ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

Н. П. ЕРУГИН

НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1956

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета

В работе изложена теория неявных функций от одной независимой переменной. Даны способы построения неявных функций в виде рядов. Находятся области сходимости этих рядов и области существования неявных функций, определяемых этими рядами. Указывается аналитический вид неявных функций вне области сходимости рядов, представляющих неявные функции в исходной области

Ответственный редактор

К. У. Шахно

ВВЕДЕНИЕ

В § 1 сначала формулируются известные из анализа элементарные теоремы о существовании неявных функций, затем формулируются несколько более общие теоремы, доказательства которых также просты. Здесь же приводятся основные результаты, относящиеся к теории алгебраических функций. Доказывается теорема Вейерштрасса и на основе этой теоремы получаются теоремы о существовании в определенном аналитическом виде двух неявных функций от одной независимой переменной, определенных двумя уравнениями, представляемыми голоморфными функциями.

В § 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 рассматривается вопрос о существовании и фактическом построении двух неявных функций от одной независимой переменной, которые определены уравнениями, выраженными или голоморфными или частично голоморфными функциями. Доказывается, что при аналитическом продолжении неявных функций мы не встретим особых точек неопределенности в той области, где голоморфны функции, которые определяют эти неявные функции. В некоторых случаях это имеет место и тогда, когда уравнения, определяющие неявные функции, выражены не голоморными функциями. Это позволяет установить область существования неявных функций.

В § 9 на основе предыдущих общих теорем даются способы определения радиусов сходимости рядов, представляющих неявные функции.

Во всей работе для простоты изложения рассматриваются лишь уравнения, определяющие одну или две неявных функции. Эти вопросы часто возникают как в теоретических, так и в инженерных исследованиях, поэтому нам кажется целесообразным осветить эти вопросы несколько подробнее, чем это сделано в литературе.

Рукопись этой работы была просмотрена проф. В. И. Крыловым и кандидатом физико-математических наук А. Ф. Андреевым, которые сделали ряд весьма ценных критических замечаний. Эти замечания были приняты во внимание при написании окончательного текста работы. Автор благодарит В. И. Крылова и А. Ф. Андреева за большое внимание, которое они уделили рукописи.

§ 1

Сформулируем две известные [1, 2] теоремы из теории неявных функций.

Теорема 1. Предположим, что

1) функция $F(x, y)$ определена и непрерывна в области

$$x^2+y^2 \leqslant \Delta; \tag{Δ}$$

2) частные производные F_x', F_y' существуют и непрерывны в (Δ);

3) $F(0, 0)=0$;

4) $F_y'(0, 0) \neq 0$.

Тогда существует единственная непрерывная функция $y=y(x)$, определенная вблизи $x=0$, удовлетворяющая равенству

$$F(x, y)=0 \tag{1.1}$$

и обладающая свойством

$$y(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0. \tag{1.2}$$

Эта функция имеет непрерывную производную в точке $x=0$ и ее окрестности.

Теорема 2. Предположим, что

1) функции $F(x, y, z)$, $\Phi(x, y, z)$ определены и непрерывны в области

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant \Delta; \tag{Δ}$$

2) частные производные F_x', F_y', F_z, Φ_x', Φ_y', Φ_z', существуют и непрерывны в (Δ);

3) $F(0, 0, 0)=0$, $\Phi(0, 0, 0)=0$;

4) якобиан от функций F и Φ по x, y отличен от нуля в точке $x=y=z=0$, т. е.

$$J=\frac{D(F, \Phi)}{D(x, y)}=\begin{vmatrix} F_x', & F_y' \\ \Phi_x', & \Phi_y' \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{при } x=y=z=0.$$

Тогда существуют единственные непрерывные функции $y=y(z)$, $x=x(z)$, определенные вблизи $z=0$, удовлетворяющие равенствам

$$\Phi(x, y, z)=0, \quad F(x, y, z)=0 \tag{1.3}$$

и обладающие свойством

$$y(z)\to 0, \quad x(z)\to 0$$
$$\text{при } z\to 0. \tag{1.4}$$

Эти функции имеют непрерывные производные в точке $z=0$ и ее окрестности.

Если функции $\Phi(x, y, z)$ и $F(x, y, z)$ суть голоморфные в окрестности точки $x=y=z=0$, то и функции $x=x(z)$, $y=y(z)$ будут голоморфными [3] в окрестности точки $z=0$.

Заметим, что легко докажутся и следующие две теоремы.

Теорема 3. Предположим, что

1) функция $F(x, y)$ определена и непрерывна в области

$$x^2+y^2\leqslant\Delta; \tag{Δ}$$

2) $F(0, 0)=0$;

3) частные производные F_x', F_y' непрерывны в окрестности точки $x=y=0$ и $F_y'(0, 0)=0$;

4) $F_y'\geqslant 0$ в окрестности точки $x=y=0$, но равенство $F_y'=0$ при каждом x из окрестности точки $x=0$ возможно только при изолированных значениях y вблизи $y=0$.

Тогда существует единственная непрерывная функция $y=y(x)$, удовлетворяющая равенству $F(x, y)=0$ и обладающая свойством $y(x)\to 0$ при $x\to 0$. В тех точках (x, y), определяемых равенством $F(x, y)=0$ (т. е. на кривой $y=y(x)$), где $F_y'\neq 0$, функция $y=y(x)$ имеет непрерывную производную.

Доказательство этой теоремы не отличается от доказательства теоремы 1, приведенного в книге Г. М. Фихтенгольца [2].

Теорема 4. Предположим, что

1) функции $\Phi(x, y, z)$ и $F(x, y, z)$ определены и непрерывны в области

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant \Delta; \qquad (\Delta)$$

2) частные производные первого порядка от Φ и F существуют по всем аргументам и непрерывны в (Δ);

3) $\Phi(0, 0, 0)=0$, $F(0, 0, 0)=0$;

4) якобиан J от функций F и Φ по x, y обладает свойством $J=0$ при $x=y=z=0$;

5) функция J и одна из производных Φ_x', Φ_y', Φ_z', F_x', F_y', F_z' знакопостоянны в области (Δ), и если обращаются в нуль, то при фиксированных (x, z) только для изолированных y, а при фиксированных (y, z) только для изолированных значений x.

Тогда существуют единственные, непрерывные функции $y=y(z)$, $x=x(z)$, определенные вблизи $z=0$, удовлетворяющие равенствам $\Phi(x, y, z)=0$, $F(x, y, z)=0$ и обладающие свойством $x(z)\to 0$ и $y(z)\to 0$ при $z\to 0$. В тех точках (x, y, z) кривой $y=y(z)$, $x=x(z)$, где $J\neq 0$, существуют непрерывные производные $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$.

Доказательство не отличается от доказательства теоремы 2, приведенного в книге Г. М. Фихтенгольца [2].

Известно следующее.

Если имеем уравнение

$$y^n+a_1y^{n-1}+\ldots+a_{n-1}y+a_n=0, \qquad (1.5)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — голоморфные функции от x, обращающиеся в нуль при $x=0$, то n корней $y_1, \ldots, y_n$ этого уравнения в окрестности точки $x=0$ представимы сходящимися рядами вида

$$y=\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^{\frac{k}{p}} \qquad (1.5_1)$$

(p — целое положительное число) с постоянными коэффициентами α_k, причем число p может быть различным для разных корней $y_1, \ldots, y_n$, но сумма этих различных значений p не превосходит числа n.

Функции $y=y(x)$, определяемые уравнениями вида $F(x, y)=0$, где $F(x, y)$ есть полином относительно x и y, называются алгебраическими функциями. Здесь $F(x, y)$ предполагаются неразложимым полиномом, т. е. таким, который невозможно представить в виде произведения полиномов от x, y.

Алгебраические неявные функции особенно хорошо изучены. Показано, что эти функции в окрестности каждой точки $x=a$ можно представить в виде

$$y=y_1+\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (x-a)^{\frac{k}{p}}, \tag{1.6}$$

где α_k — числа постоянные, y_1 — корень уравнения $F(a, y_1)=0$ и p — целое число, положительное или отрицательное (отрицательными p могут быть лишь при условии, что коэффициент при старшей степени y в уравнении $F(x, y)=0$ обращается в нуль при $x=a$).

В окрестности точки $x=\infty$ алгебраическую функцию можно также представить в виде (1.6), где только $x-a$ нужно заменить величиной x^{-1}. Таким образом, алгебраические неявные функции изучены не только в окрестности некоторой точки, но и при их аналитическом продолжении на все значения x.

Если функция $y=y(x)$ представима в виде (1.6) и $p\neq 1$, то говорят, что функция $y(x)$ имеет в точке $x=a$ алгебраическую особенность или точка $x=a$ есть алгебраическая особая точка.

Известно и следующее. Если аналитическая функция $z=z(x)$ имеет в каждой точке x не более p значений (но в некоторых точках имеет и p различных значений) и если она в каждой точке, включая и точку $x=\infty$, имеет только алгебраические особые точки, то $z=z(x)$ является корнем полинома степени p относительно z с коэффициентами, которые являются рациональными функциями от x. Мы в дальнейшем будем рассматривать неявные функции более общего вида и для них получим выводы, во многом совпадающие с теми, которые имеют место для алгебраических функций или функций, определяемых уравнениями вида (1.5).

Сейчас мы докажем теорему Вейерштрасса [2], следуя в основном методу доказательства Гурса [3].

Теорема Вейерштрасса. Пусть дана функция $F(x_1, \ldots, x_n, y)$, голоморфная в начале координат, т. е.

$$F(x_1, \ldots, x_m, y) = \\ = \sum_{p_1 + \ldots + p_m + q = 1}^{\infty} \alpha_{p_1 \ldots p_m q} x_1^{p_1} \ldots x_m^{p_m} y^q, \qquad (1.6_1)$$

где $\alpha_{p_1 \ldots p_m q}$ — постоянные и ряд этот сходится при

$$|x_k| < r, \ |y| < r, \ (k = 1, \ldots, m).$$

Здесь r — положительное число. Предположим, что разложение функции $F(0, \ldots, 0, y)$ в ряд начинается с n-ой степени y, т. е.

$$F(0, \ldots, 0, y) = A_n y^n + A_{n+1} y^{n+1} + \ldots \qquad (1.7)$$

и $A_n \neq 0$. Тогда имеем тождество

$$F(x_1, \ldots, x_m, y) = (y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + \\ + a_{n-1} y + a_n) \Phi(x_1, \ldots, x_m, y), \qquad (1.8)$$

где $a_1, \ldots, a_n$ функции от $x_1, \ldots, x_m$, голоморфные в точке $x_1 = \ldots = x_m = 0$ и обращающиеся в этой точке в нуль, а $\Phi(x_1, \ldots, x_m, y)$ функция, голоморфная в точке

$$x_1 = \ldots = x_m = y = 0 \text{ и } \Phi(0, \ldots, 0, 0) \neq 0.$$

Сначала мы докажем две леммы.

Лемма 1. Пусть

$$F(y) = A_0 + A_1 y + \ldots + A_n y^n + \ldots, \qquad (1.9)$$

где коэффициенты A — постоянные и ряд (1.9) сходится при $|y| < \rho$.

Предположим, что в ряде (1.9) все величины y^n, $y^{n+1}, \ldots$ заменяются полиномами от y степени $n-1$ на основании формулы

$$y^n = \mu_0 + \mu_1 y + \ldots + \mu_{n-1} y^{n-1}, \qquad (1.10)$$

причем $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ суть некоторые параметры. После такой замены ряд $F(y)$ представится в виде полинома от y степени не выше $n-1$, коэффициенты которого будут голоморфными функциями от μ_0, $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ в начале координат.

Доказательство. Пусть $r_1, \ldots, r_n$ суть различные корни уравнения

$$r^n = \mu_0 + \mu_1 r + \ldots + \mu_{n-1} r^{n-1}. \qquad (1.11)$$

Тогда y, определяемый равенством (1.10), и равен одному из этих корней. Для таких значений y функцию $F(y)$ можно, очевидно, представить в виде полинома степени $n-1$

$$F(y) = B_0 + B_1 y + \ldots + B_{n-1} y^{n-1}. \qquad (1.12)$$

Это можно сделать по известной формуле Лагранжа

$$F(y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(y-r_1)\ldots(y-r_{k-1})(y-r_{k+1})\ldots(y-r_n)}{(r_k-r_1)\ldots(r_k-r_{k-1})(r_k-r_{k+1})\ldots(r_k-r_n)} F(r_k). \qquad (1.12_1)$$

Располагая здесь правую часть по возрастающим степеням y, мы получим представление (1.12), при этом коэффициенты B выйдут симметрическими функциями от $r_1, \ldots, r_n$. Если среди корней $r_1, \ldots, r_n$ имеются равные, то для представления $F(y)$ в виде полинома $n-1$ степени следует взять также соответствующую хорошо известную формулу Лагранжа. Впрочем, как легко видеть, представление $F(y)$ в форме (1.12) будет таким, что оно сохраняет вид и при кратных корнях уравнения (1.11). Коэффициенты B, будучи симметрическими функциями от $r_1, \ldots, r_n$, в силу голоморфности функции $F(y)$ представятся в виде рядов, членами которых будут полиномы от основных симметрических функций

$$P_k = r_1^k + \ldots + r_n^k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ряды эти будут сходиться при достаточно малых $r_1, \ldots, r_n$ или, что то же, при достаточно малых μ_0, $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$.

Заменив величины P_k по известным из алгебры формулам через $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$, мы убедимся, что $F(y)$ в точке $\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_{n-1} = 0$ является голоморфной функцией от параметров $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ и принимает значение A_0. в этой точке.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Рассматривается уравнение

$$y^n = \varphi_0(x_1, \ldots, x_m) + y\varphi_1(x_1, \ldots, x_m) + \\ + \ldots + y^n\varphi_n(x_1, \ldots, x_m) + \\ + y^{n+1}\varphi_{n+1}(x_1, \ldots, x_m) + \ldots, \tag{1.13}$$

где правая часть суть голоморфная функция от $x_1 \ldots, x_m$, y в точке $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = y = 0$ и коэффициенты $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ обращаются в нуль при $x_1 = \ldots = x_m = 0$.

Утверждается, что уравнение (1.13) может быть записано в виде

$$y^n = U_0 + U_1 y + \ldots + U_{n-1}y^{n-1}, \tag{1.14}$$

где $U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}$ суть голоморфные функции от $x_1, \ldots, x_m$ в точке $x_1 = \ldots = x_m = 0$, обращающиеся в этой точке в нуль.

Доказательство. На основании формулы (1.14) правую часть уравнения (1.13) можно записать в виде полинома от y, степени $n-1$ и коэффициенты этого полинома будут голоморфными функциями от U_0, $U_1, \ldots, U_{n-1}$ в точке $U_0 = U_1 = \ldots U_{n-1} = 0$. Заметим сначала, что из (1.14) имеем:

$$\left.\begin{array}{l} y^{n+1} = U_0 y + U_1 y^2 + \ldots + U_{n-2}\, y^{n-1} + \ldots, \\ y^{n+2} = U_0 y^2 + U_1 y^3 + \ldots + U_{n-3} y^{n-1} + \ldots, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y^{2n-1} = U_0 y^{n-1} + \ldots \end{array}\right\} \tag{1.15}$$

Здесь справа не выписаны члены, которые будут, по меньшей мере, второго измерения относительно U_0, $U_1, \ldots, U_{n-1}$ и не содержат y в степени, большей $n-1$.

