендикулярные скорости.

А. Бухерер также считал электроны деформируемыми, но так, что при любых деформациях сохраняется объем электрона. Гипотезу Бухерера поддерживал П. Ланжевен. Естественно, что различные исходные предпосылки вели к различию в следствиях. Опыты Кауфмана не давали возможности сделать выбор, ибо погрешность опытов превышала разли-

---

48 *Н. Бор.* Избранные научные труды, т. II, стр. 422.
49 См.: *В. Я. Френкель.* Пауль Эренфест. М., Атомиздат, 1970.
50 *А. Эйнштейн.* Физика и реальность. М., «Наука», 1965, стр. 115.

чие между теориями, хотя сам Кауфман истолковал результаты своих измерений в пользу теории Абрагама. Поиски критериев выбора велись и с чисто теоретических позиций. Критики теории Лоренца указывали на ряд трудностей, возникающих в связи с представлением о деформируемом электроне. Так, Абрагам писал: «Последовательное проведение гипотезы сокращения принуждает к предположению, что наряду с внутренними электромагнитными силами есть еще другие, не электромагнитные внутренние силы, которые вместе определяют форму электрона» [1]. И тут же он отмечал, что отсутствуют доказательства таких сил, что заставляет серьезно сомневаться в справедливости гипотезы сокращения Лоренца. На необходимость введения таких сил указывал и А. Пуанкаре [2].

Представление о твердом электроне исключало вопрос о его устойчивости, но не давало возможности объяснить отрицательные результаты опытов по обнаружению «эфирного ветра». Электрон Лоренца хорошо согласовывался с принципом относительности, но возникала проблема его равновесия. В равной мере это относилось и к электрону Бухерера — Ланжевена.

Проблеме устойчивости электрона и была посвящена одна из первых работ П. Эренфеста, связанных с принципом относительности [3]. Он ограничился электроном Бухерера — Ланжевена, так как согласился с выводом Кауфмана в пользу «твердого электрона» Абрагама.

Пусть электрон покоится под действием своего собственного поля; форма равновесия электрона в этом случае — шар. Деформируем его в другую покоящуюся форму такого же объема.

Эренфест, пользуясь результатами работ А. М. Ляпунова об устойчивости, показал, что при равномерном объемном или поверхностном распределении заряда электрона потенциальная энергия для сферической формы больше, чем для любой другой деформированной формы равного объема. Такой электрон является, следовательно, неустойчивым и поэтому нельзя принять гипотезу Бухерера — Ланжевена. Чтобы считать устойчивым деформируемый электрон Лоренца или Бухерера — Ланжевена, необходимо предположение о действии на него сил неэлектромагнитного происхождения, обусловливающих его целостность. Но существование такого рода сил, замечает Эренфест, не установлено.

Следующая статья П. Эренфеста, связанная с принципом относительности, появилась в 1907 г. [4] и также была посвящена проблеме электрона. В ней обсуждался вопрос, пригодна ли динамика материальной точки для электрона, если считать электрон деформируемым (Лоренц), а не шарообразным (Абрагам).

К твердому электрону Абрагама применимы законы механики твердого тела. Он может двигаться равномерно и поступательно лишь тогда, когда импульс (в данном случае электромагнитный) совпадает с направлением движения. Поведеине электрона зависит от его формы.

---

[1] *M. Abragam.* Die Grundhypothesen der Elektronentheorie. «Phys. Z.», 1904, 5, S. 576.

[2] *А. Пуанкаре.* Динамика электронов. В сб.: «Принцип относительности». М.— Л., 1935, стр. 57.

[3] *P. Ehrenfest.* Zur Stabilitätsfrage bei den Bucherer — Langevin Elektronen. «Phys. Z.», 1906, 7, S, 302—303.

[4] *P. Ehrenfest.* Die Translation defomierbarer Elektronen und der Flächensatz. «Ann. Phys.», 1907, 23, S. 204—205.

Абрагам рассмотрел электрон и в форме эллипсоида вращения и получил, что равномерное поступательное движение без воздействия внешних сил возможно не по любому направлению, а только в направлении его главных осей. Если электрон движется под углом к главным осям, то возникает вращающий момент, вызванный действием частей электрона друг на друга. Для равномерного поступательного движения необходимо, чтобы какие-то внешние силы компенсировали этот вращающий момент. Кроме того, если такой деформируемый электрон ускорять, то должна быть совершена работа деформации против электрических сил электрона, иначе имеет место нарушение закона сохранения энергии.

Эренфест считал, что теория относительности Эйнштейна должна дать чисто дедуктивный ответ на вопрос о твердом или деформируемом электроне, ибо «релятивистская электродинамика Лоренца в формулировке, опубликованной Эйнштейном, рассматривается с достаточной общностью как замкнутая система» [5].

Может ли такой электрон двигаться равномерно и прямолинейно без внешнего воздействия? Если это невозможно, то следует исключить такие электроны из теории относительности, иначе имеем в них «инструмент» для констатации абсолютного покоя; если же такое движение возможно, то как его может объяснить теория относительности? Эренфест, таким образом, поставил вопрос, какая из теорий электрона согласуется с теорией Эйнштейна.

Эйнштейн в ответе Эренфесту не согласился с такой постановкой вопроса [6]. Он указал, что принцип относительности вместе с принципом постоянства скорости света нельзя трактовать как замкнутую систему, но лишь как эвристический принцип, который сам по себе содержит лишь высказывания о твердых телах, часах и световых сигналах. Эйнштейн кратко напомнил, как он пришел к уравнениям движения электрона в работе 1905 г. [7] Следует отметить, что в этой работе он не делал никаких предположений о форме электрона и рассматривал его как материальную точку. На преимущества такого подхода к динамике электрона впоследствии указывал М. Планк [8].

В своем ответе Эйнштейн отметил, что для описания движения электрона электродинамическим путем, не пользуясь принципом относительности, необходимо ввести предположения о распределении заряда по некоторому жесткому остову (твердому телу). Тем самым допускается существование сил неэлектродинамического происхождения. Задачу о движении электрона можно решить, если будет известна динамика абсолютно твердого тела. «В теории относительности мы еще далеко не достигли последней цели... Динамику, так и кинематику абсолютно твердого тела, для рассматриваемого случая следует считать пока неизвестной» [9].

---

[5] L. c., S. 204.

[6] *А. Эйнштейн.* По поводу заметки П. Эренфеста «Поступательное движение деформируемого электрона и теорема площадей». Собрание научных трудов, т. I, стр. 51—52.

[7] *А. Эйнштейн.* К электродинамике движущихся тел. Собрание научных трудов, т. I, стр. 7—35.

[8] *M. Planck.* Das Prinzip der Relativitätstheorie und die Grundgleichungen der Mechanik. «Verhandl. Deutsch. Phys. Ges.», 1906, 8, S. 136—141.

[9] *А. Эйнштейн.* Собрание научных трудов, т. I, стр. 52.

Ответ на поставленный Эренфестом вопрос дал М. Лауэ [10], который показал, что действующий на движущийся электрон момент вращения компенсируется моментом, создаваемым потоком энергии, аналогично тому, как в опыте Троутона и Нобля электромагнитный момент вращения компенсируется моментом, создаваемым потоком упругой энергии. Поэтому деформируемый электрон может двигаться равномерно и прямолинейно.

Последующие работы Эренфеста были посвящены обсуждению понятия твердого тела в теории относительности. Первая из них, «Равномерное вращательное движение твердых тел и теория относительности» [11], послужила началом широкой дискуссии. В ней приняли участие Эйнштейн, Борн, Лауэ, Зоммерфельд, Герглотц, Нетер, Игнатовский и др. В 1909 г. М. Борн в работе «Теория твердого электрона в кинематике принципа относительности» [12] впервые попытался дать определение твердого тела, удовлетворяющее принципу относительности.

Борн воспользовался идеями Минковского, учеником которого он был. По Борну, тело считается твердым, когда любой, сколь угодно малый элемент объема этого тела, покоящийся в сопутствующей этому элементу объема системе координат, не деформирован. Эренфест сразу же отметил узость определения Борна. Это определение не допускало переход тела из состояния покоя в состояние равномерного вращательного движения вокруг неподвижной оси. Он констатировал противоречие, вытекающее из определения Борна; это противоречие получило впоследствии название «парадокс Эренфеста».

Абсолютно твердый цилиндр радиуса R приводится из состояния покоя в состояние равномерного вращения вокруг неподвижной оси. Свяжем с каждым очень малым элементом длины, расположенным вдоль радиуса, инерциальную систему отсчета, по отношению к которой этот элемент покоится. Так как цилиндр твердый, то длины этих элементов в связанных с ними системах такие же, как для неподвижного цилиндра. Те же результаты получит и неподвижный наблюдатель, измеряющий этот же радиус в некоторый момент времени, поскольку каждый элемент радиуса перпендикулярен направлению мгновенной скорости и поэтому не испытывает лоренцева сокращения по сравнению с состоянием покоя, т. е. $R' = R$ (R — радиус цилиндра, R' — радиус цилиндра с точки зрения неподвижного наблюдателя).

Но каждый элемент окружности этого цилиндра, движущийся мимо неподвижного наблюдателя, испытывает лоренцево сокращение, так как он движется в направлении мгновенной скорости. Поэтому $2\pi R' < 2\pi R$, т. е. мы пришли к противоречию. Этот мысленный эксперимент, простота и изящество которого (как и последующие) столь характерны для Эренфеста, сразу обнажил всю проблему. Его можно рассматривать, кстати, как доказательство невозможности существования абсолютно твердого тела в теории относительности [13].

---

[10] *M. v. Laue.* Zur Dynamik der Relativitätstheorie. «Ann. Phys.», 1911, 35, S. 524—542.

[11] *P. Ehrenfest.* Gleichförmige Rotation starrer Körper und Relativitätstheorie. «Phys., Z.», 1909, 10, S. 918.

[12] *M. Born.* Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzip. «Ann. Phys.», 1909, 30, S. 1—56.

[13] См., например: *Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц.* Теория поля. М., 1962, стр. 57—58.

Две другие статьи Эренфеста [14] вызваны работой В. Игнатовского «Твердое тело и принцип относительности» [15]. Отметим лишь основные результаты этой работы.

Игнатовский шел по пути, совершенно аналогичному пути Борна. Он также дал дифференциальное условие твердости элемента объема, исходя из идей Минковского, связав с элементом объема систему координат. Из своего условия твердости Игнатовский получил, что твердое тело можно перевести из состояния покоя в состояние равномерного вращения вокруг неподвижной оси.

Он пришел к выводу, что твердое тело может двигаться только прямолинейно-трансляционно, хотя Герглотц и Нетер [16], пользуясь определением Борна, показали, что возможно и криволинейно-трансляционное движение. Игнатовский рассмотрел пример Эренфеста (вращающийся около неподвижной оси цилиндр) и получил, что длина окружности цилиндра меньше, чем в состоянии покоя, хотя радиус его имеет одно и то же значение и в покое, и при вращении. Эренфест резко полемизировал с Игнатовским. Он прежде всего отметил, что определение Игнатовского идентично определению твердости Борна, но следствия, полученные из него, прямо противоположны тем, к которым пришли другие авторы.

Эренфест снова указал на противоречивость вывода Игнатовского в мысленном эксперименте с вращающимся цилиндром. Он приводит еще один очень наглядный мысленный эксперимент в подтверждение своего предыдущего вывода. На неподвижном диске нанесено множество меток. Покоящийся наблюдатель переносит эти метки на кальку $П$, которую он держит над диском. Диск начинает вращаться, и, когда его вращение становится равномерным (стационарное вращение), тот же покоящийся наблюдатель переносит на другую кальку $П_1$ над диском сразу все метки в один момент времени. Затем сравнивается распределение отметок на кальках $П$ и $П_1$. Измеренные на $П_1$ длина окружности и радиус — именно те величины, которые рассматривал Игнатовский. Эренфест поставил два вопроса. Вопрос 1. В чем различие в измерениях на $П$ и $П_1$ по методу Игнатовского? «Вопрос 2. Высказывания, которые делает Игнатовский о «синхронно измеренных» длине окружности и радиусе и которые, как это ни странно, он считает абсолютно непротиворечивыми, привели бы к следующим высказываниям о кальках: калька $П_1$ имеет *тот же самый* радиус, что и $П$, и при этом *длина окружности на ней короче*».

Как можно представить себе непротиворечиво кальки с подобными свойствами? [17] Игнатовский согласился с замечаниями Эренфеста [18].

Резко критиковал Эренфест и утверждение Игнатовского о распространении силового воздействия в теле со сверхсветовой скоростью.

---

[14] *P. Ehrenfest.* Zu Herrn v. Ignatowsky's Behandlung der Born'scher Starrheitdefinition. «Phys. Z.», 1910, **11**, S. 1127—1129; 1911, **12**, S. 412—413.

[15] *W. v. Ignatowsky.* Der starre Körper und das Relativitätsprinzip. «Ann. Phys.», 1910, **33**, S. 607—630.

[16] *G. Herglotz.* Über den vom Standpunkt des Relativitätsprinzip aus als «starr» zu bezeichneten Körper. «Ann. Phys.», 1910, **31**, S. 393—415; *F. Noether.* Zur Kinematik des starren Körpers in der Relativitätstheorie. «Ann. Phys.», 1910, **31**, S. 919—944.

[17] L. c., «Phys. Z.», 1910, **11**, S. 1129.

[18] *W. v. Ignatowsky.* Elastizitätstheorie. «Phys. Z.», 1911, **12**, S. 168.

Он показал, пользуясь геометрическими представлениями Минковского и учитывая причинно-следственную связь между событиями, ошибочность выводов Игнатовского. Игнатовский не согласился с замечаниями Эренфеста, считая, что он его не понял, но за этот вывод его критиковал и Зоммерфельд. Исторически интересен тот факт, что эти работы были написаны во время пребывания П. Эренфеста в России. Вопросы, связанные с теорией относительности, трудности в определении понятия «твердого» тела Эренфест избрал темой своего выступления на XII съезде русских естествоиспытателей и врачей, состоявшемся в Москве с 28 декабря 1909 г. по 6 января 1910 г. Он намеревался выступить на съезде с двумя сообщениями: «Твердое тело и принцип относительности» и «Толкование энтропии у Больцмана и Гиббса» [19].

30 декабря 1909 г. Эренфест выступил с первым сообщением на заседании физической секции. Заседание было целиком посвящено теории относительности; кроме доклада Эренфеста были прочитаны доклады «Вывод постоянства скорости света из принципа относительности» (В. С. Игнатовский), «Теория относительности и строение электрона» (П. С. Эпштейн) [20].

«Журнал Русского физико-химического общества» писал впоследствии об этом заседании: «Дневное заседание 30 декабря представляло большой интерес благодаря боевому вопросу о принципе относительности, в сфере которого вращались все доклады» [21].

Доклад Эренфеста имел огромный успех. А. Ф. Иоффе писал жене 31 декабря 1909 г.: «Съезд сначала был скучный, но затем интерес возрос и достиг апогея на докладе Эренфеста, который имел необычайный успех и по содержанию, и по впечатлению, которое произвели его искренность и увлечение: сейчас он — самый популярный человек. Сегодня он избран почетным секретарем на вечернее заседание» [22].

Свое выступление в более широком плане Эренфест изложил в статье «Принцип относительности», появившейся вскоре в «Журнале Русского физико-химического общества» [23].

Принцип относительности как универсальный принцип возник из отрицательных результатов опытов, предпринятых с целью обнаружить влияние движения Земли на оптические и электрические явления. Это было обобщением принципа относительности классической механики на все области физики. Но допустимо ли такое обобщение на основе упомянутых опытов, спрашивает Эренфест, на любые физические явления? Для ответа он сравнивает принцип относительности с другими универсальными принципами — первым и вторым началами термодинамики, которые содержат утверждения об «опытах с отрицательными результатами».

Сходство между этими принципами обнаруживается и в следующем. «Для того чтобы никакие «идеальные» опыты не противоречили

---

[19] «Дневник XII съезда русских естествоиспытателей и врачей», 1910, № 1, стр. 18.

[20] Там же, № 5, стр. 170—171.

[21] *Л. Исаков*. Физика на XII съезде русских естествоиспытателей и врачей. ЖРФХО, 1910, **42**, отд. 2, вып. 2, стр. 43—49.

[22] Цит. по кн.: *В. Я. Френкель*. Пауль Эренфест. М., Атомиздат, 1971, стр. 35.

[23] См. наст. сб., стр. 1—12.

этим принципам, такие физические параметры, которые на первый взгляд стоят в совсем случайиой связи, должны при более подробном рассмотрении обнаружить между собой почти невероятную предустановленную гармонию» [24]. Эту гармонию можно обнаружить с помощью «идеальных» опытов — мысленных экспериментов, о роли и значении которых он говорил на съезде. Эренфест и рассмотрел такой мысленный эксперимент — «опыт с шаром», который представлял собой эффектное и наглядное изложение опыта Майкельсона — Морли. Этим мысленным экспериментом он затем воспользовался в своей лейденской речи. Наблюдатель находится в центре огромного полого шара с зеркальной внутренней поверхностью (расстояние, равиое радиусу шара, свет проходит за час). Он посылает световой импульс. Какую картину увидит наблюдатель в случае покоящегося шара и в случае его движения с околосветовой скоростью?

Эренфест сопоставил разные точки зрения. В случае покоящихся шара и наблюдателя ответ одинаков в любой теории. Однако для движущегося вместе с шаром наблюдателя ответ зависит от его взглядов на процесс распространения света.

Принцип относительности требует, чтобы эксперимент дал совершенно одинаковые результаты и для покоящегося и для движущегося шара. Такой же вывод следует из теории полностью увлекаемого эфира. Но совершенно другой будет наблюдаемая картина, если эфир считать покоящимся; здесь и выступает вся наглядность и доходчивость опыта. Наблюдатель увидит последовательно вспыхивающими различные участки внутренней поверхности шара, т. е. он смог бы отличить покой от движения, обнаружить «эфирный ветер». Но это оказалось невозможным. Чтобы сохраиить гипотезу о неподвижном эфире, пришлось ввести гипотезу «сокращения» не только для тел, но и для отдельного электрона.

Гипотеза об изменении формы электрона не вызывает сочувствия у Эренфеста, не раз высказывавшегося по вопросу электрона. Его симпатии явно на стороне недеформируемого электрона Абрагама. Но его научная честность заставляет отметить значимость этой гипотезы. Эренфест затем переходит к анализу взглядов Эйнштейна. Печатание статьи «Прииицип относительности» не было закончено, однако свои взгляды на воззрения Эйнштейна он высказал в своей лейденской речи, напечатанной вскоре и в России [25]. Эренфест сопоставил две теории, отказывающиеся от представления об эфире вообще: теорию Ритца и теорию Эйнштейна. Он не отдавал первенства какой-либо из этих теорий, предпочитая, видимо, сохранить понятие эфира.

Вклад Эренфеста в теорию относительности не такой весомый, как в другие разделы физики. Это связано с его отношением к этой теории. Эйнштейн, вспоминая свою первую встречу с Эренфестом, писал: «Мы обсуждали также теорию отиосительности, которую он воспринял хотя и несколько скептически, но отдавая ей должное со свойственной ему способностью критического суждения» [26]. Критические замечания Эренфеста, их ясность и простота безусловно помогали становлению теории относительности, а его остроумные «мысленные» эксперименты не потеряли своего значения до сих пор.