Все величины y^{2n}, $y^{2n+1}, \ldots$, очевидно, также будут полиномами от $U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}$, не содержащими свободных и линейных членов. Заменяя по формулам (1.14) и (1.15) все выражения y^n, $y^{n+1}, \ldots$ в правой и левой частях равенства (1.13) и сравнивая после этого свободные члены относительно y, а также коэффициенты при $y, y^2, \ldots, y^{n-1}$, получим

$$\left.\begin{aligned} &U_0 = \varphi_0 + U_0\varphi_n + \ldots, \\ &U_1 = \varphi_1 + U_1\varphi_n + U_0\varphi_{n+1} \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &U_{n-1} = \varphi_{n-1} + U_{n-1}\varphi_n + U_{n-2}\varphi_{n+1} + \\ &\qquad + \ldots + U_0\varphi_{2n-1} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

Здесь справа не записаны члены, имеющие, по меньшей мере, второе измерение относительно $U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}$.

Из уравнений (1.16) можно найти $U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}$ в виде голоморфных функций от $x_1, x_2, \ldots, x_m$ в точке $x_1 = \ldots = x_m = 0$ и обращающихся в нуль в этой точке.

Действительно, в силу высказанных свойств функций $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ и незаписанных членов равенств (1.16), уравнения (1.16) выполнены при $x_1 = \ldots = x_m = U_0 = U_1 = \ldots = U_{n-1} = 0$ и соответствующий якобиан в этой точке равен единице, откуда следует наше утверждение.

Теорема Вейерштрасса теперь докажется так.

Рассмотрим уравнение

$$F(x_1, \ldots, x_m, y) = 0, \tag{1.17}$$

где $F(x_1, \ldots, x_m, y)$ — функция, упомянутая в теореме Вейерштрасса.

Так как согласно условию (1.7) $A_n \neq 0$, то вместо (1.17) можно рассмотреть уравнение

$$F(x_1, \ldots, x_m, y) = y^n - \varphi_0 - \varphi_1 y - \ldots - \varphi_n y^n - \\ - \varphi_{n+1} y^{n+1} - \ldots = 0, \tag{1.18}$$

где $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — голоморфные функции от $x_1, \ldots, x_m$ в точке $x_1 = \ldots = x_m = 0$ согласно условиям теоремы Вейерштрасса, обращающиеся в этой точке в нуль. Определив как указано выше функции

$U_0(x_1, \ldots, x_m), U_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, U_{n-1}(x_1, \ldots, x_m)$, полагаем в (1.18)

$$y^n = U_0 + U_1 y + \ldots + U_{n-1} y^{n-1} + V, \tag{1.19}$$

где V — некоторая переменная величина. Заменим теперь в (1.18) величины y^n, y^{n+1} согласно равенству (1.19) полиномами от y степени $n-1$. Тогда выражение (1.18) будет представляться полиномом от y степени $n-1$, коэффициенты которого будут выражаться степенными рядами от $x_1, \ldots, x_m, V$.

$$F = \theta_0(x_1, \ldots, x_m, V) + \theta_1(x_1, \ldots, x_m, V) y + \\ + \ldots + \theta_{n-1}(x_1, \ldots, x_m, V) y^{n-1}.$$

В силу способа определения функций $U_0(x_1, \ldots, x_m), \ldots, U_{n-1}(x_1, \ldots, x_m)$ все коэффициенты θ_l ($l = 0, 1, \ldots, n-1$) при $V = 0$ делаются тождественны нулям.

Следовательно, мы имеем:

$$F = VR(x_1, \ldots, x_m, V, y), \tag{1.20}$$

где R есть степенной ряд от $x_1, \ldots, x_m, V$, коэффициенты которого суть полиномы от y степени $n-1$.

Заменим здесь V согласно равенству (1.19), тогда будем иметь:

$$F = (y^n - U_0 - U_1 y - \ldots - \\ - U_{n-1} y^{n-1}) S(x_1, \ldots, x_m, y), \tag{1.21}$$

причем здесь ряд S сходится в окрестности $x_1 = \ldots = x_m = y = 0$. Так как согласно предположению

$$F(0, \ldots, 0, y) = y^n + A_{n+1} y^{n+1} + \ldots$$

и по доказанному выше $U_k(0, \ldots, 0) = 0$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$), то ряд S имеет свободный член, равный единице.

Теорема Вейерштрасса доказана.

Пусть теперь дана неявная функция $y = y(x)$ уравнением

$$F(x, y) = P_m(x, y) + P_{m+1}(x, y) + \ldots = 0. \tag{1.22}$$

Здесь $F(x, y)$ — голоморфная функция в окрестности точки $x = y = 0$ и $P_k(x, y)$ — однородные полиномы от x, y. Предположим, что

$$F(0, y) = A_n y^n + A_{n+1} y^{n+1} + \ldots \tag{1.23}$$

и $A_n \neq 0$, $n \geqslant m$. Не уменьшая общности, мы можем считать $A_n = 1$. Тогда согласно теореме Вейерштрасса имеем тождество

$$F(x, y) = [y^n + \varphi_1(x) y^{n+1} + \ldots + \varphi_n(x)] \Phi(x, y), \tag{1.24}$$

где $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ голоморфные функции, обращающиеся в нуль при $x = 0$, а $\Phi(x, y)$ — функция, голоморфная в точке $x = y = 0$ и $\Phi(0, 0) = 1$.

Отсюда следует, что функцию $y=y(x)$, заданную в окрестности точки $x=0$ равенством (1.22), можно будет представить рядом вида

$$y=\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{\frac{k}{p}} \tag{1.25}$$

[p — целое положительное число], который мы имели, разрешая уравнение (1.5).

Мы могли бы построить функцию $y=y(x)$ и так. Сделаем в уравнении (1.22) замену переменных

$$x=\alpha u+\beta v, \quad y=\gamma u+\delta v \tag{1.26}$$

с постоянными коэффициентами α, β, γ, δ. Тогда получим уравнение

$$f(u, v)=\sum_{k+l=m}^{\infty} a_{kl} u^k v^l=0 \tag{1.27}$$

и ряд этот будет сходиться в окрестности точки $u=v=0$. Коэффициент при u^m в равенстве (1.27) будет равен $P=P_m(\alpha, \gamma)$.

Возьмем в (1.26) α и γ такими, чтобы было $P \neq 0$.

Величины β и δ выберем таким образом, чтобы $\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$.

После такого выбора коэффициентов преобразования (1.26), из (1.27) мы будем иметь:

$$f(u, 0)=B_m u^m+B_{m+1} u^{m+1}+\ldots, \tag{1.28}$$

где $B_m \neq 0$. По теореме Вейерштрасса из (1.27) имеем:

$$\begin{aligned} f(u, v)=(B_m u^m+\psi_1(v) u^{m-1}+\ldots+ \\ +\psi_m(v)) \Psi(u, v)=0, \end{aligned} \tag{1.29}$$

где $\psi_1(v), \ldots, \psi_m(v)$ — голоморфные функции, обращающиеся в нуль при $v=0$, а $\Psi(u, v)$ — голоморфная функция от u, v и $\Psi(0, 0) \neq 0$.

Следовательно, из (1.29) в окрестности точки $u=v=0$ функцию $u=u(v)$ имеем в виде

$$u=\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k v^{\frac{k}{q}} \tag{1.30}$$

[q — целое положительное число].

Подставляя это значение u в первое из равенств (1.26), мы получим

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k v^{\frac{k}{q}}. \qquad (1.31)$$

Отсюда найдем

$$v^{\frac{1}{q}} = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k x^{\frac{k}{p}} \qquad (1.32)$$

[p — целое положительное число].

На основании (1.30) и (1.32) из (1.26) окончательно имеем:

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{\frac{k}{p}}. \qquad (1.33)$$

Таким образом, мы снова пришли к равенству (1.25).

Заметим, что в равенстве (1.23) возможно $n > m$, а в равенстве (1.29) всегда получаем полином степени m. Но переходя к равенству (1.33), при помощи равенств (1.26) мы получим то же самое, что имели и в равенстве (1.25).

Отметим еще следующее.

Определяя функцию $y = y(x)$, удовлетворяющую уравнению (1.22), мы получим ее в окрестности точки $x = 0$ на основании (1,24) как решение уравнения

$$y^n + \varphi_1(x) y^{n-1} + \ldots + \varphi_n(x) = 0. \qquad (1.34)$$

Предположим теперь, что значения $y = y_0$, $x = x_0$ удовлетворяют как уравнению (1.34), так и уравнению

$$\Phi(x, y) = 0, \qquad (1.35)$$

где $\Phi(x, y)$ — та самая функция, которая стоит в правой части равенства (1.24). Предположим теперь, что продолжая аналитически функцию $y = y(x)$ из окрестности точки $x = 0$, мы пришли в точку $x = x_0$, $y = y_0$.

Продолжая далее функцию $y = y(x)$ как решение уравнения (1.22), мы можем выбрать ее так, что она будет удовлетворять либо уравнению (1.34), либо уравнению (1.35). С этим фактом мы столкнемся далее, рассматривая вопрос об аналитическом продолжении решения $y = y(x)$ уравнения (1.22) с иной точки зрения.

Пусть нам дано теперь два уравнения

$$P(x, y, z) = \sum_{k=m}^{\infty} P_k(x, y, z) = 0, \tag{1.36}$$

$$Q(x, y, z) = \sum_{k=n}^{\infty} Q_k(x, y, z) = 0, \tag{1.37}$$

где $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ — голоморфные в окрестности точки $x=y=z=0$ функции, а $P_k(x, y, z)$ и $Q_k(x, y, z)$ — однородные полиномы степени k. Предположим, что

$$P(x, 0, 0) = A_p x^p + A_{p+1} x^{p+1} + \ldots, \tag{1.38}$$

$$Q(x, 0, 0) = B_q x^q + B_{q+1} x^{q+1} + \ldots, \tag{1.39}$$

где
$$A_p \neq 0 \text{ и } B_q \neq 0. \tag{1.40}$$

Тогда на основании теоремы Вейерштрасса уравнения (1.36) и (1.37) можно записать и так

$$P(x, y, z) = (x^p + \varphi_1(y, z) x^{p-1} + \ldots + \varphi_p(y, z)) \Phi(x, y, z) = 0, \tag{1.41}$$

$$Q(x, y, z) = (x^q + \psi_1(y, z) x^{q-1} + \ldots + \psi_q(y, z)) \Psi(x, y, z) = 0, \tag{1.42}$$

где $\varphi_k(y, z)$ и $\psi_k(y, z)$ — функции, голоморфные в точке $y=z=0$ и обращающиеся в нуль в этой точке, а $\Phi(x, y, z)$, $\Psi(x, y, z)$ — голоморфные функции в точке $x=y=z=0$ и отличные от нуля в этой точке. Отсюда следует, что для определения функций

$$x = x(z), \quad y = y(z), \tag{1.43}$$

удовлетворяющих уравнениям (1.36) и (1.37), в окрестности точки $x=y=z=0$, мы можем написать

$$x^p + \varphi_1(y, z) x^{p-1} + \ldots + \varphi_p(y, z) = 0, \tag{1.44}$$

$$x^q + \psi_1(y, z) x^{q-1} + \ldots + \psi_q(y, z) = 0. \tag{1.45}$$

Исключая отсюда x, найдем

$$Z(y, z) = \sum_{k=l}^{\infty} z_k(y, z) = 0, \tag{1.46}$$

где $Z(y, z)$ — функция, голоморфная в окрестности точки $y=z=0$, а $z_k(y, z)$ — однородные полиномы степени k.

Мы видели ранее, что из (1.46) всегда имеем[1]

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^{\frac{k}{\nu}}, \tag{1.47}$$

где α_k — постоянные, а ν — целое положительное число.

На основании (1.44), (1.45) получим

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z^{\frac{k}{\mu}}, \tag{1.48}$$

где β_k — постоянные, а μ — целое положительное число.

Предположим теперь, что мы имеем:

$$P(x,\ 0,\ 0) \equiv 0, \tag{1.49}$$

или

$$Q(x,\ 0,\ 0) \equiv 0, \tag{1.50}$$

или одновременно и (1.49) и (1.50). Тогда мы не имеем одновременно (1.41) и (1.42).

В этом случае мы поступим аналогично тому, как мы поступили при втором способе определения функции $y = y(x)$ из уравнения (1.22).

Введем новые переменные при помощи равенств

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 u + b_1 v + c_1 w, \\ y &= a_2 u + b_2 v + c_2 w, \\ z &= a_3 u + b_3 v + c_3 w. \end{aligned}\right\} \tag{1.51}$$

Подставим эти значения x, y и z в уравнения (1.36) и (1.37). Тогда получим

$$P(x,\ y,\ z) = \sum_{k+l+\nu=m}^{\infty} \alpha_{kl\nu} u^k v^l w^\nu = 0, \tag{1.52}$$

$$Q(x,\ y,\ z) = \sum_{k+l+\nu=n}^{\infty} \beta_{kl\nu} u^k v^l w^\nu = 0, \tag{1.53}$$

причем здесь ряды сходятся в окрестности точки $u = v = w = 0$. Легко видеть, что коэффициенты при u^m

---

[1] Мы исключаем из рассмотрения тот случай, когда в уравнение (1.46) не входит y. В этом последнем случае мы не имели бы (1.47).

и u^n в уравнениях (1.52) и (1.53) соответственно будут равны

$$P=P_m(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3), \tag{1.54}$$

$$Q=Q_n(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3). \tag{1.55}$$

Мы возьмем теперь постоянные α_1, α_2, α_3 такими, чтобы

$$P\neq 0 \text{ и } Q\neq 0. \tag{1.56}$$

Остальные коэффициенты преобразования (1.51) выберем так, чтобы определитель, составленный из них, был отличен от нуля.

При условиях (1.56) на основании теоремы Вейерштрасса из (1.52) и (1.53) имеем:

$$P(x,\ y,\ z)=(u^m+\varphi_1(v,\ w)\,u^{m-1}+\ldots+ \\ +\varphi_m(v,\ w))\,\Phi(u,\ v,\ w)=0, \tag{1.57}$$

$$Q(x,\ y,\ z)=(u^n+\psi_1(v,\ w)\,u^{n-1}+\ldots+ \\ +\psi_n(v,\ w))\,\psi(u,\ v,\ w)=0, \tag{1.58}$$

где $\varphi_k(v,\ w)$ и $\psi_k(v,\ w)$ — голоморфные функции в точке $v=w=0$ и равные нулю в этой точке, а $\Phi(u,\ v,\ w)$ и $\Psi(u,\ v,\ w)$ — голоморфные функции в точке $u=v=$ $=w=0$ и $\Phi(0,\ 0,\ 0)\neq 0$, $\Psi(0,\ 0,\ 0)\neq 0$.