---

[24] Там же, стр. 2.
[25] Там же, стр. 12.
[26] Там же, стр. 233.

В. Я. ФРЕНКЕЛЬ

ПАУЛЬ ЭРЕНФЕСТ

По классификации, предложенной В. Оствальдом в его книге «Великие люди», Пауль Эренфест (1880—1933) удивительно подходит под категорию ученых-классиков. Вся его научная деятельность концентрировалась вокруг двух коренных проблем — квантовой теории и статистической механики и физики, и можно без труда проследить преемственность его работ. Французскому математику Адамару приписывают остроумно-шутливое высказывание о том, что гениальные математики предлагают те или иные теоремы, а талантливые — доказывают их справедливость. Эренфест был — с этой точки зрения — талантливейшим физиком-теоретиком, прояснившим многие положения, высказанные в области статистической механики и квантовой теории его гениальными современниками — Больцманом, Планком, Эйнштейном, Бором. Редко встречающийся дар научной критики был очень характерным для Эренфеста. В его случае указанный дар выходит за обычные рамки и приобретает самостоятельное значение. Стимулирующую критику Эренфеста высоко ценили Эйнштейн и Паули, Бор и Ланжевен, о ней писали его ученики — Гаудсмит, Уленбек и Дике. «Его величие,— отмечал Эйнштейн,— заключалось в чрезвычайно хорошо развитой способности улавливать самое существо теоретического понятия и настолько освобождать теорию от ее математического наряда, чтобы лежащая в ее основе простая идея проявлялась со всей ясностью. Эта способность позволяла ему быть бесподобным учителем» [1]. Она же делала его незаменимым на конгрессах, где он был желанным участником и в тех случаях, когда не выступал там с докладом о своих собственных работах.

В годы, предшествовавшие построению квантовой механики, в мире существовало несколько особо притягательных точек для физиков. Это была Кавендишская лаборатория — сначала с Д. Д. Томсоном, а потом с Э. Резерфордом; это был Мюнхен с А. Зоммерфельдом, Копенгаген с Н. Бором, Геттинген с Борном и Франком и, наконец, Лейден, где в течение двадцати лет Эренфест представлял теоретическую физику, занимая кафедру, переданную ему Лоренцем.

Помимо большого вклада, внесенного Эренфестом в развитие физики нашего века собственными работами и упомянутым выше критическим дарованием, он очень много сделал для становления и укрепления физики не только в Голландии, но и в нашей стране — как до, так и после революции, а также и в США. Тот печальный факт, что его заслуги недостаточно оценены, а имя сравнительно мало известно младшему поколению физиков, является, по справедливому замечанию И. Е. Тамма, ничем не оправданным.

ДЕТСТВО. СТУДЕНЧЕСКИЕ ГОДЫ. НАЧАЛО НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Пауль Эренфест родился в Вене 18 января 1880 г. Он был последним (пятым) ребенком в семье Сигизмунда Эренфеста. О его детстве мы узнаем из полусотни страничек воспоминаний, оставленных самим Эренфестом. Он писал их в Лейдене осенью 1932 г. Каждый отрывок

[1] *А. Эйнштейн.* Собрание научных трудов, т. IV, стр. 190.

датирован, часто помечено даже время: «Религия» — 2 октября 1932 г., 12 час. 45 мин. ночи; «Как мы жили первые восемь лет моего детства» — 3 октября 1932 г., 8 час. вечера, и т. д.

Ведя обширнейшую переписку, Эренфест обычно пользовался пишущей машинкой. (Так, он писал «коллективное» письмо жене и дочерям и отсылал всем по экземпляру). Когда он печатал, дробный перестук, приглушенный массивными двойными дверями, был все же слышен в других комнатах. Поэтому поздно вечером, когда дом погружался в сон, Эренфест, устроившись на диване, писал автоматическим пером. На стене поблескивали застекленные портреты Максвелла, Больцмана, Феликса Клейна, Эйнштейна... Там же висели и фотографии русских писателей и виды Кануки — дачного места, в котором Эренфесты отдыхали каждое лето, живя в России. Слева от дивана теснились полки с книгами и висела большая черная доска; у противоположной стены стоял рояль и снова книжные шкафы.

Итак, часть вечеров осени 1932 г. Эренфест отдавал воспоминаниям...

...Из четырех братьев наибольшее влияние на мальчика оказал самый старший, Артур (1862—1931), способный инженер. В венской квартире Эренфестов Артур установил (еще в 1883 г.!) телефон, электрический звонок, наладил камеру-обскуру. Маленький Пауль узнал из его рассказов об устройстве этих технических новинок. В живом и популярном изложении брата мальчик услышал о законе Ома и законе сохранения энергии. Все это настолько органично запечатлелось в его памяти, что позднее он не мог вспомнить, когда услышал о них впервые, как не помнил, когда впервые узнал названия предметов и животных. В том, что юный Пауль сделался физиком, немаловажную роль сыграло и знакомство с учебником по этому предмету, принадлежавшим его братьям-гимназистам. Он буквально зачитывался выброшенной ими, хорошо иллюстрированной, но совершенно растрепанной книгой.

В 1912 г. в письме к Лоренцу Эренфест писал о том, что в гимназические годы глубокое влияние на него оказал его друг Густав Герглотц, впоследствии крупный математик. Пауль познакомился с ним примерно в 1896 г., но слышал о нем раньше: слава о необыкновенно одаренном математике из гимназии Франца-Иосифа вышла далеко за пределы этой, одной из лучших в Вене, средней школы. Может быть, именно это послужило для Эренфеста стимулом для перехода в новую гимназию, где он проучился два последних года. Густав был на класс старше Пауля. Через Герглотца Эренфест познакомился еще с двумя влюбленными в математику молодыми людьми — Гансом Ганном и Генрихом Тийтце. Вместе они составили «неразлучную четверку», увлеченно занимавшуюся точными науками. Даже во время прогулок в поэтическом Венском лесу молодые люди беседовали о математике, которая была для них высокой поэзией!

В числе гимназических преподавателей, которых Эренфест вспоминал позднее, был его учитель физики С. Валлентин, автор одного из учебников физики. Но, очевидно, Валлентин был исключением: Эйнштейн, анализируя гипертрофированную требовательность к себе, характерную для Эренфеста, пишет о тягостных воспоминаниях, связанных у него с гимназией, и что в силу этого Эренфест «отказался доверить какой-либо школе своих нежно любимых детей».

В 1899 г. Эренфест поступает в Высшую техническую школу в Вене и одновременно начинает посещать философский факультет

Венского университета, где велось преподавание физико-математических дисциплин. Славу Венского университета тех лет составлял Людвиг Больцман, у которого Эренфест прослушал ряд курсов (сначала— электричество и магнетизм, теория теплоты; позднее—статистическая механика). В 1901 г. Эренфест оставляет Высшую техническую школу и переходит в университет. Но в 1901 г. Больцман на два года покинул Вену, и университет потерял для Эренфеста свою притягательную силу. В октябре 1901 г. он переезжает в Геттинген, чтобы продолжить там свое образование.

В начале нашего века университет в Геттингене, по свидетельству Макса Борна, был «Меккой немецких математиков». Его славу поддерживали три «пророка» — профессора Феликс Клейн, Давид Гильберт и Герман Минковский. Именно в их пору достигла своего апогея восходящая еще к Гауссу традиция приложения математики к развитию наук о природе. Они-то и привлекали в Геттинген талантливую молодежь, которая стекалась со всей Германии, да и не только из Германии.

Первоначальным импульсом, привлекшим Эренфеста к Геттингену, послужило желание прослушать ряд курсов, читавшихся там Иоганном Штарком, приват-доцентом университета (позднее—Нобелевским лауреатом) [2]. Однако Эренфест сразу же стал посещать ряд лекционных курсов — до пятнадцати, как можно судить по его Anmeldungsbuch'у — аналогу нашей зачетной книжки. Пожалуй, наибольший интерес у него вызвали лекции Феликса Клейна и его семинары по математике. Поэтому когда говорят об учителях Эренфеста, то к имени Больцмана с полным основанием присоединяют и имя Клейна.

В Геттингене Эренфест провел более полутора лет. На него обратили внимание крупные математики — Клейн, Гильберт, Минковский, Цермело (ученик Планка и идейный противник Больцмана), а также физики — М. Абрагам, В. Фойгт, И. Штарк. Из студентов и слушателей, с которыми познакомился Эренфест в Геттингене, надо прежде всего назвать швейцарца Вальтера Ритца, ставшего его близким другом, и русского математика Татьяну Афанасьеву — его будущую жену.

Когда в 1903 г. в Вену (из Лейпцига) возвратился Больцман, сразу же вернулся туда и Эренфест. Он становится постоянным и деятельным участником семинара Больцмана, посещает семинары Ф. Хазенёрля. Один из участников этих семинаров рассказывал, что во время своего доклада Эренфест на память процитировал довольно длинную выдержку из больцмановской работы. Слушавший его Больцман уже с первой фразы цитаты начал улыбаться, а в конце расхохотался: «Если б я сам хотя бы одну из своих работ знал так же хорошо!»

Вместе с тем, как показывает проведенное М. Клейном рассмотрение эренфестовских дневниковых записей начала 900-х годов, его отношения с Больцманом складывались не всегда ровно. Молодой человек, с его напористой манерой добиваться полной ясности, которая, увы, не всегда могла быть достигнута, порой, очевидно, раздражал стареющего Больцмана. По воспоминаниям сокурсника Эренфеста Филиппа Франка (известного физика и первого биографа Эйнштейна), однажды, когда Эренфест атаковал Больцмана целой серией вопросов,

[2] *M. Klein.* Paul Ehrenfest, v. 1. N. Y., 1970.

тот не без раздражения спросил: не считает ли он его лимоном, из которого без конца можно выжимать все соки?

Однако знаменательно, что именно Эренфест обратился к Больцману в день его 60-летия (в феврале 1904 г.) с краткой речью — перед лицом заполненной студентами аудитории, стоя приветствовавшей своего любимого профессора.

В марте 1904 г. Эренфест заканчивает свою докторскую диссертацию («Движение твердых тел в жидкостях и механика Герца»). Ее тема стоит в стороне от всего, чем Эренфест занимался позднее, а сама она оставалась неопубликованной и только в 1959 г., в виде фотокопии с написанного его рукой текста, была включена в собрание сочинений Эренфеста [3].

Оппонентом по диссертации Эренфеста выступил Больцман, который в своем предварительном заключении от 13 мая 1904 г. отозвался о ней с большой похвалой и выразил уверенность в том, что «господин кандидат может быть допущен к строгой защите».

В июне того же года, успешно защитив диссертацию, Эренфест стал доктором философии Венского университета со всеми вытекающими из этого звания преимуществами, в частности с возможностью начать преподавательскую деятельность в стенах европейских или американских высших учебных заведений.

Конец 1904 г. был ознаменован для Эренфеста еще одним важным событием — женитьбой на Татьяне Алексеевне Афанасьевой (1876—1964). В 1900 г. Т. А. Афанасьева с золотой медалью окончила математическое отделение физико-математического факультета Высших Бестужевских курсов в Петербурге и стала работать там в качестве ассистента на кафедре математики. В ее обязанности входило ведение практических занятий с курсистками. Осенью 1902 г. она была командирована в Геттингенский университет для усовершенствования в математике и физике. Там, на лекциях Клейна [4], она познакомилась с Эренфестом, который стал бывать в доме Афанасьевых (Татьяна Алексеевна жила в Геттингене с близкой родственницей). Чувство взаимной симпатии, возникшее между молодыми людьми, довольно быстро сменилось более глубоким и сильным.

Решив зарегистрировать свой брак в Вене, Эренфесты оказались перед лицом неожиданно возникших трудностей: существовавшие в Австрии законы запрещали брак — и церковный и гражданский — между христианами и нехристианами (Эренфест был еврей). Впрочем имелась одна возможность обойти этот средневековый закон с помощью поправки, выдержанной в духе тенденций нового времени. В Австрии (как и в дореволюционной России) в паспортах ее подданных фиксировалась не национальность, а вероисповедание. Люди, не придерживавшиеся каких-либо религиозных взглядов, могли при желании в соответствующей графе паспорта поставить «Konfessionslos», что означало «не придерживающийся никакого вероисповедания». Граждан-

[3] *P. Ehrenfest.* Collected Scientific Papers. Ed. by M. Klein. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1959.

[4] 28 мая 1902 г. Т. А. Афанасьевой было выдано свидетельство о том, что она «допускается к слушанию лекций и участию в практических занятиях профессоров Клейна, Гильберта и Фойгта в продолжение летнего семестра 1902 г., в случае если она будет иметь письменное согласие указанных профессоров». Такое согласие было ею получено.

ский брак между двумя «Konfessionslos» был разрешен законом, и Пауль Эренфест и Татьяна Афанасьева, официально перейдя в «неверие», смогли оформить свои отношения в Венском муниципалитете. Их свидетелем был известный физик профессор Антон Лампа.

Два последующих года Эренфесты жили в Вене и Геттингене, а в 1907 г. выехали в Россию. Первое свидетельство того, что переход на положение «Konfessionslos» чреват определенными практическими трудностями, Эренфест получил вскоре по прибытии в Россию. Чиновник из полицейского управления долго не мог смириться с тем, что́ он должен вписать в графу о вероисповедании,— случай в его практике беспрецедентный. Никакие доводы не могли его убедить; наконец, он с отчаянием спросил Эренфеста: «А на каком кладбище мы вас похороним, если вы здесь умрете?!» Двадцатисемилетний Эренфест рассмеялся и заявил, что смерть не входит в его планы.

В РОССИИ (1907—1912)

Эренфестам казалось, что в Петербурге, где было много учебных заведений и мало физиков, им будет нетрудно найти работу. Об этих физиках П. С. Эренфест знал по рассказам жены, а с одним из них — Абрамом Федоровичем Иоффе, учеником Рентгена, познакомился незадолго до приезда в Петербург, в Мюнхене. Встреча произошла в июле 1907 г. в кафе «Луц», в кругу местных физиков — завсегдатаев этого кафе. Ученик Рентгена понравился ученику Больцмана.

Павел Сигизмундович — так стали называть Эренфеста в России — благодаря общению с друзьями и коллегами жены быстро сумел разобраться в физико-математической обстановке Петербурга. Со времени П. Л. Чебышева при Петербургском университете сложилась блестящая математическая школа, традиции и слава которой в начале XX в. поддерживались трудами А. А. Маркова, А. Н. Коркина, В. А. Стеклова и их учеников. Из русских математиков наибольшее влияние на Эренфеста (о чем он писал позднее Лоренцу) оказал В. А. Стеклов. Другим ученым, которого Эренфест высоко ценил и который примыкал скорее к математикам, чем к физикам, был А. Н. Крылов. С физиками дело здесь обстояло иначе. Трудности, встававшие на пути молодого человека, желавшего заниматься физикой в стенах Петербургского университета, определялись не только бедностью оборудования и скудностью выделяемых средств. «Трагедией петербургской физики» назвал А. Ф. Иоффе те ненормальные отношения, которые сложились в университете между математиками и физиками.

Математики предъявляли чрезмерно суровые требования к магистерским экзаменам, которым подвергались физики, желавшие посвятить себя преподавательской деятельности. Создавалось парадоксальное и действительно трагическое положение: люди, имевшие достаточно широкую известность, опубликовавшие серьезные исследования, которых с избытком хватило бы и на докторскую диссертацию, не могли получить право на защиту магистерской!

Четкой программы по математике не было, а так как математики, за исключением Стеклова, считали, что специальной «математики для физиков» нет (А.Н. Коркин даже резко возражал против самого термина «математическая физика»), то физикам нужно было сдавать по

На даче в Кануке, 1912 г. Т. А. Эренфест-Афанасьева, П. Эренфест, А. Б. Ференгер, К. К. Баумгарт

существу всю математику. К тому же физиков «резали» еще и дополнительными вопросами.

Эренфест, включаясь в борьбу с этим «математическим произволом», решил, что надо сначала сдать экзамены — в том объеме, который документально зафиксирован. Ведь получение докторской степени в русском университете увеличивало вероятность устройства на работу в высшем учебном заведении России.

В марте 1910 г. В. К. Лебединский писал одному из коллег: «У нас теперь здоровая контроверсия[5] о магистерских экзаменах: Эренфест узнал по печатному уставу, что для физиков не нужен экзамен по теории вероятностей, и заявил, что не будет его держать. В факультете поднят вопрос: Хвольсон написал громовую критику на всю экзаменационную систему. И, кажется, теорию вероятности выхерят. Д. С. Рождественский успешно выдержал половину экзаменов; с него, очевидно, и начнутся петербургские магистранты без теории вероятностей».

Успешно сдал все магистерские экзамены и Эренфест, однако это не помогло ему получить постоянную преподавательскую работу. За все пять лет пребывания в России он только в течение двух семестров читал «временный курс» (с 1 января 1909 г. по 1 января 1910 г.) по некоторым вопросам математической физики для студентов старших курсов и преподавателей электромеханического факультета Политехнического института, не будучи зачислен в его штат. («И что это был за курс!»— вспоминает А. Ф. Иоффе.). Тем более удивительно то, что

[5] Контроверса (от латинского controversia) — разногласие, спор.

Эренфест оказал такое сильное влияние на развитие физики в Петербурге тех лет.

Для талантливой молодежи, учившейся в стенах Петербургского университета и живо интересовавшейся новой физикой, приезд Эренфеста сыграл огромную роль. Эренфест по существу был первым физиком-теоретиком в России. К тому же он приехал из Западной Европы, где в предшествовавшее десятилетие были осуществлены революционные открытия и исследования Рентгена, Беккереля, супругов Кюри, Планка и Эйнштейна. Именно эти открытия и предопределили бурное развитие физики. Не удивительно, что вокруг Эренфеста стала концентрироваться физическая молодежь.

Эренфесты жили на втором этаже деревянного дома на Лопухинской улице (ныне улица академика Павлова). Петербургские физики (А. Ф. Иоффе, Д. С. Рождественский, В. Ф. Миткевич, Л. Д. Исаков, К. К. Баумгарт) и математики приходили сюда на семинары. «Kruschok», как называл эти семинары П. С. Эренфест в письмах, собирался по средам, во второй половине дня.

Студенческая молодежь была представлена Ю. А. Крутковым, В. Р. Бурсианом, Г. Г. Вейхардтом, В. М. Чулановским, В. Г. Хлопиным, В. В. Дойниковой. Подруга Татьяны Алексеевны В. В. Дойникова рассказывает, что незадолго до приезда в Петербург Эренфеста она была рекомендована к поездке для усовершенствования в Геттинген. Посетив первые семинары Павла Сигизмундовича, она решительно отказалась от заграничной поездки: «У нас здесь теперь свой Геттинген!»

Среди математиков, посещавших семинар, назовем А. А. Фридмана, Я. Д. Тамаркина, а также С. Н. Бернштейна. Эти семинары явились не только превосходной школой для перечисленных молодых людей. Именно на них сам Эренфест вырос в прекрасного лектора и руководителя. Всякий желавший мог обратиться к нему и получить тему для разработки. Единственным требованием была искренняя и не поверхностная заинтересованность предметом. Пришедшего к нему на квартиру молодого человека Павел Сигизмундович неизменно и сразу же спрашивал: «Ну, какие у вас возникли вопросы?» Под вопросами он понимал прежде всего не неясности, встречавшиеся при штудировании книги или статьи, а идеи, связанные с дальнейшим развитием соответствующей проблемы. Обсуждение подобных вопросов начиналось в кабинете, а продолжалось за обеденным столом: дом Эренфестов был хлебосольным и открытым.