Разрешая уравнения (1.57), (1.58) в окрестности точки $u=v=w=0$ так же, как мы разрешали уравнения (1.41), (1.42), в соответствии с (1.47), (1.48) получим

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k w^{\frac{k}{\nu}}, \tag{1.59}$$

$$v=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k w^{\frac{k}{\mu}}. \tag{1.60}$$

Подставляя эти значения u и v в последнее из равенств (1.51), найдем

$$z=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k w^{\frac{k}{l}}, \tag{1.61}$$

Здесь l — наименьшее кратное чисел ν и μ.

На основании (1.61) и (1.51) мы получим x и y в виде (1.48) и (1.47).

В следующих параграфах мы рассмотрим методы построения неявных функций, изучим функции, заданные уравнениями другого рода, покажем как можно искать радиусы сходимости рядов, представляющих неявные функции, и, наконец, рассмотрим вопрос об аналитическом продолжении неявных функций.

§ 2

Теорема 5. Предположим, что

1) функции $\Phi(x, y, z)$, $F(x, y, z)$ заданы в виде

$$\Phi(x, y, z) = A_1(z)x + A_2(z)y - \alpha_0(z) - \alpha_1(x, y, z)x^2 - \\ - \alpha_2(x, y, z)xy - \alpha_3(x, y, z)y^2,$$

$$F(x, y, z) = B_1(z)x + B_2(z)y - \beta_0(z) - \beta_1(x, y, z)x^2 - \\ - \beta_2(x, y, z)xy - \beta_3(x, y, z)y^2,$$

где функции A, B, α, β непрерывны вместе с первыми производными в окрестности точки $x = y = z = 0$ и $\alpha_0(0) = \beta_0(0) = 0$.

Таким образом, мы имеем:

$$\Phi(0, 0, 0) = 0, \quad F(0, 0, 0) = 0;$$

2) $D(z) = A_1(z)B_2(z) - B_1(z)A_2(z) \neq 0$ при $z \neq 0$ и $D(0) = 0$;

3) функции $N_k = \frac{\alpha_k B_2 - \beta_k A_2}{D}$, $M_k = \frac{\beta_k A_1 - \alpha_k B_1}{D}$ $(k = 0,$ $1, 2, 3)$ непрерывны вместе с производными в окрестности точки $x = y = z = 0$ и $M_0(0) = N_0(0) = 0$.

Тогда равенства

$$\Phi(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0 \tag{2.1}$$

определяют единственные непрерывные и дифференцируемые функции $x = x(z)$, $y = y(z)$, обращающиеся в нуль при $z = 0$.

Доказательство. Разрешая формально равенства (2.1) относительно x, y, получим

$$x = M_0(z) + M_1(x, y, z)x^2 + M_2(x, y, z)xy + \\ + M_3(x, y, z)y^2,$$

$$y = N_0(z) + N_1(x, y, z)x^2 + N_2(x, y, z)xy + \\ + N_3(x, y, z)y^2. \tag{2.2}$$

По теореме 2 эти равенства определяют единственные непрерывные и дифференцируемые функции

$x=x(z)$, $y=y(z)$, обращающиеся в нуль при $z=0$. Эти функции, очевидно, удовлетворяют и равенствам (2.1). Теорема доказана.

Замечание 1. Если $M_0^2(0)+N_0^2(0)\neq 0$, то система (2.2) может иметь решение

$$\begin{aligned} x=x(z)\to x_0=M_0(0)+M_1(x_0,\ y_0,\ 0)\,x_0^2+\\ +M_2(x_0,\ y_0,\ 0)\,x_0y_0+M_3(x_0,\ y_0,\ 0)\,y_0^2,\\ y=y(z)\to y_0=N_0(0)+N_1(x_0,\ y_0,\ 0)\,x_0^2+\\ +N_2(x_0,\ y_0,\ 0)\,x_0y_0+N_3(x_0,\ y_0,\ 0)\,y_0^2. \end{aligned}$$

Это решение системы (2.2) будет также решением системы (2.1).

Замечание 2. Если функции $\Phi(x, y, z)$ и $F(x, y, z)$ голоморфные в окрестности точки $x=y=z=0$, то и найденные функции $x=x(z)$, $y=y(z)$ суть голоморфные в окрестности точки $z=0$.

§ 3

Предположим, что функции $F(x, y, z)$ и $\Phi(x, y, z)$ являются голоморфными от x, y, z в окрестности начала координат и записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} F(x,\ y,\ z)=\alpha_0(z)+\alpha_1(z)\,x+\alpha_2(z)\,y+\alpha_3(z)\,x^2+\\ +\alpha_4(z)\,xy+\alpha_5(z)\,y^2+\ldots,\\ \Phi(x,\ y,\ z)=\beta_0(z)+\beta_1(z)\,x+\beta_2(z)\,y+\beta_3(z)\,x^2+\\ +\beta_4(z)\,xy+\beta_5(z)\,y^2+\ldots, \end{aligned}\right\}\qquad(3.1)$$

где функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ — голоморфные в окрестности точки $z=0$.

Предположим

$$\alpha_0(0)=\beta_0(0)=0. \qquad (3.2)$$

Обозначим $D(z)=\alpha_1(z)\beta_2(z)-\beta_1(z)\alpha_2(z)$.

Если $D(0)\neq 0$, то уравнения

$$F(x,\ y,\ z)=0,\quad \Phi(x,\ y,\ z)=0 \qquad (3.3)$$

определяют единственные функции

$$x=x(z),\quad y=y(z) \qquad (3.4)$$

голоморфные в окрестности $z=0$ и обращающиеся в нуль при $z=0$. Таким образом, при всех достаточно малых значениях $|z|$ уравнения (3.3) определяет единственные значения $x(z)$, $y(z)$, которые равны нулю при $z=0$.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$D(z)\equiv 0 \text{ или } D(0)=0, \tag{3.5}$$

но одна из функций α_1, α_2, β_1, β_2 при $z\to 0$ имеет предел, отличный от нуля. Например, пусть в системе (3.1) имеем только

$$\alpha_2(0)\neq 0. \tag{3.6}$$

Тогда из первого уравнения системы (3.3) имеем

$$y=\gamma_0(z)+\gamma_1(z)x+\gamma_2(z)x^2+\ldots, \tag{3.7}$$

причем здесь y — голоморфная в окрестности начала координат $x=z=0$ функция, $\gamma_i(z)$ — функции, голоморфные в окрестности $z=0$ и

$$\gamma_0(0)=0. \tag{3.8}$$

Подставляя значение y из (3.7) во второе уравнение системы (3.3), найдем

$$\Phi(x,\ y(z,x),\ z)=\delta_0(z)+\delta_1(z)x+\delta_2(z)x^2+\ldots=0, \tag{3.9}$$

где $\delta(z)$ — функции, голоморфные в окрестности $z=0$ и

$$\delta_0(0)=0. \tag{3.10}$$

Может случиться, что все $\delta_k(z)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ldots)$ имеют множитель z^l, где l — целое число >0. В этом случае уравнению (3.9) при $z=0$ удовлетворяет произвольное значение x.

Таким образом, здесь при $z=0$ уравнениям (3.3) удовлетворяет бесконечное множество значений x, y, где x — произвольное из некоторой окрестности $x=0$, а y определяется равенством (3.7) при $z=0$.

Легко видеть, что этот случай имеем тогда и только тогда, когда

$$\left.\frac{D(F,\ \Phi)}{D(x,\ y)}\right|_{z=0,\ y=\gamma_0(0)+\gamma_1(0)x+\ldots}\equiv 0.$$

Действительно в рассматриваемом случае

$$F(x,\ y,\ 0)=M(x,\ y)F_1(x,\ y),$$
$$\Phi(x,\ y,\ 0)=M_1(x,\ y)\Phi_1(x,\ y),$$

где $M(x, y) = y - \gamma_0(0) - \gamma_1(0)x - \ldots$ откуда и следует утверждение.

В частности, следовательно,

$$\left.\frac{D(F, \Phi)}{D(x, y)}\right|_{z=x=y=0} = 0.$$

Если же в (3.9) $\delta_k(z) \equiv 0$, то, задавая произвольно функцию $x = x(z) \to 0$ при $z \to 0$ и подставляя эту функцию в (3.7), получим $y = y(z) \to 0$ при $z \to 0$. Эти функции удовлетворяют, очевидно, и системе (3.3). Как легко видеть, это возможно тогда и только тогда, когда

$$\left.\frac{D(F, \Phi)}{D(x, y)}\right|_{y=\gamma_0(z)+\gamma_1(z)x+\ldots} \equiv 0.$$

Пусть $\delta_k(z) \not\equiv 0$, но $\delta_k(0) = 0$. Выясним, существует ли при этом предположении функции $x = x(z)$, $y = y(z)$, удовлетворяющие уравнениям (3.3) и обращающиеся в нуль при $z = 0$. С этой целью сократим равенство (3.9) на z^l. Тогда получим ряд вида (3.9); обозначение мы оставляем без изменений.

Предположим, что получилось $\delta_0(0) \neq 0$. Тогда, очевидно, нет функций $x(z)$, $y(z)$, удовлетворяющих уравнениям (3.3) и обращающихся в нуль при $z = 0$, но могут, конечно, еще быть такие решения $x(z)$, $y(z)$ системы (3.3), что $x(0) \neq 0$.

Предположим теперь, что после сокращения равенства на z^l получилось $\delta_0(0) = 0$ (или пусть сразу в (3.9) не все $\delta_k(0) = 0$ при $K \geqslant 1$, но согласно (3.10) $\delta_0(0) = 0$). Если

$$\frac{d\delta_0(0)}{dz} \neq 0, \tag{3.11}$$

то из (3.9) мы имеем:

$$z = K_n x^n + K_{n+1}x^{n+1} + \ldots, \tag{3.12}$$

где n — целое положительное число.

Теперь нужно рассмотреть несколько различных случаев, которые могут здесь встретиться.

I. n — нечетное. Тогда всякий раз из (3.12) имеем:

$$z^{\frac{1}{n}} = K_n^{(1)}x + K_n^{(2)}x^2 + \ldots, \tag{3.13}$$

где

$$K_n^{(1)} = K_n^{\frac{1}{n}}. \tag{3.14}$$

Обращая этот ряд, получим

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} A_k z^{\frac{k}{n}} \quad \left(A_1=K_n^{-\frac{1}{n}}\right). \tag{3.15}$$

Подставляя это значение в равенство (3.7), будем иметь

$$y=\sum_{k=1}^{\infty} B_k z^{\frac{k}{n}}. \tag{3.16}$$

Таким образом, из (3.12) мы получаем только одно вещественное решение x, y (комплексные нас не интересуют) в виде (3.15) и (3.16), определенное вблизи $z=0$, при $z \geqslant 0$ и при $z<0$.

II. n — четное, $K_n>0$.

В этом случае мы также имеем (3.15) и (3.16), но $z^{\frac{1}{n}}$ имеет два вещественных значения и только при $z \geqslant 0$.

Таким образом, мы здесь имеем два вещественных решения системы (3.3) и эти решения определены при $z \geqslant 0$.

III. n — четное, $K_n<0$.

В этом случае, как видно из (3.12), при малых значениях x значения z будут отрицательными. Поэтому, чтобы иметь дело с вещественными переменными из (3.12), мы получим не (3.13), а

$$(-z)^{\frac{1}{n}}=K_n^{(1)}x+K_n^{(2)}x^2+\ldots \tag{3.17}$$

и

$$K_n^{(1)}=(-K_n)^{\frac{1}{n}}. \tag{3.18}$$

Из (3.17) имеем:

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} A_k (-z)^{\frac{k}{n}} \quad \left(A_1=(-K_n)^{-\frac{1}{n}}\right). \tag{3.19}$$

Вместо (3.16) получим также

$$y=\sum_{k=1}^{\infty} B_k (-z)^{\frac{k}{n}}. \tag{3.20}$$

Здесь, как и в случае II, величина $(-z)^{\frac{1}{n}}$ имеет два вещественных значения, отличающихся лишь знаком.

Таким образом, в случае III мы имеем два вещественных решения системы (3.3), обращающихся в нуль при $z=0$; эти решения определены только при $z \leqslant 0$.

Пусть теперь

$$\delta_0(0)=0, \quad \frac{d\delta_0(0)}{dz}=0, \tag{3.21}$$

но

$$\delta_1(0) \neq 0. \tag{3.22}$$

Тогда из (3.9) найдем x в виде сходящегося ряда

$$x=a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \ldots, \tag{3.23}$$

где k — целое $\geqslant 2$.

Подставляя это выражение x в ряд (3.7), получим

$$y=b_m z^m + b_{m+1} z^{m+1} + \ldots \tag{3.24}$$

Таким образом, при условии (3.22) система (3.3) имеет единственное решение $x(z)$, $y(z)$, в котором $x(0)=$ $=y(0)=0$.

Заметим, что если второе из условий (3.21) не имеет места, то в (3.23) $k=1$.

Полученные выводы относительно системы (3.3) можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 6. Предположим, что дана система уравнений (3.3) и выполнены условия (3.5) и (3.6). Подставляя ряд (3.7), найденный из первого уравнения системы (3.3), во второе уравнение системы (3.3), получим (3.9). Тогда имеется вещественное решение $x(z)$, $y(z)$ системы (3.3), обладающей свойством $x(0)=y(0)=0$ при условиях:

а) *если имеем* (3.11). Из (3.9) получим (3.12). При этом, в случае нечетного n решение системы (3.3) будет единственным; оно будет определено в некоторой окрестности $z=0$ при $z \geqslant 0$ и при $z<0$ и представимо рядами (3.15) и (3.16). В случае четного n, $K_n>0$ имеем два решения, но определены они лишь при $z \geqslant 0$, а представлены снова рядами (3.15), (3.16). Наконец, в случае четного n и $K_n<0$ имеем два решения, которые определены в окрестности $z=0$ при $z \leqslant 0$ и представлены в виде (3.19), (3.20);

б) *если имеем (3.22).* Решение будет единственным, оно будет определено в окрестности $z=0$ и представлено рядами (3.23) и (3.24);

в) *если имеем*:

$$\delta_k(z) \not\equiv 0,$$
$$\delta_k(0) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3.25}$$

но после сокращения ряда (3.9) на общий множитель z^l коэффициентов $\delta_k(z)$ получим ряд вида (3.9) со свободным членом $\delta_0(z)$, обращающимся в нуль при $z = 0$. В этом случае мы будем иметь один из трех предыдущих случаев I, II, III, указанных в пункте „*а*".

При $z = 0$ система (3.3) будет иметь бесконечное число решений (x, y), где x произвольное из некоторой окрестности $x = 0$, а y определяется выражением (3.9) при $z = 0$;

г) *если имеем* $\delta_k(z) \equiv 0$. Тогда, выбирая произвольно функцию $x = x(z) \to 0$ при $z \to 0$ из (3.7), получим $y = y(z) \to 0$ при $z \to 0$.

Далее мы рассмотрим и тот случай, когда в уравнении (3.9) $\delta_0(0) = 0$, $\delta_0'(0) = 0$ и $\delta_1(0) = 0$.

§ 4

Сейчас мы выразим условия (3.11) и (3.22) через коэффициенты рядов (3.1). Из (3.3), (3.7) и (3.9) видим, что

$$\frac{d\delta_0(0)}{dz} = \Phi_z' + \Phi_y' \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_{x=z=0}, \tag{4.1}$$

где $\frac{\partial y}{\partial z}$ находим из

$$F_z' + F_y' \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_{x=z=y=0} = 0. \tag{4.2}$$

Подставляя отсюда значение $\frac{\partial y}{\partial z}$ в (4.1), получим

$$\frac{d\delta_0(0)}{dz} = \left.\frac{\Phi_z' F_y' - \Phi_y' F_z'}{F_y'}\right|_{x=y=z=0}. \tag{4.3}$$

Но

$$\left.\begin{aligned} &F_y'(0, 0, 0) = \alpha_2(0), \quad F_z'(0, 0, 0) = \alpha_0'(0), \\ &\Phi_z'(0, 0, 0) = \beta_0'(0), \quad \Phi_y'(0, 0, 0) = \beta_2(0), \\ &\Phi_x'(0, 0, 0) = \beta_1(0), \quad F_x'(0, 0, 0) = \alpha_1(0). \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Поэтому (4.3) можно записать в виде

$$\frac{d\delta_0(0)}{dz} = \frac{\beta_0'(0)\,\alpha_2(0) - \beta_2(0)\,\alpha_0'(0)}{\alpha_2(0)}. \tag{4.5}$$

Отсюда видим, что условие (3.11) может быть выражено в виде

$$\beta_0'(0)\,\alpha_2(0)-\beta_2(0)\,\alpha_0'(0)\neq 0. \tag{4.6}$$

Как видно из (4.3), это условие может быть записано и в виде

$$J=\left.\frac{D(\Phi,F)}{D(y,z)}\right|_{x=y=z=0}\neq 0\,. \tag{4.7}$$

Но при этом условии и без дополнительного условия (3.6) из уравнений (3.3) мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} z &= a_m x^m + a_{m+1}x^{m+1}+\ldots,\\ y &= b_n x^n + b_{n+1}x^{n+1}+\ldots \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Чтобы разрешить вопрос о существовании вещественных функций $x=x(z)$, $y=y(z)$, удовлетворяющих системе (3.3) и обращающихся в нуль при $z=0$, нужно провести такой же анализ первого из уравнений (4.8), какой мы провели относительно (3.12).

Из (3.1), (3.7) и (3.9) видим так же, что

$$\delta_1(0)=\Phi_x'+\Phi_y'\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=z=0}, \tag{4.9}$$

где $\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=z=0}$ находится из

$$F_x'+F_y'\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=y=z=0}=0\,, \tag{4.10}$$

Таким образом, мы имеем:

$$\delta_1(0)=\left.\frac{\Phi_x'\,F_y'-\Phi_y'\,F_x'}{F_y'}\right|_{x=y=z=0}. \tag{4.11}$$

На основании (4.4)

$$\delta_1(0)=\frac{\beta_1(0)\,\alpha_2(0)-\beta_2(0)\,\alpha_1(0)}{\alpha_2(0)}. \tag{4.12}$$

Следовательно, условие (3.22) можно записать в виде

$$\Phi_x'F_y'-\Phi_y'F_x'\,\big|_{x=y=z=0}=\beta_1(0)\,\alpha_2(0)-$$
$$-\beta_2(0)\,\alpha_1(0)\neq 0. \tag{4.13}$$

Но, это есть условие $D(0)\neq 0$, которое мы рассмотрели в начале § 3. Таким образом, случай (3.5) при условии (3.22) невозможен.

§ 5

Замечание 1. Предположим, что в рядах (3.1) $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ суть не голоморфные функции, а лишь непрерывные вместе со вторыми производными и такие, что как ряды (3.1), так и ряды, полученные из них почленным дифференцированием по z, сходятся равномерно в области

$$z^2 + x^2 + y^2 \leqslant \Delta. \tag{5.1}$$

Тогда при условии (4.13) мы имеем единственное вещественное решение системы (3.3)

$$x = x(z) \to 0, \quad y = y(z) \to 0 \text{ при } z \to 0. \tag{5.2}$$

Пусть теперь имеем (3.6) и условие (4.13) не выполнено, но выполнено (4.6), т. е. условие (3.11). Тогда получим единственное вещественное решение системы (3.3).

$$z = \varphi(x) \to 0, \quad y = \psi(x) \to 0 \text{ при } x \to 0. \tag{5.3}$$

Чтобы решить вопрос о существовании вещественного решения (5.2), надо рассмотреть вопрос об обращении функции $z = \varphi(x)$. Так как условие (4.13) не выполнено, то согласно (4.12) мы имеем $\delta_1(0) = 0$. Предположим еще, что ряды, полученные из (3.1) двукратным почленным дифференцированием по z, равномерно сходятся в области (5.1). Тогда, как легко видеть, $\frac{d^2\delta_k(z)}{dz^2}$ ($k = 0, 1, \ldots$) существуют и непрерывны в окрестности точки $z = 0$, а ряд (3.9) допустимо дважды почленно дифференцировать по z.

Предположим еще, что

$$b = -\frac{2\delta_2(0)}{\delta_0'(0)} > 0. \tag{5.4}$$

В силу $\delta_1(0) = 0$ мы имеем:

$$\frac{dz}{dx} = 0 \text{ при } x = 0, \text{ но } \left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0} = b \neq 0.$$

Следовательно, функцию $z\ \varphi(x)$ можно представить в виде

$$z = x^2(a^2 + \Theta(x)), \quad \left(a^2 = \frac{1}{2}b\right), \tag{5.5}$$

где $\Theta(x) \to 0$ при $x \to 0$.

Из (5.5) имеем:

$$U = \sqrt{z} = x(a + \Theta_1(x)), \tag{5.6}$$

где $\Theta_1(x) \to 0$ при $x \to 0$. Пусть $\Theta_1'(x)$ ограничено в окрестности точки $x = 0$ или, $x\Theta_1'(x) \to 0$ при $x \to 0$.

Так как функция $F(U, x) = U - x(a + \Theta_1(x))$ обладает свойствами $F(0, 0) = 0$, $\frac{\partial F(0, 0)}{\partial x} = -a \neq 0$, то по теореме (1) равенство (5.6) определяет функцию

$$x = x(\sqrt{z}) \to 0 \text{ при } z \to 0. \tag{5.7}$$

Согласно (5.3) будем иметь и $y = y(\sqrt{z}) \to 0$ при $z \to 0$. Следует, однако, обратить внимание на то, что уже просто из факта существования функции $z = z(x)$, данной формулой (5.5), вытекает существование функции $x = x(z)$, а, следовательно, на основании (3.7) и функции $y = y(z)$. В § 10 мы покажем как найти область определения этих функций. Полученные функции будут вещественными при $z \geqslant 0$. Если $b < 0$, то получим $x = x(\sqrt{-x}) \to 0$, $y = y(\sqrt{-z}) \to 0$ при $z \to 0$, и эти функции будут вещественными при $z \leqslant 0$. Величина b легко находится через коэффициенты рядов (3.1) при помощи конечного числа операций. Заметим еще, что вторую производную $\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$ мы можем найти и непосредственно из уравнений (3.3). Действительно, первые производные $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$ мы найдем из уравнений, которые получим, дифференцируя полным образом равенства (3.3) по x.

$$F_x' + F_y'y' + F_z'z' = 0, \quad \Phi_x' + \Phi_y'\, y' + \Phi_z'\, z' = 0, \tag{5.8}$$

где y', z' производные по x. Так как условие (4.13) не выполнено, то, как легко видеть, из (5.8) имеем:

$$\left. z_x' \right|_{x=0} = 0, \tag{5.9}$$

Производные y'', z'' найдем из уравнений, которые получим, дифференцируя полным образом равенства (5.8) по x.

А именно, мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &F''_{xx}+F''_{xy}y'+F''_{xz}z'+F''_{yx}y'+F''_{yy}y'^2+\\ &+F''_{yz}y'z'+F''_{zx}z'+F''_{zy}z'y'+F''_{zz}z'z'+\\ &\qquad+F'_y y''+F'_z z''=0;\\ &\Phi''_{xx}+\Phi''_{xy}y'+\Phi''_{xz}z'+\Phi''_{yx}y'+\Phi''_{yy}y'^2+\\ &+\Phi'_{zy}y'z'+\Phi''_{xz}z'+\Phi''_{zy}z'y'+\Phi''_{zz}z'^2+\\ &\qquad\Phi'_y y''+\Phi'_z z''=0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.10)$$

Эти равенства нужно взять при $x=y=z=0$. На основании (5.9) равенства (5.10) упрощаются. Именно, в силу (5.9) мы будем иметь:

$$\begin{aligned} &F''_{xx}+2F''_{xy}y'+F''_{yy}y'^2+F_y'y''+F_z'z''=0;\\ &\Phi''_{xx}+2\Phi''_{xy}y'+\Phi''_{yy}y'^2+\Phi'_y y''+\Phi'_z z''=0. \end{aligned} \qquad (5.11)$$

Отсюда мы и найдем легко интересующую нас величину $z''(0)=b$.

Заметим, что здесь мы не пользуемся предположением (3.6). Предположение (3.6) равносильно предположению

$$F_y'(0,\ 0,\ 0)\neq 0. \qquad (5.12)$$

Таким образом, мы легко сможем решить вопрос о существовании решения (5.2) системы (3.3) и для того случая, когда коэффициенты рядов (3.1) не являются голоморфными, но можно почленно дифференцировать ряды (3.1) по z соответствующее число раз (чтобы получить первую неравную нулю производную $z^{(k)}(0)\neq 0$), и когда имеет место условие (4.6) или, что то же, (4.7).

Далее для случая голоморфных функций $\Phi(x, y, z)$, $F(x, y, z)$ мы рассмотрим и такие уравнения (3.3), когда нет ни условий (4.6), ни условий (4.13), т. е. когда разложение функций $F(x, y, z)$ и $\Phi(x, y, z)$ в ряд по степеням x, y и z начинается с членов измерения большего единицы.

З а м е ч а н и е 2. Предположим, что система (3.3), в которой коэффициенты $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ суть непрерывные функции и выполнено условие (3.6), при $z=0$ имеет, кроме $x=0$, $y=0$, бесконечное множество других решений x_1, y_1, и среди x_1, y_1 есть числа, как угодно малые. Как видно из (3.9), это возможно только в случае $\delta_k(0)=0$. А тогда x произвольно и y дается формулой (3.7) при $z=0$.

Здесь, как было показано,

$$\left.\frac{D(F,\Phi)}{D(x,y)}\right|_{x=y=z=0}=0 \quad \text{или} \quad D(0)=0.$$

При этих условиях, как мы видели, может быть единственное решение системы (3.3) $x(z)$, $y(z)$, обладающее свойством $x(z)\to 0$, $y(z)\to 0$ при $z\to 0$.

Замечание 3. Предположим, что коэффициенты уравнений (3.3) зависят не только от z, но и от некоторого параметра φ. Пусть выполнены условия (3.5) и (3.6). Тогда, как уже было указано, в ряде (3.9) $\delta_0(0)=0$.

Теперь коэффициенты ряда (3.9) будут зависеть от параметра φ. Предположим еще, что мы имеем именно тот случай, когда все $\delta_k(z)$ $(k\geqslant 0)$ имеют множитель z^l. Тогда после сокращения на z^l получим ряд вида (3.9), где $\delta_0=\delta_0(z,\varphi)$. Если окажется, что $\delta_0(0,\varphi)\neq 0$, то при произвольном значении φ у системы (3.3) нет решения $x(z)\to 0$, $y(z)\to 0$ при $z\to 0$.

Если $\delta_0(0,\varphi)\not\equiv 0$, то при выполнении указанных выше соответствующих условий применима теорема 6.

Вообще говоря, имеются дискретные значения $\varphi=\varphi_0$, при которых $\delta_0(0,\varphi_0)=0$. Тогда при $\varphi=\varphi_0$ и будем иметь решения системы (3.3) $x(z)\to 0$, $y(z)\to 0$ при $z\to 0$.

§ 6

Теперь мы рассмотрим уравнение вида

$$\begin{aligned}\alpha_1x^2+\alpha_2xy+\alpha_3y^2+\alpha_4x^3+\alpha_5x^2y+\alpha_6xy^2+\\+\alpha_7y^3+\alpha_8x^4+\alpha_9x^3y+\alpha_{10}x^2y^2+\\+\alpha_{11}xy^3+\alpha_{12}y^4+\ldots=0,\end{aligned}\tag{6.1}$$

где коэффициенты α суть постоянные; ряд сходится в окрестности начала координат и не выписаны члены измерения $\geqslant 5$. Будем искать условия, при которых имеется непрерывное вещественное решение уравнения (6.1) $y=y(x)$, обладающее свойством

$$y(x)\to 0 \quad \text{при} \quad x\to 0 \tag{6.2}$$

или

$$y(x_1),\ y(x_2), \ldots \to 0 \quad \text{при} \quad x_1,\ x_2, \ldots \to 0, \qquad (6.3)$$

т. е. существует последовательность $x_1, x_2, \ldots \to 0$ такая, что соответствующая последовательность значений функции $y(x)$ стремится к нулю.

Предположим, существует искомая функция $y(x)$ и притом такая, что функция $U(x)$, которая определяется равенством

$$y = Ux, \qquad (6.4)$$

или ограничена вблизи $x = 0$, или для последовательности $x_1, x_2, \ldots \to 0$, лежащей на вещественной оси, принимает значения, ограниченные в совокупности

$$|U(x_n)| < M \quad (k = 1, 2, \ldots). \qquad (6.5)$$

Подставляя y из (6.4) в (6.1) и сокращая на x^2, получим

$$\begin{gathered}\alpha_1 + \alpha_2 U + \alpha_3 U^2 + \alpha_4 x + \alpha_5 xU + \alpha_6 xU^2 + \\ + \alpha_7 xU^3 + \alpha_8 x^2 + \alpha_9 x^2 U + \alpha_{10} x^2 U^2 + \\ + \alpha_{11} x^2 U^3 + \alpha_{12} x^2 U^4 + \alpha_{13} x^3 + \ldots\end{gathered} \qquad (6.6)$$

Пусть a_1 и a_2 обозначают корни уравнения

$$\alpha_1 + \alpha_2 a + \alpha_3 a^2 = 0. \qquad (6.7)$$

Введем новую неизвестную функцию v равенством

$$U = v + a_k \quad (k = 1 \text{ или } k = 2). \qquad (6.8)$$

Для v получим уравнение

$$\begin{gathered}(\alpha_2 + 2a_k\alpha_3)\,v + (\alpha_4 + \alpha_5 a_k + \alpha_6 a_k^2 + \alpha_7 a_k^3)\,x + \\ + \alpha_3 v^2 + (\alpha_5 + 2\alpha_6 a_k + 3\alpha_2 a_k^2)\,xv + \\ (\alpha_8 + \alpha_9 a_k + \alpha_{10} a_k^2 + \alpha_{11} a_k^3 + \alpha_{12} a_k^4)\,x^2 + \ldots = 0.\end{gathered} \qquad (6.9)$$

Здесь все невыписанные члены имеют x в степени $\geqslant 3$.