В статье о физике, опубликованной в сборнике «Десять лет советской науки» и написанной по живым воспоминаниям о событиях недавнего прошлого, указывается, что «...первые шаги научного самоопределения теперешних (т. е. конца 20-х годов.— *В. Ф.*) руководителей физических исследований были сделаны лет 10—20 тому назад. К этим временам относятся первые тонкие эксперименты по световым явлениям Д. С. Рождественского, первые нащупывания А. Ф. Иоффе свойств кристаллов, первые смелые штрихи теории намагничивания В. К. Аркадьева. Более 20 лет тому назад П. С. Эренфест, в бытность свою в Петербурге, увлек многих молодых физиков своим глубоким анализом физической теории; некоторые из них в настоящее время являются наиболее яркими представителями математической физики» [6].

Итак, свою выдающуюся роль одного из организаторов петербург-

[6] «Десять лет советской науки». М.— Л., 1927, стр. 31.

ской физики Павел Сигизмундович выполнял, разумеется безотчетно, в стенах своей собственной квартиры. Немаловажное значение имело и его участие в деятельности Русского физико-химического общества, членом которого он стал почти сразу же по приезде в Петербург (его кандидатуру в сентябре 1907 г. рекомендовали И. И. Боргман, О. Д. Хвольсон и К. К. Баумгарт). Он принимал активное участие во всех заседаниях общества, выступал с многочисленными докладами — реферативными или оригинальными — либо в прениях по докладам.

В 1911 г. на заседании физического отделения общества Эренфест принял горячее участие в обсуждении положения, в котором оказался Московский университет после выступления реакционного царского министра просвещения Кассо. В результате действий Кассо лучшие профессора университета, в том числе П. Н. Лебедев, К. А. Тимирязев и многие, многие другие, как известно, вынуждены были покинуть его стены. В протоколах заседания отмечено, что в прениях «особенно взволнованно выступали Иоффе и Эренфест».

Существенной была роль Эренфеста и в работе «Журнала Русского физико-химического общества» (он начал сотрудничать в нем в 1909 г.). Эта деятельность Павла Сигизмундовича стимулировалась, во-первых, активным желанием быть в гуще событий русской физической жизни и, во-вторых, в какой-то степени определяла его официальный статус и служила хотя и небольшим, но все же источником заработка. Сводилась же она к внутрижурнальному рецензированию статей, определению материалов и подбору авторов для обзорной части журнала, имевшей название «Вопросы физики», а также улаживанию периодически и неизбежно возникавших в процессе издательской деятельности конфликтов.

Не говоря о том, что Эренфест публиковал в ЖРФХО свои статьи и обзоры, он довольно интенсивно занимался реферированием новых статей и публиковал рецензии на книги. Среди более чем двадцати такого рода рефератов и рецензий следует остановиться на одной из последних рецензий, опубликованной в конце 1910 г. и являющейся откликом на издание книги Л. Кутюра «Алгебра логики», выпущенной одесским издательством «Матезис». В этой рецензии привлекает прежде всего мастерски написанное Эренфестом введение в предмет. В нем Эренфест указывает, что «чрезвычайно тонкая классификация различных типов суждений и умозаключений, выработанная уже в сознании, находит в языке слишком тяжеловесный и неточный инструмент для своего выражения». Поэтому возникла специфическая символика, поначалу игравшая вспомогательно-стенографическую роль. Ее значение впоследствии было существенно расширено; причину этого Эренфест объясняет, обращаясь к ситуации, сложившейся в свое время в химии. «Формулы химии,— пишет он,— доставляют не только систематическую регистратуру различных веществ, но, кроме того, преобразования этих формул, произведенные по определенным правилам, соответствуют химическим преобразованиям». Эренфест доходчиво иллюстрирует символику и уравнения алгебры логики. Однако главное, что привлекает в его рецензии,— это заключительные замечания, которые мы воспроизведем здесь полностью.

«Символическая формулировка дает возможность «вычислять» следствия из таких сложных систем посылок, в которых при словесном изложении невозможно разобраться.

К счастью, уже отвыкли требовать от каждой математической спекуляции прежде всего «практической пользы». Тем не менее, быть может, уместно коснуться вопроса о том, не встречаются ли в физике и технике в самом деле такие сложные системы посылок. *Мне думается, что на этот вопрос следует ответить утвердительно*. Пример: пусть имеется проект схемы проводов автоматической телефонной станции. Нужно определить: 1) будет ли она правильно функционировать при любой комбинации, могущей встретиться в ходе деятельности станции; 2) не содержит ли она излишних усложнений.

Каждая такая комбинация является посылкой, каждый маленький коммутатор есть логическое «или — или», воплощенное в эбоните или латуни; все вместе — система чисто качественных (в сети слабого тока именно *не* количественных) «посылок», ничего не оставляющая желать в отношении сложности и запутанности.

Следует ли при решении этих вопросов раз навсегда удовлетвориться гениальным, а по большей части просто рутинным способом пробования на графике?

Правда ли, что, несмотря на существование уже разработанной «алгебры логики», своего рода «алгебра распределительных схем» должна считаться утопией?»

Дальнейшее развитие электротехники и автоматики действительно потребовало построения теории устройств релейного (дискретного) действия, как контактных, так и бесконтактных. И Эренфест оказался, в принципе, первым, кто предсказал, что инструментом этой теории будет разработанная алгебра логики. Подчеркивая это обстоятельство приоритетного характера, мы, разумеется, далеки от мысли утверждать, что конкретное приложение методов булевой алгебры к оптимальному построению и расчету соответствующих схем и устройств началось на основании такого рода указаний Эренфеста. Рецензии, публикуемые в журнале, не всегда внимательно просматриваются даже постоянными читателями. Тем более невероятно, чтобы на одну из таких рецензий обратил внимание кто-либо из инженеров-электротехников. Это была типичная «преждевременная идея», обнаруженная много лет спустя, когда предвидение Эренфеста уже начало сбываться [7].

Сохранилось немало свидетельств живого участия Эренфеста в работе съездов русских физиков и математиков. В конце 1909 г. он был в числе петербургских физиков, приехавших на XII съезд естествоиспытателей и врачей в Москву, причем выступал там не только на заседаниях физиков, но и перед взыскательной аудиторией математиков. Интересно, что все свои, правда, немногочисленные статьи чисто математического характера Эренфест написал в течение тех пяти лет, что провел в России. Именно тогда состоялось его знакомство с П. Н. Лебедевым, в доме которого он неоднократно бывал вместе с А. Ф. Иоффе. В конце 1911 г. он имел большой успех, выступая на заседании II Менделеевского съезда в Петербурге с докладом о теории относительности.

Отметим еще участие П. С. Эренфеста в работе I Всероссийского съезда преподавателей математики, собравшегося в Петербурге практически одновременно с Менделеевским съездом. Павел Сигизмундо-

---

[7] См.: *М. А. Гаврилов*. Теория релейно-контактных схем. М., Изд-во АН СССР, 1950; *В. Н. Рогинский*. Построение релейных схем управления. М., «Энергия», 1964.

вич, как и Татьяна Алексеевна, были членами организационного комитета съезда и выставочной его комиссии. Не будучи докладчиком, Эренфест неоднократно выступал в прениях. Так, обсуждая вопросы, поднятые в докладах Н. А. Томилина и М. Л. Франка, о номографии и графическом методе преподавания математики, он отметил, что «...в Австрии установлено правило, чтобы преподаватели математики и физики в средней школе выбирались не из числа окончивших математические факультеты университетов, а из окончивших политехнические заведения, так как именно в этих заведениях, а не в университетах студенты выполняют полный цикл графических и физических работ. С моей точки зрения,— закончил Павел Сигизмундович,— было бы чрезвычайно важно, чтобы геометрические построения считались нужными и преподавание не начиналось с аналитических вопросов» [8].

Хотя редакционная работа, выполнявшаяся Эренфестом, была очень живой, искренне интересовала его и вместе с тем приносила очевидную пользу важному делу объединения физиков России вокруг их превосходного журнала, эта деятельность все же не могла дать ему полного удовлетворения. Естественно, ему хотелось заниматься преподаванием, читать регулярные курсы лекций, но чем дольше оставался он в России, тем яснее с грустью убеждался, что эти надежды вряд ли осуществятся.

В 1911 г. Эренфест предпринимает попытки найти преподавательскую работу за пределами России. С этой целью он выезжает за границу, чтобы выяснить возможность устройства в каком-либо из университетов. Он встречается с рядом выдающихся физиков, выразивших свое согласие помочь ему в этом жизненно важном для него деле [9]. Но все попытки такого рода терпят провал. Это относится и к тем усилиям, которые прилагал Эйнштейн, пытаясь, с помощью П. Вейсса, устроить Эренфеста в одном из высших учебных заведений Швейцарии. Оптимизм, который поначалу проявил при этом Эйнштейн, вскоре сменился раздражением. 3 июня 1912 г. он писал Эренфесту: «Сейчас освободилось место в Базеле, но тамошние парни... отдают предпочтение — по протекции — халтурщикам, импотентам с точки зрения физики!»

К этому времени совершенно неожиданно для Эренфеста возникли реальные возможности. В мае 1912 г. он получил письмо от Лоренца, в котором содержалось предложение занять его кафедру в Лейденском университете. Независимо от того, получит ли идея Лоренца поддержку голландского министерства просвещения, от которого зависело утверждение, или не получит, это предложение окрылило Эренфеста: столь лестным был сам факт выбора Лоренцем его, Эренфеста, в качестве своего преемника.

Лето и начало осени 1912 г. Эренфесты, как обычно, провели в маленькой деревушке Кануке, неподалеку от известного и популярного в среде русской художественной и научной интеллигенции курорта Гугенбурга (теперь Усть-Нарва) — живописного места на Балтийском побережье. В Кануке в течение ряда лет по соседству с Эрен-

---

[8] «Труды I Всероссийского съезда преподавателей математики», т. 1. СПб., 1913.

[9] См. извлечения из переписки Эренфеста с Лоренцем и пояснительную статью, публикуемые в настоящем сборнике (стр. 214—227).

фестами жил А. Ф. Иоффе; к Эренфестам на дачу часто приезжали и гостили там петербургские физики и математики, преимущественно молодежь.

На чердаке своей дачи Павел Сигизмундович устроил кабинет. Из окна открывался чудесный вид на море и поросшие густым лесом Синие горы.

В Кануке хорошо работалось и отдыхалось, но самый конец лета 1912 г. прошел под знаком томительного ожидания вестей от Лоренца. Наконец, 16 сентября Лоренц телеграммой известил Павла Сигизмундовича об утверждении его в звании профессора Лейденского университета. Вскоре пришло его подробное поздравительное письмо, а вслед за ним еще одно — от Эйнштейна.

«Дорогой господин Эренфест,— писал Эйнштейн 20 сентября 1912 г.,— сердечно поздравляю Вас с получением извещения от Лоренца! Исключая Вас, никто не будет так радоваться, как я, Вашему приглашению в Голландию! Вы принадлежите к той наименьшей части теоретиков, которые не потеряли рассудка от эпидемии математизации».

Основным итогом пятилетней научной работы Эренфеста в России была серия его статей по статистической механике (выполненных в значительной части совместно с женой), завершенных и объединенных фундаментальной энциклопедической статьей [10]. Выход этой статьи в клейновской энциклопедии математических наук — издании, к участию в котором привлекались крупнейшие физики мира (в том числе Больцман),— упрочил и без того прекрасную репутацию, завоеванную Эренфестом своими предыдущими работами. И не случайно, что эта статья сыграла такую роль в его судьбе: ведь именно прочитав статью, можно полагать, Лоренц и укрепился в решении пригласить Эренфеста на свою кафедру в Лейден.

В ГОЛЛАНДИИ

Голландия — страна, давшая миру ряд замечательных ученых. Голландцем был Гюйгенс, в Голландии работал Левенгук, голландцами были Ван-дер-Ваальс и Вант-Гофф. Именно ко времени работы двух последних физика в Голландии достигла особого расцвета. На рубеже XIX—XX в. и в первые десятилетия XX в. там работали Лоренц, Зееман, Каммерлинг-Оннес — все трое были одними из первых лауреатов Нобелевской премии по физике. В 1912 г. среди физиков имел широкую известность молодой ученик Зоммерфельда Питер Дебай, впоследствии также Нобелевский лауреат. Примерно к этому же времени относятся и работы Ван-дер-Брока, связавшего с номером элемента в таблице Менделеева не атомный вес этого элемента, а заряд его ядра (1913).

Гендрик Лоренц, по воспоминаниям Эйнштейна, однажды сказал: «Я счастлив, что принадлежу к нации слишком маленькой для того, чтобы совершать большие глупости».

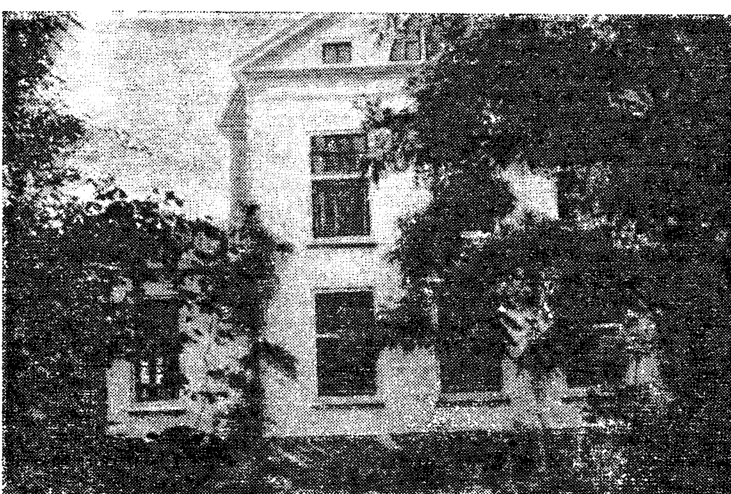
---

[10] *P. und T. Ehrenfest*. Begriffliche Grundlagen der Statistischen Auffassung in der Mechanik. «Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften», Bd. IV, 2, 11, Heft 6, Leipzig, 1912.

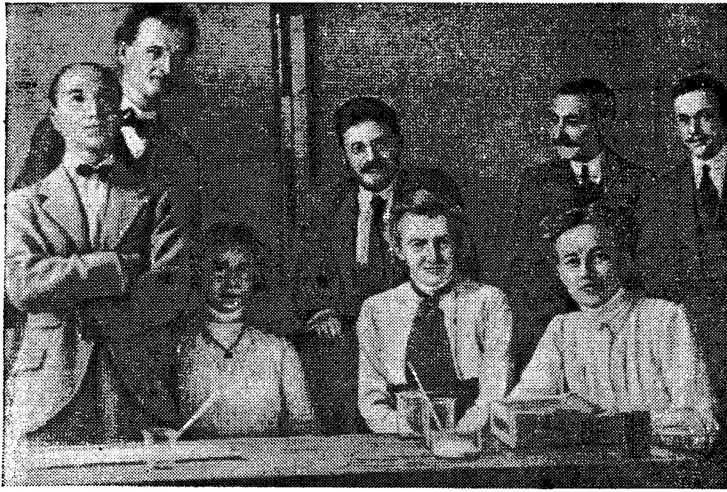
В одном из своих писем Лоренц подробно описал Эренфесту освященную традициями процедуру вступления в профессорское звание. Она была весьма красочной и совершалась не иначе как в первую среду каждого месяца. Будущий профессор перед лицом совета попечителей университета и его сената (т. е. ученого совета) должен был принести присягу верности королеве и торжественно пообещать уважать законы. Текст присяги заканчивался словами: «И да поможет мне в этом всемогущий бог!» В этот момент присягающему следовало поднять правую руку с двумя разжатыми пальцами. «Я должен добавить,— писал Лоренц 29 сентября 1912 г.,— что в нашей стране от служащих не требуется каких-либо пояснений, касающихся их личных убеждений, скажем, их отношений к религии»,— пункт, который был особенно важен для Эренфеста.

Еще до присяги Эренфесту предстояло произнести вступительную речь на любую угодную ему тему. Он решил говорить о теории относительности, взяв за основу принесшее ему большой успех выступление на II Менделеевском съезде в Петербурге в декабре 1911 г. Эта речь («Кризис в гипотезе о световом эфире»), произнесенная 4 декабря 1912 г., была опубликована в ЖРФХО. Обращаясь к студентам, Эренфест сказал: «Я прошу вас видеть во мне старшего товарища по учебе, а не человека, который стоит на другой ступени на пути к познанию. Я и сам не могу себя чувствовать иначе вблизи нашего великого общего учителя — г-на Лоренца».

Лоренц жил в Гарлеме, в получасе езды от Лейдена, куда он приезжал не реже чем раз в неделю, чтобы прочесть традиционную лекцию. На этих лекциях бывали все крупнейшие физики мира, в частности Эйнштейн. Таким образом, Эренфест виделся с Лоренцем еженедельно; кроме того, они находились в теснейшей научной переписке — сохра-



Дом Эренфеста в Лейдене



Группа физиков в лаборатории. Сидит (вторая справа) Т. А. Афанасьева-Эренфест. Стоят (справа налево): третий — П. Эренфест, четвертый — Э. Пикар

нилось множество их писем, причем переписка велась на родном языке Лоренца.

Эренфесты начали обживаться в Голландии. Накануне мировой войны они построили на окраине Лейдена двухэтажный дом необычной для Голландии «русской» архитектуры с несколькими верандами — уютное и красивое жилище, расположенное на улице с поэтичным названием «Аллея Белых Роз». Улица упиралась в широкий Флит-канал, с обеих сторон окаймленный набережными. По одной из них, носившей имя знаменитого голландского художника Яна ван Гойена, Эренфест, обычно на велосипеде, ездил в университет.

Почти сразу же по приезде Эренфеста в Лейден начал собираться его семинар по теоретической физике. Появились первые голландские ученики Эренфеста — Крамерс, Бюргерс. После войны к ним присоединились молодые ученые из других стран. Назовем, к примеру, Энрико Ферми: известно, что именно пребывание в Лейдене благотворно сказалось на всей его дальнейшей блестящей карьере. Более года в Лейдене провел известный американский физик Грегори Брейт.

В Голландии Эренфест выполнил ряд замечательных работ. Первая в их ряду — по времени и, вероятно, по значимости — это работа по адиабатическим инвариантам в квантовой теории. Основные статьи из этого цикла опубликованы в настоящем сборнике; они получили высокую оценку Эйнштейна и особенно Бора. Это связано с тем, что принцип соответствия Бора во многом базируется на адиабатической гипотезе.

Осенью 1924 г. Эренфест выступил на съезде физиков в Ленинграде — за год примерно до рождения новой квантовой механики. В докладе «К квантовой теории» он, естественно, уделил много внимания работам Бора. Изложив систему его постулатов и блестящий результат по объяснению спектров, к которому они приводят, Павел Сигизмундович в какой-то момент отошел от исписанной формулами доски и, обращаясь к аудитории, сказал, что как счастлив должен быть Бор, когда увидел такие, далеко идущие результаты своих теоретических построений, какая это завидная для ученого судьба. Он добавил, что представить себе глубину ощущений, которые, наверное, охватили Бора, сам он, соблюдая должный масштаб, может, сопоставив их с тем радостным волнением, которое он испытал, когда разработал свою теорию адиабатических инвариантов. «Это — лучшее, чего мне удалось достигнуть!» — воскликнул Эренфест.

ЭЙНШТЕЙН, БОР, ЭРЕНФЕСТ

Первое знакомство Эйнштейна и Эренфеста носило, если можно так выразиться, чисто «журнальный» характер. В 1907 г. Эренфест выступил на страницах «Annalen der Physik» с небольшой заметкой, в которой обсуждал проблему движения деформируемого электрона, обладающего (в соответствующей системе координат) несимметричной формой. Возможно ли для такого электрона — в отсутствие внешних сил — равномерное и прямолинейное движения в любом направлении? Подобный вопрос был связан с тем, что направление электромагнитного импульса электрона не совпадает с направлением его скорости. Отсюда следует, что при движении должен возникнуть вращающий момент; поэтому, для того чтобы равномерное и прямолинейное движение могло осуществиться, необходимо существование внешней пары сил, которая бы компенсировала указанный момент. Итак, если подобное движение невозможно для какого-либо направления, замечает Эренфест, то мы получаем в руки «инструмент» для определения состояния абсолютного покоя. Если же подобное движение возможно, то отсюда следует необходимость привлечения новых аксиом — в рамках теории относительности Эйнштейна, чтобы понять причину возникновения вращающего момента. Вывод из этого противоречия, полагал Эренфест, может быть получен посредством дедукции из теории относительности, являющейся, по его словам, «замкнутой системой». Эйнштейн откликнулся на эту заметку в том же выпуске журнала.

Другие небольшие публикации Эренфеста, связанные с теорией относительности, касались понятия абсолютно твердого тела в рамках этой теории. В литературе 10—20-х годов эта дискуссия, развернувшаяся вокруг работ по абсолютно твердому телу, стала называться, по названию заметки Эйнштейна 1911 г., «парадоксом Эренфеста».

Именно в этой связи и завязалась в 1911 г. переписка между обоими учеными. Личное же их знакомство состоялось в январе 1912 г. [11], когда после II Менделеевского съезда в Петербурге Эренфест посетил Германию и Австрию. Поздней осенью 1912 г. Эренфест встретился с Эйнштейном в Берлине, по дороге в Лейден. Эйнштейн вспоминает, что во время первой встречи (в Праге) говорили они в основном о науке: о планковской теории, о теории относительности. Из статьи Эренфеста, опубликованной им совместно с Г. Брейтом в 1921 г., следует, что ими обсуждался вопрос и об адиабатических инвариантах и о пере-

[11] К. Зелиг в книге «Альберт Эйнштейн» относит его, впрочем, ко времени пребывания Эйнштейна в Берне (т. е. до 1909 г.).

ходе диполя от гармонического колебательного движения к равномерному вращению. Теорию относительности Эренфест, по словам Эйнштейна, воспринимал «хотя и несколько скептически, но отдавая ей должное со свойственной ему способностью критического суждения». Весь первый день прошел в разговорах, начавшихся в кафе и продолженных в доме у Эйнштейна, с музыкальным антрактом, во время которого Эренфест и Эйнштейн играли сонаты для скрипки и фортепиано Брамса. В записной книжке Эренфеста появилась запись: «Да, мы станем друзьями — я страшно счастлив!» Как далекое эхо, пришедшее более через двадцать лет, звучит признание Эйнштейна в его мемориальной статье: «За несколько часов мы стали настоящими друзьями, будто наши чаяния и мечты были одинаковыми. Нас соединила тесная дружба продолжавшаяся до его смерти».

С 1912 г. переписка между обоими учеными приняла систематический характер. Эйнштейн держит Эренфеста в курсе своих новых работ на подступах к общей теории относительности; они обсуждают вопросы специальной теории относительности — в связи с замечаниями Эренфеста. И не раз в письмах Эйнштейна мелькают такие фразы: «Я убедился в вашей правоте» (как писал он ему, например, 28 мая 1913 г. из Цюриха). Эйнштейн начинает бывать в Голландии.

В августе 1914 г. началась первая мировая война. Однако Голландия и Германия не были в состоянии войны. Переписка Эйнштейна с Эренфестом не прерывается, и в Лейден, который Эйнштейн называл «благополучным уголком этой ужасной планеты», регулярно приходят его письма. В декабре 1914 г. Эйнштейн писал: «Международная катастрофа легла на меня, как интернационалиста, тяжким бременем. Живя в эту «великую эпоху», трудно примириться с тем, что ты принадлежишь к идиотскому, отвратительному виду, который хвастается своей «свободой воли». Как я хотел бы, чтобы где-нибудь существовал остров для тех, кто мудр и доброжелателен. В таком месте даже я был бы пылким патриотом!» Надо заметить, что Эйнштейн, как и другие ученые (в частности, Лоренц), потратил немало усилий, призывая правительства воюющих держав прекратить кровопролитие.

В октябре 1919 г. Эйнштейн после длительного перерыва оказался в Лейдене, откуда писал своей матери: «Вчера я присутствовал на сессии Академии — с Эренфестом и Лоренцем. Лоренц говорил об общей теории относительности и исследованиях Британской экспедиции — чтобы доставить мне удовольствие, разумеется. Окончательные результаты находятся теперь в исключительно точном соответствии с теорией».

Присуждение Эйнштейну Нобелевской премии наталкивалось на трудности. Преодолеть их Комитету помогли голландские коллеги и друзья Эйнштейна: Лоренц, Каммерлинг-Оннес и Эренфест. Их хлопоты диктовались прежде всего тяжелым финансовым положением, в котором Эйнштейн оказался в условиях Германии, охваченной инфляцией. Эренфест, как наиболее близкий Эйнштейну человек, взял на себя переговоры о приглашении Эйнштейна в Голландию — тем более своевременные и закономерные, что уже вскоре после триумфа новой теории ее творец начал подвергаться в Германии систематической травле со стороны махровых реакционеров как за свои политические убеждения, так и за чисто научную сторону своей работы. «Ты будешь иметь здесь,— писал ему Эренфест 2 сентября 1919 г.,— непосредственный контакт с Лоренцем, де Ситтером, со мной, Кюненом, Дросте, де Гаазом и его женой, Фоккером, Бюргерсом, Юлиусом и

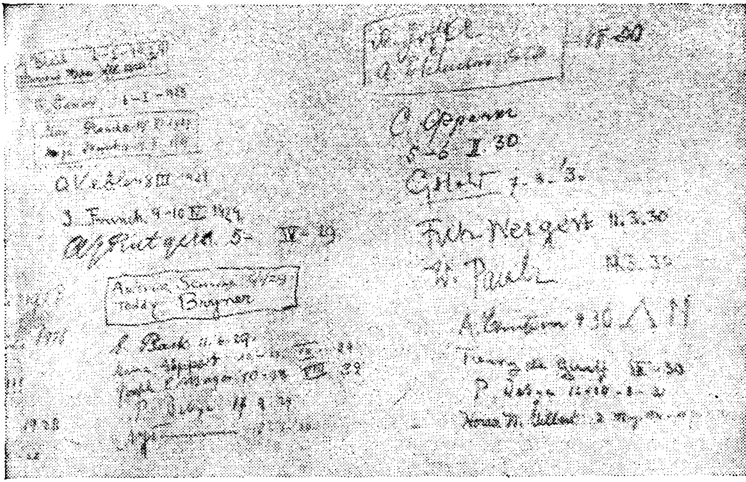
Зееманом (или находиться поблизости от всех нас), а также и с другими очень интеллигентными и приятными по своим человеческим качествам молодыми людьми... При всех условиях прошу ответить мне прямо: «Да, твое предложение не так уже безумно!» Дорогой Эйнштейн, мне необходимо только это и ничего больше, чтобы дать ход делу. И еще: не отвечай мне отказом сразу. Даже если ты и не можешь решиться, для развития физики здесь будет очень важно, что целый ряд людей прилагал организованные усилия со специальной целью — устроить твой переезд сюда. Помни, Эйнштейн, что ты здесь окажешься среди людей, любящих тебя не только за твои «мозги» и то, что можно из них выжать... Обидно,— заключает Эренфест свое письмо,— что приходится долго рассуждать с тобой по такому поводу, в отношении которого нам совершенно очевидна наша правота».

На это письмо Эйнштейн ответил 12 сентября 1919 г.: «Дорогой Эренфест, твое предложение просто сказочно, а те слова, в которые оно воплощено, столь сердечны, что ты едва ли сможешь себе представить, в какое душевное смятение привело меня такое письмо. Ты ведь знаешь, в каком восторге я от Лейдена и как я всех вас люблю! Но дело не так просто, и, для того чтобы поступить правильно, я не могу следовать только велениям моего сердца. Я пересылаю тебе письмо, которое получил в Цюрихе от Планка. В ответ на него я обещал Планку не покидать Берлина до тех пор, пока ситуация там не станет такой, что этот шаг будет представляться мне единственным и правильным. Ты едва ли имеешь представление, на какие жертвы здесь (в Берлине.— *В. Ф.*) приходится идти — при общем тяжелом финансовом положении,— чтобы обеспечить здесь мое пребывание и дать мне возможным содержать живущую в Цюрихе семью. Было бы вдвойне неблагодарно с моей стороны, если бы в момент осуществления моих политических надежд и, может быть, даже частично во имя внешних выгод я без необходимости отвернулся от людей, которые окружили меня любовью и дружбой и для которых разлука со мной во время этого кажущегося унижения оказалась бы еще более болезненной».

20 октября 1919 г. Эйнштейн приезжает в Лейден и останавливается у Эренфестов. По возвращении в Берлин он пишет: «Дорогой Эренфест, да, время, которое мы провели вместе, было действительно чудесным и безмятежным... Таких радостных дней мне не доводилось проводить ни в одном доме! И всем этим я обязан двум независимым и цельным натурам, которые бескомпромиссно связали свои судьбы. Я теперь приучился смотреть на вас обоих, как на частицу самого себя, и вместе с тем чувствую себя так, словно я — частица вас. Так давайте же отныне сохранять эти глубоко человеческие узы. Я знаю, что это благотворно скажется на нас обоих и что каждый из нас благодаря другому не будет отныне чувствовать себя таким чужим в этом мире».

Эйнштейн не переехал в Голландию, но в конце 1919 г. стал «почетным профессором» Лейденского университета. 5 мая 1920 г. на соответствующей церемонии в Лейдене он прочел доклад примерно на ту же тему, что и Эренфест восемью годами ранее: «Эфир и теория относительности».

Визиты Эйнштейна в Голландию становились все более частыми. Останавливался он непременно у Эренфестов и подолгу жил у них. В их доме была выделена специальная комната для гостей, и по чьему-то почину возникла традиция: перед отъездом гость расписывался на стене. Коллекция настенных автографов включает весь цвет тео-



Надписи на стене «гостевой комнаты» в доме Эренфеста

ретической физики XX в.: Эйнштейн, Бор, Планк, Борн, Гейзенберг, Паули, Дирак, Шредингер, Ферми, Дебай... Подписям Эйнштейна часто сопутствуют те или иные формулы, удостоверяющие, очевидно, тот факт, что именно они и связанные с ними теории наиболее интенсивно обсуждались в тот раз под крышей дома Эренфестов. Здесь же и подписи советских ученых: А. Ф. Иоффе, П. С. Александрова, П. Л. Капицы, И. Е. Тамма, А. Н. Фрумкина, А. И. Шальникова.

В кабинете Эренфеста стоял рояль, подаренный Эйнштейном, висела скрипка, на которой он играл, приезжая в Лейден,— иногда пьесы для скрипки соло, а иногда концерты для скрипки и фортепиано, место за которым в таких случаях занимал Эренфест. Чаще всего играли Баха, Брамса, Корелли. П. Л. Капица рассказывал, что, когда он в первой половине 20-х годов был у Эренфеста в Лейдене, там ждали Эйнштейна. Эренфест предупредил Капицу: «Имейте в виду, Эйнштейн не виртуоз, однако критиковать его промахи в скрипичной игре лучше не надо — критикуйте его физические работы, тут он бесконечно терпим!»

Такая же тесная дружба связывала Эренфеста и с Нильсом Бором. В данном случае можно говорить о дружбе между обеими семьями: сохранились письма к Эренфесту и — более редкие — к Татьяне Алексеевне от жены Бора, г-жи Маргерет Бор, и его брата, известного математика Харальда Бора, а также ответные письма всем им от Эренфеста.

Первая встреча Бора и Эренфеста произошла в Лейдене, на защите докторской диссертации ученика Эренфеста — Крамерса в 1919 г. С этого времени между обоими учеными завязалась интенсивная переписка. 28 апреля жена Бора писала Эренфесту, что ее муж с признательностью вспоминает «об исключительной дружественности, которую он встретил со стороны Вашей и Вашей супруги, и о чудесных днях, проведениых в Вашем доме». Другое письмо жены Бора — от 18 ноября 1921 г.: «Вы не можете себе представить, как мы оба рады Вашему и Таниному (старшей дочери Эренфеста.— *В. Ф.*) приезду... мой муж всем сердцем радуется, предвкушая эту встречу и возможность поговорить с Вами... У меня к Вам есть несколько просьб: 1) чтобы Вы ни в какой мере не думали, что Ваш приезд связан с хлопотами или утомит нас — он только доставит нам удовольствие; 2) чтобы Вы приехали как можно скорее. У нас здесь все очень просто — и еда, и комнаты, и обслуживание, но я надеюсь, что Вы будете чувствовать себя как дома». В третьем письме, адресованном г-жой Бор Татьяне Алексеевне, читаем: «Мой муж очень полюбил Вашего супруга... Он так благодарен ему за оказанную помощь и немецкий перевод его последней работы и только сожалеет, что злоупотреблял его временем. Все здесь находятся под впечатлением от вдохновенных и чудесных докладов, которые сделал Ваш муж в Копенгагене. А у нас дома он так замечательно играл и рассказывал о музыке».

Нильс Бор 19 мая 1922 г. писал Эренфесту: «Я очень огорчен, что не смог заехать к Вам по дороге в Англию... Дни, проведенные в Англии, были великолепны; Резерфорд был еще более чудесным, чем всегда. То же можно сказать и о Ричардсоне, которого я очень люблю,— я получил много радости, общаясь с ним».

Бор говорит о том, что занятость мешала его работе, особенно процессу писания и обработке материалов, которых накопилось очень много. «Эти материалы,— продолжает он,— в основном относятся к общим принципам квантовой теории, и Вы увидите, сколь многому я научился в результате наших дискуссий. Вы знаете, как много значит для меня изложение, и я не мог бы лучше описать состояние дел, чем сказать, что благодаря всему этому я почувствовал себя вынужденным вернуться к принципу адиабатических инвариантов. Более того, я настолько капитулировал, что стал говорить лишь о статистическом весе и выступил против употребления априорной вероятности, вступая по этому поводу в борьбу с разными людьми (буквально: «словесно фехтуясь».— *В. Ф.*). Что касается Вашей самой последней работы о «проклятых проблемах» («Galgenproblem»), то я имел случай разобраться в ней и надеюсь, что сейчас возможно очень простым и естественным образом преодолеть указанный там Вами парадокс» [12].

Это письмо служит хорошим дополнением к приведенным выше оценкам Бора работ Эренфеста по адиабатическим инвариантам.

Когда в 1921 г. в Брюсселе собрался III Сольвеевский конгресс (первый послевоенный), предметом его обсуждения была проблема «Атомы и молекулы», которая к тому времени, т. е. спустя восемь лет после исторических работ Нильса Бора 1913 г., могла быть рассмотрена на совершенно новой основе. Сам Бор, однако, не смог приехать на конгресс из-за болезни. А через сорок лет в послании участникам XII Сольвеевского конгресса, также — по традиции — собравшимся в Брюсселе, он специально подчеркнул определяющее значение работ Эренфеста по адиабатическим инвариантам в установлении принципа соответствия. Этому принципу соответствия в 1921 г. был посвящен

---

[12] Имеется в виду, очевидно, совместная с Г. Брейтом работа, являющаяся в какой-то мере развитием работы Эренфеста «Об одной механической теореме Больцмана». Упоминаемый Бором «парадокс» касается проблемы равновесия системы вращающихся диполей.

подготовленный Бором доклад, и именно Эренфесту было поручено изложить собравшимся (назовем в их числе Лоренца, Резерфорда, Марию Кюри, Перрена, Ланжевена, Каммерлинг-Оннеса, Зеемана и др.) соображения Бора. К этому изложению, указывает Бор в 1961 г., Эренфест «добавил очень ясное резюме существенных моментов аргументации принципа соответствия. Благодаря тому что для Эренфеста наряду с дружеской поддержкой любого, даже самого скромного, успеха характерен острый критический подход, его изложение правильно отразило состояние наших идей в это время, так же как и ощущение приближения решающего успеха» [13] (под которым, Бор, видимо, понимает возникновение четыре года спустя, в 1925 г., квантовой механики).

Другие воспоминания о том же конгрессе и о роли Эренфеста в его работе принадлежат Ланжевену. В 1933 г. Ланжевен писал: «Его энтузиазм был тогда особенно велик. Конгресс 1921 г. проходил, если можно так выразиться, под знаком принципа соответствия. Наш Бор, который здесь сейчас присутствует, не смог тогда приехать, но находился с Эренфестом в тесном и постоянном контакте. Я вспоминаю те дни, когда Эренфест приходил после получения письма от Бора и словно приносил нам отзвук тех его мыслей, которые тогда рождались в Копенгагене. Он вкладывал в это радость и теплоту, глубоко нас волновавшие».

Недостаток места не позволяет нам более подробно остановиться на взаимоотношениях Бора и Эренфеста. Поездки в Копенгаген всегда производили на Эренфеста глубочайшее впечатление; он возвращался из Дании с запасом сил и энергии, столь необходимых ему особенно в последние годы жизни.

В цитированном выше письме Эйнштейна к Эренфесту (от 9 ноября 1919 г.) имеются интересные свидетельства отношения Эйнштейна к работам Бора и видна роль Эренфеста в вовлечении Эйнштейна в круг проблем принципа соответствия и квантовой теории. Эйнштейн писал: «Я проштудировал с большой радостью лоренцевские лекции. Кроме того, я углубился в Бора, к которому ты вызвал у меня большой и горячий интерес. Ты показал мне, что это человек, глубоко всматривающийся в суть вещей и вдыхающий жизнь в обнаруженные там внутренние связи» [14].

Интересные страницы в истории научных контактов Бора и Эренфеста и, шире, копенгагенской и лейденской школ составляет открытие спина электрона. Эти события также находят свое отражение в переписке. Эренфесту Бор обязан своими блестящими ассистентами — Крамерсом и Казимиром — в той же мере, в какой голландские физики обязаны Бору за ту превосходную школу, которую они прошли под его руководством. Хорошо известна роль Эренфеста в организации знаменитой дискуссии между Эйнштейном и Бором по вопросам квантовой механики.

В заключение краткого обзора отношений Эренфеста с двумя великими физиками нашего века мы приведем выдержку из его письма, написанного 12 сентября 1931 г. из Лейдена и адресованного им обоим:

---

[13] *Н. Бор*. Сольвеевские конгрессы и развитие квантовой физики. В кн.: *Н. Бор*. Избранные научные труды, т. II. М., «Наука», 1971, стр. 591.

[14] *В. Я. Френкель*. Пауль Эренфест. М., Атомиздат, 1971, стр. 80.