Если $a_1 \neq a_2$, то и

$$\alpha_2 + 2a_k\alpha_3 \neq 0. \qquad (6.10)$$

В этом случае из (6.9) имеем:

$$v = m_l^{(k)} x^l + m_{l+1}^{(k)} x^{l+2} + \ldots, \qquad (6.11)$$

где l — целое положительное число. На основании (6.4) и (6.8) имеем:

$$y = x\,(a_k + m_l^{(k)} x^l + m_{l+1}^{(k)} x^{l+1} + \ldots). \qquad (6.12)$$

l — некоторое целое положительное число.

Покажем теперь, что последовательность $v_1, v_2, \ldots$, соответствующая последовательности $x_1, x_2, \ldots \to 0$, удовлетворяет равенству (6.11).

Так как ряд (6.1) сходится в окрестиости начала координат, то и ряд (6.6) сходится для указанной последовательности $x_1, x_2, \ldots \to 0$ и соответствующей последовательности $U_1, U_2, \ldots$ (ибо последовательность $U_1, U_2, \ldots$ предполагается ограниченной). Но если последовательность $U_1, U_2, \ldots$ ограничена, то, как видно из (6.6), последовательность $U_1, U_2, \ldots$ сгущается к значениям a_1 и a_2, ибо сумма членов ряда, стоящих после первых трех слагаемых, содержит множитель x и потому стремится к нулю при $x_1, x_2, \ldots \to 0$. Но в таком случае или при a_1 или при a_2 имеется подпоследовательность $v_1', v_2' \ldots \to 0$ последовательности значений $v_1, v_2, \ldots$, определяемых равенством (6.8) и соответствующих значениям $x_1, x_2, \ldots \to 0$. Не нарушая общности, предположим, что $v_1, v_2, \ldots \to 0$ при $x_1, x_2, \ldots \to 0$.

Но вблизи $x = 0$ уравнение (6.9) в силу (6.10) имеет единственное[1] решение v, которое представимо рядом (6.11). Отсюда следует, что вообще рассматриваемое решение $y(x)$ уравнения (6.1) дается рядом (6.12).

Как видно из (6.12), мы имеем два решения $y(x)$ в случае, когда уравнение (6.7) имеет различные корни. Если эти корни вещественные, то и ряды (6.12) будут вещественные. Если же a_1, a_2 комплексные, то вещественного решения $y(x) \to 0$ при $x \to 0$ уравнение (6.1) не имеет.

Рассмотрим теперь уравнение (6.1) в предположении, что $a_1 = a_2 = a$. Тогда коэффициент при первой степени v в равенстве (6.9) будет равен нулю, т. е.

$$\alpha_2 + 2a\alpha_3 = 0, \quad \alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 = 0. \qquad (6.13)$$

Следовательно, в этом случае мы не имеем (6.12).

Подставляя значение a из (6.13) на место коэффициента при первой степени x в выражении (6.9), получим этот коэффициент в виде

$$A = (8\alpha_3^3)^{-1}(8\alpha_4\alpha_3^3 - 4\alpha_2\alpha_5\alpha_3^2 + 2\alpha_2^2\alpha_6\alpha_3 - \alpha_7\alpha_2^8). \qquad (6.14)$$

---

[1] Окрестность точки $x = 0$ однозначно отображается на окрестности точки $v = 0$.

Если
$$8\alpha_4\alpha_3^3 - 4\alpha_2\alpha_5\alpha_3^2 + 2\alpha_2^2\alpha_6\alpha_3 - \alpha_7\alpha_2^3 \neq 0, \tag{6.15}$$
то из (6.9) имеем:
$$x = k_2v^2 + k_3v^3 + \ldots \tag{6.16}$$

Теперь нужно обратить ряд (6.16) таким образом, чтобы получить вещественную функцию $v = v(x)$, а это проделано в отношении ряда (3.12), который совпадает с (6.16).

В соответствии с этими прежними рассуждениями и на основании (6.8) и (6.4) мы имеем:

1) $k_2 > 0$
$$y = x\left(a + \sum_{k=1}^{\infty} A_k x^{\frac{k}{2}}\right), \quad A_1 = k_2^{-\frac{1}{2}}. \tag{6.17}$$

Здесь величина $x^{\frac{1}{2}}$ имеет два вещественных значения, отличающихся лишь знаком, и, следовательно, мы имеем два вещественных решения уравнения (6.1) $y(x) \to 0$ при $x \to 0$ и эти решения определены только при $x \geqslant 0$.

2) $k_2 < 0$
$$y = x\left(a + \sum_{k=1}^{\infty} A_k (-x)^{\frac{k}{2}}\right), \quad A_1 = (-k_2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{6.18}$$

Здесь величина $(-x)^{\frac{1}{2}}$ имеет два вещественных значения, отличающихся лишь знаком.

Таким образом, мы снова имеем два вещественных решения уравнения (6.1) $y(x) \to 0$ при $x \to 0$ и эти решения определены при $x \leqslant 0$. Здесь, конечно, нужно повторить рассуждения, проведенные после равенства (6.12).

Рассмотрим некоторые вырожденные случаи.

Если
$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 \neq 0, \tag{6.19}$$
то $a = 0$ и тогда при
$$\alpha_4 \neq 0 \tag{6.20}$$
имеем (6.15).

Если
$$\alpha_1 = \alpha_3 = 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \tag{6.21}$$

то в равенстве (6.9) коэффициент при первой степени v будет $\alpha_2 \neq 0$, и, следовательно, получим (6.12). Возможен случай, когда кроме (6.12) имеем еще одно решение уравнения (6.1) $y=\varphi(x)$, обращающееся в нуль при $x=0$. Его мы получим, делая замену в (6.1) $x=Uy$ и поступая далее аналогично предыдущему. Здесь y получим или в виде

$$y=\sum_{k=1}^{\infty} M_k x^{\frac{k}{m}} \quad \text{или} \quad y=\sum_{k=1}^{\infty} M_k (-x)^{\frac{k}{m}},$$

где m — целое положительное число.

Предположим теперь, что

$$\alpha_2=\alpha_3=0, \quad \text{но} \quad \alpha_1 \neq 0. \tag{6.22}$$

При этих предположениях уравнение (6.7) не имеет корней и нет последовательности $x_1, x_2, \ldots \to 0$, которой соответствовала бы ограниченная последовательность $U_1, U_2, \ldots$, что видно непосредственно из (6.6). Но в этом случае мы также можем ввести в рассмотрение неизвестную функцию U при помощи равенства

$$x=Uy. \tag{6.23}$$

Пусть последовательности $x_1, x_2, \ldots \to 0$ соответствует ограниченная последовательность $U_1, U_2, \ldots$ Подставляя значение x из (6.23) в (6.1) и сокращая на y^2, получим для U уравнение

$$\begin{aligned} &\alpha_1 U^2+\alpha_4 y U^3+\alpha_5 U^2 y+\alpha_6 U y+\alpha_7 y+\alpha_8 y^2 U^4+ \\ &+\alpha_9 y^2 U^3+\alpha_{10} y^2 U^2+\alpha_{11} U y^2+\alpha_{12} y^2+\ldots=0. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Отсюда следует, что $U_1, U_2, \ldots \to 0$.

Если теперь

$$\alpha_7 \neq 0, \tag{6.25}$$

то из (6.24) получим

$$y=k_2 U^2+k_3 U^3+\ldots, \tag{6.26}$$

где

$$k_2=-\frac{\alpha_1}{\alpha_7}. \tag{6.27}$$

Предположим, что

$$k_2>0, \tag{6.28}$$

тогда из (6.26) имеем:

$$U=\sum_{k=1}^{\infty} A_k y^{\frac{k}{2}}, \quad \left(A_1=k_2^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{6.29}$$

На основании (6.23) найдем

$$x=y\sum_{k=1}^{\infty} A_k y^{\frac{k}{2}}=y^{\frac{3}{2}}\sum_{k=1}^{\infty} A_k y^{\frac{k-1}{2}}. \tag{6.30}$$

Отсюда

$$x^{\frac{1}{3}}=\sum_{k=1}^{\infty} B_k y^{\frac{k}{2}}, \quad \left(B_1=K_2^{-\frac{1}{6}}\right) \tag{6.31}$$

и, следовательно,

$$y=\left[\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{\frac{k}{3}}\right]^2, \quad \left(c_1=k_2^{\frac{1}{6}}\right). \tag{6.32}$$

Таким образом, если имеем (6.22), (6.25) и (6.28), то существует единственное вещественное решение уравнения (6.1) $y(x)\to 0$ при $x\to 0$, определенное и при $x\geqslant 0$ и при $x<0$.

Рассмотрим случай

$$k_2<0. \tag{6.33}$$

Легко видеть, что будем иметь

$$y=-\left[\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{\frac{k}{2}}\right]^2, \quad c_1=-\left(-k_2\right)^{\frac{1}{6}}. \tag{6.34}$$

Предположим теперь, что

$$a_1=a_2, \tag{6.35}$$

но нет (6.14), т. е.

$$A=0. \tag{6.36}$$

Здесь, очевидно, $a_3\neq 0$ и потому согласно (6.9) и тому, что последовательность v_1, $v_2,\ldots$ ограничена, получим

$$v_1,\ v_2,\ldots\to 0 \quad \text{при} \quad x_1,\ x_2,\ldots\to 0, \tag{6.37}$$

причем (6.9) имеет вид уравнения (6.1). Следовательно, проведенные выше рассуждения можно применять к уравнению (6.9). Наконец, если выполнено условие (6.19), но нет (6.20), т. е. будет

$$\alpha_4 = 0, \tag{6.38}$$

то (6.9) снова получает вид уравнения (6.1), для которого нужно искать решение $v = v(x)$, обладающее свойством

$$v_1, v_2, \ldots \to 0 \quad \text{при} \quad x_1, x_2, \ldots \to 0. \tag{6.39}$$

Так шаг за шагом мы рассматриваем все возможные случаи, когда нет $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, и когда мы не имеем такого случая, при котором указанные преобразования, сколько бы раз их не применяли, всякий раз приводят снова к уравнению вида (6.1). Предположим, что мы встретили этот последний случай. Тогда, очевидно, мы имеем единственное формальное решение уравнения (6.1) в виде $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x^k$, где все c_k суть кратные корни квадратного уравнения типа (6.7), появляющегося при последовательных преобразованиях. Так как $\alpha_3 \neq 0$, то согласно теореме Вейерштрасса уравнение (6.1) мы можем записать в виде

$$[y^2 + a_1(x)\, y + a_2(x)]\, H(x, y) = 0,$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$, и $H(x, y)$ функции голоморфные в окрестности начала координат $a_1(0) = a_2(0) = 0$ и $H(0, 0) \neq 0$.

Следовательно, уравнение (6.1) в рассматриваемом исключительном случае имеет единственное решение, обладающее свойством (6.3), это решение имеет вид сходящегося ряда $y = \sum\limits^{\infty} c_n x^n = \varphi(x)$ и коэффициенты данного ряда находятся указанным выше способом.

Но отсюда следует, что

$$y^2 + a_1(x)\, y + a_2(x) = [y - \varphi(x)]^2.$$

Так как $H(0, 0) \neq 0$, то $H(x, y) = H_1^2(x, y)$, где $H_1(x, y)$ также функция, голоморфная в окрестности начала координат и $H_1(x, y) \neq 0$.

Из всех этих рассуждений вытекает, что в исключительном случае уравнение (6.1) можно записать в виде

$$[ax + by + P(x, y)]^2 = 0,$$

где $P(x, y)$ — функция, голоморфная в окрестности начала координат и не содержит свободного и линейных членов, а постоянный коэффициент $b \neq 0$.

Мы можем, таким образом, эти рассуждения закончить теоремой.

Теорема 7. Предположим, что дано уравнение (6.1), где ряд с вещественными коэффициентами α сходится в окрестности начала координат. Тогда, если уравнение (6.7) имеет комплексные корни a_1 и a_2, то нет вещественного решения уравнения (6.1) $y(x) \to 0$ при $x \to 0$. Такое решение имеется в следующих случаях:

1) a_1 и a_2 — вещественные различные или $\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$.

2) $a_1 = a_2$ и $A \neq 0$.

3) $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_7 \neq 0$.

В остальных случаях вопрос о существовании рассматриваемого решения приводится снова к изучению уравнения вида (6.1). Мы покажем теперь как можно рассматривать вообще уравнение вида

$$P_m(x, y) + P_{m+1}(x, y) + P_{m+2}(x, y) + \ldots = 0, \tag{6.40}$$

где $P_k(x, y)$ $(k = m, m + 1, \ldots)$ — однородные полиномы степени k от x, y.

Будем рассматривать вопрос о существовании непрерывного решения $y = y(x)$ уравнения (6.40), обладающего свойством

$$y(x) \to 0 \quad \text{при } x \to 0 \tag{6.41}$$

или свойством

$$y(x_1),\ y(x_2), \ldots \to 0 \text{ при } x_1,\ x_2, \ldots \to 0. \tag{6.42}$$

Предположим, как и ранее, что функция $u(x)$, определенная равенством

$$y = Ux, \tag{6.43}$$

или ограничена при $x \to 0$, или существует ограниченная последовательность $U(x_1)$, $U(x)_2, \ldots$, т. е. $|U(x_k)| < M$ при x_1, $x_2 \ldots \to 0$.

Подставляя значение y из (6.43) в (6.40) и сокращая на x^m, получим уравнение

$$P_m(1, U) + P_{m+1}(1, U)x + \\ + P_{m+2}(1, U)x^2 + \ldots = 0. \tag{6.44}$$

Так как последовательности $x_1, x_2, \ldots \to 0$ соответствует ограниченная последовательность $U(x_1), U(x_2), \ldots$, то $U(x_1), U(x_2) \ldots \to a$, где a есть совокупность корней уравнения[1]

$$P_m(1, a) = 0. \tag{6.45}$$

Полагая

$$U = v + a, \tag{6.46}$$

где a — фиксированный корень уравнения (6.45), из (6.44) получим

$$\begin{aligned} &P_m(1, v+a) + P_{m+1}(1, v+a)x + \\ &+ P_{m+2}(1, v+a)x^2 + \ldots = 0. \end{aligned} \tag{6.47}$$

Разлагая левую часть (6.47) по степеням v, найдем

$$\begin{aligned} &P_{m+1}(1, a)x + P_{m+2}(1, a)x^2 + P_{m+3}(1, a)x^3 + \ldots + \\ &+ (P'_m(1, a) + P'_{m+1}(1, a)x + P'_{m+2}(1, a)x^2 + \ldots)v + \\ &+ \frac{1}{2!}(P''_m(1, a) + P''_{m+1}(1, a)x + \\ &+ P''_{m+2}(1, a)x^2 + \ldots)v^2 + \ldots = 0. \end{aligned} \tag{6.48}$$

Предположим, что a является простым корнем уравнения (6.45), тогда

$$P_m'(1, a) \neq 0 \tag{6.49}$$

и из уравнения (6.48) имеем:

$$v = K_n x^n + K_{n+1}x^{n+1} + \ldots, \tag{6.50}$$

а на основании (6.43), (6.46)

$$y = x(a + k_n x^n + k_{n+1}x^{n+1} + \ldots). \tag{6.51}$$

Если a вещественный корень, то и решение (6.51) вещественное. Здесь нужно, конечно, повторить рассуждения, проведенные после формулы (6.12). Мы убедимся в том, что формула (6.51) в случае, когда все корни уравнения (6.45) простые, доставляют все решения уравнения (6.40) $y = y(x)$, обладающие свойством $y(x) \to 0$ при $x \to 0$ или $y(x_1), y(x_2), \ldots \to 0$ так, что последовательность $x_k^{-1} y(x_k)$ $(x = 1, 2, \ldots)$ при $x_1, x_2, \ldots \to 0$ является ограниченной.