«...ты, милый Эйнштейн, во время моего посещения виллы Капут дал мне надежду на то, что заедешь сюда по дороге в Америку.

Разумеется, мне бы очень, очень хотелось видеть тебя здесь, когда тут будет Бор. Я не могу передать вам, как важно для меня послушать вас обоих спокойно беседующими друг с другом о нынешнем состоянии физики. Я уже признавался вам, что чувствую себя, подобно бузинному шарику, колеблющемуся между обкладками конденсатора, когда перехожу от одного из вас — к другому. Мне особенно приятно видеть, что Бор может совершенно отчетливо убедиться, в какой степени ты, Эйнштейн, знаешь и понимаешь его идеи и стремления и вместе с тем считаешь правильным дальнейшие его исследования...

Я очень хорошо знаю, Эйнштейн, что такого рода пропаганда не оставляет никаких следов в твоей душе и что ты в еще меньшей степени нуждаешься в побуждении для подобной дискуссии. Для меня же исключительно важно иметь возможность точно установить те пределы, в которых вы оба вынуждены думать согласно и начиная с какого момента ваши точки зрения расходятся и приводят вас на разные пути.

Я обещаю ни в коем случае не мешать вам, но надеюсь, что, может быть, при случае смогу и немного помочь. Ведь я же довольно хорошо знаком со специфической для каждого из вас манерой излагать свои мысли и, в частности, с ужасающими облаками боровской вежливости, являющимися таким колоссальным препятствием для общения, если их не рассеивать время от времени! Поэтому я прошу тебя, Эйнштейн, сообщить мне по возможности сразу, когда мы сможем тебя увидеть в Лейдене».

ЭРЕНФЕСТ И СОВЕТСКАЯ ФИЗИКА

В письме к В. А. Кравцовой, жене А. Ф. Иоффе по первому браку, Эренфест называл Абрама Федоровича своим «самым старым и самым близким другом». Знакомство их, как мы уже отмечали, состоялось в Мюнхене, в июне 1907 г., в кафе «Луц», где каждое воскресенье собирались молодые физики. Одним из инициаторов этих встреч был Иоффе, работавший в то время у Рентгена, а среди участников можно назвать Зоммерфельда, Дебая и Лауэ. Эренфест, приехавший в Мюнхен к своему венскому другу Герглотцу, и Иоффе были одногодками, в то время — совсем молодыми. Один — ученик Рентгена, тонкий экспериментатор, интересовавшийся теорией; другой — ученик Больцмана, первоклассный теоретик, внимательно следивший за экспериментальными работами, оба люди высокоинтеллигентные — они не могли не понравиться друг другу. И все же в Мюнхене их встречи были мимолетными, а знакомство оставалось довольно поверхностным. Иоффе не подозревал, что Эренфест женат на русской, а Эренфест, угадавший в Иоффе иностранца, решил, как вспоминала много лет спустя Т. А. Афанасьева-Эренфест, что он — голландец.

Но в России наметившаяся в Мюнхене взаимная симпатия сразу же вылилась в теплую дружбу. Иоффе и Эренфест часто виделись: «...два раза в неделю мы обсуждали интересовавшие нас вопросы физики, обычно у него на квартире, иногда при участии других физиков. А в промежутке между встречами он ежедневно посылал мне письма в 6—12 страниц с изложением своих мыслей и вычислений»,— писал А. Ф. Иоффе.

Уехав из России в 1912 г., Эренфест продолжает публиковать в ЖРФХО свои статьи и направляет туда для перевода работы голландских физиков. В зимнем семестре 1913/14 г. в Лейден приезжает Крутков — самый любимый из русских учеников Эренфеста; в Амстердаме, у Дебая, работает Г. Г. Вейхардт.

Известно, что Голландии удалось сохранить нейтралитет во время первой мировой войны. В. М. Чулановский вспоминает действенную помощь, которую оказывал Эренфест русским физикам, застигнутым войной в стенах германских университетов и оказавшихся в гражданском плену (в частности, самому Чулановскому и В. К. Фредериксу).

Сохранились письма Эренфеста к Иоффе и Рождественскому, написанные в 1920 г. (после длительного перерыва), в которых он выражал готовность помочь молодой советской физике и высказывал свое восхищение тем, что было сделано в России в условиях голода и блокады.

Личное знакомство Эренфеста с советскими физиками состоялось в конце лета 1924 г., когда он посетил нашу страну, чтобы принять участие в IV съезде русских физиков и провести ряд консультаций. А. Ф. Иоффе познакомил его со своим институтом, незадолго до этого переехавшим в новое здание, и со своими молодыми сотрудниками. Павел Сигизмундович, судя по сохранившимся протоколам заседаний ученого совета института, посещал в августе — сентябре все его заседания, выступая с докладами и участвуя в обсуждении представленных совету работ сотрудников института (так, он очень высоко оценил работы, проводившиеся в институте по молекулярному пучку, которые возглавлял Н. Н. Семенов).

15 сентября 1924 г. в помещении большой физической аудитории Ленинградского университета открылось первое заседание съезда. Председателем съезда был избран П. П. Лазарев, а одним из товарищей председателя — П. С. Эренфест. 16 сентября он принял участие в дискуссии по докладу А. Ф. Иоффе о связи научных исследований с задачами техники. Он сказал: «Я должен напомнить, как русских физиков сердечно принимали за границей после снятия блокады с Советской России. Мы знаем, что вы очень усердно работали над восстановлением науки в России. Однако теперь я с некоторой тревогой смотрю на будущее русской науки. Меня тревожит главным образом стремление придать ей чисто практическое направление. По этому поводу я укажу на следующее: в бытность мою в Америке меня там спрашивали, каким образом в Германии и Голландии (где я работаю) так быстро и во многих случаях так гениально находят ответ на многие практические вопросы, какими бы неожиданными они ни явились. На это я мог, конечно, только ответить, что это происходит в силу уважения к развитию в этих странах чисто теоретических знаний, и в первую голову математики. Люди, вполне овладевшие теорией, могут решать возникающие вопросы. Поэтому позвольте мне надеяться, что и в Советской России пойдут по пути гармонического развития обоих направлений — чисто теоретического и практического».

19 сентября, во второй половине дня началась общая дискуссия по квантовой теории — в порядке обсуждения докладов Иоффе и Эренфеста, сделанных накануне. В этой дискуссии принял участие и сам Эренфест. Б. А. Остроумов, посвятивший позднее хронике съезда статью в русском журнале «Телеграфия и телефония без проводов», открывает эту статью эпиграфом: «Все наши затруднения происходят от нашей привычки думать», помечая его: «Павел Сигизмундович Эренфест, 19 сентября 1924 г.» Причем шутливое замечание Эренфеста про-

извело на автора статьи столь сильное впечатление, что он даже зафиксировал и точное время, когда оно было сделано (16 час. 53 мин.).

В том же обзоре мы находим еще одну любопытную фразу, брошенную Эренфестом в ходе дискуссии: «Теория Бора еще жива, так как она умеет болеть!»

На съезде работала и небольшая теоретическая секция. Советская теоретическая физика была представлена докладами Ю. А. Круткова, И. Е. Тамма и Я. И. Френкеля. В судьбе этих людей Павел Сигизмундович принимал самое живое участие.

Глубокое впечатление на Эренфеста произвело знакомство с Л. И. Мандельштамом. Характерную деталь рассказал И. Е. Тамм. Эренфест выступал перед большой аудиторией; после доклада он отвечал на вопросы. «А вот на этот вопрос,— сказал Павел Сигизмундович,— никто не ответит лучше крупнейшего в мире специалиста — профессора Мандельштама, который здесь присутствует». Эренфест начал искать глазами Мандельштама. «А Леонид Исаакович,— добавляет И. Е. Тамм,— с той, я бы сказал, болезненной скромностью, которая всегда его отличала, постарался спрятаться за мою спину!»

Имя Мандельштама не раз фигурирует в переписке Эренфеста и Иоффе. Так, 13 апреля 1928 г. он писал из Лейдена: «Позволь мне теперь сделать критические замечания о твоем плане привлечения к работе у тебя Мандельштама и Тамма. Конечно, я прекрасно понимаю, как важно прежде всего создать этим двум превосходным физикам наиболее благоприятные условия для научной работы... тем более что они не только прекрасные физики, но и замечательные люди. Но я должен тебе сказать, что такая ненормально высокая концентрация сопряжена и с некоторой опасностью (Эренфест имеет в виду концентрацию физиков-теоретиков, работавших в то время в физико-техническом институте.— *В. Ф.*). Французская революция собрала все (в данном случае — всю физику.— *В. Ф.*) в Париже: сравни теперь нынешнее положение там и в Германии». Свое письмо Эренфест заканчивает словами: «Извини меня за это, воистине огромное, письмо. Оно показывает во всяком случае, как много места занимают твои планы в моих мыслях».

В другой раз (28 апреля 1928 г.) Эренфест, будучи к этому времени членом-корреспондентом нашей Академии наук, обращается с официальным письмом к двум советским академикам — П. П. Лазареву и А. Ф. Иоффе, в котором горячо рекомендует избрать на две открывшиеся академические вакансии Л. И. Мандельштама и Д. С. Рождественского. Он добавляет, что, поскольку «Мандельштам сравнительно редко публикуется, я должен особо отметить, сколь многому у него научился в процессе личных бесед». Роль Мандельштама, указывает Эренфест, стала ему понятной на примере Тамма, его ученика. Влияние Мандельштама на развитие физики в СССР Эренфест сравнивает с аналогичным влиянием на французскую физику, оказываемым в те годы Полем Ланжевеном.

Чаще, чем о других, пишет в конце 20-х годов Эренфест об И. Е. Тамме. 13 апреля 1928 г.: «Я не представлял бы себе лучшего, чем Тамм, преемника в Лейдене, когда наступит время уходить!» 2 июня 1928 г.: «Тамм и Дирак очень подружились. В середине июня они поедут в Лейпциг, где Дебай и Гейзенберг организовывают недельную дискуссию по квантовой механике». О лейденской дискуссии, на которой Дирак докладывал свою работу о релятивистском квантовомеханическом уравнении, вспоминает и присутствовавший на ней

Фок. В. А. Фок запомнил сказанную Эренфестом по какому-то поводу, в ходе горячих дискуссий, характерную фразу: «Es wird zwar wahrscheinlich falsch sein, aber...», т. е. «Это, наверное, неправильно, но...»

Вскоре после отъезда из Советского Союза Эренфест начал хлопоты по предоставлению советским физикам стипендий так называемого рокфеллеровского фонда, выдававшихся способным молодым научным работникам для совершенствования их работы, которое, по мнению создателей фонда, могло осуществляться за счет контактов с известными коллегами в разных городах и странах. Первыми советскими физиками — стипендиатами этого фонда были Ю. А. Крутков и Я. И. Френкель, позднее — В. А. Фок и Л. Д. Ландау. В течение осени 1924 г. и в 1925 г. в письмах Эренфеста, адресованных Иоффе, часто мелькают имена советских физиков; Эренфест напоминает о необходимости своевременно отослать документы, нужные для оформления стипендии, и т. д. Уже в письме от 19 октября и открытке от 6 ноября 1924 г. Павел Сигизмундович пишет Иоффе: «Я ожидаю сведения о Френкеле — список работ и «Curriculum vitae»; 16 февраля 1925 г. он сообщает, что стипендию Френкелю — в течение одного года — начнут выплачивать с осени 1925 г.

Описываемое время совпадает с началом нового бурного прогресса в физике и созданием современной квантовой механики. Центром этого прогресса явился Геттинген, и именно с немецкими учеными — Гейзенбергом, Шредингером, Борном, Паули (наряду с французом де Бройлем и англичанином Дираком) связывается этот прогресс.

Ю. А. Крутков и Я. И. Френкель встретились весной 1926 г. в Гамбурге, где оба работали (Френкель — несколько месяцев, Крутков — несколько недель) в Физическом институте Гамбургского университета. В это время в его стенах работали Паули и Штерн. Все названные физики — немецкие и советские — хорошо знали Эренфеста и пользовались его симпатией и поддержкой. В Гамбурге Френкель получал письма из Лейдена от Эренфеста (а однажды, в декабре 1925 г.,— совместное от Эренфеста и Эйнштейна: это совпало с пребыванием Эйнштейна в Лейдене на торжествах, посвященных 50-летию со дня присуждения Лоренцу степени доктора). Именно Эренфест планировал маршрут заграничной командировки Френкеля. Там же Френкель узнал и своеобразную «теорему» Эренфеста, имеющую отдаленное отношение к физике, но совершенно прямое — к некоторым, в частности гамбургским, физикам. Я. И. Френкель в конце февраля 1926 г. писал домой из Гамбурга: «На днях, во время обеда в ресторане после обычного четвергового коллоквиума я спросил у Штерна, почему все — или почти все — гамбургские физики холостяки. На это он мне ответил, что не только гамбургские физики, но и представители других специальностей в Гамбургском университете не знают радостей семейной жизни. Причина заключается в большом количестве и высоком качестве гамбургских ресторанов. Ибо существует теорема, установленная Эренфестом, которая гласит: «Всякий человек обедает в ресторанах до тех пор, пока это ему не надоест: тогда он женится». И так как в ресторанах в Гамбурге меню не надоедает, то и т. д.»

Из Гамбурга Френкель и Крутков ранней весной 1926 г. переехали в Геттинген, который к тому времени из «Мекки немецких математиков» (М. Борн), каковой он был в начале века, превратился в «Мекку физиков-теоретиков». Их привлекал туда прежде всего сам Макс Борн. В конце 1925 — начале 1926 г. в Геттингене собралось много ленинградцев — физтеховцев или «рентгеновцев», как они в те годы себя называли (напомним, что институт тогда был Физико-техническим рентгенологическим!). Это дало основание Френкелю говорить о русской или, точнее, «рентгеновской оккупации» этого истинно немецкого городка. Действительно, в мае 1926 г. в Геттингене оказались В. Р. Бурсиан, П. Л. Капица, В. Н. Кондратьев, Ю. А. Крутков, П. И. Лукирский, Н. Н. Семенов, Я. И. Френкель; из Москвы приехал С. И. Вавилов; приехала туда и А. Н. Арсеньева — участница семинара «мальчиков и девочек» Эренфеста. Примерно в то же время в Геттингене находились Оппенгеймер и Норберт Винер (оба работали у Борна) и многие другие ученые из разных городов и стран. Ожидался приезд и самого Эренфеста вместе с Татьяной Алексеевной. Я. И. Френкель писал по этому поводу: «В середине июня собирается приехать Эренфест со свитой своих сотрудников и в том числе с цейлонским попугаем, обученным им произносить фразу «Aber, meine Herren, dass ist kein Physik!...» (Но, господа, это уже не физика! — *В. Ф.*) Этого попугая Эренфест выдвигает в председатели на предстоящих дискуссиях о новой квантовой механике»[15].

В 1928 г. Эренфест получил приглашение на VI съезд русских физиков, однако не смог принять в нем участия. Болезнь помешала и Эйнштейну принять такое же приглашение: как бы оправдывая Эйнштейна, Эренфест 9 июля 1928 г. сообщает Иоффе, что по той же причине Эйнштейн не смог выступить на берлинском заседании, посвященном памяти Лоренца (вместо него выступил Макс Планк). В этом же письме к Иоффе есть такие проникновенные строчки: «Только рядом с тобой и Эйнштейном я чувствую себя защищенным от всей земной скверны».

Следующий приезд Эренфеста в Россию намечался на конец 1929 г. 31 октября он писал Иоффе: «Я очень надеюсь иметь возможность как следует поговорить с Френкелем и толковой молодежью, а также с Фоком и Таммом».

Примерно к этому времени относится начало тяжелого душевного разлада, приведшего Эренфеста к трагическому концу. Речь идет о мучившей его неуверенности в себе, чувстве, которое не миновало и других выдающихся физиков, вплоть до гигантов типа Людвига Больцмана, когда они достигали определенного возраста. Пессимистические нотки все чаще и чаще звучат в письмах Эренфеста к Эйнштейну, Бору, Иоффе, усиливаясь с каждым годом. Так, обсуждая перспективу приезда в Россию в конце 1929 г., Эренфест пишет Иоффе 25 сентября того же года, т. е. за четыре года до смерти: «Я чувствую себя очень усталым и старым. Не знаю, смогу ли быть вам действительно полезным. Во всяком случае, я хотел бы, чтобы не я что-либо рассказывал (разве что для совсем молодых студентов), но чтобы разные люди рассказывали мне, по возможности более четко формулируя свои мысли,— пока я все хорошо кумекаю (kapiere). Такое предположение звучит, быть может, комично, но я думаю что именно в этом плане я могу быть полезен русским молодым физикам». Иногда, правда, эту свою неуверенность Эренфест облекает в полушутливую форму: «Чем ближе подходит время моего отъезда, тем с бо́льшим страхом думаю я обо всех молодых и ученых людях, которые работают у тебя в области теоретической физики. Я знаю так ужасающе мало, а это малое — так

---

[15] *В. Я. Френкель.* Яков Ильич Френкель. М.— Л., «Наука», 1966, стр. 213.

плохо!... Я с нетерпением жду новой встречи с молодыми русскими физиками. Позаботься о том, чтобы они не смотрели на меня, задрав нос!.. Кроме молодых теоретиков я побаиваюсь: 1) морозов, 2) потери времени на ожидание — из-за вашего неумения точно договориться».

В СССР Эренфест приехал в декабре 1929 г. В Ленинграде он читал лекции в Физико-техническом институте, выступал на диспутах в Политехническом, на двух вечерах-диспутах между Я. И. Френкелем и В. Ф. Миткевичем о природе электрического тока (в декабре 1929 и в январе 1930 г.). Павел Сигизмундович был приглашен на торжественное заседание, посвященное 10-летию со дня организации Физико-механического факультета, которое проводилось в Выборгском Доме культуры.

В Москве Эренфест присутствовал на докладах мандельштамовского семинара, затем поехал в Харьков, во вновь организованный Харьковский физико-технический институт. Во многом именно благодаря Эренфесту криогенная культура привилась на харьковской почве; его хлопотам и энтузиазму советская физика обязана той прекрасной школе, которую наши ученые получили в Лейдене, в лаборатории Каммерлинг-Оннеса (особенно плодотворными были контакты с этой лабораторией Л. В. Шубникова, которого Эренфест высоко ценил как ученого и человека) и в самом Харькове.

РАБОТЫ 20-Х ГОДОВ

Здесь следует дать хотя бы краткий обзор работ, которые были выполнены Эренфестом в 20-х годах — тогда, когда он считал, что уже не способен заниматься теоретической физикой.

Из всех работ Эренфеста наиболее известна его статья, содержащая изложение «теоремы о средних значениях» [16]. Эта изящная теорема включена во многие современные курсы квантовой механики (не говоря уже о курсах 30—40-х годов). Пользуясь минимальными математическими средствами, Эренфест продемонстрировал, что средние значения квантово-механических величин — скорости и импульса, ускорения и силы — связаны между собой классическими «ньютоновскими» соотношениями. Своими ранними работами Эренфест показал, в каких пределах классическая физика может быть сохранена и использована в квантовой теории. «Теорема о средних значениях» как бы достраивает мост, соединяющий классическую и квантовую механику, но уже со стороны «квантово-механического берега», свидетельствуя о том, что в новой теории в качестве предельного случая содержится старая.