---

[1] Возможно, что $P_k(1, a) = 0$ при всех $k \geqslant m$, тогда $y = ax$.

Предположим теперь, что a есть ν-кратный корень уравнения (6.45). Тогда имеем:

$$P_m(1, a) = P_m'(1, a) = \ldots = P_m^{(\nu-1)}(1, a) = 0,$$
$$P_m^{(\nu)}(1, a) \neq 0. \tag{6.52}$$

Пусть при этом

$$P_{m+1}(1, a) \neq 0. \tag{6.53}$$

Тогда из (6.48) находим

$$x = k_\nu v^\nu + k_{\nu+1} v^{\nu+1} + \ldots \tag{6.54}$$

Отсюда видим, что уравнение (6.40) имеет вещественное решение $y(x) \to 0$ при $x \to 0$. Здесь необходимо лишь повторить рассмотрение случаев I, II и III (стр. 22), проведенных относительно уравнения (3.12). Если имеем (6.52) и

$$P_{m+1}(1, a) = 0, \tag{6.55}$$

то уравнение (6.48) имеет вид

$$P_{m+2}(1, a) x^2 + P_{m+1}'(1, a) xv +$$
$$+ \frac{1}{2} P_m''(1, a) v^2 + P(x, v) = 0, \tag{6.56}$$

где $P(x, v)$ содержит члены измерения, большие 2 относительно x, v. Заметим теперь, что в уравнении (6.48) полином $L(v)$, который составляет совокупность членов, не содержащих x, имеет степень не выше m и не ниже ν, так как $P_m^{(k)}(1, v + a) \equiv 0$ при $k > m$, а $P_m^{(\nu)}(1, a) \neq 0$.

Интересующая нас функция $U(x)$ удовлетворяет уравнению (6.44) и обладает свойством $U(x_1)$, $U(x_2), \ldots \to a$ при $x_1, x_2, \ldots \to 0$, следовательно, можно считать, что функция v, определенная равенством (6.46), обладает свойством

$$v(x_1),\ v(x_2), \ldots \to 0 \quad \text{при} \quad x_1,\ x_2, \ldots \to 0, \tag{6.57}$$

ибо из последовательности $x_1, x_2, \ldots \to 0$ можно выбирать частичную последовательность $x_1, x_2, \ldots \to 0$, которая при некотором фиксированном a в равенстве (6.46) дает (6.57). Таким образом, мы пришли к проблеме существования решения уравнения (6.57) $v = v(x)$, обладающего свойством (6.57). Тем самым мы пришли к уравнению (6.1) и к задаче, которая рассмотрена полностью. Может конечно случиться, что мы не получим уравнения (6.56), в котором имеется квадратичная форма, т. е. может случиться, что совокупность членов низшего измерения в равенстве (6.48) составляет форму третьей или еще высшей степени. Но так как согласно сделанному выше замечанию полином $L(v)$ имеет степень не выше m, то либо мы получим уравнение, содержащее линейные члены при помощи не более чем m последовательных преобразований, либо встретим такой случай, когда эти преобразования сколько бы раз их ни делать, приводят к уравнению с наинизшей формой одной и той же степени p. В последнем случае соответствующее уравнение (6.45) всякий раз будет иметь только один p кратный корень. Но тогда, повторяя прежние рассуждения, основывающиеся на теореме Вейерштрасса, мы увидим, что конечное число ранее использованных преобразований приводит к такому уравнению, которое имеет вид

$$[ax + by + P(x, y)]^p = 0, \tag{6.57$_1$}$$

где постоянная b отлична от нуля, а $P(x, y)$ — функция, голоморфная в окрестности начала координат и не содержащая свободных и линейных членов.

Чтобы охватить все возможные решения уравнения (6.40), обладающие свойством (6.42), мы должны рассмотреть и такие решения $y = y(x)$, для которых имеем последовательность $x_1, x_2, \ldots \to 0$ такую, что последовательность $x_k y^{-1}(x_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ограничена.

Ввиду того, что при $x_1, x_2, \ldots \to 0$ или последовательность $x_k^{-1} y(x_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, или последовательность $x_k y^{-1}(x_k)$ ограничена, то мы вышеуказанным методом получим все решения уравнения (6.40) вблизи $x = 0$. И так как они получаются аналитическими (вернее алгебраическими), то мы вообще получим все решения уравнения (6.40), которые обладают свойством (6.41) и (6.42).

Замечание. Из предыдущего следует, что нет такого решения $y = y(x)$ уравнения

$$F(x, y) = ax + by + \ldots = 0, \tag{6.58}$$

в котором при $x \to 0$ значения $y(x)$ не стремятся к нулю, но имеется лежащая на пути $x \to 0$ последовательность $x_1, x_2, \ldots \to 0$, которой соответствует последовательность $y(x_1), y(x_2), \ldots \to 0$. Т. е. для всякого решения уравнения (6.58) при $x \to 0$ имеем либо $|y(x)| > \delta > 0$, либо $y(x) \to 0$.

Действительно, если a и b не равны одновременно нулю, то это следует из рассуждений, проведенных относительно уравнения (3.9) [так как здесь или $\delta_0'(0) \neq 0$ или $\delta_1(0) \neq 0$].

Если же $a = b = 0$, то это вытекает из результатов § 6 или из рассуждений, относящихся к уравнению (6.40). Заметим, что полученные здесь результаты можно было получить и на основе более полного использования теоремы Вейерштрасса.

§ 7

Рассмотрим теперь систему двух уравнений вида

$$\begin{aligned} Az + By + Mx + P(x, y, z) &= 0, \\ Cz + Dy + Nx + Q(x, y, z) &= 0, \end{aligned} \tag{7.1}$$

где A, B, M, C, D и N — постоянные, а $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ — степенные ряды с постоянными коэффициентами, не имеющие свободных и линейных членов относительно x, y, z. Эти ряды сходятся в окрестности начала координат. Будем рассматривать вопрос о существовании решения уравнеиий (7.1) $y = y(z)$, $x = x(z)$, обладающего свойством

$$x(z) \to 0, \quad y(z) \to 0 \quad \text{при } z \to 0, \tag{7.2}$$

или вообще такого, что

$$x(z_1), x(z_2), \ldots \to 0 \text{ и } y(z_1), y(z_2), \ldots \to 0 \quad \text{при } z_1 z_2, \ldots \to 0. \tag{7.3}$$

Прежде всего замечаем, что если ранг матрицы коэффициентов при линейных членах равен двум, то мы сразу решаем вопрос о существовании указанного решения. При $BN - MD \neq 0$ такое решение существует единственное и легко находится. Пусть теперь $AD - BC \neq 0$. Тогда имеем решение вида

$$z = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k x^k, \qquad y = \sum_{k=n}^{\infty} \beta_k x^k, \tag{7.4}$$

где α_k, β_k — постоянные коэффициенты. Отсюда видим, что искомые вещественные решения существуют и мы все их находим. При известных обстоятельствах (зависящих от знаков α_m, β_n и четности и нечетности чисел m и n) эти вещественные решения определены при $z>0$ и при $z<0$ или только в одной из этих областей. Это устанавливается так же, как и выше при рассмотрении уравнеий (3.1) через посредство (3.12).

Предположим теперь, что ранг матрицы коэффициентов при линейных членах равен единице, т. е. мы предполагаем, что хотя бы один из коэффициентов A, B, M, C, D, N не равен нулю. Например, пусть $A \neq 0$. Тогда из первого уравнения системы (7.1) находим

$$z=\varphi(x, y), \tag{7.5}$$

где $\varphi(x, y)$ — ряд сходящийся в окрестности начала координат. Подставляя это значение z во второе уравнение системы (7.1), мы получим уравнение вида (6.1) или (6.40) и, следовательно, разрешим поставленный вопрос. Пусть теперь $A=B=M=C=D=N=0$. Тогда систему (7.1) можно записать в виде[1]

$$\left.\begin{aligned} F &= P_m(x, y, z)+P_{m+1}(x, y, z)+\ldots=0, \\ \Phi &= Q_m(x, y, z)+Q_{m+1}(x, y, z)+\ldots=0, \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

где $P_k(x, y, z)$ и $Q_k(x, y, z)$ $(k=m, m+1, \ldots)$ суть однородные многочлены степени k.

Чтобы решить поставленный вопрос введем новые функции u и v равенствами

$$x=uz, \quad y=vz \tag{7.7}$$

и предположим, что последовательности

$$\begin{aligned} &u(z_1), \quad u(z_2), \ldots, \\ &v(z_1), \quad v(z_2), \ldots, \end{aligned} \tag{7.8}$$

при $z_1, z_2, \ldots \to 0$ ограничены.

---

[1] Мы предполагаем функции F и Φ голоморфными в окрестности начала координат.

Подставляя значения x и y из (7.7) в (7.6) и сокращая на z^m, получим

$$\left.\begin{aligned} P_m(u,\ v,\ 1)+P_{m+1}(u,\ v,\ 1)\,z+\\ +P_{m+2}(u,\ v,\ 1)\,z^2+\ldots=0,\\ Q_m(u,\ v,\ 1)+Q_{m+1}(u,\ v,\ 1)\,z+\\ +Q_{m+2}(u,\ v,\ 1)\,z^2+\ldots=0. \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

Так как $z_1,\ z_2,\ldots\to 0$ и последовательности (7.8) ограничены, то должно быть

$$u_1,\ u_2,\ldots\to a \text{ и } v_1,\ v_2,\ldots\to b, \tag{7.10}$$

где $(a,\ b)$ совокупность решений уравнений.

$$P_m(a,\ b,\ 1)=0,\ Q_m(a,\ b,\ 1)=0. \tag{7.11}$$

Сделаем в уравнениях (7.9) замену

$$u=\tau+a,\quad v=\theta+b, \tag{7.12}$$

где τ и θ — новые неизвестные, обладающие свойствами

$$\tau(z_1),\ \tau(z_2),\ldots\to 0,\ \theta(z_1),\ \theta(z_2),\ldots\to 0$$
$$\text{при } z_1,\ z_2,\ldots\to 0. \tag{7.13}$$

Подставляя значения u и v из (7.12) в (7.9), получим

$$\left.\begin{aligned} P_m(\tau+a,\ \theta+b,\ 1)+P_{m+1}(\tau+a,\ \theta+b,\ 1)\,z+\\ +P_{m+2}(\tau+a,\ \theta+b,\ 1)\,z^2+\ldots=0,\\ \theta_m(\tau+a,\ \theta+b,\ 1)+\theta_{m+1}(\tau+a,\ \theta+b,\ 1)\,z+\\ +\theta_{m+2}(\tau+a,\ \theta+b,\ 1)\,z^2+\ldots=0. \end{aligned}\right\} \tag{7.14}$$

Разлагая (7.14) в ряд по степеням τ и θ, получим

$$\begin{aligned} P_{m+1}(a,\ b,\ 1)\,z+P_{m+2}(a,\ b,\ 1)\,z^2+\ldots+\\ +\left(\frac{\partial P_m(a,b,1)}{\partial a}+\frac{\partial P_{m+1}(a,b,1)}{\partial a}\,z^2+\ldots\right)\tau+\\ +\left(\frac{\partial P_m(a,b,1)}{\partial b}+\frac{\partial P_{m+1}(a,b,1)}{\partial b}+\ldots\right)\theta+\ldots=0, \end{aligned} \tag{7.15}$$

$$\begin{aligned} \theta_{m+1}(a,\ b,\ 1)\,z+\theta_{m+2}(a,\ b,\ 1)\,z^2+\ldots+\\ +\left(\frac{\partial\theta_m(a,b,1)}{\partial a}+\frac{\partial\theta_{m+1}(a,b,1)}{\partial a}\,z+\ldots\right)\tau+\\ +\left(\frac{\partial\theta_m(a,b,1)}{\partial b}+\frac{\partial\theta_{m+1}(a,b,1)}{\partial b}\,z+\ldots\right)\theta+\ldots=0. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Если

$$\frac{\partial P_m(a, b, 1)}{\partial a}\,\frac{\partial \theta_m(a, b, 1)}{\partial b} - \frac{\partial P_m(a, b, 1)}{\partial b}\,\frac{\partial \theta_m(a, b, 1)}{\partial a} \neq 0,$$

то из уравнений (7.15), (7.16) находим

$$\left.\begin{aligned} \tau &= a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \ldots, \\ \theta &= b_q z^q + b_{q+1} z^{q+1} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

На основании (7.7) и (7.12) получаем

$$\left.\begin{aligned} x &= z\,(a + a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \ldots), \\ y &= z\,(b + b_q z^q + b_{q+1} z^{q+1} + \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{7.18}$$

Здесь p и q — положительные целые числа. Если a и b вещественные числа, то решение (7.18) вещественное.

Легко видеть, что, как и прежде, либо мы найдем требуемое решение системы уравнений (7.6), либо вопрос приведется к рассмотрению системы вида (7.6), где быть может даже будет $m = 2$. Может случиться, что мы не сможем найти требуемого решения или выяснить его отсутствие при помощи указанного введения новых неизвестных функций. Тогда нужно вместо (7.7) искать решение вида, например, $x = uz$, $z = vy$, где снова последовательности

$$\begin{aligned} &u(z_1), \quad u(z_2), \ldots, \\ &v(z_1), \quad v(z_2), \ldots \end{aligned}$$

ограничены.

Тогда имеем:

$$x = py, \quad z = qy,$$

где последовательности

$$\begin{aligned} &p(y_1), \quad p(y_2), \ldots, \\ &q(y_1), \quad q(y_2), \ldots \end{aligned}$$

ограничены при $y_1, y_2, \ldots \to 0$.

Таким образом, мы рассмотрим все возможные здесь случаи и вопрос о существовании решения уравнений (7.6), обладающего свойством $x(z) \to 0$, $y(z) \to 0$ при $z \to 0$, будет решен.

Вид такого решения в самом общем случае нами указан в § 1. Мы видели, что при всех обстоятельствах такое решение, если оно есть в окрестности точки $z = 0$ представимо рядами типа (1.47), (1.48).

§ 8

Теорема 8. Предположим, что равенство

$$F(x, y) = ax + by + \ldots = 0, \tag{8.1}$$

где ряд $F(x, y)$ сходится в области D, окружающей начало координат, определяет неявную функцию $y = y(x)$. Тогда эта функция не имеет особых точек $\overset{*}{x}$, для которых при $x \to \overset{*}{x}$ $y(x)$ не имеет предела, но существует бесконечное число таких значений x_1, $x_2, \ldots \to \overset{*}{x}$, что точки $[x_k, y(x_k)]$ принадлежат конечной замкнутой области D_1, погруженной в область D.