Вместе с тем, оценивая адиабатическую гипотезу и теорему Эренфеста и его квантово-механическую теорему, нельзя удержаться от мысли о некой несправедливости (характерной, впрочем, не только для случая с Эренфестом), когда в науке сохраняются работы того или иного ученого, имевшие в его творчестве скорее характер эпизода, в то время как более глубокие исследования, выношенные им годами упорного труда, оказываются достоянием только истории соответствующей науки, а потому и известны гораздо меньшему кругу людей.

Мы ограничимся здесь лишь упоминанием о целой серии работ Эренфеста по квантовой статистике, открывающейся его совместной

[16] См. наст. сборник, стр. 82.

С. Гаудсмит, Г. Уленбек, О. Лапорт (слева направо)

работой с Тркалом [17], и появившихся, уже после возникновения квантовой механики и статистики, работах его и Уленбека. Вся эта серия работ подробно освещена М. Клейном [18]; там же приведены и высокие оценки влияния этих работ на развитие квантовой статистики, принадлежащие М. Планку и Ч. Дарвину.

Дважды с совместными публикациями выступали Эренфест и Эйнштейн. Первая из них [19], посвященная анализу классического опыта Штерна — Герлаха, по своему характеру и строю больше эрен-

---

[17] *P. Ehrenfest u V. Trkal.* «Ann. d. Phys.», 1920, 65, S. 609.
[18] *M Klein.* «Koninkl. Nederl. Akad. van Wetenshappen, Proceedings», (Ser. B) 1959, 62, S. 1.
[19] *П. С Эренфест* и *А. Эйнштейн.* «Zs. f. Phys.», 1922, 11, 31, S. 1. См. также в кн: *А. Эйнштейн.* Собрание научных трудов, т. III. М., «Наука», 1966 (ст. № 52).

фестовская, чем эйнштейновская. Вопрос о кинетике ориентации атомных магнитиков во внешнем магнитном поле (поставленный в характерной для Эренфеста манере двух альтернатив) рассматривается в ней с «адиабатических» позиций. Эта статья послужила стимулом для рассмотрения эффектов резонансного поглощения электромагнитных волн и ферромагнитных и парамагнитных веществ [20]. Другая работа [21], наоборот, по тематике — чисто эйнштейновская, касается дальнейшего развития его квантовой теории процессов вынужденного и спонтанного излучения [22].

Эренфест внес существенный вклад и в открытие спина электрона (Гаудсмит и Уленбек, 1925 г.). Достаточно сказать, что С. Гаудсмит, говоря об истории возникновения своей и Уленбека работы, остроумно замечает, что его «история вертится больше вокруг Эренфеста, чем вокруг спина» [23].

Другой, менее известный пример закулисной и стимулирующей роли Эренфеста в развитии целого направления исследований дает история возникновения спинорного анализа. Значение Эренфеста становится вполне очевидным из выдержки, взятой из книги Ю. Б. Румера: «В начале 1929 г. покойный П. С. Эренфест, умевший как никто другой остро ставить назревшие вопросы, обращается с письмом к Б. Л. Ван-дер-Вардену, в котором пишет: «Если мы назовем те новые величины, которые обнаружились в уравнениях Дирака, спинорами, то нельзя ли построить по образцу векторного и тензорного анализов спинорный анализ, который смог бы изучить каждый физик, работающий в этой области?» Ответом на письмо П. С. Эренфеста явилась небольшая работа Ван-дер-Вардена, принципиально разрешавшая проблему» [24].

Последняя — по дате публикации (1933) — работа Эренфеста о фазовых переходах [25] содержит четкую классификацию «порядка» этих переходов. Она спобствовала привлечению внимания к исследованиям фазовых переходов II рода; с нее и сейчас обычно начинается изложение этой важной области современной физики [26].

---

[20] *Я. Г. Дорфман.* «Zs. f. Phys.», 1923, 17, S. 96; он же: в сб. «Развитие физики в СССР», т. I. М., «Наука», 1967, стр. 344.

[21] *А. Эйнштейн* и *П. С. Эренфест.* «Zs. f. Phys.», 1923, 19, S. 301. См. также в кн.: *А. Эйнштейн.* Собрание научных трудов, т. III (ст. № 55).

[22] Она получена редакцией «Zs. f. Phys.» 16 октября 1923 г., но, судя по формуле Паули (исходной для проведенного в статье рассмотрения), начертанной на стене «гостевой комнаты» в доме Эренфеста и сопутствующей подписи Эйнштейна, обсуждалась и, видимо, была в основном закончена в Лейдене 25 сентября того же года.

[23] *С. Гаудсмит.* УФН, 1967, 93, вып. 1, стр. 151.

[24] *Ю. Б. Румер.* Спинорный анализ. М.— Л., ОНТИ, 1935, стр. 4.

[25] *P. Ehrenfest.* «Proc. Amsterdam. Acad.», 1933, 36, S. 153.

[26] См. например: *К. П. Белов.* Магнитные превращения. М., Физматиздат, 1959.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Родительская любовь — чувство вполне естественное, и нет оснований удивляться, встречаясь с ее проявлениями. И все же нас не могут не тронуть полные нежности письма Эренфеста к детям — Тане-штрих, Гале, Павлику — и та наивная гордость, с которой он рассказывал друзьям об их успехах.

29 декабря 1931 г. он писал А. Ф. Иоффе. «Сейчас мы с Павликом снова много времени обсуждали физические вопросы. Я нахожу весьма забавным погружаться вместе с ним в уравнения Максвелла. Его совершенно не смущает перспектива проникновения в трудные места теории, и он способен с захватывающим интересом следить за ее чудесами. Ты бы видел, как увлеченно он относится ко всем работам физического практикума и соответственно их выполняет! Я верю, что он со временем достаточно прочно станет на ноги в физике. Все идет к тому, что в течение ближайших двух лет он пройдет исключительно хорошую школу в Лейдене. А потом ему надо будет отправиться куда-нибудь, где бы он мог участвовать в новых физических работах и ощутил бы, образно говоря, аромат летящих свежих стружек!»

Другое письмо, написанное в 1933 г. американским друзьям: «Мой сын успешно учится в университете. Ему всего лишь 17 лет, а он является одним из лучших студентов второго года обучения. Я очень рад, что он, как и Галенька, сразу же завоевывает симпатии всех тех, с кем ему приходится встречаться! А мне еще говорили, что дети, не учившиеся в школе, позднее с трудом приобретают друзей. Чепуха! Галя и Павлик с такими затруднениями не сталкиваются — независимо от пола, возраста и социального происхождения людей, с которыми встречаются».

7 июля 1933 г. Эренфест сообщил Эйнштейну: «Павлик с 7 примерно до 15 июля будет в Париже, где он в лаборатории Жана Перрена работает у Оже в качестве младшего физического лаборанта, помогая Оже в его (превосходных) работах с нейтронами».

Эренфест-младший подавал большие надежды. У него с детства были «золотые руки»— он всегда что-то мастерил, строил (на память приходит старший брат П. С. Эренфеста — Артур). Но несколько неожиданным было то, что, как оказалось, надежды, возлагавшиеся на сына отцом, так быстро стали реализовываться: с 1934 по 1938 г. П. Эренфест-младший ежегодно публикует по нескольку статей в ведущих французских журналах — знаменитых «Докладах Французской академии» и в «Журнале физики и радия», причем представляет их к печати сам Жан Перрен. Все они получили известность среди специалистов — физиков, занимающихся космическими лучами, их содержание подробно излагается в специальных монографиях (назовем в качестве примера книгу Яносси «Космические лучи», изданную в Англии и переведенную на русский язык).

Исследования по космическим лучам выполнялись П. П. Эренфестом в основном в горах: то было время изучения зависимости интенсивности космических лучей от высоты. Местом работы Оже и его группы был ледник Юнгфрау-Иох в Альпах. В Альпах, в 1939 г., во время одного из альпинистских походов Павел Павлович Эренфест трагически погиб. Ему было только 23 года. Но до этой трагедии Павел Сигизмундович уже не дожил...

В начале 30-х годов, как и всегда, Эренфест продолжал пользоваться глубочайшим уважением своих голландских коллег; его рады были видеть у себя и советские физики — возможность его переезда в СССР неоднократно обсуждалась. Вместе с тем его не покидало чувство изнуряющей неуверенности в себе и в своих силах. Считается, что наиболее плодотворными для ученых являются молодые годы. Об этом Эренфест слышал, например, в Геттингене — на лекциях Феликса Клейна. Клейн утверждал это, ссылаясь на пример математиков, прежде всего на Гаусса, в юношеских тетрадях которого обнаружил многое из того, что было опубликовано Гауссом в годы зрелости и старости.

Перед каждым крупным ученым с годами возникает опасность оказаться не на уровне прежних своих достижений; переход от активной и бурной научной работы в более спокойное русло часто протекает крайне болезненно. Эйнштейн прямо упоминает о мучившем Эренфеста в последние годы его жизни чувстве несоответствия между творческими возможностями и занимаемой им должностью. Можно думать, что это чувство подсознательно питалось тем, что Эренфест выбирал неоправданно высокие критерии для оценки своих достижений. На фоне Эйнштейна, Лоренца, Бора, Дирака, Борна, Паули — людей, с которыми он был тесно связан, не мудрено почувствовать неудовлетворенность своими результатами!

Кроме того, духовные силы Эренфеста подтачивала мысль о неизлечимой болезни младшего сына. На эту личную трагедию накладывалось предчувствие трагедии, которую готовил миру поднявший голову германский фашизм. Мысль об уходе из жизни появилась у Эренфеста, вероятно, давно, но его жизнелюбие поначалу ее отгоняло. Это подтверждается письмами Эренфеста конца 20-х — начала 30-х годов. Написав о том тяжком бремени, каким стала для него жизнь, Павел Сигизмундович подсознательно или сознательно как бы исключал возможность компромиссных решений и ставил себя перед необходимостью оборвать ее. Симптоматично, что писал он об этом не только своим самым близким друзьям (Эйнштейну, Иоффе, Бору), но и менее близким людям (П. Л. Капице, Я. И. Френкелю, супругам Шубниковым)...

24 сентября 1933 г. в Ленинграде открылась I Всесоюзная конференция по физике атомного ядра. 27 сентября во время утреннего заседания, проходившего в актовом зале Физико-технического института, была оглашена телеграмма из Голландии, извещавшая о самоубийстве Эренфеста. Собравшиеся минутой молчания почтили память замечательного ученого и человека, столько сделавшего для физики. Многие из участников конференции совсем недавно — в январе 1933 г — видели Эренфеста во время его последнего (третьего по счету) визита в Советский Союз, и для большинства это известие было полной неожиданностью: Эренфест был веселым, шутил («Ты ведь знаешь,— писал он накануне своей поездки А. Ф. Иоффе,— какое стимулирующее влияние оказывает на меня контакт с русской молодежью!»).

Месяцем позднее память Эренфеста была почтена П. Ланжевеном на открытии очередного Сольвеевского конгресса, в работе которого Павел Сигизмундович должен был участвовать.

Трагическая кончина Эренфеста вызвала ряд откликов и некрологов, часть которых опубликована в настоящем сборнике. В послевоенные годы, особенно начиная со второй половины 50-х годов, стали выходить многочисленные труды по истории квантовой физики, книги о выдающихся ученых, внесших существенный вклад в развитие этой науки. Вышли две книги и об Эренфесте (М. Клейна и В. Я. Френкеля), готовится издание его переписки с А. Ф. Иоффе. Учитывая чрезвычайную эпистолярную активность Павла Сигизмундовича и то, что он вел обширную переписку с Лоренцем, Эйнштейном, Бором, Паули, Шредингером, можно надеяться, что подобного рода книги будут издаваться и впредь.

Своими работами П. С. Эренфест завоевал себе прочное и почетное место в истории физики нашего века; более того, его идеи продолжают жить и работать в ней сегодня [27].

---

[27] В этой статье использован ряд писем, полученных при любезном содействии дочерей Эренфеста (Т. П. ван Аарденне-Эренфест и Г. П. ван Боммель-Эренфест) из Лейденского архива музея естественных наук и из фонда Альберта Эйнштейна в Нью-Йорке. Выражаю свою искреннюю признательность А. Е. Энгбертсу и В. В. Иванову, отобравшим соответствующие материалы в Лейдене, а д-ру О. Натану, г-же Э. Дюкас и проф. М. Клейну — за материалы из фонда Эйнштейна. В статье приведены имена советских физиков, поделившихся с автором своими воспоминаниями об Эренфесте. Проф. Э. Брода (Вена) любезно предоставил фотографию Л. Больцмана с коллегами и сотрудниками. Автор и редакция глубоко благодарны всем этим лицам.

I. ОПТИКА И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Принцип относительности. Обзор, напечатанный в «Журнале Русского физико-химического общества» (ЖРФХО), 1910, 42, вып. 1Б и 2Б, стр. 33—38, 81—87.

Кризис в гипотезе о световом эфире. Напечатано в ЖРФХО, 1913, 45, вып. 4Б, стр. 151—162. Статья представляет собой переработанный текст лекции, прочитанной П. С. Эренфестом 4 декабря 1912 г. при вступлении в должность профессора теоретической физики Лейденского университета. Русский перевод сделан женой П. С. Эренфеста — Т. А. Афанасьевой-Эренфест. Лекция была издана дважды отдельными брошюрами на немецком языке (Zur Krise der Lichtäther Hypothese. Leiden; Eduard Lide, 1913; Berlin, Julius Springer, 1913; См. также в кн.: P. Ehrenfest. Collected Scientific Papers (C.P.). Ed. by M. Klein, Amsterdam, p. 306—328).

О так называемой «групповой скорости». Напечатано в ЖРФХО, 1910, 42, вып. 9 Б, 315—324. Обзорная и методически важная работа, выполненная П. С. Эренфестом совместно с его учеником и участником петербургского семинара Эренфеста — Л. Д. Исаковым (1884—1942). В послереволюционные годы Леонид Дмитриевич Исаков — научный сотрудник Института метрологии и Оптического института. Умер во время блокады Ленинграда

Несколько более расширенный (и популярный) вариант этой статьи был опубликован в сборнике «Новые идеи в физике» (непериодическое издание, выходившее под ред. проф. И. И. Боргмана, сб. 5, стр. 1—14. СПб, изд-во «Образование», 1912).

Является ли угол аберрации мерой фазовой скорости в случае осуществления дисперсии эфира? (Misst der Aberrationswinkel im Fall einer Dispersion des Äthers die Wellengeschwindigkeit?) Напечатана в «Ann. d. Phys.», 1910, 33, S. 1571—1576; см. также; C.P., p. 161—166.

С докладом на эту тему («Измеряет ли угол аберрации волновую скорость?») П. С. Эренфест в 1908 г. выступал на одном из заседаний физического отделения Русского физико-химического общества. См. по поводу этой работы «Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике» Л. И. Мандельштама (М., «Наука», 1972, стр. 59).

Равномерное вращательное движение твердых тел и теория относительности (Gleichförmige Rotation starrer Körper und RelativitätTheorie). Напечатана в «Phys. Z.», 1909, 10, S. 918; см. также: C. P., p. 154—155.

Статья написана П. С. Эренфестом в Петербурге. Излагаемое здесь противоречие получило в литературе название «парадокс Эренфеста». Откликом на эту работу явилась заметка А. Эйнштейна «К парадоксу Эренфеста» (см. *А. Эйнштейн.* Собрание научных трудов, т. I. М., «На-

[1] Составил В. Я. Френкель.

ука», 1965, стр. 187). Выводом из парадокса Эренфеста явлется заключение о несовместимости понятия абсолютно твердого тела с принципами теории относительности.

II. ТЕОРИЯ КВАНТОВ И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

К планковской теории излучения (Zur Planckschen Strahlungstheorie). Напечатано в «Phys, Z.», 1906, 7, S. 528—532, см. также: С. Р., р. 120—124. Публикация статьи связана с изданием книги М. Планка «Лекции по теории теплового излучения» (5-е издание этой книги вышло в переводе на русский язык: «Теория теплового излучения». М.— Л., ГТТЛ, 1935). Статья чрезвычайно характерна для Эренфеста-критика, поясняющего физическую сущность проблемы, освобождая ее от «математических одежд» (А. Эйнштейн).

Об одной механической теореме Больцмана и ее отношении к теории квантов (A Mechanical Theorem of Boltzmann and its Relation to the Theory of Energy Quanta). Статья напечатана в «Proc. Amsterdam Acad.», 1913, **16**, р. 591—597., и представлена к опубликованию Г. А. Лоренцем. Имеется вариант этой статьи на русском языке, опубликованный под тем же названием (но различающийся текстуально) в ЖРФХО, 1914, **46**, стр. 58—65. В этой статье изложены основы того, что Эйнштейн годом позднее в своей статье «К квантовой теории» назвал «адиабатической гипотезой Эренфеста». В статье заложены основы теории адиабатических инвариантов, которые развивались как самим Эренфестом, так и другими физиками (в частности, его учеником, советским физиком-теоретиком Ю. А. Крутковым) в последующие годы. По отзывам Бора, Борна, Эйнштейна, эта работа сыграла исключительно большую роль в период перехода от квантовой теории Планка — Эйнштейна к квантовой механике де Бройля — Гейзенберга — Борна — Шредингера. См.: *В. Я. Френкель*. Пауль Эренфест. М., Атомиздат, 1971, стр. 133—140.

Адиабатические преобразования в квантовой теории и их трактовка Нильсом Бором (Adiabatische Transformationen in der Quantentheorie und ihre Behandlung durch Niels Bohr). Напечатана в «Naturwissenschaften», 1923, **11**, S. 543—550, см. также С. Р., р. 467—470. Статья представляет собой обзор работ автора (1906—1916) по адиабатическим инвариантам в свете боровской теории атома.

Об одном замечательном случае квантования (A Remarcable Case of Quantisation). Напечатана в следующих изданиях: «Proc. Amsterdam Acad.», 1922, **25**, р. 2—5; «Zs. f. Phys»., 1922, **9**, S. 207—210; С. Р., р. 447—450.

Статья написана Эренфестом совместно с Грегори Брейтом (род. в 1899 г.) во время пребывания Брейта в Лейдене (1921—1922). Г. Брейт — известный американский физик-теоретик.

Интерпретация статистики Больцмана с точки зрения квантовой механики. Статья опубликована в ЖРФХО, 1927, **49**, вып. 2 А,стр. 151—152. См. также: Die wellenmechanische Interpretation der Boltzmannschen Statistik neben der neueren Statistiken. «Zs. f. Phys.», 1927, **41**, S. 24—26; С. Р., р. 536—539.

Статья написана Эренфестом совместно с его лейденским учеником Г. Э. Уленбеком (род. в 1900 г.), работавшим в течение 1925—1926 гг. в качестве ассистента Эренфеста в Лейденском университете и эмигрировавшим в 1927 г. в США, где он, совместно с другим учеником Эренфеста — С. Гаудсмитом, преподавал в Мичиганском университете.

Г. Уленбек широко известен своими работами по статистической механике; ряд его книг и статей переведен на русский язык.

Замечание о приближенной справедливости классической механики в рамках квантовой механики (Bermerkung über angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik). Напечатана в «Zs. f. Phys.», 1927, 45, S. 445—557; см. также: G. P., p. 556—558.

Статья принадлежит к числу наиболее часто цитируемых и ныне известных работ Эренфеста. Изложенные в ней результаты под названием «Теорема Эренфеста о средних значениях» вошли в учебники по квантовой механике.

III. ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Упрощенный вывод формулы теории комбинации, лежащей в основе теории излучения Планка. Напечатана в ЖРФХО, 1915, 47, вып. 2 А, стр. 119—123. Опубликована в ряде журналов: «Proc. Amsterdam Acad.» 1914, 18, стр. 870—873; «Ann. d. Phys.», 1914, 46, p. 1021—1024; «Phil. Mag.», 1915, 29, S. 297—301; см. также: С. Р., p. 353—356.

Статья написана Эренфестом совместно с Г. Каммерлинг-Оннесом (1853—1926), главой Лейденской криогенной лаборатории, получившим за год до публикации работы, в 1913 г., Нобелевскую премию за работы по достижению низких температур и по физическим исследованиям вещества при этих температурах.

О двух известных возражениях против *H*-теоремы Больцмана (Über zwei bekannte Einwände gegen das Boltzmannsche *H*-Theorem). Напечатана в «Phys. Z.,» 1907, 8, S. 311—314;см. также: С. Р., p. 146—149.

Статья написана П. С. Эренфестом совместно с его женой, русским математиком Татьяной Алексеевной Афанасьевой-Эренфест (1876—1964), и является важной вехой на пути к написанию принесшей супругам Эренфест широкую известность статьи в «Математической энциклопедии» Феликса Клейна [«Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik». В кн.: «Enzyklopedie d. mathematischen Wissenschaften», IV, 2.11, H. 6. Leipzig, 1912. Имеются французский (1914) и английские (1959, 1960) переводы этой большой работы Эренфестов]. Трактуемые в публикуемой в настоящем сборнике статье вопросы изложены в работе Т. А. Афанасьевой-Эренфест «Кинетическое толкование необратимых процессов», опубликованной в ЖРФХО, 1908, 40, вып. 8 Б, стр. 277, являющейся изложением доклада, прочитанного ею 12 февраля 1908 г. на заседании физического отделения Русского физико-химического общества в Петербурге.

К теореме Больцмана о связи энтропии с вероятностью. Напечатана в ЖРФХО, 1914, 46, вып. 8 А, стр.321—335. Напечатана также «Phys. Z.», 1914, 15, стр. 657—663 (Zum Boltzmannschen Entropie —Wahrscheinlichskeits-Theorem). См. также: С. Р., p. 347—352.

Об одном парадоксе в теории броуновского движения (A Paradox in the Theory of the Brownian Movement). Напечатана в «Proc. Amsterdam Acad.», 1917, 20, p. 680—683, и представлена Г. А. Лоренцем. См. также: С. Р., p. 410—413.

Об одном старом заблуждении относительно теплового равновесия в поле тяготения (Ein alter Trugschluss betreffs des Wärmegleichgewichtes eines Gases im Schwerfeld). Напечатана в «Zs. f. Phys.», 1923, 17, S. 421—44. См. также: «Physica» 3, 229—231; С. Р., p. 479—481.

Какие черты гипотезы световых квантов играют существенную роль в теории теплового излучения? (Welche Züge der Lichtquantenhypothese spielen in der Theorie die Wärmestrahlung eine wesentliche Rolle?). Напечатана в «Ann. d. Phys.», 1911, **36**, S. 91—118. См. также: C. P., p. 185—212.

Одна из более сложных в математическом отношении статей, публикуемых в настоящем сборнике, очень существенная в научной биографии Эренфеста как стартовая для формулировки Эренфестом его гипотезы и теории адиабатических инвариантов (адиабатическим инвариантом является в данной статье отношение энергии осциллятора E к его частоте ν, E/ν). Подробный комментарий к настоящей статье см. в кн.: *M. Klein*, Pauf Ehrenfest, v. I. Amsterdam — London — NewYork, 1970. См. также: *В. Я. Френкель.* Пауль Эренфест. М., Атомиздат, 1971, стр. 133—137.

Об интерференционных явлениях, имеющих место при прохождении рентгеновских лучей через двухатомный газ. Напечатано в ЖРФХО, 1915, **47**, вып. 7 А, стр. 479—485. См. также: «Proc. Amsterdam Acad.», 1915, **17**, p. 1184—1190; C. P., p. 357—363.

Данная статья П. С. Эренфеста сыграла большую роль в развитии теории дифракции рентгеновских лучей. В записке об ученых трудах, составленной при баллотировке П. С. Эренфеста в члены-корреспонденты Российской академии наук, профессора П. П. Лазарев и А. Ф. Иоффе специально отмечали: «...теорию рассеяния рентгеновских лучей от двухатомных газов, положившую начало рентгенографическому анализу аморфных жидкостей» (и порошков — см. методику Дебая — Шеррера).

Квантовая теория дифракции Фраунгофера (The Quantum Theory of the Fraunhofer Diffraction). Напечатана в «Proc. Nat. Acad Sci»., 1924, **10**, p. 133—139; см. также: C. P., p. 491—497.

Замечания к квантовой теории дифракции (Remarks on the Quantum Theory of Diffraction). Напечатана в «Proc. Nat. Acad. Sci»., **13**, p. 400—408; см. также: C. P., p. 547—555.

Обе статьи по квантовой теории дифракции написаны П. С. Эренфестом совместно с Павлом Сигизмундовичем Эпштейном (1883—1966) учеником и сотрудником А. Зоммерфельда, родившимся в Варшаве, окончившим Московский университет и с 1910 г. работавшим в Германии, а затем — в Швейцарии и с 1921 г. — в США (профессор Калифорнийского технологического института). См. об этой работе в кн.: *Л. И. Мандельштам.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М., «Наука», 1972. С докладом о квантовой теории дифракции П. С. Эренфест выступал на заседаниях IV съезда русских физиков, проходивших в Ленинграде в сентябре 1924 г.

Некоторые неясные вопросы, касающиеся квантовой механики (Einige die Quantenmechanik betreffende Erkundigungsfragen). Напечатана в «Zs. f. Phys.», 1932, **78**, S. 555—559; см. также: C. P., p. 623—627. Предпоследняя (по времени публикации) работа Эренфеста вызвала оживленные отклики; на нее, в частности, специальной статьей того же названия откликнулся В. Паули (см. «Zs. f. Phys.», 1933, **80**, S. 573).

IV. ИСТОРИЯ ФИЗИКИ. О СОВРЕМЕННИКАХ

Возможно ли определить понятие «физика»? Напечатана в ЖРФХО, 1911, **43**, вып. 9 Б, стр. 381—385.

В 1911 г. на страницах ЖРФХО (**43**, вып. 4Б, стр. 126). П. С. Эренфест опубликовал статью о магнетоне Вейсса. Эта статья, благодаря своей концовке (цитируемой Эренфестом в данной публикации) задела профессора физики Петербургского университета О. Д. Хвольсона (1852—1934), который выступил с возражениями, опубликованными на страницах ЖРФХО в том же номере, в котором помещена и данная статья Эренфеста.

Людвиг Больцман (Ludwig Boltzmann). Напечатана в журнале «Math.-Naturwissen. Blätter», 1906. 3, S. 1—5, являющемся органом студенческих физических научных обществ Германии и Австрии (см. также: C. P., p. 131—135). Опубликована на русском языке в сб. *Л. Больцман.* Статья и речи. М., «Наука», 1970, стр. 190—202.

Профессор Г. А. Лоренц как исследователь (Professor H. A. Lorentz as Researcher). Напечатана отдельным изданием (Rotterdam, 1923); см. также: C. P., p. 471—478. О Лоренце см. в статье В. Я. Френкеля, являющейся приложением к публикуемым извлечениям из переписки Эренфеста с Лоренцем (стр. 214—227). На русском языке статья была опубликована в кн.: *Г. А. Лоренц.* Старые и новые проблемы физики. М., «Наука», 1971, стр. 225—237.

Приветственная речь при вручении медали Лоренца В. Паули (Address on Award of Lorentz Medal to Professor W. Pauli). Напечатана в «Versl. Akad. Amsterdam». 1931, 40, p. 121—126. См. также: C. P., p. 617—620. Речь, произнесенная П. С. Эренфестом на церемонии вручения Паули медали Лоренца 31 октября 1931 г. Первая медаль Лоренца была вручена самим Лоренцем Максу Планку (см. речь Лоренца, опубликованную в кн.: **Г. Лоренц.** Старые и новые проблемы физики. М., «Наука», 1971, стр. 207).

Переписка Эренфеста с Лоренцем. Комментарии к переписке помещены непосредственно вслед за ней.

V. СТАТЬИ И ВОСПОМИНАНИЯ О П. ЭРЕНФЕСТЕ

А. Эйнштейн. Памяти Пауля Эренфеста (A. Einstein. Nachruf Paul Ehrenfest. «Almanak van het Leidesche Studencorps», Leiden-Doesburg, 1934). Статья дважды издавалась на русском языке: в сборнике работ А. Эйнштейна «Физика и реальность» (М., «Наука», 1965) и в его Собрании научных трудов, т. IV (М., «Наука», 1967, стр. 190). Принадлежит к числу лучших образцов «мемориальной прозы» Эйнштейна — как по стилю, так и по глубине проникновения в человеческий характер.

П. Ланжевен. Из речи на открытии VII Сольвеевского конгресса 22 октября 1933 г. (P. Langevin. Structure et propriétés des noyaux atomiques. Rapports et Discussions du Septieme Conseil de Physique. Paris, 1934, p. VII—VIII). Практически полностью воспроизведена в кн. *В. Я. Френкель.* Пауль Эренфест. М., «Атомиздат», 1971.

Г. Уленбек, С. Гаудсмит, Г. Дике. Пауль Эренфест (G. E. Uhlenbeck, S. A. Goudsmit, G. H. Dieke. Paul Ehrenfest). Напечатан в «Science», 1933, 78, p. 377. Один из первых некрологов, опубликованных после смерти Эренфеста. Об Уленбеке см. примеч. на стр. 339. С. Гаудсмит (род. в 1902) — лейденский ученик Эренфеста, работавший в Лейденском университете с 1919 по 1926 г. Наиболее широкую известность получила выполненная им совместно с Уленбеком работа о вращающемся электроне, в которой было введено понятие спина электрона. Влияние Эренфеста на эту работу ее авторами оценивается исключительно высоко. В 1927 г. Гаудсмит эмигрировал в США, работал в Мичиганском университете. В настоящее время — один из редакторов американского журнала «Physical Review Letters», Г. Дике (род. в 1901 г.) — ученик Эренфеста, учившийся в 1921—1925 гг. в Лейденском университете, а затем эмигрировавший из Голландии в США, где преподавал в ряде университетов.

В. Паули. Пауль Эренфест (W. Pauli. Paul Ehrenfest). Напечатан в «Naturwissenschaften», 1933, 21 P., S. 841—843. Вольфганг Паули (1900—1958) — выдающийся физик-теоретик, лауреат Нобелевской премии, один из основоположников современной квантовой механики. Об отношениях Паули с Эренфестом см. в кн.: *Б. Клайн.* «В поисках». М., Атомиздат, 1971.

Х. Крамерс. Профессор П. Эренфест. (H. A. Kramers. Professor P. Ehrenfest). Некролог, напечатанный в «Nature», 1963, **132**, стр. 667. Хендрик Крамерс (1894—1952) — выдающийся голландский физик-теоретик, преемник Эренфеста на его кафедре теоретической физики Лейденского университета, которую он и занимал в течение 16 лет, вплоть до своей смерти в Лейдене.

Х. Крамерс. Физики как стилисты (H. A. Kramers. Physiker als Stilisten). Сокращенное изложение речи, произнесенной при вступлении в должность профессора Лейденского университета — в качестве преемника П. С. Эренфеста — 24 сентября 1934 г., в первую годовщину со дня смерти Эренфеста. Напечатана в журнале «Naturwissenschaften», 1935, **23**, S. 297—301.

Г. Уленбек. Воспоминания о профессоре П. Эренфесте (G. E. Uhlenbeck. Reminiscences of Professor Paul Ehrenfest). Опубликована в американском журнале «Am. Journal of Physics», 1956, **24**, p. 431, и представляет собой изложение речи, прочитанной проф. Г. Э. Уленбеком перед Американской ассоциацией предподавателей физики при вручении ему медали Эрстеда за заслуги в преподавании физики (2 февраля 1956 г.). Русский перевод: УФН, 1957, **62**, стр. 367—370.

А. Ф. Иоффе. Добавление к «Воспоминаииям о профессоре П. Эренфесте» Г. Уленбека. Напечатана в качестве добавления к предыдущей статье Г. Уленбека (УФН, 1957, **62**, стр. 371—372). А. Ф. Иоффе (1880—1960) — один из основоположников советской физики, друг П. С. Эренфеста.

А. Ф. Иоффе. Павел Сигизмундович Эренфест. Глава из книги А. Ф. Иоффе «Встречи с физиками. Мои воспоминання о зарубежных физиках» (М., Физматиздат, 1960, стр. 38—44).

КНИГИ И СТАТЬИ П. ЭРЕНФЕСТА[1]

1. Законы действий на расстоянии, приводимых к близкодействию. ЖРФХО, ч. физ., 1908, **40**, 8А[2], стр. 386.
2. Измеряет ли аберрация волновую скорость? (Сообщение). ЖРФХО ч. физ., 1908, **40**, 9А, стр. 441.
3. Нахождение при помощи зеркала производной от графически заданной функции (совместно с Г. Вейхардтом). ЖРФХО, ч. физ., 1908, **40**, 10Б, стр. 367.
4. Об одном опыте Герца. ЖРФХО, ч. физ., 1909, **41**, 7А, стр. 326.
5. Принцип Ле Шателье — Брауна и термодинамические законы взаимности. ЖРФХО, ч. физ., 1909, **41**, 8А, стр. 347—366.
6. Принцип относительности. ЖРФХО, ч. физ., 1910, **42**, 1Б, стр. 33—38, 2Б, стр. 81—87.
7. «*В. Л. Кирпичев*. Беседы по механике» (Рецензия). ЖРФХО, ч. физ., 1910, **42**, 4Б, стр. 169.
8. О так называемой «групповой скорости» (Совместно с Л. Исаковым) ЖРФХО, ч. физ., 1910, 42, 9Б, стр. 315—324.
9. «*Л. Кутюра*. Алгебра логики» (Рецензия). ЖРФХО, ч. физ., 1910, **42**, 10Б, стр. 382—387.
10. К работе А. И. Садовского «Пондеромоторное действие световых волн на кристаллы». ЖРФХО, ч. физ., 1911, **43**, 2А, стр. 67.
11. Черное излучение и смежные вопросы. ЖРФХО, ч. физ., 1911, **43**, 2Б, стр. 78—82.
12. «*Э. Вагнер*. О закономерных измерениях электропроводности металлов при плавлении» (Рецензия). ЖРФХО, ч. физ., 1911, **43**, 3Б, стр. 116.
13. «*А. Эйнштейн*. Теория опалесценции однородных жидкостей и жидких смесей вблизи критического состояния» (Рецензия). ЖРФХО, ч. физ., 1911, **43**, 3Б, стр. 117—119.
14. «*Б. П. Вейнберг*. Из воспоминаний о Д. М. Менделееве как лекторе» (Рецензия. Совместно с Л. Исаковым). ЖРФХО, ч. физ., 1911, 43, 3Б, стр. 121—122.
15. Магнетон. ЖРФХО, ч. физ., 1911, **43**, 4Б, стр. 126—143.
16. «Новые идеи в физике. Сборник № 1. Строение вещества» (Рецензия). ЖРФХО, ч. физ., 1911, **43**, 4Б, стр. 164—165.
17. «Из вопросов физики. 1.0 свете» (Рецензия) ЖРФХО, ч. физ., 1911, **43**, 4Б, стр. 165—166.
18. «*С. Корбино*. Электромагнитные действия, происходящие от деформации путей ионов в металлах, производимой магнитными полем» (Рецензия) ЖРХФО, ч. физ., 1911, **43**, 6Б, стр. 239.
19. «*Мак-Ларен*. Испускание и поглощение энергии электронами» (Рецензия) ЖРФХО, ч. физ., 1911, **43**, 6Б, стр. 241.

[1] Составил И. Я. Итенберг.

[2] А — отдел первый журнала, Б — отдел второй, цифры перед буквой — номер выпуска.

20. «*Блессинг*. О звуке церковных колоколов» (Рецензия) ЖРФХО, ч. физ. 1911 **43**, 6Б, стр. 242—243.
21 ‹*В. К Лебединский*. Элементарное учение об энергии» (Рецензия). ЖРФХО, ч. физ.- 1911, **43**, 6Б, стр. 243—244
22. «*М. Лауэ*. Принцип относительности» (Рецензия). ЖРФХО, ч. физ., 1911, **43**, 6Б, стр. 246.
23. «*Н. С. Дрентельн*. Указатель лучших общедоступных книг по физике» (Рецензия). ЖРФХО, ч. физ., 1911, **43**, 7Б, стр. 284—285.
24. «*Е. Янке и Ф. Эмде*. Таблицы функций с формулами и кривыми» (Рецензия). ЖРФХО, ч. физ., 1911, **43**, 7Б, стр. 285—286.
25. «*Д. Ван-дер-Ваальс*. О самых основных законах природы» (Рецензия). ЖРФХО, ч. физ., 1911, **43**, 8Б, стр. 321—323.
26. Возможно ли определить понятие «физика»? ЖРФХО, ч. физ., 1911, **43**, 9 Б, стр. 381—385.
27. «*Г. Вильзар*. О происхождении носителей движущейся и покоящейся интенсивности закатодных лучей» (Рецензия). ЖРФХО, ч. физ., 1911, **43**, 10Б, стр. 427.
28. «*Г. Вильсон*. Число электронов в атоме» (Рецензия). ЖРФХО, ч. физ., 1911, **43**, 10Б, стр. 428—430.
29. Кризис в гипотезе о световом эфире. ЖРФХО, ч. физ., 1913, **45**, 4Б, стр. 151—162.
30. «*Р. Вуд*. Исследования по физической оптике». (Рецензия).ЖРФХО, ч. физ., 1913, **45**, 10Б, стр. 394—395.
31. Заметка о теплоемкости двухатомных газов. ЖРФХО, ч. физ., 1914, **46**, 2 А, стр. 51—57.
32. Об одной механической теореме Больцмана и ее отношении к теории квантов. ЖРФХО, ч. физ., 1914, **46**, 2А, стр. 58—65.
33. По поводу статьи И. Е. Орлова «Основные формулы принципа относительности с точки зрения классической механики». ЖРФХО, ч. физ., 1914, **46**, 4А, стр. 175.
34. К теореме Больцмана о связи энтропии с вероятностью. ЖРФХО, ч. физ., 1914, **46**, 8А, стр. 321—335.
35. Упрощенный вывод формулы теории комбинаций, лежащей в основе теории излучения Планка (Совместно с Г. Каммерлинг-Оннесом). ЖРФХО, ч. физ., 1915, **47**, 2А, стр. 119—123.
36. Об интерференционных явлениях, имеющих место при прохождении рентгеновых лучей через двухатомный газ. ЖРФХО, ч. физ., 1915, **47**, 7А, стр. 479—485.
37. О кинетическом толковании осмотического давления. ЖРФХО, ч. физ., 1915, **47**, 8А, стр. 535—539.
38. Замечания о капиллярной теории кристаллической формы. ЖРФХО, ч. физ., 1915, **47**, 9А, стр. 590—598.
39 Теория квантов. ЖРФХО, ч. физ., 1924, **56**, 5—6А, стр. 449—450.
40. Замечания относительно диамагнетизма твердого висмута. ЖРФХО, ч. физ., 1927, **59**, 1А, стр. 105—108.
41. Интерпретация больцмановской статистики наряду с новыми статистиками с точки зрения волновой механики. (Совместно с Г. Уленбеком). ЖРФХО, ч. физ., 1927, **59**, 2А, стр. 151—152.
42. Zur Berechnung der Volumkorrektion in der Zustandgleichung von Vander Waals. «Wien. Ber», 1903, **112**, S. 1107—1115.— В кн: P. Ehrenfest. Collected Scientific Papers. Amsterdam, 1959, p. 77—85[1].

[1] В дальнейшем—(С. Р.).

43. Die Bewegung von starrer Körper in Flüssigkeiten und die Mechanik von Hertz. Unveröffentliche Dissertation. Wien, 1904. (C. P., p. 1—76)
44. Die Bedeutung der Unterbrechungsfunkens für das Funktionieren elektromagnetischer Stromunterbrecher. «Math. Naturw. Blätter», 1904, 1. (C. P., p. 86—88.)
45. Über die physikalischen Voraussetzungen der Planckschen Theorie der irreversiblen Strahlungsvorgänge. «Wien Ber.», 1905, 114, S. 1301—1314. (C. P., p. 88—101.)
46. Bemerkung zur Theorie der Entropiezunahme in der «Statistische Mechanik» von W. Gibbs. (Mit. T. Ehrenfest). «Wien Ber», 1906, 115, S. 89—98. (C. P., p. 107—116.)
47. Bemerkungen zum Abhandlung des Hrn. H. Reissner: «Anwendungen der Statik und Dynamik monozyklischer Systeme auf die Elastizitätstheorie». «Ann. Phys.», 1906, 19, S. 210—214 (C. P., p. 102—106.)
48. Zur Stabilitätsfrage bei den Bucherer — Langevin-Elektronen. «Phys. Z.», 1906, 7, S. 302—303. (C. P., p. 117—119.)
49. Bemerkungen zur einer neuen Ableitung des Wienschen Verschiebungsgesetzes. «Phys. Z», 1906, 7, S. 527—528. (C. P., p. 119—120.)
50. Zur Planckschen Strahlungstheorie. «Phys. Z.», 1906, 7, S. 528—532. (C. P., p. 120—124.)
51. Bemerkung zur eine neue Ableitung des Wienschen Verschiebungsgesetzes (Antwort auf Hrn. Jeans Entgegnung). Phys. Z., 1906, 7, S. 850—852. (C. P., p. 125—127).
52. Über eine Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die mit der kinetischen Deutung der Entropievermehrung zusammenhängt. (Mit. T. Ehrenfest). «Math.- Naturw. Blätter»., 1906, 3. (C. P., p. 128—130.)
53. Ludwig Boltzmann. «Math.-Naturw. Blätter.», 1906, 3, N 12. (C. P., p. 131—135). (Русский перевод в кн.: *Л. Больцман*. Статьи и речи. «Наука», 1970, стр. 190—202.)
54. Die Translation deformierbarer Elektronen und der Flächensatz. «Ann. Phys.», 1907, 23, S. 204—205. (C. P., p. 144—146).
55. On the partition of heat energy in the molecules of gases. «Proc. Roy. Soc. Edinburg», 1907, 27, p. 195—202. (C. P., p. 136—143.)
56. Über zwei bekannte Einwände gegen das Boltzmannsche *H*-Theorem. (Mit. T. Ehrenfest). «Phys. Z.», 1907, 8, S. 311—314. (C. P., p. 146—149.)
57. Gleichformige Rotation starrer Körper und Relativitäts theorie. «Phys. Z.», 1909, 10, S. 918. (C. P., p. 154.)
58. Wie sieht die Curve $y=(-1)^x$ aus? «Math. Naturw. Blätter», 1909, 6. (C. P., p. 150—151).
59. Graphische Veranschaulichung des einfachsten Falles von ungleichformiger Reichenkonvergenz. «Math.-Naturw. Blätter», 1909, 6. (C. P., p. 152—153.)
60. Ungleichförmige Elektrizitätsbewegungen ohne Magnet— und Stralungsfeld. «Phys. Z., 1910, 11, S. 708—709. (C. P., p. 155).
61. Zu Herrn v. Ignatowskys Behandlung der Bornschen Starrheitsdefinition. «Phys. Z.», 1910, 11, S. 1127—1129. (C. P., p. 156—158.)
62. Misst der Aberrationswinkel im Fall einer Dispersion des Äthers die Wellengeschwindigkeit? «Ann. Phys.», 1910, 33, S. 1571—1576. (C. P., p. 161—166.)
63. Das Prinzip von Le Chatelier — Braun und Reziprozitätssätze der

Thermodynamik. «Z. phys. Chemie», 1911, 77, S. 227—244; ЖРФХО, ч. физ., 1909, 41, стр. 347—366. (C. P. p. 167—184.)
64. Welche Züge der Lichtquantenhypothese spielen in der Theorie der Wärmestrahlung eine wesentliche Rolle? «Ann. Phys.», 1911, 36, S. 91—118. (C. P., p. 185—212.)
65. Zu Herrn v. Ignatowskys Behandlung der Bornschen Starrheitdefinition. II. «Phys. Z.», 1911, 12, S. 412—413. (C. P., p. 159—160.)
66. Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik. (Mit. T. Ehrenfest). «Encyklopedie d. mathematischen Wissenschaften», IV, 2, 11, Heft 6. Leipzig, 1912. (C. P., p. 213—302.)
67. Zur Frage nach der Entberlichkeit des Lichtäthers. «Phys. Z.», 1912, 13, S. 317—319. (C. P., p. 303—305.)
68. Zur Krise der Lichtäther-Hypothese. Leiden, 1913; Berlin, 1913. (C. P., p. 306—327.)
69. On Einstein's theory of the stationary gravitational field. «Proc. Acad. Amsterdam.», 1913, 15, p. 1187—1191; «Versh. Akad. Amsterdam», 1913, 21, 1234—1239. (C. P., p. 328—332.)
70. Bemerkung betreffs der spezifischen Wärme zweiatomiger Gase. «Verh. Dsch. Phys. Ges.», 1913, 15, S. 451—457; ЖРФХО, ч. физ., 1914, 46, стр. 51—57. (C. P., p. 333—339.)
71. A mechanical theorem of Boltzmann and its relation to the theory of energy quanta. «Proc. Amsterdam Acad»., 1913, 16, p. 591—597; «Versl. Akad. Amsterdam», 1913, 22, p. 586—593; ЖРФХО, ч. физ., 1914, стр. 58—65. (C. P., p. 340—346.)
72. Zum Boltzmannschen Entropie-Wahrscheinlichkeits-Theorem. «Phys. Z.», 1914, 15, S. 657—663. (C. P., p. 347—352.)
73. Simplified deduction of the formula from the theory of combinations which Planck uses as the basis radiations theory. (With H. Kamerling-Onnes). «Proc. Amsterdam Acad.», 1914, 23, p. 789—792; «Ann. Phys.», 1915, 46, S. 1021—1024; «Phil. Mag.», 1915 29, p. 297—301. (C. P., p. 353—356.)
74. Some remarks on the capillarity theory of the crystalline form. «Proc. Amsterdam Acad»., 1915, 18, p. 173—180; «Versl. Akad. Amsterdam», 1915, 24, p. 158—166; «Ann. Phys.», 1915, 48, S. 360—368. (C. P., p. 369—376).
75. On interference phenomena to be expected when Röntgen rays pass through a diatomic gas. «Proc. Amsterdam Acad.», 1915, 17, p. 1184—1190; «Versl. Akad. Amsterdam», 1915, 23, p. 1132—1138. (C. P., p. 357—363.)
76. On the kinetic interpretation of the osmotic pressure. «Proc. Amsterdam Acad.», 1915, 17, 1241—1245; «Versl. Akad. Amsterdam», 1915, 23, p. 1264—1268, «Ann. Phys.», 1915, 48, S. 369—374. (C. P., p. 364—368.)
77. On adiabatic changes of a system in connection with the quantum theory. «Proc. Amsterdam Acad.», 1916, 19, p. 576—597; «Versl. Akad. Amsterdam», 1916, 25, p. 412—433; «Ann. Phys»., 1916, 51, S. 327—352; «Phil. Mag.», 1917, 33, p. 500—513. (C. P., p. 378—399.)
78. In what way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions? «Proc. Amsterdam Acad»., 1917, 20, p. 200—209; «Versl. Akad. Amsterdam.», 1917, 26, p. 105—114; «Ann. Phys.», 1920, 61, S. 440—446. (C. P., p. 400—409.)
79. A paradox in the theory of the brownian movement. «Proc. Amsterdam. Acad.», 1917, 20, p. 680—683; «Versl. Akad. Amsterdam», 1917, 26, p. 768—771. (C. P., p. 410—413.)

80. Das Atommodell von Rutherford — Bohr. «Ned. Nat-en Gen. Congres. Gravenshage», 1917, S. 104—110.
81. On the capillarity theory of crystalline form. «Versl Akad. Amsterdam», 1919, 28, p. 390. (C. P., p. 377.)
82. Deductions of the dissociation equilibruim from the theory of quanta and a calculation of the chemical constant based on this (With V. Trkal). «Proc. Amsterdam Acad.», 1920, **23**, p. 162—183; «Versl. Akad. Amsterdam», 1920, 28, p. 906—929; «Ann. Phys.», 1921, **65**, S. 609—628. (C. P., p. 414—435.)
83. Note on the paramagnetism of solids. «Proc. Amsterdam Acad.», 1921, **23**, p. 989—992; «Versl. Akad. Amsterdam.», 1921, **29**, p. 793—796; «Z. Phys.», 1921, **5**, S. 35—38. (C. P., p. 443—446)
84. Note on the paramagnetism of solids. Leiden. Onnes-Comm. 1921, p. 53—60, p. 157—168.
85. A remarkable case of quantization (With G. Breit). «Proc. Amsterdam Acad.», 1922, **5**, p. 2—5; «Versl. Akad. Amsterdam», 1922, **3**, p. 5—8; «Z. Phys.», 1922, **9**, S. 207—210. (C. P., p. 447—450.)
86. The differense between series spectra of isotopes (With N. Bohr). «Nature», 1922, **109**, p. 745—746. (C. P., p. 4510.)
87. Quantetheoretische Bemerkungen zum Experiment von Stern und Gerlach (Mit. A Einstein). «Z. Phys.», 1922, **11**, S. 31—34. (C. P., p. 452—455.)
88. Theoretical remarks on absorption and emission bands in crystals at low temperatures. Het Natuurkundig laboratorium der rejksuniversitet te Leiden in de jaren 1904—1922. Gedenkbock aangeboden aan H. Kamerlingh Onnes. Leiden, 1922, p. 362—368. (C. P., p. 456—459.)
89. Das Gleichgewicht zwischen raumlichen Phasen und zweidimensionalen Phasen, die als einmolekulare Adsorptionsschichten kapillaraktiever Stoffe auftreten. «Recueil. Trav. Chin. Pays.-Bas.», 1923, **42**, S. 784—786. (C. P., p. 460—462.)
90. Adiabatische Transformationen in der Quantentheorie und ihre Behandlung durch Niels Bohr. «Naturwiss.», 1923, **11**, S. 543—550. (C. P., p. 463—470.)
91. Prof. H. A. Lorentz as researcher. Rotterdam, 1923. (C. P., p. 471—478.) (Русский перевод в кн.: *Г. А. Лоренц*. Старые и новые проблемы физики. «Наука», 1970, стр. 226—237.)
92. Ein alter Trugschluss betreffs des Wärmegleichgewichtes eines Gases im Schwerfeld. «Z. Phys.», 1923, **17**, S. 421—422; «Physika», 1923, **3**, p. 299—231. (C. P., p. 479—480.)
93. Kann die Bewegung eines System von S Freiheitsgraden mehr als (2S — 1)-fach-periodisch sein. «Z. Phys.», 1923, **19**, S. 242—245; «Physika», 1923, **3**, p. 275—278. (C. P., p. 481—484.)
94. Zur Quantentheorie des Strahlunggleichgewicht (Mit A. Einstein). «Z. Phys.», 1923, **19**, S. 301—306. (C. P., p. 485—490.)
95. Theorie der Quanten en Atombouv. Haag, 1923.
96. «H. A. Lorentz. Zum 70 Geburtstag». «Chem. Weekbl.», 1923, **20**, p. 4.
97. Le principe de correspondanse atomes et electrons. Rapports et discussions de la III Conference Solvey (1921). Paris, 1923, p. 248—254.
98. The quantum theory of the Fraunhofer diffraction (With P. S. Epstein). «Proc. Nat. Acad. Sci.» 1924, **10**, p. 133—139. (C. P., p 491—497.)

99. Weak Quantization. (With R. G. Tolman). «Phys. Rev.», 1924, 24, p. 287—295. (C. P., p. 498—506.)

100. The derivation of electromagnetic fields from a basis wave-function (With H. Bateman). «Proc. Nat. Acad. Sci.» 1924, 10, p. 369—374. (C. P., p. 507—512.)

101. Aanteckening bej bovenstaande opmerkingen. «Physica», 1924, 4, p. 259—260.

102. Potentials and Hertzian vectors for certain electromagnetic fields (With H. Bateman). «Phys. Rev.», 1924, 23, p. 782.

103. The Duane-Compton quantum theory of diffraction (With P. S. Epstein). «Phys. Rev.», 1924, 23, p. 663.

104. D. Coster. Optische Dubletts und Röntgendubletts. «Naturwiss.», 1924, 12, S. 724—725.
Эренфест в кратком дополнении к этой статье дал простую символику, поясняющую группировку электронов в возбужденных атомах по модели Ланде.

105. Opmerkingen over het diamagnetisme van vast bismuth. «Physica», 1925, 5, p. 388—391.

106. Energieschwankungen im Strahlungsfeld oder Kristallgitter bei Superposition quantisierter Eigenschwingungen. «Z. Phys.», 1925, 34, S. 362—373. (C. P., p. 513—524.)

107. Bemerkungen betreffs zweier Publikationen über Energieschwankungen. «Z. Phys», 1925, 35, S. 316. (C. P., p. 525.)

108. On the connection of di ferent methods of solution of the wave equation in multi-dimensional spaces (With G. Uhlenbeck). «Proc. Amsterdam. Acad.», 1926, 29, p. 1280—1285; «Versl. Akad. Amsterdam», 1926, 35, p. 476—481. (C. P., p. 526—531.)

109. Graphische Veranschaulichung der De Broglischen Phasenwellen in den fünfdimensionalen Welt von. O. Klein. «Z. Phys»., 1926, 39, p. 495—498. (C. P., p. 532—535.)

110. Die Wellenmechanische Interpretation der Boltzmannschen Statistik neben der der neueren Statistiken (Mit G. Uhlenbeck). «Z. Phys », 1927, 41, S. 24—26. (C. P., p. 536—538.)

111. Zum Einsteinschen «Mischungsparadoxon» (Mit G. Uhlenbeck). «Z. Phys.», 1927, 41, S. 576—582. (C. P., p. 539—545.)

112. Relation between the reciprocal impenetrability of matter and Pauli's exclusion principle: a correction. «Nature». 1927, 119, p. 196; «Naturwiss.», 1927, 15, p. 161—162. (C. P., p. 546.)

113. Relation between the reciprocal impenetrability of mater and Pauli's exclusion principle: a correction. «Nature», 1927, 119, p. 602; «Naturwiss.», 1927, 15, S. 268. (C. P., p. 547—550.)

114. Remarks of the quantum theory of diffraction (With P. S. Epstein). «Proc. Nat. Akad. Sci.», 1927, 13, p. 400—408. (C. P., p. 551—555.)

115. Bemerkung über die angenaherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quanten Mechanik. «Z. Phys.», 1927, 45, S. 455—457. (C. P., p. 556—558.)

116. H. A. Lorentz. Funeral oration. «Physica», 1928, 8, p. 101—104. (C. P., p. 559—564).

117. Bemerkung zur wellenmechanischen Deutung des limitären Ramsauer-Effektes. (Mit. A. Rutgers). «Naturwiss.», 1928, 16, S. 184. (C. P., p. 565.)

118. Zur Theormodynamik und Kinetik der thermoelektrischen Erscheinungen in Krystallen, insbesondere des Bridgman-Effektes. I (Mit

A. Rutgers). «Proc. Amsterdam Acad.», 1929, **32**, p. 698—706. (C. P., p. 566—574.)

119. Zur Thermodynamik und Kinetik der thermoelektrischen Erscheinungen in Krystallen, insbesondere des Bridgman-Efflektes. II (Mit A. Rutgers). «Proc. Amsterdam Akad.», 1929, **32**, p. 883—893. (C. P., p. 575—585.)
120. Bemerkungen über den Diamagnetismus von festem Wismut. «Z. Phys.», 1929, **58**, S. 719—721. (C. P., p. 586—588.)
121. Temperature equilibrium in a static gravitational field (With R. Tolman). «Phys. Rev.», 1930, **36**, p. 1791—1798. (C. P., pp. 589—596.)
122. Note on the statistics of nuclei (With J. R. Oppenheimer). «Phys. Rev.», 1931, **37**, p. 333—338. (C. P., p. 597—602.)
123. On the gravitional field produced by light (With R. Tolman and B. Podolsky). «Phys. Rev.», 1931, **37**, p. 602—615. (C. P., p. 603—616.)
124. Address on award of Lorentz medal to professor Pauli. «Verst. Akad. Amserdam», 1931, **40**, p. 121—126. (C. P., p. 617—622.)
125. Einige die Quantenmechanik betreffende Erkundigungsfragen. «Z. Phys.», 1932, **78**, S. 555—559. (C. P., p. 623—628.)
126. Golfmechanika. Haag, 1932.
127. Phasenunwandlungen im üblichen und erweiterten Sinn, klassifiziert nach den entsprechenden Singularitäten des thermodynamischen Potentiales. «Proc. Amsterdam Acad.», 1933, **36**, p. 153—157; «Comm. Kamerlingh Onnes Lab.», Leiden, 1933, **20**. Suppl. No 75B. (C. P., p. 628—632.)
128. *P. Ehrenfest*. Collected scientific papers. Amsterdam, 1959, p. XII + 632.

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН

СОДЕРЖАНИЕ

I. Оптика и теория относительности

II. Теория квантов и квантовая механика

III. Проблемы теоретической физики

IV. История физики. О современниках

V. Статьи и воспоминания о П. Эренфесте

Приложения

П. Эренфест

Относительность. Кванты. Статистика

Утверждено к печати
редколлегией серии
научно-популярных изданий
Академии наук СССР

Редактор издательства *Е. М. Кляус*
Художественный редактор *В. Н. Тикунов*
Художник *С. А. Данилов*
Технический редактор *В. Д. Прилепская*

Сдано в набор 18/V-1972 г.
Подписано к печати 21/XI-1972 г.
Формат $84\times108^{1}/_{16}$ Усл. печ. л. 19,11 Уч.-изд. л. 21,6
Тираж 21 000 экз. Бумага № 2 Тип. зак. 751 Т-15687
Цена 1 р. 30 к.

Издательство «Наука», 103717 ГСП
Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука»
121099 Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

П. ЭРЕНФЕСТ

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ. КВАНТЫ. СТАТИСТИКА

Цена 1 р. 30 к.