Доказательство. Предположим, теорема не верна. Тогда имеем последовательность $x_1, x_2, \ldots \to \overset{*}{x}$, которой соответствует ограниченная последовательность $y_1, y_2, \ldots$ такая, что последовательность точек (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \ldots$ принадлежит области D_1. Из последовательности $y_1, y_2, \ldots$ выберем сходящуюся последовательность $\overset{*}{y}_1, \overset{*}{y}_2, \ldots \to \overset{*}{y}$, которой соответствует последовательность $\overset{*}{x}_1\ \overset{*}{x}_2 \ldots \to \overset{*}{x}$.

Таким образом, имеем сходящуюся последовательность точек $(\overset{*}{x}_1, \overset{*}{y}_1), (\overset{*}{x}_2, \overset{*}{y}_2), \ldots \to (\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$ и точка $(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$ принадлежит области D_1.

Так как $F(\overset{*}{x}_k, \overset{*}{y}_k) = 0$, то в силу непрерывности функции $F(x, y)$ в области D имеем $F(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}) = 0$ и в окрестности точки $(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$ $F(x, y)$ разлагается в ряд Тейлора. Но тогда согласно предыдущему имеем функцию $y = y(x) \to \overset{*}{y}$ при $y \to \overset{*}{x}$. Теорема доказана.

Пример. Уравнение $\Phi(x, y) = x \ln y - 1 = 0$ определяет функцию $y = e^{\frac{1}{x}}$. Границей области голоморфности D функции $\Phi(x, y)$ здесь будет прямая $y = 0$ в вещественной области (x, y) или точка $y = 0$ в комплексной области (при произвольном комплексном x). Последовательности $x_k = \frac{1}{2k\pi i}$, где k — вещественное число, соответствует последовательность $y_k = e^{2k\pi i}$.

Если последовательность значений $k \to \infty$, то последовательность $x_k \to 0$, а последовательность y_k не имеет предела. Если, в частности, $k=1, 2, \ldots$, то $y_k=1$. Но и при этом последовательность (x_k, y_k) не имеет предельной точки, за которую ошибочно можно принять $(0,1)$, так как точки (x_k, y_k) в силу $\ln y_k = 2k\pi i$ лежат на разных плоскостях Римана. Может показаться, что здесь совокупность точек $\left(x_k = \frac{1}{2k\pi i}, y_k = 1\right)$ лежит в области, погруженной в область голоморфности функции $\Phi(x, y) = x \ln y - 1$, а предельной точки все-таки нет, вопреки утверждению теоремы 8. Но в теореме 8 мы имели в виду однолистную область D. Здесь же последовательность точек лежит в бесконечнолистной области. В рассматриваемом случае в окрестности точек последовательности (x_k, y_k) имеем разложение в ряд Тейлора.

$$\Phi(x, y) = 2k\pi i\left(x - \frac{1}{2k\pi i}\right) + \frac{1}{2k\pi i} e^{-2k\pi i}\left(y - e^{2k\pi i}\right) + \ldots$$

и при $k \to \infty$ разложение теряет смысл, а в доказательстве мы и воспользовались разложением Тейлора в предельной точке. Если мы рассматриваем вещественную функцию $\Phi(x, y)$ в вещественной области, то многолистная область не возникает. Отсюда следует теорема 9.

Теорема 9. При аналитическом продолжении неявной функции $y = y(x)$, определяемой равенством (8.1), для всякой точки $x = \overset{*}{x}$ из области D имеем либо

$$y(x) \to \overset{*}{y} \quad \text{при} \quad x \to \overset{*}{x}, \tag{8.2}$$

либо

$$y(x) \to \text{границе области } D \text{ при } x \to \overset{*}{x}. \tag{8.3}$$

Заметим, что в (8.2) $\overset{*}{y}$ может лежать и на границе области D. В (8.3) $y(x)$, приближаясь к границе области D, может и не стремиться к определенному комплексному числу границы области D. В вещественной области всегда имеем (8.2), где $\overset{*}{y}$ или из области D или на границе области D.

Теорема 10. Если ряд $F(x, y)$ целый, то неявная функция $y = y(x)$, определяемая равенством (8.1), обладает свойством при $x \to \overset{*}{x}$ (любое комплексное число) или $y(x) \to \overset{*}{y}$ (комплексное число), или $|y(x)| \to \infty$.

Теорема 11. Предположим, что функции $x = x(z)$; $y = y(z)$ определены уравнениями (7.1) или (7.6)

$$F(x,\ y,\ z) = P_m(x,\ y,\ z) + P_{m+1}(x,\ y,\ z) + \ldots,$$
$$\Phi(x,\ y,\ z) = Q_m(x,\ y,\ z) + Q_{m+1}(x,\ y,\ z) + \ldots,$$

где ряды $F(x,\ y,\ z)$ и $\Phi(x,\ y,\ z)$ сходятся в области D, окружающей начало координат (область D — комплексная область комплексных переменных x, y, z). Тогда нет такой особой точки $x = \overset{*}{x}$, что при $z \to \overset{*}{z}$ функции $x(z)$, $y(z)$ не имеют предела (хотя бы одна из них) и имеется такая последовательность $z_1,\ z_2, \ldots \to \overset{*}{e}$, при которой, последовательность точек

$$[z_k,\ y(z_k),\ y(z_k)], \quad (k = 1,\ 2, \ldots)$$

принадлежит конечной замкнутой области D_1, погруженной в область D.

Доказательство этой теоремы не отличается от доказательства теоремы **8.**

Теорема 12. При аналитическом продолжении функций $x(z)$, $y(z)$, определяемых уравнениями (7.6), для всякой точки $z = \overset{*}{z}$ из области D при $z \to \overset{*}{z}$ имеем или

$$[z,\ x(z),\ y(z)] \to (\overset{*}{z},\ \overset{*}{x},\ \overset{*}{y}) \text{ из области } D \tag{8.4}$$

или

$$[z,\ x(z),\ y(z)] \to \text{границе области } D. \tag{8.5}$$

Если функции $F(x,\ y,\ z)$ и $\Phi(x,\ y,\ z)$ целые, то **(8.5)** надо заменить через

$$|x(z)| + |y(z)| \to \infty. \tag{8.6}$$

Поставим теперь следующий вопрос. Какого рода особая точка $x = \overset{*}{x}$ может встретиться при аналитическом продолжении функции $y = y(x)$, определяемой уравнением (8.1), или особая точка $z = \overset{*}{z}$ функций $x = x(z)$, $y = y(z)$, определяемых уравнениями (7.6)? Мы будем предполагать, что эта особая точка $z = \overset{*}{z}$ такая, что $x(z) \to \overset{*}{x}$, $y(z) \to \overset{*}{y}$ при $z \to \overset{*}{z}$, где точка $(\overset{*}{z},\ \overset{*}{x},\ \overset{*}{y})$ принадлежит области D, в которой ряды (7.6) сходятся. Так как в окрестности точки $(\overset{*}{z},\ \overset{*}{x},\ \overset{*}{y})$ ряды

(7.6) разлагаются в ряды Тейлора, то из предыдущего следует, что если $z=\overset{*}{z}$ особая точка функций $x=x(z)$, $y=y(z)$, то она будет алгебраической особой точкой. Кроме того, ясно, что если точка $(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$ особая для решения уравнения (8.1) $y=y(x)$, то мы имеем:

$$F(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})=0, \quad F_y'(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})=0. \tag{8.7}$$

Если точка $(\overset{*}{z}, \overset{*}{x}, \overset{*}{y})$ — особая для решения $x=x(z)$, $y=y(z)$ системы (7.6), то имеем:

$$F(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, \overset{*}{z})=0, \quad \Phi(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, \overset{*}{z})=0 \tag{8.8}$$

и

$$D(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, \overset{*}{z})=F_x'(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, \overset{*}{z})\,\Phi_y'(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, \overset{*}{z})-$$
$$-F_y'(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, \overset{*}{z})\,\Phi_x'(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, \overset{*}{z})=0. \tag{8.9}$$

Таким образом, ряды, представляющие решение уравнения (8.1) или системы (7.6) в окрестности точки $z=0$, наверное сходятся в области $|z|<|\overset{*}{z}|$, где $\overset{*}{z}$ определяется системой уравнений (8.7) или соответственно (8.8) и (8.9). Отсюда следует, что если уравнения (8.8), (8, 9) не имеют решения $(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, \overset{*}{z})$ в области D, то либо ряды, представляющие $x=x(z)$, $y=y(z)$, сходятся при всех z из области D, либо при $z\to z_1$ из области D имеем $[z, x(z), y(z)]\to$ границе области D.

Заметим, однако, что точки, удовлетворяющие системе уравнений (8.8), (8.9), не обязательно доставляют особые точки функций $x=x(z)$, $y=y(z)$.

Рассмотрим, например, решение уравнения (8.1) $y=y(x)$, определенное в окрестности точки $x=0$. Если для этой функции в точке $(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$ имеем равенства (8.7)

$$F(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})=0, \quad F_y'(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})=0,$$

то значение $\overset{*}{x}$ будет особенным при дополнительном условии $F_x'(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})\neq 0$.

Если же имеем $F_x'(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})=0$, то точка $\overset{*}{x}$ может оказаться неособенной. Например, если в точке $(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$

имеем:

$$F(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})=0, \quad F_x'(x, y)=0, \quad F_y'(x, y)=0$$

и согласно (6.7) корни уравнения

$$\frac{\partial^2 F(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})}{\partial x \partial y}a+\frac{\partial^2 F(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})}{\partial y^2}a^2=0$$

суть вещественные простые, то точка $\overset{*}{x}$ не будет особенной для функции $y=y(x)$.

Согласно предыдущему конечное число условий[1] определяют окончательно будет или нет точка $x=\overset{*}{x}$, определяемая уравнениями (8.7), особенной для решения $y=y(x)$ уравнения (8.1). Все эти условия согласно проведенным выше рассуждениям могут быть указаны, когда $(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$ найдены из уравнений (8.7) или когда, соответственно, $(\overset{*}{z}, \overset{*}{x}, \overset{*}{y})$ найдены из уравнений (8.8), (8.9). Заметим еще, что так как особыми точками функций $x=x(z)$, $y=y(z)$ в области D сходимости рядов (7.6) являются только алгебраические особые (т. е. изолированные) точки, то в области D мы имеем лишь конечное число особых точек функций $x=x(z)$, $y=y(z)$. Следует, однако, обратить внимание на то, что в особой точке $\overset{*}{z}$ функции $x=x(z)$, $y=y(z)$ не перестают существовать и сохраняют непрерывность. Функции $x=x(z)$, $y=y(z)$ непрерывно продолжимы при всех значениях z до тех пор, пока значения $x(z)$, $y(z)$ остаются в области D сходимости рядов (7.6). Таким образом, если ряды (7.6) с вещественными коэффициентами и мы построили вещественные решения $x=x(z)$, $y=y(z)$, то эти решения непрерывно продолжимы в области вещественных значений z до тех пор, пока они остаются в области D и на пути z не встречаются такого рода особая точка $\overset{*}{z}$, в окрестности которой вещественными $x(z)$, $y(z)$ определяются лишь с одной стороны от значений $\overset{*}{z}$. Выше указано, как найти те условия, при которых в окрестности точки $\overset{*}{z}$ функции $x=x(z)$, $y=y(z)$ остаются вещественными

[1] Если не имеем дело с вырожденным случаем, отмеченным при доказательстве теоремы 7 или далее формулой (6.57).

и справа и слева или только с одной стороны. Если уравнения (8.8), (8.9), или соответственно уравнения (8.7), определяют только комплексные значения $\overset{*}{z}$, то вещественные функции $x=x(z)$, $y=y(z)$, заданные равенствами (7.6), определены и непрерывны при всех вещественных значениях z, пока $x(z)$, $y(z)$ остаются в области D.

Можно, таким образом, сказать, что если уравнения (8.8) не определяют вещественного значения $\overset{*}{z}$ (кроме может быть $\overset{*}{z}=0$), то беря значения $x=r$, $y=\rho$ на границе области D (например, если область D взята в виде прямоугольника $|z|\leqslant a$, $|x|\leqslant r$, $|y|\leqslant\rho$), мы получим уравнения

$$F(r, y, z)=0, \quad \Phi(r, y, z)=0$$

или

$$F(x, \rho, z)=0, \quad \Phi(x, \rho, z)=0,$$

откуда найдем z (с наименьшим $|z|$), до которого функции $x(z)$, $y(z)$ непрерывно продолжимы.

Пример 1.

$$F(y, z)=e^y-1-z=\sum_{k=1}^{\infty} y^k\frac{1}{k!}-z=0.$$

Ряд $F(y, z)$ сходится во всякой конечной точке (y, z). Равенства $F(y, z)=0$, $F_y'(y, z)=0$ не определяют конечного решения (y, z), поэтому при любом конечном y получаем значения z, до которых функция $y=\ln(z+1)$, являющаяся решением уравнения $F(y, z)=0$, непрерывно продолжима из окрестности точки $z=0$. При y, изменяющемся в области $-\infty<y<\infty$ сходимости ряда $F(y, z)$, получаем область непрерывного продолжения функций $y=\ln(1+z)$: $-1<z<\infty$. При $z\to-1$, $y\to$ границе области D сходимости ряда $F(y, z)$.

Пример 2.

$$\Phi(x, y)=e^{ny}+e^{(n-1)y}-2-x=0.$$

Здесь уравнения (8.7) имеют решения

$$e^{y_1}=0, \ x_1=-2 \text{ и } ne^{y_2}+n-1=0$$

$$x_2=\left(\frac{1}{n}-1\right)^n+\left(\frac{1}{n}-1\right)^{n-1}-2.$$

Таким образом, ближайшие к $x=0$ возможные особые точки ряда $y=\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k=\varphi(x)$, являющегося решением уравнения $\Phi(x, y)=0$, суть x_1 и x_2. Так как $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}=-1\neq 0$, то x_1, x_2 будут особыми точками. Если n — положительное четное, то $x_2<0$ и $|x_1|<|x_2|$; поэтому функция $y=\varphi(x)$, определяемая равенством $\Phi(x, y)=0$, будет вещественной непрерывной в области $-2<x<\infty$, а написанный выше ряд $\varphi(x)$ будет сходиться в области $|x|<2$. Если же n — положительное нечетное, то $|x_2|<|x_1|$ и ряд $\varphi(x)$ будет сходиться при $|x|<|x_2|$.

Пример 3.

$$\Phi(x, y)=x-1-\cos y-\sin y=0.$$

Здесь

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}=\sin y-\cos y=0, \quad \sin y_1=\cos y_1=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin y_2=\cos y_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, наименьшие по модулю значения y_1, y_2 суть $y_1=\frac{\pi}{4}$, $y_2=-\frac{3\pi}{4}$. Соответственно $x_1=1+\sqrt{2}$ $x_2=1-\sqrt{2}$. Ряд $y=\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k=\varphi(x)$, представляющий решение уравнения $\Phi(x, y)=0$, наверное сходится при $|x|<|1-\sqrt{2}|$. Но функция продолжима (вещественной) в промежутке $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$. Вне этого промежутка она существует, но имеет комплексные значения. Например, в окрестности точки (x_1, y_1) функция $\Phi(x, y)$ представима рядом

$$[x-(1+\sqrt{2})]+\sqrt{2}\left[y-\frac{\pi}{2}\right]^2+\ldots=0,$$

где не выписаны члены, в которых будет $\left[y-\frac{\pi}{2}\right]$ иметь степень выше второй. Отсюда видим, что при $1+\sqrt{2}<x$ значения y будут комплексными.

§ 9

Мы покажем теперь, как можно найти область (хотя бы некоторую минимальную), в которой определены неявные функции [2]. Пусть, например, задана функция

$$y=\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n \tag{9.1}$$

при помощи уравнения

$$y=f(x, y)=a_1 x+a_2 x^2+a_3 xy+a_4 y^2+\ldots, \tag{9.2}$$

где ряд $f(x, y)$ сходится в области

$$|x|\leqslant r, \ |y|\leqslant \rho \tag{9.3}$$

и в этой области имеем:

$$|f(x, y)|\leqslant M. \tag{9.4}$$

Тогда ряд (9.2) имеет мажорантный ряд

$$\varphi(x, y)=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)}-M-\frac{My}{\rho} \tag{9.5}$$

и ряд (9.1) во всяком случае сходится в области

$$|x|\leqslant r\left(\frac{\rho}{\rho+2M}\right)^2, \tag{9.6}$$

так как в этой области сходится ряд, представляющий неявную функцию, определяемую уравнением $y=\varphi(x, y)$.

Пусть теперь вместо (9.2) имеем:

$$F(x, y)=ay+bx+\ldots=0, \tag{9.7}$$

где ряд (9.7) сходится в области (9.3) и в этой области имеем:

$$|F(x, y)|\leqslant M$$

Записывая уравнение (9.7) в виде (9.2), получим

$$|f(x, y)|=\left|\frac{1}{a}(F(x, y)-ay)\right|\leqslant\frac{M}{|a|}+\rho. \tag{9.8}$$

Следовательно, вместо (9.6) получим область сходимости ряда (9.9)

$$|x| \leqslant r\left(\frac{\rho}{3\rho + \frac{2M}{|a|}}\right)^2. \tag{9.9}$$

Мы видели, что во всех случаях, когда уравнение (9.7) имеет решение $y = y(x) \to 0$ при $x \to 0$, в конечном счете уравнение приводится к уравнению вида (9.7), где $a \neq 0$, поэтому минимальный радиус сходимости ряда (по целым степеням x или по дробным) всегда найдется.

Пусть мы имеем уравнение

$$y = ax + bz + P(x, y, z), \tag{9.10}$$

где ряд справа сходится в области

$$|z| \leqslant r, \ |x| \leqslant r, \ |y| \leqslant \rho \tag{9.11}$$

и в этой области модуль правой части равенства (9.10) не превосходит числа M. Ряд $P(x, y, z)$ не содержит свободного члена и первых степеней x, y и z. Тогда минимальная область сходимости ряда

$$y = \sum_{k+l=1}^{\infty} c_{kl} x^k z^l, \tag{9.12}$$

представляющего решение уравнения (9.10), будет также определяться неравенством

$$|x| + |z| \leqslant r\left(\frac{\rho}{\rho + 2M}\right)^2.$$

Пусть дана система уравнений

$$\begin{aligned} x &= az + P(x, y, z), \\ y &= bz + Q(x, y, z), \end{aligned} \tag{9.13}$$

где ряды $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ не содержат свободных и линейных членов относительно x, y и z.

Предположим, что ряды, стоящие справа в равенствах (9.13), сходятся в области

$$|z| \leqslant r, \ |x| \leqslant \rho, \ |y| \leqslant \rho \tag{9.14}$$

и в этой области по модулю не превосходят числа M. Тогда минимальную область сходимости рядов

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k,\ y=\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k \tag{9.15}$$

имеем в виде (9.6)

$$|z|\leqslant r\left(\frac{\rho}{\rho+2M}\right)^2. \tag{9.16}$$

Рассмотрим еще уравнения вида

$$\left.\begin{aligned} F(x,\ y,\ z)=a_1 x+b_1 y+P(x,\ y,\ z)=0,\\ \Phi(x,\ y,\ z)=a_2 x+b_2 y+Q(x,\ y,\ z)=0,\end{aligned}\right\} \tag{9.17}$$

где $P(x,\ y,\ z)$, $Q(x,\ y,\ z)$ ряды, сходящиеся в области

$$|z|\leqslant r,\ |x|\leqslant\rho,\ |y|\leqslant\rho \tag{9.14}$$

и в этой области

$$|F|\leqslant M,\ |\Phi|\leqslant M. \tag{9.18}$$

Ряды $P(x,\ y,\ z)$, $Q(x,\ y,\ z)$ не содержат свободных членов относительно $(x,\ y,\ z)$ и линейных относительно $x,\ y$. Предположим, что

$$D=a_1 b_2-b_1 a_2\neq 0. \tag{9.19}$$

Тогда, разрешая уравнения (9.17) относительно $x,\ y$, получим

$$x=F_1(x,\ y,\ z),\qquad y=\Phi_1(x,\ y,\ z), \tag{9.20}$$

где F_1 и Φ_1 не содержат свободных членов относительно $x,\ y,\ z$ и линейных относительно $x,\ y$. Легко видеть, что имеют место оценки

$$|F_1|\leqslant AM+\rho,\qquad |\Phi_1|\leqslant AM+\rho, \tag{9.21}$$

где

$$|b_1|+|b_2|\leqslant A|D|,\qquad |a_1|+|a_2|\leqslant A|D|. \tag{9.22}$$

На основании (9.16) имеем область сходимости рядов (9.15), удовлетворяющих уравнениям (9.17), в виде

$$|z|\leqslant r\left(\frac{\rho}{3\rho+2AM}\right)^2. \tag{9.23}$$

Иногда выгодно вместо (9.18) написать

$$|F|\leqslant N\alpha,\ |\Phi|\leqslant N\alpha,\ \rho\leqslant\alpha,\ r\leqslant\alpha, \tag{9.24}$$

где N — некоторое положительное число.

Если возьмем

$$r = \rho = \alpha, \tag{9.25}$$

то из (9.23) получим

$$|z| \leqslant r\left(\frac{1}{3+2AN}\right)^2. \tag{9.26}$$

§ 10

Предположим теперь, что имеем уравнение

$$F(x, y, z) = 0, \ F(x_0, y_0, z_0) = 0, \tag{10.1}$$

где функция $F(x, y, z) = 0$ непрерывна вместе с производной $F_z'(x, y, z)$ в окрестности точки (x_0, y_0, z_0).

Пусть, кроме того, $F_z'(x_0, y_0, z_0) = m \neq 0$. Тогда по теореме о неявных функциях уравнения (10.1) имеет решение $z = \varphi(x, y)$, обладающее свойством

$$\varphi(x, y) \to z_0 \quad \text{при} \quad (x, y) \to (x_0, y_0). \tag{10.2}$$

Это решение будет единственным и непрерывным в окрестности точки (x_0, y_0). Получить такое решение можно методом последовательных приближений Э. Гурса. [1]

Для этого составляем уравнение

$$z = z_0 + \left[z - z_0 - \frac{1}{m} F(x, y, z)\right], \tag{10.3}$$

очевидно, эквивалентное уравнению (10.1) Полагая затем

$$\begin{gathered} z_n(x, y) = z_0 + \left[z_{n-1}(x, y) - z_0 - \right. \\ \left. - \frac{1}{m} F(x, y, z_{n-1}(x, y))\right], \\ z_0(x, y) = z_0, \end{gathered} \tag{10.4}$$

мы и получим искомое решение в виде

$$z = \varphi(x, y) = z_0 + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \ldots, \tag{10.5}$$

где

$$|z_n - z_{n-1}| \leqslant K^{n-1}(1 - K) C \tag{10.6}$$

и в области

$$|x - x_0| \leqslant a, \ |y - y_0| \leqslant b, \ |z - z_0| \leqslant C \tag{10.7}$$

---

[1] Мы формулируем здесь только окончательные выводы метода Э. Гурса.

имеем

$$\left|1-\frac{1}{m}F_z'(x,\ y,\ z)\right|<K<1. \qquad (10.8)$$

Так как $F_z'(x_0,\ y_0,\ z_0)=m$, то область (10.7), в которой будет $K<1$, всегда найдется.

Отбрасывая в ряде (10,5) члены, стоящие после z_n-z_{n-1}, мы сделаем ошибку, не превосходящую по модулю CK^n.

Если возьмем h, подчиненное условиям $h\leqslant a$, $h\leqslant b$ и $\left|\frac{1}{m}F(x,\ y,\ z_0)\right|\leqslant(1-K)C$, когда

$$|x-x_0|\leqslant h,\ |y-y_0|\leqslant h, \qquad (10.9)$$

то $z=\varphi(x,\ y)$ при этих значениях x, y будет определена и не выйдет из промежутка $(z_0-C,\ z_0+C)$.

Решение уравнения (10.1), полученное в виде (10.5), шаг за шагом можно продолжать вдоль такой кривой $\omega(x,\ y)=0$, на которой остается $F_z\neq 0$.

Пусть D есть область, окружающая точку $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, в которой $F(x,\ y,\ z)$ и $F_z'(x,\ y,\ z)$ непрерывны и $F_z'(x,\ y,\ z)\neq 0$. Тогда, как и прежде, докажется теорема.

Теорема 13. Если $(x,\ y)\to(x_1,\ y_1)$, где $(x_1,\ y_1)$ из области D, то либо $z(x,\ y)\to z_1$, где z_1 из области D, либо $z(x,\ y)\to$ границе области D.

По методу Э. Гурса [2] мы можем определить решение уравнения (3.9), когда[1] $\delta_0(0)=\delta_1(0)=0$, $\delta_0'(0)=m\neq 0$, следующим образом.[2]

Полагаем

$$F(z,\ x)=\delta_0(z)+\delta_1(z)\,x+\delta_2(z)\,x^2+\ldots, \qquad (10.10)$$

и уравнение (3.9) записываем в виде

$$F(z,\ x)=0. \qquad (10.11)$$

Здесь $F_z'(0,\ 0)=m=\delta_0'(0)$.

Составляем вспомогательное уравнение

$$z=z-\frac{1}{m}F(z,\ x), \qquad (10.12)$$

---

[1] Но нет $\delta_k(0)=0$, $k\geqslant 0$.

[2] См. также [5] и [6].

эквивалентное уравнению (10.11). Определяем последовательные приближения по формуле

$$z_n = z_{n-1} - \frac{1}{m} F(z_{n-1}, x), \ z_0 = 0 \tag{10.13}$$

и получаем

$$z = \varphi(x) = z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \ldots \tag{10.14}$$

Если возьмем область

$$|x| < h, \ |z| < C \tag{10.15}$$

такую, что

$$\left| 1 - \frac{1}{m} F_z'(z, x) \right| < K < 1, \ m = \delta_0'(0) \tag{10.16}$$

и

$$\left| \frac{1}{m} F(x, 0) \right| \leqslant (1 - K) C, \tag{10.17}$$

то функция, представляемая рядом (10.14), будет определена в промежутке $|x| < h$ и при этих значениях x не выйдет из промежутка $|z| < C$.

На основании (10.14) по формуле (3.7) мы найдем и функцию $y = y(x)$. Таким образом, мы получим решение системы уравнений (3.1) в виде

$$z = z(x), \ y = y(x), \tag{10.18}$$

когда $\alpha(z)$, $\beta(z)$ не являются голоморфными функциями. Тем самым мы доказываем существование решения уравнения (3.1) и получаем его.

$$x = x(z), \ y = y(z). \tag{10.19}$$

Область изменения z, в которой определено решение (10.19), получим, изменяя в ряде (10.14) переменную x в промежутке $|x| < h$. Продолжая решение (10.14) вне промежутка $|x| < h$, мы тем самым продолжим и функции (10.19) на более широкий промежуток изменяя z.

В § 5 показано, как выяснить, будет ли решение (10.19) определено по обе стороны от начала координат или только при значениях z одного какого-нибудь знака.

Приближенно область сходимости ряда (9.1) можно определить и на основании общих соображений, высказанных выше. Именно записываем уравнение (9.2), и уравнение, полученное из него дифференцированием по y

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 xy + a_4 y^2 + \ldots, \tag{9.2}$$

$$1 = a_3 x + 2a_4 y + \ldots \tag{9.2$_1$}$$

Определяя отсюда приближенно (отбросив, например, невыписанные члены) минимальное по модулю x, мы и получим приближенное значение области сходимости ряда (9.1).

Если, рассматривая пример 3, вместо точного уравнения $\sin y - \cos y = 0$, возьмем

$$-1 + y + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!} - \frac{y^4}{4!} + \frac{y^5}{5!} + \frac{y^6}{6!} = 0,$$

то получим $y = -2{,}34$ и приближенное значение наименьшей по модулю особой точки

$$x = 2 + y - \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} = -0{,}5.$$

Такой способ определения области сходимости рядов, представляющих неявные функции, основанный на теоремах 9, 10, 11, 12, во многих случаях весьма удобен.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Хинчин. Краткий курс математического анализа. М.—Л., ГИТТЛ, 1953.
2. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I. Гостехиздат, 1947.
3. Э. Гурса. Курс математического анализа. М.—Л., ГИТТЛ, 1936.
4. Б. А. Фукс и В. И. Левин. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. ГИТТЛ, 1951.

Рекомендуем читателям новые работы, выходящие в свет в 1956 г.

5. В. И. Зубов. К вопросу существования и приближенного представления неявных функций. Вестник ЛГУ, № 19, вып. 4, серия математики, механики и астрономии.
6. С. М. Лозинский. Об обратных функциях и решении алгебраических уравнений. ДАН СССР.

Еругин Николай Павлович
Неявные функции

Редактор *Е. В. Щемелева*
Техн. редактор *А. В. Иванова*
Корректоры *Г. А. Полиевская*
и *З. И. Динабург*

М-07826. Подп. к печ. 9 VI 1956 г.
Уч.-изд. л. 2,95. Печ. л. 3,08.
Бум. л. 1,88. Тираж 10000 экз.
Формат бум. $84 \times 108^1/_{32}$.
Заказ 892.

Типография ЛОЛГУ.
Ленинград,
Университетская наб., 7/9.

[redacted]

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
18	15 сверху	$+\psi_n(v, w)\big)\,\psi(u, v, w)=0,$	$+\psi(v, w)\big)\,\Psi(u, v, w)=0,$
27	4 снизу	$z\,\varphi(x)$	$z=\varphi(x)$
39	4 »	уравнения (6.57)	уравнения (6.56)
43	5 »	$+\dfrac{\partial P_{m+1}(a, b, 1)}{\partial a} z^2$	$+\dfrac{\partial P_{m+1}(a, b, 1)}{\partial a} z$
43	4 »	$+\dfrac{\partial P_{m+1}(a, b, 1)}{\partial b}$	$+\dfrac{\partial P_{m+1}(a, b, 1)}{\partial b} z$

Зак. 892.